

L18322591

043/368

**LA SUCESIÓN DE FIBRACIÓN HOMOTÓPICA DE  $K$ -TEORÍAS  
ASOCIADA A LA LOCALIZACIÓN DE CATEGORÍAS EXACTAS**

Memoria presentada por Manuel E. Cárdenas Escudero  
para optar al grado de DOCTOR EN MATEMÁTICAS  
por la UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Director de la Memoria



Antonio Quintero Toscano

Doctorando:

Manuel E. Cárdenas Escudero



UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
C/PISTOBA 15

Fecha: Abril 2001

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

NEGOCIADO DE LIBROS

Queda registrado en el Libro de Registro al  
folio 33 número 408 del libro  
correspondiente.  
Sevilla, 17 ABR. 2001

El Jefe del Negociado,

*[Handwritten signature]*

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Depositado en el Depto. Geom. y Top  
de la Fac. Matemáticas  
de esta Universidad desde el día 25 abril  
hasta el día 18 de mayo de 2001  
Sevilla 18 de mayo de 2001  
EL DIRECTOR DE

*[Handwritten signature]*



RESUMEN. En esta Memoria se extiende la noción de localización a categorías exactas produciendo una sucesión de fibración homotópica que relaciona la  $K$ -teoría de esta categoría con la de su localización.

# Índice General

Introducción	v
Capítulo 1. La $K$ -teoría de una categoría de Waldhausen	1
1.1. Conjuntos simpliciales. Algunos ejemplos básicos	1
1.2. Homotopía	4
1.3. Funtor de realización geométrica	5
1.4. Nervios	9
1.5. Nociones de Teoría de Homotopía	11
1.6. La $K$ -teoría de una categoría de Waldhausen	13
1.7. Categoría de Waldhausen con cofibraciones y equivalencias débiles	13
Capítulo 2. Categorías Exactas y Localización	21
2.1. Categorías exactas	21
2.2. Localización de categorías exactas	25
2.3. Demostración del teorema 2.3.6	33
Capítulo 3. Categorías Exactas y Completaciones	46
3.1. Completación Karoubiana de una Categoría Aditiva	46
3.2. Otras completaciones de Categoría Aditiva	48
3.3. Localización y Completación de Categorías Exactas	49
3.4. Demostración alternativa de la Proposición 3.3.1	51
3.5. Localización y Completación de Categorías Exactas	57
Capítulo 4. La categoría $C(\mathcal{E})$ y su $K$ -teoría	60
4.1. La categoría $C(\mathcal{E})$ y sus estructuras	60
4.2. La $K$ -teoría de $C(\mathcal{E})$	62
Capítulo 5. Un teorema de Devissage	68
5.1. Categorías Estacionarias	68
5.2. La $K$ -teoría de las categorías estacionarias	80
5.3. Una aplicación	87
Capítulo 6. Teorema de Localización	90
6.1. Teorema Principal 6.1.1	90
6.2. Demostración de la Proposición 6.1.2	94
6.3. Una aplicación	100
<b>Parte 1. Apéndices</b>	<b>103</b>
Apéndice A. Cálculo de Fracciones	104
Apéndice B. La inmersión de Gabriel-Quillen	108

Apéndice. Bibliografía

111

## Introducción

La  $K$ -teoría algebraica surge de manera independiente en la topología geométrica y en la geometría algebraica. En topología geométrica los orígenes de la  $K$ -teoría se remontan al llamado grupo de Whitehead,  $Wh(\pi)$ , desarrollado por él mismo en trabajos de 1939, 1941 y 1950, para un grupo  $\pi$  y el cual describe obstrucciones en teoría de homotopía simple, véase [Coh73]. En geometría algebraica fue Grothendieck (1957) el primero en considerar el grupo de clases  $K(X)$  de fibrados vectoriales sobre una variedad algebraica  $X$ . Grothendieck estaba interesado en la categoría abeliana  $M(X)$  de haces coherentes sobre una variedad algebraica  $X$  junto con la subcategoría exacta  $P(X) \subseteq M(X)$  de haces localmente libres sobre  $X$ . De forma más general, definió un grupo  $K(\mathcal{A})$  asociado a ciertas subcategorías de una categoría abeliana, esto es, las actuales categorías exactas. Por otra parte, M. Atiyah y F. Hirzebruch (1959-1961) imitaron la construcción de Grothendieck para fibrados topológicos sobre un espacio de Hausdorff compacto  $X$  y observaron que el producto tensorial de fibrados y la suma de Whitney hacía del grupo de Grothendieck  $K(X)$  un anillo conmutativo. La periodicidad descubierta por R. Bott (1957) les permitió definir una teoría de cohomología que hoy es conocida como  $K$ -teoría topológica.

Ya desde sus orígenes la  $K$ -teoría algebraica es de gran interés en la topología geométrica. Así las primeras aplicaciones topológicas de la  $K$ -teoría vienen del estudio algebraico del grupo de Grothendieck  $K(R)$ , ahora llamado  $K_0(R)$ , de la categoría aditiva de módulos proyectivos finitamente generados asociado a un anillo  $R$ , así como del grupo  $K_1(R)$ , cuando tomamos como anillo  $R = \mathbb{Z}\pi$  el anillo de coeficientes de  $\pi$ , el grupo fundamental de un espacio topológico, (que coincide con la definición de Grothendieck ya que se tiene que  $K(R) = K(X)$  para  $X = \text{Spec}(R)$ , ver [Weib]). Más aún, el grupo de Whitehead,  $Wh(\pi)$ , puede ser descrito como un cociente de  $K_1(\mathbb{Z}\pi)$ . Los  $K$ -grupos de estos anillos aparecen como los lugares apropiados para las obstrucciones descritas en los teoremas  $h$ - y  $s$ -cobordismos (Smale en 1965 y Barden, Mazur y Stallings en 1963) y en la conocida como tesis de Siebenmann (L. Siebenmann en 1966 y V. Golo en 1966) donde se describe la obstrucción para la existencia de borde para variedades abiertas. Las aplicaciones geométricas de la  $K$ -teoría algebraica parecen pues provenir de  $K$ -teorías de categorías aditivas. El estudio de la  $K$ -teoría algebraica de categorías aditivas tiene en la actualidad un doble interés:

- a) en topología controlada, ya que las  $K$ -teorías de las diversas categorías aditivas del algebra controlada, ver [ACFP94], [PW86], [PW85], etc, permiten describir el 'assembly map' de la sucesión de cirugía en la topología geométrica de variedades en términos de homología, véanse por ejemplo [Ped00] y [Ped97], lo que ha llevado a una descripción más moderna de la conjetura de Novikov en

- sus diversas variantes y algunas respuestas parciales a éstas, véanse [CP95] y [Gol97] entre otros.
- b) en geometría algebraica, donde la  $K$ -teoría de la categoría aditiva de los  $R$ -módulos proyectivos finitamente generados para un anillo  $R$ , la cual extiende las definiciones clásicas de los  $K$ -grupos  $K_0$  y  $K_1$  de un anillo  $R$  a la llamada  $K$ -teoría algebraica superior, tiene aplicaciones en diversos campos de la geometría algebraica y en la teoría de números, véanse [Weia] y [Mil71].

Para una detallada exposición histórica de la  $K$ -teoría puede verse [Weia].

El objetivo de esta Memoria es extender el estudio y la metodología desarrollados en [Ped84], [PW86], [PW85], [ACFP94], [CP95], [CP97], etc, sobre la  $K$ -teoría algebraica de categorías aditivas al estudio de la  $K$ -teoría algebraica de las categorías exactas, que es una descripción más cercana a la  $K$ -teoría usada en geometría algebraica. Existe ya un primer intento en [CG] de extender esta metodología a las categorías abelianas.

Muchas de las aplicaciones de la  $K$ -teoría algebraica han sido posibles gracias al trabajo realizado por Waldhausen en [Wal85] extendiendo el trabajo original de Quillen, [Qui72], sobre la  $K$ -teoría algebraica de categorías exactas a un marco mucho más amplio. La descripción de Waldhausen se puede llevar fácilmente al lenguaje de categorías y funtores lo que le da la potencia y flexibilidad necesaria para ser aplicada con efectividad en los campos antes mencionados, sobre todo en lo relacionado con la topología controlada.

Uno de los objetivos fundamentales de la  $K$ -teoría algebraica es la determinación de sucesiones de fibración homotópica de  $K$ -teorías que dan lugar a sucesiones exactas largas de  $K$ -grupos, relacionando la  $K$ -teoría de una categoría aditiva con la de subcategorías aditivas apropiadas. Por ejemplo, esta idea es crucial en la comprobación de los axiomas de Steenrod para la teoría de homología asociada a la  $K$ -teoría de categorías controladas, véase [CP95]. Habitualmente tales sucesiones de fibración se obtienen a partir de las llamadas filtraciones de Karoubi, [CP97], que en el caso de las categorías aditivas asociadas a la topología controlada muestran una situación geométrica similar a la de una cofibración de espacios topológicos.

Por otra parte, el estudio de las categorías exactas ha venido motivado por las aplicaciones que tiene la  $K$ -teoría en el estudio de los anillos de grupos y de fibrados vectoriales sobre esquemas en geometría algebraica, [Weib]. En el empeño de extender los métodos mencionados más arriba a categorías exactas y obtener con ello resultados, como el 'delooping' de la  $K$ -teoría de categorías exactas, como en [Sch00], nos encontramos en la necesidad de determinar sucesiones de fibración homotópica de  $K$ -teorías de categorías exactas.

En esta Memoria seguimos parcialmente el esquema dibujado por Quillen en [Qui72] para obtener la sucesión de fibración asociada a la localización de categorías exactas. Para ello primero repasamos la descripción de Waldhausen de la  $K$ -teoría algebraica para luego más adelante desarrollar un teorema de Devissage apropiado para categorías de Waldhausen. A su vez, describimos la localización de categorías exactas como una imitación formal del concepto de filtración usado por Karoubi para las categorías aditivas. Por último demostramos el teorema de localización utilizando técnicas novedosas basadas en la descripción de Waldhausen para la  $K$ -teoría algebraica y presentamos una nueva demostración del "Mixed Localization Theorem" de Levine, [Lev83], y, por tanto, como un caso especial damos

una demostración alternativa del Teorema de Localización de Quillen para categorías abelianas, [Qui72][pp. 113-116]. En la demostración realizada por Levine se utilizan técnicas ya usadas por Quillen en su teorema. Esto impone la existencia de una categoría ambiente que sea abeliana dentro de la cual los cálculos tienen sentido. En nuestro contexto esto no es absolutamente necesario y las demostraciones están hechas sin categoría abeliana ambiente alguna, aunque hemos recurrido a dicha categoría ambiente con el fin de simplificar algunos resultados técnicos secundarios. Es más, los cálculos algebraicos están hechos con la descripción de Waldhausen de la  $K$ -teoría en vez de la construcción  $Q$  de Quillen. Con estas reducciones pretendemos en un trabajo futuro establecer el teorema principal, 6.1.1, en términos lo suficientemente generales para obtener un 'delooping' en categorías exactas en términos más categoriales que en [Sch00], esto es usando sólo categorías de Waldhausen y axiomas de localización. Además en esta Memoria hemos desarrollado una generalización para las categorías de Waldhausen de una herramienta fundamental en la  $K$ -teoría algebraica: el teorema de Devissage; que previamente estaba restringido al campo de las categorías abelianas.

A continuación pasamos a describir con cierto detalle el contenido de la Memoria.

En el capítulo 1 se describe la versión de Waldhausen de la  $K$ -teoría. Ésta se basa en el concepto de una categoría con cofibraciones y equivalencias débiles. Este capítulo además recoge una colección de teoremas fundamentales que nos permiten comparar las  $K$ -teorías de categorías que se relacionan mediante diversos morfismos. Además este capítulo contiene los resultados básicos sobre conjuntos simpliciales y la teoría de homotopía sobre nervios de categorías pequeñas que son necesarios para describir la  $K$ -teoría algebraica.

En el capítulo 2 se presenta el concepto de categoría exacta. Las categorías exactas se tratan desde dos puntos de vista equivalentes: el de Bass como subcategoría de una categoría abeliana y el de Quillen como una categoría aditiva que satisface ciertos axiomas extras, véase [Weib]. Aunque preferimos el punto de vista de Quillen, el de Bass resulta ser muy útil a la hora de realizar cálculos. Además describimos de forma axiomática el concepto de localización de categorías exactas y damos la estructura natural de categoría de Waldhausen de una categoría exacta. Esta descripción se presenta con una lista de axiomas a satisfacer en términos de cierta subcategoría,  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ . Después definimos la categoría exacta  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  mediante el llamado cálculo de fracciones, por ambos lados, sobre  $\mathcal{U}$  por la clase de los morfismos en  $\mathcal{U}$  que tienen núcleo y conúcleo en  $\mathcal{A}$ , cuando quiera que estos existan. El cálculo de fracciones se describe someramente en el apéndice A. Se demuestra que  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  es efectivamente una localización de  $\mathcal{U}$  y se dan algunos otros resultados sobre el comportamiento de los morfismos en la categoría localizada  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$ .

En el capítulo 3 mejoramos las propiedades de las categorías exactas dadas, posibilitando poderlas reemplazar por categorías completadas que a nivel  $K$ -teórico son equivalentes a las originales. Para ello definimos la completación idempotente y observamos que basta con utilizar ciertas restricciones de dicha completación para nuestro objetivo. Es más, comprobamos que estas completaciones son compatibles con la localización tal como la definimos en el capítulo anterior.

El capítulo 4 contiene los resultados básicos sobre la categoría exacta de complejos de cadenas finitas sobre una categoría exacta, ver [TT90]. Demostramos,



4.2.1, que la inclusión natural  $\mathcal{E} \hookrightarrow C(\mathcal{E})$  induce una equivalencia de homotopía entre sus  $K$ -teorías y que además la  $K$ -teoría de  $C(\mathcal{E})$ , en realidad, sólo depende del tipo de homotopía de la clase de sus elementos, 4.2.3. Este último resultado no aparece de forma explícita en la literatura.

El capítulo 5 desarrolla en el campo de las categorías de Waldhausen una herramienta cuyo uso estaba restringido al campo de las categorías abelianas: el teorema de Devissage. Se demuestra que si todos los objetos de una categoría tienen resoluciones finitas con cocientes en una subcategoría fija entonces ambas categorías tienen  $K$ -teorías homotópicamente equivalentes. Este resultado generaliza el teorema clásico de Devissage de Quillen, [Qui72].

En este capítulo describimos el teorema de localización y la fibración homotópica de  $K$ -teorías asociada a éste. Además mostramos algunas aplicaciones de este teorema como la generalización del teorema clásico de localización de Quillen y el "Mixed Localization Theorem" de Levine, [Lev83][Appendix].

Como ya dijimos el apéndice A es un resumen del llamado cálculo de fracciones, que es utilizado en la definición de  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$ .

El apéndice B describe la inmersión de Gabriel-Quillen  $i$  de una categoría exacta  $\mathcal{E}$  en la categoría abeliana  $Ab(\mathcal{E})$  de los funtores exactos a izquierda  $F: \mathcal{E}^{op} \rightarrow Ab$  dada por  $i(E) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\_, E)$ . Este resultado nos permite intercambiar los puntos de vista en la descripción de las categorías exactas debidos a Quillen y Bass.

Sevilla, 18 de Septiembre de 2000

M.

## CAPÍTULO 1

# La $K$ -teoría de una categoría de Waldhausen

Este capítulo es un resumen del trabajo realizado por Waldhausen en [Wal85] para generalizar la definición de Quillen, [Qui72], de la  $K$ -teoría de orden superior en categorías más generales que las exactas. Así dada una categoría con cofibraciones y equivalencias débiles obtenemos un espacio topológico, o más precisamente un espectro, llamado  $K$ -teoría cuyos grupos de homotopía son los conocidos  $K$ -grupos. Además describimos los teoremas fundamentales de la  $K$ -teoría algebraica que nos describen el comportamiento de dicha  $K$ -teoría con respecto a distintos tipos de funtores entre categorías de Waldhausen.

También este capítulo preliminar recoge los resultados de la teoría de homotopía de conjuntos simpliciales necesarios para definir lo que se entiende por la  $K$ -teoría de una categoría de Waldhausen. Las referencias básicas utilizadas son [May67], [FP90] y [GJ]. Se repasa someramente los conceptos básicos sobre conjuntos simpliciales y su generalización los conjuntos multisimpliciales. Es de suma importancia la descripción de la noción de homotopía entre conjuntos simpliciales, así como su paso a la realización geométrica, ya que el ejemplo fundamental es el nervio de una categoría pequeña.

### 1.1. Conjuntos simpliciales. Algunos ejemplos básicos

Sea  $\Delta$  la categoría cuyos objetos son los conjuntos finitos ordenados  $[n] = \{0 < 1 < \dots < n\}$  donde  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y los morfismos son aplicaciones monótonas  $\alpha : [q] \longrightarrow [n]$  con  $0 \leq i \leq j \leq q$  y  $\alpha(i) \leq \alpha(j)$ . Se tienen las siguientes aplicaciones monótonas básicas.

- (1) Aplicaciones monótonas inyectivas:  $\delta^i = \delta_n^i : [n-1] \longrightarrow [n]$  definidas como

$$\delta^i(j) = \begin{cases} j & j < i \\ j+1 & j \geq i \end{cases}$$

- (2) Aplicaciones monótonas epiyectivas:  $\sigma^i = \sigma_n^i : [n+1] \longrightarrow [n]$  definidas como

$$\sigma^i(j) = \begin{cases} j & j \leq i \\ j-1 & j > i \end{cases}$$

Estas aplicaciones satisfacen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \delta^j \delta^i &= \delta^i \delta^{j-1} & i < j; & \quad \sigma^j \delta^i = \delta^i \sigma^{j-1} & i < j; & \quad \sigma^j \delta^i = \delta^{i+1} \sigma^j & i > j+1 \\ \sigma^j \sigma^i &= \sigma^i \sigma^{j+1} & i \leq j; & & & \quad \sigma^i \delta^i = 1 = \sigma^i \delta^{i+1}. \end{aligned}$$

Más aún, cualquier aplicación monótona puede ser descrita como composición de estas aplicaciones monótonas básicas. Más explícitamente

LEMA 1.1.1. *Toda aplicación monótona  $\alpha : [q] \longrightarrow [n]$  se puede describir como la composición:*

$$\alpha = \delta^{i_1} \dots \delta^{i_s} \sigma^{j_1} \dots \sigma^{j_t}$$

con  $i_1 > i_2 > \dots > i_s$  representando elementos que no están en la imagen de  $\alpha$  y  $j_1 < \dots < j_t$  representan las repeticiones  $\alpha(j_k) = \alpha(j_{k+1})$ .

Denotemos por  $\nabla(n)$  el *símplice estándar afín* dado por el cierre convexo de los puntos  $a_i = \{0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0\}$  para  $i = 0, \dots, n$  en  $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^\infty$  y a su interior por  $\overset{\circ}{\nabla}(n) = \{\sum t_i A_i / 1 \neq t_i \neq 0 \text{ y } \sum t_i = 1\} \subset \nabla(n)$ . Cualquier aplicación monótona  $\alpha : [q] \longrightarrow [n]$  puede ser realizada en  $\mathbb{R}^\infty$  como una aplicación simplicial  $|\alpha| : \nabla(q) \longrightarrow \nabla(n)$  de la forma obvia cumpliendo  $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$ .

Los resultados siguientes servirán de ayuda para cálculos futuros.

LEMA 1.1.2. *Para cada  $x \in \nabla(n)$  existe exactamente un  $q \leq n$ , sólo un  $u \in \overset{\circ}{\nabla}(q)$  y sólo una aplicación monótona inyectiva  $[q] \longrightarrow [n]$  tal que  $x = |\alpha|(u)$ .*

LEMA 1.1.3.  *$\alpha : [q] \longrightarrow [n]$  está determinada por el valor de  $|\alpha|$  en cualquier  $x \in \overset{\circ}{\nabla}(n)$ .*

Las demostraciones de los lemas 1.1.1, 1.1.2 y 1.1.3 son simples ejercicios; ver [FP90].

DEFINICIÓN 1.1.4. Un *conjunto simplicial*  $X$  es un funtor

$$X : \Delta^{op} \longrightarrow \text{Sets}$$

donde  $\Delta^{op}$  es la categoría opuesta de  $\Delta$ ; esto es  $\Delta^{op}([q], [n]) = \Delta([n], [q])$ . De forma alternativa se puede describir  $X$  como una colección de conjuntos  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ , donde  $X_n = X([n])$  es el llamado *conjunto de  $n$ -símplices* de  $X$ , con aplicaciones estructurales

$$\begin{aligned} d_i &= X(\delta^i) : X_n \longrightarrow X_{n-1} & i = 0, \dots, n+1 & \quad (\text{caras}), \\ s_i &= X(\sigma^i) : X_n \longrightarrow X_{n+1} & i = 0, \dots, n & \quad (\text{degeneraciones}) \end{aligned}$$

cumpliendo

$$\begin{aligned} d_i d_j &= d_{j-1} d_i & \text{para } i < j \\ d_i s_j &= \begin{cases} s_{j-1} d_i & \text{para } i < j \\ 1 & \text{para } i = j, j+1 \\ s_j d_{i-1} & \text{para } i > j+1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$s_i s_j = s_{j+1} s_i \quad \text{para } i \leq j$$

Un *símplice*  $x$  se dice *degenerado* si  $x = s_i y$  para algún  $i$ . Si  $x = d_i y$ , entonces se dice que  $x$  es una *cara* de  $y$ .

Una aplicación monótona  $\alpha : [q] \longrightarrow [n]$  induce un morfismo  $X(\alpha) : X_n \longrightarrow X_q$ . En general, dado  $\alpha \in \text{Mor}(\Delta^{op})$  escribiremos  $\alpha^* = X(\alpha) : X \rightarrow X$ , sin especificar dimensiones.

Una *aplicación simplicial*  $f : X \longrightarrow Y$  entre conjuntos simpliciales es una transformación natural entre dos funtores  $X$  e  $Y$ , o alternativamente, una aplicación simplicial es una colección de funciones  $f = \{ f_i : X_i \longrightarrow Y_i \}$  que conmutan con los operadores  $d_i$  y  $s_i$ . Denotaremos por *SiSets* a la categoría de los conjuntos simpliciales y aplicaciones simpliciales.

Diremos que  $A$  es un *subconjunto simplicial* de  $X$ , y lo escribiremos  $A \subset X$ , si  $A([n]) \subseteq X([n])$  para todo  $n$  y para todo  $\alpha \in \text{Mor}(\Delta^{op})$   $\alpha^*(A) \subseteq A$ , así que, en particular,  $d_i(A_n) \subseteq A_{n-1}$  y  $s_i(A_n) \subseteq A_{n-1}$  para todo  $n$ . Un conjunto  $L$  se dice *conjunto subsimplicial* de  $X$  si para cada  $n \in \mathbb{N}$   $L_n = L([n]) \subset X_n = X([n])$  y  $L$  es cerrado bajo los  $d_i$  y los  $s_i$ . Obsérvese que todo subconjunto simplicial es un conjunto subsimplicial pero no recíprocamente.

Si  $\Sigma \subset X$  es un subconjunto simplicial, definimos la expansión de  $\Sigma$   $\text{Span}(\Sigma) = \bigcup_{\alpha \in \text{Mor}(\Delta^{op})} \alpha^*(\Sigma)$ . En otras palabras,  $\text{Span}(\Sigma)$  es el subconjunto simplicial de  $X$  formado por todas las caras y degeneraciones que se puedan obtener de  $\Sigma$ . Cuando  $\text{Span}(\Sigma) = X$  se dice que  $\Sigma$  es un conjunto generador de  $X$ . El *n-esqueleto* de  $X$  es  $X^n = \text{Span}(X_n)$ . Si  $X = X^n$  diremos que la dimensión de  $X$  es menor o igual a  $n$  y escribiremos  $\dim X \leq n$ .

LEMA 1.1.5. *Si  $x$  e  $y$  son símplices degenerados entonces  $dx = dy$  si y sólo si  $x = y$ .*

LEMA 1.1.6. *Todo símplice  $x$  de un conjunto simplicial  $X$  es canónicamente de la forma  $x = \beta y$  con  $\beta$  epiyectiva e  $y$  no degenerado.*

NOTA 1.1.7. Iterando el proceso descrito con anterioridad, se definen los conjuntos simpliciales de conjuntos simpliciales como funtores  $X : \Delta^{op} \rightarrow \text{SiSets}$ . Se les llama conjuntos bisimpliciales puesto que pueden ser identificados con funtores  $X : \Delta^{op} \times \Delta^{op} \rightarrow \text{Sets}$ . Mediante la aplicación diagonal  $\Delta^{op} \rightarrow \Delta^{op} \times \Delta^{op}$  se le puede asociar a un conjunto bisimplicial un conjunto simplicial, el conjunto simplicial diagonal dado por  $(\text{diag } X)_n = X_{nn}$ . De forma similar se pueden definir conjuntos multisimpliciales en general. En un marco mucho más general se pueden definir los llamados objetos simpliciales. Un objeto simplicial en una categoría  $\mathcal{C}$  es un funtor  $X : \Delta^{op} \rightarrow \mathcal{C}$ ; si  $\mathcal{C}$  es la categoría de *cosas*, nos referiremos a  $X$  como cosa simplicial y a  $X_n = X([n])$  como las cosas de grado  $n$ . En este sentido podemos hablar de categorías simpliciales, es decir, funtores  $X : \Delta^{op} \rightarrow \text{cat}$ , donde  $\text{cat}$  es la categoría de las categorías pequeñas.

Veamos ahora algunos ejemplos de conjuntos simpliciales. Una forma de producir conjuntos simpliciales es mediante productos.

DEFINICIÓN 1.1.8. Dados conjuntos simpliciales  $X$  e  $Y$  denotaremos por  $X \times Y$  al *conjunto simplicial producto* cuyos  $n$ -símplices son los elementos del producto cartesiano  $(X \times Y)_n = X_n \times Y_n$  y cuyas caras y degeneraciones se definen como  $d_i(x, y) = (d_i x, d_i y)$  y  $s_i(x, y) = (s_i x, s_i y)$  respectivamente.

Los complejos simpliciales son conjuntos simpliciales de acuerdo con la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.1.9. Un *conjunto simplicial abstracto*  $K$  consiste en un conjunto finito ordenado  $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$ , cuyos elementos son llamados *vértices* de  $K$ , ciertos subconjuntos de éste y todos los subconjuntos de estos últimos, llamados *símplices* de

$K$ . Asociamos a  $K$  el conjunto simplicial  $\Sigma K$  con  $\Sigma K([n]) = (\Sigma K)_n$  el conjunto de todas aquellas aplicaciones monótonas de  $[n]$  en tales que los  $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$  vértices en la imagen pertenecen a algún símplice de  $K$ .

Ahora tenemos el conocido prototipo de símplice.

DEFINICIÓN 1.1.10. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , el  $n$ -símplice estándar  $\Delta([n])$  es el conjunto simplicial definido por  $\Delta([n])_q = \{0 \leq a_0 \leq \dots \leq a_q \leq n; a_i \in \mathbb{Z}^+\}$  con  $d_i(a_0, \dots, a_q) = (a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_q)$  y  $s_i(a_0, \dots, a_q) = (a_0, \dots, a_{i-1}, a_i, a_i, a_{i+1}, \dots, a_q)$ . En otras palabras,  $\Delta([n]) = \Sigma((0, 1, \dots, n))$ , con  $(0, 1, \dots, n) \in \Delta([n])_n$  el  $n$ -símplice abstracto ordenado, que será también denotado por  $[n]$ . Se puede escribir también  $\Delta([n]) = \text{Span}([n])$ .

Más aún, se puede describir  $\Delta([n])$  como  $\text{Hom}_\Delta(-, [n]) : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$ . Por el Lema de Yoneda tenemos pues una biyección entre las aplicaciones simpliciales  $\Delta([n]) \rightarrow Y$  e  $Y_n$ , el conjunto de  $n$ -símplices de  $Y$ . En particular, a cada aplicación monótona  $\alpha : [q] \rightarrow [n]$  le corresponde un único  $q$ -símplice de  $\Delta([n])$ , a saber  $\alpha([q])$ .

El subconjunto simplicial borde de  $\Delta([n])$ ,  $\dot{\Delta}([n])$ , es justamente  $(\Delta([n]))^{n-1}$ ; esto es el  $(n-1)$ -esqueleto de  $\Delta([n])$ . También para  $i = 0, \dots, n$  se define el llamado  $i$ -ésimo cuerno de  $\Delta([n])$  como  $\hat{\Lambda}_i([n]) = \text{Span}(d_0([n]), d_1([n]), \dots, \hat{d}_i([n]), \dots, d_n([n]))$ . De especial importancia es el conjunto simplicial  $\Delta([1])$  que denotaremos simplemente por  $I$  de forma que las inclusiones naturales  $i_0, i_1 : X \rightarrow X \times I$  vienen dadas por  $i_0(x_n) = (x_n, \underbrace{(0, \dots, 0)}_n)$  e  $i_1(x_n) = (x_n, \underbrace{(1, \dots, 1)}_n)$ .

NOTA 1.1.11. Una notación útil para los símplices del producto de un conjunto simplicial por  $I$  se obtiene al identificar al elemento

$$\left( (a_0, \dots, a_q), \underbrace{(0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1)}_q \right)$$

de  $(\Delta([n]) \times I)_q$  con  $:= (a_0, a_1, \dots, a_i, a'_{i+1}, \dots, a'_q)$  donde  $d_i$  significará olvidarse del  $i$ -ésimo término y  $s_i$  significará repetir el  $i$ -ésimo término.

Otro conjunto simplicial básico viene dado por el funtor singular.

DEFINICIÓN 1.1.12. Sea  $\text{Top}$  la categoría de los espacios topológicos y las aplicaciones continuas. El funtor singular es

$$\begin{aligned} S. : \text{Top} &\longrightarrow \text{SiSets} \\ X &\longmapsto S.X \end{aligned}$$

$S.X$  se define como  $S.X([n]) = S_n X = \text{Top}(\nabla(n), X)$ , esto es el conjunto de  $n$ -símplices singulares de  $X$ . Se verifica que si  $Y \subset X$ , entonces  $S.Y \subset S.X$ ,  $S.Y \subset S.X$ ,  $S.(X \cup Y) = (S.X \cup S.Y)$  y  $S.(X \times Y) = S.X \times S.Y$ .

## 1.2. Homotopía

DEFINICIÓN 1.2.1. Una aplicación simplicial  $H : X \times I \longrightarrow Y$  es una *homotopía simplicial* entre  $F = i_0 H$  y  $G = i_1 H$ . Diremos entonces que  $F$  es *simplicialmente homotópica* a  $G$ , y escribiremos  $F \simeq G$ . Desafortunadamente ésta no es una relación de equivalencia (salvo que  $Y$  sea un conjunto de Kan, véase la nota más

abajo, 1.2.2). Utilizando la descripción de May, [May67],  $H$  se puede ver como una colección de aplicaciones

$$h_i^q = \{h_i : X_q \longrightarrow Y_{q+1}\} \quad 0 \leq i \leq q$$

verificando:

(i)  $d_0 h_0 = F, d_{q+1} h_q = G,$

(ii)

$$\begin{aligned} d_i h_j &= h_{j-1} d_i & i < j \\ d_{j+1} h_{j+1} &= d_{j+1} h_j \\ d_i h_j &= h_j d_{i-1} & i > j + 1 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} s_i h_j &= h_{j+1} s_i & i \leq j \\ s_i h_j &= h_j s_{i+1} & i > j \end{aligned}$$

NOTA 1.2.2. Un *conjunto simplicial*  $X$  se dice de Kan si satisface la siguiente condición de Kan:

Para toda aplicación simplicial  $f$  y dados  $q, i \geq 0$ , existe una extensión  $\tilde{f}$  de  $f$  tal que

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^i[q] & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ \Delta([q]) & & \end{array}$$

Dados  $(A, X)$  y  $(B, Y)$  pares de conjuntos simpliciales se tienen los siguientes resultados, ver [FP90].

- (i) si  $Y$  es de Kan entonces las homotopías entre aplicaciones simpliciales  $X \longrightarrow Y$  definen una relación de equivalencia,
- (ii) si  $Y$  y  $B$  son de Kan, entonces las homotopías entre aplicaciones simpliciales  $(X, A) \longrightarrow (Y, B)$  definen también una relación de equivalencia.

### 1.3. Functor de realización geométrica

Dado un conjunto simplicial consideramos cada  $X_i$  dotado de la topología discreta y definimos:

$$\overline{X} = X_0 \times \nabla(0) \sqcup X_1 \times \nabla(1) \sqcup \dots \sqcup X_n \times \nabla(n) \sqcup \dots$$

con la topología inducida por la unión disjunta; esto es,  $U$  es abierto en  $\overline{X}$  si y sólo si  $U \cap (\{x_q\} \times \nabla(q))$  es abierto para todo  $x_q \in X_q$  y  $q \geq 0$ .

Dado  $(x, t) \in \overline{X}$  con  $x \in X_q, t \in \nabla(q)$  y  $\alpha$  una aplicación monótona, diremos que  $(\alpha^* x, t)$  y  $(x, |\alpha|t)$  están relacionados. Esta relación genera una relación de equivalencia  $\sim$  sobre  $\overline{X}$ . El punto  $(x, t)$  se dice regular si  $x$  es no degenerado y  $t \in \overset{\circ}{\nabla}(q)$ . La *realización geométrica* del conjunto simplicial  $X$  es el espacio topológico cociente:

$$|X| := \overline{X} / \sim.$$

Para cada  $x \in X_q$ , la *aplicación característica* de  $x$  está definido por

$$\begin{aligned} \chi_x : \nabla(q) &\longrightarrow |X| \\ t &\longmapsto [(x, t)]. \end{aligned}$$

La topología en  $|X|$  es la topología final que hace todas las  $\chi_x$  continuas. Es más, es suficiente comprobar la continuidad sobre un conjunto generador de  $X$  puesto que  $\chi_{\alpha^*(x)} = \chi_x \circ |\alpha|$ .

LEMA 1.3.1. *Si  $\Sigma$  genera  $X$ , entonces la realización de  $X$  puede ser descrita como*

$$|X| = \bigcup_{y \in \Sigma} \chi_y(\nabla(\dim y)).$$

LEMA 1.3.2. *Si  $\overset{\circ}{x} = \{(x, t) \in |X|; t \in \overset{\circ}{\nabla}(q)\} \subseteq X$  entonces  $|X|$  coincide con  $\bigcup_{x \text{ non-deg}} \overset{\circ}{x}$  como conjuntos.*

Para una demostración véase [FP90][Corolario 4.2.4.].

Una aplicación simplicial  $f : X \rightarrow Y$  induce claramente un morfismo  $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ , que respeta la relación de equivalencia  $\sim$  e induce pues una aplicación continua  $|f| : |X| \rightarrow |Y|$ . Así pues,  $|\cdot| : \mathit{SiSets} \rightarrow \mathit{Top}$  es un funtor, llamado *funtor realización geométrica*. Véase 1.3.8 más abajo para más detalles. Extraemos del libro de Goerss y Jardine, [GJ], una forma rápida de definir el funtor realización. Considérese la categoría simplicial  $\Delta \downarrow X$  de un conjunto simplicial  $X$ ; los objetos en  $\Delta \downarrow X$  son las aplicaciones  $\sigma : \Delta([n]) \rightarrow X$ , o símplices de  $X$ ; ver 1.1.10. Los morfismos de  $\Delta \downarrow X$  son los diagramas conmutativos de aplicaciones simpliciales

$$\begin{array}{ccc} \Delta([n]) & \xrightarrow{\theta} & \Delta([m]) \\ & \searrow \beta & \swarrow \alpha \\ & X & \end{array} \quad (1.1)$$

Recuérdese que de acuerdo con 1.1.2 y 1.1.3,  $\theta$  está inducida por una aplicación monótona  $\theta : [m] \rightarrow [n]$ .

LEMA 1.3.3 ([GJ], capítulo I, Lema 2.1). *Existe un isomorfismo*

$$X \cong \varinjlim_{\Delta \downarrow X} \{\Delta([x]) \rightarrow X\}.$$

Entonces se puede definir la realización geométrica de  $X$  como el siguiente colímite en  $\mathit{Top}$  definido por los diagramas 1.1 anteriores

$$|X| = \varinjlim |\Delta([n])|$$

Es claro que la definición de  $|X|$  es functorial pues cada aplicación simplicial  $f : X \rightarrow Y$  induce claramente un funtor  $f_* : \Delta \downarrow X \rightarrow \Delta \downarrow Y$ . Es más,

PROPOSICIÓN 1.3.4 ([GJ], Capítulo I, Proposición 2.2). *El funtor realización es adjunto por la izquierda al funtor singular en el sentido de que existe una biyección*

$$\mathit{Top}(|X|, Y) \cong \mathit{SiSets}(X, S.Y)$$

*que es natural con respecto a los conjuntos simpliciales  $X$  y espacios topológicos  $Y$ .*

Ahora describiremos algunas propiedades del funtor realización geométrica. Primero,

PROPOSICIÓN 1.3.5.  $\chi_{[n]} : \nabla(n) \rightarrow |\Delta([n])|$  *es un homeomorfismo. Más aún lleva  $\overset{\circ}{\nabla}(n)$  en  $|\overset{\circ}{\Delta}[n]|$ .*

DEMOSTRACIÓN.  $\chi_{[n]}$  es inyectiva. En efecto, sea  $\chi_{[n]}(t_1) = \chi_{[n]}(t_2)$ ,  $t_i = |\alpha_i|(u_i)$  con  $\alpha_i$  epiyectiva y  $u_i$  interior. Ahora  $\chi_{[n]}(t_i) = [([n], t_i)] = [([n], [\alpha_i](u_i))] = [\alpha_i^*[n], u_i]$ , pero es una representación regular por tanto  $u_1 = u_2$  y  $\alpha_1^*([n]) = \alpha_2^*([n])$ . Eso significa que  $\alpha_1 = \alpha_2$  y por tanto  $t_1 = t_2$ . Además  $\chi$  es continua por definición y  $\chi$  es sobreyectiva puesto que  $\Delta(n)$  está generada por  $[n]$ . Finalmente, como  $|\Delta(n)|$  es Hausdorff y compacto se sigue que  $\chi_{[n]}$  es cerrada y por ello es un homeomorfismo.  $\square$

De ahora en adelante, podemos identificar  $\nabla(n)$  y  $|\Delta(n)|$ . Entonces si  $\chi_x : \nabla(n) \rightarrow |X|$  es la aplicación característica de  $x \in X$

$$\begin{array}{ccc} |\chi_x| : \nabla(n) = |\Delta(n)| & \longrightarrow & |X| \\ t & \longmapsto & |(x, t)|. \end{array}$$

También se verifica que

PROPOSICIÓN 1.3.6.  $f : X \rightarrow Y$  es 1 - 1 si y sólo si  $|f| : |X| \rightarrow |Y|$  es 1 - 1.

DEMOSTRACIÓN. Sean,  $[x_1, t_1], [x_2, t_2] \in |X|$  con  $x_i$  no degenerados y  $t_i$  puntos interiores. Supongamos  $[f(x_1), t_1] = |f|([x_1, t_1]) = |f|([x_2, t_2]) = [f(x_2), t_2]$  y que  $f$  es 1 - 1. En particular  $f(x_i)$  son no degenerados pues los  $x_i$  son no degenerados. Además,  $f(x_i) = s_j y$  implica  $f(d_j x_i) = d_j f(x_i) = y$  y por tanto  $f(s_j d_j x_i) = s_j y = f(x_i)$  de donde  $x_i = s_j d_j x_i$  pues  $f$  es 1 - 1.

Recíprocamente supongamos que  $|f|$  es 1 - 1 y que  $f(x) = f(y)$ . Entonces para  $t \in \overset{\circ}{\nabla}$ ,  $|f|([x, t]) = [f(x), t] = [f(y), t] = |f|([y, t])$  implica que  $[x, t] = [y, t]$ . Sean  $x = \beta^* z$  e  $y = \gamma^* z'$  con  $\beta$  y  $\gamma$  monótonas. Por otra parte,  $z' \in \overset{\circ}{\chi}_{z'}(|\gamma, t|) = |y, t| = |x, t| = \overset{\circ}{\chi}_z(|\beta, t|) \in \overset{\circ}{z}$  pero  $|Y|$  es una unión disjunta, por tanto  $z = z'$ . Como  $\chi_z$  es homeomorfismo  $|\beta|t = |\gamma|t$  con  $t$  interior entonces  $\beta = \gamma$  y por tanto  $x = y$ .  $\square$

Más aún,

PROPOSICIÓN 1.3.7 ([GJ], Capítulo I, Proposición 2.3). *La realización  $|X|$  de cualquier conjunto simplicial  $X$  admite una estructura de CW-complejo.*

DEMOSTRACIÓN. Necesitamos descomponer  $|X|$  como una unión numerable de subespacios  $|X| = \bigcup_{n=0}^{\infty} |X|^n$  de forma que  $|X|^0$  tenga la topología discreta y  $|X|^n$  se obtenga de  $|X|^{n-1}$  por medio de un pushout

$$\begin{array}{ccc} S_n \times \overset{\bullet}{\nabla}(n) & \xrightarrow{f_n} & |X|^{n-1} \\ \downarrow & \text{p.o.} & \downarrow \\ S_n \times \nabla(n) & \xrightarrow{\tilde{f}_n} & |X|^n \end{array}$$

donde  $S_n$  es un subespacio discreto. Más aún,  $|X|$  tiene la topología débil de los  $|X|^n$ . Para conseguir lo anterior tomamos  $S_n$  como el conjunto (con la topología discreta) de  $n$ -símplices no degenerados de  $X$ . Tomamos  $|X|^0 = S_0 = |X^0|$  y suponemos que  $|X^{n-1}| = |X|^{n-1}$ . Para cada  $x \in S_n$  consideramos la aplicación  $\Phi_x : \overset{\bullet}{\nabla} \rightarrow |X|^{n-1} = |X|^{n-1}$ , restricción de la aplicación característica de  $x$ . Entonces definimos  $f_n = \bigcup_{x \in S_n} \Phi_x$ . Por la propiedad de pushout la aplicación



$h : S_n \times \nabla \dot{\cup} \longrightarrow |X|^n$  inducida por la inclusión  $|X|^{n-1} \subseteq |X|^n$  y  $f_n$  factoriza claramente a través de  $|X|^n$ ; es decir tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} h : S_n \times \nabla(n) \dot{\cup} |X|^{n-1} & \xrightarrow{\text{continua}} & |X|^n \\ \text{cociente} \downarrow p & \nearrow \tilde{h} & \\ |X|^n & \xrightarrow{\text{continua y biyectiva}} & \end{array}$$

Necesitamos ver  $\tilde{h}$  es abierta. Sea  $U \subseteq |X|^n$  un conjunto abierto; para ver que  $\tilde{h}(U)$  es abierto de  $|X|^n$  bastará comprobar que  $\chi_x^{-1}(U)$  es abierto para la aplicación acarácterística  $\chi_x$  de un  $n$ -símplice arbitrario  $x \in S_n$ . Ahora bien,  $\chi_x^{-1}(U) = (\{x\} \times \nabla(n)) \cap^{-1}(U)$  es obviamente abierto. Para ver que  $|X|$  tiene la topología débil de los  $|X|^n$  basta observar que la topología de  $|X| = X_n \times \nabla(n) / \sim$  viene dada por las aplicaciones características de los símplices no degenerados; ver 1.3.1.  $\square$

NOTA 1.3.8. Como todo CW-complejo es un espacio de Hausdorff generado por compactos, la proposición 1.3.7 prueba que el functor realización toma valores en la categoría *CGHaus* de dichos espacios. Entenderemos  $|\cdot|$  como un functor de *SiSets* en *CGHaus*. En esta categoría se define el producto  $X \times_k Y$  como el producto cartesiano con la topología más fina que hace a todas las inclusiones  $K \times L \subseteq X \times Y$  sean continuas para todos los compactos  $K \subseteq X$  y  $L \subseteq Y$  con este producto se tiene el siguiente resultado, ver [FP90].

TEOREMA 1.3.9. Sean  $X$  e  $Y$  conjuntos simpliciales y  $p_i : X \times Y \longrightarrow X, Y$  las correspondientes proyecciones. Entonces

$$p = |p_1| \times |p_2| : |X \times Y| \longrightarrow |X| \times_k |Y|$$

es un homeomorfismo. De esta forma evitamos problemas, pues  $|X| \times |Y|$  no es homeomorfo a  $|X \times Y|$  en general. Para  $X = \Delta(n)$ ,  $Y = \Delta(q)$ ,  $|X \times Y|$  sí es homeomorfo a  $|X| \times |Y|$ .

Otro resultado que utilizaremos más adelante es el siguiente.

PROPOSICIÓN 1.3.10. Sea  $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots$  una sucesión creciente de subcomplejos simpliciales. Entonces

$$|\varinjlim X_i| = \varinjlim |X_i|.$$

Este resultado es consecuencia inmediata del hecho de que el functor realización geométrica transforma subcomplejos simpliciales en CW-subcomplejos.

Como ya se vió en 1.2 no se pueden reflejar completamente nuestros conceptos de homotopía de *Top* en *SiSets*. Por otra parte, se tiene que la composición de los funtores  $|S \cdot -|$  y  $S \cdot |\cdot|$  preservan homotopías, equivalencias de homotopías y contractibilidad, véase corolario 4.3.19 de [FP90], y que el functor realización geométrica conmuta con la operación producto, 1.3.8. Esto es suficiente para iniciar una noción de homotopía. Tenemos pues un poco más de terminología que desarrollar.

