

Universidad de Sevilla  
Doble Grado en Física e Ingeniería de Materiales  
Trabajo Fin de Grado



**Interacción débil en procesos de dispersión  
neutrino-leptón**

**Miguel Prats Garrido**

Tutores:

Guillermo Daniel Megías Vázquez

Juan Antonio Caballero Carretero

Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear

Facultad de Física

# Resumen

Este trabajo es un estudio teórico de los procesos de dispersión entre neutrinos y leptones cargados. Tras realizar una breve revisión de las propiedades del neutrino, se introduce el formalismo de la teoría cuántica de campos para la interacción electrodébil y se analizan procesos de dispersión mediados por corrientes cargadas y neutras. Estos procesos son de relevancia actual debido al desarrollo de experimentos que intentan medir con precisión las oscilaciones de los neutrinos. Experimentos actuales como MINERvA, o futuros como DUNE, utilizan el conocimiento preciso de las secciones eficaces de dispersión entre neutrinos y leptones para reducir la incertidumbre en el flujo de neutrinos experimental.

# Abstract

This work is a theoretical study of the scattering processes between neutrinos and charged leptons. After a brief review of the neutrino properties, the formalism of quantum field theory for electroweak interaction is introduced, and scattering processes mediated by charged and neutral currents are analyzed. These processes are currently relevant due to the development of experiments that attempt to measure neutrino oscillations precisely. Current experiments like MINERvA, or future ones like DUNE, use precise knowledge of the scattering cross-sections between neutrinos and leptons to reduce uncertainty in the experimental neutrino flux.

# Índice general

<b>1. Motivación</b>	<b>1</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>2</b>
2.1. La hipótesis de Pauli . . . . .	2
2.2. Descubrimiento experimental del neutrino . . . . .	3
2.3. Propiedades del neutrino . . . . .	5
2.3.1. Sabor y helicidad . . . . .	5
2.3.2. Las oscilaciones de neutrinos y su masa . . . . .	7
2.4. La teoría electrodébil . . . . .	8
2.4.1. Corrientes cargadas (CC) y corrientes neutras (NC) . . . . .	10
2.4.2. Interacción elástica neutrino - leptón . . . . .	12
2.5. Interés de la interacción neutrino-leptón . . . . .	16
<b>3. Dispersión elástica neutrino - leptón</b>	<b>19</b>
3.1. Definición de la matriz de interacción . . . . .	20
3.2. Sección eficaz diferencial . . . . .	21
3.3. Descripción cinemática del proceso . . . . .	22
3.4. Cálculo de la matriz de interacción . . . . .	23
3.5. Cálculo de la sección eficaz diferencial . . . . .	25
3.6. Desarrollo de la amplitud de transición invariante . . . . .	26
3.6.1. Amplitud de transición para procesos de corrientes cargadas . . . . .	28
3.6.2. Amplitud de transición para la colisión antineutrino - leptón . . . . .	29
3.6.3. Amplitud de transición total para procesos que pueden darse por corrientes cargadas y neutras . . . . .	30
3.7. Sección eficaz diferencial y total para procesos NC . . . . .	30
3.7.1. Colisión antineutrino - leptón . . . . .	32
3.8. Sección eficaz diferencial y total para procesos CC . . . . .	32

<b>4. Análisis de los resultados</b>	<b>34</b>
4.1. Procesos mediados por corrientes neutras . . . . .	34
4.2. Procesos mediados por corrientes cargadas . . . . .	38
4.2.1. Comparación entre secciones eficaces CC y NC . . . . .	39
4.2.2. Secciones eficaces CC para dispersión de neutrinos y antineutrinos .	40
4.3. Procesos NC + CC . . . . .	43
4.3.1. Análisis del término de interferencia . . . . .	43
4.3.2. Diferencias entre colisiones de neutrinos y antineutrinos . . . . .	45
<b>5. Conclusiones</b>	<b>46</b>
<b>Anexos</b>	<b>48</b>
<b>A. La ecuación de Dirac</b>	<b>48</b>
A.1. Soluciones libres de la ecuación de Dirac . . . . .	49
<b>B. Cálculos de la sección eficaz</b>	<b>51</b>
B.1. Desarrollo de la delta de Dirac al cuadrado . . . . .	51
B.2. Integración de la sección eficaz diferencial respecto a los momentos . . . . .	51
B.3. Términos de la amplitud de transición al cuadrado . . . . .	54
B.4. Evaluación de los sumatorios para todas las polarizaciones de espín . . . . .	55
<b>C. Cálculo de la amplitud de transición invariante</b>	<b>57</b>
C.1. Teoremas de trazas . . . . .	57
C.2. Cálculo de la contracción de los tensores leptónicos . . . . .	58
<b>D. Cociente de secciones eficaces</b>	<b>64</b>

# Capítulo 1

## Motivación

La comprensión de la interacción débil ha estado históricamente muy unida al estudio del neutrino, una partícula elemental cuyo descubrimiento ha enriquecido enormemente el desarrollo de la física moderna. El neutrino ha sido considerado durante muchos años como una partícula de masa nula, pero las investigaciones más recientes indican que los neutrinos sí tienen masa, en contra de lo establecido en el Modelo Estándar. Esto ha sido descubierto a partir del fenómeno de las oscilaciones de los neutrinos, que solo pueden explicarse si los neutrinos tienen masa.

Las oscilaciones de neutrinos fueron estudiadas y descubiertas en experimentos como Super-Kamiokande o SNO, que detectaban neutrinos solares y atmosféricos. Sin embargo, los nuevos experimentos, algunos en marcha y otros en fase de diseño, buscan principalmente estudiar las oscilaciones utilizando haces de neutrinos producidos en aceleradores. El conocimiento teórico preciso de los procesos de dispersión entre neutrinos y leptones cargados es utilizado por estos experimentos para conocer con precisión el flujo experimental de neutrinos que producen estos aceleradores. Dado que el análisis de las oscilaciones se realiza a través del estudio de la variación del flujo de neutrinos de un sabor leptónico concreto, el conocimiento preciso del flujo inicial producido en el acelerador es indispensable.

En este trabajo dedicamos el capítulo 2 a una introducción donde se revisan las propiedades del neutrino y se describe el formalismo de la teoría electrodébil. En el capítulo 3 se calculan las secciones eficaces de interacción para procesos de dispersión entre neutrinos y leptones cargados. Finalmente, en el capítulo 4 analizamos las expresiones teóricas obtenidas y comparamos sus predicciones con resultados experimentales relevantes.

# Capítulo 2

## Introducción

### 2.1. La hipótesis de Pauli

Tras la publicación de J. Chadwick en 1914 de nuevas medidas precisas del espectro de energía del decaimiento  $\beta$  [1], se produjo un gran desconcierto en la comunidad científica provocado por los problemas que presentaba la interpretación teórica del continuo de energía (ver Figura 2.1) con la que salían emitidos los electrones. En aquellos momentos se pensaba que el decaimiento  $\beta$  era un proceso por el que un núcleo decaía en otro más ligero con la emisión de un electrón ( $A \rightarrow B + e^-$ ), lo que significaba que la energía de las partículas finales estaba completamente definida a partir de las tres masas involucradas. Tras la confirmación de que los electrones emitidos durante el proceso primario del decaimiento eran los responsables del continuo de energía que aparecía en el espectro, dos propuestas distintas emergieron como soluciones al problema [2]. Niels Bohr sostenía

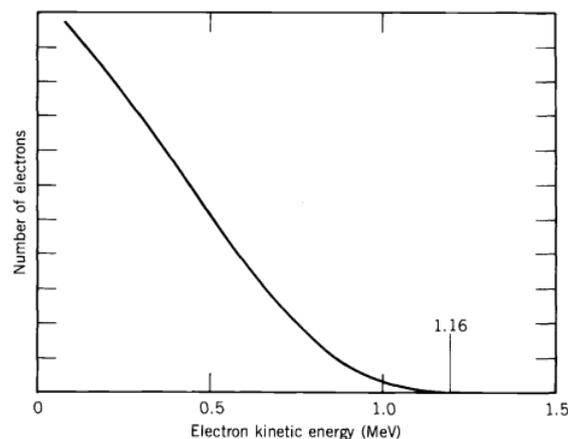


Figura 2.1: Espectro continuo del decaimiento beta del  $^{210}\text{Bi}$  [3].

que la conservación de la energía no debía verificarse estrictamente en este proceso, y estaba dispuesto a renunciar a este principio esencial en el desarrollo de la física hasta ese momento. Wolfgang Pauli, en cambio, propuso la existencia de una nueva partícula neutra que era emitida en el decaimiento junto al electrón [2], permitiendo la verificación del principio de conservación de la energía y, además, manteniendo un acuerdo con los nuevos descubrimientos relacionados con el espín y la conservación del momento angular.

La introducción de esta nueva partícula, de masa muy pequeña (durante muchos años se pensó que era nula) y de espín  $\frac{1}{2}$  (en el sistema de unidades naturales, i.e.,  $\hbar \equiv 1$ ), como producto del decaimiento  $\beta$ , permitió la explicación del continuo de energía al comprender que son tres cuerpos los que resultan del decaimiento. Con esta nueva descripción del proceso,  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ , la energía puede repartirse entre el electrón y el recién introducido neutrino (antineutrino hoy en día, aunque se desconocía esta diferencia en la época de la hipótesis de Pauli), dando lugar a diferentes energías para los electrones emitidos.

## 2.2. Descubrimiento experimental del neutrino

Enrico Fermi fue uno de los principales físicos que apoyó la hipótesis de Pauli (de hecho, fue él quien acabó poniéndole nombre a la partícula). En 1934 [4], Fermi desarrolló una teoría para describir el proceso de decaimiento  $\beta$ . Esta sería la primera teoría de la interacción débil, que es la responsable de que ocurra este proceso. En la teoría de Fermi, la interacción entre los cuatro fermiones era puntual y estaba descrita por un lagrangiano del tipo:

$$\mathcal{L} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\phi}_p \gamma^\mu \phi_n] [\bar{\phi}_e \gamma^\mu \phi_\nu]. \quad (2.1)$$

El lagrangiano descrito (2.1) involucra a las corrientes  $\bar{\phi}_p \gamma^\mu \phi_n$  y  $\bar{\phi}_e \gamma^\mu \phi_\nu$ , donde aparecen las funciones de onda de las partículas interaccionantes  $\bar{\phi}_p$ ,  $\phi_n$ ,  $\bar{\phi}_e$  y  $\phi_\nu$ . La expresión previa 2.1 no tenía en consideración la posible estructura interna del protón y del neutrón, no conocidas en esa época. La teoría debía ser relativista, dado que trataba con partículas de masa despreciable (el neutrino), o con masa pequeña frente a la energía cinética (electrones). Esto implicaba que las funciones de onda debían ser soluciones de la ecuación de Dirac (ver el apéndice A). El acoplamiento que eligió Fermi para este lagrangiano de interacción fue de tipo “vector” (aquel que acopla las funciones de onda a través de un término  $\gamma^\mu$  [4]). La constante  $G_F$  es conocida como constante de Fermi, y da una medida de la intensidad de la interacción débil. Actualmente, su valor medido a través del

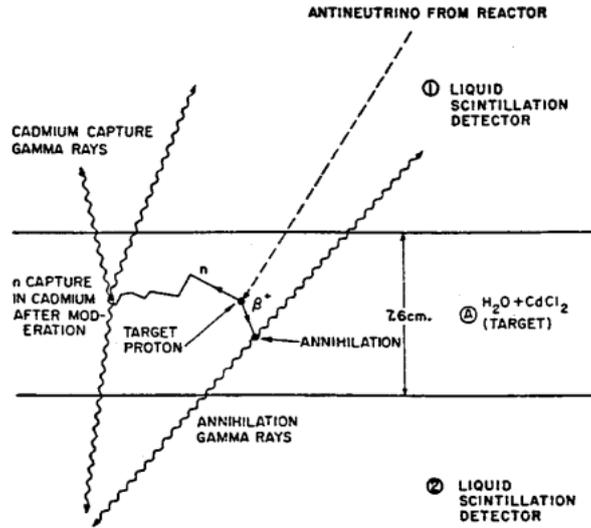


Figura 2.2: Diagrama del experimento Savannah River, en el que Cowan y Reines detectaron el antineutrino por primera vez en la historia. El antineutrino producido en el reactor de fisión interactúa con un protón generando un neutrón y un positrón. El positrón se aniquila con un electrón generando dos fotones que se detectan en el centelleador. El neutrón es capturado por un núcleo de cadmio y emite fotones, detectados también en el centelleador [7].

decaimiento del muon, resulta [5]:

$$G_F = 1,1663788(6) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}. \quad (2.2)$$

La teoría de Fermi fue bastante exitosa y convenció a gran parte de la comunidad científica de la existencia del neutrino, pero no fue hasta los años 50 cuando se consiguió la primera evidencia experimental de su existencia. Los físicos H. Bethe y R. Peierls habían predicho la intensidad de las interacciones y habían enfatizado la posibilidad de que jamás se observara la interacción débil [6]. Sin embargo, F. Reines y C.L. Cowan, pusieron todos sus esfuerzos en intentar diseñar un experimento donde se pudiera observar el decaimiento  $\beta$  inverso, de forma que esto pusiera en evidencia la existencia del neutrino.

La reacción que Cowan y Reines pretendían observar era  $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$  (téngase en cuenta que en aquel momento no se conocía que existiese diferencia entre neutrino y antineutrino o entre neutrinos de distintos sabores). En un inicio, la preocupación de Reines, tal y como le expresó a Fermi en Los Alamos (1951), era el desconocimiento sobre cómo fabricar un detector del tamaño que era necesario para llevar a cabo dicho experimento [7]. Un detector de gran tamaño en aquella época era aproximadamente del volumen de un litro. En el experimento Savannah River, como fue denominado, los

neutrinos iban a ser generados en el decaimiento beta de fragmentos de fisión en una reacción nuclear. El detector que utilizaron finalmente fue un centelleador líquido. Se esperaba que los neutrinos, al atravesar el centelleador, interaccionaran con los protones, convirtiéndose estos en neutrones y emitiendo un positrón (ver Figura 2.2) [8]. El positrón emitido se aniquilaría con un electrón, emitiendo dos fotones, mientras que el neutrón, al ser capturado por un núcleo de cadmio, también daría lugar a la emisión de fotones. El lapso de tiempo entre los dos procesos de emisión de fotones podría ser medido con gran precisión. El experimento fue todo un éxito, siendo 1956 el año a partir del cual se tuvo evidencia experimental de la existencia del neutrino.

Tras los resultados positivos de Cowan y Reines, Davis y Harmer plantearon la cuestión de si el neutrino y el antineutrino eran la misma partícula. Los resultados experimentales del experimento Savannah River habían verificado la existencia de la reacción:



Esto significaba que la reacción  $\nu_e + n \rightarrow e^- + p$  también era posible. La pregunta que se hizo Davis fue: ¿puede provocarse esta reacción utilizando antineutrinos [9]? Es decir, ¿es posible  $\bar{\nu} + n \rightarrow e^- + p$ ? Davis descubrió que esta reacción no ocurría experimentalmente, y concluyó que el neutrino y el antineutrino eran partículas distintas. A día de hoy, las diferencias entre neutrino y antineutrino no están completamente definidas y se sigue especulando si son distintos (partículas de Dirac) o si son la misma partícula (partículas de Majorana) [9].

## 2.3. Propiedades del neutrino

### 2.3.1. Sabor y helicidad

Entre los años 50 y 60 se introdujeron dos conceptos muy relevantes para la descripción de los neutrinos, para entender los procesos de interacción mediados por la interacción débil y para el desarrollo posterior del modelo estándar. Estos fueron la atribución de distintos sabores a los neutrinos en función de a qué familia leptónica pertenecen, y la introducción de una nueva ley de conservación: la conservación del número leptónico. Esta nueva ley atribuye a cada leptón un número  $L = \pm 1$ , dependiendo de si consideramos la partícula (+1) o la antipartícula (-1), que debe conservarse estrictamente a la hora de producirse una reacción. Además, esta ley de conservación se verifica estrictamente

para cada familia de leptones ( $e$ ,  $\mu$ ,  $\tau$ ), teniendo cada una de ellas sus correspondientes números leptónicos ( $L_e$ ,  $L_\mu$ ,  $L_\tau$ ) (ver Tabla 2.1). En la introducción de los distintos sabores de neutrinos fue muy relevante la aportación de Bruno Pontecorvo, que postuló en 1959 la existencia de distintos neutrinos asociados al electrón y al muon [10]. Estas ideas provenían de la existencia de evidencia experimental que demostraba que ciertas reacciones estaban prohibidas en la naturaleza, por ejemplo, un muon decayendo en un electrón y un fotón  $\mu^- \rightarrow e^- + \gamma$ . Sin embargo, no era posible entender el hecho de que otros productos del decaimiento, como  $\mu^- \rightarrow e^- + \nu + \bar{\nu}$ , sí que fueran posibles cuando, aparentemente, no había ninguna ley de conservación conocida que diferenciara a estas reacciones. La introducción de la conservación del número leptónico y los distintos tipos de neutrinos permitía comprender estos procesos:

$$\begin{array}{rcll}
 & \mu^- & \longrightarrow & e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \\
 L_\mu & + 1 & \longrightarrow & 0 \quad + 1 \quad 0 \\
 L_e & 0 & \longrightarrow & +1 \quad 0 \quad -1
 \end{array} \tag{2.4}$$

Como vemos en la ecuación 2.4, los números  $L_e$  y  $L_\mu$  se conservan en ambos canales de la reacción. La evidencia experimental definitiva fue proporcionada por el experimento de Lederman, Schwartz y Steinberg [11]. En este experimento se detectó el proceso  $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n$ , pero ningún caso de  $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow e^+ + n$ . Si solo hubiera un tipo de neutrino, la segunda reacción debería ser igual de probable que la primera [6].

La helicidad es otra de las propiedades características del neutrino. Este número cuántico se define a partir de la proyección del espín de la partícula en la dirección de su movimiento. Si consideramos un estado definido por la ecuación de Dirac A.1, la helicidad es uno de los números cuánticos con los que podemos etiquetar el estado cuántico

Leptón	$L_e$	$L_\mu$	$L_\tau$
$e^-, \nu_e$	1	0	0
$\mu^-, \nu_\mu$	0	1	0
$\tau^-, \nu_\tau$	0	0	1
$e^+, \bar{\nu}_e$	-1	0	0
$\mu^+, \bar{\nu}_\mu$	0	-1	0
$\tau^+, \bar{\nu}_\tau$	0	0	-1

Tabla 2.1: Números leptónicos.

de la partícula libre. Durante mucho tiempo, hasta el descubrimiento de las oscilaciones, se consideró que los neutrinos eran partículas de masa nula. Esto implicaba que en los procesos de interacción débil solo participaban neutrinos(antineutrinos) con helicidad negativa(positiva).

Además de la helicidad se puede definir la quiralidad, que es una propiedad específica de las partículas. Para partículas de masa cero, la helicidad y la quiralidad coinciden. Esta propiedad es fundamental en el estudio de los neutrinos y la interacción débil, ya que si realizamos una transformación de paridad (inversión espacial) y el (anti)neutrino tiene siempre helicidad (positiva)negativa, el sistema no será invariante ante esta transformación. Esto da como resultado una violación de la paridad en los procesos mediados por la interacción débil.

### 2.3.2. Las oscilaciones de neutrinos y su masa

Si consideramos el Modelo Estándar de la física de partículas, basado, para la interacción electrodébil, en el modelo de Glashow-Weinberg-Salam, los neutrinos son partículas con masa nula. Sin embargo, las evidencias experimentales junto a las conclusiones teóricas que han salido a la luz en las últimas décadas indican que esto no es cierto.

El origen de este problema se encontró al estudiar el flujo de neutrinos proveniente del Sol (experimento Homestake [12]) y aquellos originados por la radiación cósmica (a través de la cascada de partículas que se producen en la atmósfera y el posterior decaimiento de leptones cargados). Los resultados experimentales, verificados a día de hoy en experimentos muy relevantes como Kamiokande, Super-Kamiokande o SNO [6], concuerdan y concluyen que los neutrinos pertenecientes a una familia leptónica, neutrinos con un sabor determinado, se transforman, en función de la distancia recorrida y la energía, en neutrinos de un sabor leptónico distinto. Esto fue propuesto por Bruno Pontecorvo en 1968, muchos años antes de que estos experimentos fueran realizados [13].

Según el estado actual de la investigación, el hecho de que los neutrinos puedan transformarse de un sabor leptónico a otro implica que tienen masa. En concreto, los estados de sabor no equivalen a estados de masa; un estado correspondiente a neutrino electrónico se describe como una combinación lineal de estados de masa. Los estados de sabor y de

masa se relacionan a través de la matriz PMNS (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata) [9]:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu1} & U_{\mu1} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Los coeficientes de la matriz están relacionados con las diferencias de masas al cuadrado de los estados de masa ( $\Delta m_{ij}^2$ ), así como con los ángulos de mezcla  $\theta_{ij}$ , que relacionan los estados de masas con los de sabor. También dan información sobre la posible violación CP (a través del parámetro  $\delta_{CP}$ ), que podría indicar diferencias entre la oscilación de neutrinos y la de antineutrinos.

## 2.4. La teoría electrodébil

En apartados previos hemos introducido la teoría de Fermi para el decaimiento  $\beta$ , que pretendía explicar la interacción entre los cuatro fermiones involucrados en el proceso. Esta teoría sufrió, entre los años 30 y 60, una serie de modificaciones y mejoras que fueron adaptándola a los descubrimientos experimentales y a los nuevos modelos teóricos de cada época. Este proceso culminó en la propuesta de unificación de la teoría que describe la interacción electromagnética y la interacción débil, en 1967, por S. Weinberg y A. Salam [14],[15].

