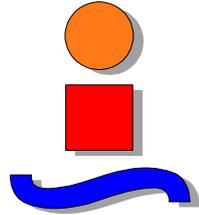




TESIS DOCTORAL



ESTUDIO NUMÉRICO DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS ELÁSTICAS EN PLACAS Y DE SU INTERACCIÓN CON DEFECTOS

Presentada por: José Manuel Galán Fernández

Dirigida por: Ramón Abascal García

Departamento de Mecánica de los Medios Continuos,
Teoría de Estructuras e Ingeniería del Terreno
Escuela Superior de Ingenieros
Universidad de Sevilla

Sevilla, Junio de 2003

Índice General

1	Introducción	5
1.1	Revisión histórica y bibliográfica	6
1.2	Objetivos	14
1.3	Resumen de contenidos	15
2	Ondas guiadas en placas	19
2.1	Introducción	19
2.2	Ondas planas guiadas en placas homogéneas e isótropas	20
2.3	Caso antiplano: ondas SH guiadas	22
2.4	Caso plano: ondas de Lamb	31
2.5	Ondas guiadas en placas viscoelásticas	39
2.5.1	Material viscoelástico lineal	39
2.5.2	Ondas SH guiadas en una placa viscoelástica homogénea e isótropa	47
2.5.3	Ondas de Lamb guiadas en una placa viscoelástica homogénea e isótropa	52
3	EF para ondas en placas	55
3.1	Introducción	55
3.2	Formas fuerte y débil de la Elastodinámica	56
3.3	Forma débil para ondas guiadas planas en placas	57
3.4	Ecuaciones del MEF para ondas guiadas en placas	59
3.4.1	Semi-discretización	60
3.4.2	Matrices elementales	62
3.4.3	Matrices globales	65
3.5	Placa en deformación antiplana	67
3.6	Placa en deformación plana	67
3.6.1	Matrices simétricas	68
3.6.2	Reformulación como problema de autovalores lineal	70
3.6.3	Relación de ortogonalidad entre autovectores	71
3.6.4	Modos de propagación	71

3.7	Comentarios sobre los autovalores y autovectores	72
3.8	Desarrollo en modos normales	73
3.8.1	Fuerzas nodales consistentes en una sección $x = x_0$	73
3.8.2	Matriz de rigidez dinámica de la placa semi-infinita	73
3.8.3	Ondas incidentes	75
3.8.4	Flujo de energía	75
4	Formulación híbrida EC-EF	77
4.1	Introducción	77
4.2	El Método de los Elementos de Contorno	79
4.2.1	Teorema de Reciprocidad en Elastodinámica Armónica	79
4.2.2	Solución Fundamental de la Elastodinámica	80
4.2.3	Representación Integral de los Desplazamientos	81
4.2.4	Formulación integral en el contorno	81
4.2.5	El Método de los Elementos de Contorno	83
4.3	Formulación híbrida EC-EF	88
5	Curvas de dispersión	91
5.1	Introducción	91
5.2	Cálculo de curvas de dispersión	92
5.2.1	Frecuencias de corte	93
5.2.2	Velocidades de fase y de grupo	93
5.3	Ondas SH guiadas en una placa homogénea e isótropa	94
5.3.1	Criterio de mallado	94
5.3.2	Comparación de la estructura modal en algunos puntos	99
5.4	Ondas de Lamb en una placa homogénea e isótropa	99
5.4.1	Criterio de mallado	102
5.4.2	Comparación de la estructura modal en algunos puntos	103
5.5	Ondas de Lamb en una placa no homogénea	103
5.6	Ondas SH guiadas en una placa viscoelástica homogénea	106
5.7	Ondas de Lamb en una placa viscoelástica homogénea	107
5.8	Placa metálica con recubrimiento viscoelástico	114
5.8.1	Ondas SH guiadas	115
5.8.2	Ondas de Lamb	119
6	Difracción de ondas guiadas	123
6.1	Introducción	123
6.2	Conservación de la energía.	125
6.3	Factores de conversión modal.	125
6.4	Reflexión en el borde de una placa semi-infinita. Ondas de Lamb.	126
6.4.1	Borde recto. Resultados de EF	127
6.4.2	Borde recto. Formulación híbrida EC-EF.	140

6.4.3	Bordes inclinados	142
6.5	Ondas SH guiadas en placas semi-infinitas	143
6.6	Delaminación infinita. Ondas de Lamb.	146
6.7	Cambio brusco de sección. Ondas SH guiadas.	154
6.8	Defectos superficiales. Ondas de Lamb.	156
6.8.1	Defecto rectangular	157
6.8.2	Defecto elíptico	160
6.9	Grietas	163
6.9.1	Grieta superficial normal. Ondas SH guiadas.	163
6.10	Inclusión cilíndrica. Ondas SH guiadas.	167
6.11	Unión de placas por solape	171
6.11.1	Resultados numéricos	172
6.11.2	Mediciones experimentales	173
6.12	Defectos ocultos bajo recubrimientos protectores	180
6.12.1	Ondas SH guiadas	181
6.12.2	Ondas de Lamb	183
6.12.3	Comentarios	185
7	Conclusiones y desarrollos futuros	187
7.1	Introducción	187
7.2	Conclusiones	190
7.3	Desarrollos futuros	192

Capítulo 1

Introducción

Los ensayos no destructivos (END) se han convertido en un elemento de uso común en muchos campos científicos e industriales como herramienta fundamental en el desarrollo de tareas de mantenimiento, comprobación de la integridad estructural, control de calidad en la producción e inspección permanente durante la vida útil de muchos productos y estructuras. La combinación del aumento continuo de los costes de fabricación, de las condiciones de servicio cada vez más extremas para los componentes estructurales y de la tendencia en el diseño hacia un ajuste más estrecho de los márgenes de seguridad, ha impulsado una constante evolución y avance de los métodos de END. El desarrollo de nuevas técnicas proporciona, entre otros muchos beneficios, un aumento de la calidad de los productos para el consumidor, una mejora de la seguridad pública (en los casos de la inspección de centrales nucleares y de aviones, por ejemplo), y una reducción global de costes a la industria y a los usuarios al conseguir prevenir fallos mecánicos que podrían suponer grandes pérdidas materiales y humanas. Entre los campos de actividad que utilizan estas técnicas se encuentran las relacionadas con la producción de energía, transformación petroquímica, transporte de gases y líquidos, estructuras aeronáuticas y aeroespaciales. A partir del dictamen de los ensayos no destructivos de un elemento se puede evaluar la seguridad frente a un posible fallo, realizar predicciones sobre la vida útil restante, y establecer programas de mantenimiento y reparación. Este proceso se encuadra dentro de una filosofía de tolerancia al daño, basada en que la presencia de defectos en un componente ya no significará necesariamente que dicho elemento esté al final de su vida útil de servicio, o ni tan siquiera cerca de él.

Dentro del campo de los END, las ondas guiadas ultrasónicas constituyen un área de gran interés hoy en día. Estas ondas se producen en elementos tales como placas, tuberías y barras, en los cuales la geometría finita constriñe la propagación de las ondas elásticas y confina así el flujo de energía a su sección transversal. De esta forma, la atenuación por radiación (geométrica) se reduce o incluso desaparece, quedando como únicos mecanismos de atenuación la difracción por obstáculos y la

disipación de energía debido a la naturaleza dispersiva del medio. Como resultado, dichas ondas tienen la capacidad de recorrer grandes distancias, lo que permite realizar la inspección de un área amplia desde una posición fija, sin necesidad de desplazar el palpador como en las técnicas ultrasónicas clásicas (basadas en ondas P o S). Además, es posible emplearlas para inspeccionar zonas ocultas o de difícil acceso, como, por ejemplo, estructuras parcialmente enterradas, recubiertas con un material protector o aislante, o escondidas tras otros elementos. Las ondas guiadas permiten evaluar la presencia de defectos en la sección transversal completa del elemento, puesto que su propagación provoca la deformación de todos sus puntos. La existencia de multitud de modos para cada frecuencia aporta flexibilidad para seleccionar el punto de trabajo que proporcione una mayor sensibilidad. Sin embargo, para poder realizar esta elección de forma adecuada, es necesario conocer cómo interactúan las ondas guiadas con los defectos.

1.1 Revisión histórica y bibliográfica

Las primeras investigaciones sobre la propagación de ondas elásticas guiadas fueron realizadas en 1885 dentro del contexto de la Geofísica por Lord Rayleigh [92], quien demostró de forma teórica la existencia de ondas polarizadas verticalmente que se propagan a lo largo de la superficie libre de un semiespacio elástico infinito y cuya deformación está confinada en las proximidades de dicha superficie, con una amplitud exponencialmente decreciente con la profundidad. Estas ondas, que se denominan *ondas de Rayleigh* en honor de su descubridor, permitieron explicar ciertas señales, detectadas previamente en los registros de sismogramas, cuya velocidad de propagación era inferior que las de las ondas P y S, pero que podían ser predominantes a cierta distancia de la fuente.

Love realizó en 1911 el estudio matemático de la propagación de ondas en un semiespacio elástico (sustrato) con una capa superficial elástica de espesor finito con unas propiedades mecánicas diferentes, y demostró teóricamente la existencia de ondas polarizadas horizontalmente cuya energía está concentrada principalmente en la capa superficial [79]. Estas *ondas*, denominadas *de Love*, sólo se producen cuando el sustrato es más rígido que la capa superficial, no pudiendo existir consiguientemente en semiespacios homogéneos. Son debidas a la interferencia constructiva de las ondas SH atrapadas en dicha capa, que dan lugar a un número infinito de modos de propagación que exhiben un comportamiento dispersivo (su velocidad de propagación depende de la frecuencia, mientras que la velocidad de las ondas de Rayleigh es una constante del material). Love consiguió así explicar la presencia de grandes desplazamientos transversales en algunos terremotos registrados, atribuyéndolo a que la estructura estratificada de la Tierra actúa como guía de las ondas sísmicas.

¹John William Strutt, Lord Rayleigh (1842-1919), físico británico que realizó descubri-



Figura 1.1. John William Strutt, Lord Rayleigh¹

La propagación de ondas guiadas en placas homogéneas, elásticas e isotrópicas con sus superficies libres de tracciones fue estudiada en 1889 por Rayleigh y Lamb. Ambos obtuvieron la ecuación característica para ondas en condiciones de deformación plana, que se denomina ecuación de Rayleigh-Lamb, y que proporciona la relación entre la longitud de onda y la frecuencia. En 1917 Lamb publicó un amplio estudio sobre las soluciones de dicha ecuación [70], donde describía las propiedades de los modos fundamentales, identificaba las frecuencias de corte y presentaba varios casos límites que admiten solución analítica (frecuencias tendiendo a cero e infinito, modos de Lamé). En honor a sus contribuciones pioneras, esta variedad de ondas guiadas se denomina *ondas de Lamb* (o también, aunque menos frecuentemente, *ondas de Rayleigh-Lamb*). La constatación experimental de las teorías de Lamb fue realizada tres décadas más tarde por Firestone y Ling [42, 43, 44], quienes exploraron las

mientos fundamentales en los campos de la acústica y la óptica. Estudió matemáticas en el Trinity College, Cambridge, donde se graduó en 1865. En 1872, durante un viaje a Egipto por motivos de salud, comenzó a trabajar en su libro *The Theory of Sound*, que sería publicado en dos volúmenes en 1877 y 1878, en el que estudiaba las vibraciones en sólidos y gases así como la propagación de ondas acústicas en la materia. En 1873 construye un laboratorio en su residencia de Terling, Essex, donde desarrolla investigaciones en electromagnetismo, color, acústica y redes de difracción. Una de sus contribuciones más significativas de esta época es la explicación del color azul del cielo como consecuencia de la difracción de los rayos solares por las partículas de pequeño diámetro de la atmósfera. Fue nombrado miembro de la Royal Society en 1873, de la que llegó a ser Presidente entre 1905 y 1908. En 1879 sucedió a Maxwell como Profesor de Física Experimental y director del Laboratorio Cavendish en Cambridge, donde sus experimentos condujeron a la definición precisa de estándares eléctricos. En 1884 dejó Cambridge para continuar su trabajo experimental en Terling. En 1885 publicó un artículo donde demuestra que las ondas elásticas pueden ser guiadas por la superficie libre de un sólido elástico [92]. A estas ondas se las denomina ondas de Rayleigh en su honor. Desde 1887 a 1905 fue Profesor de Filosofía Natural en la Royal Institution of Great Britain. Recibió el premio Nóbel de Física en 1904 por el descubrimiento y aislamiento del argón, gas noble presente en la atmósfera.



Figura 1.2. Augustus Edward Hough Love²

posibilidades de aplicar estas ondas para la inspección ultrasónica no destructiva de placas metálicas. Plantearon un método para generar y detectar modos específicos que utilizaba un transductor piezoeléctrico acoplado a la placa por inmersión local e inclinado respecto a la normal a la superficie de la misma. El pulso de ondas producido en el fluido incidía sobre la placa con una cierta inclinación, seleccionada de acuerdo con la ley de Snell para así excitar selectivamente un modo concreto a la frecuencia de trabajo del palpador. También proponían una configuración de dos transductores trabajando en transmisión para detectar defectos, así como un método para determinar el espesor de una placa consistente en medir la longitud de onda de la interferencia entre dos modos diferentes. Aproximadamente en la misma época se llevaron a cabo investigaciones teóricas y experimentales sobre ondas guiadas en placas completamente sumergidas en agua, destacando los trabajos de Osborne y Hart [89] y Worlton [114].

En 1966 Viktorov publicó una monografía sobre ondas de Rayleigh y de Lamb en

² **Augustus E.H. Love** (1863-1940), matemático británico. Se graduó en Cambridge y fue profesor en la Universidad de Oxford desde 1899 hasta su muerte. Realizó importantes trabajos sobre la teoría de la elasticidad, materia sobre la que publicó su obra “A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity ” publicada en dos volúmenes en 1892-93. Se interesó también por la propagación de las ondas sonoras, de las ondas radioeléctricas que existen en los alrededores del globo terrestre, así como por numerosos problemas de geofísica. En su análisis de la propagación de ondas sísmicas, Love realizó la hipótesis de que la Tierra está formada por capas concéntricas de distinta densidad, y postuló la existencia de ondas sísmicas confinadas en la capa más superficial (corteza). Estas ondas, denominadas de Love en su honor, se propagan como resultado de la diferencia de densidad entre la corteza y el manto terrestre. Sus predicciones teóricas fueron confirmadas por las mediciones del comportamiento de las ondas en la superficie terrestre. Propuso un método para medir el espesor de la corteza terrestre basado en la medida de ondas de Love. Estos resultados los recogió en el libro “Some Problems in Geodynamics”, publicado en 1911 [79]. Entre los muchos premios que recibió, destacan los concedidos por la Royal Society (Royal Medal en 1909 y Sylvester Medal en 1937) y por la London Mathematical Society (De Morgan Medal en 1926).



Figura 1.3. Sir Horace Lamb³

materiales elásticos [110], en la que se discutían tanto sus aspectos físicos (propagación, interacción con varios tipos de defectos, técnicas de generación y detección) como algunas de sus posibles aplicaciones. Entre estas últimas se encontraban los END (detección de defectos, caracterización de características superficiales), las líneas de retardo acústicas y los filtros electromecánicos. Incluía una amplia bibliografía con las contribuciones más relevantes hasta la fecha.

Desde el punto de vista de la aplicación en END de ondas guiadas en placas, es necesario abordar dos aspectos. En primer lugar debe determinarse la naturaleza dispersiva y multimodal de la propagación de dichas ondas, la cual queda reflejada en las curvas de dispersión. Esta información proporciona criterios para la selección modal, permite calcular distancias a partir de medidas de tiempos de vuelo, así como la generación y recepción de modos monocromáticos (a través de la ley de Snell). En segundo lugar, es necesario estudiar la difracción de estas ondas causada por la presencia de un defecto (p. ej., una inclusión, una cavidad o una grieta) en el seno de un componente, puesto que proporciona información sobre la localización, tamaño, forma y orientación de dicho defecto. Estos problemas resultan muy difíciles de

³**Sir Horace Lamb** (1849-1934), matemático británico. En 1872 comenzó a impartir clases en el Trinity College, Cambridge, y tres años más tarde consiguió una plaza de profesor de matemáticas en la Universidad de Adelaida, Australia. En 1885 volvió a Inglaterra para ocupar una plaza de profesor en la Victoria University, Lacashire. En la multitud de artículos que publicó, principalmente dedicados a la matemática aplicada, detalló sus investigaciones en propagación de ondas, inducción eléctrica, movimientos sísmicos, y la teoría de mareas y olas. Es en uno de ellos donde identifica las ondas guiadas en placas libres de tracciones en condiciones de deformación plana [70], que reciben el nombre de ondas de Lamb en su honor. Realizó importantes estudios sobre flujo de aire alrededor de perfiles aerodinámicos para el Aeronautical Research Committee desde 1921 hasta 1927. Fue nombrado miembro de la Royal Society de Londres en 1884 y recibió el título de caballero en 1931. Otras de sus publicaciones fueron “Infinitesimal Calculus” (1897), “Dynamical Theory of Sound” (1910), y “Higher Mechanics” (1920).

abordar de forma analítica por la compleja interacción que se establece entre todos los modos del espectro.

La propagación libre de las ondas guiadas en placas, incluso en el caso más sencillo de placas elásticas homogéneas, está gobernada por ecuaciones características de gran complejidad, a pesar de su aspecto aparentemente simple, que sólo pueden ser resueltas analíticamente en el caso antiplano, mientras que en el caso plano, ondas de Lamb, sólo pueden resolverse numéricamente (de hecho, la determinación de su espectro de frecuencia sólo se consiguió completar en la década de 1950 gracias a las aportaciones de Mindlin). En el caso general de placas laminadas, las ecuaciones características analíticas de las ondas guiadas se obtienen como el determinante de una matriz que se construye con el Método de la Matriz de Transferencia, propuesto por Thomson en 1950 y corregido por Haskell en 1953, o con el Método de la Matriz Global, planteado por Knopoff en 1964, siendo necesario recurrir a algoritmos numéricos muy complejos para localizar las raíces de dicho determinante, sobre todo en el caso de raíces complejas. En un artículo de Lowe [80] se recoge una amplia bibliografía sobre estos métodos hasta 1995, y se discuten las dificultades numéricas que plantean.

Una alternativa a los métodos anteriores consiste en emplear un planteamiento variacional para obtener una ecuación característica aproximada que sea más fácilmente resoluble. Esta técnica, que fue introducida por Lysmer y Waas [82, 111] para estudiar problemas de interacción suelo-estructura, recibe varios nombres en la literatura, entre los que cabe mencionar: contorno absorbente consistente [111, 78], Método de la Capa Delgada (Thin Layer Method) [64], método de Rayleigh-Ritz [38, 5, 37], Método del Elemento Capa (Strip Element Method) [74, 75]. Esta formulación se basa en discretizar la sección transversal de la placa en elementos isoparamétricos unidimensionales, lo que permite obtener un problema de autovalores cuadrático que relaciona la frecuencia y el número de onda de las ondas guiadas.

La difracción de ondas guiadas en placas ha sido objeto de numerosos estudios. Los primeros resultados publicados [50] se centraron en explicar la resonancia de borde que tiene lugar en el borde libre de una placa semi-infinita a frecuencias inferiores a la primera frecuencia de corte, y que las teorías de placas de primer orden eran incapaces de justificar. Este fenómeno, consistente en una vibración simétrica respecto al plano medio y con unas deformaciones concentradas en el borde, fue observado en 1956 por Shaw [104] al realizar experimentos de vibración axisimétrica de discos gruesos de titanato de bario. Cuatro años más tarde, Gazis y Mindlin [50] fueron los primeros en encontrar una explicación teórica en el caso de una placa en deformación plana, empleando una teoría de placas de segundo orden basada en desarrollar los desplazamientos en la sección transversal como una serie de polinomios de Legendre. Esta teoría proporciona una aproximación adecuada del espectro de frecuencia de los primeros modos de Lamb. Gazis y Mindlin obtuvieron que la resonancia de borde era debida al papel fundamental que desempeñan dos modos evanescentes en la satisfacción de la condición de contorno en el borde a la frecuencia

considerada.

La conversión modal que experimenta una onda guiada al incidir sobre el borde de una placa semi-infinita fue estudiada posteriormente por varios autores, utilizando técnicas analíticas [108, 10, 54] y experimentales [118]. Todos los planteamientos analíticos utilizan una superposición modal troncada del campo difractado en la placa, aplicando la condición de contorno en el borde de forma variacional. Empleando esta estrategia, Torvik [108] estudió en 1967 la reflexión del modo S0 en un borde libre. Reteniendo una mayor cantidad de modos en el desarrollo, Gregory y Gladwell [54] estudiaron la reflexión del modo S0 en bordes libres y empotrados. Zhang y otros [118] emplearon en 1988 una técnica fotoelástica dinámica para visualizar la reflexión de ondas de Lamb monocromáticas en el borde libre de una placa de vidrio.

En el caso de geometrías más complejas, tales como grietas, delaminaciones o corrosión, se dispone de algunos resultados analíticos [93, 94, 106, 95, 46, 86], pero que sólo son válidos para geometrías muy particulares o para frecuencias bajas. Para solventar esta limitación, varios autores han obtenido resultados numéricos utilizando los métodos numéricos habituales en elastodinámica: Método de los Elementos Finitos (MEF), Diferencias Finitas y Método de los Elementos de Contorno (MEC).

Todos los resultados analíticos se basan en expresar la solución elastodinámica en la placa como una superposición modal de modos guiados. Rokhlin empleó una técnica de Wiener-Hopf modificada para obtener los factores de reflexión y transmisión de una onda de Lamb monocromática incidentes sobre varias geometrías: delaminaciones de gran longitud [93], grietas horizontales finitas [94] y uniones adhesivas por solape [95], analizando frecuencias superiores a la primera frecuencia de corte. Estos resultados estaban restringidos a grietas o uniones situadas en el plano de simetría de la placa. Tan y Auld [106] desarrollaron un método variacional basado en el principio de reciprocidad, y lo aplicaron al estudio de la interacción de ondas de Lamb con grietas verticales para frecuencias inferiores a la frecuencia de corte más baja. Fortunko y otros [46] emplearon la expresión variacional de Tan y Auld para calcular la difracción de modos SH guiados por una grieta vertical. Wang y otros [112] estudiaron la difracción de ondas SH guiadas planas por una inclusión cilíndrica paralela al frente de onda. Los autores mencionados utilizaron el espectro de frecuencia y los modos proporcionados por la teoría elastodinámica exacta. Sin embargo, otros autores han empleado la teoría de placas de segundo orden desarrollada por Mindlin, que proporciona expresiones analíticas más simples pero cuya validez está limitada a frecuencias bajas. Esta teoría fue utilizada por Norris y Vemula [88, 109] para estudiar la difracción de ondas de flexión planas por inclusiones cilíndricas en una placa, por McKeon y Hinders [86] en el caso de incidencia de un modo longitudinal sobre agujeros cilíndricos pasantes, y por Grahn [52] para modos difractados por perforaciones cilíndricas superficiales.

La herramienta numérica más extensamente utilizada para estudiar problemas de difracción de ondas guiadas es el MEF, empleándose dos estrategias de solución distintas:

- Análisis en el dominio de la frecuencia empleando el denominado MEF global-local [69, 67, 2, 68, 28, 6, 63, 61, 62, 76, 21], que consiste en discretizar el entorno del defecto con EF y expresar la solución elastodinámica en el resto de placa infinita mediante un desarrollo en modos normales analítico o semi-analítico. Ambas soluciones se acoplan entre sí aplicando equilibrio y compatibilidad en secciones transversales situadas a una cierta distancia del defecto. En dichas secciones no se producen reflexiones espúreas porque la superposición modal proporciona condiciones de contorno absorbentes.
- Análisis transitorio en el dominio del tiempo [8, 56, 117, 72], donde se simula la propagación y difracción de pulsos ultrasónicos de duración finita. Los autores se ven obligados a extender el dominio discretizado hasta una distancia lo suficientemente alejada del defecto, como para evitar que las reflexiones procedentes de los bordes ficticios interfieran con la solución del problema. Alleyne y Cawley [8] estudiaron la interacción de ondas de Lamb con defectos superficiales rectangulares en condiciones de deformación plana. Aplicaron una transformada rápida de Fourier (FFT) bidimensional sobre los registros temporales de desplazamientos en un grupo de puntos equiespaciados sobre la superficie de la placa [7], extrayendo de esa forma el contenido modal, a partir del cual calcularon los coeficientes de reflexión y transmisión. La misma técnica emplean Guo and Cawley [56] para estudiar la difracción de ondas de Lamb con delaminaciones en placas de material compuesto, y Le Clezio y otros [71, 72] para analizar la excitación de la resonancia de borde y la interacción con grietas superficiales verticales en una placa de aluminio. Zgonc y Achenbach [117] estudiaron la difracción por grietas radiales que emanan de un taladro circular, en condiciones de tensión plana. Los resultados obtenidos para varias profundidades de grieta fueron utilizados para entrenar una red neuronal, que posteriormente fue capaz de estimar tamaños de grieta con precisión razonable.

Balasubramanyam y otros [11] estudiaron la propagación de ondas de Lamb en placas metálicas con un esquema de diferencias finitas en el dominio del tiempo. Fromme y Sayir [48, 47] analizaron la difracción producida al incidir ondas de flexión en un taladro con una grieta radial, utilizando la teoría de placas de Mindlin y una técnica de diferencias finitas en el dominio de la frecuencia que empleaba un contorno absorbente circular.

El MEC se ha utilizado ampliamente para estudiar problemas elastodinámicos [33, 30, 85, 17, 18]. Sin embargo su aplicación al análisis de problemas de difracción de ondas guiadas es escasa. En el caso particular de ondas en placas, en la literatura se pueden encontrar dos planteamientos diferentes, realizados ambos en el dominio de la frecuencia:

- Desarrollo de una formulación del MEC basada en la función de Green para cargas dinámicas armónicas puntuales en placas infinitas. La característica

más ventajosa de este método radica en que sólo necesita discretizar los contornos del defecto, puesto que las condiciones de contorno en las superficies de la placa se cumplen automáticamente. Sin embargo, no existe una expresión analítica de dicha solución fundamental, y su evaluación lleva asociado el cálculo numérico de una transformada inversa de Fourier con un elevado coste computacional (Harkreider [57], Benitez [15]), siendo aplicable únicamente a guías de onda rectas y uniformes. Kausel [65] desarrolló una expresión semi-analítica de las funciones de Green en placas laminadas, basándose en la discretización del espesor de la placa con elementos lineales. Como resultado obtenía unas expresiones algebraicas cuya transformada inversa podía ser calculada fácilmente. Kausel y otros [66, 41] y Datta y otros [29, 77] utilizaron este planteamiento para estudiar la difracción por grietas verticales superficiales. Los primeros emplearon la solución fundamental semi-analítica de Kausel. Los segundos evaluaron la integral sobre el número de onda (i.e. transformada inversa de Fourier de la función de Green respecto a la coordenada paralela al plano medio de la placa) utilizando una representación del integrando mediante polinomios de Chebyshev, distinguiendo dos rangos: uno finito, donde aplicaron una versión modificada de la cuadratura de Clenshaw-Curtis, y otro semi-infinito, donde evaluaron la integral de forma analítica [115, 116]. Debido al elevado coste computacional de este procedimiento, en trabajos posteriores [119] adoptaron la solución fundamental semi-analítica de Kausel.

- Combinación del MEC estándar, obtenido con la solución fundamental para carga armónica concentrada en el espacio completo, con un desarrollo en modos normales en la placa que se encargue de satisfacer la condición de radiación de energía hacia el infinito a través de la placa. Cho y Rose [24, 23] desarrollaron un método híbrido de EC que acoplaba el MEC armónico 2D con una superposición de modos de Lamb. En ésta última emplearon las expresiones analíticas para calcular los desplazamientos y tensiones de los modos de Lamb; además obtuvieron las curvas de dispersión calculando numéricamente las raíces de las ecuaciones características analíticas. La suma infinita de modos era truncada, conservando únicamente los modos reales. En la región del MEC utilizaron elementos constantes. Este método fue aplicado al estudio de la reflexión de ondas de Lamb en bordes libres de placas semi-infinitas de acero [24], y de la difracción por defectos superficiales con forma elíptica en placas de acero y aluminio [23].

Las primeras aplicaciones de las ondas de Lamb en END las utilizaban para detección rápida de defectos de fabricación en chapas delgadas [73]. Las técnicas que se están desarrollando en la actualidad persiguen no solo detectar y localizar los defectos, sino también estimar las dimensiones del mismo para obtener así una idea más clara de su severidad. De hecho, ya existen varias aplicaciones comerciales

para inspección de tuberías con ondas ultrasónicas guiadas. Una de ellas se basa en excitar pulsos de modos axisimétricos a frecuencias bajas mediante anillos de transductores que se fijan en el exterior del tubo, y utilizar la amplitud de las señales reflejadas como medida de la posición y tamaño del defecto [99, 98, 19, 9]. Este sistema es capaz de detectar defectos incluso en tuberías con recubrimientos anti-oxidación [13] y en tramos enterrados, aunque con un alcance reducido respecto al caso de tubería desnuda. Algunas compañías especializadas, entre las que destacan Guided Ultrasonics y Plant Integrity, Ltd, ofrecen equipos y servicios basados en esta técnica. Otro sistema emplea ondas guiadas que se propagan circunferencialmente en la tubería [90] para detectar defectos longitudinales (por ejemplo, grietas producidas por corrosión bajo tensión en tuberías a presión). Algunos vehículos de inspección interna de tuberías (“pigs”), como el desarrollado por la compañía General Electric Oil&Gas, incorporan esta técnica para complementar las mediciones de espesor por ultrasonidos y por inducción electromagnética.

Las ondas de Lamb también han sido utilizadas en estructuras aeronáuticas para inspeccionar la integridad de uniones adhesivas entre placas solapadas [101, 22, 107, 81] y de uniones por difusión de placas de titanio [96], para localizar delaminaciones en paneles sandwich de panal de abeja [102], y para detectar la formación de hielo sobre las alas de un avión [58]. En todos estos casos se empleó un método de transmisión, donde el modo y la frecuencia de trabajo se seleccionaron de forma que la fracción de energía transmitida sufriera un cambio enorme en el caso de producirse un fallo.

1.2 Objetivos

Los objetivos principales que se pretenden lograr con esta Tesis son los siguientes:

- Extender la aplicación del MEC en problemas de difracción de ondas guiadas en placas laminadas elásticas y viscoelásticas. Se utilizará un planteamiento híbrido basado en combinar el MEC con una superposición modal de la solución elastodinámica en la placa. Este planteamiento enlaza con la línea iniciada por Cho y Rose [24, 23, 25], pero superándola en varios aspectos: inclusión de modos evanescentes en la superposición modal, utilización de elementos cuadráticos, incorporación de propiedades viscoelásticas en los materiales, aplicación a placas laminadas no homogéneas, ampliación al análisis de problemas antiplanos. De esta forma se lograrán superar muchas de sus limitaciones y se dispondrá de una herramienta numérica capaz de resolver distintas configuraciones que no eran abordables previamente con dicho método.
- Estudiar la propagación libre de ondas guiadas en placas mediante una formulación semi-analítica de Elementos Finitos que sea capaz de abordar una

amplia gama de geometrías de placas laminadas viscoelásticas. La implementación de esta formulación permitirá obtener el espectro de frecuencia, las curvas de dispersión y las estructuras modales de estas ondas. Además, toda esta información será utilizada para plantear la superposición modal en la placa. Para definir la validez de los resultados aproximados que se obtengan, se realizará un análisis del error cometido en la aproximación de la matriz de rigidez, a partir del cual se formulará un criterio de mallado que permita calcular el tamaño de elemento requerido para conseguir una correcta representación de las ondas guiadas en el rango de frecuencia de trabajo.

- Comprobar la flexibilidad y capacidad de la técnica híbrida desarrollada para estudiar problemas de difracción de ondas guiadas en placas, y su valor como herramienta de ayuda en el desarrollo y utilización de técnicas ultrasónicas de inspección no destructiva basadas en dichas ondas. Se llevarán a cabo aplicaciones numéricas relevantes en este sentido, y se presentarán resultados experimentales en uno de los casos.
- Analizar cuantitativamente el potencial de utilización de ondas guiadas ultrasónicas para la inspección remota de defectos en placas metálicas con recubrimientos aislantes o de protección contra la corrosión. En concreto se plantea la cuestión de localizar defectos ocultos bajo la capa protectora, sin que sea necesario retirar dicha capa en toda la superficie. La principal dificultad que se plantea es que las características viscoelásticas de los materiales empleados como recubrimiento provocan una rápida atenuación de las ondas. Sin embargo, debido a la naturaleza multimodal de las ondas guiadas, existirá la posibilidad de producir modos particulares en ciertos rangos de frecuencia donde la atenuación sea mínima. Por último, será necesario determinar la sensibilidad de estos modos poco atenuados a la presencia de defectos.

1.3 Resumen de contenidos

En el Capítulo 2 se presenta el estudio analítico de la propagación libre de ondas guiadas en placas homogéneas de materiales isótropos elásticos y viscoelásticos, restringido al caso de ondas planas. El planteamiento matemático desemboca en dos problemas bidimensionales desacoplados entre sí: ondas SH guiadas (antiplano) y ondas de Lamb (deformación plana). Se presentan las soluciones de ambos destacando sus características esenciales, haciendo énfasis tanto en los rasgos diferenciadores como en los numerosos aspectos comunes. Entre estos últimos cabe destacar su naturaleza dispersiva y multimodal, que emerge al resolver la ecuación característica no lineal de cada problema, y que se muestra gráficamente en las denominadas curvas de dispersión.

Asimismo se revisan las ecuaciones que gobiernan los problemas viscoelásticos

lineales de propagación de ondas, junto con la descripción de los modelos de comportamiento empleados habitualmente a frecuencias ultrasónicas. Por último, se enuncia el principio de correspondencia elástica-viscoelástica, mediante el cual se obtendrá la solución para ondas guiadas en placas viscoelásticas a partir de la correspondiente solución elástica.

En el Capítulo 3 se desarrolla una formulación semi-analítica de la propagación libre de ondas guiadas en placas laminadas, formadas por múltiples capas de materiales isótropos, lineales y elásticos o viscoelásticos. Para ello se realiza una discretización del espesor de la placa con Elementos Finitos unidimensionales, pero manteniendo la expresión analítica de la variación funcional con el resto de variables. De esta forma la ecuación característica no lineal se convierte en un problema de autovalores lineal.

Esta formulación permite obtener la matriz de rigidez dinámica de una placa laminada semi-infinita sometida a acciones en su extremo, mediante la expresión del campo elastodinámico en su interior como una superposición de los modos de propagación semi-analíticos de la placa infinita.

En el Capítulo 4 se introducen los aspectos básicos del Método de los Elementos de Contorno para problemas dinámicos bidimensionales armónicos en medios homogéneos, isótropos, lineales y elásticos o viscoelásticos. Al aplicar el Teorema de Reciprocidad entre la solución buscada y la solución fundamental, la formulación matemática se reduce a una ecuación integral extendida únicamente al contorno. Posteriormente se describe el tratamiento numérico de dicha integral.

Para resolver problemas de interacción de ondas guiadas en placas con defectos se plantea una formulación híbrida de Elementos de Contorno y Elementos Finitos. Esta formulación acopla el problema elastodinámico en el entorno del defecto, el cual se estudia en esta tesis con el Método de los Elementos de Contorno, con la propagación de ondas guiadas en una o más placas semi-infinitas, la cual se representa en esta tesis con sus matrices de rigidez dinámicas.

En el Capítulo 5 se describen las estrategias de cálculo de espectros de frecuencia y curvas de dispersión de ondas guiadas en placas utilizando la formulación semi-analítica de Elementos Finitos. Se plantean criterios de mallado a partir de la comparación con los casos de ondas SH guiadas y ondas de Lamb en placas elásticas homogéneas, cuyo desarrollo analítico se realizó en el Capítulo 2. A continuación se abordan problemas de complejidad creciente, para los cuales la solución numérica de la ecuación característica no lineal analítica presenta numerosas dificultades: placas laminadas elásticas no homogéneas, placas viscoelásticas homogéneas, y placas elásticas con recubrimientos viscoelásticos.

En el Capítulo 6 se utiliza la formulación híbrida de EC-EF desarrollada para estudiar un conjunto de situaciones de difracción de ondas guiadas monocromáticas que tienen interés desde el punto de vista de su aplicación en inspección remota no-destructiva con ultrasonidos. Cuando una energía elastodinámica que se propaga a través de una placa en forma de modos reales incide sobre un defecto, parte de la

misma se refleja y parte se transmite. Este proceso de difracción va acompañado de una conversión cruzada de energía entre modos, que será cuantificada mediante la definición de unos coeficientes de conversión modal. En todos los casos se emplean ondas incidentes monocromáticas, cuyo espectro se compone de un único modo real, con objeto de determinar la sensibilidad de los modos individuales a la presencia de defectos.

En primer lugar se presentan una serie de resultados con objeto de validar las formulaciones y algoritmos desarrollados. A continuación se lleva a cabo la solución numérica del problema de unión por solape entre dos placas. Además se muestran algunos resultados experimentales realizados sobre varias configuraciones de uniones, obtenidos en colaboración con el Ultrasonics Laboratory de Penn State (EEUU) durante una estancia del autor de esta tesis en dicho centro de investigación. Por último se evalúa el potencial de detectar a gran distancia defectos ocultos bajo la capa protectora en placas de aluminio recubiertas de resina epoxi anti-corrosión, pero sin necesidad de retirar dicha capa, lo cual incrementaría el tiempo y coste de inspección. Para ello se emplean ondas guiadas, cuyas características (modo y rango de frecuencia) deben seleccionarse de forma que se obtenga una atenuación mínima y por tanto un alcance de inspección máximo. Además es necesario seleccionar modos con una sensibilidad elevada al tipo de defecto considerado. Para ello se realizan estudios paramétricos que permiten localizar el modo y el rango de frecuencias mejor cualificados.

Capítulo 2

Ondas guiadas en placas

2.1 Introducción

Cualquier fuente de excitación dinámica que actúe sobre una placa genera ondas elásticas en su interior, las cuales durante su propagación sufren múltiples reflexiones en las superficies superior e inferior. Todas estas ondas, que están atrapadas en la placa, interfieren entre sí, y bajo ciertas condiciones se produce una interferencia constructiva que se caracteriza por una estructura estacionaria en la sección transversal y una dirección de propagación paralela a la placa. En lugar de hacer un seguimiento de todas estas ondas individualmente, resulta más conveniente analizar los patrones de interferencia que se originan, a los cuales se les denomina modos. Las múltiples posibilidades de interferencias constructivas dan lugar a un infinito número de modos posibles, que sólo se propagan para ciertas combinaciones de frecuencia y número de onda, de acuerdo con la solución elastodinámica. La velocidad de propagación de cada modo depende no solo del material sino también de la frecuencia y del espesor de la placa, lo que confiere a estas ondas un carácter dispersivo. Además, la estructura modal de desplazamientos en la sección varía en general con la frecuencia.

Otro aspecto importante de las ondas guiadas es su capacidad para viajar grandes distancias. Una onda cilíndrica propagándose en un espacio bidimensional infinito sufre una disminución de su amplitud del orden $O(1/r)$, con r la distancia a la fuente, que se debe al reparto de la energía elástica en un frente de onda con un área creciente como $O(r)$. Por contra, las ondas guiadas en placas bidimensionales no sufren atenuación por radiación porque la geometría finita de la placa constriñe la propagación de las ondas y confina así el flujo de energía a su sección transversal. Los únicos mecanismos de atenuación en este caso serán la difracción por obstáculos y la disipación de energía debido a la naturaleza dispersiva del medio.

En este capítulo se presenta un planteamiento analítico de la propagación de ondas guiadas planas en placas elásticas homogéneas, que da lugar a dos subpro-

blemas bidimensionales desacoplados: deformación antiplana y deformación plana. Cada uno de ellos origina una variedad de onda guiada diferente (ondas SH guiadas y ondas de Lamb, respectivamente), cuyas características esenciales se analizarán. La teoría de ondas guiadas en placas elásticas puede encontrarse en textos clásicos de elastodinámica, como los publicados por Viktorov [110], Achenbach [4], Eringen y Suhubi [40], Graff [51] y Rose [96].

Posteriormente se describen los principios básicos de la teoría de la viscoelasticidad lineal, así como los modelos de comportamiento en el caso armónico y su aplicación al análisis de propagación de ondas en sólidos viscoelásticos. Una descripción profunda sobre este tema puede encontrarse en el libro de Christensen [83].

Por último, mediante la aplicación del principio de correspondencia elástica-viscoelástica, se derivan las ecuaciones analíticas que gobiernan la propagación de las ondas guiadas en placas viscoelásticas homogéneas a partir de las correspondientes al caso elástico.

2.2 Ondas planas guiadas en placas homogéneas e isotropas

En esta sección se estudia una onda plana y armónica en régimen estacionario, que se encuentra guiada en una placa plana e infinita de material elástico lineal, homogéneo e isotropo, con espesor constante y con sus superficies libres de tracciones, como se muestra en la Figura 2.1, donde se representan su dirección de propagación y su frente de onda.

Para simplificar la descripción matemática del problema, el sistema de referencia cartesiano se elige de forma que el eje x coincida con la dirección de propagación de la onda, el eje y sea perpendicular a la placa y tenga como origen el plano medio de la misma, y el eje z quede definido por la regla de la mano derecha. Por tratarse de una onda plana y gracias a la elección de ejes realizada, las variables elastodinámicas son independientes de la coordenada z .

La propagación de ondas en un material elástico, lineal e isotropo está gobernada por las ecuaciones de Navier

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.1)$$

Para resolverlas es conveniente emplear la representación de Helmholtz, que expresa el campo de desplazamientos en función de un potencial escalar φ y otro vectorial $\boldsymbol{\psi}$

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \wedge \boldsymbol{\psi} \quad (2.2)$$

Esta representación del campo de desplazamientos es solución de las ecuaciones de Navier si los potenciales satisfacen las siguientes ecuaciones de onda desacopladas

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c_L^2} \ddot{\varphi} \quad (2.3)$$

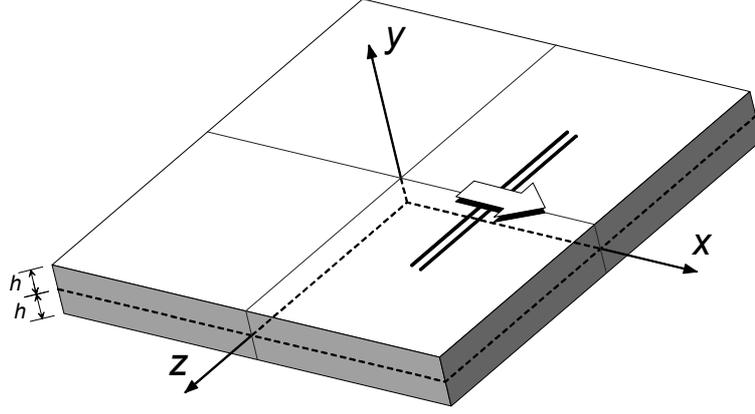


Figura 2.1. Onda plana guiada en una placa infinita. Geometría y sistema de coordenadas.

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c_T^2} \ddot{\psi} \quad (2.4)$$

donde c_L y c_T son las velocidades de propagación de las ondas longitudinales y transversales, respectivamente.

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad ; \quad c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.5)$$

Puesto que la ec. (2.2) relaciona las tres componentes de los desplazamientos con cuatro funciones independientes, es necesario añadir una restricción adicional que establezca una relación entre estas últimas:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0 \quad (2.6)$$

Empleando coordenadas cartesianas y teniendo en cuenta que las ondas objeto de estudio son planas propagándose paralelamente al eje x , la ec. (2.2) puede reescribirse como:

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_z}{\partial y} \quad (2.7)$$

$$u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \quad (2.8)$$

$$u_z = \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \quad (2.9)$$

Del mismo modo, la ec. (2.6) se puede escribir como:

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = 0 \quad (2.10)$$

Para aplicar las condiciones de contorno en las superficies superior e inferior de la placa es necesario disponer de las expresiones de las tracciones en un plano $y = cte$. En el caso analizado se tiene:

$$\sigma_{xy} = \mu \left[2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x^2} \right] \quad (2.11)$$

$$\sigma_{yy} = \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x \partial y} \right] \quad (2.12)$$

$$\sigma_{zy} = \mu \left[\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} \right] = \mu \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (2.13)$$

Observando las ecs. (2.7) a (2.13), se comprueba que el problema tridimensional puede descomponerse en dos problemas desacoplados:

- deformación en el plano xy exclusivamente, correspondiente a unas condiciones de deformación plana, que implica a las siguientes variables de campo: u_x , u_y , σ_{xy} , σ_{yy} , σ_{xx} , σ_{zz} . En este caso sólo intervienen los potenciales φ y ψ_z .
- deformación en la dirección z únicamente, correspondiente a un caso antiplano, que implica a las siguientes variables de campo: u_z , σ_{zy} , σ_{zx} . En este subproblema intervienen los potenciales ψ_x y ψ_y .

Aunque los problemas de deformación plana y antiplano se resolverán independientemente, la variación espacio-temporal de las variables de campo (desplazamientos, deformaciones y tensiones) para una onda plana y armónica en régimen estacionario admite en ambos casos la misma expresión en variables separadas:

$$f(x, y, z, t) = \hat{f}(y) e^{i(kx + \omega t)} \quad (2.14)$$

donde ω es la frecuencia angular, $k = \omega/c$ es el número de onda, c es la velocidad de fase de la onda guiada, y $\hat{f}(y)$ es la estructura de la onda guiada a través del espesor de la placa. Esta ecuación también puede entenderse como la transformada de Fourier doble respecto a las variables x y t de la solución elastodinámica en la placa. Debido a que el factor $\exp[i(kx + \omega t)]$ aparece en todas las variables se puede simplificar la notación definiendo unas variables auxiliares (con gorro) dividiendo las originales por dicho factor. Estas nuevas variables son funciones exclusivas de y que representan la estructura de la onda guiada a través del espesor de la placa.

2.3 Caso antiplano: ondas SH guiadas

En este subproblema nos encontramos con una placa de material elástico, lineal, isótropo y homogéneo de espesor $d = 2h$, en condiciones de deformación antiplana

en el plano xy ($u_x = u_y = 0$, $\partial/\partial z = 0$), cuyas superficies están libres de tracciones y cuya geometría se muestra en la Figura 2.1. Las ecuaciones que lo gobiernan

$$\nabla^2 \psi_j = \frac{1}{c_T^2} \ddot{\psi}_j \quad (2.15)$$

donde el subíndice j puede tomar los valores x ó y .

Al tratarse de ondas armónicas propagándose en dirección x y con una estructura estacionaria en dirección y , los potenciales pueden escribirse en variables separadas:

$$\psi_j(x, y, t) = \hat{\psi}_j(y) e^{i(kx + \omega t)} \quad (2.16)$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecs. (2.15), se obtienen sendas ecuaciones diferenciales para $\hat{\psi}_j$ cuyas soluciones son

$$\hat{\psi}_j(y) = A_j \text{sen}(qy) + B_j \text{cos}(qy) \quad (2.17)$$

donde

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2 \quad (2.18)$$

A partir de los potenciales de Helmholtz se obtienen los desplazamientos y tensiones empleando las ecs. (2.9) y (2.13). Combinando los términos comunes y definiendo una nuevas constantes, se obtiene

$$\hat{u}_z(y) = A_0 \text{sen}(qy) + B_0 \text{cos}(qy) \quad (2.19)$$

$$\hat{\sigma}_{yz}(y) = \mu q [A_0 \text{cos}(qy) - B_0 \text{sen}(qy)] \quad (2.20)$$

$$\hat{\sigma}_{xz}(y) = \mu i k \hat{u}_z(y) \quad (2.21)$$

Aplicando las condiciones de contorno de tracciones nulas en las superficies de la placa $y = \pm h$ se obtiene un sistema de ecuaciones homogéneo cuyas incógnitas son los coeficientes desconocidos A_0 y B_0

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{yz}(+h) \\ \hat{\sigma}_{yz}(-h) \end{pmatrix} = \mu q \begin{pmatrix} \text{cos}(qh) & -\text{sen}(qh) \\ \text{cos}(qh) & \text{sen}(qh) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Sólo cuando el determinante de la matriz sea nulo este sistema admitirá soluciones no triviales, las cuales corresponden a modos de propagación de ondas SH guiadas en la placa. Esta condición proporciona la siguiente *ecuación característica* (también denominada *ecuación de la dispersión* o *de la frecuencia*):

$$0 = q^2 \text{sen}(qh) \text{cos}(qh) \quad (2.23)$$

La ec. (2.23) puede satisfacerse de dos formas:

- $\text{sen}(qh) = 0$, en cuyo caso se tiene $A_0 = 0$, que corresponde a modos cuyos desplazamientos son simétricos respecto al plano medio de la placa ($y = 0$)

$$\hat{u}_z(y) = B_0 \cos(qy) \quad ; \quad \hat{\sigma}_{yz}(y) = -\mu q B_0 \text{sen}(qy) \quad (2.24)$$

- $\text{cos}(qh) = 0$, en cuyo caso se tiene $B_0 = 0$, que corresponde a modos cuyos desplazamientos son antisimétricos respecto al plano medio de la placa

$$\hat{u}_z(y) = A_0 \text{sen}(qy) \quad ; \quad \hat{\sigma}_{yz}(y) = \mu q A_0 \text{cos}(qy) \quad (2.25)$$

La solución de la ecuación característica admite una expresión analítica explícita válida para ambos casos

$$qh = \frac{n\pi}{2} \quad (2.26)$$

siendo n un número natural. Cada valor de n corresponde a un modo distinto (que se designará como SH n), correspondiendo los valores pares de n a modos simétricos, y los impares a modos antisimétricos.

Es conveniente emplear las siguientes variables adimensionales:

- número de onda adimensional, definido como $\xi = kh$
- frecuencia adimensional, definida como $\Omega = \omega h / c_T$
- velocidad adimensional, definida como $\bar{c} = c / c_T$

Empleando estas variables adimensionales y teniendo en cuenta la ec. (2.18), se puede reescribir la ec. (2.26) como

$$\xi^2 = \Omega^2 - \Omega_n^2 \quad (2.27)$$

donde $\Omega_n = n\pi/2$ es la frecuencia para la que el modo SH n tiene un número de onda nulo $\xi=0$, y se denomina *frecuencia de corte* del modo SH n .

Para una frecuencia fija, la ec. (2.27) proporciona un número finito de números de onda reales, y un número infinito de números de onda imaginarios. Teniendo en cuenta que la dependencia funcional con t y x tiene la forma $\exp[i(kx + \omega t)]$, los primeros dan lugar a modos que se propagan a lo largo de la placa sin experimentar variación en su amplitud (denominados *modos reales*); los segundos corresponden a modos que no se propagan y cuya amplitud decae exponencialmente en la dirección x (denominados *modos evanescentes*). Si se adopta un valor imaginario del número de onda $k = ib$, la variación con t y x resultante es $\exp[i\omega t - bx]$, siendo el factor $\exp[-bx]$ el causante de la disminución de amplitud del modo con la distancia (lo cual exige una elección adecuada del signo de b : $b > 0$ para $x \rightarrow +\infty$, y $b < 0$ para $x \rightarrow -\infty$). En el caso de números de onda reales $k = a$, la dirección de propagación

viene definida por el signo de a : $x \rightarrow -\infty$ para valores positivos y $x \rightarrow +\infty$ para valores negativos.

Sólo el modo $n=0$ (SH0) es real para todas las frecuencias; cualquier otro modo SH n es evanescente para frecuencias inferiores a Ω_n . Este *carácter multimodal* es común a la propagación de ondas en cualquier guía de onda.

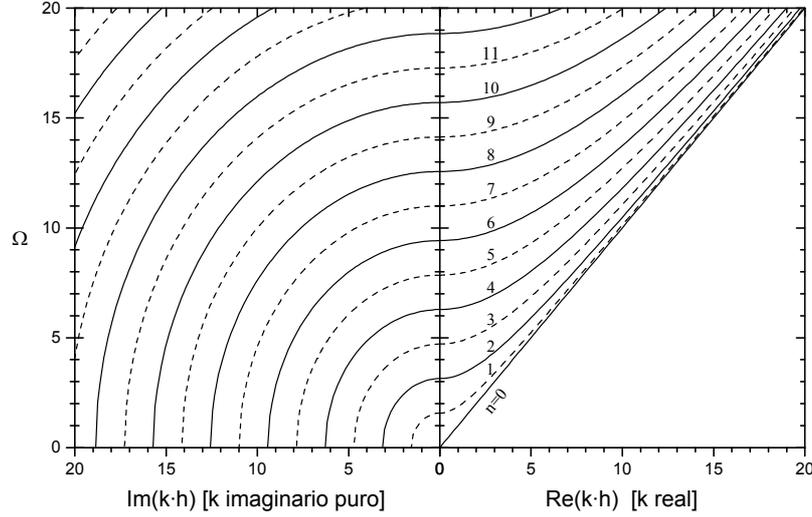


Figura 2.2. Espectro de frecuencia analítico de ondas SH guiadas. Modos reales y evanescentes.

Si se estudia un modo cualquiera SH n de forma aislada, la solución de la ecuación característica proporciona una relación entre ξ y Ω que se representa como una curva (o *rama*) en el espacio $\text{Re}(\xi) - \text{Im}(\xi) - \Omega$. La representación conjunta de las ramas correspondientes a todos los modos se denomina *espectro de frecuencia*. Las proyecciones del espectro de frecuencia sobre los planos coordenados $\text{Re}(\xi) - \Omega$ e $\text{Im}(\xi) - \Omega$ se muestran en la Figura 2.2 para $\Omega \leq 20$, donde se representan con línea continua las ramas de modos simétricos y con línea discontinua las ramas de modos antisimétricos.

Teniendo en cuenta la ec. (2.27), para cualquier rama $n \neq 0$ el tramo correspondiente a números de onda ξ reales es una parábola con asíntota $\Omega = c_T \xi$, y el tramo correspondiente a números de onda ξ imaginarios es una circunferencia de radio Ω_n . La rama del modo SH0 es la recta $\Omega = c_T \xi$.

La velocidad de fase (velocidad a la que se propagan los valles y picos de una onda armónica) tiene la definición habitual

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\Omega}{\xi} c_T \Rightarrow \bar{c} = \frac{c}{c_T} = \frac{\Omega}{\xi} \quad (2.28)$$

La interpretación gráfica de esta definición sobre el espectro de frecuencia es la

siguiente: la velocidad de fase en un punto de una rama es la pendiente de la recta secante que une dicho punto con el origen. En el caso de ondas SH guiadas, es sencillo obtener una expresión analítica de la velocidad de fase

$$\bar{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\Omega_n}{\Omega}\right)^2}} \quad (2.29)$$

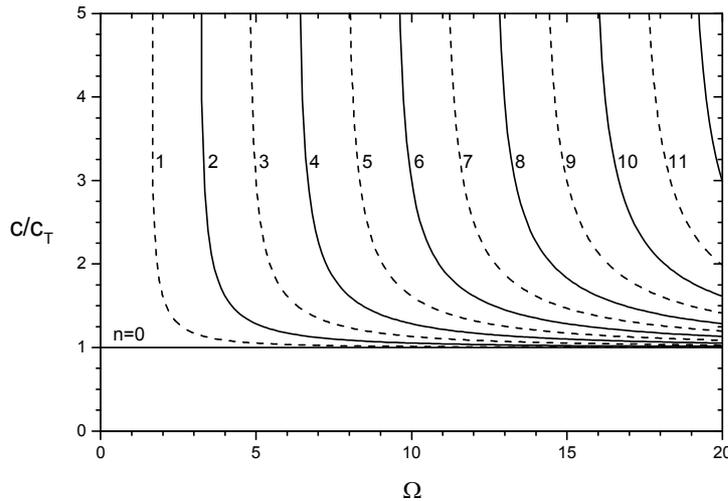


Figura 2.3. Curvas de dispersión $\Omega\text{-}\bar{c}$ analíticas de ondas SH guiadas. Modos reales

En la Figura 2.3 se representa la variación de \bar{c} con la frecuencia para los modos reales y para $\Omega \leq 20$. Se observa que la velocidad de fase de todos los modos varía con la frecuencia, salvo en el modo SH0, por lo que todos los modos $n \neq 0$ son dispersivos. Consecuentemente, cuando un pulso monocromático de duración finita, caracterizado por un contenido en frecuencia que abarca un cierto ancho de banda, se propague en la placa, experimentará un ensanchamiento de su forma con la distancia debido a la diferente velocidad de propagación de cada frecuencia que constituye el pulso. Es decir, el pulso se esparce en el espacio y el tiempo a medida que se propaga. Este *carácter dispersivo* es común a la propagación de ondas en cualquier guía de onda. La representación de las velocidades (de fase o de grupo) de los modos reales frente a la frecuencia se denomina *curvas de dispersión*.

Como las ondas SH guiadas son dispersivas, la velocidad de grupo (velocidad de propagación de un pulso formado por un grupo de ondas de frecuencias próximas, y también velocidad de propagación de la energía) es diferente a la velocidad de fase

y tiene la siguiente definición

$$c_{gr} = \frac{d\omega}{dk} \Rightarrow \bar{c}_{gr} = \frac{c_{gr}}{c_T} = \frac{d\Omega}{d\xi} \quad (2.30)$$

La interpretación gráfica de esta definición sobre el espectro de frecuencia es la siguiente: la velocidad de grupo en un punto de una rama es la pendiente de la recta tangente a dicha rama en el punto considerado. Puede obtenerse de forma sencilla una expresión analítica para la velocidad de grupo de los modos SH n reales:

$$\bar{c}_{gr} = \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega_n}{\Omega}\right)^2} = \frac{1}{\bar{c}} \quad (2.31)$$

en la cual se observa que la velocidad de grupo adimensional es la inversa de la velocidad de fase adimensional.

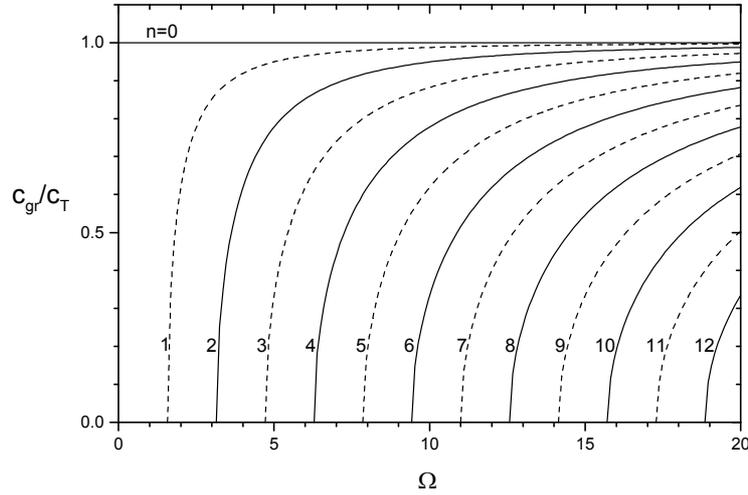


Figura 2.4. Curvas de dispersión $\Omega\text{-}\bar{c}_{gr}$ analíticas de ondas SH guiadas. Modos reales.

En la Figura 2.4 se representa la variación de \bar{c}_{gr} con la frecuencia para los modos reales y para $\Omega \leq 20$.

Para ilustrar con mayor claridad el concepto de velocidad de grupo es conveniente mostrar la propagación de un pulso sencillo formado por la superposición de dos ondas con frecuencias muy próximas ω_1 y ω_2 , pertenecientes a la misma rama SH n , con la misma amplitud y propagándose en la misma dirección

$$u_{pulso}(y) = A \hat{u}_z^{(n)}(y) e^{i(k_1 x + \omega_1 t)} + A \hat{u}_z^{(n)}(y) e^{i(k_2 x + \omega_2 t)} \quad (2.32)$$

Empleando relaciones trigonométricas se obtiene

$$A \left(e^{i\alpha} + e^{i\beta} \right) = 2A \exp \frac{i(\alpha + \beta)}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (2.33)$$

Reescribiendo la ec. (2.81)

$$u_{pulso}(y) = 2A \hat{u}_z^{(n)}(y) \underbrace{\exp [i(k_m x + \omega_m t)]}_{\text{onda portadora}} \underbrace{\cos \left(\frac{\Delta k}{2} x + \frac{\Delta \omega}{2} t \right)}_{\text{onda moduladora}} \quad (2.34)$$

donde $k_m = (k_1 + k_2) / 2$, $\omega_m = (\omega_1 + \omega_2) / 2$, $\Delta k = k_2 - k_1$ y $\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1$.

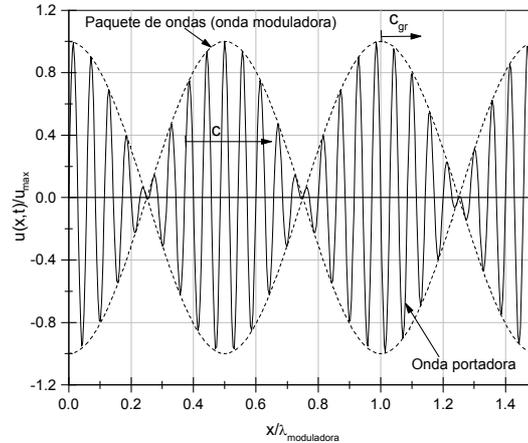


Figura 2.5. Pulso sencillo formado por dos ondas monocromáticas de frecuencias ligeramente diferentes, del mismo modo, de igual amplitud, propagándose en la misma dirección

Puede observarse en la ecuación anterior que el pulso consiste en una onda portadora de alta frecuencia ω_m que viaja a la velocidad de fase $c = \omega_m/k_m$, modulada en amplitud por una onda de baja frecuencia $\Delta\omega/2$ que viaja a la velocidad de grupo $c_{gr} = \Delta\omega/\Delta k$ (en el límite, se convierte en $c_{gr} = d\omega/dk$). En la Figura 2.5 se representan los desplazamientos superficiales normalizados producidos por un pulso de este tipo en un instante determinado, donde se identifican claramente tanto la onda portadora como los paquetes de ondas.

En el caso de ondas SH guiadas se tiene $c_{gr} < c$ (este mismo comportamiento dispersivo lo exhiben las ondas producidas por una piedra en un estanque de agua en reposo¹, y se denomina *dispersión normal*), salvo para el modo SH0 donde $c_{gr} = c$ (modo no dispersivo, que se propaga sin variación de la forma del pulso).

¹Citando a Lord Rayleigh: “Con frecuencia se ha destacado que cuando un grupo de ondas avanza en el agua en reposo, la velocidad del grupo es menor que la velocidad de las ondas individuales de las que está compuesto; las ondas individuales parecen avanzar a través del grupo y desaparecer

En lo que respecta a la estructura de los modos, las ecs. (2.19) y (2.26) revelan que $\hat{u}_z(y)$ es independiente de la frecuencia y de la dirección de propagación (signo del número de onda). En la Figura 2.7 se muestran las estructuras normalizadas de los cuatro primeros modos. Una representación a una escala exagerada de las deformadas en un instante fijo producidas por la propagación de los modos SH0 y SH1, respectivamente, aparece en las Figuras 2.8 y 2.9, donde únicamente se muestra una longitud de onda.

Las ondas SH guiadas también se pueden estudiar como la superposición de dos ondas SH planas: una propagándose en dirección y positiva, y otra propagándose en dirección y negativa, ambas con un cierto ángulo de inclinación θ_{SH} en el plano xy , como se muestra en la Figura 2.6. Al reescribir la ec. (2.19) con funciones exponenciales, la relación entre ambos planteamientos se hace evidente:

$$u_z(y) = \left(\frac{A_0 - iB_0}{2} \right) e^{i(kx+qy+\omega t)} - \left(\frac{A_0 + iB_0}{2} \right) e^{i(kx-ky+\omega t)} \quad (2.35)$$

La inclinación de las ondas SH respecto al eje y es

$$\tan \theta_{SH} = \pm \frac{k}{q} \quad (2.36)$$

Para (y sólo para) ciertas combinaciones de ángulo de inclinación y frecuencia, definidas por la relación de dispersión, la superposición de ambas ondas da lugar a una estructura estacionaria en dirección y que se propaga en dirección x . A este hecho también se le denomina *resonancia transversal* de la placa, y constituye una explicación alternativa al carácter multimodal de las ondas SH guiadas.

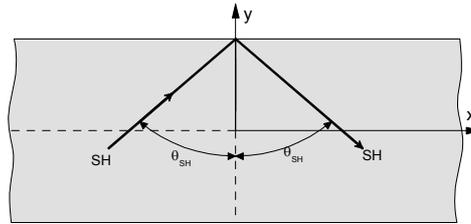


Figura 2.6. Ondas SH guiadas como superposición de ondas SH planas

cuando alcanzan el frente del mismo". Las ondas individuales parecen originarse en la cola del grupo y avanzar hacia el frente del mismo, donde finalmente desaparecen. Por tanto, en este caso de ondas en la superficie del agua en reposo se tiene $c_{gr} < c$.

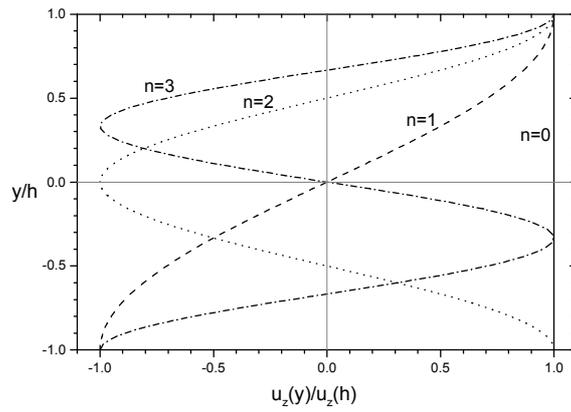


Figura 2.7. Estructura de los cuatro primeros modos SH guiados

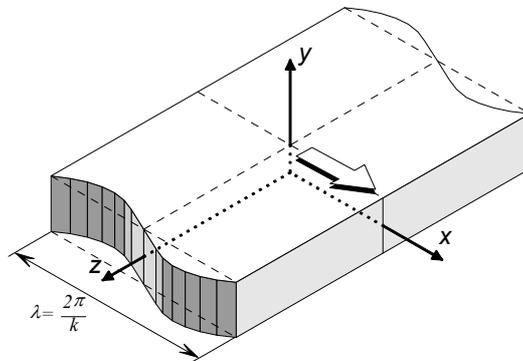


Figura 2.8. Deformada del modo SH0

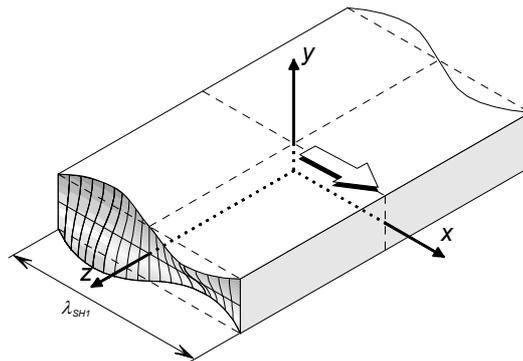


Figura 2.9. Deformada del modo SH1

2.4 Caso plano: ondas de Lamb

En los desarrollos de este apartado se parte de una placa de material elástico, lineal, isótropo y homogéneo de espesor $d = 2h$, en condiciones de deformación plana en el plano xy ($u_z = 0$, $\partial/\partial z = 0$), cuyas superficies están libres de tracciones y cuya geometría se muestra en la Figura 2.1. Para resolver las ecuaciones de Navier se emplea la representación de Helmholtz, ec. (2.2). Los potenciales que intervienen (φ y ψ_z) deben satisfacer las ecuaciones de onda siguientes

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c_L^2} \ddot{\varphi} \quad (2.37)$$

$$\nabla^2 \psi_z = \frac{1}{c_T^2} \ddot{\psi}_z \quad (2.38)$$

Como se están estudiando ondas armónicas propagándose en dirección x y con una estructura estacionaria en dirección y , los potenciales pueden escribirse en variables separadas:

$$\varphi(x, y, t) = \hat{\varphi}(y) e^{i(kx + \omega t)} \quad (2.39)$$

$$\psi_z(x, y, t) = \hat{\psi}_z(y) e^{i(kx + \omega t)} \quad (2.40)$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecs. (2.37) y (2.38), se obtienen sendas ecuaciones diferenciales para Φ y Ψ_z cuyas soluciones son

$$\hat{\varphi}(y) = A_1 \text{sen}(py) + A_2 \text{cos}(py) \quad (2.41)$$

$$\hat{\psi}_z(y) = B_1 \text{sen}(qy) + B_2 \text{cos}(qy) \quad (2.42)$$

donde

$$p^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2 \quad , \quad q^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2 \quad (2.43)$$

Siguiendo el planteamiento del libro de Achenbach [4], se distinguen entre modos simétricos y antisimétricos con respecto al plano medio de la placa $y = 0$. Los modos simétricos se llaman también modos longitudinales porque el desplazamiento medio en el espesor va en la dirección longitudinal. Los modos antisimétricos se llaman también modos de flexión porque el desplazamiento medio tiene dirección transversal.

