

UNIVERSIDAD DE SEVILLA



Facultad de Matemáticas  
Departamento de Geometría y Topología

# EXTENSIÓN DE LA TEORÍA DE LOS CONTINUOS EN AUSENCIA DE COMPACIDAD

**Memoria dirigida por**

Prof. Dr. Antonio Quintero Toscano

V<sup>o</sup> B<sup>o</sup> del Director

Fdo. Antonio Quintero Toscano

**Memoria presentada por**

Tomás Fernández Bayort para  
optar al grado de Doctor en  
Matemáticas por la Universi-  
dad de Sevilla

Fdo. Tomás Fernández Bayort

Sevilla, abril de 2009



CERTIFICO que la presente Memoria ha sido realizada bajo mi dirección por Tomás Fernández Bayort, y constituye su Tesis Doctoral.

Sevilla, abril de 2009.

Fdo. Dr. D. Antonio Quintero Toscano.



*A Jimena*



# Agradecimientos

---

Ante todo quiero agradecer al profesor Antonio Quintero que en su momento aceptara ser tutor de mi doctorado, que dirigiera mi tesina y que haya dedicado tanto interés y esfuerzo durante los últimos cinco años al estudio de los resultados que componen esta Memoria. Durante todo este tiempo, me ha ofrecido una gran variedad de problemas para investigar y me ha facilitado la posibilidad de acudir a interesantes encuentros de Topología. Sin sus ideas y su orientación este trabajo y los artículos en los que se basa no hubieran sido posibles. Me siento afortunado por haber podido trabajar con él y siempre guardaré un grato recuerdo de estos años.

También quiero agradecer al profesor Włodzimierz J. Charatonik sus interesantes indicaciones que han servido para facilitar y mejorar las demostraciones de los resultados del Capítulo IV, así como sus nuevas ideas para futuros trabajos. Igualmente he de destacar la ayuda que me prestaron las profesoras María José Chávez y María Trinidad Villar en el desarrollo del contenido del Capítulo V.

Quisiera recordar explícitamente a dos de mis profesores no universitarios, pues con su forma de trabajar me alentaron a estudiar matemáticas. Ellos son Jerónimo Vega, que cuando cursaba 2º de B.U.P. en el I. B. Virgen del Castillo de Lebrija me enseñó que las matemáticas no eran sólo números y que en ellas se podía buscar belleza; y Francisco Hernández, cuyas clases hicieron que el C.O.U. en el I. B. Tartessos de Camas mereciera la pena.

Además, he de mencionar a David Gutierrez, compañero de mis años en la facultad, para agradecerle que con algunos ejemplos laboriosos, pero magistrales, me haya abierto las puertas del Metapost. Esto me ha permitido realizar

la mayoría de las figuras que ilustran esta Memoria.

Este esfuerzo está dedicado a mis padres, a mi hermana, a Virginia y a Jimena; pues junto a ellos el paso del tiempo no me duele.



# Índice general

---

Introducción	XIII
<b>A Nuevos resultados en la topología conjuntista de los continuos generalizados</b>	<b>1</b>
<b>I. Preliminares</b>	<b>3</b>
§I.1. Propiedades topológicas de las aplicaciones propias . . . . .	3
§I.2. Finales de Freudenthal . . . . .	6
§I.3. Finales de continuos generalizados . . . . .	11
§I.4. Equivalencia de ambas definiciones de finales . . . . .	18
<b>II. Continuos generalizados de Peano</b>	<b>27</b>
§II.1. Finales de Freudenthal en la clase de los continuos generalizados de Peano . . . . .	28
§II.1A. Dendritas . . . . .	35
§II.2. Una nueva equivalencia del Teorema de Hahn-Mazurkiewicz	39
§II.3. Generalizaciones del Teorema II.2.1 . . . . .	42
<b>III. Sucesiones inversas de aplicaciones propias</b>	<b>47</b>
§III.1. Límites inversos con aplicaciones de enlace propias . . . . .	47

§III.2. Límites inversos que preservan los finales de Freudenthal . . .	51
§III.3. Espacios tipo rayo . . . . .	56
§III.4. Espacios tipo árbol y cuestiones abiertas . . . . .	61
§III.4A. Dendritas y nervios de recubrimientos . . . . .	65
§III.5. Un dendrita universal . . . . .	67
<b>IV. Sobre la extensión de Freudenthal de aplicaciones propias confluentes</b>	<b>75</b>
§IV.1. Dos casos triviales: aplicaciones monótonas y aplicaciones abiertas . . . . .	75
§IV.2. Aplicaciones confluentes I . . . . .	78
§IV.3. Aplicaciones confluentes II . . . . .	86
§IV.4. Aplicaciones débilmente confluentes . . . . .	91
§IV.5. Aplicaciones semiconfluentes . . . . .	97
§IV.6. El caso especial de las aplicaciones que preservan finales . .	101
<b>B Nuevos resultados en la topología algebraico- geométrica de los continuos generalizados</b>	<b>111</b>
<b>V. Sobre la topología de los continuos de Peano localmente 2-conexos</b>	<b>113</b>
§V.1. Enunciado de los teoremas principales . . . . .	113
§V.2. Continuos de Peano localmente 2-conexos . . . . .	115
§V.3. Planaridad de los continuos de Peano localmente 2-conexos	117
§V.4. La estructura de los continuos generalizados de Peano local- mente planos y localmente 2-conexos. . . . .	122
§V.5. $\mathcal{S}$ -curvas en una superficie . . . . .	130
§V.5A. Sobre la definición de $\mathcal{S}$ -curva . . . . .	135

Índice General.	XI
§V.6. Demostraciones de los resultados principales . . . . .	139
<b>VI. Propiedades homotópicas de las aplicaciones confluentes en     la categoría propia</b>	<b>149</b>
§VI.1. Homotopía propia y finales de Freudenthal . . . . .	149
§VI.2. Aplicaciones confluentes y aplicaciones propiamente esencia- les . . . . .	158
§VI.3. Algunas propiedades homotópicas relacionadas con los espa- cios tipo árbol en la categoría propia . . . . .	162
§VI.4. Representación de clases de homotopía propia mediante aplicaciones confluentes . . . . .	174
 <b>Apéndices</b>	 <b>181</b>
<b>A. Filtros</b>	<b>183</b>
<b>B. La pro-categoría de torres y límites inversos</b>	<b>185</b>
 <b>Bibliografía</b>	 <b>193</b>



# Introducción.

---

La primera definición de continuo se remonta a los orígenes de la topología, cuando aún era denominada “Analysis Situs”. Fue Cantor [11] en 1883 quien definió un continuo como un subespacio euclídeo  $C \subset \mathbb{R}^n$  perfecto (esto es, sin puntos aislados) tal que para dos puntos cualesquiera  $a$  y  $b$  y para todo  $\epsilon > 0$  existe un número finito de puntos  $a = p_0, p_1, \dots, p_n = b$  tales que la distancia entre dos consecutivos sea menor que  $\epsilon$ .

Es interesante observar que la definición original de Cantor no hacía referencia a la compacidad. De hecho esta propiedad aún no era bien conocida por entonces ya que el primer estudio de la compacidad, debido a E. Borel, data de 1894. La compacidad en su forma actual fue introducida por P. Alexandroff y P. Uryshon en 1928.

En presencia de la compacidad la definición de Cantor resulta ser equivalente a la definición actual de conexión para los espacios métricos.

En los años 20 la escuela polaca de topología, compuesta entre otros por W. Sierpiński, S. Mazurkiewicz, B. Knaster y K. Kuratowski, dió un impulso decisivo a la teoría de continuos en el ambiente compacto, quedando establecida prácticamente como definición canónica de un continuo la de un espacio métrico, compacto y conexo. Como referencia histórica sobre la teoría de continuos puede consultarse a J. J. Charatonik [15] y W. T. Ingram [40].

Debido a las riquísimas consecuencias de la compacidad, la teoría de los continuos se ha desarrollado casi en su totalidad en la clase de los espacios compactos. Sin embargo, espacios importantes sin esta propiedad no faltan, comenzando por los espacios euclídeos. Incluso tratando espacios compactos surgen espacios no compactos de manera inmediata; por ejemplo los espacios

recubridores de espacios con grupo fundamental infinito. La propiedad que reemplaza a la compacidad en estos espacios es la compacidad local.

En ausencia de compacidad es necesario tratar con los puntos “ideales” en el infinito que las “fugas” del espacio proporcionan. Y esto es así desde las propiedades básicas de la topología conjuntista hasta las propiedades más refinadas de la topología geométrica de variedades. Una primera actitud ante la falta de compacidad es restringir el marco de trabajo de la categoría topológica (**Top**), creando una subcategoría adecuada dentro de ella. Esta subcategoría es conocida como la categoría propia (**Topp**) y consiste, hablando sin rigor, en tomar sólo aquellas aplicaciones continuas que preservan el “infinito”.

La categoría propia tiene sus orígenes en la clasificación de las superficies no compactas por B. Kerékjártó en 1923 [44], pero no tuvo entidad como especialidad de la topología hasta los trabajos de L. C. Siebenmann sobre variedades no compactas [70]. En ellos aparecen ya algunas de las características que definen a la categoría propia: invariantes de finales, procesos geométricos infinitos, etc...

Esta Memoria es una contribución al estudio de las propiedades topogeométricas de los *continuos generalizados*; es decir, espacios métricos separables, conexos y localmente compactos. Hemos dividido su contenido en dos partes que pasamos a detallar.

La Parte A comprende cuatro capítulos dedicados al estudio de la topología conjuntista de los continuos generalizados. En el primer capítulo se desarrolla con detalle la noción de final de un espacio de Hausdorff localmente compacto mediante el uso de ultrafiltros al estilo de [22] y [37]. Hemos incluido esta introducción pormenorizada al no aparecer en los manuales de topología general disponibles en la literatura. Cuando nos restringimos a los continuos generalizados ganamos intuición geométrica pues entonces los finales de Freudenthal pueden entenderse como sucesiones encajadas de cuasicomponentes. Aunque este resultado es citado en [67], creemos de interés incluir una demostración aquí pues no hemos tenido constancia de ninguna otra en la literatura.

En el Capítulo II añadimos la conexión local y trabajamos con los continuos generalizados de Peano. A esta clase pertenecen los objetos geométricos de más

interés como son las variedades topológicas conexas y los poliedros conexos localmente finitos. Para estos espacios un final viene dado por una sucesión inversa de componentes (arco)conexas que es la versión habitual de final que se usa en la topología algebraico-geométrica propia. La sección auxiliar §II.1A contiene los rudimentos de la clase de los continuos generalizados de Peano que son dendríticos (dendritas), cuyas propiedades topológicas extienden a las de los árboles de la teoría de grafos. La Sección §II.2 la dedicamos al análisis de un resultado reciente de M. Bognár (Teorema A en [8]) sobre el teorema clásico de Hahn-Mazurkiewicz que caracteriza los continuos ordinarios. El Teorema II.2.1 proporciona una demostración mucho más corta que la original en [8], y vemos que, en realidad, es equivalente al Teorema de Hahn-Mazurkiewicz (Teorema II.2.4). La Sección §II.3 está dedicada a demostrar diferentes generalizaciones de este resultado en ausencia de compacidad.

Una herramienta fundamental en la teoría de los continuos es el límite de sucesiones inversas de espacios. Esta construcción proporciona una técnica útil para generar continuos complicados a partir de espacios más sencillos ([19] y [39] son dos referencias clásicas) ya que el límite inverso de continuos es un continuo. Dedicamos el Capítulo III al estudio de algunas propiedades topológicas de límites inversos de sucesiones de espacios no necesariamente compactos con aplicaciones de enlace propias.

Prescindir de la compacidad nos priva de las propiedades fundamentales de los límites inversos en la teoría de los continuos ordinaria, pues dicha propiedad es crucial tanto para la existencia como para la conexión del límite inverso de una sucesión de continuos. Por tanto, al considerar espacios no compactos el límite inverso no tiene por qué existir, y de existir no tiene por qué ser necesariamente conexo; incluso vemos como puede fallar la metrizabilidad del espacio de finales (Ejemplo III.2.4). Entre las primeras conclusiones alcanzadas en este capítulo destacamos que las anomalías antes mencionadas no aparecen en los límites inversos de semirectas euclídeas  $\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, +\infty)$ , pues son todos continuos generalizados con un único final (Teorema III.3.4), ni en los límites inversos de rectas euclídeas  $\mathbb{R}$  que son continuos generalizados con dos finales (Teorema III.4.2). También demostramos que no existe un objeto universal para tales límites inversos (Teorema III.3.6).

En la Sección §III.4 se caracterizan a los dendritas como aquellos espacios que son límites inversos de árboles con aplicaciones de enlace propias (Teorema III.4.3). Este resultado, a pesar de su enunciado sencillo, parece nuevo en la literatura. Terminamos este capítulo encontrando un dendrita universal (Teorema III.5.2).

Concluimos la Parte A con el Capítulo IV donde se estudia el comportamiento de la extensión de Freudenthal (y de Alexandroff) de una aplicación propia respecto a la confluencia, semiconfluencia y confluencia débil. Las aplicaciones confluentes entre continuos han sido ampliamente estudiadas en la literatura desde que fueron definidas por J. J. Charatonik [14], generalizando a las clases de las aplicaciones monótonas y las aplicaciones abiertas. Algunos autores ya han usado aplicaciones con fibra compacta para extender resultados sobre aplicaciones confluentes en la teoría de los continuos clásica a espacios no compactos; ver [34]. Este capítulo es una contribución a este esfuerzo.

En detalle, comenzamos señalando que ninguno de los tipos de aplicaciones confluentes mencionadas anteriormente es preservado por la extensión de Freudenthal (Ejemplo IV.2.11). Sin embargo, obtenemos resultados positivos cuando las aplicaciones implicadas tienen codominio localmente conexo (Teoremas IV.2.13, IV.4.5 y IV.5.6). La extensión de Freudenthal también preserva la confluencia y la confluencia débil para aplicaciones que induzcan un homeomorfismo entre los espacios de finales (Teorema IV.6.5). De manera similar, la compactificación por un punto de Alexandroff preserva las aplicaciones confluentes y débilmente confluentes (Teorema IV.6.8). En cambio, estos resultados no se tienen para las aplicaciones semiconfluentes (Ejemplo IV.6.9).

El capítulo contiene dos demostraciones de la preservación de la confluencia (Teorema IV.2.13), la primera y más corta (que no funciona para los otros tipos de confluencia considerados) es una interesante consecuencia del teorema de factorización monótona-ligera para aplicaciones propias. La segunda está basada en el hecho de que los subcontinuos de Peano pueden reemplazar a los subcontinuos arbitrarios en la definición de confluencia para aplicaciones con codominio localmente conexo (Teorema IV.3.1). Las aplicaciones semiconfluentes siguen el mismo patrón. En contraste, el Teorema IV.3.1 no se cumple para las aplicaciones débilmente confluentes (Ejemplo IV.4.1); no obs-



tante, aún podemos probar el análogo al Teorema IV.2.13 para esta clase de aplicaciones (Teorema IV.4.5).