Cuando Fermi construyó su teoría, la elección del covariante bilineal ( $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ ) que iba a estar incluido en las corrientes débiles tuvo como fundamento el ejemplo ya conocido de la interacción electromagnética. Es por esto por lo que se eligió un acoplamiento de tipo vector ( $\Gamma = \gamma^\mu$ ). La primera modificación del lagrangiano de Fermi (ecuación 2.1) fue introducida en 1936 por G. Gamow y E. Teller, que consideraron la posibilidad de corrientes de tipo vector axial ( $\gamma^\mu\gamma^5$ ), sin que se pudiera violar la paridad en la interacción (algo inconcebible en aquella época) [6]. Esto tuvo que ser descartado cuando se confirmó la violación de la simetría de paridad en procesos de interacción débil, propuesta de T.D. Lee y C.N. Yang, verificada en el experimento de Wu.

Tras este descubrimiento, R.P. Feynman y M. Gell-Mann, entre otros, propusieron la teoría V - A en 1958. Con teoría V - A hacemos referencia a un lagrangiano que incluye un término del tipo  $\gamma^\mu(1 - \gamma^5)$ . Si el acoplamiento fuera únicamente a través de  $\gamma^\mu$ , tendríamos un acoplamiento de tipo vector, como en la electrodinámica cuántica. Sin embargo, la adición de un término  $\gamma^\mu\gamma^5$  significa que se produce un acoplamiento *vector*

“menos” vector *axial* ( $V - A$ ) entre los campos. La consecuencia inmediata de incluir este término es que, en la interacción débil, la violación de la paridad es posible, y “máxima”. Esta nueva propuesta implica que los neutrinos son partículas con helicidad negativa, y los antineutrinos con helicidad positiva, lo que hace surgir el acoplamiento  $V - A$  de forma natural [6]. El lagrangiano de interacción del decaimiento  $\beta$  en la teoría  $V - A$  tiene la siguiente forma (si suponemos que protones y neutrones no tienen estructura interna):

$$\mathcal{L}_{V-A} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\phi}_p \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \phi_n] [\bar{\phi}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \phi_\nu]. \quad (2.6)$$

Fue en 1967 cuando el estudio de la interacción débil sufrió uno de los impulsos más notables de la historia, tras la propuesta de S. Weinberg y A. Salam de lo que después se llamó el Modelo Estándar de Glashow-Weinberg-Salam. Esta propuesta unificadora, pretendiendo describir con un mismo formalismo la interacción electromagnética y la interacción débil, realizó avances teóricos muy relevantes y predicciones que luego pudieron verificarse experimentalmente.

El nuevo lagrangiano de interacción (ecuación 2.7) describe los procesos electromagnéticos además de aquellos mediados por la interacción débil, y consta, por tanto, de tres términos. Dos de ellos asociados a las corrientes débiles (CC y NC) y otro asociado a la interacción electromagnética.

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_I^{\text{CC}} + \mathcal{L}_I^{\text{NC}} = -\frac{g}{2\sqrt{2}}(j_W^\mu W_\mu + j_W^{\mu\dagger} W_\mu^\dagger) - \frac{g}{2\cos\theta_w} j_Z^\mu Z_\mu - e j_\gamma^\mu A_\mu. \quad (2.7)$$

En este trabajo presentamos un estudio detallado de la interacción entre neutrinos y otros leptones, en la que no interviene la interacción electromagnética, ya que los neutrinos no pueden acoplarse a ella. El lagrangiano que utilizamos para nuestro estudio es, pues, el de la interacción débil, prescindiendo del término asociado a la interacción electromagnética. Podemos escribirlo (2.8) como la suma de los lagrangianos de interacción a través de corrientes cargadas y corrientes neutras débiles [6]:

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_I^{\text{CC}} + \mathcal{L}_I^Z + \cancel{\mathcal{L}_I^\gamma} = -\frac{g}{2\sqrt{2}}(j_W^\mu W_\mu + j_W^{\mu\dagger} W_\mu^\dagger) - \frac{g}{2\cos\theta_w} j_Z^\mu Z_\mu. \quad (2.8)$$

En nuestro caso, estas corrientes son puramente leptónicas, ya que estudiaremos procesos que no involucran quarks. El término  $W_\mu$  representa un campo que aniquila bosones  $W^+$  y crea bosones  $W^-$  y  $Z_\mu$  un campo que aniquila o crea bosones neutros  $Z^0$ . Un

detalle importante es que los propagadores de la interacción  $W^\pm$ ,  $Z^0$  no modifican el sabor leptónico ( $e$ ,  $\mu$ ,  $\tau$ ) cuando los campos se acoplan a ellos. En cambio, sí que modifican el sabor entre quarks [16]. Esto lleva, inmediatamente, a la conservación del número leptónico para cada sabor.

El acoplamiento de los campos leptónicos a los bosones propagadores de la interacción es idéntico para todos los leptones, esto se conoce como “universalidad leptónica” [17]. En cambio, los quarks no se acoplan de la misma forma a los bosones  $W^\pm$  y  $Z^0$ , los resultados indican que este acoplamiento depende del sabor de los quarks involucrados.

### 2.4.1. Corrientes cargadas (CC) y corrientes neutras (NC)

Antes de la propuesta de unificación de las teorías electromagnética y débil, la interacción débil solo contaba con la presencia de corrientes cargadas. Como analizaremos en detalle en esta sección, en la interacción débil a través de corrientes cargadas (CC) los campos leptónicos se acoplan de forma que la carga del leptón se ve modificada en una unidad a través de la interacción. El modelo de Weinberg y Salam predecía la existencia de otro tipo de corrientes, las corrientes neutras (NC), que describían el acoplamiento entre campos leptónicos de la misma carga. Además, predecía la existencia de un nuevo bosón propagador de la interacción débil, el bosón  $Z$ . La predicción de Weinberg y Salam fue confirmada en 1973 por el experimento Gargamelle [18], que pudo observar el siguiente proceso de interacción débil mediado por corrientes neutras:

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-.$$

Como ya hemos comentado, en el análisis de la interacción débil se distinguen dos tipos de corrientes, en función de qué campos leptónicos acoplan cada una de ellas. Esta es una diferencia fundamental con la interacción electromagnética, que solo permite acoplamiento entre campos que involucran partículas de la misma carga. En función de cuál es la corriente mediadora de la interacción débil, el propagador es un bosón  $W$  ( $W^+$  y  $W^-$ ) o el bosón  $Z^0$ . Esto viene representado en la ecuación 2.8.

Las corrientes cargadas consisten en términos que acoplan campos asociados a leptones cargados con aquellos asociados a neutrinos de su misma familia (manteniendo la conservación del número leptónico para cada sabor). La corriente cargada total se introduce como la suma de las corrientes para todas las jerarquías de leptones conocidas ( $e$ ,  $\mu$ ,

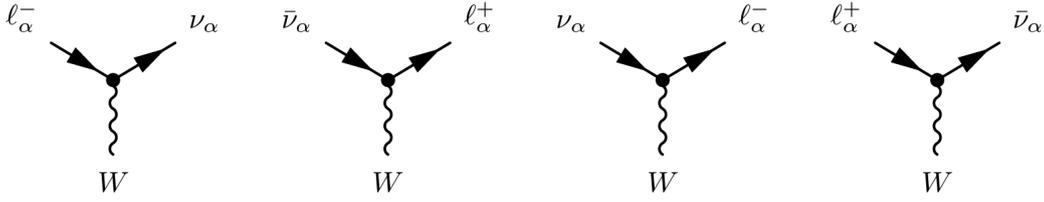


Figura 2.3: Acoplamiento generados por los términos del  $\mathcal{L}_1^{\text{CC}}$  (2.10). Los dos primeros diagramas están generados por  $j_W^\mu W_\mu$  y los otros dos por  $j_W^{\mu\dagger} W_\mu^\dagger$ . Figura tomada de [6].

$\tau$ ). La expresión general viene dada por la ecuación 2.9:

$$j_W^\mu = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\Psi}_{\nu_\alpha} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \Psi_{l_\alpha}. \quad (2.9)$$

Podemos inferir, a partir de la forma de la expresión anterior, que la interacción a través de corrientes cargadas excluye la posibilidad de que interaccionen leptones sin transformarse en otros distintos de su misma familia leptónica, viendo la carga siempre incrementada o disminuida en una unidad. Las corrientes cargadas aparecen en el lagrangiano de interacción débil (2.8) en los siguientes términos:

$$-\frac{g}{2\sqrt{2}} j_W^\mu W_\mu, \quad -\frac{g}{2\sqrt{2}} j_W^{\mu\dagger} W_\mu^\dagger. \quad (2.10)$$

Estos términos pueden producir los distintos acoplamiento entre campos leptónicos y los bosones  $W$  que están representados en la Figura 2.3.

Las corrientes neutras (ecuación 2.11) describen procesos que estarían prohibidos en un formalismo que solo incluyera a las corrientes cargadas. En estos procesos, las partículas interaccionantes no modifican su carga ni se transforman en otras de su misma familia leptónica, por lo que no pueden venir descritos por corrientes del tipo 2.9. Las corrientes neutras vendrán descritas por la expresión:

$$j_Z^\mu = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \left( \bar{\Psi}_{\nu_\alpha} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma^5) \Psi_{\nu_\alpha} + \bar{\Psi}_{l_\alpha} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma^5) \Psi_{l_\alpha} \right). \quad (2.11)$$

En el Modelo Estándar de Glashow-Weinberg-Salam los coeficientes  $g_A^f$  y  $g_V^f$  dependen del fermión ( $f$ ) que estemos considerando. Concretamente, de la tercera componente del

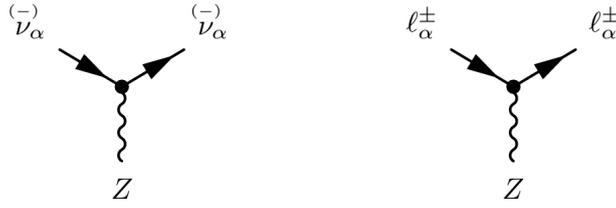


Figura 2.4: Acoplamiento generados por los términos del lagrangiano NC (ecuación 2.13) [6].

isospín ( $I_3^f$ ), de su carga ( $q_f$ ) y del ángulo de Weinberg ( $\theta_w$ ) [6]:

$$g_V^f = I_3^f - 2q_f \text{sen}^2(\theta_w), \quad g_A^f = I_3^f. \quad (2.12)$$

La expresión 2.11 también mantiene la conservación del número leptónico para cada sabor de forma independiente, como ya habíamos visto en las corrientes cargadas. La conservación del número leptónico se asocia, a través del teorema de Noether, con la invariancia gauge del lagrangiano [6]. El término del lagrangiano responsable de la interacción débil mediada por corrientes neutras es:

$$- \frac{g}{2\text{cos}\theta_w} j_Z^\mu Z_\mu. \quad (2.13)$$

Este término produce acoplamiento como los que se presentan en la Figura 2.4. El ángulo de Weinberg conecta las constantes de acoplamiento débil y electromagnética de la siguiente manera [6]:

$$g_w = \frac{g_e}{\text{sen}\theta_w}. \quad (2.14)$$

### 2.4.2. Interacción elástica neutrino - leptón

La interacción del neutrino con la materia involucra procesos diversos cuya descripción es muy compleja. En esta sección centramos nuestra atención en el proceso de interacción elástica neutrino-leptón. La restricción al caso elástico y considerar partículas sin estructura simplifica considerablemente la descripción de la reacción. El análisis se puede realizar, en muy buena aproximación, utilizando el orden más bajo de teoría de perturbaciones, donde los leptones son tratados como partículas libres.

En el orden más bajo de teoría de perturbaciones, representamos gráficamente los procesos a través de los respectivos diagramas de Feynman en primer orden. En general,

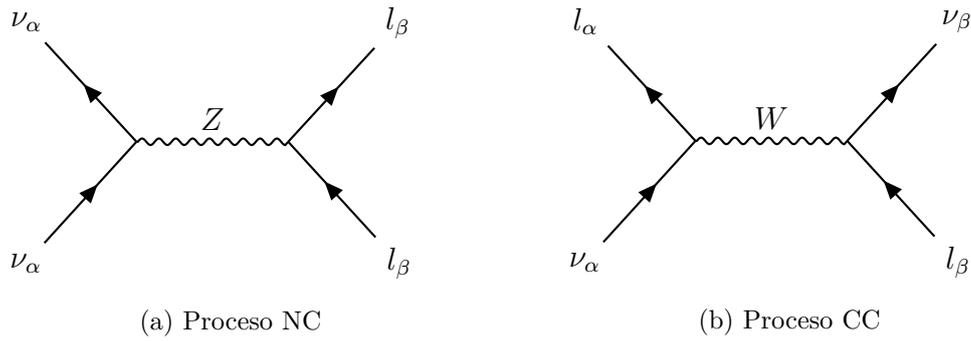


Figura 2.5: (a) Diagrama de Feynman de primer orden para el proceso de dispersión  $\nu_\alpha + l_\beta \rightarrow \nu_\alpha + l_\beta$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  pueden ser los sabores  $e, \mu, \tau$ . Si  $\alpha \neq \beta$  el proceso es puramente NC. Si  $\alpha = \beta$  el diagrama representa la contribución NC de un proceso que también puede darse por CC. (b) Diagrama de Feynman de primer orden para el proceso de dispersión  $\nu_\alpha + l_\beta \rightarrow \nu_\beta + l_\alpha$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  pueden ser los sabores  $e, \mu, \tau$ . Si el proceso es puramente CC,  $\alpha \neq \beta$ . En caso de que también pueda ocurrir por corrientes neutras  $\alpha = \beta$ .

podemos distinguir entre procesos de interacción que solo pueden producirse mediados por corrientes neutras (NC), solo por corrientes cargadas (CC), y aquellos que pueden producirse mediados por ambas (CC + NC).

Los procesos de interacción neutrino-leptón que solo pueden ser mediados por corrientes neutras están descritos por reacciones del tipo:

$$\begin{aligned} \nu_\alpha + l_\beta &\longrightarrow \nu_\alpha + l_\beta, \\ \bar{\nu}_\alpha + l_\beta &\longrightarrow \bar{\nu}_\alpha + l_\beta. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Donde  $\alpha$  y  $\beta$  pueden ser  $e, \mu, \tau$ , pero con  $\alpha \neq \beta$ . Estos procesos se representan en diagramas de Feynman como el de la Figura 2.5a. La descripción de estos procesos vendrá dada por un lagrangiano como el de la ecuación 2.8, prescindiendo del término que involucra a las corrientes cargadas. Los procesos que solo pueden ser mediados por el bosón  $W$  se describen a través de diagramas de Feynman como los de la Figura 2.5b, con  $\alpha \neq \beta$ . Estos procesos involucran la transformación de los leptones incidentes en otros de la misma familia, de forma que su carga se vea incrementada o disminuida en una unidad. En cada vértice debe conservarse el número leptónico. La descripción de estos procesos vendrá dada por un lagrangiano como el de la ecuación 2.8, prescindiendo del término que involucra a

las corrientes neutras. A continuación, se muestran algunos procesos puramente CC:

$$\begin{aligned}\nu_\mu + e^- &\longrightarrow \nu_e + \mu^-, \\ \nu_e + \mu^- &\longrightarrow \nu_\mu + e^-.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Existen, además, procesos que pueden producirse a través de corrientes cargadas y corrientes neutras. Uno de los más relevantes, que trataremos con extensión en este trabajo, es la colisión entre un neutrino electrónico y un electrón:

$$\nu_e + e^- \longrightarrow \nu_e + e^-.\tag{2.17}$$

En general, cualquier proceso que involucre una colisión entre un leptón y un neutrino de su misma familia leptónica podrá producirse a través de corrientes cargadas o neutras. Estos procesos vendrán descritos por los dos diagramas que aparecen en la Figura 2.5, teniendo en cuenta que, en la notación del diagrama,  $\alpha = \beta$ . El lagrangiano de interacción incluye las dos contribuciones (2.8). En este trabajo, analizaremos los resultados de experimentos que involucren energías mucho menores que las masas de los bosones  $W$  y  $Z$ , es decir, energías mucho menores que 100 GeV. En estos casos, la expresión de los propagadores de la interacción se simplifica y se pueden construir lagrangianos efectivos que describen las interacciones neutrino-leptón en el régimen elástico a bajas energías. Vamos a analizar esto a continuación. Por un lado, los propagadores de la interacción vienen descritos, en general, por las siguientes expresiones [6]:

$$\begin{aligned}G_{\mu\nu}^{(W)}(X - X') &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{Q_\mu Q_\nu}{M_W^2}}{Q^2 - M_W^2 + i\epsilon} e^{-iQ(X-X')}, \\ G_{\mu\nu}^{(Z)}(X - X') &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{Q_\mu Q_\nu}{M_Z^2}}{Q^2 - M_Z^2 + i\epsilon} e^{-iQ(X-X')}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{G_{\mu\nu}(Q)}$

Estas expresiones dependen del propagador en el espacio de momentos, que se ha denotado como  $G_{\mu\nu}(Q)$ . Si trabajamos a energías mucho menores que las masas de los bosones  $W$  y  $Z$ , esto es,  $|Q|^2 \ll M_W^2, M_Z^2$ , las expresiones de los propagadores en el espacio de momentos se reducen a:

$$G_{\mu\nu}^{(W)}(Q) \approx i \frac{g_{\mu\nu}}{M_W^2}, \quad G_{\mu\nu}^{(Z)}(Q) \approx i \frac{g_{\mu\nu}}{M_Z^2}.\tag{2.19}$$

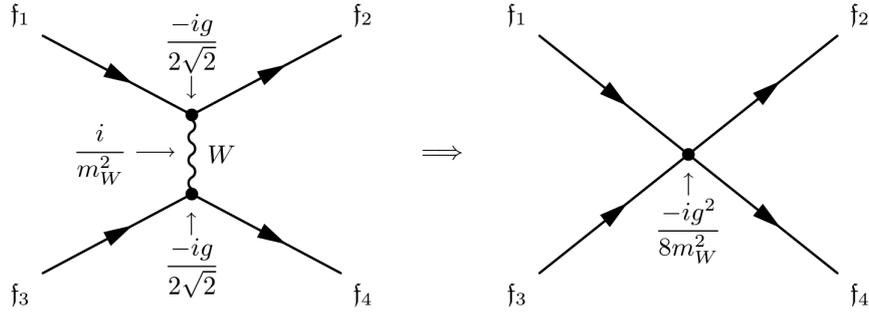


Figura 2.6: Contracción del propagador del bosón  $W$  en un proceso CC genérico. El caso para procesos NC es idéntico, siendo el propagador que se contrae aquel asociado al bosón  $Z$  y sustituyendo los factores en cada vértice por  $\frac{-ig}{2\cos\theta_w}$ . En ambos casos la interacción efectiva es puntual a bajas energías. La figura está tomada de [6].

Esto implica que las líneas internas asociadas a los bosones gauge en los diagramas de Feynman se pueden contraer a un punto [6]. La interacción puede considerarse como puntual si trabajamos con esta aproximación. Esto se puede ver en detalle en la Figura 2.6. En la expresión del lagrangiano (2.8) vemos que aparecen los propagadores  $W_\mu$ ,  $Z_\mu$ . Al sustituir la expresión aproximada de estos propagadores (2.19) en los lagrangianos, surgen los siguientes lagrangianos efectivos [6], definidos en función de las corrientes cargadas y neutras (ecuaciones 2.9 y 2.11):

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(\text{CC})} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} j_{W\mu}^\dagger j_W^\mu, \quad (2.20)$$

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(\text{NC})} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} j_{Z\mu}^\mu j_{Z\mu}. \quad (2.21)$$

La intensidad de la interacción (para energías por debajo de los valores de las masas de los bosones propagadores) viene representada por la constante de Fermi (ver ecuación 2.2), que está relacionada con la constante de acoplamiento  $g$  del Modelo Estándar (ver la ecuación 2.22). Esto solo es así en la aproximación que estamos considerando, siendo necesaria la consideración de las expresiones generales (2.18) en el caso de que trabajemos en otros regímenes de energía,

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}. \quad (2.22)$$

Para un proceso como el representado en 2.17, que es el caso más general, ya que involucra corrientes cargadas y neutras, el lagrangiano efectivo puede escribirse sumando

las contribuciones CC y NC [6]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} = & -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \{ [\bar{\Psi}_{\nu_e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \Psi_e] [\bar{\Psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \Psi_{\nu_e}] \\ & + [\bar{\Psi}_{\nu_e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \Psi_{\nu_e}] [\bar{\Psi}_e \gamma_\mu (g_V^l - g_A^l \gamma^5) \Psi_e] \}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Cada uno de los corchetes que aparecen en el lagrangiano (ecuación 2.23) describen un vértice del diagrama de Feynman, donde  $\bar{\Psi}$  y  $\Psi$  hacen referencia a las funciones de onda de la partícula final e inicial, respectivamente. Los subíndices  $\nu_\alpha$  y  $l_\alpha$  describen la partícula considerada y su sabor. La expresión 2.23 se puede reescribir, utilizando una transformación de Fierz [6], de forma que el término asociado a las corrientes cargadas tenga la misma forma que el asociado a las corrientes neutras. De esta forma, el lagrangiano efectivo puede escribirse, finalmente, como [6]:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\Psi}_{\nu_e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \Psi_{\nu_e}] [\bar{\Psi}_e \gamma_\mu ((1 + g_V^l) - (1 + g_A^l) \gamma^5) \Psi_e]. \quad (2.24)$$

Esto equivale a considerar el lagrangiano efectivo para corrientes neutras y redefinir los coeficientes:

$$g_V^l \rightarrow 1 + g_V^l, \quad g_A^l \rightarrow 1 + g_A^l. \quad (2.25)$$

Es importante notar que, experimentalmente, es imposible distinguir entre las contribuciones CC y NC de un proceso de dispersión neutrino-leptón que puede ocurrir mediado por ambas. Lo único que es posible medir es la sección eficaz total del proceso, que incluye ambas contribuciones. La sección eficaz total de un proceso NC + CC viene dada por el módulo al cuadrado de la suma de todas las amplitudes (representadas por diagramas de Feynman) compatibles con el proceso. En el caso considerado, además de las contribuciones por separado de cada una de las amplitudes correspondientes a procesos CC y NC, tenemos un término de interferencia que produce un efecto apreciable en la sección eficaz. Esto se analiza en detalle en el capítulo siguiente y en el capítulo 4, donde se discuten los resultados del experimento LAMPF [19], en el que se midió este término de interferencia.