Usando la relación entre desplazamientos y potenciales, se obtienen los primeros, a partir de los cuales se consiguen las tensiones empleando la ley de comportamiento del material. Así, para los *modos simétricos o longitudinales* se obtiene

$$\hat{u}_x = ikA_2 \text{cos}(py) + qB_1 \text{cos}(qy) \quad (2.44)$$

$$\hat{u}_y = -pA_2 \operatorname{sen}(py) - ikB_1 \operatorname{sen}(qy) \quad (2.45)$$

$$\hat{\sigma}_{zz} = -\lambda(k^2 + p^2)A_2 \cos(py) \quad (2.46)$$

$$\hat{\sigma}_{xx} = \hat{\sigma}_{zz} + 2\mu[-k^2 A_2 \cos(py) + ikqB_1 \cos(qy)] \quad (2.47)$$

$$\hat{\sigma}_{yy} = \hat{\sigma}_{zz} - 2\mu[p^2 A_2 \cos(py) + ikqB_1 \cos(qy)] \quad (2.48)$$

$$\hat{\sigma}_{xy} = \mu[-2ikpA_2 \operatorname{sen}(py) + (k^2 - q^2)B_1 \operatorname{sen}(qy)] \quad (2.49)$$

y para los *modos antisimétricos o de flexión*

$$\hat{u}_x = ikA_1 \operatorname{sen}(py) - qB_2 \operatorname{sen}(qy) \quad (2.50)$$

$$\hat{u}_y = pA_1 \cos(py) - ikB_2 \cos(qy) \quad (2.51)$$

$$\hat{\sigma}_{zz} = -\lambda(k^2 + p^2)A_1 \operatorname{sen}(py) \quad (2.52)$$

$$\hat{\sigma}_{xx} = \hat{\sigma}_{zz} - 2\mu[k^2 A_1 \operatorname{sen}(py) + ikqB_2 \operatorname{sen}(qy)] \quad (2.53)$$

$$\hat{\sigma}_{yy} = \hat{\sigma}_{zz} - 2\mu[p^2 A_1 \operatorname{sen}(py) - ikqB_2 \operatorname{sen}(qy)] \quad (2.54)$$

$$\hat{\sigma}_{xy} = \mu[2ikpA_1 \cos(py) + (k^2 - q^2)B_2 \cos(qy)] \quad (2.55)$$

Aplicando las condiciones de contorno de tracciones nulas en las superficies de la placa $y = \pm h$ se obtiene un sistema de ecuaciones homogéneo cuyas incógnitas son los coeficientes desconocidos de la solución general.

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{xy}(h) \\ \hat{\sigma}_{yy}(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Particularizando para los modos longitudinales

$$\begin{pmatrix} -2\mu ikp \operatorname{sen}(ph) & \mu(k^2 - q^2) \operatorname{sen}(qh) \\ -(\lambda(k^2 + p^2) + 2\mu k^2) \cos(ph) & -2\mu ikq \cos(qh) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.57)$$

y para los de flexión

$$\begin{pmatrix} 2\mu ikp \cos(ph) & \mu(k^2 - q^2) \cos(qh) \\ -(\lambda(k^2 + p^2) + 2\mu k^2) \operatorname{sen}(ph) & 2\mu ikq \operatorname{sen}(qh) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.58)$$

Sólo cuando el determinante de las matrices sea nulo los sistemas admitirán soluciones no triviales, las cuales corresponden a modos de propagación de ondas guiadas en la placa. Esta condición proporciona dos ecuaciones características (conocidas como *ecuaciones de Rayleigh-Lamb*) que relacionan la frecuencia ω y el número de onda k para los modos simétricos y antisimétricos, respectivamente.

$$\frac{\tan(qh)}{\tan(ph)} = -\frac{4k^2 pq}{(q^2 - k^2)^2} \quad (2.59)$$

$$\frac{\tan(qh)}{\tan(ph)} = -\frac{(q^2 - k^2)^2}{4k^2 pq} \quad (2.60)$$

Se trata de ecuaciones trascendentes que admiten un número infinito de soluciones complejas. La solución del sistema de ecuaciones proporciona también una relación entre las constantes (B_1/A_2 y B_2/A_1)

$$\frac{B_1}{A_2} = \frac{2ikp \operatorname{sen}(ph)}{(k^2 - q^2) \operatorname{sen}(qh)} = \frac{(k^2 - q^2) \cos(ph)}{2ikq \cos(qh)} \quad (2.61)$$

$$\frac{B_2}{A_1} = -\frac{2ikp \cos(ph)}{(k^2 - q^2) \cos(qh)} = -\frac{(k^2 - q^2) \operatorname{sen}(ph)}{2ikq \operatorname{sen}(qh)} \quad (2.62)$$

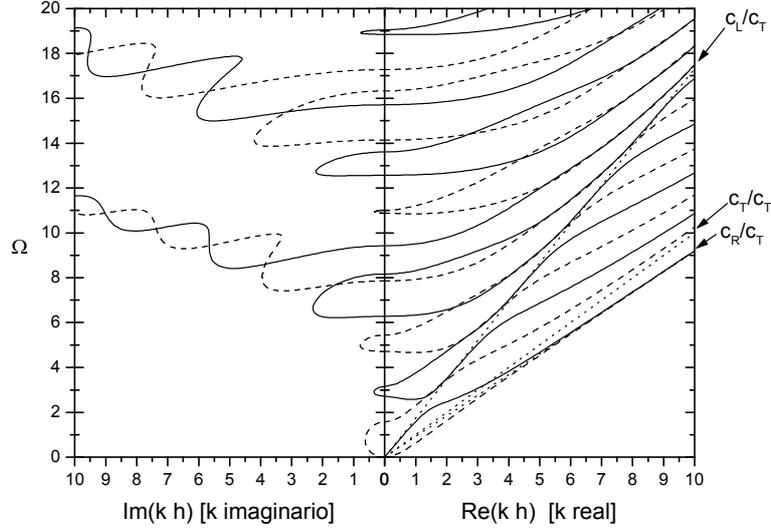


Figura 2.10. Espectro de frecuencia $\xi - \Omega$ de modos de Lamb reales e imaginarios para $\nu=0.25$

Para una determinada frecuencia ambas ecuaciones características admiten un número finito de soluciones k reales, que corresponden a modos que se propagan (modos reales), un número infinito de soluciones complejas y un número finito de soluciones imaginarias. Las soluciones con parte imaginaria no nula corresponden a modos cuya amplitud decae exponencialmente en la dirección x (modos evanescentes). De nuevo aparece la naturaleza multimodal característica de las ondas guiadas.

Se definen las *frecuencias de corte* como aquellas para las que la ecuación característica admite como solución real un número de onda nulo $k = 0$. Esta situación corresponde a un modo que no presenta variación en dirección x . Su expresión analítica es la siguiente

$$\Omega_d = \frac{n_d \pi}{2}, \Omega_e = \frac{n_e \pi}{2} \kappa \quad (2.63)$$

donde n_d y n_e son números naturales, y $\kappa = c_L/c_T = \sqrt{(2 - 2\nu)/(1 - 2\nu)}$. Estos valores corresponden respectivamente a situaciones de resonancia de ondas P y

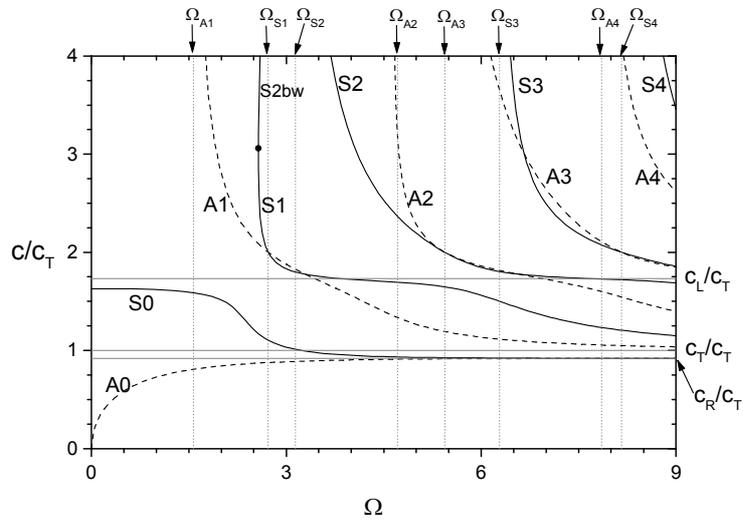


Figura 2.11. Curvas de dispersión $\Omega - \bar{c}$ de modos de Lamb reales para $\nu=0.25$

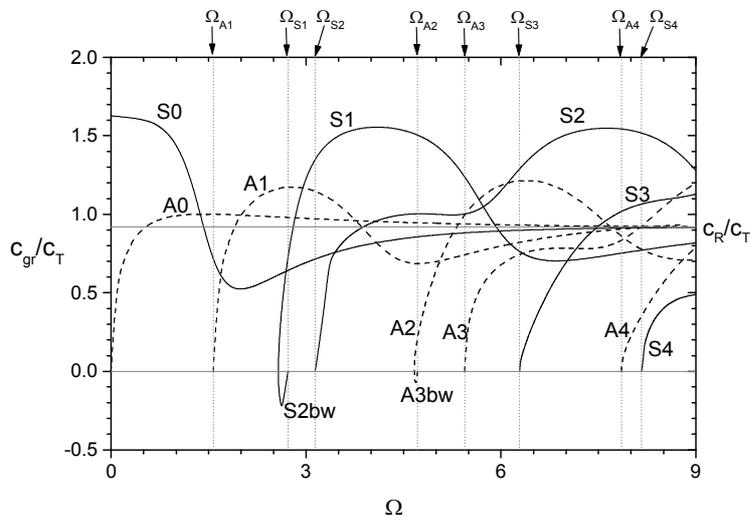


Figura 2.12. Curvas de dispersión $\Omega - \bar{c}_{gr}$ de modos de Lamb reales para $\nu=0.25$

SV planas propagándose perpendicularmente a la placa, que se denominan respectivamente resonancias dilatacionales y equivoluminales. Esas frecuencias de corte corresponderán a modos simétricos para valores pares de n_e e impares de n_d , y a modos antisimétricos para valores impares de n_e y pares de n_d .

Reescribiendo las ecuaciones de Rayleigh-Lamb en términos de las variables adimensionales Ω y ξ se obtiene

$$\frac{\tan\left(\sqrt{\frac{\Omega^2}{\kappa^2} - \xi^2}\right)}{\tan\left(\sqrt{\Omega^2 - \xi^2}\right)} = - \left[\frac{4\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\Omega^2}{\kappa^2} - \xi^2\right) (\Omega^2 - \xi^2)}}{(\Omega^2 - 2\xi^2)^2} \right]^{\pm 1} \quad (2.64)$$

donde el signo del exponente, positivo o negativo, permite seleccionar la ecuación de modos simétricos o antisimétricos, respectivamente. Se observa que la única constante del material que interviene es κ , que será por tanto el único parámetro del material que influirá en las raíces de dichas ecuaciones. Las curvas de dispersión adimensionales sólo dependen del coeficiente de Poisson ν .

Para valores muy grandes de la frecuencia, las ramas del espectro de frecuencia se aproximan a una de las dos asíntotas siguientes: la recta $\Omega = c_R \xi$ en el caso de los modos fundamentales (S0 y A0), donde c_R es la velocidad de las ondas superficiales o de Rayleigh (que es también función exclusiva de ν), o la recta $\Omega = c_T \xi$ para el resto de modos.

Como ejemplo para ilustrar el aspecto de las curvas de dispersión de ondas de Lamb se ha elegido un material con $\nu = 0.25$. Las soluciones k reales e imaginarias de la ec. (2.59) se muestran en la Figura 2.10 con línea continua (modos simétricos), y las soluciones reales e imaginarias de la ec. (2.60) se muestran en la misma Figura 2.10 con línea discontinua (modos antisimétricos). Dicha representación gráfica se ha realizado en un rango de frecuencias amplio $\Omega \leq 20$, y muestra las ramas del espectro de frecuencia que están contenidas en los planos coordenados $\text{Re}(\xi) - \Omega$ e $\text{Im}(\xi) - \Omega$. Sobre esta misma figura, en la parte correspondiente a modos reales se han dibujado tres líneas punteadas cuyas pendientes ($\Omega/\xi = \bar{c}$) corresponden a velocidades de fase de valores $c_L = \sqrt{3}c_T$, c_T y $c_R = 0.919c_T$ respectivamente. Las curvas de dispersión con las velocidades de fase adimensionales \bar{c} frente a la frecuencia se muestran en la Figura 2.11, donde además se han señalado con líneas horizontales continuas de color gris las velocidades de referencia (c_L , c_T y c_R), y con líneas verticales de color gris las frecuencias de corte. Las curvas de dispersión con las velocidades de grupo adimensionales \bar{c}_{gr} frente a la frecuencia se muestran en la Figura 2.12.

Ningún modo de Lamb presenta un carácter no dispersivo ($\bar{c}=\text{constante}$) para todas las frecuencias como sucedía con el modo SH0. Sin embargo, todos los modos exhiben una dispersión mínima en ciertos rangos de frecuencia, correspondientes a aquellos tramos de la curva de dispersión donde la velocidad de fase apenas cambia con la frecuencia (mesetas prácticamente horizontales en la Figura 2.11).

Para ilustrar con mayor claridad el concepto de velocidad de grupo es conveniente mostrar la propagación de un pulso sencillo. En la Figura 2.5 se muestran los desplazamientos superficiales en un instante dado para un pulso formado por dos ondas con frecuencias muy próximas, pertenecientes a la misma rama, con la misma amplitud y propagándose en la misma dirección. Para ondas de Lamb, a diferencia de lo descrito para ondas SH guiadas, en algunos casos se tiene $c_{gr} > c$ (las ondas individuales parecen originarse en el frente del grupo y retroceder hacia la cola del mismo, donde finalmente desaparecen), como sucede para el modo A0 en todo el rango de frecuencias (Figuras 2.11 y 2.12). A esta situación se la denomina *dispersión anómala*. En la mayoría de casos se tiene $c_{gr} < c$ (*dispersión normal*), lo cual produce un comportamiento de los pulsos similar al obtenido para ondas SH guiadas: las ondas individuales parecen generarse en la cola del grupo y avanzar hacia el frente del mismo, donde parecen morir. Se observa que algunas ramas tienen tramos con velocidades de grupo negativas $c_{gr} < 0$, lo cual implica que el paquete de ondas y las ondas individuales se mueven en direcciones opuestas. Este hecho no sucede en el caso de ondas SH guiadas.

“Backward waves”

Si se estudia la rama correspondiente a un modo determinado, Figuras 2.11 y 2.12, se observa que dicho modo no se propaga para todas las frecuencias (salvo en el caso de los modos fundamentales, S0 y A0). Matemáticamente esto significa que sólo para valores superiores a una cierta *frecuencia umbral* la ecuación de Rayleigh-Lamb admite una solución k real para dicho modo. En el caso de ondas SH guiadas esta frecuencia umbral coincide con la frecuencia de corte, pero no sucede lo mismo en el caso de ondas de Lamb, donde existen modos que se propagan para frecuencias inferiores a su frecuencia de corte (por ejemplo los modos S1 y A2). En un rango de frecuencia inmediatamente por debajo de algunas frecuencias de corte existen dos modos reales que, aunque dibujados como una línea continua, no pertenecen a la misma rama (en la Figura 2.11 sucede en Ω_{S1} y Ω_{A2}). Uno de esos modos presenta una velocidad de grupo negativa (ver Figura 2.12), y por ello se le denomina *onda “backward”* puesto que su energía y su fase viajan en direcciones opuestas; el otro modo tiene una velocidad de grupo positiva. Este hecho se destaca etiquetando con nombres distintos los tramos de la curva correspondientes a ondas “backward” y a ondas “forward”.

La estructura de los modos de Lamb, a diferencia del caso antiplano, varía con la frecuencia y con la dirección de propagación, como puede extraerse de las ecs. (2.44) a (2.55), (2.61) y (2.62). El cambio de dirección de propagación provoca el cambio de signo de una de las componentes de los desplazamientos. El efecto del cambio de frecuencia es más complejo. En las Figuras 2.13 a 2.16 se muestra una selección de estructuras modales representativas, que incluyen varios modos diferentes (tanto S como A, reales y evanescentes) para distintas frecuencias. En todas ellas se muestra

una instantánea de la deformada exagerada de la sección transversal de la placa en un tramo de una longitud finita en dirección x , cuya posición indeformada se dibuja con un rectángulo de trazo discontinuo, indicándose también los valores Ω y ξ . Para los modos reales se representa una longitud de onda adimensional $\lambda/h = 2\pi/\xi$, y además se marca la posición indeformada de la sección intermedia. Para los modos evanescentes, se representa una distancia suficiente para mostrar el decrecimiento exponencial de la amplitud con la distancia x . En las Figuras 2.13 y 2.14 se observa que al aumentar la frecuencia los desplazamientos de los modos S0 y A0 se concentran en las superficies de la placa; de hecho, ambos modos tienden asintóticamente a la estructura de las ondas de Rayleigh al aumentar la frecuencia. Esta tendencia coincide con el acercamiento progresivo de la velocidad de fase a c_R . En la Figura 2.15 se muestra la transformación de la estructura del modo A1 cuando se supera su frecuencia umbral, la cual coincide con su frecuencia de corte $\Omega_{A1} = \pi/2$.

La propagación de una onda armónica plana monocromática (conteniendo un único modo del espectro) hace que las partículas de la placa describan trayectorias elípticas alrededor de su posición indeformada, excepto para modos imaginarios puros donde las partículas describen trayectorias rectas.

Ondas de Lamb como superposición de ondas planas

Una forma alternativa de estudiar las ondas de Lamb consiste en superponer cuatro ondas planas que se propagan en la placa con una cierta inclinación en el plano xy : una onda longitudinal y otra transversal SV propagándose en dirección y positiva, y una onda longitudinal y otra transversal SV propagándose en dirección y negativa, como se muestra en la Figura 2.17. Al reescribir los potenciales de Helmholtz de las ecs. (2.39) y (2.40) con funciones exponenciales, esta relación se hace evidente:

$$\varphi(x, y, t) = \left(\frac{A_1 - iA_2}{2} \right) e^{i(kx+py+\omega t)} - \left(\frac{A_1 + iA_2}{2} \right) e^{i(kx-py+\omega t)} \quad (2.65)$$

$$\psi_z(x, y, t) = \left(\frac{B_1 - iB_2}{2} \right) e^{i(kx+qy+\omega t)} - \left(\frac{B_1 + iB_2}{2} \right) e^{i(kx-qy+\omega t)} \quad (2.66)$$

Las inclinaciones de las ondas P y SV respecto al eje y son respectivamente

$$\tan \theta_P = \pm \frac{k}{p}, \quad \tan \theta_{SV} = \pm \frac{k}{q} \quad (2.67)$$

Esta superposición de ondas da lugar para ciertas combinaciones de frecuencia, ángulos de inclinación y amplitudes, a estructuras estacionarias en el espesor de la placa producidas por interferencia constructiva, y que corresponden a los distintos modos de Lamb. A este fenómeno también se le denomina resonancia transversal de la placa.

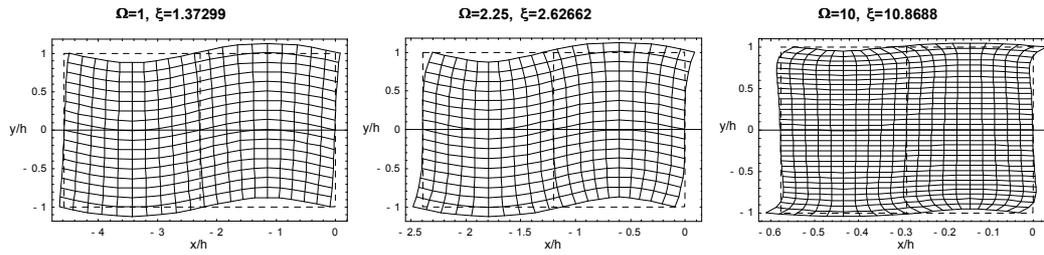


Figura 2.13. Deformada del modo A0 para distintas frecuencias

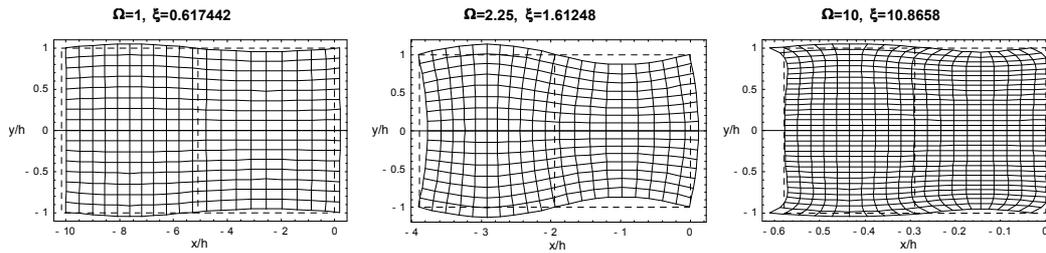


Figura 2.14. Deformada del modo S0 para distintas frecuencias

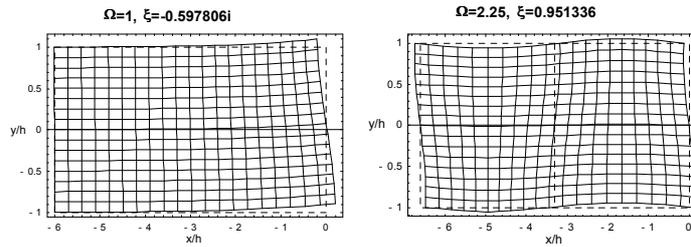


Figura 2.15. Deformada del modo A1 para distintas frecuencias

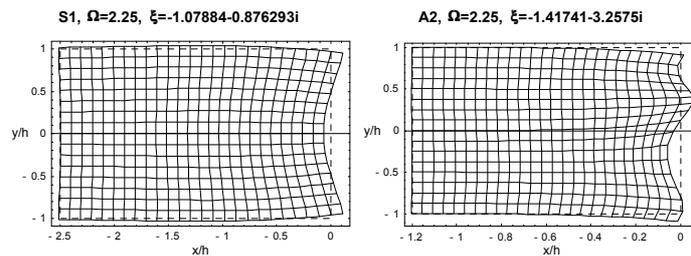


Figura 2.16. Deformada de los modos evanescentes S1 y A2 a la frecuencia $\Omega = 2.25$

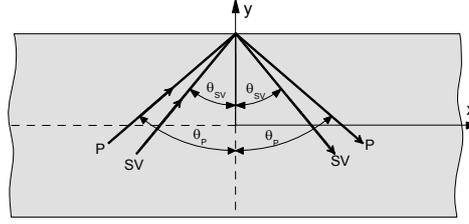


Figura 2.17. Ondas de Lamb como superposición de ondas P y SV planas

2.5 Ondas guiadas en placas viscoelásticas

2.5.1 Material viscoelástico lineal

Los sólidos viscoelásticos lineales se caracterizan porque tienen una relación lineal entre la tensión y sus derivadas y la deformación y las suyas, en la cual las tensiones en un cierto instante no dependen únicamente de los valores actuales de las deformaciones, a diferencia del comportamiento de sólidos elásticos lineales, sino también de la historia completa de deformaciones anteriores. De manera análoga, las deformaciones en un cierto instante dependen de los valores actuales y de la historia completa de tensiones. Por esta razón se dice que estos materiales tienen memoria [83].

Cuando un punto de un material viscoelástico lineal es sometido a un escalón de tensiones σ_0 , instantáneamente aparece una deformación. Al mantener la tensión constante, la deformación aumenta con el tiempo; a este fenómeno se le denomina *relajación*. De manera análoga, al someter el mismo material a un escalón de deformaciones ε_0 adquiere instantáneamente una tensión la cual va decreciendo con el tiempo mientras se mantenga la deformación constante; a este fenómeno se le denomina *fluencia o creep*.

Ley de comportamiento viscoelástica unidimensional

El principio de superposición de Boltzmann predice que la deformación de un material viscoelástico lineal es función de su historia de carga y que su deformación final es una superposición de las contribuciones de cada etapa de carga anterior. La representación integral en un tiempo t de este comportamiento suponiendo un material viscoelástico, lineal e isoterma proporciona la siguiente relación tensión-deformación

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t - \tau) d\varepsilon(\tau) \quad (2.68)$$

donde $G(t)$ es la *función de relajación* viscoelástica, la cual representa la evolución con el tiempo de las tensiones del material cuando se somete a un escalón de defor-

maciones, y τ la variable de integración temporal. La forma inversa de esta ley de comportamiento tiene la siguiente expresión:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\tau) d\sigma(\tau) \quad (2.69)$$

donde $J(t)$ es la *función de fluencia o creep*, la cual representa la evolución con el tiempo de las deformaciones del material cuando se somete a un escalón de tensiones.

Ley de comportamiento viscoelástica tridimensional

En elasticidad es habitual descomponer los tensores de tensión y deformación en una parte hidrostática (σ^h, ε^h) responsable del cambio de volumen y otra desviadora (s_{ij}, e_{ij}) responsable del cambio de forma, cumpliéndose que

$$\sigma^h = \frac{1}{3}\sigma_{kk} \quad ; \quad \varepsilon^h = \frac{1}{3}\varepsilon_{kk} \quad (2.70)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma^h \delta_{ij} \quad ; \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon^h \delta_{ij} \quad (2.71)$$

En un material elástico, lineal e isótropo la ley de comportamiento queda completamente definida con un par de constantes elásticas independientes. Una posible elección consecuente con la descomposición en efectos hidrostáticos y desviadores consiste en emplear el módulo de elasticidad transversal o de cizalladura μ y el módulo de rigidez volumétrica B (el cual está relacionado con las constantes de Lamé: $B = \lambda + 2\mu/3$). Estas constantes tienen una interpretación física clara: μ está relacionado con la rigidez del material frente al cambio de forma, y B con su rigidez frente a la variación de volumen. La ley de comportamiento elástica en términos de estas constantes tiene la siguiente expresión

$$s_{ij} = 2\mu e_{ij} \quad ; \quad \sigma^h = 3B\varepsilon^h \quad (2.72)$$

Incluyendo el principio de superposición de Boltzmann de manera análoga al caso unidimensional, ec. (2.68), y considerando por separado los efectos desviadores e hidrostáticos, la relación tensión-deformación para un material viscoelástico, lineal e isoterma puede escribirse en términos de dos funciones independientes

$$s_{ij}(t) = 2 \int_{-\infty}^t G_\mu(t-\tau) de_{ij}(\tau) \quad (2.73)$$

$$\sigma^h(t) = 3 \int_{-\infty}^t G_B(t-\tau) d\varepsilon^h(\tau) \quad (2.74)$$

donde $G_\mu(t)$ y $G_B(t)$ son las funciones de relajación en cizalladura (deformación tangencial pura) y en dilatación (volumétrica), respectivamente. Estas ecuaciones se pueden escribir de forma compacta como

$$\tilde{\sigma}(t) = \int_{-\infty}^t G_\alpha(t-\tau) d\tilde{\varepsilon}(\tau) \quad (2.75)$$

Esta expresión designa las partes desviadoras o volumétricas de la relación tensión-deformación viscoelástica dependiendo del valor de α : para $\alpha = 1$ se tomarán las componentes desviadoras $G_1 = 2G_\mu$, $\tilde{\sigma} = s_{ij}$, $\tilde{\varepsilon} = e_{ij}$; para $\alpha = 2$ se tomarán las componentes volumétricas $G_2 = 3G_B$, $\tilde{\sigma} = \sigma^h$, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon^h$.

Ley de comportamiento viscoelástica para vibraciones armónicas isoter- mas

Si se admite una historia de deformación armónica en el tiempo:

$$\tilde{\varepsilon}(\tau) = \tilde{\varepsilon}_0 e^{i\omega\tau} \quad (2.76)$$

donde ω es la frecuencia y $\tilde{\varepsilon}_0$ es la amplitud de la oscilación, y se supone que se ha alcanzado el estado estacionario, las tensiones serán también armónicas de la misma frecuencia

$$\tilde{\sigma}(\tau) = \tilde{\sigma}_0 e^{i\omega\tau} \quad (2.77)$$

La función de relajación $G_\alpha(t)$ se podrá suponer compuesta de dos términos

$$G_\alpha(t) = \check{G}_\alpha + \hat{G}_\alpha(t) \quad (2.78)$$

donde \check{G}_α es constante con el tiempo y $\hat{G}_\alpha(t)$ es una función que tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$.

Sustituyendo las ecs. (2.76) y (2.78) en (2.75) se tiene

$$\tilde{\sigma}(t) = \check{G}_\alpha \tilde{\varepsilon}_0 e^{i\omega t} + i\omega \tilde{\varepsilon}_0 \int_{-\infty}^t \hat{G}_\alpha(t-\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (2.79)$$

Haciendo el cambio de variable $\eta = t - \tau$ se obtiene

$$\tilde{\sigma}(t) = \left[\check{G}_\alpha + \omega \int_0^\infty \hat{G}_\alpha(\eta) \operatorname{sen}(\omega\eta) d\eta + i\omega \int_0^\infty \hat{G}_\alpha(\eta) \operatorname{cos}(\omega\eta) d\eta \right] \tilde{\varepsilon}_0 e^{i\omega t} \quad (2.80)$$

Definiendo la expresión entre corchetes como el *módulo complejo* $G_\alpha^*(\omega)$, se tendrá la siguiente relación entre las tensiones y las deformaciones en el estado estacionario:

$$\tilde{\sigma}(t) = G_\alpha^*(\omega) \tilde{\varepsilon}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\sigma}_0 = G_\alpha^*(\omega) \tilde{\varepsilon}_0 \quad (2.81)$$

Esta ecuación es válida para cualquier frecuencia, y representa la transformada de Fourier de la ley de comportamiento del material viscoelástico, lineal e isótropo.

El módulo complejo puede escribirse en forma rectangular o polar. La forma rectangular es

$$G_\alpha^*(\omega) = G'_\alpha(\omega) + iG''_\alpha(\omega) \quad (2.82)$$

donde las componentes rectangulares tienen la siguiente expresión

$$G'_\alpha(\omega) = \operatorname{Re}[G_\alpha^*(\omega)] = \check{G}_\alpha + \omega \int_0^\infty \hat{G}_\alpha(\eta) \operatorname{sen}(\omega\eta) d\eta \quad (2.83)$$

$$G''_\alpha(\omega) = \operatorname{Im}[G_\alpha^*(\omega)] = \omega \check{\varepsilon}_0 \int_0^\infty \hat{G}_\alpha(\eta) \operatorname{cos}(\omega\eta) d\eta \quad (2.84)$$

La forma polar es

$$G_\alpha^*(\omega) = |G_\alpha^*(\omega)| \exp[i\delta_\alpha(\omega)] \quad (2.85)$$

donde $|G_\alpha^*(\omega)|$ es el valor absoluto del módulo complejo y $\delta_\alpha(\omega)$ es su argumento. Sustituyendo la ec. (2.85) en (2.81), se obtiene

$$\tilde{\sigma}(t) = |G_\alpha^*(\omega)| \check{\varepsilon}_0 e^{i(\omega t + \delta_\alpha(\omega))} \quad (2.86)$$

Se observa que en el estado estacionario del problema armónico la deformación está retrasada respecto a la tensión, siendo la diferencia de fase de valor $\delta_\alpha(\omega)$.

La ec. (2.81) es válida tanto para los efectos desviadores como para los hidrostáticos. Escribiendo de forma separada las ecuaciones correspondientes a ambos efectos se tiene

$$s_{ij}(\omega) = 2\mu^*(\omega) e_{ij}(\omega) \quad ; \quad \sigma^h(\omega) = 3B^*(\omega) \varepsilon^h(\omega) \quad (2.87)$$

donde $\mu^*(\omega) = G_1^*(\omega)/2$ es el *módulo complejo de cizalladura* y $B^*(\omega) = G_2^*(\omega)/3$ es el *módulo complejo de rigidez volumétrica*.

Principio de correspondencia elástica-viscoelástica.

La transformada de Fourier de la ley de comportamiento de un material elástico lineal e isótropo, ec. (2.72), puede escribirse como

$$s_{ij}(\omega) = 2\mu e_{ij}(\omega) \quad ; \quad \sigma^h(\omega) = 3B \varepsilon^h(\omega) \quad (2.88)$$

Comparando las ecs. (2.88) y (2.87), se comprueba que ambas relaciones tensión-deformación tienen la misma estructura, salvo por el hecho de que en el caso viscoelástico los parámetros constitutivos del material toman valores complejos que además dependen de la frecuencia. Esta asociación entre los problemas elástico y viscoelástico en el caso armónico se denomina *Principio de Correspondencia*.

Una conclusión directa de este principio es que la transformada de Fourier de la solución viscoelástica se puede obtener a partir de la transformada de Fourier de la solución elástica correspondiente sustituyendo las constantes elásticas (μ, B) por los módulos complejos $(\mu^*(\omega), B^*(\omega))$. Para simplificar la notación, la dependencia de los módulos complejos con la frecuencia no se mostrará explícitamente en los desarrollos siguientes.

Empleando el principio de correspondencia, las ecuaciones de Navier para un material viscoelástico lineal en el caso armónico tienen la siguiente expresión, derivada de la ec. (2.1),

$$(\lambda^* + \mu^*) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu^* \nabla^2 \mathbf{u} + i\rho\omega \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

donde $\lambda^* = B^* - 2\mu^*/3$ y μ^* son las constantes de Lamé complejas del material viscoelástico. Las velocidades complejas de propagación de las ondas longitudinales y transversales tienen la siguiente expresión

$$c_L^*(\omega) = \sqrt{\frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\rho}} \quad ; \quad c_T^*(\omega) = \sqrt{\frac{\mu^*}{\rho}} \quad (2.89)$$

En el caso elástico los pulsos de ondas planas se propagan sin sufrir atenuación (sin cambio de amplitud) ni dispersión (sin cambios de forma). Pero en un medio viscoelástico las velocidades de las ondas cambian con la frecuencia, lo cual significa que existe dispersión, y tienen una parte imaginaria, que introduce atenuación con la distancia de propagación.

Modelo viscoelástico de Kelvin

El modelo viscoelástico de Kelvin es un caso particular de la ley de comportamiento viscoelástica descrita anteriormente. Se conoce también como modelo de “muelle y amortiguador en paralelo” puesto que en el caso unidimensional responde al esquema ilustrado en la Figura 2.18, donde el muelle representa el comportamiento elástico del material y el amortiguador representa el comportamiento viscoso. A pesar de su simplicidad reproduce adecuadamente el comportamiento de muchos sólidos viscoelásticos reales [20, 96, 12].

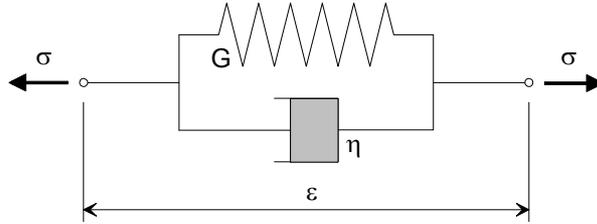


Figura 2.18. Modelo viscoelástico de Kelvin unidimensional

En el caso unidimensional el modelo proporciona la siguiente ley de comportamiento en forma diferencial

$$\sigma = G\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (2.90)$$

donde G es la rigidez del muelle y η el coeficiente de amortiguamiento del amortiguador.

Si estudiamos un problema armónico en estado estacionario

$$\varepsilon = \hat{\varepsilon} e^{i\omega t} \quad ; \quad \sigma = \hat{\sigma} e^{i\omega t} \quad (2.91)$$

En este caso, la ley de comportamiento se reduce a

$$\hat{\sigma} = (G + i\omega\eta) \hat{\varepsilon} = G^*(\omega) \hat{\varepsilon} \quad (2.92)$$

donde $G^*(\omega)$ es la rigidez compleja del sistema, cuyas partes real e imaginaria son respectivamente $G'(\omega) = G$ y $G''(\omega) = \omega\eta$. Dependiendo de la relación funcional de los parámetros del modelo (G, η) con la frecuencia se obtienen distintas leyes de comportamiento.

En problemas de propagación de ondas se suelen manejar dos variedades diferentes del modelo viscoelástico de Kelvin. Ambas utilizan una rigidez G constante, diferenciándose únicamente en el amortiguamiento η que emplean. En la primera de ellas se supone un valor de η independiente de la frecuencia, lo cual da lugar a una rigidez compleja que tiene una parte real constante y una parte imaginaria que crece linealmente con la frecuencia. En la segunda variedad se supone un amortiguamiento η inversamente proporcional a la frecuencia, lo cual proporciona una rigidez compleja que es independiente de la frecuencia

$$\eta(\omega) = \frac{G''}{\omega} \Rightarrow G^* = G + iG'' \quad (2.93)$$

El primer modelo se dice que incluye *amortiguamiento viscoso*, y el segundo *amortiguamiento histerético*.

Propiedades viscoelásticas a frecuencias ultrasónicas

La determinación de los parámetros constitutivos complejos de un material viscoelástico a frecuencias ultrasónicas sólo es posible mediante experimentos de propagación de ondas [83]. La técnica más habitual se basa en ensayos unidimensionales de propagación de ondas planas longitudinales o transversales realizados sobre muestras de espesor conocido, en condiciones de inmersión o al aire [20, 16, 12].

La propagación unidimensional de una onda armónica de frecuencia ω en la dirección x positiva en un material viscoelástico, empleando el principio de correspondencia, admite la siguiente representación matemática de los desplazamientos

$$u(x, t) = A \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{c^*(\omega)} \right) \right] \quad (2.94)$$

donde A es la amplitud y $c^*(\omega)$ es la velocidad de fase viscoelástica, que tendrá un valor complejo y dependiente de la frecuencia. Se definen dos magnitudes reales y

positivas, c y α , relacionadas respectivamente con las partes real e imaginaria de $1/c^*$ y que definen c^* completamente

$$\frac{1}{c^*(\omega)} = \frac{1}{c(\omega)} - i \frac{\alpha(\omega)}{\omega} \quad (2.95)$$

Para el número de onda complejo k^* de esta onda se tiene

$$k^*(\omega) = \frac{\omega}{c^*(\omega)} \rightarrow \text{Re}(k^*) = \frac{\omega}{c(\omega)}; \text{Im}(k^*) = -\alpha(\omega) \quad (2.96)$$

Sustituyendo estas expresiones en la solución unidimensional del problema de propagación de ondas

$$u(x, t) = A \underbrace{\exp[-\alpha(\omega) x]}_{\text{atenuación}} \underbrace{\exp\left[i\omega \left(t - \frac{x}{c(\omega)}\right)\right]}_{\text{propagación}} \quad (2.97)$$

En esta última ecuación, además del término de propagación de la onda armónica presente en el caso elástico, aparece una exponencial decreciente con la distancia. El significado físico de α y c se muestra claramente en esta expresión: α es el coeficiente de atenuación de la onda en Neper (Np) por unidad de distancia, y c es la velocidad de fase. El factor de atenuación es la diferencia fundamental entre la propagación de ondas en medios elásticos y viscoelásticos. En materiales elásticos, la atenuación es debida únicamente al aumento de la superficie del frente de onda (atenuación por radiación o geométrica) y a la difracción. En medios viscoelásticos, a esos dos factores hay que añadirles la atenuación producida por el amortiguamiento interno del material.

En los experimentos se miden los valores de $\alpha(\omega)$ y $c(\omega)$ tanto para ondas longitudinales como para transversales. Las conclusiones más importantes que se extraen aparecen resumidas a continuación:

- En un amplio rango de frecuencias ultrasónicas (1-6MHz en [12], 2-14MHz en [20]) y tanto para ondas longitudinales como transversales, se tiene que $c(\omega)$ es constante y $\alpha(\omega)$ es lineal con la frecuencia ($\alpha(\omega)/\omega = \text{constante}$). Sustituyendo en la ec. (2.95), se obtiene que las velocidades de fase complejas (c_L^*, c_T^*) son constantes e independientes de la frecuencia

$$\frac{1}{c_L^*} = \frac{1}{c_L} - i \frac{\alpha_L}{\omega} \quad ; \quad \frac{1}{c_T^*} = \frac{1}{c_T} - i \frac{\alpha_T}{\omega} \quad (2.98)$$

Los parámetros constitutivos complejos del material, que se calculan a partir de (c_L^*, c_T^*) y la densidad empleando las ecs. (2.89), también son independientes de la frecuencia

$$\mu^* = \rho (c_T^*)^2 \quad ; \quad \lambda^* = \rho \left((c_L^*)^2 - 2(c_T^*)^2 \right) \quad ; \quad \nu^* = \frac{\lambda^*}{2(\lambda^* + \mu^*)} \quad (2.99)$$

Por lo tanto, el comportamiento de dichos materiales viscoelásticos a frecuencias ultrasónicas responde a un modelo de Kelvin con amortiguamiento histerético.

- La atenuación en Np por unidad de longitud $\alpha(\omega)$ depende de la naturaleza de la onda. En la mayoría de los materiales analizados, las ondas transversales sufren una mayor atenuación que las ondas longitudinales a la misma frecuencia.

Las constantes que definen las velocidades de ondas complejas para algunos materiales viscoelásticos han sido extraídas de las Referencias [20, 12] y se muestran en la Tabla 2.1, donde las unidades son mm/ μ s para (c_L, c_T) , Np/mm para (α_L, α_T) , rad/ μ s para ω , y g/cm³ para ρ . Los materiales viscoelásticos descritos se emplean como recubrimiento protector anticorrosión de elementos metálicos en ambientes agresivos (por ejemplo, elementos sumergidos o enterrados). Entre estos materiales se encuentran dos resinas epoxi con curado mediante catalizador (Stycast 2057 de Emerson&Cuming endurecida con el catalizador 9, y Mereco 303), un poliestireno duro (Rexolite de Boedeker Plastics Inc), un polietileno de alta densidad (HDPE) y un material bituminoso (Bitumastic 50 de Carboline Inc). Se incluyen también por motivos de comparación algunos materiales elásticos de uso común en aplicaciones industriales (tuberías, depósitos) y aeronáuticas.

Material	c_L	α_L/ω	c_T	α_T/ω	ρ
Aluminio	6.35		3.13		2.70
Acero	5.90		3.19		7.80
Rexolite	2.33	0.0010	1.16	2.01E-8	1.05
Stycast 2057/Cat 9	2.96	0.0047	1.45	0.0069	1.60
Mereco 303	2.39	0.0070	0.99	0.0201	1.08
Bitumastic 50	1.86	0.0230	0.75	0.2400	1.50
HDPE	2.34	0.00374	0.95	0.0486	0.94

Tabla 2.1. Propiedades de algunos materiales elásticos y viscoelásticos

En la literatura se suelen emplear varias unidades diferentes para medir la atenuación, todas ellas relacionadas con el coeficiente de atenuación α medido en Np/mm y definido previamente:

- Neper por longitud de onda (Np/ λ)

$$\bar{\kappa} = 2\pi c \frac{\alpha}{\omega} = \alpha \lambda \quad (2.100)$$

Para los materiales tipo Kelvin con amortiguamiento histerético este valor es real e independiente de la frecuencia tanto para ondas longitudinales como transversales. El término exponencial decreciente empleando esta definición tiene la siguiente expresión: $\exp[-\alpha x] = \exp[-\bar{\kappa} x/\lambda]$.

- dB por unidad de distancia (dB/mm)

$$20 \log_{10} (e^{-\alpha}) = -20\alpha \log_{10} e \quad (2.101)$$

Para los materiales tipo Kelvin con amortiguamiento histerético este valor es proporcional a la frecuencia.

- dB por longitud de onda (dB/ λ)

$$20 \log_{10} (e^{-\alpha\lambda}) = -20\bar{\kappa} \log_{10} e \quad (2.102)$$

Para los materiales tipo Kelvin con amortiguamiento histerético este valor es constante con la frecuencia.

2.5.2 Ondas SH guiadas en una placa viscoelástica homogénea e isótropa

Empleando el principio de correspondencia elástica-viscoelástica, se pueden utilizar las expresiones analíticas explícitas de ondas SH guiadas en placas elásticas para obtener la solución del caso viscoelástico por simple sustitución de las constantes elásticas por las correspondientes constantes viscoelásticas complejas.

La relación de dispersión de las ondas SH guiadas en una placa viscoelástica tiene la siguiente expresión, obtenida a partir de la ec. (2.26),

$$q^* h = \frac{n\pi}{2} \quad (2.103)$$

siendo n un número natural. Las estructuras modales viscoelásticas coinciden con las de los correspondientes modos elásticos. La definición del parámetro complejo q^* se obtiene de la ec. (2.18)

$$(q^*)^2 = \frac{\omega^2}{(c_T^*)^2} - (k^*)^2 \quad (2.104)$$

Es conveniente emplear las siguientes variables adimensionales modificadas:

- número de onda complejo adimensional, definido como $\xi^* = k^* h$
- frecuencia adimensional, definida como $\Omega = \omega h / c_T$

Empleando dichas variables y teniendo en cuenta la ec. (2.104), se puede reescribir la relación de dispersión como

$$(\xi^*)^2 = \Omega^2 \left(\frac{c_T}{c_T^*} \right)^2 - \Omega_n^2 \quad (2.105)$$

donde $\Omega_n = n\pi/2$ es la frecuencia de corte del modo SH n en el caso elástico. A diferencia del caso elástico, en placas viscoelásticas no existen las frecuencias de corte puesto que la relación de dispersión no admite soluciones Ω reales para números de onda nulos $\xi^* = 0$, excepto la solución trivial. Además, para cualquier frecuencia todos los modos son evanescentes puesto que los números de onda ξ^* proporcionados por la relación de dispersión son complejos.

Teniendo en cuenta las ecs. (2.95) y (2.100), la relación de dispersión puede reescribirse como

$$(\xi^*)^2 = \Omega^2 \left(1 - i \frac{\bar{\kappa}_T}{2\pi}\right)^2 - \Omega_n^2 \quad (2.106)$$

donde $\bar{\kappa}_T$ es la atenuación de las ondas transversales en Np por longitud de onda (Np/λ_T).

La visualización de la relación de dispersión de las ondas SH guiadas en una placa viscoelástica requiere una representación tridimensional en los ejes $\text{Re}[\xi^*]$ - $\text{Im}[\xi^*]$ - Ω para mostrar los números de onda complejos. Los espectros de frecuencia obtenidos se muestran en la Figura 2.19 para cuatro placas viscoelásticas de distinto material, con atenuaciones progresivamente crecientes. En todos ellos se representan las ramas correspondientes a los cuatro primeros modos en línea continua gruesa, así como sus proyecciones sobre el plano horizontal ($\Omega = 0$) en línea más fina.

En el caso elástico los modos son reales o puramente imaginarios, y las ramas están contenidas en los planos coordenados ($\text{Im}(\xi^*) = 0$, $\text{Re}(\xi^*) = 0$). Todas las ramas presentan una discontinuidad en su pendiente justo a la frecuencia de corte, donde el modo cambia de imaginario a real. En el caso viscoelástico se observa que las ramas dejan de ser puramente reales o imaginarias, y se convierten en complejas. Además, desaparece la discontinuidad en la pendiente de las ramas. Por tanto, la atenuación separa las ramas de los planos coordenados y suaviza su forma.

Para ilustrar la influencia de la atenuación del material, se han representado en la Figura 2.20 las ramas del espectro de frecuencia correspondiente a un modo fijo para distintos materiales cuyas atenuaciones están comprendidas en el rango $\bar{\kappa}_T \in [0, \pi]$. La rama correspondiente al material elástico está dibujada con línea gruesa. Además se muestran ocho ramas correspondientes a valores constantes de $\bar{\kappa}_T$ con un incremento de $\pi/8$. Mediante una escala de grises se representa el valor de la atenuación, mostrándose con tonos progresivamente más oscuros los valores crecientes de $\bar{\kappa}_T$. También se incluye la proyección sobre el plano horizontal ($\Omega = 0$).

La velocidad de fase de un modo se define como

$$c = \frac{\omega}{\text{Re}(k^*)} = \frac{\Omega}{\text{Re}(\xi^*)} c_T \Rightarrow \bar{c} = \frac{c}{c_T} = \frac{\Omega}{\text{Re}(\xi^*)} \quad (2.107)$$

La atenuación de un modo se define de manera análoga a como se hizo para ondas S y P en la ec. (2.96)

$$\alpha = -\text{Im}(k^*) \Rightarrow \alpha h = -\text{Im}(\xi^*) \quad (2.108)$$

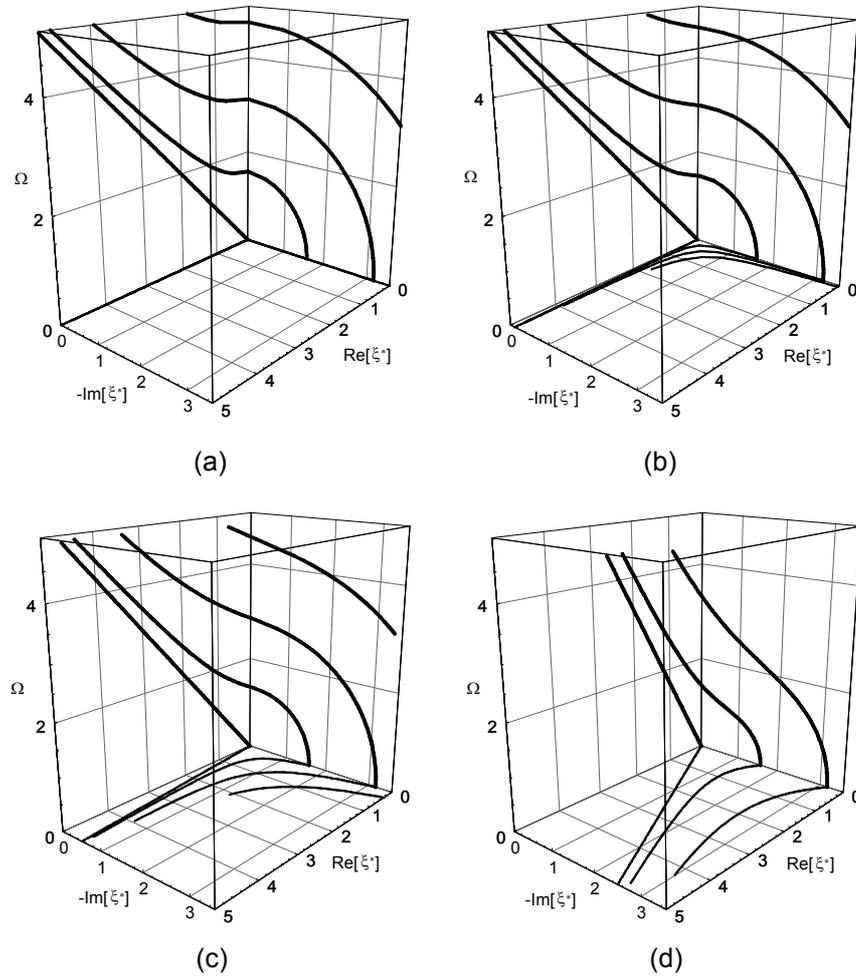


Figura 2.19. Espectro de frecuencia de ondas SH guiadas en placas viscoelásticas para cuatro valores de la atenuación del material: (a) caso elástico, $\bar{\kappa}_T = 0$, (b) $\bar{\kappa}_T = \pi/25$, (c) $\bar{\kappa}_T = \pi/5$, (d) $\bar{\kappa}_T = \pi$.

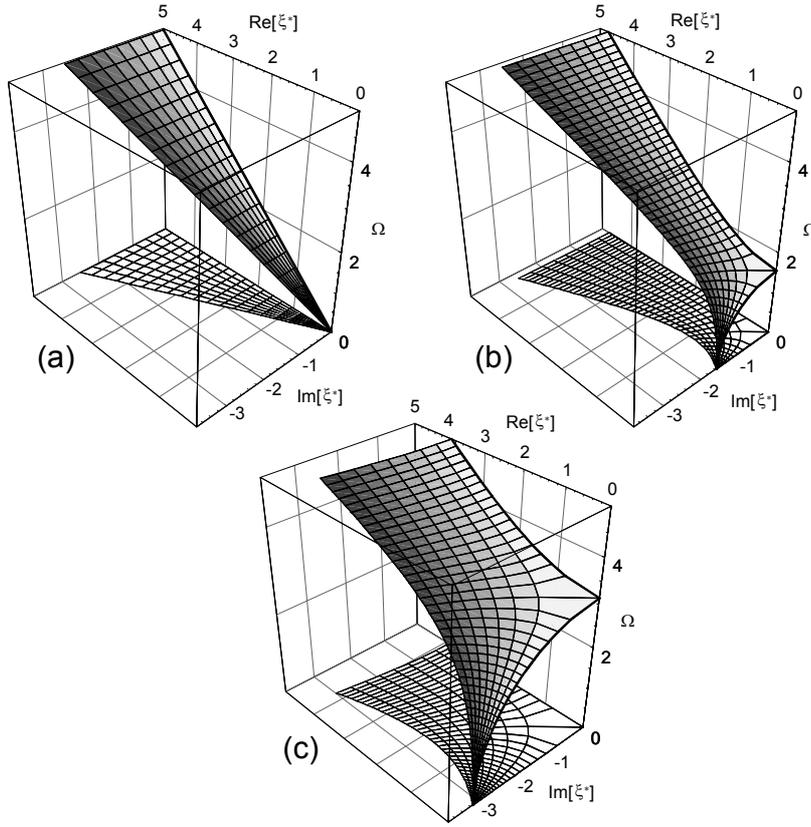


Figura 2.20. Espectro de frecuencia viscoelástico de un cierto modo fijo en placas de distintos materiales, con atenuaciones en el rango $\bar{\kappa}_T \in [0, \pi]$. (a) Modo SH0, (b) modo SH1, (c) modo SH2.

donde αh es la atenuación en Nepers que sufre el modo a una distancia igual a un semiespesor h . La atenuación del modo en Nepers por longitud de onda (Np/λ) se puede calcular como

$$\bar{\kappa} = 2\pi c \frac{\alpha}{\omega} = -2\pi \frac{\text{Im}(k^*)}{\text{Re}(k^*)} = -2\pi \frac{\text{Im}(\xi^*)}{\text{Re}(\xi^*)} \quad (2.109)$$

En el caso de placas viscoelásticas, donde todos los modos son evanescentes, la velocidad de grupo no puede calcularse según la definición de la ec. (2.30), puesto que el número de onda es complejo, y debe emplearse la siguiente definición:

$$\frac{1}{c_{gr}} = \frac{d[\text{Re}(k^*)]}{d\omega} = \frac{d[\omega/c]}{d\omega} = \frac{1}{c} - \frac{\omega}{c^2} \frac{dc}{d\omega} \quad (2.110)$$

$$\Rightarrow c_{gr} = \frac{c^2}{c - \omega \frac{dc}{d\omega}} \Rightarrow \bar{c}_{gr} = \frac{c_{gr}}{c_T} = \frac{\bar{c}^2}{\bar{c} - \Omega \frac{d\bar{c}}{d\Omega}} \quad (2.111)$$

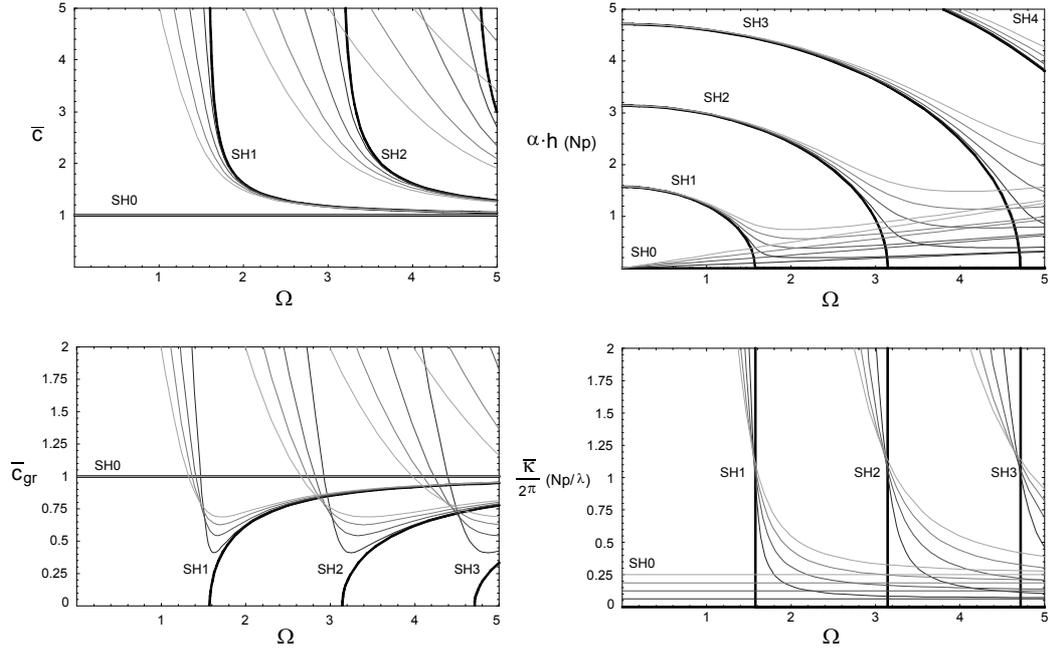


Figura 2.21. Curvas de dispersión (velocidad de fase \bar{c} , de grupo \bar{c}_{gr} y atenuación αh , $\bar{\kappa}$) de ondas SH guiadas en placas viscoelásticas para varios materiales

En la Figura 2.21 se representan las curvas de dispersión (velocidad de fase \bar{c} , de grupo \bar{c}_{gr} , atenuación por unidad de longitud α y atenuación por longitud de onda $\bar{\kappa}$, en función de la frecuencia Ω) de varias placas viscoelásticas con valores de atenuación comprendidos en el rango $\bar{\kappa}_T \in [0, \pi/2]$, mostrándose únicamente cinco curvas correspondientes a un incremento de atenuación $\Delta\bar{\kappa}_T = \pi/8$. Las curvas del caso elástico se representan con línea negra gruesa, y las viscoelásticas con línea gris fina (con un tono de gris más claro cuanto mayor es $\bar{\kappa}_T$). En el caso elástico las ramas de atenuación no nula con forma de circunferencia mostradas corresponden a modos evanescentes, los cuales aparecen para $\Omega < \Omega_n$ y se caracterizan por números de onda puramente imaginarios. Se corresponden con las ramas imaginarias del espectro de frecuencia del caso elástico, mostradas en la Figura 2.2.

El modo SH0 sigue siendo un modo no dispersivo, como en el caso elástico, pero ahora experimenta una atenuación de igual valor a la de las ondas SH en un espacio infinito: la atenuación por longitud de onda es constante $\bar{\kappa}_{SH0} = \bar{\kappa}_T$, y la atenuación por unidad de longitud crece linealmente con la frecuencia $\alpha_{SH0} \cdot h = \frac{\bar{\kappa}_T}{2\pi} \Omega$.

Para el resto de modos la influencia de la atenuación se aprecia visiblemente en las frecuencias alrededor de la frecuencia de corte elástica Ω_n . Si nos fijamos en un modo concreto, para frecuencias bajas frente a Ω_n , la atenuación α se aproxima a

la solución elástica, es decir, a la del modo imaginario puro (para el cual el espectro de frecuencia es una circunferencia en el plano $\text{Im}(\xi^*) - \Omega$, como se muestra en la Figura 2.2). Para frecuencias altas, las velocidades de fase y de grupo tienden hacia la solución elástica, y la atenuación tiende asintóticamente hacia la del modo SH0.

Merece un comentario especial la variación de la velocidad de grupo. Se observa que las ramas de todos los modos presentan un mínimo en una frecuencia muy cercana a Ω_n . La velocidad de grupo adimensional supera el valor unidad para frecuencias inferiores a Ω_n , donde la atenuación modal es muy elevada (α prácticamente coincide con la rama del modo imaginario puro del caso elástico; $\bar{\kappa}$ tiende hacia infinito). De hecho, en ese rango de frecuencia no tiene sentido definir una velocidad de grupo puesto que el modo dista mucho de ser real.

Resulta conveniente extender la noción de modos reales y evanescentes al caso viscoelástico, definiendo un comportamiento “casi-real” cuando la atenuación sea baja en relación a la atenuación de las ondas SH planas en medios infinitos $\bar{\kappa}_T$. Se pueden utilizar varios criterios para definir la frontera entre comportamiento “casi-real” y evanescente. Basándonos en el valor de la atenuación por unidad de longitud $\bar{\kappa}$, se podrían considerar modos “casi-reales” aquellos que no excedieran el siguiente límite

$$\bar{\kappa} \leq 2\bar{\kappa}_T \quad (2.112)$$

En el caso elástico, donde $\bar{\kappa}_T = 0$, la condición anterior se reduce a $\text{Im}(\xi^*) = 0$, la cual coincide con la definición de modos reales. Otra posible definición de modos “casi-reales” se podría basar en la relación de la parte imaginaria del número de onda frente a su valor absoluto

$$\frac{\text{Im}(\xi^*)}{\text{Abs}(\xi^*)} \leq 50\% \quad (2.113)$$

En el caso elástico, donde el número de onda sólo puede ser real o imaginario puro, la condición anterior coincide con la definición de modos reales.

2.5.3 Ondas de Lamb guiadas en una placa viscoelástica homogénea e isótropa

Empleando el principio de correspondencia elástica-viscoelástica, se pueden obtener las ecuaciones de Rayleigh-Lamb en el caso viscoelástico a partir de las ecs. (2.59) y (2.60), obteniéndose las siguientes expresiones para modos simétricos y antisimétricos, respectivamente

$$\frac{\tan(q^*h)}{\tan(p^*h)} = -\frac{4(k^*)^2 p^* q^*}{\left((q^*)^2 - (k^*)^2\right)^2} \quad (2.114)$$

$$\frac{\tan(q^*h)}{\tan(p^*h)} = -\frac{\left((q^*)^2 - (k^*)^2\right)^2}{4(k^*)^2 p^* q^*} \quad (2.115)$$

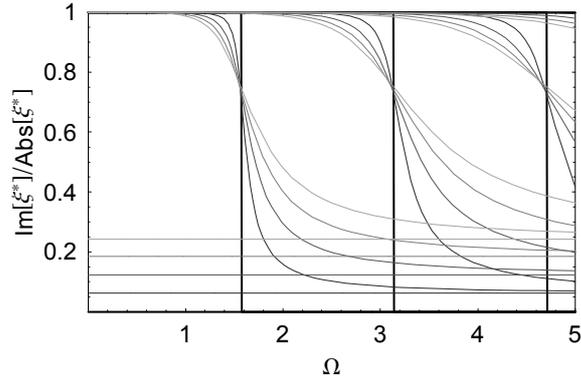


Figura 2.22. Curva de dispersión $\Omega - \text{Im}(\xi^*) / \text{Abs}(\xi^*)$ de ondas SH guiadas en placas homogéneas para varios materiales viscoelásticos.

Las ecuaciones características en el caso elástico pueden escribirse como funciones reales de dos variables reales (k, ω) cuando los números de onda analizados k son reales o imaginarios puros, lo cual simplifica enormemente el proceso de búsqueda de raíces. El algoritmo más empleado es el de bisección [80, 96, 12], ya que otros métodos de mayor ritmo de convergencia (Newton, interpolación/extrapolación lineal o cuadrática) se vuelven inestables cuando dos raíces están muy próximas (como sucede en las zonas de cruce de ramas en las curvas de dispersión) y suelen saltarse raíces. Este algoritmo se aplica dentro de un esquema de barrido en frecuencia o en número de onda, fijando en cada paso una de las variables reales (ω o k , respectivamente) y resolviendo para la otra variable, para la cual existen un número finito de raíces. Se suele complementar con técnicas de seguimiento de curvas para guiar el proceso de búsqueda de raíces en cada paso basándose en los pasos anteriores.

Sin embargo, al examinar números de onda complejos (tanto en el caso elástico, para modos evanescentes, como en el caso viscoelástico, donde todos los modos son evanescentes) las ecuaciones características se convierten en funciones complejas de tres variables reales ($\text{Re}(k), \text{Im}(k), \omega$). La búsqueda de raíces en este caso es una tarea más difícil, y los algoritmos tienden a ser inestables. La opción más habitual consiste en realizar un barrido en una de las variables reales principales (frecuencia, $\text{Re}(k)$ o velocidad de fase), fijando en cada paso un valor para dicha variable. Cada una de las múltiples soluciones se obtiene mediante un proceso iterativo de localización del mínimo del valor absoluto de la ecuación característica, variando alternativamente en cada subiteración una de las dos incógnitas restantes mientras las demás permanecen constantes [80, 12]. Como punto de partida de este proceso iterativo suele tomarse la solución del caso elástico.

Capítulo 3

Formulación semi-analítica para ondas guiadas en placas

3.1 Introducción

La propagación libre de las ondas guiadas en placas, incluso en el caso más sencillo de placas elásticas homogéneas, está gobernada por ecuaciones características con un aspecto aparentemente simple pero de gran complejidad, que sólo pueden ser resueltas analíticamente en el caso antiplano, mientras que en el caso plano, ondas de Lamb, sólo puede resolverse numéricamente. En el caso general de placas laminadas, las ecuaciones características analíticas de las ondas guiadas se obtienen como el determinante de una matriz que se construye con el Método de la Matriz de Transferencia (Thomson-Haskell) o el Método de la Matriz Global (Knopoff), siendo necesario recurrir a algoritmos numéricos muy complejos para localizar las raíces de dicho determinante, sobre todo en el caso de raíces complejas. En un artículo de Lowe [80] se recoge una amplia bibliografía sobre estos métodos hasta 1995, y se discuten las dificultades numéricas que plantean.

Una alternativa a los métodos anteriores consiste en emplear un planteamiento variacional para obtener una ecuación característica aproximada. En este capítulo se describe una formulación semi-analítica de Elementos Finitos para estudiar el comportamiento de las ondas guiadas en placas laminadas. Esta técnica, que fue introducida por Lysmer y Waas [82, 111] y originalmente aplicada con éxito al estudio de problemas de interacción suelo-estructura, recibe varios nombres en la literatura, entre los que cabe mencionar: contorno absorbente consistente [111, 78], Método de la Capa Delgada (Thin Layer Method) [64], método de Rayleigh-Ritz [38, 5, 37], Método del Elemento Capa (Strip Element Method) [74, 75]. Su formulación comienza planteando una separación de variables sobre la solución elastodinámica en la placa y suponiendo una variación armónica en todas las variables salvo en la coordenada transversal. A continuación la sección transversal se subdivide en

elementos, en cada uno de los cuales se aproximan los desplazamientos exactos con funciones de interpolación unidimensionales. Esta aproximación es válida bajo la hipótesis de que el elemento sea mucho más pequeño que la menor longitud de onda presente en el material. Utilizando esta solución semi-analítica en la expresión del Principio de los Trabajos Virtuales se obtendrá la matriz de rigidez dinámica de la placa laminada infinita. Se describirá cómo, en el caso de vibración libre, este procedimiento proporciona un sistema de autovalores cuadrático que relaciona la frecuencia y el número de onda de las ondas guiadas, y que representa por tanto una ecuación característica aproximada. La solución de dicho sistema constituye una aproximación del espectro de frecuencia y de las curvas de dispersión, así como de la estructura de los desplazamientos de cada modo en la sección transversal.