DEFINICIÓN 1.3.11. Una aplicación simplicial  $f : X \rightarrow X'$  se llama una *equivalencia de homotopía débil* si  $|f|$  es una equivalencia de homotopía en *Top*. Una aplicación bisimplicial  $X \cdot \rightarrow Y \cdot$ , en general una aplicación multisimplicial, es una equivalencia de *homotopía débil* cuando  $(diag X \cdot) \rightarrow (diag Y \cdot)$ . lo sea, véase 1.1.7.

Un conjunto simplicial se dice *débilmente contráctil* si su realización geométrica es contráctil.

LEMA 1.3.12 (Lema de Realización de [Wal78]). *Sea  $X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$  una aplicación de conjuntos bisimpliciales. Supongamos que para cada  $n$ , la aplicación simplicial  $X_{\bullet,n} \rightarrow Y_{\bullet,n}$  es una equivalencia de homotopía. Entonces  $X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$  es una equivalencia de homotopía.*

LEMA 1.3.13 ([Wal78][Lema 5.2]). *Sea  $X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet} \rightarrow Z_{\bullet}$  una sucesión de conjuntos bisimpliciales tales que  $X_{\bullet} \rightarrow Z_{\bullet}$  sea constante. Supongamos que  $X_{\bullet,n} \rightarrow Y_{\bullet,n} \rightarrow Z_{\bullet,n}$  es una fibración salvo homotopía, para cada  $n$ . Supongamos además que  $Z_{\bullet,n}$  es conexo para cada  $n$ . Entonces  $X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet} \rightarrow Z_{\bullet}$  es una fibración salvo homotopía.*

### 1.4. Nervios

DEFINICIÓN 1.4.1. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría pequeña; es decir, la clase  $Obj\mathcal{C}$  de objetos es un conjunto. Definimos el *nervio* de  $\mathcal{C}$ , o *espacio clasificante*, como el conjunto simplicial  $N\mathcal{C} : \Delta^{op} \rightarrow Sets$ , donde  $(N\mathcal{C})_n$  es el conjunto de funtores  $[n] \rightarrow \mathcal{C}$ ; es decir un elemento de  $(N\mathcal{C})_n$  es una sucesión de  $n$  morfismos componibles de  $\mathcal{C}$ .

$$N_q\mathcal{A} = \{A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_q\}$$

Las degeneraciones  $d_i$  se definen como composiciones y las caras  $s_i$  como la inserción de identidades. La realización geométrica de  $N\mathcal{C}$  se denota como  $BC$ . A veces en la literatura  $N\mathcal{C}$  también se denota como  $BC$ , véase [GJ].

De especial importancia es el nervio de la categoría  $[1] = \{0 < 1\}$ , el cual denotaremos abusando de la notación como  $I = N.[1]$ .

Con la definición anterior se obtiene  $N(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = N\mathcal{A} \times N\mathcal{B}$  y por tanto  $B(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \cong B(\mathcal{A}) \times B(\mathcal{B})$  es un homeomorfismo.

1.4.2 (Nota-definición). Está claro que un functor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  entre categorías pequeñas induce una aplicación simplicial  $N.F : N\mathcal{A} \rightarrow N\mathcal{B}$  entre sus nervios. Es más, una transformación natural  $t : F \rightarrow G$  induce una homotopía simplicial  $Nt : N\mathcal{A} \times I \rightarrow N\mathcal{B}$  considerando la escalera

$$\begin{array}{ccccccc} G(A_0) & \longrightarrow & G(A_1) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & G(A_q) \\ \uparrow t(A_0) & & \uparrow t(A_1) & & & & \uparrow t(A_q) \\ F(A_0) & \longrightarrow & F(A_1) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & F(A_q) \end{array}$$

para cada  $q$ -símplexe y así podemos definir  $Nt(A_0 \rightarrow \dots \rightarrow A_q, (0, \dots, \overset{i}{0}, \dots, 1))$  como el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & G(A_{i-1}) & & \\ & & & & \nearrow & & \\ & & & & & & \\ = (F(A_0) & \longrightarrow & F(A_1) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & F(A_{i-1}) & \longrightarrow & G(A_i) & \longrightarrow & \dots \\ & & & & & & \searrow & & & & \\ & & & & & & F(A_i) & & & & \end{array}$$

$$\cdots \longrightarrow G(A_q))$$

que claramente define una homotopía simplicial.

Se ha introducido pues una idea de homotopía entre categorías pequeñas. Una transformación natural de  $F$ , induce un funtor  $\mathcal{C} \times [1] \rightarrow \mathcal{C}'$  y, como hemos visto más arriba, ésta induce una homotopía simplicial  $H : N(\mathcal{C} \times [1]) = N.\mathcal{C} \times N.[1] \rightarrow N.\mathcal{C}'$ . Obviamente  $N.[1] = I$  y  $|N.\mathcal{C} \times I| \cong |N.\mathcal{C}| \times |I| = |N.\mathcal{C}| \times I$ . Por tanto acabamos obteniendo una homotopía  $|H| : |N.\mathcal{C}| \times I \rightarrow |N.\mathcal{C}'|$  en  $Top$ . Un funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  entre categorías pequeñas se llamará una *equivalencia de homotopías* cuando quiera que  $N.F : N.\mathcal{C} \rightarrow N.\mathcal{C}'$  sea una equivalencia de homotopías débil. Podemos así decir que  $\mathcal{C}$  es *contráctil* si lo es  $N.\mathcal{C}$ . Luego si el funtor identidad de  $\mathcal{C}$  es homotópico a un funtor constante,  $\mathcal{C}$  será contráctil.

Usando esta cadena de construcciones las nociones de homotopía a nivel categorial, de categorías pequeñas, encajan perfectamente con las nociones de teoría de homotopía conocidas para espacios topológicos. En particular tenemos

**PROPOSICIÓN 1.4.3.** *Sea  $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \dots$  una sucesión creciente de categorías pequeñas tales que existe  $\mathcal{A} = \varinjlim \mathcal{A}_i$  en la categoría  $cat$  de categorías pequeñas. Entonces  $\varinjlim |N.(\mathcal{A}_i)| = |N.\mathcal{A}|$ . Más aún, dado un diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1 & \hookrightarrow & \mathcal{A}_2 \hookrightarrow \dots \\ \downarrow F_1 & & \downarrow F_2 \\ \mathcal{B}_1 & \hookrightarrow & \mathcal{B}_2 \hookrightarrow \dots \end{array}$$

*tales que los  $F_i$  inducen equivalencias de homotopía entre los nervios correspondientes se tiene una equivalencia de homotopía  $|N.(\mathcal{A})| \simeq |N.(\mathcal{B})|$  con  $\mathcal{B} = \varinjlim \mathcal{B}_i$ .*

La proposición es una consecuencia de la proposición 1.3.10 y del teorema de Whitehead para CW-complejos en [Swi75].

**EJEMPLO 1.4.4.** Si  $G$  es un grupo, sea  $EG$  el nervio de la categoría formada por un objeto para cada  $g \in G$  y un morfismo para cada par de elementos de  $G$  distintos entre sí. La categoría  $EG$  es contráctil ya que existe una transformación natural del funtor identidad  $id : EG \rightarrow EG$  al funtor trivial que envía cada morfismo a la identidad. Esta transformación natural induce una homotopía entre la aplicación identidad de  $|EG|$  y una contracción. Sea ahora  $BG$  el nervio de la categoría con un sólo objeto  $\star$  y un endomorfismo  $g : \star \rightarrow \star$  para cada elemento  $g$  de  $G$ . Su realización geométrica  $|BG|$ , generalmente denotada también por  $BG$ , es un espacio de Eilenberg-MacLane de la forma  $K(G, 1)$ . Hay una aplicación simplicial evidente  $\pi : EG \rightarrow BG$  inducida por el funtor que lleva el morfismo  $g \rightarrow g'$  de la primera categoría en el morfismo  $g^{-1}g'$  de la segunda.

**EJEMPLO 1.4.5** ([Qui72][página 84]. )

a) Si  $\mathcal{A}$  es una categoría pequeña con bien un objeto inicial o final entonces  $N.\mathcal{A}$  es contráctil. En efecto, supongamos, por ejemplo, que  $\mathcal{A}$  tiene un objeto final  $\star$ , entonces  $id_{\mathcal{A}}$  es homotópica al funtor constante

$$\begin{array}{ccc} c_{\star} : \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ \mathcal{A} & \longmapsto & c_{\star}(\mathcal{A}) = \star \end{array}$$

ya que para cada  $q$  se tienen escaleras

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \star & \xlongequal{\quad} & \star & \xlongequal{\quad} & \cdots & \xlongequal{\quad} & \star \\
 \uparrow & & & \uparrow & & & & \uparrow \\
 A_0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & A_q
 \end{array}$$

que definen una homotopía simplicial  $H : N.\mathcal{A} \times I \rightarrow N.\mathcal{A}$ . Esta homotopía se puede ver como la siguiente colección de diagramas para  $q \geq 0$ :

$$h_i : N_q \mathcal{A} \longrightarrow N_{q+1} \mathcal{A} \quad i = 0, \dots, q$$

$$\begin{array}{l}
 h_0 : A_0 \longrightarrow \star \xlongequal{\quad} \star \xlongequal{\quad} \cdots \xlongequal{\quad} \star \xlongequal{\quad} \star \\
 h_1 : A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow \star \xlongequal{\quad} \cdots \xlongequal{\quad} \star \xlongequal{\quad} \star \\
 \vdots \\
 h_q : A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_q \longrightarrow \star
 \end{array}$$

obviamente  $d_0 h_0 = c_\star$  y  $d_{q+1} h_q = id_{\mathcal{A}}$ . De forma similar se puede demostrar para  $\mathcal{A}$  con objeto inicial.

- b) Si un funtor  $F$  tiene un adjunto bien a derecha o a izquierda, entonces  $F$  es una equivalencia de homotopía.

Por ejemplo, si  $F'$  es el adjunto a izquierda de  $F$ , entonces existen transformaciones naturales  $F'F \rightarrow 1$  y  $1 \rightarrow FF'$ , por tanto  $N.F'$  es una inversa de homotopía para  $N.F$ .

### 1.5. Nociones de Teoría de Homotopía

DEFINICIÓN 1.5.1. Diremos que un morfismo en una categoría es *constante* si factoriza a través de un objeto final. Una sucesión de aplicaciones de espacios topológicos  $A \rightarrow B \rightarrow C$  se llama una *fibración salvo homotopía* si la aplicación compuesta  $A \rightarrow C$  es constante, y la aplicación inducida de  $A$  hacia la fibra homotópica de  $B \rightarrow C$  es una equivalencia de homotopías.

Una sucesión de conjuntos multisimpliciales se dirá una *fibración salvo homotopía* si la sucesión de realizaciones geométricas lo es.

Ahora damos algunos criterios para detectar equivalencias de homotopías y fibraciones salvo homotopías entre categorías. Todo lo que sigue aparece en [Wal78].

Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  una aplicación de categorías pequeñas y  $X'$  un objeto en  $\mathcal{C}'$ . Se llama fibra izquierda de  $F$  sobre  $X'$ , y la denotamos por  $F|X'$ , a la categoría cuyos objetos son los pares  $(X, x)$  con  $X$  un objeto en  $\mathcal{C}$  y  $x : F(X) \rightarrow X'$  es un morfismo en  $\mathcal{C}'$ ; y cuyos morfismos de  $(X, x)$  a  $(Y, y)$  es una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  tal que

$$\begin{array}{ccc}
 F(X) & \xrightarrow{x} & X' \\
 F(f) \downarrow & \nearrow y & \\
 F(Y) & &
 \end{array}$$

el diagrama conmuta. Un morfismo  $m : X' \rightarrow Y'$  en  $\mathcal{C}'$  induce un funtor  $F|m : F|X' \rightarrow F|Y'$ . Dualmente podemos definir la fibra derecha de  $F$  sobre  $X'$ .

TEOREMA 1.5.2 (Teorema A de Quillen en [Wal78]). Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  una aplicación de categorías pequeñas y  $X'$  un objeto en  $\mathcal{C}'$ . Sea  $F|X$  la fibra izquierda de  $F$  sobre  $X'$ .

Si para cada objeto  $X'$  en  $\mathcal{C}'$ ,  $F|X'$  es contráctil entonces  $F$  es una equivalencia de homotopías.

Un diagrama conmutativo de espacios topológicos

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{\sigma} & D \end{array}$$

es homotópico cartesiano si la aplicación de  $A$  al producto fibrado homotópico teórico  $C \times_D D^I \times_D B$  es una equivalencia de homotopía. Aquí  $D^I$  denota el espacio de aplicaciones de  $I$  a  $D$ .

Recordemos que si  $g : E \rightarrow B$  una aplicación entre espacios topológicos y  $b$  un punto de  $B$ . Entonces la fibra homotópica de  $f$  sobre  $b$  es el espacio  $F(g,b) = E \times_B B^I \times_B \{b\}$  que consiste de parejas  $(e,p)$  con  $e$  un punto de  $E$  y  $p$  un camino uniendo  $g(e)$  y  $b$ . Si  $f$  es punteada simplemente escribimos  $\text{homfiber}(f)$ .

TEOREMA 1.5.3 (Teorema B de Quillen en [Wal78]). Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  un funtor entre categorías pequeñas. Supongamos que para cada morfismo  $m : X' \rightarrow Y'$  en  $\mathcal{C}'$ , el funtor  $F|m : F|X' \rightarrow F|Y'$  es una equivalencia de homotopía. Entonces para cada objeto  $X'$  en  $\mathcal{C}'$  el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} F|X' & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ \downarrow & & \downarrow F \\ \text{id}_{\mathcal{C}}|X' & \longrightarrow & \mathcal{C}' \end{array}$$

es homotópico cartesiano. En particular, si  $\mathcal{C}'$  es conexo, entonces  $B(F|X') \cong \text{homfiber}(BC \xrightarrow{BF} BC')$ . Dualmente las fibras a izquierda pueden ser reemplazadas por las fibras a derecha.

**1.6. La  $K$ -teoría de una categoría de Waldhausen**

Dada cualquier categoría pequeña  $\mathcal{C}$  con una estructura extra que describimos más abajo, Waldhausen le asigna funtorialmente un espacio topológico  $K(\mathcal{C})$ , al cual llamamos  $K$ -teoría de  $\mathcal{C}$ . Sus grupos de homotopía serán los  $K$ -grupos de  $\mathcal{C}$ . Ésto extiende las definiciones clásicas de  $K$ -grupos de un anillo  $R$  tomando como  $\mathcal{C}$  la categoría aditiva de módulos proyectivos finitamente generados sobre  $R$ , con cofibraciones las inclusiones de sumandos directos, y las equivalencias débiles los isomorfismos.

**1.7. Categoría de Waldhausen con cofibraciones y equivalencias débiles**

DEFINICIÓN 1.7.1. [Wal85, secciones 1.1 and 1.2] Una categoría pequeña  $\mathcal{C}$  con un objeto cero, objeto inicial y final a la vez, se dice una *categoría con cofibraciones y equivalencias débiles* si posee dos subcategorías distinguidas,  $co\mathcal{C}$  y  $w\mathcal{C}$ , satisfaciendo los siguientes axiomas. Las flechas  $\twoheadrightarrow$  denotarán a los morfismos en  $co\mathcal{C}$  llamadas *cofibraciones* mientras que los morfismos de  $w\mathcal{C}$  serán llamados *equivalencias débiles* y se denotarán por flechas  $\xrightarrow{\sim}$ .

a) Axiomas de cofibraciones.

cof 1: Los isomorfismos de  $\mathcal{C}$  son cofibraciones.

cof 2: Para cada  $A \in \mathcal{C}$ ,  $* \rightarrow A$  es una cofibración.

cof 3: Las cofibraciones admiten cambio de cobase:

a: Si  $A \twoheadrightarrow B$  es una cofibración y  $A \rightarrow C$  cualquier morfismo, entonces existe el push out en  $\mathcal{C}$ . Además

b:  $C \twoheadrightarrow C \cup_A B$  es una cofibración.

$$\begin{array}{ccc} A & \twoheadrightarrow & B \\ \downarrow & \text{p.o.} & \downarrow \\ C & \twoheadrightarrow & C \cup_A B \end{array}$$

b) Axiomas de equivalencias débiles.

weq 1: Los isomorfismos de  $\mathcal{C}$  son equivalencias débiles.

weq 2: (Gluing lemma) Si en el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} B & \longleftarrow & A & \longrightarrow & C \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ B' & \longleftarrow & A' & \longrightarrow & C' \end{array}$$

las flechas horizontales de la izquierda son cofibraciones y las tres flechas verticales están en  $w\mathcal{C}$  entonces

$$B \cup_A C \xrightarrow{\sim} B' \cup_A C$$

está en  $w\mathcal{C}$ .

Algo más de notación antes de proseguir. Escribiremos  $B/A$  y le llamaremos cofibra para cualquier representante del pushout  $* \cup_A B$  con  $A \twoheadrightarrow B$ . La aplicación canónica  $B \twoheadrightarrow B/A$  será llamada *aplicación cociente*. Una *sucesión de cofibra* será una sucesión  $A \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow B/A$  con  $B \twoheadrightarrow B/A$  la aplicación cociente

asociada a la cofibración  $A \twoheadrightarrow B$ . Una *sucesión de cofibraciones* será una sucesión del tipo  $A_1 \twoheadrightarrow A_2 \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow A_n$

De forma más breve llamaremos a las categorías con cofibraciones y equivalencias débiles categorías de *Waldhausen*. Los dos siguientes axiomas pueden ser, o no, satisfechos por  $\mathcal{C}$ .

**Axioma de saturación:** Si  $a, b$  son morfismos componibles de  $\mathcal{C}$  y si de los morfismos:  $a, b, ab$  dos de ellos están en  $w\mathcal{C}$  entonces también lo está el tercero.

**Axioma de Extensión:** Sea

$$\begin{array}{ccccc} A & \twoheadrightarrow & B & \twoheadrightarrow & B/A \\ \downarrow \sim & & \downarrow & & \downarrow \sim \\ A' & \twoheadrightarrow & B' & \twoheadrightarrow & B'/A' \end{array}$$

una aplicación de sucesiones de cofibraciones. Si  $A \xrightarrow{\sim} A'$  y  $B/A \xrightarrow{\sim} B'/A'$  están en  $w\mathcal{C}$  entonces  $B \rightarrow B'$  está también en  $w\mathcal{C}$

Fijadas  $co\mathcal{C}$  y  $w\mathcal{C}$ , se tiene una *categoría simplicial*, 1.1.7.

$$\begin{aligned} S.C : \Delta^{op} &\longrightarrow cat \\ [n] &\longmapsto S_n\mathcal{C} \end{aligned}$$

donde  $(cat)$  es la categoría de categorías pequeñas y  $S_n\mathcal{C}$  es la categoría con objetos las composiciones de cofibraciones:

$$* \twoheadrightarrow A_1 \twoheadrightarrow A_2 \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow A_n$$

con una elección de cofibras  $A_{i,j} = A_i/A_j$ ,  $1 \leq i \leq j \leq n$  de forma que siempre se tenga  $A_{i,i} = *$ . Los morfismos en la categoría  $S_n\mathcal{C}$  son colecciones de aplicaciones  $A_i \rightarrow B_i$  que definen transformaciones naturales de las sucesiones de cofibraciones.  $S.C$  es una categoría simplicial como sigue: las aplicaciones de degeneración vienen dadas por inserción de identidades, y las aplicaciones borde  $d_i$  por la omisión del índice  $i$ , para  $1 \leq i \leq n$ . En cambio,  $d_0$  se define tomando todos los cocientes por  $A_1$ , de ahí la necesidad de incluir una elección de cocientes desde el principio. Si  $d_0$  fuese definido extendiendo esta receta y omitiendo  $*$ , entonces la construcción daría lugar al nervio de la categoría  $co\mathcal{C}$ , la cual es contráctil puesto que tiene un objeto inicial. Obsérvese que la categoría  $S_n\mathcal{C}$  es una categoría con cofibraciones y equivalencias débiles, declarando que una flecha  $A \rightarrow A'$  en  $S_n\mathcal{C}$  es una cofibración si

$$A_j \rightarrow A'_j \quad \text{y} \quad A'_j \bigcup_{A_j} A_{j+1} \rightarrow A'_{j+1}$$

son cofibraciones en  $\mathcal{C}$  para todo  $j$ . Una flecha  $A \rightarrow A'$  en  $S_n\mathcal{C}$  se dice equivalencia débil si las flechas  $A_{i,j} \rightarrow A'_{i,j}$  son equivalencias débiles para cada par  $i \leq j$ . Por esta razón,  $S.C$  es llamada una *categoría simplicial de Waldhausen*. Se tiene pues que  $S.$  es un functor que lleva categorías de Waldhausen a categorías simpliciales de Waldhausen. Para más detalles ver las secciones 1.1, 1.2 y 1.3 en [Wal85].

Asociada a  $S.C$  tenemos la categoría simplicial de equivalencias débiles:

$$\begin{aligned} wS.C : \Delta^{op} &\longrightarrow \text{cat} \\ [n] &\longmapsto wS_n.C. \end{aligned}$$

La categoría  $S_0.C$  y, por tanto, su subcategoría  $wS_0.C$ , son ambas la categoría trivial con un sólo objeto y morfismo. Por tanto su realización geométrica  $|wS_0.C|$  es un sólo punto. La categoría  $S_1.C$  es la categoría de diagramas

$$* \rightrightarrows A_1 \rightrightarrows *$$

y, por tanto, isomorfa a  $C$ . De esta forma  $wS_1.C$  se puede identificar con  $wC$ . Consideremos ahora, la realización geométrica  $|wS.C|$  de la categoría simplicial  $wS.C$ . El 1-esqueleto en la  $S$ -dirección se obtiene del 0-esqueleto (esto es  $|wS_0.C| = *$ ) mediante el pegamiento de  $|wS_1.C| \times \nabla(1)$ , donde  $\nabla(1)$  es el 1-símplice standard. Resulta así que el 1-esqueleto es isomorfo de forma natural a la suspensión  $S^1 \wedge |wC|$ . Como consecuencia se obtiene una inclusión  $S^1 \wedge |wC| \rightarrow |wS.C|$  y, por adjunción, una inclusión de  $|wC|$  en el espacio de lazos de  $|wS.C|$ :

$$|wC| \rightarrow \Omega|wS.C|.$$

Esta construcción es, en cierto sentido, análoga a la grupo-completación de Segal, [Seg74].

**DEFINICIÓN 1.7.2.** [Wal85, Sección 1.3] Sea  $C$  una categoría con cofibraciones y equivalencias débiles. La  $K$ -teoría algebraica de  $C$   $\Omega|wS.C|$  con respecto a la categoría de equivalencias débiles  $wC$  es el espacio de lazos punteado por la aplicación constante. Usamos la notación

$$K(C) = \Omega|wS.C|.$$

Los  $K$ -grupos de  $C$  son los grupos de homotopía de  $K(C)$ ; esto es

$$K_*C = \pi_*(\Omega|wS.C|) (= \pi_{*+1}|wS.C|).$$

En realidad, la  $K$ -teoría  $K(C)$  se puede describir más como un espectro que tan sólo como un espacio. Nos referiremos a [Swi75] para las nociones básicas de la categoría de espectros. El espectro que genera  $K(C)$  se obtiene como sigue. La construcción  $S$ . se extiende de forma natural a las categorías simpliciales con cofibraciones y equivalencias débiles. En particular se puede aplicar, por tanto, a  $S.C$  para producir una categoría bisimplicial con cofibraciones y equivalencias débiles,  $S.S.C = S^{(2)}.C$ . De nuevo la construcción se extiende a categorías bisimpliciales con cofibraciones y equivalencias débiles y así sucesivamente. Así pues se obtiene un espectro  $\{|wS^{(n)}.C|\}_{n \geq 0}$  cuyo  $n$ -ésimo espacio ( $n \geq 0$ ) es  $|wS^{(n)}.C| = |wS^{(n)}.S.C|$ . Las aplicaciones estructurales están definidas por el adjunto de la aplicación  $\Sigma|wS^{(n)}.C| \rightarrow |wS^{(n+1)}.C|$  que viene dada por la inclusión del 1-esqueleto en la  $S$ -construcción,  $|wS^{(n)}.C| \rightarrow \Omega|wS^{(n+1)}.C|$ . Resulta que dicho espectro es un  $\Omega$ -espectro tras el primer término. Puesto que el espectro es conectivo (el término  $n$ -ésimo es  $(n-1)$ -conexo) una afirmación equivalente sería que en la sucesión

$$|wC| \rightarrow \Omega|wS.C| \rightarrow \Omega^2|wS.S.C| \rightarrow \dots$$



todas las aplicaciones excepto la primera son equivalencias de homotopías. Véase [Wal85, página 329] para los detalles. Así pues la  $K$ -teoría de  $\mathcal{C}$  podría haber ser definida equivalentemente como el espacio infinito de lazos

$$\Omega^\infty |wS.(\infty)\mathcal{C}| = \varinjlim_n \Omega^n |wS.({}^n)\mathcal{C}|$$

obtenido a partir de la sucesión anterior. Hay otra forma de definir  $K$ -teoría de  $\mathcal{C}$  por medio de un espectro. Una suma de objetos  $A \vee B$  en  $\mathcal{C}$  viene definida por el pushout

$$\begin{array}{ccc} & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & A \vee B \end{array}$$

A partir de esta suma se obtiene una ley de composición en el sentido de Segal, [Seg74], sobre  $w\mathcal{C}$ ,  $wS.\mathcal{C}$ ,  $wS.({}^2)\mathcal{C}$ , etc. Nótese que bajo la aplicación  $|w\mathcal{C}| \rightarrow \Omega|wS.\mathcal{C}|$ , la 'suma'  $x \vee y \in \Omega|wS.\mathcal{C}|$  corresponde a  $[C \vee D]$  para  $x = [C]$  e  $y = [D]$  con  $C, D$  objetos de  $\mathcal{C}$ . De esta forma  $\Omega|wS.\mathcal{C}|$  es "group-like" y la llamada "maquinaria" de Segal puede generar un  $\Omega$ -espectro. Ambos espectros son equivalentes, véase [Wal85, página 330].

Nos referiremos a cualquiera de estas versiones como la  $K$ -teoría de  $\mathcal{C}$  y la denotaremos por  $K(\mathcal{C})$ .

**Notación:** Si es necesario destacar la categoría de equivalencias débiles  $w\mathcal{C}$  utilizada para definir la  $K$ -teoría de  $\mathcal{C}$ , escribiremos  $K(w\mathcal{C})$  en vez de  $K(\mathcal{C})$  abusando de la notación.

Ahora recordaremos algunos criterios para determinar cuando dos categorías tienen  $K$ -teorías homotópicamente equivalentes. Se requiere para ello tener una noción de homotopía entre funtores.

**DEFINICIÓN 1.7.3.** [Wal85, sección 1.1] Un funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ , entre categorías con cofibraciones y equivalencias débiles se dice que es *exacto* si  $F$  respeta todas las estructuras importantes: cofibraciones van en cofibraciones, push outs en push outs, equivalencias débiles en equivalencias débiles, cero objeto en cero objeto. Dicho funtor induce de forma natural una aplicación entre categorías simpliciales

$$wS.F : wS.\mathcal{C} \rightarrow wS.\mathcal{C}'$$

y, por tanto, una aplicación entre sus  $K$ -teorías.

A partir de la noción de homotopía simplicial 1.2 podemos obtener una noción de homotopía entre funtores al considerar dos funtores  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  homotópicas cuando las aplicaciones simpliciales inducidas  $N.F, N.G : N.\mathcal{C} \rightarrow N.\mathcal{C}'$  lo sean. En particular, esto implica que toda transformación natural  $t : F \rightarrow G$  entre funtores exactos  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  induce una homotopía  $wS.F \simeq wS.G$  y por tanto el funtor  $K$  que da la  $K$ -teoría algebraica lleva equivalencia de categorías en equivalencia de homotopía entre las  $K$ -teorías correspondientes.

**Notación:** Por abuso de lenguaje, usaremos la notación habitual de teoría de homotopía (ser homotópicos, equivalencia (débil) de homotopía, etc) para funtores entre categorías de cofibraciones y equivalencias débiles. Con ello queremos indicar que la correspondiente noción se refiere a las imágenes de esos funtores por el funtor  $K$  que da la  $K$ -teoría.

DEFINICIÓN 1.7.4. Una *equivalencia débil* entre funtores  $F, F': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  es una transformación natural  $F \rightarrow F'$  que tiene la propiedad de que para todo  $A \in \mathcal{C}$  el morfismo  $F(A) \rightarrow F'(A)$  es una equivalencia débil en  $\mathcal{C}'$ .

DEFINICIÓN 1.7.5. [Wal85, sección 1.3] Una *sucesión cofibrada* de funtores exactos  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  es una sucesión de transformaciones naturales  $F' \rightarrow F \rightarrow F''$  verificando la propiedad de que para todo  $A \in \mathcal{C}$   $F'(A) \rightarrow F(A) \rightarrow F''(A)$  es una sucesión cofibrada en  $\mathcal{C}'$ . Es decir,  $F'(A) \rightarrow F(A)$  es una cofibración y  $F''(A) = F(A)/F'(A)$  es su cofibra. Además verifica que para toda cofibración  $A' \twoheadrightarrow A$  en  $\mathcal{C}$  el cuadrado de cofibraciones

$$\begin{array}{ccc} F'(A') \twoheadrightarrow F'(A) & & \\ \downarrow & \twoheadrightarrow & \downarrow \\ F(A') \twoheadrightarrow F(A) & & \end{array}$$

es admisible en el sentido de que  $F(A') \cup_{F'(A')} F'(A) \twoheadrightarrow F(A)$  es también una cofibración.

Una de las herramientas básicas en el estudio de la  $K$ -teoría es el teorema de aditividad [Wal85, teorema 1.4.2 y proposición 1.3.2], véase también [McC93]. Para poder establecerlo necesitamos una definición previa.

DEFINICIÓN 1.7.6. [Wal85, sección 1.1] Dada una categoría con cofibraciones y equivalencias débiles  $\mathcal{C}$  y subcategorías con cofibraciones y equivalencias débiles  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , definimos la categoría de extensiones  $E(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{B})$  como la categoría con objetos las cofibraciones  $A \rightarrow C \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$  con  $A$  un objeto de  $\mathcal{A}$ ,  $B$  un objeto de  $\mathcal{B}$  y  $C$  un objeto de  $\mathcal{C}$ . Esta es una categoría con cofibraciones y equivalencias débiles de forma obvia como subcategoría de  $S_2\mathcal{C}$  dentro de la categoría simplicial  $S\mathcal{C}$  una vez elegidas cofibras  $C/A$  y  $B/C$ . Denotaremos  $E(\mathcal{C}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$  simplemente como  $E(\mathcal{C})$ .

Ahora podemos establecer el teorema de aditividad de Waldhausen

TEOREMA 1.7.7. [Wal85, teorema 1.4.2 y proposición 1.3.2] Sea  $F' \rightarrow F \rightarrow F''$  una sucesión cofibrada de funtores exactos. Entonces los funtores

$$|wS.F| \text{ y } |wS.(F' \vee F'')|$$

son homotópicas. Aquí  $F' \vee F''$  está definido objeto a objeto:  $F' \vee F''(A) = F'(A) \vee F''(A)$ .

Esta afirmación es equivalente a cualquiera de las siguientes:

(i) El funtor inducido por

$$wS.E(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{B}) \longrightarrow wS.\mathcal{A} \times wS.\mathcal{B} \tag{1.2}$$

$$(A \twoheadrightarrow C \twoheadrightarrow B) \mapsto (A, B)$$

es una equivalencia débil de homotopía.

(ii) El funtor inducido por

$$wS.E(\mathcal{C}) \longrightarrow wS.\mathcal{C} \times wS.\mathcal{C} \tag{1.3}$$

$$(A \twoheadrightarrow C \twoheadrightarrow B) \mapsto (A, B)$$

es una equivalencia débil de homotopía.

(iii) Los funtores inducidos por

$$wS.E(C) \longrightarrow wS.C \tag{1.4}$$

$$(A \twoheadrightarrow C \twoheadrightarrow B) \mapsto C, A \vee B$$

son homotópicos.

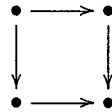
Una consecuencia directa del teorema de aditividad es el siguiente corolario.

**COROLARIO 1.7.8.** *Dadas dos categorías de Waldhausen  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  consideramos la categoría producto  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  con la estructura obvia de categoría con cofibraciones y equivalencias débiles como producto de las anteriores. Entonces  $K(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$  es homotópicamente equivalente a  $K(\mathcal{C}) \times K(\mathcal{D})$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Es claro que  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  contiene a  $\mathcal{C}$  y a  $\mathcal{D}$  como subcategorías con cofibraciones y equivalencias débiles. Entonces por el teorema de aditividad  $K(E(\mathcal{C}, \mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathcal{D}))$  y  $K(\mathcal{C}) \times K(\mathcal{D})$  son homotópicamente equivalentes. Ahora basta darse cuenta que las categorías  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  y  $E(\mathcal{C}, \mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathcal{D})$  son equivalentes.  $\square$

A continuación vemos algunos resultados sobre categorías de Waldhausen con cilindro. Antes recordaremos algunos detalles técnicos que nos aclararán el sentido de exactitud del funtor cilindro.

Denotemos por  $Ar\mathcal{C}$  la categoría cuyos objetos son los morfismos de  $\mathcal{C}$  y cuyos morfismos son los diagramas conmutativos



en  $\mathcal{C}$ . La categoría  $Ar\mathcal{C}$  es una categoría de Waldhausen en la forma obvia:

- i) un morfismo está en  $coAr\mathcal{C}$  si y sólo si los dos morfismos asociados están en  $co\mathcal{C}$ ,
- ii) un morfismo está en  $wAr\mathcal{C}$  si y sólo si los dos morfismos asociados están en  $w\mathcal{C}$ .

La categoría  $F_1\mathcal{C}$  es la subcategoría llena de  $Ar\mathcal{C}$  cuyos objetos son las cofibraciones de  $\mathcal{C}$ , y  $coF_1\mathcal{C}$  es la clase de morfismos  $(A \twoheadrightarrow B) \rightarrow (A' \twoheadrightarrow B')$  in  $F_1\mathcal{C}$  having the property that both  $A \rightarrow A'$  and  $A \cup_A B \rightarrow B$  son cofibraciones de  $\mathcal{C}$ . Las equivalencias débiles son aquellos morfismos de  $F_1\mathcal{C}$  que están en  $wAr\mathcal{C}$ .

**DEFINICIÓN 1.7.9.** [Wal85, sección 1.6] Una categoría  $\mathcal{C}$  con cofibraciones y equivalencias débiles se dice que *admite un cilindro* si existe un funtor

$$T : Ar\mathcal{C} \rightarrow \text{Diag } \mathcal{C}$$

donde  $Ar\mathcal{C}$  es la categoría de flechas de  $\mathcal{C}$  y  $\text{Diag } \mathcal{C}$  es la categoría de diagramas de  $\mathcal{C}$ .

$$T(f : A \rightarrow B) \equiv \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_1} & T(f) & \xleftarrow{i_2} & B \\ & \searrow f & \downarrow \pi & \nearrow id & \\ & & B & & \end{array}$$

verificando:

Cyl 1: las inclusiones  $i_1$  e  $i_2$  forman un funtor exacto

$$\begin{aligned} \text{Ar}C &\rightarrow F_1C \\ (f : A \rightarrow B) &\rightarrow (A \vee B \twoheadrightarrow T(f)) \end{aligned}$$

donde  $F_1C$  es la subcategoría llena de  $\text{Ar}C$  cuyos objetos son las cofibraciones de  $C$ .

Cyl 2:  $T(* \rightarrow A) = A$ , para cada  $A \in C$  y además la proyección  $\pi$  y la inclusión  $i_2$  son la identidad de  $A$ .

Hay un axioma adicional que a menudo es satisfecho:

**Axioma del cilindro:** La proyección  $T(f) \rightarrow B$  está en  $wC$  para toda  $f : A \rightarrow B$ .

El funtor cono se define como  $cA = T(A \rightarrow *)$ , y el funtor suspensión se define como el cociente del cono por la inclusión anterior  $A \twoheadrightarrow T(A \rightarrow *)$ ,

$$\Sigma A = cA/A.$$

PROPOSICIÓN 1.7.10. [Wal85, Proposición 1.6.2] *Si  $C$  es una categoría de Waldhausen con funtor cilindro y satisface el axioma del cilindro entonces la aplicación suspensión*

$$\Sigma : wS.C \rightarrow wS.C$$

*representa una inversa homotópica a la estructura de  $H$ -espacio de  $wS.C$  dada por la suma.*

Ahora, dada una categoría  $C$  supondremos fijadas las cofibraciones y observaremos la relación entre las  $K$ -teorías definidas para dos elecciones distintas de equivalencias débiles. Más explícitamente, sea  $C$  una categoría con cofibraciones equipada con dos categorías de equivalencias débiles, una más fina que otra,  $vC \subset wC$ . Denotemos por  $C^w$  la subcategoría llena de  $C$  dada por objetos  $A$  de  $C$  con la propiedad de que la flecha  $* \rightarrow A$  está en  $wC$ . Dicha categoría hereda equivalencias débiles:  $vC^w = C^w \cap vC$  y  $wC^w = C^w \cap wC$  respectivamente. En esta situación, recordemos el lema de fibración genérica.

LEMA 1.7.11. [Wal85, teorema 1.6.4] *Si  $C$  tiene funtor cilindro, y la categoría de equivalencias débiles más gruesa  $wC$  satisface los axiomas del cilindro, saturación y extensión, entonces el cuadrado:*

$$\begin{array}{ccc} vS.C^w & \longrightarrow & wS.C^w (\simeq *) \\ \downarrow & & \downarrow \\ vS.C & \longrightarrow & wS.C \end{array}$$

*es homotópico cartesiano, y el término superior derecho es contráctil.*

Recordemos ahora el teorema de aproximación que proporciona, una condición suficiente para que un funtor exacto  $F : A \rightarrow B$  induzca una equivalencia de homotopías  $wS.A \rightarrow wS.B$ .

DEFINICIÓN 1.7.12. Sea  $F : A \rightarrow B$  un funtor exacto de categorías con cofibraciones y equivalencias débiles. Diremos que satisface la *propiedad de aproximación* si verifica:

App 1: Un morfismo de  $\mathcal{A}$  es una equivalencia débil si y sólo si su imagen en  $\mathcal{B}$  es una equivalencia débil en  $\mathcal{B}$ .

App 2: Para un objeto  $A$  de  $\mathcal{A}$  cualquiera y cualquier morfismo  $x: F(A) \rightarrow B$  en  $\mathcal{B}$  existen una cofibración  $a: A \rightarrow A'$  en  $\mathcal{A}$  y una equivalencia débil  $x': F(A') \rightarrow B$  en  $\mathcal{B}$  tales que

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{x} & B \\ F(a) \downarrow & \nearrow x' & \\ F(A') & & \end{array}$$

conmuta.

El teorema de aproximación dice:

**TEOREMA 1.7.13.** [Wal85, Theorem 1.6.7] Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  categorías con cofibraciones y equivalencias débiles. Supongamos que  $w\mathcal{A}$  y  $w\mathcal{B}$  satisfacen el axioma de saturación. Supongamos además que  $\mathcal{A}$  tiene un funtor cilindro que verifica el axioma del cilindro. Sea  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un funtor exacto que verifica las propiedades de aproximación. Entonces  $w\mathcal{A} \rightarrow w\mathcal{B}$  y  $wS.\mathcal{A} \rightarrow wS.\mathcal{B}$  inducen equivalencias de homotopías en  $K$ -teoría.

**NOTA 1.7.14.** Hay un sutil refinamiento de 1.7.13 en [TT90, páginas 263-264]. En vez de requerir App 2 se requiere:

App 2': Dado cualquier objeto  $A$  de  $\mathcal{A}$  y cualquier morfismo  $x: F(A) \rightarrow B$  en  $\mathcal{B}$  existe un morfismo  $a: A \rightarrow A'$  en  $\mathcal{A}$  y una equivalencia débil  $x': F(A') \rightarrow B$  en  $\mathcal{B}$  tales que

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{x} & B \\ F(a) \downarrow & \nearrow x' & \\ F(A') & & \end{array}$$

conmuta.

La condición App 2' quizás parezca en principio más débil que App 2, pero junto con el resto de las hipótesis del teorema 1.7.13 implica a la más fuerte. En efecto, dado  $x = x'F(a)$  como en App 2', aplicamos el funtor cilindro a  $a: A \rightarrow A'$  para obtener la factorización  $a = a''a'$  con  $A \twoheadrightarrow A'' = T(A)$ , y  $a''$  la equivalencia débil  $A'' = T(a) \xrightarrow{\sim} A'$ . Entonces  $x'' = x'F(a'') : F(A'') \xrightarrow{\sim} B$  es una equivalencia débil,  $a': A \twoheadrightarrow A''$  es una cofibración, y  $x = x''F(a')$ . Por tanto App 2' implica App 2.

## CAPÍTULO 2

# Categorías Exactas y Localización

En este capítulo presentamos nuestro principal objeto de estudio las categorías exactas bajo un doble punto de vista: el de Bass como subcategorías de una categoría abeliana (recuérdese el resultado de Mitchell: toda categoría abeliana es  $R$ -mod para cierto anillo  $R$ , [Fai81][página 517]) y el de Quillen como categoría pequeña dotada de una familia de sucesiones (llamadas exactas cortas) verificando ciertos axiomas. Describimos la estructura de categoría de Waldhausen que tienen las categorías exactas de forma natural. Además introducimos un concepto de localización similar a la noción de filtración de Karoubi y obtenemos una axiomática de dicha localización, demostrando que la categoría localizada (construida por cálculo de fracciones) también es categoría exacta.

### 2.1. Categorías exactas

DEFINICIÓN 2.1.1. Una *categoría aditiva*  $\mathcal{U}$  es una categoría pequeña con un objeto cero  $0$ , donde  $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(U, V)$  es abeliano para todos los objetos  $U, V$ . Más aún, la composición es bilineal con respecto a esta operación. Los productos finitos que existen en dicha categoría coinciden con los productos y los llamamos sumas directas y los escribimos como  $U \oplus V$ . El conúcleo de un monomorfismo  $A \xrightarrow{f} B$  si existe se denotará como  $B/A$ .

DEFINICIÓN 2.1.2. Una *categoría abeliana*  $\mathcal{A}$  es una categoría aditiva en la que cada morfismo tiene un núcleo y un conúcleo, cada flecha inyectiva es un núcleo, y cada epiyectiva un conúcleo. Recordemos que  $f : B \rightarrow C$  se dice *inyectiva* o *monomorfismo* si  $fe_1 \neq fe_2$  para cada  $e_1 \neq e_2 : A \rightarrow B$ ; y se dice epiyectiva o epimorfismo si  $g_1f \neq g_2f$  para cada  $g_1 \neq g_2 : C \rightarrow D$ .

NOTA 2.1.3. Nótese que las categorías abelianas son equilibradas, es decir, un morfismo es isomorfismo si y sólo si es inyectivo y epiyectivo.

DEFINICIÓN 2.1.4. En una categoría abeliana, decimos que una *sucesión*  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  es *exacta* si  $\ker g$  es igual a  $\text{Im } f \equiv \ker[B \rightarrow \text{coker } f]$ . Una sucesión larga es exacta si es exacta en cada lugar. En una categoría abeliana se entenderá por *sucesión exacta corta* a una sucesión exacta de la forma  $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ .

DEFINICIÓN 2.1.5. Un *functor aditivo*  $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  entre categorías aditivas es un functor que satisface  $T(f + f') = T(f) + T(f')$  para cada par de morfismos  $f, f' : U \rightarrow V$ . Más aún, tal functor cumple  $T(U \oplus V) = T(U) \oplus T(V)$ .

Para más detalles ver [Lan71]. Siguiendo a Quillen en [Qui72] definimos una categoría exacta como sigue.

DEFINICIÓN 2.1.6. Una *categoría exacta*  $\mathcal{U}$  es una categoría aditiva junto con una elección de una clase de sucesiones  $\{ E_1 \rightrightarrows E_2 \rightrightarrows E_3 \}$  que se dirán exactas. Esto determina dos clases de morfismos:

- (1) los monomorfismos admisibles denotados  $E_1 \rightrightarrows E_2$ , los primeros en las sucesiones exactas,
- (2) los epimorfismos admisibles denotados  $E_2 \rightrightarrows E_3$ , los segundos en las sucesiones exactas.

La categoría exacta ha de satisfacer los siguientes axiomas:

- a) La clase de monomorfismos admisibles es cerrada bajo la composición y bajo el cambio de cobase por push out de una aplicación arbitraria  $E_1 \rightarrow E'_1$ .
- b) Dualmente, la clase de epimorfismos admisibles es cerrado bajo la composición y bajo el cambio de base por pull back de una aplicación arbitraria  $E'_3 \rightarrow E_3$ .
- c) Cualquier sucesión isomorfa a una sucesión exacta es exacta, y cualquier sucesión escindible

$$E \rightrightarrows E \oplus F \rightrightarrows F$$

es exacta.

- d) En cualquier sucesión  $E_1 \rightrightarrows E_2 \rightrightarrows E_3$ , la aplicación  $E_1 \rightrightarrows E_2$  es el núcleo de  $E_2 \rightrightarrows E_3$ , y  $E_2 \rightrightarrows E_3$  es el conúcleo de  $E_1 \rightrightarrows E_2$ .
- e) Sea  $E \xrightarrow{i} F$  un morfismo de  $\mathcal{U}$  con conúcleo en  $\mathcal{U}$ . Si existe una aplicación  $F \xrightarrow{k} G$  tal que  $E \xrightarrow{ki} G$  es un monomorfismo admisible, entonces  $E \xrightarrow{i} F$  es asimismo un monomorfismo admisible.
- f) Dualmente, si  $F \xrightarrow{i} E$  tiene núcleo en  $\mathcal{U}$ , y si existe una aplicación  $G \xrightarrow{k} F$  tal que  $G \xrightarrow{ik} E$  es un epimorfismo admisible, entonces  $F \xrightarrow{i} E$  es un epimorfismo admisible.