## 2.5. Interés de la interacción neutrino-leptón

La interacción entre neutrinos y leptones ha tenido y sigue teniendo un papel relevante en la experimentación dentro del campo de la física de partículas. Históricamente, estos

procesos han permitido verificar directamente la estructura  $V - A$  de la interacción débil, como discutiremos más adelante en el capítulo 4, donde se analizarán las diferencias entre procesos CC que involucran la dispersión de neutrinos y antineutrinos. La estructura  $V - A$  tiene consecuencias directas sobre las secciones eficaces de interacción que pueden utilizarse para verificar experimentalmente la teoría [16]. Una de estas consecuencias es el resultado que se obtiene para la relación entre secciones eficaces de interacción CC a altas energías, que se discutirá con más detalle en el capítulo 4:

$$\sigma_{\text{CC}}(\bar{\nu}_e e^-) = \frac{1}{3} \sigma_{\text{CC}}(\nu_e e^-). \quad (2.26)$$

Por otro lado, los procesos de interacción entre neutrinos y leptones puramente NC han sido muy importantes en la segunda mitad del s. XX a la hora de comprobar experimentalmente la validez del Modelo Estándar de la física de partículas. Este fue el caso de la primera observación en 1973 de la interacción entre neutrinos muónicos y electrones en el experimento Gargamelle [18], así como posteriores estudios de estos procesos para determinar los parámetros  $g_A$ ,  $g_V$  y el ángulo de Weinberg.

Durante el final del s. XX y principios del XXI se han realizado una serie de experimentos muy relevantes que han utilizado la interacción neutrino-electrón (entre otras) para detectar neutrinos solares y estudiar las oscilaciones de neutrinos. Estos son Kamiokande, Super-Kamiokande y SNO ([20], [21], [6]). Estos experimentos hacían uso de detectores de radiación Cherenkov para detectar eventos de dispersión entre neutrinos y electrones. El detector de radiación Cherenkov utiliza un fenómeno físico que aparece cuando un leptón cargado atraviesa un medio con un cierto índice de refracción a muy altas velocidades (ultrarrelativistas). En esta situación, el leptón emite fotones entre 300 y 600 nm de longitud de onda, que pueden detectarse a través de fotomultiplicadores [6]. Esto permite la detección de leptones que han sido dispersados en procesos de interacción con neutrinos. Observando los fotones emitidos es posible identificar el lugar de la interacción del neutrino con el leptón, la dirección de la trayectoria del leptón y su energía.

Actualmente, la interacción entre neutrinos y electrones se utiliza para controlar y conocer con precisión el flujo de neutrinos producido en aceleradores en los experimentos que estudian las oscilaciones de neutrinos [22]. El conocimiento con precisión del flujo de neutrinos presente en el haz experimental es crítico cuando se quiere estudiar las oscilaciones, ya que las mayores fuentes de incertidumbre de estas mediciones están fundamentalmente asociadas a un conocimiento preciso de la distribución de energía de los

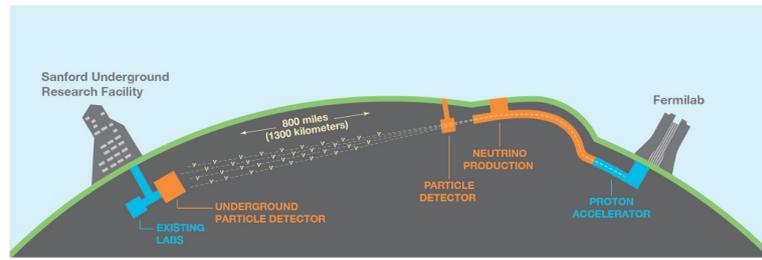


Figura 2.7: Esquema del experimento DUNE, todavía en fase de construcción. El haz de neutrinos se producirá a partir de un acelerador de protones. El flujo de neutrinos producido en el acelerador debe medirse con precisión utilizando un detector cercano al acelerador. El detector lejano se coloca a una distancia suficientemente grande como para que la probabilidad de oscilación de los neutrinos sea alta. Figura tomada de [25].

neutrinos y de la detección de los productos de su reacción con la materia, para así poder reconstruir la energía de los neutrinos que han provocado los eventos detectados. En el experimento MINERvA [22], el haz de neutrinos es producido a través de la colisión de un haz de protones de alta energía con un blanco estacionario de grafito. Esto desencadena la producción de distintos hadrones que se redirigen utilizando campos magnéticos y que producen neutrinos cuando decaen (por ejemplo, a través de la producción de otros leptones, como muones). Algunos experimentos donde se usan haces de neutrinos producidos en aceleradores son [23]: T2K, NO $\nu$ A y MicroBooNE. Otros experimentos, que todavía no están en marcha, como DUNE [24], también estudian la posibilidad de controlar el flujo de neutrinos a través de este método implementado por el experimento MINERvA. En la Figura 2.7 se muestra el esquema general de funcionamiento del futuro experimento DUNE, donde se utilizará un acelerador de protones para generar el haz de neutrinos. La técnica desarrollada en el experimento MINERvA utiliza los conocimientos precisos de las secciones eficaces de interacción entre neutrinos y electrones para reducir la incertidumbre del valor del flujo de neutrinos que proporciona el reactor. Existen otros métodos para reducir esta incertidumbre, pero tienen errores mayores (por ejemplo, a través del estudio de la interacción neutrino-nucleón [22, 26]). Es común utilizar una combinación de varios de ellos, como se hace en MINERvA [23].

Los últimos resultados proporcionados por el experimento MINERvA apuntan a un gran avance en la reducción de la incertidumbre para bajas energías y energías medias de los neutrinos producidos [27, 28, 23, 22]. La referencia [22] indica que los flujos de neutrinos y antineutrinos muónicos han visto su incertidumbre reducida desde un 7,6 % y 7,8 % a un 3,3 % y 4,7 %, respectivamente.

## Capítulo 3

# Dispersión elástica neutrino - leptón

En este capítulo aplicaremos el formalismo de la Teoría Cuántica de Campos en la representación de interacción, concretamente para el hamiltoniano de la interacción débil, y calcularemos las secciones eficaces de diferentes procesos de dispersión entre neutrinos y leptones mediados por corrientes neutras (NC) y corrientes cargadas (CC).

La distinción entre procesos de interacción débil mediados por corrientes cargadas y corrientes neutras ya se ha realizado en el capítulo anterior. El cálculo de la sección eficaz de interacción, medida de la probabilidad de ocurrencia de un proceso, puede particularizarse para un proceso puramente CC, un proceso puramente NC, o para un proceso en el que intervienen ambas, donde el lagrangiano será la suma de las dos contribuciones.

Las expresiones explícitas de los lagrangianos (CC, NC y NC + CC) pueden encontrarse en el capítulo 2 (2.7, 2.23, 2.24). En las siguientes secciones trataremos con un hamiltoniano definido a partir del lagrangiano NC para un proceso de dispersión elástica neutrino - leptón. Para lagrangianos de interacción que no dependen explícitamente de la derivada de los campos, como es el lagrangiano NC que estamos considerando, el hamiltoniano asociado es  $H_I = -\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{NC}}$  (ver [29]):

$$H_I = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\Psi}_{\nu_\alpha} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \Psi_{\nu_\alpha}] [\bar{\Psi}_l \gamma_\mu (g_V^l - g_A^l \gamma^5) \Psi_l], \quad (3.1)$$

donde  $\alpha$  puede ser distinto de  $l$ . Calcularemos la sección eficaz del proceso NC a partir de este hamiltoniano. La ventaja de usar este hamiltoniano es que podremos particularizar los resultados a procesos puramente CC (basta con sustituir los coeficientes  $g_V$  y  $g_A$  por

1) o a procesos que involucran CC y NC (en los que se puede hacer la sustitución 2.25 en el cálculo realizado con el lagrangiano NC). Esto se discutirá detalladamente en secciones posteriores.

### 3.1. Definición de la matriz de interacción

En la representación de interacción, el Hamiltoniano de un sistema puede escribirse como la suma de un Hamiltoniano libre y un Hamiltoniano de interacción:

$$H = H_0 + H_I. \quad (3.2)$$

Nuestro objetivo es estudiar procesos de dispersión entre partículas. En estos problemas podemos considerar que el estado inicial estará definido a partir de una serie de partículas, que tendrán sus respectivos momentos, espines y polarizaciones, y que estarán suficientemente alejadas entre sí como para no interactuar. Cuando estas partículas se acerquen e interactúen, el estado inicial evolucionará hacia un estado final que, para un tiempo suficientemente largo, volverá a involucrar a una serie de partículas alejadas que no interactúan entre sí [29]. Esto es lo que se conoce como hipótesis adiabática.

La matriz de colisión establece una relación entre el estado inicial del sistema y otro estado determinado en  $t \rightarrow \infty$  tras la interacción. La colisión puede llevar a diferentes posibles estados finales, todos ellos contenidos en  $|\phi(+\infty)\rangle$  [29]. Matemáticamente, la relación entre los estados inicial y final del sistema puede escribirse de la siguiente forma:

$$|\phi_f(+\infty)\rangle = S_{fi} |\phi(-\infty)\rangle, \quad (3.3)$$

siendo  $S_{fi}$ :

$$S_{fi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^4 X_1 d^4 X_2 \dots d^4 X_n P \{H_I(X_1)H_I(X_2) \dots H_I(X_n)\}, \quad (3.4)$$

donde  $P$  denota el producto cronológico de Dyson [29]. La expresión de la matriz de colisión (3.4) es únicamente válida cuando el hamiltoniano de interacción es suficientemente débil, esto es debido a que la ecuación 3.4 es una solución obtenida a partir de la teoría de perturbaciones [29]. En el caso que nos ocupa, para la interacción débil, esta solución es completamente válida. En este trabajo estudiaremos los procesos de interacción teniendo en cuenta únicamente el primer orden de teoría de perturbaciones, en el que la matriz de

colisión tiene la siguiente forma [30]:

$$S_{fi} = -i \int d^4X H_I(X). \quad (3.5)$$

## 3.2. Sección eficaz diferencial

Una de las magnitudes más relevantes a la hora de estudiar procesos de interacción es la sección eficaz. Esta magnitud nos da una medida de la probabilidad de que este proceso tenga lugar. Es medible experimentalmente y tiene usos en experimentos actuales, donde su conocimiento preciso para ciertos procesos permite reducir la incertidumbre en el flujo de neutrinos incidente (ver la sección 2.5). Para introducir la sección eficaz conviene dar algunas definiciones previas.

Se define la probabilidad de transición del sistema hacia un estado final,  $dW$ , como el producto de la matriz de colisión al cuadrado  $|S_{fi}|^2$  y la densidad de estados finales,  $dN_f$  [30]:

$$\begin{aligned} dW &= |S_{fi}|^2 dN_f, \\ dN_f &= \prod_f \frac{V}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{p}_f, \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde la densidad de estados finales está definida en función de los diferenciales de momentos de las partículas finales. A partir de estas expresiones se puede definir la probabilidad de transición por partícula y por unidad de tiempo [30]:

$$dR = \frac{dW}{T}. \quad (3.7)$$

La sección eficaz diferencial viene expresada como el cociente de la probabilidad de transición por partícula y unidad de tiempo entre la corriente o flujo inicial de partículas  $J_{inc}$ . Para un proceso de colisión entre dos partículas la corriente puede definirse de la siguiente forma:

$$J_{inc} = \frac{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}{V} = \frac{\sqrt{(P_1 \cdot P_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{E_1 E_2 V}. \quad (3.8)$$

La demostración de 3.8 puede encontrarse en [30]. La expresión de la sección eficaz diferencial viene dada por la ecuación 3.9, que, finalmente, depende de la matriz de colisión, de la densidad de estados finales, del flujo de partículas iniciales y del tiempo de interacción

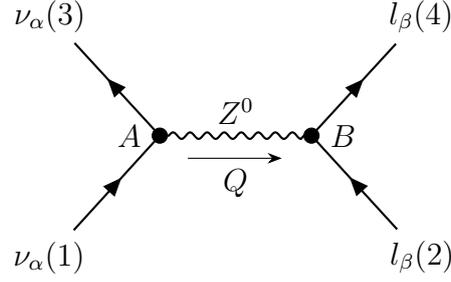


Figura 3.1: Diagrama de Feynman para el proceso de dispersión  $\nu_\alpha + l_\beta \rightarrow \nu_\alpha + l_\beta$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  pueden ser los sabores  $e, \mu, \tau$ . Con  $\alpha \neq \beta$  para que el proceso sea puramente NC.

([30], [4]).

$$d\sigma = \frac{dR}{J_{inc}} = \frac{|S_{fi}|^2}{T J_{inc}} dN_f. \quad (3.9)$$

### 3.3. Descripción cinemática del proceso

Sin pérdida de generalidad, consideramos un proceso de dispersión neutrino-leptón,  $\nu_\alpha + l_\beta \rightarrow \nu_\alpha + l_\beta$ , mediado por el bosón  $Z$  (corriente neutra), y definimos las variables cinemáticas del proceso. El estudio del proceso CC se realizará más adelante. El diagrama de Feynman del proceso NC, en primer orden de teoría de perturbaciones, viene dado en la Figura 3.1. Por simplicidad, consideramos en primer lugar el análisis del proceso para partículas y, posteriormente, particularizaremos el resultado para procesos de dispersión que involucren antineutrinos.

#### Neutrino inicial:

- Masa:  $m_1 = m_{\nu_l} \approx 0$ .
- Cuadrimento:  $P_1 = (E_1, \mathbf{p}_1)$ .

#### Leptón inicial:

- Masa:  $m_2 = m_\nu$ .
- Cuadrimento:  $P_2 = (E_2, \mathbf{p}_2)$ .

#### Neutrino final:

- Masa:  $m_3 = m_{\nu_l} \approx 0$ .

- Cuadrimento:  $P_3 = (E_3, \mathbf{p}_3)$ .

#### Leptón final:

- Masa:  $m_4 = m_\nu$ .
- Cuadrimento:  $P_4 = (E_4, \mathbf{p}_4)$ .

#### Bosón $Z$ :

- Masa:  $M_z$ .
- Cuadrimento:  $Q = (\omega, \mathbf{q})$ .

Además, podemos considerar las siguientes ecuaciones de conservación de energía y

momento en los vértices:

**Vértice A:**

- $E_1 = E_3 + \omega$
- $\mathbf{p}_1 = \mathbf{q} + \mathbf{p}_3$

**Vértice B:**

- $E_4 = E_2 + \omega$
- $\mathbf{p}_4 = \mathbf{q} + \mathbf{p}_2$

Como estamos tratando con partículas de espín  $\frac{1}{2}$ , las funciones de onda que describen el comportamiento libre de las partículas que intervienen en el proceso son las funciones de onda de Dirac, que en la aproximación de onda plana son (ver apéndice A) [31]:

$$\Psi_i = \sqrt{\frac{1}{2E_i V}} u(\mathbf{p}_i, s_i) e^{-iP_i X}, \text{ donde } i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.10)$$

### 3.4. Cálculo de la matriz de interacción

La matriz de interacción  $S_{fi}$  viene dada en primer orden por la ecuación 3.5:

$$S_{fi} = -i \int d^4 X H_I(X),$$

donde  $H_I$  es el hamiltoniano de interacción débil, definido a partir de las corrientes leptónicas, neutras en este caso, en cada uno de los dos vértices (A y B) (ecuación 3.1) [4]:

$$H_I = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\Psi}_3 \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \Psi_1] [\bar{\Psi}_4 \gamma_\mu (g_V - g_A \gamma^5) \Psi_2]. \quad (3.11)$$

Las funciones de onda vienen denotadas por  $\Psi_i$  (donde  $i = 1, 2, 3, 4$  hace referencia a cada partícula inicial y final en la Figura 3.1). Introducimos la expresión del hamiltoniano débil en la ecuación 3.5 y resolvemos la integral:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \int d^4 X [\bar{\Psi}_3 \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \Psi_1] [\bar{\Psi}_4 \gamma_\mu (g_V - g_A \gamma^5) \Psi_2] \\ &= -i \frac{G_F}{4\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{E_1 E_2 E_3 E_4 V^4}} \int d^4 X e^{i(P_4 + P_3 - P_2 - P_1) X} \\ &\quad \times [\bar{u}(3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(1)] [\bar{u}(4) \gamma_\mu (g_V - g_A \gamma^5) u(2)]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

En la expresión anterior se ha introducido la siguiente notación para los espinores:  $u(i) = u(\mathbf{p}_i, s_i)$ . Para resolver esta integral hay que introducir el siguiente resultado matemático:

$$\delta^4(a) = \int \frac{d^4 X}{(2\pi)^4} e^{iaX}. \quad (3.13)$$

Haciendo uso de 3.13:

$$S_{fi} = -i \frac{G_F}{4\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{E_1 E_2 E_3 E_4 V^4}} (2\pi)^4 \delta^4(P_4 + P_3 - P_2 - P_1) [\bar{u}(3)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)u(1)] \times [\bar{u}(4)\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)u(2)]. \quad (3.14)$$

Esta es la expresión de la matriz de interacción en primer orden, que depende de los espinores de las partículas involucradas en el proceso  $u(i)$ . Podemos definir la amplitud de transición invariante  $M_{fi}$  (llamada así porque es un invariante Lorentz). En este término se encuentra la información física del proceso de interacción.

$$M_{fi} = \frac{G_F}{4\sqrt{2}} [\bar{u}(3)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)u(1)] [\bar{u}(4)\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)u(2)]. \quad (3.15)$$

Como hemos visto en la sección 3.2, la sección eficaz diferencial depende de la matriz de colisión al cuadrado (ecuación 3.9). Esto nos lleva a la necesidad de evaluar  $|S_{fi}|^2$ :

$$|S_{fi}|^2 = \frac{1}{E_1 E_2 E_3 E_4 V^4} [(2\pi)^4 \delta^4(P_4 + P_3 - P_2 - P_1)]^2 |M_{fi}|^2. \quad (3.16)$$

El término que incluye la delta de Dirac puede reescribirse desarrollando el cuadrado (véase el apéndice B):

$$|S_{fi}|^2 = \frac{1}{E_1 E_2 E_3 E_4 V^4} (2\pi)^4 \delta^4(P_4 + P_3 - P_2 - P_1) TV |M_{fi}|^2. \quad (3.17)$$

La expresión anterior depende de  $|M_{fi}|^2$ , las energías de las partículas iniciales y finales y una delta asociada a la conservación del momento-energía, que involucra los cuadrimomentos de todas las partículas. Para completar el cálculo es necesario evaluar  $|M_{fi}|^2$ , siendo este el propósito de la sección 3.6. A continuación introducimos el resultado 3.17 en la expresión de la sección eficaz diferencial e integramos sobre los momentos finales para obtener la sección eficaz diferencial respecto al ángulo sólido.

### 3.5. Cálculo de la sección eficaz diferencial

Introduciendo los resultados obtenidos en la sección anterior (ecuación 3.17), en la expresión de la sección eficaz diferencial (3.9), y utilizando los resultados 3.6 y 3.8, llegamos a la siguiente expresión:

$$d\sigma = \frac{1}{E_1 E_2 E_3 E_4 V^4} \mathcal{FV} (2\pi)^4 \delta^4(P_4 + P_3 - P_2 - P_1) |\overline{M_{fi}}|^2 \frac{E_1 E_2 \mathcal{V}}{\mathcal{F}(P_1 P_2)} \times \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} d^3 \mathbf{p}_3 \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} d^3 \mathbf{p}_4, \quad (3.18)$$

donde hemos particularizado el resultado 3.8 para nuestro caso, en el que una de las partículas iniciales es un neutrino con masa aproximadamente nula. Esto reduce la expresión del flujo incidente a:

$$J_{inc} = \frac{P_1 \cdot P_2}{E_1 E_2 V}, \quad (3.19)$$

donde  $P_1 \cdot P_2$  indica la contracción de los dos cuadvectores, i.e.  $P_1^\mu P_{2\mu}$ . La expresión de la sección eficaz diferencial que resulta es:

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2 (E_3 E_4) (P_1 \cdot P_2)} \delta^4(P_4 + P_3 - P_2 - P_1) |\overline{M_{fi}}|^2 d^3 \mathbf{p}_3 d^3 \mathbf{p}_4. \quad (3.20)$$

A continuación, procedemos a integrar la expresión anterior sobre los momentos finales para obtener la sección eficaz diferencial respecto del ángulo sólido  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ . A partir de este momento los resultados que obtendremos están particularizados para el sistema centro de momentos (COM), en el que  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_i$  y  $\mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_f$ .

El desarrollo de este cálculo se encuentra en el apéndice B.2 al completo. Aquí mostramos el resultado final (ecuación B.16), que es la sección eficaz diferencial respecto al ángulo sólido:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2 (E_1 + E_2)^2} |\overline{M_{fi}}|^2 \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|}. \quad (3.21)$$

Esta expresión depende de las energías de las partículas iniciales, del momento inicial y el momento final en el sistema COM (el momento final sigue la expresión B.18), y de la amplitud de transición invariante al cuadrado.