Posteriormente se utilizará la técnica de superposición modal (también conocida como desarrollo en modos normales) para obtener la matriz de rigidez dinámica de una placa semi-infinita cuyas superficies superior e inferior están libres de tracciones.

3.2 Formas fuerte y débil de la Elastodinámica

La forma fuerte (ecuación diferencial) de un problema elastodinámico 2D (plano o antiplano) armónico tiene la siguiente expresión en notación matricial

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho \omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

donde el superíndice “T” indica vector o matriz traspuesta, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$ es el vector de tensiones, $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$ es el vector de deformaciones, \mathbf{L} es un operador matricial y \mathbf{D} es la matriz que relaciona tensiones y deformaciones (ley de comportamiento).

Para las condiciones de deformación plana: $\mathbf{u} = [u_x, u_y]^T$, $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}]^T$, $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}]^T$ y

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{L}_y \frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) & \lambda \\ \lambda & (\lambda + 2\mu) \\ & & \mu \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

donde las matrices \mathbf{L}_x y \mathbf{L}_y pueden obtenerse por simple inspección.

Para el caso antiplano: $\mathbf{u} = [u_z]$, $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xz}, \sigma_{yz}]^T$, $\boldsymbol{\varepsilon} = [\gamma_{xz}, \gamma_{yz}]^T$ y

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{L}_y \frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mu & \\ & \mu \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Las tensiones que actúan en un plano $y=\text{constante}$ pueden escribirse como

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{L}_y^T \boldsymbol{\sigma} \quad (3.4)$$

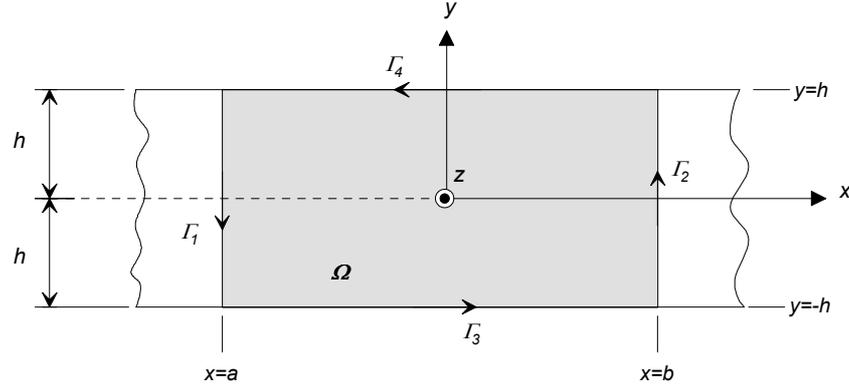


Figura 3.1. Dominio Ω de integración de la formulación débil para ondas guiadas planas en placas

y para las tensiones que actúan en un plano $x=\text{constante}$ se tiene

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{L}_x^T \boldsymbol{\sigma} \quad (3.5)$$

La forma débil del problema anterior se obtiene mediante la aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales, cuya expresión usando notación matricial es la siguiente

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} \, d\Gamma + \omega^2 \int_{\Omega} \rho \, \delta \mathbf{u}^T \mathbf{u} \, d\Omega \quad (3.6)$$

donde \mathbf{t} es un vector que contiene las tracciones en el contorno: $\mathbf{t} = [t_x, t_y]^T$ para el caso de deformación plana; $\mathbf{t} = [t_z]$ para el caso antiplano.

3.3 Forma débil para ondas guiadas planas en placas

En este apartado se pretende particularizar la forma débil general al caso de una placa infinita de espesor uniforme $d = 2h$ en la cual se propagan ondas elásticas guiadas planas. Por esta razón, los campos elastodinámicos (real u y virtual δu) se escogen con la especial estructura de este tipo de ondas. La integración se realiza en el dominio finito Ω mostrado en la Figura 3.1, que se define como el tramo de placa comprendido entre dos secciones transversales cualesquiera $x = a$ y $x = b > a$.

Se adoptan soluciones \mathbf{u} correspondientes a ondas guiadas planas armónicas propagándose en dirección x y hacia $x \rightarrow -\infty$. El término exponencial que contiene la variación con x y t se incluye analíticamente:

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \hat{\mathbf{u}}(y) e^{i(kx + \omega t)} \quad (3.7)$$

donde la función $\hat{\mathbf{u}}$, que depende únicamente de la coordenada y , representa la estructura de la onda guiada en el espesor. Esta separación de variables sólo es posible

si las propiedades del material no dependen de x . En los desarrollos posteriores se supondrá que siempre será válida una separación de variables similar a la indicada para los desplazamientos. Indicaremos sin gorro la variable completa (que es función de x , y y t) y con un gorro su dependencia funcional con y . Esta notación es consistente con la utilizada en la introducción teórica de las ondas guiadas en placas desarrollada en el Capítulo 2.

Como desplazamientos virtuales se emplean ondas del mismo tipo, pero propagándose en sentido contrario

$$\delta \mathbf{u}(x, y, t) = \delta \hat{\mathbf{u}}(y) e^{i(-kx + \omega t)} \quad (3.8)$$

donde la función $\delta \hat{\mathbf{u}}$ depende únicamente de la coordenada y .

Las deformaciones tienen la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}_{(k)} \hat{\mathbf{u}} e^{i(kx + \omega t)} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(k)} e^{i(kx + \omega t)} \quad (3.9)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}_{(-k)} \delta \hat{\mathbf{u}} e^{i(-kx + \omega t)} = \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(-k)} e^{i(-kx + \omega t)} \quad (3.10)$$

donde se ha definido un nuevo operador matricial

$$\mathbf{L}_{(k)} = ik \mathbf{L}_x + \mathbf{L}_y \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.11)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la formulación débil, ec. (3.6), se tiene

$$\int_{\Omega} \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{L}_{(-k)}^T \mathbf{D} \mathbf{L}_{(k)} \hat{\mathbf{u}} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \omega^2 \int_{\Omega} \rho \delta \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{u}} d\Omega \quad (3.12)$$

Se observa que los factores $\exp(\pm ikx)$ presentes en los dos grupos de soluciones elastodinámicas se han cancelado mutuamente, lo que da lugar a la desaparición de la variación con x . La influencia temporal también ha desaparecido al simplificarse el factor común $\exp(2i\omega t)$ en todos los términos. Por lo tanto, todos los integrandos en la ecuación anterior son funciones exclusivas de la coordenada y . Este hecho permite simplificar aún más dicha ecuación mediante la transformación de todos sus términos en integrales unidimensionales sobre la sección transversal.

Cualquiera de las integrales de dominio se puede descomponer como una integral en dirección y y otra en dirección x

$$\int_{\Omega} f(y) d\Omega = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=-h}^{y=h} f(y) dx dy = (b-a) \int_{-h}^h f(y) dy \quad (3.13)$$

Para realizar la integración sobre el contorno, éste se divide en cuatro sub-contornos $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, los cuales tienen la siguiente definición: $\Gamma_1 : \{x = a, y \in [-h, h]\}$, $\Gamma_2 : \{x = b, y \in [-h, h]\}$, $\Gamma_3 : y = \{x \in [a, b], y = -h\}$, $\Gamma_4 : \{x \in [a, b], y = h\}$, siendo su orientación compatible con la de Γ .

La integral sobre el subcontorno Γ_1 puede reescribirse como

$$\int_{\Gamma_1} \delta \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{t}} \, d\Gamma_1 = \int_{-h}^{-h} \delta \hat{\mathbf{u}}^T \left(-\hat{\mathbf{R}}_x(y) \right) (-dy) = - \int_{-h}^h g_1(y) \, dy \quad (3.14)$$

donde se ha tenido en cuenta que el vector de tracciones en el contorno Γ_1 es $\hat{\mathbf{t}} = -\hat{\mathbf{R}}_x$, se ha definido la función $g_1(y) = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{R}}_x$ y se ha utilizado la relación $d\Gamma_1 = -dy$.

De la misma forma se pueden calcular las integrales sobre los demás subcontornos

$$\int_{\Gamma_2} \delta \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{t}} \, d\Gamma_2 = \int_{-h}^h \delta \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{R}}_x(y) \, dy = \int_{-h}^h g_1(y) \, dy \quad (3.15)$$

$$\int_{\Gamma_3} \delta \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{t}} \, d\Gamma_3 = \int_{x=a}^{x=b} \delta \hat{\mathbf{u}}^T \left(-\hat{\mathbf{R}}_y(-h) \right) \, dx = -(b-a) g_2(-h) \quad (3.16)$$

$$\int_{\Gamma_4} \delta \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{t}} \, d\Gamma_4 = \int_{x=b}^{x=a} \delta \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{R}}_y(h) \, (-dx) = (b-a) g_2(h) \quad (3.17)$$

donde se ha definido la función $g_2(y) = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{R}}_y$

Sustituyendo las integrales anteriores en la ec. (3.12), y dividiendo todos los términos por el factor común $(b-a)$, se obtiene la forma débil para ondas guiadas planas en placas

$$\int_{-h}^h \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{L}_{(-k)}^T \mathbf{D} \mathbf{L}_{(k)} \hat{\mathbf{u}} \, dy = [g_2(y)]_{-h}^h + \omega^2 \int_{-h}^h \rho \delta \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{u}} \, dy \quad (3.18)$$

Se observa que, al utilizar una expresión en variables separadas para los desplazamientos que reproduce la estructura de una onda guiada, el problema bidimensional inicial se ha reducido a un problema unidimensional sobre la sección transversal de la placa.

Dado que la forma débil es equivalente a la forma fuerte (ecuaciones de Navier) más las condiciones de contorno en tracciones, la solución de la ec. (3.18) para el caso de la placa con sus superficies libres de tracciones debe proporcionar las mismas soluciones $\hat{\mathbf{u}}(y)$ que se obtuvieron en el Capítulo 2 directamente de las ecuaciones diferenciales.

3.4 Ecuaciones del MEF para ondas guiadas en placas

La resolución numérica de la ec. (3.18) requiere de la discretización de la sección transversal de la placa en elementos para reducir el infinito número de grados de libertad (gdl) de la solución continua (desplazamientos $\hat{\mathbf{u}}(y)$ en todos los puntos de la sección) a un número finito en la solución discreta (desplazamientos \mathbf{d}_i en los extremos de cada elemento -nodos-).

En este apartado se van a plantear las ecuaciones del MEF para el problema de ondas guiadas en placas mediante el procedimiento habitual. En primer lugar se discretiza el dominio (en este caso la sección transversal de la placa) en elementos. Los desplazamientos reales y virtuales en el dominio se interpolan a partir de los valores nodales empleando funciones de forma, para obtener así unos campos elastodinámicos discretizados. Por último se obliga a que dichos campos satisfagan la forma débil, ec. (3.18), lo cual proporciona un sistema de ecuaciones cuya solución aproxima a la solución elastodinámica exacta. Esta aproximación se caracteriza por minimizar el error energético cometido.

3.4.1 Semi-discretización

La geometría contemplada en esta sección consiste en una placa infinita de espesor $d = 2h$ compuesta por un cierto número de láminas isótropas, como se muestra en la Figura 3.2. Para obtener las ecuaciones del MEF, la sección transversal de la placa se discretiza con n elementos (estratos o capas) y N nodos, y los desplazamientos se interpolan a partir de los valores nodales mediante funciones de forma. El dominio a discretizar en la ecuación de la formulación débil, ec. (3.18), es monodimensional (1D) y se corresponde con la sección transversal de la placa $y \in [-h, h]$, para lo cual se puede emplear cualquier elemento finito 1D. En particular, en esta tesis se utilizan elementos 1D isoparametricos (lineales o cuadráticos), los cuales se muestran en la Figura 3.3. Un elemento j abarca el intervalo $y \in [y_i^j, y_s^j]$, donde los subíndices i y s indican los bordes inferior y superior del elemento, respectivamente. El número de nodos de la discretización N depende del tipo de elemento seleccionado: $N = n + 1$ para elementos lineales, $N = 2n + 1$ para elementos cuadráticos. La numeración nodal adoptada en esta sección se realiza en sentido ascendente de la coordenada y , estando situado el nodo 1 en la superficie inferior, $y = -h$, y el nodo N en la superficie superior, $y = h$. El número de grados de libertad (gdl) en cada nodo g depende del tipo de problema: $g = 2$ en el caso de deformación plana, y $g = 1$ en el caso antiplano. El número total de gdl de la malla G será $G = N \cdot g$. Se supone que las propiedades del material de cada elemento son homogéneas, aunque la malla puede tener elementos de distintos materiales, como se ilustra en el ejemplo de la Figura 3.2.

Dentro de un elemento, los desplazamientos $\hat{\mathbf{u}}$ en cualquier punto del mismo se pueden obtener a partir de los desplazamientos en los nodos mediante la siguiente expresión

$$\hat{\mathbf{u}}(y) = \mathbf{N}(y) \mathbf{d}^e \quad (3.19)$$

donde $\mathbf{N}(y)$ es una matriz que contiene las funciones de forma utilizadas en la interpolación y \mathbf{d}^e es un vector con los desplazamientos nodales del elemento. Conviene recordar que la ecuación anterior junto con la ec. (3.7), representan una semi-discretización de la solución elastodinámica en la placa, en la que el término expo-

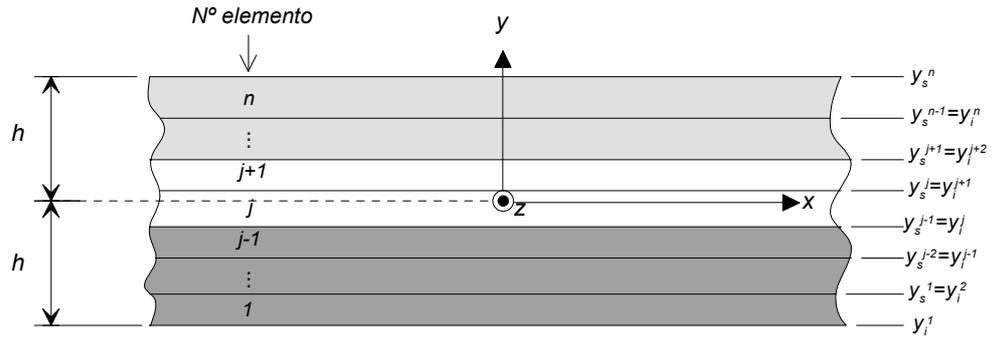


Figura 3.2. Discretización con n elementos de una placa con capas de varios materiales

nencial que contiene la variación con x y t se incluye analíticamente, y la variación en el espesor y se aproxima con funciones de forma 1D:

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \mathbf{N}(y) \mathbf{d}^e e^{i(kx + \omega t)} \quad (3.20)$$

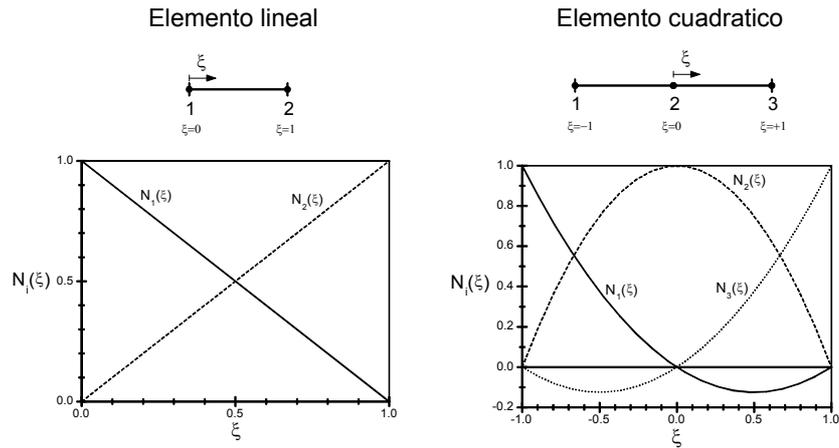


Figura 3.3. Funciones de forma lineales y cuadráticas para elementos monodimensionales

Para el caso de un elemento lineal, se tiene:

$$\mathbf{N} = [N_1 \mathbf{I} \quad N_2 \mathbf{I}] \quad (3.21)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de orden g , $N_1 = 1 - \xi$ y $N_2 = \xi$ son las funciones de forma lineales que se muestran en la Figura 3.3, y $\xi \in [0, 1]$ es la coordenada

natural del elemento. Si los desplazamientos del nodo i -ésimo se denotan por \mathbf{d}_i (donde $\mathbf{d}_i = [\hat{u}_{xi}, \hat{u}_{yi}]^T$ para el caso de deformación plana y $\mathbf{d}_i = [\hat{u}_{zi}]^T$ para el caso antiplano), el vector de desplazamientos del elemento lineal puede escribirse como

$$\mathbf{d}^e = [\mathbf{d}_1^T \quad \mathbf{d}_2^T]^T \quad (3.22)$$

Para un elemento cuadrático, la matriz de funciones de forma tiene la siguiente expresión

$$\mathbf{N} = [N_1 \mathbf{I} \quad N_2 \mathbf{I} \quad N_3 \mathbf{I}] \quad (3.23)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de orden g , $N_1 = \xi(\xi - 1)/2$, $N_2 = 1 - \xi^2$ y $N_3 = \xi(1 + \xi)/2$ son las funciones de forma cuadráticas que se muestran en la Figura 3.3, y $\xi \in [-1, 1]$ es la coordenada natural del elemento. Los desplazamientos nodales del elemento se organizan en un vector

$$\mathbf{d}^e = [\mathbf{d}_1^T \quad \mathbf{d}_2^T \quad \mathbf{d}_3^T]^T \quad (3.24)$$

Las deformaciones y las tensiones en el elemento se calculan en función de los desplazamientos nodales

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{L}_{(k)} \mathbf{N} \mathbf{d}^e = \mathbf{B}_{(k)} \mathbf{d}^e \quad (3.25)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D} \mathbf{B}_{(k)} \mathbf{d}^e \quad (3.26)$$

donde se ha definido un nuevo operador matricial $\mathbf{B}_{(k)} = \mathbf{L}_{(k)} \mathbf{N}$.

Para interpolar los desplazamientos virtuales utilizamos las mismas funciones de forma:

$$\boldsymbol{\delta} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta} \mathbf{d}^e \quad (3.27)$$

donde $\boldsymbol{\delta} \mathbf{d}^e$ contiene los valores nodales de los desplazamientos virtuales almacenados con una estructura similar a la indicada para \mathbf{d}^e . Las deformaciones y tensiones virtuales se obtienen a partir de los desplazamientos virtuales

$$\boldsymbol{\delta} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{L}_{(-k)} \mathbf{N} \boldsymbol{\delta} \mathbf{d}^e = \mathbf{B}_{(-k)} \boldsymbol{\delta} \mathbf{d}^e \quad (3.28)$$

$$\boldsymbol{\delta} \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} \boldsymbol{\delta} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D} \mathbf{B}_{(-k)} \boldsymbol{\delta} \mathbf{d}^e \quad (3.29)$$

3.4.2 Matrices elementales

Para obtener la formulación del MEF a nivel elemental, se toma un elemento cualquiera e de longitud l comprendido entre y_i^e e y_s^e (ver Figura 3.2), y se sustituye la aproximación indicada en la ec. (3.19) en la expresión de la formulación débil (3.18).

Llevando a cabo esta sustitución, y extrayendo de las integrales los vectores nodales puesto que son constantes, se tiene

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\delta} \mathbf{d}^e]^T \left(\int_{y_i^e}^{y_s^e} \mathbf{B}_{(-k)}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{(k)} dy \right) \mathbf{d}^e &= \left[[\boldsymbol{\delta} \mathbf{d}^e]^T \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{R}}_y \right]_{y_i^e}^{y_s^e} + \\ &+ \omega^2 [\boldsymbol{\delta} \mathbf{d}^e]^T \left(\int_{y_i^e}^{y_s^e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dy \right) \mathbf{d}^e \end{aligned} \quad (3.30)$$

Como la igualdad anterior debe cumplirse para cualquier campo de desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{d}^e$, la ecuación para el elemento se reduce a

$$(\mathbf{K}^e - \omega^2 \mathbf{M}^e) \mathbf{d}^e = \mathbf{f}^e \quad (3.31)$$

donde \mathbf{K}^e es la matriz de rigidez elemental, \mathbf{M}^e es la matriz de masa elemental y \mathbf{f}^e es el vector de fuerzas nodales consistentes, cuyas expresiones son las siguientes

$$\mathbf{K}^e = \int_{y_i^e}^{y_s^e} \mathbf{B}_{(-k)}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{(k)} dy \quad (3.32)$$

$$\mathbf{M}^e = \int_{y_i^e}^{y_s^e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dy \quad (3.33)$$

$$\mathbf{f}^e = [\mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}}]_{y_i^e} + [\mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}}]_{y_s^e} \quad (3.34)$$

La matriz de masa elemental \mathbf{M}^e es simétrica, real y definida positiva.

La matriz de rigidez elemental \mathbf{K}^e puede escribirse como una función explícita del número de onda k . Teniendo en cuenta la ec. (3.11), se puede descomponer el operador matricial $\mathbf{B}_{(k)}$ de la siguiente forma

$$\mathbf{B}_{(k)} = \mathbf{L}_{(k)} \mathbf{N} = ik \mathbf{L}_x \mathbf{N} + \mathbf{L}_y \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} = ik \mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y \quad (3.35)$$

El integrando que aparece en la ec. (3.32) se puede escribir también como

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{(-k)}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{(k)} &= (-ik \mathbf{B}_x^T + \mathbf{B}_y^T) \mathbf{D} (ik \mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y) = \\ &= k^2 \mathbf{B}_x^T \mathbf{D} \mathbf{B}_x + ik [\mathbf{B}_y^T \mathbf{D} \mathbf{B}_x - \mathbf{B}_x^T \mathbf{D} \mathbf{B}_y] + \mathbf{B}_y^T \mathbf{D} \mathbf{B}_y \end{aligned} \quad (3.36)$$

Sustituyendo en la ec. (3.32), se obtiene que la matriz de rigidez de un elemento es una función cuadrática del número de onda k

$$\mathbf{K}^e = k^2 \mathbf{A}^e + ik \mathbf{B}^e + \mathbf{G}^e \quad (3.37)$$

donde

$$\mathbf{A}^e = \int_{y_i^e}^{y_s^e} \mathbf{B}_x^T \mathbf{D} \mathbf{B}_x dy = \int \mathbf{N}^T \mathbf{D}_{xx} \mathbf{N} dy \quad (3.38)$$

$$\mathbf{B}^e = \int_{y_i^e}^{y_s^e} [\mathbf{B}_y^T \mathbf{D} \mathbf{B}_x - \mathbf{B}_x^T \mathbf{D} \mathbf{B}_y] dy = \int \left(\frac{d\mathbf{N}^T}{dy} \mathbf{D}_{yx} \mathbf{N} - \mathbf{N}^T \mathbf{D}_{xy} \frac{d\mathbf{N}}{dy} \right) dy \quad (3.39)$$

$$\mathbf{G}^e = \int_{y_i^e}^{y_s^e} \mathbf{B}_y^T \mathbf{D} \mathbf{B}_y dy = \int \frac{d\mathbf{N}^T}{dy} \mathbf{D}_{yy} \frac{d\mathbf{N}}{dy} dy \quad (3.40)$$

Las matrices \mathbf{D}_{mn} (donde los subíndices m y n pueden ser x ó y) tienen la siguiente definición:

$$\mathbf{D}_{mn} = \mathbf{L}_m^T \mathbf{D} \mathbf{L}_n \quad (3.41)$$

Debido a la simetría de la matriz de la ley de comportamiento, se cumple la siguiente relación de simetría de \mathbf{D}_{mn} respecto a los subíndices m y n : $\mathbf{D}_{mn} = \mathbf{D}_{nm}^T$. Además, las matrices \mathbf{D}_{mm} son simétricas. Se puede concluir que las matrices \mathbf{A}^e y \mathbf{G}^e son simétricas, mientras que la matriz \mathbf{B}^e es antisimétrica.

Para el caso de deformación plana:

$$\mathbf{D}_{xx} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \\ & \mu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{yy} = \begin{bmatrix} \mu & \\ & \lambda + 2\mu \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{D}_{xy} = \mathbf{D}_{yx}^T = \begin{bmatrix} & \lambda \\ \mu & \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

y para el caso antiplano:

$$\mathbf{D}_{xx} = \mu, \quad \mathbf{D}_{xy} = \mathbf{D}_{yx}^T = 0, \quad \mathbf{D}_{yy} = \mu \quad (3.44)$$

Las expresiones de las matrices elementales \mathbf{M}^e , \mathbf{A}^e , \mathbf{G}^e y \mathbf{B}^e para un elemento lineal de espesor l son

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho l}{6} \begin{bmatrix} 2\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 2\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^e = \frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2\mathbf{D}_{xx} & \mathbf{D}_{xx} \\ \mathbf{D}_{xx} & 2\mathbf{D}_{xx} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$\mathbf{G}^e = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{yy} & -\mathbf{D}_{yy} \\ -\mathbf{D}_{yy} & \mathbf{D}_{yy} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^e = (\mathbf{B}_1^e)^T - \mathbf{B}_1^e, \quad \mathbf{B}_1^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_{xy} & \mathbf{D}_{xy} \\ -\mathbf{D}_{xy} & \mathbf{D}_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

y para un elemento cuadrático del mismo espesor

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho l}{30} \begin{bmatrix} 4\mathbf{I} & 2\mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ 2\mathbf{I} & 16\mathbf{I} & 2\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 2\mathbf{I} & 4\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^e = \frac{l}{30} \begin{bmatrix} 4\mathbf{D}_{xx} & 2\mathbf{D}_{xx} & -\mathbf{D}_{xx} \\ 2\mathbf{D}_{xx} & 16\mathbf{D}_{xx} & 2\mathbf{D}_{xx} \\ -\mathbf{D}_{xx} & 2\mathbf{D}_{xx} & 4\mathbf{D}_{xx} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\mathbf{G}^e = \frac{1}{3l} \begin{bmatrix} 7\mathbf{D}_{yy} & -8\mathbf{D}_{yy} & \mathbf{D}_{yy} \\ -8\mathbf{D}_{yy} & 16\mathbf{D}_{yy} & -8\mathbf{D}_{yy} \\ \mathbf{D}_{yy} & -8\mathbf{D}_{yy} & 7\mathbf{D}_{yy} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^e = (\mathbf{B}_1^e)^T - \mathbf{B}_1^e \quad (3.48)$$

$$\mathbf{B}_1^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3\mathbf{D}_{xy} & 4\mathbf{D}_{xy} & -\mathbf{D}_{xy} \\ -4\mathbf{D}_{xy} & \mathbf{0} & 4\mathbf{D}_{xy} \\ \mathbf{D}_{xy} & -4\mathbf{D}_{xy} & 3\mathbf{D}_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de dimensión g .

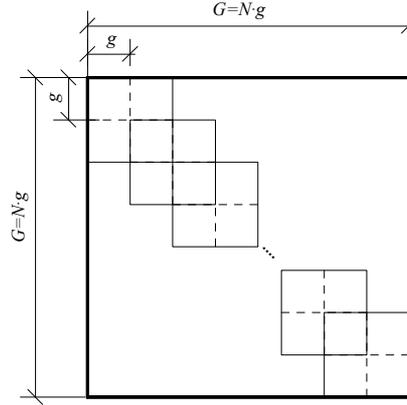


Figura 3.4. Montaje de la matriz global a partir de las matrices elementales ($2g \times 2g$) para n elementos lineales.

3.4.3 Matrices globales

Las matrices de rigidez y masa globales para la placa infinita discretizada con n elementos y N nodos en la dirección transversal y , pueden obtenerse a partir de las correspondientes matrices elementales mediante el proceso de montaje habitual de EF (el cual consiste en aplicar compatibilidad de desplazamientos y equilibrio de fuerzas en las interfases entre elementos). Como resultado, el sistema de ecuaciones globales puede escribirse como

$$(k^2 \mathbf{A} + ik \mathbf{B} + \mathbf{G} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (3.50)$$

donde las matrices globales \mathbf{A} , \mathbf{G} y \mathbf{M} son simétricas y \mathbf{B} es antisimétrica, y donde los vectores \mathbf{d} y \mathbf{f} contienen respectivamente los desplazamientos y fuerzas de todos los nodos de la placa (G gdl)

$$\mathbf{d} = [\mathbf{d}_1^T \quad \mathbf{d}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{d}_N^T]^T, \quad \mathbf{f} = [\mathbf{f}_1^T \quad \mathbf{f}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{f}_N^T]^T \quad (3.51)$$

La ec. (3.50) es válida para problemas tanto de deformación plana como antiplanos, aunque existen dos diferencias entre ambos casos:

1. las dimensiones de las matrices globales son distintas, puesto que el número de gdl G es diferente incluso al emplear la misma malla.
2. el término lineal en k es nulo en el caso antiplano, es decir, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Las matrices del sistema son todas simétricas en este caso.

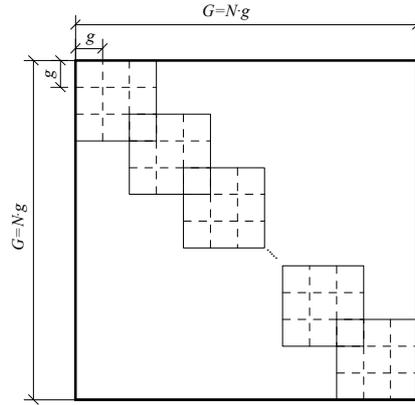


Figura 3.5. Montaje de la matriz global a partir de las matrices elementales ($3g \times 3g$) para n elementos cuadráticos.

Una representación gráfica del montaje de las matrices globales a partir de las matrices elementales para una placa en deformación plana discretizada con elementos lineales y cuadráticos se muestra en las Figuras 3.4 y 3.5, respectivamente.

La imposición de las condiciones de contorno de la placa sobre la ec. (3.50) proporciona un sistema de ecuaciones que gobierna la respuesta dinámica de la placa discretizada frente a solicitaciones armónicas. La solución se compone de dos partes:

- la solución general del problema homogéneo, correspondiente a $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, que representa la respuesta de la placa en ausencia de acciones exteriores (su *vibración libre*, empleando la terminología de dinámica de estructuras). Esta situación corresponde precisamente con la estudiada de forma analítica en el Capítulo 2, a partir de la cual se obtuvieron el espectro de frecuencia y los modos de propagación de ondas guiadas en la placa.
- la solución particular de la ecuación completa para una acción \mathbf{f} no nula. La inclusión de este término permite obtener la *vibración forzada* de la placa bajo la acción de solicitaciones externas.

En los apartados siguientes se va a estudiar el problema de MEF homogéneo ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$), cuya solución proporciona una aproximación del espectro de frecuencia y de los modos de propagación de las ondas guiadas en la placa.

Si se fija el número de onda, la ec. (3.50) se convierte en un sistema de autovalores lineal en ω^2

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (3.52)$$

donde $\mathbf{K} = k^2 \mathbf{A} + ik \mathbf{B} + \mathbf{G}$ es una matriz conocida.

3.5 Placa en deformación antiplana

Cuando se estudia una frecuencia fija en el problema antiplano, la ec. (3.50) representa un sistema de autovalores lineal en k^2

$$(k^2 \mathbf{A} + \mathbf{C}) \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (3.53)$$

donde $\mathbf{C} = \mathbf{G} - \omega^2 \mathbf{M}$ es una matriz conocida. Ambas matrices son simétricas y, en ausencia de amortiguamiento, también reales, por lo que en este caso todos los autovalores k^2 son reales. Consecuentemente, se obtienen valores de k reales o puramente imaginarios, que corresponden a los números de onda de los distintos modos SH guiados (reales o evanescentes, respectivamente). En placas viscoelásticas, sin embargo, todos los números de onda obtenidos serán complejos, lo cual reproduce la atenuación que sufren en mayor o menor grado todos los modos SH guiados.

Los autovectores cumplen una relación de ortogonalidad, que se obtiene tomando dos números de onda distintos, $k^{(m)}$ y $k^{(r)}$, y sus correspondientes autovectores, $\phi^{(m)}$ y $\phi^{(r)}$. Utilizando la ec. (3.53) y la simetría de las matrices, se llega a las siguientes igualdades

$$\left(\phi^{(m)}\right)^T \mathbf{C} \phi^{(r)} = -\left[k^{(r)}\right]^2 \left(\phi^{(m)}\right)^T \mathbf{A} \phi^{(r)} = -\left[k^{(m)}\right]^2 \left(\phi^{(r)}\right)^T \mathbf{A} \phi^{(m)} \quad (3.54)$$

De estas ecuaciones cabe concluir que se verifican las siguientes relaciones de ortogonalidad:

$$\left(\phi^{(m)}\right)^T \mathbf{C} \phi^{(r)} = \left(\phi^{(m)}\right)^T \mathbf{A} \phi^{(r)} = 0 \quad \text{si } k^{(m)} \neq k^{(r)} \quad (3.55)$$

$$\left(\phi^{(m)}\right)^T \mathbf{C} \phi^{(m)} = -\left[k^{(m)}\right]^2 \left(\phi^{(m)}\right)^T \mathbf{A} \phi^{(m)} \quad \text{si } k^{(m)} = k^{(r)} \quad (3.56)$$

3.6 Placa en deformación plana

Al estudiar una frecuencia fija en el problema de deformación plana, la ec. (3.50) se transforma en un sistema de autovalores cuadrático en k

$$(k^2 \mathbf{A} + ik \mathbf{B} + \mathbf{C}) \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (3.57)$$

donde $\mathbf{C} = \mathbf{G} - \omega^2 \mathbf{M}$ es una matriz conocida.

Cualquier problema de autovalores cuadrático puede reescribirse como un problema de autovalores lineal con matrices no simétricas duplicando el número de incógnitas. Sin embargo, para materiales isótropos, atendiendo a la especial estructura de las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} se puede llevar a cabo un sencillo cambio de variable que transforma el problema en un sistema de autovalores lineal con el mismo número de incógnitas [111, 64], pero con matrices no simétricas. Antes de realizar esta linealización, se da un paso intermedio: obtener un problema cuadrático de autovalores con todas sus matrices simétricas.

En materiales sin amortiguamiento, todas las matrices son reales y se obtienen autovalores reales, imaginarios puros y complejos, los cuales corresponden a los números de onda de los distintos modos de Lamb (reales y evanescentes, respectivamente). En el caso de que alguno de los materiales sea viscoelástico, todos los números de onda obtenidos serán en general complejos, lo cual implica que todos los modos de Lamb serán evanescentes.

3.6.1 Matrices simétricas

Si se reorganizan los desplazamientos \mathbf{d} y las fuerzas globales \mathbf{f} (vectores de dimensión $2N$) de manera que se almacenen en las N primeras posiciones las componentes en dirección x de todos los nodos, y en las N últimas posiciones las componentes en dirección y , se tiene

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_x \\ \mathbf{d}_y \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_x \\ \mathbf{f}_y \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

donde $\mathbf{d}_x = [u_{x1}, u_{x2}, \dots, u_{xN}]^T$ y $\mathbf{d}_y = [u_{y1}, u_{y2}, \dots, u_{yN}]^T$ son vectores de dimensión $(N \times 1)$ que almacenan respectivamente las componentes x e y de los desplazamientos en todos los nodos. Una definición análoga se tiene para los vectores \mathbf{f}_x y \mathbf{f}_y (aunque siguen siendo nulos en el problema homogéneo, su reorganización afecta a las matrices del problema, como se indicará a continuación).

Esta reorganización de los grados de libertad supone la reordenación de las filas y columnas de las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} en la ec. (3.50), la cual produce para un material isótropo las siguientes expresiones

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x & \\ & \mathbf{A}_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} & \mathbf{B}_{xy} \\ -\mathbf{B}_{xy}^T & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_x & \\ & \mathbf{C}_y \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

donde las submatrices que aparecen dependen del tipo de elemento elegido, y son fáciles de obtener por simple inspección de las matrices elementales, ecs. (3.45)-(3.49).

Si se reescribe la ec. (3.50) con la nueva organización de los grados de libertad, y a continuación se multiplica \mathbf{d}_y por i y se dividen por i las columnas correspondientes para mantener el sistema intacto, se obtiene

$$\left(k^2 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x & \\ & \frac{1}{i} \mathbf{A}_y \end{bmatrix} + ik \begin{bmatrix} & \frac{1}{i} \mathbf{B}_{xy} \\ -\mathbf{B}_{xy}^T & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_x & \\ & \frac{1}{i} \mathbf{C}_y \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{d}_x \\ i \mathbf{d}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_x \\ \mathbf{f}_y \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Multiplicando por i las N últimas filas, las matrices que se obtienen son simétricas

$$\left(k^2 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x & \\ & \mathbf{A}_y \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} & \mathbf{B}_{xy} \\ \mathbf{B}_{xy}^T & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_x & \\ & \mathbf{C}_y \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{d}_x \\ i \mathbf{d}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_x \\ i \mathbf{f}_y \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Llevando a cabo el cambio de variables $\bar{\mathbf{d}} = [\mathbf{d}_x^T \quad i \mathbf{d}_y^T]^T$ y $\bar{\mathbf{f}} = [\mathbf{f}_x^T \quad i \mathbf{f}_y^T]^T$, se puede reescribir la ec. (3.61) como

$$(k^2 \mathbf{A} + k \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{C}) \bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{f}} \quad (3.62)$$

donde todas las matrices son simétricas, y $\bar{\mathbf{B}}$ se obtiene fácilmente a partir de \mathbf{B} mediante la siguiente expresión

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} & \mathbf{B}_{xy} \\ \mathbf{B}_{xy}^T & \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Este cambio de variables en los grados de libertad nodales es equivalente al siguiente cambio de variables en las incógnitas del problema elastodinámico

$$\bar{\mathbf{u}} = [u_x \quad i u_y]^T, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = [\sigma_{xx} \quad i \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}]^T \quad (3.64)$$

Para un elemento lineal, cuando se utiliza una organización de los grados de libertad que los agrupe por componentes, como se indica en la ec. (3.58), la matriz $\bar{\mathbf{B}}^e$ puede obtenerse fácilmente a partir de \mathbf{B}^e mediante la ec. (3.63):

$$\bar{\mathbf{B}}^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} & \lambda - \mu & -(\lambda + \mu) \\ & \lambda + \mu & -\lambda + \mu \\ \lambda - \mu & \lambda + \mu & \\ -(\lambda + \mu) & -\lambda + \mu & \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Si se adopta una organización de los grados de libertad que los agrupe por nodos, tal como se indica en la ec. (3.51), la matriz adopta la siguiente forma

$$\bar{\mathbf{B}}^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} & \lambda - \mu & & -(\lambda + \mu) \\ \lambda - \mu & & \lambda + \mu & \\ & \lambda + \mu & & -\lambda + \mu \\ -(\lambda + \mu) & & -\lambda + \mu & \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{D}_2^T & -\mathbf{D}_1 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

donde las submatrices \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 tienen la siguiente expresión

$$\mathbf{D}_1 = (\lambda - \mu) \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = (\lambda + \mu) \begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

La expresión equivalente para un elemento cuadrático se obtiene de manera análoga

$$\bar{\mathbf{B}}^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3\mathbf{D}_1 & 4\mathbf{D}_2 & -\mathbf{D}_2 \\ 4\mathbf{D}_2^T & \mathbf{0} & 4\mathbf{D}_2 \\ -\mathbf{D}_2^T & 4\mathbf{D}_2 & -3\mathbf{D}_1 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

3.6.2 Reformulación como problema de autovalores lineal

En este apartado se parte del problema cuadrático de autovalores de la ec. (3.62) con un vector de fuerzas nulo. Multiplicando el vector $\bar{\mathbf{d}}_y$ por k , y dividiendo las columnas correspondientes para mantener el sistema intacto, se obtiene

$$\left(k^2 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x & \\ & \frac{1}{k} \mathbf{A}_y \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} & \frac{1}{k} \mathbf{B}_{xy} \\ \mathbf{B}_{xy}^T & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_x & \\ & \frac{1}{k} \mathbf{C}_y \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}}_x \\ k \bar{\mathbf{d}}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Multiplicando las últimas N filas por k se tiene

$$\left(k^2 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x & \\ & \mathbf{A}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & \mathbf{B}_{xy} \\ k^2 \mathbf{B}_{xy}^T & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_x & \\ & \mathbf{C}_y \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}}_x \\ k \bar{\mathbf{d}}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Agrupando

$$\left(k^2 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x & \\ \mathbf{B}_{xy}^T & \mathbf{A}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_x & \mathbf{B}_{xy} \\ & \mathbf{C}_y \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}}_x \\ k \bar{\mathbf{d}}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Se ha obtenido un problema lineal de autovalores en k^2 con matrices no simétricas, el cual puede reescribirse como

$$(k^2 \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{C}}) \phi_d = \mathbf{0} \quad (3.72)$$

donde el vector columna $\phi_d = [\bar{\mathbf{d}}_x^T \quad k \bar{\mathbf{d}}_y^T]^T$ es el *autovector por la derecha* de las siguientes matrices

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x & \\ \mathbf{B}_{xy}^T & \mathbf{A}_y \end{bmatrix} \quad y \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_x & \mathbf{B}_{xy} \\ & \mathbf{C}_y \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Otra forma alternativa de plantear un sistema lineal de autovalores a partir de la ec. (3.62) se obtiene multiplicando $\bar{\mathbf{d}}_x$ por k , y dividiendo las columnas correspondientes para mantener el sistema intacto:

$$\left(k^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{k} \mathbf{A}_x & \\ & \mathbf{A}_y \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} & \mathbf{B}_{xy} \\ \frac{1}{k} \mathbf{B}_{xy}^T & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{k} \mathbf{C}_x & \\ & \mathbf{C}_y \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} k \bar{\mathbf{d}}_x \\ \bar{\mathbf{d}}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Multiplicando las N primeras filas por k y agrupando se llega a

$$\left(k^2 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x & \mathbf{B}_{xy} \\ & \mathbf{A}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_x & \\ \mathbf{B}_{xy}^T & \mathbf{C}_y \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} k \bar{\mathbf{d}}_x \\ \bar{\mathbf{d}}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Se ha obtenido un problema lineal de autovalores en k^2 con matrices no simétricas, las cuales son traspuestas de las que aparecen en la ec. (3.72). Trasponiendo la ec. (3.75), se tiene

$$\phi_i (k^2 \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{C}}) = \mathbf{0} \quad (3.76)$$

donde el vector fila $\phi_i = [k \bar{\mathbf{d}}_x^T \quad \bar{\mathbf{d}}_y^T]$ es el *autovector por la izquierda* de las matrices $\bar{\mathbf{A}}$ y $\bar{\mathbf{C}}$.

En problemas de autovalores con matrices simétricas, los autovectores por la derecha y por la izquierda son iguales: $\phi_i = \phi_d^T$, pero la relación entre ambos no es tan directa cuando las matrices no son simétricas.

3.6.3 Relación de ortogonalidad entre autovectores

Los autovectores por la izquierda y por la derecha de una matriz no simétrica cumplen también una cierta relación de ortogonalidad, que puede deducirse al seleccionar dos números de onda distintos $k^{(m)}$ y $k^{(r)}$ y sus correspondientes autovectores. Utilizando las ecs. (3.72) y (3.76), se obtienen fácilmente las siguientes igualdades:

$$\phi_i^{(m)} \bar{\mathbf{C}} \phi_d^{(r)} = - [k^{(m)}]^2 \phi_i^{(m)} \bar{\mathbf{A}} \phi_d^{(r)} = - [k^{(r)}]^2 \phi_i^{(m)} \bar{\mathbf{A}} \phi_d^{(r)} \quad (3.77)$$

$$\phi_i^{(r)} \bar{\mathbf{C}} \phi_d^{(m)} = - [k^{(m)}]^2 \phi_i^{(r)} \bar{\mathbf{A}} \phi_d^{(m)} = - [k^{(r)}]^2 \phi_i^{(r)} \bar{\mathbf{A}} \phi_d^{(m)} \quad (3.78)$$

De estas ecuaciones cabe concluir las siguientes relaciones de ortogonalidad:

$$\phi_i^{(m)} \bar{\mathbf{A}} \phi_d^{(r)} = \phi_i^{(r)} \bar{\mathbf{A}} \phi_d^{(m)} = 0 \quad \text{si } k^{(m)} \neq k^{(r)} \quad (3.79)$$

$$\phi_i^{(m)} \bar{\mathbf{C}} \phi_d^{(r)} = \phi_i^{(r)} \bar{\mathbf{C}} \phi_d^{(m)} = 0 \quad \text{si } k^{(m)} \neq k^{(r)} \quad (3.80)$$

$$\phi_i^{(m)} \bar{\mathbf{C}} \phi_d^{(m)} = - [k^{(m)}]^2 \phi_i^{(m)} \bar{\mathbf{A}} \phi_d^{(m)} \neq 0 \quad \text{si } k^{(m)} = k^{(r)} \quad (3.81)$$

3.6.4 Modos de propagación

Para un número de onda cualquiera $k^{(m)}$, el vector de desplazamientos nodales de dicho modo, que denotaremos con $\phi^{(m)}$, se puede obtener a partir de los correspondientes autovectores por la derecha y por la izquierda, $\phi_d^{(m)}$ y $\phi_i^{(m)}$, deshaciendo los cambios de variable descritos anteriormente. Adoptando una organización de los grados de libertad que los agrupe por componentes, como se indica en la ec. (3.58), se llega de forma sencilla a la siguiente relación:

$$\phi^{(m)} = \mathbf{d}^{(m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_x^{(m)} \\ \mathbf{d}_y^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{dx}^{(m)} \\ \frac{1}{ik^{(m)}} \phi_{dy}^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k^{(m)}} \phi_{ix}^{(m)} & -i \phi_{iy}^{(m)} \end{bmatrix}^T \quad (3.82)$$

En la ec. (3.82) puede observarse que los desplazamientos modales dependen del signo del número de onda, y por lo tanto, de la dirección de propagación. El cambio de signo del número de onda conlleva cambiar el signo de una de las componentes de los desplazamientos modales. Esta observación coincide con el resultado analítico obtenido para ondas de Lamb en placas elásticas homogéneas.

3.7 Comentarios sobre los autovalores y autovectores

Las ecuaciones que gobiernan los modos de propagación en una placa discretizada para una frecuencia fija ω se han planteado como un sistema de autovalores lineal en $\lambda = k^2$ tanto en el caso de deformación plana, ec. (3.72), como en el antiplano, ec. (3.53). Para una malla de N nodos, la solución de este sistema proporciona $G = Ng$ autovalores $\lambda^{(m)}$ y sus correspondientes autovectores ($\phi_d^{(m)}$ y $\phi_i^{(m)}$ en deformación plana, $\phi^{(m)}$ en el caso antiplano). Al tomar raíces cuadradas de los autovalores anteriores se obtienen $2G$ números de onda, puesto que cada $\lambda^{(m)}$ genera dos valores de $k^{(m)}$: $\pm\sqrt{\lambda^{(m)}}$. Si $\lambda^{(m)}$ es real y positivo, ambos números de onda son también reales y corresponden a un mismo modo pero con direcciones de propagación opuestas. Teniendo en cuenta que la dependencia funcional con t y x tiene la forma $\exp[i(kx + \omega t)]$, el número de onda positivo representa una onda cuya fase se propaga hacia $x \rightarrow -\infty$, y el número de onda negativo una onda propagándose hacia $x \rightarrow +\infty$. El flujo de energía viajará en la misma dirección que la fase, excepto en el caso de ondas “backward”, como ya se indicó en la Sección 2.4 del capítulo anterior. Para el resto de valores de $\lambda^{(m)}$, los números de onda obtenidos son imaginarios o complejos y corresponden a modos evanescentes. Si suponemos que $k^{(m)} = a + ib$, la variación con t y x correspondiente es $\exp[i(ax + \omega t) - bx]$, donde el factor $\exp[-bx]$ es el causante del decrecimiento de la amplitud modal con la distancia. Si $b > 0$, la amplitud decae hacia $x \rightarrow +\infty$, y si $b < 0$, el decrecimiento se produce hacia $x \rightarrow -\infty$.

Por convención, se designan con $k^{(m,-\infty)}$ a los G números de onda asociados con modos reales que transportan energía hacia $x = -\infty$ y con modos evanescentes con amplitud decreciente para $x \rightarrow -\infty$. En consecuencia, los números de onda $k^{(m,+\infty)} = -k^{(m,-\infty)}$ representan modos reales que transportan energía hacia $x = +\infty$ o modos evanescentes cuya amplitud decae hacia $x \rightarrow +\infty$.

Los vectores $\phi^{(m,+\infty)}$ y $\phi^{(m,-\infty)}$, asociados respectivamente a los números de onda $k^{(m,+\infty)}$ y $k^{(m,-\infty)}$, representan la estructura de los desplazamientos en la sección transversal de la placa para el modo m según las dos posibles direcciones de propagación, si el número de onda es real (o decrecimiento, si el número de onda es imaginario o complejo). Ambos vectores están relacionados entre sí, debido a las propiedades del problema de autovalores del cual se han obtenido, pero existe una diferencia esencial entre los problemas antiplano y de deformación plana:

- Caso antiplano: los dos vectores son iguales

$$\phi^{(m,+\infty)} \Big|_{\text{antiplano}} = \phi^{(m,-\infty)} \Big|_{\text{antiplano}} \quad (3.83)$$

La estructura modal es independiente de la dirección de propagación, lo cual coincide con el resultado analítico obtenido para ondas SH guiadas en placas homogéneas.

- Caso de deformación plana: aunque ambos números de onda $k^{(m,+\infty)}$ y $k^{(m,-\infty)}$ tienen los mismos autovectores “modificados” $\phi_d^{(m)}$ y $\phi_i^{(m)}$, los desplazamientos nodales $\phi^{(m,\pm\infty)}$ son diferentes para cada uno de ellos debido a que al deshacer el cambio de variable aparece el número de onda (ver ec. (3.82))

$$\phi^{(m,-\infty)} = \begin{bmatrix} \phi_{dx}^{(m)} \\ \frac{1}{ik^{(m,-\infty)}} \phi_{dy}^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{dx}^{(m)} \\ \frac{1}{-ik^{(m,+\infty)}} \phi_{dy}^{(m)} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (3.84)$$

$$\phi^{(m,+\infty)} \Big|_{plano} = \begin{bmatrix} \phi_x^{(m,+\infty)} \\ \phi_y^{(m,+\infty)} \end{bmatrix} \Big|_{plano} = \begin{bmatrix} \phi_x^{(m,-\infty)} \\ -\phi_y^{(m,-\infty)} \end{bmatrix} \Big|_{plano} \quad (3.85)$$

Se observa que la diferencia entre los vectores de desplazamiento (modos de propagación) de $k^{(m,\pm\infty)}$ es un signo. Para obtener los desplazamientos del modo $k^{(m,-\infty)}$ a partir del modo $k^{(m,+\infty)}$ (o viceversa) basta con cambiar de signo una de las componentes de los desplazamientos (u_x o u_y) en todos los nodos. Este resultado coincide con el obtenido analíticamente para ondas de Lamb en placas homogéneas.

3.8 Desarrollo en modos normales

3.8.1 Fuerzas nodales consistentes en una sección $x = x_0$

En la placa infinita discretizada de la Figura 3.2 se adopta una sección transversal cualquiera $x = x_0$ con vector normal $\mathbf{n} = [\pm 1, 0]^T$. Para un elemento e contenido en dicha sección, las fuerzas nodales consistentes se definen de la forma habitual en EF

$$\mathbf{F}^e = \pm \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \mathbf{R}_x^e d\Gamma \quad (3.86)$$

donde \mathbf{R}_x^e son las tensiones que actúan en un punto del elemento y Γ^e es la superficie del elemento. Sustituyendo las ecs. (3.19) y (3.5) en la expresión exterior, se obtiene

$$\mathbf{F}^e = \pm (ik\mathbf{A}^e + \mathbf{B}_1^e) \mathbf{d}^e e^{i(kx_0 + \omega t)} = \hat{\mathbf{F}}^e e^{i(kx_0 + \omega t)} \quad (3.87)$$

Para el caso antiplano, se obtiene la misma expresión pero sin el término \mathbf{B}_1^e .

3.8.2 Matriz de rigidez dinámica de la placa semi-infinita

Si se supone una placa semi-infinita de espesor $d = 2h$ limitada por una sección transversal $x = x_0$, la solución elastodinámica en dicha placa puede expresarse como una combinación lineal de los modos de propagación de la placa (*desarrollo en modos normales*, o también *superposición modal* [108]), donde sólo se incluyen aquellos modos que satisfacen la condición de radiación. Esta condición implica que los modos reales deben extraer energía de la sección x_0 y los modos evanescentes deben

decrecer en amplitud cuando $|x - x_0| \rightarrow \infty$. La sección transversal $x = x_0$ define dos placas semi-infinitas: $(-\infty, x_0]$ y $[x_0, +\infty)$, la primera de las cuales se muestra en la Figura 3.6. Los números de onda k que cumplen la condición de radiación son diferentes en cada caso: $k^{(m,-\infty)}$ en el primero y $k^{(m,+\infty)}$ en el segundo. En los desarrollos siguientes, los números de onda que cumplen la condición de radiación se denotarán con $k^{(m)}$, y sus desplazamientos nodales con $\phi^{(m)}$. En el caso de ondas de Lamb, cuando se estudien frecuencias donde exista una onda “backward” la condición de radiación obliga a seleccionarla de forma que su fase viaje hacia el borde, puesto que el flujo de energía se propaga en dirección opuesta.

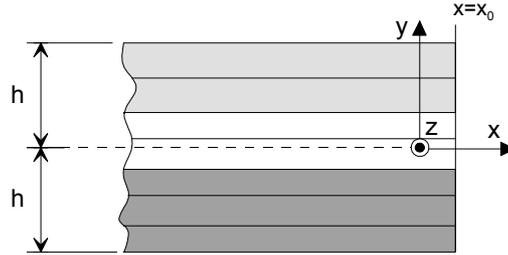


Figura 3.6. Geometría de una placa semi-infinita

Al estudiar una frecuencia fija ω , la formulación de EF aproxima los modos de Lamb y SH guiados mediante las soluciones de dos problemas cuadráticos de autovalores, ecs. (3.57) y (3.53) respectivamente. En ambos casos, una malla de N nodos produce $2G$ números de onda $k^{(m)}$ y sus correspondientes desplazamientos nodales $\phi^{(m)}$, de los cuales sólo la mitad G satisface la condición de radiación. Estos modos aproximados se emplean en el desarrollo en modos normales del campo difractado en la placa semi-infinita, en lugar de utilizar los modos analíticos.

La particularización de la superposición modal en el borde $x = x_0$ proporciona la siguiente expresión para los desplazamientos

$$\mathbf{u}^{di} = \mathbf{\Phi} \boldsymbol{\alpha} \exp[i\omega t] = [\phi^{(1)} \quad \dots \quad \phi^{(G)}] \left\{ \begin{array}{c} \alpha^{(1)} e^{ik^{(1)}x_0} \\ \vdots \\ \alpha^{(G)} e^{ik^{(G)}x_0} \end{array} \right\} e^{i\omega t} \quad (3.88)$$

donde $\mathbf{\Phi}$ es una matriz cuyas columnas son los autovectores de EF y $\boldsymbol{\alpha}$ es un vector que contiene los coeficientes de participación de los modos. La expresión es aplicable tanto en el problema de deformación plana como en el antiplano. De la misma forma, las fuerzas nodales consistentes en el borde de la placa tienen la siguiente expresión

$$\mathbf{F}^{sc} = \mathbf{\Psi} \boldsymbol{\alpha} \exp[i\omega t] \quad (3.89)$$

donde Ψ es una matriz cuyas columnas contienen las fuerzas nodales consistentes de todos los modos $\psi^{(m)}$, calculadas a partir de los desplazamientos nodales $\phi^{(m)}$ mediante la ec. (3.87)

$$\psi^{(m)} = \pm (ik\mathbf{A} + \mathbf{B}_1) \phi^{(m)} \quad (3.90)$$

Despejando el vector α de la ec. (3.88) y sustituyendo en la ec. (3.89), se obtiene una relación matricial entre los desplazamientos y fuerzas consistentes nodales en la sección $x = x_0$

$$\mathbf{F}^{sc} = \Psi \Phi^{-1} \mathbf{u}^{sc} = \mathbf{S} \mathbf{u}^{sc} \quad (3.91)$$

donde \mathbf{S} es la matriz de rigidez dinámica de la placa semi-infinita $\mathbf{S} = \Psi \Phi^{-1}$, la cual ha resultado ser independiente de x_0 .

Empleando la ec. (3.91) es posible obtener la respuesta de la placa frente a cualquier acción superficial en el borde $x = x_0$, siempre que no existan otras acciones aplicadas sobre las superficies de la placa $y = \pm h$.

3.8.3 Ondas incidentes

Una fuente de excitación (p. ej. un transductor ultrasónico) actuando sobre la placa semi-infinita y no incluida en el apartado anterior, puede generar una onda guiada, que se propagará a lo largo de la placa e incidirá sobre el borde $x = x_0$. Aplicando superposición, la solución elastodinámica total se puede expresar como suma de la onda incidente y el campo difractado

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{in} + \mathbf{u}^{sc} \quad \text{y} \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}^{in} + \mathbf{F}^{sc} \quad (3.92)$$

La sustitución de esta expresión en la ec. (3.91) da lugar a la siguiente relación

$$\mathbf{F} - \mathbf{F}^{in} = \mathbf{S} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^{in}) \quad (3.93)$$

Una fuente de excitación armónica puede generar todos los modos posibles (reales y evanescentes) a la frecuencia de trabajo. Si la posición de dicha fuente está suficientemente alejada del borde, los modos evanescentes alcanzarán dicha sección con una amplitud prácticamente nula debido a su decrecimiento exponencial con la distancia. Por tanto, sólo los modos reales llegarán al borde. En esta tesis se emplean ondas guiadas incidentes monocromáticas (es decir, que contienen un único modo real) con amplitud unidad.

3.8.4 Flujo de energía

El flujo de energía, promediado en un periodo, que un modo real m transporta a través de una sección transversal cualquiera de la placa $x=\text{constante}$, se va a definir como

$$E^{(m)} = -\frac{1}{2} \text{Re} \left[\int_{-h}^h \left[\bar{\mathbf{R}}_x^{(m)} \right]^T \dot{\mathbf{u}}^{(m)} dy \right] \quad (3.94)$$

donde $\mathbf{u}^{(m)}$ y $\mathbf{R}_x^{(m)}$ son los desplazamientos y tracciones del modo m , la barra superior indica complejo conjugado y el punto indica derivada respecto al tiempo.

Teniendo en cuenta la semidiscretización de EF, ec. (3.19), y la definición de las fuerzas nodales consistentes, ec. (3.86), se obtiene

$$E^{(m)} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[i\omega \left[\bar{\boldsymbol{\psi}}^{(m)} \right]^T \boldsymbol{\phi}^{(m)} \right] \quad (3.95)$$

donde $\boldsymbol{\phi}^{(m)}$ y $\boldsymbol{\psi}^{(m)}$ son los desplazamientos y fuerzas nodales consistentes del modo m , respectivamente.

El flujo de energía difractado total que es extraído de la sección $x = x_0$ por los modos reales a través de la placa semi-infinita se puede calcular a partir de los resultados de EF mediante la siguiente expresión

$$E_{di} = \sum_{m \text{ reales}} \left| \alpha^{(m)} \right|^2 E^{(m)} \quad (3.96)$$

donde $\alpha^{(m)}$ es el factor de participación del modo m . La suma se extiende únicamente sobre los modos reales porque los modos evanescentes no transportan ningún flujo de energía neto al promediar en un periodo.

La matriz de rigidez dinámica de la placa semi-infinita \mathbf{S} representa una condición de contorno absorbente para las ondas guiadas, puesto que es capaz de reproducir el flujo de energía hacia el infinito que se establece a través de la placa en forma de modos de propagación reales. Además, dado que la superposición modal realizada incluye tanto modos reales como evanescentes, la influencia esencial de estos últimos en las cercanías del borde se tiene también en cuenta.

Capítulo 4

Formulación híbrida EC-EF

4.1 Introducción

La formulación del problema dinámico armónico en sólidos elásticos o viscoelásticos, homogéneos y lineales puede reducirse a un conjunto de integrales de los desplazamientos y tracciones extendidas únicamente al contorno del sólido. Para ello debe aplicarse el Teorema de Reciprocidad entre el estado en estudio y la denominada solución fundamental, correspondiente a la respuesta de un medio infinito frente a la aplicación de una carga concentrada armónica en uno de sus puntos. En general, el sistema de ecuaciones obtenido no admite una solución analítica, por lo que se recurre a su solución numérica mediante la discretización del contorno y la interpolación de las variables con funciones de forma, dando lugar al Método de los Elementos de Contorno (MEC), cuyos aspectos fundamentales se presentan en este capítulo.

Un tratamiento detallado acerca de la aplicación del MEC a problemas elasto-dinámicos puede encontrarse en los trabajos de Domínguez y Alarcón [33], Manolis y Beskos [85], Beskos [17, 18] y Domínguez [30].

Para poder analizar problemas de difracción de ondas por defectos en medios infinitos con el MEC, es necesario reescribirlos como problemas de difracción localizada aplicando el principio de superposición. Estos últimos se caracterizan porque las perturbaciones producidas decrecen con la distancia, y cumplen la condición de radiación de Sommerfeld y la de regularidad en el infinito. Por esta razón, los problemas de difracción localizada pueden ser analizados con el MEC planteado anteriormente sin necesidad de utilizar un contorno de cierre en el infinito, tan sólo discretizando los contornos interiores [30].

Sin embargo, cuando existe alguna guía de onda elástica capaz de transportar energía hasta el infinito sin sufrir atenuación (ni por radiación ni por amortiguamiento del material), no es posible plantear un problema de difracción localizada. Esta situación se presenta en los casos de semiespacios bidimensionales uniformes o estratificados (donde aparecen las ondas de Love y de Rayleigh generalizadas), pla-

cas laminadas bidimensionales (en las cuales existen ondas de Lamb y SH guiadas), interfases entre dos semiespacios soldados (donde pueden existir ondas de Stoneley, para ciertas combinaciones de materiales) y barras de sección arbitraria, entre otros.

Abascal y Dominguez [1] y Domínguez y Abascal [31, 32] resolvieron este problema al calcular las rigideces dinámicas y la respuesta sísmica de cimentaciones corridas sobre semiespacios uniformes y no uniformes teniendo en cuenta la interacción suelo-estructura. Utilizaron la formulación del MEC en el dominio de la frecuencia planteado con la solución fundamental de espacio completo (en deformación plana), y obtuvieron excelentes resultados extendiendo la discretización de la superficie libre del semiespacio y de las interfases entre estratos de distinto material únicamente hasta una longitud igual a diez veces el ancho de la zapata. Para evitar los errores de truncado que aparecerían en el caso puramente elástico debido a la existencia de ondas superficiales de Rayleigh generalizadas sin atenuación, introdujeron una pequeña cantidad de amortiguamiento hysterético en el material.

El principal interés de esta tesis reside en el cálculo del campo difractado lejano, incluso en el caso elástico, puesto que uno de sus objetivos prioritarios es proporcionar información para la inspección remota de defectos con ondas guiadas. Por este motivo es necesario adoptar una solución diferente. Para poder resolver los problemas de difracción de ondas en placas infinitas elásticas o viscoelásticas con el MEC calculando correctamente el campo lejano, existen en la literatura dos planteamientos:

1. Plantear una formulación del MEC basada en la solución fundamental para cargas concentradas aplicadas en un punto de la guía de onda. Aunque presenta la ventaja de requerir únicamente la discretización del contorno de los defectos, tiene como inconvenientes la complejidad de la solución fundamental (que exige de la evaluación de una transformada inversa de Fourier espacial) y el hecho de ser aplicable a guías de onda rectas únicamente. En el caso de placas, este camino fue seguido por Kausel y sus colaboradores [65, 66, 41], así como por Datta y sus colaboradores [29, 77], para estudiar la difracción por grietas verticales superficiales. Los primeros emplearon una solución fundamental semi-analítica basada en la discretización de la sección transversal en elementos lineales. Los segundos evaluaron la integral sobre el número de onda (i.e. transformada inversa de Fourier de la función de Green respecto a la coordenada paralela al plano medio de la placa) utilizando una representación del integrando mediante polinomios de Chebyshev, distinguiendo dos rangos: uno finito, donde aplicaron una versión modificada de la cuadratura de Clenshaw-Curtis, y otro semi-infinito, en el que obtuvieron la integral de forma analítica [115, 116]. Debido al elevado coste computacional de este procedimiento, en trabajos posteriores adoptaron la solución fundamental semi-analítica de Kausel [119].
2. Sustituir la guía de onda elástica por uno o varios contornos absorbentes ca-

paces de reproducir adecuadamente la respuesta dinámica de la guía de onda, incluso su capacidad de transportar energía hacia el infinito sin atenuación. Esta técnica fue desarrollada con éxito para canales de agua de longitud infinita y sección transversal rectangular por Medina y Domínguez [87, 35], en el caso bidimensional, y por Maeso y Domínguez [84, 34] y Domínguez y Meise [36], en el caso tridimensional. Estos autores consiguieron así analizar la respuesta frente a sismos de presas incluyendo la interacción suelo-estructura-fluido. En el caso de placas elásticas homogéneas este planteamiento fue aplicado por Cho y Rose [24, 23, 25] para estudiar la difracción de ondas guiadas por defectos de varias geometrías. Todos estos autores obtuvieron sus contornos absorbentes expresando los desplazamientos y tensiones en la guía de onda como una superposición modal analítica de los infinitos modos guiados, que se trunca para mantener tan solo un número finito que permita su solución numérica.

En esta tesis se utiliza este último planteamiento, donde los contornos absorbentes se obtienen empleando la formulación semi-analítica de EF presentada en el capítulo anterior. La formulación híbrida de EC y EF resultante se describe al final de este capítulo.

4.2 El Método de los Elementos de Contorno

El MEC es una herramienta numérica ampliamente utilizada a la solución de problemas dinámicos y de propagación de ondas [30, 33]. Algunas de sus ventajas respecto a otros métodos como el MEF o las diferencias finitas son: reducción de la dimensión del problema, dado que sólo es necesario discretizar la superficie del dominio; excelente comportamiento en el análisis de problemas con elevados gradientes de tensiones.

En este apartado se describe el desarrollo de la formulación directa del MEC en el dominio de la frecuencia, partiendo del Teorema de Reciprocidad y la solución fundamental armónica de espacio completo.

4.2.1 Teorema de Reciprocidad en Elastodinámica Armónica

El *Teorema de Reciprocidad* entre dos estados elastodinámicos armónicos con la misma frecuencia ω , definidos sobre un mismo cuerpo Ω de contorno Γ , tiene la siguiente expresión [30]

$$\int_{\Gamma} t_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b_k u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_k^* u_k d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b_k^* u_k d\Omega \quad (4.1)$$

donde u_k , t_k y b_k son las componentes de los desplazamientos, tracciones en el contorno y cargas de dominio, respectivamente, asociados al primer estado, y u_k^* , t_k^* y b_k^* son las correspondientes al segundo estado. Todas estas variables dependen de la posición \mathbf{x} y de la frecuencia ω , y tendrán en general valores complejos.