A las técnicas de la topología general usadas hasta ahora añadimos resultados de la topología geométrica (de dimensión 2) y algunas herramientas de la topología algebraica de la categoría propia para abordar en la Parte B de esta Memoria algunos problemas de naturaleza algebraico-geométrica de los continuos generalizados.

En el capítulo V reconsideramos los trabajos de C. Thomassen, [74] y [75], donde se demuestran, en un lenguaje combinatorio, una serie de resultados concernientes a continuos localmente 2-conexos. Nosotros enmarcamos estos resultados en la teoría de los continuos y bajo este nuevo punto de vista encontramos demostraciones puramente topológicas de ellos, aplicando resultados ya clásicos de autores como K. Kuratowski, S. Claytor o K. Borsuk. De esta forma, además de obtener pruebas alternativas más sencillas, podemos generalizar los resultados de Thomassen al ambiente no compacto.

En concreto, si  $X$  es un continuo generalizado de Peano localmente 2-conexo y localmente plano construimos una superficie  $M_X$  tal que  $X$  se sumerge en  $M_X$  como un cerrado, de manera que sus espacios de finales de Freudenthal son homeomorfos (Teorema V.1.1). Además,  $M_X$  está determinada por  $X$  de manera que cualquier espacio métrico unidimensional  $Y$  se sumerge como cerrado en  $X$  si y sólo si también lo hace en  $M_X$  (Teorema V.1.2). Como una consecuencia, caracterizamos en el Teorema V.1.3 la planaridad local de un continuo generalizado de Peano localmente 2-conexo usando las dos curvas introducidas por S. Claytor [17] para caracterizar la planaridad de los continuos de Peano como extensión del resultado clásico de K. Kuratowski sobre la planaridad de los grafos.

El Capítulo VI comienza con una breve introducción de las propiedades homotópicas de los finales de Freudenthal. Concretamente, estudiamos los continuos generalizados de Peano dendríticos estableciendo que el tipo de homotopía propia de estos espacios queda determinado por su espacio de finales de Freudenthal (Teorema VI.1.7 y Corolario VI.1.5). Además, damos explícitamente una caracterización homotópica de los dendritas en el Teorema VI.1.8.

Posteriormente centramos nuestro interés en un teorema debido a T. B. McLean [52] que establece que las aplicaciones confluentes preservan los continuos tipo árbol. La demostración de este teorema es de naturaleza homotópica y depende crucialmente de la caracterización de J. H. Case y R. E. Chamberlin [13] de los continuos tipo árbol en términos de aplicaciones inesenciales. Probamos en §VI.3 que los análogos de estos teoremas no son ciertos en la categoría propia (Ejemplos VI.3.5 y VI.3.7). No obstante, otras propiedades homotópicas involucradas en estos teoremas sí se cumplen para aplicaciones confluentes propias (Proposición VI.2.5 y Teoremas VI.3.4 y VI.3.12). Además de estas extensiones de resultados conocidos en la teoría de los continuos, damos resultados nuevos concernientes al plano euclídeo y que no tienen equivalente en la categoría topológica ordinaria puesto que el plano es contráctil (Teoremas VI.2.7 y VI.3.9). Finalmente, en §VI.4 establecemos que las aplicaciones propias confluentes inducen sobreyecciones entre finales fuertes (Corolario VI.4.2) y, más aún, las aplicaciones monótonas inducen sobreyecciones entre pro-grupos fundamentales (Teoremas VI.4.5); mejorando resultados de T. Ganea [31] y J. Gripsolakis [34].

A lo largo de esta Memoria hemos enunciado explícitamente algunos problemas que ha quedado sin respuesta y que serán objeto de un futuro estudio.

Dos cortos apéndices recogen resultados básicos sobre filtros (Apéndice A) y pro-categorías y límites inversos (Apéndice B) necesarios para el desarrollo de este trabajo.

## Parte A

Nuevos resultados en la  
topología conjuntista de los  
continuos generalizados



# Preliminares

---

Este capítulo recopilatorio contiene las nociones básicas que se usarán a lo largo de esta Memoria. En concreto recordaremos la noción de aplicación propia y su caracterización para espacios de Hausdorff localmente compactos. Además se dará la noción general de final de Freudenthal para estos espacios. En la última sección, se da una descripción alternativa de los finales de Freudenthal para la clase de los continuos generalizados mediante sucesiones decrecientes encajadas de cuasicomponentes.

## §I.1. Propiedades topológicas de las aplicaciones propias

La idea intuitiva que se quiere formalizar con las aplicaciones propias es la de preservar el “infinito” de un espacio. Asimismo las aplicaciones propias conservan y reflejan muchas propiedades topológicas importantes.

A continuación se recogen las propiedades básicas de las aplicaciones propias (también llamadas en la literatura aplicaciones compactas o perfectas). La clase de las aplicaciones propias entre espacios métricos fue introducida por I. A. Vainstein en [76]. Más tarde, las aplicaciones propias entre espacios de Hausdorff localmente compactos fueron estudiadas por J. Leray [50] y N. Bourbaki [7]. Referimos al lector a [7] y [24] para una información exhaustiva sobre la topología de las aplicaciones propias; ver también [42].

Sea **Top** la categoría de los espacios topológicos y las aplicaciones conti-

nuas. Si  $f : X \rightarrow Y$  y  $f' : X' \rightarrow Y'$  son aplicaciones continuas y cerradas, la aplicación producto  $f \times g : X \times X' \rightarrow Y \times Y'$  no tiene por qué ser cerrada. Por ejemplo, si  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  es la aplicación constante  $f = 0$ ; entonces  $f \times id_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2$  es la aplicación  $(x, y) \mapsto (0, y)$ , que no es cerrada ya que si  $\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^2; x_1 x_2 = 1\}$ , se tiene  $f \times id_{\mathbb{Q}}(\Gamma) = \mathbb{Q} - \{0\}$ .

**Definición I.1.1.** Una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  se dice que es *propia* si  $f \times id_Z : X \times Z \rightarrow Y \times Z$  es cerrada para cualquier espacio topológico  $Z$ .

Si en (I.1.1) tomamos  $Z = \{*\}$ , tenemos

**Proposición I.1.2.** *Las aplicaciones propias son cerradas.*

**Proposición I.1.3** ([7]; I.10.1.2). *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua e inyectiva. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- (a)  $f$  es propia.
- (b)  $f$  es cerrada.
- (c)  $f$  es una *inmersión cerrada* (i.e.,  $f$  es un homeomorfismo de  $X$  sobre el conjunto cerrado  $f(X)$ ).

**Proposición I.1.4** ([7]; I.10.1.5), ([24]; 3.7.5). *Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  aplicaciones continuas:*

- (a) Si  $f$  y  $g$  son propias,  $g \circ f$  es propia.
- (b) Si  $g \circ f$  es propia y  $f$  es sobreyectiva, entonces  $g$  es propia.
- (c) Si  $g \circ f$  es propia y  $g$  es inyectiva, entonces  $f$  es propia.
- (d) Si  $g \circ f$  es propia y  $Y$  es Hausdorff, entonces  $f$  es propia. Más aún,  $g|_{f(X)} : f(X) \rightarrow Z$  es propia.

De acuerdo con (I.1.4(a)) podemos considerar la subcategoría **Topp**  $\subset$  **Top** formada por todos los espacios topológicos y las aplicaciones propias.

**Proposición I.1.5** ([7]; I.10.2.1). *Una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  es propia si y sólo si es cerrada y la fibra  $f^{-1}(y)$  es compacta para cada  $y \in Y$ .*

**Proposición I.1.6** ([7]; I.10.2.6). *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación propia. Entonces  $f^{-1}(K)$  es compacto para cualquier  $K \subset Y$  compacto.*

Entre espacios localmente compactos esta última proposición caracteriza a las aplicaciones propias. Más explícitamente,

**Proposición I.1.7** ([7]; I.10.3.7). *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua entre espacios de Hausdorff y localmente compactos. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a)  $f$  es propia.
- (b)  $f^{-1}(K)$  es compacto, para cada compacto  $K \subset Y$ .
- (c) Para cada compacto  $K \subset Y$  hay un subconjunto compacto  $L \subset X$  con  $f(\overline{X - L}) \subset \overline{Y - K}$ .

Esta caracterización se suele adoptar como definición. Más aún, en la clase de los espacios de Hausdorff y localmente compactos, las aplicaciones propias se pueden caracterizar como las aplicaciones que llevan el “infinito” en el “infinito”. Más explícitamente, se puede usar (I.1.7) para probar

**Proposición I.1.8** ([7]; pág.104). *Sean  $X, Y$  espacios de Hausdorff localmente compactos y  $X^+, Y^+$  las respectivas compactificaciones por un punto de  $X$  e  $Y$ . Entonces la aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  es propia si y sólo si su extensión  $f^+ : X^+ \rightarrow Y^+$ , dada por  $f^+(\infty) = \infty$ , es continua.*

Recordemos que la *compactificación por un punto* o *compactificación de Alexandroff* de un espacio de Hausdorff localmente compacto  $X$ , es el espacio  $X^+ = X \cup \{\infty\}$  cuya topología contiene a todos los abiertos de  $X$  y para la cual los conjuntos  $(X - K) \cup \{\infty\}$  con  $K \subset X$  compacto, constituyen una base de entornos abiertos del punto  $\infty$ .

Dada una aplicación propia y sobreyectiva  $f : X \rightarrow Y$  entre espacios de Hausdorff, una propiedad topológica  $\mathcal{P}$  se dice que es *invariante* por  $f$  si  $Y$  tiene la propiedad  $\mathcal{P}$  cuando  $X$  tiene la propiedad  $\mathcal{P}$ . Igualmente  $\mathcal{P}$  se dice *invariante inversa* por  $f$  si  $X$  tiene la propiedad  $\mathcal{P}$  cuando  $Y$  tiene la propiedad  $\mathcal{P}$ . Así la compacidad (local) es una propiedad invariante e invariante inversa como muestra la siguiente proposición

**Proposición I.1.9** ([24]; 3.7.21, 3.7.24). *Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos, siendo  $X$  un espacio de Hausdorff y  $f : X \rightarrow Y$  una sobreyección propia. Entonces,  $X$  es compacto (resp. localmente compacto) si y sólo si  $Y$  es compacto (resp. localmente compacto).*

Otras propiedades topológicas para las cuales las aplicaciones propias tienen un buen comportamiento están recogidas a continuación.

**Proposición I.1.10.** *Las siguientes propiedades son invariantes por aplicaciones propias:*

- (a) *Propiedades de separación: condición de Hausdorff, regularidad, normalidad ([24]; 3.7.20).*
- (b) *Metrizabilidad ([24]; 4.4.15).*
- (c) *Paracompacidad ([24]; 5.1.33).*
- (d) *Conexión local ([68]; 3.5.7(4)).*
- (e) *Compacidad local ([24]; 3.7.21).*

*Por otro lado la regularidad ([24]; 3.7.23), y la paracompacidad ([24]; 5.1.35) son invariantes inversas por aplicaciones propias.*

## §I.2. Finales de Freudenthal

Siguiendo la exposición que aparece en [37], en esta sección presentamos con detalle el primer invariante propio de un espacio: su espacio de finales, introducido por H. Freudenthal en [30]. Ver también [28], [29], [27] y [41]. A lo largo de esta Memoria, consideraremos los finales de Freudenthal en diferentes tipos de espacios, aunque todos serán de Hausdorff y localmente compactos<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>De hecho los finales de Freudenthal pueden definirse para la clase más general de los espacios de Hausdorff *rim-compactos* que son aquellos donde cada punto posee una base de entornos de frontera compacta. Ver [28]. Puesto que nuestro interés son los continuos generalizados no trabajaremos con tanta generalidad.



Para definir los finales de Freudenthal en términos de ultrafiltros seguiremos [37]. Puede consultarse también [22]. Dado un espacio  $X$ , denotaremos por  $\mathcal{A}$  la familia de todos los conjuntos cerrados con frontera compacta en  $X$  y sea  $\widehat{X}$  el conjunto de todos los  $\mathcal{A}$ -ultrafiltros<sup>2</sup>. Sobre  $\widehat{X}$  se puede definir una topología compacta cuya base de conjuntos cerrados consiste en los conjuntos

$$\mathcal{B}(A) = \{\mathcal{U} \in \widehat{X}; A \in \mathcal{U}\} \quad (\text{I.2.A})$$

donde  $A \in \mathcal{A}$ . Si se identifica cada  $x \in X$  con el  $\mathcal{A}$ -ultrafiltro trivial  $\mathcal{U}_x$  podemos ver a  $\widehat{X}$  como la unión de  $X$  con todos los  $\mathcal{A}$ -ultrafiltros no triviales en  $X$ . Se demuestra que  $\widehat{X}$  es compacto y Hausdorff y que  $X$  está topológicamente inmerso en  $\widehat{X}$  como conjunto abierto y denso; es más, el conjunto cerrado  $\mathcal{F}(X) = \widehat{X} - X \subset \widehat{X}$  es 0-dimensional y por tanto totalmente desconexo; ver [37]. Así,

**Definición I.2.1.** Dado un espacio de Hausdorff y localmente compacto  $X$ , al espacio  $\widehat{X}$  se le conoce como la *compactificación de Freudenthal*<sup>3</sup> de  $X$  y a la diferencia  $\mathcal{F}(X) = \widehat{X} - X$  como el *espacio de finales de Freudenthal* de  $X$ .

El siguiente lema prueba que  $\mathcal{F}(X) = \emptyset$  si  $X$  es compacto.

**Lema I.2.2.** *Un  $\mathcal{A}$ -ultrafiltro  $\mathcal{U}$  en  $\widehat{X}$ , es trivial si y sólo si contiene un conjunto compacto.*

**Demostración.** Si  $K \in \mathcal{U}$  es compacto entonces  $\mathcal{U}_K = \{K \cap U; U \in \mathcal{U}\}$  es una base de filtro en  $K$ . Por tanto la Proposición A.1 establece que  $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U =$

---

<sup>2</sup>En el Apéndice A se recogen las definiciones básicas de teoría de filtros usadas en esta sección.

<sup>3</sup>La compactificación de Freudenthal  $\widehat{X}$  es la mayor de las compactificaciones de  $X$  con resto 0-dimensional; esto es, si  $\widetilde{X}$  es un espacio compacto de Hausdorff que contiene a  $X \subset \widetilde{X}$  como un subconjunto denso y abierto y  $\widetilde{X} - X$  es 0-dimensional, entonces existe una aplicación continua  $\tilde{j} : \widehat{X} \rightarrow \widetilde{X}$  que extiende a la inclusión  $X \subset \widehat{X}$ . Más aún, para los espacios rim-compactos la compactificación de Freudenthal es homeomorfa a la compactificación de Stoilow-Kerékjártó  $SX = \beta(X)/\mathcal{Q}(\beta(X) - X)$  donde  $\beta(X)$  es la compactificación de Stone-Čech y  $\mathcal{Q}(-)$  denota el espacio de cuasicomponentes (I.3.7). Ver [41] y [65]. Estos resultados no serán utilizados en la Memoria.