## 3.6. Desarrollo de la amplitud de transición invariante

Como veíamos en las expresiones 3.17 y 3.21 es necesario evaluar  $|M_{fi}|^2$  para obtener el resultado final de la sección eficaz del proceso. En esta sección desarrollamos este cálculo. El cuadrado de 3.15 involucra el producto de cuatro términos, dos de ellos conjugados:

$$|M_{fi}|^2 = \frac{G_F^2}{32} [\bar{u}(3)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)u(1)] [\bar{u}(4)\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)u(2)] [\bar{u}(3)\gamma^\nu(1 - \gamma^5)u(1)]^\dagger [\bar{u}(4)\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)u(2)]^\dagger. \quad (3.22)$$

Conviene operar con los términos conjugados de la expresión anterior para obtener una expresión más compacta, los cálculos detallados se muestran en el apéndice B. A continuación, mostramos los resultados:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & [\bar{u}(3)\gamma^\nu(1 - \gamma^5)u(1)]^\dagger = [\bar{u}(1)\gamma^\nu(1 - \gamma^5)u(3)] = [\bar{u}(1)\Gamma^\nu u(3)], \\ \text{II.} \quad & [\bar{u}(4)\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)u(2)]^\dagger = [\bar{u}(2)\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)u(4)] = [\bar{u}(2)\tilde{\Gamma}_\nu u(4)]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Con los resultados anteriores y definiendo  $\Gamma^\mu = \gamma^\mu(1 - \gamma^5)$ ,  $\tilde{\Gamma}_\mu = \gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)$ , la expresión 3.22 se puede escribir como:

$$|M_{fi}|^2 = \frac{G_F^2}{32} [\bar{u}(3)\Gamma^\mu u(1)] [\bar{u}(4)\tilde{\Gamma}_\mu u(2)] [\bar{u}(1)\Gamma^\nu u(3)] [\bar{u}(2)\tilde{\Gamma}_\nu u(4)]. \quad (3.24)$$

Los espinores  $u(p_i, s_i)$  que definen a las partículas iniciales y finales tienen una polarización de espín concreta. En el caso de los neutrinos, esta polarización es conocida y siempre idéntica, ya que los neutrinos y antineutrinos siempre aparecen con helicidad negativa y positiva respectivamente. En cambio, para los leptones cargados, la polarización del espín es aleatoria. Si suponemos que la polarización de los leptones cargados puede ser cualquiera, para los estados iniciales promediaremos sobre las posibles polarizaciones y para los estados finales sumaremos sobre todas ellas. Para los estados iniciales y finales de los neutrinos, sumaremos sobre todas las polarizaciones, y el término  $1 - \gamma^5$  que aparece en la expresión seleccionará neutrinos de helicidad negativa, lo que significa que las polarizaciones serán siempre idénticas.

$$|\overline{M}_{fi}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \sum_{s_3} \sum_{s_4} |M_{fi}|^2. \quad (3.25)$$

Sustituyendo 3.24 en 3.25:

$$|\overline{M_{fi}}|^2 = \frac{G_F^2}{64} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \sum_{s_3} \sum_{s_4} [\bar{u}(3)\Gamma^\mu u(1)] [\bar{u}(4)\tilde{\Gamma}_\mu u(2)] [\bar{u}(1)\Gamma^\nu u(3)] [\bar{u}(2)\tilde{\Gamma}_\nu u(4)]. \quad (3.26)$$

Si separamos los sumatorios, podemos evaluar los términos  $\sum_{s_1} \sum_{s_3}$  y  $\sum_{s_2} \sum_{s_4}$  independientemente. Hacemos uso de las relaciones de normalización que satisfacen los espinores de Dirac, tal y como está definido en el apéndice A, ecuación A.13:

$$\sum_{s_i} u(s_i)\bar{u}(s_i) = \not{P}_i + m_i. \quad (3.27)$$

Este cálculo se encuentra detallado también en el apéndice B, el resultado al que llegamos es

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \sum_{s_1} \sum_{s_3} [\bar{u}(3)\Gamma^\mu u(1)\bar{u}(1)\Gamma^\nu u(3)] = \text{Tr}[(\not{P}_3 + m_3)\Gamma^\mu(\not{P}_1 + m_1)\Gamma^\nu], \\ \text{II.} \quad & \sum_{s_2} \sum_{s_4} [\bar{u}(4)\tilde{\Gamma}_\mu u(2)\bar{u}(2)\tilde{\Gamma}_\nu u(4)] = \text{Tr}[(\not{P}_4 + m_4)\tilde{\Gamma}_\mu(\not{P}_2 + m_2)\tilde{\Gamma}_\nu]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Sustituyendo 3.28 en la ecuación 3.26, llegamos finalmente a una expresión para el cuadrado promediado de la amplitud de transición invariante que depende de trazas que involucran contracciones de matrices de Dirac con los cuádrimomentos de las partículas. Si escribimos explícitamente  $\Gamma^\mu$ ,  $\Gamma^\nu$ ,  $\tilde{\Gamma}_\mu$  y  $\tilde{\Gamma}_\nu$ , la amplitud invariante viene dada por:

$$\begin{aligned} |\overline{M_{fi}}|^2 &= \frac{G_f^2}{64} \text{Tr}[\gamma^\mu(1 - \gamma^5)(\not{P}_1 + m_1)\gamma^\nu(1 - \gamma^5)(\not{P}_3 + m_3)] \\ &\times \text{Tr}[\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)(\not{P}_2 + m_2)\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)(\not{P}_4 + m_4)]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

El cálculo detallado, utilizando los teoremas de trazas, de la expresión 3.29 se encuentra en el Apéndice C. Aquí presentamos únicamente el resultado que se obtiene tras desarrollar los productos de las trazas:

$$\begin{aligned} |\overline{M_{fi}}|^2 &= G_F^2 \{(g_V + g_A)^2(P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot P_4) + (g_V - g_A)^2(P_2 \cdot P_3)(P_1 \cdot P_4) \\ &\quad - m_2 m_4 (g_V^2 - g_A^2)(P_1 \cdot P_3)\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Este resultado representa la amplitud de transición invariante para un proceso de dispersión neutrino-leptón mediado por corrientes neutras como el descrito en la Figura 3.1. La

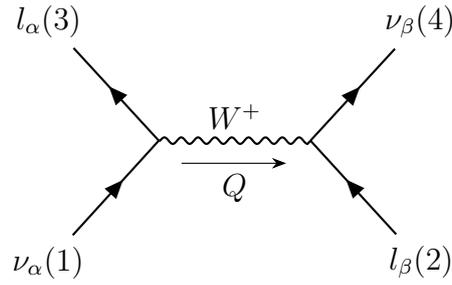


Figura 3.2: Diagrama de Feynman para el proceso de dispersión  $\nu_\alpha + l_\beta \rightarrow \nu_\beta + l_\alpha$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  pueden ser los sabores  $e, \mu, \tau$ . Si el proceso es puramente CC,  $\alpha \neq \beta$ .

posibilidad de particularizar esta expresión para procesos mediados por corrientes cargadas, procesos que involucren antineutrinos, o procesos que pueden ocurrir por corrientes cargadas y neutras, se discute en la siguiente sección.

### 3.6.1. Amplitud de transición para procesos de corrientes cargadas

Sea un proceso de dispersión elástica entre un neutrino y un leptón mediado por corrientes cargadas que viene descrito por un diagrama de Feynman en primer orden como el de la Figura 3.2. Podemos particularizar el resultado 3.30 para procesos de este tipo imponiendo que las constantes  $g_V$  y  $g_A$  sean iguales a 1. El segundo y tercer sumando de la expresión desaparecen y la expresión que resulta es:

$$|\overline{M_{fi}}|^2 = 4G_F^2 \{(P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot P_4)\}. \quad (3.31)$$

Hay que tener en cuenta que, en el proceso NC tal y como nosotros lo habíamos definido, al neutrino inicial se le asociaba  $P_1$  y al final  $P_3$ . Ahora, en cambio, el neutrino final tiene asociado el cuadrimomento  $P_4$  y el leptón final  $P_3$ . Esto no es un problema puesto que en el cálculo de la sección eficaz que hemos realizado previamente la única consideración que hemos hecho es que el sistema de referencia sea el sistema centro de momentos, no hemos considerado  $m_1 = m_3 = 0$ . Por tanto, este resultado podemos incorporarlo en 3.21 y proceder con los cálculos cuando definamos  $P_1, P_2, P_3, P_4$  adecuadamente.

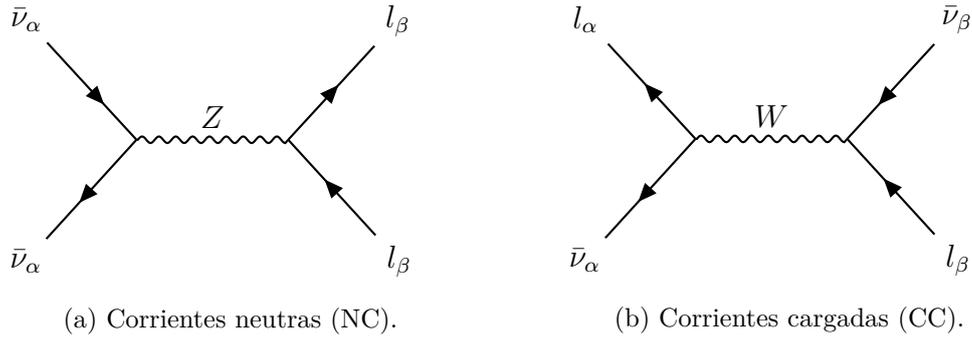


Figura 3.3: Diagramas de Feynman para procesos de dispersión entre antineutrinos y leptones. La notación es idéntica a la seguida en los diagramas anteriores.

### 3.6.2. Amplitud de transición para la colisión antineutrino - leptón

También es posible modificar las expresiones 3.30 y 3.31 para describir el caso en el que las partículas incidentes sean antineutrinos (ver la Figura 3.3). Un antineutrino entrante en un vértice puede verse como un neutrino saliente de ese mismo vértice con energía negativa. Esto permite obtener el resultado que queremos mediante un simple intercambio entre las variables  $P_1$  y  $P_3$  (en el caso NC), y  $P_1$  y  $P_4$  (en el caso CC). Véanse las Figuras 3.1 y 3.2 para entender la notación.

De esta forma, para la amplitud NC del proceso  $\bar{\nu}l$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
 |\overline{M}_{fi}|^2 = G_F^2 \{ & (g_V + g_A)^2 (P_3 \cdot P_2)(P_1 \cdot P_4) + (g_V - g_A)^2 (P_2 \cdot P_1)(P_3 \cdot P_4) \\
 & - m_2 m_4 (g_V^2 - g_A^2)(P_1 \cdot P_3) \}. \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

Se puede observar inmediatamente que el intercambio que hemos hecho es análogo a modificar  $g_A \rightarrow -g_A$ . Por tanto, si realizamos los cálculos para el proceso  $\nu_\alpha l$ , tendremos los resultados para el caso de antineutrinos modificando el signo de  $g_A$ . Esto es así porque, para antineutrinos, el término  $1 - \gamma^5$  pasa a ser  $1 + \gamma^5$ , verificando que los antineutrinos presentan helicidad positiva. La amplitud CC para el proceso  $\bar{\nu}l$  resulta:

$$|\overline{M}_{fi}|^2 = 4G_F^2 \{ (P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot P_4) \}. \quad (3.33)$$

### 3.6.3. Amplitud de transición total para procesos que pueden darse por corrientes cargadas y neutras

Como se ha discutido en el capítulo 2 y en la introducción de este capítulo, el lagrangiano (o hamiltoniano) efectivo que considera las contribuciones NC y CC es idéntico al hamiltoniano NC realizando una modificación en los coeficientes  $g_V$  y  $g_A$  (ver ecuación 2.25). Esto nos lleva a que la amplitud de transición es idéntica a la obtenida para procesos puramente NC si realizamos esta transformación en los coeficientes:

$$\begin{aligned} |\overline{M_{fi}}|^2 = & G_F^2 \{ [(1 + g_V) + (1 + g_A)]^2 (P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot P_4) + [(1 + g_V) - (1 + g_A)]^2 \\ & \times (P_2 \cdot P_3)(P_1 \cdot P_4) - m_2 m_4 [(1 + g_V)^2 - (1 + g_A)^2] (P_1 \cdot P_3) \}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

En las siguientes secciones obtenemos las expresiones finales de la sección eficaz para procesos NC y CC. No dedicaremos una sección completa a los procesos NC + CC ya que es posible obtener sus expresiones a partir de las calculadas para un proceso NC realizando la sustitución descrita en 2.25. Esto se ha discutido cuando introdujimos la expresión 2.24 en el capítulo 2.

## 3.7. Sección eficaz diferencial y total para procesos NC

Si introducimos el cuadrado de la amplitud de transición 3.30 en la expresión de la sección eficaz diferencial 3.21, la expresión que resulta es:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = & \frac{1}{(2\pi)^2 (E_1 + E_2)^2} \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|} G_F^2 \{ (g_V + g_A)^2 (P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot P_4) + (g_V - g_A)^2 (P_2 \cdot P_3)(P_1 \cdot P_4) \\ & - m_2 m_4 (g_V^2 - g_A^2) (P_1 \cdot P_3) \}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

A continuación, evaluamos las contracciones entre cuádrimomentos en el sistema centro de momentos. Tenemos en cuenta que  $m_1 = m_3 = 0$  dado que representan a neutrinos. De esta forma,

$$\begin{aligned} E_1 = |\mathbf{p}_i|, & \quad E_2 = \sqrt{E_1^2 + m_2^2}, \\ E_3 = |\mathbf{p}_f|, & \quad E_4 = \sqrt{\mathbf{p}_f^2 + m_4^2}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

A partir de B.18 y utilizando  $m_1 = m_3 = 0$ :

$$|\mathbf{p}_f| = \frac{1}{2(E_1 + E_2)} [(E_1 + E_2)^2 - m_4^2]. \quad (3.37)$$

De manera que todas las variables quedan definidas en función de la energía  $E_1 = E_\nu$ , que es la energía del neutrino incidente. Mostramos a continuación las contracciones de los cuadrimentos:

$$\begin{aligned} P_1 \cdot P_2 &= E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 = E_1 E_2 + |\mathbf{p}_i|^2 = E_1 E_2 + E_1^2, \\ P_3 \cdot P_4 &= E_3 E_4 - \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4 = E_3 E_4 + |\mathbf{p}_f|^2, \\ P_2 \cdot P_3 &= E_2 E_3 - \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 = E_2 E_3 + \mathbf{p}_i \mathbf{p}_f = E_2 E_3 + E_1 |\mathbf{p}_f| \cos \theta, \\ P_1 \cdot P_4 &= E_1 E_4 - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_4 = E_1 E_4 + \mathbf{p}_i \mathbf{p}_f = E_1 E_4 + E_1 |\mathbf{p}_f| \cos \theta, \\ P_1 \cdot P_3 &= E_1 E_3 - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_3 = E_1 E_3 - |\mathbf{p}_i| |\mathbf{p}_f| \cos \theta = E_1 E_3 - E_1 |\mathbf{p}_f| \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Sustituyendo 3.38 en 3.35 llegamos a:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d(\cos \theta)} &= \frac{G_F^2 |\mathbf{p}_f|^2}{2\pi(E_1 + E_2)^2} \{ (g_V + g_A)^2 (E_2 + E_1)(E_4 + |\mathbf{p}_f|) \\ &\quad + (g_V - g_A)^2 (E_2 + E_1 \cos \theta)(E_4 + |\mathbf{p}_f| \cos \theta) - m_2 m_4 (g_V^2 - g_A^2) (1 - \cos \theta) \}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

La expresión previa muestra la sección eficaz diferencial respecto al coseno del ángulo de dispersión. Es fácil ver que la expresión solo depende de  $E_1$  y del  $\cos \theta$ . Todas las demás variables cinemáticas se escriben en función de estas dos. Si integramos la expresión para todos los ángulos, obtenemos la sección eficaz diferencial total:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{NC}} &= \frac{G_F^2 |\mathbf{p}_f|^2}{\pi(E_1 + E_2)^2} \{ (g_V + g_A)^2 (E_2 + E_1)(E_4 + |\mathbf{p}_f|) \\ &\quad + (g_V - g_A)^2 (E_2 E_4 + \frac{1}{3} E_1 |\mathbf{p}_f|) - m_2 m_4 (g_V^2 - g_A^2) \}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Es común (ver [4, 9, 6]), en el caso de la colisión neutrino - electrón, despreciar la masa del electrón frente a la energía del neutrino incidente. Podemos hacer esta aproximación y estudiar su validez en función del rango de energías que consideremos y en el caso de

otros leptones. Tomando  $m_2, m_4 \rightarrow 0$ , llegamos a:

$$\sigma_{\text{NC(approx)}} = \frac{4G_F^2 E_1^2}{3\pi} \{g_V^2 + g_A^2 + g_A g_V\}. \quad (3.41)$$

Expresión cuyo comportamiento puede compararse con la ecuación 3.40 para la colisión entre neutrinos y los distintos leptones  $e, \mu$  y  $\tau$  en procesos NC.

### 3.7.1. Colisión antineutrino - leptón

La sección eficaz en este caso se obtiene simplemente reemplazando  $g_A \rightarrow -g_A$  en las expresiones 3.40 y 3.39. La sección eficaz total, resulta,

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{NC}(\bar{\nu})} = & \frac{G_F^2 |\mathbf{p}_f|^2}{\pi(E_1 + E_2)^2} \{ (g_V - g_A)^2 (E_2 + E_1)(E_4 + |\mathbf{p}_f|) \\ & + (g_V + g_A)^2 (E_2 E_4 + \frac{1}{3} E_1 |\mathbf{p}_f|) - m_2 m_4 (g_V^2 - g_A^2) \}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

En el siguiente capítulo analizaremos las diferencias existentes entre ambos procesos a través del estudio de las secciones eficaces.

## 3.8. Sección eficaz diferencial y total para procesos CC

Procediendo de la misma forma que en la sección anterior, introducimos 3.31 en 3.21:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2 (E_1 + E_2)^2} \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|} 4G_F^2 (P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot P_4). \quad (3.43)$$

Si definimos las variables cinemáticas tal y como están presentadas en la Figura 3.2, con  $m_1 = m_4 = 0$  ya que representan a neutrinos. De esta forma,

$$\begin{aligned} E_1 &= |\mathbf{p}_i|, & E_2 &= \sqrt{E_1^2 + m_2^2}, \\ E_4 &= |\mathbf{p}_f|, & E_3 &= \sqrt{\mathbf{p}_f^2 + m_3^2}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

A partir de B.18 y utilizando  $m_1 = m_4 = 0$ :

$$|\mathbf{p}_f| = \frac{1}{2(E_1 + E_2)} [(E_1 + E_2)^2 - m_3^2]. \quad (3.45)$$

Mostramos a continuación las contracciones de los cuádrimomentos:

$$\begin{aligned} P_1 \cdot P_2 &= E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 = E_1 E_2 + |\mathbf{p}_i|^2 = E_1 E_2 + E_1^2, \\ P_3 \cdot P_4 &= E_3 E_4 - \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4 = E_3 E_4 + |\mathbf{p}_f|^2. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Sustituyendo 3.46 en 3.43 llegamos a:

$$\frac{d\sigma}{d(\cos \theta)} = \frac{2G_F^2 |\mathbf{p}_f|^2}{\pi(E_1 + E_2)^2} (E_2 + E_1)(E_3 + |\mathbf{p}_f|), \quad (3.47)$$

que es la expresión de la sección eficaz diferencial respecto al coseno del ángulo de dispersión. Es inmediato ver que la expresión no depende del ángulo  $\theta$  en el sistema centro de momentos. Tras integrar para todos los ángulos se obtiene inmediatamente,

$$\sigma_{\text{CC}} = \frac{4G_F^2 |\mathbf{p}_f|^2}{\pi(E_1 + E_2)} (E_3 + |\mathbf{p}_f|). \quad (3.48)$$

Si consideramos la aproximación ultrarrelativista para el leptón inicial, es decir, despreciamos la masa del leptón incidente  $m_2$  frente a su momento (discutiremos esta aproximación cuando presentemos los resultados), la expresión 3.48 se reduce a:

$$\sigma_{\text{CC}(\text{rel})} = \frac{4}{\pi} G_F^2 E_1^2 \left(1 - \frac{m_3^2}{4E_1^2}\right)^2. \quad (3.49)$$

Expresión a la que se llega sin más que hacer  $m_2 \rightarrow 0$  en las expresiones 3.44, 3.45, 3.38.

# Capítulo 4

## Análisis de los resultados

El objeto de este capítulo es analizar los procesos de dispersión elástica entre neutrinos y leptones de distintos sabores a partir de las expresiones analíticas para la sección eficaz obtenidas en el capítulo 3.

### 4.1. Procesos mediados por corrientes neutras

En esta sección analizamos procesos que pueden ser mediados por el bosón  $Z$ . Una característica importante es que, a diferencia de los procesos CC, no presentan una energía inicial del neutrino mínima para que la reacción ocurra. Esto se debe a que el estado inicial y final del proceso es el mismo, solo existe una redistribución de energías y momentos durante la reacción [6].