4.2.2 Solución Fundamental de la Elastodinámica

La *solución fundamental* se define como la respuesta (campos de desplazamientos y tensiones) de un dominio infinito frente a la acción de una carga concentrada en uno de sus puntos. En el caso elastodinámico armónico, dicha solución se obtiene resolviendo el problema de un dominio infinito de material elástico sometido a una carga puntual unitaria armónica de frecuencia ω aplicada en un punto cualquiera $\boldsymbol{\xi}$ según la dirección l

$$\rho b_k^* = \delta(\boldsymbol{\xi}) \delta_{lk} \quad (4.2)$$

donde el factor $\exp[i\omega t]$ se ha omitido, δ_{lk} es la delta de Kronecker y $\delta(\boldsymbol{\xi})$ es la delta de Dirac que se define como

$$\int_{\Omega} \delta(\boldsymbol{\xi}) d\Omega = \begin{cases} 1 & \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \Omega \\ 0 & \text{si } \boldsymbol{\xi} \notin \Omega \end{cases} \quad (4.3)$$

Los desplazamientos en un punto cualquiera \mathbf{x} según la dirección k producidos por esta carga se designan como $u_{lk}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega)$. La componente en la dirección k de las tracciones en un punto cualquiera \mathbf{x} según un plano de normal \mathbf{n} producidas por dicha carga se designan como $t_{lk}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega)$. Las expresiones analíticas explícitas de la solución fundamental elastodinámica en el dominio de la frecuencia fueron obtenidas por Cruse y Rizzo [26].

Para el caso antiplano la solución fundamental tiene la siguiente expresión

$$u_{33}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) = \frac{1}{2\pi\mu} K_0(z_T) \quad (4.4)$$

$$t_{33}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) = -\frac{i\omega}{2\pi c_T} \frac{\partial r}{\partial n} K_1(z_T) \quad (4.5)$$

donde $z_T = i\omega r/c_T$, $K_0(z)$ y $K_1(z)$ son funciones de Bessel modificadas del segundo tipo [3], $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ y $\partial r/\partial n$ es la derivada de r respecto a la normal al plano donde se están obteniendo las tracciones.

En deformación plana las expresiones son las siguientes

$$u_{lk}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) = \frac{1}{2\pi\mu} [\psi\delta_{lk} - \chi r_{,l}r_{,k}] \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} t_{lk}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) = & \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{\chi}{r} \right) \left(\delta_{lk} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,k}n_l \right) - \right. \\ & - \frac{2\chi}{r} \left(n_k r_{,l} - 2r_{,l}r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} \right) - 2 \frac{d\chi}{dr} r_{,l}r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} \\ & \left. + (\kappa^2 - 1) \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{\chi}{r} \right) n_k r_{,l} \right] \quad (4.7) \end{aligned}$$

donde los subíndices l y k pueden tomar los valores 1 ó 2, $\kappa = c_L/c_T$, $r_{,k} = dr/dx_k$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ es el vector normal al plano donde se obtienen las tracciones, y

$$\psi = K_0(z_T) + \frac{1}{z_T} [K_1(z_T) - \kappa K_1(z_L)] \quad (4.8)$$

$$\chi = K_2(z_T) - \kappa K_2(z_L) \quad (4.9)$$

siendo $z_L = i\omega r/c_L$ y $K_2(z)$ es una función de Bessel modificada del segundo tipo [3].

En ambos casos, la solución fundamental presenta una singularidad cuando $\omega r \rightarrow 0$.

4.2.3 Representación Integral de los Desplazamientos

Para formular la representación integral de los desplazamientos en un punto cualquiera del dominio $\mathbf{x} \in \Omega$, se aplica el Teorema de Reciprocidad entre el estado desconocido bajo estudio y un segundo estado (denotado por “*”) conocido, definido por la solución fundamental para una carga concentrada unitaria armónica de frecuencia ω aplicada en el punto $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$ según la dirección l . Al elegir el segundo estado de esta forma, cuando se sustituyen sus fuerzas de volumen, ec. (4.2), en la última integral de dominio de la ec. (4.1), ésta nos queda

$$\int_{\Omega} \rho b_k^* u_k d\Omega = \int_{\Omega} \delta(\boldsymbol{\xi}) \delta_{lk} u_k d\Omega = u_l(\boldsymbol{\xi}) \quad (4.10)$$

de modo que, en ausencia de fuerzas de volumen en el problema real ($\rho b_k = 0$), la ec. (4.1) puede escribirse como

$$u_l(\boldsymbol{\xi}, \omega) + \int_{\Gamma} t_{lk}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) u_k(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} u_{lk}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) t_k(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (4.11)$$

Esta ecuación proporciona una representación integral de los desplazamientos de cualquier punto del dominio en función de los valores de desplazamientos u_k y p_k tracciones en el contorno, y de la solución fundamental. Por lo tanto, para el cálculo de los desplazamientos en un punto cualquiera resulta necesario conocer primero la solución en el contorno.

4.2.4 Formulación integral en el contorno

Dado que la ec. (4.11) es válida para cualquier posición del dominio $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$ donde se aplique la carga concentrada, incluyendo puntos en el contorno Γ , puede obtenerse una expresión integral extendida únicamente al contorno cuando el punto de colocación $\boldsymbol{\xi}$ se sitúe sobre Γ . Cuando esto ocurre, las integrales en la ec. (4.11) presentan una singularidad en $r = 0$ debido a la solución fundamental.

Para caracterizar el comportamiento de las integrales de contorno en este caso, se supondrá inicialmente el dominio aumentado artificialmente con un semicírculo de contorno s_ε y de radio ε centrado en ξ , Figura 4.1. Posteriormente se tomará el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ para recobrar la geometría original Γ .

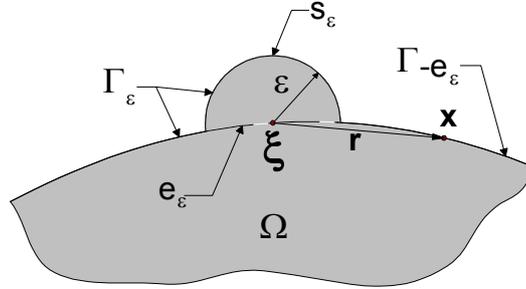


Figura 4.1. Contorno suplementado con semicírculo de radio ε

De esta manera, particularizando la ec. (4.11) en un punto del contorno ficticio $\Gamma_\varepsilon = \Gamma - e_\varepsilon + s_\varepsilon$ se obtiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ u_l(\xi, \omega) + \int_{\Gamma_\varepsilon} [t_{lk}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) u_k(\mathbf{x}, \omega) - u_{lk}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) t_k(\mathbf{x}, \omega)] d\Gamma(\mathbf{x}) \right\} = 0 \quad (4.12)$$

Las integrales de superficie en la ecuación anterior pueden descomponerse en dos partes, una sobre la semicircunferencia s_ε (que contiene la singularidad al tomar límites) y la otra sobre el resto del contorno $\Gamma - e_\varepsilon$. La integración sobre $\Gamma - e_\varepsilon$ no presenta ninguna dificultad puesto que la solución fundamental se comporta de manera no singular; además, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se convierte en el Valor Principal de Cauchy de la integral sobre todo el contorno Γ . En cuanto a las integrales sobre s_ε , al tomar el límite cuando el radio $\varepsilon \rightarrow 0$ y teniendo en cuenta que $u_{lk}^* \sim O(\ln \varepsilon)$, $t_{lk}^* \sim O(\frac{1}{\varepsilon})$ y $d\Gamma \sim O(\varepsilon)$, se obtienen los siguientes resultados

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{s_\varepsilon} u_{lk}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) t_k(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) \right\} = 0 \quad (4.13)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{s_\varepsilon} t_{lk}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) u_k(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) \right\} = [c_{lk}(\xi) - \delta_{lk}] u_k(\xi, \omega) \quad (4.14)$$

donde $c_{lk}(\xi)$ es un término constante que depende únicamente de la geometría local del contorno en el punto de colocación ξ . Por ejemplo, en aquellos puntos donde Γ es una superficie lisa, se tiene $c_{lk} = \frac{1}{2} \delta_{lk}$. Estos términos coinciden con los del caso Elastostático, ya que las tracciones de la solución fundamental armónica tienden a las estáticas cuando $\omega r \rightarrow 0$.

Sustituyendo las ecs. (4.12) y (4.13) en (4.14), se obtiene la expresión final de la Ecuación Integral extendida al Contorno

$$c_{lk}(\boldsymbol{\xi})u_k(\boldsymbol{\xi}, \omega) + \int_{\Gamma} t_{lk}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) u_k(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} u_{lk}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) t_k(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (4.15)$$

donde las integrales deben entenderse como Valores Principales de Cauchy por haber extraído previamente la singularidad.

Por simplicidad a partir de ahora resultará más conveniente emplear la notación matricial. De esta forma, la ecuación anterior puede reescribirse como

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, \omega) + \int_{\Gamma} \mathbf{T}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \mathbf{U}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) \mathbf{t}(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (4.16)$$

donde $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ y $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \omega)$ son vectores de dimensión $g \times 1$ que contienen respectivamente los desplazamientos y tracciones en el punto \mathbf{x} , g es el número de grados de libertad por nodo (que ya se definió en el apartado 3.4.1), mientras que $\mathbf{T}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega)$, $\mathbf{U}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega)$ y $\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi})$ son matrices de dimensión $g \times g$ donde están ordenados la solución fundamental y los términos $c_{lk}(\boldsymbol{\xi})$, respectivamente.

La ec. (4.16), junto con las condiciones de contorno, proporciona la solución al problema de contorno. Sin embargo, dicho sistema no será resoluble analíticamente para una situación general de geometría y carga. Por esta razón es necesario realizar un tratamiento numérico de esa ecuación, el cual da lugar al Método de los Elementos de Contorno. Una vez que se hayan determinado las variables en el contorno, la ec. (4.16) permite calcular los desplazamientos en cualquier punto del dominio.

4.2.5 El Método de los Elementos de Contorno

Discretización del contorno

Para resolver numéricamente la ec. (4.15) en el caso bidimensional estudiado en esta tesis, se discretizará el contorno Γ en elementos unidimensionales

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{n_e} \Gamma_j \quad (4.17)$$

donde n_e es el número de elementos y Γ_j la superficie del elemento j . En cada uno de ellos, los desplazamientos \mathbf{u} y las tracciones \mathbf{t} se interpolan a partir de sus valores en unos puntos discretos llamados nodos. Las funciones de interpolación empleadas para tal fin se denominan funciones de forma, que para el caso bidimensional estudiado suelen ser polinomios definidos en términos de las coordenadas naturales del elemento ξ . El número de nodos de que consta un elemento dependerá del tipo de aproximación que se desee realizar; en esta tesis se utilizan tres nodos, los cuales permiten utilizar polinomios de orden dos, obteniéndose así una aproximación cuadrática. Estas funciones de forma cuadráticas ya fueron introducidas en el capítulo anterior, ec. (3.23), donde además se representaron gráficamente, Figura 3.3.

En el MEC, tanto los desplazamientos como las tracciones se aproximan en el elemento con las mismas funciones de forma. Utilizando notación matricial, la interpolación de dichas variables puede escribirse como

$$\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{u}^j ; \mathbf{t}(\xi) = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{p}^j \quad (4.18)$$

donde $\mathbf{u}(\xi)$ y $\mathbf{p}(\xi)$ son las distribuciones aproximadas de desplazamientos y tracciones en el elemento, \mathbf{u}^j y \mathbf{p}^j son vectores de dimensión $3g \times 1$ que contienen los desplazamientos y tracciones en los tres nodos del j -ésimo elemento, $\mathbf{N}(\xi)$ es una matriz de dimensión $g \times 3g$ que contiene las funciones de forma (cuya definición se realizó en la ec. (3.23)). Aunque las funciones de forma empleadas son las mismas que en el MEF, existe una diferencia fundamental: en el MEF las tensiones, y consecuentemente las tracciones, se calculan a partir de las derivadas de los desplazamientos interpolados, como se muestra en las ecs. (3.25) y (3.26), mientras que en el MEC las tracciones son interpoladas de forma independiente de los desplazamientos.

Además, la geometría de los elementos se aproxima con las mismas funciones de forma y nodos que las variables (es decir, se emplean elementos isoparamétricos)

$$\mathbf{x}(\xi) = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{x}^j \quad (4.19)$$

donde \mathbf{x}^j es un vector de dimensión 6×1 que contiene las coordenadas de los tres nodos del elemento cuadrático j -ésimo, y $\mathbf{N}(\xi)$ es una matriz 2×6 .

Ecuaciones del MEC en un punto del contorno

Una vez realizada la discretización del contorno, se pueden sustituir las ecs. (4.18) y (4.19) en (4.16) para obtener

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}(\xi) \mathbf{u}(\xi, \omega) + \sum_{j=1}^{n_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{T}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) \mathbf{N}(\mathbf{x}) d\Gamma_j(\mathbf{x}) \right\} \mathbf{u}^j(\omega) \\ &= \sum_{j=1}^{n_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{U}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) \mathbf{N}(\mathbf{x}) d\Gamma_j(\mathbf{x}) \right\} \mathbf{t}^j(\omega) \end{aligned} \quad (4.20)$$

La aplicación de esta expresión en un punto cualquiera del contorno $\xi \in \Gamma$ proporciona g ecuaciones en las que intervienen los desplazamientos en dicho punto así como los desplazamientos y tracciones en todos los nodos del contorno. Éstas son las ecuaciones del MEC en ξ .

Si se prescinde de las dependencias funcionales con \mathbf{x} , ξ y ω para simplificar la notación, y se reagrupan términos, la ecuación anterior puede expresarse como

$$\mathbf{C}^i \mathbf{u}^i + \sum_{m=1}^N \hat{\mathbf{H}}^{im} \mathbf{u}^m = \sum_{j=1}^{n_e} \mathbf{G}^{ij} \mathbf{t}^j \quad (4.21)$$

donde N es el número total de nodos, el superíndice “ i ” denota el punto de colocación $\boldsymbol{\xi}$ y \mathbf{u}^m es un vector de tamaño $g \times 1$ con los desplazamientos del nodo m -ésimo. En el primer miembro de la ecuación anterior el sumatorio se extiende sobre los nodos porque sólo existe un posible valor de los desplazamientos en cada nodo (por compatibilidad). Sin embargo, en el segundo miembro el sumatorio se extiende sobre los elementos porque un mismo nodo perteneciente a varios elementos puede presentar valores diferentes de la tracción sobre cada uno de ellos.

Las matrices $\hat{\mathbf{H}}^{im}$ y \mathbf{G}^{ij} de la ec. (4.21), de dimensiones $g \times g$ y $g \times 3g$ respectivamente, se definen como

$$\hat{\mathbf{H}}^{im} = \sum_{e_m} \int_{\Gamma_j} \mathbf{T}^* \mathbf{N}_k d\Gamma_j \quad (4.22)$$

$$\mathbf{G}^{ij} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{U}^* \mathbf{N} d\Gamma_j \quad (4.23)$$

donde el sumatorio en e_m se extiende sobre todos los elementos a los que pertenece el nodo m , k es el número de orden del nodo m dentro del elemento e_m , $\mathbf{N}_k = N_k \mathbf{I}$, e \mathbf{I} es la matriz identidad de orden g .

En el caso particular de situar el punto de colocación coincidente con un nodo, se puede reescribir la ec. (4.21) como

$$\sum_{m=1}^N \mathbf{H}^{im} \mathbf{u}^m = \sum_{j=1}^{n_e} \mathbf{G}^{ij} \mathbf{t}^j \quad (4.24)$$

donde se ha definido

$$\mathbf{H}^{im} = \begin{cases} \hat{\mathbf{H}}^{im} & \text{si } i \neq m \\ \mathbf{C}^i + \hat{\mathbf{H}}^{im} & \text{si } i = m \end{cases} \quad (4.25)$$

La ec. (4.24) constituye la versión discretizada de la Ecuación Integral extendida sobre el Contorno, ec. (4.16), en la cual se ha reducido el infinito número de gdl de la solución continua inicial a un conjunto discreto, formado por las variables nodales de la solución aproximada. Esta expresión puede ser evaluada numéricamente, y proporciona las g ecuaciones del MEC correspondientes a un nodo cualquiera del contorno.

Estructura y resolución del sistema de ecuaciones

Si se plantea la ec. (4.24) para todos y cada uno de los N nodos del contorno, se obtiene un sistema de $G = N \cdot g$ ecuaciones que puede escribirse como

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{p} \quad (4.26)$$

donde \mathbf{H} y \mathbf{G} son matrices de dimensiones $G \times G$ y $G \times 3gn_e$, respectivamente, que se obtienen a partir de las matrices elementales $\hat{\mathbf{H}}^{im}$ y \mathbf{G}^{ij} mediante un proceso de

montaje basado en la conectividad y la aplicación de la compatibilidad de desplazamientos. Los vectores \mathbf{u} y \mathbf{p} contienen los desplazamientos y tracciones en todos los nodos antes de aplicar las condiciones de contorno, y tienen dimensiones $G \times 1$ y $3gn_e \times 1$ respectivamente.

Después de aplicar las condiciones de contorno el número de incógnitas en (4.26) se reduce a G . Mediante la reordenación de las columnas de \mathbf{H} y \mathbf{G} se pueden pasar todas las incógnitas al primer miembro, obteniéndose así un sistema de ecuaciones cuadrado

$$\mathbf{A} \mathbf{z} = \mathbf{f} \quad (4.27)$$

donde \mathbf{z} es el vector de incógnitas y \mathbf{f} se obtiene multiplicando las columnas de \mathbf{H} y \mathbf{G} por los valores prescritos de desplazamientos y tracciones, respectivamente.

La solución de (4.27) proporciona los valores de \mathbf{u} y \mathbf{p} en el contorno, a partir de los cuales la solución en todo el dominio es conocida, puesto que se puede calcular empleando la ec. (4.16).

El planteamiento del MEC presentado es válido para los dos problemas planos estudiados (deformación plana y antiplana), pero con dos diferencias principales

1. El número de variables nodales, que es cuatro para problemas de deformación plana (u_x, u_y, p_x, p_y) y dos en problemas antiplanos (u_z, p_z).
2. La solución fundamental empleada.

Evaluación de las integrales sobre el contorno

El cálculo de las matrices \mathbf{G} y \mathbf{H} requiere evaluar integrales del tipo

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{U}^* N_k d\Gamma_j \quad , \quad \int_{\Gamma_j} \mathbf{T}^* N_k d\Gamma_j \quad (4.28)$$

Cuando el punto de colocación ξ (situado en el nudo i) no pertenece al elemento j , los integrandos en (4.28) son regulares sobre la superficie de integración Γ_j , y por tanto pueden calcularse usando una cuadratura de Gauss estándar. Dado que tanto las cuadraturas como las funciones de forma están expresadas en el sistema de coordenadas naturales del elemento, será necesario realizar un cambio de variable para llevar a cabo la integración. El diferencial de superficie puede escribirse como

$$d\Gamma = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} d\xi = |J| d\xi \quad (4.29)$$

donde J es el Jacobiano de la transformación, en cuya expresión intervienen las derivadas de las coordenadas geométricas con respecto a la coordenada natural. Para calcular estas últimas, basta derivar la ec. (4.19)

$$\frac{d\mathbf{x}(\xi)}{d\xi} = \frac{d\mathbf{N}(\xi)}{d\xi} \mathbf{x}^j \quad (4.30)$$

Sin embargo, cuando el punto de colocación i pertenece al elemento j sobre el que se integra, los integrandos en la ec. (4.28) presentan un comportamiento singular, por lo que será necesario realizar un tratamiento especial.

Evaluación de los términos diagonales de \mathbf{G} Los desplazamientos de la solución fundamental \mathbf{U}^* presentan una singularidad de orden $O(\ln(\omega r))$ en el punto de colocación. Para obtener el Valor Principal de Cauchy de la integral sobre el elemento no es directamente aplicable la cuadratura de Gauss estándar, pero existen cuadraturas específicas para este tipo de integrando [30].

La solución fundamental se puede descomponer en dos partes, una singular $\mathbf{U}_{\text{sing}}^*$ y otra regular $\mathbf{U}_{\text{reg}}^*$, ambas dependientes de la frecuencia

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{U}_{\text{sing}}^* + \mathbf{U}_{\text{reg}}^* \quad (4.31)$$

A su vez, la parte singular puede descomponerse en dos términos

$$\mathbf{U}_{\text{sing}}^* = \mathbf{U}_{\text{sing,est}}^* + \mathbf{U}_{\text{sing,adic}}^* \quad (4.32)$$

donde $\mathbf{U}_{\text{sing,est}}^*$ es la parte singular de la solución fundamental estática, con una singularidad del orden $O(\ln r)$, y $\mathbf{U}_{\text{sing,adic}}^*$ es un término que depende de la frecuencia, con una singularidad del orden $O(\ln \omega)$.

Todos los términos pueden integrarse sobre el elemento empleando una cuadratura de Gauss estándar, excepto $\mathbf{U}_{\text{sing,est}}^*$ que requiere de una cuadratura logarítmica, cuya expresión en coordenadas naturales η es la siguiente

$$I = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) f(\eta) d\eta = \sum_{i=1}^N f(\eta_i) w_i \quad (4.33)$$

Las posiciones de los puntos de integración η_i y los factores de peso w_i pueden encontrarse en el Apéndice A del libro de Domínguez [30].

Evaluación de los términos diagonales de \mathbf{H} Las tracciones de la solución fundamental \mathbf{T}^* presentan una singularidad de orden $O(1/r)$ en el punto de colocación. Sin embargo, no será necesario evaluar explícitamente esta integral puesto que podrá calcularse indirectamente mediante consideraciones de sólido rígido sobre contornos cerrados: un sólido finito sometido a movimientos de sólido rígido, en condiciones estáticas, debe tener todas sus tracciones nulas en el contorno. Para ello, se descompone la matriz \mathbf{H} en una parte singular \mathbf{H}_S y otra regular \mathbf{H}_R dependiente de la frecuencia de excitación

$$\mathbf{H}^{ii} = \mathbf{H}_S^{ii} + \mathbf{H}_R^{ii} \quad (4.34)$$

La parte singular corresponde a las tracciones de la solución fundamental estática, por lo que será posible escribir para dicha parte singular o estática de \mathbf{H}

$$\mathbf{H}_S^{ii} = \mathbf{c}^i + \hat{\mathbf{H}}_S^{ii} = - \sum_{\text{nodos } j \neq i} \hat{\mathbf{H}}_S^{ij} \quad (4.35)$$

Consecuentemente para la matriz \mathbf{H} dinámica se obtiene

$$\mathbf{H}^{ii} = \mathbf{c}^i + \hat{\mathbf{H}}^{ii} = \mathbf{c}^i + \hat{\mathbf{H}}_S^{ii} + \hat{\mathbf{H}}_R^{ii} = \hat{\mathbf{H}}_R^{ii} - \sum_{\text{nodos } j \neq i} \hat{\mathbf{H}}_S^{ij} \quad (4.36)$$

El primer término de la ec. (4.36) es no singular y puede ser evaluado numéricamente mediante una cuadratura de Gauss. Análogamente, el segundo término contiene los elementos no diagonales de \mathbf{H}_S que tampoco presentan singularidades.

MEC para materiales viscoelásticos lineales

Aplicando el principio de correspondencia elástica-viscoelástica, la solución fundamental para una carga concentrada armónica aplicada en un punto cualquiera de un espacio viscoelástico puede obtenerse a partir de la correspondiente solución elástica sustituyendo las constantes elásticas reales, λ y μ , por las correspondientes constantes viscoelásticas complejas, $\lambda^*(\omega)$ y $\mu^*(\omega)$, definidas en la ec. (2.89).

Por tanto, todo el planteamiento del MEC desarrollado en este capítulo es directamente aplicable al caso viscoelástico lineal con solo incluir las propiedades de amortiguamiento del material a través de unas constantes complejas.

4.3 Formulación híbrida EC-EF

El problema de interacción de ondas guiadas en placas con defectos de geometría compleja se va a abordar en esta tesis doctoral mediante la definición de dos zonas, como se muestra en la Figura 4.2: (1) entorno del defecto, en el que se produce difracción de ondas localizada, que se discretiza con EC, y (2) campo lejano, representado como un cierto número N_a de placas semi-infinitas ($N_a=3$ en el ejemplo de la figura). Esta última zona se modela con EF mediante una superposición modal en cada placa semi-infinita, que da lugar a matrices de rigidez dinámicas \mathbf{S}_j ($j = 1, N_a$), como se muestra en la ec. (3.93). En ambas zonas se emplean elementos cuadráticos.

Esta formulación requiere acoplar las zonas de EC y EF, para lo cual existen en la literatura varias técnicas que se diferencian en el modo en que aplican compatibilidad y equilibrio en la interfase [14, 55, 39, 53]. En esta tesis, las mallas de EC y EF se definen con nodos coincidentes y elementos concordantes en la interfase, como se muestra en la Figura 4.2. Dado que se usan las mismas funciones de forma en

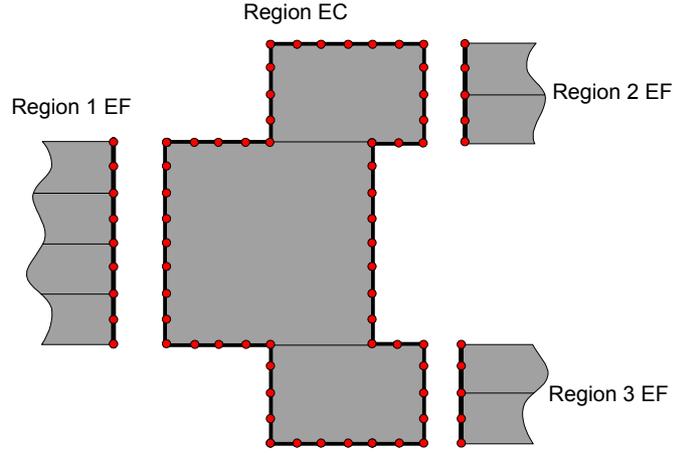


Figura 4.2. Modelo híbrido EC-EF, realizado con elementos cuadráticos, de la unión por solape de dos placas

ambas zonas, la compatibilidad se consigue igualando los desplazamientos de nudos coincidentes, lo cual para un elemento puede escribirse como

$$\mathbf{d}_{EF}^e = \mathbf{u}_{EC}^e \quad (4.37)$$

El equilibrio en la interfase relaciona las tracciones en los contornos de las zonas de EC y EF: $\mathbf{t}_{EF} + \mathbf{t}_{EC} = \mathbf{0}$. En esta tesis dicha condición se aplica de forma variacional, lo cual para un elemento e puede expresarse como

$$\int_{\Gamma^e} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{t}_{EF} + \mathbf{t}_{EC}) d\Gamma = \mathbf{0} \quad (4.38)$$

Esta ecuación debe verificarse para cualquier desplazamiento virtual $\delta \mathbf{u}$. Aproximando esta función con las mismas funciones de forma y nodos que se emplearon para los desplazamientos, ecs. (3.19) y (4.18), y teniendo en cuenta la definición de las fuerzas nodales consistentes, ec. (3.86), se obtiene finalmente

$$\mathbf{F}_{EF}^e + \mathbf{M}_1^e \mathbf{p}_{EC}^e = \mathbf{0} \quad (4.39)$$

donde \mathbf{M}_1^e es la matriz elemental que relaciona las fuerzas nodales consistentes de EF y las tracciones nodales de EC

$$\mathbf{M}_1^e = \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma = \frac{1}{\rho^e} \mathbf{M}^e \quad (4.40)$$

Para elementos lineales y cuadráticos se tienen las siguientes expresiones

$$\mathbf{M}_{1,lin}^e = \frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 2\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{1,cuad}^e = \frac{l}{30} \begin{bmatrix} 4\mathbf{I} & 2\mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ 2\mathbf{I} & 16\mathbf{I} & 2\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 2\mathbf{I} & 4\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de dimensión g .

Capítulo 5

Curvas de dispersión

5.1 Introducción

La propagación de ondas en un medio dispersivo se caracteriza porque la velocidad de fase (también la velocidad de grupo y el número de onda) depende de la frecuencia. Por citar un ejemplo, el vidrio constituye un medio dispersivo frente a la propagación de la luz, puesto que la velocidad de la luz en el vidrio es inversamente proporcional a la frecuencia en el rango de luz visible¹. La representación gráfica de esta variación se denomina curva de dispersión, cuya forma más habitual consiste en una representación bidimensional de la velocidad de fase frente a la frecuencia, aunque también es frecuente representar la velocidad de grupo frente a la frecuencia, y la frecuencia frente al número de onda.

Las guías de ondas elásticas o viscoelásticas son medios dispersivos, salvo algunas excepciones como la superficie de un semiespacio homogéneo (ondas superficiales de Rayleigh) o la interfase entre dos semiespacios (ondas de Stoneley y de Scholte). Dado que la propagación de energía elástica en estos medios tiene lugar en forma de multitud de modos distintos, todos ellos dispersivos, la guía de onda se caracteriza por una curva de dispersión que contiene una rama asociada a cada modo. La representación de estas ramas en el espacio tridimensional, $\text{Re}(\xi) - \text{Im}(\xi) - \Omega$, se denomina espectro de frecuencia, el cual puede considerarse como la “huella dactilar” de la guía de onda, puesto que determina su respuesta dinámica y contiene información acerca de la geometría y de las propiedades de los materiales que la componen.

Desde el punto de vista de las técnicas de ensayo no destructivo, el espectro de frecuencia y las curvas de dispersión son de vital importancia para seleccionar modos y rangos de frecuencia apropiados (p. ej., usando un criterio de mínima atenuación

¹Por esta causa, un rayo de luz blanca se separa en los diversos colores espectrales (ondas electromagnéticas de distinta frecuencia que lo componen) al atravesar un prisma de vidrio, sufriendo el color violeta una refracción mayor que el color rojo de acuerdo con la ley de Snell.

con objeto de maximizar el alcance, o eligiendo un rango donde la dispersión modal sea mínima para reducir la distorsión de la forma del pulso). También contienen datos necesarios para la generación de modos aislados (p. ej., mediante la ley de Snell), para la identificación de modos, así como para la interpretación de resultados (p. ej., el cálculo de distancias a partir de medidas de tiempos de vuelo).

El procedimiento matemático para obtener las curvas de dispersión de una guía de onda consiste en calcular las raíces de su ecuación característica. Estas ecuaciones pueden plantearse de forma analítica, incluso en el caso general de placas laminadas, a través del determinante de una matriz que se construye con el Método de la Matriz de Transferencia (Thomson-Haskell) o el Método de la Matriz Global (Knopoff). Sin embargo, no es posible obtener las raíces con técnicas analíticas, salvo en la situación más sencilla de ondas SH guiadas en placas homogéneas; por consiguiente, será necesario recurrir a algoritmos numéricos. El tratamiento numérico se encuentra con problemas de estabilidad de los algoritmos de búsqueda de raíces, de manera que ni en el caso más simple de localizar raíces reales está garantizada la convergencia. Las búsquedas no son completamente automáticas porque los algoritmos pueden saltarse raíces. Las placas no homogéneas constituidas por capas gruesas de materiales diferentes resultan un caso difícil de resolver. Por último, las dificultades se acentúan al tratar de localizar raíces complejas, asociadas a modos evanescentes (los cuales existen tanto en placas elásticas como viscoelásticas).

En este capítulo se aborda el cálculo de curvas de dispersión mediante la aplicación de la formulación de EF presentada anteriormente, Capítulo 3. La discretización de la placa transforma la ecuación característica inicial en un problema de autovalores cuadrático, fácilmente expresable como uno lineal para el cual existen algoritmos de resolución muy robustos. La solución de dicho sistema representa una aproximación del espectro de frecuencia y de las curvas de dispersión, así como de la estructura de los desplazamientos de cada modo en la sección transversal.

5.2 Cálculo de curvas de dispersión

La formulación semi-analítica de EF permite calcular de forma aproximada espectros de frecuencia y curvas de dispersión de ondas guiadas en placas laminadas elásticas y viscoelásticas de una manera sencilla y general resolviendo el problema de autovalores formulado en la ec. (3.50). Hay dos maneras principales de obtener curvas de dispersión:

- *Barrido en frecuencia:* se resuelve el problema de autovalores para una frecuencia fija, ecs. (3.53) y (3.57), lo que equivale a obtener la intersección de las curvas de dispersión con un plano $\omega = \text{const} \in \mathbb{R}$. El resultado, en ausencia de amortiguamiento, son autovalores reales, puramente imaginarios y complejos, los cuales corresponden a los números de onda de los diferentes modos guiados

(reales y evanescentes, respectivamente). En el caso de materiales viscoelásticos, todos los autovalores obtenidos son complejos, indicando que todos los modos sufren atenuación. Las curvas de dispersión se obtienen repitiendo este proceso para muchas frecuencias.

- *Barrido en número de onda*: se resuelve el problema de autovalores para un valor fijo del número de onda, ec. (3.52), lo cual equivale a obtener la intersección de las curvas de dispersión con una línea $k = \text{const} \in \mathbb{C}$. El resultado son autovalores reales, puramente imaginarios y complejos, de los cuales sólo tienen sentido físico los reales puesto que corresponden a valores de la frecuencia. Un autovalor complejo o imaginario revela que el modo correspondiente no puede presentar el número de onda considerado para ninguna frecuencia. Las curvas de dispersión se obtienen repitiendo este proceso para muchos números de onda. Este procedimiento sólo es útil para calcular autovalores reales o imaginarios puros, lo cual limita su uso a placas sin amortiguamiento.

Ambas estrategias se han aplicado en esta tesis. Para la resolución de los problemas de autovalores se han empleado subrutinas de la librería IMSL [59].

5.2.1 Frecuencias de corte

Las frecuencias de corte se pueden obtener fácilmente teniendo en cuenta que por definición son aquellas frecuencias para las cuales los modos no se propagan ($k=0$). Sustituyendo este valor del número de onda en la ec. (3.52), se obtiene un problema lineal de autovalores en ω^2

$$(\mathbf{G} - \omega^2 \mathbf{M}) \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{0} \quad (5.1)$$

Los autovalores de este problema son las frecuencias de corte de cada modo, y los autovectores la estructura de dichos modos. Ambas matrices son simétricas y, en ausencia de amortiguamiento, también reales, por lo que todos los autovalores ω^2 son reales. En presencia de amortiguamiento la única solución real es la trivial, indicando que sólo los modos fundamentales pueden presentar número de onda nulo.

5.2.2 Velocidades de fase y de grupo

La velocidad de fase de un modo real cualquiera m a una frecuencia dada ω se obtiene a partir del número de onda $k^{(m)}$ como

$$c^{(m)} = \frac{\omega}{k^{(m)}} \quad (5.2)$$

La definición de la velocidad de grupo para los modos reales es la siguiente

$$c_{gr} = \frac{d\omega}{dk} \quad (5.3)$$

El cálculo de la derivada del número de onda respecto de la frecuencia se obtiene derivando de forma implícita la ecuación del problema de autovalores de EF, ec. (3.50), respecto a la frecuencia

$$\left(2k\frac{dk}{d\omega}\mathbf{A} + i\frac{dk}{d\omega}\mathbf{B} - 2\omega\mathbf{M}\right)\mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (5.4)$$

Despejando

$$\frac{1}{c_{gr}} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{2\omega\mathbf{d}^T\mathbf{M}\mathbf{d}}{\mathbf{d}^T(2k\mathbf{A} + i\mathbf{B})\mathbf{d}} \quad (5.5)$$

Particularizando la expresión anterior para el modo m , se tiene

$$c_{gr}^{(m)} = \frac{\phi^{(m)T}(2k^{(m)}\mathbf{A} + i\mathbf{B})\phi^{(m)}}{2\omega\phi^{(m)T}\mathbf{M}\phi^{(m)}} \quad (5.6)$$

5.3 Ondas SH guiadas en una placa homogénea e isotrópica

Para llevar a cabo los cálculos numéricos de este caso se ha empleado una placa de espesor $2h=2\text{ mm}$ de un material elástico cuyas propiedades son $\rho=1\text{ kg/dm}^3$ y $c_T=1/\sqrt{3}\text{ km/s}$. Mediante un barrido en el número de onda se han obtenido los tramos del espectro de frecuencia contenidos en los planos $\text{Re}(\xi) - \Omega$ (correspondientes a modos reales) para valores $\text{Re}(\xi) \leq 20$, e $\text{Im}(\xi) - \Omega$ (correspondientes a modos evanescentes) para valores $\text{Im}(\xi) \leq 20$. Los resultados de la formulación semi-analítica de EF obtenidos con tres mallas distintas, con un número de elementos progresivamente creciente por un factor de dos, se representan en las Figuras 5.1 hasta 5.3, donde se muestran también las curvas analíticas para comparar. Las ramas analíticas se dibujan con línea continua delgada, los resultados de EF para elementos lineales con círculos, y los resultados numéricos obtenidos con elementos cuadráticos con aspás \times . En cada figura los resultados numéricos mostrados corresponden a mallas de elementos lineales y cuadráticos con el mismo número de grados de libertad.

5.3.1 Criterio de mallado

Como ya se indicó en el Capítulo 3, el MEF proporciona una aproximación del espectro de frecuencia de las ondas guiadas en la placa, que además se caracteriza por minimizar el error energético cometido. Sin embargo, no se dispone de información cuantitativa sobre el grado de precisión de los resultados obtenidos al emplear una cierta discretización, ni sobre el tamaño de elemento requerido para obtener una aproximación de las curvas de dispersión con un error pequeño en un rango de frecuencias determinado.

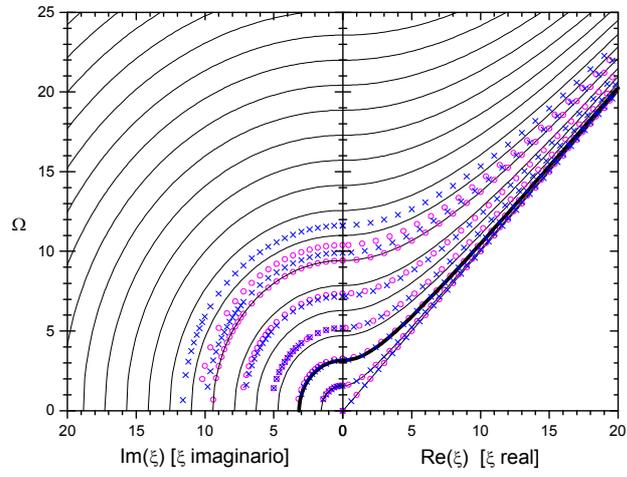


Figura 5.1. Espectro de frecuencia de ondas SH guiadas obtenido con 6 elementos lineales y 3 elementos cuadráticos

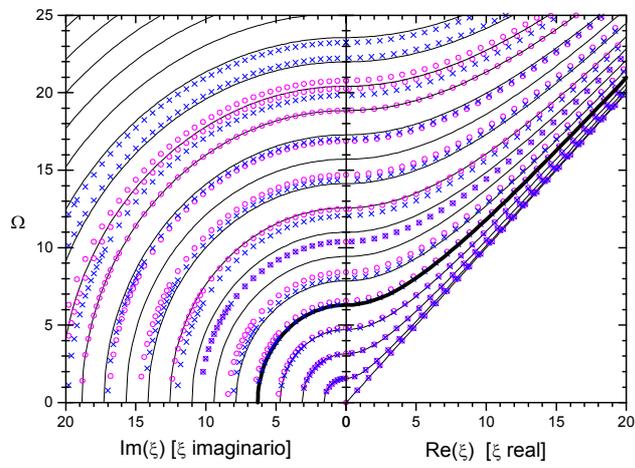


Figura 5.2. Espectro de frecuencia de ondas SH guiadas obtenido con 12 elementos lineales y 6 elementos cuadráticos

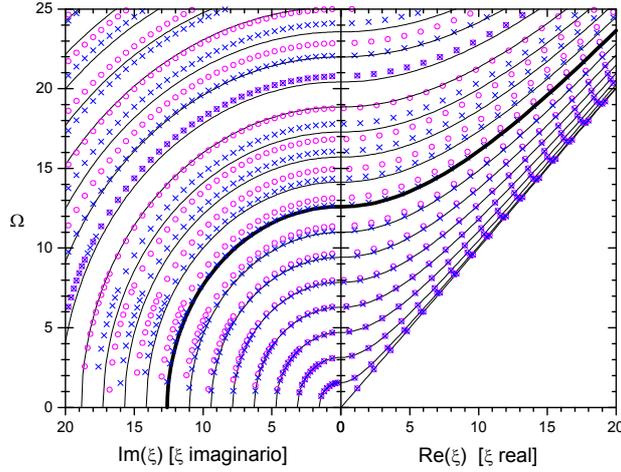


Figura 5.3. Espectro de frecuencia de ondas SH guiadas obtenido con 24 elementos lineales y 12 elementos cuadráticos

Para definir los límites de validez de los resultados, en primer lugar se lleva a cabo un análisis del error que se comete al emplear la matriz de rigidez de EF del elemento lineal en lugar de la matriz de rigidez exacta para una placa infinita y homogénea de espesor $d = 2h$ en condiciones de deformación antiplana.

La matriz de rigidez analítica de una placa infinita se define como la que relaciona las tensiones en las superficies superior e inferior de la placa con los desplazamientos en dichas superficies

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{yz}(-h) \\ \hat{\sigma}_{yz}(+h) \end{pmatrix} = \mathbf{K}_{ex} \begin{pmatrix} \hat{u}_z(-h) \\ \hat{u}_z(+h) \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Teniendo en cuenta las expresiones analíticas de los desplazamientos y tensiones de las ondas SH guiadas, ecs. (2.19) a (2.21), se obtiene

$$\mathbf{K}_{ex} = \mu q \begin{bmatrix} \cot(2hq) & -\csc(2hq) \\ -\csc(2hq) & \cot(2hq) \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

donde q , h y μ fueron definidos en el Capítulo 2. Esta matriz también incluye los términos de inercia.

Si se discretiza la placa con un único elemento lineal de tamaño $l = 2h$, la matriz de rigidez de EF viene dada por la ec. (3.50).

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}_{EF} \mathbf{d}, \quad \mathbf{K}_{EF} = k^2 \mathbf{A} + ik \mathbf{B} + \mathbf{G} - \omega^2 \mathbf{M} \quad (5.9)$$

Después de unas sencillas operaciones, se puede reescribir \mathbf{K}_{EF} como

$$\mathbf{K}_{EF} = -\frac{\mu q^2 h}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{\mu}{2h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Se observa que tanto \mathbf{K}_{ex} como \mathbf{K}_{EF} dependen de una única variable: q . Empleando las variables adimensionales ξ , Ω y $\bar{q} = ql/2 = \sqrt{\Omega^2 - \xi^2}$, ambas pueden reescribirse como

$$\mathbf{K}_{ex}(\bar{q}) = \frac{\mu}{h} \bar{q} \begin{bmatrix} \cot(2\bar{q}) & -\csc(2\bar{q}) \\ -\csc(2\bar{q}) & \cot(2\bar{q}) \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{K}_{EF}(\bar{q}) = \frac{\mu}{h} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{2\bar{q}^2}{3} & -\frac{1}{2} - \frac{\bar{q}^2}{3} \\ -\frac{1}{2} - \frac{\bar{q}^2}{3} & \frac{1}{2} - \frac{2\bar{q}^2}{3} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Haciendo un desarrollo en serie de Taylor de la matriz exacta con respecto a la variable \bar{q} en el punto $\bar{q} = 0$ se obtiene:

$$\mathbf{K}_{ex} = \frac{\mu}{h} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{2\bar{q}^2}{3} + O[\bar{q}^3] & -\frac{1}{2} - \frac{\bar{q}^2}{3} + O[\bar{q}^3] \\ -\frac{1}{2} - \frac{\bar{q}^2}{3} + O[\bar{q}^3] & \frac{1}{2} - \frac{2\bar{q}^2}{3} + O[\bar{q}^3] \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{EF} + \mathbf{O}[\bar{q}^3] \quad (5.13)$$

Por tanto, se puede afirmar que la matriz de EF coincide con el desarrollo en serie hasta potencias de orden dos de la matriz exacta.

Se define el error en la aproximación de EF como la máxima diferencia relativa en la matriz de rigidez elemental de EF con respecto a la matriz de rigidez analítica

$$\epsilon_K = \max(\epsilon_{11}, \epsilon_{12}) \quad (5.14)$$

donde ϵ_{ij} representa el error relativo en el elemento (i, j) de la matriz de rigidez, y que depende únicamente de la variable \bar{q} :

$$\epsilon_{ij}(\bar{q}) = 100 \cdot \left| \frac{K_{EF,ij}(\bar{q}) - K_{ex,ij}(\bar{q})}{K_{ex,ij}(\bar{q})} \right| \quad (5.15)$$

En la Figura 5.4 se representan los errores ϵ_{11} y ϵ_{12} en función de \bar{q} , los cuales muestran una variación monotónica y creciente con \bar{q} , y tienen asíntotas verticales en $\pi/4$ y $\pi/2$ respectivamente. Es fácil comprobar que $\epsilon_K = \epsilon_{11} \geq \epsilon_{12}$, $\forall \bar{q}$.

Las isocurvas de error son superficies definidas por la expresión $\bar{q} = \alpha$, que constituyen la frontera de regiones de error acotado (cuya expresión es $\bar{q} \leq \alpha$). En concreto, para un error del 5% se obtiene que $\alpha = 0.525$.

Para una discretización uniforme de la placa con N elementos lineales iguales de tamaño $l = 2h/N$, la región de error acotado en la matriz de rigidez elemental, tiene la siguiente expresión en el espacio ξ - Ω :

$$\bar{q} = qh/N = \frac{1}{N} \sqrt{\Omega^2 - \xi^2} \leq \alpha \Rightarrow \Omega^2 - \xi^2 \leq (N\alpha)^2 \quad (5.16)$$

Para números de onda imaginarios, se trata de un círculo de radio $N\alpha$, y para números de onda reales es una región limitada superiormente por una parábola. Esta región contiene el origen, donde el error es nulo, pero no es cerrada.

Merece la pena realizar las siguientes observaciones:

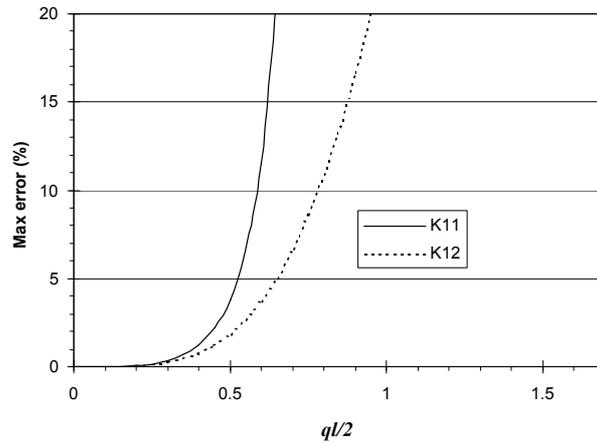


Figura 5.4. Error en la matriz de rigidez elemental de EF. Caso antiplano.

1. Las isolíneas de error son paralelas a las curvas de dispersión analíticas. Este hecho explica por qué también las curvas de dispersión aproximadas son paralelas a las analíticas.
2. Las mallas de EF son más rígidas que la placa real, lo cual explica el desplazamiento hacia frecuencias más altas observado en las curvas de dispersión numéricas respecto a las curvas analíticas.

En las Figuras 5.1 hasta 5.3 se han dibujado con línea gruesa continua las isocurvas de error para un valor del 5%. Puede observarse que en la región bajo dichas líneas no sólo están bien representadas las matrices de rigidez elementales (con un error inferior al 5%), si no también las curvas de dispersión (que son los autovalores de la matriz de rigidez global). Además, se observa que las curvas de dispersión calculadas con n elementos cuadráticos son válidas en una región algo más amplia que las calculadas con $2n$ elementos lineales. Por tanto, para el mismo número de grados de libertad, los elementos cuadráticos proporcionan unas curvas de dispersión más precisas que los elementos lineales.

A partir del análisis del error en la matriz de rigidez elemental del problema antiplano, se ha formulado el siguiente criterio de mallado

$$\frac{\lambda_T}{l} > \beta \quad (5.17)$$

donde l es el tamaño de elemento, $\lambda_T = 2\pi c_T/\omega$ es la longitud de onda de las ondas transversales a la frecuencia ω , $\beta = 6$ para elementos lineales y $\beta = 3$ para elementos cuadráticos. Este criterio tiene una clara interpretación física: para conseguir

curvas de dispersión de una precisión adecuada mediante una malla de EF, es necesario emplear más de β elementos por longitud de onda transversal. El criterio de mallado tiene una segunda condición que se aplica para números de onda complejos o imaginarios puros, que puede escribirse como: $\text{Im}(k)l < 1$.

Desde el punto de vista de aplicación práctica, el criterio de mallado permite resolver dos cuestiones

- Determinar el tamaño de elemento l que produce resultados precisos para frecuencias inferiores a una dada ω_{\max} : $l < \frac{2\pi c_T}{\beta \omega_{\max}}$
- Determinar la máxima frecuencia para la cual una malla dada, con tamaño de elemento l , produce resultados precisos: $\omega < \frac{2\pi c_T}{\beta l}$

Un problema de autovalores similar al descrito para ondas guiadas se obtiene al resolver problemas de dinámica estructural con MEF (análisis modal-espectral). En estas situaciones se observa que las frecuencias naturales bajas se calculan con mayor precisión que las altas. La precisión de las frecuencias naturales calculadas con EF está relacionada con la capacidad de la malla para reproducir adecuadamente los modos naturales de vibración asociados. De hecho, la progresiva pérdida de precisión para las frecuencias altas es debida a que los modos correspondientes son cada vez más complejos, es decir, contienen más picos y valles, por lo cual se requiere un mayor número de elementos para reproducirlos adecuadamente. Las mallas de EF de una estructura son más rígidas que la estructura real, por lo que numéricamente los valores de las frecuencias naturales obtenidos son más altos que los exactos. Este mismo comportamiento del MEF se puede apreciar en los resultados del cálculo del espectro de frecuencia de ondas SH guiadas en placas. El criterio de mallado propuesto en la ec. (5.17) coincide con las reglas de buena práctica que se emplean al resolver problemas de dinámica de estructuras con EF.

5.3.2 Comparación de la estructura modal en algunos puntos

La estructura de los desplazamientos a través del espesor para los cuatro primeros modos SH guiados se muestra en la Figura 5.5, donde se representan los resultados de EF con puntos y los resultados analíticos con líneas. Se han empleado 10 elementos cuadráticos para obtener los resultados de EF.

5.4 Ondas de Lamb en una placa homogénea e isotrópica

Las curvas de dispersión para ondas guiadas en placas homogéneas en condiciones de deformación plana (ondas de Lamb) fueron calculadas por Mindlin y otros autores en los 50 (ver [110, 4, 51, 40]) extrayendo numéricamente las raíces de la ecuación analítica de Rayleigh-Lamb, ecs. (2.59) y (2.60). Aunque las curvas de dispersión

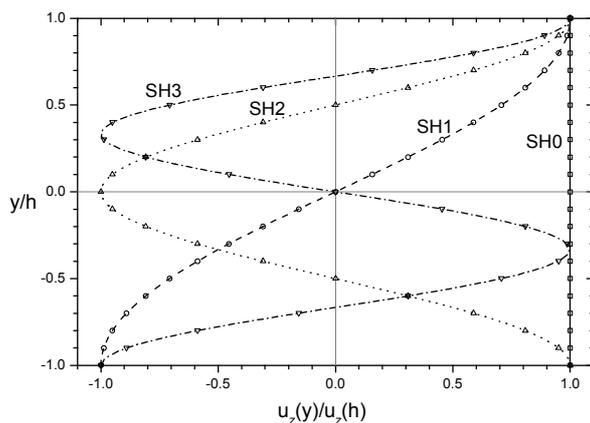


Figura 5.5. Estructura modal de los cuatro primeros modos SH guiados: comparación entre MEF y resultados analíticos.

adimensionales sólo dependen del coeficiente de Poisson, el cálculo numérico requiere definir completamente el material y las dimensiones de la placa. Se utiliza una placa de espesor $2h=2\text{ mm}$ con coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$, densidad $\rho=1\text{ kg/dm}^3$, velocidad de ondas longitudinales $c_L=1\text{ km/s}$ y velocidad de ondas transversales $c_T=1/\sqrt{3}\text{ km/s}$.

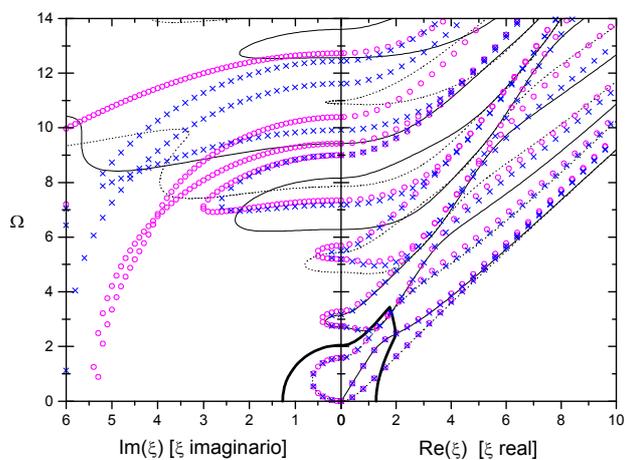


Figura 5.6. Espectro de frecuencia de ondas de Lamb obtenido con 6 elementos lineales y 3 elementos cuadráticos

Se ha realizado un barrido en el número de onda con valores reales ($\text{Re}(\xi) \leq 10$) e imaginarios puros ($\text{Im}(\xi) \leq 6$) para obtener los tramos del espectro de frecuencia contenidos en los planos $\text{Re}(\xi) - \Omega$ e $\text{Im}(\xi) - \Omega$. Los resultados numéricos obtenidos

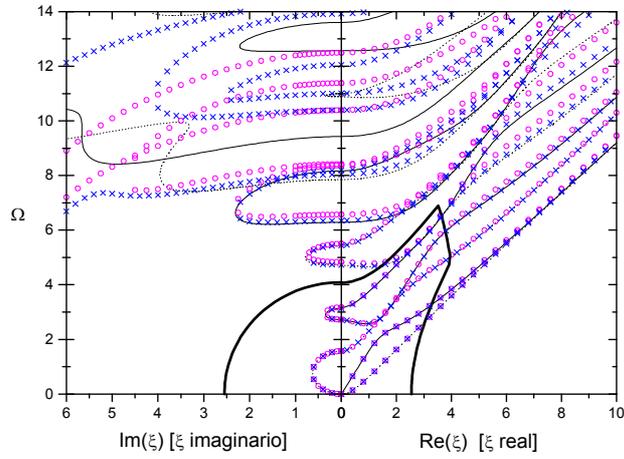


Figura 5.7. Espectro de frecuencia de ondas de Lamb obtenido con 12 elementos lineales y 6 elementos cuadráticos

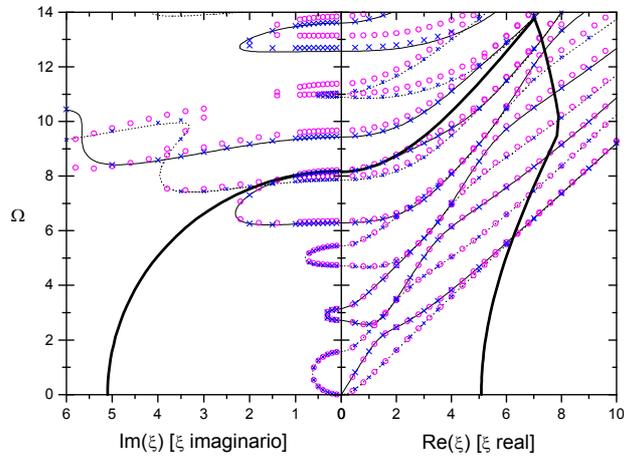


Figura 5.8. Espectro de frecuencia de ondas de Lamb obtenido con 24 elementos lineales y 12 elementos cuadráticos

con tres mallas distintas, con un número de elementos progresivamente creciente por un factor de dos, se representan en las Figuras 5.6 hasta 5.8, donde se muestran también las curvas de dispersión “exactas” para comparar (entendiendo por “exactas” las obtenidas calculando numéricamente las raíces de la ecuación analítica de Rayleigh-Lamb). Las ramas correspondientes a modos simétricos se dibujan con línea continua delgada, las correspondientes a modos antisimétricos con una línea delgada de puntos, los resultados de EF para elementos lineales con círculos, y los resultados de elementos cuadráticos con aspás \times . En cada figura se representan los resultados numéricos obtenidos con mallas de elementos lineales y cuadráticos con el mismo número de grados de libertad.

5.4.1 Criterio de mallado

Es necesario definir los límites de validez de los resultados numéricos obtenidos con esta formulación. Para ello, se ha analizado el error que se comete al emplear la matriz de rigidez de EF del elemento lineal en lugar de la matriz de rigidez exacta para una placa infinita y homogénea de espesor l en condiciones de deformación plana. El error se mide como el máximo de los errores cometidos entre todos los elementos de la matriz de rigidez. La matriz de rigidez exacta se ha obtenido a partir de las expresiones analíticas de los desplazamientos y tensiones de las ondas de Lamb, ecs. (2.44) a (2.55). Empleando el programa Mathematica 3.0 se ha determinado la región del espacio $\text{Re}(\xi)\text{-Im}(\xi)\text{-}\Omega$ donde el máximo error relativo en la matriz de rigidez elemental de EF con respecto a la matriz de rigidez analítica era inferior al 5%. Se trata de un volumen cerrado que contiene al origen, donde el error es nulo.

La frontera de dicha región (isolínea de error) se ha dibujado con línea continua gruesa en las Figuras 5.6 hasta 5.8. Puede comprobarse que en el interior de esa región la formulación de EF proporciona unas curvas de dispersión aproximadas que prácticamente coinciden con las analíticas. Además, las mallas de elementos cuadráticos proporcionan una mayor precisión en los resultados que las de elementos lineales, a igualdad en el número de grados de libertad. Estas tendencias coinciden con las observadas en el caso antiplano.

Como conclusión de este análisis del error, se ha formulado un criterio de mallado para el caso de deformación plana similar al planteado en la ec. (5.17) para el problema antiplano

$$\frac{\lambda_T}{l} > \beta \quad (5.18)$$

donde $\beta = 10$ para elementos lineales y $\beta = 4$ para elementos cuadráticos. Para números de onda complejos existe una segunda condición: $\text{Abs}(k)l < 0.425$.

5.4.2 Comparación de la estructura modal en algunos puntos

En las Figuras 5.9 a 5.11 se muestran las estructuras de los desplazamientos a través del espesor de los tres primeros modos para varias frecuencias, representándose con puntos los resultados proporcionados por la formulación semi-analítica de EF y con líneas los analíticos. Se han utilizado mallas uniformes de elementos cuadráticos para obtener los resultados numéricos, con 8 elementos para las dos primeras frecuencias y 16 elementos para la frecuencia más alta.

5.5 Ondas de Lamb en una placa no homogénea

En la fabricación de algunos elementos estructurales aeroespaciales de titanio, como por ejemplo en la estructura de propulsión de la lanzadera espacial de la NASA, se emplea como método de fabricación la unión por difusión. La calidad de la unión es un aspecto que debe ser asegurado mediante alguna técnica de inspección no destructiva, entre las que se pueden usar las ondas de Lamb [96].

En este apartado se estudia una placa de titanio (Ti) obtenida mediante la unión por difusión de dos láminas iguales, que representa la configuración más sencilla posible. La zona delgada de unión puede representarse como una capa con propiedades diferentes a las del Ti. De esta manera, la calidad de la unión puede ser representada mediante la asignación de unas propiedades degradadas a dicha capa intermedia.

La formulación de EF se ha empleado para calcular el espectro de frecuencia de los modos de Lamb reales bajo dos condiciones de unión distintas:

1. unión perfecta, equivalente a una placa homogénea, para la cual las propiedades de la capa intermedia son las del Ti base,
2. unión de mala calidad, donde las propiedades de la capa intermedia son peores que las del Ti.

La geometría es simétrica respecto al plano medio, y las dimensiones son: espesor total $2h=2.01$ mm, espesor de la capa de unión 0.01 mm. Las propiedades del material empleadas son: para el titanio $\rho=4.46$ kg/dm³, $c_L=6.06$ km/s, $c_T=3.23$ km/s y para la capa de unión de mala calidad $\rho=2.2$ kg/dm³, $c_L=1.35$ km/s, $c_T=0.55$ km/s. Se emplea una malla no uniforme de 27 elementos cuadráticos, con un único elemento en la capa intermedia, 8 elementos de tamaño 0.1mm partiendo de cada una de las superficies exteriores, y dos grupos de 5 elementos a cada lado de la zona de unión para completar el espesor de la placa (manteniendo una relación de tamaños entre elementos adyacentes no superior a 1.5). Esta discretización, representada en la Figura 5.12, produce resultados adecuados para frecuencias adimensionales $\Omega = \omega h / (c_T)_{Ti} < 15.8$ según el criterio de mado.

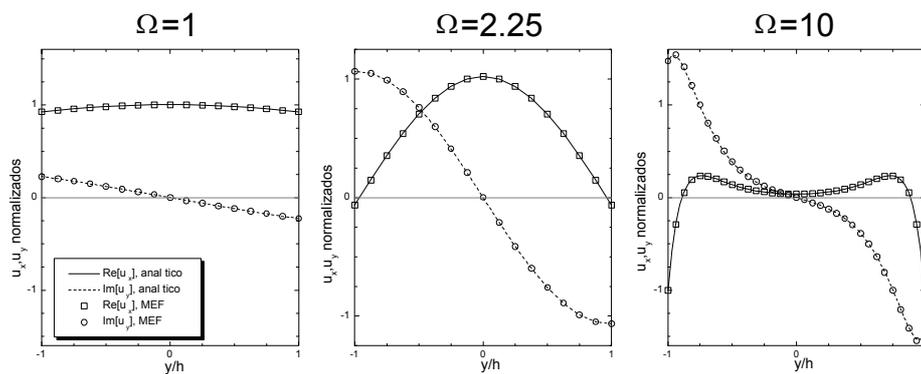


Figura 5.9. Estructura del modo S0: comparación entre el MEF y la expresión analítica

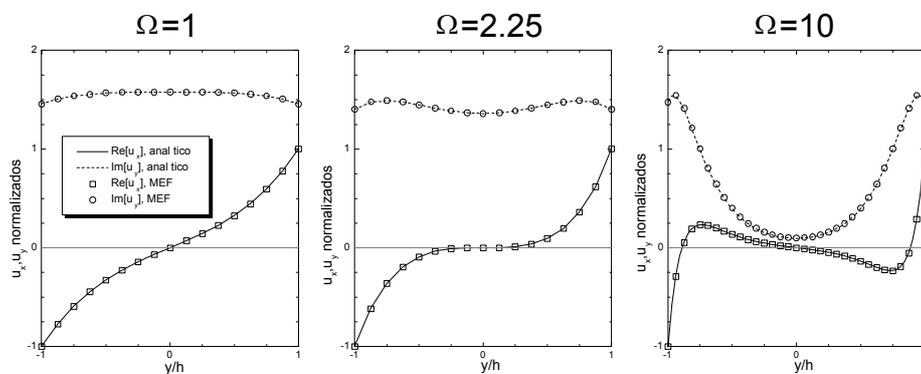


Figura 5.10. Estructura del modo A0: comparación entre el MEF y la expresión analítica

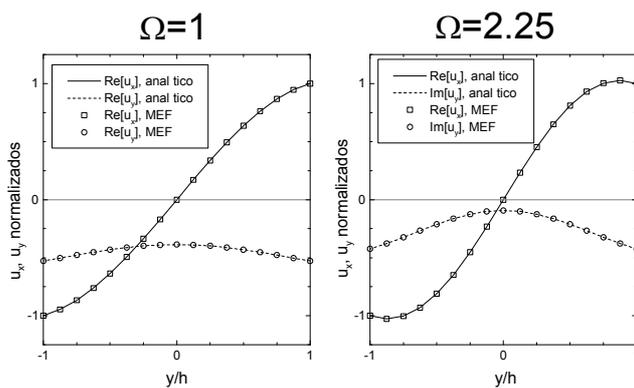


Figura 5.11. Estructura del modo A1: comparación entre el MEF y la expresión analítica

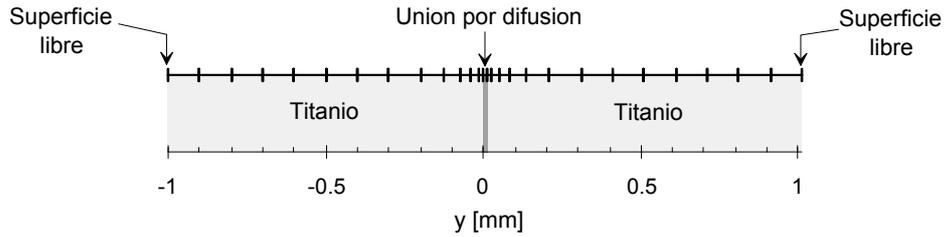


Figura 5.12. Discretización del espesor de una placa de titanio obtenida mediante unión por difusión de dos placas iguales

Los resultados numéricos obtenidos mediante un barrido en el número de onda se muestran en la Figura 5.13, donde además se incluyen los resultados “exactos” obtenidos para una placa homogénea de Ti. Puede observarse un desplazamiento hacia la derecha y hacia abajo de las ramas del espectro de frecuencia adimensional $\xi - \Omega$ para el caso de unión de mala calidad con respecto al caso de unión perfecta, lo cual implica una disminución de las velocidades de fase (puesto que $\bar{c} = c/c_T = \Omega/\xi$ es la pendiente de la recta secante) y por tanto una aparente disminución de la rigidez de la placa. Este efecto concuerda con observaciones experimentales y cálculos numéricos previos realizados por Rose y sus colaboradores [96].

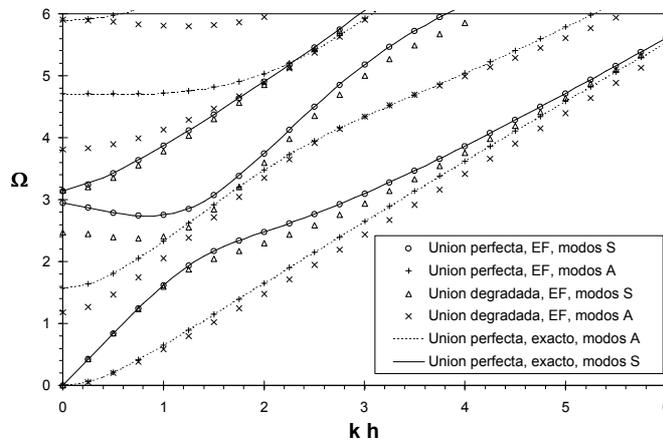


Figura 5.13. Espectro de frecuencia de los modos de Lamb reales en una placa de Titanio unida por difusión

Las ramas reales del espectro de frecuencia para la unión imperfecta se comparan en la Figura 5.14 con las obtenidos con Disperse [91, 80], un programa comercial para el cálculo de curvas de dispersión que usa el Método de la Matriz Global para plantear

las ecuaciones características de la placa de forma analítica y emplea un algoritmo de búsqueda de raíces para obtener numéricamente el espectro de frecuencia. La comparación de ambos resultados es muy buena.