$\bigcap_{U' \in \mathcal{U}_K} U' \neq \emptyset$  de donde  $\mathcal{U}$  es un  $\mathcal{A}$ -ultrafiltro trivial. El recíproco es obvio.  $\square$

A continuación damos una serie de lemas técnicos que ayudan a describir la topología de  $\widehat{X}$ . Todos los espacios considerados en esta sección serán de Hausdorff y localmente compactos.

**Lema I.2.3.** *Si  $K$  es un subconjunto compacto de un espacio  $X$ , entonces  $X - \text{int}K$  es un elemento de cualquier  $\mathcal{A}$ -ultrafiltro no trivial  $\mathcal{U}$ .*

**Demostración.** Para cualquier  $F \in \mathcal{U}$ ,  $F$  es un conjunto cerrado no compacto. Aquí usamos el Lema I.2.2. Así pues  $F \cap (X - \text{int}K) \neq \emptyset$ . Por lo tanto  $X - \text{int}K \in \mathcal{U}$  pues  $\mathcal{U}$  es un  $\mathcal{A}$ -ultrafiltro y  $\text{Fr}(X - \text{int}K) \subset K$  es compacto (ver Proposición A.2).  $\square$

**Lema I.2.4.** *Para cualquier conjunto  $Y \subset X$  se tiene  $\overline{Y}^{\widehat{X}} = \bigcap \{\mathcal{B}(A); Y \subset A\}$ .*

**Demostración.** En efecto, por definición la topología de  $\widehat{X}$  en (I.2.A) tenemos

$$\overline{Y}^{\widehat{X}} = \bigcap \{\mathcal{B}(A); Y \subset \mathcal{B}(A)\} \quad (\text{I.2.B})$$

donde los puntos de  $Y$  están identificados con ultrafiltros triviales; esto es,  $\mathcal{U}_y \in \mathcal{B}(A)$  para todo  $y \in Y$  y por tanto  $A \in \mathcal{U}_y$ ; esto es,  $y \in A$  y así  $Y \subset A$ .  $\square$

Para cualquier conjunto  $B \subset X$ , denotemos por  $B^{\mathcal{F}}$  a la intersección  $B^{\mathcal{F}} = \overline{B}^{\widehat{X}} \cap \mathcal{F}(X) \subset \widehat{X}$ .

**Lema I.2.5.** *Para cualquier  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}(A) = A \cup A^{\mathcal{F}}$ . En particular,  $\mathcal{U} \in \overline{A}^{\widehat{X}}$  si y sólo si  $A \in \mathcal{U}$ .*

**Demostración.** De acuerdo con el Lema I.2.4 tenemos que  $\overline{A}^{\widehat{X}} = \bigcap \{\mathcal{B}(Z); A \subset Z\}$ . Así pues  $Z \in \mathcal{U}$  para todo  $\mathcal{U} \in \mathcal{B}(A)$ , y como consecuencia  $\mathcal{B}(A) \subset \mathcal{B}(Z)$ . Esto demuestra que  $\mathcal{B}(A) \subset \overline{A}^{\widehat{X}}$ . La otra inclusión es inmediata pues  $A \subset \mathcal{B}(A)$ .  $\square$

Denotemos por  $\mathcal{G}$  la familia de conjuntos abiertos de frontera compacta en un espacio de Hausdorff localmente compacto  $X$ . Entonces

**Lema I.2.6.** *Para cada  $G \in \mathcal{G}$  el conjunto  $G^\natural = G \cup G^\mathcal{F}$  es abierto en  $\widehat{X}$  y estos conjuntos junto con los conjuntos abiertos de  $X$  forman una base de conjuntos abiertos para  $\widehat{X}$ .*

**Demostración.** Notemos que los conjuntos cerrados  $A = X - G$  y  $H = \overline{G}^X$  tienen frontera compacta pues  $\text{Fr}H \subset \text{Fr}G = \text{Fr}A$ . Más aún  $\overline{H}^{\widehat{X}} = \overline{G}^{\widehat{X}}$  ya que  $H = \overline{G}^{\widehat{X}} \cap G$ . Afirmamos que

$$G^\natural = \widehat{X} - \mathcal{B}(A) \quad (\text{I.2.C})$$

con lo que terminaríamos la demostración.

Para probar (I.2.C), consideremos  $\mathcal{U} \in \overline{G}^{\widehat{X}} = \overline{H}^{\widehat{X}}$  un  $\mathcal{A}$ -ultrafiltro no trivial. Obtenemos entonces que  $H \in \mathcal{U}$  por el Lema I.2.5 y así  $A \notin \mathcal{U}$  ya que de otra forma  $\mathcal{U}$  contendría al conjunto compacto  $A \cap H = \text{Fr}A$ . Por lo tanto,  $\mathcal{U} \notin \mathcal{B}(A)$ . El recíproco es análogo.  $\square$

**Lema I.2.7.** *Para cualquier compacto  $K \subset X$  y cualquier conjunto cerrado  $F \subset X$  con  $\text{Fr}F \subset K$  la diferencia  $F - K$  es un abierto de  $\mathcal{G}$  y  $(F - K)^\natural$  es abierto en  $\widehat{X}$ .*

**Demostración.** Es inmediato comprobar que  $G = F - K = \text{int}F - K$  es un conjunto abierto con frontera compacta  $\text{Fr}G \subset \text{Fr}F \cup K$ , y ahora el Lema I.2.6 establece que  $(F - K)^\natural$  es abierto en  $\widehat{X}$ .  $\square$

**Proposición I.2.8** (c.f. (I.1.8)). *Toda aplicación propia  $f : X \rightarrow Y$  admite una extensión continua  $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$  que se restringe a una aplicación  $f_* : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ . Explícitamente, si  $\mathcal{U} \in \mathcal{F}(X)$ ,  $\widehat{f}(\mathcal{U}) = f_*(\mathcal{U})$  es el único elemento en  $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \overline{f(U)}^{\widehat{Y}}$ .*

La aplicación  $\widehat{f}$  se conoce como *extensión de Freudenthal de  $f$* . En la demostración de la Proposición I.2.8 usaremos el siguiente

**Lema I.2.9.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación propia y  $A \subset Y$ . Si  $\text{Fr}A$  es compacto, también lo es  $\text{Fr}(f^{-1}(A))$ .*

**Demostración.** Por continuidad  $\text{Fr}(f^{-1}(A)) = \overline{f^{-1}(A)} \cap \overline{f^{-1}(Y - A)} \subset f^{-1}(\overline{A}) \cap f^{-1}(\overline{Y - A}) = f^{-1}(\text{Fr}A)$  donde este último conjunto es compacto al ser  $f$  propia, y por tanto el conjunto cerrado  $\text{Fr}(f^{-1}(A))$  es compacto.  $\square$

**Demostración de la Proposición I.2.8.** Sea  $\mathcal{U}$  un  $\mathcal{A}$ -ultrafiltro no trivial. Por la compacidad de  $\widehat{Y}$ , el filtro  $f(\mathcal{U})$  generado por las imágenes de elementos de  $\mathcal{U}$  tiene al menos un punto de acumulación (ver Proposición A.1) y así

$$Z_{\mathcal{U}} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \overline{f(U)}^{\widehat{Y}} \neq \emptyset. \quad (\text{I.2.D})$$

Es más, esta intersección no contiene elementos de  $Y$ . En efecto, supongamos que existe  $y \in Z_{\mathcal{U}} \cap Y = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} f(U)$ . Aquí usamos que  $f(U)$  es un conjunto cerrado en  $Y$ . Entonces, el conjunto compacto  $f^{-1}(y)$  corta a cualquier  $U \in \mathcal{U}$  y así  $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$ . Por tanto,  $f^{-1}(y) \in \mathcal{U}$  y por el Lema I.2.2,  $\mathcal{U}$  es trivial, lo que es una contradicción.

Comprobemos que  $Z_{\mathcal{U}}$  se reduce a un elemento. Para ello, supongamos que  $\mathcal{W}_1$  y  $\mathcal{W}_2$  son dos  $\mathcal{A}$ -ultrafiltros distintos que pertenecen a  $Z_{\mathcal{U}}$ . Entonces podemos encontrar dos conjuntos cerrados de frontera compacta  $W_i \in \mathcal{W}_i$  ( $i = 1, 2$ ) con  $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ . Además, por el Lema I.2.7,  $(W_i - \text{Fr}W_i)^{\natural}$  es un entorno abierto de  $\mathcal{W}_i$  en  $\widehat{Y}$  ( $i = 1, 2$ ) y

$$f(U) \cap (W_i - \text{Fr}W_i)^{\natural} = f(U) \cap (W_i - \text{Fr}W_i) \neq \emptyset$$

para todo  $U \in \mathcal{U}$ . Así  $W_i \cap f(U) \neq \emptyset$ , y por tanto  $U \cap f^{-1}(W_i) \neq \emptyset$  para todo  $U \in \mathcal{U}$ . Por el Lema I.2.9,  $f^{-1}(W_i)$  es un conjunto cerrado de frontera compacta. Luego  $f^{-1}(W_1)$  y  $f^{-1}(W_2)$  son conjuntos disjuntos en el  $\mathcal{A}$ -ultrafiltro  $\mathcal{U}$  lo que es una contradicción con la definición de filtro.

Afirmamos que  $f : X \rightarrow Y$  se extiende a una aplicación continua  $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$  tomando  $\widehat{f}(\mathcal{U}) = f_*(\mathcal{U})$  donde  $f_*(\mathcal{U})$  es el único elemento en  $Z_{\mathcal{U}}$ . Para comprobar la continuidad, consideremos un abierto básico  $G^{\natural}$  de la compactificación de Freudenthal  $\widehat{Y}$  dado por el Lema I.2.6, para el cual  $\widehat{f}^{-1}(G^{\natural}) = f^{-1}(G) \cup f_*^{-1}(G^{\mathcal{F}})$ . Más aún  $\text{Fr}(f^{-1}(G))$  es compacto por el Lema I.2.9 y la continuidad de  $\widehat{f}$  se sigue si comprobamos la igualdad

$$f_*^{-1}(G^{\mathcal{F}}) = (f^{-1}(G))^{\mathcal{F}} \quad (\text{I.2.E})$$

que llevaría a  $f^{-1}(G^{\natural}) = (f^{-1}(G))^{\natural}$ .

Para probar (I.2.E) observamos que dado  $\mathcal{U} \in f_*^{-1}(G^{\mathcal{F}})$ , el conjunto  $G^{\natural}$  es un entorno abierto de  $f_*(\mathcal{U})$  en  $\widehat{Y}$  y se sigue  $G \cap f(U) = G^{\natural} \cap f(U) \neq \emptyset$  para todo  $U \in \mathcal{U}$  por la definición de  $f_*(\mathcal{U})$ . Por lo tanto  $(f^{-1}(G))^{\natural} \cap U = f^{-1}(G) \cap U \neq \emptyset$  para todo  $U \in \mathcal{U}$ ; esto es,  $U \cap A \neq \emptyset$  para todo  $A \in \mathcal{A}$  con  $f^{-1}(G) \subset A$  y, por el Lema I.2.4,  $\mathcal{U} \in (f^{-1}(G))^{\mathcal{F}}$ . La demostración de la inclusión en el otro sentido es similar.  $\square$

**Proposición I.2.10.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación propia entre espacios de Hausdorff localmente compactos. Si  $f$  es sobreyectiva, entonces  $\widehat{f} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$  y  $f_* : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$  también lo son.*

**Demostración.** Si  $\mathcal{U}$  es un  $\mathcal{A}$ -filtro en  $\widehat{Y}$ , entonces  $f^{-1}(\mathcal{U}) = \{f^{-1}(U); U \in \mathcal{U}\}$  es una base de  $\mathcal{A}$ -ultrafiltro en  $\widehat{Y}$ . Aquí usamos que  $f$  es sobreyectiva y el Lema I.2.9. Entonces, si  $\mathcal{W}$  es un  $\mathcal{A}$ -ultrafiltro en  $\widehat{X}$  con  $f^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{W}$  tenemos que para todo  $W \in \mathcal{W}$  existe  $U \in \mathcal{U}$  con  $f^{-1}(U) \subset W$ ; esto es  $U \subset f(W)$ . Así pues, el Lema I.2.5 nos da  $\mathcal{U} \in \overline{U}^{\widehat{Y}} \subset \overline{f(W)}^{\widehat{Y}}$  y  $\mathcal{U} \in \bigcap_{W \in \mathcal{W}} \overline{f(W)}^{\widehat{Y}}$  lo que demuestra que  $f_*(\mathcal{W}) = \mathcal{U}$ .  $\square$

## §I.3. Finales de continuos generalizados

En esta sección restringiremos nuestro estudio a la clase de los espacios metrizable, localmente compactos y  $\sigma$ -compactos, a los que llamaremos *espacios admisibles*. Recordemos que un espacio  $\sigma$ -compacto es aquel que se descompone en la unión numerable de subconjuntos compactos. En concreto, centramos nuestro interés en los espacios admisibles conexos, que son conocidos como *continuos generalizados*. De esta forma los continuos generalizados compactos coinciden con los continuos de la teoría clásica.

**Nota I.3.1.** La condición de  $\sigma$ -compacidad es redundante para los continuos generalizados. En efecto, de ([24]; 4.4.F(c)) se sigue que todo espacio conexo

metrizable y localmente compacto es separable y por tanto segundo numerable y  $\sigma$ -compacto.

**Definición I.3.2.** Una *sucesión exhaustiva* de un espacio topológico  $X$  es una sucesión de subconjuntos compactos  $K_n \subset X$  tales que  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$  y  $K_n \subset \text{int}K_{n+1}$ .

La compacidad local y la  $\sigma$ -compacidad permiten establecer

**Lema I.3.3.** *Siempre existen sucesiones exhaustivas en un espacio admisible  $X$ .*

**Demostración.** Por  $\sigma$ -compacidad,  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$  con cada  $D_n$  compacto. Además la compacidad local de  $X$  da para cada  $x \in D_1$  un entorno abierto de  $x$ ,  $U_x$ , de clausura compacta. La compacidad de  $D_1$  lleva a  $D_1 \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n} \subset \overline{U_{x_1}} \cup \dots \cup \overline{U_{x_n}} = K'_2$  para ciertos puntos  $x_1, \dots, x_n \in D_1$ . Así pues  $K_1 = D_1 \subset \text{int}K_2$  donde  $K_2 = K'_2 \cup D_2$ . Procediendo ahora inductivamente obtenemos que  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$  con  $K_n \subset \text{int}K_{n+1}$ .  $\square$

En la Sección §I.2 los finales de Freudenthal fueron introducidos mediante el uso de ultrafiltros siguiendo [37]. Para continuos generalizados, los finales pueden describirse de una forma más simple como sucesiones decrecientes encajadas de cuasicomponentes; en particular,  $\mathcal{F}(X)$  es homeomorfo a un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor. Esto se enuncia sin demostración en [67]. Nosotros damos aquí una demostración explícita de estos hechos (ver Propositiones I.3.15 y I.4.3).

**Definición I.3.4.** Dado un espacio  $X$ , la *cuasicomponente* de  $x \in X$ , denotada por  $Q(x)$ , se define como la intersección de todos los conjuntos abiertos y cerrados de  $X$  que contienen a  $x$ .

