

# ESTUDIO TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE LA ROTURA DE CHORROS CARGADOS EN AUSENCIA DE CAMPO ELÉCTRICO AXIAL IMPUESTO

Memoria presentada por el doctorando  
**José María López-Herrera Sánchez**  
para optar al grado de Doctor en Ingeniería



**Dr. Alfonso M. Gañán Calvo**  
Profesor Titular de Mecánica de Fluidos  
y Director del trabajo



**José M. López-Herrera Sánchez**  
Doctorando

DEPT. INGENIERÍA ENERGÉTICA Y MECÁNICA DE FLUIDOS  
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS  
UNIVERSIDAD DE SEVILLA



*A mis padres Juan y Rosalía*

*A mi mujer Reyes y a mi hijo Álvaro*

# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción al problema</b>	<b>1</b>
1.1	Motivación y aplicaciones . . . . .	1
1.2	Antecedentes . . . . .	5
1.3	Objetivos y organización del trabajo . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Ecuaciones y condiciones de contorno</b>	<b>17</b>
2.1	Consideraciones generales . . . . .	17
2.1.1	Configuración geométrica . . . . .	17
2.1.2	Propiedades y fuerzas en el fluido . . . . .	19
2.1.3	Configuración eléctrica . . . . .	20
2.2	Ecuaciones mecánicas . . . . .	21
2.2.1	Ecuaciones en el volumen . . . . .	21
2.2.2	Condiciones de contorno en la interfase . . . . .	23
2.2.3	Condiciones de contorno axiales . . . . .	24
2.3	Ecuaciones eléctricas . . . . .	25
2.3.1	Ecuaciones de volumen . . . . .	25
2.3.2	Condiciones de contorno en la interfase . . . . .	26
2.3.3	Condiciones de contorno lejos del chorro . . . . .	27
2.3.4	Condiciones de contorno en la dirección axial . . . . .	28
2.4	Ecuaciones para chorros conductores . . . . .	28
2.5	Ecuaciones para chorros no conductores . . . . .	29
2.5.1	Modelo del Dieléctrico con Fuga . . . . .	29
2.6	Adimensionalización . . . . .	32
2.7	Ecuaciones en coordenadas cilíndricas . . . . .	34

2.7.1	Problema fluidomecánico . . . . .	36
2.7.2	Problema Eléctrico . . . . .	38
2.8	Ecuaciones para chorros axilsimétricos . . . . .	41
2.8.1	Problema fluidomecánico . . . . .	42
2.8.2	Problema eléctrico . . . . .	43
2.9	Resumen y conclusiones . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Líquidos conductores</b>	<b>49</b>
3.1	Introducción . . . . .	49
3.2	Aproximación lineal de chorros infinitos 3D . . . . .	51
3.3	Aproximación unidireccional . . . . .	54
3.4	Capa límite y esfuerzos tangenciales . . . . .	58
3.5	Resolución del problema . . . . .	60
3.5.1	Problema fluidomecánico . . . . .	61
3.5.2	Problema eléctrico . . . . .	64
3.6	Resultados . . . . .	77
3.7	Resumen y conclusiones . . . . .	90
<b>4</b>	<b>Líquidos de conductividad finita</b>	<b>95</b>
4.1	Introducción . . . . .	95
4.2	Análisis lineal . . . . .	97
4.3	Aproximación unidireccional . . . . .	107
4.4	Capa límite y el campo eléctrico tangencial . . . . .	111
4.5	Resolución del problema . . . . .	113
4.5.1	Problema fluidomecánico. Método de Fourier . . . . .	113
4.5.2	Resolución del campo eléctrico . . . . .	115
4.6	Resultados . . . . .	123
4.7	Resumen y conclusiones . . . . .	129
<b>5</b>	<b>Experimentos</b>	<b>135</b>
5.1	Montaje . . . . .	135
5.2	Medida de los parámetros de ensayo . . . . .	137
5.2.1	Determinación de las constantes físicas . . . . .	137
5.2.2	Determinación de la velocidad del chorro . . . . .	138

5.2.3	Determinación de los radios del chorro y de las gotas .	140
5.2.4	Determinación del numero de Taylor . . . . .	140
5.2.5	Determinación de la carga de las gotas . . . . .	142
5.3	Resultados . . . . .	142
5.3.1	Medida de los radios de las gotas . . . . .	143
5.3.2	Medida de la carga de las gotas . . . . .	144
5.4	Resumen y conclusiones . . . . .	148
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>153</b>
6.1	Posibles líneas futuras . . . . .	156

# Agradecimientos

Antes que nada, quisiera agradecer la guía de mi director de tesis Alfonso Gañán Calvo. Su dedicación a la investigación y su infatigable capacidad de trabajo han sido un ejemplo para mí. Su entusiasmo por la investigación ha sido contagioso y su intuición ha sido fundamental para comprender y aprender.

Esta tesis no hubiera llegado a buen puerto si no fuera por los miembros del Grupo de Mecánica de Fluidos. Ellos me han explicado fenómenos que por mis pocas luces no conseguía entender. Especialmente Antonio Barrero de quien he aprendido a acudir a la física de los fenómenos y, también, a redactar un poco mejor. La deuda con Miguel Pérez-Saborid es inmensa. A los enormes conocimientos matemáticos de Miguel, de los que espero haber aprendido algo, se debe más de uno de los métodos numéricos empleados en la presente tesis y la resolución de las pegadas de otros. De Manuel González debo de destacar su ayuda en el montaje del experimento, él ha mecanizado más de una de las piezas empleadas y me ha enseñado a mecanizar las otras. Las discusiones con los doctorandos del grupo Miguel Ángel Herrada y José Manuel Gordillo han sido muy fructíferas con ellos he compartido los momentos de euforia y desesperación. Ha sido fundamental el buen ambiente reinante en el grupo al cual contribuye la amabilidad de los profesores Javier Dávila y Antonio Fernández "chiqui"; de nuestras secretarías, Dori y Maricarmen y la de los becarios.

Debo de agradecer al Grupo de electrohidrodinámica de la Facultad de física las discusiones y colaboración mantenida. A Alberto Pérez su predisposición a prestarme los equipos de su laboratorio y explicarme su funcionamiento. A Antonio Castellano su interés en convocar seminarios y los cursos

de doctorados. Debo hacer mención especial a Javier García por su comentarios en cuestiones numéricas y experimentales en nuestra común materia de estudio.

No puedo olvidar en este punto la ayuda económica del estado a través de las becas de F.P.I que me ha costado el acceso a distintos centros en el extranjero y que me ha permitido dedicarme a la tesis en cuerpo y alma.

El máximo agradecimiento lo guardo para mi familia, mis padres que soportaron y comprendieron mis desesperaciones y cambios de humor y, mi mujer Reyes y mi hijo "Arbarito" quienes siempre me animan y me infunden optimismo. A ellos va dedicado este trabajo.

# Capítulo 1

## Introducción al problema

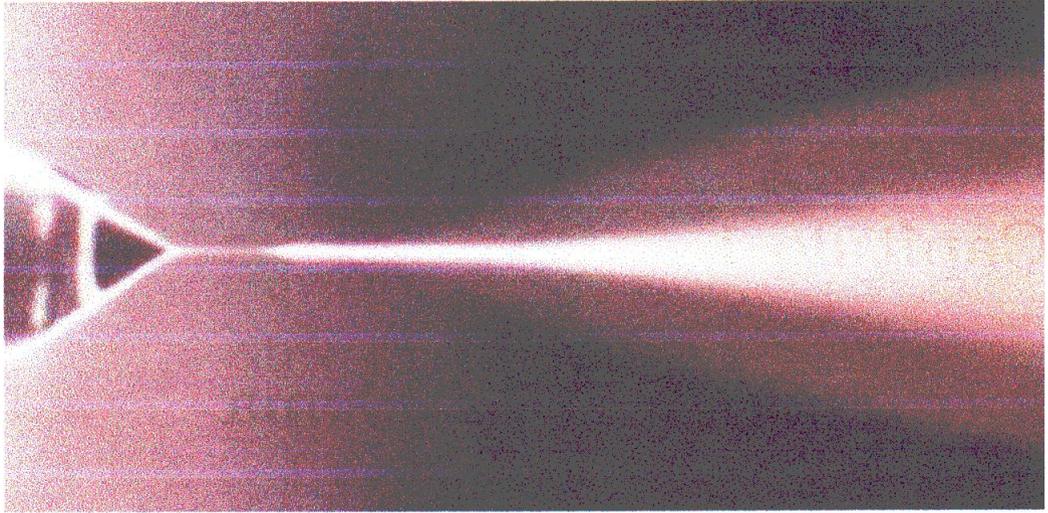
### 1.1 Motivación y aplicaciones

En el presente estudio se pretende analizar la influencia del campo eléctrico en los procesos de rotura de chorros capilares laminares empleando para ello tanto métodos analíticos como numéricos y experimentales.

Por chorro entendemos una columna fluida que se desplaza relativa al ambiente. En nuestro caso nos limitaremos a columnas líquidas capilares inmersas en un gas en reposo estando la interfase de separación entre ambos bien definida. Es bien conocido que tal configuración es inestable a causa de la tensión superficial, que provoca la rotura del chorro en forma de un tren de gotas.

Dicho tren de gotas es de interés práctico y son numerosos los campos y procesos en los que están envueltos los sprays a los que da lugar el tren de gotas [Bailey (1988), Lefevbre (1989)]. Podemos citar como representativos en el campo industrial los procesos de combustión que tienen lugar en quemadores, turbinas y motores diesel, el enfriamiento por evaporación de las gotas; en el campo médico la inhalación de medicamentos y en el agrícola la fumigación de cultivos.

En la mayoría de los casos prácticos se busca la homogeneidad del tamaño de las gotas (spray monodisperso) así como que dichos tamaños sean pequeños (del orden de la micra o menores). Cuando las aplicaciones requie-



*Figura 1.1: Atomización electrohidrodinámica*

ren sprays de calidad, se desechan mecanismos de obtención del spray tales como la extrusión de líquidos en la que la violenta interacción del chorro turbulento con el ambiente produce un amplio espectro de tamaños de gotas.

El campo eléctrico es responsable de la denominada atomización electrohidrodinámica (*atomización EHD*), especialmente idónea para la producción de micro y nano partículas. Aparece al aplicar una diferencia de potencial del orden de kV entre una aguja capilar, por la que circula el líquido (con caudales comprendidos típicamente entre  $10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}$  y  $10^{-14} \text{ m}^3/\text{s}$ ), y un electrodo de referencia dando lugar a un spray de gotas cargadas (figura 1.1).

Las características de esta atomización dependen de las propiedades del líquido eyectado y los voltajes y caudales empleados siendo el modo de mayor interés el denominado cono-chorro (Cloupeau y Prunet-Foch, 1989). En este modo el líquido se ancla al tubo capilar adoptando la forma de un menisco casi cónico de cuyo vértice emana un chorro cargado que finalmente se rompe en gotas dando lugar a un spray de gotas monodisperso y de tamaño micro o nanométrico. Las buenas características del spray, descritas anteriormente, explican el creciente auge de la atomización EHD en el campo industrial siendo usado en aplicaciones de precisión como la producción de monocapas metálicas y/o cerámicas, la síntesis de nuevos materiales o la espectrometría

de masas (ES-MS) siendo esta última aplicación la más relevante porque permite el análisis de moléculas orgánicas de peso molecular elevado imposibles de analizar con espectrómetros convencionales. El campo eléctrico impide además la coalescencia de las gotas por la acción de la repulsión coulombiana permitiendo además una segregación natural de los tamaños de las gotas [Gomez y Tang (1994) y Gañán-Calvo *et al.* (1994)], tal como se observa en la figura 1.1, en la que las gotas satélites, con mayor densidad de carga volumétrica y menor masa que las principales, se sitúan en el exterior. El control de los anteriores procesos requiere a la cuantificación de las cargas transportadas por las gotas.

La atomización EHD ha sido extensivamente estudiada por numerosos investigadores desde los trabajos pioneros de Zeleny (Zeleny, 1914, 1915, 1917). La mayoría de estos trabajos tratan de encontrar la dependencia de los tamaños y las cargas de las gotas generadas con las propiedades de líquido y las condiciones de inyección [Hayati *et al.* (1986a,b), Mutoh *et al.* (1979), Cloupeau y Prunet-Foch (1989), Fernández de la Mora y Loscertales (1994), Gañán-Calvo *et al.* (1997) y Hartman *et al.* (1999) entre otros] así como la naturaleza y características del spray [Gañán-Calvo *et al.* (1994), Gomez y Tang (1994)]. Otros trabajos han buscado establecer modelos teóricos del cono y el chorro. Taylor (1964), a partir de un balance entre esfuerzos eléctricos y capilares, establece que el ángulo del vértice es de  $49.3^\circ$ . El trabajo de Pantano *et al.* (1994) extiende este resultado utilizando el método de los elementos de contorno para determinar la forma del menisco cónico anclado al tubo capilar, y el valor de las fuerzas en su superficie. Fernández de la Mora y Loscertales (1994) a partir del análisis dimensional y Gañán-Calvo *et al.* (1997) a partir de modelos electrohidrodinámicos del chorro emitido, derivan las denominadas *leyes de escala*. Éstas, fundamentales para el uso tecnológico de la atomización EHD, permiten relacionar el tamaño y carga de las gotas con las constantes físicas del líquido y las condiciones de inyección. Existen pequeñas discrepancias entre las leyes de escala propuestas por ambos trabajos especialmente en la determinación del tamaño de las gotas. La discrepancia entre ambas leyes es del orden de los errores experimentales cometidos en la medida de las variables por lo que discernir entre ambas

propuestas es difícil aunque los recientes trabajos experimentales de Gamero (1998) y Brunner (1998) y el trabajo teórico de Hartman *et al.* (1999) apoyan las leyes derivadas por Gañán-Calvo. Gañán-Calvo (1997a) obtiene una primera descripción analítica del conjunto cono-chorro en el límite asintótico de grandes caudales estableciendo además expresiones universales de las variables en juego. Es el mismo autor (Gañán-Calvo, 1997b) quien, extendiendo el trabajo de Melcher y Warren (1971), analiza el chorro emitido desde el cono poniendo de manifiesto el carácter supercrítico de las perturbaciones en el chorro, lo cual explica la robustez del modo cono-chorro, y, empleando una ingeniosa mezcla de análisis experimental-teórico, establece la debilidad tanto del campo eléctrico en el seno del chorro como del campo axial frente al campo normal en la superficie del chorro. El dominio del campo eléctrico exterior sobre el resto de los campos eléctricos, axial e interior, se corrobora en los recientes trabajos de Gañán-Calvo (1999b) y Hartman *et al.* (1999) donde, como podemos observar en la figura 1.2, se establece que el campo normal es unas 20 veces más intenso que el axial tendiendo a aumentar a medida que el chorro se aleja del menisco.

La dificultad de analizar experimentalmente la rotura del chorro capilar en la atomización EHD se debe a la extrema delgadez del mismo, a la rapidez con que se produce el fenómeno y a la enorme cantidad de parámetros de los que puede depender la rotura. La complejidad del proceso de rotura se refleja por ejemplo en el enorme rango que presenta el cociente entre el diámetro del chorro y el de las gotas encontrándose experimentalmente valores desde 3 (Brunner, 1998) hasta 1.89 (Cloupeau y Prunet-Foch, 1989), en los procesos de emisión de iones que se operan en el cono y el chorro en electrosprays de tamaño nanométrico (Gamero, 1998) o en fenómenos como las explosiones culómbicas de las gotas producidas en el electrospray [Gomez y Tang (1994) y Gamero (1998)]. La complejidad del electrospray anteriormente expuesta aconseja emplear en el estudio de la rotura de chorros cargados modelos simplificados en los que los parámetros involucrados sean más controlables y no estén interrelacionados como en el electrospray. Los trabajos de Gañán-Calvo (1997b, 1999b) y Hartman *et al.* (1999) sugieren el empleo de la configuración eléctrica adoptada en la presente tesis, en la

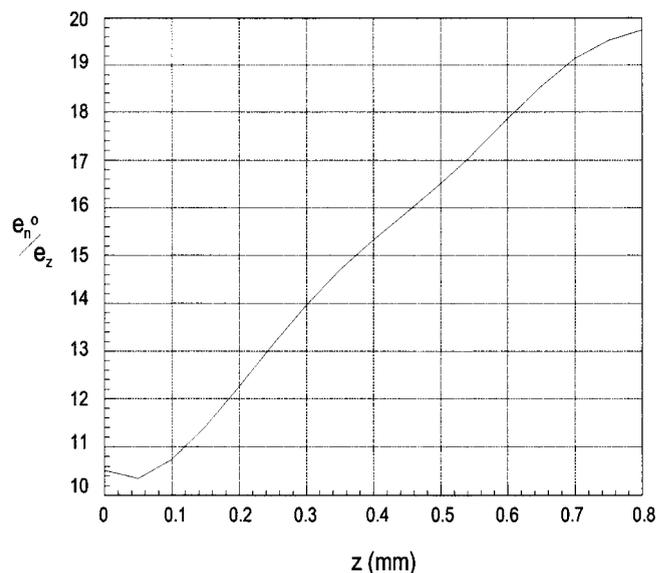


Figura 1.2: Cociente entre el campo normal exterior y el campo eléctrico axial en función de la posición del chorro obtenido de la simulación de Hartman et al. (1999)

que se omite la presencia del campo axial eléctrico admitiendo únicamente el campo que surge naturalmente de la carga dispuesta en la superficie. Otras simplificaciones empleadas, habituales en el estudio de chorros capilares, son el carácter cilíndrico del chorro y la nula influencia del ambiente exterior en la dinámica del chorro que son también aplicables a los chorros del electrospray como muestran Gañán-Calvo (1997a) y Hartman *et al.* (1999).

## 1.2 Antecedentes

La literatura existente sobre la rotura de chorros es amplísima especialmente en chorros no cargados, capilares y axilsimétricos. Los trabajos efectuados se pueden dividir genéricamente en:

- Análisis perturbativos
  - De pequeña amplitud (análisis lineal)

- No lineales (perturbaciones de segundo orden y ordenes superiores)
- Análisis no lineales de carácter numérico
  - Modelos unidireccionales
  - Modelos tridimensionales
- Experimentales.

Los primeros análisis teóricos y experimentales en la materia se remontan al siglo pasado. Savart (1833) realiza los primeros experimentos controlados sobre la rotura de chorros constatando la inevitable formación de gotas a partir de la rotura de los mismos aunque no puede establecer la causa de tal rotura. Plateau establece que la causa es la tensión superficial (Plateau, 1846) y cuantifica el valor mínimo de la longitud de onda para que la perturbación crezca hasta la rotura (Plateau, 1863). Lord Rayleigh (Rayleigh, 1878, 1879) emplea un análisis lineal temporal para establecer como longitud de onda más inestable aquella cuya longitud es aproximadamente nueve veces el radio del chorro, determinando con ello el tamaño típico de las gotas producida en la rotura. Sus estudios sobre chorros abarcan también el campo experimental aplicando técnicas, pioneras entonces y aún en boga, como la estroboscopia (Rayleigh, 1882) y la fotografía (Rayleigh, 1891) para corroborar sus predicciones y aportar el descubrimiento de la existencia de las gotas satélites. La eficacia del análisis lineal temporal de pequeñas perturbaciones empleado por Lord Rayleigh induce a otros investigadores a usarlo en otros aspectos de la rotura de chorros. De este modo, tratando de cuantificar el efecto del ambiente en la rotura, Weber (1931) reprodujo el análisis lineal de Rayleigh (1892) para valores arbitrarios de la viscosidad del líquido. La resolución numérica de la ecuación de dispersión derivada por Weber no se culmina hasta 30 años mas tarde por Chandrasekhar (1961). Tomotika (1935) es quien consigue cuantificar correctamente la influencia del ambiente en el crecimiento de las perturbaciones en un chorro infinito.

Un análisis completo de las perturbaciones pasa por resolver el problema de valores iniciales que permite determinar la evolución de las perturbacio-

nes por medio del cómputo tanto de la velocidad de propagación como de los factores de crecimiento. La transición entre el modo chorro y el modo de goteo (Leib y Goldstein, 1986) es debida a que las perturbaciones inestables remontan el chorro aguas arriba por propagarse éstas a mayor velocidad que el chorro (flujo subcrítico) por lo que para la existencia del chorro es condición necesaria que las perturbaciones inestables sean convectadas aguas abajo (flujo supercrítico). El análisis lineal espacial es la técnica adecuada para calcular perturbaciones que son convectadas pues calcula la dependencia espacial de la amplitud de la perturbación en función de la frecuencia de excitación; sin embargo es posible utilizar el análisis lineal temporal, que calcula la evolución temporal de la excitación en función de su longitud de onda, dado que el análisis temporal coincide con el espacial siempre que la velocidad del chorro sea mayor que la velocidad de propagación de la perturbación (Keller *et al.*, 1973). En este caso, puede considerarse que la perturbación está distribuida en toda la longitud del chorro, creciendo o amortiguándose de manera uniforme independientemente de la coordenada espacial del chorro. Éste es el análisis más ampliamente usado en la rotura de chorros [Rayleigh (1878, 1892), Weber (1931) o Tomotika (1935) entre otros]. Los análisis lineales se revelan muy útiles en la descripción del comportamiento de las perturbaciones y, debido al lento crecimiento de la perturbación infinitesimal, permiten estimar las longitudes de rotura con bastante exactitud. Por el contrario no pueden dar ninguna información de procesos no lineales, como la aparición de gotas satélites o la dependencia del comportamiento del chorro con la amplitud inicial.

En los años setenta se potencian el uso de los esquemas perturbativos incorporando términos no lineales [Yuen (1968), Nayfeh (1970), Lafrance (1975), Chaudhary y Redekopp (1980)], buscando describir los comportamientos no lineales presentes en la rotura de chorros. Estos análisis, por lo general complicados y tediosos, confirman la naturaleza no lineal de la aparición de las gotas satélites cuya presencia se explica por el crecimiento de armónicos superiores al de excitación. No obstante, la posición de la entrefase, y por consiguiente los volúmenes de las gotas principal y satélite, no son fielmente recogidos por este análisis.

El aumento de la potencia de los ordenadores de una parte y la pobreza de resultados de los esquemas perturbativos de otra favorecen el uso de los métodos numéricos en la simulación de la rotura. No obstante, la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes con una superficie libre, aún en el caso axilsimétrico, es una tarea complicada por lo que se han desarrollado modelos unidireccionales, en donde la dependencia de la variable radial está ausente, para disminuir la dificultad del problema matemático.

La simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes basadas en la disparidad de una escala espacial frente a otra, en lo que se denominan aproximaciones unidireccionales, son técnicas clásicas y se han utilizado con éxito en la descripción de flujos tales como los movimientos de fluidos compresibles en toberas y difusores o la propagación de ondas en aguas poco profundas. Melcher y Warren (1971) emplean por primera vez esta simplificación para la descripción de chorro sujeto a una distribución de campo eléctrico impuesto tanto en la dirección radial como axial. Su modelo unidimensional desprecia cualquier dependencia radial de la velocidad y aun despreciando la viscosidad en sus cálculos permite que esta actúe en la completa difusión del esfuerzo tangencial eléctrico.

El papel de la viscosidad en la evolución del chorro depende de los ordenes de magnitud de los tiempos característicos del problema. Los tiempos característicos relevantes en el problema son:

- El tiempo característico de difusión viscosa  $t_\nu$  dado por  $A^2/\nu$ , siendo  $A$  el radio del chorro y  $\nu$  la viscosidad cinemática, y que expresa cuanto tiempo tarda la viscosidad en difundir el esfuerzo tangencial axial en la dirección radial.
- El tiempo de residencia  $t_{res}$  dado por  $L/U$ , siendo  $L$  la longitud típica del chorro y  $U$  la velocidad a la que viaja el chorro, y que expresa el tiempo que tarda una partícula fluida en recorrer el chorro.
- El tiempo capilar  $t_c$  dado por la relación  $(\rho A^3/\gamma)^{1/2}$ , siendo  $\rho$  y  $\gamma$  la densidad y la tensión superficial del líquido respectivamente, y que es el tiempo característico del crecimiento de las grandes perturbaciones hasta la rotura.

La relevancia de la viscosidad en el proceso de rotura se obtiene de comparar los tiempos característicos  $t_c$  y  $t_\nu$ . El cociente entre ambos da lugar al número adimensional denominado número de Ohnesorge  $C$

$$\frac{t_c}{t_\nu} \sim C = \frac{\mu}{(\rho A \gamma)^{1/2}}. \quad (1.1)$$

Siempre que el número de Ohnesorge sea mucho menor que la unidad puede considerarse que la viscosidad no afecta al proceso de rotura. Por el contrario, cuando este número es menor o del orden de la unidad la viscosidad juega un papel relevante en el proceso de rotura. La efectividad de la viscosidad para relajar el perfil de velocidad axial se observa de la comparación de los tiempos  $t_{res}$  y  $t_\nu$ . Si

$$\frac{t_\nu}{t_{res}} \sim \frac{A U A}{L \nu} \ll 1, \quad (1.2)$$

la viscosidad se difunde rápidamente en la dirección radial alisando el perfil de velocidad axial siendo este proceso tanto más efectivo cuanto menor es el radio del chorro y mayor la esbeltez. El proceso de rotura se produce siempre en tiempos más cortos que el empleado por una partícula fluida en recorrer el chorro,  $t_c \ll t_{res}$ , por lo que la simplificación introducida por Melcher y Warren (1971) consistente en permitir a la viscosidad relajar el perfil de velocidad axial excluyendo la viscosidad de la evolución del chorro es válida siempre que los tiempos característicos satisfagan la relación  $t_c \ll t_\nu \ll t_{res}$ . Este trabajo se centra en los casos en que se cumple que  $t_c \lesssim t_\nu \ll t_{res}$ .

El empleo de los modelos unidireccionales en la rotura de chorros no cargados comienza con Lee (1974) que obtiene, a través de ciertas suposiciones referentes a la dependencia radial de la presión y de las velocidades, un conjunto de ecuaciones no lineales válido para chorros no viscosos. Los perfiles de la interfase obtenidos por Lee (1974), muy concordados con los experimentos, potencian el interés de los modelos unidireccionales en la descripción de la rotura de chorros (Lee, 1974) o puentes líquidos (Meseguer, 1983). La derivación del modelo de Lee incluyendo la viscosidad ha sido confusa; lo que se hace evidente en la derivación de los términos viscosos siendo el error más usual despreciar la dependencia radial de la velocidad axial como es

el caso del modelo de Lee viscoso propuesto por Zhang y Alexander (1990). No es hasta los trabajos de Eggers y Dupont (1994) y García y Castellanos (1994) cuando se deriva el modelo de Lee viscoso de forma rigurosa desde las ecuaciones de Navier-Stokes.

En este contexto aparece un nuevo modelo unidireccional, surgido originariamente en el campo de la resistencia de materiales, denominado de Cosserat y adaptado a la dinámica de chorros por Green (1976). Bogy (1978, 1979) utiliza el modelo de Cosserat y compara los modelos de Lee y Cosserat con los resultados del análisis lineal de Rayleigh (1878) para el caso no viscoso, poniendo de manifiesto las excelencias del modelo de Cosserat por ser de mayor orden. Los dos modelos unidireccionales descritos por los trabajos anteriormente citados pecan de cierta falta de rigor y oscurantismo en su derivación. Esta falta de rigor se hace evidente en el modelo de Cosserat viscoso donde se desprecian términos inerciales y viscosos disminuyendo el orden de la aproximación que presenta el modelo no viscoso de Cosserat. García y Castellanos (1994, 1996); García (1998), completando los trabajos previos de Bousfield *et al.* (1986) y Perales y Meseguer (1992), realizan una completa y consistente revisión de los modelos unidireccionales más utilizados en la literatura (Lee y Cosserat), derivando e identificando los ordenes de magnitud de los términos a incluir en las aproximaciones, y obteniendo dos nuevos modelos denominados parabólico y promediado.

A pesar de la popularidad de los modelos de Lee y Cosserat es menester resaltar que otros autores se han mostrado muy críticos con ellos. Es el caso de Schulkes (1993) que deriva un modelo unidireccional utilizando el límite de amplitud pequeña junto al habitual de onda larga y aproximando, a diferencia del resto de investigadores, el término capilar. Los resultados obtenidos son desastrosos cuando se comparan con los experimentos y son imputables tanto a la utilización de la aproximación de amplitud pequeña como a la aproximación del término capilar. La retención del término capilar completo, sin realizar ninguna aproximación de esbeltez, se revela fundamental para el éxito de los modelos unidireccionales pues su ausencia no permite recoger incluso el análisis lineal.

La simulación directa de la rotura de chorros empleando las ecuaciones de Navier-Stokes 3D no ha sido empleada hasta recientemente. Keunings (1986) desarrolla un método de diferencias finitas para elementos capaces de deformarse integrando en el tiempo con un método de predicción-corrección. Este trabajo se centra en el campo de los fluidos no newtonianos prestando poca atención a los fluidos newtonianos. Son Mansour y Ludgren (1990) quienes, empleando el método de los elementos de contorno, simulan la rotura de un líquido no viscoso. El método de los elementos de contorno no es capaz de tratar fluidos en los que tanto los esfuerzos viscosos como inerciales están presentes, así que Ashgriz y Mashayek (1995) emplean un método de elementos finitos para simular la dinámica del chorro líquido de cualquier viscosidad.

La galería de trabajos experimentales sobre chorros es muy completa. Los trabajos experimentales iniciales, realizados en el siglo pasado [Rayleigh (1882), Savart (1833) entre otros], buscaban identificar los mecanismos en juego y la longitud de onda más inestable. Posteriormente es necesario destacar los trabajos de Donnelly y Glaberson (1966), y Goedde y Yuen (1970), tendentes a comprobar los resultados del análisis lineal y proporcionar las primeras medidas de los volúmenes. Las necesidades tecnológicas surgidas en la impresión de chorros de tinta fuerzan una línea de experimentos que centran su interés en la comprensión de las causas de la aparición de las gotas satélites buscando por otra parte su eliminación. En esta línea cabe destacar el trabajo de Rutland y Jameson (1970) que explica la aparición de la gota satélite en términos del crecimiento de un segundo armónico, así como los trabajos de Chaudhary y Maxworthy (1980a,b), en donde se estudia la diferencia de velocidad entre las gotas principales y las satélites en función de las características de la excitación proponiendo la mezcla de armónicos como método de eliminación de las gotas satélites. La mezcla de armónicos se usa también en otros trabajos de control de gotas satélites como son los de Orme y Muntz (1990), o Brenn y Lackermeier (1997) entre otros. La mayoría de los trabajos referidos excitan al chorro con elementos (actuadores) que no permiten establecer una relación clara entre la señal introducida en el actuador y la perturbación que recibe en realidad el chorro.

Esta es la situación que ocurre en los trabajos de Chaudhary y Maxworthy (1980a) o de Orme y Muntz (1990). En ellos, el chorro se excita mediante un actuador piezoeléctrico colocado en la boquilla de inyección siendo la función que relaciona la perturbación de velocidad del chorro  $\epsilon \cos(\omega_p t)$  con la señal que alimenta al actuador  $V \cos(\omega_a t)$  desconocida. Normalmente esta función, denominada de transferencia, debe ser determinada experimentalmente suponiendo que  $\omega_p = \omega_a$  y calculando mediante regresiones la función  $\epsilon = F(V, \omega_a)$ . La excitación de origen eléctrico propuesta por Barbet (1997) elimina tal inconveniente obteniendo con ello un control absoluto de la excitación real del chorro pues determina tanto el punto exacto a partir del cual la excitación tiene lugar como la función de transferencia. Este investigador aproxima al chorro un electrodo cuyo potencial sigue la función  $V \cos(\omega_a t)$  con respecto al chorro conectado a tierra, demostrando analíticamente que la función de transferencia  $F$  no depende de la frecuencia de excitación  $\omega_a$  (por lo que los fenómenos de resonancia están ausentes) y que la amplitud de la perturbación de la presión  $\epsilon$  es proporcional a  $V^2$ .

La literatura sobre chorros capilares bajo campos eléctricos no es tan extensa como la de los no cargados siendo la mayoría de los análisis existentes en la literatura del tipo perturbativo lineal. Hay multitud de posibles situaciones dependiendo tanto del comportamiento eléctrico del fluido como del campo eléctrico en el que está inmerso.

La configuración eléctrica más estudiada pasa por considerar al fluido como un conductor perfecto. En este caso el comportamiento eléctrico del fluido se simplifica enormemente dado que la carga se distribuye en la superficie y el campo únicamente puede dirigirse en la dirección normal a la interfase. Esta configuración es estudiada mediante un análisis lineal por Basset (1894) quien encuentra que el campo eléctrico tiene el efecto dual de estabilizar las ondas largas e inestabilizar las cortas, incluyendo en éstas a las longitudes de onda más inestables para modos axilsimétricos. El estudio del efecto del campo eléctrico en los modos no axilsimétricos se lo debemos a Melcher (1963) quien lo estudia tanto por medio del análisis lineal como experimentalmente, descubriendo que tales modos también son excitados aunque, para niveles de electrificación moderados, los más inestables

siguen siendo los axilimétricos. Saville (1971) realiza el análisis lineal de un chorro conductor cargado añadiendo la influencia de la viscosidad. Los análisis experimentales sobre la rotura de chorros sometidos a electrificación comienzan con el trabajo de Magarvey y Outhouse (1962) quienes señalan la dependencia del modo de rotura natural con el nivel de electrificación del chorro. Magarvey y Outhouse (1962) observaron que para niveles moderados de electrificación, la rotura es del tipo axilimétrico como el observado por Rayleigh (1878) mientras que, para niveles superiores, el chorro deja de estar centrado en el eje adquiriendo una forma serpenteante y rompiéndose de manera no axilimétrica en lo que llaman modo de látigo. Huebner (1969) recoge y completa el anterior estudio mostrando la disminución del tamaño de las gotas por acción del campo eléctrico cuando la rotura es axilimétrica mientras que en la rotura no axilimétrica la distribución de tamaños de gota se amplía. También encuentra que hay posibles combinaciones de carga y caudal que muestran una rotura mezcla del modo de Rayleigh y del modo de látigo. Estudios teóricos no-lineales sobre la rotura de chorros cargados son casi inexistentes en la literatura. Debemos citar el análisis 3D axilimétrico de Setiawan y Heister (1997) sobre chorros conductores no viscosos sometidos a intensos niveles de electrificación donde se describe que, si la electrificación es suficiente, es posible formar en la superficie del chorro un cono de Taylor. López-Herrera *et al.* (1999) utilizan el modelo unidimensional de Lee para estudiar la rotura de chorros cargados de viscosidad cualquiera.

Saville extiende los análisis lineales para chorros a diferentes configuraciones eléctricas. En un primer trabajo Saville (1970) muestra que un campo axial de intensidad suficiente puede estabilizar un chorro sin carga libre en la superficie. Saville (1971a) vuelve a analizar un chorro no cargado sometido a un campo axial impuesto mostrando que el efecto de un tiempo de relajación eléctrica finito es siempre inestabilizante. Mestel, tratando de explicar el comportamiento del electrospray, realiza un análisis lineal imponiendo restricciones en la viscosidad del líquido [ver Mestel (1994) para chorros ligeramente viscosos y Mestel (1996) para los altamente viscosos] mientras que no impone ninguna restricción en el comportamiento eléctrico incluyendo tanto la presencia de carga libre y de un campo axial impuesto como que

el tiempo de relajación eléctrica pueda ser finito. En estos trabajos se pone de manifiesto que el esfuerzo tangencial de origen eléctrico puede ralentizar el crecimiento de la perturbación dando lugar a chorros de larga longitud, excitándose el modo no axilsimétrico a medida que el esfuerzo tangencial se hace más importante. La ausencia de carga libre en el líquido o del campo axial potencia la rotura axilsimétrica similar a la observada en el electrospray en el modo cono-chorro en consonancia con los resultados de Gañán-Calvo (1997b, 1999b) y Hartman *et al.* (1999) referentes a la debilidad del campo axial frente al normal.

### 1.3 Objetivos y organización del trabajo

La presente tesis pretende estudiar la rotura no lineal de chorros cargados. El análisis temporal de las ecuaciones de Navier-Stokes se complica aun más por la presencia del campo eléctrico y las condiciones de contorno que conlleva la presencia de una superficie libre por lo que acudimos a la utilización de los modelos unidireccionales para simular la dinámica del chorro. El comportamiento eléctrico del chorro depende en gran medida de las condiciones de inyección del líquido así como de sus constantes físicas. Supondremos en este sentido que el chorro no está sometido a ningún campo eléctrico impuesto surgiendo la carga que presenta como respuesta natural a la diferencia de potencial aplicada entre el chorro y el contorno (electrodo de electrificación). Se distingue en el presente estudio el comportamiento eléctrico correspondiente al límite conductor del más general en el que las fuerzas de polarización están presentes. Con estas premisas el trabajo se ha organizado como se relata a continuación.

En el capítulo 2 se describen los modelos físicos propuestos haciendo hincapié en los dos posibles comportamientos eléctricos del chorro dependientes del denominado tiempo de relajación, caracterizado por la conductividad del líquido principalmente. Se describen las ecuaciones volumétricas, mecánicas y eléctricas, que modelan ambos comportamientos. Posteriormente se adimensionalizan las ecuaciones y variables identificando los números adimensionales. Se formulan a partir de este punto las ecuaciones en coordenadas

cilíndricas y posteriormente se reducen al caso axilsimétrico.

En el capítulo 3 se estudia el límite conductor. Obtenemos información del comportamiento cualitativo del chorro del análisis lineal de las ecuaciones 3D. En este punto derivamos la aproximación unidireccional poniendo de manifiesto las posibles limitaciones y aciertos de la aproximación. Describimos en este punto los métodos de resolución del problema fluidomecánico y eléctrico y, por último, se exponen los resultados obtenidos.

En el capítulo 4 se estudia el límite no conductor. Realizamos un detallado análisis lineal de las ecuaciones 3D axilsimétricas utilizando los resultados calculados para justificar la aproximación unidireccional y obtener información tanto cualitativa como cuantitativa del comportamiento. En este punto derivamos la aproximación unidireccional con especial atención a las diferencias que surgen con el límite anterior y señalamos las posibles limitaciones de este tratamiento. A continuación describimos los métodos de resolución del problema fluidomecánico y eléctrico en los que se divide la aproximación unidireccional. Por último exponemos los resultados obtenidos.

En el capítulo 5 describimos los experimentos efectuados sobre la rotura de chorros conductores. A partir de este momento exponemos los resultados experimentales comparándolos con los resultados numéricos obtenidos con el modelo expuesto en el capítulo 3.

# Capítulo 2

## Ecuaciones y condiciones de contorno

### 2.1 Consideraciones generales

#### 2.1.1 Configuración geométrica

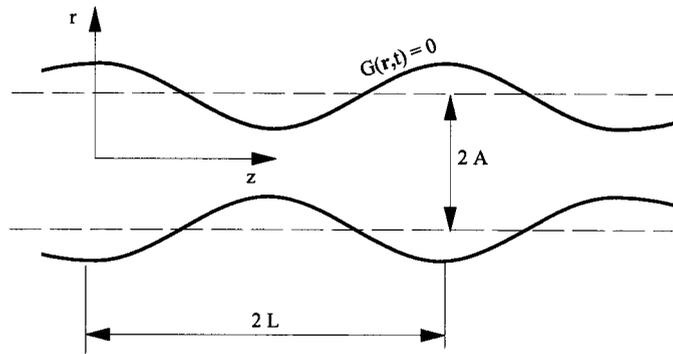
En esta tesis nos proponemos analizar chorros líquidos capilares. La modelización de las condiciones de contorno espaciales aplicables en un chorro de estas características es difícil dado que junto a las condiciones de contorno en el orificio de inyección se debe modelar la zona de rotura como un sumidero discreto de cantidad de movimiento y masa que depende de la frecuencia de formación de las gotas, su volumen y velocidad. Si el chorro emerge del orificio a una velocidad sensiblemente superior a la velocidad de las ondas capilares (Keller *et al.*, 1973), la modelización de las condiciones de contorno se simplifican enormemente debido a que la influencia del orificio de salida y la zona de rotura no se refleja en la evolución local de la perturbación. El número adimensional que permite comparar la velocidades del chorro y de las ondas capilares es el número de Weber definido por

$$We = \frac{\rho AV^2}{\gamma}, \quad (2.1)$$

donde  $\rho$  es la densidad del líquido,  $A$  es el radio del chorro y  $V$  la velocidad del chorro. En el límite descrito por Keller *et al.* (1973),  $We > 1$ , el chorro

se puede considerar una columna líquida infinitamente larga y estacionaria. En una descripción Lagrangiana, donde el sistema de referencia se mueve solidariamente con el chorro a la velocidad media de éste, el problema, en el límite de  $We > 1$ , es de tratamiento más fácil. Se puede entonces estudiar la evolución temporal de una porción de fluido considerándose al chorro como doblemente infinito. Es también posible fijar el sistema de referencia al orificio y estudiar la evolución espacial de la perturbación considerando al chorro como semiinfinito. Ambas visiones coinciden en el límite propuesto por Keller *et al.* (1973) recogiendo una u otra descripción con una transformación galileana de coordenadas.

En lo que sigue nos ceñiremos a chorros líquidos infinitos empleando una descripción Lagrangiana por lo que solamente tendremos que definir la geometría de una porción del chorro (fig. 2.1).



*Figura 2.1: Geometría de la porción del chorro*

Como podemos observar en la figura 2.1 la forma de la columna líquida está definida por la función implícita

$$G(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{2.2}$$

dependiente del vector de posición  $\mathbf{r}$  y del tiempo  $t$ . La forma del chorro se denomina también entrefase por ser el lugar de separación entre la fase líquida y el ambiente gaseoso. Otras variables geométricas de interés son el radio no perturbado del chorro  $A$  y la longitud de la onda de la perturbación  $2L$ .

El trabajo efectuado se restringe a chorros axilsimétricos, los únicos inestables en el caso de chorros no cargados en donde la influencia del ambiente es despreciable, aunque en el caso de chorros cargados los modos no axilsimétricos pueden estar presentes si la electrificación del chorro es suficientemente alta (Saville, 1971). Describiremos en qué circunstancias el modo no axilsimétrico puede aparecer.

### 2.1.2 Propiedades y fuerzas en el fluido

El fluido eyectado en forma de chorro es newtoniano, homogéneo e incompresible. Por tanto, en el presente estudio no se contemplan fuerzas inducidas por gradientes de temperatura, densidad o tensión superficial. Se supone que la densidad  $\rho$ , la viscosidad cinemática  $\mu$ , la tensión superficial  $\gamma$  y las constantes eléctricas, permitividad  $\epsilon$  y conductividad  $K$  permanecen constantes a lo largo de la evolución del chorro.

Algunas consideraciones deben realizarse sobre el medio exterior. Es bien conocido que los chorros eyectados a gran presión (velocidad) se atomizan por efecto de la interacción aerodinámica con el ambiente. Este proceso, fuertemente turbulento, no está recogido en el presente estudio que se ciñe a chorros laminares y en donde la interacción mecánica con el ambiente exterior se considera nula. Para ello es necesario descargar en el vacío, o en un gas a velocidad limitada.

Las fuerzas denominadas capilares son decisivas en la evolución dinámica del chorro. Por otro lado, los efectos viscosos también son tenidos en cuenta. Por el contrario, se consideran ausentes o despreciables las aceleraciones uniformes en el chorro, como es el caso de la gravedad. Estas aceleraciones no afectan a la dinámica del chorro siempre que el incremento de energía cinética provocado por ella en una longitud de onda sea despreciable frente a la energía cinética media

$$\frac{\rho V \Delta V / L}{\rho V^2 / L} \sim \frac{\Delta V}{V} \ll 1. \quad (2.3)$$

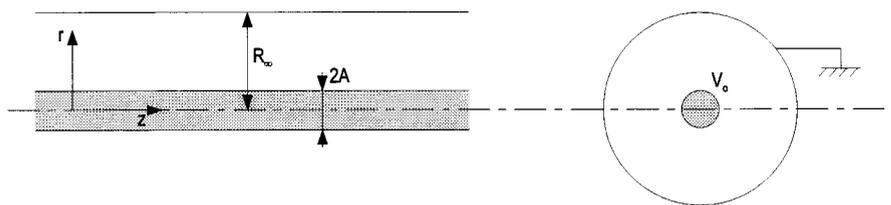
Dado que el incremento de velocidad provocado por la gravedad  $g$  en una longitud de onda  $2L$  es del orden de  $\Delta V \sim \sqrt{gL}$ , la restricción 2.3 es equivalente

a considerar que el número de Froude  $Fr$  definido por

$$Fr = gL/V^2, \quad (2.4)$$

es mucho menor que la unidad. En el caso de que la anterior restricción no fuera satisfecha el tratamiento Lagrangiano no es apropiado dado que habría un trasvase de masa y cantidad de movimiento desde las secciones adyacentes hacia la sección cuya evolución se estudia.