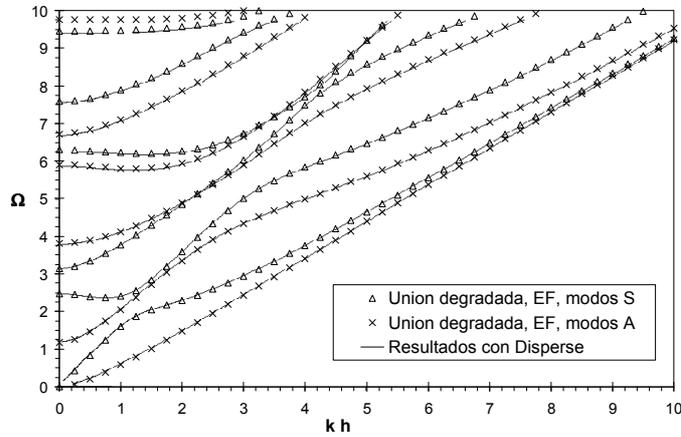


Figura 5.14. Espectro de frecuencia de los modos de Lamb reales en una placa de Titanio con unión de mala calidad. Comparación con Disperse.

5.6 Ondas SH guiadas en una placa viscoelástica homogénea

Las curvas de dispersión para ondas SH guiadas en placas viscoelásticas se han calculado mediante un barrido en frecuencia para distintos valores de la atenuación del material. El barrido en número de onda no es aplicable en este caso porque todos los modos son complejos. Las propiedades del material son $\rho=1 \text{ kg/dm}^3$, $c_T=1 \text{ km/s}$ y atenuación de las ondas transversales $\bar{\kappa}_T$. Los resultados de EF se comparan con los analíticos de la Sección 2.5.2 en la Figura 5.15, en la cual los resultados numéricos se señalan con puntos y los analíticos con líneas. Se utiliza una malla uniforme de 10 elemento cuadráticos.

En las Figuras 2.21 y 5.15 se representan las curvas de dispersión (velocidad de fase \bar{c} , de grupo \bar{c}_{gr} , atenuación por unidad de longitud α y atenuación por longitud de onda $\bar{\kappa}$, en función de la frecuencia Ω) de varias placas viscoelásticas con valores de atenuación comprendidos en el rango $\bar{\kappa}_T \in [0, \pi/2]$, mostrándose únicamente cinco curvas correspondientes a un incremento de atenuación $\Delta\bar{\kappa}_T = \pi/8$. Las curvas del caso elástico se representan con línea negra gruesa, y las viscoelásticas con línea gris fina (con un tono de gris más claro cuanto mayor es $\bar{\kappa}_T$). En el caso elástico, las ramas de atenuación no nula con forma de circunferencia mostradas corresponden a

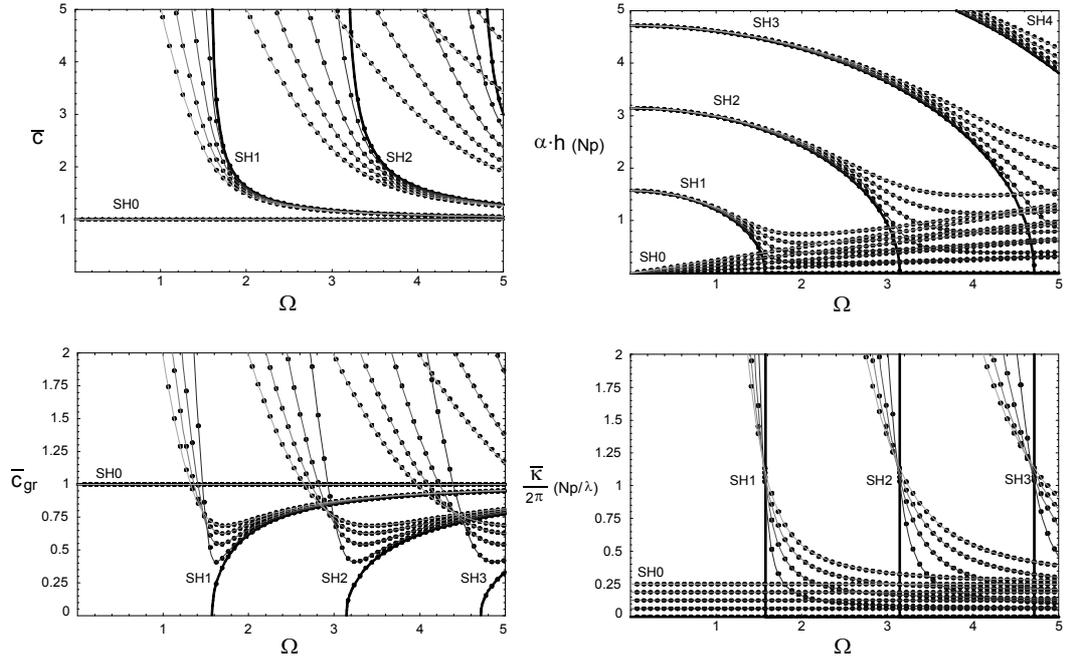


Figura 5.15. Ondas SH guiadas en una placa viscoelástica homogénea. Comparación de las curvas de dispersión de EF con los resultados analíticos para varios materiales distintos

modos evanescentes, los cuales aparecen para $\Omega < \Omega_n$ y se caracterizan por números de onda puramente imaginarios.

El estudio comparado de los resultados muestra que la aproximación de EF reproduce con gran precisión las curvas de dispersión viscoelásticas analíticas. Las estructuras modales obtenidas para las placas viscoelásticas coinciden con las correspondientes al caso elástico, lo cual reproduce exactamente el comportamiento de la solución analítica.

5.7 Ondas de Lamb en una placa viscoelástica homogénea

El material seleccionado para este estudio es el polietileno de alta densidad (HDPE) del tipo empleado en la fabricación de tuberías de plástico para conducción de agua y gas. Las velocidades de propagación y los valores de atenuación de ondas longitudinales y transversales fueron medidos por Chan y Cawley [20] mediante ensayos de propagación unidimensional de ondas. Estos autores también calcularon las curvas de dispersión de las ondas de Lamb en una placa homogénea de HDPE resolviendo

numericamente las ecuaciones de Rayleigh-Lamb, ecs. (2.114) y (2.115), y verificaron experimentalmente los valores de las velocidades de grupo y las atenuaciones modales en tres puntos seleccionados de las curvas de dispersión.

Las características del material son las siguientes: densidad $\rho=0.94 \text{ kg/dm}^3$, velocidades de onda $c_L=2.34 \text{ km/s}$ y $c_T=0.95 \text{ km/s}$, atenuaciones por longitud de onda $\bar{\kappa}_L=0.055 \text{ Np}/\lambda_L$ y $\bar{\kappa}_T=0.29 \text{ Np}/\lambda_T$. Para estudiar la influencia de la atenuación en las curvas de dispersión, se han considerado varios materiales ficticios que tienen los mismos valores de densidad y velocidades de onda que el HDPE, pero con los valores de atenuación multiplicados por un mismo factor p , $p\bar{\kappa}_L$ y $p\bar{\kappa}_T$. A estos materiales los designaremos como HDPE px ; con esta notación, el HDPE0x representa a un material elástico y HDPE1x representa al polietileno de alta densidad real. Todos estos materiales tienen la misma relación entre c_L^* y c_T^* , y por tanto el mismo coeficiente de Poisson ν y la misma velocidad adimensional de ondas de Rayleigh c_R/c_T

$$\frac{c_L^*}{c_T^*} = \frac{c_L}{c_T} = 2.46316 \Rightarrow \nu^* = \nu = 0.401 \Rightarrow \frac{c_R^*}{c_T^*} = \frac{c_R}{c_T} = 0.942$$

La atenuación es una función creciente con p . Sin embargo, dado que también la diferencia entre los factores de atenuación de ambas ondas es proporcional a p , para valores crecientes de p el aumento de la atenuación de las ondas transversales es siempre mayor a cualquier frecuencia que el correspondiente aumento de la atenuación de las ondas longitudinales.

Se han considerado seis valores del parámetro p : 0, 0.5, 1, 2, 4 y 8. Las curvas de dispersión con las velocidades de fase frente a la frecuencia se muestran en la Figura 5.16 para frecuencias $f \cdot d \leq 10 \text{ MHz} \cdot \text{mm}$. Las curvas con las atenuaciones modales frente a la frecuencia se representan en la Figura 5.17, excepto para $p=0$ puesto que en una placa elástica todos los modos reales tienen atenuación nula. Para aplicar la formulación semi-analítica de EF se ha discretizado el espesor de la placa con una malla uniforme de 44 elementos cuadráticos. En todas las gráficas se dibujan con línea continua las ramas correspondientes a modos simétricos y con línea discontinua las de modos antisimétricos. Las ramas trazadas con línea gruesa corresponden a modos cuya frecuencia de corte es dilatacional (es decir, producida por la resonancia de las ondas longitudinales en el espesor de la placa, ver ec. (2.63)) y las dibujadas con línea fina corresponden a modos cuya frecuencia de corte es equivoluminal (es decir, producida por la resonancia de las ondas transversales en el espesor de la placa, ver ec. (2.63)). En el rango de frecuencia considerado, Figura 5.16, existen ocho modos con frecuencia de corte dilatacional ($f \cdot d = nc_L/2 = 1.17n$), cuatro de ellos simétricos (S2, S5, S9, S12 en el caso elástico) y cuatro antisimétricos (A3, A7, A10 y A14 en el caso elástico). Con líneas horizontales de puntos y trazos se marcan como referencia las velocidades de las ondas longitudinales, transversales y de Rayleigh. En las figuras sólo se representan los tramos de las ramas en los cuales el modo tiene un comportamiento “casi-real”, con el siguiente criterio: su número

de onda tiene una parte imaginaria prácticamente nula, $Im(k^*) < 10^{-3}$, o mucho menor que la parte real, $Im(k^*) < 0.5Re(k^*)$.

Caso elástico:

- Todas las ramas convergen a la velocidad de las ondas transversales c_T para frecuencias altas, excepto los modos S0 y A0 que tienden a c_R .
- Cuando las ramas se aproximan a la velocidad de las ondas longitudinales c_L , tienden a formar una pequeña meseta antes de descender por debajo de dicha velocidad.
- Todas las ramas tienen un comportamiento monótono decreciente con la frecuencia.
- Las ramas del mismo tipo (S y A) nunca se cruzan. A este fenómeno se le denomina *repulsión modal* [60, 51].

Caso viscoelástico:

- Para frecuencias bajas, las curvas son prácticamente iguales a las del caso elástico. La explicación es sencilla: dado que la atenuación considerada es proporcional a la frecuencia, a frecuencias bajas la atenuación es prácticamente despreciable.
- Para frecuencias altas, no todas las ramas convergen a la velocidad de las ondas transversales; algunas tienden asintóticamente a la velocidad de las ondas longitudinales. Además, cuanto mayor es el amortiguamiento, mayor es el número de modos con tendencia asintótica hacia c_L .
- En algunos casos las ramas de modos del mismo tipo se cruzan. Por ejemplo, para el HDPE1x las ramas S3 y S4 se cruzan para $f \cdot d \simeq 3.1 \text{MHz} \cdot \text{mm}$. Sin embargo, aunque las curvas de dispersión bidimensionales se crucen, las ramas en el espacio tridimensional no se cortan en ningún punto. Lo que sucede es que las atenuaciones de las dos ramas en el punto de cruce aparente son muy distintas: una de las ramas está gobernada por la atenuación de las ondas transversales y otra por la de las ondas longitudinales. En la Figura 5.18 se muestra la representación tridimensional (velocidad de fase-atenuación-frecuencia) de las ramas S3 y S4 para frecuencias en torno a $f \cdot d = 3.1 \text{MHz} \cdot \text{mm}$, en la cual también se representan las proyecciones de ambas ramas en los tres planos coordenados. En dicha figura se aprecia claramente que las ramas no se cortan en el espacio pero sí en dos de sus proyecciones, una de las cuales es precisamente la curva de dispersión velocidad de fase-frecuencia. En la proyección horizontal (atenuación-frecuencia) las ramas no se cruzan.

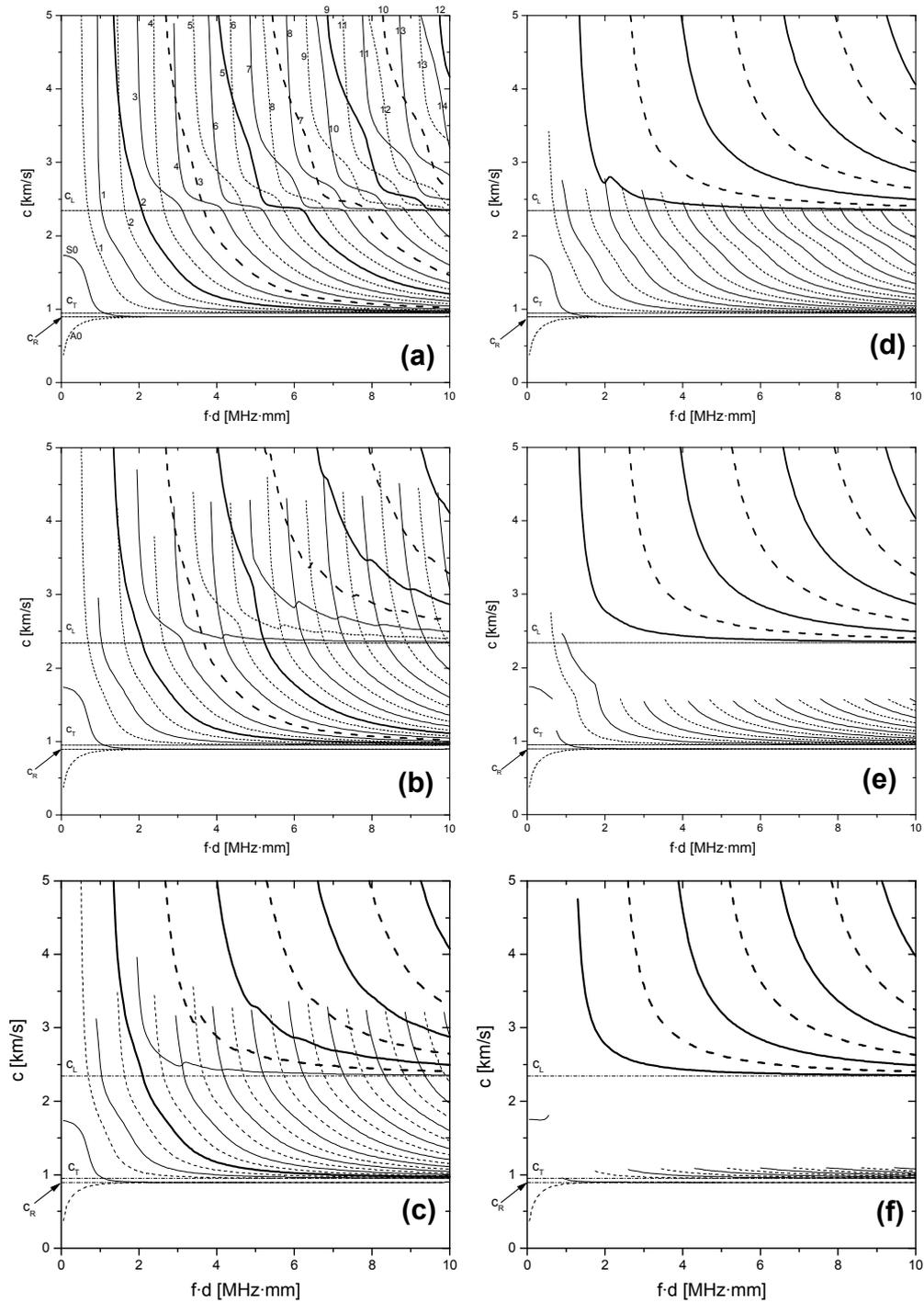


Figura 5.16. Curvas de dispersión velocidad de fase-frecuencia para ondas de Lamb en placas homogéneas de HDPEpx. (a) $p=0$, (b) $p=0.5$, (c) $p=1$, (d) $p=2$, (e) $p=4$ y (f) $p=8$.

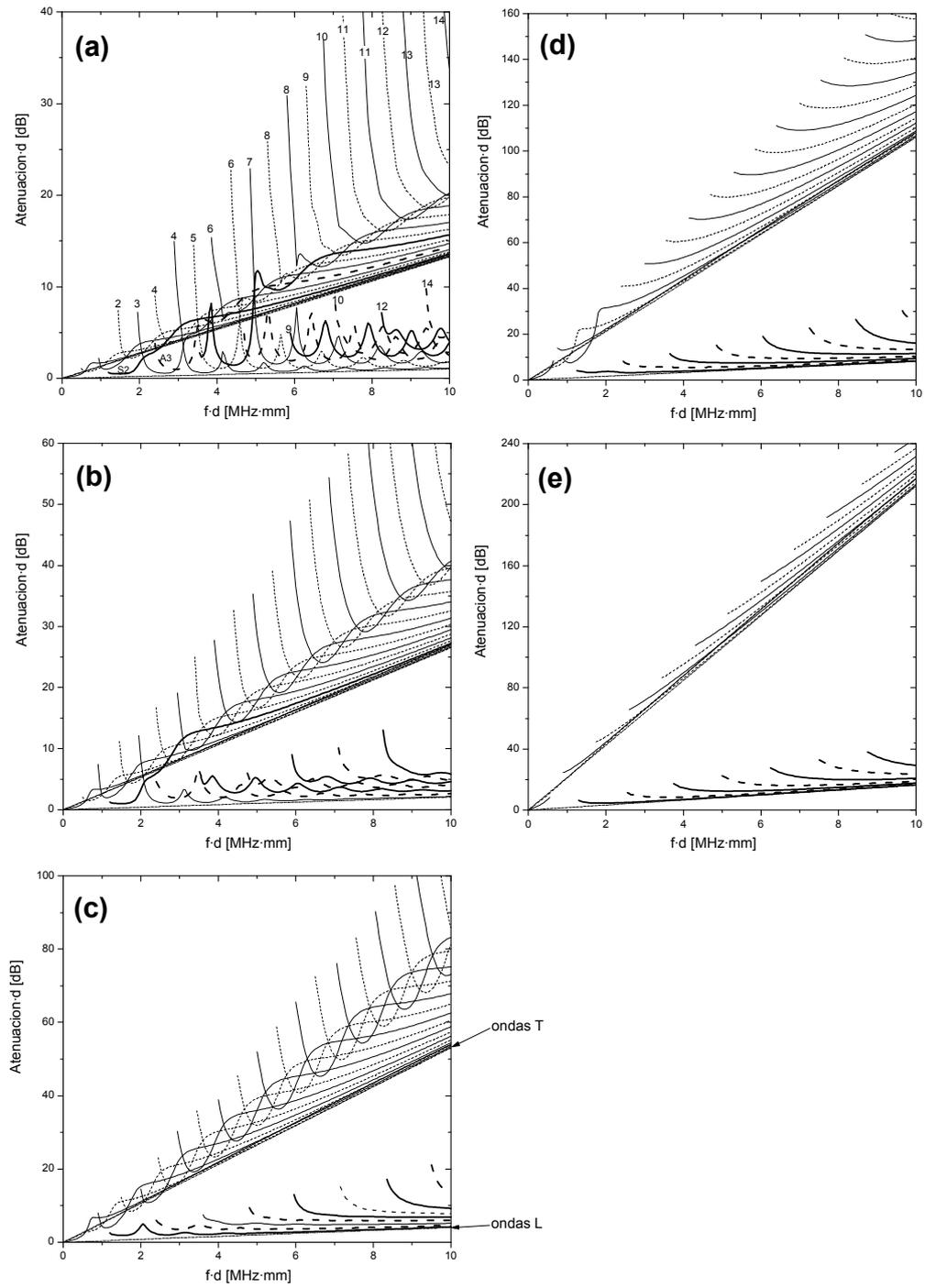


Figura 5.17. Curvas de dispersión atenuación-frecuencia para ondas de Lamb en placas homogéneas de HDPEpx. (a) $p=0.5$, (b) $p=1$, (c) $p=2$, (d) $p=4$ y (e) $p=8$.

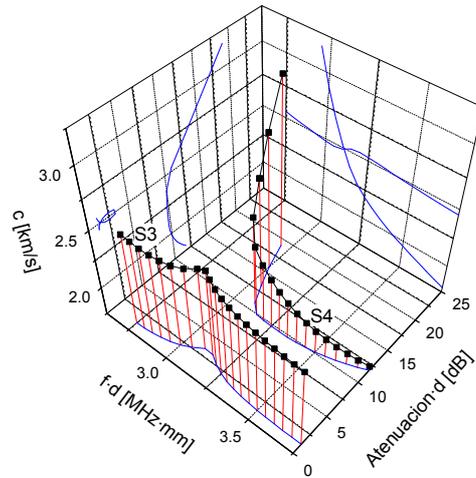


Figura 5.18. Placa de HDPE1x: representación tridimensional de las ramas S3 y S4 para frecuencias en el rango $f \cdot d \in [2.75, 3.75]$ MHz·mm.

- La velocidad de fase de algunos modos no varía de forma monótona decreciente con la frecuencia (p. ej, el modo S3 para el HDPE1x presenta un aumento de la velocidad de fase para $f \cdot d \simeq 3.1$ MHz·mm, alcanzando un máximo local y descendiendo de nuevo). Estos modos son justamente los que convergen hacia la velocidad de las ondas longitudinales, y el cambio en la tendencia decreciente sucede en el entorno de los puntos de intersección con ramas de la misma simetría.
- Para $p \geq 2$, hay una separación completa entre los modos con frecuencias de corte dilatacionales y los modos con frecuencia de corte equivolumentales. Todos los primeros tienden asintóticamente a la velocidad de las ondas P para frecuencias altas, y todos los segundos tienden hacia la velocidad de las ondas S. Parece como si el acoplamiento entre los dos pares de ondas parciales P y SV, cuya interferencia constructiva da lugar a los modos de Lamb (como se indicó en las ecs. (2.65) y (2.66) y la Figura 2.17), hubiera desaparecido. En la Figura 5.19 se muestra la comparación de las curvas de dispersión de la placa homogénea de material HDPE4x con las curvas de dispersión de dos placas de líquido viscoelástico, con velocidades de onda c_L^* y c_T^* respectivamente. Las ramas correspondientes a estas últimas están dibujadas con puntos circulares y cuadrados, respectivamente. Se observa que las curvas de la placa de líquido c_L^* prácticamente coinciden con las ramas de modos dilatacionales. Igualmente, las curvas de dispersión de la placa de líquido c_T^* prácticamente coinciden con las correspondientes a modos equivolumentales. Esto confirma que, para

atenuaciones elevadas, los modos P y S de la placa están virtualmente desacoplados. Las interferencias que dan lugar a los modos de Lamb sólo se producen entre pares de ondas del mismo tipo (P ó SV); consecuentemente, para cada tipo se obtienen resonancias transversales y estructuras modales similares a las descritas para ondas SH guiadas, ec. (2.35) y Figura 2.6. Esta separación no es completa para valores inferiores de p , donde existen modos con frecuencia de corte dilatacional que convergen hacia c_T (para HDPE0.5x sucede con los modos S2, A3 y S5, y para HDPE1x con S2), y modos con frecuencia de corte equivoluminal que convergen hacia c_L (para HDPE0.5x sucede con los modos S4, A6 y S7, y para HDPE1x sucede con S3). Esto sugiere que este fenómeno estará asociado a la atenuación relativamente más alta de las ondas transversales, la cual va reduciendo el acoplamiento entre las ondas longitudinales y transversales para valores crecientes de la frecuencia.

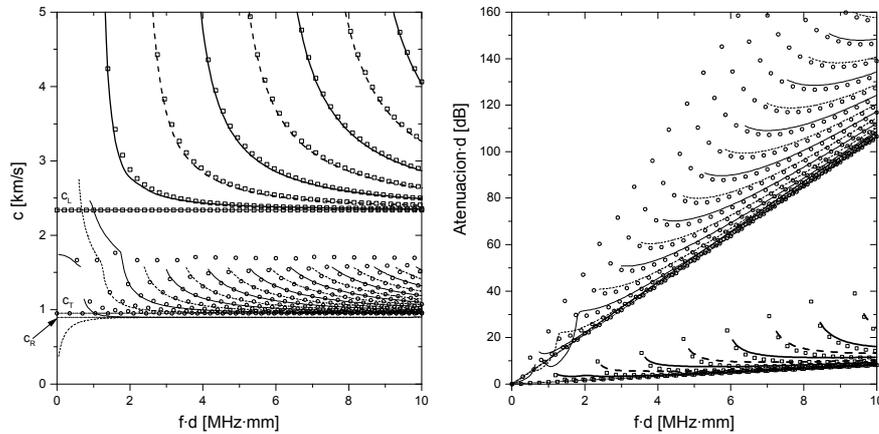


Figura 5.19. Comparación de las curvas de dispersión de ondas de Lamb en una placa homogénea de HDPE4x con las de ondas guiadas en dos placas de líquido viscoelástico de velocidades de onda iguales a c_L^* y c_T^* , respectivamente.

- Las diferencias entre el caso elástico y viscoelástico descritas en los puntos anteriores no se presentan para frecuencias bajas,
- Atenuación: en la Figura 5.20 se han dibujado las curvas de dispersión atenuación - frecuencia para una placa HDPE1x. La atenuación se presenta como la caída de amplitud en dB que sufre una onda tras recorrer una distancia igual al espesor. Los modos cuya velocidad de fase se aproxima asintóticamente a c_T tienen una atenuación que se acerca de continuo a la atenuación de las ondas transversales (T). Análogamente, aquellos modos cuya velocidad de fase tiende asintóticamente a c_L tienen una atenuación que converge hacia la atenuación

de las ondas longitudinales (L) para frecuencias altas. Como las atenuaciones se representan por unidad de longitud y no por longitud de onda, los valores de las atenuaciones de las ondas L y T crecen linealmente con la frecuencia

$$20 \log_{10} \left(e^{\bar{k}d/\lambda} \right) = 20 \frac{\bar{k}}{c} \log_{10}(e) f d$$

siendo sus pendientes 0.2042 y 2.6515, respectivamente. Las rectas de atenuación de las ondas L y T se muestran en la Figura 5.20 como líneas de puntos que pasan por el origen.

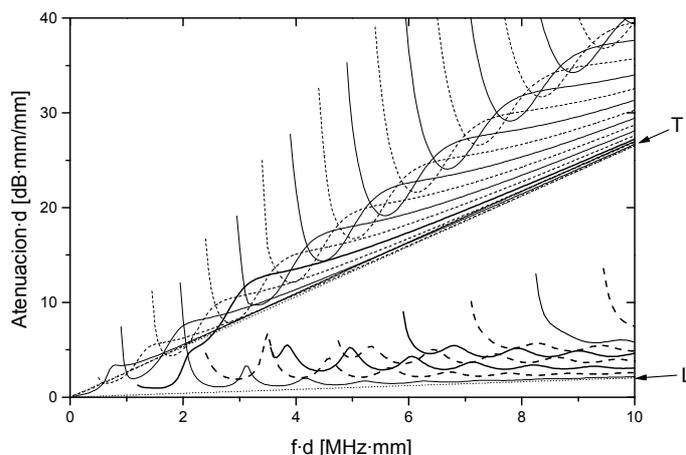


Figura 5.20. Curvas de dispersión atenuación-frecuencia para las ondas de Lamb en una placa homogénea de material HDPE1x.

5.8 Placa metálica con recubrimiento viscoelástico

Una de las técnicas más empleada habitualmente para proteger las estructuras metálicas (placas, tuberías) frente a la corrosión es la aplicación de recubrimientos sobre la superficie expuesta a la agresión del medio. Los materiales utilizados para tal fin (pinturas, resinas, mezclas bituminosas) presentan un comportamiento viscoelástico, lo cual produce la atenuación de las ondas guiadas. Por este motivo se hace necesario corregir o modificar las técnicas de END con ondas guiadas cuando se aplican a estas estructuras para conseguir mantener su eficacia y prestaciones de detección remota. Ello puede lograrse aprovechando la naturaleza multimodal de las ondas guiadas, gracias a la cual existe la posibilidad de utilizar aquellos modos particulares que se vean menos afectados por la presencia de estos recubrimientos. Las curvas

de dispersión atenuación-frecuencia para las ondas guiadas serán por tanto una información clave para seleccionar los modos con baja atenuación, los cuales permiten maximizar la distancia de inspección en estructuras con recubrimientos protectores.

La geometría estudiada consta de una placa de aluminio ($\rho=2.7\text{ kg/dm}^3$, velocidades de onda $c_L=6.35\text{ km/s}$, $c_T=3.13\text{ km/s}$ y $c_R=2.922\text{ km/s}$) de 1.55mm de espesor con un recubrimiento de resina epoxi (Stycast 2057/Cat 9, densidad $\rho=1.60\text{ kg/dm}^3$, velocidades de onda $c_L=2.96\text{ km/s}$, $c_T=1.45\text{ km/s}$ y $c_R=1.354\text{ km/s}$, atenuaciones por unidad de longitud $\alpha_L=0.0047\cdot\omega\text{ Np/mm}$ y $\alpha_T=0.0069\cdot\omega\text{ Np/mm}$, con ω en $\text{rad}/\mu\text{s}$) de 0.25mm de espesor, como se ilustra en la Figura 5.21. Para mostrar la influencia de la presencia de un recubrimiento de distinto material y de la atenuación del recubrimiento sobre las curvas de dispersión, se han resuelto tres casos diferentes: (1) placa sin recubrimiento, (2) placa con recubrimiento elástico (Epoxy0x), (3) placa con recubrimiento viscoelástico (Epoxy1x).

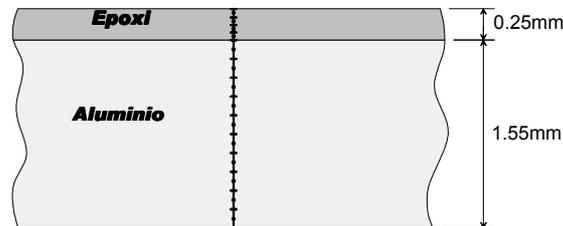


Figura 5.21. Malla de elementos cuadráticos empleada para calcular las curvas de dispersión de ondas de Lamb en una placa de aluminio con recubrimiento de epoxi

En el caso de placa con recubrimiento no existe simetría respecto al plano medio, por lo cual los modos dejarán de ser puramente simétricos (longitudinales) o antisimétricos (de flexión).

Para obtener las curvas de dispersión con la formulación de EF semi-analítica, se discretiza el espesor con elementos cuadráticos. Para cada material se utiliza una malla uniforme con un tamaño de elemento elegido de acuerdo con el criterio de mallado, existiendo por tanto un salto en el tamaño de elemento en la interfase aluminio-epoxi, como se muestra en la Figura 5.21.

5.8.1 Ondas SH guiadas

Las curvas de dispersión velocidad de fase-frecuencia para ondas SH guiadas en los tres casos considerados se muestran en la Figura 5.22. El número de elementos cuadráticos empleados para discretizar las capas de epoxi y aluminio han sido respectivamente 12 y 30. En las gráficas se incluyen como referencia dos líneas horizontales correspondientes a las velocidades de las ondas transversales en aluminio $c_{T,Al}$ y en epoxi $c_{T,Ep}$. Las curvas de dispersión atenuación-frecuencia para la placa con recubrimiento viscoelástico se representan en la Figura 5.23, mostrándose tanto

la atenuación en dB por metro (dB/m) como en Neper por longitud de onda (Np/λ). Se ha dibujado con línea de puntos la curva correspondiente a la atenuación de las ondas transversales en el epoxi, la cual tiene un valor constante al medirla en Np/λ y una variación lineal con la frecuencia al medirla en dB por unidad de longitud. En todas las gráficas, las ramas correspondientes a modos SHn se representan con línea gruesa si n es par, y con línea fina si n es impar.

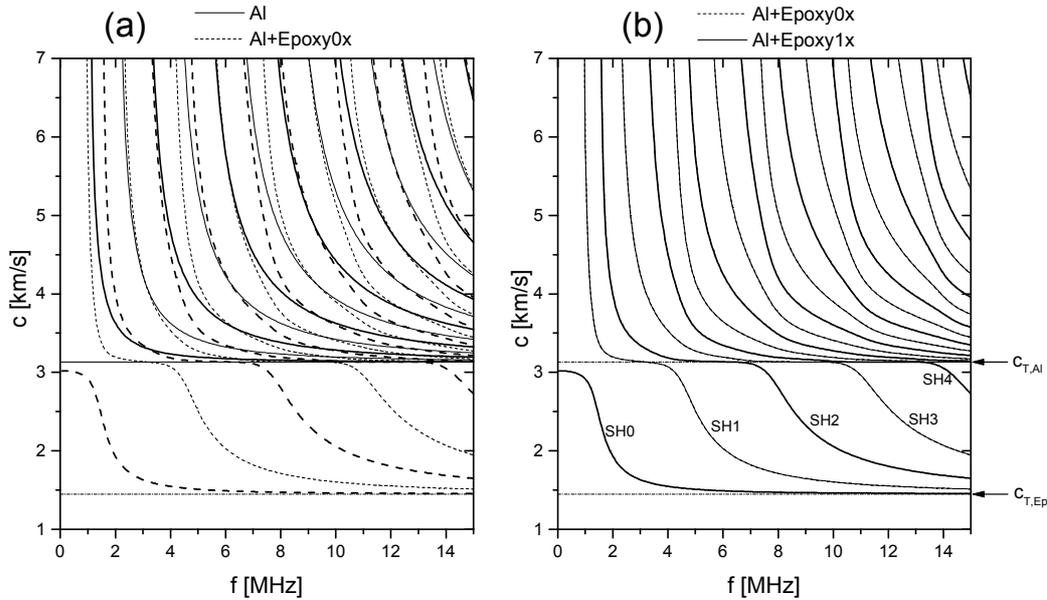


Figura 5.22. Curvas de dispersión $c - f$ para ondas SH guiadas en una placa de aluminio con recubrimiento de epoxi y sin él. (a) Comparación de los casos sin recubrimiento y con recubrimiento elástico (Epoxy0x). (b) Comparación de los casos con recubrimiento elástico (Epoxy0x) y con recubrimiento viscoelástico (Epoxy1x).

En el caso de placa sin recubrimiento ya se indicó que ninguna rama se cruza y que para frecuencias altas todos los modos convergen hacia la velocidad de las ondas transversales en el aluminio $c_{T,Al}$. En el caso de placa con recubrimiento, se observa que las ramas de los distintos modos tampoco se cruzan en ningún punto, incluso en el caso viscoelástico. Sin embargo se aprecia un cambio en el comportamiento de las ramas a frecuencias altas: todos los modos convergen hacia la velocidad de las ondas transversales en el epoxi $c_{T,Ep}$. Esta tendencia asintótica puede entenderse si tenemos en cuenta que a frecuencias altas la longitud de onda es pequeña en comparación con el espesor, y la placa con recubrimiento se asemeja a un estrato sobre un semiespacio. Esta geometría actúa como guía de ondas SH cuando el estrato es de menor rigidez que el semiespacio, permitiendo la existencia de ondas superficiales antiplanas denominadas ondas de Love [4] con sus desplazamientos concentrados en

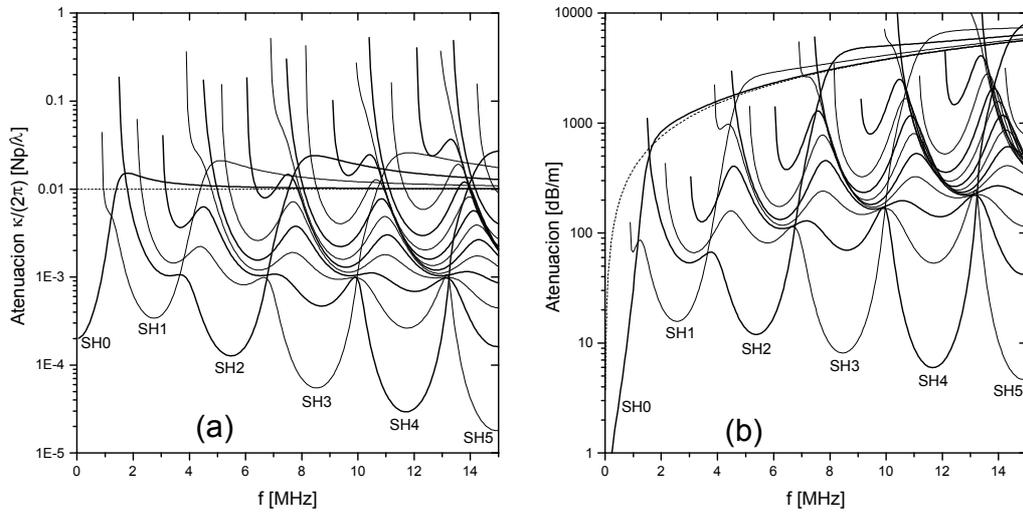


Figura 5.23. Curvas de dispersión atenuación– f para ondas SH guiadas en una placa de aluminio con recubrimiento de Epoxy1x. (a) Atenuación medida en dB/m. (b) Atenuación medida en Np/λ .

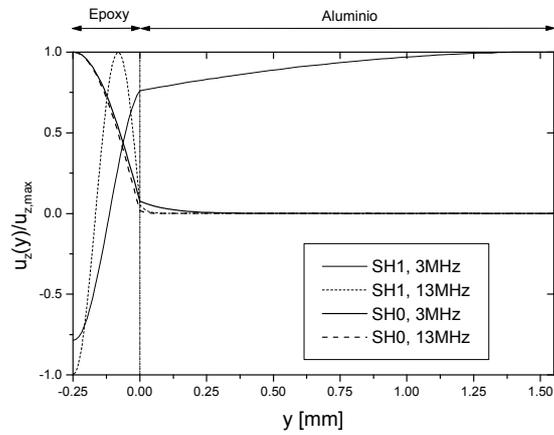


Figura 5.24. Estructura de los modos SH0 y SH1 guiados en la placa de aluminio con recubrimiento de epoxi.

el estrato y con amplitud decreciente con la profundidad en el semiespacio. Estas ondas, a diferencia de las superficiales de Rayleigh en el semiespacio, son dispersivas, y al aumentar la frecuencia también crece el número de modos de Love posibles (cada uno caracterizado por una frecuencia de corte).

La velocidad de fase de todos los modos (excepto el más bajo) muestra una tendencia inicial a aproximarse asintóticamente hacia la velocidad $c_{T,Al}$, donde presenta una meseta prácticamente horizontal ligeramente por encima de dicho valor en un rango de frecuencias amplio (tanto más amplio cuanto más alto es el modo). Sin embargo en todas las ramas aparece un punto de inflexión y un descenso por debajo de $c_{T,Al}$ para aproximarse asintóticamente hacia $c_{T,Ep}$.

En la Figura 5.22 (b) se observa que la incorporación de las propiedades viscoelásticas en la capa de epoxi no produce una variación visible de las curvas de dispersión velocidad de fase-frecuencia, y tan sólo influye en la aparición de atenuación modal. Además se comprueba que, a diferencia de lo que sucede en la placa sin recubrimiento, hasta el modo más bajo (SH0) es dispersivo cuando existe un recubrimiento.

Puede observarse en la Figura 5.23 que la atenuación de cualquier modo presenta un mínimo en un cierto rango de frecuencia. En este rango, el modo podría propagarse a gran distancia en la placa con recubrimiento, siendo la mejor opción desde el punto de vista del alcance para aplicaciones de inspección remota con ondas guiadas en este tipo de estructuras. Los valores mínimos de atenuación coinciden con la meseta en la rama correspondiente de las curvas $c - f$, cuando la velocidad de fase prácticamente coincide con $c_{T,Al}$.

Para frecuencias altas la atenuación de todos los modos tiende asintóticamente hacia la atenuación de las ondas transversales en el epoxi ($\alpha_T = 0.0069 \cdot \omega$, $\bar{\kappa}_T/2\pi = c_T\alpha_T/\omega = 0.01$), lo cual coincide con el comportamiento observado en la velocidad de fase.

La estructura modal permite entender tanto los valores de la velocidad de fase como de la atenuación. Se ha considerado la rama correspondiente al modo SH1, y dentro de ella dos puntos concretos: $f_1=3\text{MHz}$ para el cual la rama se encuentra en la meseta próxima a $c_{T,Al}$ y tiene una atenuación de 19 dB/m, y $f_2=13\text{MHz}$ para el que la rama está próxima a $c_{T,Ep}$ y tiene una atenuación de 5166 dB/m. En la Figura 5.24 se muestran los desplazamientos normalizados en el espesor de la placa para ambos casos. Para la frecuencia más baja f_1 , la placa de aluminio lleva la mayor parte de la deformación, lo cual justifica la baja atenuación que experimenta el modo. Además, la estructura modal en el aluminio es prácticamente constante, aproximándose bastante a la estructura de una onda SH plana, lo que explica la proximidad de la velocidad de fase a $c_{T,Al}$. Para la frecuencia f_2 , la deformación está prácticamente concentrada en el recubrimiento, dando lugar a una atenuación modal elevada. También se representa en la Figura 5.24 la estructura del modo SH0 en ambas frecuencias, a las cuales la velocidad de fase es muy próxima a $c_{T,Ep}$ y donde la atenuación modal toma valores 1223 dB/m y 4923 dB/m, respectivamente. Tanto

la estructura del modo SH1 a 13MHz como la del modo SH0 en ambas frecuencias corresponden a ondas de Love: ondas antiplanas superficiales guiadas en el estrato de menor rigidez, con una amplitud decreciente con la profundidad en el estrato más rígido. Sin embargo, corresponden a modos de Love diferentes.

5.8.2 Ondas de Lamb

Las curvas de dispersión velocidad de fase-frecuencia para los tres casos considerados se muestran en las Figuras 5.25 (a) y (b). Se han utilizado 10 elementos cuadráticos para discretizar la capa de aluminio y 4 para la de epoxy. A pesar de que los modos ya no son puramente simétricos o antisimétricos en la placa con recubrimiento, seguiremos denominándolos S_n y A_n por analogía con el caso sin recubrimiento. En las figuras las ramas correspondientes a modos S_n se dibujan con línea gruesa, y las correspondientes a modos A_n con línea fina.

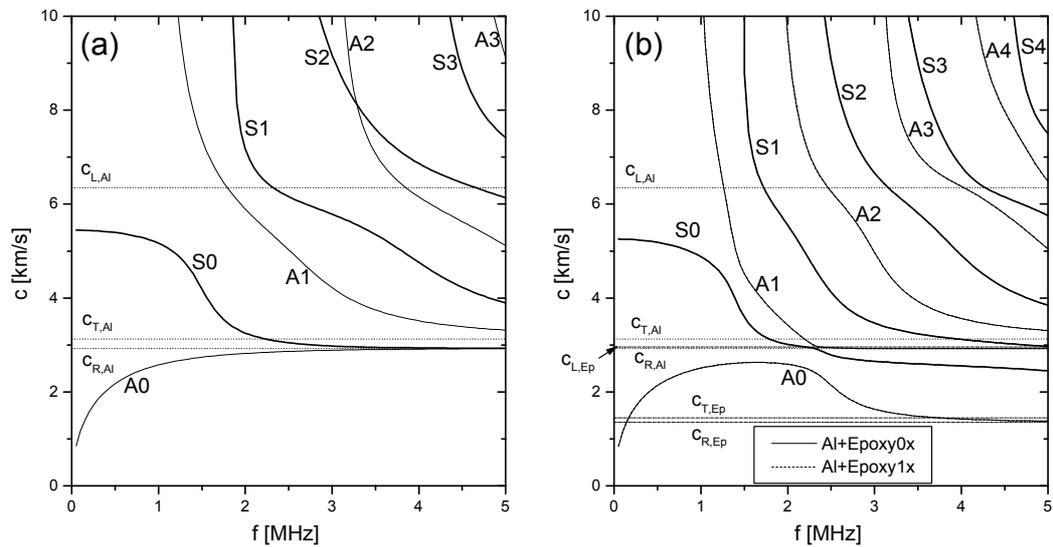


Figura 5.25. Curvas de dispersión velocidad de fase-frecuencia para ondas de Lamb en una placa de aluminio con recubrimiento de epoxy. (a) Placa sin recubrimiento. (b) Comparación de las curvas para Epoxy0x y Epoxy1x, donde no se aprecia ninguna diferencia.

Para el caso de placa elástica sin recubrimiento, las ramas del mismo tipo (S o A) nunca se cruzan (“repulsión modal” [60, 51]). El comportamiento para altas frecuencias es una tendencia asintótica hacia $c_{T,Al}$ para todos los modos, excepto para los modos más bajos (S_0 y A_0) que tienden hacia la velocidad de las ondas superficiales de Rayleigh $c_{R,Al}$.

En el caso de placa con recubrimiento elástico, el fenómeno de repulsión modal sucede entre todas las ramas [60], puesto que todos los modos son del mismo tipo (to-

dos ellos presentan un acoplamiento entre deformaciones de flexión (antisimétricas) y axiales (simétricas)). El comportamiento para altas frecuencias cambia respecto a la situación sin recubrimiento: todos los modos muestran inicialmente una tendencia asintótica hacia $c_{R,Al}$ (excepto el modo A0), y presentan una meseta prácticamente horizontal ligeramente por encima de dicho valor en un rango de frecuencias amplio (tanto más amplio cuanto más alto es el modo). Sin embargo en todas las ramas aparece un punto de inflexión y un descenso por debajo de $c_{R,Al}$ para aproximarse asintóticamente hacia $c_{R,Ep}$. Este comportamiento es el característico de ondas de Rayleigh generalizadas, que aparecen en semiespacios estratificados con capas de diferentes materiales [40, 5]. En esta geometría, las ondas superficiales de Rayleigh son dispersivas, y presentan un número creciente de modos para frecuencias altas.

En la Figura 5.25 (b) se observa que la incorporación de las propiedades viscoelásticas en la capa de recubrimiento no produce una variación visible de las curvas de dispersión velocidad de fase-frecuencia, y tan sólo da lugar a la aparición de atenuación modal. A diferencia de lo que sucedía en la placa viscoelástica de HDPE, en el rango de frecuencias representado ninguna de las ramas se cruza. Sin embargo, al aumentar la atenuación en el recubrimiento (Epoxy1.4x o más) se observa que las ramas S0 y A1 se cruzan en $f \approx 2.3$ MHz.

Los resultados para el recubrimiento de epoxi viscoelástico fueron obtenidos por Barshinger [12] empleando la técnica de la Matriz de Rigidez Global para plantear la ecuación característica y utilizando un algoritmo numérico iterativo para la búsqueda de sus raíces complejas. En la Figura 5.26 se representan las velocidades de fase y las atenuaciones modales en dB/m comparadas con los resultados de Barshinger. La comparación entre ambos resultados es muy buena en las velocidades de fase, con diferencias algo mayores en las atenuaciones debido a la amplificación que supone emplear unidades logarítmicas (dB).

Puede observarse en la Figura 5.26 (b) que la atenuación de cualquier modo presenta un mínimo en un cierto rango de frecuencia. En este rango, el modo podría propagarse por la placa con recubrimiento a gran distancia, siendo la mejor opción desde el punto de vista de maximizar el alcance para aplicaciones de inspección remota con ondas guiadas en este tipo de estructuras. De manera similar a como sucedía con las ondas SH guiadas, los modos de Lamb con baja atenuación tienen su deformación mayormente concentrada en la placa elástica, mientras que los modos con alta atenuación tienen una proporción elevada de su energía concentrada en la capa viscoelástica.

Para ilustrar esta idea, en la Figura 5.27 se representa gráficamente la evolución de la estructura del modo A1 al aumentar la frecuencia. Los desplazamientos se han normalizado de forma que el máximo valor de $|u_x(y)|$ sea la unidad. Los bajos valores de atenuación obtenidos a 3, 4 y 5 MHz están asociados con deformadas prácticamente concentradas en la capa de aluminio. Estas frecuencias se localizan dentro de las curvas de dispersión en la meseta prácticamente horizontal de la velocidad de fase en el valor $c_{R,Al}$, la cual se mencionó anteriormente. Los siguientes

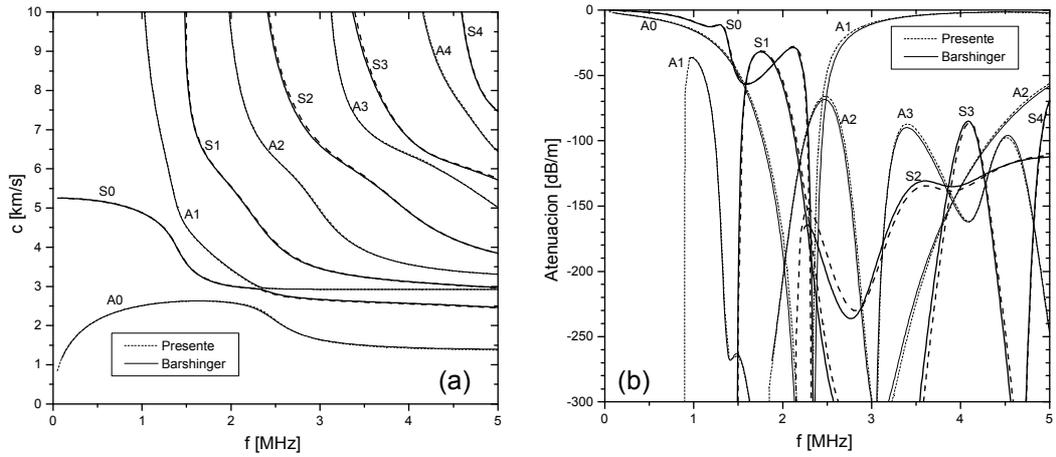


Figura 5.26. Curvas de dispersión de ondas de Lamb para la placa de aluminio con recubrimiento viscoelástico de epoxi. Comparación con Barshinger [12]. (a) Velocidad de fase-frecuencia y (b) atenuación-frecuencia.

valores de f están por encima del punto de inflexión de dicha rama, a partir del cual la velocidad de fase converge asintóticamente hacia $c_{R,Ep}$. Este cambio también va acompañado de un gran aumento en la atenuación, y de una concentración de la deformación en la capa de epoxi, como se aprecia en la Figura 5.27.

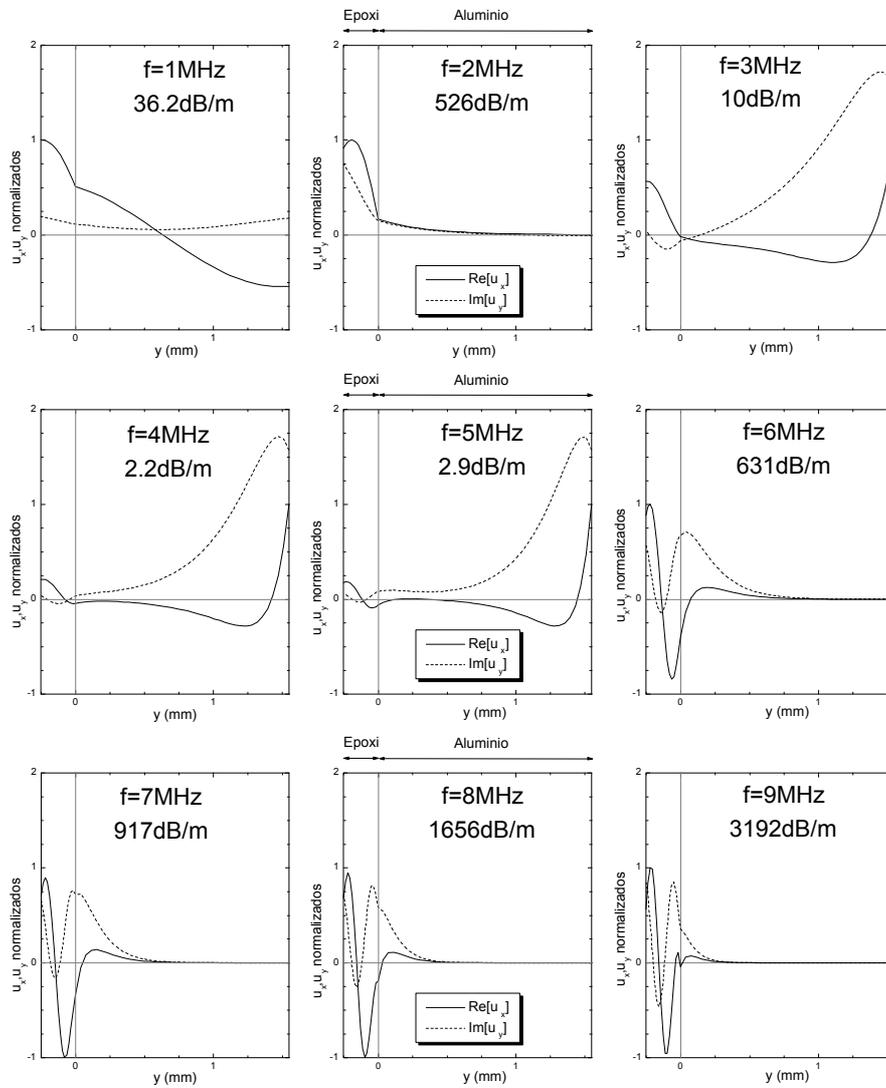


Figura 5.27. Estructura del modo A1 en la placa de aluminio con recubrimiento de epoxi para varias frecuencias.

Capítulo 6

Difracción de ondas guiadas monocromáticas

6.1 Introducción

Uno de los aspectos más ventajosos de las ondas guiadas es el potencial que ofrecen para realizar tareas de inspección remota de defectos en placas (detección, localización y caracterización de los mismos) a causa de su nula atenuación por radiación. Además del alcance, otra ventaja que presentan estas ondas es que permiten evaluar todo el espesor de la placa simultáneamente, y a lo largo de todo el camino recorrido por la onda (wavepath). Sin embargo, el desarrollo de aplicaciones de este tipo debe afrontar y resolver efectivamente una serie de cuestiones relacionadas con la generación y recepción de ondas guiadas, así como con su interacción con defectos.

En primer lugar es necesario irradiar la placa con una señal ultrasónica guiada que pueda viajar largas distancias. Para ello se deben excitar modos reales en el caso de placas elásticas (o modos “casi-reales” con baja atenuación por unidad de longitud, en el caso de placas viscoelásticas).

Experimentalmente es posible generar y detectar de manera selectiva modos concretos [110, 8, 96]. Las dos técnicas más utilizadas son: transductores piezoeléctricos angulares de ondas longitudinales que se acoplan a la placa por inmersión local o mediante cuñas intermedias de metacrilato (p. ej. plexiglás, perspex), y transductores lineales periódicos de tipo peine (“comb transducer”). En el primer caso el transductor produce una onda plana en la cuña intermedia que, al incidir con una cierta inclinación en la interfase con la placa, genera ondas guiadas en la misma por refracción, de acuerdo con la ley de Snell. En el segundo caso se aplica una vibración periódica al transductor, lo cual excita principalmente aquellos modos cuya longitud de onda coincida con la separación entre los elementos del transductor.

En segundo lugar, para detectar un defecto es necesario que su presencia produzca una perturbación medible (con una relación señal-ruido suficiente) sobre el

tren de ondas incidente, tales como la aparición de un eco reflejado, la disminución de la energía transmitida, o la generación de modos distintos al incidente mediante conversión modal. Para poder cuantificar estos efectos, en este capítulo se definirán una serie de coeficientes de conversión modal (reflexión y transmisión). Además, para poder realizar una inspección remota, los efectos deben ser apreciables no sólo en las proximidades del defecto sino también en zonas alejadas del mismo (a una distancia importante). Puesto que son los modos reales los únicos capaces de transportar energía (y por tanto, información) a gran distancia, nos interesa conocer los factores de conversión modal entre modos reales.

En último lugar, la naturaleza multimodal de las ondas guiadas otorga flexibilidad para variar tanto la frecuencia como el modo de trabajo, que consecuentemente podrán elegirse para maximizar la sensibilidad de la inspección al parámetro que se desee medir (p. ej. existencia, posición o tamaño de un defecto). Para seleccionar estos parámetros de una manera objetiva en el caso de un cierto tipo de defecto, es necesario conocer la variación de los coeficientes de conversión con la frecuencia y con la geometría.

En este capítulo se van a aplicar las técnicas numéricas desarrolladas previamente para estudiar una serie de problemas de difracción de ondas guiadas monocromáticas. Los primeros casos corresponden a placas elásticas homogéneas con un amplio abanico de geometrías, comenzando con la más simple (borde libre), que se utiliza como comprobación y puesta a punto de la herramienta, para continuar con otras más complejas (delaminaciones, cambios de sección, defectos superficiales, grietas, inclusiones), donde se muestra la gran capacidad del método.

Posteriormente se estudia la transmisión y reflexión de ondas guiadas en una unión por solape entre dos placas. Los resultados numéricos obtenidos con la técnica híbrida se comparan con medidas experimentales realizadas sobre varias muestras manufacturadas de uniones. Este estudio es fruto de una colaboración con el Ultrasonics Laboratory de Penn State (EEUU) realizada durante una estancia del autor de esta tesis en dicho centro de investigación.

Finalmente se evalúa la posibilidad de detectar remotamente con ondas guiadas defectos ocultos en placas metálicas con recubrimientos viscoelásticos. Aunque la presencia de la capa viscoelástica provoca la atenuación de las ondas, existen ciertos modos y rangos de frecuencias con un valor mínimo de la atenuación, que serán seleccionados para maximizar la distancia recorrida por la señal ultrasónica (y por tanto el alcance de la inspección). Como no sólo interesa detectar sino también cuantificar el tamaño del defecto, se evaluará la influencia de dicho tamaño en los coeficientes de reflexión y transmisión de ondas guiadas.

6.2 Conservación de la energía.

El principio de la conservación de la energía aplicado a los problemas de difracción de ondas guiadas elásticas implica que el flujo de energía que las ondas incidentes E_{in} introducen en cualquier región debe ser igual al flujo de energía extraído de dicha región a través de todas las guías de onda E_{sc} .

Consideramos el caso de una región conectada a N_a guías de onda puramente elásticas, como la mostrada en la Figura 4.2. Los flujos de energía incidentes y difractados totales, E_{in} y E_{sc} respectivamente, pueden calcularse como

$$E_{in} = \sum_{j=1}^{N_a} E_{in,j}, \quad E_{sc} = \sum_{j=1}^{N_a} E_{sc,j} \quad (6.1)$$

donde $E_{in,j}$ es el flujo de energía incidente a través de la placa j , y $E_{sc,j}$ es el flujo de energía que es extraído a través de la guía de onda j , ambos calculados con la ec. (3.95). El error en la conservación del flujo de energía (en %) se define como

$$\epsilon = \left(1 - \frac{E_{sc}}{E_{in}}\right) \cdot 100 \quad (6.2)$$

Este valor puede emplearse como una primera medida de la precisión de los resultados. El hecho de que ϵ sea pequeño es una condición necesaria, pero no suficiente para validar los resultados numéricos.

6.3 Factores de conversión modal.

Cuando una onda guiada monocromática (es decir, que contiene un único modo de todo el espectro) interacciona con un defecto, es difractada produciendo un reparto de la energía incidente entre los campos reflejado y transmitido. Además tiene lugar una conversión modal que produce una redistribución de la energía incidente entre todos los modos reales. En trabajos previos de otros autores se emplean varias expresiones distintas para calcular los factores de conversión modal en problemas de difracción de ondas guiadas. Los factores de conversión modal $C_I^{(m)}$ entre el modo incidente I y los modos difractados m pueden definirse de tres formas:

1. El coeficiente de participación del modo $\alpha^{(m)}$ en el desarrollo en modos normales del campo difractado [69, 67, 68, 24]. Estos autores normalizan los modos previamente de forma que su flujo de energía sea igual a la unidad para garantizar una definición unívoca. Una expresión equivalente para modos no normalizados puede escribirse como

$$C_{I,1}^{(m)} = \alpha^{(m)} \sqrt{\frac{E^{(m)}}{E_{in}}} \quad (6.3)$$

Este factor de conversión será en general un valor complejo.

2. El flujo de energía difractado que es extraído del defecto por los modos reales [93]. Si este valor se divide por el flujo de energía incidente total, se obtiene la siguiente expresión adimensional:

$$C_{I,2}^{(m)} = \left| \alpha^{(m)} \right|^2 \frac{E^{(m)}}{E_{in}} = \left| C_{I,1}^{(m)} \right|^2 \quad (6.4)$$

Esta definición proporciona un significado físico claro a los factores de conversión modal, dado que representa la fracción de energía difractada que es extraída del defecto por el modo m . La suma de todos estos valores debe ser la unidad, por el principio de conservación de la energía. Este factor de conversión toma siempre valores reales.

3. La amplitud del desplazamiento superficial de la placa en dirección y para el modo m , $u_y^{(m)}(y=h)$, normalizado por los desplazamientos superficiales verticales del modo incidente [8]:

$$C_{I,3}^{(m)} = \frac{\alpha^{(m)}}{\alpha^{(I)}} \left[\frac{u_y^{(m)}}{u_y^{(I)}} \right]_{y=h} \quad (6.5)$$

Este factor de conversión será en general un valor complejo.

Al factor de conversión $C_I^{(I)}$, es decir, con $m = I$, se le denomina *coeficiente de conversión primario, directo o propio*. A los demás, $C_I^{(m)}$ con $m \neq i$, se les denomina *factores de conversión secundarios o cruzados*.

El principio de reciprocidad en el flujo de energía implica la siguiente relación entre los coeficientes de conversión cruzados:

$$C_I^{(m)} = C_m^{(I)}, \forall m \neq I \quad (6.6)$$

En este capítulo se usarán indistintamente los símbolos $C_I^{(m)}$ y $C_{I,m}$ para hacer referencia a los coeficientes de conversión modal.

6.4 Reflexión en el borde de una placa semi-infinita. Ondas de Lamb.

En las técnicas de inspección ultrasónica es habitual emplear las señales reflejadas en los bordes (“backwall echo”) como referencia en operaciones tales como la calibración de los equipos y la medida de “tiempos de vuelo”. En estos casos es imprescindible disponer de un eco de amplitud suficiente que permita detectarlo y distinguirlo sobre el ruido de fondo (es decir, debe tener una relación señal/ruido suficiente).

Además, en el caso de ondas guiadas este problema tiene un interés intrínseco, puesto que representa una situación límite a la que se asemejará cualquier defecto en la placa cuando su tamaño sea tal que atraviere la sección completamente (p. ej. perforaciones, taladros, cortes profundos, grandes pérdidas de sección por corrosión, etc).

Este problema constituye el caso más sencillo de difracción de ondas guiadas, puesto que su geometría y condiciones de contorno (borde libre o empotrado) permiten una aplicación directa de la técnica de superposición modal. Sin embargo, a pesar de esta aparente simplicidad, en la literatura no existen soluciones analíticas al problema. La principal dificultad estriba en que, para las ondas de Lamb, el cambio de la dirección de propagación en el borde produce el cambio de signo de una sola de las componentes de los desplazamientos y de las tensiones, pero no de la otra. Como consecuencia de ello, resulta imposible satisfacer la condición de contorno de borde libre o empotramiento como suma de dos modos reales iguales, uno incidiendo en el borde y el otro alejándose de él. Por lo tanto deben generarse otros modos (evanescentes y reales) en el campo reflejado, de forma que su superposición con los dos anteriores pueda cumplir la condición en el borde.

Este apartado se emplea como verificación y puesta a punto de la formulación semi-analítica de EF y de la técnica híbrida EC-EF para analizar problemas de difracción de ondas guiadas.

6.4.1 Borde recto. Resultados de EF

Para el estudio que se va a realizar, se empleará una placa laminada semi-infinita de espesor constante sobre cuyo borde, situado en $x_0 = 0$, incide una onda guiada monocromática. Para aplicar la formulación semi-analítica de EF se discretiza el espesor de la placa en elementos, como se ilustra en la Figura 6.1, lo cual permite calcular las curvas de dispersión y los modos de propagación de la placa infinita. Aunque la formulación de EF es aplicable al caso general de placas laminadas no homogéneas, en este primer apartado se estudia el caso sencillo de placa homogénea.

A continuación, se aplica el principio de superposición para expresar la solución del problema completo como suma de dos subproblemas:

1. un tren de ondas incidentes propagándose en una placa infinita, cuya solución se supone conocida $(\hat{\mathbf{u}}^{in}, \hat{\mathbf{F}}^{in})$, y que se denominará “campo incidente”.
2. un “campo reflejado” de ondas en la placa semi-infinita, que se expresa como una combinación lineal de los modos de la placa infinita

$$\hat{\mathbf{u}}^{re} = \Phi \boldsymbol{\alpha}, \quad \hat{\mathbf{F}}^{re} = \Psi \boldsymbol{\alpha} \quad (6.7)$$

donde la única incógnita son los coeficientes de participación modal $\boldsymbol{\alpha}$.

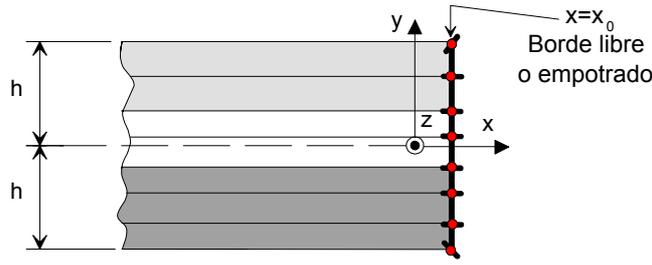


Figura 6.1. Malla de EF (elementos lineales) para estudiar la reflexión de una onda guiada en el borde de una placa laminada semi-infinita.

Teniendo en cuenta que la superposición de ambos debe satisfacer la condición de contorno en el borde, se puede plantear una ecuación para calcular α .

Reflexión en un borde libre

La condición de contorno en el borde de la placa para el problema completo es de tracción nula

$$\mathbf{t}(x=0, y, t) = \mathbf{R}_x(x=0, y, t) = \mathbf{0} \quad (6.8)$$

Esta condición, sustituida en la ec. (3.86), se traduce en que las fuerzas nodales consistentes son también nulas

$$\hat{\mathbf{F}}(y) = \hat{\mathbf{F}}^{in}(y) + \hat{\mathbf{F}}^{re}(y) = \mathbf{0} \quad \text{en } x=0 \quad (6.9)$$

Puesto que la onda incidente se supone conocida, la ecuación anterior se transforma en una condición de contorno del tipo Neumann (tracciones impuestas) en el subproblema del campo reflejado, con las siguientes fuerzas nodales prescritas en el borde

$$\hat{\mathbf{F}}^{re}(y) = -\hat{\mathbf{F}}^{in}(y) \quad (6.10)$$

Si se sustituye esta expresión en la ec. (6.7), se obtiene un sistema de ecuaciones cuadrado cuyas incógnitas son los coeficientes de participación de los modos α . La solución es

$$\alpha = \Psi^{-1}(y) \hat{\mathbf{F}}^{re}(y) = -\Psi^{-1}(y) \hat{\mathbf{F}}^{in}(y) \quad (6.11)$$

Reflexión en un borde empotrado

La condición de contorno en la sección del borde $x=0$ para el problema total es

$$\mathbf{u}(x=0, y, t) = \mathbf{0} \Rightarrow \hat{\mathbf{u}}(y) = \hat{\mathbf{u}}^{in}(y) + \hat{\mathbf{u}}^{re}(y) = \mathbf{0}$$

La ecuación anterior se transforma en una condición de contorno del tipo Dirichlet (desplazamientos prescritos) para el subproblema de reflexión

$$\hat{\mathbf{u}}^{re}(y) = -\hat{\mathbf{u}}^{in}(y) \quad (6.12)$$

Sustituyendo en la ec. (6.7), y resolviendo el sistema para los coeficientes de participación modal $\boldsymbol{\alpha}$

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(y) \mathbf{u}^{re}(y) = -\boldsymbol{\Phi}^{-1}(y) \mathbf{u}^{in}(y) \quad (6.13)$$

Reflexión del modo S0 en un borde empotrado

La reflexión del modo simétrico más bajo en el borde recto y empotrado de una placa semi-infinita homogénea fue estudiada por primera vez por Gregory y Gladwell [54]. Estos autores expresaron el campo reflejado (desplazamientos y tensiones) como una superposición de los modos de Lamb simétricos mediante un desarrollo en modos normales. Este proceso es similar al descrito en la Sección 3.8.2, pero Gregory y Gladwell calcularon las curvas de dispersión buscando las raíces de la ecuación de la frecuencia analítica de Rayleigh-Lamb, ec. (2.59), y emplearon las expresiones analíticas de desplazamientos y tensiones. La suma infinita de modos fue truncada, manteniéndose todos los modos reales y algunos modos evanescentes. Para obtener los coeficientes de participación de cada modo aplicaron la condición de contorno en el borde de una forma variacional. Estos autores encontraron dificultades numéricas al calcular las raíces puesto que el algoritmo de búsqueda no convergía en todas las ocasiones. Por lo tanto, el proceso de obtención de las curvas de dispersión no era completamente automático. Por otro lado, su técnica de solución sólo es aplicable a esta geometría concreta. Además, estos autores no proporcionaron un criterio para decidir el número de modos mínimo que garantiza unos resultados precisos.