**Nota I.3.5.** Las cuasicomponentes forman una partición de  $X$  en conjuntos cerrados que refina la partición en componentes conexas (es decir, cada componente está contenida en una cuasicomponente); es más, la imagen continua de una cuasicomponente está contenida en una cuasicomponente. Para espacios métricos compactos, las cuasicomponentes coinciden con las componentes conexas; ver ([45]; Thm. 2, pág. 169).

**Lema I.3.6.** *Sea  $X$  un espacio admisible. Si  $K \subset X$  es compacto y  $Q \subset X$  es una cuasicomponente tal que  $K \cap Q = \emptyset$ , entonces existe un conjunto abierto y cerrado  $U$  con  $Q \subset U$  y  $U \cap K = \emptyset$ .*

**Demostración.** Como  $K$  y  $Q$  son disjuntos, para cada  $x \in K$  existe un conjunto cerrado y abierto  $H_x$  con  $x \in H_x$  y  $Q \subset X - H_x$ . Por compacidad,  $K \subset H = \bigcup_{i=1}^n H_{x_i}$  para algún  $n$  y escogemos  $U = X - H$ .  $\square$

**Definición I.3.7.** El *espacio de cuasicomponentes de  $X$*  es el conjunto  $\mathcal{Q}(X)$  de cuasicomponentes de  $X$  dotado con la topología generada por la base de conjuntos abiertos formada por los conjuntos  $A^\diamond = \{Q; Q \in \mathcal{Q}(X) \text{ y } Q \subset A\}$  donde  $A \subset X$  toma valores en la familia de todos los subconjuntos abiertos y cerrados de  $X$ .

El siguiente lema es inmediato.

**Lema I.3.8.** *Cualquier aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  entre espacios admisibles induce una aplicación continua  $f_\# : \mathcal{Q}(X) \rightarrow \mathcal{Q}(Y)$  que lleva una cuasicomponente  $Q \subset X$  a la única cuasicomponente  $Q' \subset Y$  con  $f(Q) \subset Q'$ .*

**Lema I.3.9.** *Para cualquier conjunto compacto  $K \subset X$  de un continuo generalizado  $X$  el espacio de cuasicomponentes  $\mathcal{Q}(X - \text{int}K)$  es compacto.*

**Demostración.** Consideremos cualquier recubrimiento  $\mathcal{Q}(X - \text{int}K) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^\diamond$  donde cada  $A_\alpha$  es un conjunto abierto y cerrado de  $X - \text{int}K$ . La conexión de  $X$  establece que  $A_\alpha \cap \text{Fr}K \neq \emptyset$  para todo  $\alpha$  y la compacidad de  $\text{Fr}K$  muestra que existe una sucesión finita  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  con  $\text{Fr}K \subset A_{\alpha_1} \cup A_{\alpha_2} \cup \dots \cup A_{\alpha_s}$ . Afirmamos que  $\mathcal{Q}(X - \text{int}K) \subset \bigcup_{j=1}^s A_{\alpha_j}^\diamond$ . En efecto, dada  $Q \in \mathcal{Q}(X - \text{int}K)$ , por el Lema I.3.6 y la conexión, necesariamente  $Q \cap \text{Fr}K \neq \emptyset$  para todo  $Q \in \mathcal{Q}(X - \text{int}K)$ . Por lo tanto, para  $x \in Q \cap \text{Fr}K$  existe  $1 \leq i \leq r$  con  $x \in A_{\alpha_i}$ . Así  $Q \subset A_{\alpha_i}$ ; esto es,  $Q \in A_{\alpha_i}^\diamond$ .  $\square$

**Proposición I.3.10.** *Si  $X$  es un continuo generalizado y  $K \subset X$  es un subconjunto compacto, entonces  $\mathcal{Q}(X - \text{int}K)$  es homeomorfo a un subespacio cerrado del conjunto de Cantor.*

**Demostración.** Por el Lema I.3.9,  $\mathcal{Q}(X - \text{int}K)$  es compacto, y por ([45]; Thm. 3, pág. 148 y Thm. 5, pág. 151) existe una inmersión  $\mathcal{Q}(X - \text{int}K) \hookrightarrow \prod_{i=1}^{\infty} \{0, 1\}$ . Aquí usamos que  $X - \text{int}K$  es segundo numerable.  $\square$

**Definición I.3.11.** Dados un continuo generalizado  $X$  y una sucesión exhaustiva  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  de  $X$ , llamaremos un  $\mathfrak{q}$ -final de  $X$  a una sucesión  $(Q_n)_{n \geq 1}$  de cuasicomponentes  $Q_n \subset X - \text{int}K_n$  con  $Q_{n+1} \subset Q_n$ . Denotemos por  $\mathcal{E}(X)$  al conjunto de todos los  $\mathfrak{q}$ -finales de  $X$ . Obsérvese que  $\mathcal{E}(X) = \emptyset$  si  $X$  es compacto.

Es fácil comprobar que el conjunto  ${}^{\mathfrak{q}}X = X \cup \mathcal{E}(X)$  admite una topología de Hausdorff cuya base de conjuntos abiertos está formada por los conjuntos abiertos de  $X$  y aquellos conjuntos de la forma

$${}^{\mathfrak{q}}\Omega = \Omega \cup \{(Q_n)_{n \geq 1}; \text{ existe } n_0 \text{ tal que } Q_n \subset \Omega \text{ para todo } n \geq n_0\} \quad (\text{I.3.A})$$

donde  $\Omega \subset X$  es cualquier conjunto abierto de frontera compacta.

Dado un conjunto  $M \subset X$ , denotemos por  $M^{\mathcal{E}}$  a la intersección  $M^{\mathcal{E}} = \overline{M}^{{}^{\mathfrak{q}}X} \cap \mathcal{E}(X)$ .

**Nota I.3.12.** Si  $A \subset K \subset X$  con  $K$  compacto, es inmediato comprobar que  $A^{\mathcal{E}} = K^{\mathcal{E}} = \emptyset$ . Como consecuencia, si  $A, B \subset X$  son dos conjuntos tales que su diferencia  $A - B \subset X$  está contenida en un compacto entonces  $A^{\mathcal{E}} = B^{\mathcal{E}}$ .

**Lema I.3.13.** Para cualquier abierto básico  ${}^{\mathfrak{q}}\Omega \subset \widehat{X}$  se tiene que  ${}^{\mathfrak{q}}\Omega = \Omega \cup \Omega^{\mathcal{E}}$ .

**Demostración.** La inclusión  ${}^{\mathfrak{q}}\Omega \subset \Omega \cup \Omega^{\mathcal{E}}$  sigue directamente de (I.3.A). Para ver que  $\Omega^{\mathcal{E}} \subset {}^{\mathfrak{q}}\Omega$  supongamos que existe un  $\mathfrak{q}$ -final  $\varepsilon = (Q_n)_{n \geq 1} \in \overline{\Omega}^{{}^{\mathfrak{q}}X} - {}^{\mathfrak{q}}\Omega$ , esto es,  $Q_n \not\subset \Omega$  para todo  $n$ . Como  $\text{Fr}\Omega$  es compacta tenemos que  $\text{Fr}\Omega \subset \text{int}K_{n_0}$  para algún  $n_0$  en una sucesión exhaustiva  $\{K_n\}_{n \geq 1}$ . Entonces,  $\Omega_n = \Omega - \text{int}K_n$  es abierto y cerrado de  $X - \text{int}K_n$  para todo  $n \geq n_0$ . Puesto que  $Q_n \subset X - \text{int}K_n$  es una cuasicomponente, necesariamente

$$Q_n \subset (X - \text{int}K_n) - \Omega = (X - \text{int}K_n) - \Omega_n \quad (n \geq n_0). \quad (\text{I.3.B})$$

Como  $W_n = (X - \text{int}K_n) - \Omega_n$  es abierto y cerrado de  $X - \text{int}K_n$  se deduce que  $U_n = W_n \cap (X - K_{n+1})$  es abierto de  $X - K_{n+1} \subset X - \text{int}K_n$  y por tanto abierto de  $X$ . Finalmente, como  $Q_{n+2} \subset U_n$ , tenemos que  $\varepsilon \in {}^{\mathfrak{q}}U_n$  y



$U_n \cap \Omega \neq \emptyset$  por ser  $\varepsilon$  adherente a  $\Omega$  en  ${}^qX$ , lo que contradice que  $\Omega \cap U_n = \emptyset$  por (I.3.B).  $\square$

Más aún,

**Lema I.3.14.** *La familia de conjuntos de la forma  $A^b = A \cup A^\varepsilon$  donde  $A$  varía entre todos los subconjuntos cerrados de frontera compacta en  $X$  forma una base de conjuntos cerrados en  ${}^qX$ .*

**Demostración.** El complementario  $\Omega = X - A$  es un conjunto abierto de frontera compacta  $\text{Fr}\Omega = \text{Fr}A$  contenida en el interior de algún compacto  $K$ . Por lo tanto  $A \cap (X - \text{int}K)$  y  $\Omega \cap (X - \text{int}K)$  forman una partición de  $X - \text{int}K$  en dos conjuntos abiertos y así  $A^\varepsilon = \mathcal{E}(X) - \Omega^\varepsilon$ . Entonces,  $A^b = {}^qX - {}^q\Omega$  por el Lema I.3.13 y el resultado sigue.  $\square$

**Proposición I.3.15.** *Sean  $X$  un continuo generalizado y  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión exhaustiva de  $X$ . Entonces se verifican:*

- (a) *La topología relativa de  $\mathcal{E}(X)$  en  ${}^qX$  coincide con la del límite inverso  $\varprojlim \{\mathcal{Q}(X - \text{int}K_n), i_n\}$  donde la aplicación de enlace  $i_n : \mathcal{Q}(X - \text{int}K_{n+1}) \rightarrow \mathcal{Q}(X - \text{int}K_n)$  es la inducida por la inclusión para cada  $n \geq 1$ .*
- (b)  *$\mathcal{E}(X)$  es homeomorfo a un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor y por tanto es compacto, 0-dimensional y totalmente desconexo.*

En la demostración de esta proposición usaremos el siguiente lema que sigue inmediatamente de la definición de la topología de  ${}^qX$  en (I.3.A).

**Lema I.3.16.** *Sean  $X$  un continuo generalizado y  $\varepsilon = (Q_n)_{n \geq 1}$  un  $\mathfrak{q}$ -final de  $X$ . Entonces toda sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$  tal que  $x_n \in Q_n$  converge a  $\varepsilon$  en  ${}^qX$ .*

**Demostración de la Proposición I.3.15.** Es obvio que  $\mathcal{E}(X)$  y  $L = \varprojlim \{\mathcal{Q}(X - \text{int}K_n), i_n\}$  coinciden como conjuntos.

Para ver que también son iguales como espacios topológicos recordemos que si  $p_n : \mathcal{E}(X) = L \rightarrow \mathcal{Q}(X - \text{int}K_n)$  son las proyecciones canónicas entonces una base de la topología del límite inverso  $L$  está formada por las anteimágenes

$p_n^{-1}(A^\diamond)$  donde  $A$  recorre todos los conjuntos abiertos y cerrados de  $X - \text{int}K_n$  (ver Teorema B.4). Tras esta observación será suficiente comprobar la igualdad

$$p_n^{-1}(A^\diamond) = A_0^\varepsilon = {}^qA_0 \cap \mathcal{E}(X). \quad (\text{I.3.C})$$

donde  $A_0 = A - K_n$  es abierto de  $X$  con frontera compacta  $\text{Fr}A_0 = \text{Fr}A$ . Esto demuestra que las topologías de  $\mathcal{E}(X)$  y  $L$  tienen bases coincidentes de acuerdo con el Lema I.3.13.

Terminamos demostrando la primera igualdad en (I.3.C). Para ello, sea  $\varepsilon = (Q_n)_{n \geq 1} \in p_n^{-1}(A^\diamond)$ ; es decir,  $p_n(\varepsilon) = Q_n \in A^\diamond$  por lo que  $Q_m \subset A$  para todo  $m \geq n$ . Si consideramos la sucesión  $\{x_m\}_{m \geq n}$  donde  $x_m \in Q_m \subset A$ , tenemos por el Lema I.3.16 que  $x_m \rightarrow \varepsilon$  y por consiguiente  $\varepsilon \in A^\varepsilon = A_0^\varepsilon$ .

Veamos ahora la contención contraria. Sea ahora  $\varepsilon = (Q_n)_{n \geq 1} \in A_0^\varepsilon$ . Entonces, como  $A_0$  es abierto de frontera compacta, por el Lema I.3.13 sabemos que existe un  $n_0$  tal que para todo  $n \geq n_0$  se cumple que  $Q_n \subset A_0 \subset A$  y por tanto  $\varepsilon \in p_n^{-1}(A^\diamond)$ . Con esto queda probado (I.3.C).

Veamos (b). Tenemos que  $\mathcal{Q}(X - \text{int}K_n)$  ( $n \geq 1$ ) es un subespacio cerrado del conjunto de Cantor (I.3.10), y por consiguiente es compacto, 0-dimensional y totalmente desconexo. Ahora  $\mathcal{E}(X) \cong \varprojlim \{\mathcal{Q}(X - \text{int}K_n), i_n\}$  es compacto por el Teorema B.5(d), y de ([24]; 7.3.16) se deduce que  $\mathcal{E}(X)$  es 0-dimensional y por tanto totalmente desconexo. Aplicando ([24]; 6.2.16) se concluye que  $\mathcal{E}(X)$  es un subespacio cerrado del conjunto de Cantor.  $\square$

**Nota I.3.17.** Dado un continuo generalizado  $X$ , su espacio de  $\mathfrak{q}$ -finales no depende de la sucesión exhaustiva que tomemos. En efecto, consideremos  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  y  $\{L_n\}_{n \geq 1}$  dos sucesiones exhaustivas de  $X$ . Entonces es fácil encontrar una subsucesión  $\{n_i\}_{i \geq 1}$  estrictamente creciente tal que  $K_1 \subset \text{int}L_{n_1} \subset \text{int}K_{n_2} \subset \text{int}L_{n_2} \subset \dots$  y por tanto el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{Q}_1 \equiv \mathcal{Q}(X - \text{int}K_1) & \leftarrow & \mathcal{Q}(X - \text{int}K_{n_2}) & \leftarrow & \mathcal{Q}(X - \text{int}K_{n_3}) & \leftarrow & \dots \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \mathcal{Q}_2 \equiv \mathcal{Q}(X - \text{int}L_{n_1}) & \leftarrow & \mathcal{Q}(X - \text{int}L_{n_2}) & \leftarrow & \mathcal{Q}(X - \text{int}L_{n_3}) & \leftarrow & \dots
 \end{array}$$

es conmutativo, luego las torres  $\mathcal{Q}_1$  y  $\mathcal{Q}_2$  son pro-isomorfias (ver Apéndice B); y más aún, como las torres obtenidas por subsucesiones crecientes son pro-isomorfias a las torres originales (Lema B.1) el resultado sigue del Teorema B.3.

El siguiente lema es crucial para demostrar que  ${}^{\mathfrak{A}}X$  es compacto.