En la Figura 4.1 podemos ver la representación de la sección eficaz total frente a la energía del neutrino inicial  $E_\nu$  en el sistema COM para distintos procesos de dispersión puramente NC (ecuación 3.40). Estos procesos involucran a leptones cargados y neutrinos de un sabor distinto. La representación en distintos rangos de energía permite visualizar el rápido crecimiento de la sección eficaz a medida que  $E_\nu$  aumenta (en la zona de bajas energías), para posteriormente crecer cada vez más lentamente a medida que la energía del neutrino incidente aumenta. Es interesante notar que, además de crecer más lentamente, a altas energías las secciones eficaces correspondientes a procesos que involucran leptones cargados de distintos sabores ( $e, \mu, \tau$ ) presentan una diferencia mucho menor entre ellas. Si evaluamos, por ejemplo, el cociente entre las secciones eficaces de los procesos  $\nu_{\mu,\tau} e^-$  y  $\nu_{e,\mu} \tau^-$  (en realidad, el sabor del neutrino no influye a la hora de considerar procesos NC, pero elegimos los sabores distintos al del leptón cargado para evitar la ambigüedad

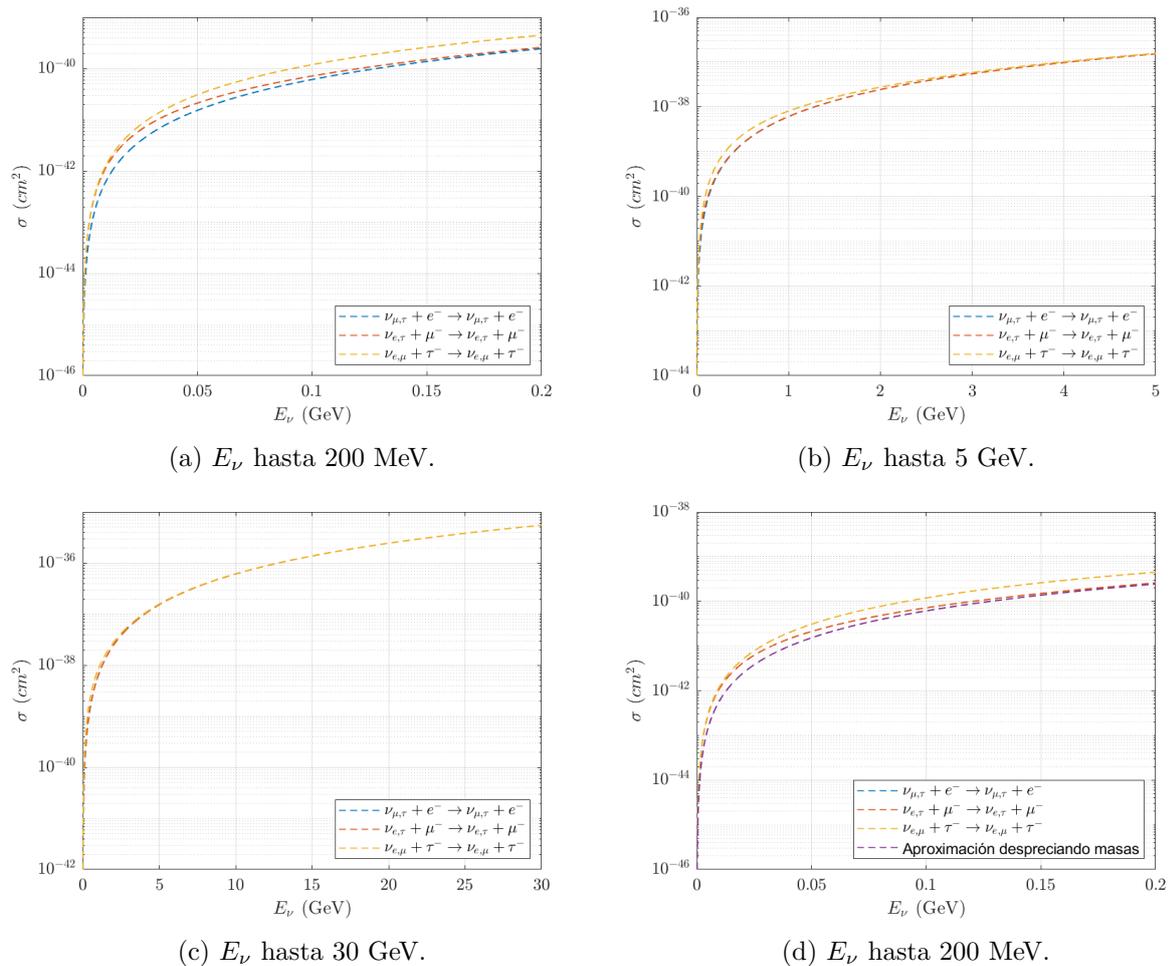


Figura 4.1: Sección eficaz total en función de la energía del neutrino incidente en el sistema COM. Representación de procesos puramente NC. (a), (b) y (c) corresponden a diferentes rangos de energías. (d) Comparación entre la expresión general (3.40) y la aproximación únicamente válida para altas energías en la que se desprecian las masas de los leptones inicial y final (3.41).

con el caso de procesos que también pueden ser CC), para distintas energías, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 E \approx 100 \text{ MeV} &\longrightarrow R = \frac{\sigma(\nu_{\mu,\tau} e^-)}{\sigma(\nu_{e,\mu} \tau^-)} \approx 0,513, \\
 E \approx 16,5 \text{ GeV} &\longrightarrow R = \frac{\sigma(\nu_{\mu,\tau} e^-)}{\sigma(\nu_{e,\mu} \tau^-)} \approx 0,997.
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Por otro lado, la Figura 4.1d muestra la comparación entre la expresión general (3.40) y la aproximación 3.41 que desprecia las masas de los leptones (aproximación que aparece en muchas referencias y es válida para altas energías [9, 4]). Obsérvese que esta aproximación no es adecuada para bajas energías, sobre todo para las curvas del muon y del tauón, cuyas masas son mayores que la del electrón.

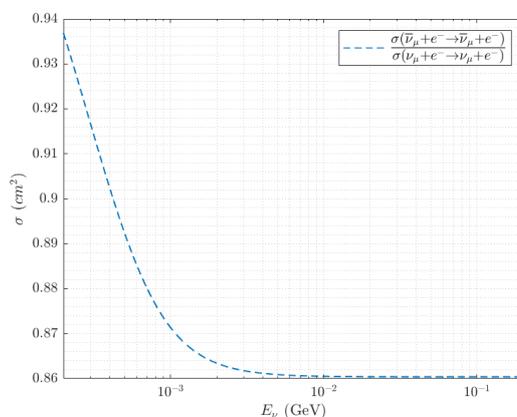
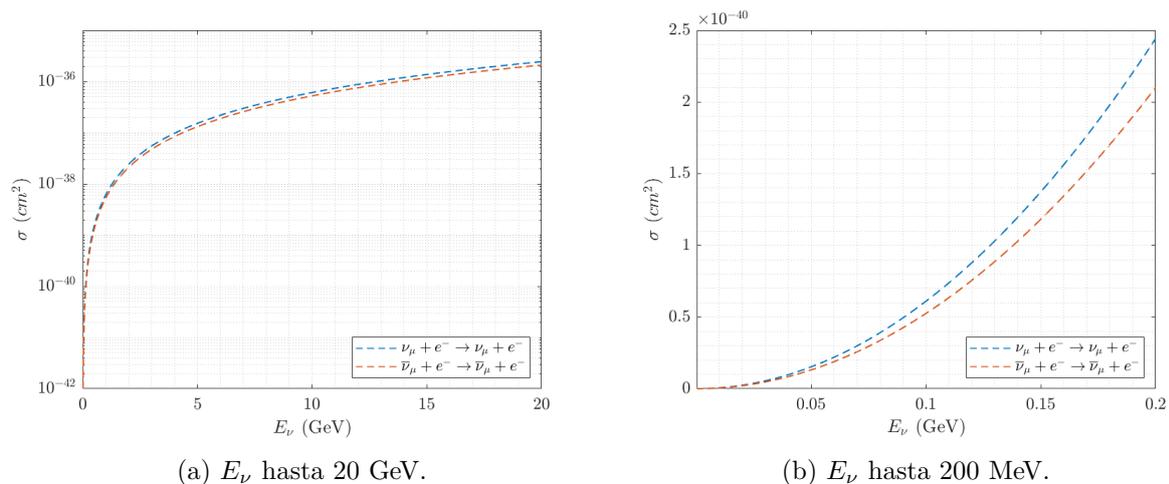


Figura 4.2: (a) y (b): Sección eficaz total NC en función de la energía del (anti)neutrino incidente en el sistema centro de momentos. Representación para diferentes rangos de energías. (c) Cociente teórico de las secciones eficaces NC de procesos que involucran a neutrinos y antineutrinos.

En la Figura 4.2 podemos observar la comparación entre procesos puramente NC que involucran a neutrinos y aquellos en los que participan antineutrinos (ecuación 3.42). En concreto, los procesos representados son colisiones neutrino-electrón y antineutrino-electrón. Es notable que un mismo proceso producido por antineutrinos presenta una sección eficaz menor (ver Figura 4.2). Esto se debe a las diferencias que existen entre las dos expresiones de la sección eficaz total (ecuaciones 3.40, 3.42), ya que la expresión para la colisión de antineutrinos es idéntica a la de los neutrinos sustituyendo  $g_A \rightarrow -g_A$ .

La diferencia entre las secciones eficaces es mayor a bajas energías (ver Figura 4.2b). Si representamos el cociente entre ambas secciones eficaces frente a distintos valores de la

energía del (anti)neutrino incidente (ver la Figura 4.2c), podemos observar que la diferencia aumenta a medida que la energía aumenta, estabilizándose para el valor del cociente  $R \approx 0,8604$ . Esta diferencia no es solamente interesante desde un punto de vista teórico, sino que históricamente se ha utilizado para realizar una medida experimental precisa del ángulo de Weinberg. Esto es relevante dado que el Modelo Estándar de Glashow-Weinberg-Salam no proporciona una manera de predecir el valor de este parámetro ([6]). Existen una gran cantidad de medidas experimentales de las secciones eficaces de los procesos de colisión entre neutrinos o antineutrinos muónicos y electrones (en los experimentos CHARM, LAMPF, Gargamelle, LSND). Dado que el cociente  $R$  entre las secciones eficaces de estos procesos ( $\nu_\mu e^-$ ) y ( $\bar{\nu}_\mu e^-$ ) depende (ver la ecuación 4.2), exclusivamente, del seno del ángulo de Weinberg ( $\sin \theta_w$ ) para energías mucho mayores que la masa del electrón (donde el cociente de las secciones eficaces es estable), una medida experimental del mismo es posible si conocemos los valores experimentales de estas secciones eficaces [32]. La deducción de la ecuación 4.2, únicamente válida en el rango de energías en el que la masa del electrón es despreciable, se encuentra en el apéndice D. Entre todos los cocientes experimentales que involucran colisiones neutrino-leptón, y no otras colisiones como neutrino-nucleón,  $R = \frac{\sigma_{\nu_\mu e^-}}{\sigma_{\bar{\nu}_\mu e^-}}$  permite una medida del ángulo de Weinberg con mayor precisión, ya que muchas de las incertidumbres sistemáticas se cancelan [5]. Un valor experimental del ángulo de Weinberg medido tal y como acabamos de describir se encuentra en [32] ( $\sin^2 \theta_w = 0,2324 \pm 0,0058(stat) \pm 0,0059(syst)$ ).

$$R = 3 \frac{1 - 4 \sin^2 \theta_w + \frac{16}{3} \sin^4 \theta_w}{1 - 4 \sin^2 \theta_w + 16 \sin^4 \theta_w}. \quad (4.2)$$

La dependencia del cociente  $R$  con el ángulo de Weinberg (ecuación 4.2) se muestra en la Figura 4.3. En ella se ha señalado el valor del  $\sin^2 \theta_w$  empleado en este trabajo para la representación de las secciones eficaces. Este valor ha sido tomado de la referencia [5]. El cociente  $R$  es  $\sigma_{(\nu_\mu e^-)} \approx 1,1623 \sigma_{(\bar{\nu}_\mu e^-)}$ , tal y como se señala en la Figura 4.3, para el  $\sin^2 \theta_w$  considerado ([5]). Este resultado conecta con el de la Figura 4.2c a altas energías. Es importante notar que el valor del  $\sin^2 \theta$  que proporciona la referencia [5] no ha sido medido de la forma que hemos descrito en esta sección. De esta consideración se deduce que es razonable que los valores que proporcionan [5] y [32] difieran ligeramente.

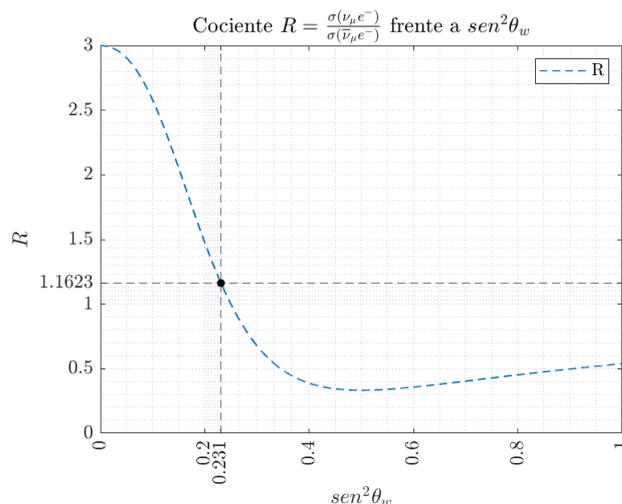


Figura 4.3: Cociente  $R = \frac{\sigma(\nu_\mu e^-)}{\sigma(\bar{\nu}_\mu e^-)}$  frente a  $\text{sen}^2\theta_w$ .

## 4.2. Procesos mediados por corrientes cargadas

En esta sección analizaremos, tanto procesos puramente CC, como la contribución CC en procesos que pueden ocurrir también por NC. En el capítulo 2 se ha discutido la imposibilidad de medir experimentalmente las contribuciones CC y NC por separado, para un proceso que puede ser mediado por ambas. La única medida posible es la sección eficaz total (NC + CC), que incluye un término de interferencia destructiva.

A diferencia de los procesos NC, los procesos que solamente pueden ser mediados por el bosón W sí tienen una energía mínima del neutrino inicial necesaria para que la reacción tenga lugar, asociada a la masa del leptón cargado resultante en el vértice del neutrino inicial. Esto es así porque el estado inicial y final del sistema no es idéntico, existiendo una transformación del neutrino incidente en un leptón, y viceversa, en cada uno de los vértices leptónicos (ver la Figura 3.2 para más detalle).

En la Figura 4.4 podemos observar las representaciones de distintos procesos que pueden ocurrir mediados por corrientes cargadas. En concreto, los mostrados en Figura 4.4a, Figura 4.4b y Figura 4.4d también pueden ser mediados por corrientes neutras. Estas curvas se han representado tomando la aproximación del leptón inicial ultrarrelativista (ecuación 3.49). Esta aproximación es adecuada para estudiar los procesos que involucran la colisión entre neutrinos y electrones, no así para los procesos con leptones más masivos. Esto podemos verlo en la Figura 4.4d donde hemos representado el proceso de dispersión neutrino muónico - muon para la aproximación ultrarrelativista (UR) y la expresión ge-

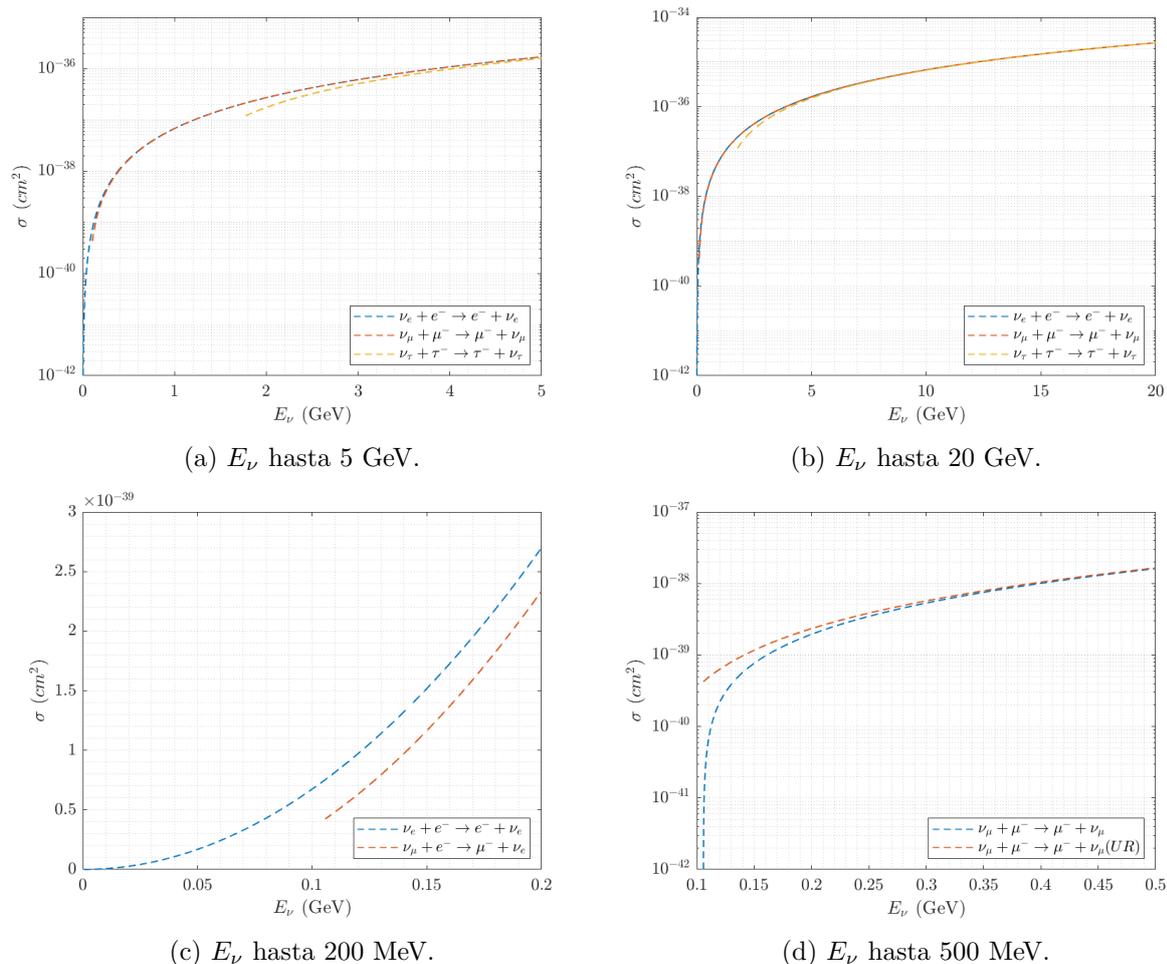


Figura 4.4: Sección eficaz total CC en función de la energía del neutrino incidente en el sistema COM. (a) y (b) Aproximación ultrarrelativista del leptón inicial. (c) Representación de la dispersión CC  $\nu_e e^-$  y del decaimiento inverso del muon. Aproximación ultrarrelativista. (d) Comparación entre la aproximación ultrarrelativista (UR) y la predicción completa para la sección eficaz.

neral de la sección eficaz CC (ecuación 3.48). Como vemos, existe una diferencia notable entre ambas curvas a bajas energías. A medida que la energía aumenta esta aproximación es más válida (como cabe esperar ya que se puede considerar al muon como relativista cuando la energía cinética es mucho mayor que la masa). Nótese también que la energía mínima inicial está relacionada con la masa de los leptones masivos en el estado final.

#### 4.2.1. Comparación entre secciones eficaces CC y NC

Una comparación experimental realista entre las secciones eficaces CC y NC debe involucrar a procesos puros, que no presenten el término de interferencia en la sección

eficaz medida. Vamos a considerar el decaimiento inverso del muon, es decir, el proceso  $\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e$ , un proceso que solo puede ser mediado por corrientes cargadas, y lo compararemos con la colisión  $\nu_\mu e^-$  mediada por corrientes neutras. Las secciones eficaces experimentales de estos procesos pueden encontrarse en las referencias [33] y [34] respectivamente, dando como resultado un cociente experimental:

$$R_{exp} = \frac{\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-}{\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e} \approx 0,099. \quad (4.3)$$

Los valores experimentales que estamos considerando están medidos para energías del neutrino incidente mucho mayores que la masa del muon ( $E_\nu \gg \frac{m_\mu^2}{m_e}$ ) [33]. En este rango de energías, el cociente evaluado es estable, y no presenta variaciones apreciables con el aumento de la energía del neutrino incidente. Como estamos considerando resultados a  $E_\nu \gg \frac{m_\mu^2}{m_e}$ , podemos describir el proceso  $\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$  a partir de la expresión de la sección eficaz CC teniendo en cuenta la aproximación del electrón inicial ultrarrelativista (ecuación 3.49). La colisión neutrino muónico - electrón viene descrita por la ecuación 3.40. El cociente teórico, utilizando las expresiones desarrolladas en este trabajo, para  $E_\nu \gg \frac{m_\mu^2}{m_e}$  es:

$$R_{teor} = \frac{\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-}{\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e} \approx 0,0905, \quad (4.4)$$

que, como ya hemos comentado, es estable para el rango de energías considerado. Vemos que existe un buen acuerdo entre el cociente experimental y teórico, sobre todo teniendo en cuenta que el error relativo del cociente experimental está en torno a un 18 % ([33, 34]). Debe tenerse en cuenta que en este trabajo no estamos considerando las correcciones que añaden los diagramas de orden superior en teoría de perturbaciones, por lo que es esperable una cierta diferencia con los resultados experimentales.

### 4.2.2. Secciones eficaces CC para dispersión de neutrinos y antineutrinos

La comparación directa entre las secciones eficaces de colisión CC para procesos que involucran neutrinos y antineutrinos nos proporciona una demostración de la estructura  $V - A$  que presenta la interacción débil. Es posible observar directamente esta característica de la interacción débil midiendo experimentalmente la distribución angular de la sección eficaz diferencial para procesos  $\nu - l$  y  $\bar{\nu} - l'$  [16].