En este apartado se emplea una placa semi-infinita homogénea de espesor $2h$ con un borde empotrado en $x = 0$. El material es lineal, elástico e isótropo con un coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$, cuyas curvas de dispersión adimensionales se obtuvieron en el Capítulo 2, Figuras 2.10 a 2.12. Los resultados adimensionales sólo dependen de ν , pero para aplicar la formulación de EF se necesita definir completamente el material y las dimensiones de la placa, por lo cual se emplean un espesor de $2h=2$ mm, una densidad $\rho=1$ kg/dm³ y unas velocidades de onda $c_L=1$ km/s y $c_T=1/\sqrt{3}$ km/s.

Los resultados semi-analíticos de EF se van a comparar con los obtenidos por Gregory y Gladwell. Para discretizar la placa con EF se aplica el criterio de mallado propuesto para el cálculo de curvas de dispersión, ec. (5.18). Cuando se emplean mallas uniformes de n elementos, este criterio puede reescribirse como $n > n_m = \frac{\omega h}{\pi c_T} \beta$, con $\beta=10$ para elementos lineales y 4 para elementos cuadráticos. En la Tabla 6.1 se recogen los números mínimos de elementos n_m requeridos por dicho criterio de mallado para reproducir las dos figuras del artículo de Gregory y Gladwell

[54], así como el número de elementos que se han utilizado en los cálculos. Al emplear varias mallas adicionales con un número de elementos creciente en un factor de dos, se pretende visualizar la convergencia de los resultados hacia una solución fija. Asimismo se busca determinar cómo de próximos están los resultados iniciales (obtenidos con n_m elementos) a dicha solución final.

Ref.	$\Omega = \frac{\omega h}{c_T}$	El. lineales		El. cuadr.	
		n_m	n_{usado}	n_m	n_{usado}
[54]	máx				
Fig 6	3.29	11	11, 22, 44	5	5, 10, 20
Fig 7	11.3	36	36, 72	15	15, 30

Tabla 6.1. Mallas de EF. Reflexión del modo S0 en un borde empotrado

En todas las figuras aparecen señaladas las frecuencias de corte de los modos simétricos con líneas verticales de trazos y puntos. A la máxima frecuencia estudiada existen seis modos simétricos reales, cuyas frecuencias de corte son $\Omega = \kappa\pi/2, \pi, 2\pi, 3\kappa\pi/2, 3\pi$.

Los resultados obtenidos con elementos cuadráticos se representan frente a la frecuencia adimensional $\omega h/c_L = \Omega/\kappa$ en las Figuras 6.2 y 6.3. La comparación con los resultados de Gregory y Gladwell es satisfactoria en todo el rango de frecuencias. Por otro lado se comprueba la convergencia gráfica de los resultados al refinar el tamaño del elemento. Además, las curvas obtenidas con n_m elementos prácticamente coinciden con la solución final.

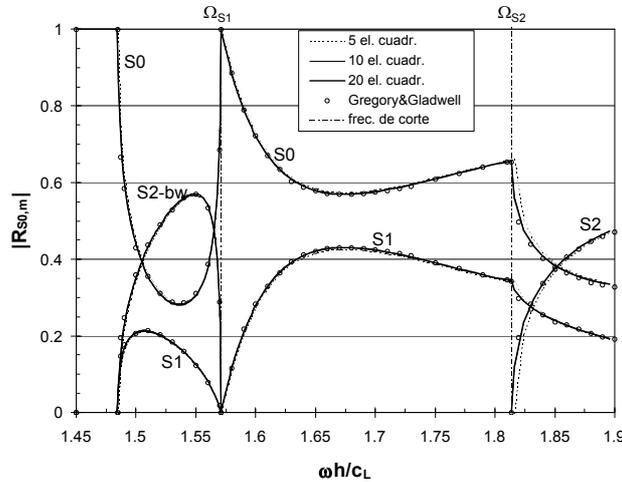


Figura 6.2. Reflexión de un modo S0 en un borde empotrado. Resultados con elementos cuadráticos

Los resultados calculados con elementos lineales se muestran en las Figuras 6.4

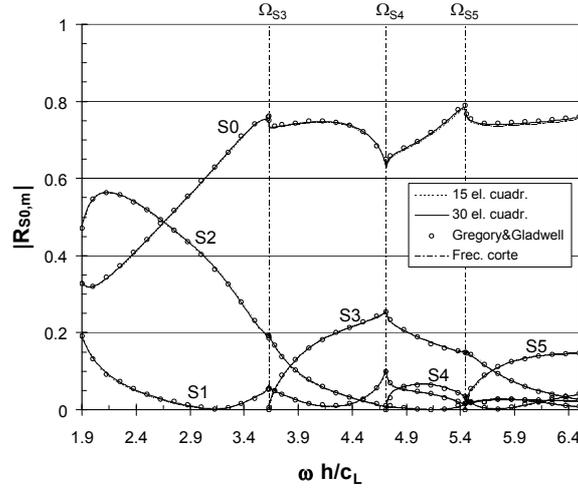


Figura 6.3. Reflexión de un modo S0 en un borde empotrado. Resultados con elementos cuadráticos

y 6.5, donde vuelve a apreciarse la convergencia de los resultados al refinar las mallas. Se observa un desplazamiento hacia la derecha de las curvas obtenidas con n_m elementos lineales, que se acentúa para frecuencias altas y en las proximidades de frecuencias de corte. Un desplazamiento similar en la frecuencia sucede al calcular las curvas de dispersión, como ya se indicó en el capítulo anterior. La causa de ambos se encuentra en la mayor rigidez de la malla de elementos lineales en comparación con la de la placa real.

Toda la energía incidente se refleja sin sufrir conversión modal para bajas frecuencias, $\Omega/\kappa < 1.485$, donde el único modo real es S0. En el resto de frecuencias estudiado más de la mitad de la energía se refleja en forma de modo S0, excepto en dos rangos de frecuencias (centrados respectivamente en $\Omega/\kappa = 1.54$ y 2, respectivamente) donde el coeficiente de reflexión directo $R_{S0,S0}$ baja hasta reducirse al 30%. En cualquier caso, la reflexión en el borde del modo S0 da lugar a un eco directo de una magnitud suficiente como para ser detectado y empleado como referencia. Por otro lado, dependiendo del rango de frecuencia se observa una conversión de energía importante hacia otros modos diferentes al incidente (S2-bw, S1, S2, S3).

En un estrecho rango de frecuencias inmediatamente por debajo de Ω_{S1} (frecuencia de corte del primer modo simétrico, S1) el modo S2 presenta un comportamiento “backward”. En la Figura 6.4 se observa que dicho modo, etiquetado como S2-bw, es el dominante en el campo difractado puesto que transporta más de la mitad de la energía reflejada a la frecuencia $\Omega/\kappa = 1.55$.

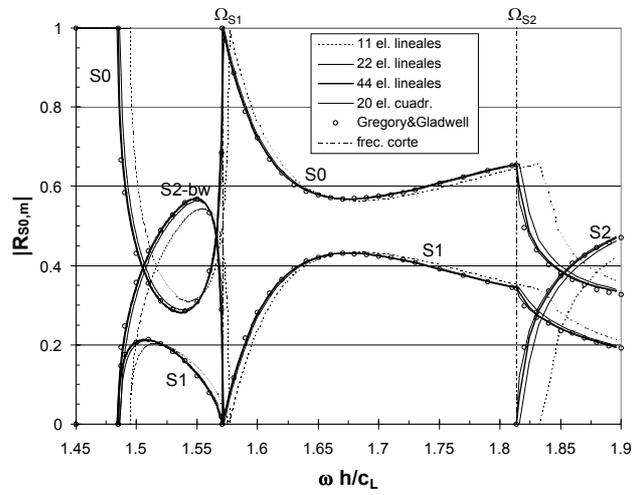


Figura 6.4. Reflexión de un modo S0 en un borde empotrado. Resultados con elementos lineales

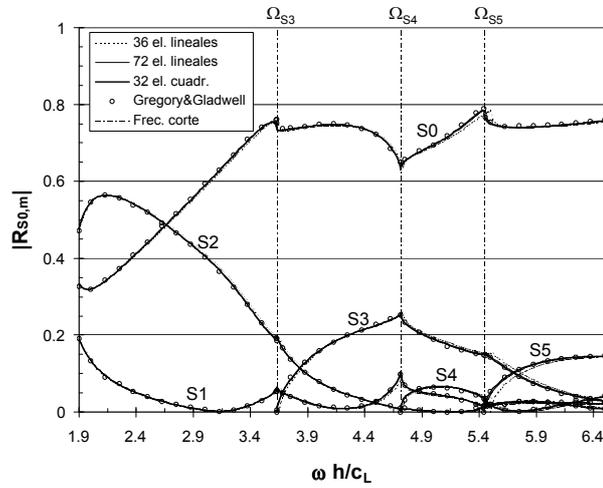


Figura 6.5. Reflexión de un modo S0 en un borde empotrado. Resultados con elementos lineales

Reflexión del modo S0 en un borde libre

La reflexión de un modo S0 en el borde recto y libre de una placa semi-infinita homogénea fue estudiada por Gazis y Mindlin [50] para frecuencias inferiores a la primera frecuencia de corte, por Torvik [108] para frecuencias inferiores a la tercera frecuencia de corte, y por Gregory y Gladwell [54] para frecuencias algo más altas. Todos estos autores expresaron la solución elastodinámica en la placa como una superposición de los modos de propagación en la placa infinita. Gazis y Mindlin utilizaron una teoría de placas de segundo orden para estudiar la propagación de modos de Lamb simétricos, con la cual obtuvieron una aproximación del espectro de frecuencia y de la estructura de los tres primeros modos que sólo vale para frecuencias bajas. A continuación utilizaron únicamente esos tres modos en la superposición modal, y finalmente satisficieron la condición de contorno de borde libre igualando a cero los tres primeros términos del desarrollo en polinomios de Lagrange de las tensiones. Por otro lado, Torvik y Gregory y Gladwell emplearon las expresiones analíticas de los desplazamientos y tensiones de las ondas de Lamb, ecs. (2.44)-(2.55), y calcularon las curvas de dispersión empleando algoritmos numéricos de búsqueda de raíces de las ecuaciones de Rayleigh-Lamb analíticas, ec. (2.64). Seguidamente truncaron la suma infinita de modos, conservando todos los modos reales y algunos evanescentes (Torvik usó 21 modos, mientras que Gregory y Gladwell llegaron hasta 40). Finalmente, calcularon los coeficientes de participación de cada modo aplicando la condición de contorno en el borde de forma variacional.

Las limitaciones de los resultados de estos autores son las mismas que se indicaron en el caso del borde empotrado: validez restringida a esta geometría concreta, inestabilidad de los algoritmos de búsqueda de raíces, ausencia de criterios para decidir el número de modos mínimo.

En el borde libre de una placa se produce, para una cierta frecuencia de resonancia que depende del material y el espesor de la placa, una vibración simétrica respecto al plano medio y con unas deformaciones concentradas en el borde; a este fenómeno se le denomina *resonancia de borde*. La primera observación de este fenómeno fue realizada por Shaw [104]. En el transcurso de sus estudios experimentales sobre los modos de vibración axisimétricos de discos gruesos de titanato de bario ($\nu = 0.31$), advirtió la existencia de una resonancia concentrada en el borde del disco para una frecuencia por debajo de la frecuencia de corte del modo S1, $\Omega_{S1} = \omega_{S1}h/c_T = \kappa\pi/2$. La explicación teórica en el caso de una placa en condiciones de deformación plana fue realizada por Gazis y Mindlin [50], quienes demostraron que se debe al aumento brusco del coeficiente de participación modal α_m de un par de modos evanescentes (S1 y S2), correspondientes a dos raíces complejas conjugadas de la ecuación de Rayleigh-Lamb. Con su método aproximado, empleando una onda S0 incidente sobre el borde de una placa con coeficiente de Poisson $\nu = 0.31$, localizaron la frecuencia de resonancia en $\Omega = 2.064$. Torvik [108] obtuvo un valor de $\Omega = 2.3458$ con un procedimiento más preciso. Mediante un método variacional similar al ante-

rior, Auld y Tsao [10] calcularon $\Omega = 2.3295$. Por último, Gregory y Gladwell [54] encontraron resonancia de borde en $\Omega = 2.2522$ para una placa con coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$.

La resonancia de borde puede ser excitada aplicando cargas simétricas directamente sobre el extremo de la placa, o bien haciendo incidir un modo de Lamb simétrico sobre el borde, siempre que el rango de frecuencia de la excitación contenga la frecuencia de resonancia de borde. En el caso de la placa, esta frecuencia se encuentra por debajo de Ω_{S1} , por lo cual sólo puede emplearse el modo S0 como onda incidente. Al aplicar la formulación de EF al estudio de la reflexión del modo S0 en el borde libre de una placa con coeficiente de Poisson $\nu = 0.31$, se encontró una resonancia de borde a la frecuencia $\Omega = \omega h/c_T = 2.3285$ producida por el aumento brusco del coeficiente de participación modal de los modos evanescentes S1 y S2. Este resultado concuerda bien con los obtenidos por Torvik y Auld y Tsao, con una pequeña diferencia inferior al 1%.

En lo que resta de este apartado se utiliza una placa semi-infinita homogénea de espesor $2h$ con un borde libre en $x = 0$. El material es elástico lineal e isótropo, con coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$. Para realizar los cálculos numéricos se emplean los mismos datos que en el caso de borde empotrado: $2h=2$ mm, $c_L=1$ km/s, $c_T=1/\sqrt{3}$ km/s, $\rho=1$ kg/dm³.

Ref. [54]	$\Omega = \frac{\omega h}{c_T}$ máx	El. lineales		El. cuadr.	
		n_m	n_{usado}	n_m	n_{usado}
Fig. 3	2.77	9	9, 18, 36	4	4, 8, 16
Fig. 4	8.2	27	27, 54	11	11, 22, 44
Fig. 5	16.5	53	53, 106	22	22, 44

Tabla 6.2. Mallas de EF. Reflexión del modo S0 en un borde libre

La Tabla 6.2 recoge el mínimo número de elementos n_m que el criterio de mado, ec. (5.18), exige para reproducir las tres figuras del artículo de Gregory y Gladwell [54]. Además contiene las dimensiones de las mallas que se han empleado en los cálculos numéricos.

Los resultados obtenidos con elementos cuadráticos se representan en las Figuras 6.6 a 6.8. La comparación con los resultados de Gregory y Gladwell es muy buena en todo el rango de frecuencias, excepto en la vecindad de la frecuencia de corte del modo S1, Ω_{S1} . Tanto Torvik como Gregory y Gladwell coinciden en mencionar explícitamente que el reparto del flujo de energía entre los modos S0 y S1 es 0 y 1, respectivamente. Los resultados de EF para mallas progresivamente más tupidas y con un barrido fino de frecuencias alrededor de ese punto muestra una convergencia del reparto de energía a los valores 0.1 y 0.9, respectivamente. Con objeto de comprobar la validez de los resultados de EF se implementó el planteamiento variacional de Torvik en un programa de Mathematica 3.0. Para una frecuencia dada, los números de onda de cada modo se calcularon buscando las raíces de las ecuaciones

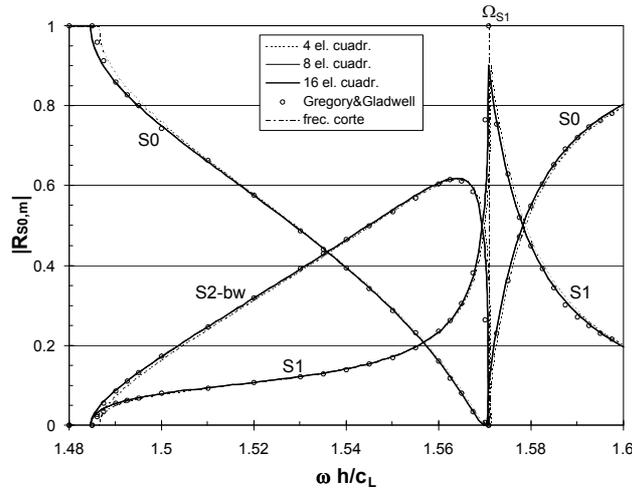


Figura 6.6. Reflexión del modo S0 en un borde libre. Resultados con elementos cuadráticos. Frecuencias próximas a Ω_{S1} .

exactas de Rayleigh-Lamb, ec. (2.59), con 50 dígitos de precisión. Como puntos de partida de los algoritmos de búsqueda de raíces, se emplearon los valores proporcionados con una malla tupida de EF; merece la pena destacar que los resultados finales se encontraban muy próximos a los valores iniciales. Los coeficientes de participación de cada modo se calcularon empleando el principio variacional de Torvik, con una precisión de 40 dígitos significativos. El reparto de energía obtenido con este programa en la primera frecuencia de corte y empleando 21 modos es 0.0965878 y 0.903412, con un error en la conservación de la energía de sólo $1.75e-5\%$ y con un máximo error en el cumplimiento de la condición de contorno de tracciones en el borde de 0.83%. Estos resultados coinciden con los producidos por la formulación de EF.

Una muestra de los resultados obtenidos con elementos lineales se presenta en la Figura 6.9, donde de nuevo se aprecia la convergencia a un resultado fijo al refinar las mallas y la buena comparación con los resultados de Gregory y Gladwell. Como ya se indicó en el caso de borde empotrado, se observa que las mallas de n_m elementos producen unas curvas desplazadas en la frecuencia.

A diferencia de lo que sucedía en el caso de borde empotrado, el coeficiente de reflexión propio del modo S0 $R_{S0,S0}$ en el borde libre presenta una mayor variación con la frecuencia (como queda patente al comparar las Figuras 6.3 y 6.7) y además en ciertos rangos de frecuencias toma valores muy bajos (ver Figura 6.8), llegando incluso a anularse casi por completo en las frecuencias $\Omega/\kappa=1.57$ y 2.25, con la consiguiente desaparición del eco directo. Según la frecuencia considerada el campo reflejado puede no estar dominado por el modo S0. Un caso extremo sucede a

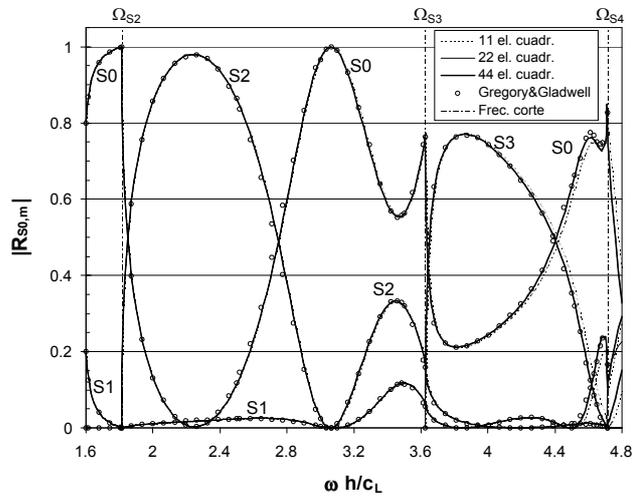


Figura 6.7. Reflexión del modo S0 en un borde libre. Resultados con elementos cuadráticos.

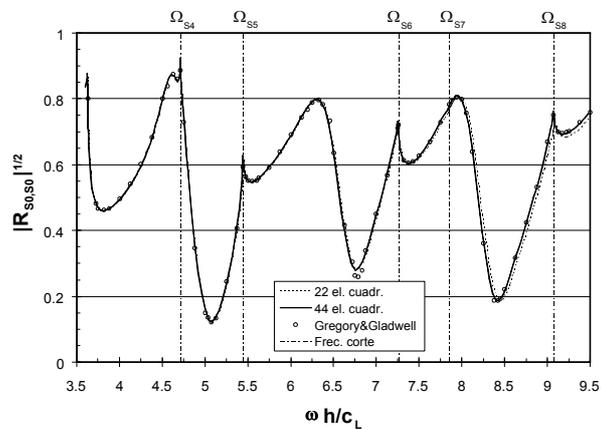


Figura 6.8. Coeficiente de reflexión primario del modo S0 en un borde libre. Resultados con elementos cuadráticos.

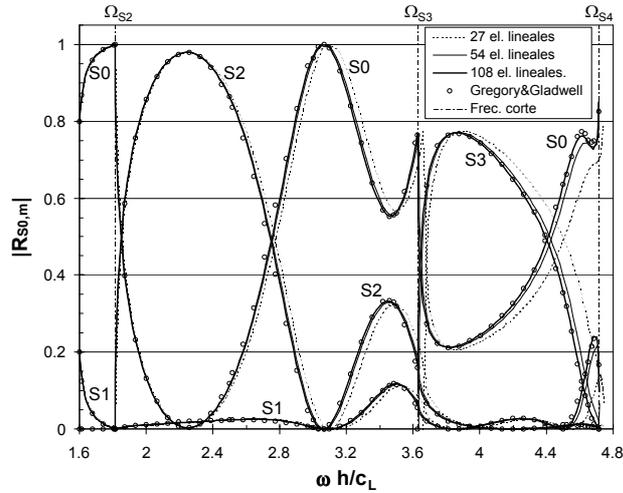


Figura 6.9. Reflexión del modo S0 en un borde libre. Resultados con elementos lineales.

la frecuencia $\Omega/\kappa=2.25$, donde ocurre una conversión prácticamente completa del modo S0 incidente en modo S2 reflejado.

Algunos comentarios sobre los resultados numéricos de EF

En este apartado los coeficientes de conversión $R_{I,m}$ entre un modo incidente I y otro reflejado m se han calculado de acuerdo con la definición de la ec. (6.4), la cual representa la fracción del flujo de energía que es transportada por el modo m .

Dado que existe simetría respecto al plano medio, no puede producirse conversión modal cruzada entre modos simétricos y antisimétricos. Esta condición era aprovechada por Torvik y Gregory y Gladwell para excluir de la superposición modal del campo difractado aquellos modos cuya simetría no coincidiera con la del modo incidente. Por el contrario la formulación de EF incluye todos los modos, y sin embargo sus resultados reproducen este efecto exactamente.

Como se está empleando una discretización de EF para obtener de forma aproximada las curvas de dispersión y las estructuras modales de la placa, se introduce un error en la solución que causa la violación del principio de conservación del flujo de energía. Los resultados numéricos que se han presentado para la reflexión de ondas de Lamb en placas semi-infinitas satisfacen la conservación del flujo de energía con un margen de error (definido según la ec. (6.2)) del 1%, muy pequeño en comparación con los obtenidos por otros autores [6, 24] que alcanzaron hasta un 10% de error.

En los resultados obtenidos con elementos cuadráticos se ha observado que, al

emplear las discretizaciones de EF proporcionadas por el criterio de mallado propuesto para curvas de dispersión ($n_m = \beta\Omega/\pi$, con $\beta=4$), las curvas de reflexión modal prácticamente coinciden con las calculadas con mallas más finas. Cabe concluir que, en el caso de elementos cuadráticos, el criterio de mallado propuesto inicialmente para el cálculo de curvas de dispersión es también válido para resolver problemas de difracción de ondas de Lamb.

Por otro lado, las discretizaciones de n_m elementos lineales ($n_m = \beta\Omega/\pi$, con $\beta=10$) proporcionan curvas que están desplazadas hacia la derecha en la frecuencia respecto a las obtenidas con mallas más finas. Para aproximar correctamente las curvas finales, es necesario emplear $2n_m$ elementos. Por este motivo, se propone un cambio del criterio de mallado en el caso de problemas de difracción de ondas de Lamb con elementos lineales, pasando a usar $\beta=20$. Esto significa que deben utilizarse 20 elementos lineales por longitud de onda transversal. Con esta corrección, para una frecuencia máxima fija, el criterio de mallado exige emplear un número de elementos lineales 5 veces mayor que el número de elementos cuadráticos. Por tanto, el número de grados de libertad necesarios para obtener resultados precisos con elementos lineales será 2.5 veces superior que con elementos cuadráticos.

Reflexión de modos altos en un borde libre.

La incidencia de modos más altos en el borde fue estudiada experimentalmente con técnicas fotoelásticas por Zhang y colaboradores [118], y numéricamente por Cho y Rose [24] combinando un desarrollo en modos normales y el MEC de elementos constantes. El planteamiento de estos últimos se basó en expresar el campo reflejado como una superposición de modos de Lamb, empleando las expresiones analíticas de los desplazamientos y tensiones modales, que se truncó para incluir únicamente los modos reales. Las correspondientes ramas de las curvas de dispersión se calcularon numéricamente con algoritmos de búsqueda de raíces aplicados a la ecuación analítica de Rayleigh-Lamb. Para completar la descripción del problema, el desarrollo en modos normales se acopló con la discretización de EC del borde de la placa en una sección transversal. Como sólo incluyeron modos reales, tuvieron que situar dicha sección a una distancia suficientemente alejada del extremo para evitar que se apreciara la influencia de los modos evanescentes reflejados. Como resultado de varias pruebas de convergencia, dichos autores propusieron como distancia mínima una longitud de onda del modo incidente. Esta aproximación se reveló satisfactoria excepto para frecuencias inmediatamente inferiores a cualquier frecuencia umbral, donde algunos modos evanescentes presentan números de onda con una parte imaginaria muy pequeña, y por consiguiente sufren un débil decrecimiento exponencial con la distancia. Finalmente, los resultados obtenidos por estos autores incumplían la conservación de la energía con un rango de error de $\pm 10\%$. Una de las principales limitaciones de este método es que no es aplicable a problemas de placas no homogéneas, donde no es posible calcular teóricamente los modos.

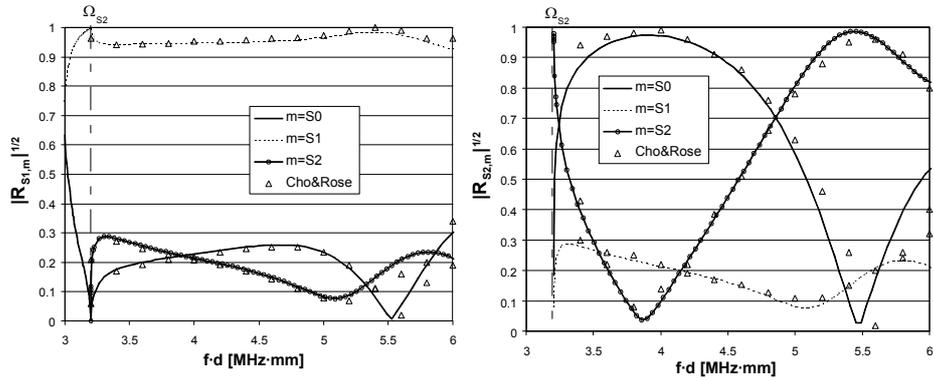


Figura 6.10. Reflexión de los modos S1 y S2 en el borde libre de una placa semi-infinita de acero.

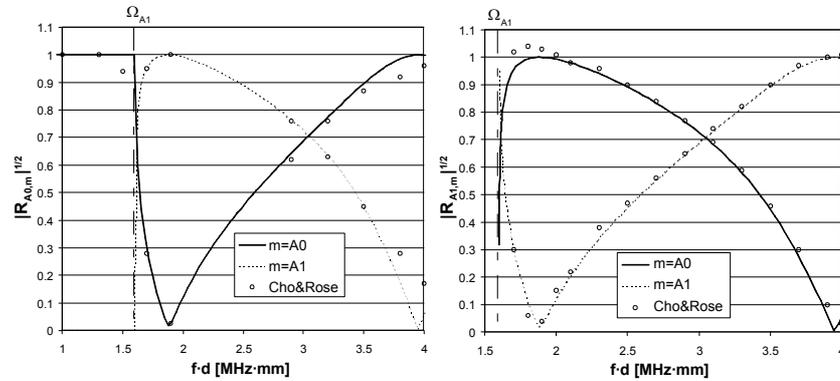


Figura 6.11. Reflexión de los modos A0 y A1 en el borde libre de una placa semi-infinita de acero.

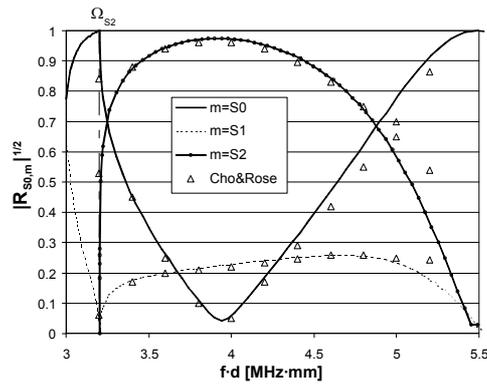


Figura 6.12. Reflexión del modo S0 en el borde libre de una placa semi-infinita de acero.

Todos estos puntos débiles son superados con la formulación de EF presentada en esta tesis. Se emplea una placa semi-infinita y homogénea, de espesor $d = 2h = 1\text{mm}$ con un borde libre en $x = 0$. El material es acero, cuyas propiedades son: $\rho = 7.8\text{kg/dm}^3$, $c_L = 5.94\text{km/s}$ y $c_T = 3.2\text{km/s}$. La máxima frecuencia considerada es $f = 6\text{MHz}$. Empleando el criterio de mallado, el número mínimo de elementos cuadráticos necesario es $n_m = 8$.

Los resultados proporcionados por una malla uniforme de 8 elementos cuadráticos en el espesor, se muestran en las Figuras 6.10 a 6.12. Se comprobó que duplicar el número de elementos no producía prácticamente ningún cambio en las curvas. Puede observarse que la comparación con Cho y Rose es satisfactoria, pero la técnica propuesta tiene la ventaja de necesitar un menor número de gdl (Cho y Rose emplearon 200 elementos constantes). Por otro lado, algunos de los coeficientes de reflexión de [24] superan la unidad (ver Figura 6.11), lo cual viola claramente el principio de conservación de la energía. Por último, merece la pena mencionar que los resultados de EF satisfacen con un error prácticamente nulo el principio de reciprocidad del flujo de energía

$$R_{I,m} = R_{m,I}, \forall m \neq I \quad (6.14)$$

lo que no sucede, sin embargo, con los resultados de Cho y Rose.

6.4.2 Borde recto. Formulación híbrida EC-EF.

En este apartado se aplica la formulación híbrida de EC-EF al estudio de los problemas de reflexión en placas semi-infinitas que se abordaron en el apartado anterior, Apartado 6.4.1, empleando la formulación semi-analítica de EF. Para aplicar la formulación híbrida se divide la geometría en dos zonas: (i) un tramo de longitud l_{EC} a partir del borde, que se discretiza con elementos de contorno cuadráticos; (ii) la placa semi-infinita restante, cuyo espesor se discretiza con EF, lo que permite reproducir su comportamiento empleando la matriz de rigidez dinámica de EF, \mathbf{S} . Una muestra de las mallas utilizadas aparece en la Figura 6.13. El tamaño de elemento empleado en ambas zonas es el mismo, y se elige aplicando el criterio de mallado, ec. (5.18).

Se usará una placa homogénea semi-infinita de espesor $2h$ con un borde recto sobre el que incide un modo de Lamb procedente de $x = -\infty$. Se consideran dos posibles condiciones de contorno en el borde: libre o empotrado. El material es lineal, elástico e isótropo. Para el caso de modo S0 incidente, se utilizan los siguientes datos: $2h = 2\text{mm}$, $\rho = 1\text{kg/dm}^3$, $c_L = 1\text{km/s}$ y $c_T = 1/\sqrt{3}\text{km/s}$. Para la incidencia de modos más altos se toman estos otros: $2h = 1\text{mm}$, $\rho = 7.8\text{kg/dm}^3$, $c_L = 5.94\text{km/s}$ y $c_T = 3.2\text{km/s}$.

Con este problema se pretende responder a dos preguntas: (1) ¿Coinciden los resultados de la formulación híbrida EC-EF con los de EF en este caso sencillo, en el que ambas técnicas son aplicables? (2) ¿Influye en los resultados la distancia l_{EC} a

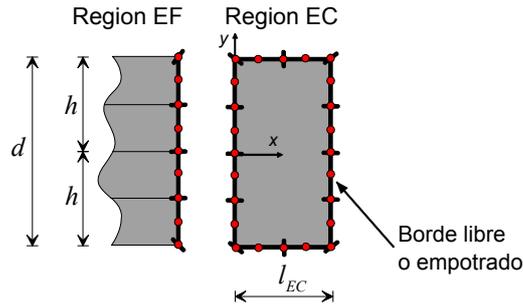


Figura 6.13. Malla híbrida EC-EF de la placa semi-infinita

la que se coloca el contorno ficticio? En caso afirmativo, ¿cuál es la mínima distancia requerida para obtener buenos resultados? Desde el punto de vista del número de elementos en la región de EC, interesa emplear el mínimo valor de l_{EC} compatible con una precisión adecuada. En los trabajos de Cho y Rose [24], la distancia mínima requerida es de una longitud de onda del modo incidente, la cual puede ser elevada para los modos altos y en consecuencia exigir un número de elementos importante.

Para responder a estas preguntas, se emplearon dos mallas híbridas de elementos cuadráticos para reproducir la Figura 6.2, que corresponde a la reflexión del modo S_0 en un borde empotrado. El tamaño de elemento empleado en ambas es $L=2h/5$, el cual produce buenos resultados para frecuencias adimensionales inferiores a $\omega h/c_L = 2.267$ según el criterio de mado. Cada una de ellas utiliza un valor diferente de l_{EC} : (1) $l_{EC}=2h$, que corresponde al espesor de la placa, (2) $l_{EC}=L$, que corresponde a emplear un único elemento en la dirección longitudinal para la región de EC. En la Figura 6.14 se representan los resultados de EF, híbridos EC-EF y de Gregory y Gladwell [54], comprobándose la buena conformidad entre todos ellos. De hecho, no hay diferencia apreciable entre los resultados de EF e híbridos. Además, la distancia l_{EC} no influye en los resultados. Este mismo comportamiento ha sido observado no sólo en este caso, sino también al reproducir todos los resultados del apartado anterior, Apartado 6.4.1, para las dos condiciones de contorno en el borde (libre y empotrado) y para todos los modos incidentes. Las figuras no se incluyen aquí porque coinciden exactamente con las ya mostradas en dicho apartado.

Como conclusión podemos afirmar que la condición de contorno absorbente en la formulación híbrida EC-EF puede situarse tan cerca del borde como se desee sin reducir la precisión de los resultados. Este comportamiento representa una mejora frente a la técnica de Cho y Rose [24], donde el acoplamiento entre el desarrollo en modos normales del campo lejano y la región de EC debía situarse a una distancia superior a la longitud de onda incidente. La razón principal se encuentra en que dichos autores no incluían los modos evanescentes en la superposición modal del

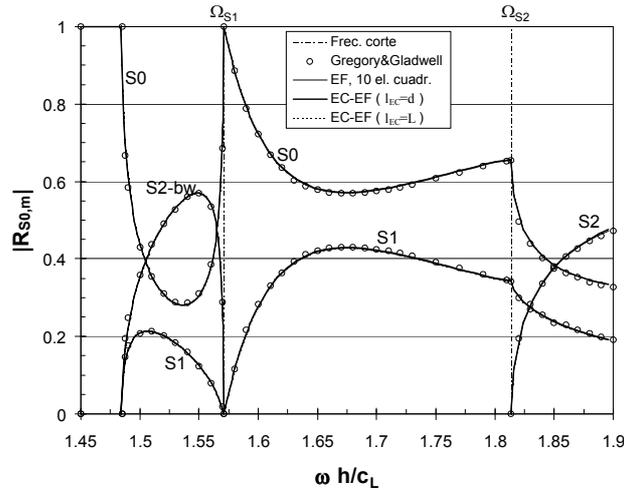


Figura 6.14. Reflexión del modo S0 en un borde recto empotrado. Comparación entre resultados de EF e híbridos EC-EF

campo lejano, los cuales son esenciales para satisfacer la condición de contorno en el borde, y llegan incluso a producir resonancia de borde. Consecuentemente, el número de elementos requerido para resolver el problema de reflexión con la formulación híbrida presentada es mucho menor que en [24]. Por otro lado, la técnica de Cho y Rose produce malos resultados cerca de las frecuencias umbrales, también a causa de los modos evanescentes. Esta limitación se ve superada con la formulación presentada en esta tesis.

6.4.3 Bordes inclinados

Es habitual encontrar placas con alguno de sus bordes inclinados, como por ejemplo en la ejecución de soldaduras a tope de dos placas con preparación previa de los bordes. En este apartado se estudia la reflexión de ondas de Lamb en esos casos. Para ello se analizará una placa homogénea semi-infinita de espesor $2h=1\text{mm}$ con un borde libre plano e inclinado un ángulo θ con respecto al eje vertical. Una onda monocromática (S0 ó A0) procedente de $x = -\infty$ incide sobre el extremo. El material de la placa es acero, cuya densidad es $\rho=7.8\text{kg/dm}^3$ y cuyas velocidades de propagación de ondas de volumen son $c_L=5.94\text{ km/s}$ y $c_T=3.2\text{ km/s}$.

Debido a su geometría, este problema no puede resolverse directamente con la formulación de EF, como se realizó en el Apartado 6.4.1, por lo que se aplica la técnica híbrida EC-EF con mallas como las mostradas en la Figura 6.15. El contorno absorbente se coloca lo más cerca posible del borde para reducir el número de elementos en la región de EC. Se usan elementos cuadráticos de tamaño $L=h/4$

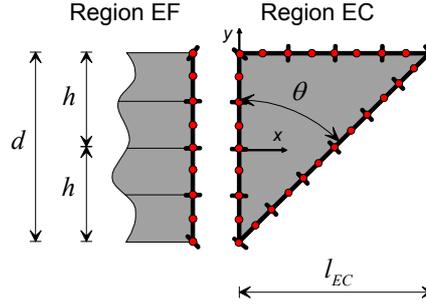


Figura 6.15. Malla híbrida EC-EF de un borde recto inclinado

para discretizar ambas regiones, lo cual proporciona según el criterio de mado resultados precisos para frecuencias hasta $f \cdot d = 6.4 \text{MHz} \cdot \text{mm}$.

Este problema se ha resuelto para dos ángulos $\theta = 45^\circ$ y 60° . Los resultados de la partición del flujo de energía entre los modos reflejados se muestran en las Figuras 6.16 y 6.17. Dado que en este caso no existe simetría de la geometría respecto al plano medio, se produce conversión cruzada entre modos simétricos y antisimétricos. El error en la conservación del flujo de energía es inferior al 1% en todo el rango de frecuencias estudiado. En la Figura 6.18 se muestra que los resultados obtenidos cumplen el principio de reciprocidad de la energía.

Para frecuencias por debajo de $\Omega_{A1} = \pi/2$ ($f \cdot d = 1.6 \text{MHz} \cdot \text{mm}$) se aprecia una conversión modal pequeña, con valores del coeficiente de conversión primario muy próximos a 1. Esto daría lugar a la obtención de una señal clara del eco de borde. Sin embargo para frecuencias más altas ese eco se reduce en gran medida. La conversión modal es mucho más pronunciada que el caso de borde transversal.

6.5 Ondas SH guiadas: Transmisión en placas sin defectos. Reflexión en bordes rectos

Como una comprobación básica de la implementación de la formulación híbrida antiplana de EC-EF, se abordan dos problemas sencillos de ondas SH guiadas para los que se dispone de solución analítica. En primer lugar se estudia la transmisión a través de placas homogéneas sin defectos, donde un modo incidente no experimenta ninguna conversión modal en absoluto. No hay energía reflejada, y el campo transmitido es simplemente el modo incidente

$$R_{I,m} = 0 \quad \forall m; \quad T_{I,I} = 1; \quad T_{I,m} = 0 \quad \forall m \neq I \quad (6.15)$$

En segundo lugar se estudia la reflexión en un borde transversal recto. Dado que la estructura de desplazamientos a través del espesor de la placa para los modos

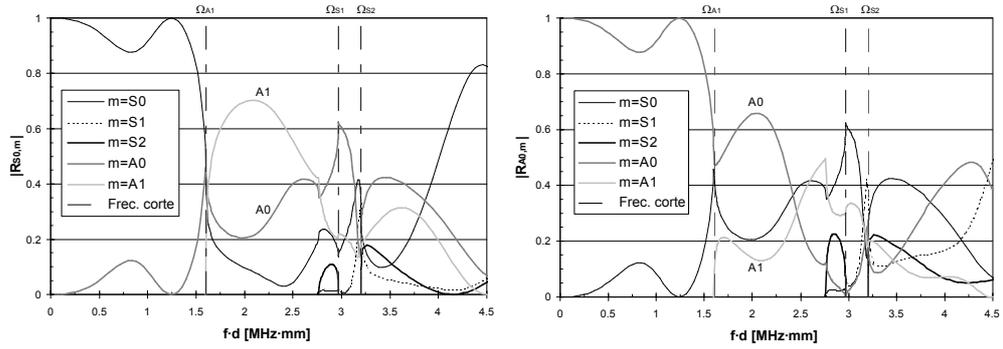


Figura 6.16. Reflexión de los modos S0 y A0 en un borde libre recto e inclinado 45°

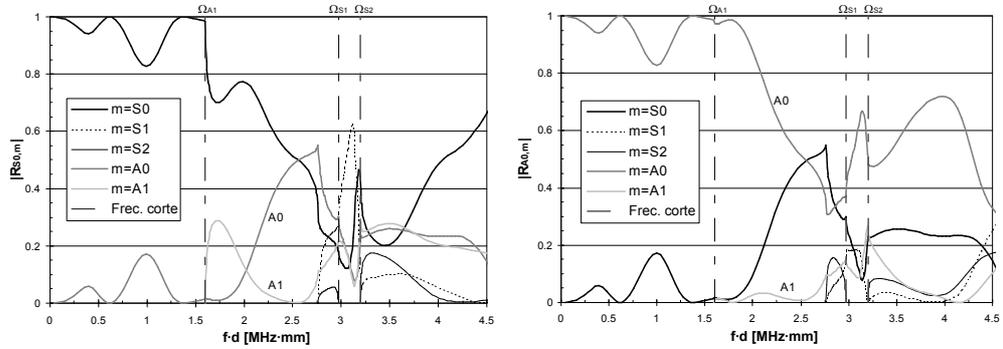


Figura 6.17. Reflexión de los modos S0 y A0 en un borde libre recto e inclinado 60°

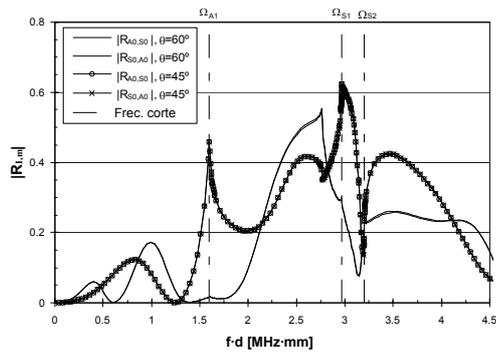


Figura 6.18. Comprobación del principio de reciprocidad del flujo de energía en los resultados numéricos de reflexión de ondas de Lamb en bordes libres rectos e inclinados

SH guiados no depende de la dirección de propagación (en contraste con el caso de modos de Lamb), la reflexión en un borde transversal recto no produce conversión modal. Los modos en el campo reflejado son los mismos que en el campo incidente, pero propagándose en dirección opuesta. Sus respectivos factores de participación se obtienen aplicando la condición de contorno en el borde sobre el desarrollo en modos normales de la placa semi-infinita. Para una onda incidente monocromática, el coeficiente de reflexión primario vale 1 para borde libre y -1 para borde empotrado

$$R_{I,I} = \pm 1; \quad R_{I,m} = 0 \quad \forall m \neq I \quad (6.16)$$

Este comportamiento contrasta con el observado para ondas de Lamb en los apartados anteriores, donde aparece un conversión modal muy importante que incluso da lugar a la denominada resonancia de borde [108, 10]. La mayor complejidad de la difracción de ondas en este caso se debe a la presencia de ondas P y S, mientras que en el caso de ondas SH guiadas sólo hay ondas del segundo tipo.

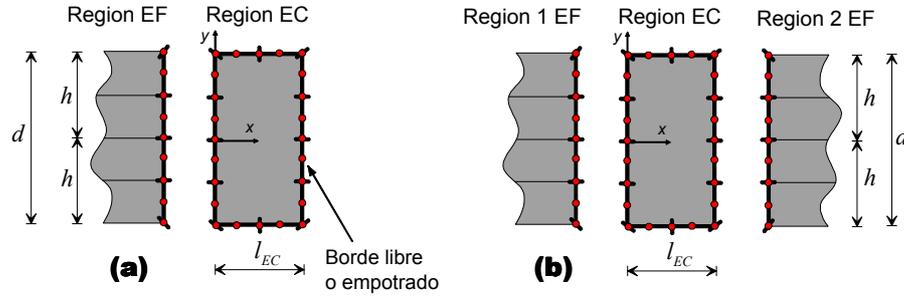


Figura 6.19. Muestra de las mallas híbridas empleadas para estudiar la difracción de ondas SH guiadas en: (a) borde libre/empotrado de una placa semi-infinita; (b) placa infinita sin defectos.

La aplicación numérica de la técnica híbrida EC-EF se realiza sobre una placa de espesor $d=2h=2\text{mm}$, con un material cuyas propiedades son $\rho=1 \text{ kg/dm}^3$ y $c_T=1 \text{ km/s}$. La malla utilizada consta de 8 elementos finitos cuadráticos en cada contorno absorbente y 18 elementos de contorno cuadráticos, con un tamaño de elemento $L=0.25\text{mm}$. Los resultados, de acuerdo con el criterio de mado, son precisos para frecuencias inferiores a $\Omega_{\max} = 2\pi$. La longitud de placa discretizada con EC abarca un único elemento, $l_{EC} = L$. Ambos problemas se resuelven con la misma malla de EC, pero con distinto número de contornos absorbentes (dos en el primer caso, y uno sólo en el segundo caso), como se muestra en la Figura 6.19.

En el rango de frecuencia considerado existen cuatro modos SH guiados reales. Cada uno de ellos se ha empleado como onda incidente monocromática. Los resultados numéricos reproducen la solución analítica en todos los casos, mostrando una conversión modal insignificante. Como medida de la precisión de dichos resultados, se muestran en la Tabla 6.3 los valores máximos del error en el balance de energía,

Modo SH incidente	Error en el balance de energía (%)	
	Borde recto	Placa infinita sin defectos
SH0	0.02	0.01
SH1	0.04	0.02
SH2	0.23	0.06
SH3	1.14	0.3

Tabla 6.3. Resultados para problemas sencillos de difracción de ondas SH guiadas

calculados con la ec. (6.2), en todo el rango de frecuencias considerado. Se observa que dicho error aumenta para modos superiores, lo cual se debe a que, para la misma frecuencia, la estructura modal de los modos más altos presenta una mayor complejidad, con un número más elevado de picos y valles en el espesor. Al considerar una malla fija, la representación de deformadas más complejas resulta menos precisa. En general, los errores son pequeños, menores que con otras técnicas, y su origen es principalmente numérico.

6.6 Delaminación infinita. Ondas de Lamb.

Las delaminaciones son uno de los defectos más frecuentes que pueden aparecer en placas laminadas. Teniendo en cuenta que la geometría constituye una guía de onda, se pueden aprovechar todas las ventajas de las ondas guiadas (distancias de propagación elevadas, etc) para realizar su detección remota con técnicas ultrasónicas [110, 95, 96, 105]. Para poner esta idea en práctica es necesario conocer la difracción de dichas ondas por delaminaciones. Como primer paso para entender estos problemas, en este apartado se estudia una situación concreta con una geometría y condiciones de contorno aparentemente sencillas. Se trata de la difracción de ondas de Lamb por delaminaciones de espesor despreciable y longitud infinita situadas en el plano de simetría de una placa homogénea, elástica e isotrópica, suponiendo que las superficies de la delaminación están libres de tracciones y que no se produce contacto entre ellas. Rokhlin [93] abordó analíticamente este problema, sin incluir la concentración de tensiones en el vértice de la delaminación. Empleando la técnica de Wiener-Hop, obtuvo una expresión analítica de los coeficientes de conversión modales (reflexión y transmisión) válida para cualquier frecuencia, que constituye la única solución explícita a problemas de difracción de ondas de Lamb disponible en la literatura. Sin embargo, su procedimiento de solución está completamente restringido a las condiciones particulares de material (placa homogénea de material elástico lineal) y geometría (delaminación situada en el plano medio de la placa) descritas. Por otro lado, la flexibilidad de la técnica híbrida EC-EF permite abordar esta situación sin ningún tipo de consideración especial.

Para resolver este problema se utiliza una placa de acero de espesor $d=2h=2\text{mm}$,

cuyas propiedades son $\rho=7.8\text{kg/dm}^3$, $c_L=5.94\text{km/s}$, $c_T=3.2\text{km/s}$. Una representación esquemática de las mallas híbridas empleadas para resolver este problema se muestra en la Figura 6.20. La región delaminada se reproduce como dos placas de espesor h (regiones 2 and 3) entre las que no existe interacción. La región 1 corresponde a la zona intacta de la placa. La malla empleada utiliza 12 elementos cuadráticos en el espesor d , lo cual proporciona buenos resultados para frecuencias adimensionales $\Omega = \omega h/c_T \leq 3\pi$, según el criterio de mallado. La región de EC tiene un único elemento en cada superficie libre de la placa, reduciéndose la longitud de placa discretizada a $l_{EC} = d/12$. En total se usan 53 nodos de EC y 49 nodos de EF.

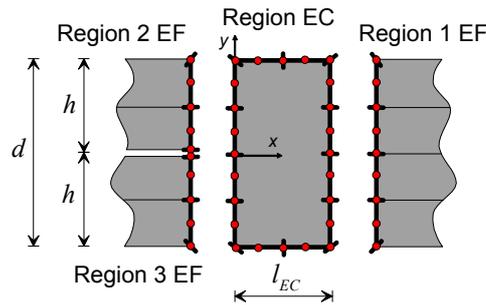


Figura 6.20. Delaminación infinita de espesor despreciable: malla híbrida EC-EF

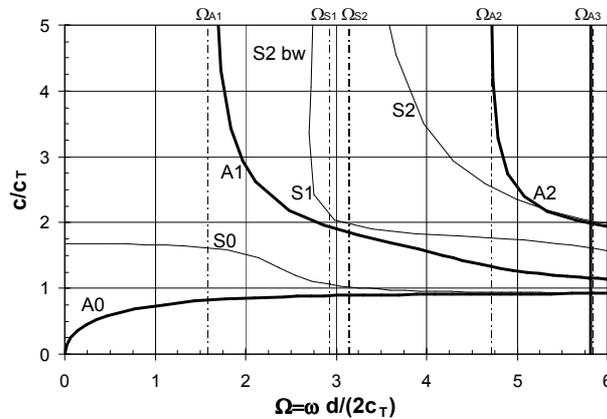


Figura 6.21. Curvas de dispersión velocidad de fase-frecuencia para una placa de acero

Las curvas de dispersión para ondas de Lamb en una placa infinita de espesor d se muestran en las Figuras 6.21 y 6.22, donde las líneas delgadas corresponden a modos simétricos (S) y las líneas gruesas a modos antisimétricos (A). Las velocidades

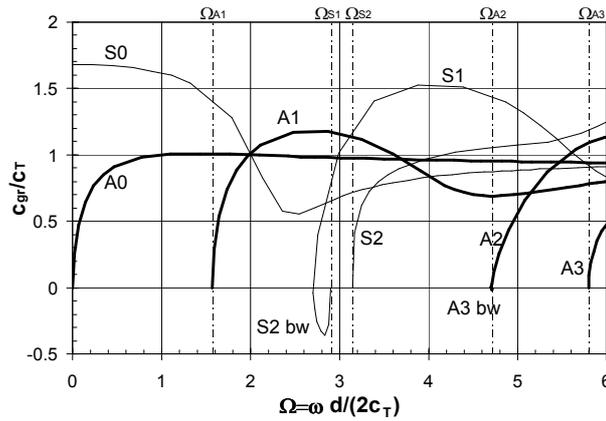


Figura 6.22. Curvas de dispersión velocidad de grupo-frecuencia para una placa de acero

de fase y de grupo adimensionales, c/c_T y c_{gr}/c_T respectivamente, se representan respecto a la frecuencia adimensional Ω .

En la Figura 6.22 aparecen las ramas con velocidades de grupo negativas correspondientes a ondas “backward” (modos S2-bw y A3-bw en la Figura 6.22). El modo S2 presenta este tipo de comportamiento en el rango $\Omega \in [2.7, \kappa \pi/2]$, cuyo límite superior coincide con la frecuencia de corte del modo S1, siendo $\kappa = c_L/c_T$. Dicho modo S2 es evanescente para frecuencias en los rangos $[0, 2.7]$ y $[\kappa \pi/2, \pi]$, y es real con propagación normal para frecuencias superiores a su frecuencia de corte ($\Omega \geq \pi$). El modo A3 presenta el comportamiento “backward” en un rango de frecuencias muy estrecho $\Omega \in [4.709, 3\pi/2]$, cuyo límite superior es la frecuencia de corte del modo A2; apenas se aprecia con la escala de los gráficos.

El rango de frecuencias que se ha estudiado es $\Omega \in [0, 5.5]$. A la máxima frecuencia, el número de modos reales en la placa intacta (espesor d) es seis, tres S y tres A, con las siguientes frecuencias de corte: $\Omega_{S1,d} = \kappa \pi/2$, $\Omega_{S2,d} = \pi$, $\Omega_{A1,d} = \pi/2$, $\Omega_{A2,d} = 3\pi/2$. En la región delaminada (espesor h), sólo hay tres modos reales, uno S y dos A, con la siguiente frecuencia de corte: $\Omega_{A1,h} = \pi = \Omega_{S2,d}$.

Para analizar la posibilidad de inspección remota del defecto con ondas guiadas se emplea una onda de Lamb monocromática incidiendo sobre la delaminación procedente de la región 1 (placa intacta). Debido a la simetría de la geometría respecto al plano medio, en el campo reflejado sólo pueden generarse modos del mismo tipo que el incidente. Sin embargo, el campo transmitido contendrá todos los modos posibles a la frecuencia considerada, tanto S como A. Los coeficientes de conversión modal se calculan como la fracción del flujo de energía transportado por cada modo, empleando para ello la ec. (6.4). En todos los gráficos con resultados de este problema se emplea escala logarítmica para los factores de conversión y lineal para la frecuencia. Las frecuencias de corte, tanto de la placa intacta como de las regiones

delaminadas, se marcan en los dibujos con líneas verticales de trazos y puntos. Los resultados numéricos obtenidos con la técnica híbrida EC-EF se muestran en las Figuras 6.23 y 6.24, para modos incidentes simétricos, y en las Figuras 6.25 y 6.26, para modos incidentes antisimétricos. Las expresiones analíticas de Rokhlin se han evaluado y se representan en las mismas figuras. Se observa que la comparación de los resultados numéricos con los analíticos es excelente en todos los casos, incluso en la vecindad de las frecuencias de corte, donde los modos evanescentes tienen una contribución importante en la solución y donde pueden aparecer ondas “backward”.

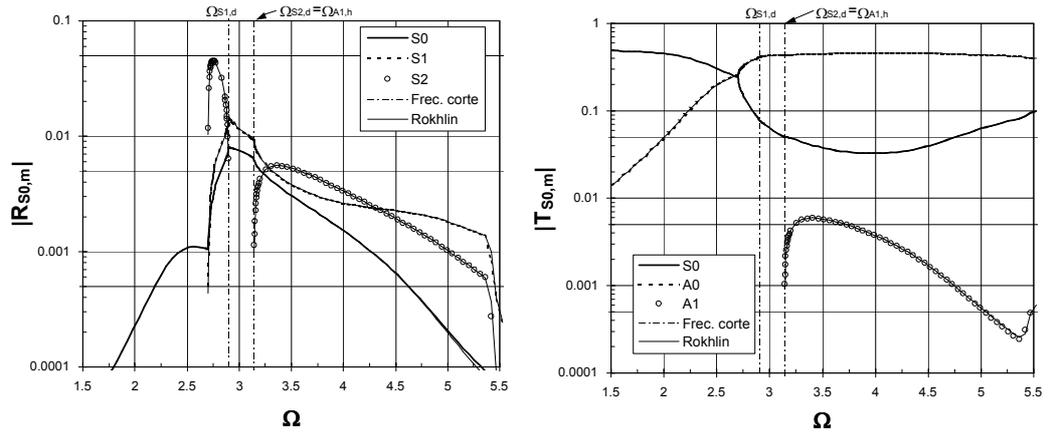


Figura 6.23. Modo S0 incidente desde la región 1. Factores de reflexión y transmisión.

Las curvas de los coeficientes de conversión son continuas en todo el rango de frecuencias, excepto en las frecuencias umbrales, que constituyen puntos de aparición de nuevos modos reales en los espectros de frecuencia reflejado o transmitido, donde se produce una discontinuidad en la pendiente.

Para frecuencias bajas sólo existen dos modos reales (los fundamentales: A0 y S0). Rokhlin obtuvo que el coeficiente de reflexión propio del modo S0, $R_{S0,S0}$, tiende rápidamente a cero para frecuencias bajas, mientras que el correspondiente al modo A0, $R_{A0,A0}$, tiende a 0.0292. La técnica híbrida descrita reproduce ambas tendencias, y para el segundo límite proporciona un valor de 0.0294.

Los coeficientes de conversión secundarios, es decir, correspondientes a modos difractados distintos del modo incidente, son siempre nulos para la frecuencia en que el modo difractado se convierte en real, excepto en las frecuencias donde se originan ondas “backward”. Estas excepciones son detectables en las figuras en el punto donde aparecen las ondas S1 y S2 “backward”, y el punto donde se originan las ondas A2 y A3 “backward”.

Para modos A1 incidentes se presenta un hecho de interés: a la frecuencia adimensional $\Omega = \pi\sqrt{2}$ todos los coeficientes de conversión modal se anulan, excepto

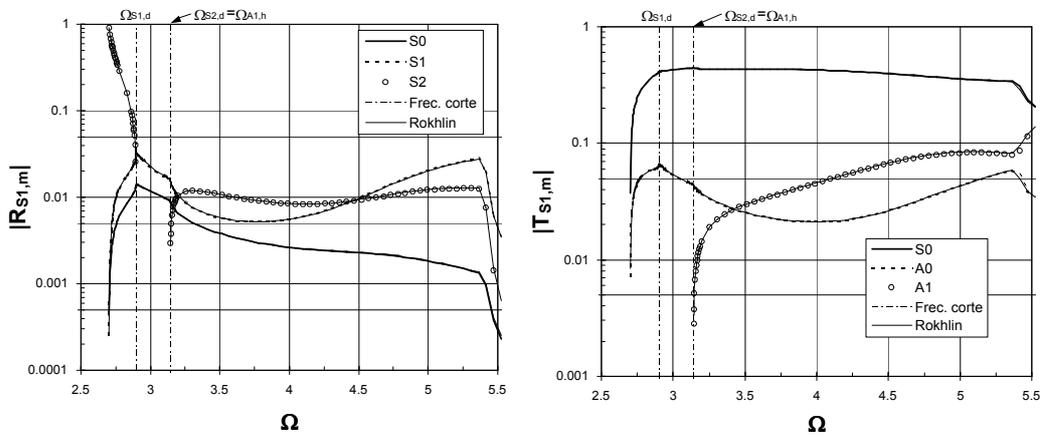


Figura 6.24. Modo S1 incidente desde la región 1. Factores de reflexión y transmisión.

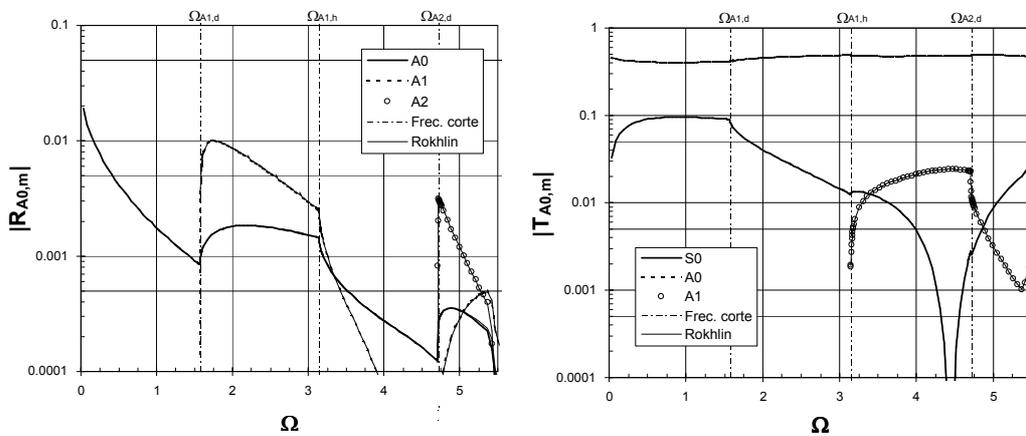


Figura 6.25. Modo A0 incidente desde la región 1. Factores de reflexión y transmisión.

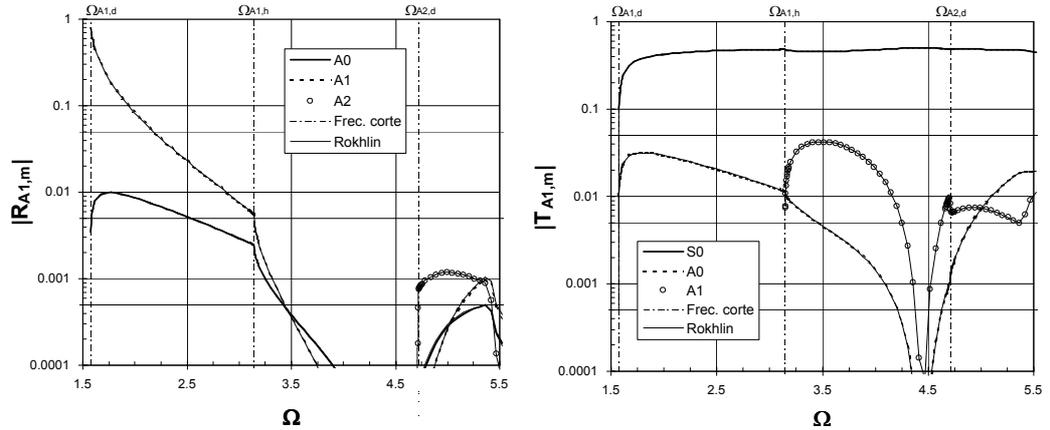


Figura 6.26. Modo A1 incidente desde la región 1. Factores de reflexión y transmisión.

$T_{A1,S0}$ que toma un valor 0.5. Esto implica que toda la energía incidente se transmite a la región delaminada, a partes iguales entre las regiones 1 y 2, y que el único modo generado es el modo S0. La explicación de este comportamiento se encuentra en los *modos de Lamé*, los cuales son casos particulares de los modos de Lamb para frecuencias concretas, a las que la velocidad de fase toma el valor $c/c_T = \sqrt{2}$. Para una placa de espesor b los modos de Lamé aparecen para frecuencias $\omega b/c_T = n\pi\sqrt{2}$ ($n=1,2,3,\dots$) y tienen un número de onda $kb = n\pi$, donde los valores impares de n corresponden a modos simétricos (asociados a los modos $S_{(n-1)/2}$), y los valores pares de n a modos antisimétricos (asociados a los modos $A_{n/2}$). La estructura modal tiene una expresión analítica conocida

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \end{pmatrix} &= c \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ -i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{bmatrix}, \quad n \text{ impar} \\ \begin{pmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \end{pmatrix} &= c \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ i \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{bmatrix}, \quad n \text{ par} \end{aligned}$$

La frecuencia mencionada inicialmente corresponde al segundo modo de Lamé de la región 1 ($n_d=2$, A1), y al primer modo de Lamé de las regiones 2 y 3 ($n_h=1$, S0). Las tensiones del modo A1 en el plano de la delaminación $y=0$ son nulas. Además la estructura del modo transmitido en el espesor h coincide exactamente con la mitad de la estructura del modo incidente en el espesor d , como se ilustra en la Figura 6.27. Por tanto, las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en la interfase de la delaminación pueden ser satisfechas con estos dos modos únicamente, a través de una superposición modal en la sección $x = 0$.

El mismo comportamiento descrito en el párrafo anterior sucederá para cualquier

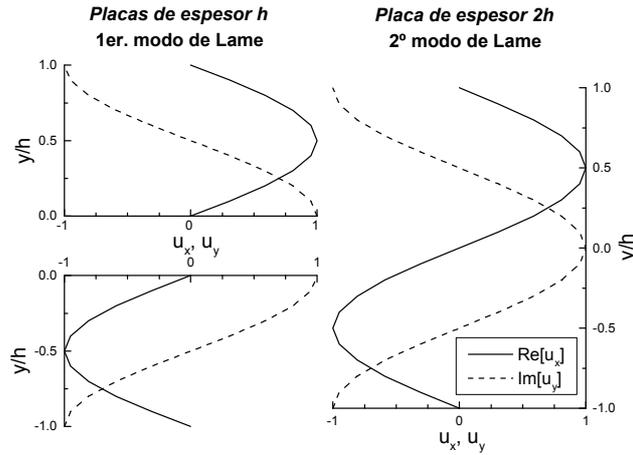


Figura 6.27. Visualización de los modos de Lamé a la frecuencia $\Omega = \pi\sqrt{2}$ en las tres regiones del problema de delaminación infinita

modo de Lamé antisimétrico incidente desde la región 1, $n_d = 2i$, con $i=1,2,3,\dots$, el cual corresponde al modo A_i de dicha región. Cuando este modo incide sobre la delaminación, su energía se transmitirá completamente a las regiones 2 y 3, generándose un único modo transmitido. Se trata precisamente del modo de Lamé de las regiones 2 y 3 que sucede a la misma frecuencia del modo incidente, esto es $n_h = i$, el cual puede ser simétrico o antisimétrico. La técnica híbrida EC-EF se aplicó a los tres primeros casos, que se recogen en la Tabla 6.4, y los resultados numéricos reproducen fielmente este comportamiento.

$(\Omega\sqrt{2})/\pi$	Modo incidente	Modo transmitido
1	A1 (2º modo de Lamé)	S0 (1er. modo de Lamé)
2	A2 (4º modo de Lamé)	A1 (2º modo de Lamé)
4	A3 (6º modo de Lamé)	S1 (3º modo de Lamé)

Tabla 6.4. Modos de Lamé incidiendo en una delaminación infinita.

Si se deseara detectar la delaminación con técnicas ultrasónicas, estos puntos de trabajo (frecuencia y modo incidente) deberían evitarse porque la presencia del defecto no produce ninguna perturbación detectable (ni en el campo reflejado -no hay eco-, ni en el transmitido -el único modo transmitido tiene la misma velocidad de fase y estructura modal que el modo incidente, y por lo tanto no pueden distinguirse uno del otro-).

Para poder distinguir experimentalmente dos modos a una cierta frecuencia, deben tener velocidades de fase distintas. Sólo de esa manera la ley de Snell permite discriminarlos eligiendo para ello ángulos de inclinación diferentes. Además, como

se emplean pulsos de duración finita y se realizan mediciones a distancia, las señales difractadas correspondientes a dos modos diferentes se recibirán separadas en el tiempo si las velocidades de grupo son suficientemente distintas (en ausencia de dispersión, habría separación modal si $d/c_{gr2} > d/c_{gr1} + t_{pulso}$, donde d es la distancia entre el defecto y el transductor, t_{pulso} es la duración temporal del pulso, $c_{gr2} < c_{gr1}$ son las velocidades de grupo de ambos modos).