La mayoría de las categorías exactas verifican una versión más fuerte de las condiciones e) y f), véase el capítulo 3. Más precisamente: Si  $f : E \rightarrow F$  es un morfismo de  $\mathcal{U}$ , y existe un morfismo  $s : F \rightarrow E$  que escinde  $f$  tal que  $fs = 1_F$ , entonces  $f$  es un epimorfismo admisible  $E \rightrightarrows F$ .

Esta propiedad y su dual se verifican, en presencia de e) y f), si  $\mathcal{U}$  es idempotentemente completa como categoría exacta, véase el apéndice A de [TT90] para más detalles o bien el capítulo 3.

Otra propiedad que muchas categorías exactas satisfacen. Esto es la clausura de  $\mathcal{C}$  bajo núcleos de sobreyecciones de  $\mathcal{A}$ . Esto es siempre que un morfismo  $\varphi : B \rightarrow C$  en  $\mathcal{C}$  es un epimorfismo en  $\mathcal{A}$  entonces  $\ker \varphi \in \mathcal{C}$ .

De nuevo, si  $\mathcal{C}$  es idempotentemente completo entonces es cerrado bajo núcleos de sobreyecciones de  $\mathcal{A}$ . Véase apéndice A de [TT90] o el apéndice B para más detalles.

NOTA 2.1.7. Existe una descripción alternativa, y equivalente, de una categoría exacta debida a Bass, véase [Bas68]. Describimos aquí la versión de Weibel, [Weib].

Una categoría exacta es un par  $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ , donde  $\mathcal{C}$  es una categoría aditiva y  $\mathcal{E}$  es una familia de sucesiones en  $\mathcal{C}$  tales que existe una inmersión de  $\mathcal{C}$  como subcategoría llena de una categoría abeliana  $\mathcal{A}$  de forma que

- (i)  $\mathcal{E}$  es la clase de todas sucesiones cortas en  $\mathcal{C}$  que son exactas en  $\mathcal{A}$ ;
- (ii)  $\mathcal{C}$  es cerrado bajo extensiones en el sentido que si  $0 \rightarrow B \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} D \rightarrow 0$  es exacta en  $\mathcal{A}$  con  $B, D \in \mathcal{C}$  entonces  $C \in \mathcal{C}$ .

Un morfismo que aparece como el monomorfismo  $i$  (resp. como el epimorfismo  $j$ ) de alguna sucesión en  $\mathcal{E}$  se le denominará monomorfismo admisible (resp. epimorfismo admisible). Como consecuencia de la nota 2.1.3 si un morfismo en la categoría exacta  $\mathcal{E}$  es a la vez monomorfismo admisible y epimorfismo admisible entonces es isomorfismo.

Este doble concepto de categoría exacta será muy útil: La versión de Quillen para comprobar la exactitud de una categoría y la de Bass para llevar a cabo cálculos con morfismos. Utilizaremos principalmente la definición de Quillen pero teniendo en cuenta que, a través de la inmersión de Gabriel-Quillen, véase apéndice B, la categoría exacta  $\mathcal{U}$  puede verse como una subcategoría llena de la categoría abeliana  $\mathcal{A}b(\mathcal{U})$  de los funtores exactos a izquierda  $\mathcal{U}^{op} \rightarrow \mathcal{A}b$ , donde  $\mathcal{A}b$  es la categoría abeliana de los grupos abelianos. Una vez más véase el apéndice B para una descripción más completa.

DEFINICIÓN 2.1.8. Un *functor exacto*  $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  entre categorías exactas es un funtor aditivo  $F$  que lleva sucesiones exactas cortas de  $\mathcal{B}$  en sucesiones exactas cortas de  $\mathcal{C}$ .

PROPOSICIÓN 2.1.9. *Toda categoría exacta  $\mathcal{U}$  tiene una estructura natural de categoría con cofibraciones y equivalencias débiles.*

DEMOSTRACIÓN. Escogemos a  $co\mathcal{U}$  como la clase de los monomorfismos admisibles y a  $w\mathcal{U}$  como la clase de isomorfismos de  $\mathcal{U}$ . Comprobemos los axiomas de Waldhausen:

a) Axiomas para  $co\mathcal{U}$ .

cof 1: Los isomorfismos están en  $co\mathcal{U}$  ya que son monomorfismos admisibles.

cof 2: Para todo objeto  $U \in \mathcal{U}$ , el morfismo constante  $* \rightarrow U$  es una cofibración pues siempre se tiene la siguiente sucesión trivialmente escindible en  $\mathcal{U}$

$$* \twoheadrightarrow * \oplus A \twoheadrightarrow A.$$

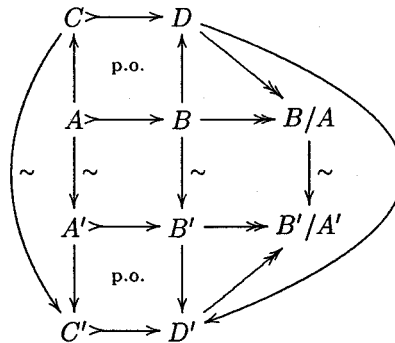
cof 3: Las cofibraciones admiten cambio de cobase por el axioma a) para categorías exactas.

b) Axiomas para  $w\mathcal{U}$ .

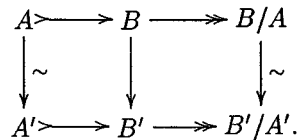
weq 1: Los isomorfismos están en  $w\mathcal{U}$  por definición.



weq 2: El "Gluing Lemma" es fácil de comprobar recorriendo el siguiente diagrama:



Es más, el axioma adicional de saturación, 1.7.1, se satisface trivialmente ya que estamos trabajando con isomorfismos. El axioma de extensión puede ser verificado tras recorrer el siguiente diagrama:



Recuérdese que en una categoría exacta  $\mathcal{U}$  un morfismo es isomorfismo si y sólo si tiene núcleo, conúcleo y ambos triviales, es decir ambos son el objeto cero.  $\square$

NOTA 2.1.10. De acuerdo con la proposición anterior cualquier categoría exacta  $\mathcal{U}$  tiene una estructura natural como categoría de Waldhausen. Podemos pues a partir de aquí hablar de su  $K$ -teoría y de sus  $K$ -grupos. Los  $K$ -grupos que se obtienen de esta forma coinciden con aquellos definidos por Quillen para una categoría exacta, véase [Wal85, apéndice 1.9]. Estos últimos recuérdese extendían a las definiciones clásicas de los grupos  $K_0$  y  $K_1$  dados por Bass, véase [Qui72, páginas 95-96], en particular todos los  $K_i$  son abelianos. Recordemos las definiciones clásicas de  $K_0$  y  $K_1$ . Dada una categoría exacta  $\mathcal{E}$ ,  $K_0(\mathcal{E})$  es el grupo abeliano con generadores  $[C]$ , uno por cada objeto  $C$  de  $\mathcal{E}$  y relaciones  $[C] = [B] + [D]$  por cada sucesión exacta corta  $0 \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow 0$  en  $\mathcal{C}$ . Recordemos que se verifica la siguiente propiedad:  $[A] = [B] \in K_0(\mathcal{E})$  si y sólo si existen objetos  $C_1$  y  $C_2$  en  $\mathcal{E}$  y sucesiones exactas  $C' \twoheadrightarrow C_1 \twoheadrightarrow C''$  y  $C' \twoheadrightarrow C_2 \twoheadrightarrow C''$  tales que  $A \oplus C_1 \cong B \oplus C_2$ . El grupo  $K_1(\mathcal{E})$  es el grupo abeliano con un generador  $[M, f]$  por cada automorfismo  $f : M \rightarrow M$  bajo las relaciones:

- i)  $[M, gf] = [M, f] + [M, g]$ ,
- ii)  $[L, i^{-1}fi] = [M, f]$  para  $i : L \rightarrow M$  un isomorfismo, y
- iii)  $[M, f] = [M'', f''] + [M', f']$  para cada automorfismo de sucesiones exactas cortas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' \\
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Veamos cómo las  $K$ -teorías de una categoría exacta y una subcategoría exacta suya se relacionan entre sí.

**DEFINICIÓN 2.1.11.** Sea  $\mathcal{A}$  una subcategoría exacta de una categoría exacta  $\mathcal{B}$ .  $\mathcal{A}$  se dice *cofinal* en  $\mathcal{B}$  si para toda sucesión exacta en  $\mathcal{B}$   $0 \rightarrow A' \rightarrow B \rightarrow A'' \rightarrow 0$  con  $A'$  y  $A''$  en  $\mathcal{A}$ , entonces también  $B$  está en  $\mathcal{A}$ , y si además para cada  $B$  de  $\mathcal{B}$  existe  $B'$  en  $\mathcal{B}$  tal que  $B \oplus B'$  es isomorfo a un objeto de  $\mathcal{A}$ .

**NOTA 2.1.12.** Por simplicidad podemos suponer que  $\mathcal{A}$  es cerrado bajo isomorfismos en  $\mathcal{B}$  ya que esta no cambia la  $K$ -teoría de  $\mathcal{A}$ . En efecto, dada  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$  una inclusión de categorías exactas, consideremos  $\tilde{\mathcal{A}}$  la subcategoría llena de  $\mathcal{B}$  formada por objetos isomorfos a objetos de  $\mathcal{A}$ . Entonces  $\mathcal{A} \subseteq \tilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{B}$  claramente. Basta ahora aplicar el teorema de aditividad a  $E(\mathcal{A}, \tilde{\mathcal{A}}, *)$  y darse cuenta que  $\tilde{\mathcal{A}}$  es equivalente como categoría a  $E(\mathcal{A}, \tilde{\mathcal{A}}, *)$ , para obtener la equivalencia de homotopías entre las correspondientes  $K$ -teorías.

El próximo teorema es conocido como el teorema de cofinalidad.

**TEOREMA 2.1.13.** [Sta85, Theorem 2.1] Sea  $\mathcal{B}$  una categoría exacta y  $\mathcal{A}$  una subcategoría exacta que es cofinal en  $\mathcal{B}$  y  $G = K_0(\mathcal{B})/K_0(\mathcal{A})$ . Entonces existe una sucesión fibrada salvo homotopías en  $\text{Top}$

$$K(iS.\mathcal{A}) \rightarrow K(iS.\mathcal{B}) \rightarrow BG.$$

Nótese que aquí  $wA = iA$  y  $wB = iB$ , donde  $i$  denota la clase de los isomorfismos. Ésta es la elección mínima posible como equivalencias débiles.

### 2.2. Localización de categorías exactas

En todo este capítulo  $\mathcal{U}$  será una categoría exacta y  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$  una subcategoría exacta de  $\mathcal{U}$ .

**DEFINICIÓN 2.2.1.** Diremos que  $\mathcal{A}$  localiza  $\mathcal{U}$ , si

- (i)  $\mathcal{A}$  es una *subcategoría de Serre*, es decir las sucesiones exactas son cerradas en  $\mathcal{A}$ ; esto es, si  $A \dashrightarrow A \dashrightarrow A''$  es una sucesión exacta en  $\mathcal{U}$ , entonces  $A \in \mathcal{A}$  si y sólo si  $A', A'' \in \mathcal{A}$ .
- (ii) Para cada flecha  $A \rightarrow U$  en  $\mathcal{U}$  con  $A \in \mathcal{A}$ , existe un diagrama conmutativo en  $\mathcal{U}$

$$\begin{array}{ccc}
 & & U' \\
 & \nearrow 0 & \uparrow \\
 A & \longrightarrow & U \\
 & \searrow & \uparrow \\
 & & A'
 \end{array}$$

con  $A' \in \mathcal{A}$ .



Tenemos que  $\alpha$  puede ser factorizado como  $\bar{\alpha}\pi(\alpha)$  con  $\pi(\alpha)$  un epimorfismo admisible y  $\bar{\alpha}$  un monomorfismo admisible. Hemos demostrado que todo morfismo de  $\mathcal{A}$  tiene núcleo y conúcleo, en  $\mathcal{A}$ , y por tanto es un  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo.  $\square$

NOTA 2.2.5. En realidad el Corolario 2.2.4 implica que  $\mathcal{A}$  es una subcategoría abeliana dentro de  $\mathcal{U}$ , ver 2.1.2.

Comprobemos ahora que la clase de los  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos verifica los axiomas de un sistema multiplicativo A.0.1. Este resultado permitirá definir la correspondiente categoría localizada  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  más adelante.

PROPOSICIÓN 2.2.6. *Los  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos forman un sistema multiplicativo en  $\mathcal{U}$ .*

DEMOSTRACIÓN. La demostración se sigue de los lemas 2.2.7, 2.2.8 y 2.2.14.  $\square$

LEMA 2.2.7. *La clase de los  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos verifica el axioma MS1 en A.0.1.*

DEMOSTRACIÓN. Dividimos la demostración en varios casos:

a) Sean  $a$  y  $b$ ,  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos con  $a$  un monomorfismo y  $b$  un epimorfismo. Entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & & \downarrow \sim a & & \\ \ker b & \xrightarrow{i(b)} & V & \xrightarrow[b]{\sim} & W \\ & & \downarrow \pi(a) & & \\ & & \text{coker } a & & \end{array}$$

donde por 2.2.4,  $\ker b \xrightarrow{\pi(a)i(b)} \text{coker } a$  se factoriza como,

$$\ker \pi(a)i(b) \xrightarrow{i} \ker b \xrightarrow{\bar{\pi}} \ker b / \ker \pi(a)i(b) \xrightarrow[\cong]{\bar{\varphi}} A \xrightarrow{\bar{i}} \text{coker } a \xrightarrow{\pi(\bar{i})} \text{coker } \pi(a)i(b)$$

$\xrightarrow{\pi(a)i(b)}$

Puesto que  $\pi(a)i(b) = \bar{i}\bar{\pi}$ , tenemos que  $\pi(a)i(b)i = 0$  lo cual implica que  $i(b)i$  factoriza a través de  $a$ . Digamos que  $i(b)i = am$ . Por tanto la esquina inferior izquierda en el siguiente diagrama se completa a

$$\begin{array}{ccccc} \ker \pi(a)i(b) & \xrightarrow{m} & U & & \\ \downarrow i & & \downarrow \sim a & & \\ \ker b & \xrightarrow{i(b)} & V & \xrightarrow[b]{\sim} & W \\ \downarrow \bar{\pi} & & \downarrow \pi(a) & & \downarrow l \\ A & \xrightarrow{\bar{i}} & \text{coker } a & \xrightarrow{\pi(\bar{i})} & \text{coker } \pi(a)i(b) \end{array} \tag{1}$$

Es claro que  $m$  es un monomorfismo en  $\mathcal{U}$ . En realidad  $m$  es un monomorfismo admisible ya que la conmutatividad del cuadrado inferior asegura que  $m$  es monomorfismo en  $\mathcal{A}b(\mathcal{U})$ . Véase la nota 2.1.3. Por la propiedad 2.2.1(ii), tenemos

una factorización

$$\ker \pi(a)i(b) \xrightarrow{s} A(U) \xrightarrow{t} U \twoheadrightarrow U(A)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_m$

donde  $t$  es un monomorfismo admisible y por tanto un monomorfismo. Como  $m$  es un monomorfismo se sigue que  $s$  es un monomorfismo. Como  $s$  es también un epimorfismo entonces  $s$  es un isomorfismo y por tanto  $m$  es un monomorfismo admisible. Podemos realizar el último paso utilizando la categoría abeliana ambiente en la cual la categoría exacta  $\mathcal{U}$  puede ser sumergida. Véase el apéndice B.

Llamemos  $\bar{V} = \text{coker } m$ . Dualmente,  $\pi(\bar{i})\pi(a) = lb$  para cierto morfismo  $l : W \rightarrow \text{coker } \pi(a)\pi(b)$  y mediante un argumento dual al de más arriba  $l$  es un epimorfismo admisible. Llamemos  $\bar{W} = \ker l$ . Está claro que existe un morfismo  $\bar{V} \rightarrow \bar{W}$ . Una vez más tomando  $\mathcal{U}$  sumergida en la categoría abeliana ambiente, se puede demostrar recorriendo el diagrama (1) de más arriba que tal morfismo es en realidad un isomorfismo. Por tanto tenemos que  $ba$  es un  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo ya que tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \ker \pi(a)i(b) & \xrightarrow{n} & U & \twoheadrightarrow & \bar{V} \cong \bar{W} \\ & & \downarrow \sim a & & \downarrow \\ & & V & \xrightarrow{\sim b} & W \xrightarrow{l} \text{coker } \pi(a)i(b) \end{array}$$

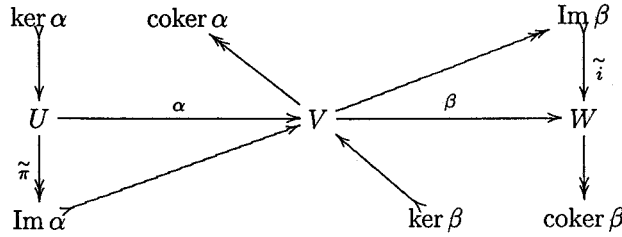
- b) Sean  $\alpha : U \rightarrow V$ ,  $\beta : V \rightarrow W$  dos epimorfismos admisibles que son además  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos, es decir que sus núcleos están en  $\mathcal{A}$ . Tenemos el diagrama de líneas continuas

$$\begin{array}{ccccc} & & \ker \alpha & & \\ & & \downarrow & & \\ & & \bar{i}(\beta) & & \\ A & \xrightarrow{\quad} & U & \searrow \beta\alpha & \\ \downarrow & & \downarrow \alpha & & \\ \ker \beta & \xrightarrow{i(\beta)} & V & \twoheadrightarrow & W \end{array}$$

donde, por 2.1.6[b)], tenemos la existencia del pull back para  $i(\beta)$  y  $\alpha$  que nos da un objeto  $A$  de  $\mathcal{A}$  por ser una extensión de  $\ker \beta$  y  $\ker \alpha$ , 2.2.1. Por 2.1.6  $\beta\alpha$  es un epimorfismo admisible. Las propiedades del pull back implican que  $\bar{i}(\beta)$  es el núcleo de  $\beta\alpha$ . Por la unicidad de los núcleos  $\bar{i}(\beta)$  es un monomorfismo admisible. Por tanto  $\beta\alpha$  es un epimorfismo admisible que también es un  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo.

- c) Dualmente a b, dados  $\alpha$  y  $\beta$  monomorfismos admisibles que sean también  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos se puede demostrar que  $\beta\alpha$  es del mismo tipo.

d) Sean  $\alpha : U \rightarrow V, \beta : V \rightarrow W$  dos  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos. Por definición de  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos existe el siguiente diagrama para  $\beta\alpha$ :



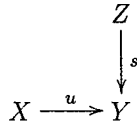
Aplicando a), b) y c) a este diagrama tenemos que  $\beta\alpha$  es de nuevo un  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo. Ciertamente, por a), el morfismo  $\xi : \text{Im } \alpha \rightarrow \text{Im } \beta$  que aparece como composición desde  $\text{Im } \alpha$  a  $\text{Im } \beta$  es un  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo. Tiene entonces una descomposición ker-coker como en 2.2.3 en la que el epimorfismo  $\pi(\text{Im } \alpha)$  como el monomorfismo  $i(\text{Im } \alpha)$  son  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \ker \xi & \xrightarrow{i(\text{Im } \alpha)} & \text{Im } \alpha & \xrightarrow{\pi(\text{Im } \alpha)} & \text{Im } \alpha / \ker \xi & \xrightarrow{\bar{\xi}} & \text{Im } \xi & \xrightarrow{i(\text{Im } \beta)} & \text{Im } \beta & \xrightarrow{\pi(\text{Im } \beta)} & \text{coker } \xi \\
 & & & \searrow & \xrightarrow{\cong} & & \nearrow & & & & \\
 & & & & & \xi & & & & & 
 \end{array}$$

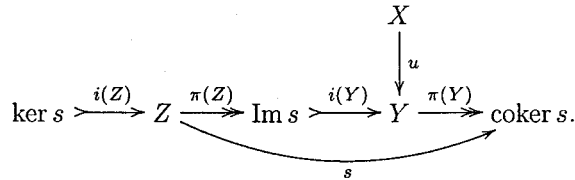
Ahora aplicando b) y c) respectivamente a las composiciones  $\pi(\text{Im } \alpha)\tilde{\pi}$  y  $\tilde{i}i(\text{Im } \alpha)$  obtenemos que ambas composiciones son  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos. Más aún, es inmediato comprobar que con estas composiciones obtenemos una descomposición ker-coker de  $\beta\alpha$  con núcleo y conúcleo en  $\mathcal{A}$ ; es decir  $\beta\alpha$  es un  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo. Esto finaliza la verificación del axioma MS1. □

LEMA 2.2.8. *La clase de los  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos verifica el axioma MS2 en A.0.1.*

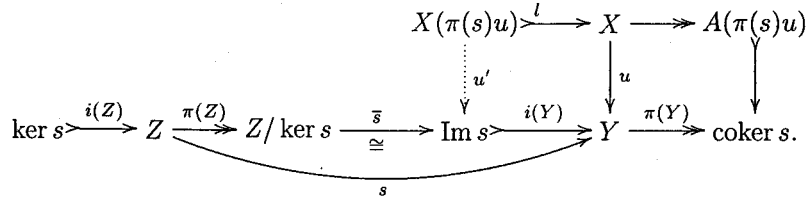
DEMOSTRACIÓN. Consideremos el diagrama



con  $s$  un  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo. Este diagrama puede ser reescrito como

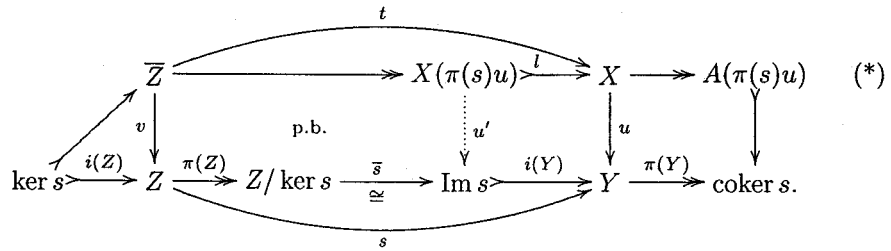


Aplicando la propiedad iii) de 2.2.1 a  $\pi(Y)u$ , podemos hallar una sucesión exacta para  $X$  factorizando  $\pi(Y)u$ , con lo que tenemos el diagrama de líneas continuas.



donde, como  $\pi(Y)ul = 0$ , existe un morfismo  $u' : X(\pi(Y)u) \rightarrow \text{Im } s$ . Por el axioma b) para categorías exactas, 2.1.6, podemos hacer pull back de  $u'$  desde

$\text{ker } s \xrightarrow{i(Z)} Z \xrightarrow{\pi(Z)} Z/\text{ker } s$ . Completamos pues el diagrama a

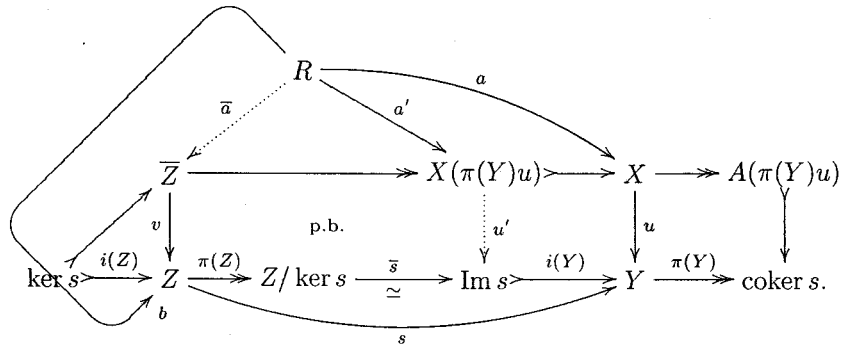


Ahora el axioma MS2 seguirá tomando  $W = \bar{Z}$  y  $v, t$  los morfismos indicados en el diagrama anterior ya que tenemos claro que  $t$  es un  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo observando la línea superior del diagrama.

NOTA 2.2.9. En el diagrama \* de 2.2.8 observamos lo siguiente:

- i) Si  $u$  es un monomorfismo así lo es  $u'$  y por tanto  $v$ .
- ii) Más aún, además de ser  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo, si  $s$  es un monomorfismo (resp. epimorfismo) entonces  $t$  será un monomorfismo (resp. epimorfismo). En el caso de que  $s$  es un monomorfismo diremos que  $X \xrightarrow{u} Y$  puede ser *reemplazado por un objeto más pequeño*  $\bar{Z} \xrightarrow{v} Z$  para hacer el diagrama conmutativo salvo  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos.

NOTA 2.2.10. No es difícil comprobar que el objeto  $\bar{Z}$  que se obtiene después de completar el diagrama \* en 2.2.8 es de hecho un pull back para dicho diagrama. En efecto dados morfismos  $a : R \rightarrow X$  y  $b : R \rightarrow Z$  tales que  $ua = sb$ , existe un morfismo  $\bar{a} : R \rightarrow \bar{Z}$  haciendo que el siguiente diagrama sea conmutativo.



En efecto, puesto que  $ua = sb$  entonces  $\pi(Y)ua = \pi(Y)sb = 0$ . Esto significa que  $R \xrightarrow{a} X \twoheadrightarrow A(\pi(Y)u)$  es cero y por tanto factoriza por  $X(\pi(Y)u)$ , llamémosle  $a'$ . Éste satisface que  $i(Y)u'a' = ua = sb = i(Y)\bar{s}\pi(Z)b$ . El morfismo  $i(Y)$  es un monomorfismo, por tanto  $u'a' = \bar{s}\pi(Z)b$ . El diagrama ahora es un verdadero pull back en  $\mathcal{U}$  y se sigue la existencia del morfismo  $\bar{a}$  en el diagrama anterior.

□

LEMA 2.2.11. *La clase de los  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos verifica el axioma  $MS2'$  en A.0.1.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración para  $MS2'$  es dual a la de  $MS2$ . □

De forma dual, de la demostración para  $MS2'$  se derivan las siguientes observaciones.

NOTA 2.2.12. Esto es:

- (i) Si  $u$  es un epimorfismo también lo es  $u'$  y por tanto  $v$ .
- (ii) Más aún, si además de ser  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo  $s$  es un monomorfismo (resp. epimorfismo) entonces  $t$  será un monomorfismo (resp. epimorfismo). En el caso que  $s$  sea un epimorfismo diremos que  $X \xrightarrow{u} Y$  puede ser reemplazado por un objeto  $Z \xrightarrow{v} \bar{Z}$  más pequeño para hacer el diagrama conmutativo salvo  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos.

NOTA 2.2.13. Finalmente, el objeto  $\bar{Z}$  que completa el correspondiente diagrama para  $MS2'$ :

$$\begin{array}{ccc} Z & \cdots & \bar{Z} \\ \uparrow s & & \uparrow \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

satisface las propiedades de un push out. La demostración es dual a la correspondiente de  $MS2$  en 2.2.10.

LEMA 2.2.14. *La clase de los  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos verifica el axioma  $MS3$  en A.0.1.*

DEMOSTRACIÓN. Para comprobar  $MS3$  bajo nuestras hipótesis, notemos que ya que  $\mathcal{U}$  es una categoría exacta y, por tanto, aditiva la propiedad  $MS3$  puede ser reescrita como sigue. Dada  $h : X \rightarrow Y$ , son equivalentes

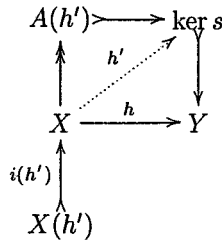
- (a') existe  $s : Y \rightarrow Y'$  en  $S$  tal que  $sh = 0$ .
- (b') existe  $t : X' \rightarrow X$  en  $S$  tal que  $ht = 0$ .

Veamos  $(a') \Rightarrow (b')$ . En efecto, dado el diagrama de flechas continuas

$$\begin{array}{ccccc} & & \ker s & & \operatorname{coker} s \\ & & \downarrow & & \uparrow \\ X & \xrightarrow{h} & Y & \xrightarrow{s} & Y' \\ & & \downarrow & & \uparrow \\ & & Y/\ker s & \xrightarrow[\cong]{\bar{s}} & \operatorname{Im} s \end{array}$$

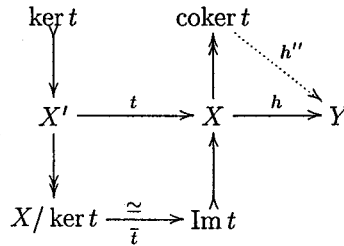


Como  $hs = 0$ ,  $h$  factoriza por  $\ker s$ . Por 2.2.1, encontramos una sucesión exacta para  $X$  y  $h'$

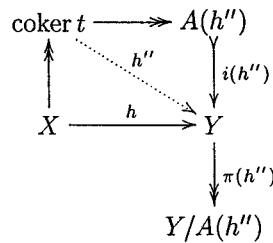


Sean  $X' = X(h')$  y  $t = i(h')$ , es inmediato que  $i(h')$  es un  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo y que  $i(h')h = 0$ .

(a')  $\leftarrow$  (b'). Recíprocamente, dado el diagrama de flechas continuas



Como  $ht = 0$ ,  $h$  factoriza por  $\text{coker } t$  el cual está en  $\mathcal{A}$ . Por la propiedad iii) de 2.2.1 encontramos una sucesión exacta para  $Y$  y  $h''$ .



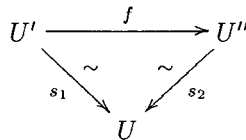
Sean  $Y' = Y/A(h'')$  y  $s = \pi(h'')$ , es inmediato que  $\pi(h'')$  es un  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo y que  $h\pi(h'') = 0$ .

Esto termina la demostración de 2.2.6. □

DEFINICIÓN 2.2.15. Definimos la *categoría localizada*  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  como la categoría con objetos  $\text{obj } \mathcal{A}^{-1}\mathcal{U} = \text{obj } \mathcal{U}$ , los objetos de  $\mathcal{U}$  y morfismos

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}}(U, V) = \varinjlim_{I_U, J_V} \text{Hom}_{\mathcal{U}}(U', V')$$

donde  $I_U = \{U' \xrightarrow{\sim} U\}$  and  $J_V = \{V \xrightarrow{\sim} V'\}$  son las categorías descritas en el apéndice A. Por ejemplo,  $I_U$  es la categoría cuyos objetos son  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos  $s : U' \xrightarrow{\sim} U$  y cuyos morfismos son diagramas conmutativos en  $\mathcal{U}$





DEFINICIÓN 2.3.1. Una sucesión  $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$  en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  se dirá que es una *sucesión exacta corta* en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  si es  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfa a una sucesión exacta corta  $\overline{M} \rightarrow \overline{N} \rightarrow \overline{P}$  en  $\mathcal{U}$ . Con ello queremos decir que existe un diagrama conmutativo en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  como el siguiente:

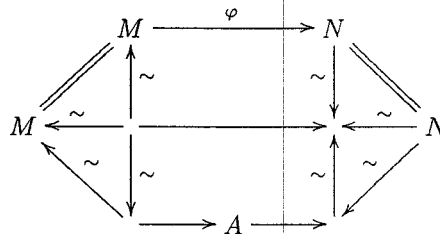
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & P & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ 0 & \longrightarrow & \pi(\overline{M}) & \longrightarrow & \pi(\overline{N}) & \longrightarrow & \pi(\overline{P}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde  $\pi$  es el funtor de localización 2.2.15 y los morfismos  $u, v$  y  $w$  son isomorfismos en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$ .

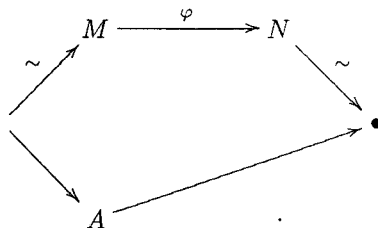
Antes de demostrar que  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  es una categoría exacta probaremos los siguientes lemas sobre morfismos en la categoría localizada que simplificarán las demostraciones sucesivas.

LEMA 2.3.2. Sean  $\varphi$  y  $\psi$  morfismos de  $\mathcal{U}$ . Se verifica que  $\pi(\varphi) = 0$  si y sólo si  $\varphi$  factoriza por  $\mathcal{A}$ .

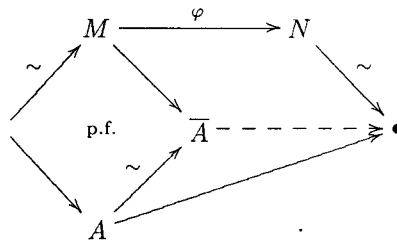
DEMOSTRACIÓN. Es claro que si  $\varphi$  factoriza por  $\mathcal{A}$  entonces  $\pi(\varphi) = 0$ . Por otra parte, el que  $\pi(\varphi) = 0$  significa que  $\pi(\varphi)$  factoriza por el cero objeto  $\star$  de  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$ . El cero objeto  $\star$  de  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  está representado por cualquier objeto  $A$  de  $\mathcal{A}$ . Obtenemos pues el siguiente diagrama en  $\mathcal{U}$ :



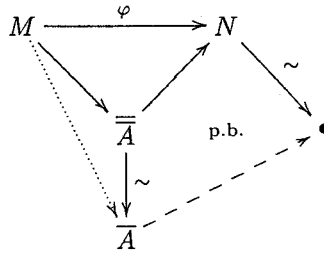
La parte exterior del diagrama se puede reescribir como



Tómese push forward, 2.2.13, a la izquierda,



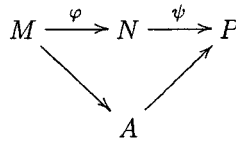
y ahora pull back, 2.2.10, en la parte superior derecha. Esto muestra que  $\varphi$  factoriza por un objeto  $\overline{A}$  de  $\mathcal{A}$  de acuerdo con el siguiente diagrama.



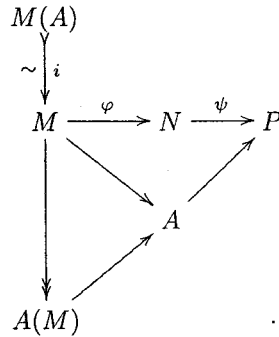
□

LEMA 2.3.3. Sean  $\varphi$  y  $\psi$  morfismos de  $\mathcal{U}$  tales que  $\pi(\psi\varphi) = 0$ . Entonces existe un representante  $\varphi'$  de  $\varphi$ ,  $\pi(\varphi) = \pi(\varphi')$ , tal que  $\psi\varphi' = 0$  en  $\mathcal{U}$ . De forma dual, existe un representante  $\psi'$  de  $\psi$  con  $\psi'\varphi = 0$ .

DEMOSTRACIÓN. Si  $\pi(\psi\varphi) = 0$ , entonces por 2.3.2 existe un objeto  $A$  de  $\mathcal{A}$  por el cual  $\psi\varphi$  factoriza.



Ahora, aplicamos el axioma de localización iii), 2.2.1, al morfismo de  $M$  en  $A$ , para obtener el diagrama



Llamemos  $\varphi' : M(A) \rightarrow M$  a  $\varphi i$  para el que claramente  $\psi\varphi' = 0$ .

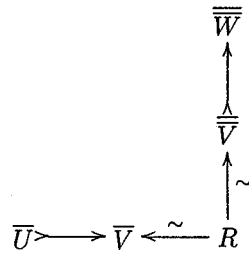
□

LEMA 2.3.4. El funtor de localización  $\pi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  conserva núcleos y conúcleos.

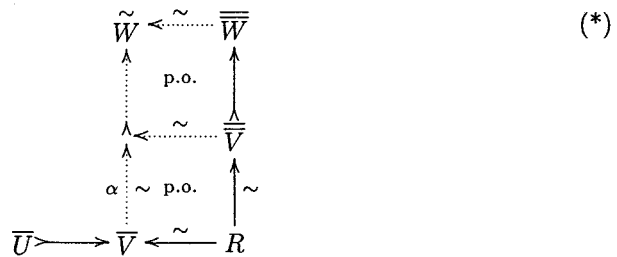
DEMOSTRACIÓN. Sean  $M \xrightarrow{u} N$  un morfismo de  $\mathcal{U}$  y  $K \xrightarrow{i} M$  su núcleo. Es claro, a partir del lema 2.3.3, que  $\pi(i)$  es un monomorfismo en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$ . Sea  $\bar{f} : X \rightarrow M$  un morfismo en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  tal que  $\pi(u)\bar{f} = 0$  en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$ . Demostraremos que hay un morfismo  $\bar{g} : X \rightarrow K$  con  $\pi(i)\bar{g} = \bar{f}$  en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$ .



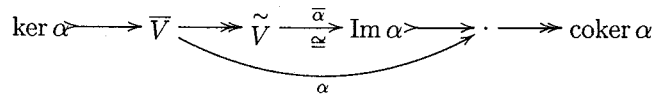
Trás tomar el pull back que se indica obtenemos un diagrama de la forma:



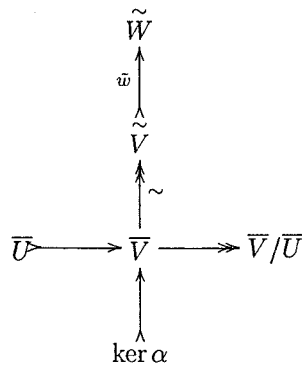
Entonces tomamos pushout y aplicamos en  $\mathcal{U}$  el axioma a) de 2.1.6 al monomorfismo admisible  $\overline{V} \rightarrow \overline{\overline{W}}$  tal y como se indica en el siguiente diagrama



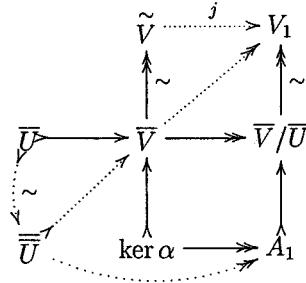
Puesto que  $\alpha$  es un  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo, existe una descomposición como la que se indica a continuación, véase 2.2.3.



y como la composición de monomorfismos admisibles es cerrada en  $\mathcal{U}$ , entonces del diagrama \* se obtiene

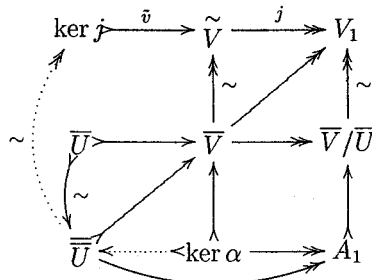


Aplicuemos en  $\mathcal{U}$  el axioma ii) de 2.2.1 a la esquina inferior derecha, que se descompondrá como se indica en el diagrama siguiente.



donde  $\bar{U}$  denota el núcleo del epimorfismo admisible obtenido por composición de la diagonal. Entonces existe entonces un morfismo inducido de  $\bar{U}$  a  $\bar{\bar{U}}$  cuyo conúcleo es el morfismo  $\bar{U} \rightarrow \bar{\bar{U}}$  inducido por la conmutatividad del diagrama  $\bar{U} \rightarrow A_1$ . Por tanto por axioma e) de 2.1.6 para  $\mathcal{U}$  este morfismo es un monomorfismo admisible. Más aún, es un  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo pues  $A_1$  está en  $\mathcal{A}$ .

Por otra parte, existe un morfismo inducido  $j : \tilde{V} \rightarrow V_1$ , el cual es obviamente un epimorfismo. Aquí aplicamos la propiedad (C) de clausura de  $\mathcal{U}$ , obteniendo así la existencia de  $\ker j$ . Luego  $j$  es un epimorfismo admisible por 2.1.6, axioma f), para  $\mathcal{U}$ . Más aún, el morfismo  $j$  induce un morfismo de  $\ker \alpha$  a  $\bar{U}$  cuyo conúcleo resulta ser  $\ker j$ . Por tanto este morfismo por 2.1.6, axioma e), es un monomorfismo admisible y así el morfismo de  $\bar{U}$  a  $\ker j$  es un epimorfismo admisible además de ser un  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo ya que  $\ker \alpha$  está en  $\mathcal{A}$ .



Hemos pues obtenido los siguientes morfismos

$$\ker j \xrightarrow{\tilde{v}} \tilde{V} \xrightarrow{\tilde{w}} \tilde{W}$$

en  $\mathcal{U}$ , cuya composición es un monomorfismo admisible en  $\mathcal{U}$ . Además  $\ker j$  y  $\tilde{W}$  son isomorfos en  $\mathcal{U}^{-1}\mathcal{A}$  a  $U$  y  $W$  respectivamente a través de cadenas  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos que aparecen en los diagramas de más arriba. Hemos demostrado así que la clase de monomorfismos admisibles es cerrada por composición.

Utilizando argumentos duales se puede demostrar que los epimorfismos admisibles de  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  son cerrados bajo la composición.

Comprobemos que los monomorfismos admisibles son cerrados bajo el cambio de cobase por pushouts de morfismos arbitrarios.

Sean  $a : A \rightarrow B$  un monomorfismo admisible y  $c : A \rightarrow C$  cualquier otro morfismo en la categoría localizada  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$ . Tomando representantes de dichos morfismos





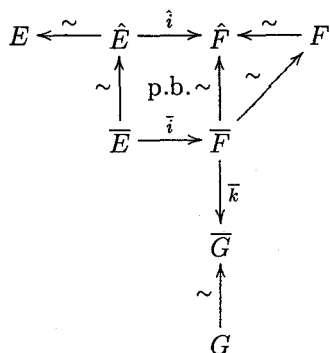
Tomando representantes de  $i$ ,  $k$  y  $ki$ :

$$E \xleftarrow{\sim} \hat{E} \xrightarrow{i} \hat{F} \xleftarrow{\sim} F$$

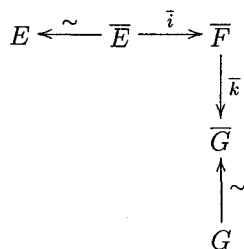
$$F \xleftarrow{\sim} \bar{F} \xrightarrow{\bar{k}} \bar{G} \xleftarrow{\sim} G$$

$$E \xleftarrow{\sim} \tilde{E} \xrightarrow{\tilde{ki}} \tilde{G} \xleftarrow{\sim} G$$

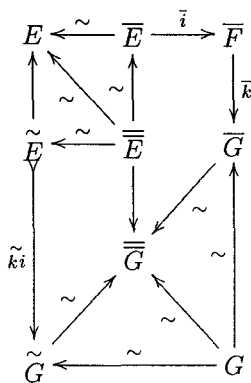
calculamos otro representante de la composición  $ki$  como sigue. Componemos  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos centrales y tomamos el pullback indicado en el siguiente diagrama:



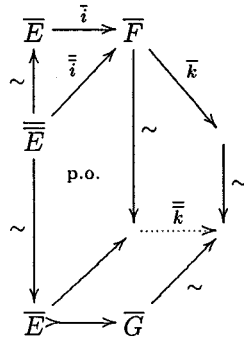
entonces el diagrama



es también un representante de  $ki$ . Así pues, por el Apéndice A, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

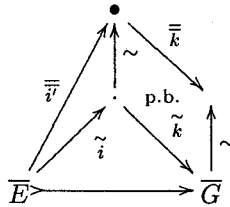


Parte de este diagrama forma el exterior del siguiente diagrama

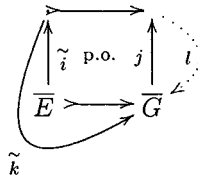


donde hemos llamado  $\overline{i}$  a la composición en la esquina superior izquierda y  $\overline{k}$  al morfismo que se obtiene por la propiedad del pushout.

Ahora tomamos pull back a lo largo de  $\overline{k}$  y entonces  $\overline{i}$  factoriza a través del pull back.

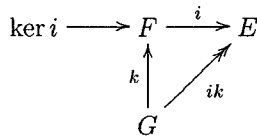


Llegamos pues a una situación similar a la que tenemos en el axioma e) pero en  $\mathcal{U}$ . Tan sólo nos queda demostrar que  $\widetilde{i}$  tiene conúcleo. Para ello aplicamos el axioma a) de 2.1.6 para a los morfismos de  $\mathcal{U}$   $\overline{E} \longrightarrow \overline{G}$  e  $\widetilde{i}$  para obtener el diagrama conmutativo de flechas continuas en  $\mathcal{U}$ :

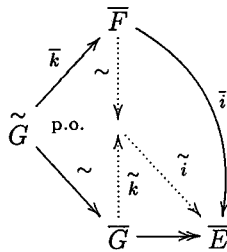


Ahora la propiedad universal de push out implica la existencia de un morfismo  $l$  que escinde a  $j$ , es decir  $lj = 1_{\overline{G}}$ . El resultado 3.1.2 implica que  $j$  es un monomorfismo admisible y por tanto tiene conúcleo. Como el cuadrado del diagrama es un push out entonces también es el núcleo de  $\widetilde{i}$ . Por la propiedad 2.3.4 se tiene que  $i$  tiene conúcleo en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  y éste es isomorfo en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  a  $\text{coker } \widetilde{i}$ .