En el capítulo 3 hemos calculado la sección eficaz diferencial respecto al ángulo de

salida del leptón en el sistema COM para procesos CC que involucran a neutrinos (ver la ecuación 3.47). El resultado muestra directamente que, en el sistema COM, la distribución angular es isotrópica. No hay ninguna dirección de salida en la que el proceso se vea favorecido. Si podemos observar directamente la estructura  $V - A$  de la interacción es porque esto no es así para el caso de colisiones de antineutrinos.

Para calcular la sección eficaz diferencial asociada a la colisión de antineutrinos solo es necesario intercambiar las variables asociadas a los neutrinos en la ecuación 3.43 (ver la Figura 3.2),  $P_1 \longleftrightarrow P_4$ , lo que sería equivalente al cambio de signo en la expresión de la corriente del neutrino:  $1 - \gamma^5$  a  $1 + \gamma^5$ . La ecuación queda de la siguiente forma:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{2G_F^2}{\pi(E_1 + E_2)^2} \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|} (P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot P_4). \quad (4.5)$$

Evaluamos la contracción de los cuadvectores:

$$\begin{aligned} P_1 \cdot P_3 &= E_1(E_3 - |\mathbf{p}_f| \cos\theta), \\ P_2 \cdot P_4 &= |\mathbf{p}_f|(E_2 + E_1 \cos\theta). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Introduciendo estos resultados en la sección eficaz diferencial y operando, llegamos a una sección eficaz diferencial dependiente del ángulo de salida del leptón  $\theta$ :

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{2G_F^2}{\pi(E_1 + E_2)^2} |\mathbf{p}_f|^2 [E_2 E_3 + (E_1 E_3 - E_2 |\mathbf{p}_f|) \cos\theta - E_1 |\mathbf{p}_f| \cos^2\theta], \quad (4.7)$$

que se puede comparar directamente con la expresión 3.47 que describe el caso de neutrinos, y observar que esta última no depende del coseno del ángulo de dispersión:

$$\frac{d\sigma}{d(\cos\theta)} = \frac{2G_F^2 |\mathbf{p}_f|^2}{\pi(E_1 + E_2)} (E_3 + |\mathbf{p}_f|).$$

Integrando para todos los ángulos la ecuación 4.7, la sección eficaz total (para antineutrinos) queda:

$$\sigma_{CC(\bar{\nu})} = \frac{4G_F^2}{\pi(E_1 + E_2)^2} |\mathbf{p}_f|^2 (E_2 E_3 - \frac{1}{3} E_1 |\mathbf{p}_f|). \quad (4.8)$$

La comparación de los resultados 3.47 y 4.7 se muestra en la Figura 4.5 para una energía del neutrino incidente de 2 GeV. Para energías mucho mayores que la masa del electrón, como la que estamos considerando, la expresión 4.7 es nula para el  $\cos\theta = 1$ , por los motivos que hemos discutido en la Figura 4.6. La sección eficaz diferencial

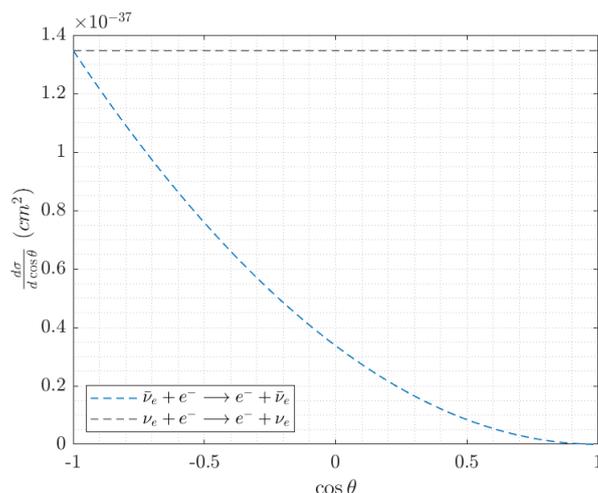


Figura 4.5: Secciones eficaces diferenciales respecto al coseno del ángulo de salida del leptón en el centro de momentos. Energía del (anti)neutrino incidente  $E_\nu = 2$  GeV. Representación comparativa entre colisiones CC que involucran neutrinos o antineutrinos.

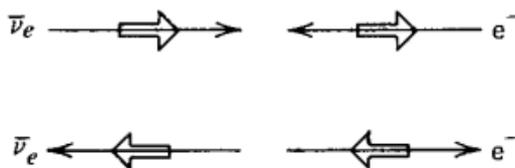


Figura 4.6: Dispersión antineutrino - electrón. Considerada en el sistema COM se representa el estado inicial (arriba) y el estado final (abajo), en el caso de dispersión con  $\theta = 0$  (ángulo definido como aquel que forman los vectores  $\mathbf{p}_i$  y  $\mathbf{p}_f$  en el sistema COM). Las flechas largas representan la dirección del momento y las cortas la helicidad. Como vemos, en el estado inicial el momento angular es  $+1$ , mientras que en el estado final es  $-1$ . El proceso está prohibido porque viola la conservación del momento angular. La figura está tomada de [16].

asociada a los neutrinos es isotrópica a lo largo de todos los ángulos, no así la asociada a antineutrinos. La colisión antineutrino - leptón está prohibida para la dispersión del leptón en dirección contraria a la incidente. Esto tiene una relación directa con la estructura  $V - A$  de la interacción y el hecho de que la helicidad de los neutrinos y antineutrinos esté completamente definida.

La dispersión en dirección contraria a la incidente del electrón está prohibida porque viola la conservación del momento angular. En el límite relativista el electrón tiene helicidad negativa, al colisionar con el antineutrino (helicidad positiva) y retrodispersarse, produciría un estado en el que se viola el momento angular (ver la Figura 4.6 para más detalle). Este proceso solo puede ocurrir manteniendo  $J = 1$ , es decir, uno de los tres estados de momento angular posibles ( $+1, 0, -1$ ). Las expresiones para cada caso son 3.47

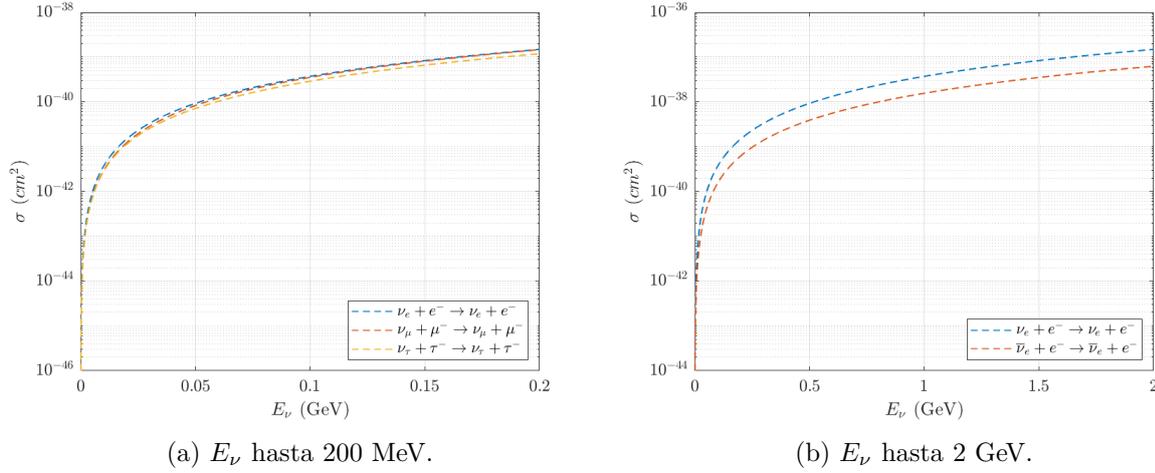


Figura 4.7: Sección eficaz total NC + CC en función de la energía del neutrino incidente en el sistema COM. La Figura 4.7a corresponde a procesos de colisión neutrino-leptón. La Figura 4.7b compara la colisión neutrino-leptón con la colisión antineutrino-leptón.

y 4.7. Integrando sobre todos los ángulos resulta [16]:

$$\sigma_{\bar{\nu}_e e^-}(CC) = \frac{1}{3} \sigma_{\nu_e e^-}(CC). \quad (4.9)$$

### 4.3. Procesos NC + CC

#### 4.3.1. Análisis del término de interferencia

Como ya se ha discutido ampliamente en este trabajo, la sección eficaz total de procesos que pueden ocurrir mediados por corrientes cargadas y neutras no es igual a la suma de ambas contribuciones,  $\sigma_T \neq \sigma_{NC} + \sigma_{CC}$ . En cambio, se verifica  $\sigma_T = \sigma_{CC} + \sigma_{NC} - c_I$ , donde  $c_I$  representa un término de interferencia. En la Figura 4.7a se ha representado la sección eficaz total de procesos de colisión neutrino-leptón que pueden ser mediados por los bosones W y Z.

A continuación, analizaremos el valor del término de interferencia  $c_I$  a través del proceso de dispersión  $\nu_e e^-$ , que es aquel que fue estudiado experimentalmente en LAMPF ([19]). La teoría indica que la sección eficaz NC de este proceso debe ser idéntica a la del proceso  $\nu_\mu e^-$  (ver la ecuación 3.40, donde no existe dependencia con los distintos sabores de neutrinos, solo existe dependencia con los sabores de los leptones cargados). Esta sección eficaz NC está medida experimentalmente ([34]), por lo que conocemos su valor. Por otro lado, los procesos CC son bien conocidos, y la sección eficaz no depende del ángulo

de Weinberg, por lo que el valor a una cierta energía está completamente definido [19]. Conocidas las supuestas contribuciones NC y CC solo queda medir experimentalmente la sección eficaz total del proceso de dispersión  $\nu_e e^-$  y calcular:

$$c_I = \sigma_T - \sigma_{CC} - \sigma_{NC}. \quad (4.10)$$

La medida experimental de la sección eficaz total en el experimento LAMPF ([19]) es:

$$\sigma_T = 3,15 \times 10^{-43} \text{ cm}^2. \quad (4.11)$$

El valor previo corresponde a una energía media del neutrino inicial de  $\langle E_{\nu_e} \rangle = 31,7 \text{ MeV}$  en el sistema laboratorio. Dado que esta sección eficaz viene dada en el sistema laboratorio no la podemos comparar directamente con nuestros resultados, expresados en el sistema COM. No obstante, podemos determinar el siguiente cociente, que muestra la intensidad de la interferencia destructiva:

$$R_{exp} = \frac{\sigma_T}{\sigma_{CC} + \sigma_{NC}} = 0,52. \quad (4.12)$$

Las predicciones teóricas para la sección eficaz total, la contribución únicamente de las amplitudes asociadas a CC y NC y la contribución de interferencia son, para  $E_{\nu_e} = 31,7 \text{ MeV}$  y en el sistema COM:

$$\begin{aligned} \sigma_T &= 3,5740 \times 10^{-41} \text{ cm}^2, \\ \sigma_{NC} + \sigma_{CC} &= 7,0658 \times 10^{-41} \text{ cm}^2, \\ c_I &= -3,4918 \times 10^{-41} \text{ cm}^2, \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde se ve claramente que la sección eficaz total es menor que la suma de las contribuciones NC y CC. Por lo que el cociente teórico queda:

$$R_{teo} = \frac{\sigma_T}{\sigma_{CC} + \sigma_{NC}} = 0,51. \quad (4.14)$$

Nótese que a altas energías las secciones eficaces son bastante estables, luego las diferencias entre el sistema COM y laboratorio son pequeñas y podemos dar un resultado acorde al experimental previo. También es relevante notar que la contribución del término de interferencia CC-NC en la amplitud es del mismo orden que la sección eficaz total. Los

datos experimentales se han tomado del artículo [19] y los valores teóricos se han obtenido de las expresiones 3.48, 3.40 y de la expresión 3.40 tomando  $g_A = 1 - g_A$ ,  $g_V = 1 - g_V$ . Podemos ver un buen acuerdo con el experimento, sobre todo teniendo en cuenta que la precisión con la que el experimento mide la sección eficaz total es de un 17,5% [19]. Además, como ya hemos comentado, no estamos considerando las correcciones a las secciones eficaces que surgen al considerar los diagramas de orden superior.

### 4.3.2. Diferencias entre colisiones de neutrinos y antineutrinos

En la Figura 4.7b está representada la sección eficaz total para los procesos de colisión (NC + CC)  $\nu_e e^-$  y  $\bar{\nu}_e e^-$ . Como vemos, existe una diferencia notable entre las secciones eficaces que presentan ambos procesos para los distintos valores de la energía inicial del (anti)neutrino. Los procesos de colisión que involucran antineutrinos tienen una probabilidad menor de ocurrencia. Concretamente, para una energía del (anti)neutrino muy superior a la masa del electrón, el cociente teórico de las secciones eficaces para estos procesos es estable y apenas presenta variación con la energía:

$$R = \frac{\sigma(\nu_e e^-)}{\sigma(\bar{\nu}_e e^-)} = 0,4198. \quad (4.15)$$

Podemos realizar una comparación general, tomando el proceso  $\nu_e e^-$  como referencia, de las secciones eficaces de los distintos procesos que hemos analizado en este capítulo. Los resultados que obtenemos ( $R = \frac{\sigma(\bar{\nu}_\alpha e^-)}{\sigma(\nu_e e^-)}$ ) concuerdan con el análisis que se realiza en [6]:

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu_e} : \sigma_{\bar{\nu}_e} : \sigma_{\nu_\mu} : \sigma_{\bar{\nu}_\mu} \\ = 1 : 0,4199 : 0,1642 : 0,1413 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Los dos primeros procesos  $\nu_e e^-$  y  $\bar{\nu}_e e^-$  presentan contribuciones CC y NC, incluyendo el término de interferencia CC-NC, como hemos analizado en esta sección. En cambio,  $\nu_\mu e^-$  y  $\bar{\nu}_\mu e^-$  son procesos puramente NC, analizados en la primera sección de este capítulo. Los resultados indican que los procesos de colisión neutrino-electrón puramente NC presentan una sección eficaz mucho menor que aquellos que cuentan con ambas contribuciones.

# Capítulo 5

## Conclusiones

El objetivo de este trabajo ha sido estudiar en detalle, aplicando el formalismo de la teoría cuántica de campos, procesos de dispersión elástica entre neutrinos y leptones a través de sus secciones eficaces. El análisis y la comprensión de estas secciones eficaces ha sido muy relevante en el desarrollo del Modelo Estándar de la Física de Partículas, sobre todo, por la introducción por parte de la teoría de Glashow-Weinberg-Salam de un nuevo bosón mediador, el bosón  $Z$ , cuya evidencia experimental quedó probada algunos años más tarde. Además, el Modelo Estándar presenta una serie de parámetros libres cuyos valores no vienen dados por la teoría, siendo necesaria una medida experimental de los mismos. En la teoría electrodébil, uno de los parámetros libres es el ángulo de Weinberg, cuya medida ha estado ligada históricamente a la experimentación con procesos de dispersión entre neutrinos y leptones (entre otros).

El trabajo ha abarcado el análisis de la interacción débil mediada por los dos bosones propagadores de la interacción ( $W$  y  $Z$ ), desarrollando el formalismo para calcular secciones eficaces NC y obteniendo, posteriormente, las ecuaciones para procesos con corrientes cargadas (CC) o procesos en los que contribuyen ambos tipos de corriente (NC + CC). El estudio de procesos puramente NC ha sido una parte muy importante de este trabajo. El cálculo analítico de las secciones eficaces se ha realizado tomando el lagrangiano NC, donde hemos discutido el comportamiento a bajas y altas energías de las secciones eficaces (ver el capítulo 4). Se ha estudiado (entre otras) la dispersión  $\nu_\mu e^-$ , mediada por corrientes neutras, que fue detectada por el experimento Gargamelle en el CERN ([18]), dando lugar a la primera evidencia experimental de la existencia de corrientes neutras. Por otro lado, hemos discutido la posibilidad de medir el valor del ángulo de Weinberg a través del cociente entre secciones eficaces para procesos que involucran a neutrinos o antineutrinos

(ecuación 4.2), y lo hemos comparado con los datos del experimento CHARM ([32]), en el que se hizo un análisis similar.

En cuanto a los procesos CC, hemos puesto en evidencia que nos proporcionan una manera sencilla de verificar la estructura  $V - A$  de la teoría de la interacción débil. La isotropía de la sección eficaz diferencial respecto al coseno del ángulo del leptón dispersado en el sistema COM para la dispersión de neutrinos contrasta con la dependencia que existe con el ángulo para procesos de dispersión de antineutrinos. Si consideramos únicamente la dispersión a altas energías, esto se traduce en una diferencia notable en la sección eficaz total del proceso (para más detalle se puede consultar el capítulo 4). Por otro lado, la diferencia de magnitud entre las secciones eficaces de procesos CC y NC permite entender las dificultades históricas que existieron a la hora de ser capaces de detectar los procesos NC experimentalmente.

La parte final del trabajo se enfoca en el análisis de los procesos en los que intervienen ambas corrientes, NC + CC, que son de gran interés teórico ya que existe un término de interferencia cuya contribución es del mismo orden que la suma de las contribuciones a la sección eficaz NC y CC por separado. En el capítulo 4, hemos cuantificado este término y lo hemos comparado con los resultados experimentales que se midieron en el experimento LAMPF ([19]).

Dejando a un lado los aspectos de este trabajo relacionados con la verificación experimental del Modelo Estándar, hemos discutido la importancia que tiene el conocimiento de estos procesos en los nuevos experimentos que pretenden estudiar las oscilaciones de neutrinos. En el experimento MINERvA ([22, 23, 28, 27]) se ha desarrollado un procedimiento que permite reducir la incertidumbre en el flujo de neutrinos que produce un acelerador de protones, haciendo uso del conocimiento actual de las secciones eficaces de los procesos de dispersión neutrino-electrón (entre otros). Se espera que los nuevos experimentos que pretenden medir las oscilaciones con un haz proveniente de un acelerador (como DUNE [25]) utilicen este método desarrollado en MINERvA.

El estudio que hemos realizado en este trabajo podría mejorarse mediante el análisis de los diagramas de orden superior en la teoría de perturbaciones, que añadirían correcciones a las secciones eficaces teóricas y permitirían obtener predicciones más próximas a los valores experimentales. Por otro lado, este trabajo constituye un punto de partida para estudiar procesos más complejos, como la interacción neutrino-nucleón o neutrino-núcleo, donde es necesario definir la estructura interna del nucleón y la dinámica nuclear.

# Apéndice A

## La ecuación de Dirac

Los leptones son partículas elementales de espín  $\frac{1}{2}$  y su comportamiento libre vendrá dado por una función de onda solución de la ecuación libre de Dirac:

$$(i\not{\partial} - M) \Psi = 0. \quad (\text{A.1})$$

La expresión A.1 es la ecuación de Dirac en su formulación completamente covariante utilizando la notación *slash* de Feynman. Conviene introducir esta notación, ya que es utilizada con frecuencia en este trabajo. Sea un cuadrivector  $A^\mu$  cualquiera y las matrices de Dirac  $\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma})$ , la notación *slash* se introduce de la siguiente forma:

$$\not{A} = \gamma^\mu A_\mu = \gamma_\mu A^\mu. \quad (\text{A.2})$$

Por tanto, el término  $\not{\partial}$  es equivalente a escribir explícitamente la contracción  $\gamma^\mu \partial_\mu$ . Las matrices de Dirac satisfacen las siguientes relaciones de hermiticidad, de unitariedad y de anticonmutación:

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^\dagger &= (\gamma^0)^{-1} = \gamma^0, \\ (\gamma^i)^\dagger &= (\gamma^i)^{-1} = \gamma^i, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}. \quad (\text{A.4})$$

Además, definimos la matriz  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5$ , que cumple las siguientes propiedades:

$$\gamma^5 \gamma^5 = \mathbb{1}, \quad (\text{A.5})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Las matrices de Dirac,  $\gamma^\mu$  pertenecen a un espacio de matrices dimensión 4. En la representación de Dirac, que no es más que una elección concreta, se definen a partir de las matrices de Pauli,  $\sigma_i$ , de la siguiente forma:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Las matrices de Pauli se definen como:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

## A.1. Soluciones libres de la ecuación de Dirac

Las funciones de onda soluciones de la ecuación de Dirac libre son soluciones de cuatro componentes con momento y proyección de espín bien definidos. Es habitual expresar las soluciones en función de los espinores  $u(\mathbf{p}, s)$  y  $v(\mathbf{p}, s)$  que, a su vez, dependen de los espinores de Pauli  $\chi_s$ . Una de las características relevantes de la ecuación de Dirac es que sus soluciones pueden tomar energías positivas o negativas ( $\pm E$ ), de manera que la descripción de partículas viene dada por las soluciones de energía positiva ( $+E$ ), y la descripción de antipartículas por las soluciones de energía negativa ( $-E$ ). Las funciones de onda libres y los espinores tienen la siguiente forma:

Para  $E > 0$ :

$$\Psi^{(+)} = \sqrt{\frac{1}{2EV}} u(\mathbf{p}, s) e^{-iP_\mu X^\mu}. \quad (\text{A.9})$$

Para  $E < 0$ :

$$\Psi^{(-)} = \sqrt{\frac{1}{2EV}} v(\mathbf{p}, s) e^{iP_\mu X^\mu}. \quad (\text{A.10})$$

Espinores pertenecientes a soluciones de energías positivas,  $u(\mathbf{p}, s)$ , y negativas,  $v(\mathbf{p}, s)$ :

$$u(\mathbf{p}, s) = \sqrt{E + M} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{E+M}\chi_s \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p}, s) = \sqrt{E + M} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{E+M}\chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Con los espinores de Pauli:

$$\chi_{+1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Se definen la función de onda adjunta de Dirac y el espinor adjunto como  $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$  y  $\bar{u}(\mathbf{p}, s) = u(\mathbf{p}, s)^\dagger \gamma^0$ , respectivamente. Una relación importante para el desarrollo de los cálculos de este trabajo es el valor de la suma sobre todas las direcciones posibles del spin del producto de dos espinores:

$$\begin{aligned} \sum_s u_\alpha(\mathbf{p}, s) \bar{u}_\beta(\mathbf{p}, s) &= (\not{P} + M)_{\alpha\beta}, \\ \sum_s v_\alpha(\mathbf{p}, s) \bar{v}_\beta(\mathbf{p}, s) &= (\not{P} - M)_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

# Apéndice B

## Cálculos de la sección eficaz

### B.1. Desarrollo de la delta de Dirac al cuadrado

Para obtener una expresión desarrollada de  $|S_{fi}|^2$  necesitamos evaluar la delta de Dirac al cuadrado que aparece en la ecuación 3.16. Este cálculo se detalla a continuación.

$$[(2\pi)^4 \delta^4(P_4 + P_3 - P_2 - P_1)]^2. \quad (\text{B.1})$$

Hacemos uso de la relación 3.13 para reescribir una de las deltas en forma de integral:

$$(2\pi)^4 \delta^4(P_4 + P_3 - P_2 - P_1) (2\pi)^4 \int \frac{d^4 X}{(2\pi)^4} e^{i(P_4 + P_3 - P_2 - P_1)X}. \quad (\text{B.2})$$

Teniendo en cuenta que  $\delta^4(P_4 + P_3 - P_2 - P_1)$  impone que  $P_4 + P_3 = P_2 + P_1$ , la integral anterior se reduce a  $\int d^4 X$ , que es el producto del volumen por el tiempo:

$$\begin{aligned} & [(2\pi)^4 \delta^4(P_4 + P_3 - P_2 - P_1)]^2 \\ &= (2\pi)^4 VT \delta^4(P_4 + P_3 - P_2 - P_1) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

### B.2. Integración de la sección eficaz diferencial respecto a los momentos

Para encontrar la expresión de la sección eficaz diferencial respecto al ángulo sólido es necesario integrar la ecuación 3.20, que es la sección eficaz diferencial respecto a los momentos de las partículas finales. Los resultados estarán particularizados para el sistema

COM, en el que  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_i$  y  $\mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_f$ .