En la Figura 6.28 se muestran las curvas de dispersión (velocidad de fase y de grupo frente a frecuencia) para dos placas infinitas de acero con espesores d y h , correspondientes a las regiones de EF 1 y 2 respectivamente. Observando dicha figura y teniendo en cuenta las consideraciones realizadas en el párrafo anterior, puede afirmarse que será difícil generar y recibir de forma independiente los siguientes modos: $S0, d$ y $S0, h$ en el rango $\Omega < 1.5$; $A1, d$ y $S0, h$ en el rango $\Omega \in [4, 5]$; $A0, d$ y $S0, d$ en el rango $\Omega > 4$; $A0, d$ y $A0, h$ en el rango $\Omega > 4$ y $\Omega < 0.5$.

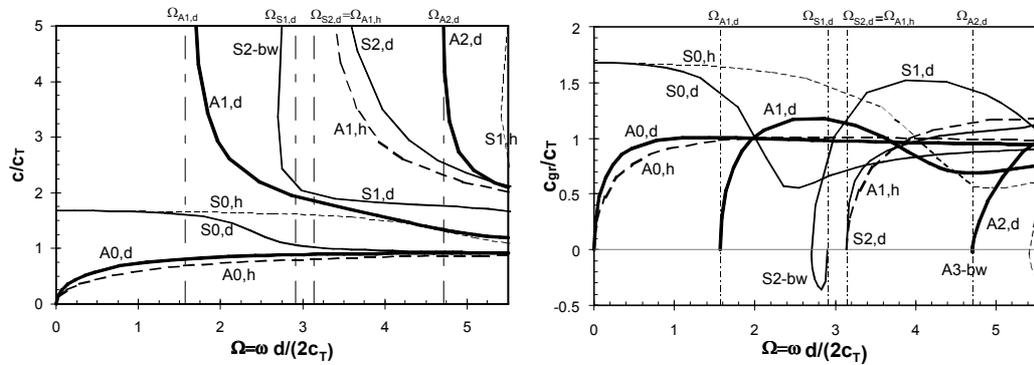


Figura 6.28. Superposición de las curvas de dispersión ($\bar{c} - \Omega$ y $\bar{c}_{gr} - \Omega$) de dos placas del mismo material pero distinto espesor ($d = 2h$ y h respectivamente).

Una posible técnica de inspección podría basarse en la medida del eco producido en el vértice de la delaminación al incidir una onda monocromática, aprovechando que en ausencia de defecto dicho eco se anula. A partir de los resultados numéricos obtenidos es posible sacar algunas conclusiones prácticas. Puede afirmarse que los modos fundamentales ($S0$ y $A0$) son poco sensibles a la presencia del defecto, puesto que producen ecos de muy pequeña magnitud ($|R| < 0.05$). Sin embargo los modos $S1$ y $A1$ podrían emplearse en ciertos rangos de frecuencia estrechos, donde sufren una reflexión importante: $\Omega \in [2.7, \kappa\pi/2]$ para el modo $S1$ (donde $R_{S1, S2-bw}$ es dominante), y $\Omega \in [\pi/2, 2.1]$ para el modo $A1$ (donde $R_{A1, A1}$ tiene un valor elevado).

Otra posible configuración para detectar la delaminación podría basarse en la medida de la señal transmitida, que en ausencia de defecto debería coincidir completamente con la señal incidente (no existe eco ni conversión modal en una placa intacta). Para ello es necesario seleccionar un modo incidente que, en presencia de

la delaminación, produzca una transmisión de energía elevada y concentrada en algún modo concreto. Además, para que sea posible distinguir experimentalmente el modo transmitido del incidente, ambos deberán tener velocidades de fase diferentes. Atendiendo a estos dos criterios, pueden seleccionarse los siguientes coeficientes de transmisión para detectar la delaminación: $T_{S0,A0}$ en el rango $\Omega \in [2.5, 5.5]$, donde el modo A0 transporta una fracción superior al 20% de la energía incidente; $T_{S0,S0}$ para $\Omega \in [1.5, 2.75]$; $T_{S1,S0}$ para $\Omega \in [2.75, 5.5]$; $T_{A0,A0}$ para $\Omega \in [0.5, 4]$; $T_{A1,S0}$ para frecuencias inferiores a 5.5, excepto en el rango $\Omega \in [3, 4]$ donde las velocidades de fase de ambos modos prácticamente coinciden.

6.7 Cambio brusco de sección. Ondas SH guiadas.

Tanto el comienzo como el final de un defecto pueden modelarse en muchos casos como un cambio de sección más o menos localizado. Además, si la longitud del defecto es mucho mayor que la longitud del pulso ultrasónico utilizado, se produce un desacoplamiento temporal entre ambos bordes. Por otro lado, existen muchas geometrías fabricadas con cambios bruscos de sección. Surge la cuestión de si la presencia de esta geometría impide la detección de defectos más allá del cambio de sección.

En este apartado se utiliza una placa, cuyas propiedades son $\rho=1 \text{ kg/dm}^3$ y $c_T=1 \text{ km/s}$, que sufre un salto brusco y simétrico de su sección transversal. Los espesores de la placa a izquierda y derecha de la discontinuidad se designan como d_1 y d_2 , respectivamente. Para estudiar la difracción de ondas SH guiadas en esta geometría se emplea una malla híbrida de EC-EF uniforme, como la mostrada esquemáticamente en la Figura 6.29. La longitud de placa incluida en la región de EC, l_{EC} , contiene dos elementos a cada lado de la discontinuidad $l_{EC} = 4L$.

La reflexión del modo SH0 en una geometría como la indicada fue estudiada numéricamente por Koshiya y otros [69] empleando un método global-local de elementos finitos en el dominio de la frecuencia. En dicho método, el entorno de la discontinuidad fue discretizado con elementos finitos triangulares cuadráticos, y el campo elastodinámico en las placas lejos de la discontinuidad fue expresado mediante un desarrollo analítico truncado en modos normales. La limitación de esta técnica es que está restringida a problemas de difracción de ondas SH guiadas en placas homogéneas, los únicos donde es posible plantear una superposición modal analítica porque el espectro de frecuencia tiene una expresión cerrada, ec. (2.27). Además, Koshiya no proporcionó un criterio para decidir ni el número de modos ni el tamaño de elemento necesario.

La máxima frecuencia adimensional analizada es $\omega d_1/c_T = 8$, para la cual existen un total de tres modos reales (SH0, SH1 y SH2) en la placa de mayor espesor. Aplicando el criterio de mallado se selecciona un tamaño de elemento $L=\pi/12\text{mm}$. Así, la malla de mayor tamaño empleada contiene 22 elementos de contorno y 12

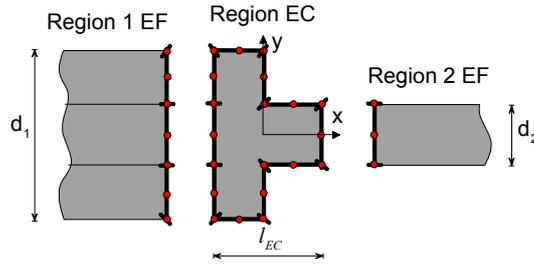


Figura 6.29. Cambio brusco y simétrico del espesor de una placa. Malla híbrida EC-EF

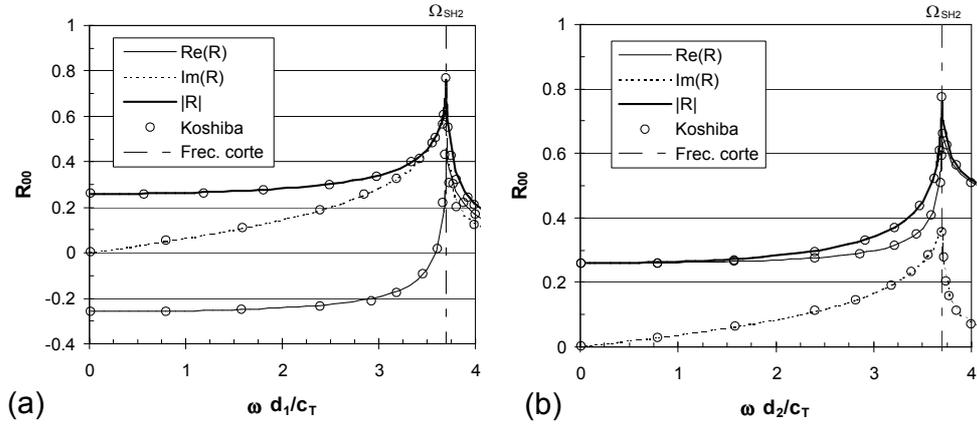


Figura 6.30. Coeficiente de reflexión propio del modo SH0 en: (a) un ensanchamiento brusco ($d_1=1\text{mm}$, $d_2=1.7\text{mm}$), (b) un estrechamiento brusco ($d_1=1.7\text{mm}$, $d_2=1\text{mm}$). Koshiba02

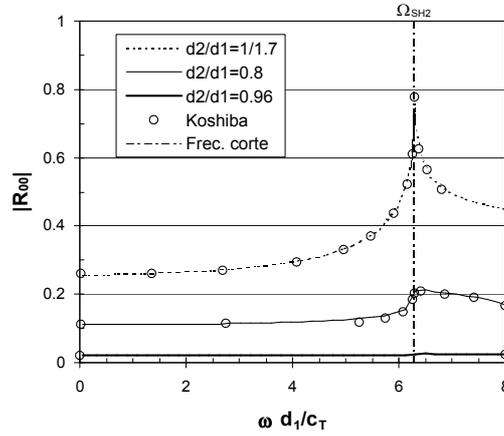


Figura 6.31. Coeficiente de reflexión propio del modo SH0 en un estrechamiento brusco de sección de la placa ($d_1=1\text{mm}$) para diferentes valores de $d_2/d_1 < 1$.

elementos finitos repartidos en dos contornos absorbentes. Dado que Koshiha [69] no menciona el número de elementos empleados en sus cálculos, no se puede realizar una comparación. Para calcular los coeficientes de conversión modal se utiliza la ec. (6.3).

Debido a la simetría de la geometría con respecto al plano medio, no se produce conversión cruzada entre modos SH simétricos y antisimétricos. Por tanto, en el rango de frecuencias considerado el modo SH0 (simétrico) no generará modos SH1 (antisimétricos) en el campo difractado. Este comportamiento es reproducido fielmente por los resultados numéricos obtenidos con la técnica híbrida de EC-EF.

Los resultados para un caso de ensanchamiento brusco de una placa ($d_1=1\text{mm}$, $d_2=1.7\text{mm}$) se presentan en la Figura 6.30(a), mientras que una situación de estrechamiento de la placa ($d_1=1.7\text{mm}$, $d_2=1\text{mm}$) se muestran en la Figura 6.30(b), representándose las curvas en ambos casos frente a la frecuencia adimensional, $\omega d_{min}/c_T$, donde $d_{min} = \min(d_1, d_2)$. También se han estudiado varias geometrías con un valor fijo de $d_1 = 1\text{mm}$ y varios valores de $d_2 \leq d_1$, mostrándose los resultados frente a la frecuencia adimensional $\omega d_1/c_T$ en la Figura 6.31. En esta última gráfica no se incluye el caso límite $d_2/d_1 = 1$ porque corresponde a una placa sin defecto donde no existe conversión modal, como se indicó anteriormente en el apartado 6.5. En todos los casos se observa una buena comparación con los resultados de Koshiha [69].

En la frecuencia de corte del modo SH2 de la placa más gruesa ($\Omega_{SH2} = \frac{\omega d_{max}}{2c_T} = \pi \Rightarrow \omega_{SH2} = \frac{2\pi c_T}{d_{max}}$) se observa un cambio brusco en la pendiente de las curvas. Para dicha frecuencia el modo SH2 deja de ser evanescente y se transforma en real, por lo cual se convierte en un nuevo término de la superposición modal con capacidad para transportar energía hacia el infinito. Mediante conversión modal, una fracción de la energía incidente se transforma en modos SH2 (reflejado y transmitido). Sin embargo, a la frecuencia de corte del modo SH1 no hay cambio en las curvas porque la geometría simétrica no produce conversión cruzada entre modos simétricos y antisimétricos.

La transmisión de energía más allá del cambio de sección es muy elevada (superior al 50%, incluso para una variación del 70% en el espesor de la placa), excepto en las proximidades de la frecuencia de corte Ω_{SH2} . Consecuentemente, es posible enviar señales de elevada intensidad más allá del salto de sección, y además detectar las reflexiones que se produzcan si dichas señales alcanzan algún defecto. Por lo tanto, sería posible detectar defectos a través de cambios de sección con ondas SH guiadas para frecuencias inferiores a Ω_{SH2} .

6.8 Defectos superficiales. Ondas de Lamb.

En este apartado se estudia la interacción de ondas de Lamb con defectos superficiales. Este tipo de defectos pueden producirse por la corrosión u otras causas.

6.8.1 Defecto rectangular

La difracción de ondas de Lamb por defectos rectangulares en la superficie de una placa de acero ($\rho=8 \text{ kg/dm}^3$, $c_L=5.96 \text{ km/s}$, $c_T=3.26 \text{ km/s}$) fue resuelto en primer lugar por Alleyne y Cawley [8] y después por Cho y Rose [25]. Los primeros emplearon el MEF en el dominio del tiempo, postprocesando los resultados con una transformada rápida de Fourier (FFT) bidimensional para extraer la información modal. Los segundos combinaron el MEC en el dominio de la frecuencia con una superposición modal analítica en la cual sólo incluyeron los modos reales.

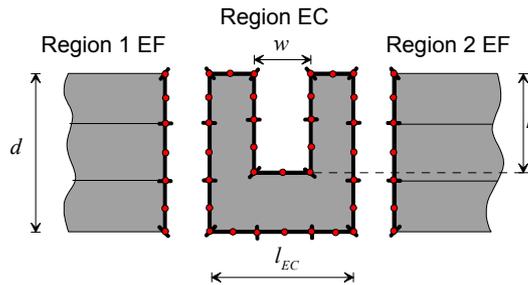


Figura 6.32. Malla híbrida de EC-EF de un defecto rectangular superficial

La formulación híbrida de EC-EF desarrollada se aplica a este problema, cuya geometría queda definida con tres parámetros: espesor de la placa d , profundidad del defecto h y ancho del defecto w . Una muestra de las mallas empleadas se representa en la Figura 6.32; incluye una región de EC y dos regiones de EF. El ancho de la primera de ellas se fija en un valor pequeño, $l_{EC} = w + 2L$, donde L es el tamaño de elemento. A efectos de cálculo se supone una placa de acero de espesor $d=3\text{mm}$. Las curvas de dispersión son prácticamente coincidentes con las correspondientes al problema de la delaminación infinita, Figuras 6.21 y 6.22.

Por motivos de comparación con Alleyne y Cawley [8], se estudian dos rangos de frecuencia correspondientes a los anchos de banda de los transductores ultrasónicos empleados en sus experimentos: $f \cdot d \in [1.1, 1.6] \text{ MHz}\cdot\text{mm}$, donde sólo existen dos modos reales (S0 y A0), y $f \cdot d \in [1.9, 2.6] \text{ MHz}\cdot\text{mm}$, donde existen tres modos reales (S0, A0 y A1). Las frecuencias próximas a la frecuencia de corte del modo A1 fueron explícitamente evitadas por dichos autores en sus cálculos. Las mallas híbridas empleadas en ambos rangos de frecuencia son uniformes, con 4 y 6 elementos en el espesor, respectivamente.

Se emplean ondas de Lamb monocromáticas que inciden sobre el defecto procedentes de la región 1. Los campos reflejados y transmitidos contienen todo el espectro de modos posibles (S y A) a la frecuencia considerada. Los factores de conversión modal se calculan como los desplazamientos verticales superficiales de cada modo normalizados por los desplazamientos verticales superficiales del modo

Método de solución	Nº de nodos
Modelo de EF en el dominio del tiempo [8]	20000
MEC- superposición modal analítica [25]	400-500
Técnica EC-EF desarrollada	78

Tabla 6.5. Comparación de tamaños de malla. Defecto rectangular superficial.

incidente, a través de la ec. (6.5). Todos los resultados se presentan en gráficos con escala lineal en ambos ejes.

En primer lugar se estudia un modo A1 incidente sobre defectos de ancho fijo $w/d=1/6$ y varias profundidades diferentes $h/d=1/6, 1/3, 1/2$ y $2/3$. Los factores de transmisión propios del modo A1 para el rango de frecuencias más elevadas se muestran en la Figura 6.33, donde también se incluyen los resultados de las Referencias [8, 25]. Las tres técnicas producen resultados muy similares en todo el rango de frecuencias.

Los tamaños de malla requeridos por las tres técnicas se recogen en la Tabla 6.5, en la que se observa una diferencia de órdenes de magnitud entre ellos. El modelo de EF en el dominio del tiempo exige extender la discretización hasta distancias suficientemente alejadas del defecto para evitar la interferencia de reflexiones espúreas de los contornos artificiales, lo cual explica su mayor exigencia en número de nodos respecto a las otras alternativas. En el segundo método [25] el desarrollo en modos normales no incluye modos evanescentes, los cuales tienen una contribución importante en la proximidad de los defectos y en el entorno de las frecuencias de corte. Por esta razón, Cho y Rose deben situar los contornos absorbentes separados del defecto y a una distancia mínima de un espesor. Sin embargo, en la técnica híbrida de EC-EF la condición de contorno absorbente puede colocarse tan próxima al defecto como se desee, puesto que incluye modos evanescentes en su desarrollo, lo cual explica su mínimo requerimiento de nudos.

Se ha estudiado la interacción de un modo A0 con los defectos de la misma geometría ya descrita. Los coeficientes de reflexión en el rango de frecuencias más bajas para todos los modos posibles se muestran en la Figura 6.34. La comparación con los resultados de la Referencia [8] es muy buena. Las figuras muestran una pronunciada variación de los coeficientes de reflexión con la frecuencia, especialmente para los defectos más profundos.

Un estudio similar se realizó para modos S0 incidiendo sobre defectos de varias geometrías: ancho fijo $w/d=1/6$ y varias profundidades $h/d=1/12, 1/4$ y $1/3$. Los coeficientes de conversión modal en el campo reflejado para el rango de frecuencias más bajas se muestran en la Figura 6.35. Se observan algunas discrepancias en el valor de las amplitudes, aunque las tendencias coinciden. El modo A0 transmitido es muy sensible a la profundidad del defecto, ya que experimenta un notable aumento de amplitud al incrementarse h/d , como se muestra en la Figura 6.35. Esta tendencia podría ser empleada para caracterizar el tamaño de un defecto mediante la medición

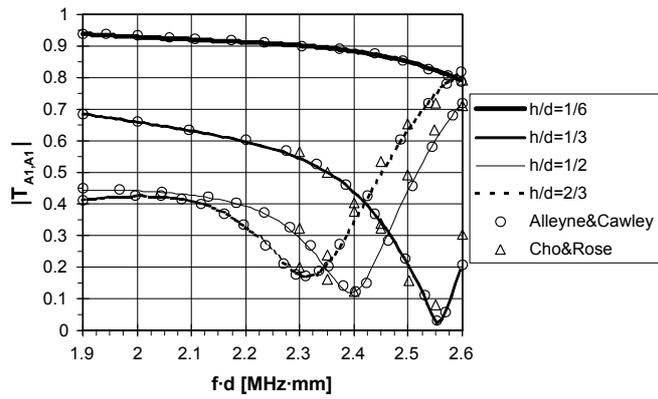


Figura 6.33. Modo A1 incidente en un defecto rectangular. Coeficiente de transmisión propio.

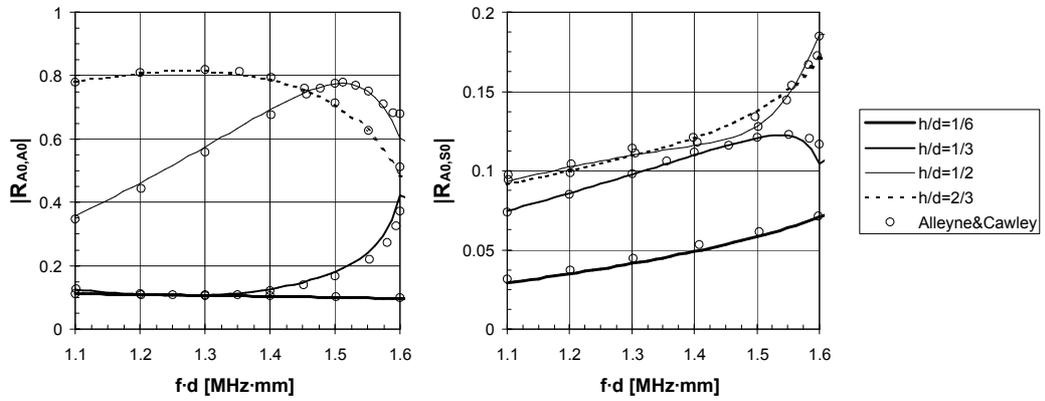


Figura 6.34. Modo A0 inciendi en un defecto rectangular. Coeficientes de reflexión.

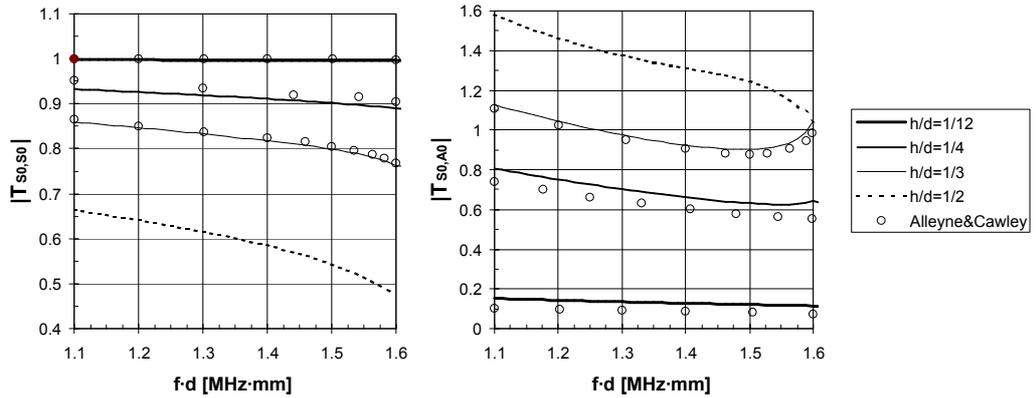


Figura 6.35. Modo S0 inciendi en un defecto rectangular. Coeficientes de transmisión.

del coeficiente de conversión secundario $|T_{S0,A0}|$.

La conversión modal en el campo transmitido para el rango de frecuencias más altas y para un modo A1 incidente se ha estudiado para varios defectos de ancho constante $w/d=1/6$ y distinta profundidad $h/d=1/6, 1/3, 1/2$ y $2/3$. Los resultados se muestran en la Figura 6.36, donde se observa una satisfactoria comparación con los resultados de la Referencia [8] en todo el rango de frecuencias.

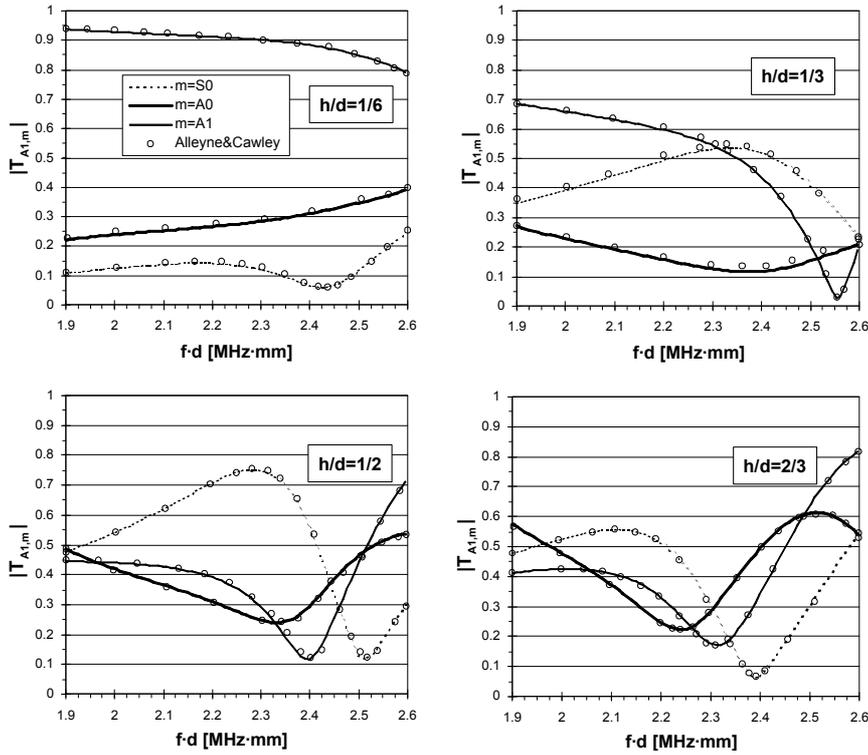


Figura 6.36. Modo A1 incidiendo en un defecto rectangular. Conversión modal en el campo transmitido.

6.8.2 Defecto elíptico

La difracción de ondas de Lamb por defectos elípticos superficiales en una placa de acero ($\rho=7.8 \text{ kg/dm}^3$, $c_L=5.94 \text{ km/s}$, $c_T=3.2 \text{ km/s}$) fue estudiada por Cho y Rose [23, 25] con una técnica híbrida que combina el MEC con una superposición modal analítica. La formulación híbrida EC-EF presentada se aplica a este problema empleando mallas como las mostradas en la Figura 6.37, con dos contornos absorbentes. La geometría queda definida por tres parámetros: espesor de la placa d , profundidad del defecto h y ancho del defecto $2s$. Los semiejes horizontal y vertical

del defecto elíptico son respectivamente s y h . En los cálculos numéricos se usa una placa de acero de espesor $d=1\text{mm}$, y un tamaño longitudinal de la región de EC de valor $l_{EC} = 2s + 2L$, donde L es el tamaño de elemento. Las curvas de dispersión para esta placa son prácticamente coincidentes con las mostradas en el problema de la delaminación, Figuras 6.21 y 6.22.

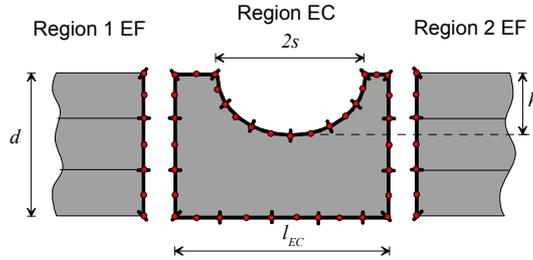


Figura 6.37. Malla híbrida de EC-EF de un defecto elíptico superficial

Se utilizan ondas de Lamb monocromáticas incidiendo sobre el defecto desde la región 1. El rango de frecuencias analizado es el mismo de las Referencias [23, 25], es decir, valores inferiores a la primera frecuencia de corte $f \cdot d < 1.63 \text{ MHz}\cdot\text{mm}$. Por tanto, sólo existen dos modos reales (S_0 y A_0). Los campos transmitidos y reflejados contienen todos los modos posibles (S y A) a la frecuencia considerada, y los coeficientes de conversión modal se calculan como los valores de los coeficientes de participación de cada modo en la expansión en modos normales del campo difractado, a través de la ec. (6.3). Su valor absoluto es la raíz cuadrada de la fracción de energía extraída por cada modo difractado, ec. (6.4). Todos los resultados se presentan en gráficos con escala lineal en ambos ejes.

En primer lugar se estudia la difracción de una onda de Lamb monocromática incidiendo sobre un defecto superficial alargado ($h/d=0.5$, $s/h=3$). Los coeficientes de reflexión y transmisión para incidencia de modos S_0 y A_0 se representan en la Figura 6.38, donde se comparan con la Referencia [25]. A continuación se analiza un defecto angosto ($h/d=0.5$, $s/h=0.2$), y los resultados para los mismos modos incidentes se muestran en la Figura 6.39. La comparación con la Referencia [25] es satisfactoria en ambos casos en todo el rango de frecuencia. La malla híbrida EC-EF empleada en los dos cálculos indicados contiene 98 nodos, muchos menos de los 400 a 500 nodos empleados en [25]. Como se indicó anteriormente, esta reducción del tamaño de la discretización se explica por la inclusión de modos evanescentes en la superposición modal de la técnica híbrida desarrollada en esta tesis.

Para analizar la influencia de la profundidad del defecto h/d en la difracción de ondas de Lamb en defectos angostos se ha realizado un estudio paramétrico para un rango de profundidades $h/d \in [0, 95\%]$. El resto de parámetros se mantienen fijos: $f \cdot d=1 \text{ MHz}\cdot\text{mm}$ y $s/d=0.05$. Los resultados para la incidencia de modos S_0

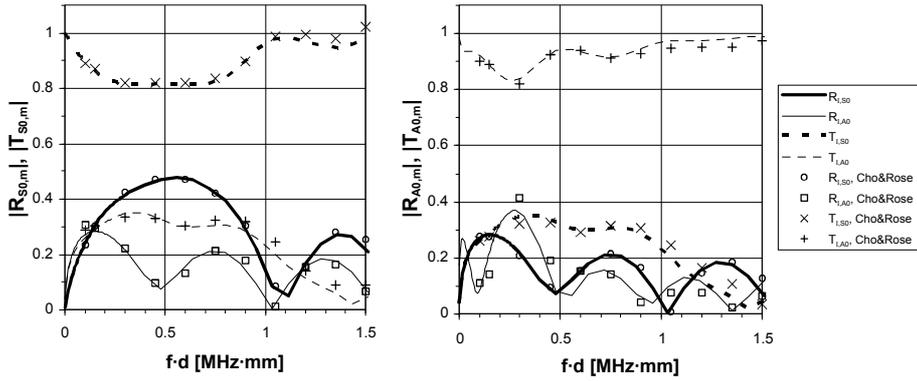


Figura 6.38. Modos S0 y A0 incidentes en un defecto superficial alargado ($h/d=0.5, s/h=3$)

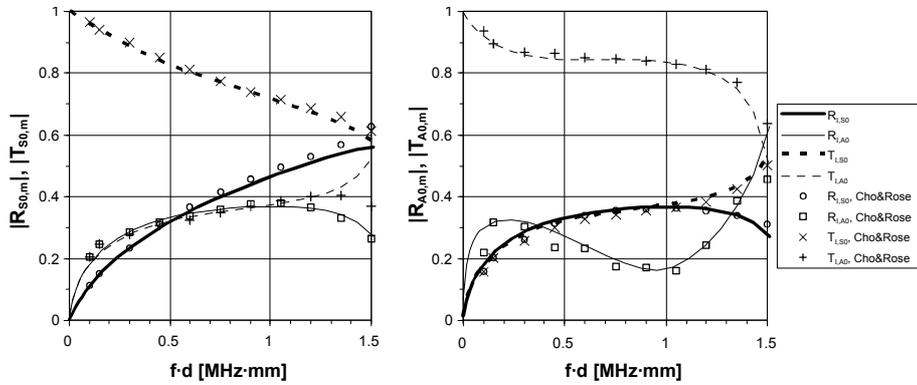


Figura 6.39. Modos S0 y A0 incidentes en un defecto superficial angosto ($h/d=0.5, s/h=0.2$)

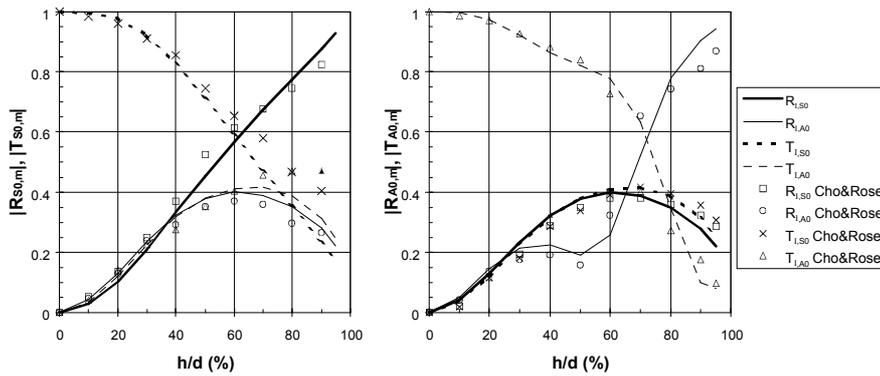


Figura 6.40. Variación de los coeficientes de conversión modal respecto a la profundidad del defecto para modos S0 y A0 incidentes ($f \cdot d=1$ MHz·mm y $s/d=0.05$)

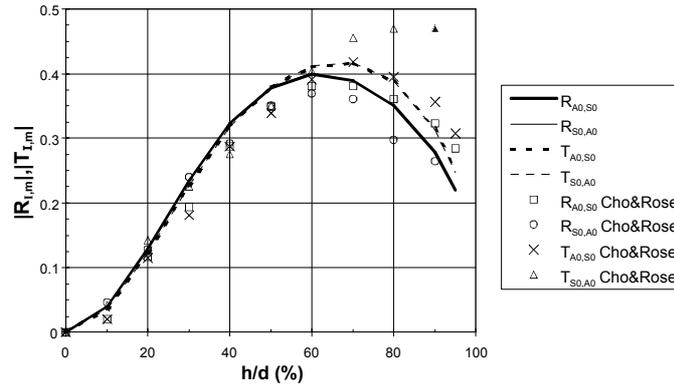


Figura 6.41. Comprobación de la reciprocidad en el flujo de energía en los resultados numéricos ($f \cdot d=1$ MHz·mm y $s/d=0.05$)

y A0 se muestra en la Figura 6.40, donde se observan algunas discrepancias con la Referencia [25]. Para confirmar la validez de los resultados obtenidos, en la Figura 6.41 se realiza una comprobación del principio de reciprocidad del flujo de energía. De acuerdo con este principio, el factor de conversión del modo S0 difractado bajo la incidencia del modo A0 debe coincidir con el factor de conversión del modo A0 difractado bajo la incidencia del modo S0. Este comportamiento es reproducido fielmente por los resultados numéricos presentados, mientras que en los resultados de Cho y Rose [25] se observan algunas diferencias.

6.9 Grietas

6.9.1 Grieta superficial normal. Ondas SH guiadas.

La interacción de ondas SH guiadas con grietas superficiales normales a la placa ha sido estudiada por Fortunko y otros [46] y Abduljabbar y otros [2]. Los primeros realizaron un estudio experimental empleando transductores electromagnéticos acústicos (EMAT), y calcularon numéricamente los coeficientes de reflexión aplicando un principio variacional. Los segundos emplearon un método numérico en el dominio de la frecuencia, combinando una discretización de EF de las cercanías de la grieta y una superposición modal analítica truncada de los campos reflejado y transmitido. Dicha superposición modal también contenía modos evanescentes, fáciles de incluir en este caso de ondas SH guiadas en placas homogéneas cuyas curvas de dispersión tienen una expresión analítica conocida, ec. (2.27). Utilizaron una discretización de EF que incluía el efecto de singularidad de las tensiones en el vértice de la grieta mediante el empleo de elementos cuadráticos con el nodo central desplazado a un cuarto (“quarter-point”). El error máximo que obtienen en la satisfacción del

balance de flujo de energía en la placa fue inferior al 2%.

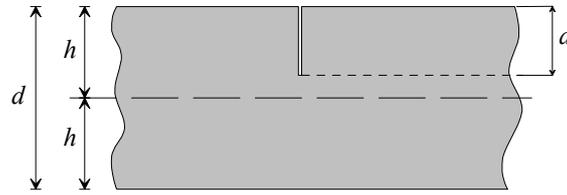


Figura 6.42. Geometría de grieta superficial normal a la placa

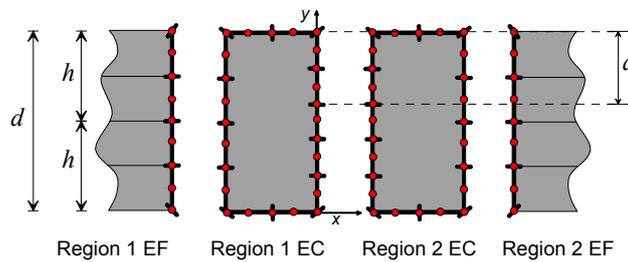


Figura 6.43. Malla híbrida EC-EF de una grieta superficial normal

La formulación híbrida de EC-EF desarrollada se aplica a este problema, empleando mallas como la mostrada en la Figura 6.43. La zona de la placa inmediatamente alrededor de la grieta se discretiza con EC, y se emplea la técnica de subdivisión del dominio, dado que no se utiliza la formulación hipersingular del MEC [30]. Como sólo estamos interesados en el campo difractado lejano, la singularidad de las tensiones en el vértice de la grieta no se incluye en el modelo de EC. Los coeficientes de conversión modal se calculan con la ec. (6.5), que corresponde a la definición empleada por Abduljabbar. La geometría queda definida con dos parámetros: el espesor de la placa d y la profundidad del defecto a . Se estudian grietas con profundidades en el rango $a/d \in [0.1, 0.9]$ y la máxima frecuencia adimensional considerada es $\Omega = \omega h/c_T = 4.5$ (para la cual existen tres modos SH reales). Para discretizar el espesor de la placa se emplean 9 elementos cuadráticos, elegidos de acuerdo con el criterio de mallado. Las curvas de dispersión adimensionales son las mostradas en la Sección 2.3, Figuras 2.2 a 2.4. Aunque los resultados se presentarán en forma adimensional, a efectos de cálculo se supone una placa de espesor $d=2h=1\text{mm}$ y las siguientes propiedades del material: $\rho=1\text{ kg/dm}^3$, $c_T=1\text{ km/s}$.

Si se denotan con R_{mn} y T_{mn} los coeficientes de reflexión y transmisión de la onda SH_n cuando una onda SH_m incide sobre la grieta, en una de las Referencias

de [2] se demuestra que

$$R_{mn} + T_{mn} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases} \quad (6.17)$$

Además, la relación de reciprocidad puede escribirse como

$$R_{mn} = R_{nm}; T_{mn} = T_{nm} \quad (6.18)$$

Estas dos relaciones se cumplen en los resultados numéricos con un error despreciable.

En primer lugar se presentan los coeficientes de conversión modal para tres valores fijos de la frecuencia adimensional. Para poder comparar los resultados con Abduljabbar y otros [2], se analizan las frecuencias $\Omega = \omega h/c_T = 0.75, 2.25$ y 4.5 , en las cuales existen respectivamente uno, dos y tres modos SH reales. Los resultados para un modo SH0 incidente se muestran en la Figura 6.44, y los resultados para modos SH1 y SH2 incidentes se representan en la Figura 6.45. En este último caso no se incluyen los coeficientes de conversión cruzada con los modos inferiores porque pueden obtenerse por reciprocidad. En todos los casos se observa que la comparación con los resultados de Abduljabbar es muy buena.

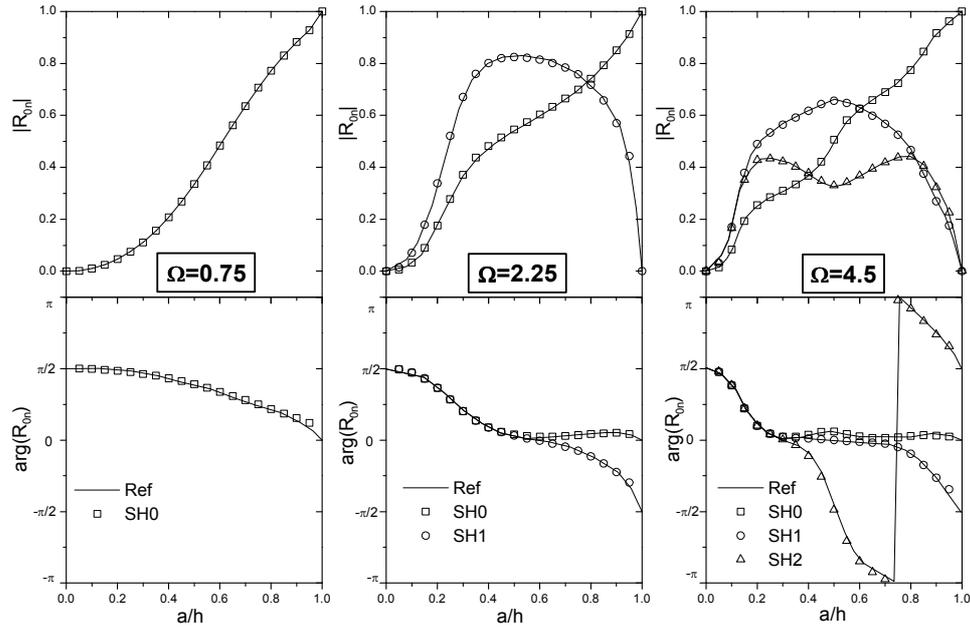


Figura 6.44. Modo SH0 incidente sobre grietas superficiales para valores constantes de Ω

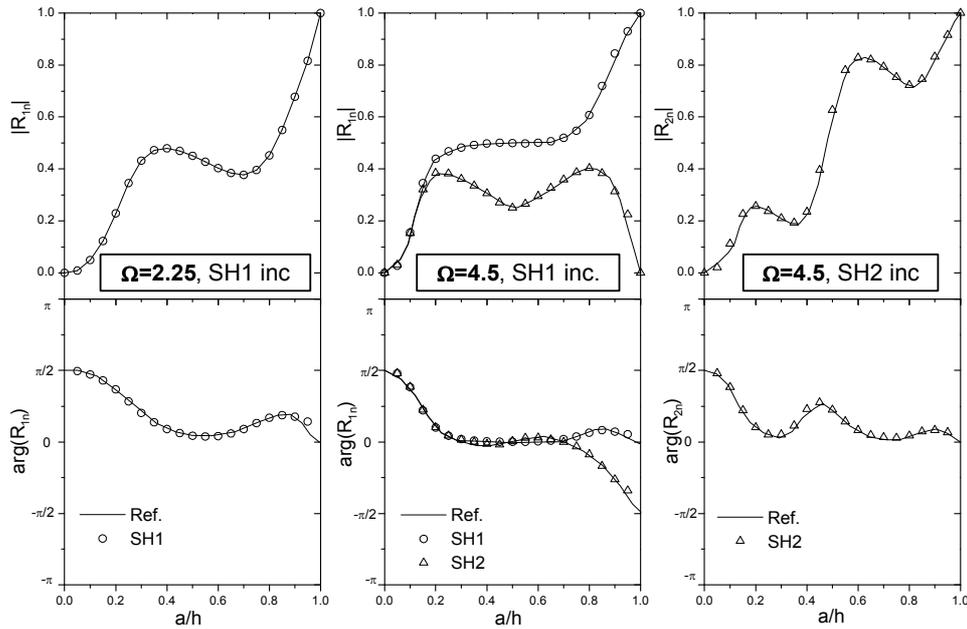


Figura 6.45. Modos SH1 y SH2 incidentes sobre grietas superficiales para valores constantes de Ω

En la Figura 6.44 se observa que el coeficiente de reflexión primario de un modo SH0 incidente en la grieta $|R_{00}|$, para las tres frecuencias analizadas, presenta una relación monótona creciente con el tamaño de la grieta. Este hecho podría emplearse en aplicaciones de inspección ultrasónica para localizar grietas y estimar su profundidad a partir de la medida experimental de dicho coeficiente de reflexión.

En la Figura 6.45 se aprecia que, para tamaños de grieta intermedios, $a/d \in [0.2, 0.8]$, el coeficiente de reflexión $|R_{11}|$ presenta una variación oscilante con a/d a la frecuencia más baja, y un valor prácticamente constante a la frecuencia más alta. Aunque la medición de ese coeficiente serviría para detectar la presencia de la grieta, no permitiría distinguir entre grietas cuyo tamaño estuviera comprendido en el rango mencionado.

A fin de estudiar con mayor detalle el potencial del modo SH0 en aplicaciones de inspección ultrasónica, se ha calculado el coeficiente de reflexión primario del modo SH0 incidente, $|R_{00}|$, para un rango de frecuencias amplio, $\Omega \leq 5.5$, y para varias profundidades de defecto distintas, $a/d \in [0, 1]$. Las curvas obtenidas por barrido en frecuencia se muestran en la Figura 6.46 para valores de la profundidad del defecto $a/d = m/10$, siendo m un número natural del 0 al 10. Las curvas correspondientes a valores pares de m aparecen dibujadas con línea discontinua, y las correspondientes a valores impares con línea continua. Las frecuencias de corte de los modos SH, $\Omega_n = n\pi/2$, se han marcado con líneas verticales de puntos y

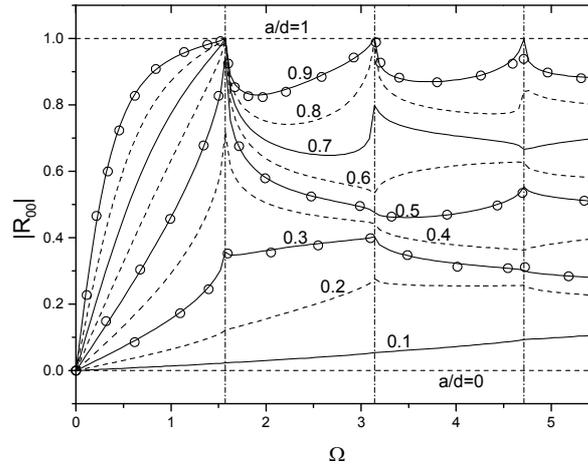


Figura 6.46. Coeficiente de reflexión primario $|R_{00}|$ de una onda SH0 incidiendo en una grieta superficial normal. Barrido en frecuencia para varias profundidades de grieta.

trazos. Se han dibujado con círculos los resultados de Abduljabbar ($a/d=0.3, 0.5$ y 0.9), y la comparación es satisfactoria.

La principal conclusión que puede extraerse de la Figura 6.46 es que, en todo el rango de frecuencias, un aumento de la profundidad del defecto produce un aumento del coeficiente de reflexión $|R_{00}|$. La sensibilidad de $|R_{00}|$ frente a variaciones del tamaño de la grieta depende de la frecuencia, comprobándose en la Figura 6.46 que la mínima sensibilidad sucede para frecuencias próximas a las dos primeras frecuencias de corte $\Omega = 0$ y $\pi/2$, para las cuales diferentes tamaños de grieta producen valores de $|R_{00}|$ idénticos (o muy parecidos).

6.10 Inclusión cilíndrica. Ondas SH guiadas.

Las láminas reforzadas con fibras continuas unidireccionales son componentes ampliamente utilizados en la fabricación de materiales compuestos. Uno de los parámetros esenciales para garantizar un comportamiento mecánico adecuado del laminado es la calidad de la unión entre el material base (matriz) y la fibra. La transmisión de esfuerzos entre ambos materiales se realiza a través de la interfase fibra-matriz.

En este apartado se pretende evaluar la aplicabilidad de las ondas guiadas para inspeccionar la calidad de la unión fibra-matriz. Para ello se analiza una situación simple, donde se supone que tanto la matriz como la fibra son elásticas e isotrópicas, y que las fibras son inclusiones cilíndricas situadas en el plano de simetría de la matriz. Se estudia la difracción de una onda SH guiada en la matriz cuando incide sobre una fibra con su frente de onda paralelo al eje de la misma. Las condiciones de contorno

en la interfase entre ambos materiales dependerán de la calidad de la unión. En este estudio tan sólo se analizan las dos situaciones extremas: unión perfecta (interfase soldada) y unión totalmente degradada (desacoplamiento completo de los desplazamientos y tensiones entre ambos materiales). Bajo condiciones de deformación antiplanas, este segundo caso es equivalente al de una cavidad cilíndrica.

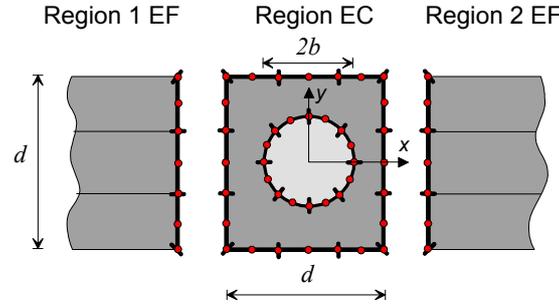


Figura 6.47. Placa con una inclusión cilíndrica. Malla híbrida EC-EF.

La difracción de ondas SH guiadas por una inclusión cilíndrica centrada en una placa fue estudiada por Wang y otros [112] empleando una técnica basada en expresar, por un lado, la solución elastodinámica en la placa como la superposición analítica de los infinitos modos de propagación, y por otro lado, la solución en las cercanías de la inclusión mediante un desarrollo en funciones de Bessel (ondas cilíndricas). Estos autores obtuvieron los coeficientes de ambos desarrollos imponiendo la continuidad de desplazamientos y tensiones entre ambas regiones en dos secciones transversales a izquierda y derecha de la inclusión, así como las condiciones de contorno en las superficies de la placa. Todas estas condiciones se aplicaron de forma aproximada y discreta, seleccionando un conjunto de puntos sobre dichas superficies y truncando los desarrollos para conservar un número finito de términos, lo cual les permitió obtener un sistema de ecuaciones para calcular los coeficientes de participación. Aunque obtuvieron errores en la conservación del flujo de energía inferiores a 1.9%, la precisión de sus resultados estaba muy condicionada por el número de modos empleado, la posición de los contornos ficticios y el número de puntos geométricos seleccionados. Otro inconveniente de la técnica de Wang es que sólo es aplicable a esta geometría concreta.

Para el estudio que se va a realizar, se empleará una placa de espesor $d=2h$ con una inclusión cilíndrica de radio b centrada en la placa. Se analizará la influencia de la variación del radio de la inclusión, dentro del rango $b/h \in [0, 0.9]$, para dos frecuencias adimensionales $\Omega = \omega h/c_T$ distintas: $\Omega_{SH3} = 1.5\pi$ (frecuencia de corte del modo SH3, para la cual existen cuatro modos reales) y $\Omega_{SH5} = 2.5\pi$ (frecuencia de corte del modo SH5, para la cual existen seis modos reales). Como onda incidente se utilizará el modo SH2. Se estudiarán cuatro casos con inclusiones de rigidez

relativa creciente: cavidad circular ($\mu_i/\mu_p=0$), inclusión blanda ($\mu_i/\mu_p=0.504$), inclusión del mismo material de la placa (placa sin defecto, $\mu_i/\mu_p=1$), e inclusión dura ($\mu_i/\mu_p=5.654$), donde μ_p y μ_i son los módulos de elasticidad transversal de la placa y la inclusión, respectivamente. Las propiedades completas de los materiales de la placa y de las inclusiones se recogen en la Tabla 6.6.

Una muestra de la malla híbrida empleada se representa en la Figura 6.47. Las dos condiciones de contorno absorbentes se sitúan a una distancia h del centro de la inclusión, a izquierda y derecha de la misma. La región de EC se subdivide en dos subregiones de distintos materiales que se suponen perfectamente soldadas en su interfase. El caso de cavidad circular puede modelarse con una única subregión de EC. En todos los casos se emplea el mismo tamaño de elemento para el contorno exterior de la placa de aluminio, $L=d/15$, el cual se ha seleccionado de acuerdo con el criterio de mallado. Para discretizar la interfase placa-inclusión se utiliza un tamaño igual a la sexta parte de la longitud de onda transversal en el material más blando $L_{cf}=\min(c_{si}, c_{sp})/(6f)$.

Material	ρ [kg/dm ³]	μ [GPa]
Placa (aluminio)	2.7	26
Inclusión dura (berilio)	1.9	147
Inclusión blanda (nitruro de boro)	2.17	13.1

Tabla 6.6. Propiedades de los materiales en el problema de inclusión cilíndrica.

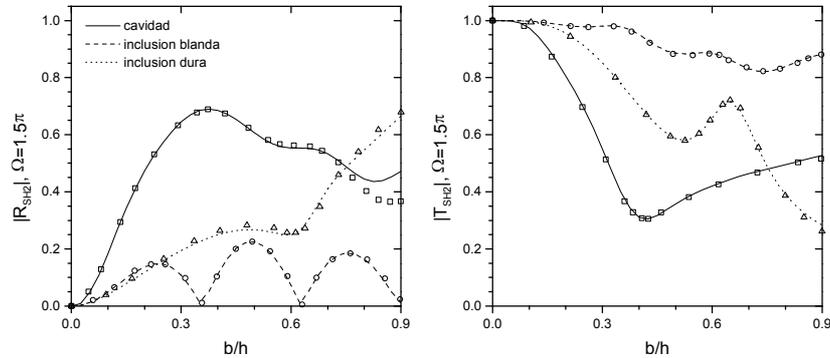


Figura 6.48. Onda SH2 incidente sobre inclusión cilíndrica. Coeficientes de conversión directa para $\Omega = 1.5\pi$

Una inclusión del mismo material no produce ninguna conversión modal; la solución híbrida reproduce fielmente este comportamiento. Los resultados obtenidos con la formulación EC-EF en los demás casos se muestran en las Figuras 6.48 a 6.51. En todas ellas, las líneas discontinuas (de puntos o de trazos) corresponden a una inclusión (blanda o dura, respectivamente) perfectamente soldada a la placa

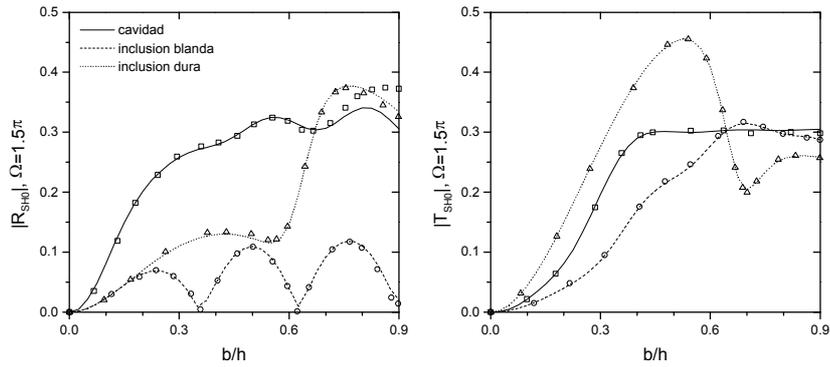


Figura 6.49. Onda SH2 incidente sobre inclusión cilíndrica. Coeficientes de conversión cruzada para $\Omega = 1.5\pi$

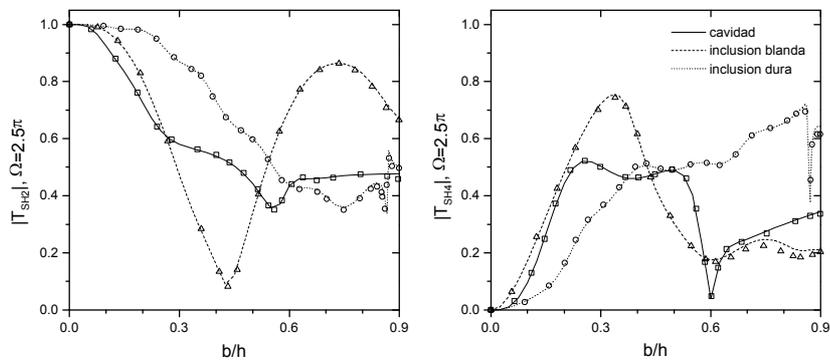


Figura 6.50. Onda SH2 incidente sobre inclusión cilíndrica. Coeficientes de transmisión de los modos SH2 y SH4 para $\Omega = 2.5\pi$

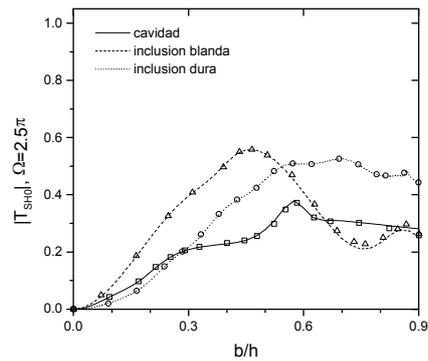


Figura 6.51. Onda SH2 incidente sobre inclusión cilíndrica. Coeficiente de transmisión del modo SH0 para $\Omega = 2.5\pi$

en todo su perímetro, mientras que la línea continua corresponde a una cavidad. En las figuras también se muestran los resultados de Wang, representados con símbolos (cuadrados, círculos y triángulos corresponden respectivamente a los casos de cavidad, inclusión blanda y dura).

El caso de la cavidad también corresponde a una inclusión con condición de contorno de deslizamiento en su perímetro, que podría asimilarse a una situación de degradación total de la unión en la interfase inclusión-placa. Desde este punto de vista, los problemas estudiados representan situaciones límites de la integridad de la unión fibra-matriz en una lámina de material compuesto. Para la frecuencia $\Omega = 1.5\pi$, la diferencia entre los coeficientes de conversión directa en los dos tipos de unión fibra-matriz (perfecta y totalmente degradada) es suficientemente grande (ver Figura 6.48). Este hecho podría aprovecharse para inspeccionar la integridad de la unión con técnicas ultrasónicas de pulso-eco (con un palpador) o de transmisión (“through-transmission”, con dos palpadores). Para la frecuencia $\Omega = 2.5\pi$, la diferencia entre los coeficientes de transmisión primarios para unión perfecta o degradada sólo es apreciable en ciertos rangos de b/h (por ejemplo, para la inclusión dura la diferencia es apreciable en los rangos $[0.35, 0.46]$ y $[0.7, 0.9]$, como se observa en la Figura 6.50).

6.11 Unión de placas por solape

Las uniones por solape son una solución muy común en aplicaciones industriales para unir tuberías y placas por medio de adhesivos, soldadura o ajustes con apriete. Para inspeccionar tanto la propia unión como zonas más allá de la unión con técnicas no destructivas basadas en ondas guiadas, es necesario entender la difracción de dichas ondas en esta geometría. Se puede afirmar que las ondas incidentes, Figura 6.52, sufrirán un fenómeno de conversión modal a su paso por la unión debido a los dos cambios bruscos de espesor, dando lugar tanto a reflexión como a transmisión de energía que dependerán del modo incidente, la frecuencia y la longitud del solape.

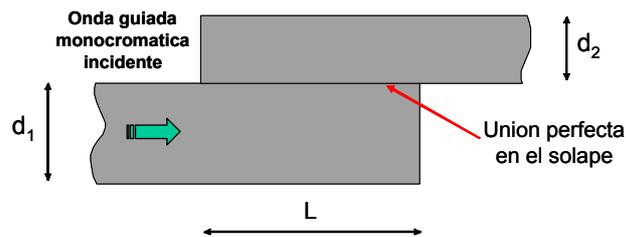


Figura 6.52. Geometría de la unión de dos placas por solape

La motivación de este estudio surgió como resultado de la colaboración del autor de esta tesis con el grupo de investigación del Dr. Joseph L. Rose (Ultrasonics La-

boratory, Engineering Science and Mechanics Department, The Pennsylvania State University, EEUU). En dicho grupo existe desde hace varios años una línea de trabajo sobre la utilización de ondas guiadas ultrasónicas a la inspección no destructiva de tuberías metálicas (cuyos resultados se han publicado en numerosos artículos [96, 100, 99, 97, 13] y se han materializado en una patente [98]). En este contexto se encuentran ciertas configuraciones de acoplamientos localizados (p. ej. válvulas) que se ejecutan mediante solape y soldadura de tubos de distinto diámetro. Se pretendía determinar el potencial de las ondas guiadas para detectar defectos en la unión y más allá de ella.

A frecuencias bajas existe una semejanza entre modos de propagación axisimétricos guiados en tubos y modos guiados en placas [96]. Por esta razón, y teniendo además en cuenta la menor dificultad que plantean éstos últimos, se propuso estudiar en una primera fase la unión por solape de placas desde los puntos de vista numérico y experimental.

Para analizar numéricamente el problema se aplicó la formulación híbrida EC-EF. Los experimentos se realizaron sobre dos muestras de placas de acero con solape, y fueron efectuados en el Ultrasonics Laboratory por el Dr. Won-Joon Song, un investigador post-doctoral. En ambos casos se utilizaron unas condiciones de unión perfecta entra las placas en la zona del solape. La descripción de los resultados se recoge a continuación.

6.11.1 Resultados numéricos

La difracción de una onda guiada monocromática incidente sobre una unión de dos placas por solape en una longitud L puede estudiarse mediante la formulación híbrida EC-EF. Al considerar que la unión es perfecta en toda la longitud de solape, se pueden emplear mallas como las mostradas en la Figura 6.53, con dos contornos absorbentes.

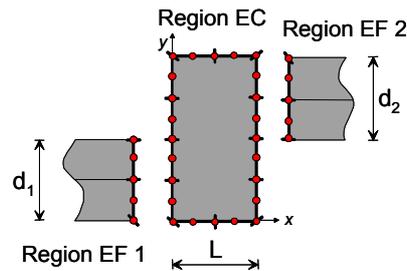


Figura 6.53. Unión de placas por solape: muestra de la malla híbrida empleada.

Se ha realizado un estudio paramétrico de la influencia de la longitud de solape L y de la frecuencia f sobre la conversión modal para el caso de dos placas de acero

($\rho=7.8 \text{ kg/dm}^3$, $c_L=5.9 \text{ km/s}$, $c_T=3.2 \text{ km/s}$) del mismo espesor ($d_1=d_2=6.35 \text{ mm}$) en un rango amplio de valores de los parámetros: $L \in [0.5, 13] \text{ mm}$ y $f \in [0, 1.5] \text{ MHz}$. Las curvas de dispersión para ondas de Lamb en la placa de acero son las mostradas en el problema de la delaminación, Figuras 6.21 y 6.22, y las de ondas SH guiadas son conocidas de forma analítica, ec. (2.27). Como ondas incidentes se han tomado los modos fundamentales tanto en el caso de ondas de Lamb (S0 y A0) como en el de ondas SH guiadas (SH0). Los coeficientes de conversión modal se calculan como la contribución modal al desplazamiento superficial de la placa en el campo difractado, mediante la ec. (6.5).

Los resultados calculados de los coeficientes de conversión modal primarios se muestran como mapas de contornos en las Figuras 6.54(a)-(f), donde los valores más altos (0.9~1) se representan en rojo y los más bajos (0~0.1) en azul oscuro. En general para frecuencias inferiores a 100kHz se observa un alto nivel de transmisión (bajo nivel de reflexión) para todos los valores de longitud de solape y para todos los modos incidentes. Para las ondas de Lamb los factores de conversión primarios presentan máximos localizados en regiones pequeñas del plano $f - L$. Así, el mapa de contornos del coeficiente de reflexión primaria del modo S0 indica que la mayor parte de la energía incidente en el rango de frecuencias entre 0.2 y 0.4 MHz se refleja para longitudes de solape de 0.5 a 5 mm. Sin embargo la onda S0 atraviesa la región del solape en el rango de 0.2 a 0.3 MHz para valores de L entre 6 y 10 mm.

Para las ondas SH guiadas la conversión modal muestra un comportamiento más sencillo que en el caso de ondas de Lamb, lo cual puede atribuirse a su estructura modal más simple y la presencia de un único tipo de onda de volumen. En el rango de frecuencias por debajo de 200kHz se obtiene una elevada transmisión de energía, mientras que para frecuencias superiores prácticamente toda la energía se refleja.

Basándonos en estos resultados numéricos se puede concluir que el modo incidente, la frecuencia y la longitud del solape son factores críticos para concentrar la energía de la onda bien en el campo transmitido o en el reflejado por la unión.

6.11.2 Mediciones experimentales

Descripción del montaje

La difracción de ondas guiadas se ha estudiado de forma experimental sobre dos muestras mecanizadas, consistentes en placas de acero de igual espesor ($d_1=d_2=6.35 \text{ mm}$) con longitudes de solape L diferentes: 6.35 y 12.7 mm (muestras 1 y 2, respectivamente). Las ondas de Lamb y SH guiadas se generan y reciben empleando dos transductores ultrasónicos trabajando en modo transmisión (un transmisor y un receptor), con un camino total recorrido por la onda de 304.8mm, como se muestra en la Figura 6.55. Para la medida de los coeficientes de reflexión (Figura 6.55(b)), los transductores se sitúan en el mismo lado de la unión e inclinados 15° respecto a la línea central para evitar el efecto de divergencia del haz generado por

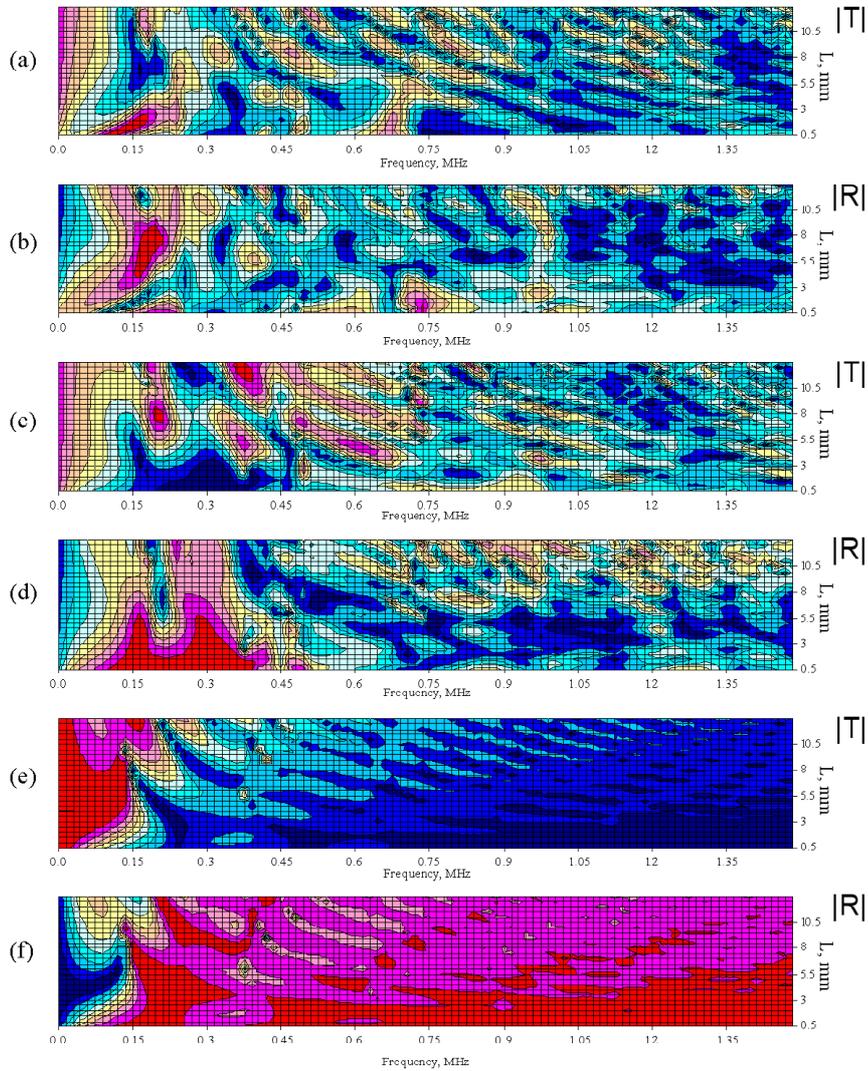


Figura 6.54. Resultados numéricos de los coeficientes de conversión modal primarios en función de la frecuencia f y de la longitud de solape L . (a) y (b) para modo A0 incidente; (c) y (d) para modo S0 incidente; (e) y (f) para modo SH0 incidente. Los valores más altos (0.9~1) se representan en rojo y los más bajos (0~0.1) en azul oscuro.

los transductores. En esta configuración la distancia de los transductores a la unión es menor para mantener el recorrido total de la onda en el mismo valor que en las mediciones de factores de transmisión.