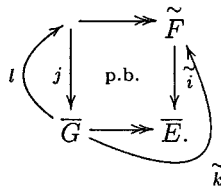
Para el axioma f) realizamos cálculos similares. Dado un diagrama



en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  elegimos representantes de estos morfismos en  $\mathcal{U}$  y tras algunas simplificaciones como las hechas más arriba obtenemos un diagrama conmutativo de flechas continuas como el siguiente:



Tomemos pushout indicado en este diagrama y sea  $\tilde{i}$  el morfismo obtenido por la propiedad de pushout. Llegamos al diagrama conmutativo

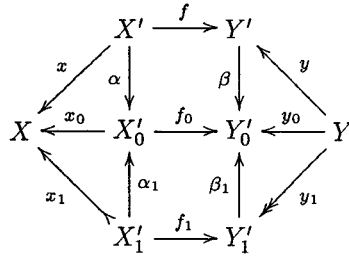


Ahora aplicamos el axioma b) de 2.1.6 para  $\mathcal{U}$  a  $\overline{G} \longrightarrow \overline{E}$ . La propiedad universal de pull back implica la existencia de un morfismo  $l$  que escinde a  $j$ , es decir  $jl = 1_{\overline{G}}$ . La propiedad 3.1.2 implica que  $j$  es un epimorfismo admisible y por tanto tiene un núcleo, digamos  $\ker j$ . La propiedad 2.3.4 implica que  $i$  tiene núcleo en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  el cual es isomorfo en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  a  $\pi(\ker \tilde{i})$ , donde  $\pi$  es el functor de localización. Hemos demostrado que  $i$  es isomorfo en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  a un epimorfismo admisible. Con ello hemos comprobado sobre  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  todos los axiomas de una categoría exacta, 2.1.6. Además es inmediato comprobar que el functor de localización  $\pi$  es exacto.

El resto de lo enunciado en 2.3.6 se sigue de aplicar la propiedad universal para el cálculo de fracciones, A.0.3, a nuestro caso pues  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  es  $\mathcal{U}$  localizado con respecto a los  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos.  $\square$

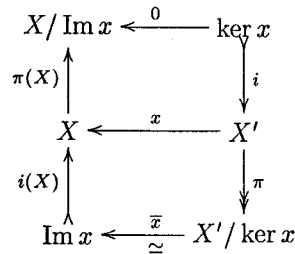
Puesto que nuestra localización es respecto a la clase de los  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos se pueden obtener algunas propiedades más de  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  del mismo tipo de aquellas enunciadas al final del Apéndice A. Estas corresponden a las demostradas en [Bas68] para categorías abelianas.

PROPOSICIÓN 2.3.7. Sea  $X \xleftarrow{x} X' \xrightarrow{f} Y' \xleftarrow{y} Y$ , con  $x$  e  $y$   $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos. Entonces podemos construir el siguiente diagrama conmutativo.

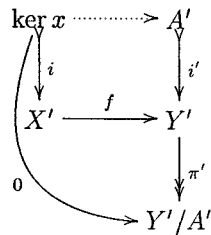


donde  $x_1$  es un monomorfismo admisible e  $y_1$  es un epimorfismo admisible.

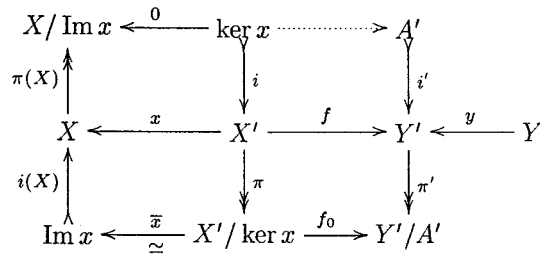
DEMOSTRACIÓN. Como  $x$  es un  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo entonces por definición de  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo,



donde  $\ker x$  y  $X/\text{Im } x$  están en  $\mathcal{A}$  y  $\bar{x}$  es un isomorfismo. Ahora, la composición  $f \circ i : \ker x \rightarrow Y$  factoriza como



de acuerdo con ii) de 2.2.1. Luego  $\pi' f i = 0$ , y por tanto  $\pi' f$  factoriza por  $X'/\ker x$  via  $\pi$ . Denotemos por  $f_0$  al morfismo tal que  $f_0 \pi = \pi' f$ .



Llamemos  $y_0$  a la composición  $\pi' y$ , que es un  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo por saturación. Denotemos por  $X'_0$  e  $Y'_0$  a los cocientes  $X'/\ker x$  e  $Y'/A'$ , respectivamente.

Tenemos por definición de  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos el siguiente diagrama para  $y_0$ ,

$$\begin{array}{ccc}
 Y'_0 / \text{Im } y_0 & \xleftarrow{0} & \ker y_0 \\
 \uparrow \pi'_0 & & \downarrow i(Y) \\
 Y'_0 & \xleftarrow{y_0} & Y \\
 \uparrow i'_0 & & \downarrow \pi(Y) \\
 \text{Im } y_0 & \xleftarrow[\simeq]{\bar{y}_0} & Y / \ker y_0 .
 \end{array}$$

Apliquemos el axioma ii), a  $\pi'_0 f_0 : X'_0 \rightarrow Y'_0 / \text{Im } y_0$  para obtener la flecha punteada en el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 A'_0 & \cdots \rightarrow & Y'_0 / \text{Im } y_0 \\
 \uparrow & & \uparrow \pi'_0 \\
 X'_0 & \xrightarrow{f_0} & Y'_0 \\
 \uparrow \bar{i}_0 & & \uparrow i'_0 \\
 \bar{X}'_0 & & 0
 \end{array}$$

Luego  $\pi'_0 f_0 \bar{i}_0 = 0$  y, por tanto,  $f_1 \bar{i}_0$  factoriza a través de  $i'_0$ , llamémos  $f_1$  al morfismo que factoriza. Tenemos el diagrama siguiente.

$$\begin{array}{ccc}
 A'_0 & \cdots \rightarrow & Y'_0 / \text{Im } y_0 \\
 \uparrow & & \uparrow \pi'_0 \\
 X'_0 & \xrightarrow{f_0} & Y'_0 \\
 \uparrow \bar{i}_0 & & \uparrow i'_0 \\
 \bar{X}'_0 & \xrightarrow{f_1} & \text{Im } y_0
 \end{array}$$

Combinando los diagramas anteriores tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xleftarrow{x} & X' & \xrightarrow{f} & Y' & \xleftarrow{y} & Y \\
 \uparrow i(X) & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi' & \swarrow y_0 & \downarrow \pi(Y) \\
 \text{Im } x & \xleftarrow[\simeq]{\bar{x}} & X' / \ker x & \xrightarrow{f_0} & Y' / A' & & \\
 & & \uparrow i_0 & & \uparrow i'_0 & & \\
 \bar{X}_0 & \xrightarrow{f_1} & \text{Im } y_0 & \xleftarrow[\simeq]{\bar{y}_0} & Y / \ker y_0 & & 
 \end{array}$$

Sean  $X'_1 = \bar{X}_0$ ,  $Y'_1 = \text{Im } y_0$ ,  $X'_0 = X' / \ker x$ ,  $Y'_0 = Y' / A'$ ,  $\alpha = \pi$ ,  $\beta = \pi'$ ,  $y_1 = \bar{y}_0 \pi(Y)$ ,  $\beta_1 = i'_0$ ,  $\alpha_1 = i_0$ ,  $x_1 = \bar{x} i_0$  y  $x_0 = \bar{x}$ . Es inmediato comprobar que estas elecciones satisfacen las propiedades que se pedían.  $\square$

PROPOSICIÓN 2.3.8. Sea

$$\begin{array}{ccccc}
 X_2 & \xrightarrow{\alpha_1} & X_1 & \xrightarrow{\alpha_0} & X_0 \\
 \gamma_2 \downarrow & & \gamma_1 \downarrow & & \gamma_0 \downarrow \\
 Y_2 & \xrightarrow{\beta_1} & Y_1 & \xrightarrow{\beta_0} & Y_0
 \end{array}$$

un diagrama conmutativo en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$ . Entonces existe un diagrama conmutativo como el que sigue en  $\mathcal{U}$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 X_2 & \xrightarrow{\alpha_1} & X_1 & \xrightarrow{\alpha_0} & X_0 \\
 \uparrow x_2 & & \uparrow x_1 & & \uparrow x_0 \\
 X'_2 & \xrightarrow{\alpha'_1} & X'_1 & \xrightarrow{\alpha'_0} & X'_0 \\
 \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \\
 Y'_2 & \xrightarrow{\beta'_1} & Y'_1 & \xrightarrow{\beta'_0} & Y'_0 \\
 \uparrow y_2 & & \uparrow y_1 & & \uparrow y_0 \\
 Y_2 & \xrightarrow{\beta_1} & Y_1 & \xrightarrow{\beta_0} & Y_0
 \end{array}$$

Aquí las verticales representan  $\gamma_2, \gamma_1$  y  $\gamma_0$  respectivamente, los morfismos  $x_i$  son monomorfismos admisibles, y los morfismos  $y_i$  son epimorfismos admisibles. En particular, si  $\alpha_0\alpha_1$  y  $\beta_0\beta_1$  son cero entonces también lo son  $\alpha'_0\alpha'_1$  y  $\beta'_0\beta'_1$ .

DEMOSTRACIÓN. Para construir tales diagramas comenzamos con las representaciones verticales dadas por 2.2.15 de los  $\gamma_i$  en los que  $x_i$  sean monomorfismos admisibles y los  $y_i$  sean epimorfismos admisibles, utilizando 2.3.7. Con el objeto de completar la construcción reemplazaremos las elecciones iniciales de los objetos  $X_i$  y los  $Y_i$  por unos más pequeños. Véanse 2.2.9 y 2.2.13 para más detalles. Para los objetos  $X_i$  esto significa un subobjeto de  $X_i$  tal que la inclusión en  $X_i$  es aún un  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo. Para los  $Y_i$  esto significa un cociente de  $Y_i$  tal que la proyección desde  $Y_i$  es aún un  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo. Seguimos los siguientes pasos.

Paso 1 Hacer  $X'_1$  e  $Y'_1$  más pequeños para que los morfismos  $\alpha'_0$  y  $\beta'_1$  existan haciendo los rectángulos superior izquierdo y derecho respectivamente conmutativos.

Paso 2 Hacer  $X'_2$  y  $Y'_0$  más pequeños para que  $\alpha'_0$  y  $\beta'_0$  existan, haciendo los rectángulos inferior izquierdo y derecho conmutativos respectivamente.

Paso 3 Hacer  $Y'_0$  aún más pequeño de tal forma que el recuadro central derecho conmutativo.

Paso 4 Hacer  $Y'_1$  más pequeño para que el rectángulo central sea conmutativo.

Es sencillo ver que todas las reducciones descritas más arriba son posible, y que cada paso deja intactas las condiciones obtenidas en los pasos previos.

□

## Categorías Exactas y Completaciones

Las categorías exactas inducen de forma natural una categoría de Waldhausen, tal como vimos en el capítulo anterior, a partir del cual podemos obtener su  $K$ -teoría algebraica, siguiendo a Waldhausen en [Wal85]. Sin embargo una categoría exacta tal cual no goza de propiedades tan ventajosas como la propiedad (P) descrita en 3.1.1 o la propiedad de ser cerrada bajo núcleos de epimorfismos de la categoría abeliana ambiente. Este capítulo está dedicado a resolver estas dificultades. La solución consiste en agrandar nuestra categoría un poco para dar cabida a nuevos elementos, los núcleos y conúcleos de ciertas idempotencias, con el objeto de que la nueva categoría sí satisfaga las propiedades mencionadas más arriba. Este proceso es el de completación idempotente. En el caso de la categoría aditiva de  $R$ -módulos libres finitamente generados con  $R$  un anillo con buenas propiedades, por ejemplo un DIP, obtenemos la categoría de los  $R$ -módulos proyectivos finitamente generados al aplicar la completación idempotente. Sin embargo, el resultado de la completación idempotente es demasiado grande para nuestros propósitos y tiene repercusiones  $K$ -teóricas ya que no se mantiene la  $K$ -teoría de la categoría original. Para ello definimos las completaciones restringidas donde nos quedamos con la 'componente conexas' adecuada de la completación para así, satisfaciendo las nuevas propiedades mantener a la vez la  $K$ -teoría inicial.

Por último mostramos que las completaciones restringidas de una categoría exacta son compatibles con la localización con lo cual podemos suponer desde un principio que nuestras categorías exactas verifican la propiedad (P) y son cerradas bajo núcleos de epimorfismos de la categoría abeliana ambiente.

### 3.1. Completación Karoubiana de una Categoría Aditiva

**DEFINICIÓN 3.1.1.** Una categoría aditiva satisface la *propiedad (P)* si dadas aplicaciones  $f : E \rightarrow F$  y  $s : F \rightarrow E$  tales que  $fs = 1_F$ , entonces existe un objeto  $G$  y un isomorfismo  $E \cong F \oplus G$  bajo el cual  $f$  se convierte la proyección sobre el primer factor.

Si  $\mathcal{E}$  es una categoría exacta con la propiedad (P) se sigue inmediatamente la siguiente propiedad.

3.1.2. Si  $f : E \rightarrow F$  es un morfismo de  $\mathcal{E}$ , y hay un morfismo  $s : F \rightarrow E$  escinde  $f$  tal que  $fs = 1_F$ , entonces  $f$  es un epimorfismo admisible  $E \twoheadrightarrow F$ .

Entonces, si la propiedad (P) es satisfecha, la categoría exacta  $\mathcal{E}$  sería cerrada bajo núcleo de sobreyecciones en  $Ab(\mathcal{E})$ , véase 2.1.7 y el apéndice B o [TT90][Lema A.7.16 b)].

Nosotros trabajaremos con categorías exactas  $\mathcal{E}$  que no satisfacen necesariamente la propiedad (P), y probaremos en este capítulo que es posible reemplazar

$\mathcal{E}$  por otra que satisfaga la propiedad (P) sin cambiar su  $K$ -teoría. Ésto se consigue tomando subcategorías apropiadas de la completación idempotente de una categoría aditiva. Una categoría es *completamente idempotente (o Karoubiana)* si cuando quiera que  $p^2 = p : E \rightarrow E$  entonces existe un isomorfismo  $E \cong E' \oplus E''$  bajo el cual  $p$  corresponde al endomorfismo  $1 \oplus 0$ . Recordemos que la *completación idempotente (o Karoubiana) de una categoría aditiva*  $\mathcal{U}$ , denotada  $\mathcal{U}^\wedge$ , es la categoría aditiva con objetos  $(U, p)$  con  $p = p^2 : U \rightarrow U$  y morfismos  $f : (U, p) \rightarrow (V, q)$  verificando  $f = qfp : U \rightarrow V$ . El morfismo identidad de  $(U, p)$  en  $\mathcal{U}^\wedge$  está representado por  $p$ . Se obtiene una inmersión llena y cofinal de categorías aditivas

$$i : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{U}^\wedge$$

enviando  $U$  a  $(U, 1)$ . Los morfismos  $f : (U, 1) \rightarrow (V, 1)$  de  $\mathcal{U}^\wedge$  son precisamente aquellos de  $\mathcal{U}$ , y para cada  $(U, p)$  en  $\mathcal{U}^\wedge$

$$(U, p) \oplus (U, 1-p) \begin{array}{c} \xrightarrow{(p, 1-p)} \\ \xleftarrow{\begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}} \end{array} (U, 1) = U \text{ en } \mathcal{U} \quad (1)$$

son isomorfismos expresando  $(U, p)$  como un sumando directo de  $(U, 1)$ . Por el Teorema de Cofinalidad 2.1.13 se tiene una fibración salvo homotopía:

$$K(i\mathcal{U}) \rightarrow K(i\mathcal{U}^\wedge) \rightarrow B\pi \quad (2)$$

donde  $\pi = \text{coker} \left( K_0(\mathcal{U}) \xrightarrow{i_*} K_0(\mathcal{U}^\wedge) \right)$ . En particular, la sucesión de grupos de homotopía asociada a esta fibración implica que

$$i_* : K_0(\mathcal{U}) \twoheadrightarrow K_0(\mathcal{U}^\wedge).$$

es inyectiva.

Por construcción,  $\mathcal{U}^\wedge$  es Karoubiana, es decir, idempotentemente completa. De acuerdo con el lema de más abajo  $\mathcal{U}^\wedge$  satisface la propiedad (P).

LEMA 3.1.3. *La categoría  $\mathcal{U}^\wedge$  verifica la propiedad (P).*

DEMOSTRACIÓN. Sean

$$(U, p) \begin{array}{c} \xrightarrow{r} \\ \xleftarrow{s} \end{array} (V, q) \quad (1)$$

morfismos en  $\mathcal{U}^\wedge$  tales que  $rs = q$ . Además se tiene que

$$qrp = r \quad p^2 = p \quad psq = s \quad s^2 = s.$$

Ahora  $(sr)(sr) = s(rs)r = sqr = (psq)qr = psq^2r = psqr = (psq)r = sr$  así pues  $(U, sr)$  tiene sentido en  $\mathcal{U}^\wedge$  y es más, es una idempotencia para  $(U, p)$ . Como  $\mathcal{U}^\wedge$  es completa por definición tenemos un isomorfismo

$$(U, p) \cong (U, p - sr) \oplus (U, sr). \quad (2)$$

En efecto, si  $q : (U, p) \rightarrow (U, p)$  es tal que  $q^2 = q$ , también  $pqp = q$ , entonces

$$(pqp)(pqp) = (pqp)$$

luego, por las propiedades de la completación aditiva tenemos que

$$(U, p) \cong (U, pqp) \oplus (U, p - pqp)$$



donde los isomorfismos vienen dados por las matrices

$$\begin{pmatrix} pqp \\ p - pqp \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (pqp, \quad p - pqp).$$

Más aún

$$(U, sr) \begin{matrix} \xrightarrow{r} \\ \xleftarrow{s} \end{matrix} (V, q)$$

son isomorfismos en  $\mathcal{U}^\wedge$  siendo uno el inverso del otro. Por tanto  $r$  en 1 es un epimorfismo admisible.  $\square$

### 3.2. Otras completaciones de Categoría Aditiva

En esta sección definimos una completación "parcial" de la completación idempotente anteriormente descrita. Más explícitamente, sea ahora  $\mathcal{A}$  una subcategoría aditiva llena de la categoría aditiva  $\mathcal{U}$ . Nótese que  $\mathcal{A}^\wedge \hookrightarrow \mathcal{U}^\wedge$  es una inmersión.

DEFINICIÓN 3.2.1. Sea  $K \subset K_0(\mathcal{A}^\wedge)$  el subgrupo obtenido como la imagen inversa de  $K_0(\mathcal{U}) \subseteq K_0(\mathcal{U}^\wedge)$  bajo el homomorfismo inducido por la inclusión  $\mathcal{A}^\wedge \hookrightarrow \mathcal{U}^\wedge$ . Denotaremos por  $\mathcal{U}^{\wedge K}$  la subcategoría llena de  $\mathcal{U}^\wedge$  cuyos objetos son de la forma  $U \oplus (A, p)$ , donde  $[(A, p)] \in K$ .

Tenemos así el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{U}^\wedge \\ & \searrow & \uparrow \\ & & \mathcal{U}^{\wedge K} \end{array}$$

donde  $\mathcal{U}$  es cofinal en  $\mathcal{U}^{\wedge K}$  y en  $\mathcal{U}^\wedge$  por tanto  $\mathcal{U}^{\wedge K}$  es cofinal en  $\mathcal{U}^\wedge$ . Es más, obtenemos un diagrama de homomorfismos inyectivos entre  $K_0$ -grupos

$$\begin{array}{ccc} K_0(\mathcal{U}) & \longrightarrow & K_0(\mathcal{U}^\wedge) \\ & \searrow & \uparrow \\ & & K_0(\mathcal{U}^{\wedge K}) \end{array}$$

donde las imágenes de  $K_0(\mathcal{U})$  y  $K_0(\mathcal{U}^{\wedge K})$  en  $K_0(\mathcal{U}^\wedge)$  coinciden. Luego,

$$K_0(\mathcal{U}) \xrightarrow{\cong} K_0(\mathcal{U}^{\wedge K})$$

es de hecho un isomorfismo y por el teorema de cofinalidad, 2.1.13, lo son todos los  $K$ -grupos,  $K_n(\mathcal{U}) \simeq K_n(\mathcal{U}^{\wedge K})$ . Entonces por el teorema de Whitehead para espectros, [Swi75], se sigue que  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{U}^{\wedge K}$  tienen  $K$ -teorías homotópicamente equivalentes. Es decir, tenemos el siguiente resultado.

LEMA 3.2.2. *La inclusión  $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{U}^{\wedge K}$  induce una equivalencia de homotopía de  $K$ -teoría.*

Dentro de un contexto más general damos la siguiente definición.

**DEFINICIÓN 3.2.3.** Dadas  $\mathcal{U}$  una categoría aditiva y  $K$  un subgrupo de  $K_0(\mathcal{U})$ . Sea  $\mathcal{U}^{\wedge K}$  la subcategoría llena de  $\mathcal{U}^{\wedge}$  con objetos  $(U, p)$  tal que la clase de isomorfismos estabilizada,  $[(U, p)] \in K_0(\mathcal{U}^{\wedge})$ , pertenece a  $K$ . Cuando  $K = K_0(\mathcal{U})$  denotamos  $\mathcal{U}^{\wedge K_0(\mathcal{U})}$  por  $\bar{\mathcal{U}}$ . Aquí usaremos la versión clásica de  $K_0$  según [Bas68], véase 2.1.10.

**EJEMPLO 3.2.4.** Si  $\mathcal{U}$  es la categoría de  $R$ -módulos libres finitamente generados para algún anillo  $R$ , entonces  $\mathcal{U}^{\wedge}$  es equivalente a la categoría de  $R$ -módulos proyectivos finitamente generados, y  $\bar{\mathcal{U}}$  es equivalente a la categoría de  $R$ -módulos finitamente generados que son establemente libres, aquellos tales que  $R \oplus F \cong F'$  con  $F$  y  $F'$  libres.

**NOTA 3.2.5.** i) La categoría  $\bar{\mathcal{U}}$  puede verse en los términos de la primera definición como  $\mathcal{U}^{\wedge K_0(\mathcal{U})}$  tomando la subcategoría trivial  $\mathcal{A} = \mathcal{U}$ .

ii) Aunque la notación  $\mathcal{U}^{\wedge K}$  coincidan en 3.2.1 y en 3.2.3, debe quedar claro por el contexto a qué categoría nos referimos ya que en un caso  $K \subseteq K_0(\mathcal{A}^{\wedge})$  y en el otro  $K \subseteq K_0(\mathcal{U}^{\wedge})$ .

**LEMA 3.2.6.** *La inclusión  $\mathcal{U} \subset \bar{\mathcal{U}}$  induce una equivalencia de homotopía en  $K$ -teoría.*

**DEMOSTRACIÓN.** Este lema es consecuencia inmediata de 3.2.2 y de la nota 3.2.5 i).  $\square$

**LEMA 3.2.7.** *La categoría  $\bar{\mathcal{U}}$  satisface la propiedad (P) y por tanto 3.1.2.*

**DEMOSTRACIÓN.** Usamos aquí el mismo diagrama y los mismos morfismos que en la demostración de 3.1.3 para  $\mathcal{U}^{\wedge}$ . Pero ahora  $(U, p)$  y  $(V, q)$  están en  $\bar{\mathcal{U}}$  y como  $(U, sr) \cong (V, q)$  y  $(U, p) \cong (U, p - sr) \oplus (U, sr)$  entonces por ser el grupo  $K_0(\mathcal{U})$  aditivo, concluimos, por la definición de  $\bar{\mathcal{U}}$ , que  $(U, sr)$  y  $(U, p - sr)$  están en  $\bar{\mathcal{U}}$ . Por tanto  $r$  es un epimorfismo admisible y  $\bar{\mathcal{U}}$  satisface la propiedad (P).  $\square$

### 3.3. Localización y Completación de Categorías Exactas

Sea ahora  $\mathcal{E}$  una categoría exacta. En esta sección nos proponemos dotar a su completación idempotente  $\mathcal{E}^{\wedge}$  de una estructura de categoría exacta, de forma que la inclusión  $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}^{\wedge}$  sea exacta y refleje exactitud. Más aún  $\mathcal{E}$  será cerrada bajo extensiones en  $\mathcal{E}^{\wedge}$ .

Para ello decimos que una *sucesión en  $\mathcal{E}^{\wedge}$  es exacta* si es un sumando directo de una sucesión exacta en  $\mathcal{E}$ . En otras palabras,  $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$ , sucesión en  $\mathcal{E}$ , es exacta si y sólo si hay objetos  $A', B' \in \mathcal{E}^{\wedge}$  tales que  $A \oplus A' \xrightarrow{\bar{i}} A' \oplus B \oplus C' \xrightarrow{\bar{j}} C \oplus C'$  es una sucesión exacta en  $\mathcal{E}$ , donde  $\bar{i} = i \oplus 1_{A'}$  y  $\bar{j} = j \oplus 1_{C'}$ .

**PROPOSICIÓN 3.3.1.** *La categoría  $\mathcal{E}^{\wedge}$  es exacta. Más aún, la categoría  $\mathcal{E}$  es cerrada en  $\mathcal{E}^{\wedge}$  bajo extensiones.*

**DEMOSTRACIÓN.** Podemos dar la siguiente demostración sucinta a la proposición utilizando la inmersión de Gabriel-Quillen. Véase el apéndice B o [TT90][Apéndice A, páginas 407-408]. Para demostrar que  $\mathcal{E}^{\wedge}$  es una categoría exacta consideramos la inmersión de Gabriel-Quillen  $\mathcal{E} \hookrightarrow \text{Ab}(\mathcal{E})$ . Ésto induce un functor lleno y fiel entre las completaciones idempotentes,  $\mathcal{E}^{\wedge} \hookrightarrow \text{Ab}(\mathcal{E})^{\wedge}$ . Por definición de sucesión exacta en la completación, y el hecho de que  $\mathcal{E} \hookrightarrow \text{Ab}(\mathcal{E})$  preserva y refleja exactitud, el

funtor inducido  $\mathcal{E}^\wedge \hookrightarrow \mathcal{A}b(\mathcal{E})^\wedge$  preserva y refleja sucesiones exactas. Pero como  $\mathcal{A}b(\mathcal{E})$  es abeliana, para toda idempotente  $p$ , el objeto  $(U, p)$  se puede identificar con  $\text{Im } p$  que ya está en  $\mathcal{A}b(\mathcal{E})$  por lo que  $\mathcal{A}b(\mathcal{E})^\wedge$  es equivalente a la categoría abeliana  $\mathcal{A}b(\mathcal{E})$ . Luego  $\mathcal{E}^\wedge$  puede ser visto como una subcategoría llena de  $\mathcal{A}b(\mathcal{E})$ .

Es más,  $\mathcal{E}^\wedge$  es cerrado bajo extensiones en  $\mathcal{A}b(\mathcal{E})$ . Sea  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  una sucesión exacta en  $\mathcal{A}b(\mathcal{E})$  con  $A$  y  $C$  en  $\mathcal{E}^\wedge$ . Entonces existen  $A', B' \in \mathcal{E}^\wedge$  tales que  $A' \oplus A$  y  $C \oplus C'$  son isomorfos a objetos de  $\mathcal{E}$ . La sucesión  $0 \rightarrow A' \oplus A \rightarrow A' \oplus B \oplus C' \rightarrow C \oplus C' \rightarrow 0$  es exacta en  $\mathcal{A}b(\mathcal{E})$ , y demuestra que  $A' \oplus B \oplus C'$  es isomorfo a un objeto en  $\mathcal{E}$ , puesto que  $\mathcal{E}$  es cerrado bajo extensiones en  $\mathcal{A}b(\mathcal{E})$ , véase apéndice B. De este modo  $B$  es un sumando de un objeto en  $\mathcal{E}$ , por tanto es isomorfo a la imagen de un idempotente en  $\mathcal{E}$ , y por consiguiente es isomorfo a un objeto de  $\mathcal{E}^\wedge$ . Ésto prueba la afirmación. Ahora,  $\mathcal{E}^\wedge$  es una categoría exacta por 2.1.7. Más aún, como los funtores  $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{A}b(\mathcal{E})$  y  $\mathcal{E}^\wedge \hookrightarrow \mathcal{A}b(\mathcal{E})^\wedge$  preservan y reflejan exactitud, también lo hace el funtor  $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}^\wedge$  y hace que  $\mathcal{E}$  sea cerrada bajo extensiones en  $\mathcal{E}^\wedge$ .  $\square$

En la sección 3.4 damos una demostración alternativa de estos resultados que es totalmente intrínseca a la categoría exacta  $\mathcal{E}$  ya que no utiliza la categoría abeliana ambiente  $\mathcal{A}b(\mathcal{E})$ .

Además de la completación  $\mathcal{E}^\wedge$  en 3.3.1 podemos considerar de forma análoga a 3.2.3 cualquier completación restringida de  $\mathcal{E}$ . En particular, la completación  $\bar{\mathcal{E}}$  definida en 3.2.3 como la subcategoría llena de  $\mathcal{E}^\wedge$  con objetos  $(U, p)$  tales que su clase de isomorfismos estabilizada de  $K_0(\mathcal{E}^\wedge)$  está en  $K_0(\mathcal{E})$ . Obsérvese que  $\bar{\mathcal{E}}$  es cerrada bajo extensiones en  $\mathcal{E}^\wedge$  por la igualdad en  $K_0$ :  $[C] = [A] + [B] = [A \oplus B]$  para cualquier sucesión exacta  $A \twoheadrightarrow C \twoheadrightarrow B$ . Entonces la categoría llena  $\bar{\mathcal{E}}$  se puede ver como una subcategoría llena de  $\mathcal{E}^\wedge$ . Tenemos pues el siguiente diagrama de inmersiones llenas de categorías.

$$\mathcal{E} \hookrightarrow \bar{\mathcal{E}} \hookrightarrow \mathcal{E}^\wedge \quad (*)$$

Más aún, por el lema 3.2.7  $\bar{\mathcal{E}}$  satisface la propiedad (P) y por tanto la propiedad 3.1.2. El diagrama anterior produce el siguiente entre sus  $K$ -teorías.

$$\begin{array}{ccc} K(i\mathcal{E}) & \longrightarrow & K(i\mathcal{E}^\wedge) \\ & \searrow & \uparrow \\ & & K(i\bar{\mathcal{E}}). \end{array}$$

PROPOSICIÓN 3.3.2. *La categoría  $\mathcal{E}$  es cofinal en  $\bar{\mathcal{E}}$  y  $\mathcal{E}^\wedge$ .*

DEMOSTRACIÓN. Para la cofinalidad de  $\mathcal{E}$  en  $\mathcal{E}^\wedge$  simplemente observamos que  $\mathcal{E}$  es cerrada bajo extensiones en  $\mathcal{E}^\wedge$  y por tanto también lo es en  $\bar{\mathcal{E}}$  pues  $\bar{\mathcal{E}}$  lo es en  $\mathcal{E}^\wedge$ . Además, por definición de  $\mathcal{E}^\wedge$ , véase 3, dado  $(U, p)$  en  $\mathcal{E}^\wedge$ , entonces  $(U, p) \oplus (U, 1-p)$  es isomorfo a  $(U, 1)$ , un objeto de  $\mathcal{E}$ . Análogamente, para un objeto  $(U, p)$  de  $\bar{\mathcal{E}}$ ,  $(U, p) \oplus (U, 1-p)$  es isomorfo en  $\mathcal{E}$  a  $(U, 1)$ . Se satisfacen así las condiciones de cofinalidad en el diagrama \* y se obtienen las fibraciones de la proposición.  $\square$

Como consecuencia de 2.1.13 obtenemos el siguiente

COROLARIO 3.3.3. *Se tiene un diagrama conmutativo salvo homotopía*

$$\begin{array}{ccccc}
 K(i\mathcal{E}) & \longrightarrow & K(i\mathcal{E}^\wedge) & \longrightarrow & B\pi \\
 & \searrow \simeq & \uparrow & & \\
 & & K(i\bar{\mathcal{E}}) & & 
 \end{array}$$

donde la línea horizontal es una fibración salvo homotopía con  $\pi = K_0(i\mathcal{E}^\wedge)/K_0(i\mathcal{E})$ .

DEMOSTRACIÓN. La línea horizontal al igual que

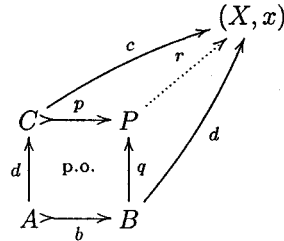
$$K(i\mathcal{E}) \longrightarrow K(i\bar{\mathcal{E}}) \longrightarrow B\pi'$$

para  $\pi' = K_0(i\bar{\mathcal{E}})/K_0(i\mathcal{E})$ , son sucesiones fibradas por 2.1.13. Pero  $\pi' = 0$  es el grupo trivial pues  $K_0(i\mathcal{E}) \xrightarrow{\simeq} K_0(i\bar{\mathcal{E}})$  es un isomorfismo por la definición de  $\bar{\mathcal{E}}$ . □

### 3.4. Demostración alternativa de la Proposición 3.3.1

LEMA 3.4.1. *La inmersión  $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}^\wedge$  preserva push outs a lo largo de monomorfismos admisibles y pull backs a lo largo de epimorfismos admisibles.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos sólo la primera parte, la segunda se comprueba de forma dual. Para ello consideremos el siguiente diagrama donde el cuadrado es un diagrama de push out en  $\mathcal{E}$  y  $(X, x)$  es un objeto en  $\mathcal{E}^\wedge$ .



Sean  $c : C = (C, 1) \rightarrow (X, x)$  y  $d : B = (B, 1) \rightarrow (X, x)$  morfismos en  $\mathcal{E}^\wedge$  verificando que  $ca = db$  en  $\mathcal{E}^\wedge$ . Entonces, por definición de categoría completada,  $c = xc$  y  $d = xd$  por lo tanto  $db = xdb = xca = ca$ . Puesto que  $P$  es push out en  $\mathcal{E}$ , hay un morfismo único  $r : P \rightarrow X$  tal que  $rp = c$  y  $rq = d$ . Pero  $r$  también verifica la propiedad universal para  $xc$  y  $xd$ ,  $xca = xdb$ . Por tanto  $xr = r$ , es decir,  $r$  es un morfismo en  $\mathcal{E}^\wedge$ , y  $P$  es un push out en  $\mathcal{E}^\wedge$ . □

3.4.2 (Demostración de 3.3.1). Comprobemos los axiomas de categoría exacta, 2.1.6. Con el objeto de simplificar la notación en  $\mathcal{E}^\wedge$  sus objetos se denotarán por  $A$  el objeto  $A = (A, a)$  obviando la idempotencia  $a$ . Por el contexto debe deducirse la categoría ambiente, bien  $\mathcal{E}$  o  $\mathcal{E}^\wedge$ .

En primer lugar, el axioma c) es inmediato a partir de la definición de sucesión exacta en  $\mathcal{E}^\wedge$ . A continuación demostraremos tan sólo los axiomas a), d) y e) ya que los axiomas b) y f) son duales a a) y e) respectivamente.

**Axioma a).** Sean  $A \xrightarrow{i} B$  y  $B \xrightarrow{j} C$  monomorfismos admisibles en  $\mathcal{E}^\wedge$  correspondientes a sucesiones exactas  $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{l} C$  y  $B \xrightarrow{j} D \xrightarrow{k} E$ . Por definición existen objetos  $A', B', C', E'$  en  $\mathcal{E}^\wedge$  tales que  $A' \oplus A \xrightarrow{\bar{i}} A' \oplus B \oplus C' \xrightarrow{\bar{l}} C \oplus C'$  y

$B' \oplus B \xrightarrow{\bar{j}} B' \oplus D \oplus E' \xrightarrow{\bar{k}} E \oplus E'$  son sucesiones exactas en  $\mathcal{E}$ . Sea  $m : B' \oplus B \rightarrow A' \oplus B \oplus C'$  el morfismo definido como la identidad en  $B$  y el morfismo cero en el resto; esto es,  $m = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_B \end{pmatrix}$ . Puesto que  $B' \oplus B$  y  $A' \oplus B \oplus C'$  son isomorfos a objetos en  $\mathcal{E}^\wedge$  y la inmersión  $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}^\wedge$  es llena y fiel, el morfismo  $m$  corresponde a un morfismo en  $\mathcal{E}$ . Tenemos el siguiente push out en  $\mathcal{E}$  a lo largo de  $m$ :

$$\begin{array}{ccc}
 B' \oplus B & \xrightarrow{m} & A' \oplus B \oplus C' \\
 \bar{j} \downarrow & \text{p.o.} & \downarrow \bar{\pi} \\
 B' \oplus D \oplus E' & \xrightarrow{\quad} & P \\
 \bar{k} \downarrow & \swarrow \bar{q} & \\
 E \oplus E' & & 
 \end{array}$$

Es claro que el objeto  $A' \oplus D \oplus C' \oplus E'$  es el push out del mismo diagrama en la categoría más grande  $\mathcal{E}^\wedge$ . Por tanto la inmersión  $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}^\wedge$  es llena y fiel, conserva push outs y pull backs. El objeto  $A' \oplus D \oplus C' \oplus E'$  es isomorfo a  $P$ , un objeto en  $\mathcal{E}$ . Más aún, la sucesión obtenida por la propiedad de pushout

$A' \oplus B \oplus C' \xrightarrow{\bar{\pi}} A' \oplus D \oplus C' \oplus E' \xrightarrow{\bar{q}} E \oplus E'$  es exacta en  $\mathcal{E}$  de modo que  $\bar{\pi}$

se identifica con  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Ahora consideremos el siguiente diagrama conmutativo en  $\mathcal{E}^\wedge$  donde el cuadrado es un diagrama de push out en  $\mathcal{E}$  y los morfismos

$u, v$  y  $w$  están definidos respectivamente por  $u = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y

$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Entonces  $h$  se obtiene por push out en  $\mathcal{E}^\wedge$  de  $w$  y  $v$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 A' \oplus B \oplus C' & \xrightarrow{\bar{i}} & C' \oplus C' & \xrightarrow{w} & \\
 \bar{\pi} \downarrow & \text{p.o.} & \downarrow & & \\
 A' \oplus D \oplus C' \oplus E' & \xrightarrow{\bar{p}} & Q & \xrightarrow{h} & C' \oplus E' \\
 \uparrow u & \searrow v & & & \\
 C' \oplus E' & & & & 
 \end{array}$$

Obsérvese que  $Q$  es un objeto en  $\mathcal{E}$  dotado de la idempotencia  $\alpha = \bar{p}uh$ . Luego en  $\mathcal{E}^\wedge$ ,  $Q$  escinde como  $Q = R \oplus (C' \oplus E')$  donde  $R = (Q, 1 - \alpha)$  y  $(C' \oplus E') = (Q, \alpha)$ , véase 2. Con esta identificación  $\bar{p}$  se puede escribir de forma matricial como

$\bar{p} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  donde  $\tilde{p} : D \rightarrow R$  en  $\mathcal{E}^\wedge$ . Más aún,  $\bar{\pi}\bar{i}$  es un monomorfismo admisible en  $\mathcal{E}$  y  $\bar{p}$  es su conúcleo. En particular, obtenemos la sucesión

$A' \oplus A \xrightarrow{\bar{n}\bar{i}} A' \oplus D \oplus C' \oplus E' \xrightarrow{\bar{p}} Q = R \oplus C' \oplus E'$  exacta en  $\mathcal{E}$ , de tal manera que la sucesión  $A \xrightarrow{j^i} D \xrightarrow{\tilde{p}} R$  puede ser reconocida como un sumando directo de ella. Ésto prueba que los monomorfismos admisibles son cerrados bajo composición. Esta es la primera parte del Axioma a).

Para demostrar la segunda parte, sea  $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$  una sucesión exacta en  $\mathcal{E}^\wedge$  y sea  $A \xrightarrow{d} D$  un morfismo en  $\mathcal{E}^\wedge$ . Existen objetos  $A'$ ,  $C'$  y  $D'$  en  $\mathcal{E}^\wedge$  tales que  $A' \oplus A \xrightarrow{\bar{i}} A' \oplus B \oplus C' \xrightarrow{\bar{j}} C \oplus C'$  es exacta en  $\mathcal{E}$  y  $D' \oplus D$  es isomorfo a un objeto en  $\mathcal{E}$ . Consideremos  $\bar{d} : A' \oplus A \rightarrow D' \oplus D$  el morfismo correspondiente en  $\mathcal{E}$  dado por la descripción matricial en  $\mathcal{E}^\wedge$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ . Ahora tomamos push out en  $\mathcal{E}$  a lo largo de  $\bar{d}$ :

$$\begin{array}{ccc} A' \oplus A & \xrightarrow{\bar{i}} & A' \oplus B \oplus C' & \xrightarrow{\bar{j}} & C \oplus C' \\ \bar{d} \downarrow & \text{p.o.} & \downarrow \tilde{d} & \nearrow & \\ D' \oplus D & \xrightarrow{\tilde{i}} & Q = D' \oplus R \oplus C' & & \end{array} \quad (3)$$

Consideremos  $\alpha : D' \oplus D \rightarrow D' \oplus D$  dado por la matriz  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Claramente  $\alpha$  es idempotente en  $\mathcal{E}$  y el objeto  $(D' \oplus D, \alpha)$  es isomorfo a  $D'$  en  $\mathcal{E}^\wedge$ . Consideremos  $\tilde{i}\alpha : D' \oplus D \rightarrow Q$ ,  $\alpha$  y los morfismos cero de  $A' \oplus B \oplus C'$  a  $Q$  y a  $D' \oplus D$ , respectivamente. Por la propiedad universal de pushout existen morfismos  $\beta : Q \rightarrow Q$  y  $\lambda : Q \rightarrow D' \oplus D$ , que hacen conmutativo al siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} A' \oplus A & \xrightarrow{\bar{i}} & A' \oplus B \oplus C' & & \\ \bar{d} \downarrow & & \downarrow \tilde{d} & \searrow 0 & \\ D' \oplus D & \xrightarrow{\tilde{i}} & Q & \xrightarrow{\beta} & Q \\ \alpha \downarrow & \nearrow \lambda & & \nearrow \beta & \\ D' \oplus D & \xrightarrow{\tilde{i}} & Q & & \end{array}$$

Nótese que  $\alpha^2 = \alpha$  implica que  $\beta^2 = \beta$  lo que nos define el objeto  $(Q, \beta)$  en  $\mathcal{E}^\wedge$ . Más aún, las igualdades  $\alpha\lambda\tilde{i}\alpha = \alpha^3 = \alpha$  y  $\tilde{i}\lambda\alpha\lambda = \beta^2 = \beta$  nos definen el isomorfismo

$$(D' \oplus D, \alpha) \xrightleftharpoons[\alpha\lambda]{\tilde{i}\alpha} (Q, \beta)$$

en  $\mathcal{E}^\wedge$ .

De forma simétrica, sea  $\Delta : A' \oplus B \oplus C' \rightarrow A' \oplus B \oplus C'$  la idempotencia dada por  $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Además de  $\Delta$  consideremos la composición  $\tilde{d}\Delta : A' \oplus B \oplus C' \rightarrow Q$  y morfismos cero de  $D' \oplus D$  a  $D' \oplus D$  y a  $Q$  respectivamente. Al igual que antes, las propiedades del push out definen morfismos  $\rho : Q \rightarrow Q$  y

$l : Q \rightarrow A' \oplus B \oplus C'$  respectivamente, con  $\rho^2 = \rho$ ,  $\Delta = l\tilde{d}$  y  $\rho = \tilde{d}l$ , la cual nos define un nuevo objeto  $(Q, \rho)$  en  $\mathcal{E}^\wedge$  e isomorfismos

$$(Q, \rho) \begin{array}{c} \xrightarrow{l\rho} \\ \xleftarrow{\tilde{d}\Delta} \end{array} (A' \oplus B \oplus C', \Delta) = C'.$$

Es fácil comprobar que las composiciones  $\rho\beta = \beta\rho = 0$  son el morfismo nulo por lo que  $(\rho + \beta)$  es también una idempotencia de  $Q$ . Esto significa que  $Q$  se escinde como  $D' \oplus R \oplus C'$  donde  $R = (Q, 1 - (\rho + \beta))$  y la parte inferior del diagrama 3 puede ser visto como

$$D' \oplus D \xrightarrow{\tilde{i}} D' \oplus R \oplus C' \xrightarrow{\tilde{j}} C \oplus C'$$

con  $\tilde{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $\tilde{j} = \begin{pmatrix} \tilde{j} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  con lo cual la sucesión  $D \xrightarrow{\tilde{i}} R \xrightarrow{\tilde{j}} C$

puede ser vista como un sumando directo de esta sucesión. Además  $\tilde{d}$  se identifica

con la matriz  $\tilde{d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{d} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Todo ello junto con las descripciones matriciales

de  $\tilde{i}$ ,  $\tilde{d}$ ,  $\tilde{i}$  y  $\tilde{d}$  nos indican que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ d \downarrow & & \downarrow \tilde{d} \\ D & \xrightarrow{\tilde{i}} & R \end{array}$$

es conmutativo y sumando directo del diagrama de push out en 3. Este hecho junto con la descomposición asociada a todo objeto en  $\mathcal{E}^\wedge$  dada en la definición 3.1.1 permite demostrar sin dificultad que el diagrama anterior es un pushout en  $\mathcal{E}^\wedge$ . Con esto se demuestra la segunda parte del Axioma a).

**Axioma c).** Este axioma se satisface claramente por la definición de una sucesión exacta en  $\mathcal{E}^\wedge$ .

**Axiom d).** Sea  $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$  exacta en  $\mathcal{E}^\wedge$ . Veamos que  $i$  es un núcleo para  $j$ . Para ello sea  $k : D \rightarrow B$  un morfismo en  $\mathcal{E}^\wedge$  tal que  $jk = 0$  en  $\mathcal{E}^\wedge$ . Por definición de exactitud en  $\mathcal{E}^\wedge$  y por 1 existen objetos  $A'$ ,  $C'$  y  $D'$  en  $\mathcal{E}^\wedge$  tales que  $A' \oplus A \xrightarrow{\tilde{i}} A' \oplus B \oplus C' \xrightarrow{\tilde{j}} C \oplus C'$  es exacta en  $\mathcal{E}$  y  $D \oplus D'$  es isomorfa a un objeto de  $\mathcal{E}$ . Sea  $\bar{k} : D \oplus D' \rightarrow A' \oplus B \oplus C'$  el morfismo en  $\mathcal{E}$  descrito por la matriz  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  en  $\mathcal{E}^\wedge$ . Del mismo modo,  $\bar{i}$  puede ser descrito por la matriz

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $\bar{j}$  por  $\begin{pmatrix} 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Entonces  $\bar{j}\bar{k} = 0$ , y por tanto existe un morfismo

$\bar{l} : D \oplus D' \rightarrow A' \oplus A$  tal que  $\bar{i}\bar{l} = \bar{k}$ . Si describimos el morfismo  $\bar{l}$  por la matriz  $\begin{pmatrix} l_1 & l_3 \\ l_2 & l_4 \end{pmatrix}$  en  $\mathcal{E}^\wedge$ , tenemos la igualdad

$$\bar{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \bar{i}\bar{l} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_3 \\ l_2 & l_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & l_3 \\ il_2 & il_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particular, el morfismo  $l_2 : D \rightarrow A$  satisface que  $il_2 = k$  en  $\mathcal{E}^\wedge$ . Por tanto  $i$  es un núcleo para  $j$ . De forma dual se puede probar que  $j$  es un conúcleo para  $i$ .