Como la energía del neutrino (masa aproximadamente nula) satisface:  $E_1 = \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m_1^2}$  Y, por tanto  $E_1 = \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_i$ . El producto  $P_1 \cdot P_2$  puede escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P_1 \cdot P_2 &= E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 = E_1 E_2 + |\mathbf{p}_i| \\ &= E_1 E_2 + E_1^2 = (E_1 + E_2) \mathbf{p}_i \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Se puede demostrar (ver [30]) que, incluso tomando el flujo incidente como la expresión 3.8, esto es, sin particularizar para la masa del neutrino inicial igual a cero, es posible escribir el término  $\sqrt{(P_1 \cdot P_2)^2 - m_1^2 m_2^2}$  como  $(E_1 + E_2) \mathbf{p}_i$  en el sistema COM. Por otro lado, la delta de Dirac puede desarrollarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \delta^4(P_4 + P_3 - P_2 - P_1) &= \delta(E_4 + E_3 - E_2 - E_1) \delta^3(\mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_3 \underbrace{-\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}_{=0}) \\ &= \delta(\sqrt{\mathbf{p}_4^2 + m_4^2} + \sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2} - E_2 - E_1) \delta^3(\mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_3) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Donde  $\delta^3(\mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_3)$  asegura que  $\mathbf{p}_4 = -\mathbf{p}_3$  en el sistema COM. A continuación, evaluaremos la integral sin particularizar para el caso descrito en la Figura 3.1 ( $m_1 = m_3 = 0$ ). De este modo será más sencillo particularizar para otros casos posteriormente.

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2 (E_1 + E_2) \mathbf{p}_i} \int_{\Delta \mathbf{p}_4} \frac{\delta\left(\sqrt{\mathbf{p}_4^2 + m_4^2} + \sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2} - E_2 - E_1\right) \delta^3(\mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_3)}{\sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2} \sqrt{\mathbf{p}_4^2 + m_4^2}} \times |\overline{M_{fi}}|^2 d^3 \mathbf{p}_3 d^3 \mathbf{p}_4 \quad (\text{B.6})$$

Resolviendo la integral a través de la delta de Dirac ( $\mathbf{p}_4 \rightarrow \mathbf{p}_3$ ):

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2 (E_1 + E_2) \mathbf{p}_i} \frac{\delta\left(\sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_4^2} + \sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2} - E_2 - E_1\right)}{\sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2} \sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_4^2}} \times |\overline{M_{fi}}|^2 d^3 \mathbf{p}_3 \quad (\text{B.7})$$

El diferencial se puede reescribir teniendo en cuenta que  $\theta$  es el ángulo que forman  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_3$  (ángulo de *scattering*) y utilizando coordenadas esféricas. Haciendo coincidir el

ángulo  $\theta$  en esféricas con el ángulo de *scattering* previamente definido:

$$d^3\mathbf{p}_3 = |\mathbf{p}_3|^2 d|\mathbf{p}_3| \sin\theta d\theta d\varphi \quad (\text{B.8})$$

Integrando, obtenemos la sección eficaz diferencial respecto al ángulo sólido:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2(E_1 + E_2)|\mathbf{p}_i|} \int_{\Delta|\mathbf{p}_3|} \frac{\delta\left(\sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_4^2} + \sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2} - E_2 - E_1\right)}{\sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2}\sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_4^2}} \times |\overline{M}_{fi}|^2 |\mathbf{p}_3|^2 d|\mathbf{p}_3| \quad (\text{B.9})$$

Introducimos un cambio de variable para resolver la integral:

$$r = \sqrt{m_3^2 + \mathbf{p}_3^2} + \sqrt{m_4^2 + \mathbf{p}_3^2} \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{dr}{d|\mathbf{p}_3|} = \frac{|\mathbf{p}_3|}{\sqrt{m_3^2 + \mathbf{p}_3^2}} + \frac{|\mathbf{p}_3|}{\sqrt{m_4^2 + \mathbf{p}_3^2}} = \frac{\sqrt{m_4^2 + \mathbf{p}_3^2} + \sqrt{m_3^2 + \mathbf{p}_3^2}}{\sqrt{m_3^2 + \mathbf{p}_3^2}\sqrt{m_4^2 + \mathbf{p}_3^2}} |\mathbf{p}_3| \quad (\text{B.11})$$

Por lo que:

$$\frac{|\mathbf{p}_3| d|\mathbf{p}_3|}{\sqrt{m_3^2 + \mathbf{p}_3^2}\sqrt{m_4^2 + \mathbf{p}_3^2}} = \frac{dr}{r} \quad (\text{B.12})$$

Que, multiplicando por  $|\mathbf{p}_3|$  en ambos miembros se transforma en:

$$\frac{|\mathbf{p}_3|^2 d|\mathbf{p}_3|}{\sqrt{m_3^2 + \mathbf{p}_3^2}\sqrt{m_4^2 + \mathbf{p}_3^2}} = \frac{dr}{r} |\mathbf{p}_3| \quad (\text{B.13})$$

Utilizando este resultado, la integral se puede escribir como sigue:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2(E_1 + E_2)|\mathbf{p}_i|} \int |\overline{M}_{fi}|^2 \delta(r - (E_1 + E_2)) |\mathbf{p}_3| \frac{dr}{r} \quad (\text{B.14})$$

Evaluamos la integral utilizando la delta de Dirac ( $r = E_1 + E_2$ ):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2(E_1 + E_2)|\mathbf{p}_i|} |\overline{M}_{fi}|^2 \frac{|\mathbf{p}_3|}{(E_1 + E_2)} \quad (\text{B.15})$$

Agrupando términos y escribiendo la expresión de forma compacta, la sección eficaz

diferencial respecto del ángulo sólido en el sistema COM es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2(E_1 + E_2)^2} |\overline{M_{fi}}|^2 \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|} \quad (\text{B.16})$$

Como  $r = \sqrt{m_3^2 + \mathbf{p}_3^2} + \sqrt{m_4^2 + \mathbf{p}_3^2}$  podemos desarrollar esta expresión tomando el cuadrado en ambos miembros y despejar el valor de  $|\mathbf{p}_3|$ . Procediendo de esta manera, tras un largo cálculo se llega a:

$$|\mathbf{p}_3| = |\mathbf{p}_f| = \frac{1}{2r} \sqrt{r^4 + m_3^4 + m_4^4 - 2m_3^2m_4^2 - 2r^2m_3^2 - 2r^2m_4^2} \quad (\text{B.17})$$

Pero, considerando los resultados de la integral,  $r = E_1 + E_2$  por la acción de la delta de Dirac. Obtenemos una expresión del momento final de las partículas en función de las energías iniciales:

$$|\mathbf{p}_f| = \frac{[E_1 + E_2]^4 + m_3^4 + m_4^4 - 2m_3^2m_4^2 - 2(E_1 + E_2)^2m_3^2 - 2(E_1 + E_2)^2m_4^2]^{\frac{1}{2}}}{2(E_1 + E_2)} \quad (\text{B.18})$$

### B.3. Términos de la amplitud de transición al cuadrado

La expresión de la amplitud de transición 3.22 puede simplificarse si operamos con los términos que aparecen conjugados y los expresamos en forma de términos sin conjugar. Para ello, tenemos en cuenta que el espinor adjunto es  $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$  y las propiedades de hermiticidad de las matrices de Dirac definidas en la ecuación A.3, reescribimos las expresiones conjugadas como sigue:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & [\bar{u}(3)\gamma^\nu(1 - \gamma^5)u(1)]^\dagger = [u(3)^\dagger\gamma^0\gamma^\nu(1 - \gamma^5)u(1)]^\dagger \\ & = [u(1)^\dagger \underbrace{\gamma^0\gamma^0}_1 (1 - \gamma^5)^\dagger \gamma^{\nu\dagger} \gamma^{0\dagger} u(3)] = [\bar{u}(1)\gamma^0(1 - \gamma^5)^\dagger \gamma^{\nu\dagger} \gamma^0 u(3)] \\ & = [\bar{u}(1)\gamma^0(1 - \gamma^5)\gamma^{\nu\dagger} \gamma^0 u(3)] = [\bar{u}(1)(\gamma^0\gamma^{\nu\dagger}\gamma^0 - \gamma^0\gamma^5\gamma^{\nu\dagger}\gamma^0)u(3)] \\ & = [\bar{u}(1)(\gamma^0\gamma^{\nu\dagger}\gamma^0 + \gamma^5\gamma^0\gamma^{\nu\dagger}\gamma^0)u(3)] = [\bar{u}(1)(1 + \gamma^5)\gamma^\nu u(3)] \\ & = [\bar{u}(1)\gamma^\nu(1 - \gamma^5)u(3)] \\ & = [\bar{u}(1)\Gamma^\nu u(3)] \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned}
 \text{II.} \quad & [\bar{u}(4)\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)u(2)]^\dagger = [u(4)^\dagger\gamma^0\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)u(2)]^\dagger \\
 & = [u(2)^\dagger \underbrace{\gamma^0\gamma^0}_1 (g_V - g_A\gamma^5)^\dagger \gamma_\nu^\dagger \gamma^0 u(4)] \\
 & = [\bar{u}(2) \underbrace{\gamma^0(g_V - g_A\gamma^5)^\dagger \gamma_\nu^\dagger \gamma^0}_{\text{Igual que en B.19}} u(4)] \tag{B.20} \\
 & = [\bar{u}(2)\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)u(4)] \\
 & = [\bar{u}(2)\tilde{\Gamma}_\nu u(4)]
 \end{aligned}$$

## B.4. Evaluación de los sumatorios para todas las polarizaciones de espín

El cálculo del sumatorio sobre todas las polarizaciones de espín de la expresión 3.26 se detalla a continuación.

Separamos los sumatorios y evaluamos los términos  $\sum_{s_1} \sum_{s_3}$  y  $\sum_{s_2} \sum_{s_4}$  independientemente. Hacemos uso de las relaciones de normalización que satisfacen los espinores de Dirac, tal y como está definido en el apéndice A, ecuación A.13:

$$\sum_{s_i} u(s_i)\bar{u}(s_i) = \not{P}_i + m_i \tag{B.21}$$

El primer término se desarrolla de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad & \sum_{s_1} \sum_{s_3} [\bar{u}(3)\Gamma^\mu u(1)\bar{u}(1)\Gamma^\nu u(3)] \\
 & = \sum_{s_3} \bar{u}(3)\Gamma^\mu \sum_{s_1} [u(1)\bar{u}(1)] \Gamma^\nu u(3) \\
 & = \sum_{s_3} \bar{u}(3)\Gamma^\mu (\not{P}_1 + m_1)\Gamma^\nu u(3) \\
 & = \sum_{i,j} \sum_{s_3} (\bar{u}(3)u(3))_{j,i} [\Gamma^\mu (\not{P}_1 + m_1)\Gamma^\nu]_{i,j} \\
 & = \sum_{i,j} (\not{P}_3 + m_3)_{j,i} [\Gamma^\mu (\not{P}_1 + m_1)\Gamma^\nu]_{i,j} \\
 & = \text{Tr} [(\not{P}_3 + m_3) \Gamma^\mu (\not{P}_1 + m_1)\Gamma^\nu]
 \end{aligned} \tag{B.22}$$

Procediendo de la misma forma para los otros dos sumatorios:

$$\begin{aligned}
\text{II.} \quad & \sum_{s_2} \sum_{s_4} [\bar{u}(4) \tilde{\Gamma}_\mu u(2) \bar{u}(2) \tilde{\Gamma}_\nu u(4)] \\
&= \sum_{s_4} \bar{u}(4) \tilde{\Gamma}_\mu \sum_{s_2} [u(2) \bar{u}(2)] \tilde{\Gamma}_\nu u(4) \\
&= \sum_{s_4} \bar{u}(4) \tilde{\Gamma}_\mu (\not{P}_2 + m_2) \tilde{\Gamma}_\nu u(4) \\
&= \sum_{k,t} \sum_{s_4} (\bar{u}(4) u(4))_{t,k} [\tilde{\Gamma}_\mu (\not{P}_2 + m_2) \tilde{\Gamma}_\nu]_{k,t} \\
&= \sum_{k,t} (\not{P}_4 + m_4)_{t,k} [\tilde{\Gamma}_\mu (\not{P}_2 + m_2) \tilde{\Gamma}_\nu]_{k,t} \\
&= \text{Tr}[(\not{P}_4 + m_4) \tilde{\Gamma}_\mu (\not{P}_2 + m_2) \tilde{\Gamma}_\nu]
\end{aligned} \tag{B.23}$$

# Apéndice C

## Cálculo de la amplitud de transición invariante

Para obtener una expresión de la sección eficaz de los procesos de dispersión es necesario evaluar la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} |\overline{M}_{fi}|^2 &= \frac{G_f^2}{64} \text{Tr} [\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (\not{P}_1 + m_1) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) (\not{P}_3 + m_3)] \\ &\quad \times \text{Tr} [\gamma_\mu (g_V - g_A \gamma^5) (\not{P}_2 + m_2) \gamma_\nu (g_V - g_A \gamma^5) (\not{P}_4 + m_4)] \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

### C.1. Teoremas de trazas

El cálculo del cuadrado de la amplitud de transición invariante implica el producto de trazas que dependen de contracciones de las matrices de Dirac y de cuadvectores. Es conveniente introducir algunos teoremas para la resolución de este problema [9].

$$\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) \quad (\text{C.2})$$

$$\text{Tr}(\alpha A) = \alpha \text{Tr}(A) \quad (\text{C.3})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda}) \quad (\text{C.4})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4(g^{\mu\nu}) \quad (\text{C.5})$$

$$\text{La traza de un producto impar de matrices de Dirac, } \gamma^\mu, \text{ es nula.} \quad (\text{C.6})$$

Donde  $A$  y  $B$  son matrices cualesquiera y  $\alpha$  un número.

Definimos el tensor antisimétrico de Levi-Civita:

$$\epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{si } (\mu\nu\sigma\lambda) \text{ es permutación par de } (1, 2, 3, 4) \\ -1 & \text{si } (\mu\nu\sigma\lambda) \text{ es una permutación impar de } (1, 2, 3, 4) \\ 0 & \text{si dos índices son iguales} \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

$$\epsilon_{\mu\nu\sigma\lambda} = -\epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} \quad (\text{C.8})$$

$$\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma) = -4i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \quad (\text{C.9})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -2(\delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\lambda - \delta_\beta^\sigma \delta_\alpha^\lambda) \quad (\text{C.10})$$

## C.2. Cálculo de la contracción de los tensores leptónicos

A continuación, utilizando los teoremas de trazas enunciados, así como las propiedades de las matrices de Dirac  $\gamma^\mu$  y  $\gamma^5$  para calcular los productos de las trazas que aparecen en C.1. Comenzando por la primera traza, nos queda:

$$\begin{aligned} \text{I. } & \text{Tr} [\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (\not{P}_1 + m_1) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) (\not{P}_3 + m_3)] \\ &= \text{Tr} \left[ \underbrace{\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \not{P}_1 \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \not{P}_3}_\alpha \right] + \text{Tr} \left[ \overbrace{\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \not{P}_1 \gamma^\nu (1 - \gamma^5) m_3}^\beta \right] \\ &+ \text{Tr} \left[ \underbrace{\gamma^\mu (1 - \gamma^5) m_1 \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \not{P}_3}_\gamma \right] + \text{Tr} \left[ \overbrace{\gamma^\mu (1 - \gamma^5) m_1 \gamma^\nu (1 - \gamma^5) m_3}^\delta \right] \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Evaluamos a continuación, por separado, los distintos términos del resultado anterior, donde hemos utilizado la propiedad C.2. Desarrollando la  $\text{Tr}(\alpha)$  nos queda:

$$\begin{aligned}
 1. \quad \text{Tr}(\alpha) &= \text{Tr} [\gamma^\mu \not{P}_1 \gamma^\nu \not{P}_3 - \gamma^\mu \not{P}_1 \gamma^\nu \gamma^5 \not{P}_3 - \gamma^\mu \gamma^5 \not{P}_1 \gamma^\nu \not{P}_3 + \gamma^\mu \gamma^5 \not{P}_1 \gamma^\nu \gamma^5 \not{P}_3] \\
 &= \text{Tr} [\gamma^\mu \not{P}_1 \gamma^\nu \not{P}_3] - \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^5 \not{P}_1 \gamma^\nu \not{P}_3] - \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^5 \not{P}_1 \gamma^\nu \not{P}_3] + \text{Tr} [\gamma^\mu \not{P}_1 \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^5 \not{P}_3] \\
 &= 2 \text{Tr} [\gamma^\mu \not{P}_1 \gamma^\nu \not{P}_3] - 2 \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^5 \not{P}_1 \gamma^\nu \not{P}_3] \\
 &= 2 \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\lambda P_{1\lambda} \gamma^\nu \gamma^\sigma P_{3\sigma}] - 2 \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\alpha P_{1\alpha} \gamma^\nu \gamma^\beta P_{3\beta}] \\
 &= 2 P_{1\lambda} P_{3\sigma} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\sigma] - 2 P_{1\alpha} P_{3\beta} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta] \\
 &= 8 P_{1\lambda} P_{3\sigma} [g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\lambda\nu}] - 8 i \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} P_{1\alpha} P_{3\beta}
 \end{aligned} \tag{C.12}$$

Donde hemos hecho uso de las relaciones de conmutación de las matrices de Dirac y la relación A.5. Introduciendo los cuadrimentos en el corchete y operando con los tensores métricos llegamos a la siguiente expresión para la  $\text{Tr}(\alpha)$ :

$$\text{Tr}(\alpha) = 8 [P_1^\mu P_3^\nu - g^{\mu\nu} P_1 P_3 + P_3^\mu P_1^\nu - i \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} P_{1\alpha} P_{3\beta}] \tag{C.13}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \text{Tr}(\gamma) &= m_1 \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \not{P}_3 - \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 \not{P}_3 - \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu \not{P}_3 + \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu \gamma^5 \not{P}_3] \\
 &= m_1 [\cancel{\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \not{P}_3)} - \cancel{\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 \not{P}_3)} - \cancel{\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu \not{P}_3)} - \cancel{\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu \gamma^5 \not{P}_3)}] = 0
 \end{aligned}$$

La  $\text{Tr}(\beta)$  se anula también se anula, debido a que la traza de un producto de un número impar de matrices de Dirac es cero C.6:

$$\begin{aligned}
 3. \quad \text{Tr}(\beta) &= m_3 \text{Tr} [\gamma^\mu \not{P}_1 \gamma^\nu - \gamma^\mu \not{P}_1 \gamma^\nu \gamma^5 - \gamma^\mu \gamma^5 \not{P}_1 \gamma^\nu + \gamma^\mu \gamma^5 \not{P}_1 \gamma^\nu \gamma^5] \\
 &= 2 m_3 \{ \text{Tr} [\gamma^\mu \not{P}_1 \gamma^\nu] - \text{Tr} [\gamma^\mu \not{P}_1 \gamma^\nu \gamma^5] \} = 0
 \end{aligned} \tag{C.14}$$

Es fácil ver que los dos términos involucrados en la  $\text{Tr}(\beta)$  son productos impares de matrices de Dirac. En cuarto lugar, evaluamos la  $\text{Tr}(\delta)$ :

$$\begin{aligned}
4. \quad \text{Tr}(\delta) &= m_1 m_3 \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu - \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 + \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu \gamma^5] \\
&= m_1 m_3 [\cancel{\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu)} + \cancel{\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu)} - \cancel{\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5)} - \cancel{\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5)}] = 0
\end{aligned}$$