### 2.1.3 Configuración eléctrica



*Figura 2.2: Configuración eléctrica*

En la presente sección expondremos la configuración eléctrica y los casos que se estudiarán. En los líquidos están disueltas sales e impurezas que por lo general están parcialmente disociadas en aniones y cationes. En ausencia de campo eléctrico, los cationes y aniones se encuentran en un mismo grado de concentración en la partícula fluida por lo que la carga neta en el volumen fluido es nula. La aplicación de un campo eléctrico provoca un desequilibrio de las concentraciones de iones presentes en la partícula fluida induciendo la aparición de una carga neta en el volumen fluido. En nuestro caso, la inducción proviene de la diferencia de potencial que se aplica entre el chorro, conectado a un potencial  $V_0$ , y un electrodo, que denominamos de electrificación, dispuesto de manera coaxial con el chorro a una distancia  $R_\infty$  y conectado a tierra (ver figura 2.2). En esta configuración la carga es atraída por el campo eléctrico hacia la interfase. Dependiendo principalmente de la conductividad del líquido, del resto las constantes físicas del líquido y de las condiciones de eyección es posible discernir dos comportamientos límites

de las cargas con tratamientos diferentes y que denominamos conductor y no conductor. Estos límites surgen de comparar el tiempo característico de migración de las cargas dado por el tiempo de relajación eléctrica  $t_e \sim \epsilon/K$  con el tiempo característico del movimiento fluido dado por el tiempo capilar  $t_c \sim (\rho A^3/\gamma)^{1/2}$ . Si  $t_e \ll t_c$ , el fluido puede considerarse como conductor pues la carga emigra a la interfase antes de que ocurran cambios en las condiciones de contorno o en el movimiento fluido. Por el contrario, si ambos tiempo característicos son comparables la migración de las cargas viene afectada por el movimiento fluido en lo que denominamos límite no conductor. La presencia de un campo eléctrico en la dirección axial solo puede considerarse en el caso no conductor pues en el límite conductor dicho campo provocaría una corriente eléctrica infinita al no existir el freno de la conductividad del líquido. La existencia de un campo axial puede hacer inviable el tratamiento Lagrangiano pues somete al chorro a una aceleración continua provocando su continuo estrechamiento que, de ser muy intenso, provoca la violación de la hipótesis (2.3). Como los campo axiales presentes en el chorro del electrospray son mucho menores que los normales (o radiales) [Gañán-Calvo (1997b, 1999b) y Hartman *et al.* (1999)] se hace la simplificación de desechar la existencia de dicho campo.

## 2.2 Ecuaciones y condiciones de contorno mecánicas

### 2.2.1 Ecuaciones en el volumen

En lo que sigue expondremos las ecuaciones de Navier-Stokes que aseguran el cumplimiento de las leyes de conservación en todo el volumen fluido. La ley de conservación de la masa obliga, en el caso fluido incompresible, a que el campo de velocidades sea de divergencia nula,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.5)$$

La ecuación que expresa la conservación de la cantidad de movimiento es

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f}_{vol}, \quad (2.6)$$

en donde  $\mathbf{T}$  es el tensor de esfuerzos mecánico y  $\mathbf{f}_{vol}$  es la densidad de las fuerzas que se aplican a todo el volumen como son las gravitatorias y las de origen eléctrico.

El tensor de esfuerzos mecánico consta de su parte estática y esférica,  $-P\mathbf{I}$ , asociada a la presión y, la parte dinámica asociada a la viscosidad

$$\mathbf{T} = -P\mathbf{I} + \mathbf{T}_v, \quad (2.7)$$

en donde el tensor de esfuerzos viscosos para fluidos newtonianos e incompresibles toma la forma

$$\mathbf{T}_v = \mu[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t], \quad (2.8)$$

en donde el superíndice "t" denota la transposición del tensor.

La fuerza volumétrica de origen gravitatorio puede, dado su carácter conservativo, disponerse como el gradiente de una presión gravitatoria

$$\mathbf{f}_g = \nabla(\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}), \quad (2.9)$$

siendo  $\mathbf{r}$  el vector posición.

Las fuerzas volumétricas de origen eléctrico pueden expresarse como la divergencia del tensor de esfuerzos eléctricos de Maxwell  $\mathbf{T}_E$  (Landau y Lifshitz, 1960)

$$\mathbf{T}_E = \varepsilon \mathbf{E} \mathbf{E} - \frac{1}{2} \varepsilon (1 - \varsigma) E^2 \mathbf{I}, \quad (2.10)$$

donde  $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico,  $\varepsilon$  la permitividad y  $\varsigma$  el denominado parámetro de electrostricción que viene dado por

$$\varsigma = \frac{\rho}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T. \quad (2.11)$$

Como dijimos antes, las fuerzas volumétricas de origen eléctrico pueden derivarse del tensor sin más que aplicar el operador divergencia al tensor, resultando:

$$\mathbf{f}_E = \rho^e \mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \nabla \varepsilon + \nabla \left( \frac{1}{2} \varepsilon \varsigma E^2 \right). \quad (2.12)$$

El primer termino expresa la fuerza debida a la acción del campo eléctrico sobre la densidad de carga volumétrica  $\rho^e$ ; el segundo está asociado a las inhomogeneidades de la permitividad en el volumen fluido y el tercer y último término es la denominada fuerza de electrostricción. Este último término actúa tanto en el volumen como en la interfase por lo que puede englobarse con la presión sin que esta acción suponga efecto alguno sobre la dinámica (Saville, 1997). Esta acción se realiza efectuando las siguientes sustituciones:

$$P \rightarrow P - \frac{1}{2}\epsilon\zeta E^2 \text{ y} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{T}_E \rightarrow \epsilon\mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{1}{2}\epsilon E^2\mathbf{I}. \quad (2.14)$$

Tomando en consideración las expresiones (2.13) y (2.14), la ecuación de cantidad de movimiento se puede escribir como:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla(P + \rho\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) + \rho^e \mathbf{E} - \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \nabla \epsilon + \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (2.15)$$

### 2.2.2 Condiciones de contorno en la interfase

En la interfase de separación entre el líquido y gas deben verificarse ciertas restricciones. Una primera es la condición cinemática que obliga a la interfase a moverse con el fluido

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla G|_{G(\mathbf{r},t)=0} = 0. \quad (2.16)$$

La segunda condición es el equilibrio de los esfuerzos aplicados en la interfase ya que la ausencia de masa de la interfase no permite la existencia de una fuerza neta sobre ella. Los esfuerzos netos que se producen en la interfase provienen de la diferencia del vector de esfuerzos  $(\mathbf{T} + \mathbf{T}_E) \cdot \mathbf{e}_n$  a un lado y otro de la interfase.  $\mathbf{e}_n$  es el vector normal a la interfase y viene dado por

$$\mathbf{e}_n = \frac{\nabla G}{|\nabla G|} \Big|_{G(\mathbf{r},t)=0}. \quad (2.17)$$

Estos esfuerzos, que actúan sobre la interfase desde la fase gaseosa y la líquida, son equilibrados por la fuerza resultante de la diferencia de potencial

intermolecular a un lado y otro de la interfase y que son proporcionales a la curvatura  $\nabla \cdot \mathbf{e}_n$  siendo la constante de proporcionalidad la denominada tensión superficial  $\gamma$ . Al término  $\gamma(\nabla \cdot \mathbf{e}_n)$  se le denomina presión capilar dado que actúa en la dirección normal de la interfase. La ecuación que modela el balance de esfuerzos es por tanto

$$\Delta P \mathbf{e}_n + \Delta \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{e}_n + \Delta \mathbf{T}_E \cdot \mathbf{e}_n = \gamma(\nabla \cdot \mathbf{e}_n) \mathbf{e}_n. \quad (2.18)$$

Si, como habíamos manifestado, despreciamos la acción viscosa de la fase gaseosa y tomamos como nivel de referencia la presión en la fase gaseosa, la ecuación (2.18) puede escribirse como:

$$P \mathbf{e}_n - \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{e}_n + \Delta \mathbf{T}_E \cdot \mathbf{e}_n = \gamma(\nabla \cdot \mathbf{e}_n) \mathbf{e}_n. \quad (2.19)$$

### 2.2.3 Condiciones de contorno axiales

Como definimos anteriormente nos restringiremos a la evolución temporal de un chorro líquido que es infinitamente largo y cilíndrico sobre el que imponemos una perturbación periódica en la dirección axial  $z$  con periodo  $2L$  por lo que podremos restringir el estudio a un solo periodo, en cuyos extremos se imponen condiciones de periodicidad:

$$G(\mathbf{r}, t)|_z = G(\mathbf{r}, t)|_{z \pm 2nL} \text{ en donde } 0 < z < 2L \text{ y } n = 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, z)|_z = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)|_{z \pm 2nL} \text{ en donde } 0 < z < 2L \text{ y } n = 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

Si además fijamos el sistema de referencia al periodo, eliminando del análisis la velocidad a la que viaja el chorro, y nos circunscribimos a una semilongitud de onda, las condiciones (2.20) y (2.21) son equivalentes a

$$\left. \frac{\partial G(\mathbf{r}, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial G(\mathbf{r}, t)}{\partial z} \right|_{z=L} = 0 \quad (2.22)$$

y

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)|_{z=0} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)|_{z=L} \quad (2.23)$$

## 2.3 Ecuaciones y condiciones de contorno eléctricas

### 2.3.1 Ecuaciones de volumen

Las ecuaciones que modelan el comportamiento eléctrico son las denominadas ecuaciones de Maxwell (Jackson, 1962)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho^e, \quad (2.24)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (2.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.26)$$

y

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.27)$$

en donde los vectores  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  son los vectores campo eléctrico, desplazamiento eléctrico, campo magnético e inducción magnética, respectivamente;  $\rho^e$  y  $\mathbf{J}$  la densidad de carga y de corriente. Estas ecuaciones vienen completadas con aquellas que modelan el comportamiento del medio y que, supuesto un comportamiento isotrópico, pueden escribirse como

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (2.28)$$

y

$$\mathbf{H} = \mu \mathbf{B} \quad (2.29)$$

donde  $\varepsilon$  y  $\mu$ , constantes físicas dependientes del medio, son la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética respectivamente, y que, en el caso de un fluido isótropo y homogéneo, son escalares. La corriente que circula es debida a la acción del campo eléctrico (ley de Ohm) y aquella convectada por el movimiento macroscópico del fluido

$$\mathbf{J} = K\mathbf{E} + \rho^e \mathbf{v}, \quad (2.30)$$

en donde  $K$  es la conductividad del medio.

Las ecuaciones anteriores se simplifican enormemente si los efectos magnéticos son despreciables alcanzándose lo que se denomina el límite electrostático,

$$\nabla \cdot \varepsilon \mathbf{E} = \rho^e \text{ y} \quad (2.31)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (2.32)$$

Resta por encontrar la ecuación que modela la conservación de la densidad de carga volumétrica. Ésta se obtiene aplicando el operador divergencia a la ecuación (2.25), lo que da

$$\frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{D})}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.33)$$

y sustituyendo las ecuaciones (2.24) y (2.30) en la ecuación anterior (2.33)

$$\frac{\partial \rho^e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho^e = -\frac{K}{\varepsilon} \rho^e, \quad (2.34)$$

donde se ha empleado la ecuación (2.31) y el hecho de que el campo de velocidades es de divergencia nula.

A partir del carácter irrotacional del campo eléctrico podemos utilizar el potencial eléctrico  $\phi$  como variable siendo por lo tanto necesario resolver la ecuación de Poisson para conocer la distribución de campo eléctrico

$$\nabla^2 \phi = \frac{\rho^e}{\varepsilon}, \quad (2.35)$$

en el caso de ausencia de cargas libres en el medio la ecuación de Poisson se reduce a la ecuación de Laplace ( $\nabla^2 \phi = 0$ ).

En los epígrafes 2.4 y 2.5.1 justificaremos la idoneidad del límite electrostático para modelar el comportamiento eléctrico en el chorro cargado.

### 2.3.2 Condiciones de contorno en la interfase

Como dijimos en la anterior sección, y que queda pendiente de justificación en posteriores secciones, el límite aplicable en los casos tratados en esta tesis es el electrostático. De la aplicación del teorema de Gauss a las ecuaciones de Maxwell conocemos que el salto del vector desplazamiento eléctrico  $\mathbf{D}$  a

través de la interfase es proporcional a la cantidad de carga por unidad de superficie  $\sigma_e$  contenida en la interfase

$$\Delta \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_n = \|\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_n\| = \sigma_e. \quad (2.36)$$

La otra condición de contorno que debe de cumplir el campo eléctrico es la continuidad de su componente tangencial a través de la interfase

$$\Delta(\mathbf{E} \times \mathbf{e}_n) = 0, \quad (2.37)$$

y que es equivalente a obligar a la continuidad del potencial a un lado y otro de la interfase

$$\Delta \phi = 0. \quad (2.38)$$

En conjunción con las anteriores ecuaciones se encuentra la de conservación de la carga presente en la interfase (Mestel, 1994) y que puede escribirse como

$$\frac{D\sigma_e}{Dt} - \sigma_e \mathbf{e}_n \cdot [(\mathbf{e}_n \cdot \nabla) \mathbf{v}] = K E_n^i \quad (2.39)$$

donde  $D/Dt$  es el operador derivada sustancial dado en este caso por

$$\frac{D()}{Dt} = \frac{\partial()}{\partial t} + \mathbf{v}|_{r=F(z,\theta,t)} \cdot \nabla_s(), \quad (2.40)$$

donde el vector velocidad se evalúa en la interfase y el sufijo  $s$  indica que el gradiente es superficial.

### 2.3.3 Condiciones de contorno lejos del chorro

Como describimos anteriormente se coloca un electrodo de electrificación conectado a tierra situado a una distancia  $R_\infty$  del eje de simetría y que permite cargar el chorro. El hecho de que este electrodo esté conectado a tierra obliga a que el potencial en su superficie sea nulo:

$$\phi|_{r=R_\infty} = 0. \quad (2.41)$$

### 2.3.4 Condiciones de contorno en la dirección axial

Al igual que el resto de las variables se exigen condiciones de periodicidad lo que se traduce en la nulidad de la derivada axial del potencial eléctrico en ambos extremos del dominio de integración  $0 < z < L$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=L} = 0. \quad (2.42)$$

## 2.4 Ecuaciones para chorros conductores

Un chorro se considera conductor cuando el tiempo empleado por las cargas presentes en el chorro para alcanzar su posición de equilibrio electrostático,  $t_e$ , es mucho más corto que el tiempo empleado en variar las condiciones ambientales,  $t_c$ . En estas circunstancias,  $t_e \ll t_c$ , la ecuación de conservación de la densidad de carga volumétrica (2.34) se escribe como

$$\frac{\partial \rho^e}{\partial t} \simeq -\frac{K}{\varepsilon} \rho^e, \quad \equiv \quad \rho^e \sim e^{-(K/\varepsilon)t}, \quad (2.43)$$

reflejando que las cargas emigran desde el seno del líquido a la interfase por conducción en un tiempo característico  $t_e$  dado por el cociente entre la permitividad y la conductividad del líquido,  $t_e = \varepsilon/K$ , y que se denominada tiempo de relajación eléctrica. La convección de las cargas [producida en el tiempo característico capilar  $t_c \sim (\rho A^3/\gamma)^{1/2}$ ] es despreciable frente a la conducción [producida en el tiempo característico  $t_e$ ] por lo que la influencia del movimiento fluido en la distribución de las cargas es a través del cambio de la posición de la interfase. Por lo tanto, cuando se estudia el movimiento fluido, que se produce en el tiempo  $t_c$ , la migración de las cargas hacia la superficie por conducción, que se produce en el tiempo  $t_e$ , es tan rápida que se puede considerar que toda la carga está dispuesta en la superficie del chorro encontrándose el volumen fluido libre de carga volumétrica. En este límite por lo tanto desaparece cualquier fuerza volumétrica de origen eléctrico de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (2.15),

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla(P + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) + \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (2.44)$$

Dado que el líquido puede considerarse como conductor, el campo eléctrico puede considerarse despreciable en el seno del líquido. Los únicos esfuerzos eléctricos presentes actúan en la superficie, asociados a la distribución de campo eléctrico en la fase gaseosa, influyendo en la evolución del chorro a través de las condiciones de contorno. Estos esfuerzos de origen eléctrico actúan en la dirección normal  $\mathbf{e}_n$  debido a que no existe campo eléctrico tangencial. En el límite conductor el problema eléctrico se reduce pues a conocer la distribución de potencial en la fase gaseosa resolviendo la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi^o = 0, \quad (2.45)$$

reduciéndose las condiciones de contorno en la interfase a una condición de Dirichlet

$$\phi^o|_{r=F(z,t)} = V_o, \quad (2.46)$$

mientras que el resto de las condiciones de contorno eléctricas permanecen sin cambios.

## 2.5 Ecuaciones para chorros no conductores

### 2.5.1 Modelo del Dieléctrico con Fuga

Hasta el presente momento las ecuaciones utilizadas para modelar el comportamiento eléctrico del fluido han sido las electrostáticas. Las fuerzas de origen eléctrico que actúan sobre el fluido son superficiales y por lo tanto aparecen en las condiciones de contorno en la interfase, siendo nulas las fuerzas volumétricas de origen eléctrico. El efecto recíproco, del movimiento fluido sobre el campo eléctrico, es a través del cambio de geometría que se opera por el movimiento fluido. Estas simplificaciones surgen naturalmente en el caso de un líquido altamente conductor ( $t_e \ll t_c$ ) donde es conocido que en el seno del líquido no hay cargas libres. En el caso que nos ocupa, donde el tiempo de relajación eléctrico es comparable al tiempo característico del movimiento ( $t_e \sim t_c$ ), las premisas anteriores que conforman el Modelo Dieléctrico con

Fuga (denominado originalmente en inglés *Leaky Dielectric Model*) de Taylor y Melcher no son obvias y necesitan una justificación. Las bases de este modelo se pueden encontrar en Melcher (1969) y Melcher y Warren (1971), una profunda revisión del modelo ha sido efectuada por Saville (1997), autor que pone de manifiesto su origen, sus posibles fuentes de error y los experimentos presentes en la literatura que confirman la validez del modelo. A continuación veremos como surge el modelo de un análisis de escalas.

La primera premisa del modelo es la utilización de las ecuaciones electrostáticas para el cálculo de la distribución de campo eléctrico. Esta premisa surge de la comparación del tiempo característico de los fenómenos eléctricos (tiempo de relajación eléctrico,  $t_e \equiv \varepsilon/K$ ) frente a los magnéticos ( $t_M \equiv \mu K \ell^2$  donde  $\ell$  es la escala geométrica característica). Comparando ambos tiempos se colige que los fenómenos magnéticos son despreciables siempre que  $t_e \gg 10^{-12}$ , condición que se satisface fácilmente para las conductividades típicas de los fluidos utilizados como el tolueno y el hexano ( $K \sim 10^{-11}$ ) o la formamida mezclada con dioxano ( $K \sim 10^{-7}$ ).

Los fenómenos eléctricos e hidrodinámicos vienen acoplados a través del tensor de esfuerzos de Maxwell, el cual se traduce en unos esfuerzos volumétricos asociados a la existencia de carga libre y a una posible falta de homogeneidad en la permitividad dieléctrica (ver ecuación 2.15) y, por otra parte, a unos esfuerzos superficiales que el movimiento fluido deberá equilibrar (ecuación 2.19). Si las inhomogeneidades de la permitividad no están presentes, el modelo se completa justificando el carácter neutro del seno del fluido para la escala espacial característica (típicamente del orden del milímetro), carácter que permite descargar totalmente la influencia de la carga volumétrica de la ecuación de cantidad de movimiento. Para ello es necesario detallar del comportamiento de las especies iónicas, responsables últimos de la carga presente. En efecto, analizando el caso más simple (3 especies; la neutra y las 2 disociadas, el catión y su anión) la densidad de carga volumétrica dimensional viene dado por

$$\rho^e = ez_v(n_+ - n_-), \quad (2.47)$$

donde  $e$  es la carga de un protón,  $z_v$  es la valencia de los iones y  $n_+$  y  $n_-$  son

las concentraciones de los cationes y aniones respectivamente. La ecuación de conservación adimensional de la densidad de carga volumétrica, derivada a partir de aquellas de las especies, es

$$\frac{t_D}{t_c} \frac{\partial \rho^e}{\partial t} + Pe \mathbf{u} \cdot \nabla \rho^e = \vartheta \nabla \cdot [-(n_+ w_+ + n_- w_-) \mathbf{E}] + \nabla^2 [n_+ w_+ + n_- w_-], \quad (2.48)$$

donde  $w_+$  y  $w_-$  son las movilidades de los cationes y aniones respectivamente. La importancia relativa de cada fenómeno viene dibujada por una serie de números adimensionales; un tiempo característico de difusión  $t_D \equiv \ell^2 / (\omega^\circ k_b T)$  del orden de  $10^6$ , un número de Peclet  $Pe \equiv \ell^2 \varepsilon_o E_o^2 / (\mu \omega^\circ k_b T)$  (relación entre la convección y la difusión) del orden de  $10^5$  y un número que mide la fuerza relativa del campo en el seno del líquido  $\vartheta \equiv \ell e E_o / k_b T$  del orden de  $10^3$ , donde  $T$  es la temperatura,  $k_b$  la constante de Boltzmann,  $w^\circ$  la movilidad de la especie neutra,  $\mu$  la viscosidad del líquido y  $E_o$  el campo eléctrico característico. Los órdenes de magnitud se han calculado eligiendo como valores típicos:  $\ell \sim 10^{-3}$  m,  $E_o \sim 10^5$  V/m y  $\mu \sim 1$  kg/(m s). Para estimar la movilidad se emplea la ley de Stokes-Einstein,  $(6\pi\mu a)^{-1}$ , suponiendo como radio típico del ion,  $a = 0.25 \cdot 10^{-9}$  m. Únicamente queda por conocer el orden de magnitud de la densidad de carga volumétrica para conocer completamente los órdenes de magnitud de los fenómenos de transporte. Para ello se adimensionaliza la ecuación (2.31) encontrándose que

$$\Lambda \nabla \cdot \mathbf{E} = z(n_+ - n_-), \quad (2.49)$$

siendo  $\Lambda \equiv \beta \varepsilon_o E_o / e \ell \sqrt{n^\circ K_e}$  donde  $n^\circ$  la concentración de la especie neutra y  $K_e$  la constante de equilibrio de las reacciones de formación y neutralización de los iones. Sabiendo el orden de magnitud de las variables ( $E_o \sim 10^5$  V/m,  $\ell \sim 10^{-3}$  m) y estimando la concentración iónica a partir de la conductividad típica ( $10^{-9}$  S/m) se cumple que el número adimensional  $\Lambda$  es del orden de  $10^{-4}$ , pudiéndose considerar el fluido neutro desde el punto de vista eléctrico. La neutralidad eléctrica del fluido conlleva que la ecuación de conservación de  $\rho^e$  (2.48), dado que  $\Lambda Pe / \vartheta \sim 10^{-2}$ , se reduzca a la ley ohmica, que en su versión adimensional se escribe

$$\nabla \cdot [(z_v)^2 n_+ (w_+ + w_-)] \mathbf{E} = \nabla \cdot K \mathbf{E} = 0. \quad (2.50)$$

En suma podemos resumir que, la baja conductividad es debida a una pobre concentración de especies cargadas y que, debida a su escasez, no afecta a la distribución de campo eléctrico en el seno del líquido. Las especies cargadas vienen distribuidas por la acción del campo eléctrico siendo despreciables los fenómenos de acumulación, difusión y convección de la carga libre en el seno del líquido.

El Modelo del Dieléctrico con Fuga nos permite utilizar para líquidos no conductores la ecuación de Laplace para resolver la distribución de potencial tanto en la fase gaseosa  $\phi^o$  como en el seno del líquido  $\phi^i$  estando acopladas ambas por las condiciones de contorno en la interfase descritas en la sección 2.3.2. Los esfuerzos eléctricos y la dinámica del chorro están únicamente relacionados a través de las condiciones de contorno.

## 2.6 Adimensionalización

La adimensionalización es la primera herramienta que utilizamos para la simplificación del problema. Nos permite discernir cual es la importancia relativa de todos los fenómenos involucrados e identificar los parámetros de los que depende el problema. La adimensionalización presenta ventajas numéricas a la hora de la resolución dado que coloca las variables adimensionales en la misma escala. La importancia de la tensión superficial en el proceso de rotura guía la elección de las magnitudes físicas para la adimensionalización y que son; la tensión superficial  $\gamma$ , el radio del chorro no perturbado  $A$ , la densidad del líquido  $\rho$  y la densidad de carga superficial en la interfase del estado no perturbado  $\varepsilon_o E_o$ . Con las magnitudes anteriormente descritas las longitudes se escalan con  $A$ , el tiempo con el tiempo característico capilar  $t_c = (\rho A^3 / \gamma)^{1/2}$ , las velocidades con la velocidad característica  $v_c = [\gamma / (\rho A)]^{1/2}$  y la presión con  $p_c = \gamma / A$ .

El uso de la adimensionalización antes mencionada conduce a la serie de parámetros libres que caracterizan el problema en cuestión (ver Tabla 2.2). De entre los de carácter geométrico se encuentran los que modelan la onda: la semilongitud de onda adimensional  $\lambda$  (algunas veces sustituida por el número de onda  $k = \pi / \lambda$ ) y la amplitud de la perturbación adimensional  $\epsilon$ ;

$r^* = \frac{r}{A}$	$t^* = \frac{t}{t_c}$	$p^* = \frac{p}{p_c}$	$\mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}}{v_c}$	$\mathbf{E}^* = \frac{\mathbf{E}}{E_o}$
$A$	$t_c = \sqrt{\frac{\rho A^3}{\gamma}}$	$p_c = \frac{\gamma}{A}$	$v_c = \frac{\gamma}{\sqrt{\rho A}}$	$E_o$

Tabla 2.1: Adimensionalización de las variables en juego

Semi-long. de Onda	$\lambda = \frac{L}{A}$
Posición del electrodo	$b = \frac{R_\infty}{A}$
Num. de Ohnesorge	$C = \frac{\mu}{(\rho\gamma A)^{1/2}}$
Num. de Bond eléctrico	$\gamma_o = \frac{\varepsilon_o A E_o^2}{2\gamma}$
permitividad relat.	$\beta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o}$
Num. de Bond	$Bo = \frac{\rho g A^2}{\gamma}$
Parámetro de relajación	$\alpha = \left(\frac{\rho A^3 K^2}{\gamma \varepsilon^2}\right)^{1/2}$

Tabla 2.2: Números adimensionales

para chorros cargados aparece como parámetro geométrico la distancia  $b$  a la que se coloca el electrodo de electrificación. Otros parámetros que permiten ponderar los diversos fenómenos envueltos en el proceso son: El número de Ohnesorge  $C$  que permite calibrar el papel de la viscosidad ya que mide la importancia relativa de los esfuerzos viscosos frente a los capilares; El número de Bond  $Bo$  que compara el efecto de la gravedad con la capilaridad y el número de Bond Eléctrico o número de Taylor  $\gamma_o$  que mide el nivel de electrificación del chorro al ponderar los esfuerzos eléctricos y capilares, y que en el caso de un chorro conductor toma el valor  $\gamma_o = \varepsilon_o V_o^2 / (2A\gamma \ln^2 b)$ . El parámetro de relajación  $\alpha = [\rho A^3 K^2 / (\gamma \varepsilon^2)]^{1/2}$  surge naturalmente de

la ecuación de continuidad de la carga superficial (2.39). El parámetro de relajación es proporcional a la relación del tiempo capilar con el tiempo de relajación eléctrico  $\alpha = t_c/t_e$  y mide la importancia relativa de la relajación eléctrica en el proceso de rotura o dicho de otro modo en que grado se puede considerar al líquido dieléctrico. En el límite conductor  $\alpha$  es mucho mayor que la unidad. El número de Bond se puede escribir como

$$Bo = WeFr \frac{A}{L}, \quad (2.51)$$

por lo que si, como expresamos en el epígrafe anterior, despreciamos cualquier fuerza que acelere el fluido  $Fr \ll 1$  y el chorro es esbelto  $A/L \ll 1$  entonces  $Bo \ll 1$  siendo por lo tanto despreciable el papel de la gravedad en el proceso de rotura. En lo que sigue dejaremos de emplear el asterisco como indicación de que la variable es adimensional por comodidad.

## 2.7 Ecuaciones en coordenadas cilíndricas

Utilizaremos como sistema de coordenadas el cilíndrico al ser el más apropiado y cómodo para tratar los chorros dado su configuración esbelta. En este sistema se utiliza como vectores directores  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  y  $\mathbf{e}_z$  para la dirección radial, acimutal y axial respectivamente. En este sistema por lo tanto el vector velocidad toma la forma

$$\mathbf{v} = U\mathbf{e}_r + V\mathbf{e}_\theta + W\mathbf{e}_z, \quad (2.52)$$

y el vector campo eléctrico

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -\phi_r\mathbf{e}_r - \frac{1}{r}\phi_\theta\mathbf{e}_\theta - \phi_z\mathbf{e}_z, \quad (2.53)$$

en donde los subíndices denotan derivadas parciales con respecto a esa variable. La posición de la interfase viene dado por la ecuación

$$G(\mathbf{r}, t) = r - F(z, \theta, t) = 0 \equiv r = F(z, \theta, t) \quad (2.54)$$

El tensor de esfuerzos viscosos adimensional en coordenadas cilíndricas viene dado por

$$\mathbf{T}_v = C \begin{pmatrix} 2U_r & \frac{U_\theta}{r} + V_r - \frac{V}{r} & W_r + U_z \\ \frac{U_\theta}{r} + V_r - \frac{V}{r} & 2\frac{V_\theta + U}{r} & V_z + \frac{W_\theta}{r} \\ W_r + U_z & V_z + \frac{W_\theta}{r} & 2W_z \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Asociado a la interfase podemos definir el denominado triedro intrínseco formado por los vectores normal  $\mathbf{e}_n$ , tangente  $\mathbf{e}_t$  y binormal  $\mathbf{e}_b$ . Estos vectores asociados a la posición de la interfase se relacionan con aquellos del sistema de coordenadas cilíndricas con el tensor de cambio de base

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_b \\ \mathbf{e}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_n} & -\frac{F_\theta}{FC_n} & -\frac{F_z}{C_n} \\ \frac{F_\theta}{FC_n C_t} & \frac{1 + F_z^2}{C_n C_t} & -\frac{F_\theta F_z}{FC_n C_t} \\ \frac{F_z}{C_t} & 0 & \frac{1}{C_t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

donde  $C_n$  y  $C_t$  son dos funciones auxiliares dadas por

$$C_n = \sqrt{1 + \frac{F_\theta^2}{F^2} + F_z^2} \quad \text{y} \quad C_t = \sqrt{1 + F_z^2}. \quad (2.57)$$

El tensor de Maxwell en función de los vectores intrínsecos viene dado por

$$\mathbf{T}_e = \gamma_0 \beta \begin{pmatrix} E_n^2 - E_t^2 - E_b^2 & 2E_b E_n & 2E_t E_n \\ 2E_b E_n & -E_n^2 - E_t^2 + E_b^2 & 2E_t E_b \\ 2E_t E_n & 2E_t E_b & -E_n^2 + E_t^2 - E_b^2 \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

donde  $E_n$ ,  $E_b$  y  $E_t$  son las componentes del vector campo eléctrico en función de los vectores intrínsecos.

### 2.7.1 Problema fluidomecánico

#### Ecuaciones volumétricas

Adimensionalizando las ecuaciones anteriormente derivadas y escribiéndolas para coordenadas cilíndricas éstas se expresan como

$$\frac{(rU)_r}{r} + \frac{V_\theta}{r} + W_z = 0, \quad (2.59)$$

para la ecuación de conservación de la masa y

$$U_t + UU_r + \frac{V}{r}U_\theta + WU_z = -P_r + C \left( \frac{(rU_r)_r}{r} + \frac{U_{\theta\theta}}{r^2} + U_{zz} - \frac{U}{r^2} - \frac{2V_\theta}{r^2} \right), \quad (2.60)$$

$$V_t + UV_r + \frac{V}{r}V_\theta + WV_z = -P_\theta + C \left( \frac{(rV_r)_r}{r} + \frac{V_{\theta\theta}}{r^2} + V_{zz} - \frac{V}{r^2} + \frac{2U_\theta}{r^2} \right) \quad (2.61)$$

y

$$W_t + UW_r + \frac{V}{r}W_\theta + WW_z = -P_z + C \left( \frac{(rW_r)_r}{r} + \frac{W_{\theta\theta}}{r^2} + W_{zz} \right) \quad (2.62)$$

para la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento de cada componente de la velocidad.

#### Condiciones de contorno radiales e interfaciales

La utilización de coordenadas cilíndricas conlleva la indefinición de las variables en el eje  $z$  pues existen términos donde  $r$  aparece en el denominador. Esta circunstancia fuerza el comportamiento de las variables en la vecindad del eje. Las singularidades desaparecen imponiendo la nulidad de dichos términos en el eje en lo que se denominan las condiciones de regularidad y que vienen dadas por

$$U|_{r=0} = 0, \quad (2.63)$$

$$V|_{r=0} = 0, \quad (2.64)$$

$$W_r|_{r=0} = 0, \quad (2.65)$$

$$P_r|_{r=0} = 0 \text{ y} \quad (2.66)$$

$$P_\theta|_{r=0} = 0. \quad (2.67)$$

En la entrefase la condición cinemática en coordenadas cilíndricas es

$$\left( F_t - U + \frac{F_\theta}{F} V + F_z W \right) \Big|_{r=F(z,\theta,t)} = 0, \quad (2.68)$$

mientras que la condición de equilibrio de los esfuerzos expresadas en las direcciones del triedro intrínseco  $\mathbf{e}_n$ ,  $\mathbf{e}_t$  y  $\mathbf{e}_b$  vienen dadas por

$$P|_{r=F(z,\theta,t)} - \frac{2C}{C_n^2} \left\{ U_r + F_z(F_z W_z - U_z - W_r) - \frac{F_\theta}{F} \left[ \frac{F_\theta}{F^2} (U + V_\theta) + \frac{U_\theta}{F} + V_r - \frac{V}{F} + F_z \left( V_z + \frac{W_\theta}{F} \right) \right] \right\} \Big|_{r=F(z,\theta,t)} + \mathbf{e}_n \cdot \Delta \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{e}_n = \nabla \cdot \mathbf{e}_n \quad (2.69)$$

para la dirección normal  $\mathbf{e}_n$ ,

$$- \frac{C}{C_n C_t} \left\{ 2F_z(U_r - W_z) + (1 - F_z^2)(W_r + U_z) - \frac{F_\theta}{F} \left[ V_z + \frac{W_\theta}{F} + F_z \left( \frac{U_\theta}{F} + V_r - \frac{V}{F} \right) \right] \right\} \Big|_{r=F(z,\theta,t)} + \mathbf{e}_t \cdot \Delta \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{e}_n = 0 \quad (2.70)$$

para la dirección tangencial  $\mathbf{e}_t$  y

$$- \frac{C}{C_n^2 C_t} \left\{ \frac{2F_\theta}{F} \left[ U_r - (1 + F_z^2) \frac{W_\theta - U}{F} + F_z(F_z W_z - U_z - W_r) \right] + \left( 1 + F_z^2 - \frac{F_\theta^2}{F^2} \left[ \frac{U_\theta}{F} + V_r - \frac{V}{F} - F_z \left( V_z + \frac{W_\theta}{F} \right) \right] \right) \right\} \Big|_{r=F(z,\theta,t)} + \mathbf{e}_b \cdot \Delta \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{e}_n = 0 \quad (2.71)$$

para la dirección binormal  $\mathbf{e}_b$ . En donde la expresión del salto de esfuerzos capilar  $\nabla \cdot \mathbf{e}_n$  viene dado por

$$\nabla \cdot \mathbf{e}_n = \frac{1}{FC_n} + \frac{1}{C_n^3} \left[ -(1 + F_z^2) \frac{F_{\theta\theta}}{F^2} - \left( 1 + \frac{F_\theta^2}{F^2} \right) F_{zz} + \frac{F_\theta}{F^2} \left( \frac{F_\theta}{F} + 2F_z F_{\theta z} \right) \right]. \quad (2.72)$$

Restan por calcular las expresiones en coordenadas cilíndricas del salto de esfuerzos eléctricos en las direcciones del triedro intrínseco

$$\mathbf{e}_n \cdot \Delta \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{e}_n = \gamma_o (E_n^{o2} - \beta E_n^{i2} + (\beta - 1) E_t^2 + (\beta - 1) E_b^2), \quad (2.73)$$

$$\mathbf{e}_b \cdot \Delta \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{e}_n = 2\gamma_o (E_n^o E_b - \beta E_n^i E_b) = 2\gamma_o \sigma_e E_b \text{ y} \quad (2.74)$$

$$\mathbf{e}_t \cdot \Delta \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{e}_n = 2\gamma_o (E_n^o E_t - \beta E_n^i E_t) = 2\gamma_o \sigma_e E_t. \quad (2.75)$$

Empleando la inversa del cambio de base expresado por la ecuación (2.56) las ecuaciones (2.73)-(2.75) vienen dadas en función de las coordenadas cilíndricas por

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n \cdot \Delta \mathbf{T}_E \cdot \mathbf{e}_n = & \gamma_o \left\{ \frac{1}{C_n^2} \left( -\phi_r^o + \frac{F_\theta}{F^2} \phi_\theta^o + F_z \phi_z^o \right)^2 - \frac{\beta}{C_n^2} \left( -\phi_r^i + \frac{F_\theta}{F^2} \phi_\theta^i + F_z \phi_z^i \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{\beta - 1}{C_n^2 C_t^2} \left( -\frac{F_\theta}{F} \phi_r^o - \frac{1 + F_z^2}{F} \phi_\theta^o + \frac{F_\theta}{F} F_z \phi_z^o \right)^2 + \frac{\beta - 1}{C_t^2} (-F_z \phi_r^o - \phi_z^o)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\mathbf{e}_b \cdot \Delta \mathbf{T}_E \cdot \mathbf{e}_n = \frac{2\gamma_o}{C_n C_t} \sigma_e \left( -\frac{F_\theta}{F} \phi_r^o - \frac{1 + F_z^2}{F} \phi_\theta^o + \frac{F_\theta}{F} F_z \phi_z^o \right) \quad \text{y} \quad (2.77)$$

$$\mathbf{e}_t \cdot \Delta \mathbf{T}_E \cdot \mathbf{e}_n = \frac{2\gamma_o}{C_t} \sigma_e (-F_z \phi_r^o - \phi_z^o) \quad (2.78)$$

en donde la componente tangencial y binormal del campo normal pueden calcularse indistintamente con la distribución de potencial interior o exterior dada la continuidad del potencial a través de la entrefase. En lo que sigue utilizaremos siempre la distribución exterior de potencial para el cálculo de dichas componentes.

### Condiciones de contorno axiales

Como hemos venido expresando a lo largo de la tesis, éstas son las de periodicidad

$$\begin{aligned} F_z(z, \theta, t)|_{z=0} &= F_z(z, \theta, t)|_{z=\lambda} = 0, \\ U_z(r, z, \theta, t)|_{z=0} &= U_z(r, z, \theta, t)|_{z=\lambda} = 0, \\ V_z(r, z, \theta, t)|_{z=0} &= V_z(r, z, \theta, t)|_{z=\lambda} = 0, \\ W(r, z, \theta, t)|_{z=0} &= W(r, z, \theta, t)|_{z=\lambda} = 0 \quad \text{y} \\ P_z(r, z, \theta, t)|_{z=0} &= P_z(r, z, \theta, t)|_{z=\lambda} = 0. \end{aligned} \quad (2.79)$$

## 2.7.2 Problema Eléctrico

### Chorros Conductores

Como describimos en la sección anterior el liquido es equipotencial por lo que únicamente es necesario resolver la fase gaseosa, que denotaremos por el

superíndice " o ", en donde por ausencia de cargas libres se debe resolver la ecuación de Laplace

$$\frac{(r\phi_r^o)_r}{r} + \frac{\phi_{\theta\theta}^o}{r^2} + \phi_{zz}^o = 0. \quad (2.80)$$

El potencial está sujeto a las condiciones de contorno de equipotencialidad en el líquido, potencial nulo en el electrodo de electrificación y periodicidad en la dirección axial  $z$

$$\phi^o(r, z, \theta)|_{r=F(z, \theta, t)} = \ln b \quad , \phi^o(r, z, \theta)|_{r=b} = 0, \quad (2.81)$$

$$\phi_z^o(r, z, \theta)|_{z=0} = 0 \quad \text{y} \quad \phi_z^o(r, z, \theta)|_{z=\lambda} = 0. \quad (2.82)$$

En este límite es conocida la ausencia de esfuerzos tangenciales y binormales en la superficie del chorro con lo que es posible simplificar enormemente la expresión del esfuerzo normal eléctrico. Anulando dichos esfuerzos podemos relacionar las derivadas axiales y acimutales del potencial con la derivada radial

$$F_\theta\phi_r^o + (1 + F_z^2)\phi_\theta^o - F_\theta F_z\phi_z^o = 0 \quad (2.83)$$

y

$$F_z\phi_r^o + \phi_z^o = 0, \quad (2.84)$$

por lo que al salto de esfuerzos eléctricos en dirección normal, a la que únicamente contribuye la fase gaseosa, puede escribirse en función de la derivada radial de potencial como

$$\mathbf{e}_n \cdot \Delta \mathbf{T}_E \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{T}_E^o \cdot \mathbf{e}_n = \gamma_o C_n^2 (\phi_r^o)^2 |_{r=F(z, \theta, t)}, \quad (2.85)$$

donde el número de Taylor viene dado en este caso por

$$\gamma_o = \frac{\varepsilon_o V_o^2}{2\gamma A \ln^2(b)}. \quad (2.86)$$

La condición de salto normal del campo eléctrico no impone ninguna condición al problema y su función es definir la cantidad de carga superficial presente en la entrefase

$$\sigma_e = -C_n \phi_r^o |_{r=F(z, \theta, t)}. \quad (2.87)$$

**Chorros no conductores**

Como describe el Modelo del Dieléctrico con Fuga (Saville, 1997) que hemos expuesto en el epígrafe 2.5.1, las ecuaciones que modelan el comportamiento eléctrico son las electrostáticas debido a que los fenómenos magnéticos están ausentes por producirse en un tiempo característico  $t_M$  mucho más corto que el tiempo característico de los fenómenos electrostáticos  $t_e$ . El modelo asegura que, en el caso de que la conductividad sea pobre, la concentración de especies disociadas, causantes de la densidad de carga libre en el seno de líquido, es mucho menor que la de la especie neutra. El número adimensional que cuantifica la validez de la ausencia de carga libre en el seno del líquido es  $\Lambda$  pudiéndose despreciar la carga libre siempre que  $\Lambda \ll 1$ . Esta ausencia de carga libre da lugar a que la ecuación de continuidad de la carga libre en el seno del fluido se reduzca a la Ley de Ohm. Dado que toda la carga está dispuesta en la interfase es posible utilizar la ecuación de Laplace para resolver tanto la distribución de campo eléctrico en el interior del líquido  $\phi^i$

$$\frac{(r\phi_r^i)_r}{r} + \frac{\phi_{\theta\theta}^i}{r^2} + \phi_{zz}^i = 0, \quad (2.88)$$

como en el exterior  $\phi^o$

$$\frac{(r\phi_r^o)_r}{r} + \frac{\phi_{\theta\theta}^o}{r^2} + \phi_{zz}^o = 0. \quad (2.89)$$

Supuesta la ausencia de un campo tangencial externo que provocaría la aparición de un esfuerzo tangencial en toda la superficie del chorro incompatible con la premisa de un chorro cilíndrico antes de ser sometido a perturbación, en el problema exterior se impone, como condición de contorno alejada del chorro, la anulación del potencial en el electrodo de electrificación

$$\phi^o|_{r=b} = 0, \quad (2.90)$$

mientras que el problema interior debe de cumplir condiciones de regularidad en el eje

$$\phi_r^i|_{r=0} = 0. \quad (2.91)$$

Ambos problemas se acoplan a través de las condiciones de contorno que se aplican en la interfase:

$$E_n^o - \beta E_n^i = \left[ \left( -\phi_r^o + \frac{F_\theta}{F^2} \phi_\theta^o + F_z \phi_z^o \right) - \beta \left( -\phi_r^i + \frac{F_\theta}{F^2} \phi_\theta^i + F_z \phi_z^i \right) \right] \Big|_{r=F(z,\theta,t)} = C_n \sigma_e \quad (2.92)$$

y

$$\phi^o|_{r=F(z,\theta,t)} = \phi^i|_{r=F(z,\theta,t)}. \quad (2.93)$$

Tanto el potencial interior como en el exterior deben cumplir las condiciones de periodicidad

$$\phi_z^o|_{z=0} = 0 \quad , \quad \phi_z^o|_{z=\lambda} = 0, \quad (2.94)$$

$$\phi_z^i|_{z=0} = 0 \quad \text{y} \quad \phi_z^i|_{z=\lambda} = 0. \quad (2.95)$$

Por último la ecuación que modela el comportamiento de la carga libre dispuesta en la interfase viene dada

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_e}{\partial t} + \frac{1}{C_n^2} \left\{ \left[ F_z U - \frac{F_z F_\theta}{F} V + \left( 1 + \frac{F_\theta^2}{F^2} \right) W \right] (\sigma_e)_z \right. \\ & \quad \left. + \left[ \frac{F_\theta}{F} U + (1 + F_z^2) V - \frac{F_\theta F_z}{F} W \right] (\sigma_e)_\theta \right\} \\ & + \frac{\sigma_e}{C_n^4} \left[ U_r + F_z^2 W_z - \frac{F_\theta}{F} \left( \frac{U_\theta}{F} - \frac{V}{F} + V_r \right) - F_z (U_z + W_r) \right. \\ & \quad \left. + \frac{F_\theta F_z}{F} \left( V_z - \frac{W_\theta}{F} \right) + \left( \frac{F_\theta}{F} \right)^2 \left( \frac{V_\theta}{F} + \frac{U}{F} \right) \right] = \alpha \beta E_n^i. \end{aligned} \quad (2.96)$$

## 2.8 Ecuaciones para chorros axilsimétricos

En la presente sección expondremos las ecuaciones para el caso en que el chorro y su evolución sea axilsimétrico, circunstancia que se produce en la mayoría de los casos reales. En la presente tesis trataremos en su mayoría este caso aunque pondremos de manifiesto en que circunstancias dicho modelo no es válido y el chorro oscila fuertemente entorno el eje axial. En el caso de que

el chorro presente una evolución axilsimétrica es posible eliminar cualquier dependencia de las variables en la dirección acimutal así como la presencia de giro en el chorro. En este caso el chorro depende únicamente de las variables radial y axial reduciéndose el problema a bidimensional tanto para la velocidad

$$\mathbf{v} = U\mathbf{e}_r + W\mathbf{e}_z, \quad (2.97)$$

como para el campo eléctrico

$$\mathbf{E} = -\phi_r\mathbf{e}_r - \phi_z\mathbf{e}_z. \quad (2.98)$$

### 2.8.1 Problema fluidomecánico

Eliminando toda dependencia acimutal de las ecuaciones de cantidad de movimiento y continuidad en coordenadas cilíndricas (2.59)-(2.62) obtenemos

$$\frac{(rU)_r}{r} + W_z = 0 \quad (2.99)$$

para la ecuación de continuidad y

$$U_t + UU_r + WU_z = -P_r + C(U_{zz} - W_{zz}) \quad \text{y} \quad (2.100)$$

$$W_t + UW_r + WW_z = -P_z + C\left(W_{rr} + \frac{W_r}{r} + W_{zz}\right) \quad (2.101)$$

para las de conservación de cantidad de movimiento en la dirección radial y axial. La contribución viscosa de la ecuación del momento radial se ha simplificado utilizando la ecuación de continuidad.