**Axioma e).** Sea el siguiente diagrama en  $\mathcal{E}^\wedge$  con  $ki$  un monomorfismo admisible en  $\mathcal{E}^\wedge$ .

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{i} & F & \longrightarrow & \text{coker } i \\ & \searrow^{ki} & \downarrow k & & \\ & & G & & \end{array}$$

Tenemos que probar que la línea horizontal superior es exacta corta en  $\mathcal{E}^\wedge$ . Llamemos  $H$  al conúcleo de  $ki$  con lo que  $E \xrightarrow{ki} G \longrightarrow H$  es exacta en  $\mathcal{E}^\wedge$ . Esto junto con 1 nos proporcionan objetos  $E', H', F'$  y  $K'$  en  $\mathcal{E}^\wedge$  tales que  $E' \oplus E \xrightarrow{\bar{k}\bar{i}} E' \oplus G \oplus H' \xrightarrow{\bar{i}} H \oplus H'$  es exacta en  $\mathcal{E}$  y  $F' \oplus F$  y  $K' \oplus \text{coker } i$  son isomorfos a objetos de  $\mathcal{E}$ . Del mismo modo que en la demostración del axioma d) el diagrama anterior se puede extender al siguiente diagrama en  $\mathcal{E}^\wedge$ :

$$\begin{array}{ccccc} E' \oplus E & \xrightarrow{\bar{i}} & F' \oplus F \oplus E' \oplus E & \longrightarrow & \text{coker } i \oplus F' \oplus E = L \\ & \searrow^{\bar{k}\bar{i}} & \downarrow \bar{k} & & \\ & & E' \oplus G \oplus H' & & \\ & & & \searrow & \\ & & & & H \oplus H' \end{array} \quad (4)$$

donde los morfismos están definidos respectivamente por matrices  $\bar{i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$$\bar{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{j} = \begin{pmatrix} 0 & j & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \bar{k}\bar{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ki \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ que también es igual}$$

a la composición  $\bar{k}\bar{i}$ . El objeto que hemos llamado  $L$  es claramente un conúcleo para  $\bar{i}$  en  $\mathcal{E}^\wedge$  por la definición de los morfismos implicados. Tomando push out en  $\mathcal{E}$  a lo largo de  $\bar{i}$  obtenemos el objeto  $P$  tal y como se indica en el siguiente





en  $\mathcal{E}$ . Tomemos ahora push out en  $\mathcal{E}$  a lo largo de  $a$  en el diagrama superior.

$$\begin{array}{ccccc}
 A' \oplus A & \longrightarrow & A' \oplus B \oplus C' & \longrightarrow & C \oplus C' \\
 \downarrow a & \searrow & \uparrow & \text{p.b.} & \uparrow c \\
 & & A' \oplus B & \longrightarrow & C \\
 & \text{p.o.} & \downarrow & \nearrow & \\
 A & \longrightarrow & Q & & 
 \end{array}$$

Una vez más, por 3.4.1, el push out en  $\mathcal{E}$  se conserva en  $\mathcal{E}^\wedge$  y entonces  $Q$  se puede ver como un push out en  $\mathcal{E}^\wedge$ , donde es isomorfo a  $B$ . Luego  $B$  es isomorfo a un objeto en  $\mathcal{E}$ . Esto prueba nuestra proposición.  $\square$

### 3.5. Localización y Completación de Categorías Exactas

La demostración del teorema principal, 6.1.1, se hace bajo las hipótesis adicionales de que la categoría exacta  $\mathcal{U}$  satisfaga la propiedad (P), 3.1.1, y que sea cerrada bajo núcleos de epimorfismos en  $Ab(\mathcal{U})$ . Con el fin de comprobar que esto no supone pérdida de generalidad comprobaremos que si  $\mathcal{A}$  localiza a la categoría exacta  $\mathcal{U}$  entonces también localiza a las categorías exactas  $\overline{\mathcal{U}}$  y  $\mathcal{U}^\wedge$  que sí satisfacen la hipótesis adicionales. Para ello necesitaremos los dos resultados siguientes para una categoría exacta arbitraria  $\mathcal{E}$ :

LEMA 3.5.1. Sea  $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$  una sucesión exacta corta en  $\mathcal{E}$  tal que existe un isomorfismo  $\varphi : B \rightarrow V \oplus W$  en  $\mathcal{E}^\wedge$  tal que  $\varphi i = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$  con  $a : A \rightarrow V$  un morfismo en  $\mathcal{E}^\wedge$ . Entonces  $W$  puede ser escindido en  $\mathcal{E}^\wedge$ , es decir, existen: un objeto  $R$ , un morfismo  $\pi : V \rightarrow R$  e isomorfismos compatibles en  $\mathcal{E}^\wedge$  tales que la sucesión exacta corta dada es isomorfa a

$$A \xrightarrow{\varphi i} V \oplus W \xrightarrow{\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1_W \end{pmatrix}} R \oplus W .$$

en  $\mathcal{E}$  y por tanto

$$A \xrightarrow{a} V \xrightarrow{\pi} R$$

es una sucesión exacta en  $\mathcal{E}^\wedge$ .

DEMOSTRACIÓN. La sucesión  $A \xrightarrow{\varphi i} V \oplus W \xrightarrow{j\varphi^{-1}} C$  es también exacta en  $\mathcal{E}^\wedge$ . Tomemos pushout en  $\mathcal{E}^\wedge$  a lo largo de  $a$ . Nótese que  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : V \rightarrow V \oplus W$  induce una escisión  $l : Q \rightarrow V \oplus W$  del push out.

$$\begin{array}{ccccc}
 V & \xrightarrow{j} & Q & & \\
 \uparrow a & \searrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \uparrow a' & \downarrow l & \searrow k \\
 A & \xrightarrow{\varphi i} & V \oplus W & \xrightarrow{j\varphi^{-1}} & C
 \end{array}$$

Puesto que  $\mathcal{E}^\wedge$  es completamente idempotente, existe un isomorfismo  $\Psi : Q \rightarrow R \oplus (V \oplus W)$  tal que  $l\Psi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  es la proyección sobre  $V \oplus W$ , y  $\Psi a' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

es la inyección del mismo objeto. Ésto hace de  $a'$  un monomorfismo admisible en  $\mathcal{E}^\wedge$  con conúcleo isomorfo a  $R$ . Puesto que el cuadrado de arriba es un pushout,  $R$  es también un conúcleo para  $a$ , y por tanto, por el Axioma e), 2.1.6,  $a$  es un monomorfismo admisible con  $R$  como conúcleo. En otras palabras

$$A \xrightarrow{a} V \xrightarrow{\pi} R$$

es exacta en  $\mathcal{E}^\wedge$ . Es más, nótese que  $\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1_W \end{pmatrix} : V \oplus W \rightarrow R \oplus W$  es también un conúcleo para  $\varphi i$  y por ello  $R \oplus W$  y  $C$  deben ser isomorfos en  $\mathcal{E}^\wedge$ . Así la sucesión

$$A \xrightarrow{\varphi i} V \oplus W \xrightarrow{\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1_W \end{pmatrix}} R \oplus W$$

es exacta en  $\mathcal{E}^\wedge$  e isomorfa a la sucesión del lema.  $\square$

Se tiene también el siguiente lema dual al anterior y cuya demostración es también dual.

LEMA 3.5.2. *Sea  $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$  una sucesión exacta corta en  $\mathcal{E}$  Tal que hay un isomorfismo  $\varphi : B \rightarrow V \oplus W$  en  $\mathcal{E}^\wedge$  tal que  $j\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$  con  $b : V \rightarrow C$  un morfismo en  $\mathcal{E}^\wedge$ . Entonces  $W$  puede ser escindida, es decir, existen: un objeto  $T$ , un morfismo  $r : T \rightarrow V$  e isomorfismos compatibles tales que la sucesión exacta dada es isomorfa a*

$$T \oplus W \xrightarrow{\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1_W \end{pmatrix}} V \oplus W \xrightarrow{j\varphi^{-1}} C$$

Más aún

$$T \xrightarrow{b} V \xrightarrow{\pi} C$$

es una sucesión exacta en  $\mathcal{E}^\wedge$ .

PROPOSICIÓN 3.5.3. *Sea  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$  categorías verificando los axiomas 2.2.1. Entonces  $\mathcal{A}$  localiza tanto a  $\overline{\mathcal{U}}$  como a  $\mathcal{U}^\wedge$ .*

DEMOSTRACIÓN. Debemos comprobar que se satisfacen los axiomas de localización en 2.2.1. El axioma (i) se satisface puesto que  $\mathcal{A}$  es cerrado en  $\mathcal{U}$  bajo extensiones, ya que lo localiza, y  $\mathcal{U}$  es cerrado en  $\overline{\mathcal{U}}$  y en  $\mathcal{U}^\wedge$ , véase 3.4.3 y el comentario que le sigue.

Los axiomas (ii) y (iii) son duales. Aquí sólo comprobaremos el axioma (ii) para  $\overline{\mathcal{U}}$  ya que la misma demostración vale para  $\mathcal{U}^\wedge$ .

Sea  $a : A = (A, 1) \rightarrow (U, p)$  un morfismo bien en  $\overline{\mathcal{U}}$  desde un objeto  $A$  de  $\mathcal{A}$ . Sea  $\varphi : (U, p) \oplus (U, 1-p) \rightarrow U$  el isomorfismo correspondiente. Consideremos la composición de morfismos  $A \xrightarrow{a} (U, p) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} (U, p) \oplus (U, 1-p) \xrightarrow{\varphi} U$ . Esta composición está en  $\mathcal{U}$ , ya que  $\mathcal{U}$  está inmersa de forma llena en  $\overline{\mathcal{U}}$ . Como  $\mathcal{A}$  localiza

a  $\mathcal{U}$ , existe entonces una sucesión exacta asociada a este morfismo de tal forma que

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & U' \\
 & & & & \uparrow \pi \\
 A & \xrightarrow{a} & (U, p) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & (U, p) \oplus (U, 1-p) & \xrightarrow{\varphi} & U \\
 & & & & \uparrow i \\
 & & & & A'
 \end{array} \tag{6}$$

es un diagrama conmutativo. Como  $\varphi$  es un isomorfismo, entonces

$$A' \xrightarrow{\varphi^{-1}i} (U, p) \oplus (U, 1-p) \xrightarrow{\pi\varphi} U'$$

es también exacto en  $\overline{\mathcal{U}}$  por propia definición de exactitud en  $\overline{\mathcal{U}}$ . De la conmutatividad del diagrama 6, se ve que  $i$  factoriza por  $(U, p)$  y por tanto  $\varphi^{-1}i$  puede ser reescrito como  $\begin{pmatrix} j \\ 0 \end{pmatrix}$  para algún  $j : A' \rightarrow (U, p)$ . Entonces por 3.5.1, la sucesión exacta corta vertical en 6 puede ser escrita como

$$A' \xrightarrow{\begin{pmatrix} j \\ 0 \end{pmatrix}} (U, p) \oplus (U, 1-p) \xrightarrow{\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} R \oplus (U, 1-p)$$

para algún  $R$  de  $\overline{\mathcal{U}}$ . Entonces  $A' \xrightarrow{j} (U, p) \xrightarrow{\pi} R$  es exacto en  $\overline{\mathcal{U}}$  y

$$\begin{array}{ccc}
 & & R \\
 & \nearrow 0 & \uparrow \pi \\
 A & \xrightarrow{a} & (U, p) \\
 & \searrow & \uparrow j \\
 & & A'
 \end{array}$$

es conmutativo en  $\overline{\mathcal{U}}$ . □

## La categoría $C(\mathcal{E})$ y su $K$ -teoría

Este capítulo es de preparación para la demostración del teorema principal. Aquí recopilamos los resultados básicos de la categoría de complejos de cadenas finitas de una categoría exacta y le damos una estructura natural de categoría de Waldhausen. Para ello seguimos a Thomason en [TT90]. Así mismo adaptamos una demostración del teorema de Thomason [TT90][Teorema 1.11.7] que demuestra que la inclusión natural de una categoría exacta en la categoría de complejos de cadenas finitas induce una equivalencia de homotopía entre sus  $K$ -teorías, ver 4.2.1. Además probamos que la  $K$ -teoría de la categoría de complejos finitos y, por tanto, de la categoría en sí tan sólo depende de las clases de equivalencias débiles de sus objetos, 4.2.3.

### 4.1. La categoría $C(\mathcal{E})$ y sus estructuras

Dada una categoría exacta  $\mathcal{E}$ , se define la *categoría  $C(\mathcal{E})$  de complejos de cadenas finitas* en  $\mathcal{E}$ , cuyos objetos son:

$$C_{\#} : 0 \rightarrow C_r \xrightarrow{d} C_{r-1} \xrightarrow{d} \cdots \rightarrow C_l \rightarrow 0$$

tales que  $d^2 = 0$ , es decir  $d^2$  factoriza por el objeto cero. Los morfismos son aplicaciones de complejos de cadenas  $f : C_{\#} \rightarrow D_{\#}$ , o sea colecciones de morfismos en  $\mathcal{E}$   $f = \{f_r : C_r \rightarrow D_r\}$  tales que  $d_D f = f d_C$ . Una *homotopía de complejos* en  $\mathcal{E}$

$$e : f \simeq f' : C \rightarrow D$$

es una colección de morfismos  $\{e : C_r \rightarrow D_{r+1}\}$  tales que  $d_D e + e d_C = f' - f : C_r \rightarrow D_r$ . Una *equivalencia de complejos* es una aplicación de complejos  $f : C \rightarrow D$  que admite una aplicación de complejos inversa homotópica, esto es, una aplicación de complejos  $g : D \rightarrow C$  tal que existen homotopías

$$h : gf \simeq 1 : C \rightarrow C \text{ y } k : fg \simeq 1 : D \rightarrow D .$$

Tal como ya hemos visto en el capítulo 3 la categoría exacta  $\mathcal{E}$  puede ser considerada como completamente inmersa en una categoría abeliana,  $Ab(\mathcal{E})$ , mediante la inmersión de Gabriel-Quillen, véase el apéndice B para más detalles. Desde este punto de vista podemos hablar de homología de complejos de cadenas en  $\mathcal{E}$ . Obviamente esta homología toma valores en  $Ab(\mathcal{E})$ . Más explícitamente, dado  $C_{\#}$  con diferencial  $d$  denotemos el núcleo de  $d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$  por  $Z_n(C) = Z_n$ , los  $n$ -ciclos de  $C$ ; y la imagen de  $d_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n$  por  $B_n(C) = B_n$ , los  $n$ -bordes de  $C$ . Como  $dd = 0$ , los morfismos  $B_n \rightarrow Z_n \rightarrow C_n$  son monomorfismos en  $Ab(\mathcal{E})$  para todo  $n$ . La  $n$ -ésima homología de  $C$  es el cociente, en  $Ab(\mathcal{E})$ ,  $H_n C = Z_n/B_n$ .

Una aplicación de complejos  $f : C_{\#} \rightarrow D_{\#}$  es un *cuasi-isomorfismo* si las aplicaciones inducidas  $f_* : H_n C \rightarrow H_n D$  son todas isomorfismos en  $Ab(\mathcal{U})$ . Si  $f : C_{\#} \rightarrow D_{\#}$  es nul-homotópica, es decir homotópica a la aplicación cero de

complejos, entonces las aplicaciones  $f_* : H_n C \rightarrow H_n D$  son cero. Si  $f$  y  $g$  son homotópicas, inducen la mismas aplicaciones  $H_n C \rightarrow H_n D$ . Es claro ahora que las equivalencias de homotopías de complejos son cuasi-isomorfismos. Una descripción más completa sobre estos temas se encuentra en [Wei94, capítulo 1], véase también [Bau89].

PROPOSICIÓN 4.1.1. *La categoría  $C(\mathcal{E})$  es exacta.*

DEMOSTRACIÓN. Las sucesiones exactas cortas de  $C(\mathcal{E})$  serán aquellas sucesiones cortas de aplicaciones de complejos que grado a grado describen sucesiones exactas cortas en  $\mathcal{E}$ . Es sencillo ver que  $C(\mathcal{E})$  con esta familia de sucesiones exactas cortas es una categoría exacta. Por ejemplo para comprobar la propiedad de push out basta aplicarla dimensión a dimensión sobre el complejo de cadenas. Cada uno inducirá un morfismo sobre el de dimensión directamente inferior. De forma clara el resultado es un complejo con las propiedades requeridas.  $\square$

Más aún, se tiene:

PROPOSICIÓN 4.1.2. *La categoría  $C(\mathcal{E})$  es una categoría de Waldhausen.*

DEMOSTRACIÓN. Las cofibraciones serán los morfismos de complejos que grado a grado son monomorfismos admisibles. Las equivalencias débiles serán los cuasi-isomorfismos. Los axiomas de cofibraciones y equivalencias débiles, 1.7.1, pueden ser comprobados rápidamente utilizando construcciones simples. También son sencillos de comprobar los axiomas de saturación y de extensión, 1.7.1; para ello se puede usar la sucesión exacta larga de homología asociada a la sucesión exacta corta de complejos y el lema de los 5, véanse [Wei94, páginas 10-15], [Hu68] o [Hil66] para más detalles.  $\square$

PROPOSICIÓN 4.1.3. *La categoría con cofibraciones y equivalencias débiles  $C(\mathcal{E})$  tiene un functor cilindro y satisface el axioma del cilindro, 1.7.9.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, dado  $f : U \rightarrow V$  un morfismo, sea  $T(f)$  un complejo de cadenas  $(T(f))_p = U_p \oplus U_{p-1} \oplus V_p$  con borde

$$d_p \equiv \begin{pmatrix} d_U & -1 & 0 \\ 0 & -d_U & 0 \\ 0 & f & d_V \end{pmatrix}$$

Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{i_1} & T(f) & \xleftarrow{i_2} & V \\ & \searrow f & \downarrow \pi & \swarrow id & \\ & & V & & \end{array}$$

donde  $j_1$  y  $j_2$  son las inclusiones obvias como sumandos directos. Grado a grado  $\pi$  se define como:

$$\pi_p \equiv (f, 0, 1)$$

Son fáciles comprobar las propiedades *Cyl 1* y *Cyl 2* en 1.7.9. El axioma del cilindro también se verifica. Para ver esto, demostramos que  $\pi$  es una equivalencia

de homotopías de complejos y por tanto un cuasi-isomorfismo, en este caso una equivalencia débil. La inversa homotópica es la inclusión natural

$$i_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Grado a grado, estas aplicaciones están por las siguientes matrices:

$$\pi_p = (f, 0, 1) \quad d_p = \begin{pmatrix} d & -1 & 0 \\ 0 & -d & 0 \\ 0 & f & d \end{pmatrix} \quad \Gamma_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es sencillo demostrar ahora que  $\Gamma_p d_{p+1} + d_{p+2} \Gamma_{p+1} = i_2 \pi_{p+1} - 1$  y que  $\pi i_2 = 1$ .  $\square$

A  $C(\mathcal{E})$  se le puede dotar de otra estructura alternativa como de Waldhausen. En efecto, se  $C(\mathcal{E})_*$  la categoría de complejos de cadenas finitas en  $\mathcal{E}$  donde las cofibraciones son tan sólo las aplicaciones de complejos monomórficas escindibles grado a grado y las equivalencia débiles son los cuasi-isomorfismos. No es difícil comprobar que

**PROPOSICIÓN 4.1.4.** *La categoría  $C(\mathcal{E})_*$  es una categoría exacta de Waldhausen que también verifica los axiomas de saturación, extensión y el axioma del cilindro, 1.7.1 y 1.7.9.*

En realidad  $C(\mathcal{U})_*$  es la categoría de complejos finitos en  $\mathcal{E}$  tomando ahora a  $\mathcal{E}$  con la estructura de categoría exacta derivada de su estructura original que inducen las sucesiones exactas escindibles.

#### 4.2. La K-teoría de $C(\mathcal{E})$

Toda categoría exacta  $\mathcal{E}$  tiene una estructura natural de categoría con cofibraciones y equivalencias débiles, véase 2. Explícitamente las cofibraciones son los monomorfismos admisibles y las equivalencias débiles son los isomorfismos. La categoría  $\mathcal{E}$  puede ser considerada como la subcategoría llena de  $C(\mathcal{E})$  al identificar el objeto  $U$  de  $\mathcal{E}$  con el complejo de cadenas  $0 \rightarrow \cdots \rightarrow C_0 = U \rightarrow \cdots \rightarrow 0$ . Tenemos el siguiente teorema debido a Thomason, [TT90], que relaciona la K-teoría de  $\mathcal{E}$  y la de  $C(\mathcal{E})$ . Aquí damos una demostración alternativa a la original y basada en la demostración de [CP97, Proposition 6.1].

**TEOREMA 4.2.1.** [TT90, Teorema 1.11.7] *Dada la categoría exacta  $\mathcal{E}$ , sea  $C(\mathcal{E})$  su categoría de complejos de cadenas finitas asociada. Suponemos que  $\mathcal{E}$  y que  $C(\mathcal{E})$  tienen las estructuras usuales de categorías con cofibraciones y equivalencias débiles dadas las secciones 2.1.9 y 4.1.2. Entonces la inmersión  $\mathcal{E} \hookrightarrow C(\mathcal{E})$ , descrita más arriba, induce una equivalencia de homotopías de espectros de K-teorías.*

*Es más, el funtor exacto inducido por la identidad,  $C(\mathcal{U})_* \hookrightarrow C(\mathcal{E})$ , induce también una equivalencia de homotopías de espectro de K-teorías.*

**DEMOSTRACIÓN.** Para la demostración de la primera parte véanse bien [TT90, Theorem 1.11.7, páginas 279-282] o bien la demostración de [CP97, Proposition 6.1]. En [CP97], aunque la demostración está hecha en términos de categorías aditivas con equivalencias de homotopías como equivalencias débiles, la demostración sirve también para categorías exactas con los cuasi-isomorfismos como equivalencias débiles, salvo un pequeño cambio en un paso. Repetimos a continuación la demostración con las modificaciones necesarias.

Recordemos que las equivalencias débiles en  $C(\mathcal{E})$  son los cuasi-isomorfismos. Denotaremos esto como  $qC(\mathcal{E})$  abusando de la notación. Sin cambiar la subcategoría de las cofibraciones podemos considerar  $C(\mathcal{E})$  dotado con la clase de los isomorfismos como equivalencias débiles. Esta nueva estructura sobre  $C(\mathcal{E})$  será denotada como  $iC(\mathcal{E})$ . En nuestro contexto podemos considerar  $iC(\mathcal{U})^q$ , la subcategoría llena de  $iC(\mathcal{E})$  cuyos objetos son los complejos de cadenas contráctiles en  $qC(\mathcal{E})$ , es decir aquellos que son acíclicos. Entonces, por el lema de la fibración genérica 1.7.11:

$$K(iC(\mathcal{E})^q) \longrightarrow K(iC(\mathcal{E})) \longrightarrow K(qC(\mathcal{E}))$$

es una fibración salvo homotopía. Demostraremos que  $K(i\mathcal{U})$  es la cofibra homotópica de

$$K(iC(\mathcal{E})^q) \longrightarrow K(iC(\mathcal{E})).$$

La categoría  $C(\mathcal{E})$  puede ser considerada como el límite  $\lim_{\substack{a \rightarrow +\infty \\ b \rightarrow -\infty}} C_a^b$  donde  $C_a^b$  es la subcategoría llena de  $C(\mathcal{E})$  cuyos objetos  $C_{\#}$  verifican que  $C_i = 0$  para  $i \leq a - 1$  o  $i \geq b + 1$ . Para cualquier par de enteros  $a \leq b$ ,  $qC_a^b$  es una categoría de cofibraciones y equivalencias débiles heredadas de  $qC(\mathcal{E})$ . La categoría  $iC_a^b$  es la categoría  $C_a^b$  con las estructuras heredadas de  $iC(\mathcal{E})$ .

Consideremos el funtor exacto

$$iC_a^b \rightarrow \prod_{i=a}^{b-1} \mathcal{E} \\ C_{\#} \mapsto (C_a, \dots, C_b)$$

A continuación, vemos por inducción que induce una equivalencia de homotopía de  $K$ -teorías.

Para  $a = b$ , es obvio.

Ahora, por inducción, demostraremos que

$$iC_a^b \rightarrow iC_{a+1}^b \times \mathcal{E} \\ (C_b \rightarrow C_{b-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_a) \mapsto ((C_b \rightarrow \dots \rightarrow C_{a+1}), (0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow C_a))$$

induce una equivalencia de homotopía de  $K$ -teorías. Esto se deduce directamente del Teorema de Aditividad, 1.7.7, ya que

$$iC_a^b = E(iC_{a+1}^b, iC_a^b, i\mathcal{E}).$$

Ahora comprobamos que  $iC_a^{bq}$  y  $\prod_{i=a}^{b-1} i\mathcal{E}$  tienen  $K$ -teorías homotópicamente equivalentes. La demostración es por inducción en enteros  $a \leq b$ .

Para  $a = b$ , la categoría  $iC_a^{aq} = i\mathcal{E}^q$  que es equivalente a la 0-categoría.

Para  $a = b - 1$ , está claro que

$$iC(\mathcal{E})_{b-1}^{bq} \equiv \{ \text{categoría de complejos } C_{b-1} \xrightarrow{\partial} C_b \text{ con } \partial \text{ un isomorfismo} \}$$

es pues equivalente a  $i\mathcal{E}$ .

Continuamos por inducción en  $b - a$ . Describiremos una equivalencia de homotopía:

$$K(iC(\mathcal{E})_a^{bq}) \xrightarrow{\cong} K(iC(\mathcal{U})_a^{b-1q}) \times K(iC(\mathcal{E})_{b-1}^{bq} \cong i\mathcal{E}).$$

Este resultado se obtendrá al aplicar el Teorema de Aditividad, 1.7.7, a la siguiente equivalencia de categorías

$$iC(\mathcal{E})_a^{bq} \equiv E(iC(\mathcal{E})_{a+1}^{bq}, iC(\mathcal{E})_a^{bq}, iC(\mathcal{E})_a^{a+1q}).$$



Dado un complejo de cadenas  $C_{\#}$  de  $iC(\mathcal{E})_a^{bq}$  le asociaremos una extensión. Como

$$C_{\#} \equiv \{0 \rightarrow C_b \rightarrow C_{b-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_{a+2} \xrightarrow{d_{a+2}} C_{a+1} \xrightarrow{d_{a+1}} C_a \rightarrow 0\}$$

es  $q$ -contráctil, se tiene que  $d_{a+1}$  es un epimorfismo en  $Ab(\mathcal{E})$ . Como  $\mathcal{E}$  satisface la propiedad (P), 3.1.1, es cerrada bajo núcleos de epimorfismos, véase 6.2.1, y, por tanto existe su núcleo  $Z_{a+1}$  y  $Z_{a+1} \twoheadrightarrow C_{a+1} \xrightarrow{d_{a+1}} C_a$  es una sucesión exacta corta en  $\mathcal{E}$ . De esta forma, obtenemos los siguientes complejos de cadenas  $q$ -contráctiles más cortos:

$$\tau^{\geq a+1}(C_{\#}) \equiv (0 \rightarrow C_b \rightarrow C_{b-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_{a+2} \rightarrow Z_{a+1} \rightarrow 0)$$

$$\tau^a(C_{\#}) \equiv (0 \rightarrow C_a \xrightarrow{id} C_a \rightarrow 0).$$

El complejo de cadenas  $C_{\#}$  encaja en la sucesión:

$$\tau^{\geq a+1}(C_{\#}) \twoheadrightarrow C_{\#} \twoheadrightarrow \tau^a(C_{\#})$$

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & & 0 & & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 C_b & \xlongequal{\quad} & C_b & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 C_{b+1} & \xlongequal{\quad} & C_{b+1} & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 C_{a+2} & \xlongequal{\quad} & C_{a+2} & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 Z_{a+1} & \twoheadrightarrow & C_{a+1} & \twoheadrightarrow & C_a \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C_a & \xlongequal{\quad} & C_a \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & \xlongequal{\quad} & 0
 \end{array}$$

La inversa viene dada por la proyección sobre el término medio de la extensión. No es difícil demostrar que son una la inversa de la otra. El Teorema de la Aditividad, 1.7.7, se puede aplicar entonces para obtener la equivalencia de homotopía que queríamos.

En esta demostración, hemos demostrado que para  $C_{\#}$  en  $iC(\mathcal{E})_a^{bq}$ , los objetos  $Z_i = \ker d_i$ , para  $a \leq i \leq b-1$  son objetos de  $\mathcal{E}$  y que el funtor  $C_{\#} \rightarrow Z_i$  es exacto,

para cada  $i$ . En realidad, la equivalencia de homotopía está inducida por

$$\begin{aligned} iC(\mathcal{E})_a^{b^q} &\rightarrow \prod^{b-a} i\mathcal{E} \\ C_{\#} &\mapsto (Z_{b-1}, \dots, Z_a). \end{aligned}$$

Ahora, consideremos la inclusión exacta

$$iC(\mathcal{E})_a^{b^q} \hookrightarrow iC(\mathcal{E})_a^b$$

y las aplicaciones inducidas de  $K$ -teorías:

$$\begin{array}{ccc} K(iC(\mathcal{E})_a^{b^q}) & \longrightarrow & K(iC(\mathcal{E})_a^b) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \prod^{b-a} K(i\mathcal{E}) & \longrightarrow & \prod^{b-a+1} K(i\mathcal{E}) \end{array}$$

Dado un complejo de cadenas  $C_{\#}$  de  $iC(\mathcal{E})_a^{b^q}$  el término en  $\prod^{b-a} i\mathcal{E}$  es  $(Z_{b-1}, \dots, Z_a)$  y en  $\prod^{b-a+1} i\mathcal{E}$  es  $(C_b, \dots, C_a)$ . Como en  $C_{\#}$ , dimensión a dimensión, podemos identificar la sucesión exacta

$$Z_k \twoheadrightarrow C_k \twoheadrightarrow Z_{k+1}$$

se puede decir, usando el Teorema de Aditividad, 1.7.7, que la aplicación, una vez pasados a  $K$ -teoría, que envía  $C_{\#}$  a  $C_k$  es homotópica a la 'suma' de las aplicaciones que envían  $C_{\#}$  a  $Z_k$  y  $C_{\#}$  a  $Z_{k+1}$ .

Por tanto, podemos asumir que la aplicación en el diagrama conmutativo de más arriba

$$\prod^{b-a} K(i\mathcal{E}) \longrightarrow \prod^{b-a+1} K(i\mathcal{E})$$

está inducido por

$$(Z_{b-1}, \dots, Z_a) \mapsto (Z_{b-1}, Z_{b-1} \oplus Z_{b-2}, \dots, Z_{a+1} \oplus Z_a, Z_a)$$

La cofibra homotópica de esta aplicación es  $K(i\mathcal{E})$ . Ésta está inducida por

$$\begin{aligned} \prod^{b-a+1} K(i\mathcal{E}) &\rightarrow K(i\mathcal{E}) \\ (x_b, \dots, x_a) &\mapsto \sum_{k=a}^b (-1)^k x_k. \end{aligned}$$

Tomando límites directos ( $a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty$ ), obtenemos la sucesión homotópica de cofibra

$$\begin{aligned} K(iC(\mathcal{E})^q) &\rightarrow K(iC(\mathcal{E})) \rightarrow K(i\mathcal{E}) \\ C_{\#} &\mapsto \sum (-1)^k C_k. \end{aligned}$$

Por el Lema de la Fibra Genérica, 1.7.11, la cofibra es, salvo homotopía,  $K(qC(\mathcal{E}))$ . Por tanto, existe una equivalencia de homotopía

$$K(i\mathcal{E}) \xrightarrow{\cong} K(qC(\mathcal{E}))$$

inducida por la inclusión exacta  $i\mathcal{E} \rightarrow qC(\mathcal{E})$ . Con esto queda demostrado el resultado.

Ha de recordarse que, como en la demostración de Thomason,  $\mathcal{U}$  tiene que verificar la condición de clausura bajo núcleos de epimorfismos de  $\mathcal{A}b(\mathcal{E})$ . Para esto, es suficiente que se verifique la propiedad 3.1.2, véase B.0.6[b)]. Esto se puede solventarse como ya se hizo en la demostración de [CP97, Proposition 6.1].

Si  $\mathcal{E}$  no satisficiera la propiedad (P), véase el capítulo 3 entonces  $\bar{\mathcal{E}}$  lo hace, véase 3.2.7. Es más,  $\mathcal{U}$  es cofinal en  $\bar{\mathcal{E}}$ , véase 3.3.2 y  $K(i\mathcal{U}) \rightarrow K(i\bar{\mathcal{U}})$  es una equivalencia de homotopías por el corolario 3.3.3. De forma similar  $iC(\mathcal{E}) \rightarrow iC(\bar{\mathcal{E}})$  y  $iC(\mathcal{E})^q \rightarrow iC(\bar{\mathcal{U}})^q$  son inclusiones cofinales que inducen una equivalencia de homotopía en  $K$ -teoría.

Consideramos ahora el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} K(iC(\mathcal{E})^q) & \longrightarrow & K(iC(\mathcal{U})) & \longrightarrow & K(qC(\mathcal{E})) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K(iC(\bar{\mathcal{E}})^q) & \longrightarrow & K(iC(\bar{\mathcal{E}})) & \longrightarrow & K(qC(\bar{\mathcal{E}})) \simeq K(\bar{\mathcal{E}}) \simeq K(\mathcal{E}). \end{array}$$

Las filas superior e inferior son fibraciones por el lemma de la fibración genérica 1.7.11. Las dos equivalencias de homotopía en la parte inferior son consecuencia del teorema 4.2.1 y del teorema de cofinalidad 2.1.13. Como las flechas vertical a la izquierda y en el centro son equivalencias de homotopía, podemos pues concluir que la flecha vertical a la derecha es una equivalencia de homotopía. La parte derecha del diagrama conmuta y por tanto el teorema se verifica para categorías exactas ordinarias.

Para la segunda parte del teorema, seguimos la demostración de [TT90, Proposición 1.9.2]. Simplemente aplicamos el teorema de aproximación, 1.7.13, bajo las hipótesis de la nota 1.7.14 a la inclusión  $C(\mathcal{E})_* \hookrightarrow C(\mathcal{E})$ . La condición *App* 1 es obviamente satisfecha y la condición *App* 2' se verifica trivialmente tomando  $a = x$ ,  $x' = 1$ .  $\square$

NOTA 4.2.2. La segunda parte del teorema nos permite trabajar, cuando sea necesario, bajo condiciones más simples en  $C(\mathcal{E})_*$  en vez de en  $C(\mathcal{E})$ .

El siguiente resultado nos permite ser más flexibles a la hora de escoger modelos para la  $K$ -teoría de nuestras categorías.

PROPOSICIÓN 4.2.3. *Sea  $\mathcal{E}$  una categoría exacta y  $C(\mathcal{E})$  su categoría de complejos de cadenas finitas. Sea  $\mathcal{D} \subseteq C(\mathcal{E})$  una subcategoría llena suya que verifica que para cada complejo  $C_\#$  de  $C(\mathcal{E})$  existe un complejo de cadenas  $D(C)_\#$  en  $\mathcal{D}$  homotópicamente equivalente a él. Supongamos que  $w$ , la clase de las equivalencias débiles en  $C(\mathcal{E})$ , contiene las equivalencias de homotopía y que  $wC(\mathcal{E})$  satisface los axiomas del cilindro, 1.7.9, y de saturación, 1.7.1. Entonces la inclusión de categorías*

$$I : w\mathcal{D} \rightarrow wC(\mathcal{E})$$

*induce una equivalencia de homotopía en  $K$ -teoría.*

DEMOSTRACIÓN. Aplicaremos el teorema de aproximación, 1.7.13, al functor inclusión  $I$ . Puesto que estas categorías tiene cilindro y satisfacen tanto el axioma de saturación como el del cilindro tan sólo nos faltan por comprobar *App*1 y *App*2', 1.7.14. La condición *App*1 se verifica trivialmente pues  $\mathcal{D}$  es subcategoría llena de  $C(\mathcal{E})$  y hereda las equivalencias débiles de  $C(\mathcal{E})$ . Verifiquemos ahora *App*2'.

Sea  $D_{\#} \xrightarrow{f} C_{\#}$  un morfismo de un objeto en  $\mathcal{D}$  a un objeto en  $C(\mathcal{E})$  y sea  $i : C_{\#} \xrightarrow{\sim} D(C)_{\#}$  la equivalencia de homotopía que nos dan las hipótesis iniciales con inversa  $r$  tal que  $\partial\Gamma + \Gamma\partial = ri - 1$  con  $\Gamma$  la homotopía de complejos. La composición  $D_{\#} \xrightarrow{f} C_{\#} \xrightarrow{i} D(C)_{\#}$  está en  $\mathcal{D}$  y su cilindro  $T(if)$  nos da el siguiente diagrama en  $C(\mathcal{E})$ . Obsérvese que sólo  $C_{\#}$  no está en  $\mathcal{D}$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 D_{\#} & \xrightarrow{j_1} & T(if) & \xleftarrow{j_2} & D(C)_{\#} \\
 f \downarrow & \searrow & \downarrow \pi & \swarrow \text{id} & \\
 C_{\#} & \xrightarrow{i} & D(C)_{\#} & & \\
 & \swarrow r & & & 
 \end{array}$$

Basta entonces con definir un morfismo  $f' : T(if) \rightarrow C_{\#}$  tal que  $f'j_1 = f$  y con  $f'$  equivalencia débil. Definimos  $f'$  como sigue:

$$(T(if))_p = D_p \oplus D_{p-1} \oplus D(C)_p \xrightarrow{f'_p} C_p, \quad f'_p = (f, \Gamma f, r).$$

Comprobemos que  $f'$  es un morfismo de cadenas. Como  $r\partial = \partial r$ ,  $f\partial = \partial f$  y  $\partial\Gamma + \Gamma\partial = ri - 1$ , entonces  $\partial\Gamma = -1 - \Gamma\partial + ri$  y además

$$f'd = (f, \Gamma f, r) \begin{pmatrix} \partial & -1 & 0 \\ 0 & -\partial & 0 \\ 0 & if & \partial \end{pmatrix} = (f\partial, -f - \Gamma f\partial + rif, r\partial) = (\partial f, \partial\Gamma f, \partial r) = \partial f'.$$

Es más, como  $(f, \Gamma f, r) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = ri$  y  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$  es una equivalencia débil pues  $j_2$  e  $i$  lo son entonces por saturación también  $f'$  lo es. Más aún, se puede comprobar que  $f'$  es una equivalencia de homotopía cuya inversa homotópica es  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = j_2 i$ . Por último está claro que  $f'j_1 = f$ . Con esto se termina la comprobación de *App2*.  $\square$

## Un teorema de Devissage

Este capítulo desarrolla una importante herramienta en el campo de la  $K$ -teoría algebraica: un teorema de Devissage. Hasta ahora sólo se conocía una demostración de dicho teorema para categorías abelianas. Aquí desarrollamos una versión más general para categorías de Waldhausen abriendo así el campo de aplicaciones a situaciones más complejas. Nuestra versión del teorema de Devissage, [Qui72], nos muestra que si todo objeto de una categoría de Waldhausen  $\mathcal{U}$  tiene resoluciones con cocientes en una subcategoría fija  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$  entonces sus correspondientes  $K$ -teorías son homotópicamente equivalentes.

### 5.1. Categorías Estacionarias

En esta sección trabajaremos dentro de una categoría de Waldhausen como se definió en el capítulo 1.6. En dichas categorías tenemos los siguientes resultados generales.

LEMA 5.1.1. *Sea  $k : A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$  una sucesión de cofibraciones en una categoría de Waldhausen  $\mathcal{C}$ . Entonces se tiene la siguiente sucesión cofibrada de cofibras  $B/A \twoheadrightarrow C/A \twoheadrightarrow C/B$  dentro del siguiente diagrama conmutativo:*

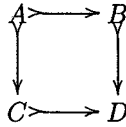
$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\pi} & B/A \\
 & \searrow k & \downarrow j & & \downarrow l \\
 & & C & \xrightarrow{p} & C/A \\
 & & \downarrow q & \nearrow m & \\
 & & C/B & & 
 \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Por el axioma cof3 de 1.7.1 basta comprobar que

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{\pi} & B/A \\
 \downarrow j & & \downarrow l \\
 C & \xrightarrow{p} & C/A
 \end{array} \tag{1}$$

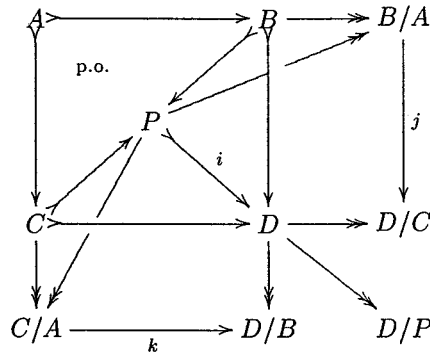
es un diagrama de pushout. Sea  $x : C \rightarrow X$  e  $y : B/A \rightarrow X$  morfismos tales que  $y\pi = xj$ . Entonces,  $xk = xji = y\pi i = 0$  y como  $C/A$  es  $\star \bigcup_A C$ , entonces existe  $z : C/A \rightarrow X$  tal que  $zp = x$ . Nótese que  $zl\pi = y\pi$  pues  $zl\pi = zpj = xj = y\pi$ . Entonces  $y = zl$  por la unicidad de pushout para  $B/A = \star \bigcup_A B$ . Así pues el diagrama (1) es un diagrama pushout y, por tanto,  $l$  es una cofibración con cofibra la misma que la del morfismo  $j$ .  $\square$

LEMA 5.1.2. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en una categoría de Waldhausen:



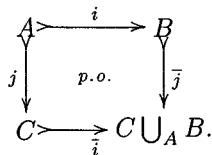
Si el morfismo inducido  $P = C \cup_A B \xrightarrow{i} D$  es una cofibración entonces los morfismos inducidos  $B/A \xrightarrow{j} D/C$  y  $C/A \xrightarrow{k} D/B$  son cofibraciones y, además ambas con la misma cofibra, que resulta ser  $D/P$ .

DEMOSTRACIÓN. Tenemos el siguiente diagrama:



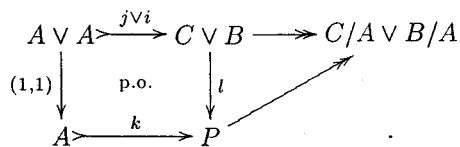
Aplicando el lema 5.1.1 a  $C \rightarrow P \rightarrow D$  y a  $B \rightarrow P \rightarrow D$  tenemos que  $B/A \rightarrow D/C \rightarrow D/P$  y que  $C/A \rightarrow D/B \rightarrow D/P$  son sucesiones cofibradas.  $\square$

LEMA 5.1.3. Sea el siguiente diagrama pushout en una categoría de Waldhausen  $C$ :



Entonces  $A \xrightarrow{\bar{j}i} C \cup_A B \rightarrow C/A \vee B/A$  es una sucesión cofibrada.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el siguiente pushout:

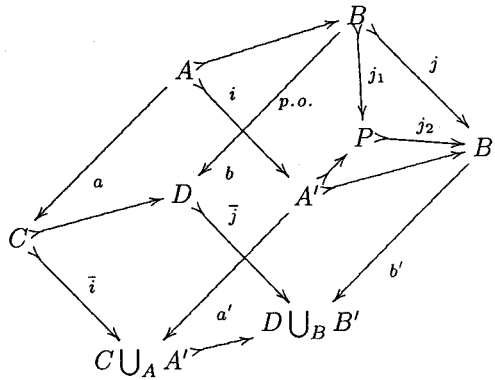


Puesto que  $C/A \vee B/A$  es la cofibra de  $j \vee i : A \vee A \rightarrow C \vee B$  bastará comprobar que

$$\begin{array}{ccc}
 A \vee A & \xrightarrow{j \vee i} & C \vee B \\
 (1,1) \downarrow & & \downarrow \bar{i} \vee \bar{j} \\
 A & \xrightarrow{\bar{j}i} & C \cup_A B
 \end{array} \tag{1}$$

es también un diagrama pushout lo que implicará que  $\bar{j}i$  tiene la misma cofibra que  $j \vee i$ . Sean  $a : A \rightarrow X$  y  $c \vee b : C \vee B \rightarrow X$  morfismos tales que  $a(1, 1) = (c \vee b)(j \vee i)$ . Entonces  $a = cj$  y  $a = bi$ . Por tanto, existe un morfismo  $z : C \cup_A B \rightarrow X$  tal que  $b = z\bar{j}$  y  $c = z\bar{i}$ . Luego tenemos que  $z(\bar{i} \vee \bar{j}) = z\bar{i} \vee z\bar{j} = c \vee b$  y  $z\bar{j}i = bi = a$ .  $\square$

LEMA 5.1.4. *Sea el siguiente diagrama conmutativo en una categoría de Waldhausen  $\mathcal{C}$ :*

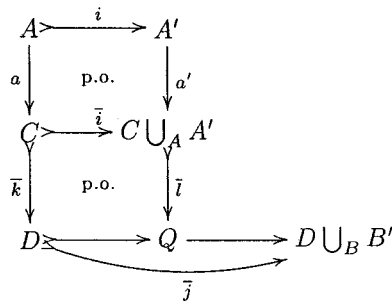


donde el morfismo natural  $P = A' \cup_A B \rightarrow B'$  es una cofibración. Entonces también el morfismo  $q : Q = (C \cup_A A') \cup_C D \rightarrow D \cup_B B'$ . Es más,  $D \cup_B B' = (D \cup_A A') \cup_{(B \cup_A A')} B'$  y si  $b$  es cofibración entonces además se tendrá que

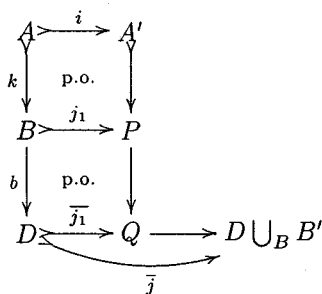
$$P = A' \cup_A B \rightarrow Q = (C \cup_A A') \cup_C D$$

es una cofibración.