**Lema I.3.18.** *Sean  $X$  un continuo generalizado y  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión exhaustiva de  $X$ . Si  ${}^{\mathfrak{A}}\Omega_1 \dots {}^{\mathfrak{A}}\Omega_n$  es un recubrimiento de  $\mathcal{E}(X)$  por abiertos básicos de  ${}^{\mathfrak{A}}X$  en (I.3.A), existe un  $m \geq 1$  tal que cada cuasicomponente  $Q \subset X - \text{int}K_m$  esta contenida en algún  $\Omega_i$  con  $1 \leq i \leq n$ . En particular  $X - \text{int}K_m \subset \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$ .*

**Demostración.** Sea  $m_0$  tal que  $\bigcup_{i=1}^n \text{Fr}\Omega_i \subset \text{int}K_{m_0}$ . Podemos asumir  $m_0 = 1$  y supongamos que para todo  $m \geq 1$  existe  $Q_m \in \mathcal{Q}(X - \text{int}K_m)$  con  $Q_m \not\subset \Omega_i$  para todo  $i \leq n$ . Como  $\Omega_i - K_m$  es un conjunto abierto y cerrado en  $X - \text{int}K_m$  para todo  $m \geq 1$ , necesariamente  $Q_m \cap \Omega_i = \emptyset$  para todo  $m \geq 1$  e  $i \leq n$ . Para cada  $m$  sea  $Q_m^1 \in \mathcal{Q}(X - \text{int}K_1)$  la cuasicomponente que contiene a  $Q_m$ . Por la Proposición I.3.10, existe una subsucesión  $S_1 \subset \mathbb{N}$  tal que  $\{Q_s^1\}_{s \in S_1}$  converge a una cuasicomponente  $Q_1^0 \in \mathcal{Q}(X - \text{int}K_1)$ . Ahora para cada  $s \in S_1$  sea  $Q_s^2 \in \mathcal{Q}(X - \text{int}K_2)$  la cuasicomponente que contiene a  $Q_s^1$  con  $s \geq 2$ . De nuevo la Proposición I.3.10 nos proporciona una subsucesión  $S_2 \subset S_1$  con  $\{Q_s^2\}_{s \in S_2}$  convergiendo a una cuasicomponente  $Q_2^0 \in \mathcal{Q}(X - \text{int}K_2)$ . La continuidad de la aplicación inducida por la inclusión  $X - \text{int}K_2 \subset X - \text{int}K_1$  nos indica que  $Q_2^0 \subset Q_1^0$ . Reiterando este proceso obtenemos un final  $\varepsilon_0 = (Q_n^0)_{n \geq 1} \in \mathcal{E}(X)$  y por tanto  $\varepsilon \in {}^{\mathfrak{A}}\Omega_{i_0}$  para algún  $i_0$ . Es decir, existe  $n_0$  tal que  $Q_n^0 \subset \Omega_{i_0}$  si  $n \geq n_0$  y si  $U = \Omega_{i_0} - \text{int}K_{n_0}$  tenemos que  $U^\diamond$  es un entorno básico de  $Q_{n_0}^0$  en  $\mathcal{Q}(X - \text{int}K_{n_0})$  y por tanto hay cuasicomponentes  $Q_m$  dentro de  $U \subset \Omega_{i_0}$ . Esta contradicción demuestra el lema.  $\square$

**Proposición I.3.19.** *Si  $X$  es un continuo generalizado entonces el espacio  ${}^{\mathfrak{A}}X$  es compacto.*

**Demostración.** Si  $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  es un recubrimiento por abiertos básicos de  ${}^{\mathfrak{A}}X$ , la compacidad de  $\mathcal{E}(X)$  nos da una cantidad finita de abiertos básicos  $W_{\alpha_i} = {}^{\mathfrak{A}}\Omega_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) que cubren a  $\mathcal{F}(X)$ . Ahora aplicamos el Lema I.3.18 y encontramos un  $m$  tal que  $X - \text{int}(\bigcup_{i=1}^n \Omega_i) \subset \text{int}K_m$ .

Concluimos, usando la compacidad de  $K_m$ , que  $\mathcal{W}$  admite una subrecubrimiento finito.  $\square$

## §I.4. Equivalencia de ambas definiciones de finales

A continuación probaremos que para todo continuo generalizado  $X$  la compactificación de Freudenthal  $\widehat{X}$  es homeomorfa al espacio  ${}^{\mathfrak{q}}X$  de forma que los finales de Freudenthal se identifican con los  $\mathfrak{q}$ -finales en  ${}^{\mathfrak{q}}X$ .

Sea  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión exhaustiva del continuo generalizado  $X$ . Dado un  $\mathcal{A}$ -ultrafiltro  $\mathcal{U} \in \mathcal{F}(X)$ , consideramos, para cada  $i \geq 1$ , la familia

$$\mathcal{U}_n = \{U \in \mathcal{U}; \text{Fr}U \subset \text{int}K_n\}. \quad (\text{I.4.A})$$

Observemos que para cada  $U \in \mathcal{U}$  existe un  $n_0$  tal que  $U \in \mathcal{U}_n$  para todo  $n \geq n_0$ . Es más, la conexión de  $X$  establece  $U \cap \text{Fr}K_n \neq \emptyset$  para todo  $U \in \mathcal{U}_n$ . Notemos también que  $\mathcal{U}_n \neq \emptyset$  pues  $X - \text{int}K_{n-1} \in \mathcal{U}_n$ . Más aún, por la compacidad de  $\text{Fr}K_n$  la colección de conjuntos cerrados  $\{U \cap \text{Fr}K_n; U \in \mathcal{U}_n\}$  tiene una intersección no vacía

$$L_n = \left( \bigcap_{U \in \mathcal{U}_n} U \right) \cap \text{Fr}K_n \neq \emptyset. \quad (\text{I.4.B})$$

Para cada  $n \geq 1$ , el conjunto cerrado  $L_n$  es un subconjunto compacto de  $\text{Fr}K_n$ . Por otro lado, la familia  $\{\text{Fr}K_n\}_{n \geq 1}$  es localmente finita y por tanto la unión  $L(\mathcal{U}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$  es un conjunto cerrado en  $X$ . Además tenemos

**Lema I.4.1.** *El conjunto  $L^{\mathcal{E}} = L(\mathcal{U})^{\mathcal{E}}$  consiste en un único  $\mathfrak{q}$ -final  $\varepsilon_{\mathcal{U}}$ .*

**Demostración.** Primero, observemos que  $L^{\mathcal{E}} \neq \emptyset$ . De otra forma, cada  $\mathfrak{q}$ -final  $\varepsilon$  tiene un entorno abierto básico  ${}^{\mathfrak{q}}\Omega_{\varepsilon}$  disjunto con  $L$ . La compacidad de  $\mathcal{E}(X)$  (ver el Teorema I.3.15(b)) nos da un número finito de  $\mathfrak{q}$ -finales  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$  tales que  $\mathcal{E}(X) \subset W = \bigcup_{i=1}^m {}^{\mathfrak{q}}\Omega_{\varepsilon_i}$ . En particular, existe un  $n_0$  para el cual

$X - K_n \subset W$  para todo  $n \geq n_0$  y así  $L_{n+1} \subset W \cap L = \emptyset$ , que es una contradicción.

Seguidamente probaremos que  $L^\mathcal{E}$  consiste en exactamente un  $\mathfrak{q}$ -final. Para esto, supongamos por un momento que  $\varepsilon = (Q_n)_{n \geq 1}$  y  $\varepsilon' = (Q'_n)_{n \geq 1}$  son dos  $\mathfrak{q}$ -finales en  $L^\mathcal{E}$ . Entonces encontramos un  $i \geq 1$  tal que existe un conjunto abierto y cerrado  $H$  en  $X - \text{int}K_i$ , y por tanto cerrado de frontera compacta  $\text{Fr}H \subset \text{Fr}K_i$ , con  $Q_n \subset H$  y  $Q'_n \cap H = \emptyset$  para todo  $n \geq i$ . Si tomamos  $H' = (X - \text{int}K_i) - H$  y  $H_0 = H - K$  y  $H'_0 = H' - K$ , entonces  ${}^{\mathfrak{q}}H_0$  y  ${}^{\mathfrak{q}}H'_0$  son entornos abiertos básicos de  $\varepsilon$  y  $\varepsilon'$ , respectivamente. Como  $\varepsilon, \varepsilon' \in \overline{L}^{\mathfrak{q}X}$ , existen subsucesiones  $\{x_{n_s}\}$  y  $\{x_{n_t}\}$  de elementos  $x_n \in L_n$  con  $x_{n_s} \in H_0 \subset H$  y  $x_{n_t} \in H'_0 \subset H'$  para  $s, t \geq 1$ . Así,  $x_{n_s} \in \left(\bigcap_{U \in \mathcal{U}_{n_s}} U\right) \cap H \neq \emptyset$ , y por tanto  $H \cap U \neq \emptyset$  para todo  $U \in \mathcal{U}$  pues cualquier  $U \in \mathcal{U}$  pertenece a algún  $\mathcal{U}_{n_s}$ . Siendo  $\mathcal{U}$  un ultrafiltro, obtenemos  $H \in \mathcal{U}$ . Pero entonces,  $x_{n_t} \in H$  para  $n_t$  suficientemente grande. Esto es una contradicción, y por tanto  $L^\mathcal{E}$  sólo contiene un elemento.  $\square$

**Nota I.4.2.** Obsérvese que  $\varepsilon_{\mathcal{U}} \in A^\mathcal{E}$  para todo  $A \subset X$  tal que  $U - A$  sea compacto para algún  $U \in \mathcal{U}$ . En efecto, si  $\text{Fr}U \subset \text{int}K_{n_0}$  entonces  $U \in \mathcal{U}_n$  para todo  $n \geq n_0$  y  $L(\mathcal{U}) - U \subset \text{int}K_{n_0}$  pues  $L_n \subset U$  si  $n \geq n_0$ . De donde  $L(\mathcal{U})^\mathcal{E} \subset U^\mathcal{E} = A^\mathcal{E}$  de acuerdo con la Nota I.3.12.

El Lema I.4.1 define una aplicación

$$\tilde{\Psi} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{E}(X) \tag{I.4.C}$$

estableciendo que  $\tilde{\Psi}(\mathcal{U}) = \varepsilon_{\mathcal{U}}$ .

**Proposición I.4.3.** *La aplicación  $\tilde{\Psi}$  en (I.4.C) es un homeomorfismo.*

**Demostración.** Primero veremos que  $\tilde{\Psi}$  es biyectiva. Para esto, dados dos  $\mathcal{A}$ -ultrafiltros distintos  $\mathcal{U}, \mathcal{W} \in \mathcal{F}(X)$  encontramos  $U \in \mathcal{U}$  y  $W \in \mathcal{W}$  con  $U \cap W = \emptyset$ . Aquí usamos que  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{W}$  son ultrafiltros (ver Proposición A.2). Con la notación de (I.4.B), podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $U \in \mathcal{U}_{n_0}$  y  $W \in \mathcal{W}_{n_0}$  para algún  $n_0$ . Si tomamos los abiertos de frontera compacta  $U_0 = U - K_0$  y  $W_0 = W - K_0$  tenemos que  $\varepsilon_{\mathcal{U}} \in U_0^\mathcal{E}$  y  $\varepsilon_{\mathcal{W}} \in W_0^\mathcal{E}$  de acuerdo con la Nota I.4.2 y por tanto  $Q_n \subset U_0 \subset U$  y  $Q'_n \subset W_0 \subset W$  para  $n$

suficientemente grande, de donde  $Q_n \cap Q'_n = \emptyset$  y  $\varepsilon_{\mathcal{U}} \neq \varepsilon_{\mathcal{W}}$ . Esto demuestra que  $\tilde{\Psi}$  es inyectiva.

Además,  $\tilde{\Psi}$  es sobreyectiva. De hecho, dado  $\varepsilon = (Q_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{E}(X)$ , sea para cada  $n$  la familia  $\mathcal{H}_n$  de todos los conjuntos abiertos y cerrados en  $X - \text{int}K_n$  tales que  $Q_n = \bigcap \{H; H \in \mathcal{H}_n\}$ . Entonces la unión  $\mathcal{H} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$  es una base para un  $\mathcal{A}$ -filtro. Sea  $\mathcal{U}$  un  $\mathcal{A}$ -ultrafiltro que contenga a  $\mathcal{H}$ . Entonces para cualquier  $n \geq 1$

$$L_n = \left( \bigcap_{U \in \mathcal{U}_n} U \right) \cap \text{Fr}K_n \subset \left( \bigcap_{H \in \mathcal{H}_n} H \right) \cap \text{Fr}K_n \subset Q_{n-1}.$$

Por lo tanto  $\varepsilon = \varepsilon_{\mathcal{U}} = \tilde{\Psi}(\mathcal{U})$ .

Finalmente,  $\tilde{\Psi}$  es un homeomorfismo. Para ello, por el Lema I.3.14 será suficiente comprobar que

$$\tilde{\Psi}^{-1}(A^\varepsilon) = \mathcal{B}(A) \cap \mathcal{F}(X)$$

para cualquier conjunto cerrado  $A$  de frontera compacta,  $\text{Fr}A \subset \text{int}K_n$ . Para esto, sea  $\mathcal{U} \in \mathcal{B}(A)$ . Por definición  $A \in \mathcal{U}$ , y así  $A \in \mathcal{U}_m$  para todo  $m \geq n$ . En consecuencia  $\tilde{\Psi}^{-1}(\mathcal{U}) = \varepsilon_{\mathcal{U}} \in A^\varepsilon$ , por la Nota I.4.2. Recíprocamente, si  $\varepsilon_{\mathcal{U}} \in A^\varepsilon$  entonces existe una subsucesión  $\{n_j\}_{j \geq 1}$  tal que  $n_j \geq n$  y  $A \cap L_{n_j} \neq \emptyset$  para cada  $j \geq 1$ . En efecto, para cada  $m \geq n$  el conjunto  $A_m = A - K_m$  es abierto en  $X$  con frontera compacta y como  $A - A_m \subset K_m$  se sigue de la Nota I.3.12 que  $\varepsilon_{\mathcal{U}} \in A^\varepsilon = A_m^\varepsilon \subset \mathfrak{A}_m$  donde  $\mathfrak{A}_m$  es un entorno abierto básico de  $\varepsilon_{\mathcal{U}}$  en  $\mathfrak{X}$  y por tanto  $A_m \cap L = \mathfrak{A}_m \cap L \neq \emptyset$  y existe  $k \geq m$  con  $\emptyset \neq A_m \cap L_k \subset A \cap L_k$ .