#### Condiciones de contorno

Deben ser impuestas en el eje las condiciones de regularidad de la velocidad y de la presión:

$$U|_{r=0} = 0, \quad (2.102)$$

$$W_r|_{r=0} = 0 \quad \text{y} \quad (2.103)$$

$$P_r|_{r=0} = 0. \quad (2.104)$$

En la interfase la condición cinemática viene dada por

$$(F_t - U + F_z W)|_{r=F(z,\theta,t)} = 0, \quad (2.105)$$

mientras que la condición de equilibrio de los esfuerzos lo es por

$$P|_{r=F(z,t)} - \frac{2C}{C_n^2} \{U_r + F_z^2 W_z - F_z(W_r + U_z)\}|_{r=F(z,\theta,t)} + \mathbf{e}_n \cdot \Delta \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{e}_n = \nabla \cdot \mathbf{e}_n \quad (2.106)$$

para la dirección normal  $\mathbf{e}_n$  y,

$$-\frac{C}{C_n^2} \{2F_z(U_r - W_z) + (1 - F_z^2)(W_r + U_z)\}|_{r=F(z,t)} + \mathbf{e}_t \cdot \Delta \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{e}_n = 0 \quad (2.107)$$

para la dirección tangencial  $\mathbf{e}_t$ . En donde la expresión del salto de esfuerzos capilar  $\nabla \cdot \mathbf{e}_n$  viene dado para una interfase axilsimétrica por

$$\nabla \cdot \mathbf{e}_n = \frac{1}{C_n} \left( \frac{1}{F} - \frac{F_{zz}}{C_n^2} \right). \quad (2.108)$$

en donde  $C_n$  es una función auxiliar dada por  $C_n = \sqrt{1 + F_z^2}$ .

Las condiciones de periodicidad en la dirección axial vienen dadas por

$$F_z(z, t)|_{z=0} = F_z(z, t)|_{z=\lambda} = 0, \quad (2.109)$$

$$U_z(r, z, t)|_{z=0} = U_z(r, z, t)|_{z=\lambda} = 0 \text{ y} \quad (2.110)$$

$$W(r, z, t)|_{z=0} = W(r, z, t)|_{z=\lambda} = 0. \quad (2.111)$$

Quedan por determinar las expresiones de los esfuerzos eléctricos para cada límite eléctrico tratado.

## 2.8.2 Problema eléctrico

### Chorros conductores

La ecuación adimensional para el potencial eléctrico para el caso axilsimétrico es

$$\frac{(r\phi_r^o)_r}{r} + \phi_{zz}^o = 0. \quad (2.112)$$

Estando el potencial sujeto a condiciones de contorno de tipo Dirichlet en la dirección radial

$$\phi^o(r, z)|_{r=F(z,t)} = \ln b, \quad (2.113)$$

$$\phi^o(r, z)|_{r=b} = 0 \quad (2.114)$$

y de periodicidad en la dirección axial

$$\phi_z^o(r, z)|_{z=0} = \phi_z^o(r, z)|_{z=\lambda} = 0. \quad (2.115)$$

Al salto de esfuerzos eléctrico normal solo contribuye la fase gaseosa y viene dado para el caso axilsimétrico por

$$\mathbf{e}_n \cdot \Delta \mathbf{T}_E \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{T}_E^o \cdot \mathbf{e}_n = \gamma C_n^2 (\phi_r^o)^2 |_{r=F(z,t)}, \quad (2.116)$$

siendo la densidad de carga superficial

$$\sigma_e = -C_n \phi_r^o |_{r=F(z,t)}. \quad (2.117)$$

### **Chorros no conductores**

La ecuación adimensional para el potencial eléctrico para el caso axilsimétrico es, tanto en el fluido como en el gas, la ecuación de Laplace

$$\frac{(r\phi_r^o)_r}{r} + \phi_{zz}^o = 0 \quad (2.118)$$

y

$$\frac{(r\phi_r^i)_r}{r} + \phi_{zz}^i = 0. \quad (2.119)$$

Acopladas ambas distribuciones de potencial por las condiciones de salto del campo normal a través de la interfase

$$E_n^o - \beta E_n^i = [(-\phi_r^o + F_z \phi_z^o) - \beta (-\phi_r^i + F_z \phi_z^i)] |_{r=F(z,\theta,t)} = C_n \sigma_e, \quad (2.120)$$

y la continuidad del potencial

$$\phi^o |_{r=F(z,\theta,t)} = \phi^i |_{r=F(z,\theta,t)}, \quad (2.121)$$

mientras que en la dirección axial el potencial debe cumplir periodicidad

$$\phi_z^o(r, z)|_{z=0} = \phi_z^o(r, z)|_{z=\lambda} = 0 \text{ y} \quad (2.122)$$

$$\phi_z^i(r, z)|_{z=0} = \phi_z^i(r, z)|_{z=\lambda} = 0. \quad (2.123)$$

Restan por imponer las condiciones de contorno en la dirección radial siendo para el potencial exterior, la nulidad del potencial en el electrodo de electrificación,

$$\phi^o(r, z)|_{r=b} = \ln b \quad (2.124)$$

y las condiciones de regularidad para el potencial interior

$$\phi_r^i(r, z)|_{r=0} = 0. \quad (2.125)$$

La ecuación de conservación de la carga en la interfase una vez que la dependencia acimutal es eliminada se escribe como

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial t} + \frac{F_z U + W}{1 + F_z^2} (\sigma_e)_z + \frac{\sigma_e}{(1 + F_z^2)^2} [U_r + F_z^2 W_z - F_z (U_z + W_r)] = \alpha \beta E_n^i. \quad (2.126)$$

Los esfuerzos de origen eléctrico se escriben como

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n \cdot \Delta \mathbf{T}_E \cdot \mathbf{e}_n = & \frac{\gamma_o}{1 + F_z^2} \left\{ (-\phi_r^o + F_z \phi_z^o)^2 - \beta (-\phi_r^i + F_z \phi_z^i)^2 \right. \\ & \left. + (\beta - 1) (-F_z \phi_r^o - \phi_z^o)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.127)$$

para la dirección normal y,

$$(2.128)$$

$$\mathbf{e}_t \cdot \Delta \mathbf{T}_E \cdot \mathbf{e}_n = \frac{2\gamma_o}{(1 + F_z^2)^{1/2}} \sigma_e (-F_z \phi_r^o - \phi_z^o) \quad (2.129)$$

para la dirección tangencial.

## 2.9 Resumen y conclusiones

En el presente capítulo se han establecido las hipótesis de las que parte el presente estudio y que a continuación se describen

- Nos circunscribimos a chorros capilares laminares en los que se presenta una densidad de carga libre en la superficie y que circulan a una velocidad  $V$  mayor que la velocidad de las ondas capilares o lo que es lo mismo que el número de Weber, dado por

$$We = \frac{\rho AV^2}{\gamma}, \quad (2.130)$$

es mucho mayor que la unidad.

- El incremento/disminución de la velocidad del chorro en una longitud de onda debido a la aceleración/frenado del chorro por la acción de la gravedad, la viscosidad o un campo eléctrico axial en el chorro es despreciable

$$\frac{\Delta V}{V} \ll 1 \equiv \frac{gL}{V^2}, \frac{\Sigma_e E_T L}{\rho V^2 A}, \frac{\nu}{VL} \ll 1, \quad (2.131)$$

donde  $g$  es la gravedad,  $V$  la velocidad media del chorro,  $\Sigma_e$  la densidad de carga en la superficie,  $E_T$  el campo eléctrico en la dirección axial,  $\nu$  la viscosidad cinemática,  $L$  la longitud de onda y  $A$  el radio del chorro. Por ser despreciable tales efectos se puede considerar al chorro como un cilindro perfecto eliminándolos de las ecuaciones.

- Se ha desestimado cualquier variación temporal o espacial de las constantes físicas del fluido por acción de aditivos o de la temperatura.
- Despreciamos cualquier influencia mecánica del ambiente exterior siendo las únicas fuerzas externas actuantes en la entrefase aquellas de origen eléctrico que surgen naturalmente de la densidad de carga dispuesta en la entrefase.

Estas hipótesis de partida permiten realizar un análisis Lagrangiano de la rotura del chorro (Keller *et al.*, 1973). El sistema de referencia se mueve con la velocidad del chorro siguiendo a una misma porción de fluido siendo los movimientos internos relativos debidos a los gradientes locales de la presión. Este esquema presupone que el sistema evoluciona periódicamente en el espacio sin que las secciones adyacentes de fluido influyan en la porción estudiada.

La interacción del campo eléctrico con el fluido viene descritas por el Modelo del Dieléctrico con Fuga de Melcher y Taylor (Saville, 1997). Este modelo establece que las ecuaciones eléctricas a utilizar son las del límite electrostático desechando cualquier efecto de origen magnético. Las fuerzas eléctricas actúan únicamente en la interfase estando ausente cualquier fuerza volumétrica de origen eléctrico. Se distinguen dos posibles comportamientos eléctricos dependiendo de la comparación de los tiempos característicos eléctricos (tiempo de relajación eléctrico  $t_e = \varepsilon/K$ ) y capilar ( $t_c = (\rho A^3/\gamma)^{1/2}$ ). Si  $t_e \ll t_c$  al chorro se le puede considerar como conductor y únicamente está presente el campo eléctrico exterior siendo inexistente el interior por lo que las fuerzas eléctricas actúan en la dirección normal a la interfase. En el otro límite, que denominamos no conductor, ambos tiempos son del mismo orden  $t_e \sim t_c$ . En este caso el campo eléctrico interior está presente existiendo además un campo eléctrico tangencial en la interfase.

Se han derivado las ecuaciones que modelan ambos límites y, una vez adimensionalizadas, se han obtenido los parámetros libres que modelan al chorro. Derivadas las ecuaciones adimensionales, se han expresado en coordenadas cilíndricas y se han simplificado hasta obtener las expresiones correspondientes al caso axilsimétrico.

# Capítulo 3

## Líquidos conductores

### 3.1 Introducción

Como hemos descrito en el anterior capítulo, este límite viene caracterizado por la rápida emigración de la carga libre desde el seno del fluido hacia la superficie por conducción siendo despreciable los fenómenos de convección. En este caso la densidad de carga volumétrica se comporta como

$$\rho^e \sim e^{(-K/\varepsilon t)}, \quad (3.1)$$

siendo por lo tanto el tiempo característico empleado por las cargas en alcanzar la superficie del chorro  $t_e \sim \varepsilon/K$ . Si el tiempo característico del movimiento, que en el caso de un chorro es del orden del tiempo capilar  $t_c \sim (\rho A^3/\gamma)^{1/2}$ , es mucho menor que  $t_e$  la carga está toda dispuesta en la interfase desde el punto de vista del movimiento fluido por lo que los esfuerzos de origen eléctrico actúan únicamente en la interfase. Esta circunstancia permite considerar al líquido, desde el punto de vista eléctrico, como equipotencial y dependiente de los movimientos fluidos únicamente por los cambios que éstos operan en la geometría. El problema eléctrico viene entonces modelado por la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi^o = 0, \quad (3.2)$$

junto a las condiciones de contorno

$$\phi^o|_{r=F(z,t)} = \ln b, \quad (3.3)$$

$$\phi^o|_{r=b} = 0 \quad (3.4)$$

y

$$\phi_z^o|_{z=0} = \phi_z^o|_{z=\lambda} = 0. \quad (3.5)$$

En este límite, los esfuerzos eléctricos actúan en la dirección normal a la interfase modificando el comportamiento mecánico del fluido que viene dado para el caso axilsimétrico por

$$\frac{(rU)_r}{r} + W_z = 0, \quad (3.6)$$

$$U_t + UU_r + WU_z = -P_r + C(U_{zz} - W_{zz}) \quad (3.7)$$

y

$$W_t + UW_r + WW_z = -P_z + C\left(W_{rr} + \frac{W_r}{r} + W_{zz}\right), \quad (3.8)$$

a través de las condiciones de contorno que se aplican en la interfase

$$(F_t - U + F_z W)|_{r=F(z,t)} = 0, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} P|_{r=F(z,t)} - \frac{2C}{1 + F_z^2} \{U_r + F_z^2 W_z - F_z(W_r + U_z)\}|_{r=F(z,t)} \\ = \frac{1}{(1 + F_z^2)^{1/2}} \left( \frac{1}{F} - \frac{F_{zz}}{1 + F_z^2} \right) - \gamma_o(1 + F_z^2)(\phi_r^o)^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

y

$$\{2F_z(U_r - W_z) + (1 - F_z^2)(W_r + U_z)\}|_{r=F(z,t)} = 0. \quad (3.11)$$

Deben cumplirse también las condiciones de regularidad en el eje y de periodicidad en la dirección axial

$$U|_{r=0} = W_r|_{r=0} = P_r|_{r=0} = 0, \quad (3.12)$$

$$F_z(z, t)|_{z=0} = U_z(r, z, t)|_{z=0} = W(r, z, t)|_{z=0} = 0 \quad (3.13)$$

y

$$F_z(z, t)|_{z=\lambda} = U_z(r, z, t)|_{z=\lambda} = W(r, z, t)|_{z=\lambda} = 0. \quad (3.14)$$

Imponiendo como condiciones iniciales aquellas de un chorro no perturbado

$$U|_{t=0} = W|_{t=0} = 0, \quad P|_{t=0} = 1 \quad \text{y} \quad \phi^o|_{t=0} = \ln b, \quad (3.15)$$

más una pequeña perturbación en la posición de la interfase que satisfaga la ecuación de continuidad

$$F^2|_{t=0} = 1 + \epsilon(\epsilon - 2) \cos\left(\frac{\pi}{\lambda}z\right), \quad (3.16)$$

queda determinado el problema. En el presente capítulo analizaremos este límite y los chorros no cargados. Obtendremos información cualitativa y cuantitativa del comportamiento de los chorros por medio del análisis lineal. Haremos uso de la hipótesis de esbeltez para simplificar el problema en el caso de roturas axilsimétricas obteniendo la denominada aproximación unidireccional, de la cual pondremos de manifiesto sus posibles limitaciones. Por último resolveremos y analizaremos los resultados obtenidos mediante esta aproximación.

## 3.2 Aproximación lineal de chorros infinitos 3D

Es común en el caso de problemas complicados atacarlos mediante técnicas perturbativas y de análisis modal. La mecánica usual de estos esquemas conduce a considerar que la solución de un sistema ecuaciones diferenciales  $\mathbf{H}(\mathbf{g}) = 0$  toma la forma  $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1 \exp(\Omega t + im\theta + ikz)$  es decir, a una solución conocida  $\mathbf{g}_0$  denominada básica o estacionaria se añade una onda de pequeña amplitud  $|\mathbf{g}_1| \ll |\mathbf{g}_0|$  de tal manera que, al agrupar los diferentes ordenes de magnitud, se consiga una jerarquía continua de ecuaciones que truncadas en el primer orden conducen a un conjunto lineal de ecuaciones. La existencia de soluciones de la forma descrita anteriormente exige una relación entre  $\omega$ ,  $k$ ,  $m$  y los parámetros del problema, expresada en una ecuación

denominada de dispersión. En el caso que nos ocupa, chorros infinitos, es habitual realizar un análisis temporal ( $k$  y  $m$  reales y  $\Omega$  complejo, llamando a su parte real  $\sigma$  factor de crecimiento y a su parte imaginaria  $\omega$  frecuencia de oscilación). Este tipo de ataque equivale físicamente a establecer en cierto instante a todo el chorro una perturbación sinusoidal de número de onda  $k$  en la dirección axial  $z$  y  $m$  en la dirección acimutal y, a través de los valores que toma  $\sigma$  y  $\omega$  a partir de la ecuación de dispersión, discernir el comportamiento del chorro a la perturbación impuesta. En el caso de chorros no cargados son los modos axilsimétricos ( $m = 0$ ) los que presentan mayor interés dado que los no axilsimétricos no presentan en ningún caso posibilidad de crecimiento, por lo que, en lo que sigue, nos centraremos en los modos axilsimétricos.

Del estudio de la ecuación de dispersión de chorros no cargados axilsimétricos (García, 1998) se distinguen dos tipos de modos: los modos capilares y los modos hidrodinámicos.

Bajo el nombre de modos hidrodinámicos se esconden aquellos movimientos en los que la deformación de la interfase es despreciable con lo que el término capilar se desprecia de la ecuación de dispersión. En el seno del fluido se presentan vortices con gradientes de velocidad lo suficientemente intensos para que exista un equilibrio entre los términos inerciales y viscosos siendo despreciables los capilares. Estos modos son pocos significativos con respecto a los capilares dado que presentan factores de crecimiento fuertemente negativos siendo por lo tanto rápidamente amortiguados, especialmente en la zona de crecimiento aperiódico ( $0 < k < 1$ ) que estudiaremos a continuación.

Los modos capilares son aquellos en los que los términos capilares están presentes y vienen equilibrados por los términos inerciales y viscosos. Es posible distinguir en este caso tres posibles comportamientos; un primer comportamiento en el que el chorro es estable y se amortigua aperiódicamente ( $\sigma < 0$ ,  $\omega = 0$ ), circunstancia que ocurre para números de onda comprendidos entre 1 y un valor característico  $k_1$  y entre un valor característico  $k_2$  e infinito, un segundo en el que para los valores  $k$  comprendidos entre  $k_1$  y  $k_2$  el chorro tiende a amortiguarse presentando además un carácter oscilatorio ( $\sigma < 0$ ,  $\omega \neq 0$ ) y por último, chorros que son inestable con un crecimiento aperiódico ( $\sigma > 0$ ,  $\omega = 0$ ) circunscrito a valores de la longitud de onda,  $k$  comprendi-

dos entre 0 e 1. Este comportamiento es el de mayor interés siendo por ello el más estudiado [Rayleigh (1878) para el caso no viscoso, Rayleigh (1892) y Chandrasekhar (1961) para el caso viscoso].

La ecuación de dispersión para un chorro no cargado con rotura axil-simétrica viene dado por

$$\underbrace{\Omega^2 \frac{I_o(k)}{kI'_o(k)}}_{\text{Term. Inercial}} + \underbrace{4C\Omega \left[ \frac{kI_o(k)}{I'_o(k)} - \frac{1}{2} + \frac{k^2}{k_v^2 - k^2} \left( \frac{kI_o(k)}{I'_o(k)} - \frac{k_v I_o(k_v)}{I'_o(k_v)} \right) \right]}_{\text{Term. Viscoso}} = \underbrace{1 - k^2}_{\text{Term. Capilar}} \quad (3.17)$$

Como se observa en la ecuación de dispersión, el término capilar consta de dos sumandos; el valor constante relacionado con el radio de curvatura transversal que es siempre inestabilizante y el proporcional a  $k^2$  relacionado con el radio de curvatura longitudinal que es siempre estabilizante y que en competición con el anterior determina el carácter inestable de las perturbaciones de onda larga ( $0 < k < 1$ ) dado que el término inercial apoya la inestabilización provocada por el radio transversal. La viscosidad solo disminuye el factor de crecimiento ya que tiende a reducir el valor neto de la fuerza amplificadora.

El análisis modal de chorros 3D cargados en el límite de chorros altamente conductores, bajo la configuración geométrica anteriormente descrita, ha sido objeto de estudio e interés desde el siglo pasado [Basset (1894)]. Nos centraremos en este caso en aquellos modos que son inestables, los capilares, obviando los modos hidrodinámicos. En este caso la ecuación de dispersión (3.17) viene modificada, al introducir el campo eléctrico, con la aparición de un nuevo término de presión eléctrica a añadir a la presión capilar y que en el caso de que el electrodo de electrificación está suficientemente alejado ( $b \gg 1$ ) toma la forma

$$\underbrace{1 - m^2 - k^2}_{\text{Term. Capilar}} - \underbrace{2\gamma_o \left( 1 + k \frac{K'_m(k)}{K_m(k)} \right)}_{\text{Term. Electrico}}. \quad (3.18)$$

El término de presión eléctrica consta de dos sumandos. El primero, estabilizador, tiene en cuenta el efecto de la geometría en el campo eléctrico. El

campo eléctrico es más intenso cuanto más alejado está la entrefase del electrodo de electrificación acumulando más carga en los valles que en las crestas, este término al ser un efecto geométrico es independiente de  $k$ . El segundo, denominado efecto punta, tiene en cuenta la acumulación de carga en un conductor en aquellas regiones con curvatura positiva. Este efecto tiende en el chorro a acumular carga en las crestas frente a los valles ayudando a la tensión superficial en la inestabilización.

En el caso de perturbaciones axilsimétricas, para radios del electrodo de electrificación suficientemente alejados, el valor de  $k$  que separa el talante estabilizador o inestabilizador del campo eléctrico es 0.595047. Las perturbaciones son estables para ondas muy cortas para las cuales el efecto estabilizante de la capilaridad domina sobre el efecto punta del campo eléctrico, es también estable las ondas largas ya que el campo eléctrico es estabilizante y domina sobre el resto de los efectos inestabilizantes (capilaridad y efecto punta). Para longitudes de onda moderadas la capilaridad y el campo eléctrico (efecto punta) aunan sus fuerzas en la inestabilización.

En las perturbaciones no axilsimétricas sólo el modo  $m=1$  presenta interés pues los modos de mayor índice son estables para valores del número de Bond eléctrico moderados. Para el modo  $m=1$  el campo eléctrico es siempre inestabilizante, sólo las ondas cortas son estables ya que la capilaridad domina el proceso.

Para una electrificación moderada o pequeña el modo dominante es, debido a la predominancia del efecto punta, el  $m=0$ , salvo para longitudes de onda largas muy alejadas de la de máximo crecimiento. En cambio, si la electrificación es grande, ambos modos crecen de forma parecida.

### 3.3 Aproximación unidireccional

El problema modelado por las ecuaciones anteriormente descritas presenta una enorme dificultad a la hora de resolverlo, principalmente por las complejas condiciones de contorno en la entrefase libre. Bajo la premisa de chorros esbeltos es posible utilizar esquemas perturbativos, una herramienta que se muestra útil para simplificar la resolución del problema. Siempre que las per-

turbaciones presentes en el chorro sean de longitud de onda grande frente al radio del chorro, las variaciones de las variables en la dirección radial ( $r \sim 1$ ) serán menores que las variaciones en dirección axial ( $z \sim \lambda$ ). Esta disparidad de escalas espaciales conducen a aproximar las variables por series de Taylor con respecto a la variable radial

$$W(r, z, t) = w_o + \frac{1}{2}r^2w_2 + \dots, \quad (3.19)$$

$$U(r, z, t) = -\frac{1}{2}rw_{oz} - \frac{1}{8}r^3w_{2z} + \dots \quad (3.20)$$

y

$$P(r, z, t) = p_o + \frac{1}{2}r^2p_2 + \dots \quad (3.21)$$

en donde los desarrollos satisfacen automáticamente la ecuación de continuidad y la condición de regularidad en el eje. Una vez supuesta la dependencia de la solución con respecto al radio las ecuaciones que resultan de la sustitución de los desarrollos en las ecuaciones de cantidad de movimiento y en las condiciones de contorno conforman la aproximación unidireccional con dependencia espacial únicamente en variable axial  $z$ . Una subdivisión de los modelos unidireccionales en lineales y no lineales surge si se aplican restricciones en la amplitud de la perturbación actuante en el chorro. Si se limitan a estudiar perturbaciones de pequeña amplitud pueden desprejarse términos dependientes cuadráticamente de la amplitud o superiores. Este es el caso de Weber (1931) que a partir de la ecuación de dispersión para chorros infinitos con viscosidad cualquiera encuentra un modelo unidireccional hallando el límite de la ecuación de dispersión en el caso de numero de onda pequeños. Diversos modelos unidireccionales no lineales pueden derivarse dependiendo del grado de truncamiento de las series. El modelo de Lee (1974) aparece como el primer éxito de los modelos unidireccionales en la descripción de chorros axilsimétricos infinitos no viscosos. Este modelo, de orden  $\lambda^{-2}$ , es también un modelo promediado por lo que las ecuaciones que modelan las condiciones de contorno que se aplican en la interfase libre se tornan ecuaciones del volumen fluido. Meseguer (1983) aplica este modelo a puentes líquidos con notable éxito. La extensión de este modelo

al caso viscoso es debida de forma independiente a Eggers y Dupont (1994) y García y Castellanos (1994) los cuales corrigen anteriores inconsistencias en la derivación de los términos viscosos debidos a despreciar indebidamente derivadas de la velocidad axial en dirección radial. El modelo de Cosserat es también ampliamente utilizado [Bogy (1978), Meseguer (1983)], de orden  $\lambda^{-4}$  en el caso no viscoso es sin embargo de orden  $\lambda^{-2}$  para el caso viscoso debido a inconsistencias en la derivación de los términos viscosos como ponen de manifiesto Perales y Meseguer (1992) y García y Castellanos (1994). Este modelo a semejanza con el modelo de Lee también es un modelo promediado en una rodaja de chorro. García y Castellanos (1994) proporcionan dos nuevos modelos unidireccionales que denominan promediado y parabólico. El primero es equivalente al de Cosserat pero derivando consistentemente los términos viscosos, el segundo ,también de orden  $\lambda^{-4}$ , no realiza ningún promediado. En el presente estudio el modelo adoptado es el de Lee viscoso del cual detallaremos su derivación.

Si sustituimos los desarrollos (3.21) en la ecuación de cantidad de movimiento axial y retenemos términos de orden  $\lambda^{-2}$  obtenemos

$$w_{ot} + w_o w_{zo} = -p_{oz} + C (w_{ozz} + 2w_2) + O(\lambda^{-2}), \quad (3.22)$$

mientras que la sustitución de los desarrollos en la ecuación de balance radial proporciona

$$w_{otz} - \frac{1}{2} (w_{oz})^2 + w_o w_{ozz} = -2p_2 + C (w_{ozzz} + 2w_{2z}) + O(\lambda^{-3}). \quad (3.23)$$

Se observa que la ecuación de balance radial no aporta sino la dependencia del segundo termino de la presión con respecto al resto de las variables.  $w_o$  representa la velocidad media en la rebanada

$$\bar{W} = \frac{2}{f^2} \int_0^F W r dr = w_o + O(\lambda^{-2}), \quad (3.24)$$

por lo que las ecuaciones que expresan las condiciones de contorno dan lugar a ecuaciones que se aplican a todo el volumen fluido. La sustitución de los desarrollos en las ecuaciones que modelan las condiciones de contorno proporcionan las ecuaciones que cierran el problema. La condición de que

la interfase es una línea material proporciona la ecuación que modela la evolución temporal de la posición de la interfase

$$f_t + \frac{1}{2}f w_{oz} + f_z w_o + O(\lambda^{-2}) = 0, \quad (3.25)$$

mientras que de la condición de equilibrio de esfuerzos normales en la interfase obtenemos

$$p_o - C w_{oz} + O(\lambda^{-2}) = p_{ce}, \quad (3.26)$$

donde  $p_{ce}$  engloba a los términos de presión capilar y eléctrica

$$p_{ce} = \frac{1}{(1 + f_z^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ \frac{1 + f_z^2}{f} - f_{zz} \right] - \gamma_o (1 + f_z^2) (\phi_r^o)^2. \quad (3.27)$$

La necesidad de truncar las series consistentemente conduce a valorar el orden de magnitud relativo entre  $w_o$  y  $w_2$ . García y Castellanos (1994) distinguen entre el caso no viscoso, donde la información del orden relativo se obtiene de la condición de irrotacionalidad, y el caso viscoso, donde la información es obtenida de la condición de equilibrio tangencial en la interfase. En ambos caso se observa que  $w_2 \sim \lambda^{-2} w_o$ . En efecto, la ecuación de balance tangencial una vez sustituidas los desarrollos proporciona una relación entre  $w_2$  y  $w_o$

$$C \left( -3f_z w_{oz} - \frac{1}{2}f w_{ozz} + f w_2 + O(\lambda^{-3}) \right) = 0. \quad (3.28)$$

Reordenando las ecuaciones (3.22)–(3.28) obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales en donde se presentan como incógnitas la velocidad media en la rebanada  $w_o$  y la posición de la interfase  $f$  (se ha suprimido el subíndice "o" por comodidad)

$$f^2(w_t + w w_z) = -f^2(p_{ce})_z + C(f^2 w_z)_z, \quad (3.29)$$

$$(f^2)_t + (f^2 w) = 0 \quad (3.30)$$

y

$$p_{ce} = \frac{1}{(1 + f_z^2)^{3/2}} \left[ \frac{1 + f_z^2}{f} - f_z z \right] - \gamma_o (1 + f_z^2) (\phi_r)^2. \quad (3.31)$$

En realidad el sistema de ecuaciones obtenido no es realmente consistente dado que no se realiza ningún tipo de desarrollo asintótico de los términos de presión capilar y eléctrico. El hecho de conservarlos completos no disminuye o altera el orden real de la aproximación ( $\lambda^{-2}$ ) y en cambio es fundamental conservarlos completos dado que son el motor de la evolución del chorro y la ausencia de la expresión completa de la curvatura no permitiría incluso recoger los umbrales de estabilidad presentes en la rotura de chorros.

Ciertas dudas pueden suscitarse en la elección del modelo Lee viscoso frente a otros modelos unidireccionales con mayor grado de exactitud presente en la literatura. Estas dudas quedan despejadas por García (1998) en donde en un exhaustivo estudio compara las prestaciones de diversos modelos unidireccionales frente a modelos tridimensionales (Ashgriz y Mashayek, 1995), en dicho estudio se demuestra que el modelo de Lee presenta cierto adelanto en la evolución ( en torno a un 5 % en el tiempo necesario para producir la rotura) aunque las diferencias en el perfil de la entrefase del chorro y consecuentemente los volúmenes, son despreciables. La comparación del mencionado error del modelo de Lee frente a otras fuentes de error posibles en chorros reales (determinación de la longitud de onda, perturbación inicial o las condiciones iniciales idóneas, efecto del ambiente, etc) junto a la simplicidad de la formulación del modelo justifican su elección.

### 3.4 Capa límite y esfuerzos tangenciales

Es posible discrepar sobre la idoneidad de utilizar modelos unidireccionales de velocidad media para describir la rotura de chorros a bajos números de Ohnesorge en donde se constata la presencia de una capa límite en la entrefase líquido-gas. En el límite irreal de viscosidad nula  $C=0$ , la condición de irrotacionalidad del campo de velocidades en el volumen fluido y la ausencia de capa límite exigen que la distribución radial de velocidades venga bien

aproximada por los modelos unidireccionales

$$\begin{aligned} W &= w_o + O(\lambda^{-2}) \\ U &= -\frac{1}{2}(w_o)_z r + O(\lambda^{-2}). \end{aligned} \quad (3.32)$$

En el caso de viscosidad pequeña pero no nula cabe preguntarse de que orden es la discrepancia entre la velocidad real y aquella calculada a partir de la expresión (3.32) y la influencia de dicha discrepancia en la evolución del chorro. La respuesta a la primera cuestión puede encontrarse en el estudio de García (1998). En el referido estudio se compara los perfiles de velocidades obtenidos a partir del análisis lineal 3D con aquellos proporcionados por las aproximaciones unidireccionales para diversos números de Ohnesorge. García (1998) revela que la máxima desviación relativa entre ambos perfiles es del orden del 4.5 % para valores de  $C$  extremos disminuyendo tal discrepancia para valores de  $C$  moderados ( $\sim 10^{-2}$ ) dándose en la mayoría de los casos este máximo en la entrefase. Para resolver la segunda cuestión es necesario acudir a los trabajos de Borkar y Tsamopoulos (1991) e Higuera *et al.* (1994) como a García (1998) y Eggers y Dupont (1994). Los dos primeras referencias analizan la influencia de las capas límites en la dinámica de puentes líquidos poniendo de manifiesto la poca influencia dinámica de la capa límite interfacial, de espesor del orden de  $C^{1/2}$ , dado que la disipación producida en su seno (proporcional a  $C^{3/2}$ ) es despreciable frente a la amortiguación viscosa que se produce en el resto del volumen fluido (proporcional a  $C$ ). La respuesta a la segunda cuestión se obtiene a partir del análisis de la ley de conservación de la energía que expresa que la energía mecánica contenida en el volumen fluido (cinética  $\mathcal{E}_c$  más potencial  $\mathcal{E}_p$ ) disminuye por acción de la viscosidad

$$(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p)_t = -\dot{\mathcal{E}}_v, \quad (3.33)$$

donde  $\dot{\mathcal{E}}_v$  es la potencia disipada. García (1998) calcula  $\dot{\mathcal{E}}_v$  en el volumen fluido  $\Omega$  formado por una semilongitud de onda  $[0, \lambda]$  para el caso 3D

$$\begin{aligned}
 (\dot{\mathcal{E}}_v)_{3D} &= \frac{1}{2C} \int_{\Omega} d\Omega \mathbf{T}_v : \mathbf{T}_v \\
 &= 2\pi C \int_0^\lambda dz \int_0^F dr r \left[ 2U_r^2 + (W_r + U_z)^2 + \frac{U^2}{r^2} + 2W_z^2 \right] \\
 &= \pi C \int_0^\lambda dz \left[ 3f^2 \left( w_{oz} + \frac{f^2 w_{2z}}{4} \right)^2 + \frac{f^4}{2} \left( \frac{w_{ozz}}{2} - w_2 \right)^2 + O(\lambda^{-4}) \right],
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

en donde en la última igualdad se ha substituido los desarrollos de Taylor radiales (Ecuación (3.21)) utilizadas en la derivación del modelo unidireccional. Eggers y Dupont (1994) deriva la función de disipación viscosa para el modelo unidireccional de Lee que toma la forma

$$(\dot{\mathcal{E}}_v)_{1D} = \pi C \int_0^\lambda 3f^2 w_{oz} dz. \tag{3.35}$$

Se puede observar que en ambos casos la función de disipación es siempre definida positiva como debe de ser dado su carácter disipativo además de comprobarse que

$$(\dot{\mathcal{E}}_v)_{3D} = (\dot{\mathcal{E}}_v)_{1D} + O(\lambda^{-2}), \tag{3.36}$$

lo que permite augurar que la evolución temporal obtenida del modelo unidireccional de Lee se aproxima a la evolución real con el grado de exactitud del modelo  $\lambda^{-2}$ .

### 3.5 Resolución del problema

El problema planteado con las simplificaciones anteriormente expuestas obligan a resolver la evolución temporal de la posición de la interfase  $f$  y de la velocidad media  $w$ . Por otra parte, en cada instante de tiempo debe resolverse la ecuación de Laplace en el medio exterior para conocer debidamente el campo eléctrico normal en la superficie. El campo eléctrico viene

unívocamente determinado una vez que la forma de la interfase es conocida. Bajo la denominación de *problema fluidomecánico* se engloba el cálculo de la evolución temporal de la interfase y de la velocidad conocidas las fuerzas actuantes en la interfase. El denominado *problema eléctrico* busca resolver la distribución de potencial eléctrico y por ende el campo eléctrico en la interfase conocida la forma de ésta.

### 3.5.1 Problema fluidomecánico

Es conveniente adoptar como incógnitas, a semejanza de anteriores investigadores [Lee (1974), Meseguer (1983)], el caudal que atraviesa cada rodaja  $q = wf^2$  y el área de la rodaja  $s = f^2$  en vez de la velocidad  $w$  y de la posición de la interfase  $f$ . Las ecuaciones unidireccionales en las nuevas variables quedan como

$$s_t + q_z = 0 \quad (3.37)$$

y

$$q_t + \left( \frac{q^2}{s} \right)_z = -s(p_{ce})_z + 3C \left[ s \left( \frac{q}{s} \right)_z \right]_z, \quad (3.38)$$

donde la presión depende de la de la posición de la interfase  $s$  a través de la curvatura y del gradiente normal del potencial eléctrico en la interfase

$$p_{ce} = \frac{2}{[4s + s_z^2]^{1/2}} \left[ 1 - \frac{2ss_{zz} - s_z^2}{4s + s_z^2} \right] - \gamma_o \frac{4s + s_z^2}{4s} (\phi_r)^2. \quad (3.39)$$

Las condiciones de contorno a aplicar a las incógnitas  $s$  y  $q$  son aquellas a las que obliga la simetría, no hay transporte de masa entre secciones adyacentes

$$q(z = 0, t) = q(z = \lambda, t) = 0 \quad (3.40)$$

y los perfiles tienen en pendiente nula en ambos extremos

$$s_z(z = 0, t) = s_z(z = \lambda, t) = 0. \quad (3.41)$$

Dos métodos de resolución han sido implementados buscando resolver estas ecuaciones, un método de diferencias finitas análogo al usado por Meseguer (1983) y un método de Fourier.

### Método de diferencias finitas

En un primer intento de resolución de las ecuaciones anteriormente descritas se utilizó un esquema de diferencias finitas centradas para las derivadas espaciales y un esquema explícito para las temporales, similar al utilizado por Meseguer (1983). En él se desarrolla en serie de Taylor en el tiempo las variables

$$\left. \begin{aligned} s(z, t + \Delta t) &= s(z, t) + \Delta t s_t(z, t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} s_{tt}(z, t) + O[(\Delta t)^3] \\ q(z, t + \Delta t) &= q(z, t) + \Delta t q_t(z, t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} q_{tt}(z, t) + O[(\Delta t)^3] \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

traslándolas las derivadas parciales temporales a espaciales mediante las ecuaciones del problema y un poco de álgebra

$$\begin{aligned} s_t &= -q_z \\ q_t &= -\left(\frac{q^2}{s}\right)_z - s(p_{ce})_z + 3C \left[ s \left(\frac{q}{s}\right)_z \right]_z \\ s_{tt} &= (q_t)_z = -\left(\frac{q^2}{s}\right)_{zz} - s_z(p_{ce})_z - s_z(p_{ce})_{zz} + 3C \left[ s \left(\frac{q}{s}\right)_z \right]_{zz} \\ q_{tt} &= -s[(p_{ce})_z]_t + (q_t)_z \left( -\frac{2q}{s} - \frac{3Cs_z}{s} \right) - q_{zz} \left[ \frac{q^2}{s^2} + C \left( \frac{-3q_z}{s} + \frac{-6qs_z}{s^2} \right) \right] \\ &+ s_t \left[ -(p_{ce})_z + \frac{2qq_z}{s^2} - \frac{2q^2s_z}{s^3} + C \left( -\frac{3q_zs_z}{s^2} - \frac{6qs_z^2}{s^3} + \frac{3qs_{zz}}{s^2} \right) \right] \\ &+ q_t \left[ -\frac{2q_z}{s} + \frac{2qs_z}{s^2} + C \left( \frac{s_z^2}{s^2} - \frac{3s_{zz}}{s} \right) \right] - 3C(s_{tt})_z + \frac{3Cq}{s} q_{zzz} \end{aligned} \quad (3.43)$$

en donde por brevedad no se han desarrollado hasta sus últimos extremos todos los términos (véase  $(p_{ce})_z$ ,  $(p_{ce})_{zz}$ ,  $(p_{ce})_{zt}$  entre otros). La presencia de derivadas de orden quinto en la variable  $s$  y de orden cuarto en  $q$  y la utilización de diferencias centradas en todo el intervalo de integración obliga a la utilización de nodos auxiliares fuera del intervalo de integración (véase Fig 3.1). El orden de las derivadas espaciales se reduce en el caso de las ecuaciones no viscosas a orden cuarto para ambas variables, siendo por ello necesario menos nodos auxiliares fuera del intervalo de integración. El cálculo de los valores a utilizar en los nodos auxiliares se simplifica enormemente para el caso que nos ocupa (véase Meseguer (1983) para el caso de puentes líquidos) pues la simetría y la antisimetría de las variables  $s$  y  $q$  respectivamente, permite adjudicar los valores directamente a partir de los valores de

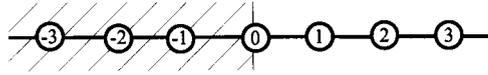


Figura 3.1: Nodos auxiliares de integración para las ecuaciones con viscosidad

las variables en los nodos reales. El esquema de resolución se puede resumir globalmente como: dado un perfil  $s(t)$  y una distribución de caudales  $q(t)$  en un instante  $t$ , se calcula la distribución de presiones capilar-eléctrica  $p_{ce}$  y las derivadas temporales  $s_t, q_t$ ,  $s_{tt}$  y  $q_{tt}$  que introducidas en las ecuaciones (3.42) nos permite calcular las variables en el instante  $t + \Delta t$ .

El presente método de resolución es numéricamente estable siempre que la relación entre paso temporal y el espacial esté acotado (número de Courant). Si la viscosidad está presente el paso temporal debe disminuir para asegurar la convergencia. Este método es susceptible de sufrir inestabilidades de origen numérico asociadas al aumento del orden de la derivada en  $s$  que comienzan a surgir típicamente en el contorno. Las consideraciones anteriores obligan a utilizar un paso temporal conservativo con el consiguiente coste computacional. Es por ello que se implementó otro método que solventara las inestabilidades de origen numérico y que se describe a continuación.

### Método de Fourier

Este método de resolución se beneficia de la simetría y de la antisimetría espacial de la variable  $s$  y  $q$  respectivamente. Las variables viene desarrolladas en series de Fourier en el espacio con lo que la dependencia temporal recae en las amplitudes de los diferentes modos

$$s(z, t) = \sum_{n=0}^N a_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{\lambda} z\right) \quad (3.44)$$

y

$$q(z, t) = \sum_{n=1}^N b_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{\lambda} z \right). \quad (3.45)$$

Sustituyendo los desarrollos en las ecuaciones del problema (3.37–3.38) y ponderando adecuadamente las ecuaciones (multiplicación de la primera ecuación por  $\cos(m\pi z/\lambda)$  y la segunda por  $\operatorname{sen}(m\pi z/\lambda)$  e integración entre 0 y  $\lambda$ ) es posible escribir un sistema de ecuaciones diferencial ordinarias para las amplitudes de los modos

$$\frac{d a_n}{d t} = -b_n \left( \frac{n\pi}{\lambda} \right) \quad (3.46)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d b_n}{d t} = & -3C \left( \frac{n\pi}{\lambda} \right)^2 b_n + \frac{2}{\lambda} \left( \frac{n\pi}{\lambda} \right) \int_0^\lambda \left( \frac{q^2}{s} + s p_{ce} + 3C \frac{q}{s} s_z \right) \cos \left( \frac{n\pi}{\lambda} z \right) dz \\ & + \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda s_z p_{ce} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{\lambda} z \right) dz, \end{aligned} \quad (3.47)$$

en donde las condiciones de contorno y la simetría han permitido que, mediante integración por partes, se haya reducido el orden de las derivadas espaciales tanto para  $s$  como para  $q$ . Es esta reducción y la idoneidad de realizar desarrollos en serie de Fourier de las variables lo que justifica la robustez numérica del método y el bajo número de elementos necesarios para alcanzar una solución suficientemente aproximada.