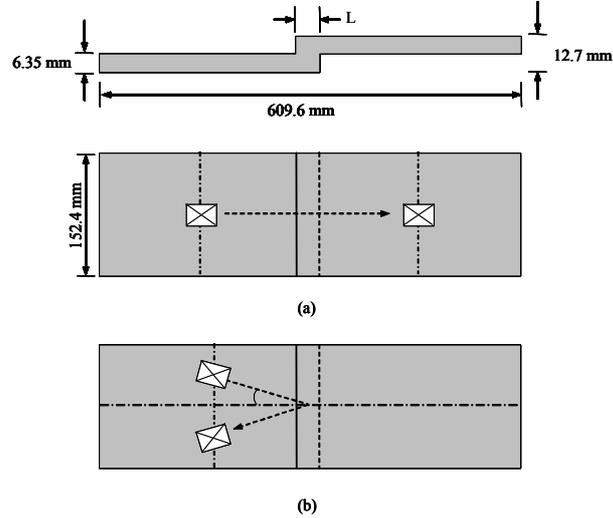


Figura 6.55. Ilustración del montaje experimental para la medida de coeficientes de conversión modal de ondas guiadas en una placa de acero con solape. (a) Medida de factores de transmisión. (b) Medida de factores de reflexión.

Para generar y recibir ondas de Lamb se emplean transductores piezoeléctricos de contacto inclinados respecto a la normal a la placa, acoplados a ésta mediante un elemento intermedio (p. ej. cuña de plexiglás) que permite variar el ángulo de inclinación, como se muestra en la Figura 6.56(a). La generación de ondas de Lamb se ajusta cuidadosamente para cada frecuencia y cada modo mediante la selección del ángulo de inclinación del transductor θ_i a partir de la velocidad de fase c del modo deseado y la ley de Snell, según la siguiente expresión

$$\frac{c_{L,plexiglas}}{\sin \theta_i} = \frac{c}{\sin 90^\circ} \Rightarrow \sin \theta_i = \frac{c_{L,plexiglas}}{c} \quad (6.19)$$

donde $c_{L,plexiglas}=2.67\text{km/s}$ es la velocidad de las ondas longitudinales en el plexiglás. Los ángulos de inclinación del transmisor y receptor son idénticos de forma que el modo difractado recibido coincide con el modo generado, midiéndose así el factor de conversión primario.

Para generar y recibir ondas SH guiadas se emplean transductores electromagnéticos acústicos (EMAT) con un tamaño y separación entre hilos iguales y uniformes, de valor s_h , los cuales funcionan básicamente como transductores lineales periódicos como el representado en la Figura 6.56(b). Con este tipo de elementos se excitan

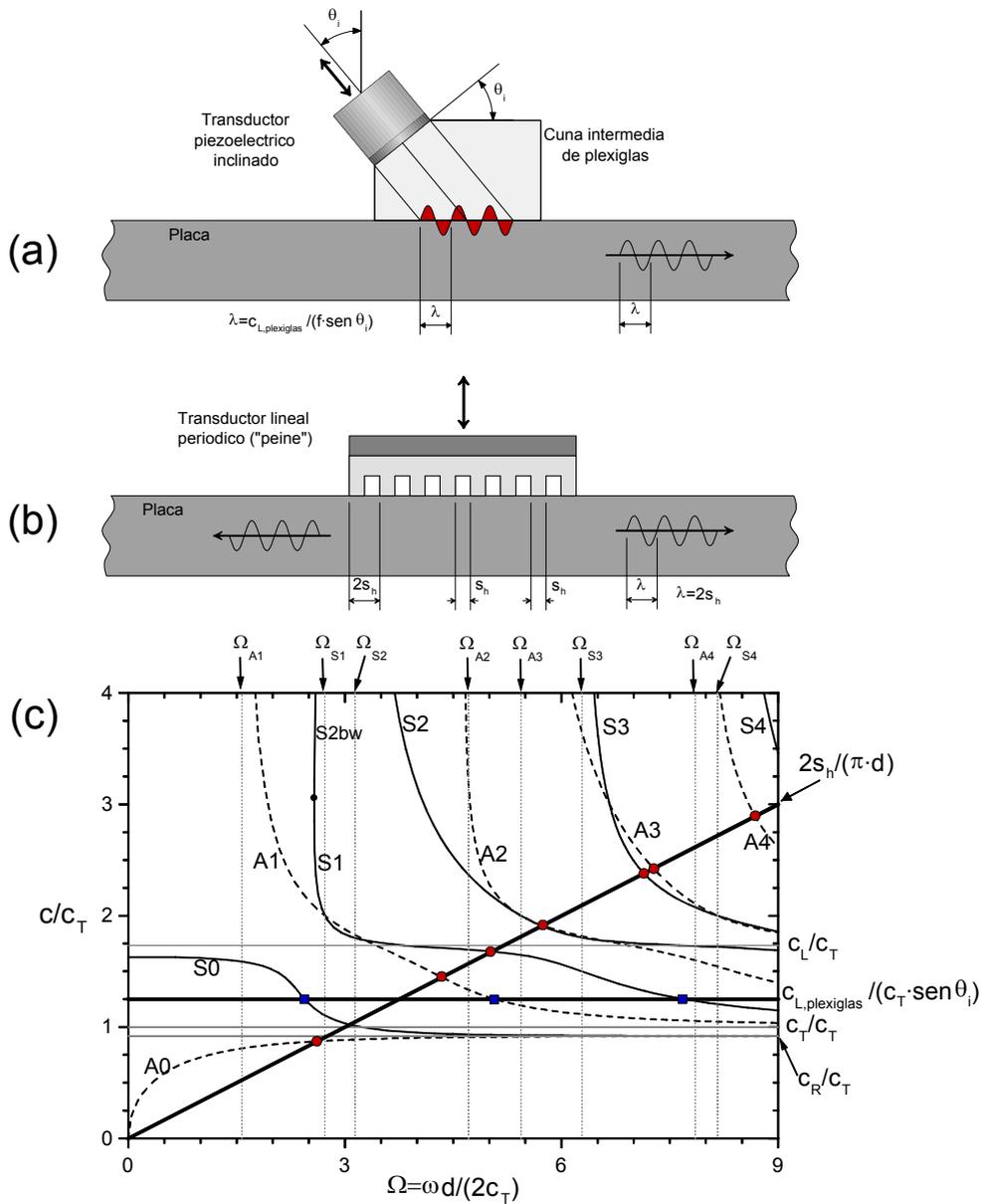


Figura 6.56. Técnicas para la generación de ondas de Lamb: (a) transductor inclinado, (b) transductor lineal periódico, (c) zonas de excitación modal con las dos técnicas anteriores (señaladas con cuadrados y círculos, respectivamente)

principalmente los modos cuya longitud de onda coincide con la separación entre hilos

$$\lambda = \frac{c}{f} = 2s_h \Rightarrow c = 2s_h f \quad (6.20)$$

Las señales temporales empleadas en los experimentos son pulsos senoidales modulados de alto voltaje con los cuales se excita a los transductores. En la Figura 6.57 se muestran las representaciones en el dominio del tiempo y de la frecuencia de un pulso típico que podría ser usado para generar un modo a una frecuencia de 0.5MHz. La duración del pulso se hace suficientemente larga para que su contenido en frecuencia esté concentrado en una banda muy estrecha, de manera que se puedan generar modos aislados y obtener así ondas guiadas monocromáticas.

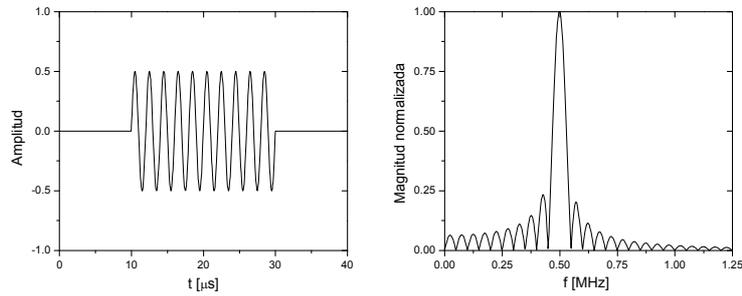


Figura 6.57. Representación en los dominios del tiempo y de la frecuencia de un pulso senoidal de 500kHz y modulado con una puerta a 10 ciclos de duración

Para la generación de pulsos se utilizó un sistema Matec Explorer II¹, basado en PC y que contiene toda la electrónica necesaria dentro del chasis de un ordenador industrial. El equipo tiene la capacidad de generar pulsos senoidales de longitud variable (mediante modulación de puerta -gate-) de hasta 1000V de amplitud de pico a pico en un rango de frecuencias entre 50kHz y 10MHz. El sistema también incluye una tarjeta de adquisición de datos que permite recoger y almacenar en disco las señales ultrasónicas para su procesamiento posterior.

En los experimentos se midieron las amplitudes de pico a pico de las señales transmitidas V_T y reflejadas V_R , las cuales son una medida de los desplazamientos superficiales producidos por el modo seleccionado. Los coeficientes de conversión modal se calculan como el cociente de esos valores y una amplitud de referencia V_0

$$R = \frac{V_R}{V_0}; T = \frac{V_T}{V_0} \quad (6.21)$$

Esta definición es equivalente a la empleada en los cálculos numéricos, ec. (6.5). Para cada frecuencia y modo incidente, se tomó como referencia la amplitud medida

¹Explorer II es una marca registrada de Matec Corporation, Northbough, MA (EEUU).

de pico a pico de la onda transmitida en una placa de espesor uniforme 6.35mm y sin defectos entre dos transductores alineados y separados 304.8 mm. La razón de no emplear una configuración con un solo transductor en modo pulso-eco para la medida de coeficientes de reflexión es que no permite obtener una señal de referencia adecuada. Tampoco se podría emplear la señal de referencia de la configuración con dos transductores porque las funciones de respuesta de los transductores son diferentes.

En cada medida realizada, para comprobar que el modo generado era el correcto también se midió la velocidad de grupo. Para mejorar la relación señal-ruido todas las señales recibidas fueron promediadas.

Resultados experimentales

Las medidas experimentales de los coeficientes de conversión primaria de los modos fundamentales (S_0 , A_0 y SH_0) para las dos geometrías consideradas se recogen en las Figuras 6.58 a 6.60, donde también se incluyen los correspondientes resultados numéricos.

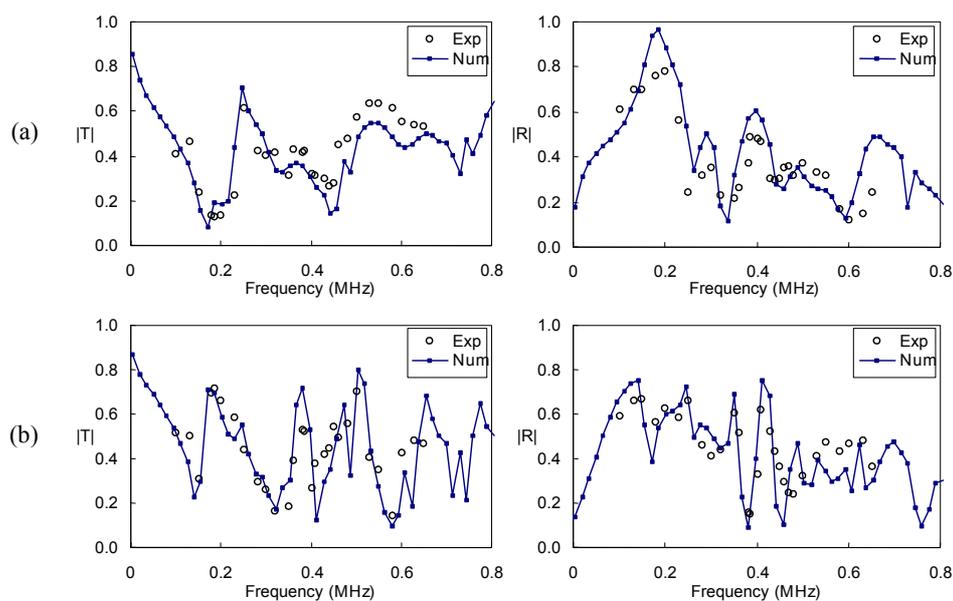


Figura 6.58. Medidas experimentales de los coeficientes de conversión primarios para un modo S_0 incidiendo sobre una unión por solape. (a) Muestra 1 y (b) Muestra 2.

Los coeficientes de conversión primarios para los modos A_0 y S_0 incidentes se midieron en el rango de 100kHz a 650kHz, utilizando dos pares de transductores con frecuencias centrales de 150 y 500 kHz, respectivamente. Para frecuencias superiores

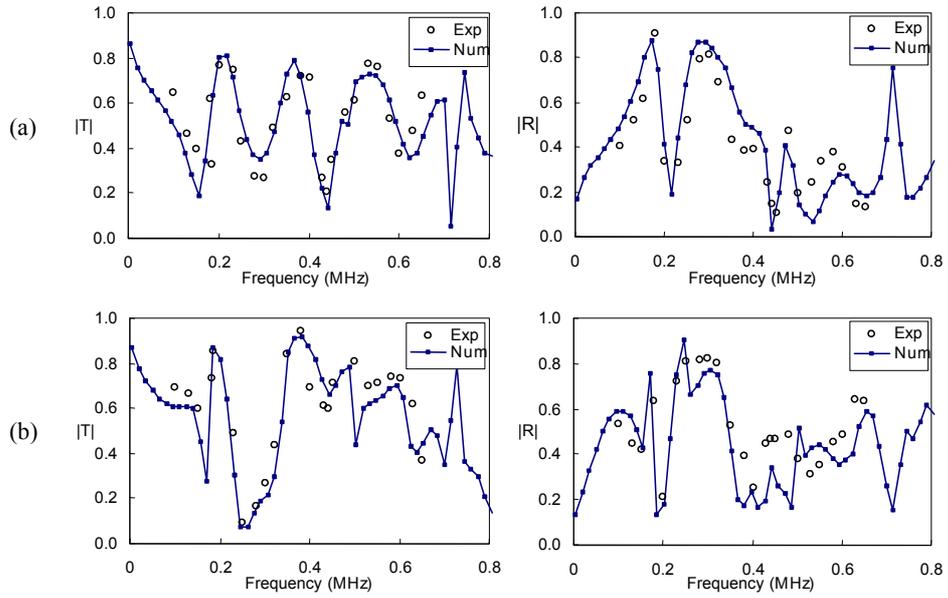


Figura 6.59. Medidas experimentales de los coeficientes de conversión primarios para un modo A0 incidiendo sobre una unión por solape. (a) Muestra 1 y (b) Muestra 2.

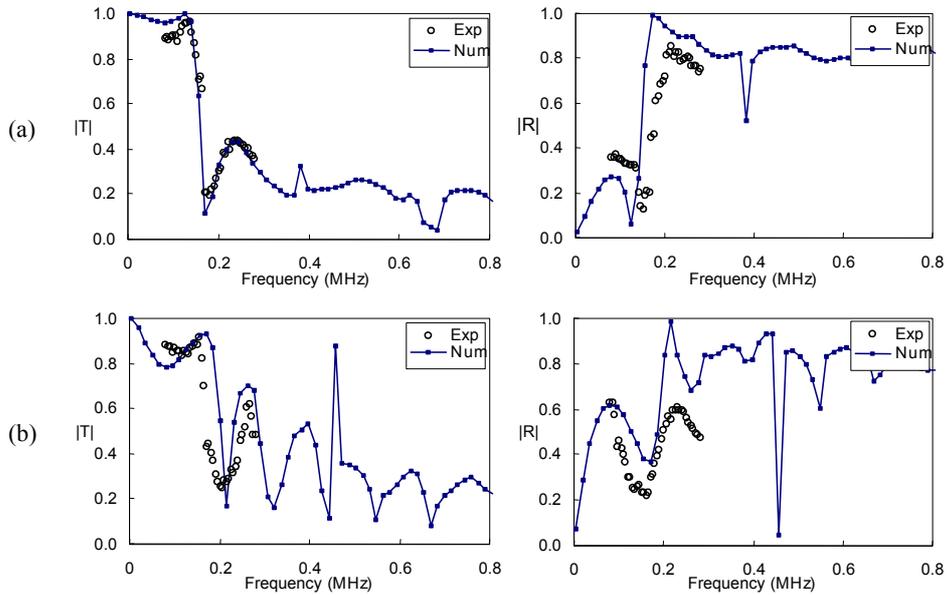


Figura 6.60. Medidas experimentales de los coeficientes de conversión primarios para un modo SH0 incidiendo sobre una unión por solape. (a) Muestra 1 y (b) Muestra 2.

a 650kHz ($\Omega = \omega h/c_T > 4.025$) es difícil generar y recibir dichos modos de forma independiente, porque sus velocidades de fase han convergido al valor de la velocidad de las ondas superficiales de Rayleigh en el acero. También resulta difícil distinguirlos en las señales temporales, porque sus velocidades de grupo toman valores muy próximos.

Los resultados experimentales obtenidos para los modos de Lamb fundamentales se muestran en las Figuras 6.58 y 6.59, donde también se representan los correspondientes resultados numéricos. En general, la comparación entre ambos es satisfactoria globalmente. Los resultados experimentales muestran que la fracción de energía incidente que se transmite o refleja en el solape puede ser maximizada o minimizada para cada modo incidente en unos rangos de frecuencia específicos, lo cual concuerda con lo predicho por los cálculos numéricos. En el caso del modo A0 incidente, la máxima transmisión ocurre a 250kHz y 530-550kHz para un solape de 6.35mm, y a 185 y 500kHz para el solape de 12.7mm, mientras que la máxima reflexión sucede a 200 kHz en la muestra 1 y a 140, 250 y 410kHz para la muestra 2.

Para el caso de modo SH0 incidente las medidas se realizaron en el rango de 80 a 280 kHz empleando un par de transductores de frecuencia central 200kHz, y se muestran en la Figura 6.60. La comparación entre resultados numéricos y experimentales es satisfactoria. En ambas muestras se observa que la máxima transmisión sucede para frecuencias inferiores a 200kHz, en consonancia con las predicciones numéricas.

6.12 Defectos ocultos bajo recubrimientos protectores

En componentes metálicos industriales (placas, tuberías, etc) es usual emplear capas de recubrimiento como protección contra la corrosión o como aislamiento térmico. Aunque la geometría de la mayoría de dichos elementos constituye una guía de ondas natural, las características viscoelásticas de los recubrimientos provocan la atenuación de las ondas. Sin embargo, el estudio de las curvas de dispersión realizado en el apartado 5.8 demuestra la existencia de modos guiados que se propagan con una atenuación baja en ciertos rangos de frecuencia bastante amplios. Mediante la utilización de estos modos es posible enviar señales ultrasónicas guiadas en el componente que recorran distancias elevadas, no siendo necesario retirar el recubrimiento de todo el área inspeccionada. Sin embargo, falta por evaluar la sensibilidad de dichos modos a la presencia de los defectos. Con esta información será posible seleccionar aquellos que tengan una mayor aptitud para la detección y evaluación no destructiva de zonas amplias empleando una posición de transductor única.

La geometría considerada es la misma que en el apartado 5.8, es decir, una placa de aluminio (de espesor $d_{Al}=1.55\text{mm}$) con un recubrimiento viscoelástico de epoxi (cuyo grosor es $d_{Ep}=0.25\text{mm}$). En este apartado se va a estudiar la sensibilidad de las ondas guiadas en dicha placa a la presencia de defectos ocultos bajo la capa de recubrimiento. Se supondrán defectos de geometría rectangular, como se ilustra en

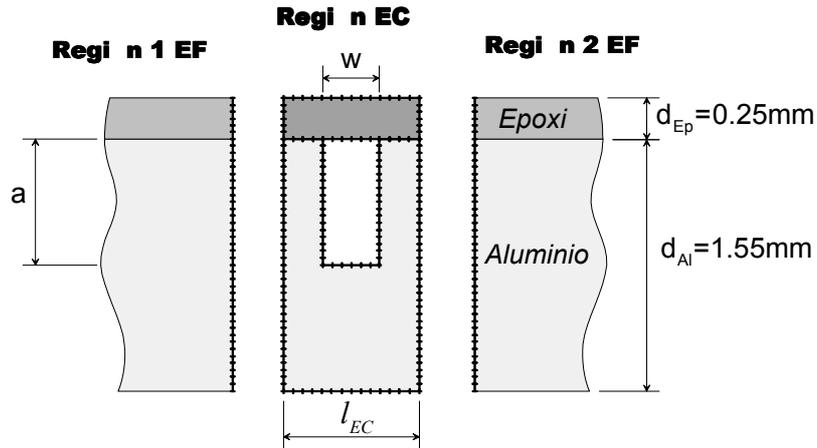


Figura 6.61. Malla híbrida empleada para estudiar la difracción de ondas guiadas (SH y Lamb) en una placa de aluminio recubierta de epoxi cuando inciden sobre un defecto rectangular situado bajo la capa de recubrimiento ($a/d_{Al}=0.5$)

la Figura 6.61, con un ancho w y una profundidad a , sobre los cuales se harán incidir ondas guiadas monocromáticas. Para analizar la difracción que sufren estas ondas se utiliza la técnica híbrida EC-EF, utilizando 2 contornos absorbentes de EF y dos subregiones de EC de diferente material (una de epoxi y otra de aluminio), como se ilustra en la Figura 6.61. Para realizar los cálculos se ha utilizado una discretización con el mismo tamaño de elemento en toda las zonas, elegido de acuerdo con el criterio de mallado. Teniendo en cuenta que la máxima frecuencia analizada es $f=4\text{MHz}$ y que la velocidad de ondas más lenta es $c_{T,Ep}$, se emplea un tamaño de elemento $L=0.09\text{mm}$ que cumple con el criterio.

6.12.1 Ondas SH guiadas

Se van a seleccionar como modos candidatos aquellos que tengan la mínima atenuación modal, y con valores no superiores a 60dB/m . A partir de las curvas de dispersión, Figura 5.23, se obtienen los modos que cumplen ambos requisitos: SH0 para $f < 1.1\text{MHz}$ y SH1 para $f \in [1.5, 3.6]\text{MHz}$.

A continuación se han evaluado los coeficientes de conversión modal directos, y los resultados se representan en las Figuras 6.62 y 6.63. Los coeficientes de conversión cruzada no tienen demasiado interés, puesto que corresponden a modos mucho más atenuados que los principales y por tanto modos cuya amplitud se anulará a corta distancia del defecto.

Una de las características principales que se extrae de dichas figuras es el sensible aumento de la reflexión y el asimismo notable descenso de la transmisión en todo el rango de frecuencias para valores crecientes de profundidad de defecto. Otro aspecto

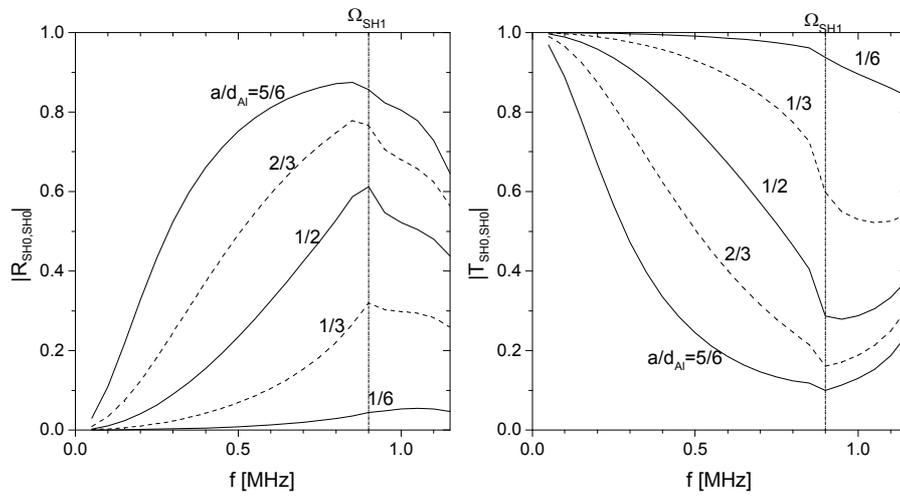


Figura 6.62. Difracción del modo SH0 por defectos rectangulares bajo la capa de recubrimiento

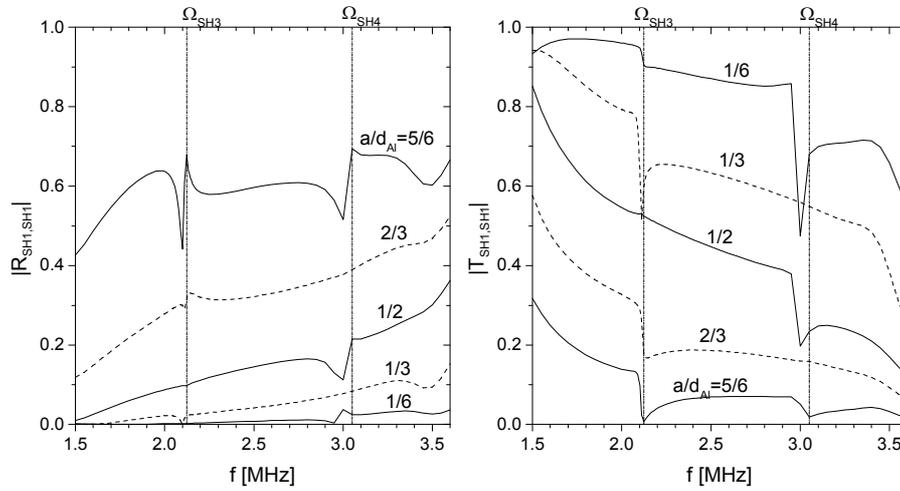


Figura 6.63. Difracción del modo SH1 por defectos rectangulares bajo la capa de recubrimiento

a destacar es que los coeficientes de conversión son además funciones monótonas crecientes de a/d_{Al} en prácticamente todo el rango de frecuencias.

6.12.2 Ondas de Lamb

Observando las curvas de dispersión, los modos candidatos en este caso, usando el criterio de atenuación mínima e inferior a 60dB/m, son: S0 para $f < 2.2$ MHz, A0 para $f < 1.6$ MHz y A1 para $f > 2.6$ MHz. Los coeficientes de conversión modal más importantes se representan en la Figuras 6.64, 6.65 y 6.66.

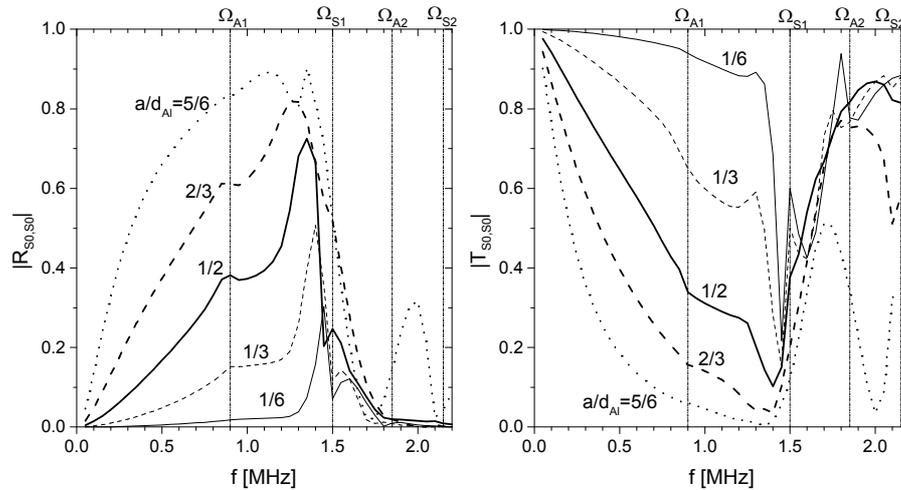


Figura 6.64. Difracción del modo S0 por defectos rectangulares bajo la capa de recubrimiento

Cuando incide un modo S0 sobre el defecto, en la Figura 6.64 se observa que, para frecuencias inferiores a 1.25 MHz, el coeficiente de reflexión propio crece y el de transmisión decrece al aumentar la profundidad del defecto, mostrando ambos factores una tendencia monótona con respecto al valor de a/d_{Al} .

En el caso de modo A0 incidente, la Figura 6.65 muestra una tendencia similar a la observada anteriormente para los coeficientes de conversión primarios, pero esta vez en el rango de frecuencias inferiores a 0.9 MHz. El coeficiente de reflexión propio presenta un pico en dicho rango, el cual experimenta un aumento en altura y anchura así como un desplazamiento hacia frecuencias inferiores cuando la profundidad del defecto crece. De forma similar, el coeficiente de transmisión $|T_{A0,A0}|$ presenta un valle que se desplaza hacia frecuencias más bajas al crecer a/d_{Al} . Mediante un barrido en frecuencia se podrían detectar experimentalmente estos valores característicos (máximos o mínimos de los coeficientes de conversión propia) y así se podría extraer información acerca de la profundidad del defecto.

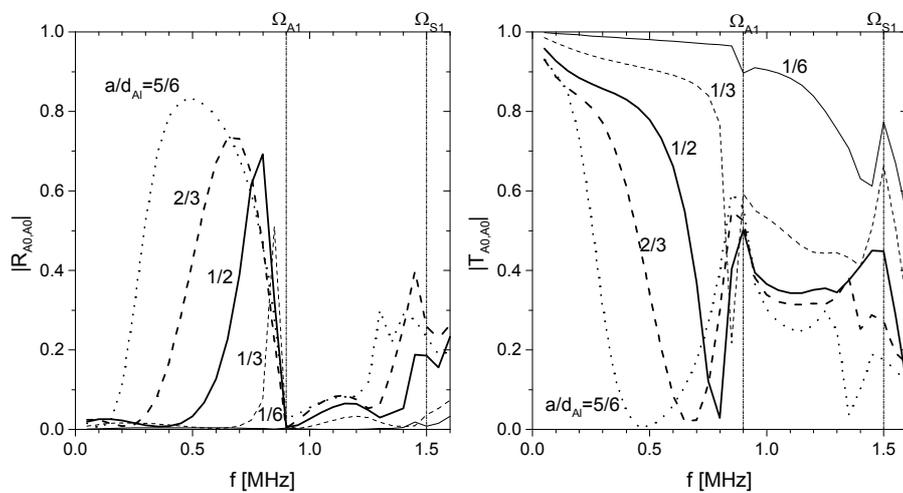


Figura 6.65. Difracción del modo A0 por defectos rectangulares bajo la capa de recubrimiento

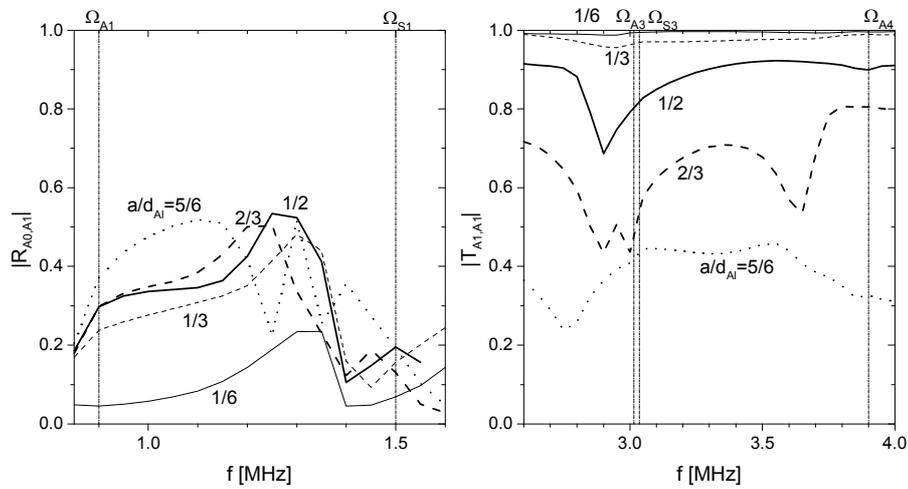


Figura 6.66. Difracción del modo A1 por defectos rectangulares bajo la capa de recubrimiento

El coeficiente de transmisión propia del modo A1 $|T_{A1,A1}|$ decrece monótonamente con la profundidad del defecto, Figura 6.66, aunque el descenso es apenas imperceptible para $a/d_{A1} < 1/3$. Por tanto, el modo A1 en el rango de frecuencia analizado es poco sensible a la presencia de defectos pequeños, aunque produzca una sombra clara frente a defectos medianos y grandes. El coeficiente de reflexión propia $|R_{A1,A1}|$ no se ha representado porque es prácticamente nulo.

6.12.3 Comentarios

Los resultados numéricos obtenidos están de acuerdo con las observaciones experimentales realizadas por Barshinger, Rose y Avioli [13], quienes detectaron la presencia de defectos visibles (es decir, que atraviesan también el recubrimiento) con una profundidad del 5% a una distancia aproximada de 2m en una tubería de acero (0.602mm de espesor y 114.3mm de diámetro exterior) con un recubrimiento asfáltico de 0.1524mm de espesor. Utilizaron un sistema de pulso-eco que excitaba y recibía modos axisimétricos mediante un anillo de palpadores de contacto longitudinales inclinados. El único criterio que utilizaron para seleccionar el modo y la frecuencia de trabajo se basó en una baja atenuación modal, lo que les condujo a utilizar los modos L(0,2) a 190kHz y L(0,3) a 740kHz (equivalentes a los modos de Lamb S0 y S1 en placas [12]). No disponían de modelos capaces de calcular la sensibilidad de cada modo a la presencia de defectos (y a su tamaño). Los resultados obtenidos en esta tesis aportan esta información, que resulta esencial para poder seleccionar de manera más fundamentada el punto de trabajo, así como para realizar una cuantificación del tamaño del defecto a partir de la amplitud de la señal recibida.

Capítulo 7

Conclusiones y desarrollos futuros

7.1 Introducción

A lo largo de esta Tesis se ha abordado el estudio numérico de la propagación de ondas guiadas en placas y de la difracción que sufren al interaccionar con defectos, desde la perspectiva del Método de los Elementos de Contorno y el Método de los Elementos Finitos.

Tras la introducción y revisión histórico-bibliográfica de los trabajos más relevantes relacionados con este tema, se ha descrito en el segundo capítulo la teoría de la propagación libre de ondas guiadas armónicas y con frente de onda plano, en placas homogéneas de materiales isotrópicos elásticos y con espesor constante. Partiendo del planteamiento matemático general de la Elastodinámica tridimensional, se han aplicado las condiciones particulares de la propagación de ondas guiadas armónicas planas para obtener dos problemas bidimensionales desacoplados (antiplano y de deformación plana), cada uno de los cuales está asociado a un tipo particular de ondas (SH guiadas y de Lamb, respectivamente). Tan sólo el primero de ellos se puede resolver completamente de forma analítica, debido a la simplicidad de las ecuaciones resultantes. La presentación detallada de dicha solución ha permitido introducir los rasgos característicos esenciales de la propagación de ondas guiadas, entre los que cabe destacar su carácter dispersivo y multimodal (resultado de la ecuación característica no lineal que gobierna el problema, cuya solución para cada frecuencia proporciona un número infinito pero contable de raíces), los modos reales y evanescentes (para cada frecuencia sólo existe un número finito de modos que se propagan; los demás tienen una amplitud que decae con la distancia), las frecuencias de corte (el número de modos reales crece con la frecuencia; la frecuencia de corte marca la transición de modo evanescente a real), las curvas de dispersión, la velocidad de grupo (o de propagación de la energía) y la estructura de los modos. En el

caso de ondas de Lamb se han descrito dos rasgos adicionales que no se presentan en el caso antiplano: la dispersión anómala y las ondas “backward” (cuya energía viaja en sentido opuesto a su fase).

Una vez presentada la teoría elástica, se han revisado las leyes de comportamiento de los materiales viscoelásticos lineales. La aplicación de dichas leyes al caso de vibraciones armónicas en régimen estacionario ha permitido enunciar el *principio de correspondencia elástica-viscoelástica*, con el cual se ha obtenido la transformada de Fourier de la solución del problema de propagación de ondas guiadas en placas viscoelásticas a partir de la correspondiente solución elástica, sustituyendo las constantes elásticas reales por unos módulos complejos que pueden depender de la frecuencia. Las ecuaciones viscoelásticas se han particularizado para el modelo de Kelvin con amortiguamiento histerético, caracterizado por unos módulos complejos independientes de la frecuencia, que representa de forma adecuada el comportamiento de muchos materiales en el rango de frecuencias ultrasónicas. Para ondas de Lamb, cuya solución elástica no es conocida de forma analítica, sólo ha sido posible obtener la ecuación característica.

En el tercer capítulo se ha presentado una formulación semi-analítica de Elementos Finitos capaz de reproducir la propagación libre de ondas guiadas en placas laminadas, compuestas por capas de materiales isótropos, lineales y elásticos o viscoelásticos. Partiendo de la discretización de la sección transversal de la placa en elementos isoparamétricos, pero conservando la variación armónica analítica en el resto de variables, se ha transformado la ecuación característica no lineal analítica en un problema de autovalores lineal, que constituye una ecuación característica aproximada para la que se dispone de algoritmos de solución muy robustos.

La respuesta dinámica de una placa semi-infinita frente a acciones en el borde se ha obtenido expresando la solución de desplazamientos y tensiones en su interior como una combinación lineal de los modos de propagación semi-analíticos de la placa infinita, donde sólo se han incluido aquellos modos que cumplieran la condición de radiación. Esta condición implica que los modos reales deben extraer energía del borde (es decir, su velocidad de grupo debe alejarse del borde) y los modos evanescentes deben decrecer en amplitud con la distancia al mismo. Se ha tenido en cuenta que las ondas “backward” deben incluirse de forma que su fase viaje hacia el borde, puesto que su energía fluye en sentido opuesto. Mediante la utilización de esta técnica de superposición modal se ha generado un contorno absorbente de ondas guiadas que, además de evitar las reflexiones espúreas de energía en el borde, permite calcular el campo lejano en la placa.

El cuarto capítulo se ha dedicado al Método de los Elementos de Contorno aplicado a problemas dinámicos armónicos en medios elásticos y viscoelásticos, comenzando con la obtención de la Ecuación Integral de Contorno a partir de la solución fundamental de espacio completo y el Teorema de Reciprocidad. Tras la discretización del contorno en elementos se ha procedido al tratamiento numérico de dichas ecuaciones, describiéndose las técnicas de evaluación de las integrales singulares que

aparecen.

Para abordar problemas de difracción de ondas guiadas de forma que se pueda calcular correctamente el campo lejano en la placa, se ha planteado una formulación híbrida de Elementos de Contorno y Elementos Finitos, que consiste en estudiar el problema elastodinámico en el entorno del defecto mediante el Método de los Elementos de Contorno, y sustituir el resto de la guía de onda por uno o varios contornos absorbentes de Elementos Finitos. En la interfase entre ambas regiones se han aplicado condiciones de unión perfecta, es decir, compatibilidad y equilibrio, éste último impuesto de forma variacional.

En el quinto capítulo se ha utilizado la formulación semi-analítica de Elementos Finitos para calcular curvas de dispersión de ondas guiadas en placas. En primer lugar se han estudiado los casos de placas homogéneas elásticas, cuya solución analítica se presentó en el segundo capítulo, obteniéndose una buena comparación entre las curvas numéricas y analíticas. Mediante un análisis del error cometido en las matrices de rigidez de elementos finitos lineales respecto a las analíticas, tanto en el caso antiplano como en el de deformación plana, se ha planteado un criterio de mallado que acota el error máximo en las matrices elementales. Los cálculos de curvas de dispersión han mostrado que las discretizaciones obtenidas con dicho criterio producen, además, una buena aproximación de los espectros de frecuencia y de las estructuras de desplazamientos modales en la sección transversal.

La técnica se ha aplicado a problemas de complejidad creciente, para los cuales la solución numérica de la ecuación característica analítica presenta numerosas dificultades: placas laminadas elásticas no homogéneas, placas viscoelásticas homogéneas, y placas elásticas con recubrimientos viscoelásticos.

En el sexto capítulo se ha llevado a cabo el estudio de una serie de problemas de difracción de ondas guiadas monocromáticas mediante la formulación híbrida de EC-EF. En primer lugar se han definido los coeficientes de conversión modal que se utilizan para describir el campo difractado lejano y la conversión modal que experimenta la onda incidente. Con objeto de validar y comprobar la técnica desarrollada, se ha comenzado por varios problemas para los cuales se disponía de solución previa (analítica o numérica).

Posteriormente se ha estudiado la transmisión y reflexión de ondas guiadas en uniones por solape entre dos placas de acero. Este trabajo ha sido realizado en colaboración con el Ultrasonics Laboratory de Penn State (EEUU) durante una estancia del autor de esta tesis en dicho centro de investigación, y ha constado de un estudio paramétrico numérico y de unas medidas experimentales realizadas sobre dos muestras manufacturadas. La comparación entre los coeficientes de conversión primarios de los modos fundamentales (S_0 , A_0 y SH_0) obtenidos por ambas técnicas ha sido satisfactoria.

Finalmente se ha evaluado el potencial de inspección remota de defectos ocultos en placas metálicas con recubrimientos viscoelásticos. Aunque la capa viscoelástica provoca la atenuación de las ondas guiadas, se han seleccionado los modos y rangos

de frecuencia para los que existe una atenuación modal mínima, con objeto de maximizar la distancia que puede alcanzar la señal y por tanto el alcance de la inspección. Como no sólo interesa detectar el defecto sino también cuantificar su tamaño, se ha realizado un estudio paramétrico de la influencia de dicha variable sobre los coeficientes de conversión modal, lo que ha permitido establecer las sensibilidades de cada modo a la profundidad del defecto.

7.2 Conclusiones

En esta tesis se ha desarrollado una nueva formulación híbrida de Elementos de Contorno y Elementos Finitos en el dominio de la frecuencia para estudiar la difracción bidimensional de ondas guiadas en placas elásticas y viscoelásticas. Esta formulación se basa y extiende una técnica híbrida planteada por Cho y Rose [24, 23, 25], pero supera muchas de sus limitaciones y es capaz de resolver configuraciones inabordables previamente con dicho método:

- Ampliación a problemas antiplanos.
- Capacidad para estudiar placas laminadas no homogéneas.
- Mayor variedad de geometrías: defectos internos, inclusiones de distinto material, defectos con espesor muy pequeño (tipo grieta), etc.
- Incorporación de materiales viscoelásticos.
- Utilización de elementos cuadráticos en lugar de elementos constantes.
- Inclusión de modos evanescentes, además de los reales, en el desarrollo en modos normales de las placas.

Otra posible alternativa para estudiar este tipo de problemas con el MEC consiste en utilizar la solución fundamental para una carga armónica concentrada en un punto de la placa. Aunque este planteamiento presenta la ventaja de requerir únicamente la discretización del contorno del defecto (puesto que las condiciones de contorno en las superficies de la placa se satisfacen automáticamente), tiene como principales inconvenientes su validez limitada a placas laminadas horizontales y de espesor constante, así como la complejidad de la solución fundamental empleada.

Se ha realizado una comprobación exhaustiva de la formulación planteada mediante la comparación con resultados de difracción de ondas en placas elásticas disponibles en la literatura, los cuales fueron obtenidos por otros autores mediante la aplicación de diversas técnicas de solución, tanto analíticas como numéricas (MEF en el dominio del tiempo, MEF global-local en el dominio de la frecuencia, MEC en el dominio de la frecuencia). Los resultados obtenidos muestran la gran capacidad y precisión del método, destacándose los siguientes aspectos:

- La conservación y la reciprocidad del flujo de energía se satisfacen con un error inferior al 1%, que representa un margen estrecho en comparación con los errores obtenidos por otros autores.
- El contorno absorbente no necesita colocarse a una distancia mínima del defecto, como sucede con otras técnicas. Por tanto, se reduce el tamaño del dominio a discretizar con elementos de contorno.
- El criterio de mallado es adecuado para resolver problemas de difracción.
- Se pueden emplear un número arbitrario de contornos absorbentes.
- Pueden estudiarse problemas de difracción de ondas de Lamb y SH guiadas.

No sólo se han realizado estudios numéricos, sino que además se han llevado a cabo medidas experimentales en colaboración con uno de los grupos de investigación más activos en el campo de las ondas guiadas: el Ultrasonics Laboratory de Penn State, dirigido por el profesor Joseph L. Rose. Las técnicas desarrolladas han sido aplicadas al estudio paramétrico de la propagación de ondas guiadas a través de uniones por solape entre placas en función de la frecuencia y la longitud de la unión. Por otro lado, los coeficientes de conversión primarios de los modos fundamentales (S0, A0 y SH0) fueron obtenidos experimentalmente en dos muestras manufacturadas en acero. La comparación de ambos resultados ha sido satisfactoria en todo el rango de frecuencias, lo que nos lleva a afirmar que la formulación numérica desarrollada constituye una herramienta de gran ayuda para el desarrollo de técnicas ultrasónicas no-destructivas para la caracterización cuantitativa de defectos empleando ondas guiadas.

Una de las principales aportaciones de esta tesis ha consistido en el estudio paramétrico de la difracción de ondas guiadas por defectos ocultos en placas elásticas con recubrimientos viscoelásticos. Estudios experimentales previos, realizados por Barshinger, Rose y Avioli [12], habían mostrado la posibilidad de detectar y localizar a varios metros de distancia la existencia de defectos visibles en tuberías de acero con recubrimientos bituminosos. El criterio que utilizaron para elegir tanto el modo como la frecuencia de trabajo se basó exclusivamente en una baja atenuación modal, con objeto de maximizar el alcance de la inspección. La sensibilidad de cada modo a la presencia de defectos y a su tamaño ha sido obtenida en esta tesis por primera vez, lo que permite seleccionar de manera más fundamentada el punto de trabajo, y abre el camino hacia la cuantificación del tamaño del defecto a partir de la amplitud de la señal recibida. Se ha realizado un estudio paramétrico de la variación de los coeficientes de conversión modal con la frecuencia y la profundidad del defecto, tanto para ondas de Lamb como SH guiadas, cuyo análisis ha permitido localizar tendencias y patrones de respuesta que pueden ser aprovechados con objeto de caracterizar el defecto. En concreto, cabe destacar la variación monótona con

la profundidad de los coeficientes de conversión primarios de los modos SH0, SH1, S0 y A0 en amplios rangos de frecuencia, así como el desplazamiento de los picos y valles del coeficiente de conversión primario del modo A0.

7.3 Desarrollos futuros

Las posibilidades de desarrollo de la formulación presentada en esta tesis son variadas, algunas de las cuales se describen a continuación.

La propagación de ondas guiadas en placas sumergidas en un líquido (p. ej., agua, petróleo, etc.), así como su interacción con defectos, podría estudiarse con objeto de aportar información útil que permita desarrollar técnicas de END para estructuras sumergidas, tales como depósitos o cascos de buques.

Los problemas de difracción estudiados en esta tesis son bidimensionales (onda plana incidiendo sobre un defecto de longitud infinita en la dirección paralela al frente de onda). Una de las líneas de trabajo consistiría en estudiar la interacción de ondas guiadas planas con obstáculos tridimensionales, cuyo conocimiento sería de utilidad en el desarrollo de aplicaciones de inspección de aviones (p. ej. detección y caracterización de grietas que crecen radialmente a partir de los taladros de remachado) y tuberías (p. ej. detección de defectos en una tubería mediante ondas guiadas propagándose en dirección circunferencial, tales como las que se generan en algunos vehículos automáticos de inspección interior), entre otras. Estos problemas podrían abordarse mediante una técnica híbrida de EC-EF similar a la planteada en esta tesis, donde el entorno del defecto se estudiaría con el MEC tridimensional y el resto de la placa sería sustituida por un contorno absorbente. Este último se obtendría de aplicar una superposición modal en una sección cilíndrica, $r=\text{cte}$, incluyendo únicamente los modos que cumplan la condición de radiación.

Una de las aplicaciones de las ondas guiadas se encuentra en el área de circuitos electrónicos y sistemas microelectromecánicos (MEMS) [113, 45, 27], donde constituyen la base física para realizar filtros, líneas de retardo y microsensores de pequeñas dimensiones, integrables y muy robustos. Las ondas guiadas, principalmente ondas de Rayleigh, Love o Lamb, se generan en placas de materiales piezoeléctricos con un espesor muy pequeño empleando electrodos interdigitales (transductores lineales periódicos con una diferencia de fase entre hilos de 180°). Para analizar estos elementos sería necesario estudiar la propagación de ondas guiadas en placas de material piezoeléctrico.

En esta tesis no se ha abordado la solución del problema inverso de identificación de defectos o caracterización de materiales, que constituye el objetivo último de los END. La técnica planteada en esta tesis es capaz de resolver el problema directo, es decir, determinar la respuesta dinámica cuando el material, la geometría, y las acciones son conocidas. Se ha realizado una serie de estudios paramétricos de diferentes configuraciones, e incluso se han confrontado con algunos resultados experimentales,

lo que ha permitido identificar tendencias y patrones de respuesta que podrían ser utilizados en técnicas de END con ultrasonidos. Una línea de trabajo a explorar sería la solución del problema inverso de identificación, localización y caracterización de defectos [49, 103].

Bibliografía

- [1] R. Abascal and J. Domínguez. Vibrations of footings on zoned viscoelastic soil. *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 112:433–447, 1986.
- [2] Z. Abduljabbar, S. K. Datta, and A. H. Shah. Diffraction of horizontally polarized shear waves by normal edge cracks in a plate. *Journal of Applied Physics*, 42(2):461–472, 1983.
- [3] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. U.S. Department of Commerce, 1964.
- [4] J. D. Achenbach. *Wave propagation in elastic solids*. North-Holland, New York, 1973.
- [5] K. Aki and P. G. Richards. *Quantitative seismology. Theory and methods.*, volume I. W.H. Freeman and Company, New York, 1980.
- [6] Y. N. Al-Nassar, S. K. Datta, and A. H. Shah. Scattering of Lamb waves by a normal rectangular strip weldment. *Ultrasonics*, 29:125–132, 1991.
- [7] D. N. Alleyne and P. Cawley. A two-dimensional Fourier transform method for the measurement of propagating multimode signals. *Journal of the Acoustical Society of America*, 89(3):1159–1168, 1991.
- [8] D. N. Alleyne and P. Cawley. The interaction of Lamb waves with defects. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 39(3):381–397, 1992.
- [9] D. N. Alleyne, B. Pavlakovic, M. J. S. Lowe, and P. Cawley. Rapid, long range inspection of chemical plant pipework using guided waves. In O. D. Thompson and D. E. Chimenti, editors, *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, volume 19, pages 180–187, New York, 2001. Plenum Press.
- [10] B. A. Auld and M. T. Tsao. A variational analysis of edge resonance in a semi-infinite plate. *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, SU-24(5):317–326, 1977.

- [11] R. Balasubramanyam, D. Quinney, R. E. Challis, and C. P. D. Todd. A finite-difference simulation of ultrasonic Lamb waves in metal sheets with experimental verification. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 29:147–155, 1996.
- [12] J. N. Barshinger. *Guided Wave Propagation in Pipes with Viscoelastic Coatings*. PhD thesis, The Pennsylvania State University, August 2001.
- [13] J. N. Barshinger, J. L. Rose, and M. J. Avioli, Jr. Guided wave resonance tuning for pipe inspection. *Journal of Pressure Vessel Technology-Transactions of the ASME*, 124:303–310, 2002.
- [14] T. Belytschko and Y. Y. Lu. A variationally coupled FE-BE method for transient problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:91–105, 1994.
- [15] F. G. Benitez and A. J. Rosakis. Three dimensional elastodynamics of a layered medium. Technical Report SM85-22, Division of Engineering and Applied Sciences, California Institute of Technology, 1985.
- [16] A. Bernard, M. J. S. Lowe, and M. Deschamps. Guided waves energy velocity in absorbing and non-absorbing plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 110(1):186–196, 2001.
- [17] D. E. Beskos. Boundary element methods in dynamic analysis. *Applied Mechanics Review*, 40:1–23, 1987.
- [18] D. E. Beskos. Boundary element methods in dynamic analysis: Part II (1986-1996). *Applied Mechanics Review*, 50(3):149–197, 1997.
- [19] P. Cawley, D. N. Alleyne, and C. W. Chan. Inspection of pipes (patente US6148672, WO96/12951), 2000.
- [20] C. W. Chan and P. Cawley. Lamb waves in highly attenuative plastic plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 104(2):874–881, 1998.
- [21] Z. Chang and A. Mal. Scattering of Lamb waves from a rivet hole with edge cracks. *Mechanics of Materials*, 31:197–204, 1999.
- [22] D. E. Chimenti. Guided waves in plates and their use in materials characterization. *Applied Mechanics Review*, 50(5):247–284, 1997.
- [23] Y. Cho, D. D. Hongerholt, and J. L. Rose. Lamb wave scattering analysis for reflector characterization. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 44(1):44–52, 1997.

- [24] Y. Cho and J. L. Rose. A boundary element solution for a mode conversion study on the edge reflection of Lamb waves. *Journal of the Acoustical Society of America*, 99(4):2097–2109, 1996.
- [25] Y. Cho and J. L. Rose. An elastodynamic hybrid boundary element study for elastic wave interactions with a surface breaking defect. *International Journal of Solids and Structures*, 37:4103–4124, 2000.
- [26] T. A. Cruse and F. J. Rizzo. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem I. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 22:244, 1968.
- [27] D. Damjanovic, P. Muralt, and N. Setter. Ferroelectric sensors. *IEEE Sensors Journal*, 1(3):191–206, 2001.
- [28] S. K. Datta, Y. N. Al-Nassar, and A. H. Shah. Lamb wave scattering by a surface-breaking crack in a plate. In O. D. Thompson and D. E. Chimenti, editors, *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, volume 10, pages 97–104, New York, 1991. Plenum Press.
- [29] S. K. Datta, T. H. Ju, and A. H. Shah. Scattering of an impact wave by a crack in a composite plate. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 117(8):1738–1754, 1991.
- [30] J. Domínguez. *Boundary Elements in Dynamics*. CMP, Southampton, 1993.
- [31] J. Domínguez and R. Abascal. Dynamics of foundations. In C.A. Brebbia, editor, *Topics in Boundary Element Research*, volume 4, Berlin, 1986. Springer-Verlag.
- [32] J. Domínguez and R. Abascal. Seismic response of strip footings on zoned viscoelastic soils. *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 115:913–934, 1989.
- [33] J. Domínguez and E. Alarcon. Elastodynamics. In *Progress in Boundary Element Method*, volume 1, pages 213–257, London, 1981. Pentech Press.
- [34] J. Domínguez and O. Maeso. Earthquake analysis of arch dams II: Dam-water-foundation interaction. *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 119:513–530, 1993.
- [35] J. Domínguez and F. Medina. Boundary elements for the analysis of dams including dam-water-foundation interaction effects. II. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 6:158–163, 1989.
- [36] J. Domínguez and T. Meise. On the use of the BEM for wave propagation in infinite domains. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 8(3):132–138, 1991.

- [37] S. B. Dong and K. H. Huang. Edge vibrations in laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 52:433–438, 1985.
- [38] S. B. Dong and R. B. Nelson. On natural vibrations and waves in laminated orthotropic plates. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 39:739–745, 1972.
- [39] Q. Du. On some coupled problems in mechanics by the coupling technique of boundary element and finite element method. In C. A. Brebbia and W. Wendland, editors, *Boundary Elements IX*, pages 421–434, Berlin, 1987. Springer-Verlag.
- [40] A. C. Eringen and E. S. Suhubi. *Elastodynamics, Volume II. Linear Theory*. Academic Press, New York, 1975.
- [41] O. Estorff, A. L. Pais, and E. Kausel. Some observations on time domain and frequency domain boundary elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29:785–800, 1992.
- [42] F. A. Firestone. Flaw detecting device and measuring instrument (patente US2280226), 1942.
- [43] F. A. Firestone. Tricks with the Supersonic Reflectoscope. *Non Destructive Testing*, 7:5–19, 1948.
- [44] F. A. Firestone and D. S. Ling. Method and means for generating and utilizing vibrational waves in plates (patente US2536128), 1951.
- [45] D. Fischer, W. J. Varhue, J. Wu, and C. Whiting. Lamb-wave microdevices fabricated on monolithic single crystal silicon wafers. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 9(1):88–93, 2000.
- [46] C. M. Fortunko, R. B. King, and S. K. Datta. Nondestructive evaluation of planar defects in plates using low-frequency shear horizontal waves. *Journal of Applied Physics*, 53(5):3450–3459, 1982.
- [47] P. Fromme and M. B. Sayir. Detection of cracks at rivet holes using guided waves. *Ultrasonics*, 40:199–203, 2002.
- [48] P. Fromme and M. B. Sayir. Measurement of the scattering of a Lamb wave by a through hole in a plate. *Journal of the Acoustical Society of America*, 111(3):1165–1170, 2002.
- [49] R. Gallego and J. Suárez. Numerical solution of the variation boundary integral equation for inverse problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49(4):501–518, 2000.

- [50] D. C. Gazis and R. D. Mindlin. Extensional vibrations and waves in a circular disk and a semi-infinite plate. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 27:541–547, 1960.
- [51] K. F. Graff. *Wave Motion in Elastic Solids*. Clarendon Press, Oxford, 1975.
- [52] T. Grahn. Lamb wave scattering from a circular partly through-thickness hole in a plate. *Wave Motion*, 37(1):63–80, 2003.
- [53] J. J. Grannell. On simplified hybrid methods for coupling of finite elements and boundary elements. In C. A. Brebbia and W. Wendland, editors, *Boundary Elements IX*, pages 447–460, Berlin, 1987. Springer-Verlag.
- [54] R. D. Gregory and I. Gladwell. The reflection of a symmetric Rayleigh-Lamb wave at the fixed or free edge of a plate. *Journal of Elasticity*, 13:185–206, 1983.
- [55] F. Guarracino, V. Minutolo, and L. Nunziate. A simple analysis of soil-structure interaction by BEM-FEM coupling. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 10:280–290, 1992.
- [56] N. Guo and P. Cawley. The interaction of Lamb waves with delaminations in composite laminates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 94(4):2240–2246, 1993.
- [57] D. Harkreider. Surface waves in multilayer elastic media. Rayleigh and Love waves from a body force. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 54(2):627–679, 1964.
- [58] D. D. Hongerholt, G. Williams, and J. L. Rose. Summary of results from an ultrasonic in-flight wing ice detection system. In O. D. Thompson and D. E. Chimenti, editors, *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, volume 21, New York, 2002. Plenum Press.
- [59] IMSL. *IMSL MATH/LIBRARY User's Manual, Version 3.0*. IMSL, Houston, 1994.
- [60] J. P. Jones. Wave propagation in a two-layered medium. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 31:213–222, 1964.
- [61] M. R. Karim, M. A. Awal, and T. Kundu. Elastic wave scattering by cracks and inclusions in plates: In-plane case. *International Journal of Solids and Structures*, 29(19):2355–2367, 1992.
- [62] M. R. Karim, M. A. Awal, and T. Kundu. Numerical analysis of guided wave scattering by multiple cracks in plates: SH case. *Engineering Fracture Mechanics*, 42(2):371–380, 1992.

- [63] M. R. Karim and T. Kundu. Scattering of acoustic beams by cracked composites. *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 116(8):1812–1827, 1990.
- [64] E. Kausel. Forced vibrations of circular foundations on layered media. Technical Report R74-11, Department of Civil Engineering, MIT, 1974.
- [65] E. Kausel. An explicit solution for the Green functions for dynamic loads in layered media. Technical Report R81-13, Department of Civil Engineering, MIT, 1981.
- [66] E. Kausel and R. Peek. Boundary integral methods for stratified soils. Technical Report R82-50, Department of Civil Engineering, MIT, 1982.
- [67] M. Koshiha, S. Karakida, and M. Suzuki. Finite-element analysis of edge resonance in a semi-infinite elastic plate. *Electronics Letters*, 19:256–257, 1983.
- [68] M. Koshiha, S. Karakida, and M. Suzuki. Finite-element analysis of Lamb wave scattering in an elastic plate waveguide. *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, SU-31(1):18–25, 1984.
- [69] M. Koshiha, H. Morita, and M. Suzuki. Finite-element analysis of discontinuity problem of SH modes in an elastic plate waveguide. *Electronics Letters*, 19:256–257, 1983.
- [70] H. Lamb. Waves in an elastic plate. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 93:114–128, 1917.
- [71] E. Le Clezio, M. Castaings, and B. Hosten. The interaction of the S0 Lamb mode with vertical cracks in an aluminum plate. *Ultrasonics*, 40:187–192, 2002.
- [72] E. Le Clezio, M. V. Predoi, M. Castaings, B. Hosten, and M. Rousseau. Numerical predictions and experiments on the free-plate edge mode. *Ultrasonics*, 41:25–40, 2003.
- [73] E. Lehfeldt and P. Holler. Lamb waves and lamination detection. *Ultrasonics*, 5(4):255–257, 1967.
- [74] G. R. Liu and J. D. Achenbach. A strip element method for stress analysis of anisotropic linearly elastic solids. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 61:270–277, 1994.
- [75] G. R. Liu and Z. C. Xi. *Elastic Waves in Anisotropic Laminates*. CRC Press, 2002.

- [76] G. R. Liu, Z. C. Xi, K. Y. Lam, and H. M. Shang. A strip element method for analyzing wave scattering by a crack in an immersed composite laminate. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 66:898–903, 1999.
- [77] S. W. Liu and S. K. Datta. Scattering of ultrasonic wave by cracks in a plate. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 60:352–357, 1993.
- [78] V. Lotfi. Analysis of the response of dams to earthquakes. Technical Report GR86-2, Civil Engineering Department, University of Texas at Austin, 1986.
- [79] A. E. H. Love. *Some problems on Geodynamics*. Cambridge University Press, 1911.
- [80] M. J. S. Lowe. Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 42(4):525–542, 1995.
- [81] M. J. S. Lowe, R. E. Challis, and C. W. Chan. The transmission of Lamb waves across adhesively bonded lap joints. *Journal of the Acoustical Society of America*, 107(3):1333–1345, 2000.
- [82] J. Lysmer and G. Wass. Shear waves in plane infinite structures. *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 98:85–105, 1972.
- [83] Christensen R. M. *Theory of Viscoelasticity*. Academic Press Inc, New York, 1982.
- [84] O. Maeso. *Modelo para el Análisis Sísmico de Presas Bóveda Incluyendo las Interacciones Suelo-Agua-Estructura*. PhD thesis, Escuela Superior de Ingenieros Industriales, Universidad de Las Palmas, 1993.
- [85] G. D. Manolis and D. E. Beskos. *Boundary Elements in Elastodynamics*. Unwyn Hyman Ltd, 1988.
- [86] J. C. P. McKeon and M. K. Hinders. Lamb wave scattering from a through hole. *Journal of Sound and Vibration*, 224(5):843–862, 1999.
- [87] F. Medina and J. Domínguez. Boundary elements for the analysis of dams including dam-water-foundation interaction effects. I. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 6:151–157, 1989.
- [88] A. N. Norris and C. Vemula. Scattering of flexural waves on thin plates. *Journal of Sound and Vibration*, 181(1):115–125, 1995.
- [89] M. F. M. Osborne and S. D. Hart. Transmission, reflection and guiding of an exponential pulse by a steel plate in water. *Journal of the Acoustical Society of America*, 17:1–18, 1945.

- [90] E. Pan, J. Rogers, S. K. Datta, and A. H. Shah. Mode selection of guided waves for ultrasonic inspection of gas pipelines with thick coating. *Mechanics of Materials*, 31:165–174, 1999.
- [91] B. Pavlakovic, M. J. S. Lowe, D. N. Alleyne, and P. Cawley. Disperse: a general purpose program for creating dispersion curves. In O. D. Thompson and D. E. Chimenti, editors, *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, volume 16, pages 185–192, New York, 1997. Plenum Press.
- [92] Lord Rayleigh. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 17:4–11, 1887.
- [93] S. I. Rokhlin. Interaction of Lamb waves with elongated delaminations in thin sheets. *International Advances in Nondestructive Testing*, 6:263–285, 1979.
- [94] S. I. Rokhlin. Diffraction of Lamb waves by a finite crack in an elastic layer. *Journal of the Acoustical Society of America*, 67(4):1157–1165, 1980.
- [95] S. I. Rokhlin. Lamb wave interaction with lap-shear adhesive joints: Theory and experiment. *Journal of the Acoustical Society of America*, 89(6):2758–2765, 1991.
- [96] J. L. Rose. *Ultrasonic Waves in Solid Media*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [97] J. L. Rose. Guided wave nuances for ultrasonic nondestructive evaluation. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 47(3):575–583, 2000.
- [98] J. L. Rose, J. J. Ditri, F. T. Carr, J. C. Spanner, Jr, and D. Jiao. Bore probe for tube inspection with guided waves and method therefor (patente US5734588), 1998.
- [99] J. L. Rose, D. Jiao, and J. C. Spanner, Jr. Ultrasonic guided wave NDE for piping. *Materials Evaluation*, 54(11):1310–1313, 1996.
- [100] J. L. Rose, K. M. Rajana, and F. T. Carr. Ultrasonic guided wave inspection concepts for steam generator tubing. *Materials Evaluation*, 52(2):307–316, 1994.
- [101] J. L. Rose, K. M. Rajana, and M. K. Hansch. Ultrasonic guided wave for NDE of adhesively bonded structures. *Journal of Adhesion*, 50:71–82, 1995.
- [102] J. L. Rose and L. E. Soley. Ultrasonic guided wave for anomaly detection in aircraft components. *Materials Evaluation*, 50:1080–1086, 2000.

- [103] G. Rus and R. Gallego. Optimization algorithms for identification inverse problems with the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26(4):315–327, 2002.
- [104] E. A. G. Shaw. On the resonant vibrations of thick barium titanate disks. *Journal of the Acoustical Society of America*, 28:38–50, 1956.
- [105] W. J. Song, J. L. Rose, and H. Whitesel. An ultrasonic guided wave technique for damage testing in a ship hull. *Materials Evaluation*, 61(1):94–98, 2003.
- [106] M. Tan and B. A. Auld. Normal mode variational method for two and three dimensional acoustic scattering in an isotropic plate. *IEEE Ultrasonics Symposium*, pages 857–861, 1980.
- [107] C. P. D. Todd and R. E. Challis. Quantitative classification of adhesive bond-line dimensions using Lamb waves and artificial neural networks. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 46(1):167–181, 1999.
- [108] P. J. Torvik. Reflection of wave trains in semi-infinite plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 41(2):346–353, 1967.
- [109] C. Vemula and A. N. Norris. Flexural wave propagation and scattering on thin plates using Mindlin theory. *Wave Motion*, 26:1–12, 1997.
- [110] I. A. Viktorov. *Rayleigh and Lamb Waves*. Plenum Press, New York, 1967.
- [111] G. Waas. *Linear Two-Dimensional Analysis of Soil Dynamic Problems in Semi-Infinite Layer Media*. PhD thesis, University of California, Berkeley, 1972.
- [112] X. Wang, C. F. Ying, and M. Li. Scattering of antiplane shear waves by a circular cylinder in a traction-free plate. *Journal of the Acoustical Society of America*, 108(3):913–923, 2000.
- [113] S. W. Wenzel and R. M. White. A multisensor employing an ultrasonic Lamb-wave oscillator. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 35(6):735–743, 1998.
- [114] D. C. Worlton. Experimental confirmation of Lamb waves at megacycle frequencies. *Journal of Applied Physics*, 32(6):967–971, 1961.
- [115] P. Xu and A. K. Mal. An adaptive integration scheme for irregularly oscillatory functions. *Wave Motion*, 7:235–243, 1985.
- [116] P. Xu and A. K. Mal. Calculation of the inplane Green’s functions for a layered viscoelastic solid. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 77:1823–1837, 1987.

- [117] K. Zgonc and J. D. Achenbach. A neural network for crack sizing trained by finite element calculations. *NDT&E International*, 29:2097–2109, 1996.
- [118] S. Y. Zhang, J. Z. Shen, and C. F. Ying. The reflection of the Lamb wave by a free plate edge: visualization and theory. *Materials Evaluation*, 46:638–641, 1988.
- [119] J. Zhu, A. H. Shah, and S. K. Datta. Transient response of a composite plate with delamination. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 65(3):664–670, 1998.