De lo anterior se sigue que  $A \cap U \neq \emptyset$  para todo  $U \in \mathcal{U}_{n_j}$ . Como cualquier  $U \in \mathcal{U}$  pertenece a  $\mathcal{U}_{n_j}$  para algún  $n_j$ , necesariamente  $A \in \mathcal{U}$ ; esto es,  $\mathcal{U} \in \mathcal{B}(A)$ . Aquí usamos que  $\mathcal{U}$  es un  $\mathcal{A}$ -ultrafiltro.  $\square$

Extendemos  $\tilde{\Psi}$  a una aplicación

$$\Psi : \hat{X} \rightarrow \mathfrak{X} \tag{I.4.D}$$

definida como  $\Psi(\mathcal{U}_x) = x$  si  $x \in X$ . De esta forma se tiene que

**Teorema I.4.4.** *La aplicación  $\Psi$  en (I.4.D) es un homeomorfismo.*

**Demostración.** Claramente  $\Psi$  es una biyección. Más aún, la demostración de la Proposición I.4.3 nos da que  $\Psi^{-1}(A^b) = \mathcal{B}(A)$  para cualquier conjunto cerrado de frontera compacta  $A$ , y (I.2.A) y el Lema I.3.14 implican que  $\Psi$  es un homeomorfismo.  $\square$

**Nota I.4.5.** Mediante el homeomorfismo  $\Psi$  en (I.4.D) la aplicación inducida  $f_* : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$  se puede leer en términos de cuasicomponentes como sigue: se consideran las sucesiones exhaustivas  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  y  $\{L_k\}_{k \geq 1}$  de  $X$  e  $Y$  respectivamente. Se elige una subsucesión  $\{n_k\}_{k \geq 1}$  con  $f(X - K_{n_k}) \subset Y - L_k$  para todo  $k \geq 1$  y si  $\varepsilon = (Q_n)_{n \geq 1}$  con  $Q_n \subset X - K_n$  cuasicomponente, se toma  $f_*(\varepsilon) = (D_k)_{k \geq 1}$  donde  $D_k \subset Y - L_k$  es la cuasicomponente con  $f(Q_{n_k}) \subset D_k$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{F}(Y) \\ \widetilde{\Psi}_X \downarrow \cong & & \cong \downarrow \widetilde{\Psi}_Y \\ \mathcal{E}(X) & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{E}(Y) \end{array}$$

En efecto, cualquier sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  con  $x_n \in Q_n$  converge a  $\varepsilon$  (I.3.16), y por tanto  $\widetilde{\Psi}_Y \widehat{f} \widetilde{\Psi}_X^{-1}(x_{n_k}) = f(x_{n_k})$  converge a  $\widetilde{\Psi}_Y f_* \widetilde{\Psi}_X^{-1}(\varepsilon)$ . Aquí usamos que  $\widehat{f}$  extiende a  $f$  y que  $\widetilde{\Psi}_X$  y  $\widetilde{\Psi}_Y$  extienden a las correspondientes identidades. Entonces  $f(x_{n_k}) \in D_k$ , y de nuevo por el Lema I.3.16  $f(x_{n_k})$  converge al final  $(D_k)_{k \geq 1}$ . Así pues  $\widetilde{\Psi}_Y f_* \widetilde{\Psi}_X^{-1}(\varepsilon) = (D_k)_{k \geq 1}$  como afirmábamos.

**Nota I.4.6.** La descripción de la compactificación de Freudenthal por medio del espacio  ${}^qX$  en el Teorema I.4.4 no es válido si  $X$  deja de ser conexo. En efecto, para el subespacio euclídeo  $X = \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^2$  el subespacio  ${}^qX$  es homeomorfo a  $\mathbb{N} \times [0, 1]$  y por tanto no compacto. De hecho  $\widehat{X}$  en este caso no es un espacio metrizable de acuerdo con el siguiente

**Teorema I.4.7** ([41]; Thm. VI.4.2). *Sea  $X$  un espacio métrico separable localmente compacto<sup>4</sup>. Entonces  $\widehat{X}$  es metrizable si y sólo si el espacio de cuasicomponentes  $\mathcal{Q}(X)$  es compacto.*

<sup>4</sup>El teorema está enunciado más generalmente con la rim-compacidad en vez de la compacidad local. Ver la nota (1) en la página 6.

**Nota I.4.8.** En particular, cuando  $\mathcal{Q}(X)$  es compacto es posible obtener una descripción alternativa de la compactificación de Freudenthal usando sucesiones; para este enfoque ver [5].

Si  $X$  es un continuo generalizado, la metrizabilidad de  ${}^qX = \widehat{X}$  puede ser verificada como sigue. Como  ${}^qX$  es compacto, el Teorema de metrización de Urysohn ([24]; 4.2.8) nos dice que  ${}^qX$  es metrizable si y sólo si es un espacio segundo numerable. Para obtener una base numerable de abiertos de  ${}^qX$  se toma una sucesión exhaustiva de  $X$ ,  $\{K_n\}_{n \geq 1}$ , y para cada  $n$  se usa la Proposición I.3.10 para encontrar una base numerable  $\{A_{(n,m)}^\diamond\}_{m \geq 1}$  de  $\mathcal{Q}(X - \text{int}K_n)$  donde los  $A_{(n,m)}$  son abiertos y cerrados de  $X - \text{int}K_n$ .

Así pues cada  $B_{(n,m)} = A_{(n,m)} - K_n$  es un conjunto abierto en  $X$  de frontera compacta que define el abierto básico  ${}^qB_{(n,m)}$  de  ${}^qX$ . Como  $X$  es segundo numerable (I.3.1), si  $\mathcal{B}_0$  es una base numerable de abiertos de  $X$  y  $\mathcal{B}_1 = \{{}^qB_{(n,m)}\}_{n,m \geq 1}$ , no es difícil comprobar que  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$  es una base numerable de abiertos para  ${}^qX$ . En efecto, si  $\varepsilon = (Q_n)_{n \geq 1} \in {}^q\Omega$  entonces  $\text{Fr}\Omega \subset \text{int}K_{n_0}$  y  $Q_{n_0} \subset \Omega - K_{n_0}$  para algún  $n_0$ . Así pues  $W = \Omega - K_{n_0}$  es un abierto y cerrado de  $X - K_{n_0}$  y existe algún elemento básico  $A_{(n_0,m_0)}^\diamond$  con  $Q_{n_0} \in A_{(n_0,m_0)}^\diamond \subset W^\diamond$ ; es decir  $Q_{n_0} \subset A_{(n_0,m_0)}$  y  $\varepsilon \in {}^qB_{(n_0,m_0)} \subset {}^q\Omega$ .

En particular tenemos como consecuencia

**Proposición I.4.9.** *Si  $X$  es un continuo generalizado, entonces  $\widehat{X}$  es un continuo.*

**NOTACIÓN. A PARTIR DE AHORA ABANDONAREMOS LA NOTACIÓN  ${}^qX$  Y  $\mathcal{E}(X)$ . USAREMOS SIEMPRE  $\widehat{X}$  Y  $\mathcal{F}(X)$  SIENDO EL CONTEXTO EL QUE DETERMINE SI PODEMOS USAR CUASICOMPONENTES O DEBEMOS MANTENER EL LENGUAJE DE ULTRAFILTROS.**

Los siguientes resultados serán de utilidad en las secciones posteriores.

**Lema I.4.10.** *Si  $X$  es un continuo generalizado y  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión exhaustiva de  $X$ , toda sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$  con  $x_n \in X - K_n$  tiene al menos una final  $\varepsilon \in \mathcal{F}(X)$  como punto de acumulación en  $\widehat{X}$ .*

**Demostración.** Puesto que  $\widehat{X}$  es un continuo (I.4.9), existe una subsucesión  $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1}$  convergente a un  $x_0 \in \widehat{X}$ . Además, es obvio que  $x_0 \in \mathcal{F}(X)$ .  $\square$



**Lema I.4.11.** *Sea  $X$  un continuo generalizado y  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión exhaustiva de  $X$ . Para todo punto  $p \in X$  existe una sucesión de continuos  $C_n \subset X$  ( $n \geq 1$ ) tales que  $p \in C_1$ ,  $C_{n+1} - K_n \neq \emptyset$  y  $C_n \subset C_{n+1}$  para todo  $n \geq 1$ .*

En la demostración de este lema y el que sigue usaremos el bien conocido “Teorema de los tropezos en la frontera”.

**Teorema I.4.12** ([59]; 5.6). *Si  $A \subset X$  es un subconjunto no trivial de un continuo  $X$  y  $C$  es una componente conexa de  $A$ , entonces  $\overline{C} \cap \text{Fr}A \neq \emptyset$ . En particular, si  $A = X - \{p\}$ , entonces  $p$  pertenece a la clausura de cualquier componente  $C \subset A$ .*

**Demostración del Lema I.4.11.** Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $p \in \text{int}K_1$ . Sea  $C_1$  la componente conexa de  $p$  en  $K_1$ . Como la compactificación de Freudenthal  $\widehat{X}$  es un continuo (I.4.9), el Teorema I.4.12 aplicado a  $\widehat{X}$  establece que  $C_1 \cap \text{Fr}K_1 \neq \emptyset$ . Sea  $p_1 \in C_1 \cap \text{Fr}K_1$  y escojamos  $C_2$  la componente conexa de  $p_1$  en  $K_2$ . Obsérvese que  $C_1 \subset C_2$  y que  $C_2 \cap \text{Fr}K_2 \neq \emptyset$  también, y por tanto  $C_2 - K_1 \neq \emptyset$ . Procediendo inductivamente de esta forma, obtenemos la sucesión de continuos deseada.  $\square$

**Lema I.4.13.** *Dada una sucesión exhaustiva  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  de un continuo generalizado  $X$ , consideremos  $\varepsilon = (Q_n)_{n \geq 1}$  un final de Freudenthal definido por la sucesión encajada de cuasicomponentes  $Q_n \subset X - \text{int}K_n$ . Para cada  $n \geq 1$  existe un continuo  $L \subset \widehat{X} - \text{int}K_n$  en la compactificación de Freudenthal  $\widehat{X}$  uniendo  $\varepsilon$  y  $\text{Fr}K_n$ . Es más, cada  $Q_n$  ( $n \geq 1$ ) contiene al menos una componente conexa no compacta.*

**Demostración.** Cualquier sucesión  $\{x_k\}_{k \geq n}$  con  $x_k \in Q_k$  converge a  $\varepsilon$  en  $\widehat{X}$  (I.3.16). Denotemos por  $D_k$  la componente conexa de  $x_k$  en  $\widehat{X} - \text{int}K_n$ . Afirmamos que  $D_k \cap X \subset Q_n$  para todo  $k \geq n$ . En efecto, para cualquier conjunto abierto y cerrado  $H$  en  $X - \text{int}K_n$  con  $Q_n \subset H$ , sabemos de la topología de  $\widehat{X}$  (I.3.A), que el conjunto  $\widehat{H} = H \cup H^{\mathcal{F}}$  con  $H^{\mathcal{F}} = \overline{H}^{\widehat{X}} \cap \mathcal{F}(X)$  es cerrado y abierto en  $\widehat{X} - \text{int}K_n$  conteniendo  $x_k$ . Entonces  $D_k \subset \widehat{H}$  por conexión y así  $D_k \cap X \subset H$ ; esto es,  $D_k \cap X \subset Q_n$  por definición de cuasicomponente.

Ahora aplicamos el Teorema I.4.12 a  $\widehat{X} - \text{int}K_n \subset \widehat{X}$  para deducir que  $D_k$  corta a  $\text{Fr}(\text{int}K_n) \subset \text{Fr}K_n$  para todo  $k \geq n$ . Por compacidad de  $\text{Fr}K_n$  podemos asumir sin pérdida de generalidad que existe una sucesión  $y_k \in D_k \cap \text{Fr}K_n \subset Q_n$  convergiendo a algún  $y_0 \in Q_n \cap \text{Fr}K_n$ . Aquí usamos que  $Q_n$  es un conjunto cerrado.

Como  $y_0$  cae en el límite inferior  $\text{Li}D_k$ , entonces ([45]; Thm. 6, pág. 171) establece que el límite superior  $L = \text{Ls}D_k \subset \widehat{X} - \text{int}K_n$  es un continuo con  $\varepsilon \in L$  y  $y_0 \in \text{Fr}K_n \cap L$ .

Aplicamos ahora el Teorema I.4.12 a  $L_0 = \mathcal{F}(X) \cap L \subset L$  y obtenemos que la clausura en  $L$  de la componente de  $y_0$ ,  $C \subset L - L_0$ , corta al conjunto cerrado de finales  $L_0$ . Por tanto  $C$  es un conjunto cerrado conexo y no compacto en  $X - \text{int}K_n$  conteniendo  $y_0 \in Q_n$ . Luego  $C \subset Q_n$  por definición de cuasicomponente, y la componente de  $y_0$  en  $Q_n$  es necesariamente no compacta al contener a  $C$ . □

Tal y como vemos en el siguiente ejemplo, la componente no acotada dada por el Lema I.4.13 no tiene por qué ser única.

**Ejemplo I.4.14.** Consideremos el continuo generalizado  $X$  descrito en la Figura I.1. Es fácil comprobar que  $X$  tiene un final de Freudenthal y que la cuasicomponente fuera de  $[0, n) \times [0, 1]$  consiste en dos componentes no acotadas,  $[n_a, \infty)$  y  $[n, \infty)$ .

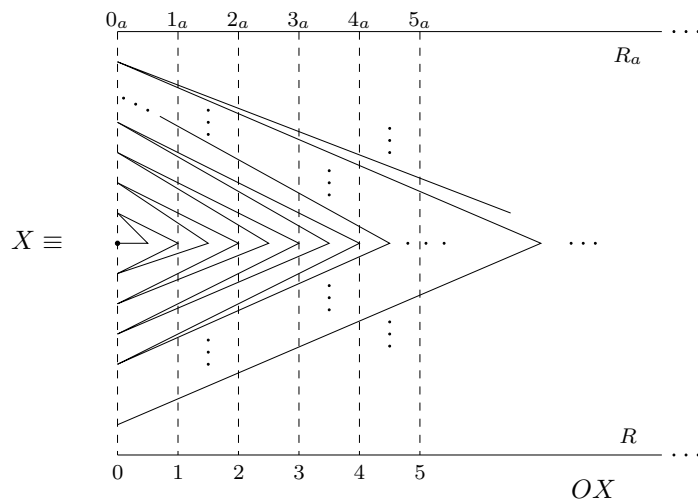


Figura I.1: Continuo generalizado con un final de Freudenthal.

La unicidad de estas componentes se tiene cuando los continuos generalizados son además localmente conexos. Estos espacios se estudiarán en el Capítulo II. Aquí damos simplemente algunos ejemplos que ilustran este caso.

**Ejemplos I.4.15.** (a) La semirecta euclídea  $\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$  posee exactamente un final de Freudenthal; la recta euclídea  $\mathbb{R}$  tiene dos. Todos los espacios euclídeos  $\mathbb{R}^n$  con  $n \geq 2$  tienen exactamente un final de Freudenthal.

(b) Sea  $X = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\} \cup \mathbb{N} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathbb{R}^2$  el subespacio del plano euclídeo representado en la siguiente figura.

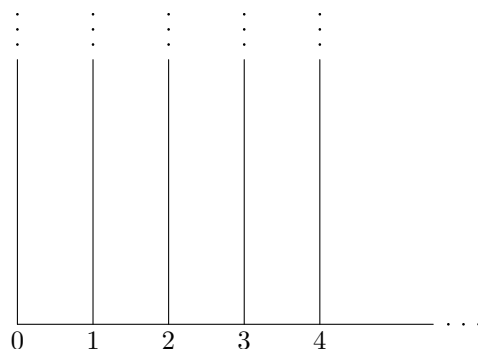


Figura I.2: Peine infinito.