### 3.5.2 Problema eléctrico

#### Método de Fourier–Bessel

Es común en el caso de problema modelados por ecuaciones en derivadas parciales lineales en recintos geométricos sencillos buscar soluciones del tipo denominado de separación de variables que permiten desacoplar la dependencia en cada una de las dimensiones formando un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de fácil resolución. Atacando de una manera similar

nuestro problema buscamos soluciones del tipo

$$\phi(r, z) = h(r) g(z). \quad (3.48)$$

Substituyendo esta solución en la ecuación de Laplace se obtienen 2 ecuaciones diferenciales ordinarias asociadas a cada variable

$$g_{zz} + \frac{n\pi}{\lambda} g = 0 \quad (3.49)$$

y

$$(rh_r)_r - \frac{n\pi}{\lambda} rh = 0, \quad (3.50)$$

donde  $n$  puede tomar valores cualesquiera. Las ecuaciones diferenciales ordinarias arriba expresadas están sometidas a las condiciones de contorno obtenidas de realizar la substitución en las ecuaciones (3.4) y (3.5)

$$g_z|_{z=0} = g_z|_{z=\lambda} = 0 \text{ y} \quad (3.51)$$

$$h|_{r=b} = 0. \quad (3.52)$$

La ecuación diferencial asociada a la variable axial (3.49) junto a sus condiciones de contorno expresadas por las ecuaciones (3.51) fijan el comportamiento de la solución en la dirección axial

$$g^n(z) = \cos\left(\frac{n\pi}{\lambda} z\right) \text{ para } n=0,1,2,\dots \quad (3.53)$$

Mientras que aquellas ecuaciones que modelan el comportamiento radial (Ecs. 3.50 y 3.52) dan lugar a

$$h^n(r) = \begin{cases} \ln\left(\frac{b}{r}\right) & \text{para } n=0 \\ K_o\left(\frac{n\pi}{\lambda} r\right) - \frac{K_o\left(\frac{n\pi}{\lambda} b\right)}{I_o\left(\frac{n\pi}{\lambda} r\right)} I_o\left(\frac{n\pi}{\lambda} r\right) & \text{para } n=1,2,\dots \end{cases} \quad (3.54)$$

en donde  $K_o$  e  $I_o$  son las funciones de Bessel modificadas de orden cero. La solución, por tanto, es una combinación lineal formada a partir de las

denominadas funciones básicas  $h^n(r)g^n(z)$  y que truncamos en un valor  $N$

$$\phi(r, z) = \sum_{n=0}^N h^n(r)g^n(z) = \ln(b) - \ln(r) - C_o \ln(b) \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \sum_{n=1}^N C_n \ln(b) \left[ K_o\left(\frac{n\pi}{\lambda}r\right) - \frac{K_o\left(\frac{n\pi}{\lambda}b\right)}{I_o\left(\frac{n\pi}{\lambda}r\right)} I_o\left(\frac{n\pi}{\lambda}r\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{\lambda}z\right), \quad (3.55)$$

en donde los coeficientes  $C_n$  son constantes a determinar mediante la imposición de la condición de contorno en la interfase (3.3)

$$\left\{ -\ln(r) - C_o \ln(b) \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \sum_{n=1}^N C_n \ln(b) \left[ K_o\left(\frac{n\pi}{\lambda}r\right) - \frac{K_o\left(\frac{n\pi}{\lambda}b\right)}{I_o\left(\frac{n\pi}{\lambda}r\right)} I_o\left(\frac{n\pi}{\lambda}r\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{\lambda}z\right) \right\}_{r=F(z,t)} = 0. \quad (3.56)$$

Para determinar las  $N + 1$  incógnitas  $C_o, \dots, C_N$  formamos un sistema de ecuaciones algebraicas mediante la proyección del error lo que consiste en multiplicar la ecuación (3.56) por las funciones básicas  $h^n g^n$  e integrar en todo el intervalo  $[0, \lambda]$ .

Este método de resolución del campo eléctrico es válido mientras el nivel de deformación de la interfase no es elevado. A partir de un cierto grado de deformación el método no permite alcanzar el nivel de convergencia exigido con un coste computacional razonable dado que el conjunto de soluciones básicas en el cual se ha expandido la solución falla en proveer un espacio de Hilbert completo para dominios de integración altamente deformados en los que las no linealidades son importantes como son aquellos que se producen cerca de los instantes finales de la rotura. El error cometido en la condición de contorno (3.56) es utilizado como señal de la falta de convergencia, cuando este error alcanza un cierto valor (1 % se usa en los resultados que posteriormente se describirán) se cambia a un método alternativo.

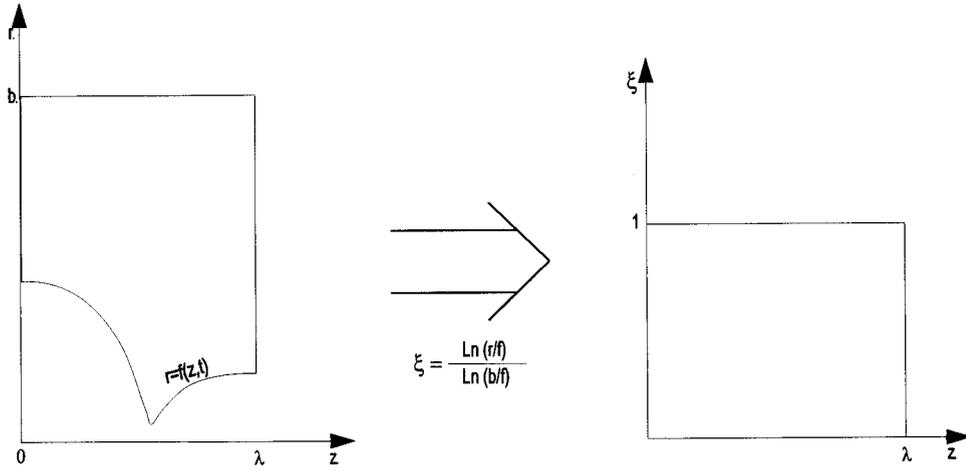


Figura 3.2: Transformación del recinto de Integración

### Método de Líneas

Intentado evitar el problema de convergencia que se presenta en el método de Fourier–Bessel, en el método de líneas traspasamos las no linealidades presentes en el contorno a la ecuación de volumen manteniendo un recinto de integración completamente regular. Este trasvase de no linealidades se realiza mediante el cambio de coordenadas

$$\xi = \frac{\ln(r/f(z, t))}{\ln(b/f(z, t))}, \quad (3.57)$$

que permite transformar el recinto de integración dado por  $f(z, t) < r < b$  y  $0 < z < \lambda$  en el rectangular dado por  $0 < \xi < 1$  y  $0 < z < \lambda$  desligando completamente la variable axial  $z$  de la nueva variable radial  $\xi$ . La ecuación de Laplace en las nuevas variables  $z$  y  $\xi$  pierde su carácter lineal dando lugar a la ecuación volumétrica

$$\begin{aligned} \phi_{zz} + \left( \frac{e^{-2\xi\chi}}{f^2\chi^2} + \omega_{oz}^2(1-\xi)^2 \right) \phi_{\xi\xi} \\ + 2\chi_{oz}(1-\xi)\phi_{z\xi} + (\chi_{ozz} - \chi_{oz}^2)(1-\xi)\phi_{\xi} = 0, \end{aligned} \quad (3.58)$$

en donde las funciones auxiliares viene dadas por

$$\chi(z) = \ln \left( \frac{b}{f(z, t)} \right) \quad (3.59)$$

y

$$\chi_o(z) = \ln \chi(z), \quad (3.60)$$

siendo las condiciones de contorno en la dirección axial de periodicidad

$$\phi_z|_{z=0} = \phi_z|_{z=\lambda} = 0, \quad (3.61)$$

mientras que las condiciones de contorno a satisfacer en la dirección radial  $\xi$  son

$$\phi|_{\xi=0} = \ln(b) \text{ y} \quad (3.62)$$

$$\phi|_{\xi=1} = 0. \quad (3.63)$$

Descomponemos el potencial  $\phi$  en

$$\phi = \ln(b)(1 - \xi) + \Phi, \quad (3.64)$$

para trabajar con condiciones de contorno homogéneas en la dirección radial  $\xi$ . En la nueva variable  $\Phi$  la ecuación diferencial toma la forma

$$\begin{aligned} \Phi_{zz} + \left( \frac{e^{-2\chi\xi}}{f^2\chi^2} + \chi_{oz}^2(1 - \xi)^2 \right) \Phi_{\xi\xi} \\ + 2\chi_{oz}(1 - \xi)\Phi_{z\xi} + (\chi_{ozz} - \chi_{oz}^2)(1 - \xi)\Phi_{\xi} = (\chi_{ozz} - \chi_{oz}^2)(1 - \xi). \end{aligned} \quad (3.65)$$

El método de líneas consiste en suponer un comportamiento analítico en una o varias variables discretizando las restantes, ello permite obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en vez de en derivadas parciales. Conociendo que el comportamiento del potencial en la dirección axial debe ser una expansión en cosenos dada su simetría intentamos soluciones de la forma,

$$\Phi(\xi_i, z) = \Phi_i(z) = \sum_{n=1}^N \Phi_n^i \cos\left(\frac{n\pi}{\lambda}z\right) \text{ donde } i=1, \dots, N_{\xi} \quad (3.66)$$

siendo  $N_{\xi}$  es el número de puntos en los que se ha discretizado el potencial en la dirección radial  $\xi$  y  $N$  el número de cosenos en los que se ha expandido el potencial en la variable axial  $z$ . Sustituyendo la solución dada por

la ecuación (3.66) en la ecuación diferencial (3.65) y utilizando diferencias centradas obtenemos  $N_\xi$  ecuaciones de la forma

$$\sum_{n=1}^N \left\{ - \left( \frac{\pi n}{\lambda} \right)^2 \Phi_n^i \cos \left( \frac{\pi n z}{\lambda} \right) + \left[ \frac{e^{-2\chi \xi_i}}{f^2 \chi^2} + \chi_{oz}^2 (1 - \xi_i)^2 \right] \frac{\Phi_n^{i+1} - 2\Phi_n^i + \Phi_n^{i-1}}{h^2} - 2\chi_{oz} (1 - \xi_i) \frac{\Phi_n^{i+1} - \Phi_n^{i-1}}{2h} \left( \frac{\pi n}{\lambda} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi n z}{\lambda} \right) + (\chi_{ozz} - \chi_{oz}^2) (1 - \xi_i) \frac{\Phi_n^{i+1} - \Phi_n^{i-1}}{2h} \cos \left( \frac{\pi n z}{\lambda} \right) \right\} = (\chi_{ozz} - \chi_{oz}^2) (1 - \xi_i), \quad (3.67)$$

donde  $h$  es el anchura de la discretización en dirección  $\xi$ . Proyectando (multiplicar la ecuación (3.67) por  $\cos(m\pi/\lambda z)$  e integrar entre 0 y  $\lambda$ ) obtenemos un sistema de ecuaciones algebraicas para las  $N_\xi \times N$  incógnitas  $\Phi_n^i$

$$A_{mn}^i \Phi_n^i + B_{mn}^i \Phi_n^{i-1} + C_{mn}^i \Phi_n^{i+1} = D_{mn} \quad (3.68)$$

### Método de Fourier–Elementos de contorno

El método de los elementos de contorno permite resolver la ecuación de Laplace  $\nabla^2 \phi = 0$  en un recinto  $\Omega$  delimitado por un contorno  $\Gamma$ . Este método utiliza el teorema de Green para transformar la ecuación en derivadas parciales de Laplace en una ecuación integral (Brebbia y Dominguez, 1989)

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \phi^*) \phi d\Omega = \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi^* d\Gamma, \quad (3.69)$$

donde  $\phi^*$  es cualquier función que decae a cero en el infinito. Si elegimos como función de ponderación  $\phi^*$ , la denominada función fundamental que satisface la solución de Poisson

$$\nabla^2 \phi^* + \delta_i = 0, \quad (3.70)$$

donde  $\delta_i$  representa la función delta de Dirac situada en el punto  $i$ , la expresión (3.69) resulta:

$$c\phi_i + \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi^* d\Gamma, \quad (3.71)$$

donde  $c$  es un valor constante que viene determinado por el punto de aplicación del pulso. La utilización de la función fundamental permite que todas las integrales involucrados en la ecuación sean en el contorno. En el caso de problemas axilsimétricos es conveniente integrar alrededor del eje de simetría

$$c\phi^i + \int_{\hat{\Gamma}} \phi r d\hat{\Gamma} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\theta = \int_{\hat{\Gamma}} \frac{\partial \phi}{\partial n} r d\hat{\Gamma} \int_0^{2\pi} \phi^* d\theta. \quad (3.72)$$

La integración en torno al eje de simetría permite reducir el problema 3-D a uno 2-D donde el contorno  $\hat{\Gamma}$  no hace mención a una superficie sino a una línea

$$c\phi_i + \int_{\hat{\Gamma}} \phi \frac{\partial \hat{\phi}^*}{\partial n} = \int_{\hat{\Gamma}} \frac{\partial \phi}{\partial n} \hat{\phi}^* r d\hat{\Gamma}, \quad (3.73)$$

donde  $\hat{\phi}^*$  es solución fundamental una vez integrada en torno al eje de simetría y que viene dada por (Brebbia y Dominguez, 1989)

$$\hat{\phi}^* = \int_0^{2\pi} \phi^* d\theta = \frac{4K(m)}{(a+b)^{1/2}} \quad (3.74)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\phi}^*}{\partial n} &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\theta = \\ &= \frac{4}{(a+b)^{1/2}} \left[ \frac{1}{2r} \left( \frac{r_i^2 - r^2 + (z_i - z)^2}{(a-b)} E(m) - K(m) \right) n_r + \frac{z_i - z}{(a-b)} E(m) n_z \right], \end{aligned} \quad (3.75)$$

en donde las funciones auxiliares vienen definidas por

$$a = r_i^2 + r^2 + (z - z_i)^2, \quad (3.76)$$

$$b = 2r_i r \quad (3.77)$$

y

$$m = \frac{2b}{a+b} \text{ donde } m \text{ está comprendido entre } 0 \text{ y } 1, \quad (3.78)$$

siendo  $(r_i, z_i)$  el punto de aplicación del pulso,  $(z, r)$  es el punto del contorno,  $(n_r, n_z)$  la componente radial y axial del vector normal y  $K(m)$  y  $E(m)$  son

las integrales elípticas de primera y segunda especie. En lo que sigue se utiliza la formulación bidimensional antes descrita aunque por simplicidad se elimina la utilización del gorro ( $\wedge$ ).

En el método de los elementos de contorno se discretiza el contorno en elementos de tal manera que las integrales de la ecuación (3.73) dependen de valores del potencial y de la derivada normal del potencial en puntos discretos del contorno denominados nodos. Utilizando los nodos como punto de aplicación de la delta de Dirac se forma un sistema de ecuaciones donde las incógnitas son los valores del potencial y del campo normal en los nodos.

En el presente estudio se modifica el esquema habitual de resolución de los elementos de contorno sustituyendo la discretización de las variables en elementos por sus desarrollos en series de Fourier, manteniendo la discretización en elementos en los contornos  $z = 0$  y  $z = \lambda$ . Como se observa en la

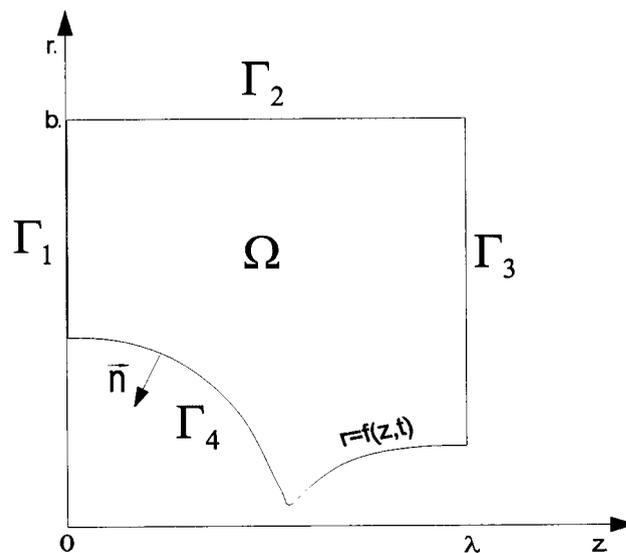


Figura 3.3: Dominio y contorno de integración

figura 3.3 el contorno lo hemos subdividido en cuatro por lo que (3.73) puede

escribirse como

$$\begin{aligned} c\phi_i + \int_{\Gamma_1} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} r d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} r d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_3} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} r d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_4} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} r d\Gamma_4 \\ = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi^* r d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi^* r d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_3} \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi^* r d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_4} \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi^* r d\Gamma_4. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Como mencionamos anteriormente, en los contornos  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_3$  discretizamos en elementos por lo que las integrales correspondientes de la ecuación (3.73) se calculan como

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi^* r d\Gamma_1 = \int_{\Gamma_3} \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi^* r d\Gamma_3 = 0, \quad (3.80)$$

$$\int_{\Gamma_1} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} r d\Gamma_1 = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_{1j}} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} r d\Gamma_{1j} \quad (3.81)$$

y

$$\int_{\Gamma_3} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} r d\Gamma_3 = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_{3j}} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} r d\Gamma_{3j}, \quad (3.82)$$

en donde  $N$  es el numero de elementos en los que se discretiza el contorno. Las integrales (3.80) son idénticamente nulas a causa de las condiciones de contorno. Los elementos que se han utilizado son cuadráticos (3 nodos por elementos), en ellos se aproxima la distribución de potencial en el elemento por una parábola

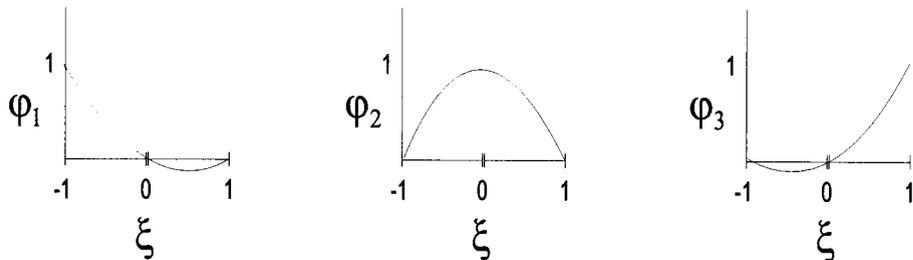


Figura 3.4: Funciones de interpolación

$$\phi = \phi_1\varphi_1 + \phi_2\varphi_2 + \phi_3\varphi_3, \quad (3.83)$$

en donde  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  y  $\phi_3$  son los valores del potencial en los nodos y

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2}\xi(1 - \xi) \\ \varphi_2 &= (1 - \xi^2) \\ \varphi_3 &= \frac{1}{2}\xi(1 + \xi), \end{aligned} \right\} \quad (3.84)$$

las funciones de interpolación (ver figura 3.4). Por lo general estas mismas funciones de interpolación son utilizadas para representar la posición y geometría del elemento

$$\begin{aligned} r &= r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2 + r_3\varphi_3 \\ z &= z_1\varphi_1 + z_2\varphi_2 + z_3\varphi_3 \end{aligned} \quad (3.85)$$

de modo que los nodos del elemento  $j$  que se situaban en las coordenadas  $(r_1, z_1)$ ,  $(r_2, z_2)$  y  $(r_3, z_3)$  se han transformado en el nuevo sistema de coordenadas en  $\xi = -1, 0$  y  $1$  respectivamente. Las integrales (3.81) y (3.82) en función de  $\xi$  son

$$\int_{\Gamma_1} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} r d\Gamma_1 = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^3 \phi_k^j \left( \int_{-1}^1 \varphi_k \frac{\partial \phi^*}{\partial n} r \mathbf{J}_j d\xi \right) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^3 \phi_k^j H_{jk}^1 \quad (3.86)$$

y

$$\int_{\Gamma_3} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} r d\Gamma_3 = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^3 \phi_k^j \left( \int_{-1}^1 \varphi_k \frac{\partial \phi^*}{\partial n} r \mathbf{J}_j d\xi \right) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^3 \phi_k^j H_{jk}^3, \quad (3.87)$$

en donde  $\mathbf{J}$  representa el jacobiano de la transformación y los subíndice  $j$  y  $k$  hacen mención al elemento y al nodo respectivamente; el superíndice indica en que contorno esta situado elemento. Substituyendo la solución fundamental en las ecuaciones (3.86) y (3.87) éstas resultan

$$H_{jk}^1 = - \int_{-1}^1 \frac{4}{(a+b)^{1/2}} \frac{z_i}{a-b} E(m) r \varphi_k \mathbf{J}_j d\xi \quad (3.88)$$

y

$$H_{jk}^3 = \int_{-1}^1 \frac{4}{(a+b)^{1/2}} \frac{z_i - \lambda}{a-b} E(m) r \varphi_k \mathbf{J}_j d\xi, \quad (3.89)$$

en donde  $i$  representa el punto de aplicación de la delta de Dirac. Obsérvese que las anteriores integrales son idénticamente nulas si el punto de aplicación de  $\delta_i$  esta situada en el mismo contorno que el elemento  $j$  que se está integrando. Las anteriores integrales se calculan numéricamente mediante una cuadratura de Gauss.

En los contornos  $\Gamma_2$  y  $\Gamma_4$  donde como incógnitas se tiene el gradiente normal, en vez de utilizar como incógnitas los valores en puntos discretos (nodos) se usan los términos de sus desarrollos en series de Fourier que debido a la simetría son en cosenos

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\Gamma_2} = \sum_{j=0}^{NFel} a_j \cos \left( \frac{\pi j z}{\lambda} \right) \quad (3.90)$$

y

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\Gamma_4} = \sum_{j=0}^{NFel} a'_j \cos \left( \frac{\pi j z}{\lambda} \right), \quad (3.91)$$

en donde  $NFel$  es el número de términos que conforma la serie de Fourier. Si sustituimos ambos desarrollos en la ecuación (3.73) y utilizamos las condiciones de contorno que se aplican en ambos contornos, las integrales correspondientes se transforman en

$$\int_{\Gamma_4} \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi^* r d\Gamma_4 = \sum_{j=0}^{NFel} a'_j \left( \int_0^\lambda \frac{2K(m)(4s + s_z^2)}{(a+b)^{1/2}} \cos \left( \frac{\pi j z}{\lambda} \right) dz \right) = G_j^4 a'_j \quad (3.92)$$

y

$$\begin{aligned} H^4 &= \int_{\Gamma_4} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} r d\Gamma_4 = \\ &= \int_0^\lambda \frac{2}{(a+b)^{1/2}} \left[ - \left( \frac{r_i^2 - s + (z_i - z)^2}{a-b} E(m) - K(m) \right) + \frac{z_i - z}{a-b} s_z \right] dz \end{aligned} \quad (3.93)$$

para el contorno  $\Gamma_4$  y,

$$\int_{\Gamma_2} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} r d\Gamma_2 = 0 \quad (3.94)$$

y

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi^* r d\Gamma_2 = \sum_{j=0}^{NFel} a_j \left( \int_0^\lambda \frac{4K(m)b}{(a+b)^{1/2}} \cos\left(\frac{\pi j z}{\lambda}\right) dz \right) = G_j^2 a_j \quad (3.95)$$

para el contorno  $\Gamma_2$ , donde  $j$  indica esta vez el termino de la serie de Fourier.

Las integrales en los contornos  $G_j^2$ ,  $G_j^4$  y  $H_4$  presentan singularidades cuando el punto de aplicación de la delta de Dirac está situado en el mismo contorno ya que la función elíptica de primer orden  $K(m)$  tiende a infinito como

$$K(m) \rightarrow \frac{1}{2} \ln \left( \frac{16}{1-m} \right) \text{ para } m \rightarrow 1 \text{ o lo que es lo mismo para } z \rightarrow z_i \quad (3.96)$$

En las integrales que presentan singularidades se suma y se resta la parte singular de tal manera que la integral se convierte en la suma de dos, una primera donde por mor de la resta no se presenta singularidad alguna integrándose numéricamente sin el menor problema y una segunda integral a donde la singularidad ha sido trasladada y que es posible calcular analíticamente. Si desarrollamos en serie de Taylor  $m(z)$  en la cercanía de  $z = z_i$  o lo que es lo mismo en el entorno de  $m = 1$  obtenemos que

$$m(z) = 1 + \frac{1}{2} m_{zz} \Big|_{z_i} (z - z_i)^2 = 1 - \frac{1}{2} \frac{4s + s_z^2}{8s^2} \Big|_{z_i} (z - z_i)^2 \quad (3.97)$$

por lo que substituyendo la expansión de Taylor (3.97) en el comportamiento (3.96), la singularidad se comporta en las cercanía de  $z_i$  como

$$K(m) \rightarrow -\frac{1}{2} \ln(z - z_i)^2 \quad (3.98)$$

Las integrales  $H^4$  y  $G_j^4$  cuando presentan singularidades se calculan por lo tanto como

$$\begin{aligned} H^4 = & \int_0^\lambda \left\{ \frac{2}{(a+b)^{1/2}} \left[ - \left( \frac{r_i^2 - s + (z_i - z)^2}{a-b} E(m) - K(m) \right) + \frac{z_i - z}{a-b} s_z \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\sqrt{s}} \Big|_{z_i} \ln(z - z_i)^2 \right\} dz - \frac{1}{2\sqrt{s}} \Big|_{z_i} \int_0^\lambda \ln(z - z_i)^2 dz \end{aligned} \quad (3.99)$$

y

$$G_j^4 = \int_0^\lambda \left[ \frac{2K(m)\sqrt{4s+s_z^2}}{(a+b)^{1/2}} \cos\left(\frac{\pi j z}{\lambda}\right) + \sqrt{\frac{4s+s_z^2}{4s}} \right]_{z_i} \cos\left(\frac{\pi j z_i}{\lambda}\right) \ln(z-z_i)^2 \Bigg] dz - \sqrt{\frac{4s+s_z^2}{4s}} \Bigg|_{z_i} \cos\left(\frac{\pi j z_i}{\lambda}\right) \int_0^\lambda \ln(z-z_i)^2 dz. \quad (3.100)$$

Operando del mismo modo en el contorno  $\Gamma_2$ , las integrales  $G_j^2$  cuando son singulares se pueden calcular como

$$G_j^2 = \int_0^\lambda \left[ \frac{4bK(m)}{(a+b)^{1/2}} \cos\left(\frac{\pi j z}{\lambda}\right) + \cos\left(\frac{\pi j z_i}{\lambda}\right) \ln(z-z_i)^2 \right] dz - \cos\left(\frac{\pi j z_i}{\lambda}\right) \int_0^\lambda \ln(z-z_i)^2 dz. \quad (3.101)$$

El numero de incógnitas que se tienen es de  $2 \times (2N-2)$  para los contornos  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_3$  donde  $N$  es el numero de elementos en cada contorno, y  $2 \times (Nfel+1)$  correspondientes a los desarrollos en series de Fourier de los contornos  $\Gamma_2$  y  $\Gamma_4$  y donde  $Nfel$  es el número de términos de Fourier en los que se expande el gradiente normal del potencial. Se forma un sistema de ecuaciones de igual numero de incógnitas mediante la variación del lugar de aplicación del pulso, situando tantos pulsos como incógnitas hay. El numero de pulsos en cada contorno es igual al numero de incógnitas de dicho contorno. Los puntos de colocación de los pulsos en los contornos  $\Gamma_2$  y  $\Gamma_4$  coincide con los nodos mientras que en los contornos  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_3$  la colocación de los puntos es equidistante a lo largo del intervalo  $[0, \lambda]$ . El sistema es por lo tanto de la forma

$$\begin{bmatrix} c\mathbf{I} & \mathbf{H}_3^1 & -\mathbf{G}_4^1 & -\mathbf{G}_2^1 \\ \mathbf{H}_1^3 & c\mathbf{I} & -\mathbf{G}_4^3 & -\mathbf{G}_2^3 \\ \mathbf{H}_1^4 & \mathbf{H}_3^4 & -\mathbf{G}_4^4 & -\mathbf{G}_2^4 \\ \mathbf{H}_1^2 & \mathbf{H}_3^2 & -\mathbf{G}_4^2 & -\mathbf{G}_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_3 \\ \mathbf{a}'_j \\ \mathbf{a}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_4^1 \\ -\mathbf{H}_4^3 \\ -(\mathbf{c}\mathbf{I} + \mathbf{H}_4^4) \\ -\mathbf{H}_4^2 \end{bmatrix}, \quad (3.102)$$

donde en el superíndice indica donde está aplicada el pulso y el subíndice la incógnita que se calcula.

## 3.6 Resultados

Expondremos en esta sección los resultados numéricos obtenidos de la resolución del problema fluidomecánico acoplado al eléctrico. Utilizaremos como método de resolución el de Fourier para el problema fluidomecánico mientras que para el problema eléctrico se ha utilizado el método de Fourier–Bessel cambiando al método de Fourier–Elementos de Contorno cuando el grado de deformación de la entrefase alcanza un cierto nivel. El grado cumplimiento de la condición de equipotencialidad controla el cambio, si el error cometido en dicha condición es mayor que un 1 % se realiza el cambio. El método numérico utilizado para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales obtenido por el Método de Fourier es un método de Runge-Kutta-Fehlberg de cuarto orden y paso variable que se puede encontrar descrito en Press *et al.* (1987). Para comprobar la convergencia y estimar el grado de discretización necesario se ha resuelto un problema concreto empleando diferentes grados de discretización tanto en las variables fluidomecánicas  $s$  y  $q$  como en las eléctricas  $\phi$ . Se observa en las figuras 3.5 y 3.6 los perfiles del campo eléctrico normal en la entrefase  $e_n$  y de la posición de la entrefase  $f$  respectivamente en un instante cercano a la rotura para una perturbación de semilongitud de onda  $\lambda = 4.10$ , amplitud inicial  $\epsilon = 0.05$ , número de Bond eléctrico  $\gamma_o = 0.3$  y número de Ohnesorge  $C = 0.05$  para diversos  $N$  (el número de términos de lo que consta la expansión de Fourier de  $s$  y  $q$ ) y  $NFel$  (número de términos de los que consta la expansión de Fourier de  $e_n$  en el Método de Fourier-Bessel). Como es usual con los métodos espectrales la convergencia se alcanza rápidamente siendo la distribución de campo eléctrico la variable más sensible. Se observa que la solución con  $N = 45$  y  $NFel = 20$  difícilmente puede ser distinguida de las soluciones con discretizaciones más finas ( $N = 55, NFel = 20$  or  $N = 45, NFel = 40$ ). La discretización elegida para resolver el problema es, a la vista de los anteriores resultados,  $N = 45$  y  $NFel = 35$ . La distancia a la que se coloca el electrodo de electrificación  $b$  no influye en los resultados siempre que este esté suficientemente alejado. Setiawan y Heister (1997) describe la influencia de  $b$  en la posición de la entrefase demostrando que para  $b$  mayores de 10 la influencia es despreciable; en nuestro caso se ha elegido

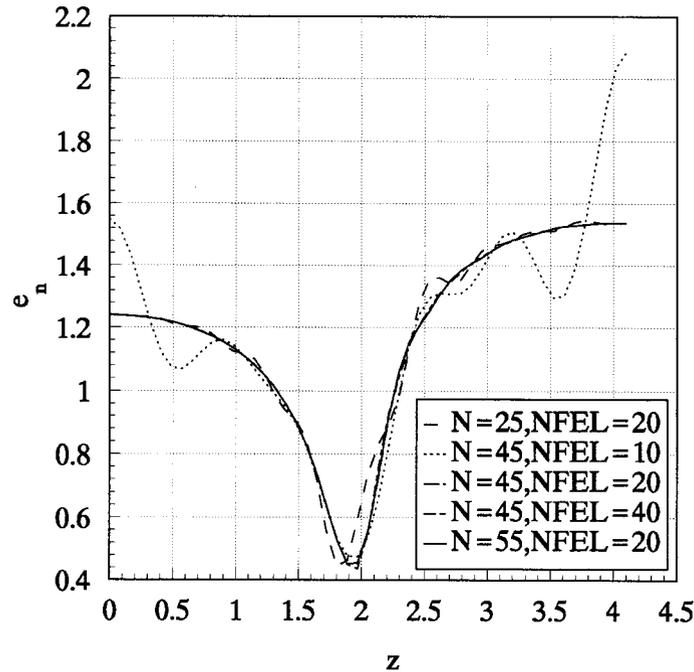


Figura 3.5: Campo eléctrico normal en la interfase  $e_n$  en función de  $z$  para diversos niveles de discretización ( $N, NFEL$ ) y  $\lambda = 4.10$ ,  $C = 0.05$ ,  $\gamma_o = 0.3$ ,  $\epsilon = 0.05$ .

$b = 25$ .

Teniendo en cuenta la rotura de los microjet emergentes desde el cono de Taylor en electrospray, uno de los parámetros más útiles por permitir comparar el presente modelo con los experimentos efectuados en electrosprays es el cociente de la carga con la carga límite de Rayleigh,  $Q/Q_R$ . Es importante señalar que las medidas experimentales presente en la literatura son medidas indirectas de la carga volumétrica dado que son deducidas a través del cociente de la intensidad con el caudal transportado por las gotas,  $I/Q_f$  (por lo tanto, las medidas no distinguen entre gotas principales y satélites). De todos modos,  $Q/Q_R$  no excede apenas el 40–50 % en la mayoría de los experimentos usando líquidos de polaridad moderada (Gañán-Calvo *et al.*, 1997), e incluso descienden por debajo del 20 % para caudales bajos cerca-

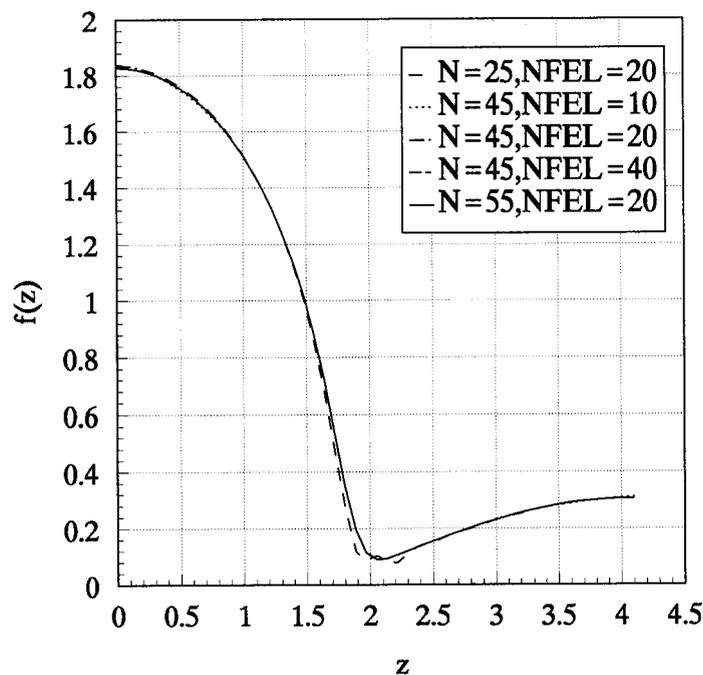


Figura 3.6: Posición de la interfase  $f$  en función de  $z$  para diversos niveles de discretización  $(N, NFEL)$  y  $\lambda = 4.10$ ,  $C = 0.05$ ,  $\gamma_o = 0.3$ ,  $\epsilon = 0.05$ .

nos a los mínimos para los cuales la configuración de cono-chorro se vuelve inestable. Sin embargo para líquidos con polaridad baja y grandes caudales,  $Q/Q_R$  puede alcanzar un 100 % correspondiente a situaciones en donde explosiones culómbicas tienen lugar [Gomez y Tang (1994), Fernández de la Mora (1996)]. Dado que en las situaciones descritas por últimos trabajos (líquidos de baja polaridad y conductividad) el presente modelo es de aplicación dudosa, nos restringimos a valores de  $Q/Q_R$  comprendidos entre 0 y 50 %.

Como Ashgriz y Mashayek (1995) señala los perfiles de la presión y caudales son cuestionables en las últimas etapas de la rotura debido a la menor validez de la aproximación unidireccional dado que la escala axial en esos último instantes son del orden del radio del chorro tal y como se indica en

las figuras 3.7 y 3.8, en donde se puede observar el fuerte gradiente de la

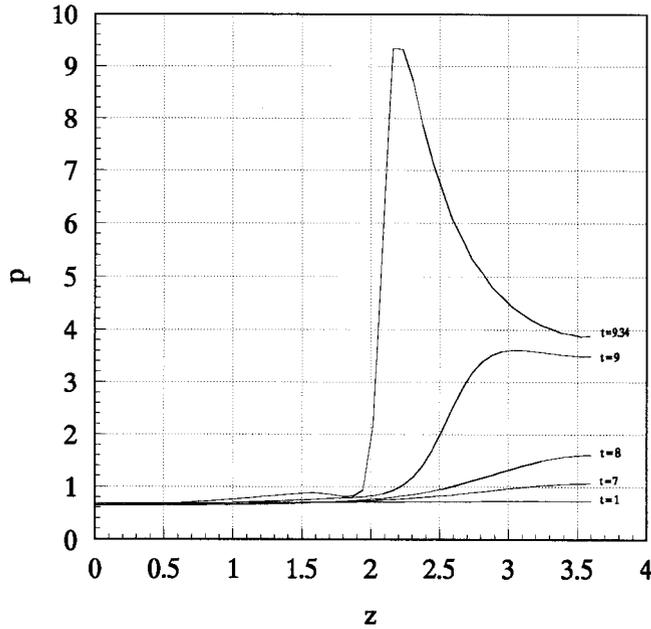


Figura 3.7: Evolución temporal de la presión capilar-eléctrica  $p_{ce}$  en función de  $z$  para  $\gamma_o = 0.3$ ,  $\lambda = 3.60$ ,  $C = 0.05$  y  $\epsilon = 0.05$ .

presión  $p$  en la cercanía del punto de rotura. Esta debilidad de los métodos unidireccionales en describir el detalle en los instantes finales no se produce en el calculo de cantidades globales como son el tiempo de rotura y los volúmenes y las cargas de las gotas principales y satélites dado estas cantidades no cambian apreciablemente en las últimas etapas de la rotura. La incertidumbre asociada a la medida de estas cantidades globales (volúmenes y cargas de las gotas) es despreciable debido a la radical diferencia de la escala temporal de la rotura global y aquella correspondiente a los instantes finales de la rotura. Este hecho viene corroborado en la figura 3.9 en donde se compara los diámetros de las gotas  $d_g$  adimensionalizadas con el diámetro de chorro  $d_j$  para un chorro no viscoso y descargado para diferentes números

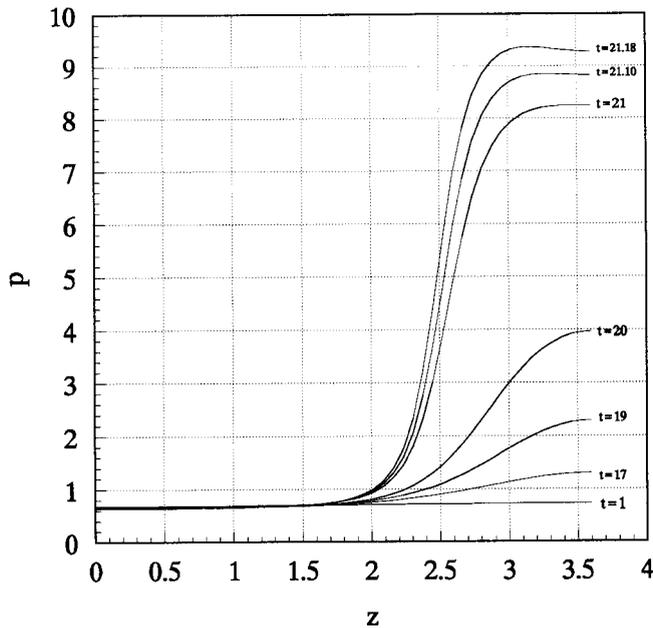


Figura 3.8: Evolución temporal de la presión capilar-eléctrica  $p_{ce}$  en función de  $z$  para  $\gamma_o = 0.3$ ,  $\lambda = 3.60$ ,  $C = 0.5$  y  $\epsilon = 0.05$ .

de ondas obtenidos con un modelo de Lee no viscoso y con un modelo 3D propuesto por Ashgriz y Mashayek (1995). La capacidad de los modelos unidireccionales para describir el proceso de rotura del chorro puede observarse en la figura 3.10 donde se compara la evolución logarítmica de la amplitud de la cresta, el valle y la diferencia entre ambos en función del tiempo obtenidos con nuestro modelo unidireccional y el modelo 3D propuesto por Ashgriz y Mashayek (1995) en el caso de un chorro altamente viscoso. El mecanismo de inestabilidad no se altera por la presencia de las fuerzas superficiales electrostáticas para densidades de carga superficial correspondientes a números de Taylor iguales o por debajo de 0.4 tal y como describe el análisis lineal 3D. A pesar de todo, las fuerzas electrostáticas en la superficie del chorro (ver figura 3.11) decrecen en la zona de radio mínimo y crece en la de ra-

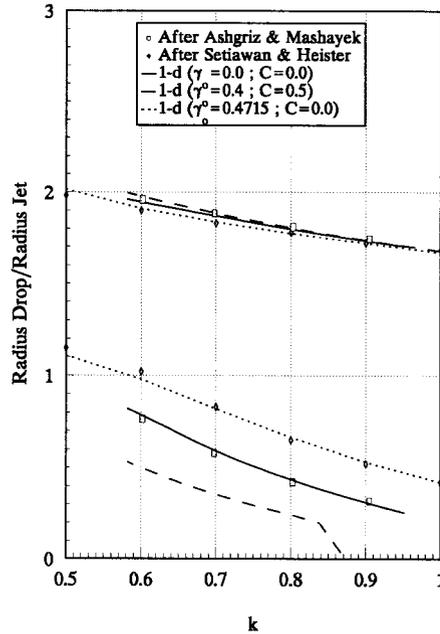


Figura 3.9: radio de la gota adimensional en función del número de onda de la perturbación para diversos casos: Resultados 1D [(—)  $C=0.0$ ,  $\gamma_o = 0.0$ ; (- - -)  $C = 0.5$  y  $\gamma_o = 0.4$ ; (... )  $C=0.0$ ,  $\gamma_o = 0.4715$ ]; [  $\square$  ] resultados obtenidos por Ashgriz y Mashayek (1995) para chorros no viscosos y descargados y [  $\diamond$  ] resultados obtenidos por Setiawan y Heister (1997) para un chorro no viscoso y un nivel de carga  $\gamma_o = 0.4715$ .

dio máximo creando un fuerza actuante supletoria que provoca un aumento del gradiente efectivo de presión en el líquido. El efecto global del campo eléctrico es favorecer la inestabilización para longitudes de onda por debajo de un cierto valor umbral que denominamos crítico  $\lambda_c$  una vez que la perturbación inicial se ha disparado. Por contra si la perturbación tiene mayor longitud de onda que  $\lambda_c$  la densidad de carga actúa en contra de la capilaridad buscando estabilizar al chorro. Este efecto, descrito también por el análisis lineal 3D que predice un valor umbral de  $\lambda_c = 5.28$ , puede observar-

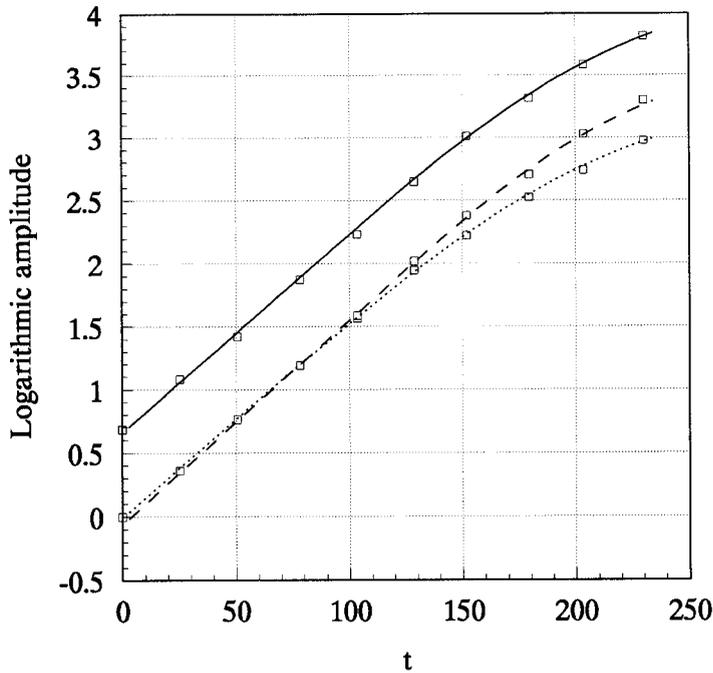


Figura 3.10: Evolución temporal de la amplitud logarítmica ( $la$ ) de la (...) cresta ( $la = \ln[(f_s - 1)/\epsilon]$ ), (- - -) el valle ( $la = \ln[(1 - f_n)/\epsilon]$ ) y (—) la diferencia entre ambas ( $la = \ln[(f_s - f_n)/\epsilon]$ ), donde  $f_s$  y  $f_n$  son los radios de la cresta y del valle respectivamente y  $\epsilon$  es la amplitud inicial de la perturbación. Los resultados corresponden al modelo 1D con  $\epsilon = 0.05$ ,  $k = 0.2$  y  $C = 10$ . A efectos de comparación se dibujan los resultados obtenidos por Ashgriz y Mashayek (1995) para el mismo caso [ $\square$ ].

se en la figura 3.13, siendo tanto más evidente cuanto mayor es el nivel de electrificación del chorro. El efecto estabilizante se manifiesta también en las últimas etapas de la rotura del chorro (ver figura 3.11 y 3.12) mientras que en las primeras etapas, al ser la longitud de onda de la perturbación inicial menor que el valor crítico  $\lambda_c$ , el campo eléctrico trabaja conjuntamente con la capilaridad en la inestabilización del chorro. La continua disminución del radio en la zona en donde la gota satélite se está formando acentúa el efecto

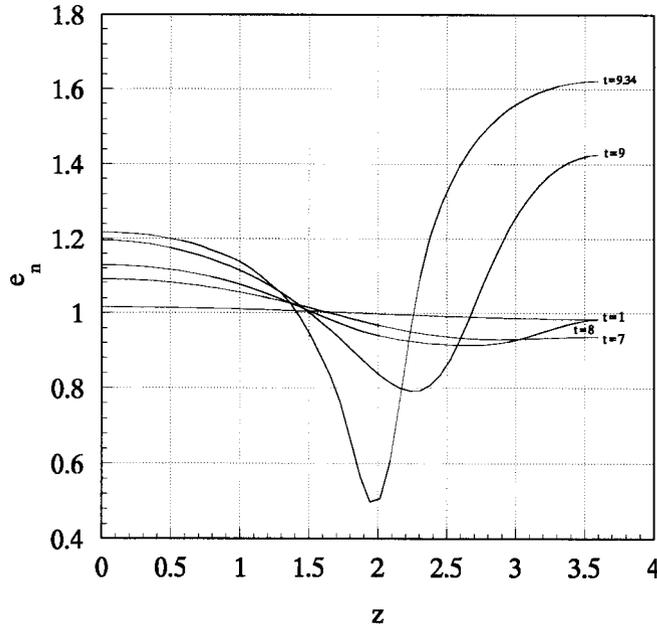


Figura 3.11: Evolución temporal del campo eléctrico en la interfase  $e_n$  para  $\gamma_o = 0.3$ ,  $\lambda = 3.60$ ,  $C = 0.05$  y  $\epsilon = 0.05$ .

punta del campo eléctrico (descrito en la sección 3.2) por lo que el campo eléctrico en las últimas etapas de la rotura busca estabilizar al chorro. Este fenómeno estabilizante provoca una cierta deceleración del proceso de rotura aunque no puede superar el efecto inestabilizante de la inercia y la tensión superficial que terminan por romper el chorro.