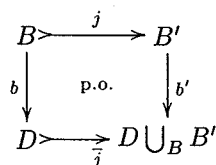
DEMOSTRACIÓN. Consideremos el diagrama de pushout que define el morfismo  $q$ :



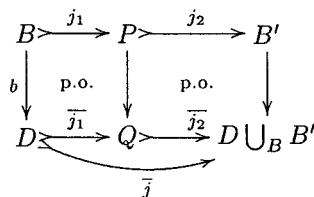
entonces como  $\bar{k}a = bk$  podemos reemplazar la columna a la izquierda por la siguiente sucesión de pushouts.



por tanto,  $Q \simeq D \cup_B P$ . Pero como  $j = j_2 j_1$ , entonces el diagrama pushout

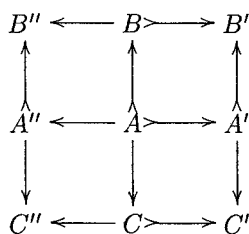


puede reescribirse como la siguiente sucesión de pushouts:



lo cual demuestra que  $q = \bar{j}_2$  es cofibración. □

LEMA 5.1.5. *Dado el siguiente diagrama conmutativo en una categoría de Waldhausen  $\mathcal{C}$ :*

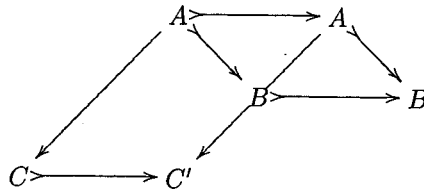


tal que  $B \cup_A A' \twoheadrightarrow B'$  entonces se verifica que  $(C'' \cup_{A''} B'') \cup_{(C \cup_A B)} (C' \cup_{A'} B')$  y  $(C'' \cup_C C') \cup_{(A'' \cup_A A')} (B'' \cup_C C')$  son isomorfos.

DEMOSTRACIÓN. El resultado se sigue de la comparación de los distintos pushouts que se pueden obtener a partir del diagrama en las hipótesis. Más explícitamente, el objeto  $(C'' \cup_{A''} B'') \cup_{(C \cup_A B)} (C' \cup_{A'} B')$  se obtiene al tomar el pushout de los pushouts de las columnas mientras que  $(C'' \cup_C C') \cup_{(A'' \cup_A A')} (B'' \cup_C C')$  se obtiene al tomar el pushout de los pushouts de las filas. Como la producción iterada de pushouts se puede hacer en cualquier orden siempre que cada uno de ellos exista tenemos que ambos objetos son isomorfos.



Más explícitamente, consideremos primero la parte derecha del diagrama en las hipótesis iniciales:

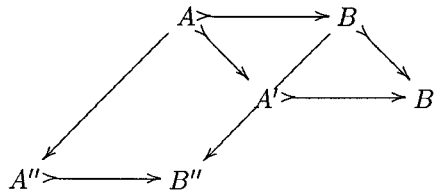


Como  $B \cup_A A' \twoheadrightarrow B'$ , podemos aplicar el lema 5.1.4 con lo cual obtenemos el siguiente diagrama:

$$B'' \cup_{A''} C'' \longleftarrow B \cup_A C \twoheadrightarrow B' \cup_{A'} C'.$$

que prueba que  $(C'' \cup_{A''} B'') \cup_{(C \cup_A B)} (C' \cup_{A'} B')$  existe.

Por otra parte, consideremos el diagrama



donde  $B \cup_A A' \twoheadrightarrow B'$  es una cofibración. Al aplicar el lema 5.1.4 obtenemos la existencia del siguiente diagrama:

$$C'' \cup_C C' \longleftarrow A'' \cup_A A' \twoheadrightarrow B'' \cup_B B'.$$

del cual obtenemos la existencia de  $(C'' \cup_C C') \cup_{(A'' \cup_A A')} (B'' \cup_B B')$ . □

Sea  $\mathcal{D}^+$  una subcategoría de Waldhausen (es decir,  $\text{co}\mathcal{D}^+ = \text{co}\mathcal{C} \cap \text{Mor}(\mathcal{D}^+)$  y  $w\mathcal{D}^+ = w\mathcal{C} \cap \text{Mor}(\mathcal{D}^+)$ ), no necesariamente llena, de una categoría de Waldhausen  $\mathcal{C}$ , ambas con funtor cilindro que satisfacen el axioma del cilindro, el de saturación y el de extensión, ver 1.6.

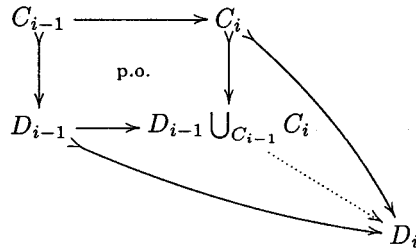
Sea  $\tilde{\mathcal{C}}$  la categoría cuyos objetos son sucesiones de cofibraciones eventualmente estacionarias:

$$\star = C_{-1} \twoheadrightarrow C_0 \twoheadrightarrow C_1 \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow C_{n-1} \twoheadrightarrow C_n \equiv C_{n+1} \equiv \dots$$

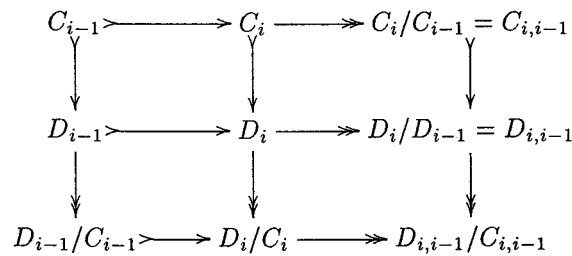
de  $\mathcal{C}$  tales que las cofibras  $C_i/C_{i-1} = C_{i,i-1}$  son objetos de  $\mathcal{D}^+$ , para  $i \geq 0$ . El objeto al cual estabiliza se denotará como  $C_\infty$ . Los morfismos entre estas sucesiones de cofibraciones vienen dadas por diagramas compatibles de morfismos entre objetos del mismo nivel de tal forma que los morfismos inducidos entre los objetos cocientes están en  $\mathcal{D}^+$ . Cuando esté lo suficientemente claro denotaremos los objetos de  $\tilde{\mathcal{C}}$ , así como los morfismos, tan sólo por las sucesiones que las definen.

Está claro que  $\tilde{\mathcal{C}}$  es una categoría pequeña con un objeto cero. A continuación dotaremos a  $\tilde{\mathcal{C}}$  de una estructura de categoría de Waldhausen.

**Cofibraciones:** Un morfismo  $\{C_i\}_{i \geq 0} \rightarrow \{D_i\}_{i \geq 0}$  de  $\tilde{\mathcal{C}}$  es una cofibración si  $C_0 \rightarrow D_0$  es una cofibración en  $\mathcal{D}^+$  y para todo  $i \geq 1$ , el morfismo inducido



es una cofibración en  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$ . Nótese que el lema 5.1.2 implica que los morfismos  $C_i/C_{i-1} \rightarrow D_i/D_{i-1}$  y  $D_{i-1}/C_{i-1} \rightarrow D_i/C_i$  son cofibraciones en  $\mathcal{D}^+$  con las mismas cofibras en la subcategoría  $\mathcal{D}^+$ . También implica que para toda  $i$  el morfismo  $C_i \rightarrow D_i$  es una cofibración. Entonces por 5.1.2, para cada  $i \geq 0$ , tenemos el siguiente diagrama de sucesiones de cofibraciones:



Obsérvese que la sucesión vertical en el extremo derecho está en  $\mathcal{D}^+$ . Sea  $co\tilde{\mathcal{C}}$  la clase de las cofibraciones que como es habitual denotaremos como  $\twoheadrightarrow$ .

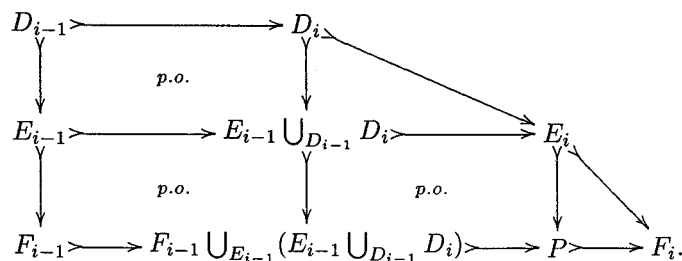
**Equivalencias débiles:** Un morfismo de  $\{C_i\}_{i \geq 0} \rightarrow \{D_i\}_{i \geq 0}$  entre objetos de  $\tilde{\mathcal{C}}$  se dirá que es una equivalencia débil si el morfismo  $C_\infty \rightarrow D_\infty$  está en  $w\mathcal{C}$ , es decir es una equivalencia débil en  $\mathcal{C}$ . Denotemos por  $v\tilde{\mathcal{C}}$  la clase de estas equivalencias débiles. Es posible definir una clase de equivalencias débiles más fina, denotémosla como  $w\tilde{\mathcal{C}}$ , al exigir que cada morfismo del diagrama esté en  $w\mathcal{C}$ .

PROPOSICIÓN 5.1.6. *El triple  $v\tilde{\mathcal{C}} = (\tilde{\mathcal{C}}, \text{co}\tilde{\mathcal{C}}, v\tilde{\mathcal{C}})$  es una categoría de Waldhausen con funtor cilindro que satisface el axioma del cilindro además de los axiomas de saturación y extensión.*

Este resultado es similar al dado por Waldhausen en [Wal85, páginas 322-325] para la categoría de cofibraciones  $F_m\mathcal{C}$ . La parte correspondiente al funtor cilindro está inspirada en [Wal85, sección 1.7].

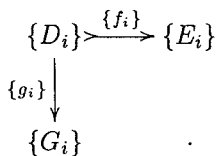
DEMOSTRACIÓN. Primero vemos que los axiomas de categoría de cofibraciones se verifican.

- a) El morfismo nulo es obviamente una cofibración en  $\tilde{\mathcal{C}}$ .
- b) Comprobemos que  $\text{co}\tilde{\mathcal{C}}$  es cerrada por composición. Sean  $\{f_i\} : \{D_i\} \rightarrow \{E_i\}$  y  $\{g_i\} : \{E_i\} \rightarrow \{F_i\}$  dos cofibraciones en  $\tilde{\mathcal{C}}$ . Para toda  $i \geq 0$ , tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

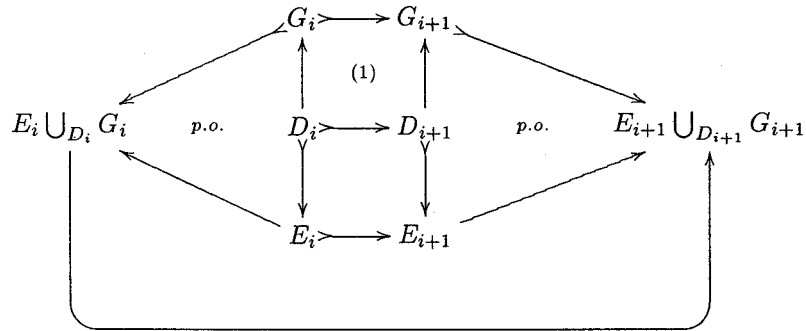


Por la unicidad de los pushouts este tenemos los isomorfismos  $F_{i-1} \cup_{D_{i-1}} D_i \cong F_{i-1} \cup_{E_{i-1}} (E_{i-1} \cup_{D_{i-1}} D_i)$  y  $P \cong F_{i-1} \cup_{E_{i-1}} E_i$ . El morfismo canónico  $F_{i-1} \cup_{D_{i-1}} D_i \rightarrow F_i$  es cofibración ya que coincide, salvo isomorfismos, con la composición de las dos últimas cofibraciones en la línea inferior del diagrama. Más aún, está claro que para cada  $i \geq 0$  la composición  $C_{i,i-1} \xrightarrow{\quad} D_{i,i-1} \xrightarrow{\quad} F_{i,i-1}$  es una cofibración en  $\mathcal{D}^+$  como se requería.

- c) Ahora demostramos la existencia de pushouts para diagramas en  $\tilde{\mathcal{C}}$  de la forma



Tomando pushouts nivel a nivel obtenemos para cada par de enteros positivos  $i, i + 1$  el siguiente diagrama:



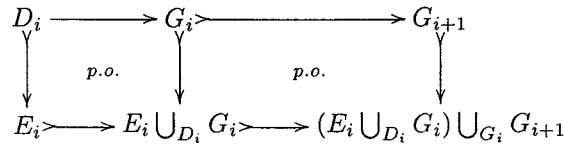
No es difícil comprobar que el resultado es un pushout en la categoría  $\tilde{\mathcal{C}}$  una vez que hayamos comprobado que dicho objeto está en  $\tilde{\mathcal{C}}$ . Comprobemos que

$$E_i \cup_{D_i} G_i \longrightarrow E_{i+1} \cup_{D_{i+1}} G_{i+1}$$

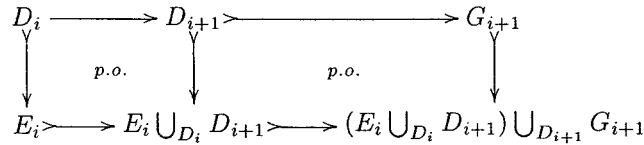
y que

$$(E_i \cup_{D_i} G_i) \cup_{G_i} G_{i+1} \longrightarrow E_{i+1} \cup_{D_{i+1}} G_{i+1}$$

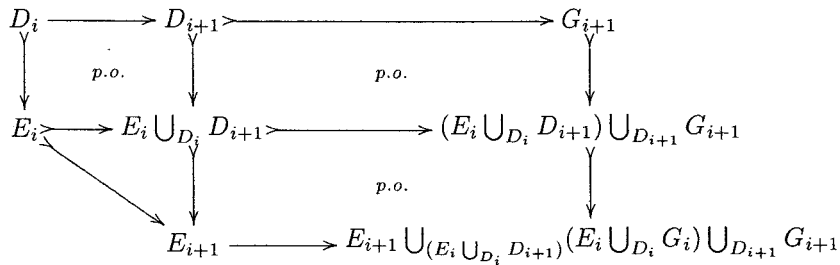
son cofibraciones en  $\tilde{\mathcal{C}}$ . Consideremos las siguientes dos sucesiones de pushouts tomados alrededor del cuadrado conmutativo (1):



y



Ambos producen el mismo objeto. Esto demuestra que  $(E_i \cup_{D_i} G_i) \cup_{G_i} G_{i+1}$ ,  $(E_i \cup_{D_i} G_i) \cup_{G_i} G_{i+1}$  y  $E_i \cup_{D_i} G_{i+1}$  son isomorfos. Al tomar un pushout más en el segundo diagrama obtenemos el siguiente diagrama:



el cual demuestra que  $E_{i+1} \cup_{(E_i \cup_{D_i} D_{i+1})} (E_i \cup_{D_i} G_i) \cup_{D_{i+1}} G_{i+1}$  es isomorfo a  $E_{i+1} \cup_{D_{i+1}} G_{i+1}$ .

La propiedad universal de los pushouts aplicada a estos diagramas demuestra que el morfismo natural

$$(E_i \cup_{D_i} G_i) \cup_{G_i} G_{i+1} \longrightarrow E_{i+1} \cup_{D_{i+1}} G_{i+1}$$

es isomorfo a la composición

$$\begin{array}{ccc} (E_i \cup_{D_i} G_i) \cup_{G_i} G_{i+1} & & \\ \downarrow \cong & & \\ (E_i \cup_{D_i} D_{i+1}) \cup_{D_{i+1}} G_{i+1} & \longrightarrow & E_{i+1} \cup_{(E_i \cup_{D_i} D_{i+1})} (E_i \cup_{D_i} G_i) \cup_{D_{i+1}} G_{i+1} \\ & & \downarrow \cong \\ & & E_{i+1} \cup_{D_{i+1}} G_{i+1} \end{array}$$

y que el morfismo  $E_i \cup_{D_i} G_i \rightarrow E_{i+1} \cup_{D_{i+1}} G_{i+1}$  coincide salvo isomorfismos con la composición del diagrama anterior con

$$E_i \cup_{D_i} G_i \longrightarrow (E_i \cup_{D_i} G_i) \cup_{G_i} G_{i+1}$$

y, por tanto, es una cofibración.

Aún tenemos que demostrar que los morfismos correspondientes a los cocientes están en  $\mathcal{D}^+$ . Para ello es suficiente demostrar que los cocientes  $(E_{i+1} \cup_{D_{i+1}} G_{i+1}) / (E_i \cup_{D_i} G_i)$  y  $E_{i+1} / E_i \cup_{(D_{i+1}/D_i)} G_{i+1} / G_i$  son isomorfos. Esto se sigue de la comparación de los distintos pushouts que se pueden obtener a partir del diagrama gracias al lema 5.1.5:

$$\begin{array}{ccccc} G_{i+1} & \longleftarrow & \langle G_i \rangle & \longrightarrow & \star \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ D_{i+1} & \longleftarrow & \langle D_i \rangle & \longrightarrow & \diamond \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E_{i+1} & \longleftarrow & \langle E_i \rangle & \longrightarrow & \star \end{array}$$

Más explícitamente, el objeto  $(E_{i+1} \cup_{D_{i+1}} G_{i+1}) / (E_i \cup_{D_i} G_i)$  se obtiene al tomar el pushout de los pushouts de las columnas, mientras que  $E_{i+1} / E_i \cup_{(D_{i+1}/D_i)} G_{i+1} / G_i$  se obtiene al considerar las filas.

Los axiomas de las equivalencias débiles no son difíciles de comprobar. Los isomorfismos de  $\tilde{\mathcal{C}}$  están trivialmente en  $v\tilde{\mathcal{C}}$ . El axioma *weq2* en 1.7.1, llamado 'gluing lemma', se satisface trivialmente para  $v\tilde{\mathcal{C}}$  puesto que nivel a nivel el axioma se satisface en  $\mathcal{C}$ . Por las mismas razones, el axioma de saturación y extensión son satisfechos por  $v\tilde{\mathcal{C}}$  ya que  $\mathcal{C}$  los satisface.

Pasamos finalmente a observar que el functor cilindro de  $\mathcal{C}$  induce uno en  $\tilde{\mathcal{C}}$ . En efecto, dado un morfismo:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \star = C_{-1} & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & C_{n-1} & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & C_{n+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_{-1} & & & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n+1} & & \\ \star = D_{-1} & \longrightarrow & D_0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & D_{n-1} & \longrightarrow & D_n & \longrightarrow & D_{n+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

asociamos la sucesión eventualmente estacionaria dada por la siguiente sucesión de objetos  $T(f)_i = T(f_{i-1}) \cup_{C_{i-1} \vee D_{i-1}} (C_i \vee D_i)$  conectados con los morfismos naturales que describiremos más abajo. Tenemos para cada  $i$ , el siguiente diagrama gracias a la exactitud del functor cilindro de  $\mathcal{C}$  en *cy11* 1.7.9:

$$\begin{array}{ccc} C_{i-1} \vee D_{i-1} & \longrightarrow & C_i \vee D_i & \quad (I) \\ & \searrow p.o. & \downarrow & \\ & & T(f)_{i-1} & \\ & \swarrow & \downarrow & \\ T(f_{i-1}) & \longrightarrow & T(f_i) & \\ & \searrow & \downarrow & \\ \Sigma C_{i-1} & \longrightarrow & \Sigma C_i & \end{array}$$

el cual puede ser integrado en el siguiente diagrama de pushouts:

$$\begin{array}{ccccccc} & & (C_1/C_0) \vee (D_1/D_0) & & (C_2/C_1) \vee (D_2/D_1) & & (C_3/C_2) \vee (D_3/D_2) \\ & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow \\ T(f)_0 & \longrightarrow & C_1 \vee D_1 & \longrightarrow & C_2 \vee D_2 & \longrightarrow & C_3 \vee D_3 & \longrightarrow & \dots \\ \parallel & & \downarrow p.o. & & \downarrow p.o. & & \downarrow p.o. & & \\ C_0 \vee D_0 & \longrightarrow & C_1 \vee D_1 & \longrightarrow & C_2 \vee D_2 & \longrightarrow & C_3 \vee D_3 & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow p.o. & & \downarrow p.o. & & \downarrow p.o. & & \\ T(f)_0 & \longrightarrow & T(f)_1 & \longrightarrow & P_{1,2} & \longrightarrow & P_{1,3} & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow p.o. & & \downarrow p.o. & & \downarrow p.o. & & \\ \Sigma C_0 & \longrightarrow & T(f)_1 & \longrightarrow & T(f)_2 & \longrightarrow & P_{2,3} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow p.o. & & \downarrow & & \\ & & \Sigma(C_1/C_0) & \longrightarrow & T(f)_2 & \longrightarrow & T(f)_3 & \longrightarrow & \dots \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & \Sigma(C_2/C_1) & \longrightarrow & T(f)_3 & \longrightarrow & \dots \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & \Sigma(C_3/C_2) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

donde  $\Sigma(C_i/C_{i-1})$  son las cofibras de las cofibraciones  $T(f)_i \longrightarrow T(f_i)$  por el lema 5.1.2 aplicado al diagrama I y  $(C_{i+1} \vee C_i)/(D_{i+1} \vee D_i)$  es la cofibra de  $T(f_i) \longrightarrow T(f)_{i+1}$  por las propiedades de los diagramas pushout. Además, para

cada  $i$ , tenemos

$$\begin{array}{ccc} T(f)_i & \xrightarrow{\quad} & P_{i,i+1} \\ \downarrow & \searrow^{p.o.} & \downarrow \\ T(f)_i & \xrightarrow{\quad} & T(f)_{i+1} \end{array}$$

del cual se deduce que  $T(f)_{i+1}/T(f)_i$  es isomorfo a  $\Sigma C_i/C_{i-1} \vee C_{i+1}/C_i \vee D_{i+1}/D_i$  por el lema 5.1.3. Esto es un objeto de  $\mathcal{D}^+$  porque  $C_{i+1}/C_i$  y  $D_{i+1}/D_i$  están en  $\mathcal{D}^+$  y el functor suspensión es cerrado en  $\mathcal{D}^+$ . Así pues el functor cilindro está bien definido. Claramente  $v\tilde{\mathcal{C}}$  satisface el axioma del cilindro. El axioma *cyl2* es trivial sólo *cyl1* requiere justificación. Hemos de comprobar que el functor:

$$Ar\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow F_1\mathcal{C}$$

$$(\{A_i\} \xrightarrow{f} \{B_i\}) \mapsto (\{A_i\} \vee \{B_i\} \xrightarrow{j_1 \vee j_2} T(f))$$

es exacto. Es obvio que el objeto cero es enviado al objeto cero. Veamos que envía cofibraciones en cofibraciones. Sea

$$\begin{array}{ccc} \{A_i\} & \xrightarrow{\quad} & \{A'_i\} \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ \{B_i\} & \xrightarrow{\quad} & \{B'_i\} \end{array}$$

una cofibración en  $Ar\tilde{\mathcal{C}}$ . Hemos de comprobar que la aplicación inducida

$$\begin{array}{ccc} \{A_i\} \vee \{B_i\} & \xrightarrow{\quad} & \{A'_i\} \vee \{B'_i\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(f) & \xrightarrow{\quad} & T(g) \end{array}$$

es una cofibración en  $F_1\tilde{\mathcal{C}}$ . Es claro que el morfismo  $\{A_i\} \vee \{B_i\} \rightarrow \{A'_i\} \vee \{B'_i\}$  es una cofibración. Sólo queda demostrar que el morfismo natural del objeto pushout  $P = T(f) \cup_{(\{A_i\} \vee \{B_i\})} (\{A'_i\} \vee \{B'_i\})$  a  $T(g)$  es una cofibración. Esto requiere la comprobación de que:

- a) para todo  $i \geq 0$ , el morfismo  $P_i \rightarrow T(g)_i$  es una cofibración, y que
- b) para todo  $i \geq 0$ , el morfismo natural  $Q_i \rightarrow T(g)_i$  en el siguiente diagrama es una cofibración.

$$\begin{array}{ccc} P_{i-1} & & P_i \\ \parallel & & \parallel \\ T(f)_{i-1} \cup_{(\{A_{i-1}\} \vee \{B_{i-1}\})} (\{A'_{i-1}\} \vee \{B'_{i-1}\}) & \xrightarrow{\quad} & T(f)_i \cup_{(\{A_i\} \vee \{B_i\})} (\{A'_i\} \vee \{B'_i\}) \\ \downarrow & \searrow^{p.o.} & \downarrow \\ T(g)_{i-1} & \xrightarrow{\quad} & T(g)_i \\ & \nearrow & \searrow \\ & Q_i & \end{array}$$

Primero comprobamos a). Como el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A_{i-1} & \longrightarrow & B_{i-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A'_{i-1} & \longrightarrow & B'_{i-1} \end{array}$$

es una cofibración en  $Ar\mathcal{C}$  entonces la exactitud del funtor cilindro de  $\mathcal{C}$  implica que

$$T(f_{i-1}) \cup_{(A_{i-1} \vee B_{i-1})} (A'_{i-1} \vee B'_{i-1}) \twoheadrightarrow T(g_{i-1})$$

es una cofibración. Aplicando el lema 5.1.4 al diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & A'_{i-1} \vee B'_{i-1} & \twoheadrightarrow & T(g_{i-1}) \\ & \nearrow & \downarrow & & \nearrow \\ A_{i-1} \vee B_{i-1} & \twoheadrightarrow & T(f_{i-1}) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ A_i \vee B_i & \twoheadrightarrow & A'_i \vee B'_i & & \end{array}$$

obtenemos que

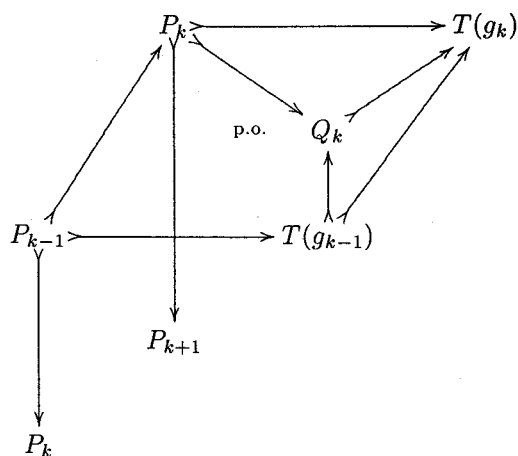
$$\begin{array}{ccc} T(f_i) \twoheadrightarrow P_i = T(f_i) \cup_{(A_i \vee B_i)} (A'_i \vee B'_i) \twoheadrightarrow T(g_i) \\ \uparrow \qquad \qquad \qquad \text{p.o.} \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ P_{i-1} \twoheadrightarrow T(g_{i-1}) \end{array}$$

lo cual demuestra a) y además  $T(g)_i \cong T(g_{i-1}) \cup_{P_{i-1}} P_i$ .

Probaremos b) por inducción en  $i \geq 0$ . Para  $i = 0$ , hemos de demostrar que  $Q_0 \twoheadrightarrow T(g)_0$  es una cofibración. Pero  $Q_0 = \star \cup_{\star} (T(f)_0 \cup_{(A_0 \vee B_0)} (A'_0 \vee B'_0))$  por definición, donde  $T(f)_0 = A_0 \vee B_0$ . Por tanto,  $Q_0 = A'_0 \vee B'_0$  y también  $T(g)_0 = A'_0 \vee B'_0$  siendo el morfismo en cuestión la identidad, lo cual demuestra el resultado para  $i = 0$ . Supongamos el resultado cierto para  $i = k$  y demostrémoslo



para  $i = k + 1$ . Así pues, podemos aplicar el lema 5.1.4 al siguiente diagrama:



ya que la hipótesis de inducción nos da que  $Q_k \xrightarrow{\quad} T(g_k)$  es una cofibración. Como vimos en la demostración de a),  $T(g)_i \cong T(g_{i-1}) \cup_{P_{i-1}} P_i$  para todo  $i \geq 0$ . Obtenemos pues que  $Q_{k+1} \xrightarrow{\quad} T(g)_{k+1}$  es una cofibración. El morfismo  $Q_{k+1} \xrightarrow{\quad} T(g_{k+1})$  está definido de forma única por los morfismos naturales  $P_{k+1} \xrightarrow{\quad} T(g_{k+1})$  y  $T(g_k) \xrightarrow{\quad} T(g_{k+1})$ . Estos dos morfismos se pueden factorizar de forma única como  $P_{k+1} \xrightarrow{\quad} T(g)_{k+1} \xrightarrow{\quad} T(g_{k+1})$  y  $T(g)_k \xrightarrow{\quad} T(g)_{k+1} \xrightarrow{\quad} T(g_{k+1})$ , respectivamente, ya que  $T(g)_i = P_i \cup_{P_{i-1}} T(g_{i-1})$  para  $i = k, k+1$ . Entonces, nuestro morfismo se puede escribir como la composición  $Q_{k+1} \xrightarrow{\quad} T(g)_{k+1} \xrightarrow{\quad} T(g_{k+1})$  siendo pues una cofibración.  $\square$

NOTA 5.1.7.

- a) Obsérvese que el functor suspension de  $\tilde{C}$  está dado por  $\Sigma\{C_i\} = \{\Sigma C_{i-1}\}$ .
- b) De manera análoga a la demostración de 5.1.6 se puede comprobar que el triple  $w\tilde{C} = (\tilde{C}, \text{co}\tilde{C}, w\tilde{C})$  es una categoría de Waldhausen con functor cilindro que verifica los axiomas de saturación y extensión aunque no satisface el axioma del cilindro para dicho functor cilindro.

### 5.2. La K-teoría de las categorías estacionarias

DEFINICIÓN 5.2.1. Sea  $\mathcal{D}^+$  una subcategoría de Waldhausen de  $\mathcal{C}$ . Diremos que  $\mathcal{C}$  satisface la propiedad (D) con respecto a  $\mathcal{D}^+$  si dado cualquier objeto  $C$  de  $\mathcal{C}$  existe una sucesión eventualmente estacionaria:

$$\star = C_{-1} \xrightarrow{\quad} C_0 \xrightarrow{\quad} C_1 \xrightarrow{\quad} \dots \xrightarrow{\quad} C_{n-1} \xrightarrow{\quad} C_n \equiv C_{n+1} \equiv \dots$$

de cofibraciones en  $\mathcal{C}$  tales que  $C_i/C_{i-1}$  son objetos de  $\mathcal{D}^+$ , para  $i \geq 0$  y el objeto al cual estabiliza es  $C$ .

PROPOSICIÓN 5.2.2. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de Waldhausen que verifica la propiedad (D) con respecto a una subcategoría de Waldhausen suya  $\mathcal{D}^+$ . Entonces el

funtor  $F : v\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow w\mathcal{C}$  inducido por la siguiente definición sobre los objetos:

$$F \left( \star = C_{-1} \twoheadrightarrow C_0 \xrightarrow{\quad} C_1 \xrightarrow{\quad} \cdots \xrightarrow{\quad} C_n \equiv C_{n+1} \equiv \cdots \right) = C_\infty$$

es un funtor exacto que induce una equivalencia de homotopía de  $K$ -teorías.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que la estructura de categoría de Waldhausen en  $\tilde{\mathcal{C}}$  viene dada nivel a nivel, es obvio que  $F$  envía el objeto cero al objeto cero, cofibraciones a cofibraciones, pushouts a pushouts y equivalencias débiles a equivalencias débiles. En otras palabras,  $F$  es un funtor exacto. Puesto que  $w\mathcal{C}$  y  $v\tilde{\mathcal{C}}$  son categorías de Waldhausen con funtor cilindro que satisfacen el axioma de saturación y extensión, así como el del cilindro, 5.1.6, bastará comprobar las hipótesis del teorema de aproximación, 1.7.13, para demostrar que  $F$  induce una equivalencia de homotopía entre sus  $K$ -teorías. La propiedad **app1**) se satisface trivialmente por la propia definición de  $v\tilde{\mathcal{C}}$ . La propiedad **app2'**) es más ardua de demostrar. Sea  $\{C_n\}$  un objeto de  $\tilde{\mathcal{C}}$  y  $x : F(\{C_n\}) = C_\infty \rightarrow D$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Denotemos por  $\{D_n\}$  la sucesión estacionaria dada por las hipótesis iniciales de  $\mathcal{C}$  tal que  $D_\infty = D$ . Podemos suponer que ambas sucesiones se estabilizan en el mismo índice  $n$ . El objetivo es llenar el siguiente diagrama con morfismos verticales  $C_i \rightarrow D_i$ .

$$\begin{array}{ccccccccccc} \star = C_{-1} & \twoheadrightarrow & C_0 & \xrightarrow{i_0} & C_1 & \xrightarrow{i_1} & \cdots & \twoheadrightarrow & C_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & C_n = \dots \\ & & & & & & & & & & \downarrow x \\ \star = D_{-1} & \twoheadrightarrow & D_0 & \xrightarrow{i'_0} & D_1 & \xrightarrow{i'_1} & \cdots & \twoheadrightarrow & D_{n-1} & \xrightarrow{i'_{n-1}} & D = D_n = \dots \end{array}$$

Para cada  $r$  con  $0 \leq r \leq n$ , sea  $x_r : C_r \rightarrow D$  la composición  $x \circ i_{n-1} \circ \cdots \circ i_{r+1} \circ i_r$ . Aplicamos el funtor cilindro de  $\mathcal{C}$  a  $x_r$  y obtenemos la siguiente sucesión cofibrada en  $\mathcal{C}$ :

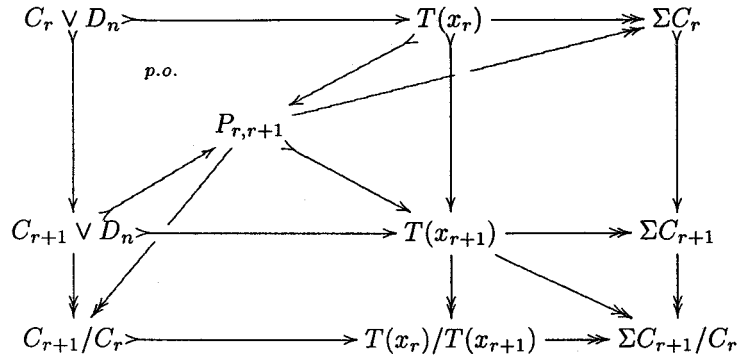
$$C_r \vee D_n \xrightarrow{j_r} T(x_r) \twoheadrightarrow \Sigma C_r.$$

Obsérvese que como objetos de  $Ar\mathcal{C}$ , este diagrama muestra que:

$$\begin{array}{ccc} C_r & \xrightarrow{i_r} & C_{r+1} \\ \downarrow x_r & & \downarrow x_{r+1} \\ D & \equiv & D \end{array}$$

es una cofibración en la estructura natural de categoría de Waldhausen para  $Ar\mathcal{C}$ , véase [Wal85]. La exactitud del funtor cilindro y el lema 5.1.2 nos da el siguiente

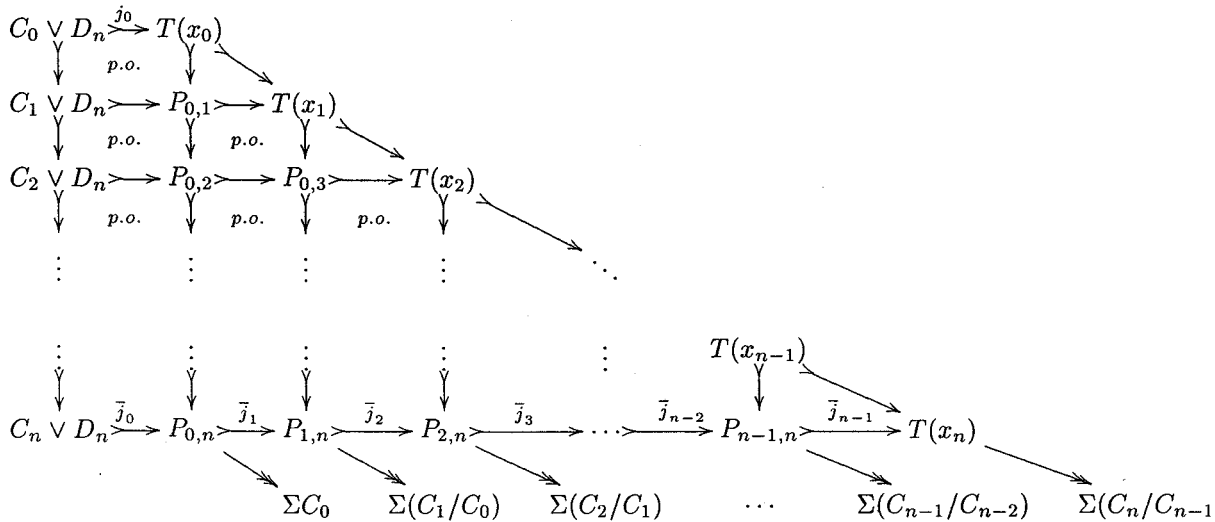
diagrama conmutativo:



Tomando subsiguientes pushouts obtenemos  $P_{r,r+q} = T(x_r) \cup_{C_r \vee D_n} (C_{r+q} \vee D_n)$ , para  $q \geq 1$ , el cual por la unicidad de pushouts es también isomorfo a  $P_{r,r+(q-1)} \cup_{C_{r+(q-1)} \vee D_n} (C_{r+1} \vee D_n)$ . En particular, la propiedad de pushout nos da la siguiente sucesión cofibrada

$$P_{r,r+1} \longrightarrow P_{r,r+2} \longrightarrow C_{r+2}/C_{r+1}.$$

Podemos ensamblar esto en un diagrama mayor que genera el diagrama completo:



donde  $\Sigma(C_i/C_{i-1})$  es la cofibra de  $P_{i-1,n} \longrightarrow P_{i,n}$  o equivalentemente de  $\bar{j}_i$ .

Podemos describir entonces el morfismo  $x' : \{C_i\} \rightarrow \{C'_i\}$  de  $\tilde{\mathcal{C}}$ :

$$\begin{array}{ccccccc} \star & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & C_n \xlongequal{\quad} C_n \xlongequal{\quad} \dots \\ & & \downarrow (1,0) & & & & \downarrow (1,0) & & & & \downarrow & & C_n \xlongequal{\quad} C_n = \dots \\ \star & \longrightarrow & C_0 \vee D_0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & C_n \vee D_n \xrightarrow{\bar{j}_0} P_{0,n} \xrightarrow{\bar{j}_1} \dots & \longrightarrow & P_{n-1,n} \xrightarrow{\bar{j}_{n-1}} T(x_n) = \dots \end{array}$$

donde las flechas verticales sin nombre son las composiciones obvias. Es obvio que  $F(x') = j_0 : C_n = C_\infty \longrightarrow T(x_n) = C'_\infty$  con  $C'_\infty = T(x_n) \xrightarrow{p} D$ , una equivalencia débil, y  $x = p \circ j_0$  como queríamos.  $\square$

Consideremos ahora la subcategoría (no necesariamente llena),  $\tilde{\mathcal{D}}^+ \subseteq \tilde{\mathcal{C}}$ , de sucesiones de cofibraciones eventualmente estacionarias:

$$\star = D_{-1} \twoheadrightarrow D_0 \twoheadrightarrow D_1 \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow D_{n-1} \twoheadrightarrow D_n \equiv D_{n+1} \equiv \cdots$$

en  $\mathcal{D}^+$  tal que  $D_i/D_{i-1}$  son objetos de  $\mathcal{D}^+$  para  $i \geq 0$ . Obsérvese que  $v\tilde{\mathcal{D}}^+$  es subcategoría de Waldhausen de  $v\tilde{\mathcal{C}}$  y que el functor inclusión induce un functor exacto de categorías de Waldhausen,  $i : v\tilde{\mathcal{D}}^+ \rightarrow v\tilde{\mathcal{C}}$ . Más aún, la categoría  $w\mathcal{D}^+$  puede ser considerada como una subcategoría de Waldhausen de la categoría de Waldhausen  $v\tilde{\mathcal{D}}^+$  al identificarla con las sucesiones constantes.

Denotemos por  $k : w\mathcal{D}^+ \hookrightarrow v\tilde{\mathcal{D}}^+$  el functor exacto dado por la inclusión natural, más exactamente  $k(D) = \{ \star \twoheadrightarrow D = D = \dots \}$  y por  $G : v\tilde{\mathcal{D}}^+ \rightarrow w\mathcal{D}^+$  al functor exacto inducido por la proyección sobre el objeto estable, más exactamente  $G(\star \twoheadrightarrow D_0 \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow D_n = D_{n+1} = \dots) = D_\infty = D_n$ . Está claro que  $G \circ k = 1_{w\mathcal{D}^+}$ , por tanto:

LEMA 5.2.3. *El functor  $k$  es una inversa homotópica a derecha de  $G$  a nivel de  $K$ -teoría.*

PROPOSICIÓN 5.2.4. *El functor proyección  $G : v\tilde{\mathcal{D}}^+ \rightarrow w\mathcal{D}^+$  induce una equivalencia de homotopía de  $K$ -teorías.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que ambas categorías son categorías de Waldhausen con functor cilindro y satisfacen los axiomas del cilindro, saturación y extensión, tan sólo hemos de comprobar que las propiedades del teorema de aproximación en 1.7.13 se satisfacen. La propiedad **app1**) se satisface trivialmente por la propia definición de equivalencia débil en  $v\tilde{\mathcal{D}}^+$ . Ahora comprobamos **app2'**). Sea  $\{D_n\}$  un objeto de  $\tilde{\mathcal{D}}^+$  y  $x : F(\{D_n\}) = D_\infty \rightarrow D$  un morfismo de  $\mathcal{D}^+$ . Si  $\{D_n\} \equiv \{ \star \twoheadrightarrow D_0 \xrightarrow{i_0} D_1 \xrightarrow{i_1} \dots \xrightarrow{i_{n-1}} D_n = D_{n+1} = \dots \}$  entonces definimos  $x_r = x \circ i_n \circ \dots \circ i_r$ , para  $r \geq 0$ , donde  $n$  es el índice al cual se estabiliza la sucesión. Podemos definir un morfismo  $\bar{x} : \{D_n\} \rightarrow k(D)$  tal y como indicamos en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccccc} \star & \twoheadrightarrow & D_0 & \xrightarrow{i_0} & D_1 & \xrightarrow{i_1} & \dots \xrightarrow{i_{n-1}} & D_n & \equiv & D_{n+1} & \equiv & \dots \\ & & \downarrow x_0 & & \downarrow x_1 & & & \downarrow x_n & & \downarrow x_{n+1} & & \\ \star & \twoheadrightarrow & D & \equiv & D & \equiv & \dots & \equiv & D & \equiv & D & \equiv & \dots \end{array}$$

Está claro que  $1_D \circ F(\bar{x}) = x$  lo cual prueba el resultado. □

Como consecuencia de esta proposición y del lema 5.2.3 tenemos:

COROLARIO 5.2.5. *El functor exacto dado por la inclusión  $k : w\mathcal{D}^+ \hookrightarrow v\tilde{\mathcal{D}}^+$  induce una equivalencia de homotopía de  $K$ -teorías.*

PROPOSICIÓN 5.2.6. *Sea  $i : v\tilde{\mathcal{D}}^+ \rightarrow v\tilde{\mathcal{C}}$  el functor exacto inducido por la inclusión, donde  $\mathcal{C}$  satisface la propiedad (D) con respecto a  $\mathcal{D}^+$ . Entonces, el functor  $i$  induce una equivalencia de homotopía de  $K$ -teorías.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada  $n \geq 0$ , sean  $v\tilde{\mathcal{D}}_n^+$  y  $v\tilde{\mathcal{C}}_n$  las subcategorías llenas de  $v\tilde{\mathcal{D}}^+$  y  $v\tilde{\mathcal{C}}$ , respectivamente, dada por aquellos objetos que estabilizan en el término con índice  $\leq n$ . Demostraremos que para cada  $n \geq 0$ ,  $i_n : v\tilde{\mathcal{D}}_n^+ \rightarrow v\tilde{\mathcal{C}}_n$ , la correspondiente restricción del funtor exacto  $i : v\tilde{\mathcal{D}}^+ \rightarrow v\tilde{\mathcal{C}}$ , induce una equivalencia de homotopía de  $K$ -teorías. Entonces, por 1.4.3, como  $i = \lim_{n \rightarrow +\infty} i_n : v\tilde{\mathcal{D}}^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} v\tilde{\mathcal{D}}_n^+ \rightarrow v\tilde{\mathcal{C}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} v\tilde{\mathcal{C}}_n$ , podemos concluir el resultado. Demostraremos esto por inducción.

Para  $n = 0$ , es obvio pues  $i_0 : v\tilde{\mathcal{D}}_0^+ = w\mathcal{D}^+ = v\tilde{\mathcal{C}}_0$  es la identidad.