Entonces  $\mathcal{F}(X)$  es homeomorfo a  $\{1/n\}_{n \geq 1} \cup \{0\}$ .

(c) El *árbol binario de Cantor*  $T_{\mathcal{C}}$  es el subespacio de  $(0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$  indicado en la figura siguiente

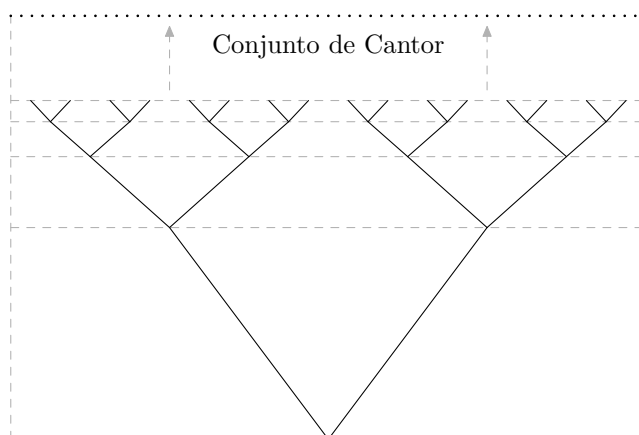


Figura I.3: Árbol binario de Cantor.

donde los vértices en el nivel  $\frac{n-1}{n}$  ( $n \geq 1$ ) corresponden a los puntos medios de los  $2^{n-1}$  intervalos que son quitados en el  $n$ -ésimo paso de la construcción del conjunto triádico de Cantor  $\mathfrak{C}$  ([26]; 4.4) Entonces el espacio de finales  $\mathcal{F}(T_{\mathfrak{C}})$  es homeomorfo al conjunto de Cantor  $\mathfrak{C}$ .

# Continuos generalizados de Peano

---

La presencia de la conexión local (o propiedad de Peano) simplifica considerablemente la topología de los continuos (generalizados). Este capítulo recoge algunos resultados que resaltan el papel de los árboles en la clase de los continuos generalizados de Peano. Por una parte, cualquiera de estos espacios posee un árbol inmerso que determina sus finales de Freudenthal. Por otra, todo continuo generalizado de Peano es la imagen por una aplicación propia de un árbol. Este último resultado es la versión no compacta del clásico Teorema de Hahn-Mazurkiewicz.

El capítulo se divide en dos partes: en la Sección §II.1 y su Apéndice §II.1A se repasan resultados ya conocidos sobre los finales de Freudenthal en continuos generalizados de Peano. Las dos secciones siguientes contienen aportaciones originales que aplican resultados de la sección anterior para dar una demostración alternativa de un teorema reciente de M. Bognár en relación con el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz y que permiten, además, varias generalizaciones involucrando los finales de Freudenthal.

## §II.1. Finales de Freudenthal en la clase de los continuos generalizados de Peano

Un *continuo (generalizado) de Peano* es un continuo (generalizado) localmente conexo.

**Nota II.1.1** ([68]; 4.2.5). Todo continuo (generalizado) de Peano es conexo por caminos y localmente conexo por caminos.

Históricamente los continuos de Peano aparecieron en el estudio de la noción de curva topológica que se inició con el famoso ejemplo de Peano, de una curva continua que llena el cuadrado y culminó cuando H. Hahn y S. Mazurkiewicz demostraron que los continuos de Peano son exactamente aquellos espacios que pueden ser obtenidos como imagen continua del intervalo cerrado  $[0, 1]$ . Es decir, los continuos de Peano son las “curvas continuas”; ver [56] ó [68]. Explícitamente,

**Teorema II.1.2** (Hahn-Mazurkiewicz). *Un espacio de Hausdorff es un continuo de Peano si y sólo si es la imagen del intervalo unidad  $I = [0, 1]$  por una aplicación continua.*

El Teorema de Hahn-Mazurkiewicz tiene la siguiente generalización a la categoría propia que usaremos repetidas veces. Este teorema será reconsiderado de nuevo en la Sección §II.2.

**Teorema II.1.3** ([2]; 2.4). *Sea  $X$  un espacio topológico no compacto. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a)  *$X$  es un continuo generalizado de Peano.*
- (b) *Existe un árbol  $T$  y una sobreyección propia  $g : T \rightarrow X$ . Es más,  $T$  y  $g$  se pueden escoger de tal manera que  $g_* : \mathcal{F}(T) \rightarrow \mathcal{F}(X)$  es un homeomorfismo.*
- (c) *Existe una sobreyección propia  $f : T_{\mathfrak{C}} \rightarrow X$  donde  $T_{\mathfrak{C}}$  es árbol binario de Cantor.*

(d)  $X$  admite una sucesión exhaustiva de subcontinuos de Peano.

La siguiente proposición para el caso localmente conexo es consecuencia inmediata del Teorema II.1.3 (y del Teorema de Hahn-Mazurkiewicz para el caso compacto). En general la demostración sigue directamente de las Proposiciones I.1.9 y I.1.10.

**Proposición II.1.4.** *Sea  $X$  un continuo generalizado (de Peano) y  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación propia sobreyectiva. Entonces  $Y$  es un continuo generalizado (de Peano).*

**Nota II.1.5.** Existen otras generalizaciones del Teorema de Hahn-Mazurkiewicz al caso no compacto. Recientemente ha aparecido en [32] un estudio que comprende el Teorema II.1.3 y donde el intervalo  $[0, 1]$  se reemplaza por otros espacios que los autores nombran “erizos” o “arañas”. Estos espacios son considerados con tantas “púas” (o “patas” en el caso de las arañas) como sean necesarias para cubrir los finales de un continuo generalizado de Peano  $X$ . El árbol binario de Cantor aparece en [32] como un caso especial de “araña con infinitas patas”.

En los continuos generalizados de Peano, la propiedad de conexión local nos permite mejorar la Proposición I.3.15(a). En efecto, si  $X$  es un continuo generalizado de Peano y  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión exhaustiva, puesto que  $X$  es localmente conexo, también lo es cada abierto  $X - K_n$  y tenemos que para cada  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{Q}(X - K_n) = \pi_0(X - K_n)$ ; donde el segundo miembro denota el espacio discreto de componentes conexas de  $X - K_n$  (ver ([45]; Thm. 2, pág. 169)). Evidentemente las inclusiones  $K_n \subset K_{n+1}$  definen una sucesión inversa

$$\{*\} = \pi_0(X) \leftarrow \pi_0(X - K_1) \leftarrow \cdots \leftarrow \pi_0(X - K_n) \leftarrow \cdots$$

Por otro lado, aunque en general  $\mathcal{Q}(X - K_n) \neq \mathcal{Q}(X - \text{int}K_n)$  sí se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{Q}(X - K_1) & \longleftarrow & \mathcal{Q}(X - K_2) & \longleftarrow & \mathcal{Q}(X - K_3) & \longleftarrow & \cdots \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & & \\ \mathcal{Q}(X - \text{int}K_1) & \longleftarrow & \mathcal{Q}(X - \text{int}K_2) & \longleftarrow & \mathcal{Q}(X - \text{int}K_3) & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

que representa un pro-isomorfismo (Apéndice B), de donde deducimos junto con (I.3.15) y (I.4.3) que  $\mathcal{F}(X) \cong \varprojlim\{\mathcal{Q}(X - \text{int}K_n), i_n\} \cong \varprojlim\{\mathcal{Q}(X - K_n), j_n\}$ . Tenemos como consecuencia inmediata de la observación anterior la siguiente

**Proposición II.1.6.** *Si  $X$  es un continuo generalizado de Peano,  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión exhaustiva de  $X$  y  $\mathcal{F}(X) \subset \widehat{X}$  su espacio de finales de Freudenthal, entonces*

$$\mathcal{F}(X) \cong \varprojlim\{\pi_0(X - \text{int}K_n), i_n\}.$$

donde  $\pi_0(-)$  denota el espacio (discreto) de las componentes conexas por caminos.

La Proposición II.1.6 puede ser completada con el siguiente

**Lema II.1.7** (c.f. ([32]; 4.6)). *Si  $X$  es un continuo generalizado de Peano entonces existe una sucesión exhaustiva  $\{K_n\}_{n \geq 1} \subset X$  donde para cada  $n$  sólo hay un número finito de componentes en  $X - K_n$  y todas ellas no acotadas.*

Recordemos que un subespacio  $A \subset X$  es *acotado* si su clausura  $\overline{A}$  es compacta.

**Demostración del Lema II.1.7.** Para toda componente conexa  $C \subset X - K_n$  tal que  $C \cap (X - K_{n+1}) \neq \emptyset$  se tiene que  $C \cap \text{Fr}K_{n+1} \neq \emptyset$ . Si no fuera así,  $C \cap (X - \text{int}K_{n+1}) = C \cap (X - K_{n+1})$  sería un subconjunto de  $X$  abierto, cerrado y no vacío lo que lleva a contradicción con la conexión de  $X$ . Además, como las componentes son abiertos en  $X - K_n$ , la compacidad de  $\text{Fr}K_{n+1} \subset X - K_n$  implica que hay un número finito de componentes  $C \subset X - K_n$  con  $C \cap (X - K_{n+1}) \neq \emptyset$ . Como consecuencia, sólo hay un número finito de componentes no acotadas en  $X - K_n$ . Además, podemos suponer que todas las componentes de  $X - K_n$  son no acotadas. De lo contrario, podríamos reemplazar  $K_n$  por la unión

$$K'_n = K_n \cup \overline{Z_1} \cup \overline{Z_2}$$

donde  $Z_1$  es la unión (finita) de las componentes que cortan a  $\text{Fr}K_{n+1}$  y



$$Z_2 = \bigcup \{D \subset X - K_n; D \text{ componente y } D \subset K_{n+1}\}.$$

Nótese que  $Z_1$  y  $Z_2$  son dos conjuntos abiertos en  $X - K_n$  con  $\text{Fr}Z_i \subset \text{Fr}K_n$  ( $i = 1, 2$ ) y que  $\overline{Z_1}$  es una unión finita de compactos y  $\overline{Z_2} \subset K_{n+1}$ , por lo que  $K'_n$  es compacto.  $\square$

A partir del Lema II.1.7 obtenemos

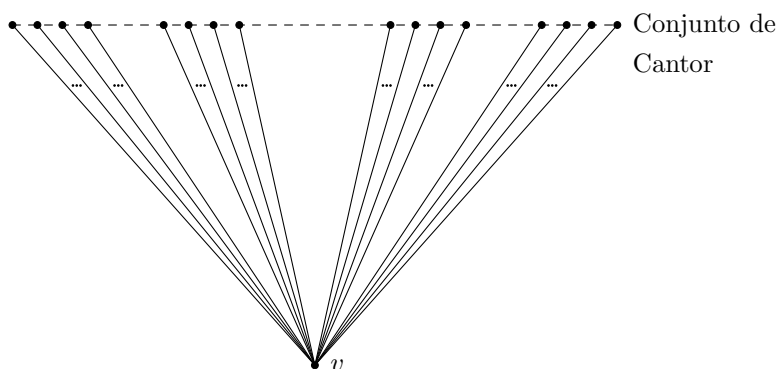
**Proposición II.1.8.** *En las condiciones de la Proposición II.1.6 se verifica que*

$$\mathcal{F}(X) = \lim_{\leftarrow} \{\pi'_0(X - K_n), j_n\}$$

donde para cada  $n \geq 1$ ,  $\pi'_0(X - K_n) \subset \pi_0(X - K_n)$  denota el conjunto finito de las componentes conexas no acotadas de  $X - K_n$ .

**Ejemplos II.1.9.** La condición de la conexión local es imprescindible en el enunciado del Lema II.1.7 como puede apreciarse en los siguientes ejemplos:

- (a) Consideremos  $X$  el continuo generalizado representado en el Ejemplo I.4.14. Si  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  es la sucesión exhaustiva de  $X$  donde  $K_n = ([0, n] \times [0, 1]) \cap X$ , podemos observar que  $X - K_n$  posee dos componentes conexas infinitas,  $R$  y  $R_a$ , e infinitas componentes acotadas  $\{C_j^n\}_{j \geq 1}$ . Es claro que no podemos añadir todas las componentes de la sucesión  $\{C_j^n\}_{j \geq 1}$  a la parte compacta y seguir teniendo un conjunto compacto.
- (b) En la teoría clásica de los continuos, se define el *abanico de Cantor* como  $F_{\mathfrak{C}} = \bigcup \{ve : e \in \mathfrak{C}\} \subset \mathbb{R}^2$  donde  $ve$  es el segmento que une el vértice  $v = (\frac{1}{2}, -1)$  con el punto  $e$  del conjunto de Cantor  $\mathfrak{C}$ .

Figura II.1: *Abanico de Cantor.*

Consideremos el continuo generalizado  $X = F_{\mathfrak{C}} - \mathfrak{C}$ . Obsérvese, que dada cualquier sucesión exhaustiva  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  de  $X$  se cumple que  $X - \text{int}K_n$  posee infinitas componentes conexas no acotadas para cada  $n$ .

**Teorema II.1.10** ([4]; 2.1). *Si  $X$  es un continuo generalizado de Peano entonces  $\widehat{X}$  y  $X^+$  son continuos de Peano.*

Usamos el resultado anterior para probar la siguiente proposición técnica que será de gran utilidad para demostrar algunos resultados del Capítulo IV.

**Proposición II.1.11.** *Sea  $X$  un continuo generalizado de Peano. Si  $H$  es un abierto conexo de  $\widehat{X}$ , entonces  $H - \mathcal{F}(X)$  también es conexo.*

**Demostración.** Como  $\widehat{X}$  es un continuo de Peano (II.1.10), entonces  $H$  es un continuo generalizado de Peano y en particular arco-conexo. Veamos que  $H - \mathcal{F}(X)$  también lo es. Para ello, tomemos  $x, y \in H - \mathcal{F}(X)$  y un arco  $\gamma \subset H$  que una  $x$  con  $y$ . Supongamos que la intersección  $F = \gamma \cap \mathcal{F}(X) \neq \emptyset$  es no vacía (en otro caso no hay nada que probar). Si  $U_1, \dots, U_n \subset X - K$  son componentes (arco-conexas) no acotadas fuera de un compacto  $K$  con  $x, y \in \text{int}K$ , tenemos que  $F = F_1 \cup \dots \cup F_n$  se descompone en una unión finita de subconjuntos abiertos y cerrados de  $F$  dados por  $F_i = F \cap \overline{U_i}^{\widehat{X}}$ . Sean  $p_1, q_1 \in \gamma$  el primer y último elemento respectivamente de  $F_1 \cap \gamma$ . Entonces existen elementos  $\tilde{p}_1$  y  $\tilde{q}_1$  en  $U_1$  tal que  $\gamma \cap F_1 = \gamma_1^0 \cap F_1$  donde  $\gamma_1^0 \subset \gamma$  es el subarco que une  $\tilde{p}_1$  a  $\tilde{q}_1$ . Sea  $\gamma_1$  el nuevo arco en  $H$  obtenido al sustituir  $\gamma_1^0$  por un arco en  $U_1$ . Aquí usamos que  $U_1$  es arco-conexo. Obsérvese que  $\gamma_1 \cap F_1 = \emptyset$ .