El mínimo tiempo de rotura correspondiente a la longitud de onda más inestable  $\lambda_u$  decrece para números de Taylor crecientes. La disminución de  $\lambda_u$  con el número de Taylor es suave como puede ser observado en la figura 3.13 para números de Taylor comprendidos entre 0 y 0.4. Para los modos axilsimétricos la viscosidad siempre juega un papel estabilizante incrementando además el valor de  $\lambda_u$ . Son numerosas las diferencias que surgen entre la teoría lineal 3D con los análisis no lineales. La teoría lineal predice que un

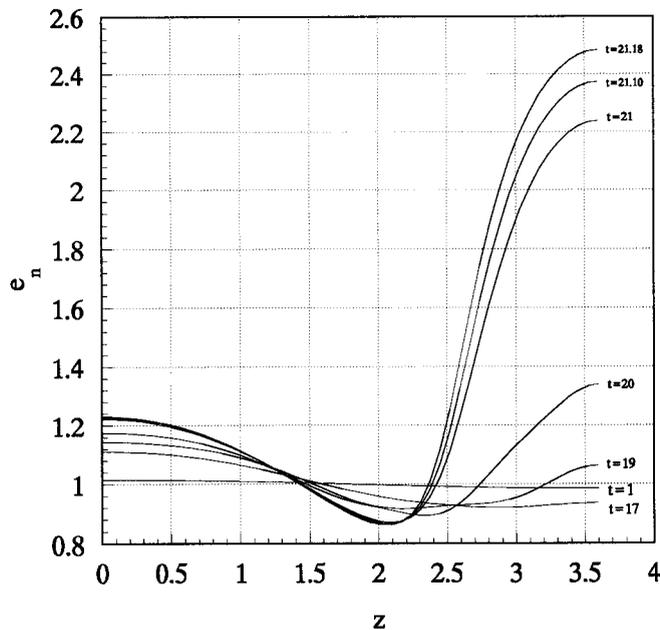


Figura 3.12: Evolución temporal del campo eléctrico en la interfase  $e_n$  para  $\gamma_o = 0.3$ ,  $\lambda = 3.60$ ,  $C = 0.5$  y  $\epsilon = 0.05$ .

chorro descargado es inestable siempre que el número de onda de la perturbación no exceda la unidad, siendo estable en el resto de los casos. Este valor, denominado número de onda de corte, se ha comprobado en diferentes ataques no lineales [Yuen (1968), Nayfeh (1970) entre otros] que es dependiente del valor de la amplitud inicial de la perturbación. Chaudhary y Redekopp (1980) pone de manifiesto la dependencia logarítmica del tiempo de rotura con la amplitud inicial. Ashgriz y Mashayek (1995) muestra la influencia de la amplitud inicial en el crecimiento del segundo armónico lo que se traduce en una reducción del tamaño de las gotas satélites a medida que la amplitud inicial crece. En el caso de chorros altamente conductores la teoría lineal 3D predice que la semilongitud umbral  $\lambda_c$  toma el valor universal igual a 5.28. Sorprendentemente el ataque no lineal muestra una dependencia de este va-

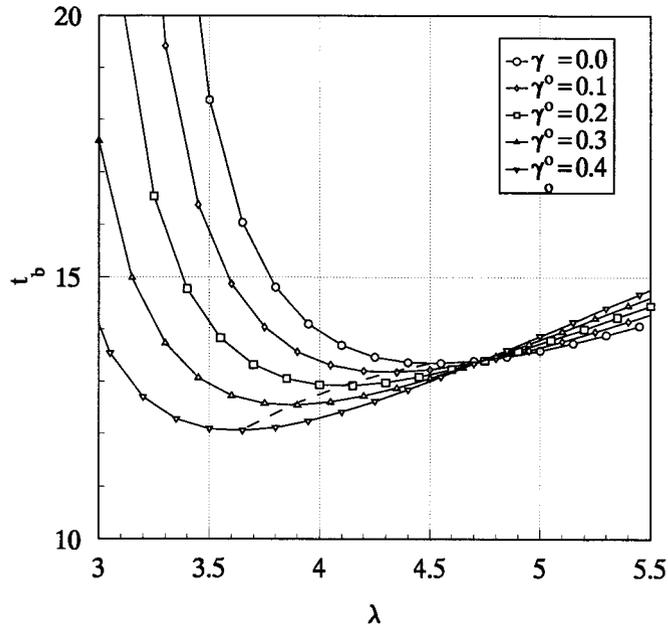


Figura 3.13: tiempo de rotura  $t_b$  frente a la semilongitud de onda  $\lambda$ , para  $\gamma_0 = 0, 0.1, 0.2, 0.3$  y  $0.4$  y número de Ohnesorge fijo  $C = 0.2$ . La línea rayada (- - -) corresponde a la semilongitud de onda más inestable  $\lambda_u$

lor de este umbral con el número de Ohnesorge decreciendo a medida que la viscosidad adimensional aumenta como muestra la figura 3.14. La influencia de la viscosidad y de la densidad de carga superficial en el cociente entre el diámetro de la gota y el diámetro del chorro en las gotas principales es muy pequeña (ver figura 3.9). El único parámetro que determina este diámetro adimensional es la longitud de onda de la perturbación. Este hecho junto a la débil variación de la semilongitud de onda más inestable  $\lambda_u$  con la electrificación justifica el empleo de la relación  $d_g = 1.89d_j$  en la derivación de las leyes de escala del electrospray [Gañán-Calvo *et al.* (1997) entre otros].

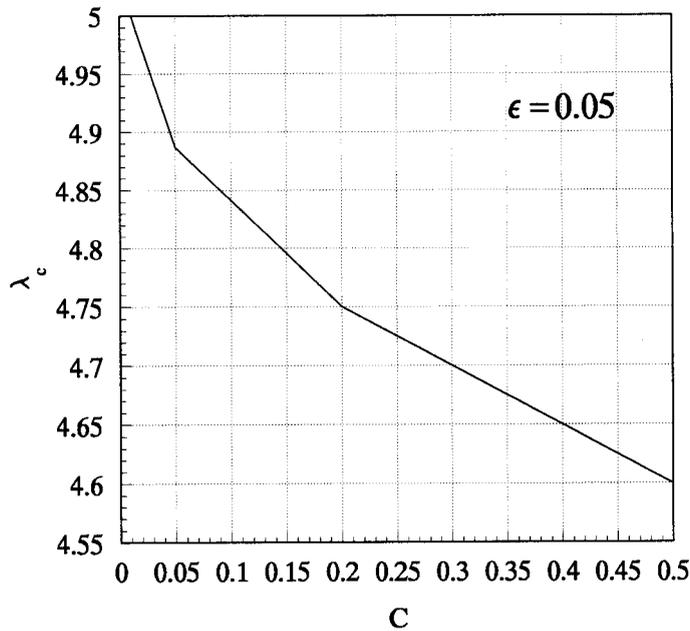


Figura 3.14: semilongitud umbral  $\lambda_c$  como función del número de Ohnesorge  $C$  para una amplitud inicial  $\epsilon$  igual a 0.05.

La carga de las gotas principales viene dada por

$$Q_m = \frac{2\pi V_o A \epsilon_o}{\ln(b)} \int_0^{z_m} e^n \sqrt{4s + s'^2} dz = \frac{4\pi V_o A \epsilon_o \lambda}{\ln(b)} q_r^m(\gamma_o, C, \lambda) \quad (3.103)$$

y el volumen de las gotas principales por

$$V_m = 2\pi A^3 \int_0^{z_m} s dz = 2\pi A^3 \lambda v_r^m(\gamma_o, C, \lambda) \quad (3.104)$$

donde  $z_m$  es el punto donde se alcanza el mínimo de posición de la interfase,  $q_r^m$  y  $v_r^m$  son las cargas y volúmenes relativos siendo la unidad ambos valores cuando las gotas satélites están ausentes. A partir de las expresiones (3.103) y (3.104) la razón de la carga principal y la carga de Rayleigh  $Q_m/Q_R$  se comporta como

$$\frac{Q_m}{Q_R} \sim \gamma_o^{1/2} \lambda^{1/2} \frac{q_r^m}{\sqrt{v_r^m}}. \quad (3.105)$$

En la figura 3.15 se dibuja la dependencia de la razón  $Q/Q_R$  con  $\lambda$  tanto

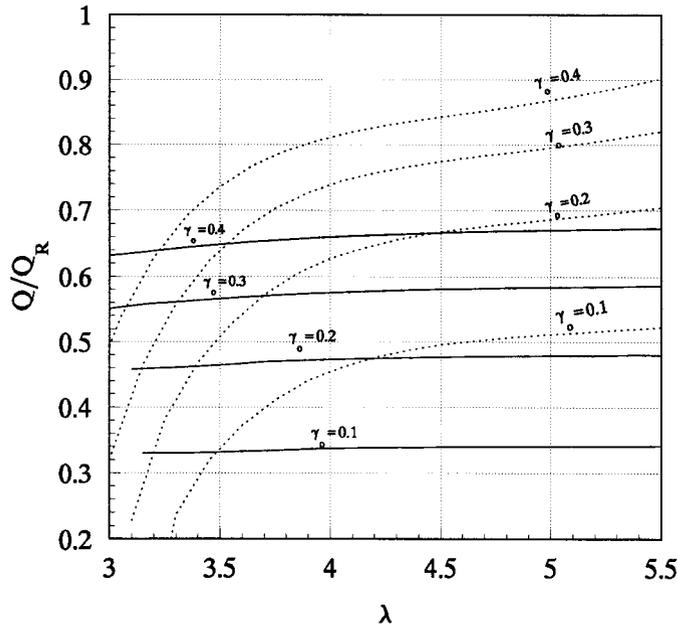


Figura 3.15: (—) Carga de la gota principal adimensionalizada con la carga límite de Rayleigh, y (...) Carga de la gota satélite adimensionalizada con la carga límite de Rayleigh como función de la semilongitud de onda para diferentes valores del número de Taylor ( $\gamma_o = 0, 0.1, 0.2, 0.3$  y  $0.4$ ) y un número de Ohnesorge fijo ( $C = 0.2$ ).

para la gota principal como la satélite para diversos niveles de electrificación  $\gamma_o$  permaneciendo fijo el valor del número de Ohnesorge. Se observa en dicha figura que la dependencia de la razón  $Q_m/Q_R$  con la longitud de onda es despreciable. Con ello la dispersión del cociente  $Q_m/Q_R$  en el caso de una rotura natural, en donde perturbación consta de numerosas longitudes de onda entorno a la más inestable  $\lambda_u$ , debe de ser despreciable. Por contra la razón  $Q/Q_R$  para las gotas satélites aumenta siempre con el aumento de las longitudes de onda por lo que acaba por sobrepasar en un cierto punto al valor

de la gota principal. El efecto de la viscosidad en el cociente  $Q/Q_R$  puede

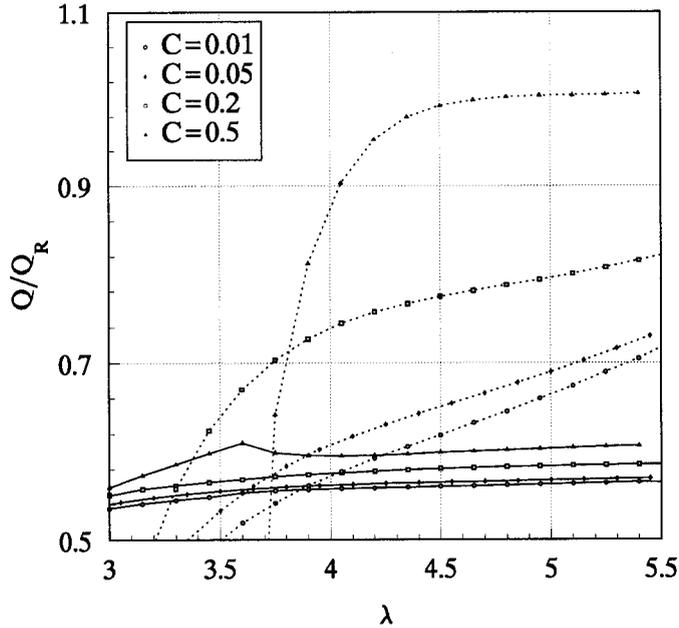


Figura 3.16: (—) Carga de la gota principal adimensionalizada con la carga límite de Rayleigh, y (...) Carga de la gota satélite adimensionalizada con la carga límite de Rayleigh como función de la semilongitud de onda para diferentes valores del número de Ohnesorge ( $C = 0.01, 0.05, 0.2$  y  $0.5$ ) y un número de Taylor fijo ( $\gamma_o = 0.4$ ).

observarse en la figura 3.16 donde para un número de Taylor fijo se dibuja  $Q/Q_R$  de las gotas principales y satélites, en función de  $\lambda$  para diversos números de Ohnesorge  $C$ . La viscosidad tiene una ligera influencia en el aumento de  $Q_m/Q_R$ . Dado que el volumen de la gota principal aumenta con la viscosidad, la distribución de carga viene también afectada por la viscosidad, incrementado la carga presente en la gota principal.  $Q_m/Q_R$  permanece independiente de  $\lambda$  cualquiera que sea el valor de la viscosidad.

A pesar de la disminución de carga en la gota satélite con la viscosidad, la

reducción de su volumen con la viscosidad es tan severa que  $Q_s/Q_R$  aumenta. A medida el número de Ohnesorge y el número de Taylor aumenta,  $Q_s/Q_R$  se acerca al valor unidad por lo que la densidad de carga volumétrica de la nube de gotas satélites es mayor que la de las gotas principales. Este efecto se potencia por la mayor velocidad de evaporación de las satélites (debido a su menor tamaño) pudiéndose alcanzar situaciones donde las explosiones culómbicas tengan lugar.

Una ilustración de la evolución temporal de la posición de la entrefase se presenta en las figuras 3.17 y 3.18 para una semilongitud de onda  $\lambda = 3.60$ , un número de Taylor  $\gamma_o = 0.3$  y dos diferentes viscosidades ( $C = 0.5$  y  $C = 0.05$ ) siendo el paso temporal igual a 1.0 excepto en los últimos instantes donde el paso de tiempo es de 0.05. Se puede observar que la viscosidad puede inhibir la aparición de la gota satélite.

### 3.7 Resumen y conclusiones

En el presente capítulo se ha realizado un análisis paramétrico de la rotura de chorros cargados capilares bajo condiciones simplificadas (límite conductor) aplicables a los sprays EHD en el modo cono-chorro ( Campos eléctricos tangenciales despreciables, cilindro perfecto y rotura axilsimétrica). Para ello se ha empleado el modelo unidireccional de Lee que auna simplicidad con una exactitud suficiente (García, 1998). Los valores del número de Taylor empleados se han elegido atendiendo a los niveles típicos del cociente  $Q/Q_R$ , donde  $Q_R$  es la carga límite de Rayleigh, observado en los experimentos con electrosprays (Gañán-Calvo *et al.*, 1994). Como conclusiones podemos señalar:

- El modelo permite un cálculo cuantitativo de los tamaños y las cargas resultantes de la rotura del chorro capilares bajo moderados niveles de electrificación y viscosidad. Esto es esencial para el análisis de un spray cargado, su evolución y distribución espacial usando método Lagrangianos de la dinámica de las partículas (Gañán-Calvo *et al.*, 1994).
- La longitud de onda más inestable en una rotura natural del chorro

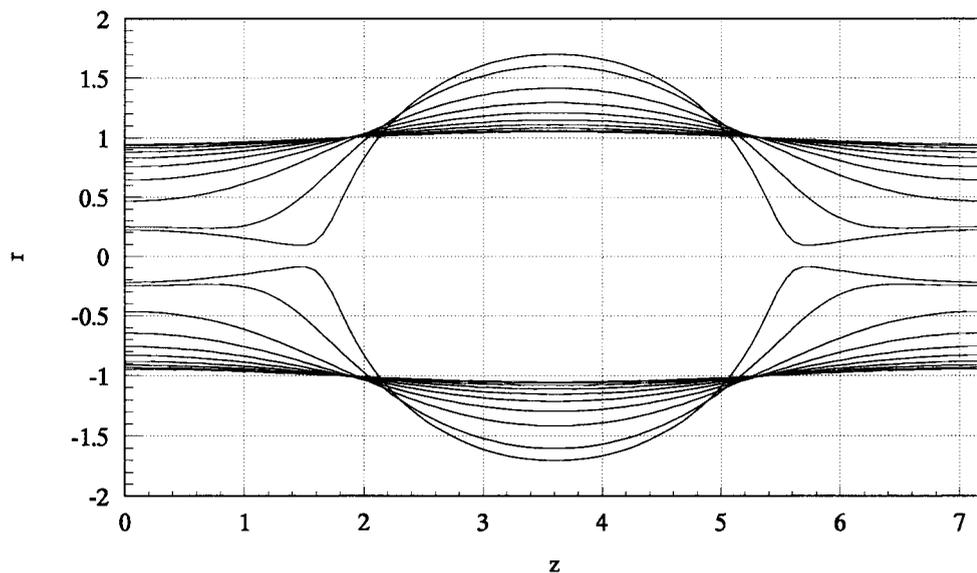


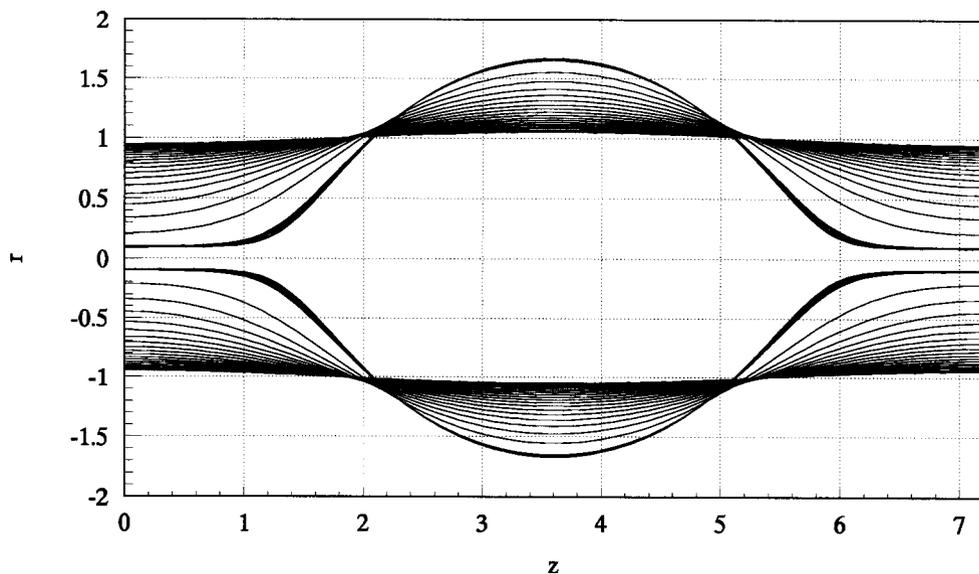
Figura 3.17: Evolución temporal de la interfase para  $\gamma_o = 0.3$ ,  $\lambda = 3.60$ ,  $\epsilon = 0.05$  y  $C = 0.05$ . El intervalo de tiempo entre gráficas es  $\Delta t = 1.0$  excepto para los últimos instantes en donde  $\Delta t = 0.05$ .

disminuye (aumenta) a medida que la electrificación (viscosidad) aumenta, pero tal disminución (aumento) es muy discreto y depende de la amplitud inicial de la perturbación: menos de un 25 % para números de Taylor hasta 0.4 y números de Ohnesorge comprendidos entre 0.01 y 0.5.

- Los efectos contrapuestos de la viscosidad y de la electrificación en la longitud de onda más inestable y el pequeño efecto que ambos operan sobre el tamaño adimensional de las gotas principales parecen proveer la explicación de la invariancia a los cambios de caudal de los diámetros

adimensionales de las gotas emitidos por el electrospray en el modo cono-chorro (Cloupeau y Prunet-Foch, 1989).

- A los conocidos efectos de la electrificación sobre la estabilización (inestabilización) para la longitud de onda largas (cortas) ya predichos por el análisis lineal, se suma la invariancia de la carga (adimensionalizada con la carga de Rayleigh) que transporta la gota principal con la longitud de la onda adimensional.
- La viscosidad aparece como el mecanismo más eficaz para disminuir,



*Figura 3.18: Evolución temporal de la interfase para  $\gamma_0 = 0.3$ ,  $\lambda = 3.60$ ,  $\epsilon = 0.05$  y  $C = 0.5$ . El intervalo de tiempo entre gráficas es  $\Delta t = 1.0$  excepto para los últimos instantes en donde  $\Delta t = 0.05$ .*

e incluso eliminar, los volúmenes de las gotas satélites provocando que la carga en dichas gotas se aproxime a los valores límites de Rayleigh siendo éstas susceptibles de sufrir explosiones culómbicas.

# Capítulo 4

## Líquidos de conductividad finita

### 4.1 Introducción

Como se describió en el capítulo 2 este límite recoge aquellos líquidos en los que el parámetro de relajación, que permite comparar el tiempo característico de rotura con el tiempo de relajación eléctrico, es finito. En este límite, tal y como el Modelo del Dieléctrico con Fuga de Melcher y Taylor refleja, las ecuaciones eléctricas que se aplican son las electrostáticas considerándose que el seno del líquido está libre de carga libre por lo que para conocer la distribución de potencial se debe resolver la ecuación de Laplace para el campo interior y el exterior

$$\nabla^2 \phi^i = 0 \text{ y} \quad (4.1)$$

$$\nabla^2 \phi^o = 0. \quad (4.2)$$

Estando sujeto los potenciales a las condiciones de contorno radiales

$$\phi^o|_{r=b} = 0 \text{ y} \quad (4.3)$$

$$\phi_r^i|_{r=0} = 0, \quad (4.4)$$

y a las condiciones de contorno en la interfase

$$\left[ (-\phi_r^o + F_z \phi_z^o) - \beta (-\phi_r^i + F_z \phi_z^i) \right] |_{r=F(z,t)} = C_n \sigma_e \quad (4.5)$$

y

$$\phi^o|_{r=F(z,t)} = \phi^i|_{r=F(z,t)}, \quad (4.6)$$

mientras que en la dirección axial se debe cumplir las condiciones de periodicidad

$$\phi_z^o(r, z)|_{z=0} = \phi_z^o(r, z)|_{z=\lambda} = 0 \text{ y} \quad (4.7)$$

$$\phi_z^i(r, z)|_{z=0} = \phi_z^i(r, z)|_{z=\lambda} = 0. \quad (4.8)$$

El campo eléctrico resultante actúa únicamente en la entrefase por lo que las ecuaciones volumétricas del problema fluidomecánico vienen dadas para el caso axilsimétrico por

$$\frac{(rU)_r}{r} + W_z = 0, \quad (4.9)$$

$$U_t + UU_r + WU_z = -P_r + C(U_{zz} - W_{zz}) \quad (4.10)$$

y

$$W_t + UW_r + WW_z = -P_z + C\left(W_{rr} + \frac{W_r}{r} + W_{zz}\right), \quad (4.11)$$

sometidas en la entrefase a las condiciones de contorno cinemática, de continuidad de la carga y de balance de esfuerzos normales y tangenciales

$$(F_t - U + F_z W)|_{r=F(z,t)} = 0, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_e)_t + \frac{F_z U + W}{1 + F_z^2} (\sigma_e)_z \\ - \frac{\sigma_e}{1 + F_z^2} [U_r + F_z^2 W_z - F_z(U_z + W_r)] = \alpha \beta E_n^i, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} P|_{r=F(z,t)} - \frac{2C}{C_n^2} \{U_r + F_z^2 W_z - F_z(W_r + U_z)\}|_{r=F(z,t)} \\ = \frac{1}{C_n} \left( \frac{1}{F} - \frac{F_{zz}}{C_n^2} \right) - \gamma_o [(E_n^o)^2 - \beta E_n^i + (\beta - 1)(E_t)^2] \end{aligned} \quad (4.14)$$

y

$$-C \{2F_z(U_r - W_z) + (1 - F_z^2)(W_r + U_z)\}|_{r=F(z,t)} + 2\gamma_o \sigma_e E_t = 0, \quad (4.15)$$

donde las componentes del campo eléctrico normal y tangencial exterior vienen dadas por

$$E_n^o = \frac{1}{C_n}(-\phi_r^o + f_z \phi_z^o) \text{ y} \quad (4.16)$$

$$E_t = \frac{1}{C_n}(-f_z \phi_r^o - \phi_z^o). \quad (4.17)$$

Las variables están sujetas a la periodicidad en la dirección axial

$$f_z|_{z=0} = f_z|_{z=\lambda} = 0, \quad (4.18)$$

$$W|_{z=0} = W|_{z=\lambda} = 0 \text{ y} \quad (4.19)$$

$$U_z|_{z=0} = U_z|_{z=\lambda} = 0 \quad (4.20)$$

El problema queda unívocamente determinado imponiendo las condiciones iniciales que en nuestro caso son aquellas correspondientes al problema estacionario

$$\begin{aligned} U|_{t=0} = W|_{t=0} = 0, \quad P|_{t=0} = 1 - \gamma_o, \\ \phi^o|_{t=0} = \ln\left(\frac{b}{r}\right), \quad \phi^i|_{t=0} = \ln b \text{ y} \quad \sigma_e = 1, \end{aligned} \quad (4.21)$$

más una pequeña perturbación en la posición de la interfase que satisfaga la ecuación de continuidad

$$F^2|_{t=0} = 1 + \epsilon(\epsilon - 2) \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} z\right). \quad (4.22)$$

## 4.2 Análisis lineal

En este epígrafe describiremos el análisis lineal para el caso de un chorro cargado en donde el tiempo de relajación eléctrico es un parámetro libre no estando presente ningún campo eléctrico axial impuesto. Precedentes de este análisis pueden encontrarse en Mestel (1994) y Mestel (1996) el cual realiza en ambos trabajos análisis lineales de chorros en los límites de viscosidad pequeña y altamente viscoso respectivamente. En ambos trabajos los chorros están cargados y sometidos a un campo eléctrico axial impuesto siendo el tiempo de relajación eléctrico un parámetro libre. Las diferencias entre estos

trabajos y el que realizaremos a continuación son: 1) en nuestro caso no existe campo axial impuesto, 2) permitimos que la viscosidad sea un parámetro libre y 3) nos circunscribimos a modos axilsimétricos.

Como describimos en el capítulo precedente el análisis lineal temporal busca soluciones para perturbaciones sinusoidales espaciales de pequeña amplitud sobre el estado básico de la solución. En efecto, considerando como estado básico aquel en que la entrefase es un cilindro perfecto buscamos soluciones de la forma:

$$\begin{pmatrix} U(z, r, t) \\ W(z, r, t) \\ P(z, r, t) \\ \Phi^o(z, r, t) \\ \Phi^i(z, r, t) \\ \Sigma_e(z, t) \\ F(z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ 1 - \gamma_o \\ \ln(b/r) \\ \ln(b) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u(r, z, t) \\ w(r, z, t) \\ p(r, z, t) \\ \phi^o(r, z, t) \\ \phi^i(r, z, t) \\ \sigma_e(z, t) \\ f(z, t) \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

siendo la perturbación de la forma

$$\begin{pmatrix} u(r, z, t) \\ w(r, z, t) \\ p(r, z, t) \\ \phi^o(r, z, t) \\ \phi^i(r, z, t) \\ \sigma_e(z, t) \\ f(z, t) \end{pmatrix} = Re \left[ \begin{pmatrix} \hat{u}(r) \\ \hat{w}(r) \\ \hat{p}(r) \\ \hat{\phi}^o(r) \\ \hat{\phi}^i(r) \\ \hat{\sigma}_e \\ \hat{f} \end{pmatrix} \zeta \right], \quad (4.24)$$

en donde  $\zeta$  es igual a  $e^{\Omega t + ikz}$  siendo  $k$  el número de onda adimensional y  $\Omega = \sigma + \omega i$  el autovalor complejo cuyas parte real  $\sigma$  e imaginaria  $\omega$  se denominan respectivamente factor de crecimiento y frecuencia de oscilación; las variables que presentan gorro son las amplitudes que siempre se consideraran de pequeña amplitud. Eliminando de las ecuaciones volumétricas fluidomecánicas los términos no lineales (término convectivo) obtenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.25)$$

y

$$\mathbf{v}_t = -\nabla p + C\nabla^2\mathbf{v}. \quad (4.26)$$

Resulta conveniente rehacer las anteriores ecuaciones para obtener ecuaciones por separado para la presión y la velocidad. De la aplicación del operador divergencia a la ecuación (4.26) y haciendo uso de la ecuación (4.25) obtenemos que la presión debe cumplir que

$$\nabla^2 p = 0. \quad (4.27)$$

Para obtener una ecuación para la velocidad tomamos la laplaciana de la ecuación (4.26) resultando

$$\nabla^2 \left( \nabla^2 - \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{v} = 0. \quad (4.28)$$

Dado el carácter lineal de los operadores que actúan sobre la velocidad es posible descomponer la velocidad en la suma de dos términos  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_v + \mathbf{v}_{nv}$ , siendo cada término la solución correspondiente a cada operador, es decir

$$\nabla^2 \mathbf{v}_{nv} = 0 \quad (4.29)$$

y

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{v}_v = 0. \quad (4.30)$$

Las perturbaciones están sometidas a las condiciones de contorno de regularidad en el eje lo cual corresponde a

$$p(r, z, t)|_{r=0} \text{ finita}, \quad (4.31)$$

$$u(r, z, t)|_{r=0} = 0 \quad (4.32)$$

y

$$w(r, z, t)|_{r=0} \text{ finita}. \quad (4.33)$$

mientras que en la interfase se debe de cumplir la condición cinemática

$$u(r, z, t)|_{r=1} = f_t, \quad (4.34)$$

y el equilibrio de esfuerzos normales

$$p(r, z, t)|_{r=1} = -f - f_{zz} + 2Cu_r|_{r=1} + 2\gamma_o(f + \phi_r^o)|_{r=1} \quad (4.35)$$

y tangenciales

$$C(u_z + w_r)|_{r=1} + 2\gamma_o\phi_z^o|_{r=1} = 0. \quad (4.36)$$

Los potenciales eléctricos interior y exterior deben satisfacer la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\phi^o = 0 \quad \text{y} \quad \nabla^2\phi^i = 0 \quad (4.37)$$

sometido el potencial interior a las condiciones de regularidad en el eje

$$\phi^i(r, z, t)|_{r=0} \text{ finito}, \quad (4.38)$$

y el exterior a la nulidad en el electrodo de electrificación

$$\phi^o(r, z, t)|_{r=b} = 0. \quad (4.39)$$

En la interfase se deben de cumplir las condiciones de salto de campo eléctrico normal como la continuidad del potencial

$$(-\phi_r^o + \beta\phi_r^i)|_{r=1} = \sigma_e \text{ y} \quad (4.40)$$

$$\phi^o|_{r=1} = \phi^i|_{r=1} \quad (4.41)$$

así como la ecuación de continuidad de la densidad de carga superficial

$$(\sigma_e)_t - u_r|_{r=1} = -\alpha\beta\phi_r^i|_{r=1}. \quad (4.42)$$

Substituyendo las soluciones buscadas (4.23) en las ecuaciones volumétricas ((4.27) a (4.30) y (4.37)) obtenemos las ecuaciones diferenciales que rigen

el comportamiento de las amplitudes de la presión, las velocidades radial y axial y el potencial interior y exterior

$$\widehat{p}'' + \frac{\widehat{p}'}{r} - k^2 \widehat{p} = 0 \quad (4.43)$$

$$\widehat{u}_{nv}'' + \frac{\widehat{u}_{nv}'}{r} - k^2 \widehat{u}_{nv} = 0 \quad (4.44)$$

$$\widehat{w}_{nv}'' + \frac{\widehat{w}_{nv}'}{r} - k^2 \widehat{w}_{nv} = 0 \quad (4.45)$$

$$\widehat{u}_v'' + \frac{\widehat{u}_v'}{r} - k_v^2 \widehat{u}_v = 0 \quad (4.46)$$

$$\widehat{w}_v'' + \frac{\widehat{w}_v'}{r} - k_v^2 \widehat{w}_v = 0 \quad (4.47)$$

$$(\widehat{\phi}^o)'' + \frac{(\widehat{\phi}^o)'}{r} - k^2 \widehat{\phi}^o = 0 \quad (4.48)$$

$$(\widehat{\phi}^i)'' + \frac{(\widehat{\phi}^i)'}{r} - k^2 \widehat{\phi}^i = 0, \quad (4.49)$$

donde las primas denotan derivación total respecto a  $r$  y  $k_v$  se define como

$$k_v^2 = k^2 + \frac{\Omega}{C}. \quad (4.50)$$

Las condiciones de contorno que cierran el problema vienen dadas por

$$\widehat{u}(0) = 0, \quad \widehat{w}(0) \text{ y } \widehat{\phi}^i(0) \text{ finitas;} \quad (4.51)$$

$$\widehat{u}(1) = \Omega \widehat{f} \quad (4.52)$$

$$\widehat{p}(1) = (-1 + k^2) \widehat{f} + 2C \widehat{u}'(1) + 2\gamma_o (\widehat{f} + (\widehat{\phi}^o)') \quad (4.53)$$

$$-C[ik \widehat{u}(1) + \widehat{w}'(1)] - 2\gamma_o ik \widehat{\phi}^i(1) = 0 \quad (4.54)$$

$$-\widehat{f} + \widehat{\phi}^o(1) = \widehat{\phi}^i(1) \quad (4.55)$$

$$-(\widehat{\phi}^o)'(1) + \beta (\widehat{\phi}^i)'(1) = \widehat{\sigma}_e \quad (4.56)$$

$$\Omega \widehat{\sigma}_e - \widehat{u}'(1) = -\alpha \beta \widehat{\phi}^i(1) \quad (4.57)$$

$$\widehat{\phi}^o(b) = 0. \quad (4.58)$$

La solución general del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (4.43-4.49) viene formada a partir de la combinación de funciones de Bessel modificadas de primer y segunda especie. Teniendo en cuenta las condiciones de regularidad (4.51) y en el caso del potencial exterior suponiendo que  $b \gg 1$ ,

las soluciones se escriben como

$$\widehat{p}(r) = -\mathcal{A} \frac{\Omega I_o(kr)}{I_o'(k)}, \quad (4.59)$$

$$\widehat{u}(r) = \widehat{u}_{nv}(kr) + \widehat{u}_v(kr) = \mathcal{A} \frac{I_o'(kr)}{I_o'(k)} - \mathcal{B} \frac{I_o'(k_v r)}{I_o'(k_v)}, \quad (4.60)$$

y

$$\widehat{w}(r) = \widehat{w}_{nv}(kr) + \widehat{w}_v(kr) = \mathcal{A} i \frac{I_o(kr)}{I_o'(k)} - \mathcal{B} i \frac{k_v I_o(k_v r)}{k I_o'(k_v)} \quad (4.61)$$

para las variables fluidomecánicas y,

$$\widehat{\phi}^o(r) = \mathcal{A}_e \frac{K_o(kr)}{k K_o'(k)} \quad (4.62)$$

y

$$\widehat{\phi}^i(r) = \mathcal{B}_e \frac{I_o(kr)}{k I_o'(k)} \quad (4.63)$$

para los potenciales exterior e interior. La substitución de las anteriores soluciones en las condiciones de contorno existentes en la interfase (4.53–4.57) permiten encontrar un sistema de ecuaciones algebraicas que relacionan todas las constantes libres del problema

$$-\widehat{f} + \mathcal{A}_e \Gamma(k) = \mathcal{B}_e \Upsilon(k), \quad (4.64)$$

$$\widehat{\sigma}_e = -(\widehat{f} + \mathcal{A}_e) + \beta \mathcal{B}_e, \quad (4.65)$$

$$\Omega \widehat{\sigma}_e = -\alpha \beta \mathcal{B}_e + \mathcal{A}(k^2 \Upsilon(k) - 1) - \mathcal{B}(k_v^2 \Upsilon(k_v) - 1), \quad (4.66)$$

$$\mathcal{A} - \mathcal{B} - \Omega \widehat{f} = 0, \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{A} [\Omega \Upsilon(k) + 2C(k^2 \Upsilon(k) - 1)] \\ & - \mathcal{B} [2C(k_v^2 \Upsilon(k_v) - 1)] + (-1 + k^2) \widehat{f} + 2\gamma_o (\widehat{f} + \mathcal{A}_e) = 0 \end{aligned} \quad (4.68)$$

y

$$\mathcal{A} - \mathcal{B} \left( 1 + \frac{\Omega}{2k^2C} \right) + \frac{\gamma_o}{C} \Upsilon(k) \mathcal{B}_e = 0, \quad (4.69)$$

en donde se utilizan las funciones auxiliares  $\Gamma$  y  $\Upsilon$  que se definen como

$$\Gamma(k) = \frac{K_o(k)}{k K'_o(k)} \text{ y } \Upsilon(k) = \frac{I_o(k)}{k I'_o(k)}. \quad (4.70)$$

A partir de las ecuaciones (4.64–4.66) es posible despejar  $\mathcal{A}_e$  y  $\mathcal{B}_e$  en función de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$

$$\mathcal{A}_e = \frac{1}{W_\alpha} \left\{ \hat{f} \left[ \beta \left( 1 + \frac{\alpha}{\Omega} \right) + \Upsilon(k) \right] + \frac{\Upsilon(k)}{\Omega} [\mathcal{A}(k^2\Upsilon(k) - 1) - \mathcal{B}(k_v^2\Upsilon(k_v) - 1)] \right\} \quad (4.71)$$

y

$$\mathcal{B}_e = \frac{1}{W_\alpha} \left\{ \hat{f}(1 + \Gamma(k)) + \frac{\Gamma(k)}{\Omega} [\mathcal{A}(k^2\Upsilon(k) - 1) - \mathcal{B}(k_v^2\Upsilon(k_v) - 1)] \right\} \quad (4.72)$$

donde  $W_\alpha$  es una nueva función auxiliar dada por

$$W_\alpha = \Gamma(k) \beta \left( 1 + \frac{\alpha}{\Omega} \right) - \Upsilon(k). \quad (4.73)$$

Sustituyendo las anteriores expresiones en las ecuaciones (4.68) y (4.69) obtenemos

$$\begin{aligned} & \mathcal{A} \left[ \Omega\Upsilon(k) + \left( 2C + \frac{\Xi}{\Omega} \right) (k^2\Upsilon(k) - 1) \right] \\ & - \mathcal{B} \left[ \left( 2C + \frac{\Xi}{\Omega} \right) (k_v^2\Upsilon(k_v) - 1) \right] \\ & + \hat{f} \left[ k^2 - 1 + 2\gamma_o \left( 1 + \frac{1}{\Gamma(k)} \right) + \Xi \left( 1 + \frac{1}{\Gamma(k)} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.74)$$

y

$$\begin{aligned} & \mathcal{A} \left[ 1 + \frac{\Xi}{2C\Omega} \Gamma(k) (k^2\Upsilon(k) - 1) \right] \\ & - \mathcal{B} \left[ 1 + \frac{\Omega}{2k^2C} + \frac{\Xi}{2C\Omega} \Gamma(k) (k_v^2\Upsilon(k_v) - 1) \right] + \hat{f} \frac{\Xi}{2C} (\Gamma(k) + 1) = 0, \end{aligned} \quad (4.75)$$

en donde se agrupa en la variable  $\Xi$  a  $\frac{2\gamma_o\Upsilon(k)}{W_\alpha}$ .