Para  $n = 1$ , consideramos  $i_1 : v\tilde{\mathcal{D}}_1^+ \rightarrow v\tilde{\mathcal{C}}_1$  y definimos su inversa homotópica a nivel de  $K$ -teoría. Dado un objeto  $\{C_i\}$  de  $v\tilde{\mathcal{C}}_1$ , existe la siguiente sucesión exacta de cofibra en  $v\tilde{\mathcal{C}}$ :

$$\begin{array}{ccccccc} \star & \longrightarrow & C_0 & \longlongequal{\quad} & C_0 & \longlongequal{\quad} & C_0 & \longlongequal{\quad} & \dots \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \star & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & C_1 & \longlongequal{\quad} & C_1 & \longlongequal{\quad} & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \star & \longrightarrow & \star & \longrightarrow & C_{10} & \longlongequal{\quad} & C_{10} & \longlongequal{\quad} & \dots \end{array}$$

donde  $C_{10} = C_1/C_0$ . Esto define la sucesión de funtores exactos,

$$f'_1 \longrightarrow f_1 \twoheadrightarrow f''_1 : v\tilde{\mathcal{C}}_1 \rightarrow v\tilde{\mathcal{C}}_1,$$

dadas por  $f_1 = id_{v\tilde{\mathcal{C}}_1}$ ,

$$f'_1(\{C_n\}) = \{ \star \longrightarrow C_0 = C_0 = C_0 = \dots \}$$

y

$$f''_1(\{C_n\}) = \{ \star = \star \longrightarrow C_{10} \longlongequal{\quad} C_{10} \longlongequal{\quad} \dots \}.$$

El hecho de que esta sucesión, así como las que definamos más adelante, sea una sucesión de funtores exactos se demuestra de la misma forma que en [Wal85, lema 1.1.2 y lema 1.1.4] se muestra que los funtores  $s$ ,  $t$  y  $q$  de  $F_1\mathcal{C}$  (y los similares para  $F_n\mathcal{C}$ ) son sucesión exacta de funtores. El teorema de aditividad, 1.7.7, implica que al pasar a  $K$ -teoría las aplicaciones inducidas por  $f_1 = id_{v\tilde{\mathcal{C}}_1}$  y  $f'_1 \vee f''_1$  son homotópicas. Pero  $f'_1 \vee f''_1(\{C_n\}) = \{ \star \longrightarrow C_0 \longrightarrow C_0 \vee C_{10} \longlongequal{\quad} \dots \}$  tiene su imagen en  $v\tilde{\mathcal{D}}^+$ . Por tanto  $f'_1 \vee f''_1$  puede ser factorizado como  $i_1 \circ j_1$  donde  $j_1 : v\tilde{\mathcal{C}}_1 \rightarrow v\tilde{\mathcal{D}}^+$  está dado por  $j_1(\{C_n\}) = \{ \star \longrightarrow C_0 \longrightarrow C_0 \vee C_{10} \longlongequal{\quad} \dots \}$ . Esto demuestra que  $j_1$  es una inversa homotópica por la derecha a  $i_1$  a nivel de  $K$ -teoría.

De forma similar, dado un objeto  $\{D_n\}$  de  $v\tilde{\mathcal{D}}^+_1$ , existe la siguiente sucesión exacta  $v\tilde{\mathcal{D}}^+_1$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 * & \longrightarrow & D_0 & \longleftarrow & D_0 & \longleftarrow & D_0 & \longleftarrow & \dots \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 * & \longrightarrow & D_0 & \longrightarrow & D_1 & \longleftarrow & D_1 & \longleftarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 * & \longrightarrow & * & \longrightarrow & D_{10} & \longleftarrow & D_{10} & \longleftarrow & \dots
 \end{array}$$

Esto define  $g'_1 \longrightarrow g_1 \longrightarrow g''_1 : v\tilde{\mathcal{D}}^+_1 \rightarrow v\tilde{\mathcal{D}}^+_1$ , la sucesión obvia de funtores exactos, dados por  $g_1 = id_{v\tilde{\mathcal{D}}^+_1}$ ,

$$g'_1(\{D_n\}) = \{ * \longrightarrow D_0 = D_0 = D_0 = \dots \}$$

y

$$g''_1(\{D_n\}) \equiv \{ * = * \longrightarrow D_{10} \longleftarrow D_{10} \longleftarrow \dots \}.$$

El teorema de aditividad, 1.7.7, implica que  $g_1 = id_{v\tilde{\mathcal{D}}^+_1}$  es, al pasar a  $K$ -teoría, homotópica a  $g'_1 \vee g''_1$ . Pero  $g'_1 \vee g''_1(\{C_n\}) = \{ * \longrightarrow D_0 \longrightarrow D_0 \vee D_{10} \longleftarrow \dots \}$  coinciden con  $j_1 \circ i_1$ . Por tanto  $j_1 \circ i_1$  es homotópica a  $id_{v\tilde{\mathcal{D}}^+_1}$  y  $j_1$  es una inversa homotópica por la izquierda de  $i_1$  al pasar a  $K$ -teoría. Con esto terminamos la demostración para el caso  $n = 1$ .

Supongamos que para  $n = k$ , el funtor  $j_k : v\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow v\tilde{\mathcal{D}}^+$  dado por  $j_k(\{C_n\}) =$   
 $= \{ * \longrightarrow C_0 \longrightarrow C_0 \vee C_{10} \longrightarrow \dots \longrightarrow C_0 \vee C_{10} \vee \dots \vee C_{k,k-1} = \dots \}$

es una inversa homotópica de  $i_k$  a nivel de  $K$ -teoría. Ahora veremos el resultado para  $n = k + 1$ . Dado un objeto  $\{C_n\}$  de  $v\tilde{\mathcal{C}}_{k+1}$ , existe la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 * & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & C_k & \longrightarrow & C_k & \longleftarrow & \dots \\
 & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel & & \\
 * & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & C_k & \longrightarrow & C_{k+1} & \longleftarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \parallel & & \\
 * & \longleftarrow & * & \longleftarrow & * & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & * & \longrightarrow & C_{k+1,k} & \longleftarrow & \dots
 \end{array}$$

la cual define una sucesión exacta de funtores

$$f'_{k+1} \longrightarrow f_{k+1} \longrightarrow f''_{k+1} : v\tilde{\mathcal{C}}_{k+1} \rightarrow v\tilde{\mathcal{C}}_{k+1}$$

dados por  $f_{k+1} = id_{v\tilde{\mathcal{C}}_{k+1}}$ ,

$$f'_{k+1}(\{C_n\}) = \{ * \longrightarrow C_0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow C_k \longrightarrow C_k \longleftarrow \dots \}$$

y

$$f''_{k+1}(\{C_n\}) = \{ * \longleftarrow * \longleftarrow * \longleftarrow \dots \longleftarrow * \longrightarrow C_{k+1,k} \longleftarrow \dots \}.$$

El teorema de aditividad, 1.7.7, implica que  $f_{k+1} = id_{\tilde{v}\tilde{C}_{k+1}}$  es homotópica a  $f'_{k+1} \vee f''_{k+1}$  al pasar a  $K$ -teoría. Por hipótesis de inducción,  $f'_{k+1}$  es homotópicamente equivalente a  $i_k \circ j_k \circ f'_{k+1}$  en  $K$ -teoría. Entonces  $f_{k+1} = id_{\tilde{v}\tilde{C}_{k+1}}$  es homotópica en  $K$ -teoría a  $(i_k \circ j_k \circ f'_{k+1}) \vee f''_{k+1}$  cuya imagen cae en  $v\tilde{D}^+$ . Por tanto  $i_k \circ j_k \circ f'_{k+1} \vee f''_{k+1}$  factoriza como  $i_{k+1} \circ j_{k+1}$  con  $j_{k+1} : v\tilde{C}_{k+1} \rightarrow v\tilde{D}_{k+1}^+$  dado por

$$j_{k+1}(\{C_n\}) = \{ * \longrightarrow C_0 \longrightarrow C_0 \vee C_{10} \longrightarrow \dots \longrightarrow C_0 \vee C_{10} \vee \dots \vee C_{k+1,k} = \dots \}.$$

Esto demuestra que  $j_{k+1}$  es una inversa homotópica a  $i_{k+1}$  por la derecha cuando pasamos a  $K$ -teoría.

Ahora, dado  $\{D_n\}$  en  $v\tilde{D}_{k+1}^+$ , existe la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{array}{ccccccc} * & \longrightarrow & D_0 & \longrightarrow & D_1 & \longrightarrow & \dots \longrightarrow D_k \equiv D_k \equiv \dots \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ * & \longrightarrow & D_0 & \longrightarrow & D_1 & \longrightarrow & \dots \longrightarrow D_k \longrightarrow D_{k+1} \equiv \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ * & \equiv & * & \equiv & * & \equiv & \dots \equiv * \longrightarrow D_{k+1,k} \equiv \dots \end{array}$$

Esto define la obvia sucesión exacta de funtores

$$g'_{k+1} \longrightarrow g_{k+1} \twoheadrightarrow g''_{k+1} : v\tilde{D}_{k+1}^+ \rightarrow v\tilde{D}_{k+1}^+,$$

dados por  $g_1 = id_{\tilde{v}\tilde{D}_{k+1}^+}$ ,

$$g'_{k+1}(\{D_n\}) = \{ * \longrightarrow D_0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow D_k = D_k = \dots \}$$

y

$$g''_{k+1}(\{D_n\}) = \{ * \equiv * \equiv * \equiv \dots \equiv * \longrightarrow D_{k+1,k} \equiv \dots \}.$$

El teorema de aditividad, 1.7.7, implica que  $g_1 = id_{\tilde{v}\tilde{D}_{k+1}^+}$  es homotópica a  $g'_{k+1} \vee g''_{k+1}$  en  $K$ -teoría. Por hipótesis de inducción y puesto que  $g'_{k+1}(\{D_n\})$  pertenece a  $v\tilde{D}_{k+1}^+$ , tenemos que  $g'_{k+1}$  es homotópica a  $j_k \circ i_k \circ g'_{k+1}$  y, por tanto  $g_{k+1}$  es homotópica a  $(j_k \circ i_k \circ g'_{k+1}) \vee g''_{k+1}$  al pasar a  $K$ -teoría. Pero

$$\begin{aligned} & (j_k \circ i_k \circ g'_{k+1}) \vee g''_{k+1}(\{D_n\}) = \\ & = \{ * \longrightarrow D_0 \longrightarrow D_0 \vee D_{10} \longrightarrow \dots \longrightarrow D_0 \vee D_{10} \vee \dots \vee D_{k+1,k} \equiv \dots \} \end{aligned}$$

coincide con  $j_{k+1} \circ i_{k+1}(\{D_n\})$ . Por tanto  $j_{k+1} \circ i_{k+1}$  es homotópica a  $id_{\tilde{v}\tilde{D}_{k+1}^+}$  y así  $j_{k+1}$  una inversa homotópica izquierda de  $i_{k+1}$  al pasar a  $K$ -teoría. Esto demuestra el resultado para  $n = k + 1$  y termina la inducción.  $\square$

PROPOSICIÓN 5.2.7. *Sea  $w\mathcal{C}$  una categoría de Waldhausen que satisface la propiedad (D) con respecto a  $w\mathcal{D}^+$ , subcategoría de Waldhausen de  $w\mathcal{C}$ . Entonces el functor exacto  $\bar{i} : w\mathcal{D}^+ \hookrightarrow w\mathcal{C}$  dado por la inclusión induce una equivalencia de homotopía enter sus  $K$ -teorías.*

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente comprobar que el funtor  $\bar{i}$  es igual a la composición  $F \circ i \circ k$ , donde  $F$ ,  $i$ , y  $k$  inducen equivalencia de homotopía entre las  $K$ -teorías respectivas como vimos en las proposiciones 5.2.2, 5.2.6 y el corolario 5.2.5, respectivamente.  $\square$

### 5.3. Una aplicación

El siguiente teorema de 'devissage' de Quillen, [Qui72], es ahora consecuencia de 5.2.7.

Sea  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana con un conjunto de objetos de isomorfismos, y  $\mathcal{B}$  una subcategoría no vacía llena y cerrada al tomar subobjetos, objetos cocientes y productos finitos en  $\mathcal{A}$ . Claramente  $\mathcal{B}$  es una categoría abeliana y el funtor inclusión  $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$  es exacto. Más aún, el funtor inducido  $Q\mathcal{B} \rightarrow Q\mathcal{A}$  es una inmersión llena. Aquí  $Q\mathcal{A}$  denota la categoría de Quillen asociada a  $\mathcal{A}$ , véase [Qui72].

TEOREMA 5.3.1 (Devissage). *Sea  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  como más arriba. Supongamos además que para cada objeto  $M$  de  $\mathcal{A}$  tiene una filtración finita*

$$\star = M_0 \twoheadrightarrow M_1 \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow M_n = M$$

tal que  $M_j/M_{j-1}$  está en  $\mathcal{B}$  para cada  $j$ . Entonces el funtor inducida por la inclusión  $Q\mathcal{B} \rightarrow Q\mathcal{A}$  es una equivalencia de homotopía entre sus nervios.

Recordemos que Waldhausen, [Wal85], demostró que la  $K$ -teoría en el sentido de Quillen, [Qui72], de una categoría exacta  $\mathcal{E}$ , esto es, el nervio  $BQ\mathcal{E} = |N.Q\mathcal{E}|$  de la categoría es homotópicamente equivalente a  $K(i\mathcal{E})$ , véase 6.3.2. Por tanto, el teorema 5.3.1 será consecuencia de la siguiente proposición. Recordemos que  $i\mathcal{E}$  y  $qC(\mathcal{E})$  denotan respectivamente la categoría de Waldhausen asociada a una categoría exacta con los isomorfismos como equivalencias débiles y la asociada a la categoría de complejos de cadenas finitas de una categoría exacta con los cuasi-isomorfismos como equivalencias débiles, véase el capítulo 4.

PROPOSICIÓN 5.3.2. *La inclusión  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  induce una equivalencia de homotopía  $K(i\mathcal{B}) \simeq K(i\mathcal{A})$ .*

DEMOSTRACIÓN. Por 4.2.1, sabemos que las inclusiones  $i\mathcal{B} \hookrightarrow qC(\mathcal{B})$  y  $i\mathcal{A} \hookrightarrow qC(\mathcal{A})$  inducen equivalencia de homotopía de  $K$ -teorías. Obsérvese que  $\mathcal{A}$  induce una estructura natural de categoría abeliana sobre  $C(\mathcal{A})$  y  $C(\mathcal{B})$ . Para nuestros propósitos es suficiente comprobar que la inclusión natural  $qC(\mathcal{B}) \hookrightarrow qC(\mathcal{A})$  induce una equivalencia de homotopía de  $K$ -teoría ya que tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} K(qC(\mathcal{B})) \hookrightarrow & K(qC(\mathcal{A})) \\ \uparrow \simeq \downarrow & \uparrow \simeq \downarrow \\ K(i\mathcal{B}) \hookrightarrow & K(i\mathcal{A}) \end{array}$$

Ya sabemos, véase el capítulo 4, que  $C(\mathcal{A})$  y  $C(\mathcal{B})$  tiene funtor cilindro y que satisfacen los axioma del cilindro, saturación y extensión, 1.7.9. Probaremos la propiedad (D) por inducción sobre la longitud del complejo  $C_\#$  de  $C(\mathcal{A})$ . Supongamos que el primer término no nulo de  $C_\#$  es  $C_0$ . El resultado es obvio si  $C_\# = \{\star \rightarrow \dots \rightarrow C_0 \rightarrow \star\}$  tiene un término no nulo a lo más. En efecto, denotemos por  $\{C_0(n)\}$  la sucesión eventualmente estacionaria dada por las hipótesis



iniciales sobre  $\mathcal{C}$  tal que  $C_0(\infty) = C_0$  y que corresponde a la línea horizontal del siguiente diagrama:

$$\star = C_{-1}(0) \twoheadrightarrow C_0(0) \twoheadrightarrow C_0(1) \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow C_0(n-1) \twoheadrightarrow C_0(n) = C_0 = \dots$$

$$\begin{array}{c} \star \\ \downarrow \delta_1 \end{array}$$

Definimos de forma obvia la sucesión estacionaria  $\{C_{\#,i}\}$  de complejos de cadenas finitas en  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  verificando que  $C_{\#, \infty} = C_{\#}$  con  $C_{\#,i} = \{\star \rightarrow \cdots \rightarrow C_i(0) \rightarrow \star\}$  donde  $C_{0,i} = C_i(0)$ .

Supongamos que para todo complejo  $C_{\#}$  de longitud  $k$  se puede encontrar una sucesión eventualmente estacionaria de complejos de cadenas  $\{C_{\#,i}\}$  con  $C_{\#, \infty} = C_{\#}$  y con cocientes en  $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ . Sea ahora  $C_{\#} = \{\star \rightarrow \cdots \rightarrow C_{k+1} \xrightarrow{\delta_{k+1}} \cdots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\delta_1} C_0 \rightarrow \star\}$  un complejo en  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  de longitud  $k+1$ . Ahora consideramos el diagrama:

$$\star = C_{-1}(k) \twoheadrightarrow C_0(k) \twoheadrightarrow C_1(k) \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow C_{n-1}(k) \twoheadrightarrow C_n(k) = C_k = \dots$$

$$\begin{array}{c} C_{k+1} \\ \downarrow \delta_{k+1} \\ \downarrow \pi_n \\ C_n(k)/C_{n-1}(k) \end{array}$$

donde la línea horizontal corresponde a los términos de dimensión  $k$  de una sucesión eventualmente estacionaria asociada al complejo  $C'_{\#}$ , el complejo  $C_{\#}$  truncado en dimensión  $k$ , que existe por hipótesis de inducción. Ahora escribimos la factorización en la categoría abeliana  $\mathcal{A}$

$$\begin{array}{ccccc} \ker f_{k+1} & \twoheadrightarrow & C_{k+1} & \xrightarrow{f_{k+1}} & C_n(k)/C_{n-1}(k) & \twoheadrightarrow & \text{coker } f_{k+1} \\ & & \searrow & & \nearrow & & \\ & & & \text{Im } f_{k+1} & & & \end{array}$$

de la composición  $f_{k+1} = \pi_n \circ \delta_{k+1} : C_{k+1} \rightarrow C_n(k)/C_{n-1}(k)$ . Por la hipótesis sobre  $\mathcal{B}$ ,  $\text{Im } f_{k+1}$  y  $\text{coker } f_{k+1}$  son objetos de  $\mathcal{B}$ . Tenemos pues el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \ker f_{k+1} & \twoheadrightarrow & C_{k+1} & \twoheadrightarrow & \text{Im } f_{k+1} \\ & & \downarrow \delta_{k+1}(n-1) & & \downarrow \delta_{k+1} & & \downarrow \\ \star & \twoheadrightarrow & C_k(0) \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow C_k(n-1) & \xrightarrow{\pi_{n-1}} & C_k(n) & \xrightarrow{\pi_n} & \cdot \\ & & & \searrow & \searrow & & \\ & & & & C_k(n-1)/C_k(n-2) & \twoheadrightarrow & C_k(n)/C_k(n-1) \end{array}$$

Escribimos  $C_{k+1}(n-1) = \ker f_{k+1}$  y  $f_k = \pi_{n-1} \delta_{k+1}(n-1)$ . A continuación repetimos con  $f_k$  los mismos pasos que hicimos con  $f_{k+1}$  y continuamos de esta forma hasta que  $f_0$  y  $C_{k+1}(0)$  sean definidos.

$$\begin{array}{ccccccc} C_{k+1}(0) & \twoheadrightarrow & \cdots & \twoheadrightarrow & C_{k+1}(n-1) & \twoheadrightarrow & C_{k+1}(n) = C_1 = \cdots \\ \downarrow \delta_{k+1}(0) & & & & \downarrow \delta_{k+1}(n-1) & & \downarrow \delta_{k+1}(n) = \delta_{k+1} \\ \star & \twoheadrightarrow & C_k(0) & \twoheadrightarrow & \cdots & \twoheadrightarrow & C_k(n-1) & \twoheadrightarrow & C_k(n) = C_k = \cdots \end{array}$$

Desafortunadamente no estamos seguros de que  $C_{k+1}(0)$  sea un objeto de  $\mathcal{B}$ . Por tanto, en un segundo paso, extendemos esta sucesión. Para  $C_{k+1}(0)$ , por hipótesis,

existe una sucesión eventualmente estacionaria:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(C_{k+1}(0)) \xrightarrow{\mathcal{C}_T} \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(C_{k+1}(0)) \xrightarrow{\mathcal{C}_{T-1}} \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(C_{k+1}(0)) \xrightarrow{\mathcal{C}_T} \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(C_{k+1}(0)) = \dots$$

con  $C_s(C_{k+1}(0)) = C_{k+1}(0)$  for  $s \geq r$ . Escogemos, entonces nuevas sucesiones estacionarias correspondientes a  $C_j$  para  $j \leq k_1$ . Sean  $\overline{C}_{k+1}(i) = C_i(C_{k+1}(0))$  para  $i = -1, \dots, r$  y  $\overline{C}_{k+1}(i) = C_{k+1}(i)$  para  $i \geq r$ ;  $\overline{C}_j(-1) = \star$ ,  $\overline{C}_j(i) = C_j(0)$  para  $i = 0, \dots, r$  y  $\overline{C}_j(i) = C_j(i)$  para  $i \geq r$  y  $\overline{\delta}_j(0) = 0$ ,  $\overline{\delta}_j(i) = \delta_j(0)$  para  $i = 1, \dots, r$  y  $\overline{\delta}_j(i) = \delta_j(i)$  para  $i \geq r$  y para todo  $j \leq k$ .

Está claro que para cualquier  $i \geq 0$ ,  $\overline{\delta}_k(i) \circ \overline{\delta}_{k+1}(i) = 0$  con lo que hemos conseguido aumentar en una dimensión los complejos de cadenas originales y definir una sucesión eventualmente estacionaria de  $\overline{C}(\mathcal{A})$  con cocientes en  $C(\mathcal{B})$  para  $C_{\#}$ . Con esto termina la inducción.  $\square$

## CAPÍTULO 6

### Teorema de Localización

En este capítulo enunciamos y demostramos el teorema principal, 6.1.1, de localización y la fibración homotópica de  $K$ -teorías asociada a éste. Además mostramos algunas aplicaciones de este teorema como la generalización del teorema clásico de localización de Quillen. La estrategia de la demostración consiste en identificar primero las  $K$ -teorías de cada uno de los términos de la sucesión de localización

$$\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$$

con las  $K$ -teorías de sus correspondientes complejos de cadenas dotados de sus cuasi-isomorfismos como equivalencias débiles gracias a 4.2.1:

$$C(\mathcal{A}) \hookrightarrow C(\mathcal{U}) \longrightarrow C(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U})$$

En este punto podemos definir una nueva clase de equivalencias débiles sobre  $C(\mathcal{U})$ , la clase reflejada por el funtor inducido por la localización de los cuasi-isomorfismos en  $C(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U})$ . En 6.1.2, se demuestra que las  $K$ -teorías de  $C(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U})$  y de  $C(\mathcal{U})$  con esta nueva clase de equivalencias débiles son homotópicamente equivalentes. De esta forma, la fibra homotópica del funtor de localización puede ser identificada con la fibra homotópica de  $(C(\mathcal{U}), q) \rightarrow (C(\mathcal{U}), \bar{q})$ , la cual por 1.7.11 es la  $K$ -teoría de  $qC(\mathcal{U})^{\bar{q}}$ . El resultado generalizado de Devissage, 5.2.7, aplicado a la inclusión  $\mathcal{A} \hookrightarrow qC(\mathcal{U})^{\bar{q}}$  demuestra que sus  $K$ -teorías son homotópicamente equivalentes. Con este último paso demostramos que la sucesión

$$\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$$

induce una fibración homotópica de sus  $K$ -teorías.

#### 6.1. Teorema Principal 6.1.1

En esta sección presentamos el Teorema Principal y su demostración. Más explícitamente, se dará una demostración de

**TEOREMA 6.1.1 (Teorema Principal).** *Sea  $\mathcal{U}$  una categoría exacta  $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$  una subcategoría exacta verificando los axiomas 2.2.1. Sea  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  la categoría exacta localizada asociada, 2.2. Entonces el diagrama*

$$\mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{U} \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$$

*induce una fibración, salvo homotopía, entre los correspondientes espectros de sus  $K$ -teorías.*

Consideremos las categorías de complejos finitos de cadenas  $C(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U})$  y  $C(\mathcal{U})$  respectivamente con sus estructuras usuales de categorías con cofibraciones y equivalencias débiles, véase 4. El funtor de localización  $\pi$  induce el siguiente diagrama

de categorías:

$$\begin{array}{ccc} C(\mathcal{U}) & \xrightarrow{C(\pi)} & C(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{U} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}. \end{array}$$

Usaremos tres clases diferentes de equivalencias débiles en  $C(\mathcal{U})$ , que denotamos como sigue:

- isomorfismos en  $C(\mathcal{U})$ , denotados por la letra  $i$ ;
- cuasi-isomorfismos, morfismos que inducen isomorfismos en homología denotados por la letra  $q$ ; recuérdese la definición en el capítulo 4. Usaremos además la letra  $\bar{q}$  para designar los cuasi-isomorfismos de  $C(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U})$ ;
- morfismos de  $C(\mathcal{U})$  cuya imagen por  $\pi$  son cuasi-isomorfismos en  $C(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U})$ , es decir, aquellos morfismos de cadenas de  $C(\mathcal{U})$  que inducen isomorfismos en homología, en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$ . En otras palabras, aquellos cuyos morfismos inducidos en homología, en la categoría  $\mathcal{A}b(\mathcal{U})$ , dimensión a dimensión tienen núcleo y conúcleo en  $\mathcal{A}$ . Esta clase de morfismos se denotará por  $\bar{q}$ . Obsérvese que  $q \subseteq \bar{q}$ .

Una vez fijadas las cofibraciones de  $C(\mathcal{U})$ , denotaremos por  $wC(\mathcal{U})$  una elección de equivalencias débiles en  $C(\mathcal{U})$ , donde  $w$  podría ser:  $i$ ,  $q$ ,  $\bar{q}$  o cualquier otra clase. Aplicando el lema de la fibra genérica de Waldhausen, 1.7.11, al funtor  $qC(\mathcal{U}) \rightarrow \bar{q}C(\mathcal{U})$  inducido por la identidad obtenemos en  $K$ -teoría la sucesión fibrada

$$K(qC(\mathcal{U})\bar{q}) \rightarrow K(qC(\mathcal{U})) \rightarrow K(\bar{q}C(\mathcal{U})).$$

Además tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} i\mathcal{A} & \xrightarrow{\quad} & i\mathcal{U} & \xrightarrow{\pi} & i\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U} \\ \Psi \downarrow & & \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \\ qC(\mathcal{U})\bar{q} & \xrightarrow{\quad} & qC(\mathcal{U}) & \xrightarrow{C(\pi)} & qC(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}) \\ & & & \searrow & \uparrow R \\ & & & & \bar{q}C(\mathcal{U}) \end{array}$$

donde el funtor  $\Psi$  viene definido por  $A \mapsto C_{\#} = (\star \rightarrow \cdots \rightarrow \star \rightarrow A \rightarrow \star \cdots \rightarrow \star)$  con  $C_0 = \star$ ,  $\pi$  es el funtor de localización y el funtor  $R$  es la factorización obvia. Más aún, de acuerdo con 4.2.1 tenemos que las dos flechas verticales de la derecha inducen equivalencias de homotopía entre las correspondientes categorías. Entonces el Teorema Principal, 6.1.1, se obtendrá al aplicar al diagrama anterior las dos proposiciones siguientes.

**PROPOSICIÓN 6.1.2.** *El funtor  $R : \bar{q}C(\mathcal{U}) \rightarrow qC(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U})$  induce una equivalencia de homotopía en  $K$ -teoría.*

La demostración de 6.1.2 se hará en la sección 6.2 que sigue.

**PROPOSICIÓN 6.1.3.** *El funtor  $\Psi : i\mathcal{A} \hookrightarrow qC(\mathcal{U})\bar{q}$  induce en  $K$ -teoría una equivalencia de homotopía.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que el funtor  $\Psi : i\mathcal{A} \longrightarrow q\mathcal{C}(\mathcal{U})^{\bar{q}}$  factoriza por el funtor exacto inducido por la inclusión  $i\mathcal{A} \longrightarrow q\mathcal{C}(\mathcal{A})$ , la cual por el teorema de Thomason, 4.2.1, sabemos que induce una equivalencia de homotopía de  $K$ -teorías.

$$\begin{array}{ccc}
 i\mathcal{A} & \xrightarrow{\Psi} & q\mathcal{C}(\mathcal{U})^{\bar{q}} \\
 & \searrow J & \nearrow K \\
 & q\mathcal{C}(\mathcal{A}) &
 \end{array} \tag{1}$$

Con el objeto de simplificar la notación, escribimos  $w\mathcal{D} = q\mathcal{C}(\mathcal{A})$ ,  $w\mathcal{C} = q\mathcal{C}(\mathcal{U})^{\bar{q}}$  para las correspondientes categorías de Waldhausen. Además definimos la subcategoría,  $\mathcal{D}^+ = \mathcal{D} \vee \mathcal{C}(\mathcal{U})^w \subseteq q\mathcal{C}(\mathcal{U})^{\bar{q}}$ , de objetos y morfismos de  $\mathcal{C}$  que son suma directa de un objeto (o un morfismo) de  $\mathcal{D}$  y de un objeto (o un morfismo) de  $\mathcal{C}(\mathcal{U})^w$ , respectivamente. En otras palabras,  $\mathcal{D}^+$  es la 'suma' de las subcategorías  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{C}(\mathcal{U})^w$ , que es la subcategoría de complejos de cadenas contráctiles. Dotamos  $\mathcal{D}^+$  con la estructura de categoría de Waldhausen coordinada a coordinada por las que  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{C}(\mathcal{U})^w$  tiene. Así el funtor  $K$  del diagrama 1 factoriza por el funtor exacto inducido por la inclusión de  $\mathcal{D}^+$  en  $\mathcal{C}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 w\mathcal{D} & \xrightarrow{K} & w\mathcal{C} \\
 & \searrow L & \nearrow M \\
 & w\mathcal{D}^+ &
 \end{array}$$

Obviamente el funtor  $L$  induce una equivalencia de homotopía de  $K$ -teorías, véase 4.2.3. Sólo queda comprobar que  $M$  induce una equivalencia de homotopía de  $K$ -teorías. Para esto usaremos la proposición 5.2.7. Está claro que  $\mathcal{D}^+$  es una subcategoría de Waldhausen de  $\mathcal{C}$  y que ambas tienen funtor cilindro que satisfacen los axiomas del cilindro, el axioma de saturación y el de extensión. Por tanto, de acuerdo con la proposición 5.2.7 sólo necesitamos comprobar que  $\mathcal{C}$  satisface la propiedad (D) con respecto a  $\mathcal{D}^+$ .

Por la nota 6.2.1, podemos suponer que  $\mathcal{U}$  es cerrado bajo núcleos de epimorfismos de  $Ab(\mathcal{U})$ . Sea  $C_{\#}$  un complejo de cadenas en  $\mathcal{C}(\mathcal{C})$  y supongamos que  $C_k \neq \star$  tan sólo cuando  $0 \leq k \leq r$ . Es decir,

$$C_{\#} = \star \longrightarrow \star \longrightarrow C_r \xrightarrow{\partial_r} \dots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow \star \longrightarrow \star$$

Puesto que el morfismo  $C_0 \rightarrow H_0\mathcal{C}$  es un epimorfismo en  $Ab(\mathcal{U})$ , su núcleo,  $\text{Im } \partial_1$ , está en  $\mathcal{U}$  e  $\text{Im } \partial_1 \twoheadrightarrow C_0 \twoheadrightarrow H_0\mathcal{C}$  es una sucesión exacta corta de  $\mathcal{U}$ . De nuevo, el morfismo  $C_1 \rightarrow \text{Im } \partial_1$  es un epimorfismo de  $Ab(\mathcal{U})$  lo cual implica que  $\ker \partial_1$  es de  $\mathcal{U}$  y que  $\ker \partial_1 \twoheadrightarrow C_1 \twoheadrightarrow \text{Im } \partial_1$  es una sucesión exacta corta de  $\mathcal{U}$ . Ahora repetimos los pasos de más arriba pero una dimensión más alta. (Nótese que  $C_0 = \ker \partial_0$ ). Puesto que  $\ker \partial_1 \rightarrow H_1\mathcal{C}$  es un epimorfismo de  $Ab(\mathcal{U})$ , su núcleo,  $\text{Im } \partial_2$ , es de  $\mathcal{U}$  y  $\text{Im } \partial_2 \twoheadrightarrow \ker \partial_1 \twoheadrightarrow H_1\mathcal{C}$  es una sucesión exacta corta de  $\mathcal{U}$ . Llegados a este punto repetimos los pasos anteriores pero con  $C_2 \rightarrow \text{Im } \partial_2$ . Repitiendo este proceso acabaremos teniendo para cada  $r \geq 0$  las siguientes sucesiones exactas en

$\mathcal{U}$ :

$$\begin{array}{c}
 \text{Im } \partial_{r+1} \longleftarrow C_{r+1} \longleftarrow \ker \partial_{r+1} \\
 \downarrow \\
 \ker \partial_r \\
 \downarrow \\
 H_r C
 \end{array}$$

Ahora pasamos a construir una sucesión estacionaria en  $w\tilde{\mathcal{C}}$

$$\{ * \longrightarrow C(0) \longrightarrow C(1) \longrightarrow \dots \longrightarrow C(2r) = C_{\#} = \dots \}$$

Definimos  $C(2r) = C_{\#}$  y como, gracias a la discusión de más arriba,

$\text{Im } \partial_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow H_0 C$  está en  $\mathcal{C}$ , tenemos la siguiente sucesión exacta corta de complejos de cadenas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 C_r & \xrightarrow{\partial_r} & \dots & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & \text{Im } \partial_1 \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 C_r & \xrightarrow{\partial_r} & \dots & \longrightarrow & C_1 & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 * & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & * & \longrightarrow & H_0 C
 \end{array} \equiv \begin{array}{c} C(2r-1) \\ \downarrow \\ C(2r) \\ \downarrow \\ C(2r)/C(2r-1) \end{array}$$

De esta forma, definimos  $C(2r-1)$  y comprobamos que la cofibra  $C(2r)/C(2r-1)$  está en  $\tilde{\mathcal{D}}^+$ . Como  $\ker \partial_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow \text{Im } \partial_1$  está en  $\mathcal{C}$ , tenemos la siguiente sucesión exacta corta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 C_r & \xrightarrow{\partial_r} & \dots & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & \ker \partial_1 \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 C_r & \xrightarrow{\partial_r} & \dots & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & C_1 \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 * & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & * & \longrightarrow & \text{Im } \partial_1
 \end{array} \equiv \begin{array}{c} C(2r-2) \\ \downarrow \\ C(2r-1) \\ \downarrow \\ C(2r-1)/C(2r-2) \end{array}$$

Esta sucesión define el término  $C(2r-2)$  y demuestra que  $C(2r-1)/C(2r-2)$  está en  $\tilde{\mathcal{D}}^+$  por ser contráctil. En este momento, llegamos a una situación similar a la inicial con  $C_{\#}$ , ya que  $C_0$  se puede considerar como  $\ker \partial_0$ , y podemos repetir los argumentos de más arriba pero una dimensión más alta. En general, para  $k = 0, \dots, r$ , definimos  $C(2(r-k)) \equiv \{ C_r \longrightarrow \dots \longrightarrow C_{k+1} \longrightarrow \ker \partial_k \longrightarrow * \longrightarrow \dots \longrightarrow * \}$  y  $C(2(r-k)-1) \equiv \{ C_r \longrightarrow \dots \longrightarrow C_{k+1} \longrightarrow \text{Im } \partial_{k+1} \longrightarrow * \longrightarrow \dots \longrightarrow * \}$ . Hay dos modelos distintos ( $0 \leq k \leq r$ ):

a) Como  $\text{Im } \partial_{k+1} \twoheadrightarrow \ker \partial_k \twoheadrightarrow H_k C$  está en  $\mathcal{U}$ , tenemos

$$\begin{array}{ccccccc}
 C_r & \xrightarrow{\partial_r} & \dots & \rightarrow & C_{k+2} & \xrightarrow{\partial_{k+2}} & C_{k+1} \twoheadrightarrow \text{Im } \partial_{k+1} \rightarrow * & C(2(r-k)-1) \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 C_r & \xrightarrow{\partial_r} & \dots & \rightarrow & C_{k+2} & \xrightarrow{\partial_{k+2}} & C_{k+1} \rightarrow \ker \partial_k \rightarrow * & \equiv C(2(r-k)) \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 * & \rightarrow & \dots & \rightarrow & * & \rightarrow & * \rightarrow H_k C \rightarrow * & C(2(r-k))/C(2(r-k)-1).
 \end{array}$$

En cuyo caso la cofibra está en  $\mathcal{D}^+$  pues  $H_k(C) \in \mathcal{A}$  por hipótesis.

b) Como  $\ker \partial_{k+1} \twoheadrightarrow C_{k+1} \twoheadrightarrow \text{Im } \partial_{k+1}$  está en  $\mathcal{U}$ , tenemos

$$\begin{array}{ccccccc}
 C_r & \xrightarrow{\partial_r} & \dots & \rightarrow & C_{k+2} & \twoheadrightarrow \ker \partial_{k+1} \rightarrow * & \rightarrow * & C(2(r-(k+1))-1) \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 C_r & \xrightarrow{\partial_r} & \dots & \rightarrow & C_{k+2} & \rightarrow C_{k+1} \rightarrow \text{Im } \partial_{k+1} \rightarrow * & \equiv & C(2(r-k)-1) \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 * & \rightarrow & \dots & \rightarrow & * & \rightarrow \text{Im } \partial_{k+1} = \text{Im } \partial_{k+1} \rightarrow * & & C(2(r-k)-1)/C(2(r-(k+1))-1).
 \end{array}$$

y la cofibra está en  $\mathcal{D}^+$  por ser un complejo contráctil.

Entonces  $C(0) = C(2(r-r)) \equiv \{ * \twoheadrightarrow \dots * \twoheadrightarrow \ker \partial_r = H_r(C_\#) \twoheadrightarrow * \twoheadrightarrow * \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow * \}$

. Esto muestra que

$$* \twoheadrightarrow C(0) \twoheadrightarrow C(1) \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow C(2r-1) \twoheadrightarrow C(2r) = C_\# \equiv \dots$$

es la sucesión estacionaria requerida por el teorema 5.2.7. □

### 6.2. Demostración de la Proposición 6.1.2

Se utilizará repetidamente en la demostración la suposición de que la categoría  $\mathcal{U}$  es cerrada bajo núcleos de sobreyecciones en la categoría abeliana ambiente  $\text{Ab}(\mathcal{U})$  dada por la inmersión de Gabriel-Quillen. Esto no supone pérdida de generalidad ya que siempre podemos reemplazar  $\mathcal{U}$  por la categoría exacta  $\bar{\mathcal{U}}$ , cuya  $K$ -teoría es homotópicamente equivalente a la de  $\mathcal{U}$ , y la cual verifica la condición requerida.

NOTA 6.2.1. Por la proposición 3.2.6 la inclusión  $\mathcal{U} \hookrightarrow \bar{\mathcal{U}}$  induce una equivalencia de homotopía entre sus  $K$ -teorías y por la proposición anterior si  $\mathcal{A}$  localiza a  $\mathcal{U}$  también localiza  $\bar{\mathcal{U}}$ , que satisface la propiedad (P) y por tanto 3.1.2 con lo que, de acuerdo con B.0.6[b)],  $\bar{\mathcal{U}}$  es cerrada bajo núcleos de epimorfismos en  $\text{Ab}(\mathcal{U})$ . De esta forma podemos reemplazar desde el principio a  $\mathcal{U}$  por  $\bar{\mathcal{U}}$ .

Ahora comenzamos con la demostración propiamente dicha. Consideremos el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 qC(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\quad} & \bar{q}C(\mathcal{U}) \\
 \searrow^{C(\pi)} & & \downarrow R \\
 & & qC(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}).
 \end{array}$$

Se afirma que el functor  $R : \bar{q}C(\mathcal{U}) \rightarrow qC(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U})$  induce una equivalencia de homotopías en  $K$ -teoría. Para ello aplicaremos el teorema de aproximación, 1.7.13, lo cual requiere comprobar las condiciones *App 1* y *App 2'* de 1.7.14. En efecto, claramente  $\bar{q}C(\mathcal{U})$  tiene un functor cilindro proveniente de  $C(\mathcal{U})$  que satisface los axiomas

del cilindro y el de saturación ya que  $\bar{q}$  es el reflejo de los cuasi-isomorfismos  $q$  de  $C(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U})$  los cuales satisfacen dicho axioma, véase la sección 4. Más aún, *App 1* se satisface trivialmente por definición de  $\bar{q}$ . Sólo queda comprobar la condición *App 2*'de 1.7.14. Sean pues  $A \in C(\mathcal{U})$ ,  $B \in C(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U})$  y  $x : A \rightarrow B$  un morfismo de complejos en  $C(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U})$ . Debemos encontrar morfismos de complejos de cadenas  $x$  y  $a$  tales que

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{x} & B \\ F(a) \downarrow & \sim \nearrow & \\ A' & & \end{array}$$

el diagrama sea conmutativo, con  $x'$  una equivalencia débil. Para ello definimos un  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo de complejo de cadenas como un morfismo de complejos de cadenas que grado a grado viene dado por  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos. Éstos son isomorfismos en  $C(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U})$  y por tanto son equivalencias débiles. El morfismo  $x$  viene dado por una colección  $\{x_r : A_r \rightarrow B_r\}_{0 \leq r \leq n}$  de morfismos de  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$ . (Estamos suponiendo que  $A_r = 0 = B_r$  para  $r < 0$  y  $r > n$ ). Los morfismos  $x_r$  pueden ser representados en  $\mathcal{U}$  por diagramas  $\{A_r \rightarrow \tilde{\leftarrow} B_r\}$  para todo  $r$ , véase la propiedad iii) en el apéndice A. Como  $B$  es un complejo de cadenas en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$ , sus bordes  $d_r^B : B_r \rightarrow B_{r-1}$  pueden también representarse por diagramas  $\{B_r \tilde{\leftarrow} B_{r-1}\}$  para cada  $r$ . El diagrama completo representando  $x : A \rightarrow B$  en  $\mathcal{U}$  tendrá el siguiente aspecto:

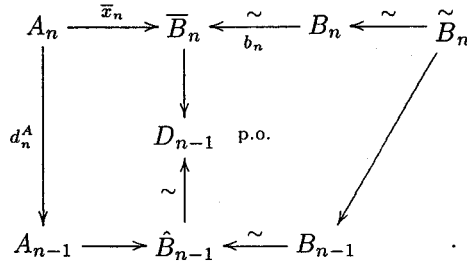
$$\begin{array}{ccccccc} & & \hat{B}_n & & & & (*) \\ & & \parallel & & & & \\ & & A_n & \xrightarrow{\bar{x}_n} & \bar{B}_n & \xleftarrow{\tilde{b}_n} & B_n & \xleftarrow{\tilde{}} & \tilde{B}_n \\ & & \downarrow d_n^A & & \downarrow d_n^B & & \downarrow d_n^B & & \downarrow d_n^B \\ & & A_{n-1} & \longrightarrow & \hat{B}_{n-1} & \xleftarrow{\tilde{}} & B_{n-1} & \xleftarrow{\tilde{}} & \tilde{B}_{n-1} \\ & & \downarrow d_{n-1}^A & & \downarrow d_{n-1}^B & & \downarrow d_{n-1}^B & & \downarrow d_{n-1}^B \\ & & A_{n-2} & \longrightarrow & \hat{B}_{n-2} & \xleftarrow{\tilde{}} & B_{n-2} & \xleftarrow{\tilde{}} & \tilde{B}_{n-2} \\ & & \downarrow d_{n-2}^A & & \downarrow d_{n-2}^B & & \downarrow d_{n-2}^B & & \downarrow d_{n-2}^B \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow d_1^A & & \downarrow d_1^B & & \downarrow d_1^B & & \downarrow d_1^B \\ & & A_0 & \longrightarrow & \hat{B}_0 & \xleftarrow{\tilde{}} & B_0 & & \end{array}$$

Cada uno de los diagramas en (\*) son conmutativos en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$ , como morfismos de  $A_r$  a  $B_{r-1}$ , para cada  $r$ .

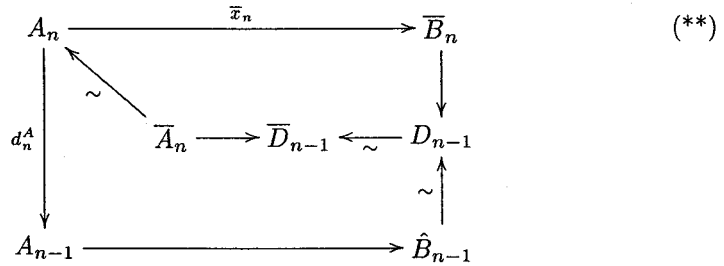
En un primer paso, reemplazaremos  $B$  por un nuevo complejo de cadenas  $\bar{B}$  con  $\bar{B}_n = \hat{B}_n$  y  $x$  por un nuevo morfismo  $\bar{x} : A \rightarrow \bar{B}$  que está realizado por diagramas conmutativos en  $\mathcal{U}$ .



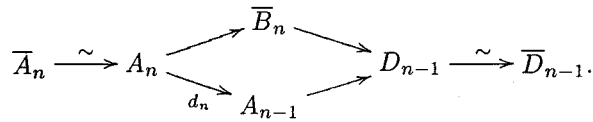
Tomemos push out en la esquina superior derecha del cuadrado en dimensión  $n$ .