De esta forma, se obtiene que, la primera traza que aparece en la expresión C.1 es:

$$\begin{aligned}
\text{I.} \quad &\text{Tr} [\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (\not{P}_1 + m_1) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) (\not{P}_3 + m_3)] \\
&= 8 [P_1^\mu P_3^\nu - g^{\mu\nu} P_1 P_3 + P_3^\mu P_1^\nu - i\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} P_{1\alpha} P_{3\beta}]
\end{aligned} \tag{C.15}$$

A continuación, procedemos de la misma forma con el segundo término de C.1:

$$\begin{aligned}
\text{II.} \quad &\text{Tr} [\gamma_\mu (g_V - g_A \gamma^5) (\not{P}_2 + m_2) \gamma_\nu (g_V - g_A \gamma^5) (\not{P}_4 + m_4)] \\
&= \text{Tr} \left[ \underbrace{\gamma_\mu (g_V - g_A \gamma^5) \not{P}_2 \gamma_\nu (g_V - g_A \gamma^5) \not{P}_4}_A \right] + \text{Tr} \left[ \overbrace{\gamma_\mu (g_V - g_A \gamma^5) \not{P}_2 \gamma_\nu (g_V - g_A \gamma^5) m_4}^B \right] \\
&+ \text{Tr} \left[ \underbrace{\gamma_\mu (g_V - g_A \gamma^5) m_2 \gamma_\nu (g_V - g_A \gamma^5) m_4}_C \right] + \text{Tr} \left[ \overbrace{\gamma_\mu (g_V - g_A \gamma^5) m_2 \gamma_\nu (g_V - g_A \gamma^5) \not{P}_4}^D \right]
\end{aligned} \tag{C.16}$$

En este caso, no se anularán tres de los términos como en el caso anterior, sino solamente dos de ellos. Los términos  $\text{Tr}[B]$  y  $\text{Tr}[D]$  se anulan por los mismos argumentos que  $\text{Tr}[\beta]$  y  $\text{Tr}[\gamma]$ , respectivamente:

$$1. \quad \text{Tr}(B) = m_4 \text{Tr} [g_V^2 \gamma_\mu \not{P}_2 \gamma_\nu - g_V g_A \gamma_\mu \not{P}_2 \gamma_\nu \gamma^5 - g_V g_A \gamma_\mu \gamma^5 \not{P}_2 \gamma_\nu + g_A^2 \gamma_\mu \gamma^5 \not{P}_2 \gamma_\nu \gamma^5] = 0 \tag{C.17}$$

$$2. \quad \text{Tr}(D) = m_2 \text{Tr} [g_V^2 \gamma_\mu \gamma_\nu \not{P}_4 - g_V g_A \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^5 \not{P}_4 - g_V g_A \gamma_\mu \gamma^5 \gamma_\nu \not{P}_4 + g_A^2 \gamma_\mu \gamma^5 \gamma_\nu \gamma^5 \not{P}_4] = 0 \tag{C.18}$$

Para evaluar la siguiente traza utilizamos el teorema C.5:

$$\begin{aligned}
 3. \quad \text{Tr}(C) &= m_2 m_4 \text{Tr} [g_V^2 \gamma_\mu \gamma_\nu - g_V g_A \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^5 - g_V g_A \gamma_\mu \gamma^5 \gamma_\nu + g_A^2 \gamma_\mu \gamma^5 \gamma_\nu \gamma^5] \\
 &= m_2 m_4 \text{Tr} [g_V^2 \gamma_\mu \gamma_\nu - \cancel{g_V g_A \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^5} + \cancel{g_V g_A \gamma_\mu \gamma^5 \gamma_\nu} + g_A^2 \gamma_\mu \gamma^5 \gamma_\nu \gamma^5] \\
 &= m_2 m_4 (g_V^2 - g_A^2) \text{Tr} [\gamma_\mu \gamma_\nu] = 4m_2 m_4 (g_V^2 - g_A^2) g_{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{C.19}$$

La  $\text{Tr}(A)$  contiene términos idénticos, salvo un signo, a la  $\text{Tr}(\alpha)$ . Mostramos el cálculo de forma más directa:

$$\begin{aligned}
 4. \quad \text{Tr}(A) &= \text{Tr} [g_V^2 \gamma_\mu \not{P}_2 \gamma_\nu \not{P}_4 - g_A g_V \gamma_\mu \gamma^5 \not{P}_2 \gamma_\nu \not{P}_4 - g_A g_V \gamma_\mu \not{P}_2 \gamma_\nu \gamma^5 \not{P}_4 + g_A^2 \gamma_\mu \gamma^5 \not{P}_2 \gamma_\nu \gamma^5 \not{P}_4] \\
 &= (g_V^2 + g_A^2) \text{Tr} [\gamma_\mu \not{P}_2 \gamma_\nu \not{P}_4] + 2g_V g_A \text{Tr} [\gamma^5 \gamma_\mu \not{P}_2 \gamma_\nu \not{P}_4] \\
 &= 4(g_V^2 + g_A^2) [P_{2\mu} P_{4\nu} - g_{\mu\nu} P_2 P_4 + P_{4\mu} P_{2\nu}] + 8g_V g_A [i\epsilon_{\mu\lambda\nu\sigma} P_{2\lambda} P_{4\sigma}]
 \end{aligned} \tag{C.20}$$

Esto significa que el segundo término de C.1 da como resultado:

$$\begin{aligned}
 \text{II.} \quad &\text{Tr} [\gamma_\mu (g_V - g_A \gamma^5) (\not{P}_2 + m_2) \gamma_\nu (g_V - g_A \gamma^5) (\not{P}_4 + m_4)] \\
 &= 4(g_V^2 + g_A^2) [P_{2\mu} P_{4\nu} - g_{\mu\nu} P_2 P_4 + P_{4\mu} P_{2\nu}] + 8g_V g_A [i\epsilon_{\mu\lambda\nu\sigma} P_{2\lambda} P_{4\sigma}] \\
 &\quad + 4m_2 m_4 (g_V^2 - g_A^2) g_{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{C.21}$$

Incorporando C.15 y C.21 en la expresión C.1 obtenemos:

$$\begin{aligned}
 |\overline{M}_{fi}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} \{ [P_1^\mu P_3^\nu - g^{\mu\nu} P_1 P_3 + P_3^\mu P_1^\nu - i\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} P_{1\alpha} P_{3\beta}] \} \\
 &\quad \times \{ (g_V^2 + g_A^2) [P_{2\mu} P_{4\nu} - g_{\mu\nu} P_2 P_4 + P_{4\mu} P_{2\nu}] + 2g_V g_A [i\epsilon_{\mu\lambda\nu\sigma} P_{2\lambda} P_{4\sigma}] \\
 &\quad + m_2 m_4 (g_V^2 - g_A^2) g_{\mu\nu} \}
 \end{aligned} \tag{C.22}$$

El siguiente paso es evaluar el producto que aparece en C.22. El cálculo es bastante extenso y se muestra a continuación detalladamente. En primer lugar, multiplicamos los términos entre llaves.

$$\begin{aligned}
|\overline{M_{fi}}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} \{ (g_V^2 + g_A^2) (P_1^\mu P_3^\nu P_{2\mu} P_{4\nu} - P_1^\mu P_3^\nu g_{\mu\nu} (P_2 \cdot P_4) + P_1^\mu P_3^\nu P_{4\mu} P_{2\nu} \\
&\quad - g^{\mu\nu} (P_1 \cdot P_3) P_{2\mu} P_{4\nu} + g^{\mu\nu} (P_1 \cdot P_3) g_{\mu\nu} (P_2 \cdot P_4) - g^{\mu\nu} (P_1 \cdot P_3) P_{4\mu} P_{2\nu} + P_3^\mu P_1^\nu P_{2\mu} P_{4\nu} \\
&\quad - P_3^\mu P_1^\nu g_{\mu\nu} (P_2 \cdot P_4) + P_3^\mu P_1^\nu P_{4\mu} P_{2\nu} - i\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} P_{1\alpha} P_{3\beta} P_{2\mu} P_{4\nu} \\
&\quad + i\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} P_{1\alpha} P_{3\beta} g_{\mu\nu} (P_2 \cdot P_4) - i\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} P_{1\alpha} P_{3\beta} P_{4\mu} P_{2\nu}) + 2g_V g_A (P_1^\mu P_3^\nu i\epsilon_{\mu\lambda\nu\sigma} P_{2\lambda} P_{4\sigma} \\
&\quad - g^{\mu\nu} (P_1 \cdot P_3) i\epsilon_{\mu\lambda\nu\sigma} P_{2\lambda} P_{4\sigma} + P_3^\mu P_1^\nu i\epsilon_{\mu\lambda\nu\sigma} P_{2\lambda} P_{4\sigma} - i^2 \epsilon_{\mu\lambda\nu\sigma} P_{2\lambda} P_{4\sigma} \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} P_{1\alpha} P_{3\beta}) \\
&\quad + m_2 m_4 (g_V^2 - g_A^2) (P_1^\mu P_3^\nu g_{\mu\nu} - g^{\mu\nu} (P_1 \cdot P_3) g_{\mu\nu} + P_3^\mu P_1^\nu g_{\mu\nu} - i\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} P_{1\alpha} P_{3\beta} g_{\mu\nu}) \}
\end{aligned} \tag{C.23}$$

A continuación, evaluamos las distintas contracciones entre cuadvectores, entre cuadvectores y tensores métricos, y entre el tensor métrico y el tensor de Levi-Civita. En el siguiente paso utilizaremos las siguientes relaciones  $g_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} = g^{\mu\nu}\epsilon_{\mu\lambda\nu\sigma} = 0$ .

$$\begin{aligned}
|\overline{M_{fi}}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} \{ (g_V^2 + g_A^2) [(P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot P_4) - (P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot P_4) + (P_1 \cdot P_4)(P_3 \cdot P_2) \\
&\quad - (P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot P_4) + 4(P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot P_4) - (P_1 \cdot P_3)(P_4 \cdot P_2) + (P_3 \cdot P_2)(P_1 \cdot P_4) \\
&\quad - (P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot P_4) + (P_3 \cdot P_4)(P_1 \cdot P_2) - i\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} P_{1\alpha} P_{3\beta} (P_{2\mu} P_{4\nu} + P_{4\mu} P_{2\nu})] \\
&\quad + 2g_V g_A [i\epsilon_{\mu\lambda\nu\sigma} P_{2\lambda} P_{4\sigma} (P_3^\mu P_1^\nu + P_1^\mu P_3^\nu) + \epsilon_{\mu\lambda\nu\sigma} \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} P_{2\lambda} P_{4\sigma} P_{1\alpha} P_{3\beta}] \\
&\quad + m_2 m_4 (g_V^2 - g_A^2) (P_1 \cdot P_3 - 4P_1 \cdot P_3 + P_1 \cdot P_3) \}
\end{aligned} \tag{C.24}$$

Para continuar desarrollando la expresión C.24 hacemos uso de la relación C.10 y del carácter antisimétrico del tensor de Levi-Civita.

$$\begin{aligned}
 |\overline{M}_{fi}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} \{ (g_V^2 + g_A^2) [(P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot P_4) - \cancel{(P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot P_4)} + (P_1 \cdot P_4)(P_3 \cdot P_2) \\
 &\quad - \cancel{(P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot P_4)} + 4 \cancel{(P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot P_4)} - \cancel{(P_1 \cdot P_3)(P_4 \cdot P_2)} + (P_3 \cdot P_2)(P_1 \cdot P_4) \\
 &\quad - \cancel{(P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot P_4)} + (P_3 \cdot P_4)(P_1 \cdot P_2) - \underbrace{i\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} P_{1\alpha} P_{3\beta} (P_{2\mu} P_{4\nu} + P_{4\mu} P_{2\nu})}_{=0}] \\
 &\quad + 2g_V g_A \underbrace{[i\epsilon_{\mu\lambda\nu\sigma} P_{2\lambda} P_{4\sigma} (P_3^\mu P_1^\nu + P_1^\mu P_3^\nu)]}_{=0} - 2(\delta_\lambda^\alpha \delta_\sigma^\beta - \delta_\lambda^\beta \delta_\sigma^\alpha) P_{1\alpha} P_{3\beta} P_2^\sigma P_4^\lambda \\
 &\quad - 2m_2 m_4 (g_V^2 - g_A^2) (P_1 \cdot P_3) \}
 \end{aligned} \tag{C.25}$$

$$\begin{aligned}
 |\overline{M}_{fi}|^2 &= G_F^2 \{ (g_V^2 + g_A^2) [(P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot P_4) + (P_1 \cdot P_4)(P_3 \cdot P_2)] \\
 &\quad + g_V g_A [-2(\delta_\lambda^\alpha \delta_\sigma^\beta - \delta_\lambda^\beta \delta_\sigma^\alpha) P_{1\alpha} P_{3\beta} P_2^\sigma P_4^\lambda] \\
 &\quad - m_2 m_4 (g_V^2 - g_A^2) (P_1 \cdot P_3) \}
 \end{aligned} \tag{C.26}$$

Desarrollando los productos:

$$\begin{aligned}
 |\overline{M}_{fi}|^2 &= G_F^2 \{ g_V^2 (P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot P_4) + g_V^2 (P_1 \cdot P_4)(P_2 \cdot P_3) + g_A^2 (P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot P_4) \\
 &\quad + g_A^2 (P_1 \cdot P_4)(P_2 \cdot P_3) + 2g_V g_A (P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot P_4) - 2g_V g_A (P_1 \cdot P_4)(P_2 \cdot P_3) \\
 &\quad - m_2 m_4 (g_V^2 - g_A^2) (P_1 \cdot P_3) \}
 \end{aligned} \tag{C.27}$$

Agrupando los términos, el cuadrado de la amplitud de transición invariante para un proceso NC viene descrita por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 |\overline{M}_{fi}|^2 &= G_F^2 \{ (g_V + g_A)^2 (P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot P_4) + (g_V - g_A)^2 (P_2 \cdot P_3)(P_1 \cdot P_4) \\
 &\quad - m_2 m_4 (g_V^2 - g_A^2) (P_1 \cdot P_3) \}
 \end{aligned} \tag{C.28}$$

# Apéndice D

## Cociente de secciones eficaces

En este apéndice calculamos el cociente  $R$  entre las secciones eficaces de los procesos  $(\nu_\mu e^-)$  y  $(\bar{\nu}_\mu e^-)$  para energías mucho mayores que la masa del electrón. El resultado se obtiene a partir de la ecuación 3.41. Solo es necesario sustituir  $g_A \rightarrow -g_A$ , como hemos discutido a lo largo del trabajo, para describir el caso de antineutrinos, y hacer el cociente entre ambas expresiones. Es decir, tenemos:

$$\begin{aligned}\sigma_{\nu_\mu e^-} &= \frac{4G_F^2 E_1^2}{3\pi} \{g_V^2 + g_A^2 + g_A g_V\}, \\ \sigma_{\bar{\nu}_\mu e^-} &= \frac{4G_F^2 E_1^2}{3\pi} \{g_V^2 + g_A^2 - g_A g_V\}.\end{aligned}\tag{D.1}$$

De modo que  $R$  resulta:

$$R = \frac{\sigma_{\nu_\mu e^-}}{\sigma_{\bar{\nu}_\mu e^-}} = \frac{g_V^2 + g_A^2 + g_A g_V}{g_V^2 + g_A^2 - g_A g_V}.\tag{D.2}$$

Los coeficientes  $g_A$  y  $g_V$  se sustituyen por sus expresiones en el Modelo Estándar (2.12, quedando, para nuestro caso:

$$\begin{aligned}g_V^2 &= \frac{1}{4} + 4 \sin^4 \theta_w - 2 \sin^2 \theta_w, \\ g_A^2 &= \frac{1}{4}, \quad g_A g_V = \frac{1}{4} - \sin^2 \theta_w.\end{aligned}\tag{D.3}$$

Sustituyendo en la ecuación D.2 y operando, llegamos inmediatamente al resultado:

$$R = 3 \frac{1 - 4 \sin^2 \theta_w + \frac{16}{3} \sin^4 \theta_w}{1 - 4 \sin^2 \theta_w + 16 \sin^4 \theta_w}.\tag{D.4}$$

# Bibliografía

- [1] J. Chadwick. The intensity distribution in the magnetic spectrum of beta particles from radium (B + C). *Verh. Phys. Gesell.*, 16:383–391, 1914.
- [2] K. Winter, editor. *Neutrino physics (2nd Edition)*, volume 14. Cambridge University Press, 2000.
- [3] K. S. Krane. *INTRODUCTORY NUCLEAR PHYSICS*. Wiley, 1987.
- [4] W. Greiner and B. Müller. *Gauge Theory of Weak Interactions*. Springer Berlin, Heidelberg, 2009.
- [5] R. L. Workman et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, 2022:083C01, 2022.
- [6] C. Giunti and Chung W. Kim. *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*. Oxford University Press, 03 2007.
- [7] F. Reines. The neutrino: From poltergeist to particle. *Rev. Mod. Phys.*, 68:317–327, 1996.
- [8] F. Reines and C. L. Cowan. A Proposed experiment to detect the free neutrino. *Phys. Rev.*, 90:492–493, 1953.
- [9] D. Griffiths. *Introduction to elementary particles*. Wiley-VCH, 2008.
- [10] B. Pontecorvo. Electron and Muon Neutrinos. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 37:1751–1757, 1959.
- [11] G. Danby, J. M. Gaillard, Konstantin A. Goulianos, L. M. Lederman, Nari B. Mistry, M. Schwartz, and J. Steinberger. Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos. *Phys. Rev. Lett.*, 9:36–44, 1962.

- 
- [12] B. T. Cleveland, Timothy Daily, Raymond Davis, Jr., James R. Distel, Kenneth Lande, C. K. Lee, Paul S. Wildenhain, and Jack Ullman. Measurement of the solar electron neutrino flux with the Homestake chlorine detector. *Astrophys. J.*, 496:505–526, 1998.
- [13] B. Pontecorvo. Neutrino Experiments and the Problem of Conservation of Leptonic Charge. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 53:1717–1725, 1967.
- [14] S. Weinberg. A Model of Leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1264–1266, 1967.
- [15] A. Salam. Weak and Electromagnetic Interactions. *Conf. Proc. C*, 680519:367–377, 1968.
- [16] F. Halzen and A. D. Martin. *QUARKS AND LEPTONS: AN INTRODUCTORY COURSE IN MODERN PARTICLE PHYSICS*. Wiley, 1984.
- [17] D. H. Perkins. *Introduction to High Energy Physics*. Cambridge University Press, 4 edition, 2000.
- [18] F. J. Hasert et al. Search for Elastic  $\nu_\mu$  Electron Scattering. *Phys. Lett. B*, 46:121–124, 1973.
- [19] R. C. Allen et al. Study of electron-neutrino electron elastic scattering at LAMPF. *Phys. Rev. D*, 47:11–28, 1993.
- [20] K. S. Hirata et al. Real time, directional measurement of B-8 solar neutrinos in the Kamiokande-II detector. *Phys. Rev. D*, 44:2241, 1991. [Erratum: *Phys.Rev.D* 45, 2170 (1992)].
- [21] J. Hosaka et al. Solar neutrino measurements in super-Kamiokande-I. *Phys. Rev. D*, 73:112001, 2006.
- [22] L. Zazueta et al. Improved constraint on the MINER $\nu$ A medium energy neutrino flux using  $\nu^-e \rightarrow \nu^-e$  data. *Phys. Rev. D*, 107(1):012001, 2023.
- [23] E. Valencia et al. Constraint of the MINER $\nu$ A medium energy neutrino flux using neutrino-electron elastic scattering. *Phys. Rev. D*, 100(9):092001, 2019.

- 
- [24] Chris M. Marshall, Kevin S. McFarland, and Callum Wilkinson. Neutrino-electron elastic scattering for flux determination at the DUNE oscillation experiment. *Phys. Rev. D*, 101(3):032002, 2020.
- [25] Deep Underground Neutrino Experiment. <https://www.dunescience.org/> visitado 08/05/2023.
- [26] A. Bashyal et al. Use of Neutrino Scattering Events with Low Hadronic Recoil to Inform Neutrino Flux and Detector Energy Scale. *JINST*, 16:P08068, 2021.
- [27] J. Park et al. Measurement of Neutrino Flux from Neutrino-Electron Elastic Scattering. *Phys. Rev. D*, 93(11):112007, 2016.
- [28] J. Park. *Neutrino-Electron Scattering in MINERvA for Constraining the NuMI Neutrino Flux*. PhD thesis, U. Rochester, 2013. DOI: 10.2172/1248363.
- [29] F. Mandl and G. Shaw. *Quantum field theory*. Wiley, 2010.
- [30] W. Greiner and J. Reinhardt. *Quantum electrodynamics*. Springer Berlin, Heidelberg, 2009.
- [31] W. Greiner and D. A. Bromley. *Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations*. Springer Berlin, Heidelberg, 2000.
- [32] P. Vilain et al. Precision measurement of electroweak parameters from the scattering of muon-neutrinos on electrons. *Phys. Lett. B*, 335:246–252, 1994.
- [33] J. Dorenbosch et al. EXPERIMENTAL RESULTS ON NEUTRINO - ELECTRON SCATTERING. *Z. Phys. C*, 41:567, 1989. [Erratum: *Z.Phys.C* 51, 142 (1991)].
- [34] L. A. Ahrens et al. Determination of electroweak parameters from the elastic scattering of muon-neutrinos and anti-neutrinos on electrons. *Phys. Rev. D*, 41:3297–3316, 1990.