La ecuación de dispersión puede encontrarse despejando  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  en función de  $\hat{f}$  de las ecuaciones algebraicas (4.75) y (4.67)

$$\mathcal{A} = \hat{f} \frac{\Omega + 2k^2C + \frac{\Xi}{\Omega}k^2(1 + \Gamma(k)k_v^2\Upsilon(k_v))}{1 + \frac{\Xi}{\Omega^2}k^2\Gamma(k)(k_v^2\Upsilon(k_v) - k^2\Upsilon(k))} \quad (4.76)$$

y

$$\mathcal{B} = \hat{f} \frac{2k^2C + \frac{\Xi}{\Omega}k^2(1 + \Gamma(k)k^2\Upsilon(k))}{1 + \frac{\Xi}{\Omega^2}k^2\Gamma(k)(k_v^2\Upsilon(k_v) - k^2\Upsilon(k))}, \quad (4.77)$$

y sustituyendo ambas expresiones (4.76) y (4.77) en la ecuación (4.74) obtenemos la relación de dispersión

$$\begin{aligned} & \Omega^2\Upsilon(k) + 2C\Omega(2k^2\Upsilon(k) - 1) + 4k^2C^2(k^2\Upsilon(k) - k_v^2\Upsilon(k_v)) \\ & + \frac{2\Xi C}{\Omega}k^2(2 + \Gamma(k))(k^2\Upsilon(k) - k_v^2\Upsilon(k_v)) \\ & + \Xi \left( 2k^2\Upsilon(k) + k^2\Upsilon(k)k_v^2\Upsilon(k_v)\Gamma(k) + \frac{1}{\Gamma(k)} \right) \\ & + \left( 1 + \frac{\Xi}{\Omega^2}(k_v^2\Upsilon(k_v) - k^2\Upsilon(k)) \right) \left[ k^2 - 1 + 2\gamma_o \left( 1 + \frac{1}{\Gamma(k)} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.78)$$

En la figura 4.1 se dibujan el factor de crecimiento  $\sigma$  y la frecuencia de oscilación  $\omega$  frente al número de onda adimensional  $k$  para el caso de un chorro con número de Ohnesorge  $C = 0.1$ , con una carga relativa  $\gamma_o = 0.3$ , una permitividad relativa  $\beta = 10$  y un parámetro de relajación  $\alpha = 1.0$ . En ella se observa que existe una única rama que es inestable y que corresponde a valores de  $k$  comprendidos entre 0 y 1.16703. El resto de las ramas son todas ellas estables siendo algunas de ellas oscilatoriamente estables (ramas celeste y negras). Se puede observar la presencia de cuatro soluciones posibles asociadas a cada longitud de onda. En la figura 4.2 se dibujan los diagramas de velocidad asociados a cada una de las soluciones para  $k=0.5$ . Se puede observar que el único modo inestable es capilar (A) mientras el resto de los modos son estables; uno capilar (B) y 2 modos hidrodinámicos (C y D). Los

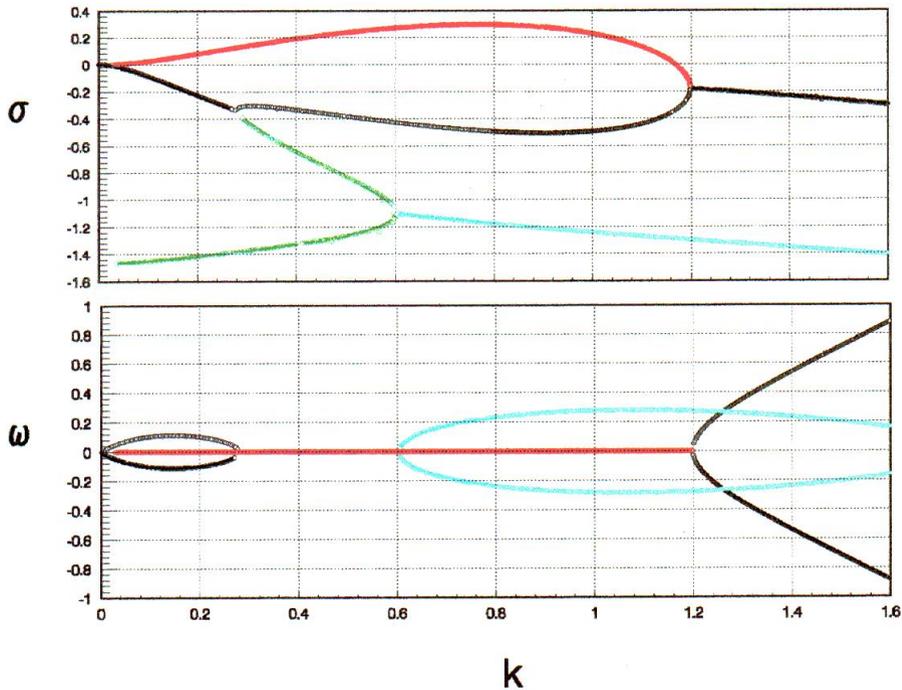


Figura 4.1: Solución de la ecuación de dispersión ( $\alpha = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $C = 0.1$  y  $\gamma_0 = 0.3$ )

modos hidrodinámicos, que son aquellos que presentan recirculaciones intensas siendo despreciable la capilaridad, presentan una tasa de amortiguación ( $\sigma \sim -1$ ) más modesta que los mismos en el caso conductor ( $\sigma \sim -8$ ) debido al efecto inductor del campo eléctrico. En las figuras 4.3 y 4.4 estudiamos la influencia de  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente, en el modo inestable comparándolos con los resultados del límite conductor para un chorro de viscosidad media ( $C=0.1$ ). Se puede observar que la influencia de  $\beta$  y  $\alpha$  en el factor de crecimiento es muy débil, mostrando un cierto grado estabilización para valores bajos de  $\beta$  y  $\alpha$ . Esta estabilización es tanto más evidente cuanto mayor son las longitudes de onda. El límite conductor es rápidamente recogido en

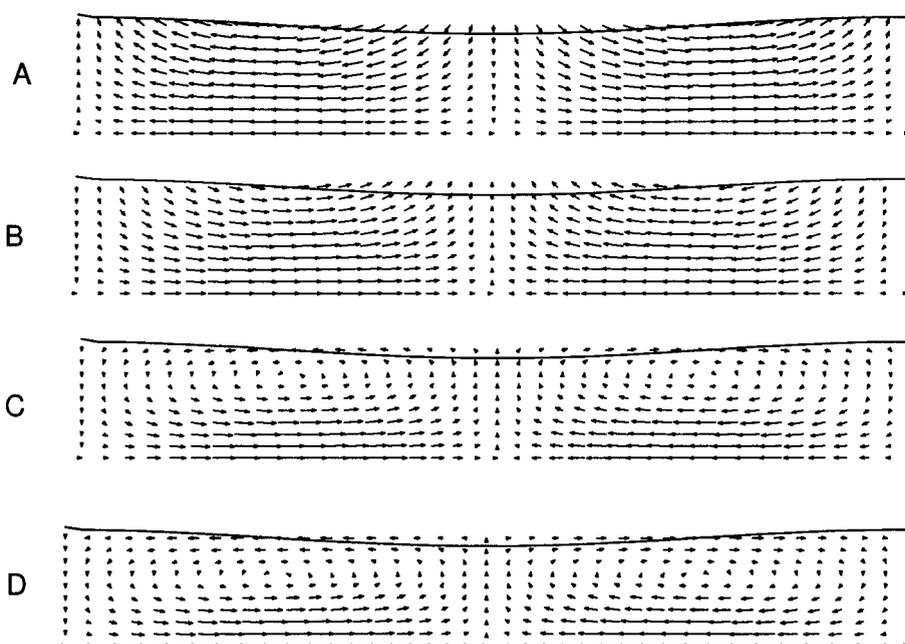


Figura 4.2: Diagramas velocidad para: A) Modo capilar inestable; B) Modo capilar estable; C y D) Modos hidrodinámicos ( $k=0.5$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $C = 0.1$  y  $\gamma_0=0.3$ )

cuanto aumenta la permitividad y/o el parámetro de relajación. La pequeña diferencia en el factor de crecimiento presente para valores de  $\beta$  y  $\alpha$  pequeños desaparece con la disminución de la viscosidad (ver figura 4.5), en este caso sea cual sea los valores de  $\beta$  y  $\alpha$  el comportamiento del chorro coincide con el de uno conductor. Este hecho se explica por la débil resistencia que presenta el chorro a la redistribución de cargas. En efecto, la redistribución, que en el caso de un chorro conductor se debe a su capacidad conductora, es en este caso debida a la presencia de un esfuerzo tangencial en la interfase que la baja viscosidad no permite soportar dando lugar a que las cargas se distribuyan buscando eliminar la presencia del esfuerzo tangencial.

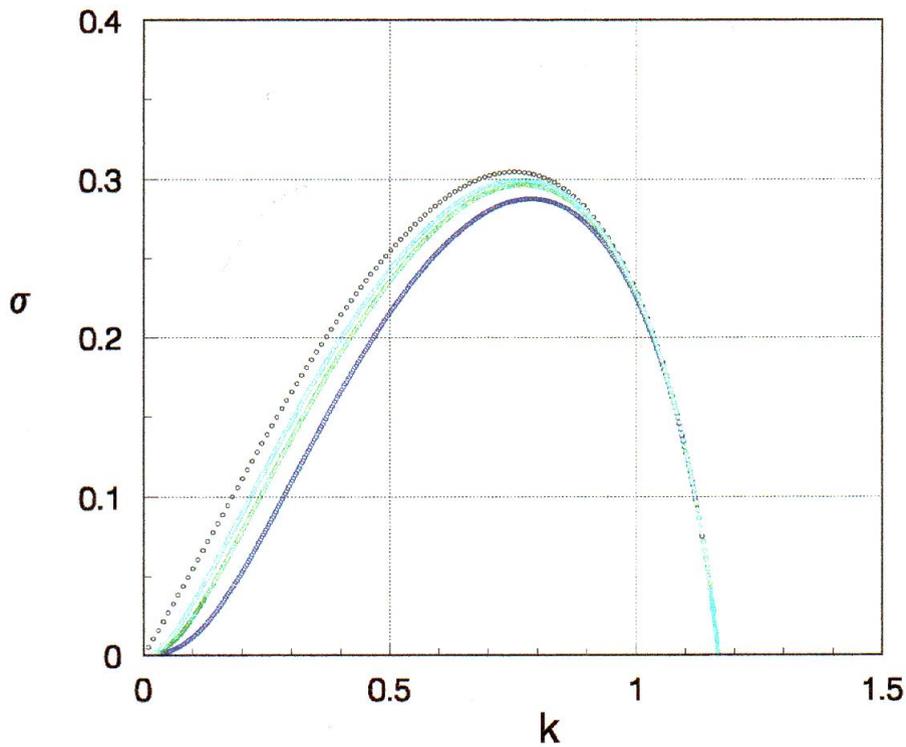


Figura 4.3: Factor de crecimiento  $\sigma$  frente al número de onda  $k$  para un chorro con  $C=0.1$  y  $\beta=2$  para diferentes valores del parámetro de relajación  $\alpha$ ;  $\circ$   $\alpha=1.0$   $\bullet$   $\alpha=5.0$ ,  $\circ$   $\alpha=10.0$   $\circ$  límite conductor

### 4.3 Aproximación unidireccional

En la presente sección estudiaremos con detalle la derivación de la ecuación unidireccional para la conservación de la carga, obviando la derivación detallada del resto de ecuaciones una vez que se obtuvieron en un epígrafe anterior (3.3) aunque se pondrán de manifiesto los cambios que se operan en las ecuaciones en el caso de conductividad finita. La ecuación de la conservación de

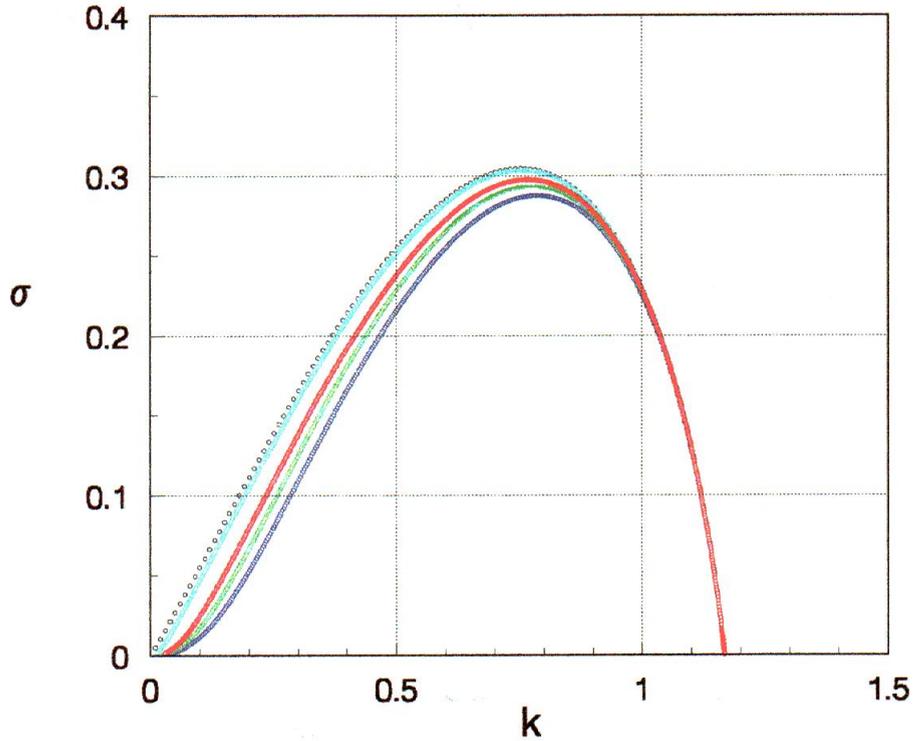


Figura 4.4: Factor de crecimiento  $\sigma$  frente al número de onda  $k$  para un chorro con  $C=0.1$  y  $\alpha=1$  para diferentes permitividades relativas  $\beta$ ;  $\circ$   $\beta=2.0$ ,  $\bullet$   $\beta=5.0$ ,  $\circ$   $\beta=10.0$ ,  $\circ$   $\beta=80.0$ ,  $\circ$  límite conductor

la carga en la superficie es

$$(\sigma_e)_t + \frac{F_z U + W}{1 + F_z^2} (\sigma_e)_z - \frac{\sigma_e}{1 + F_z^2} [U_r + F_z^2 W_z - F_z (U_z + W_r)] = \alpha \beta E_n^i. \quad (4.79)$$

Esta ecuación expresa que el aumento de carga en un elemento de superficie debe ser balanceada con aquella que se le suministra desde el seno del líquido por conducción y la que por convección desaparece del elemento de superficie. En vez de trabajar con la densidad de carga superficial  $\sigma_e$  resulta más conveniente trabajar con la variable  $\xi = \sqrt{1 + f_z^2} f \sigma_e$ , que representa la cantidad

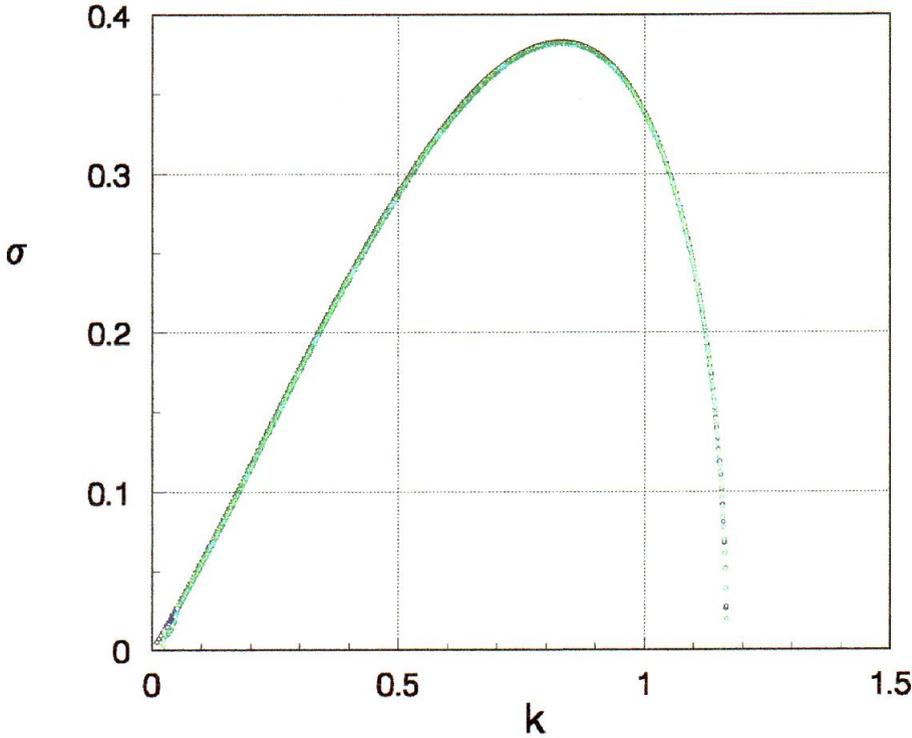


Figura 4.5: Factor de crecimiento  $\sigma$  frente al número de onda  $k$  para un chorro con  $C=0.0001$ .  $\circ$   $\beta = 2.0$  y  $\alpha=1.0$  ;  $\circ$   $\beta = 80.0$  y  $\alpha=1.0$  ;  $\circ$  límite conductor

de carga por unidad de longitud adimensional  $z$ . Si multiplicamos la ecuación (4.79) por  $\sqrt{1 + f_z^2}$  y hacemos uso de la condición cinemática (4.12), la ecuación de la continuidad de la carga en la nueva variable se escribe como

$$\xi_t + \frac{F_z U + W}{1 + F_z^2} \xi_z + \frac{\xi}{1 + F_z^2} \left[ -(1 + 2F_z^2 + F F_z^2 F_{zz}) \frac{U}{F} + \frac{F_z^3}{F} W \right] - \frac{\xi}{1 + F_z^2} (U_r - F_z W_r) = \alpha \beta F (1 + F_z^2)^{1/2} E_n^i. \quad (4.80)$$

Sustituyendo los desarrollos de la velocidad expresadas por las ecuaciones (3.21) en la ecuación anterior, la ecuación de conservación de la carga resulta

ser

$$\begin{aligned} \xi_t + \frac{\xi_z}{1 + f_z^2} \left( w_o - \frac{1}{2} f f_z w_{oz} + \frac{1}{2} f^2 w_2 \right) \\ + \frac{\xi}{1 + F_z^2} \left( w_{oz} + f_z^2 w_{oz} + \frac{1}{2} f^2 w_{2z} + f f_z w_2 + \frac{f_z^3}{f} w_o \right) + O(\lambda^{-4}) \\ = \alpha \beta f \sqrt{1 + f_z^2} e_n^i, \end{aligned} \quad (4.81)$$

en donde el orden de magnitud de la ecuación se establece a partir del orden de magnitud relativo de los términos de la expansión de la velocidad  $w_o$  y  $w_2$ . Para conocer el orden de magnitud relativo de  $w_2$  con respecto a  $w_o$  es necesario acudir a la ecuación de balance tangencial. Substituyendo los desarrollos de la velocidad en la ecuación de balance tangencial (4.15)

$$f^2 w_2 = 3 f f_z w_{oz} + \frac{1}{2} f^2 w_{ozz} + \frac{2 \gamma_o \xi e_t}{C \sqrt{1 + f_z^2}} + O(\lambda^{-3}), \quad (4.82)$$

obtenemos que  $w_2 \sim \lambda^{-2} w_o$ . Una vez establecido el orden de magnitud es posible truncar la ecuación de continuidad de la carga (4.81) consistentemente

$$\xi_t + (\xi w_o)_z + O(\lambda^{-3}) = \alpha \beta f \sqrt{1 + f_z^2} e_n^i. \quad (4.83)$$

La anterior ecuación recoge que la cantidad de carga contenida en una semi-longitud de onda permanece constante a lo largo del tiempo. Para comprobar esta aseveración integramos la ecuación (4.83) en todo el intervalo

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^\lambda \xi dz \right) = (\xi w_o)|_0 - (\xi w_o)|_\lambda + \alpha \beta \int_0^\lambda f \sqrt{1 + f_z^2} e_n^i = 0 \quad (4.84)$$

La ecuación unidireccional de cantidad de movimiento axial viene modificada por la aparición de un nuevo término asociado al esfuerzo tangencial de origen eléctrico

$$f^2 (w_{ot} + w_o w_{oz}) = -f^2 (p_{ce})_z + 3C (f^2 w_{oz}) + \frac{4 \gamma_o \xi e_t}{\sqrt{1 + f_z^2}}, \quad (4.85)$$

y que tiende, como la viscosidad, a frenar el movimiento fluido. La expresión del término de presión capilar-eléctrica viene dado por

$$p_{ce} = \frac{1}{(1 + f_z^2)^{1/2}} \left( \frac{1}{f} - \frac{f_{zz}}{1 + f_z^2} \right) - \gamma_o [(e_n^o)^2 - \beta (e_n^i)^2 + (\beta - 1) (e_t)^2]. \quad (4.86)$$

La ecuación de continuidad de la masa no sufre variación en este límite

$$(f^2)_t + (f^2 w_o)_z = 0 \quad (4.87)$$

## 4.4 Capa límite y el campo eléctrico tangencial

El efecto de un esfuerzo tangencial en la dinámica del chorro depende en gran medida de la viscosidad del líquido eyectado. La aparición de un campo tangencial en la interfase causado por la limitada conductividad del líquido puede inducir dudas sobre la validez del empleo del modelo unidireccional de Lee y de su capacidad para aproximar la realidad. Esta duda está tanto más acrecentada cuanto menor es la viscosidad. Un análisis como el efectuado por García (1998) se hace necesario. García (1998), a partir de los perfiles de la velocidad axial obtenidos del análisis lineal, dibuja, para diversos valores del número de Ohnesorge  $C$ , el tanto por ciento que se aleja el perfil real de uno uniforme tal como el que el modelo de Lee emplea. Procediendo de la misma manera, en la figura 4.4 mostramos la dependencia radial de la velocidad axial adimensionalizada con la velocidad media en la rebanada para diversos valores del número de Ohnesorge  $C$ . El chorro presenta como permitividad relativa  $\beta = 10$ , un número de Bond eléctrico  $\gamma_o = 0.3$  y un factor de relajación de  $\alpha = 1.0$ ; la perturbación tiene un número de onda  $k=0.5$ . Podemos observar que, como sospechábamos, cuando la viscosidad es baja  $C \leq 10^{-2}$  los perfiles se asemejan a la velocidad media salvo en la vecindad de la interfase donde la viscosidad no puede aguantar la presencia del esfuerzo tangencial si no es con la creación de una capa límite estrecha. Los errores son, en este caso, del orden del 30 % localizados siempre en la interfase. En los chorros con valores del número de Ohnesorge de moderado a alto,  $C > 10^{-2}$ , los perfiles reales se aproximan bien por un perfil plano manteniéndose el error en torno al 9 % y disminuyendo éste a medida que la viscosidad crece por lo que es plausible utilizar el modelo de Lee en la simulación de la rotura para estos valores de la viscosidad. A la luz de lo expuesto anteriormente, el modelo de Lee no es capaz de simular la dinámica de chorros de viscosidad

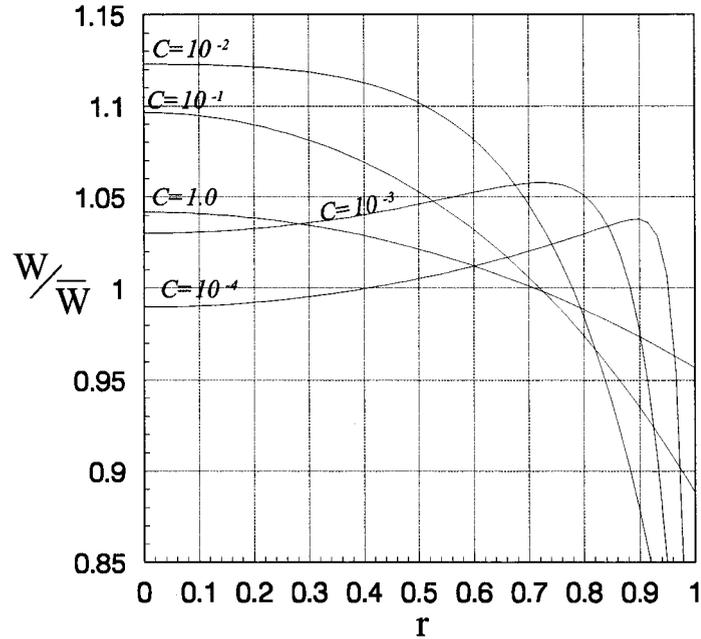


Figura 4.6: Perfiles de velocidades axiales adimensionalizadas con la velocidad media para diversos números de Ohnesorge ( $C = 10^{-4}$ ,  $C = 10^{-3}$ ,  $C = 10^{-2}$ ,  $C = 10^{-1}$  y  $C = 1.0$ ). El chorro presenta como características: permitividad relativa  $\beta = 10$ , número de Bond eléctrico  $\gamma_o = 0.3$  y parámetro de relajación de  $\alpha = 1.0$ . La perturbación tiene como número de onda  $k=0.5$

baja. Como muestra la figura 4.5, la igualdad del factor de crecimiento apunta a que el papel jugado por el campo tangencial y la capa límite se circunscribe a reordenar las cargas en la interfase en un tiempo muy corto, apantallando el campo interior que resulta ser despreciable. Ello induce a considerar que el modelo de Lee para el caso conductor puede ser más apropiado para simular chorros de viscosidad despreciable sean cuales sean los valores del parámetro de relajación y de la permitividad relativa. Para corroborar esta sospecha, inducida por el análisis lineal, no cabe más solución que resolver el caso tridimensional.

## 4.5 Resolución del problema

Volvemos a formular, a semejanza del capítulo 3, el problema en función del sección de la rodaja  $s = f^2$  y de los caudales que atraviesan dichas rodajas  $q = f^2 w_o$ , manteniendo inalterada la utilización de la variable  $\xi$ . Es conveniente reducir el número de variables para lo cual eliminamos el campo interior  $e_n^i$  en función de  $\xi$  y  $e_n^o$  de la expresión de la presión capilar-eléctrica (4.86) y de la ecuación de la conservación del carga (4.83) escribiéndose en este caso las ecuaciones como

$$s_t + q_z = 0, \quad (4.88)$$

$$q_t + \left(\frac{q^2}{s}\right)_z = -s(p_{ce})_z + 3C \left[ s \left(\frac{q}{s}\right)_z \right]_z + \frac{8\gamma_o \xi e_t s^{1/2}}{\sqrt{4s + s_z^2}} \quad (4.89)$$

$$\xi_t + \left(\xi \frac{q}{s}\right)_z + \alpha \xi = \alpha \frac{\sqrt{4s + s_z^2}}{2} e_n^o, \quad (4.90)$$

y

$$p_{ce} = \frac{2}{\sqrt{4s + s_z^2}} \left( 1 - \frac{2ss_{zz} - s_z^2}{4s + s_z^2} \right) - \gamma_o \left[ \frac{\beta - 1}{\beta} (e_n^o)^2 + \frac{4}{\beta} \frac{\xi e_n^o}{\sqrt{4s + s_z^2}} - \frac{4}{\beta} \frac{\xi^2}{4s + s_z^2} + (\beta - 1)e_t^2 \right] \quad (4.91)$$

Denominamos como *problema fluidomecánico* al calculo de la evolución temporal de la posición de la interfase, la velocidad axial y la carga depositada en la interfase una vez conocida la distribución de las fuerzas actuantes en el chorro en un instante dado y *problema eléctrico* a la determinación de los esfuerzos eléctricos actuantes en la superficie conocidas la distribución de carga y la posición de la interfase.

### 4.5.1 Problema fluidomecánico. Método de Fourier

Este método de resolución se beneficia de la simetría y de la antisimetría espacial de las variables  $s$ ,  $q$  y  $\xi$ . Las variables viene expandidas en series de Fourier en el espacio con lo que la dependencia temporal recae en las

amplitudes de los diferentes modos

$$s(z, t) = \sum_{n=0}^{Nv} a_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{\lambda} z\right),$$

$$q(z, t) = \sum_{n=1}^{Nv} b_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\lambda} z\right)$$

y

$$\xi(z, t) = \sum_{n=0}^{Nv} c_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{\lambda} z\right). \quad (4.92)$$

Sustituyendo los desarrollos en las ecuaciones del problema (4.88–4.90) y ponderando adecuadamente las ecuaciones (multiplicación de la primera y tercera ecuación por  $\cos(m\pi z/\lambda)$  y la segunda por  $\operatorname{sen}(m\pi z/\lambda)$  e integración entre 0 y  $\lambda$ ) es posible escribir un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para las amplitudes de los modos

$$\frac{d a_n}{d t} = -b_n \left(\frac{n\pi}{\lambda}\right), \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} \frac{d b_n}{d t} = & -3C \left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2 b_n + \frac{2}{\lambda} \left(\frac{n\pi}{\lambda}\right) \int_0^\lambda \left(\frac{q^2}{s} + s p_{ce} + 3C \frac{q}{s} s_z\right) \cos\left(\frac{n\pi}{\lambda} z\right) dz \\ & + \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda \left(s_z p_{ce} + 8\gamma_o \frac{\xi s^{1/2} e_t}{\sqrt{4s + s_z^2}}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\lambda} z\right) dz \end{aligned} \quad (4.94)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d c_n}{d t} = & -\alpha c_n + \frac{2}{\lambda} \alpha \int_0^\lambda \frac{e_n^o \sqrt{4s + s_z^2}}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{\lambda} z\right) dz \\ & - \frac{2}{\lambda} \left(\frac{n\pi}{\lambda}\right) \int_0^\lambda \frac{\xi q}{s} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\lambda} z\right) dz, \end{aligned} \quad (4.95)$$

en donde las condiciones de contorno y la simetría han permitido que, mediante integración por partes, se haya reducido el orden de las derivadas espaciales tanto para  $s$  como para  $q$ . Es esta reducción y la idoneidad de realizar desarrollos en serie de Fourier de las variables las que justifican la robustez numérica del método y el bajo número de elementos necesarios para alcanzar una solución suficientemente aproximada.

### 4.5.2 Resolución del campo eléctrico

#### Método de Fourier–Bessel

Como describimos en el capítulo anterior, este método se basa en las soluciones en variables separadas posibles cuando el recinto de integración es perfectamente regular. Los desarrollos sugeridos por dicho método y las condiciones de contorno son para el caso del potencial exterior

$$\phi^o(r, z) = \mathcal{A}_o \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \sum_{n=1}^N \mathcal{A}_n K_o\left(\frac{n\pi}{\lambda} r\right) \cos\left(\frac{n\pi}{\lambda} z\right), \quad (4.96)$$

desarrollo válido siempre que  $b \gg 1$ . Para el potencial interior las condición de regularidad en el eje determina que el desarrollo sea de la forma

$$\phi^i(r, z) = \mathcal{B}_o + \sum_{n=1}^N \mathcal{B}_n I_o\left(\frac{n\pi}{\lambda} r\right) \cos\left(\frac{n\pi}{\lambda} z\right). \quad (4.97)$$

La determinación de las constantes  $\mathcal{A}_o, \dots, \mathcal{A}_N$  y  $\mathcal{B}_o, \dots, \mathcal{B}_N$  se realiza imponiendo las condiciones de contorno en la interfase (4.6)

$$\mathcal{A}_o \ln\left(\frac{f}{b}\right) + \sum_{n=1}^N \mathcal{A}_n K_o\left(\frac{n\pi}{\lambda} f\right) \cos\left(\frac{n\pi}{\lambda} z\right) = -\mathcal{B}_o + \sum_{n=1}^N \mathcal{B}_n I_o\left(\frac{n\pi}{\lambda} f\right) \cos\left(\frac{n\pi}{\lambda} z\right) \quad (4.98)$$

y (4.5)

$$\begin{aligned} & -\mathcal{A}_o \frac{1}{f} + \sum_{n=1}^N \mathcal{A}_n \left[ K_1\left(\frac{n\pi}{\lambda} f\right) \cos\left(\frac{n\pi}{\lambda} z\right) - f_z K_o\left(\frac{n\pi}{\lambda} f\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\lambda} z\right) \right] \left(\frac{n\pi}{\lambda}\right) \\ & + \beta \left\{ \sum_{n=1}^N \mathcal{B}_n \left[ I_1\left(\frac{n\pi}{\lambda} f\right) \cos\left(\frac{n\pi}{\lambda} z\right) + f_z I_o\left(\frac{n\pi}{\lambda} f\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\lambda} z\right) \right] \left(\frac{n\pi}{\lambda}\right) \right\} = \frac{\xi}{f}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Para determinar las  $2N + 2$  incógnitas  $\mathcal{A}_0, \dots, \mathcal{A}_N, \mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_N$  formamos un sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{pmatrix} C_{00}^1 & C_{0m}^1 & 0 & B_{0m}^1 \\ C_{n0}^1 & C_{nm}^1 & 0 & B_{nm}^1 \\ \hline C_{00}^2 & C_{0m}^2 & -\lambda & B_{0m}^2 \\ C_{n0}^2 & C_{nm}^2 & 0 & B_{nm}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0 \\ \mathcal{A}_m \\ \mathcal{B}_0 \\ \mathcal{B}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_0 \\ D_N \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.100)$$

a partir de la proyección del error. Esta proyección del error consiste en anular la integral del error cometido en el cumplimiento de las condiciones de contorno (4.98) y (4.99) sopesando el error con ciertas funciones. Como funciones de peso para la condición de contorno (4.99) se han elegido aquellas que conforman el campo normal exterior, por lo que los coeficientes del sistema de ecuaciones algebraico (4.100) derivados de esta condición de contorno (4.99) (referenciada con el superíndice 1) son

$$\begin{aligned} C_{00}^1 &= - \int_0^\lambda \frac{1}{f^2} dz \\ C_{m0}^1 &= - \int_0^\lambda \frac{1}{f} \left[ K_1 \left( \frac{n\pi}{\lambda} f \right) \cos \left( \frac{m\pi}{\lambda} z \right) - f_z K_o \left( \frac{m\pi}{\lambda} f \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi}{\lambda} z \right) \right] dz \\ C_{0m}^1 &= C_{m0}^1 \\ C_{nm}^1 &= \left( \frac{m\pi}{\lambda} \right) \int_0^\lambda \left[ K_1 \left( \frac{m\pi}{\lambda} f \right) \cos \left( \frac{m\pi}{\lambda} z \right) - f_z K_o \left( \frac{m\pi}{\lambda} f \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi}{\lambda} z \right) \right] \\ &\quad \left( \frac{n\pi}{\lambda} \right) \left[ K_1 \left( \frac{n\pi}{\lambda} f \right) \cos \left( \frac{n\pi}{\lambda} z \right) - f_z K_o \left( \frac{n\pi}{\lambda} f \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{\lambda} z \right) \right] dz \\ B_{0m}^1 &= \beta \left( \frac{m\pi}{\lambda} \right) \int_0^\lambda \left( \frac{1}{f} \right) \left[ I_1 \left( \frac{m\pi}{\lambda} f \right) \cos \left( \frac{m\pi}{\lambda} z \right) + f_z I_o \left( \frac{m\pi}{\lambda} f \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi}{\lambda} z \right) \right] dz \\ B_{nm}^1 &= \beta \left( \frac{m\pi}{\lambda} \right) \int_0^\lambda \left[ I_1 \left( \frac{m\pi}{\lambda} f \right) \cos \left( \frac{m\pi}{\lambda} z \right) + f_z I_o \left( \frac{m\pi}{\lambda} f \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi}{\lambda} z \right) \right] \\ &\quad \left( \frac{n\pi}{\lambda} \right) \left[ K_1 \left( \frac{n\pi}{\lambda} f \right) \cos \left( \frac{n\pi}{\lambda} z \right) - f_z K_o \left( \frac{n\pi}{\lambda} f \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{\lambda} z \right) \right] dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_0 &= \int_0^\lambda \frac{\xi}{f^2} dz \\
D_n &= \int_0^\lambda \frac{\xi}{f} \left( \frac{n\pi}{\lambda} \right) \left[ K_1 \left( \frac{n\pi}{\lambda} f \right) \cos \left( \frac{n\pi}{\lambda} z \right) - f_z K_0 \left( \frac{n\pi}{\lambda} f \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{\lambda} z \right) \right] dz.
\end{aligned} \tag{4.101}$$

Los términos del sistema de ecuaciones, derivados de la utilización del potencial interior como función de peso para la condición de contorno (4.98) (referenciada por el superíndice 2), son

$$\begin{aligned}
C_{00}^2 &= - \int_0^\lambda \ln \left( \frac{b}{f} \right) dz \\
C_{0m}^2 &= \int_0^\lambda K_0 \left( \frac{m\pi}{\lambda} f \right) \cos \left( \frac{m\pi}{\lambda} z \right) dz \\
C_{n0}^2 &= \int_0^\lambda \ln \left( \frac{f}{b} \right) I_0 \left( \frac{n\pi}{\lambda} f \right) \cos \left( \frac{n\pi}{\lambda} z \right) dz \\
C_{nm}^2 &= \int_0^\lambda K_0 \left( \frac{m\pi}{\lambda} f \right) \cos \left( \frac{m\pi}{\lambda} z \right) I_0 \left( \frac{n\pi}{\lambda} f \right) \cos \left( \frac{n\pi}{\lambda} z \right) dz \\
B_{0m}^2 &= - \int_0^\lambda I_0 \left( \frac{m\pi}{\lambda} f \right) \cos \left( \frac{m\pi}{\lambda} z \right) dz \\
B_{m0}^2 &= B_{0m}^2 \\
B_{nm}^2 &= - \int_0^\lambda I_0 \left( \frac{m\pi}{\lambda} f \right) \cos \left( \frac{m\pi}{\lambda} z \right) I_0 \left( \frac{n\pi}{\lambda} f \right) \cos \left( \frac{n\pi}{\lambda} z \right) dz.
\end{aligned} \tag{4.102}$$

Como discutimos en la versión conductora de este método (ver epígrafe 3.5.2) este método es válido sólo hasta un cierto grado de deformación de la entrefase aunque en este caso como variable de control de validez del método utilizamos el error cometido en el cumplimiento la condición de contorno (4.5). Cuando el error alcanza un cierto valor (1 % se usa en los resultados que posteriormente se describirán) se cambia a un método alternativo que a continuación describimos.

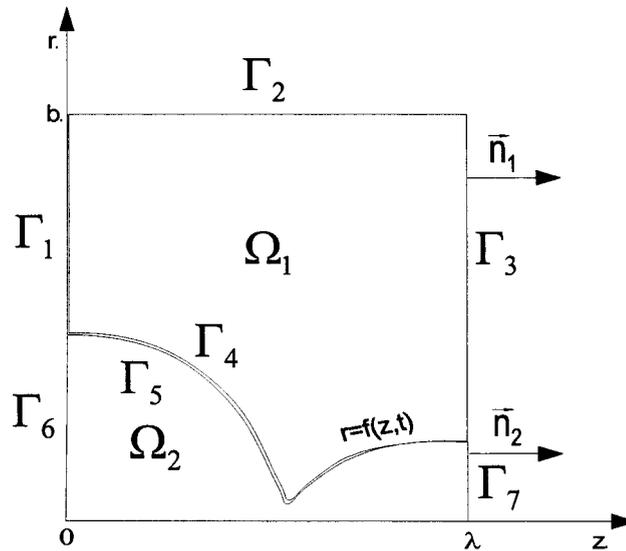


Figura 4.7: Recintos de integración del Método de Fourier-Elementos de contorno

### Método de Fourier-Elementos de contorno

En el presente epígrafe presentaremos el método de Fourier-elementos de contorno en el caso en que el campo interior debe ser contabilizado. Los detalles del método que describimos en el epígrafe 3.5.2 no serán repetidos aquí, centrandonos en los detalles propios de este problema. Como se observa en la figura 4.7, el campo eléctrico exterior viene definido en el dominio de integración  $\Omega_1$  limitado por los contornos  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$  siendo  $\mathbf{n}_1$  la normal unitaria exterior a dicho contorno. El campo eléctrico interior se define en el dominio  $\Omega_2$  limitado por los contornos  $\Gamma_5, \dots, \Gamma_7$  siendo la normal unitaria exterior a dicho contorno  $\mathbf{n}_2$ . Sabemos que la ecuación de Laplace es transformada en este método en una ecuación integral en función de los valores presentes en el contorno (Brebbia y Dominguez, 1989) que para el potencial

exterior podemos escribir como

$$\begin{aligned}
& c_j \phi_j^o + \int_{\Gamma_1} \phi^o \left( \frac{\partial \phi}{\partial n_1} \right)^* r d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \phi^o \left( \frac{\partial \phi}{\partial n_1} \right)^* r d\Gamma_2 \\
& + \int_{\Gamma_3} \phi^o \left( \frac{\partial \phi}{\partial n_1} \right)^* r d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_4} \phi^o \left( \frac{\partial \phi}{\partial n_1} \right)^* r d\Gamma_4 \\
& = \int_{\Gamma_1} \phi^* \left( \frac{\partial \phi^o}{\partial n_1} \right) r d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \phi^* \left( \frac{\partial \phi^o}{\partial n_1} \right) r d\Gamma_2 \\
& + \int_{\Gamma_3} \phi^* \left( \frac{\partial \phi^o}{\partial n_1} \right) r d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_4} \phi^* \left( \frac{\partial \phi^o}{\partial n_1} \right) r d\Gamma_4,
\end{aligned} \tag{4.103}$$

mientras que para el interior resulta ser

$$\begin{aligned}
& c_j \phi_j^i + \int_{\Gamma_5} \phi^i \left( \frac{\partial \phi}{\partial n_2} \right)^* r d\Gamma_5 + \int_{\Gamma_6} \phi^i \left( \frac{\partial \phi}{\partial n_2} \right)^* r d\Gamma_6 + \int_{\Gamma_7} \phi^i \left( \frac{\partial \phi}{\partial n_2} \right)^* r d\Gamma_7 \\
& = \int_{\Gamma_5} \phi^* \left( \frac{\partial \phi^i}{\partial n_2} \right) r d\Gamma_5 + \int_{\Gamma_6} \phi^* \left( \frac{\partial \phi^i}{\partial n_2} \right) r d\Gamma_6 + \int_{\Gamma_7} \phi^* \left( \frac{\partial \phi^i}{\partial n_2} \right) r d\Gamma_7,
\end{aligned} \tag{4.104}$$

en donde  $(\partial \phi)/(\partial n)$  es el gradiente del potencial en la dirección normal al contorno,  $c_j$  una constante que depende del punto de aplicación de la Delta de Dirac,  $j$  es el punto del contorno donde la delta de Dirac se aplica y el superíndice  $*$  se refiere a la solución fundamental que es conocida. La solución fundamental es común para ambos dominios de integración y depende únicamente de la distancia existente entre el punto de aplicación del pulso  $j$  y el punto de integración del contorno. Las ecuaciones (4.103) y (4.104) se simplifican por efecto de las condiciones de contorno de simetría en  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_3$ ,  $\Gamma_6$  y  $\Gamma_7$  y la condición en el electrodo de electrificación correspondiente al contorno  $\Gamma_2$

$$\begin{aligned}
& c_j \phi_j^o + \int_{\Gamma_1} \phi^o \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial n_1} \right) r d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_3} \phi^o \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial n_1} \right) r d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_4} \phi^o \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial n_1} \right) r d\Gamma_4 \\
& = \int_{\Gamma_2} \phi^* \left( \frac{\partial \phi^o}{\partial n_1} \right) r d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_4} \phi^* \left( \frac{\partial \phi^o}{\partial n_1} \right) r d\Gamma_4
\end{aligned} \tag{4.105}$$

y

$$\begin{aligned}
c_j \phi_j^i + \int_{\Gamma_5} \phi^i \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial n_2} \right) r d\Gamma_5 + \int_{\Gamma_6} \phi^i \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial n_2} \right) r d\Gamma_6 + \int_{\Gamma_7} \phi^i \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial n_2} \right) r d\Gamma_7 \\
= \int_{\Gamma_6} \phi^* \left( \frac{\partial \phi^i}{\partial n_2} \right) r d\Gamma_6.
\end{aligned} \tag{4.106}$$

El método se completa con la discretización de las incógnitas. Habitualmente se discretiza el contorno en elementos, constando dicho elemento de nodos. El número de nodos presente en un elemento da lugar al orden de aproximación de la distribución de los valores de las variables en dicho elemento. Los valores de las variables en los nodos son las incógnitas a calcular y de ellos depende la forma de la distribución. En nuestro caso, esta clase de discretización en elementos ha sido la elegida para los contornos  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_3$ ,  $\Gamma_6$  y  $\Gamma_7$ . Los elementos elegidos son cuadráticos, es decir, se aproximan los valores de las variables en el elemento por un perfil parabólico. Los valores del potencial en los tres nodos de los que consta cada elemento fijan la forma del perfil. La discretización de las variables en el contorno formado por la interfase ( $\Gamma_4$  y  $\Gamma_5$ ) viene guiada por la simetría axial que presenta el problema, aproximando las variables  $\phi$  y  $(\partial\phi)/(\partial n)$  por sus series de Fourier

$$\phi^o|_{r=f(z)} = \sum_{k=0}^{NFE} a_k^o \cos\left(\frac{k\pi}{\lambda}z\right) \tag{4.107}$$

$$\phi^i|_{r=f(z)} = \sum_{k=1}^{NE2} a_k^i \cos\left(\frac{k\pi}{\lambda}z\right) \tag{4.108}$$

y

$$\left. \frac{\partial \phi^o}{\partial n_1} \right|_{r=f(z)} = \sum_{k=0}^{NFE} b_k^o \cos\left(\frac{k\pi}{\lambda}z\right) \tag{4.109}$$

$$\left. \frac{\partial \phi^o}{\partial n_1} \right|_{r=b} = \sum_{k=0}^{NFE} c_k^o \cos\left(\frac{k\pi}{\lambda}z\right) \tag{4.110}$$

$$\left. \frac{\partial \phi^i}{\partial n_2} \right|_{r=f(z)} = \sum_{k=0}^{NFE} b_k^i \cos\left(\frac{k\pi}{\lambda}z\right), \tag{4.111}$$

en donde  $NFE$  es el grado de discretización de las variables, que se ha elegido por comodidad único. Las ecuaciones (4.105) y (4.106) se transforman con la discretizaciones referidas en

$$c_j \phi_j^o + \mathbf{H}_j^1 \cdot \Phi_1 + \mathbf{H}_j^3 \cdot \Phi_3 + \mathbf{H}_j^4 \cdot \mathbf{a}^o - \mathbf{G}_j^2 \cdot \mathbf{c}^o - \mathbf{G}_j^4 \cdot \mathbf{b}^o = 0 \quad (4.112)$$

y

$$c_j \phi_j^i + \mathbf{H}_j^5 \cdot \Phi_5 + \mathbf{H}_j^7 \cdot \Phi_7 + \mathbf{H}_j^6 \cdot \mathbf{a}^i - \mathbf{G}_j^5 \cdot \mathbf{b}^i = 0 \quad (4.113)$$

respectivamente, donde  $\Phi_m$  es el vector que agrupa los valores del potencial en los nodos pertenecientes al contorno  $\Gamma_m$ , siendo  $m$  igual a 1,3,5 y 7;  $\mathbf{a}^o, \mathbf{b}^o, \mathbf{c}^o$  y  $\mathbf{a}^i, \mathbf{b}^i$  son los vectores que agrupan las amplitudes del potencial y del gradiente normal del potencial en los contornos  $\Gamma_2, \Gamma_4$  y  $\Gamma_6$  respectivamente, y por último  $\mathbf{H}_j^m$  y  $\mathbf{G}_j^m$  son los vectores de coeficientes que provienen de la integración de la solución fundamental siendo  $j$  el punto donde se aplica el pulso y  $m$  indica el contorno sobre el cual se ha integrado. Detalles del calculo de estos vectores de coeficientes pueden encontrarse en el epígrafe 3.5.2. Si el número de elementos en los que se discretiza un contorno cuyas incógnitas son los potenciales es de  $NE1$  y  $NE2$  para el problema exterior e interior respectivamente, el número de incógnitas presentes en las ecuaciones (4.112) y (4.113) es de  $2(2NE1 - 1) + 3NFE$  y  $2(2NE2 - 1) + 2NFE$  respectivamente. El resto de ecuaciones necesarias para completar el sistema de ecuaciones que permite la resolución de las incógnitas se obtiene de la colocación del pulso en tantos puntos del contorno como incógnitas aparecen. Los puntos elegidos para colocar la delta de Dirac son en el caso del problema exterior los nodos de los contornos  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_3$  ( $2(2NE1 - 1)$  ecuaciones),  $NFE$  puntos en el contorno  $\Gamma_2$  y  $NFE$  puntos en el contorno  $\Gamma_4$  lo cual contabiliza un total de  $2(2NE1 - 1) + 2NFE$  ecuaciones. Para el problema interior seguimos la misma tónica obteniendo  $2(2NE2 - 1) + NFE$  ecuaciones debidas a la colocación de pulso en los  $2(2NE2 - 1)$  nodos de los contorno  $\Gamma_5$  y  $\Gamma_7$

y en NFE puntos del contorno  $\Gamma_6$ . El sistema de ecuaciones resultante es

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}_1^1 & \mathbf{H}_1^3 & \mathbf{H}_1^4 & -\mathbf{G}_1^2 & -\mathbf{G}_1^4 \\ \mathbf{H}_2^1 & \mathbf{H}_2^3 & \mathbf{H}_2^4 & -\mathbf{G}_2^2 & -\mathbf{G}_2^4 \\ \mathbf{H}_3^1 & \hat{\mathbf{H}}_3^3 & \mathbf{H}_3^4 & -\mathbf{G}_3^2 & -\mathbf{G}_3^4 \\ \mathbf{H}_4^1 & \mathbf{H}_4^3 & \hat{\mathbf{H}}_4^4 & -\mathbf{G}_4^2 & -\mathbf{G}_4^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_3 \\ \mathbf{a}^o \\ \mathbf{c}^o \\ \mathbf{b}^o \end{bmatrix} = 0 \quad (4.114)$$

para el problema exterior, en donde  $\mathbf{H}_m^n$  y  $\mathbf{G}_m^n$  es la matriz formada por los coeficientes provenientes de la integración de la solución fundamental indicando  $n$  el contorno sobre el cual se integra y  $m$  el contorno en el que se sitúa el pulso; el símbolo "hat" indica que se ha introducido el valor de la constante  $c$  en el interior de la matriz. Del mismo modo el problema interior resulta ser

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}_5^5 & \mathbf{H}_5^7 & \mathbf{H}_5^6 & -\mathbf{G}_5^6 \\ \mathbf{H}_6^5 & \mathbf{H}_6^7 & \hat{\mathbf{H}}_6^6 & -\mathbf{G}_6^6 \\ \mathbf{H}_7^5 & \hat{\mathbf{H}}_7^7 & \mathbf{H}_7^5 & -\mathbf{G}_7^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_5 \\ \Phi_7 \\ \mathbf{a}^i \\ \mathbf{b}^i \end{bmatrix} = 0. \quad (4.115)$$

Hasta ahora se ha tratado el campo exterior e interior por separado lo que ha dado lugar a que el número de incógnitas sea mayor que el número total de ecuaciones. La discrepancia entre ambos números es de  $2NFE$ . Esta discrepancia se subsana con las condiciones de contorno en la interfase que permiten conectar el campo interior y exterior

$$\phi^o|_{r=f} = \phi^i|_{r=f} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}^o = \mathbf{a}^i \quad (4.116)$$

$$e_n^o - \beta e_n^i = \frac{\xi}{f\sqrt{1+f_z^2}} \Rightarrow \frac{\partial \phi^o}{\partial n_1} + \beta \frac{\partial \phi^i}{\partial n_2} = \frac{\xi}{f\sqrt{1+f_z^2}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b}^i = \frac{1}{\beta} (\mathbf{Y} - \mathbf{b}^o) \quad (4.117)$$

donde  $\mathbf{Y}$  es el vector formado por las amplitudes de la transformada de Fourier de la función  $\xi/(f\sqrt{1+f_z^2})$ . Substituyendo (4.116) y (4.117) en los sistemas (4.114) y (4.115) obtenemos un sistema de ecuaciones completo y

acoplado

$$\begin{bmatrix}
 \widehat{H}_1^1 & H_1^3 & -G_1^2 & H_1^4 & -G_1^4 & 0 & 0 \\
 H_2^1 & H_2^3 & -G_2^2 & H_2^4 & -G_2^4 & 0 & 0 \\
 H_3^1 & \widehat{H}_3^3 & -G_3^2 & H_3^4 & -G_3^4 & 0 & 0 \\
 H_4^1 & H_4^3 & -G_4^2 & \widehat{H}_4^4 & -G_4^4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & H_5^6 & \frac{1}{\beta} G_5^6 & \widehat{H}_5^5 & H_5^7 \\
 0 & 0 & 0 & \widehat{H}_6^6 & \frac{1}{\beta} G_6^6 & H_6^5 & H_6^7 \\
 0 & 0 & 0 & H_7^5 & \frac{1}{\beta} G_7^5 & H_7^5 & \widehat{H}_7^7
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \Phi_1 \\
 \Phi_3 \\
 c^o \\
 a^o \\
 b^o \\
 \Phi_5 \\
 \Phi_7
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -\frac{1}{\beta} G_5^6 \cdot Y \\
 -\frac{1}{\beta} G_6^6 \cdot Y \\
 -\frac{1}{\beta} G_7^6 \cdot Y
 \end{bmatrix}
 \quad (4.118)$$

## 4.6 Resultados

En los resultados obtenidos se ha empleado el método de Fourier para el problema fluidodinámico integrando la dependencia temporal con un método denominado de extrapolación semi-implícita descrito en Press *et al.* (1987). En la resolución del problema eléctrico se ha empleado el método de Fourier-Bessel cambiando al método de Fourier-Elementos de Contorno cuando el grado de deformación de la interfase es elevado. Como criterio de incremento de la discretización y de cambio de método de resolución del campo eléctrico se ha empleado el grado de cumplimiento de la condición de contorno eléctrica de salto de campo normal. La resolución de campo eléctrico con el método de Fourier-Bessel se comienza con un grado de discretización de  $N = 4$  donde  $N$  es el número de términos de los que consta la expansión tanto del potencial interior como el exterior. El grado de discretización  $N$  se aumenta en 2 si el nivel de error alcanza un 1% cambiando definitivamente de método cuando  $N$  alcanza un valor de 16 y el error excede 1%. La discretización utilizada en el método de Fourier-Elementos de contorno ha sido de  $NE1=18$ ,  $NE2=6$  y  $NFE = 55$ .