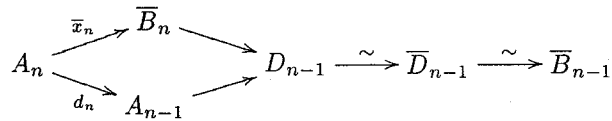
El cuadrado que resulta en la parte de la izquierda es de nuevo un diagrama conmutativo en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  desde  $A_n$  hacia  $D_{n-1}$ . Esta conmutatividad se expresa en  $\mathcal{U}$  por la existencia de un diagrama en  $\mathcal{U}$  como el siguiente:



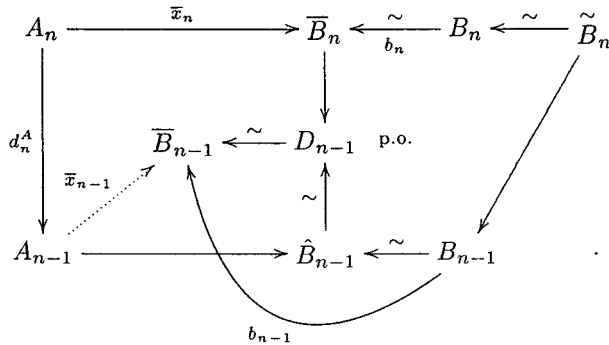
Este diagrama a su vez, véase el Apéndice A, puede ser reescrito como



Por MS3, en Apéndice A, existe un  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo  $\bar{D}_{n-1} \xrightarrow{\sim} \bar{B}_{n-1}$  tal que



es conmutativo en  $\mathcal{U}$ . A partir del diagrama \*\* obtenemos el siguiente diagrama conmutativo en  $\mathcal{U}$



donde  $\bar{x}_{n-1}$  está definido por composición,  $B_n$  es  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfo a  $\bar{B}_n$  mediante  $b_n$  y  $B_{n-1}$  es  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfo a  $\bar{B}_{n-1}$  por la composición indicada en el diagrama de  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos que denotamos  $b_{n-1}$ . Nótese que el siguiente diagrama en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{B}_n & \xleftarrow{\sim} & B_n \\
 \downarrow d_n^{\bar{B}} & & \downarrow d_n^B \\
 \bar{B}_{n-1} & \xleftarrow{\sim} & B_{n-1}
 \end{array}$$

donde  $d_n^{\bar{B}}$  está definido por composición. El diagrama (\*) puede ser substituido, salvo  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos de complejos de cadenas, por el siguiente diagrama en  $\mathcal{U}$  donde el cuadro superior es ahora conmutativo en  $\mathcal{U}$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 A_n & \xrightarrow{\bar{x}_n} & \bar{B}_n & & \\
 d_n^A \downarrow & & d_n^{\bar{B}} \downarrow & & \\
 A_{n-1} & \xrightarrow{\bar{x}_{n-1}} & \bar{B}_{n-1} & \xleftarrow{\sim} & \tilde{B}_{n-1} \\
 d_{n-1}^A \downarrow & & \vdots \downarrow & \swarrow & \swarrow \\
 A_{n-2} & \longrightarrow & \tilde{B}_{n-2} & \xleftarrow{\sim} & \tilde{B}_{n-2} \\
 d_{n-2}^A \downarrow & & \vdots & \swarrow & \swarrow \\
 \vdots & & \vdots & \swarrow & \swarrow \\
 d_1^A \downarrow & & \vdots & \swarrow & \swarrow \\
 A_0 & \longrightarrow & \tilde{B}_0 & \xleftarrow{\sim} & B_0
 \end{array}
 \tag{***}$$

El proceso descrito más arriba puede ser repetido para la dimensión siguiente:

$$\begin{array}{ccccc}
 A_{n-1} & \xrightarrow{\bar{x}_{n-1}} & \bar{B}_{n-1} & \xleftarrow{\sim} & \tilde{B}_{n-1} \\
 d_{n-1}^A \downarrow & & & \swarrow & \swarrow \\
 A_{n-2} & \longrightarrow & \tilde{B}_{n-2} & \xleftarrow{\sim} & B_{n-2}
 \end{array}$$

Notemos que  $\overline{B}_{n-1}$  y el resto de la información en dimensiones mayores es mantenida. El resultado es ahora un diagrama en  $\mathcal{U}$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 A_n & \xrightarrow{\overline{x}_n} & \overline{B}_n & & \\
 d_n^A \downarrow & & d_n^{\overline{B}} \downarrow & & \\
 A_{n-1} & \xrightarrow{\overline{x}_{n-1}} & \overline{B}_{n-1} & & \\
 d_{n-1}^A \downarrow & & d_{n-1}^{\overline{B}} \downarrow & & \\
 A_{n-2} & \xrightarrow{\overline{x}_{n-2}} & \overline{B}_{n-2} & \xleftarrow{\sim} & \widetilde{B}_{n-2} \\
 d_{n-2}^A \downarrow & & \vdots & \swarrow & \vdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 d_1^A \downarrow & & \vdots & \swarrow & \vdots \\
 A_0 & \xrightarrow{\quad} & \overline{B}_0 & \xleftarrow{\sim} & B_0
 \end{array}$$

con los dos cuadrados superiores conmutativos. Este proceso puede ser repetido hacia abajo hasta la dimensión cero. Acabaremos obteniendo entonces el siguiente diagrama estrictamente conmutativo en  $\mathcal{U}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 A_n & \xrightarrow{\overline{x}_n} & \overline{B}_n \\
 d_n^A \downarrow & & d_n^{\overline{B}} \downarrow \\
 A_{n-1} & \xrightarrow{\overline{x}_{n-1}} & \overline{B}_{n-1} \\
 d_{n-1}^A \downarrow & & d_{n-1}^{\overline{B}} \downarrow \\
 \vdots & & \vdots \\
 d_1^A \downarrow & & d_1^{\overline{B}} \downarrow \\
 A_0 & \xrightarrow{\overline{x}_0} & \overline{B}_0
 \end{array} \quad (****)$$

Por una parte, hemos descrito un nuevo complejo  $\overline{B} = \{\overline{B}_n \rightarrow \overline{B}_{n-1} \rightarrow \dots \overline{B}_0\}$ , que es  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfo al complejo de cadenas original  $B$  por un  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo  $b = \{b_r\}_{0 \leq r \leq n} : B \rightarrow \overline{B}$ . El diagrama (\*\*\*\*) representa un morfismo de complejos  $\overline{x} : A \rightarrow \overline{B}$  en  $C(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U})$ , que, por la construcción descrita más arriba, claramente factoriza como  $\overline{x} = bx$ .

Observemos que aún no tenemos que  $d_{n-1}^{\overline{B}} d_n^{\overline{B}} = 0$  en  $\mathcal{U}$  por lo que hasta ahora sólo hemos construido un complejo de cadenas  $\overline{B}$  en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$ . En un segundo paso reemplazaremos el complejo de cadenas  $\overline{B} \in C(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U})$  que hemos obtenido por un complejo de cadenas estricto en  $C(\mathcal{U})$  el cual será  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfo a  $\overline{B}$ . Puesto que  $\overline{B}$  está en  $C(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U})$ ,  $d_{r-1}^{\overline{B}} d_r^{\overline{B}} = 0$  en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  para todo  $r$ . Empecemos en la dimensión superior  $n$ . Como  $d_{n-1}^{\overline{B}} d_n^{\overline{B}} = 0$  en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$ , por 2.3.3, existe un  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo  $c_{n-2}^1 : \overline{B}_{n-2} \xrightarrow{\sim} C_{n-2}^1$  tal que  $c_{n-2}^1 d_{n-1}^{\overline{B}} d_n^{\overline{B}} = 0$  en  $\mathcal{U}$ . Ahora tomamos sucesivos pushouts utilizando  $c_{n-2}^1$  y sus descendientes con el objeto de completar

un complejo de cadenas. Es decir, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{B}_n & \xlongequal{\quad} & C_n^1 \\
 d_n^{\bar{B}} \downarrow & & \downarrow d_n^1 \\
 \bar{B}_{n-1} & \xlongequal{\quad} & C_{n-1}^1 \\
 d_{n-1}^{\bar{B}} \downarrow & \searrow d_{n-1}' & \downarrow d_{n-1}^1 \\
 \bar{B}_{n-2} & \xrightarrow{c_{n-2}'} & C_{n-2}^1 \\
 d_{n-2}^{\bar{B}} \downarrow & \text{p.o.} & \downarrow d_{n-2}^1 \\
 \bar{B}_{n-3} & \xrightarrow{c_{n-3}'} & C_{n-3}^1 \\
 d_{n-3}^{\bar{B}} \downarrow & \text{p.o.} & \downarrow d_{n-3}^1 \\
 \vdots & & \vdots \\
 \bar{B}_0 & \xrightarrow{c_0'} & C_0^1
 \end{array}$$

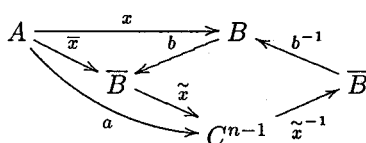
donde escribimos  $C_n^1 = \bar{B}_n$ ,  $C_{n-1}^1 = \bar{B}_{n-1}$ ,  $d_n^1 = \bar{d}_n$  y  $d_{n-1}^1 = c_{n-2}' \circ d_{n-1}^{\bar{B}}$  y definimos  $C_{n-3}^1$  como el push out de  $d_{n-3}^{\bar{B}}$  y  $c_{n-2}'$ ,  $C_{n-4}^1$  es el pushout de  $d_{n-4}^{\bar{B}}$  y  $c_{n-3}'$  y así hasta dimensión cero. Tenemos pues que  $\bar{B}$  es  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfo como complejo a  $C^1$  el cual satisface  $d_{n-1}^1 d_n^1 = 0$ , en  $\mathcal{U}$ ; el resto de composiciones  $d_{k-1}^1 d_k^1 = 0$  todaví son nulas sólo en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$ . Como,  $d_{n-3}^1 d_{n-2}^1 = 0$  en  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$ , por el nuevo razonamiento de más arriba hay un  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo  $c_{n-3}^2 : C_{n-3}^1 \xrightarrow{\sim} C_{n-3}^2$  tal que  $c_{n-3}^2 d_{n-3}^1 d_{n-2}^1 = 0$  en  $\mathcal{U}$ . Y, tal y como antes, tomamos sucesivos push outs utilizando  $c_{n-3}^2$  y sus descendientes bajando de dimensión hasta dimensión cero con el objeto de definir  $C_r^2$  y  $d_r^2$  para  $r \leq n-4$ . Llamamos  $C_r^2 = C_r^1$ ,  $d_r^2 = d_r^1$  para  $r \geq n-2$ ;  $C_{n-3}^2$ ,  $d_{n-2}^2 = c_{n-3}^2 d_{n-2}^1$ . Este nuevo complejo de cadenas  $C^2 \in C(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U})$  verifica que  $d_{r-1}^2 d_r^2 = 0$  en  $\mathcal{U}$  para  $r \geq n-1$  y  $\bar{B} \xrightarrow{c_{n-2}'} C^1 \xrightarrow{c_{n-3}^2} C^2$  es un  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismo.

Si continuamos con este proceso, habremos definido al final de un complejo de cadenas  $C^{n-1}$  con  $d_{r-1}^{n-1} d_r^{n-1} = 0$  en  $\mathcal{U}$  para  $r \geq 2$ . En otras palabras,  $C^{n-1} \in C(\mathcal{U})$ , y además habrá una cadena de  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos de complejos de cadenas

$$\bar{B} \xrightarrow{\sim} C^1 \xrightarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} C^{n-1}$$

entre  $\bar{B}$  y  $C^{n-1}$ . Llamemos a esta composición  $\tilde{x} : \bar{B} \xrightarrow{\sim} C^{n-1}$ . Nótese que para la construcción de  $C^{n-1}$  hemos realizado operaciones en  $\mathcal{U}$  mediante el uso de diagramas conmutativos. Por tanto  $A \xrightarrow{\tilde{x}} \bar{B} \xrightarrow{\tilde{x}} C^{n-1}$  es un morfismo de  $C(\mathcal{U})$  y  $\tilde{x}\tilde{x} = \tilde{x}b\tilde{x}$ . Más aún, como  $\tilde{x}$  y  $b$  son  $\mathcal{A}^{-1}$ -isomorfismos en  $C(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U})$  también lo es  $\tilde{x}b$ , por tanto una equivalencia débil y existe su inversa  $(\tilde{x}b)^{-1} : C^{n-1} \rightarrow \bar{B}$  en  $C(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U})$ . Denotemos por  $a$  a la siguiente composición  $\tilde{x}\tilde{x} = \tilde{x}b\tilde{x} : A \rightarrow C^{n-1}$ .

Entonces se cumple que  $(\tilde{x}b)^{-1}a = b^{-1}\tilde{x}^{-1}\tilde{x}bx = x$  en  $C(\mathcal{A}^{-1}U)$ .



Con esto se termina la verificación de *App 2'*.

### 6.3. Una aplicación

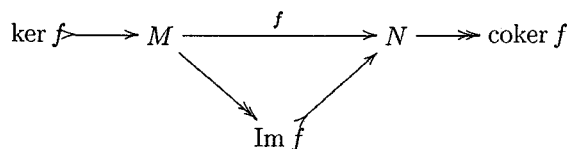
En esta sección demostramos que el teorema 6.1.1 puede ser considerado una reformulación del Mixed Localization Theorem de Levine. De esta forma obtenemos una demostración de dicho teorema alternativa a la original debida a Levine.

Para ello consideramos una categoría abeliana  $\mathcal{M}$  y subcategorías  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}$  con  $\mathcal{A}$  una categoría de Serre. Sea ahora  $\mathcal{H}/\mathcal{A}$  la categoría obtenido por medio del cálculo de fracciones con respecto a la clase de morfismos  $f$  en  $\mathcal{H}$  cuyo núcleo y conúcleo (que están en  $\mathcal{M}$ ) son objetos de  $\mathcal{A}$ .

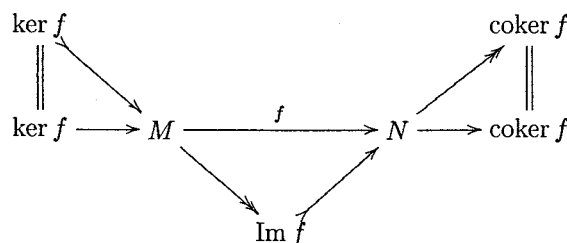
Al principio, puede parecer que las definiciones de  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}/\mathcal{A}$  son diferentes si embargo tenemos:

LEMA 6.3.1. Sean  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}$  en las mismas condiciones de más arriba. La categoría  $\mathcal{H}/\mathcal{A}$  coincide con la categoría localizada  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{H}$ .

DEMOSTRACIÓN. En ambos casos se ha hecho cálculo de fracciones sobre  $\mathcal{H}$  y por la misma clase de morfismos:  $\mathcal{H}/\mathcal{A}$ , esa clase es la de aquellos morfismos  $f$  en  $\mathcal{H}$  cuyos núcleo y conúcleo (que están en  $\mathcal{M}$  por ser abeliana) son objetos de  $\mathcal{A}$ . En el caso de  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{H}$ , son aquellos morfismos  $f$  para los cuales existe una factorización en  $\mathcal{H}$



tal que  $\ker f$  y  $\text{coker } f$  están en  $\mathcal{A}$ . Es claro que los morfismos de la segunda clase pertenecen a la primera. Veamos ahora la otra inclusión. Bajo nuestras hipótesis, si  $f$  tiene su núcleo y conúcleo,  $\ker f$  y  $\text{coker } f$ , calculados en  $\mathcal{M}$ , en  $\mathcal{A}$  entonces los axiomas (ii) y (iii) implican la existencia del siguiente diagrama:



una factorización ker-coker. Obsérvese que en realidad los diagramas dados por los axiomas (ii) y (iii) son únicos gracias a la unicidad, salvo isomorfismos, de las factorizaciones ker-coker en categorías abelianas. Por tanto  $f$  es un morfismo de la clase usada para la localización  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{H}$ .  $\square$

NOTA 6.3.2. Otro ingrediente del teorema de Levine es la construcción de Quillen,  $QE$ , de una categoría exacta, [Qui72]. Waldhausen demuestra en [Wal85] que para una categoría exacta  $\mathcal{E}$  con las cofibraciones y equivalencias débiles como en 2.1.9 el nervio  $BQE = |N.QE|$  de la categoría  $QE$  es homotópicamente equivalente a  $K(i\mathcal{E})$ . Por tanto, la sucesión natural  $BQA \rightarrow BQH \rightarrow BQH/A$  coincide con la sucesión  $K(iA) \rightarrow K(i\mathcal{H}) \rightarrow K(i\mathcal{H}/A)$ .

TEOREMA 6.3.3 (Mixed Localization Theorem). [Lev83][páginas 171-174] Sea  $A \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}$  como en el lema 6.3.1. Supongamos además la siguiente condición adicional.

(\*) Si  $N'$  está en  $\mathcal{M}$ ,  $N$  en  $\mathcal{H}$ , y  $u : N' \rightarrow N$  es un monomorfismo en  $\mathcal{M}$  entonces  $u$  es admisible en  $\mathcal{H}$ , es decir  $\text{coker } u \in \mathcal{H}$ . De forma similar, si  $u' : N \rightarrow N'$  es un epimorfismo en  $\mathcal{M}$ , entonces  $\text{ker } u \in \mathcal{H}$ .

Entonces  $\mathcal{H}/A$  es una subcategoría exacta de  $\mathcal{M}/A$ , y  $BQA \rightarrow BQH \rightarrow BQH/A$  es una fibración. En particular, existe una sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow K_1(\mathcal{H}) \rightarrow K_1(\mathcal{H}/A) \rightarrow K_0(A) \rightarrow K_0(\mathcal{H}) \rightarrow K_0(\mathcal{H}/A) \rightarrow 0 .$$

En particular, 6.1.1 implica el siguiente Teorema de Localización debido a Quillen.

TEOREMA 6.3.4. [Qui72, página 113] Sean  $\mathcal{B}$  una subcategoría Serre de  $\mathcal{A}$ , categoría abeliana, sea  $\mathcal{A}/\mathcal{B}$  la categoría abeliana cociente asociada, [Gab62] y [Swa68], y  $e : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $s : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}/\mathcal{A}$  los funtores canónicos. Entonces existe una sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow K_0(\mathcal{A}) \rightarrow K_0(\mathcal{B}) \rightarrow K_0(\mathcal{B}/\mathcal{A}) \rightarrow 0 .$$

Como  $\mathcal{A}$  es abeliana y  $\mathcal{B}$  es Serre, tenemos inmediatamente que  $\mathcal{B}$  localiza a  $\mathcal{A}$ . Ésto puede verse de manera análoga a 6.3.3 en 6.3.

DEMOSTRACIÓN DE 6.3.3. De acuerdo con la identificación hecha en el lema 6.3.1 bastará comprobar que podemos aplicar el teorema principal, 6.1.1, a  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{U} = \mathcal{H}$ .

Todo morfismo  $a : A \rightarrow H$  de  $\mathcal{H}$  con  $A$  en  $\mathcal{A}$  tiene una única factorización ker-coker.

$$\begin{array}{ccccc} \text{ker } a \twoheadrightarrow & A & \xrightarrow{a} & H & \twoheadrightarrow \text{coker } a \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \text{Im } a & & \end{array}$$

dentro de la categoría abeliana  $\mathcal{M}$ . Además, como  $\mathcal{A}$  es de Serre,  $\text{ker } a$  e  $\text{Im } a$  son objetos de  $\mathcal{A}$ . Por la condición (\*),  $\text{coker } a$  está en  $\mathcal{H}$ . Así pues  $\text{Im } a \twoheadrightarrow H \twoheadrightarrow \text{coker } a$  es exacto en  $\mathcal{H}$ . Hemos verificado así el axioma (ii) para  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}$ , 2.2.1.

De forma similar, dado un morfismo  $a' : H \rightarrow A$ , éste tiene una única factorización ker-coker como morfismo de la categoría abeliana  $\mathcal{M}$ .

$$\begin{array}{ccccc} \text{ker } a' \twoheadrightarrow & H & \xrightarrow{a'} & A & \twoheadrightarrow \text{coker } a' \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \text{Im } a' & & \end{array}$$

Como  $\mathcal{A}$  es de Serre, coker  $a'$  e  $\text{Im } a'$  están en  $\mathcal{A}$ . Gracias a la condición (\*)  $\ker a'$  está en  $\mathcal{H}$ . Y por tanto  $\ker a' \rightarrow H \rightarrow \text{Im } a'$  es exacto en  $\mathcal{H}$ . Esto demuestra el axioma (iii) en 2.2.1 para  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}$ . Hemos comprobado así que  $\mathcal{A}$  localiza  $\mathcal{H}$ , y por tanto por 6.1.1:

$$K(i\mathcal{A}) \rightarrow K(i\mathcal{H}) \rightarrow K(i\mathcal{A}^{-1}\mathcal{H})$$

es una fibración salvo homotopía. Aplicando la sucesión de homotopía de una fibración,  $\square$ , y la definición de los  $K_i$ -grupos tenemos pues la sucesión exacta de 6.3.3.  $\square$

NOTA 6.3.5. De hecho, nuestro teorema es equivalente al teorema de Levine. Basta tomar  $\mathcal{M} = \text{Ab}(\mathcal{U})$  ya que las condiciones de nuestro teorema implican las de Levine.

Como se mencionó en la demostración de 6.3.1 la categoría abeliana ambiente  $\mathcal{M}$  nos da que las factorizaciones que proveen los axiomas (ii) y (iii) son en realidad únicas. Ésto significa que 6.3.3 implica 6.1.1. En efecto, sea  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$  como en 6.1.1. Entonces tomamos  $\mathcal{H} = \text{Ab}(\mathcal{U})$  la categoría abeliana dada por el teorema de inmersión de Gabriel-Quillen, B. Tan sólo queda comprobar la condición (\*) para estar bajo las hipótesis de 6.3.3. Pero ésto se verifica a causa de la unicidad que hemos mencionado antes ya que si  $u : A \rightarrow U$  es un monomorfismo en  $\mathcal{H}$ , entonces el diagrama dado por axioma (ii) debe ser

$$\begin{array}{ccc} & & U/A \\ & \nearrow 0 & \uparrow \\ A & \xrightarrow{u} & U \\ & \searrow & \uparrow \\ & & A \end{array}$$

Por tanto coker  $u = U/A$  está en  $\mathcal{U}$ . De forma similar para un epimorfismo  $u' : U \rightarrow A$  en  $\mathcal{U}$ .

**Parte 1**

**Apéndices**



## APÉNDICE A

### Cálculo de Fracciones

En esta apéndice recordamos la construcción llamada cálculo de fracciones. Dada una categoría  $\mathcal{C}$  y un conjunto de morfismos  $S$  de  $\mathcal{C}$  se define una nueva categoría  $S^{-1}\mathcal{C}$  cuyos objetos son los de  $\mathcal{C}$  y donde los morfismos de  $S$  han sido invertidos formalmente. Los resultados aquí contenidos pueden verse en [Bas68][Capítulo 8,párrafo 5], [Har66][Capítulo 1,párrafo 3] y Gabriel-Zisman, [GZ].

DEFINICIÓN A.0.1. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $S$  una colección de flechas en  $\mathcal{C}$ . Se dice que  $S$  es un *sistema multiplicativo* si satisface los siguientes axiomas:

- MS1 Si  $f, g$  están en  $S$  entonces la composición  $fg$  está en  $S$ . Para cualquier objeto  $X$  en  $\mathcal{C}$ ,  $id_X$  está en  $S$ .
- MS2 Cualquier diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & & \downarrow s \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

en  $\mathcal{C}$  con  $s$  en  $S$  puede ser completado a

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{v} & Z \\ \downarrow t & & \downarrow s \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

con  $t$  en  $S$ .

- MS3 Si  $f, g : X \rightarrow Y$  son morfismos en  $\mathcal{C}$ , las siguiente condiciones son equivalentes:
  - (a) existe  $s : Y \rightarrow Y'$  en  $S$  tal que  $sf = sg$ .
  - (b) existe  $t : X' \rightarrow X$  en  $S$  tal que  $ft = gt$ .

NOTA A.0.2. Diremos que  $S$  es un sistema comultiplicativo si se satisfacen los axiomas MS1, MS3 y el dual a MS2, es decir

- MS2' Cualquier diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & & \uparrow s \\ X & \xleftarrow{u} & Y \end{array}$$

en  $\mathcal{C}$  con  $s$  en  $S$  puede ser completado a

$$\begin{array}{ccc} W & \xleftarrow{u} & Z \\ \uparrow t & & \uparrow s \\ X & \xleftarrow{u} & Y \end{array}$$

con  $t$  en  $S$ .

DEFINICIÓN A.0.3. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $S$  un sistema multiplicativo. La localización de  $\mathcal{C}$  con respecto a  $S$  (o el cálculo de fracciones con respecto a  $S$ ) es una categoría  $S^{-1}\mathcal{C}$  (o  $\mathcal{C}_S$ ), junto con un funtor

$$Q : \mathcal{C} \rightarrow S^{-1}\mathcal{C}$$

tal que:

- a)  $Q$  es la identidad sobre los objetos,
- b)  $Q(s)$  es un isomorfismo para cada  $s \in S$  y
- c) cualquier funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , tal que  $F(s)$  es un isomorfismo para cada  $s \in S$ , factoriza a través de  $Q$ . Es decir, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ Q \downarrow & \nearrow \bar{F} & \\ S^{-1}\mathcal{C} & & \end{array}$$

NOTA A.0.4. Se puede definir  $S^{-1}\mathcal{C}$  de forma análoga para  $S$  un sistema comultiplicativo.

PROPOSICIÓN A.0.5. La categoría  $S^{-1}\mathcal{C}$  (o  $\mathcal{C}_S$ ) puede ser obtenida como sigue:

$$\text{Obj}S^{-1}\mathcal{C} = \text{Obj}\mathcal{C} \quad \text{Hom}_{S^{-1}\mathcal{C}}(X, Y) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ I_X}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y)$$

donde  $I_X$  es la categoría cuyos objetos son morfismos  $s : X' \rightarrow X$  en  $S$  y cuyos morfismos son diagramas conmutativos  $f : s_1 \rightarrow s_2$  en  $S$

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & X'' \\ & \searrow s_1 & \swarrow s_2 \\ & X & \end{array}$$

Más aún, si  $\mathcal{C}$  es una categoría aditiva, también lo es  $S^{-1}\mathcal{C}$ .

NOTA A.0.6. En el caso que  $S$  sea comultiplicativo  $\text{Hom}_{S^{-1}\mathcal{C}}(X, Y)$  se obtiene como  $\lim_{\substack{\rightarrow \\ I_Y}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y')$  donde  $J_Y = \{s : Y \rightarrow Y' / s \in S\}$ .

Por tanto, en el caso de que  $S$  sea multiplicativo y comultiplicativo, es decir que verifique tanto MS2 como MS2',  $\text{Hom}_{S^{-1}\mathcal{C}}(X, Y)$  podría ser obtenido como  $\lim_{\substack{\rightarrow \\ I_X J_Y}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y')$ . Por tanto si  $\bar{f} : X \rightarrow Y$  es un morfismo en  $S^{-1}\mathcal{C}$  éste puede representarse por el diagrama

$$X \xleftarrow{x} X' \xrightarrow{f} Y' \xleftarrow{y} Y$$

en  $\mathcal{C}$  con  $x, y \in S$ . Este diagrama se llamará una representación de  $\bar{f}$ . Más aún, si

$$X \xleftarrow{x_i} X'_i \xrightarrow{f_i} Y'_i \xleftarrow{y_i} Y \quad i = 0, 1$$

son dos representaciones de  $\bar{f}$ , entonces existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & X'_0 & \xrightarrow{f_0} & Y'_0 & \\
 x_0 \swarrow & \uparrow \alpha_0 & & \downarrow \beta_0 & \swarrow b_0 \\
 X & \xleftarrow{x} X' & \xrightarrow{f} & Y' & \xleftarrow{b} Y \\
 x_1 \swarrow & \downarrow \alpha_1 & & \uparrow \beta_1 & \swarrow b_1 \\
 & X'_1 & \xrightarrow{f_1} & Y'_1 & 
 \end{array}$$

cuya flecha central también representa  $\bar{f}$ . Nótese que entonces  $\alpha_i, \beta_i \in S \quad i = 0, 1$ .

Además se tienen las siguientes propiedades adicionales.

i) Sea  $X \xleftarrow{x} X' \xrightarrow{f} Y' \xleftarrow{y} Y$  un representante de  $\bar{f}$ . Entonces podemos formar el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f_A} & Y'' \\
 x \uparrow & & \uparrow y' \\
 X' & \xrightarrow{f} & Y' \\
 x'' \uparrow & & \uparrow y \\
 X'' & \xrightarrow{f_B} & Y
 \end{array}$$

usando MS2 y MS2'. Ya que  $x, y \in S$  se sigue que  $x', y' \in S$ . Consecuentemente tenemos nuevas representaciones,

$$X \xrightarrow{f_A} Y'' \xleftarrow{b'b} Y$$

y

$$X \xleftarrow{xx'} X'' \xrightarrow{f_B} Y$$

ii) Supongamos que  $X \xrightarrow{\bar{f}} Y \xrightarrow{\bar{g}} Z$  son dos morfismos en  $S^{-1}\mathcal{C}$  con representaciones

$$X \xleftarrow{x} X' \xrightarrow{f} Y' \xleftarrow{y} Y$$

y

$$Y \xleftarrow{y_1} Y_1 \xrightarrow{g} Z' \xleftarrow{z} Z,$$

respectivamente. Haciendo pullbacks construimos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xleftarrow{x} & X' & \xrightarrow{f} & Y' \\
 & & \uparrow x' & \text{p.b.} & \uparrow y \\
 & & X'' & \xrightarrow{f_B} & Y & \xrightarrow{g_B} & Z'' \\
 & & & & \uparrow y_1 & \text{p.b.} & \uparrow z' \\
 & & & & Y_1 & \xrightarrow{g} & Z' & \xleftarrow{z} & Z
 \end{array}$$

como en i) y ésto demuestra que

$$X \xleftarrow{xx'} X'' \xrightarrow{g_B f_B} Z'' \xleftarrow{z'z} Z$$

representa  $\overline{gf}$ .

## APÉNDICE B

### La inmersión de Gabriel-Quillen

Este apéndice se ha extraído de [TT90][Apéndice A] a donde referimos las demostraciones de los resultados aquí establecidos. Tan solo enumeraremos los resultados principales. Hemos de recordar la definición de categoría exacta en 2 y 2.1.7.

**TEOREMA B.0.1.** *Sea  $\mathcal{E}$  una categoría exacta pequeña. Entonces existe una categoría abeliana  $Ab(\mathcal{E})$ , y un funtor exacto, lleno y fiel  $i: \mathcal{E} \longrightarrow Ab(\mathcal{E})$  que reflejan la exactitud. Más aún,  $\mathcal{E}$  es cerrado bajo extensiones en  $Ab(\mathcal{E})$ . Además la categoría  $Ab(\mathcal{E})$  puede ser canónicamente elegida como la categoría de funtores exactos a izquierda  $\mathcal{E}^{op} \longrightarrow Ab$ , e  $i: \mathcal{E} \longrightarrow Ab(\mathcal{E})$  es la inmersión de Yoneda  $i(E) = \text{Hom}_{\mathcal{E}}(\_, E)$ .*

Sea  $\mathcal{B}$  la categoría abeliana de funtores aditivos  $F: \mathcal{E}^{op} \longrightarrow Ab$  con valores en la categoría  $Ab$  de grupos abelianos. La categoría  $Ab$  admite límites y colímites formados para cada  $E$  en  $\mathcal{E}$ , así  $(\varprojlim F_{\alpha})(E) = \varprojlim (F_{\alpha}(E))$ , etc. Está claro que los límites directos en  $\mathcal{B}$  son exactos, es decir el axioma AB5 de Grothendieck se verifica, véase [Pop73].

Es más,  $\mathcal{B}$  posee un conjunto de generadores consistente en los funtores  $yE = \text{Hom}(\_, E)$  para  $E$  de  $\mathcal{E}$  que definen la inmersión de Yoneda  $y: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$  que es fiel y llena por el lema de Yoneda. Por tanto  $\mathcal{B}$  es una categoría abeliana de Grothendieck como es bien conocido.

**DEFINICIÓN B.0.2.** Un funtor exacto  $f: \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$  es un funtor que envía sucesiones exactas en  $\mathcal{E}_1$  en sucesiones exactas en  $\mathcal{E}_2$ . Un funtor exacto se dice que refleja exactitud si la imagen por  $f$  de una sucesión en  $\mathcal{E}_1$  es exacta en  $\mathcal{E}_2$  si y sólo si la sucesión original es exacta en  $\mathcal{E}_1$ .

**DEFINICIÓN B.0.3.** Sea  $G: \mathcal{E}^{op} \longrightarrow Ab$  un objeto de  $\mathcal{B}$ . Se dice que  $G$  es *separado* si para todo epimorfismo admisible  $E \twoheadrightarrow F$  de  $\mathcal{E}$ , la aplicación inducida  $G(F) \longrightarrow G(E)$  es un monomorfismo. Se dice que  $G$  es *exacto a izquierda* si para todo epimorfismo admisible  $E \twoheadrightarrow F$  de  $\mathcal{E}$ , entonces el diagrama

$$G(F) \longrightarrow G(E) \begin{array}{c} \xrightarrow{d^0 = G(p_0)} \\ \xrightarrow{d^1 = G(p_1)} \end{array} G(E \times_F E)$$

es un ecualizador donde las aplicaciones  $D$  son inducidas por las dos proyecciones  $p: E \times_F E \longrightarrow E$ .

Sea  $Ab(\mathcal{E})$  la subcategoría llena de  $\mathcal{B}$  consistente en los funtores exactos a izquierda  $\mathcal{E}^{op} \longrightarrow Ab$ . Sea  $j_* : Ab(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{B}$  la inclusión. Se verifica que  $j_*$  tiene un adjunto por la izquierda  $j^*$  de tal forma que  $j^*j_* = 1_{Ab(\mathcal{E})}$ . Entonces  $Ab(\mathcal{E})$  será una categoría abeliana de Grothendieck tal que  $j^*$  es un funtor exacto entre categorías abelianas mientras que  $j_*$  sólo preserva núcleos. La inmersión de Yoneda  $y : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$  factoriza por  $\mathcal{A}$ , así  $y = j_*i$  por un funtor  $i : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{A}$ . Entonces se puede demostrar que:

PROPOSICIÓN B.0.4. *El funtor de Yoneda  $i : \mathcal{E} \longrightarrow Ab(\mathcal{E})$  es lleno y fiel.*

Los dos lemas siguientes son esenciales para las completaciones restringidas que usamos en 3.3.

LEMA B.0.5. *Sea  $e : E \longrightarrow F$  un morfismo en  $\mathcal{E}$ . Entonces  $i(e)$  es un epimorfismo de  $Ab(\mathcal{E})$  si y sólo si hay un morfismo  $k : E' \longrightarrow E$  de  $\mathcal{E}$  tal que  $ek : E' \longrightarrow F$  es un epimorfismo admisible.*

*Con mayor generalidad, para cualquier funtor  $A$  en  $Ab(\mathcal{E})$  y objeto  $E$  de  $\mathcal{E}$ , un morfismo  $e : A \longrightarrow i(E)$  de  $Ab(\mathcal{E})$  es un epimorfismo de  $Ab(\mathcal{E})$  si y sólo si existe un  $k : i(E') \longrightarrow A$  (es decir,  $k \in A(E')$ ) tal que  $ek : E' \longrightarrow E$  es un epimorfismo admisible de  $\mathcal{E}$ .*

LEMA B.0.6. *La inmersión  $i : \mathcal{E} \rightarrow Ab(\mathcal{E})$  refleja exactitud. Más aún, si  $\mathcal{E}$  satisface el axioma extra 3.1.2, y si  $e$  es una aplicación de  $\mathcal{E}$  tal que  $i(e)$  es un epimorfismo de  $Ab(\mathcal{E})$ , entonces  $e$  es un epimorfismo admisible de  $\mathcal{E}$ .*

LEMA B.0.7. *L categoría  $\mathcal{E}$  es cerrada bajo extensiones en  $Ab(\mathcal{E})$ .*

LEMA B.0.8. *Sea  $F : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$  un funtor exacto entre categorías exactas. Entonces  $F$  preserva push outs a lo largo de monomorfismos admisibles, y  $F$  preserva pull backs a lo largo de epimorfismos admisibles.*

PROPOSICIÓN B.0.9. *Sea  $F : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$  un funtor exacto entre categorías exactas. Sea  $i : \mathcal{E} \longrightarrow Ab(\mathcal{E})$  y  $i' : \mathcal{E}' \longrightarrow Ab(\mathcal{E}')$  las inmersiones de Gabriel-Quillen en las correspondientes categorías de funtores exactos a izquierda.*

*Entonces existe un funtor aditivo que preserva conúcleos  $F^* : Ab(\mathcal{E}) \longrightarrow Ab(\mathcal{E}')$  de manera que  $F_*i$  es naturalmente equivalente a  $i'F$ . Además el funtor  $F^*$  tiene un funtor adjunto  $F_* : Ab(\mathcal{E}') \longrightarrow Ab(\mathcal{E})$  que es aditivo y preserva núcleos.*

TEOREMA B.0.10. *Sea  $\mathcal{E}$  una categoría exacta. Entonces*

- a) *Hay una categoría aditiva Karoubiana  $\mathcal{E}'$  y un funtor aditivo lleno y fiel  $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$  tal que cualquier funtor aditivo desde  $\mathcal{E}$  a una categoría aditiva Karoubiana (o idempotentemente completa) factoriza de forma única salvo isomorfismo natural por  $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ .*
- b) *Todo objeto de  $\mathcal{E}'$  es un sumando directo en  $\mathcal{E}'$  de un objeto de  $\mathcal{E}$ . En particular, si declaramos exacta toda sucesión en  $\mathcal{E}'$  que sea sumando directo de una sucesión exacta en  $\mathcal{E}$ , la categoría  $\mathcal{E}'$  es entonces categoría exacta, para la cual la inclusión  $f$  es ahora funtor exacto que refleja exactitud. Más aún,  $\mathcal{E}$  es cerrada bajo extensiones de  $\mathcal{E}'$ .*

- c) *La aplicación inducida en  $K$ -teoría por  $f$  hace de  $K(\mathcal{E})$  un espectro recubridor de  $K(\mathcal{E}')$ , en particular  $f$  induce entre los  $K$ -grupos un isomorfismo  $K_n(\mathcal{E}) \xrightarrow{\cong} K_n(\mathcal{E}')$  para  $n \geq 1$ , y un monomorfismo  $K_0(\mathcal{E}) \subseteq K_0(\mathcal{E}')$ .*

## Bibliografia

- [ACFP94] D. R. Anderson, F. X. Connolly, S. C. Ferry, and E. K. Pedersen, *Algebraic K-theory with continuous control at infinity*, Journal of Pure and Applied Algebra (1994), no. 94, 25–47.
- [Bas68] H. Bass, *Algebraic K-theory*, Mathematics Lecture Notes Series, W. A. Benjamin Inc., 1968.
- [Bau89] H. J. Baues, *Algebraic homotopy*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 15, Cambridge University Press, 1989.
- [CG] G. Carlsson and B. Goldfarb, *Controlled algebraic g-theory*, This article is a preprint.
- [Coh73] M. M. Cohen, *A course in simple-homotopy theory*, Graduate text in Mathematics, vol. 10, Springer Verlag, 1973, MR 36 (1968) 5942.
- [CP95] G. Carlsson and E. K. Pedersen, *Controlled algebra and the Novikov conjectures for K- and L-theory*, Topology (1995), no. 34, 731–758.
- [CP97] M. Cárdenas and E. K. Pedersen, *On the Karoubi filtration of a category*, K-theory (1997), no. 12, 165–191.
- [Fai81] C. Faith, *Algebra I: Rings, Modules and Categories*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 190, Springer-Verlag, 1981.
- [FP90] R. Fritsch and R. A. Piccinini, *Cellular structures in topology*, Cambridge University Press, 1990.
- [Gab62] P. Gabriel, *Des catégories abeliennes*, Bull. Soc. Math. de France **90** (1962), 323–448.
- [GJ] P.G. Goerss and J.F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, The book is available at the K-theory Archive in <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0148/index.html>.
- [Gol97] B. Goldfarb, *Novikov conjectures for arithmetic groups with large actions at infinity*, K-theory (1997), no. 11, 319–372.
- [GZ] P. Gabriel and M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*, INCOMPLETE, 10.
- [Har66] R. Hartshorne, *Residues and duality*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 20, Springer-Verlag, 1966.
- [Hil66] P.J. Hilton, *An introduction to homotopy theory*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, vol. 43, Cambridge University Press, 1966.
- [Hu68] S.T. Hu, *Introduction to homological algebra*, Holden-Day Inc, 1968.
- [Lan71] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Text in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, 1971.
- [Lev83] M. Levine, *Bloch's formula for singular surfaces*, Ann. Global Ann. Geom. (1983), no. 7, 51–75.
- [May67] J. P. May, *Simplicial objects in algebraic topology*, Van Nostrand Mathematical Studies, vol. 11, Van Nostrand, 1967, MR 36 (1968) 5942.
- [McC93] R. McCarthy, *On fundamental theorems of algebraic K-theory*, Topology (1993), no. 32, 325–328.
- [Mil71] J. Milnor, *Introduction to algebraic K-theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 72, Princeton University Press, 1971.
- [Ped84] E. K. Pedersen, *On the  $k_{-i}$ -functors*, J. Algebra (1984), no. 90, 461–475.
- [Ped97] Erik K. Pedersen, *Controlled algebra and topology*, Surgery and Geometric Topology (Sakado 1996). Sci. Bull. Josai Univ., vol. 2, pp. 91–95, 1997.
- [Ped00] ———, *Continuously controlled surgery theory*, Annals of Math studies 145, vol. 1, pp. 307–322, 2000.
- [Pop73] N. Popescu, *Abelian categories with applications to rings and modules*, Academis Press, 1973.



- [PW85] E. K. Pedersen and C. A. Weibel, *A non-connective delooping of algebraic K-theory*, Algebraic and Geometric Topology, Proceedings, Rutgers, 1983, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1126, 1985, pp. 166–181.
- [PW86] ———, *K-theory homology of spaces*, Algebraic Topology, Proceedings, Arcata, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1370, 1986, pp. 346–361.
- [Qui72] D. Quillen, *Higher algebraic k-theory: I*, Algebraic K-theory I. Battelle Institute Conference, Lecture Notes in Mathematics, vol. 341, 1972, pp. 85–147.
- [Sch00] M. Schlichting, *Délaçage de la k-théorie des catégories exactes et k-groupes négatifs*, Ph.D. thesis, Université Paris 7 Denis Diderot, 2000.
- [Seg74] G. Segal, *Categories and cohomology theories*, Topology (1974), no. 13, 293–312.
- [Sta85] R. Staffeldt, *On fundamental theorems on algebraic K-theory*, Topology 24 (1985), no. 2, 165–174.
- [Swa68] R.G. Swan, *Algebraic K-theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 76, Springer-Verlag, 1968.
- [Swi75] Robert M. Switzer, *Algebraic topology-homotopy and homology*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, vol. 212, Springer-Verlag, 1975.
- [TT90] R. W. Thomason and T. Trobaugh, *Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories*, The Grothendieck Festschrift, no. 3, Birkäser, Boston, 1990, pp. 247–435.
- [Wal78] F. Waldhausen, *Algebraic K-theory of generalized free products, part 1*, Annals of Mathematics (1978), no. 108, 135–204.
- [Wal85] F. Waldhausen, *Algebraic K-theory of spaces*, Algebraic and Geometric Topology, Proceedings Rutgers 1983 (Berlin-New York) (N. Levitt A. Ranicki and F. Quinn, eds.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1126, Springer-Verlag, 1985, pp. 318–419.
- [Weia] C. A. Weibel, *The development of algebraic K-theory before 1980*, This article is available at the K-theory Archive in <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0105/index.html>.
- [Weib] Charles A. Weibel, *An introduction to Algebraic K-theory*, The book is available at the K-theory Archive in <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0105/index.html>.
- [Wei94] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, 1994.

# UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Resolvido el Tribunal integrado por los abajo firmantes  
en el día de la fecha, por el lugar de Tesis Doctoral de  
Manuel Enrique Cárdenas Escudero  
de sucesión de fibración homotópica  
de  $K$ -teorías asociada a la localización de  
categorías exactas

Con el voto de Sobresaliente  
Cum deinde (unanímitud)

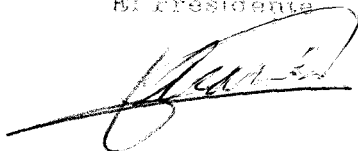
Sevilla, 11 de Julio

2001

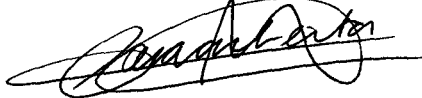
El Vocal



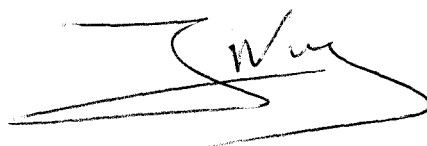
El Presidente



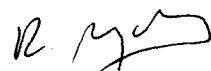
El Vocal



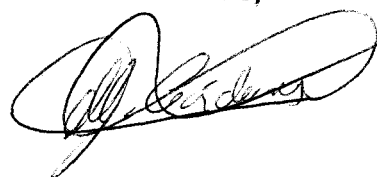
El Secretario,



El Vocal



El Doctorado,



UNIVERSIDAD DE SEVILLA



600027913