Los nodos, teniendo en cuenta que nuestro interés se centra en conocer en detalle la solución en la interfase, se concentran en la cercanía de la interfase para distanciarse a medida que se alejan de la interfase. La regla

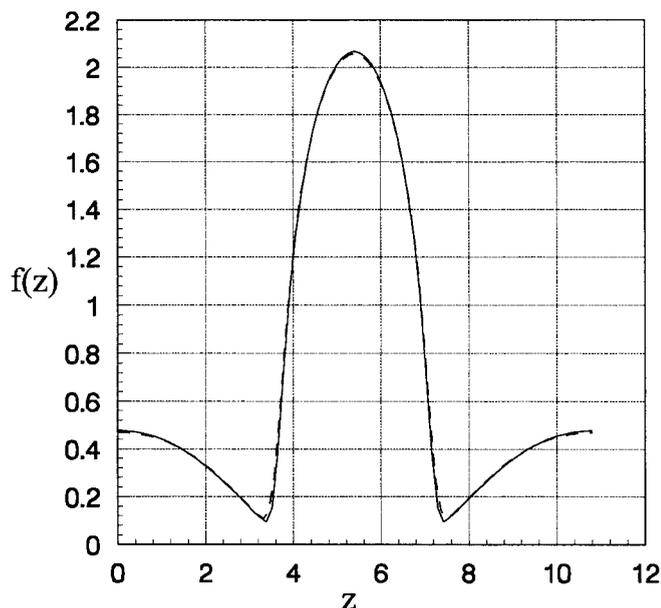


Figura 4.8: Comparación de la posición de la interfase  $f$  en función de la coordenada axial  $z$  entre el límite conductor y un chorro no conductor ( $\beta = 10$  y  $\alpha = 100$ ) para un chorro con  $\lambda = 4.5$ ,  $\gamma_o = 0.3$  y  $C = 0.05$ .

seguida es, en todos los casos, la de incrementar la distancia de un nodo con respecto al siguiente en un 30 %. Los puntos pertenecientes a la interfase  $\Gamma_4$  y  $\Gamma_6$  en donde se aplica el pulso están equiespaciados. La elección del nivel de discretización referido ha sido guiada, como es usual, por el equilibrio entre exactitud y coste computacional. Para ello se ha resuelto un cierto problema con diferentes niveles de discretización eléctrica. Observando la sensibilidad que muestra la solución a las diversas discretizaciones se elige aquella que, alcanzando el nivel de exactitud requerido, presenta el menor coste computacional. La discretización de las variables  $s$ ,  $q$  y  $\xi$  elegida es, en todas ellas, de  $Nv=50$  eligiendo este grado de la misma manera con la que se ha elegido la discretización eléctrica del método de Fourier-Elementos de contornos. Como comprobación tanto del programa numérico como del nivel de discretización se ha resuelto y comparado los perfiles de la interfase (figura 4.8) y del campo normal exterior (figura 4.9) obtenidos con el límite conductor descrito en el capítulo 3 y con los obtenidos con las ecuaciones

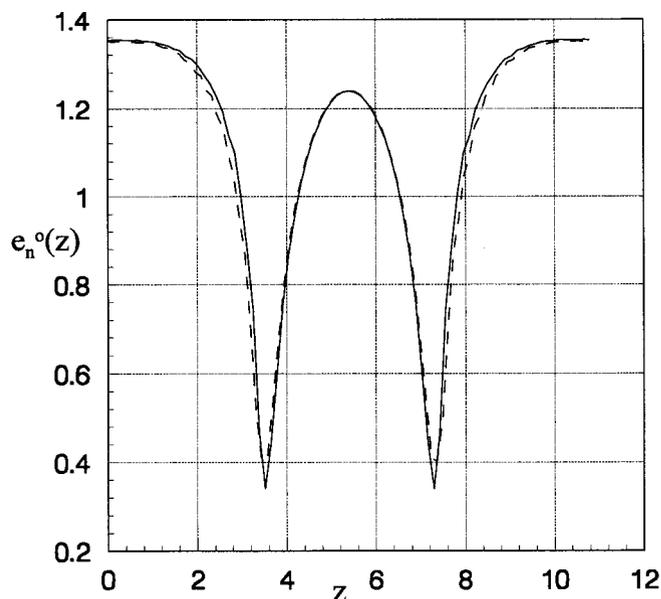


Figura 4.9: Comparación del perfil del campo exterior  $e_n^o$  en función de la coordenada axial  $z$  entre el límite conductor y un chorro no conductor ( $\beta = 10$  y  $\alpha = 100$ ) para un chorro con  $\lambda = 4.5$ ,  $\gamma_o = 0.3$  y  $C = 0.05$ .

descritas anteriormente con una permitividad relativa de  $\beta = 10$  y con el parámetro de relajación  $\alpha = 100$  siendo los parámetros del chorro  $\lambda = 5.4$ ,  $\gamma_o = 0.3$  y  $C = 0.05$ . Se puede observar que en ambos perfiles el acuerdo entre el caso conductor y no conductor es excelente.

El enorme número de parámetros libres necesarios para caracterizar el chorro ( $\gamma_o$ ,  $C$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$  y  $\lambda$ ) nos obliga a restringir el análisis paramétrico barriendo en los que consideramos más relevantes ( $\beta$ ,  $\alpha$  y  $\lambda$ ) y manteniendo fijo el resto ( $\gamma_o=0.3$ ,  $C=0.1$ ). En todos los resultados presentados en este epígrafe la posición del electrodo de electrificación  $b$  es fija e igual a 25. Esta posición, como se comentó en el capítulo 3, está lo suficientemente alejada como para que no afecten a los resultados.

En la figura 4.10 se ha dibujado la evolución temporal del campo normal, exterior e interior; y tangencial en el gráfico inferior mientras que en el superior se dibuja la evolución temporal del perfil. Tanto el campo normal interior  $e_n^i$  como el campo tangencial  $e_t$  permanecen casi nulos en casi toda la

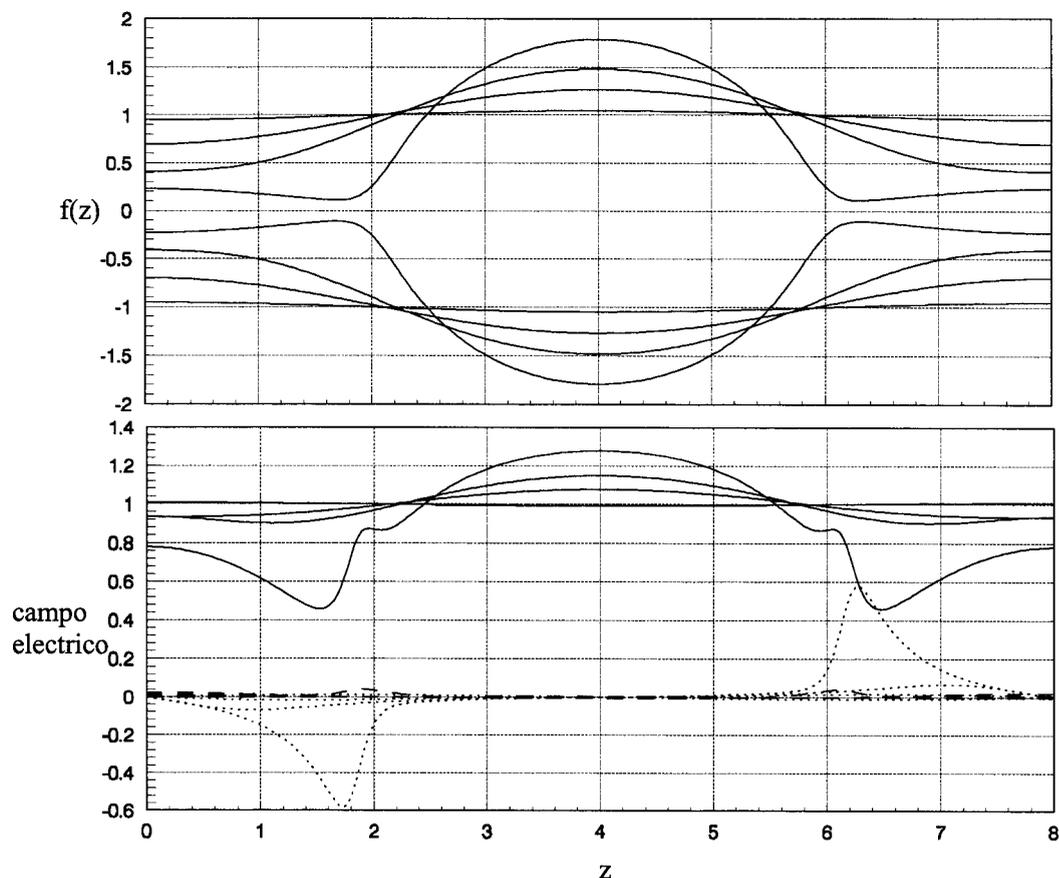


Figura 4.10: Evolución temporal de la posición de interfase (Gráfico Superior) y del campo eléctrico en la superficie (Gráfico Inferior): normal, (—) exterior y (- - -) interior y; (...) tangencial. Los parámetros que modelan el chorro son  $C=0.1$ ,  $\gamma_o=0.3$ ,  $\beta=10$ ,  $\alpha=1.0$  y  $\lambda=4.00$ . Los perfiles dibujados corresponden a los tiempos  $t=0.0$ ,  $7.0$ ,  $9.0$  y  $10.44$

evolución disparándose en los últimos estadios el campo tangencial. El campo normal exterior marca la densidad de carga superficial. A la luz del perfil de  $e_n^i$  la migración de las carga se deben fundamentalmente a los fenómenos convectivos. A pesar de que el campo tangencial tiende a estabilizar al chorro intentando arrastrar tanto al fluido como a las cargas desde la gota principal hacia el filamento que conformará la gota satélite, los gradientes de presión causados por la capilaridad provocan que el fluido continúe fluyendo hacia la

gota principal arrastrando con él la carga que, debido a su baja movilidad ( $\alpha$ ), sigue al fluido.

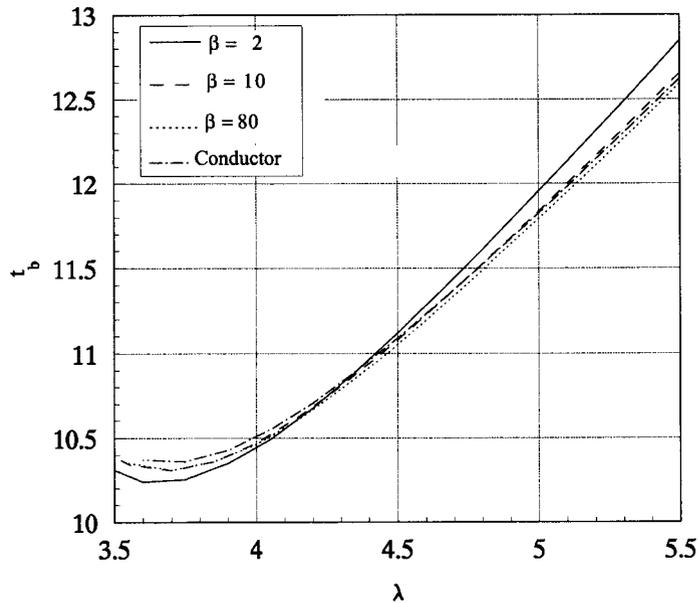


Figura 4.11: Tiempo de rotura como función de la semilongitud de onda  $\lambda$  para diversos valores de la permitividad  $\beta$  manteniendo fijo los valores del parámetro de relajación  $\alpha=5$ , del número de Taylor  $\gamma_o=0.3$  y del número de Ohnesorge  $C=0.1$

Tal como describimos anteriormente, los campos interior y tangencial no cobran importancia hasta los últimos estadios de la evolución por lo que la distribución de presiones difiere poco de aquella que se produce en el caso conductor esto da lugar a que el tiempo empleado por la perturbación para crecer sea similar al conductor tal y como predice el análisis lineal y confirma las figuras 4.11 y 4.12.

Las razones aducidas para explicar la invarianza del tiempo de rotura pueden explicar la similitud de los volúmenes relativos que se observa en las figuras 4.13 y 4.14 en donde se ha dibujado el volumen relativo de la gota principal como función de  $\lambda$  para un factor de relajación  $\alpha=5.0$  y diversos valores de la permitividad (figura 4.13) y; para una permitividad relativa fija  $\beta=10$  y diversos valores de  $\alpha$  (figura 4.14). En los primeros estadios

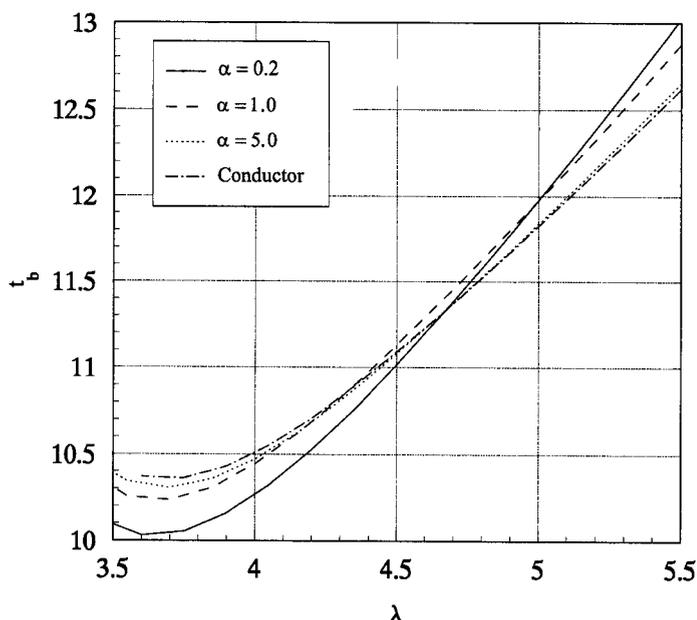


Figura 4.12: Tiempo de rotura como función de la semilongitud de onda  $\lambda$  para diversos valores del factor de relajación  $\alpha$  manteniendo fijo los valores de la permitividad  $\beta=10$ , del número de Taylor  $\gamma_o=0.3$  y del número de Ohnesorge  $C=0.1$

de la evolución el efecto de los campos eléctricos tangencial e interior son despreciables y cuando ambos cobran importancia no son capaces de hacer variar la inercia adquirida por el fluido. Sin embargo se observa que para valores muy bajos del factor de relajación ( $\alpha=0.2,1$ ) los campos interior y tangencial actúan desde un primer momento provocando un aumento del volumen relativo de la gota principal.

En las figuras 4.15 y 4.16 se dibujan la dependencia con  $\lambda$  de la carga transportada por las gotas principal y satélite adimensionalizada con la carga de Rayleigh manteniendo en la figura 4.15 fijo  $\beta$  y variable  $\alpha$  y en la figura 4.16 fijo  $\alpha$  y variable  $\beta$ . La redistribución de la carga entre la gota principal y la satélite está fuertemente influenciada por  $\alpha$  y  $\beta$ . Se puede observar que el límite conductor es una cota inferior/superior de la carga que transporta la gota principal/satélite. El movimiento fluido que transporta la masa del líquido arrastra también en su movimiento a las cargas, debido a

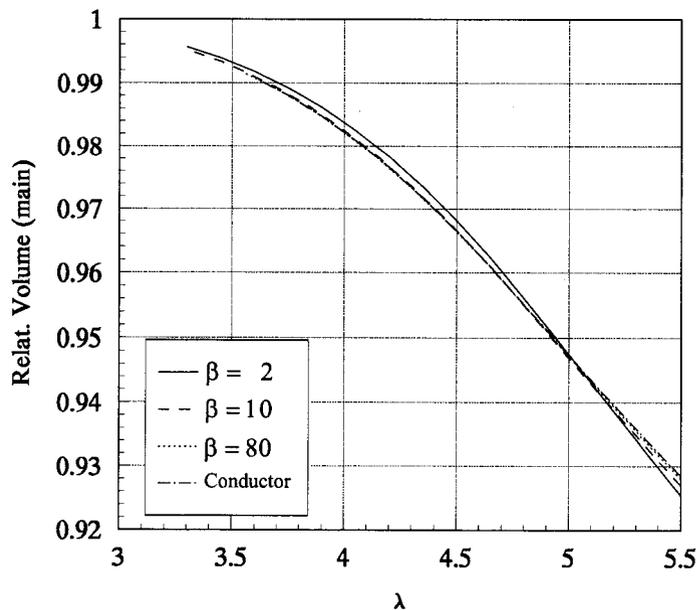


Figura 4.13: Volumen relativo de la gota principal como función de la semilongitud de onda  $\lambda$  para diversos valores del factor de la permitividad  $\beta$  manteniendo fijo los valores del parámetro de relajación  $\alpha=5$ , del número de Taylor  $\gamma_o=0.3$  y del número de Ohnesorge  $C=0.1$

los bajos valores de  $\alpha$  y  $\beta$ , lo que no acaece en el límite conductor donde la independencia del movimiento de las cargas y del fluido es total.

## 4.7 Resumen y conclusiones

En el presente capítulo se ha buscado resolver la rotura de chorros en el caso de que las condiciones de inyección y las constantes del fluido determinan que el tiempo de relajación eléctrica es comparable con el tiempo característico de rotura. Para obtener más información del comportamiento del chorro en estas circunstancias se ha extendido el análisis lineal realizado por Mestel (1994, 1996) permitiendo cualquier valor de la viscosidad y considerando ausente cualquier campo eléctrico impuesto en la dirección axial. A partir del análisis lineal se ha establecido que:

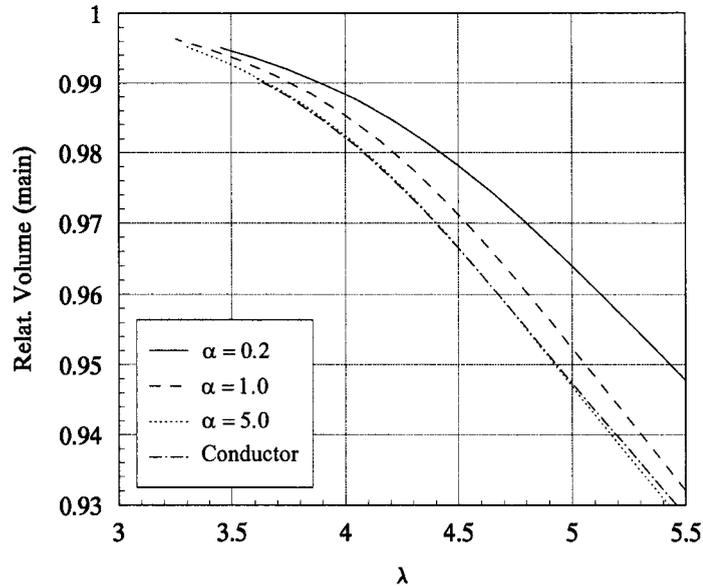


Figura 4.14: Volumen relativo de la gota principal como función de la semi-longitud de onda  $\lambda$  para diversos valores del factor de relajación  $\alpha$  manteniendo fijo el valor de la permitividad  $\beta=10$ , del número de Taylor  $\gamma_o=0.3$  y del número de Ohnesorge  $C=0.1$

- El mecanismo de rotura sigue siendo esencialmente capilar. La influencia del parámetro de relajación y de las fuerzas de polarización en la rotura es débil, difiriendo poco los factores de crecimiento  $\sigma$  de aquellos obtenidos en el límite conductor.
- La viscosidad y la capa límite se revelan esenciales en la dinámica del chorro. La presencia de un campo tangencial induce, para viscosidades bajas, la presencia de una capa límite que se revela muy eficaz en la reordenación de las cargas. La reordenación tiende a eliminar la presencia del campo tangencial produciendo una distribución de cargas semejante a la que se produce en el límite conductor con lo que los factores de crecimiento son indistinguibles entre ambos casos.
- Los modos hidrodinámicos, aquellos en los que se producen fuertes recirculaciones en el líquido equilibrándose los esfuerzos inerciales con

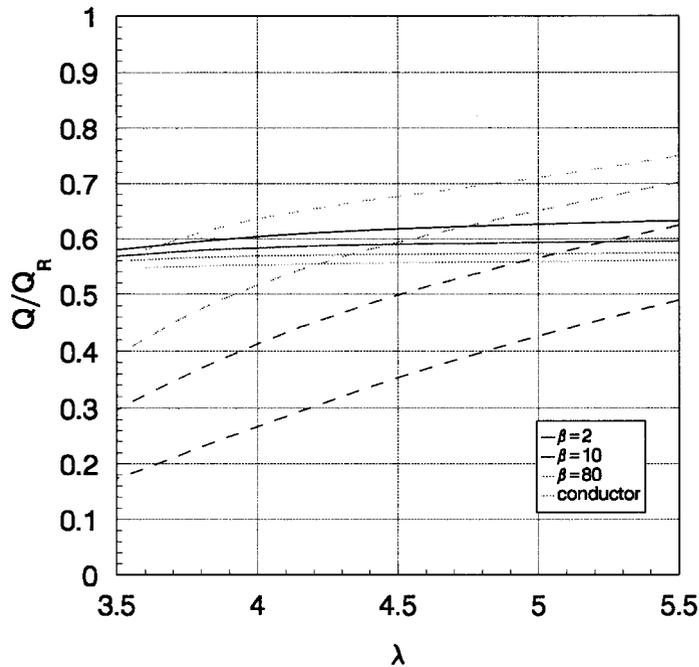


Figura 4.15: Carga de las gotas principal (—) y satélite (- - -) adimensionalizadas con la carga de Rayleigh como función de la semilongitud de onda  $\lambda$  para diversos valores de la permitividad  $\beta$  manteniendo fijo los valores del parámetro de relajación  $\alpha=5$ , del número de Taylor  $\gamma_0=0.3$  y del número de Ohnesorge  $C=0.1$

los viscosos siendo despreciable los capilares, aun siendo fuertemente estables lo son menos que los mismos en el límite conductor dado que el campo tangencial y la capa límite los potencian.

Para el estudio no lineal de estos chorros se ha vuelto a emplear un análisis unidireccional de Lee. Para ello se ha hecho necesario derivar la versión unidireccional de la ecuación de continuidad de la densidad de carga superficial. Empleando resultados del análisis lineal se ha restringido la validez del modelo unidireccional a aquellos chorros en los que la viscosidad es lo suficientemente elevada como para que la capa límite inducida por el campo tangencial no esté presente. En estas circunstancias el esfuerzo tangencial se difunde hacia el interior del líquido manteniéndose con ello el perfil de

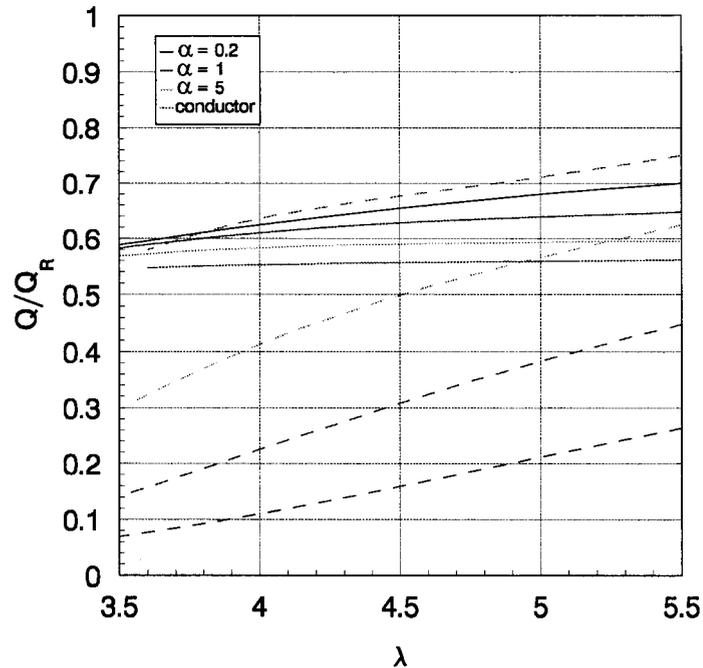


Figura 4.16: Carga de las gotas principal (—) y satélite (- - -) adimensionalizadas con la carga de Rayleigh como función de la semilongitud de onda  $\lambda$  para diversos valores del factor de relajación  $\alpha$  manteniendo fijo el valor de la permitividad  $\beta=10$ , del número de Taylor  $\gamma_o=0.3$  y del número de Ohnesorge  $C=0.1$

velocidades cuasiplano acorde con el empleado por el modelo de Lee. De los resultados obtenidos con este modelo podemos concluir que:

- Los campos eléctricos interior y tangencial son despreciables en la mayor parte de la evolución del chorro salvo en los últimos instantes en los que el campo tangencial, localizado en la proximidad del estrangulamiento, cobra cierta importancia. Este comportamiento conlleva a que la evolución, en su mayor parte, se asemeje al límite conductor por lo que los tiempos de rotura y los volúmenes de las gotas difieren poco de aquellos calculados para el límite conductor.
- El parámetro de relajación bajo ( $\alpha$  del orden unidad o menor) se traduce en que las cargas no son capaces de sustraerse al movimiento fluido

siendo arrastradas por éste sobre todo en los últimos instante de la rotura cuando la velocidad es más elevada. El movimiento fluido convecta tanto la masa como la carga dando lugar a una mayor concentración de carga en la gota principal que en la satélite. Este efecto es tanto más señalado cuanto menor es el parámetro de relajación.

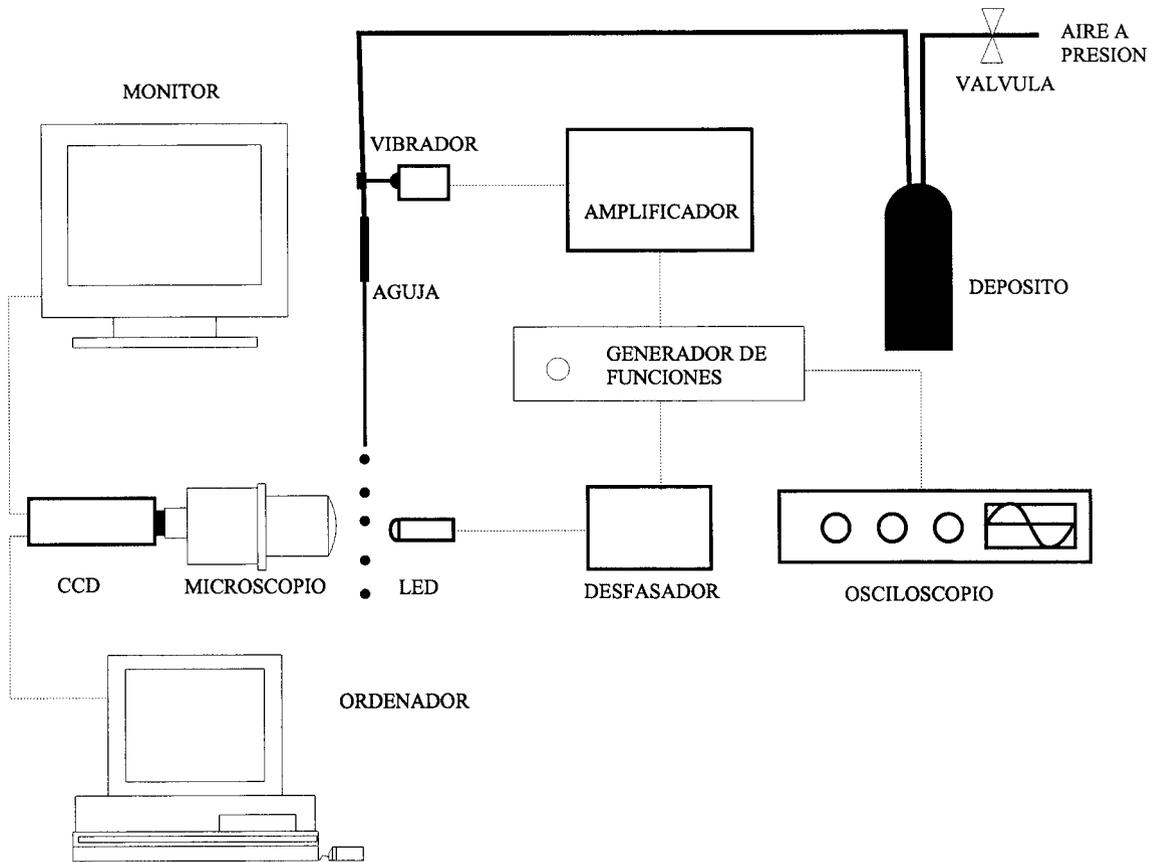
# Capítulo 5

## Experimentos

Para verificar la validez de los resultados obtenidos a partir de la simulación numérica se han realizado una serie de experimentos cuyos detalles a continuación describimos.

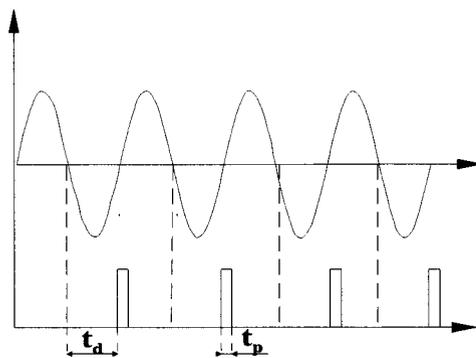
### 5.1 Montaje

Una mezcla de agua y glicerina al 50 % es inyectada a la atmósfera a través de un agujero capilar, siendo esta inyección a la presión suficiente como para que el líquido forme un chorro laminar de radio  $210\ \mu\text{m}$ . La velocidad típica que adquiere el chorro es de  $4\ \text{m/s}$ . El chorro, por efecto de una perturbación sinusoidal continua impuesta aguas arriba, se desintegra en gotas a través de un proceso completamente repetitivo. La perturbación se administra mediante la vibración del tubo que llega a la aguja capilar (Ver Fig. 5.1), siendo la perturbación impuesta de amplitud suficiente como para dominar sobre el ruido ambiente. Esta aseveración se puede hacer dado que la rotura producida por el ruido ambiente se produce a distancias del capilar sensiblemente superior a aquellas presentes cuando la excitación actúa (típicamente 12 cm para el ruido ambiente frente a los 6 cm para excitación impuesta). La vibración se realiza con un vibrador (Brüel & Kjær Vibration Testing System type 3383), que transforma una señal eléctrica sinusoidal de frecuencia y amplitud fija suministrada por un generador de funciones (PM-



*Figura 5.1: Esquema del montaje experimental*

5135 Philips Function Generator) en una vibración mecánica con la misma frecuencia y con amplitud proporcional a la amplitud de la señal eléctrica de entrada. El carácter repetitivo del fenómeno de rotura permite que, mediante técnicas estroboscópicas, un fenómeno dinámico aparezca ante nuestros ojos como fijo. En efecto, enfocando la zona de rotura con una cámara (Sony Black & White IRIS-CCD camera model SSC-M370CE) la luz que ilumina el proceso es pulsada a la misma frecuencia a la que la excitación tiene lugar, congelando el proceso de rotura. La iluminación proviene de un LED (Light Emitting Diode, o traducido, diodo emisor de luz) de alta luminosidad (3000 *mcd*) gobernado por un circuito construido en nuestro laboratorio. El circuito transforma una señal TTL de entrada proveniente del generador de



*Figura 5.2: Señales de excitación y de iluminación*

funciones en un tren de pulsos de anchura  $700 \text{ nseg}$  de frecuencia igual a la de entrada que a su vez es la misma que la del vibrador. El circuito permite además desfasar la señal de salida de la de entrada permitiendo estudiar diferentes momentos de la rotura. (Fig. 5.2). La frecuencia de excitación se controla mediante un osciloscopio (Kikusui 100 MHz digital Oscilloscope Model COR 5501U). La imagen congelada de la rotura es observada en un monitor (Sony model KX-14cp1) y derivada a un PC en donde es adquirida. La electrificación del chorro se ejerce mediante dos electrodos planos, denominados de electrificación, de  $40 \text{ mm}$  de anchura y  $155 \text{ mm}$  de largo colocados uno frente a otro a una distancia fija de  $20 \text{ mm}$  y que se conectan a tierra. El chorro, al que se aplica un alto potencial mediante una fuente de alta tensión Bertan model 205B-10R, discurre equidistante de los electrodos de electrificación. La aguja capilar y los electrodos de electrificación están solidariamente unidos y montados sobre un posicionador lo que permite fijar la atención en diferentes puntos del chorro.

## 5.2 Medida de los parámetros de ensayo

### 5.2.1 Determinación de las constantes físicas

La medida de la tensión superficial se ha realizado con un tensiómetro (Krüss digital-tensiometer K10T), la viscosidad con un viscosímetro (Brookfield di-

gital viscosimeter model DV-II Version 2.0) y la densidad del chorro mediante una balanza de precisión. También se ha medido la conductividad del líquido por medio de un conductímetro (WTW Microprocessor Conductivity Meter LF-3000). Los valores se dan en la tabla 5.1. El envejecimiento del líquido es

$\sigma$	$\rho$	$\nu$	$K$	$\varepsilon/\varepsilon_o$
0.048 N/m	1123 Kg/m <sup>3</sup>	10.42 cps	1.4610 <sup>-3</sup> S/m	60

Tabla 5.1: Tabla de constantes físicas del líquido

un factor a tener en cuenta pues las constantes físicas pueden sufrir variación debido a la evaporación del agua presente en la mezcla. La viscosidad es la constante física más sensible a sufrir dicha variación. Este factor ha sido cuidadosamente controlado, constatando que las variaciones de los valores de las constantes físicas en el periodo de obtención de los resultados experimentales presentes en esta tesis son despreciables.

### 5.2.2 Determinación de la velocidad del chorro

El método(óptico) de medida es clásico, consiste en relacionar la frecuencia de producción de las gotas con el espaciado entre ellas.

$$U_o = L F \quad (5.1)$$

donde  $L$  es la longitud de onda y  $F$  la frecuencia de producción de gotas. Este método de medida está sometido a la hipótesis de que las gotas no estén frenadas. En la práctica se realiza una media de la longitud de onda (Ver Fig. 5.3 pues la precisión de la medida es tanto mejor cuantas mas longitudes de onda se consideren.

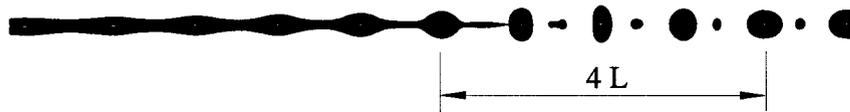


Figura 5.3: Medida de la velocidad del chorro

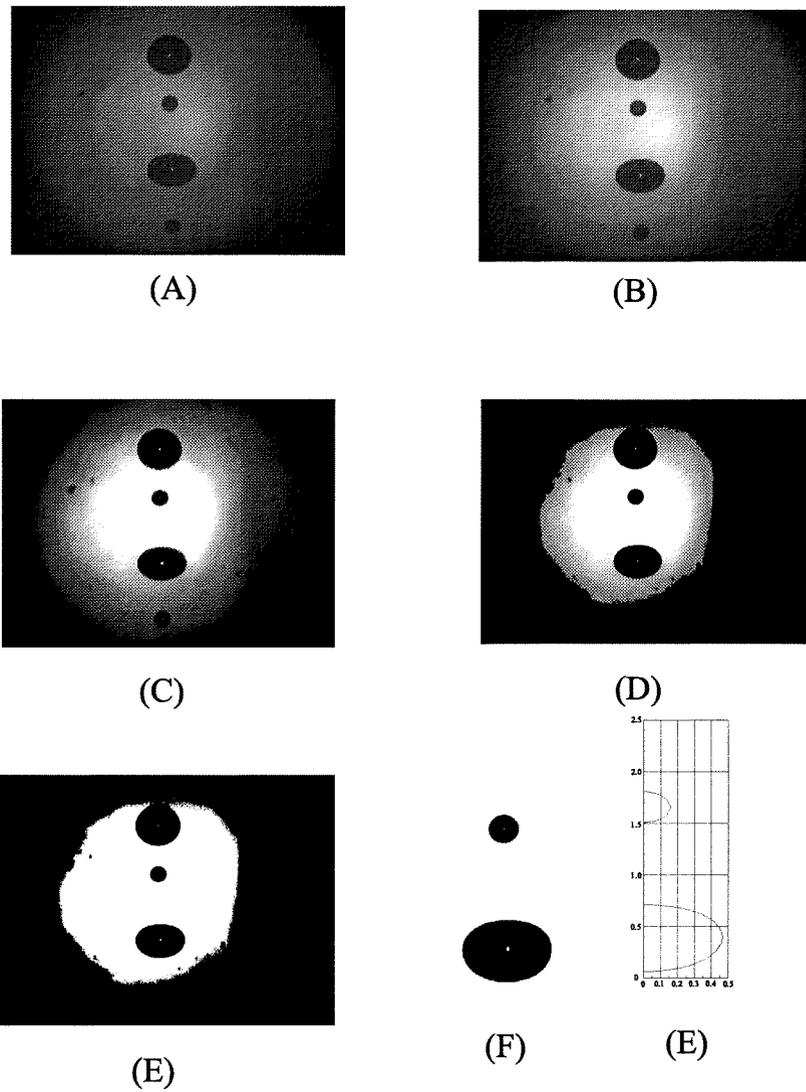


Figura 5.4: Proceso seguido para la obtención de la imagen digitalizada

### 5.2.3 Determinación de los radios del chorro y de las gotas

La determinación del radio del chorro y de las gotas se realiza mediante el análisis de las imágenes adquiridas con el computador. La imagen obtenida es sometida a un tratamiento fotográfico (ver figura 5.4), en el cual a la imagen original (A), mediante la acción de diversos filtros (B–D), es transformada a una imagen en Blanco y Negro (E) siendo ésta guardada en formato postscript, todos los procesos anteriores han sido efectuados con un programa comercial de tratamiento de imágenes. Es a partir de la imagen en Blanco y Negro almacenada en formato postscript y de un programa como se determinan los radios. El programa analiza el número de pixels de los que consta la imagen de la gota o del chorro (E) y conocido el tamaño de un pixel, obtiene la imagen digitalizada (F). Previamente se ha debido de realizar una calibración tendente a conocer el tamaño de un pixel, para ello se toma una imagen de un objeto de tamaño conocido, la aguja capilar en nuestro caso, que procesada de la manera anteriormente descrita permite cuantificar el tamaño de un pixel ( $8.292 \cdot 10^{-3}$  mm/pixel en los presentes experimentos). Los radios de las gotas satélites se calculan a partir de la integración numérica de las imágenes digitalizadas supuesta simetría radial y asemejando el volumen obtenido al de una esfera perfecta, siendo las principales calculadas a partir de las satélites por continuidad. Para minimizar los errores, la gota satélite es fotografiada en más de un punto.

El radio del chorro se obtiene con el mismo proceso y, para mayor seguridad, es medido en varios puntos del chorro suficientemente alejados de la aguja capilar como para obviar la zona de transición entre el perfil parabólico y el perfil plano. El valor calculado para los presentes experimentos es de  $210 \mu\text{m}$ .

### 5.2.4 Determinación del numero de Taylor

La disposición de los electrodos de electrificación y del chorro no es axilsimétrica lo que, a primera vista, hace sospechar la invalidez del montaje para estudiar roturas axilsimétricas de chorros cargados. Sin embargo, la

distribución de campo eléctrico sobre la superficie del chorro es casi axil-simétrica, dado que, tanto la anchura como la distancia entre los electrodos son grandes frente al radio del chorro. Para verificar esta presunción se ha resuelto mediante elementos de contorno la configuración de electrodos planos aplicando una diferencia de potencial de 1 V entre los electrodos de electrificación y el chorro. En la figura 5.5 se representa la dependencia del campo normal (en V/mm) en la superficie con la variable acimutal para la configuración experimental y para la utilizada en la teoría. Se puede observar la débil

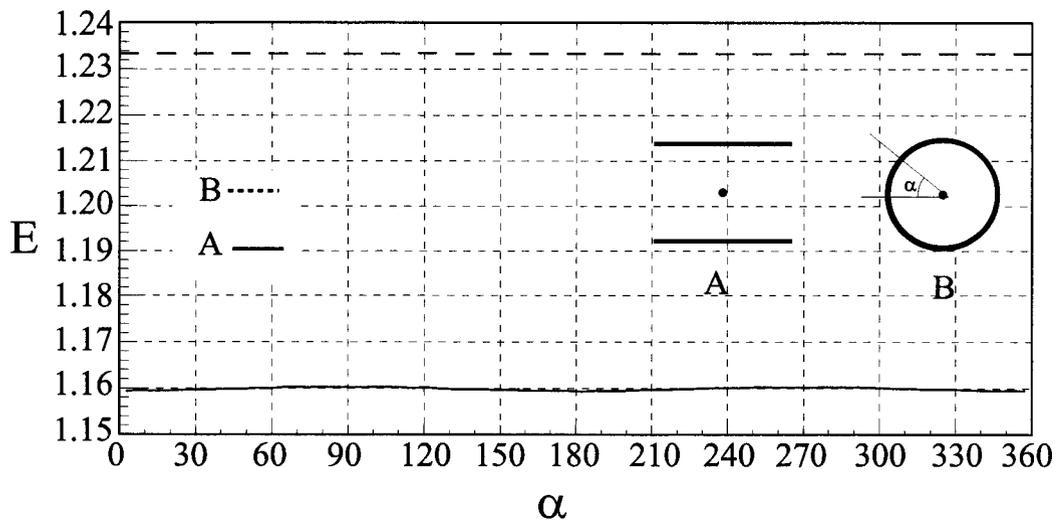


Figura 5.5: Distribución de campo normal en la superficie del chorro

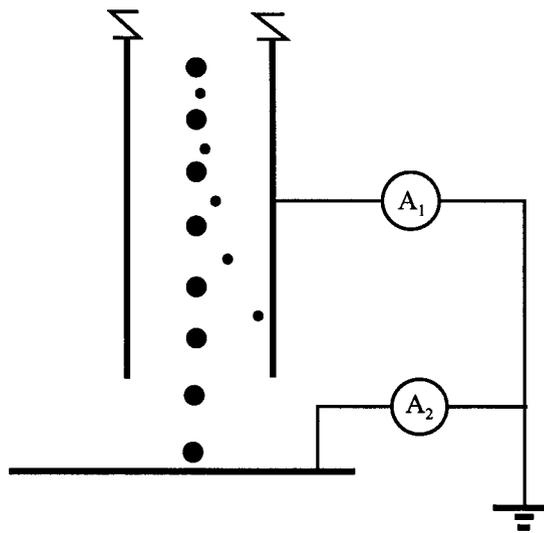
influencia de la distribución de campo eléctrico con la variable acimutal. El número de Taylor de los experimentos es obtenido a partir del resultado del cálculo con elementos de contorno

$$\gamma_o = \frac{\epsilon_o A (1.16 \cdot 10^3 V)^2}{2 \gamma}, \quad (5.2)$$

donde  $V$  denota la diferencia de voltaje entre el chorro y los electrodos de electrificación, todas las variables vienen expresadas en el S.I.

### 5.2.5 Determinación de la carga de las gotas

La determinación de las cargas se realiza midiendo la intensidad que provoca la carga transportada por las gotas. Para ello es necesario discriminar las gotas principales de las satélite. La discriminación surge, afortunadamente, de manera natural (Figura 5.6). Las gotas satélites debido a su menor inercia son desviadas del eje del chorro debido a la atracción ejercida por los electrodos de electrificación impactando en dichos electrodos. Las principales, más pesadas, prosiguen su camino sin sufrir desviaciones de consideración. Las intensidades son medidas con un picoamperímetro Keithley modelo 485 en los electrodos de electrificación en el caso de las satélites y en un electrodo colocado aguas abajo para las principales. La carga de las gotas  $Q$  se



*Figura 5.6: Trayectoria de las gotas y forma de medir las intensidades*

calcula a partir de la frecuencia de producción de gotas  $F$  y la intensidad transportada por las gotas  $I$ ,  $I = FQ$ .

## 5.3 Resultados

Es necesario poner de manifiesto ciertas limitaciones del montaje; las medidas experimentales de carácter cuantitativo que aquí se presentan son aquellas

que no son afectadas por la amplitud de la perturbación impuesta aguas arriba (los radios y las carga de las gotas). Otras medidas de indudable interés, pero en las que la amplitud inicial juegue un papel determinante, como puede ser la influencia de la electrificación en el tiempo de rotura, solo pueden ser mostradas como comportamientos cualitativos siendo difíciles de relacionar con la teoría. La razón de dicha limitación viene dada por el carácter indirecto de la excitación. Aunque es posible encontrar una función que relacione la amplitud de la vibración con la amplitud inicial de manera experimental, función de transferencia, los errores y las hipótesis de partida necesarias para su cálculo hacen desestimable su utilización. Solo es posible realizar ese tipo de medidas con exactitud si la función de transferencia entre la excitación y la perturbación es directa, como es el caso de la excitación eléctrica descrita por Barbet (1997).

La relación entre el tiempo de relajación eléctrica y el tiempo capilar es del orden de  $10^4$  por lo que el chorro puede considerarse conductor. El número de Weber para los presentes experimentos es del orden de la centena por lo que puede considerarse el chorro como infinito. Dado que se cumplen las premisas dispuestas para el cálculo numérico, descrito en el capítulo 3, es posible comparar los resultados experimentales con los numéricos.

### 5.3.1 Medida de los radios de las gotas

En la presente sección compararemos los radios de las gotas obtenidos experimentalmente y teóricamente. Las gráficas presentan el radio de las gotas principales y las satélites adimensionalizadas con el radio del chorro como función del número de onda para diversos voltajes aplicados. En las figuras 5.7, 5.8 y 5.9 presentamos los resultados para un voltaje de 2000, 3000 y 4000 V respectivamente, lo cual representa un número de Bond eléctrico de  $\gamma_o=0.1042$ , 0.2344 y 0.4168 respectivamente, siendo el número de Ohnesorge en los experimentos  $C = 0.101$  para todas las series. Los puntos experimentales engloban más de una serie correspondiendo dichas series a diferentes velocidades del chorro. Las gotas satélites disminuyen su volumen a medida que el nivel de electrificación es más alto aunque la influencia es muy débil.

Las gotas principales son menos sensibles al número de onda siendo despreciable la influencia de la electrificación en su volumen. Es remarcable el nivel de acuerdo entre los experimentos y los resultados numéricos aunque el nivel de acuerdo es levemente peor para un voltaje alto (ver figura 5.9).

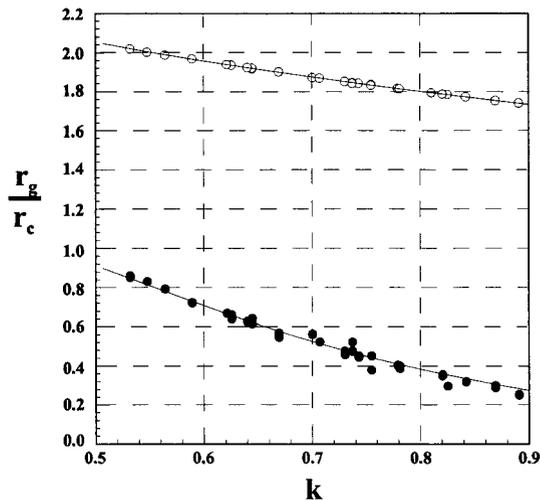


Figura 5.7: Radio de las gotas adimensionales frente al número de ondas para un voltaje de 2000: El símbolo  $\circ$  representa las gotas principales,  $\bullet$  representa las gotas satélites, las líneas continuas representan los resultados numéricos.

### 5.3.2 Medida de la carga de las gotas

En las curvas expuestas en esta sección se representa la carga adimensional que transportan las gotas frente a la semilongitud de la onda adimensional. La adimensionalización de la carga se realiza con la denominada carga límite de Rayleigh, este límite representa la carga máxima que una gota de líquido conductor puede soportar antes de que el efecto disgregador de la repulsión coulombiana sobrepase el efecto agregador de la tensión superficial. Este valor viene dado por la expresión:

$$Q_R = 8\pi(\epsilon_o\gamma r^3)^{1/2} \quad (5.3)$$

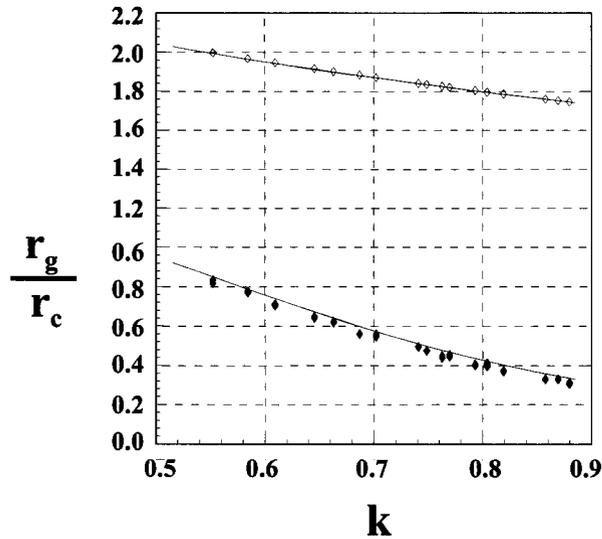


Figura 5.8: Radio de las gotas adimensionales frente al número de ondas para un voltaje de 3000: El símbolo  $\diamond$  representa las gotas principales,  $\blacklozenge$  representa las gotas satélites, las líneas continuas representan los resultados numéricos.

En la figura 5.10 se representa la dependencia de la carga adimensional transportadas por las gotas principales frente a la semilongitud de onda adimensional para diversos niveles de electrificación (2000 V,  $\Gamma_o=0.1042$ ; 3000 V,  $\Gamma_o=0.2344$  y 4000 V  $\Gamma_o=0.4168$ ). Tanto la teoría como los experimentos concuerdan en predecir una nula dependencia de la carga adimensional con la longitud de onda. En el caso de las gotas satélites (figura 5.11) se dibujan los datos correspondiente a los niveles de electrificación de 2000 V ( $\Gamma_o=0.1042$ ) y 3000 V ( $\Gamma_o=0.2344$ ). En este caso surgen cierta discrepancia entre el modelo teórico y el experimental, sobre todo para longitudes de onda corta. A primera vista pueden vislumbrarse dos razones por las cuales se pudiera explicar dichas discrepancias. Una primera puede ser la debilidad de la aproximación unidireccional utilizada en los cálculos numéricos en el rango de onda corta aunque esta argumentación se debilita en el momento en que los volúmenes no presentan tales discrepancias (figura 5.7 y 5.8). A la luz de lo expuesto anteriormente cabe preguntarse si la relajación eléctrica, a pesar de efectuar-

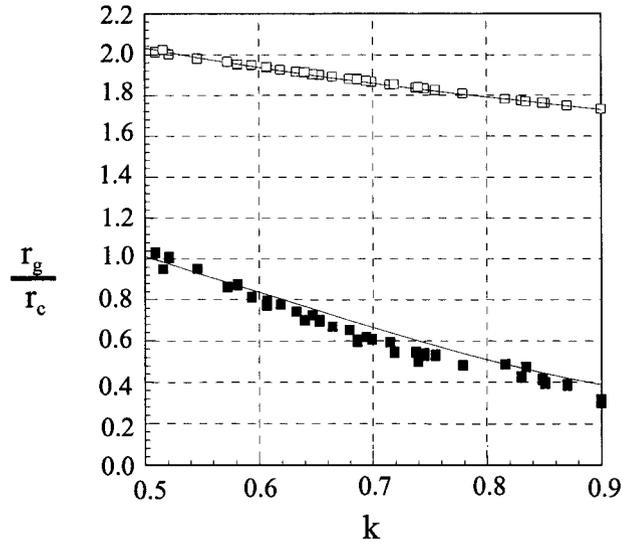


Figura 5.9: Radio de las gotas adimensionales frente al número de onda para un voltaje de 4000 V: El símbolo  $\square$  representa las gotas principales,  $\blacksquare$  representa las gotas satélites, las líneas continuas representan los resultados numéricos.

se en un tiempo muy corto, afecta ligeramente la distribución de carga en la superficie del chorro real siendo esta pequeña diferencia, no suficiente como para modificar los volúmenes y la carga de las principales, suficiente como para modificar la cantidad de carga transportada por las satélites. Sin embargo analizando las series obtenidas a 2000 V surge cierta duda sobre la idoneidad del último argumento. En la figura 5.12 se comparan la cantidad de carga con respecto a la total que es transportada por las gotas principales y satélites calculadas a partir de la expresión

$$\delta_{pri} = \frac{q_{pri}}{q_{pri} + q_{sat}} = \frac{I_{pri}}{I_{pri} + I_{sat}} \text{ y } \delta_{sat} = \frac{q_{sat}}{q_{pri} + q_{sat}} = \frac{I_{sat}}{I_{pri} + I_{sat}} \quad (5.4)$$

con aquellas obtenidas numéricamente, observándose que el acuerdo entre ambas es bueno. Para completar lo anteriormente dicho debemos constatar que la intensidad que circula es independiente de la frecuencia de excitación o lo que es lo mismo que la carga total transportada por ambas gotas es

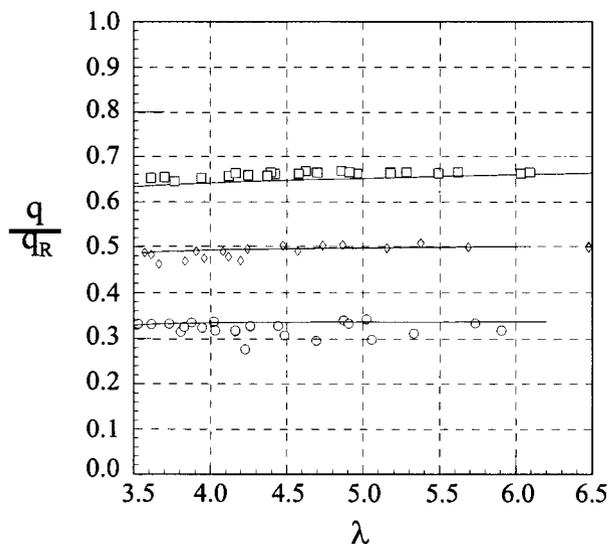


Figura 5.10: Carga adimensional de las gotas principales en función de la semilongitud de onda. Los puntos discretos representan los puntos experimentales: ( $\circ$ ) para  $V=2000$  V, ( $\diamond$ ) para  $V=3000$  V y ( $\square$ ) para  $V=4000$  V; las líneas continuas han sido calculados numéricamente para los número de Bond eléctrico correspondientes ( $\Gamma_o=0.1042, 0.2344$  y  $0.4168$  respectivamente).

proporcional a la longitud de onda como predice la teoría

$$Q_T = 2 \int_0^\lambda 2\pi\epsilon_o E_n^o F \sqrt{1 + F_Z^2} dZ = 4\pi A^2 \epsilon_o (1.16E^3 V) \lambda. \quad (5.5)$$

En la 5.13 comparamos la carga total  $Q_T$  (en Culombios) en función de la semilongitud de onda con la teórica. Se puede observar que el acuerdo entre ambas es excelente. Debe ser puesto de manifiesto la extrema sensibilidad de la medida de la carga satélite a los errores experimentales como se observa en la figura 5.14, en efecto, cualquier corriente espúrea, como por ejemplo las corrientes de fuga, puede ser del mismo orden que la corriente debida a las gotas satélites.

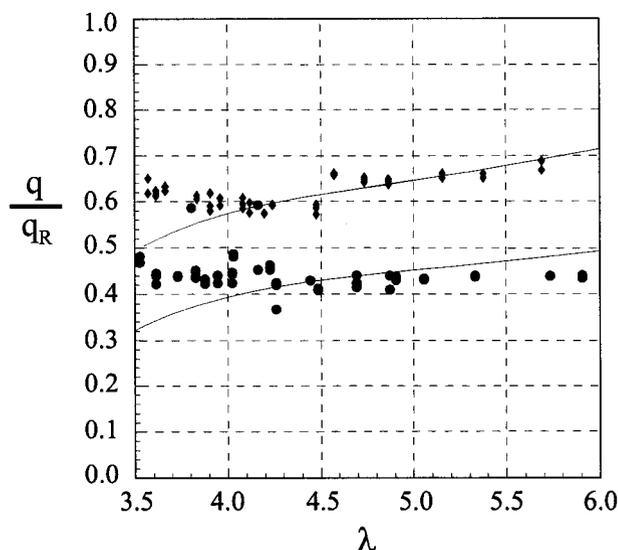


Figura 5.11: Carga adimensional de las gotas satélites en función de la semilongitud de onda. Los puntos discretos representan los puntos experimentales: ( $\circ$ ) para  $V = 2000$  V y ( $\diamond$ )  $V = 3000$  V; las líneas continuas han sido calculados numéricamente para los número de Bond eléctrico correspondientes ( $\Gamma_o = 0.1042$  y  $0.2344$  respectivamente).

## 5.4 Resumen y conclusiones

En este capítulo se ha realizado un montaje experimental con el objeto de corroborar los resultados predichos por el modelo unidireccional de Lee en el límite conductor. El montaje está diseñado para dirimir la influencia de la longitud de onda de una perturbación impuesta en los volúmenes de las gotas principales y satélites así como en la carga que éstas transportan. El acuerdo entre los experimentos y el modelo es extremadamente bueno. Se ratifica la invarianza de la carga adimensional transportada por las gotas principales (adimensionalizada con la carga límite de Rayleigh) con la longitud de onda predicha por modelo unidireccional. Sin embargo se observa cierta discrepancia en la carga transportada por las gotas satélites (adimensionalizada con la carga límite de Rayleigh) para ondas cortas. Esta discrepancia es achacable a la acumulación errores experimentales que se producen en el cálculo de los

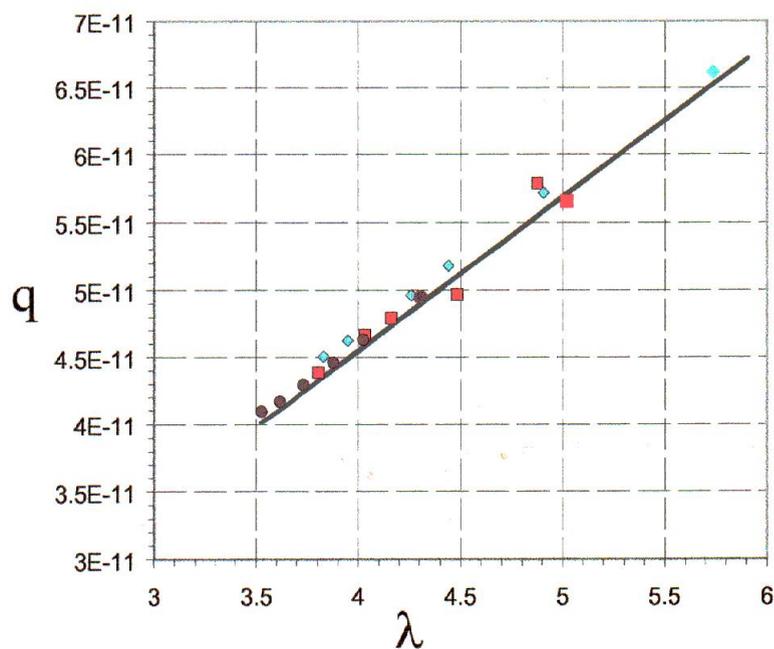


Figura 5.12: Carga relativa teórica (línea continua) y experimental para las diversas series efectuadas a 2000 V en función de la longitud de onda

volúmenes y de las cargas donde el control de corrientes espureas es difícil.

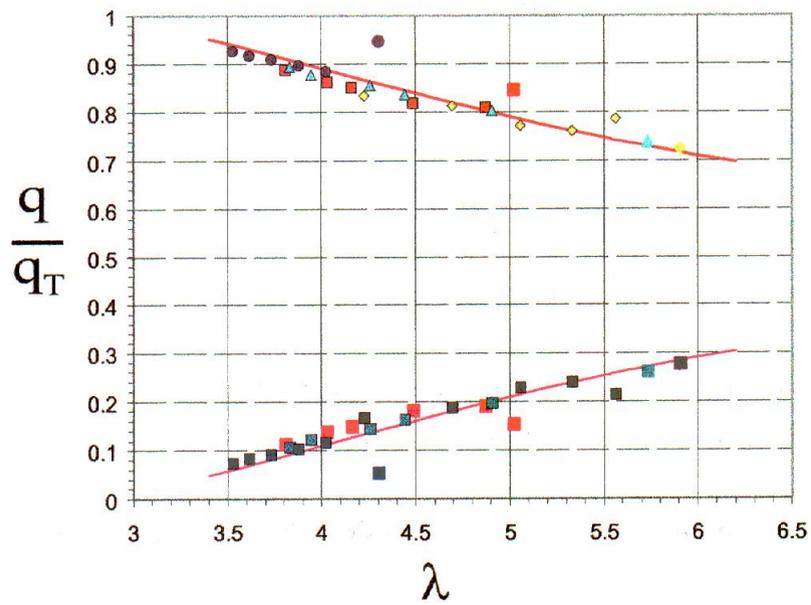


Figura 5.13: carga total en función de la semilongitud de onda: datos experimentales obtenidos de las series efectuadas a 2000 V curva teórica obtenida de la expresión 5.5

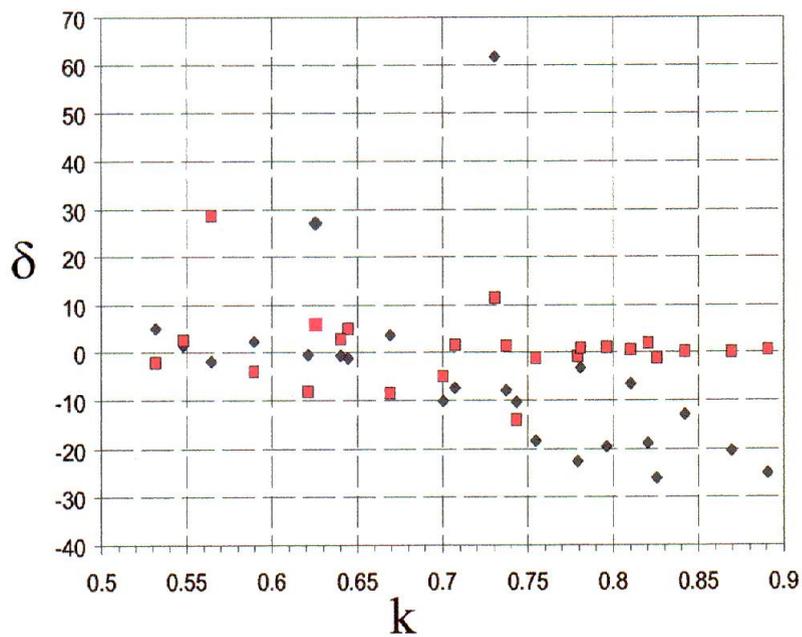


Figura 5.14: Errores relativos medidos en tanto por ciento cometidos en la medida de la carga transportada por las satélites y las principales.

# Capítulo 6

## Conclusiones

1. Se ha utilizado un modelo de Lee para simular la rotura de chorros capilares cargados en los que como estado básico, estado existente antes de que perturbación se desarrolle, el chorro es perfectamente cilíndrico y supercrítico y la carga está dispuesta completamente relajada. Estas hipótesis se revelan fundamentales para modelar los chorros emitidos en electrosprays pues permite asegurar que la densidad de carga volumétrica permanece constante en todo el proceso de rotura como describen los recientes experimentos de de Juan y Fernández de la Mora (1997) y el análisis teórico de Gañán-Calvo (1999b). El modelo permite un cálculo cuantitativo de los tamaños y las cargas resultantes de la rotura del chorro capilares bajo moderados niveles de electrificación y viscosidad. Esto es esencial para el análisis de un spray cargado, su evolución y distribución espacial usando método Lagrangianos de la dinámica de las partículas (Gañán-Calvo *et al.* (1994)).
2. La adimensionalización ha permitido identificar la existencia del denominado parámetro de relajación  $\alpha$  que describe el comportamiento de las cargas dispuestas en la superficie durante el proceso de rotura. Para valores de  $\alpha \gg 1$  el chorro se denomina conductor caracterizándose este límite por la independencia del movimiento de la carga del movimiento fluido. En este límite no existe ninguna restricción a la utilización del modelo de Lee pudiéndose realizar un análisis paramétrico barriendo

en la viscosidad (Número de Ohnesorge  $C$ ), el nivel de electrificación (Número de Taylor  $\gamma_o$ ) y de la semilogitud de onda de la perturbación  $\lambda$ .

3. Del análisis paramétrico en el límite conductor se puede concluir que la longitud de onda más inestable en una rotura natural del chorro disminuye (aumenta) a medida que la electrificación (viscosidad) aumenta, pero tal disminución (aumento) es muy discreto y depende de la amplitud inicial de la perturbación: menos de un 25 % para números de Taylor hasta 0.4 y números de Ohnesorge comprendidos entre 0.01 y 0.5. Este hecho permite validar la hipótesis de que el diámetro del chorro se relaciona con el de las gotas por el factor 1.89 empleada exhaustivamente en la derivación de las leyes de escala [Gañán-Calvo (1997a,b), Fernández de la Mora y Loscertales (1994) entre otros].
4. A los conocidos efectos de la electrificación sobre la estabilización (inestabilización) para la longitud de onda largas (cortas) ya predichos por el análisis lineal, se suma la invariancia de la carga (adimensionalizada con la carga de Rayleigh) que transporta la gota principal con la longitud de la onda adimensional. Este sorprendente resultado es ratificado experimentalmente.
5. La viscosidad aparece como mecanismo más eficaz para disminuir, e incluso eliminar, los volúmenes de las gotas satélites provocando que la carga en dichas gotas se aproxime a los valores límites de Rayleigh siendo éstas susceptibles de sufrir explosiones culómbicas. Gañán-Calvo (1999a) señala a la viscosidad como factor fundamental en la descripción del chorro emitido en un electrospray. La introducción de la viscosidad se revela fundamental para solventar las discrepancias surgidas en las leyes universales de escala derivadas por Gañán-Calvo *et al.* (1997) y Fernández de la Mora y Loscertales (1994) sobre todo para caudales bajos en los que los diámetros del chorro se hacen extremadamente delgados.
6. Se ha realizado el análisis lineal de los chorros no conductores ( $\alpha$  finito)

que ha permitido constatar que el mecanismo de rotura sigue siendo esencialmente capilar. La influencia del parámetro de relajación y de las fuerzas de polarización en la rotura es débil, difiriendo poco los factores de crecimiento  $\sigma$  de aquellos obtenidos en el límite conductor.

7. Este análisis revela también que la viscosidad y la capa límite se revelan esenciales en la dinámica del chorro. La presencia de un campo tangencial induce, para viscosidades bajas, la presencia de una capa límite que se revela muy eficaz en la reordenación de las cargas. La reordenación tiende a eliminar la presencia del campo tangencial produciendo una distribución de cargas semejante a la que se produce en el límite conductor con lo que los factores de crecimiento son indistinguibles entre ambos casos.
8. Los modos hidrodinámicos, aquellos en los que se producen fuertes recirculaciones en el líquido equilibrándose los esfuerzos inerciales con los viscosos y siendo despreciable los capilares, aun siendo fuertemente estables lo son menos que los mismos en el límite conductor dado que el campo tangencial y la capa límite los potencian.
9. Se ha realizado un análisis no lineal en el límite no conductor empleando para ello el modelo unidireccional de Lee. Para ello se ha hecho necesario derivar la versión unidireccional de la ecuación de continuidad de la densidad de carga superficial. Empleando resultados del análisis lineal se ha restringido la validez del modelo unidireccional a aquellos chorros en los que la viscosidad es lo suficientemente elevada como para que la capa límite inducida por el campo tangencial no esté presente. En estas circunstancias el esfuerzo tangencial se difunde hacia el interior del líquido manteniéndose con ello el perfil de velocidades cuasiplano acorde con el empleado por el modelo de Lee. De los resultados obtenidos con este modelo podemos concluir que:
10. Los campos eléctricos interior y tangencial son despreciables en la mayor parte de la evolución del chorro salvo en los últimos instantes en los que el campo tangencial cobra cierta importancia localizada en la

proximidad del estrangulamiento. Este comportamiento conlleva a que la evolución, en su mayor parte, se asemeje al límite conductor por lo que los tiempos de rotura y los volúmenes de las gotas difieran poco de aquellos calculados por el límite conductor.

11. El parámetro de relajación bajo ( $\alpha$  del orden unidad o menor) se traduce en que las cargas no son capaces de sustraerse al movimiento fluido siendo arrastradas por éste sobre todo en los últimos instantes de la rotura cuando la velocidad es más elevada. El movimiento fluido convecta tanto la masa como la carga dando lugar a una mayor concentración de carga en la gota principal que en la satélite. Este efecto es tanto más señalado cuanto menor es el parámetro de relajación.

## 6.1 Posibles líneas futuras

1. Mejorar las prestaciones del montaje experimental para conseguir medidas más finas de los volúmenes y de las cargas transportadas por las gotas. Para ello se pretende aumentar la definición de la imagen y disminuir las posibles fugas eléctricas.
2. Con el montaje mejorado, realizar experimentos con líquidos dieléctricos tales como el tolueno o el hexano buscando corroborar los resultados numéricos obtenidos por el modelo de Lee con factor de relajación finito.
3. Para líquidos de conductividad finita resolver el problema tridimensional modelando adecuadamente la capa límite existente en el caso de viscosidad pequeña y evaluar con ello los errores cometidos tanto por la teoría lineal como por el modelo de Lee.
4. Dado que el modelo de Lee es adecuado para el estudio de chorros conductores, extender este modelo para que tome en cuenta el fenómeno de la emisión de iones existente en los chorros de los electrosprays conductores de tamaño nanométrico (Gamero, 1998). Este modelo permitiría establecer el instante en el que se produciría tal emisión y evaluar tanto

la cantidad de iones emitida como la influencia que dicha emisión tiene en la evolución del chorro cargado.

# Bibliografía

- ASHGRIZ, N. Y MASHAYEK, F. 1995 Temporal analysis of capillary jet breakup. *J. Fluid Mech.* **291**, 163–190.
- BAILEY, A. G. 1988 *Electrostatic spraying of liquids*. John Wiley & Sons, Inc.
- BARBET, B. 1997 Stimulations électrohydrodynamique et thermique de jets de liquide conducteur. tesis doctoral, Université Joseph Fourier-Grenoble-1.
- BASSET, A. B. 1894 waves and jets in a viscous liquid. *Am. J. Math.* **16**, 93–110.
- BOGY, D. B. 1978 Use of one-dimensional cosserat theory to study instability in a viscous liquid jet. *Phys. Fluids* **21**, 190–197.
- BOGY, D. B. 1979 Drop formation in a circular liquid jet. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **11**, 207–228.
- BORKAR, A. Y TSAMOPULOS, J. 1991 Boundary-layer analysis of the dynamics of axisymmetric bridges. *Phys. Fluids A* **3** (12), 2866–2874.
- BOUSFIELD, D., KEUNINGS, R., MARRUCCI, G. Y DENN, M. M. 1986 Non-linear analysis of the surface tension driven breakup of viscoelastic filaments. *J. Non-Newt. Fluid Mech.* **21**, 79–97.
- BREBBIA, C. A. Y DOMINGUEZ, J. 1989 *Boundary Elements. An Introductory Course*. Computational Mechanics Publications and McGraw-Hill Book Company.

- BRENN, G. Y LACKERMEIER, U. 1997 Drop formation from a vibrating orifice generator driven by modulated electrical signals. *Phys. Fluids* **9** (12), 3658–3669.
- BRUNNER, D. J. 1998 Jet breakup mechanism in the cone-jet mode of electrohydrodynamic spray. Proyecto fin de carrera, TU Delft.
- CHANDRASEKHAR, S. 1961 *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, 1<sup>a</sup> edición. Clarendon, Oxford.
- CHAUDHARY, K. C. Y MAXWORTHY, T. 1980a The non linear capillary instability of a liquid jet. part ii. experiments on jet behavior before droplet formation. *J. Fluid Mech.* **96**, 287–297.
- CHAUDHARY, K. C. Y MAXWORTHY, T. 1980b The non linear capillary instability of a liquid jet. part iii. experiments on satellite drop formation and control. *J. Fluid Mech.* **96**, 287–297.
- CHAUDHARY, K. C. Y REDEKOPP, L. G. 1980 The non linear capillary instability of a liquid jet. part i. *J. Fluid Mech.* **96**, 257–270.
- CLOUPEAU, M. Y PRUNET-FOCH, B. 1989 Electrostatic spraying of liquids in cone-jets mode. *J. Electrostatic* **22**, 135–159.
- DE JUAN, L. Y FERNÁNDEZ DE LA MORA, J. 1997 Charge and size distributions of electrospray drops. *J. Coll. Interf. Sci.* **186**, 280–293.
- DONNELLY, R. J. Y GLABERSON, W. 1966 Experiment on capillary instability of liquid jets. *Proc. R. Soc. Lond. A* **290**, 547–556.
- EGGERS, J. Y DUPONT, T. F. 1994 Drop formation in a one-dimensional approximation of the navier-stokes equations. *J. Fluid Mech.* **262**, 205.
- FERNÁNDEZ DE LA MORA, J. 1996 On the outcome of the coulombic fission of a charged isolated drop. *J. Coll. Interface Sci.* **178**, 209–218.
- FERNÁNDEZ DE LA MORA, J. Y LOSCERTALES, I. 1994 The current emitted by highly conducting taylor cones. *J. Fluid Mech.* **260**, 155–184.

- GAÑÁN-CALVO, A. M. 1997a Cone-jet analytical extension of Taylor's electrostatic solution and the asymptotic universal scaling laws in electrospaying. *Phys. Rev. Lett.* **79** (2), 217–220.
- GAÑÁN-CALVO, A. M. 1997b On the theory of electrohydrodynamically driven capillary jets. *J. Fluid Mech.* **335**, 165–188.
- GAÑÁN-CALVO, A. M. 1999a Comunicación interna. Pendiente de publicación.
- GAÑÁN-CALVO, A. M. 1999b The surface charge in electrospaying: Its nature and its universal scaling law. *J. Aerosol Sci.* **30** (7), 863–873.
- GAÑÁN-CALVO, A. M., DÁVILA, J. Y BARRERO, A. 1997 Current and droplets size in the electrospaying of liquid. scaling laws. *J. Aerosol Sci.* **28** (2), 249–275.
- GAÑÁN-CALVO, A. M., LASHERAS, J. C., DÁVILA, J. Y BARRERO, A. 1994 The electrostatic spray emitted from an electrified conical meniscus. *J. Aerosol Sci.* **24**, 1121–1142.
- GAMERO, M. 1998 The transfer of ions and charged nanoparticles from solution to the gas phase electrospay. tesis doctoral, Universidad de Yale.
- GARCÍA, F. J. 1998 Aplicación de modelos unidimensionales a la dinámica de columnas líquidas con y sin campo eléctrico. tesis doctoral, Universidad de Sevilla.
- GARCÍA, F. J. Y CASTELLANOS, A. 1994 One-dimensional models for slender axisymmetric viscous liquid jets. *Physics of Fluids* **6** (8), 2676–2689.
- GARCÍA, F. J. Y CASTELLANOS, A. 1996 One-dimensional models for slender axisymmetric viscous liquid bridges. *Phys. Fluids* **8** (11), 2837–2846.
- GOEDDE, E. F. Y YUEN, M. C. 1970 Experiments on liquid jets instability. *J. Fluid Mech.* **40**, 495–511.

- GOMEZ, A. Y TANG, K. 1994 Charge and fission of droplets in electrostatic sprays. *Phys. Fluids* **6** (1), 404–414.
- GREEN, A. E. 1976 On the nonlinear behavior of fluid jets. *Int. J. Eng. Sci.* **14**, 49–63.
- HARTMAN, R. P. A., BRUNNER, D. J., CAMELOT, D. M. A., MARIJNISSEN, J. C. M. Y SCARLETT, B. 1999 Electrohydrodynamic atomization in the con-jet mode physical modeling of the liquid cone and jet. *J. Aerosol Sci.* **30** (7), 823–849.
- HAYATI, I., BAYLEY, A. I. Y TADROS, T. F. 1986a Investigations into the mechanisms of electrohydrodynamically spraying of liquids. i. effect of electric field and the environment on pendant drops and factors affecting the formation of stable jets and atomization. *J. Colloid Interface Sci.* **117**, 205–221.
- HAYATI, I., BAYLEY, A. I. Y TADROS, T. F. 1986b Investigations into the mechanisms of electrohydrodynamically spraying of liquids. ii. mechanism of stable jet formation and electrical forces acting on a liquid cone. *J. Colloid Interface Sci.* **117**, 222–230.
- HIGUERA, M., NICOLÁS, J. A. Y VEGA, J. M. 1994 Linear oscillations of weakly dissipative axisymmetric liquid bridges. *Phys. Fluids* **6** (2), 438–450.
- HUEBNER, A. L. 1969 Disintegration of charged liquid jets. *J. Fluid Mech.* **38**, 679–688.
- JACKSON, J. 1962 *Classical Electrodynamics*, 2<sup>a</sup> edición. John Wiley & Sons, Inc.
- KELLER, J. B., RUBINOW, S. I. Y TU, Y. O. 1973 Spatial instability. *Physics of Fluids* **16** (12), 2052–2055.
- KEUNINGS, R. 1986 A transient finite element method for solving deformable surface flows. *J. Comp. Phys.* **62**, 199.

- LAFRANCE, P. 1975 Nonlinear break up of a laminar liquid jet. *Phys. Fluids* **18**, 428–432.
- LANDAU, L. D. Y LIFSHITZ, E. M. 1960 *Electrodynamics of continuous media*. Pergamon, London.
- LEE, H. C. 1974 Drop formation in liquid jets. *IBM J. Res. Develop.* **18**, 364–369.
- LEFEVBRE, A. H. 1989 *Atomization and sprays*. Hemisphere publishing Corporation.
- LEIB, S. J. Y GOLDSTEIN, M. E. 1986 The generation of capillary instabilities on a liquid jet. *J. Fluid Mech.* **168**, 479–500.
- LÓPEZ-HERRERA, J. M., GAÑÁN-CALVO, A. M. Y PEREZ-SABORID, M. 1999 One-dimensional simulation of the breakup of capillary jets of conducting liquids. application to e.h.d spraying. *J. Aerosol Sci.* **30** (7), 895–912.
- MAGARVEY, R. H. Y OUTHOUSE, L. E. 1962 Note on the break-up of a charged liquid jet. *J. Fluid Mech.* **13**, 151–157.
- MANSOUR, N.Ñ. Y LUDGREN, T. S. 1990 Satellite formation in capillary jet breakup. *Phys. Fluids A* (2), 1141–1144.
- MELCHER, J. R. 1963 *Field-coupled surface waves*. M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts.
- MELCHER, J. R. 1969 Electrohydrodynamics: A review of the role of interfacial shear stresses. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **1**, 111–146.
- MELCHER, J. R. Y WARREN, E. P. 1971 Electrohydrodynamics current carrying semi-insulating jet. *J. Fluid Mech.* **47**, 127–143.
- MESEGUER, J. 1983 The breaking of axisymmetric slender liquid bridges. *J. Fluid Mech.* **130**, 123–151.
- MESTEL, A. J. 1994 Electrohydrodynamic stability of slightly viscous jet. *J. Fluid Mech.* **274**, 93–113.

- MESTEL, A. J. 1996 Electrohydrodynamic stability of highly viscous jet. *J. Fluid Mech.* **312**, 311–326.
- MUTOH, M., KAIEDA, S. Y KIMIMURA, K. 1979 Convergence and disintegration of liquid jets induced by an electrostatic field. *J. Appl. Phys.* **50**, 3174–3179.
- NAYFEH, A. 1970 Nonlinear stability of a liquid jet. *Phys. Fluids* **13**, 841–847.
- ORME, M. Y MUNTZ, E. P. 1990 The manipulation of capillary stream breakup using amplitude-modulated disturbances: A pictorial quantitative representation. *Physics of Fluids* **2** (7), 1124–1140.
- PANTANO, C., GAÑÁN-CALVO, A. M. Y BARRERO, A. 1994 Zeroth order, electrohydrostatic solution for electro spraying in cone-jet mode. *J. Aerosol Sci.* **25** (6), 1065–1077.
- PERALES, J. M. Y MESEGUER, J. 1992 Theoretical and experimental study of the vibration of axisymmetric viscous liquid bridges. *Phys. Fluids A* **2** (4), 1110–1130.
- PLATEAU, J. 1846 *Acad. Sci. Bruxelles Mém.* **23**, 25.
- PLATEAU, J. 1863 Experimental and theoretical researches on the figures of equilibrium of a liquid mass withdrawn from the action of gravity. *Ann. Rep. Smithsonian Institution* págs. 207–285.
- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. Y FLANNERY, B. 1987 *Numerical Recipes in FORTRAN: The art of Scientific Computing.*, 2<sup>a</sup> edición. Cambridge University Press.
- RAYLEIGH, L. 1878 On the instability of jets. *Proc. Lond. Math. Soc.* **10**, 4–13.
- RAYLEIGH, L. 1879 *Proc. R. Soc. London* **29**, 94.

- RAYLEIGH, L. 1882 Further observations upon liquid jets. *Proc. R. Soc. London* **34**, 130–145.
- RAYLEIGH, L. 1891 *Nature*, , vol. 44. London.
- RAYLEIGH, L. 1892 On the instability of a cylinder of viscous liquid under capillary forces. *Philos. Mag.* **34** (207), 145–154.
- RUTLAND, D. F. Y JAMESON, G. J. 1970 A non-linear effect in the capillary instability of liquid jets. *J. Fluid Mech.* **46**, 267–271.
- SAVART, F. 1833 Mémoire sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires em mince paroi. *Annal. Chim.* **53**, 337.
- SAVILLE, D. A. 1970 Electrohydrodynamic stability: Fluid cylinders in longitudinal electric fields. *Phys. Fluid* **13**, 2987–2994.
- SAVILLE, D. A. 1971 Stability of electrically charged viscous cylinders. *Phys. Fluid* **14**, 1095–1099.
- SAVILLE, D. A. 1971a Electrohydrodynamic stability: Effects of charge relaxation at the interface of a liquid jet. *J. Fluid Mech.* **48**, 815–827.
- SAVILLE, D. A. 1997 Electrohydrodynamics: The Taylor-Melcher leaky dielectric model. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **29**, 27–64.
- SCHULKES, R. M. S. M. 1993 Dynamics of liquid jets revisited. *J. Fluid Mech.* **250**, 635–650.
- SETIAWAN, E. Y HEISTER, S. 1997 Nonlinear modeling of an infinite electrified jet. *J. Electrostatic* **42**, 243–257.
- TAYLOR, G. I. 1964 Disintegration of water drops in a electric field. *Proc. R. Soc. Lon.* **A** (280), 383–397.
- TOMOTIKA, S. 1935 On the stability of a cylindrical thread of a viscous liquid surrounded by another viscous fluid. *Proc. R. Soc. Lon.* **150**, 322.

- WEBER, V. C. 1931 Zum zerfall eines flussigkeitsstrahles. *Z. Angew. Math. Mech.* **11**, 151–163.
- YUEN, M. 1968 nonlinear stability of a liquid jet. *J. Fluid Mech.* **33**, 151.
- ZELENY, J. 1914 The electrical discharge from liquids points, and a hydrostatic method of measuring the electric intensity at their surfaces. *Phys. Rev.* **3**, 69–91.
- ZELENY, J. 1915 On the conditions of instability of liquids drops, with applications to the electrical discharge from liquid points. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **18**, 71–93.
- ZELENY, J. 1917 Instability of electrified liquid surfaces. *Phys. Rev.* **10**, 1–6.
- ZHANG, Y. Y ALEXANDER, J. I. D. 1990 Sensitivity of liquid bridges subject to axial residual acceleration. *Phys. Fluids A* **1** (11), 1966–1974.