Ahora repetimos el argumento anterior para  $\gamma_1$  y  $F_2$  y conseguiremos un nuevo arco  $\gamma_2 \subset H$  con  $\gamma_2 \cap \mathcal{F}(X) \subset \gamma_2 \cap (F_3 \cup \dots \cup F_n)$ . Reiterando el proceso obtenemos un arco  $\gamma_n \subset H$  con  $\gamma_n \cap \mathcal{F}(X) = \emptyset$  y por tanto  $\gamma_n$  une  $x$  con  $y$  en  $H - \mathcal{F}(X)$ .  $\square$

Terminamos esta sección recordando el papel de los árboles en el estudio de los finales de Freudenthal de los continuos generalizados de Peano. De hecho, para tales espacios, los finales de Freudenthal pueden ser considerados como clases de equivalencia de rayos en  $X$ .

**Definición II.1.12.** Un *rayo* en  $X$  con origen en  $a \in X$  es una aplicación propia  $r : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X$  con  $r(0) = a$ . Un final  $\varepsilon \in \mathcal{F}(X)$  está inducido por  $r$  si  $r_*(\infty) = \varepsilon$ . Evidentemente todo  $r$  define un único final de Freudenthal  $\varepsilon$  que se dice *inducido por  $r$* .

La siguiente proposición da una definición alternativa de los finales de Freudenthal de un continuo generalizado de Peano  $X$ .

**Proposición II.1.13.** *Para todo final  $\varepsilon$  de  $X$  se puede encontrar un rayo  $r : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X$  tal que  $r$  induce  $\varepsilon$ . Además, dos rayos inducen el mismo final  $\varepsilon$  si y sólo si pueden unirse fuera de cualquier subconjunto compacto  $K \subset X$ .*

Esta proposición es un caso particular de la siguiente proposición.

**Proposición II.1.14** ([6]; I.9.17). *Sea  $X$  un continuo generalizado de Peano. Entonces existe un árbol  $T \subset X$  tal que la inclusión induce un homeomorfismo  $\mathcal{F}(T) \cong \mathcal{F}(X)$ .*

**Definición II.1.15.** Decimos que un árbol como el del enunciado de la Proposición II.1.14 es un *árbol de finales* de  $X$ .

Además de controlar lo finales, los árboles pueden ser considerados objetos sobre los que las aplicaciones entre espacios de finales pueden ser realizadas por aplicaciones propias. Más explícitamente,

**Teorema II.1.16.** *Sea  $X$  un continuo generalizado de Peano y  $T$  un árbol. Dada una aplicación continua  $g : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(T)$  existe una aplicación propia  $f : X \rightarrow T$  tal que  $f_* = g$ . Además si  $g$  es sobreyectiva  $f$  también puede*

ser elegida sobreyectiva. En particular siempre existe una aplicación propia sobreyectiva de  $X$  en  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Para la demostración de este resultado es conveniente recordar el orden natural de los vértices de un árbol.

**Definición II.1.17.** Por un *árbol* con un vértice raíz  $v_0$  entendemos un árbol localmente finito  $T$  con un vértice  $v_0$  fijado. El vértice raíz induce el siguiente orden en el conjunto de vértices  $T^0 \subset T$ . Escribiremos  $v \leq w$  si  $v$  está contenido en el único arco  $\gamma_w$  de  $w$  a  $v_0$ . Además definimos la *altura* de  $v$ ,  $|v|$ , como el número de vértices en el arco  $\gamma_v$ . Por  $S_n$  denotamos el *n-ésimo nivel* de  $T$ ; esto es  $S_n = \{v \in T^0; |v| = n\}$ . Evidentemente, si  $T_n \subset T$  es el subárbol generado por los vértices con  $|v| \leq n$  se tiene que  $\{T_n\}_{n \geq 1}$  define una sucesión exhaustiva en  $T$ . Finalmente para todo  $v \in T^0$ ,  $T_v$  denota el subárbol de  $T$  generado por todo  $w \geq v$ . Nótese que  $\mathcal{F}(T_v) \subset \mathcal{F}(T)$  es un conjunto abierto y cerrado de finales de  $T$ .

**Demostración del Teorema II.1.16.** Sea  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión exhaustiva de  $X$ . Para cada nivel  $S_j$  consideramos el recubrimiento cerrado y abierto  $\mathcal{G}_j = \{g^{-1}(\mathcal{F}(T_v)); v \in S_j\}$  de  $\mathcal{F}(X)$ . Este recubrimiento puede ser refinado por un recubrimiento de la forma  $\{U^{\mathcal{F}}\}$  donde los conjuntos  $U$  son las componentes de  $X - K_{n_j}$  para algún  $n_j$ ; ver Lema I.3.18. Podemos suponer que  $n_1 < n_2 < \dots$

Sean  $m_j = n_j + 1$  y  $A_U^j = \text{Fr}K_{m_j} \cap U$ . Nótese que  $K_{n_j} \subset \text{int}K_{m_j}$  implica que  $A_U^j$  es un conjunto compacto no vacío. Tomamos el vértice  $f(A_U^j) = v_U^j = v$  si  $g(\mathcal{F}(U)) \subset T_v$ . Nótese que  $v_U^j \leq v_W^{j+1}$  si  $W \subset U$ .

Por  $D_U(j-1, j) \subset X$  denotamos la intersección  $U \cap \overline{K_{m_j} - K_{m_{j-1}}}$ . Dado que un árbol es un  $\text{AR}^1$  espacio podemos extender  $f : A_U^{j-1} \cup \{A_W^j; W \subset U\} \rightarrow T_U(j-1, j)$  a una aplicación continua  $f_U^{j-1} : D_U(j-1, j) \rightarrow T_U(j-1, j)$ .

A partir de  $f_U^{j-1}$  se tiene una aplicación continua  $f^{j-1} : \overline{K_{m_j} - K_{m_{j-1}}} \rightarrow \overline{T_j - T_{j-1}}$  ( $j \geq 2$ ) donde  $T_j$  es el árbol generado por todos los vértices  $v$  con  $|v| \leq j$ . Para  $j = 0$  sea  $f^0 : K_{m_1} \rightarrow T_1$  una extensión de  $f^1|_{\text{Fr}(K_{m_1})}$  y  $f^0(x_0) = v_0$  para todo elemento  $x_0 \in \text{int}K_{m_1}$ . Entonces las aplicaciones  $f^{j-1}$  ( $j \geq 1$ ) definen

---

<sup>1</sup>Un  $\text{AR}$  espacio  $X$  es un espacio tal que si  $A \subset Y$  es cerrado del espacio métrico  $Y$  entonces toda  $f : A \rightarrow X$  continua se extiende a una  $\tilde{f} : Y \rightarrow X$ ; ver Ch. I §3 y §4 de [55].

una aplicación  $f = \bigcup f^{j-1} : X \rightarrow T$ . Obsérvese que la aplicación  $f$  es propia dado que  $f(K_{n_j}) \subset T_j$  para todo  $j \geq 1$ . La conexión de  $X$  implica que la imagen de  $f(X)$  coincide con el subárbol de  $T$  generado por el vértice raíz  $v_0$  y todos los vértices  $f(A_U^j)$  con  $j \geq 1$  y  $U \subset X - K_{n_j}$ . Por tanto  $f(X) = T$  si  $g$  es sobreyectiva. La igualdad  $f_* = g$  se deduce de la definición de  $f$ .  $\square$

En particular, como todo espacio métrico compacto es la imagen continua del conjunto de Cantor ([68]; 4.1.6), tenemos como consecuencia del Teorema II.1.16

**Corolario II.1.18.** *Sea  $X$  un continuo generalizado de Peano con  $\mathcal{F}(X)$  homeomorfo al conjunto de Cantor. Entonces para todo árbol  $T$  existe una aplicación propia sobreyectiva  $f : X \rightarrow T$ .*

## §II.1A. Dendritas

Con el fin de facilitar la exposición en secciones posteriores, hemos reunido en esta sección auxiliar las propiedades básicas de los espacios denominados dendritas. Esta clase de espacios está definida por la propiedad distintiva de los árboles entre los grafos. Más explícitamente,

**Definición II.1A.1.** Por un *espacio dendrítico* se entiende un espacio  $X$  en el que dos puntos cualesquiera pueden ser separados mediante la omisión de un tercer punto. Un *dendrita* es un continuo generalizado de Peano dendrítico. En caso de que el espacio en estudio sea un continuo de Peano matizaremos que nuestro espacio es un *dendrita compacto*.

El siguiente ejemplo muestra un dendrita que no es árbol.

**Ejemplo II.1A.2.** Si  $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x, x \geq 0\}$ , el continuo generalizado de Peano representado en la figura siguiente es un dendrita pero no es un árbol pues el vértice  $v = (0, 0)$  presenta infinitas ramificaciones; ver Definición II.1.17.

$$X = \Delta \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; y = \frac{x}{n}, 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \right\}$$

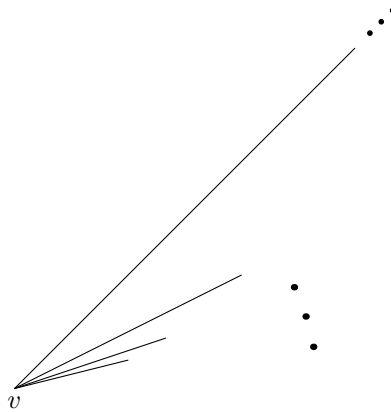


Figura II.2: *Dendrita que no es árbol.*

Como extensiones de la clase usual de los dendritas compactos en la teoría de los continuos, diversas familias de espacios dendríticos han sido consideradas en la literatura. Por ejemplo, E. Ward caracterizó en [78] los espacios dendríticos entre la familia de espacios conexos, localmente arcoconexos, separables y Hausdorff como aquellos espacios que no contienen una curva simple. Además, si los espacios son localmente compactos, Ward demostró también que los espacios dendríticos son caracterizados alternativamente como aquellos espacios para los cuales cualquier subcontinuo es dendrítico. Por lo tanto, como un caso particular de los resultados de Ward, tenemos

**Proposición II.1A.3.** *Un continuo generalizado de Peano  $X$  es dendrítico si y sólo si una de las siguientes condiciones se cumple:*

- (a)  *$X$  no contiene una curva cerrada simple ([78]; Thm. 2).*
- (b) *Cada subcontinuo de  $X$  es un dendrita compacto ([78]; Thm. 3).*

Como una consecuencia inmediata de la Proposición II.1A.3(b) tenemos el siguiente

**Lema II.1A.4.** *Cualquier dendrita admite una sucesión exhaustiva formada por dendritas compactos.*

El punto principal de esta sección es el hecho de que los dendritas se comportan bien respecto a la compactificación de Freudenthal. En concreto,

**Proposición II.1A.5.** *La compactificación de Freudenthal  $\widehat{D}$  de un continuo generalizado de Peano  $D$  es un dendrita si y sólo si  $D$  es dendrítico.*

**Demostración.** Si  $\widehat{D}$  es un dendrita entonces  $D$  es dendrítico por la Proposición II.1A.3(a).

Recíprocamente,  $\widehat{D}$  es un continuo de Peano por el Teorema II.1.10. Seguidamente comprobaremos que  $\widehat{D}$  es dendrítico. Supongamos en caso contrario que existe un ciclo  $\Sigma \subset \widehat{D}$  con  $F = \Sigma \cap \mathcal{F}(D) \neq \emptyset$ . En particular  $F \neq \Sigma$  y si  $p \in \Sigma - F$  podemos identificar  $F \subset \Sigma - \{p\} \cong \mathbb{R}$  con un conjunto compacto de la recta real. Procedemos como en la demostración de la Proposición II.1.11 para reemplazar  $\Sigma - \{p\}$  por una nueva “línea”  $E$  que coincide con  $\Sigma - \{p\}$  fuera de un conjunto compacto  $K$  que contiene a  $F$  y tal que  $E \cap \mathcal{F}(D) = \emptyset$ , de donde obtenemos un ciclo  $E \cup \{p\} \subset D$  lo que es una contradicción.  $\square$

Como una consecuencia de la Proposición II.1A.5 podemos aplicar ([80]; V.1.3(ii)) a  $\widehat{D}$  para obtener

**Corolario II.1A.6.** *Cualquier subconjunto conexo de un dendrita  $D$  es arco-conexo.*

Este corolario nos permite obtener fácilmente la siguiente extensión de las bien conocidas caracterizaciones de los dendritas compactos ([45]; Thm. 1, pág. 300) y ([59]; 10.10, 10.35).

**Proposición II.1A.7.** *Sea  $D$  un continuo generalizado de Peano. Entonces las siguientes enunciados son equivalentes:*

- (a)  $D$  es dendrítico.
- (b) La intersección  $K_1 \cap K_2$  de dos subcontinuos de  $D$  es un subcontinuo.
- (c) La intersección  $C_1 \cap C_2$  de dos subconjuntos conexos de  $D$  es conexo.
- (d) La intersección  $X_1 \cap X_2$  de dos subcontinuos generalizados de  $D$  es un subcontinuo generalizado.
- (e)  $D$  es hereditariamente uncoherente; esto es, si  $A \cup B \subset D$  es conexo con  $A$  y  $B$  cerrados y conexos, entonces  $A \cap B$  es conexo.

**Demostración.** Si  $D$  es dendrítico, por el Lema II.1A.4 podemos encontrar un dendrita compacto  $D_0 \subset D$  con  $K_1 \cup K_2 \subset D_0$ . Entonces aplicamos ([45]; Thm. 1, pág. 300) a  $D_0$  para probar que  $K_1 \cap K_2$  es un continuo. Más aún, si (b) se cumple, el Corolario II.1A.6 nos muestra que  $C_i$  es arcoconexo y dados  $a, b \in C_1 \cap C_2$  aplicamos (b) a la unión  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  de dos arcos  $\Gamma_i \subset C_i$  ( $i = 1, 2$ ) uniendo  $a$  a  $b$ . Para deducir (d) de (c) observamos que  $X_1 \cap X_2$  es localmente compacto y por tanto es un continuo generalizado. La implicación (d)  $\Rightarrow$  (e) es obvia pues cualquier subconjunto cerrado conexo en  $D$  es un continuo generalizado. Finalmente (a) sigue de (e) al observar que cualquier ciclo no es unicoherente.  $\square$

**Nota II.1A.8.** Cualquier espacio Hausdorff, localmente conexo y dendrítico  $X$  está dotado con un orden parcial natural que caracteriza el espacio; ver [78] para una demostración. El orden viene dado escogiendo un punto  $x_0 \in X$  y estableciendo que  $x \leq y$  si  $x$  separa  $x_0$  de  $y$ ; compárese con la Definición II.1.17. Ward considera en [78] compactificaciones de espacios dendríticos sin la suposición de la compacidad local. En concreto, mostró que un espacio convexo, dendrítico, conexo, localmente conexo y metrizable admite un dendrita como compactificación. Recordemos que un espacio topológico parcialmente ordenado  $X$  se dice *convexo* si para cada  $x \in X$  los conjuntos  $L(x) = \{a : a \leq x\}$  y  $M(x) = \{a : x \leq a\}$  forman una subbase de los conjuntos cerrados de  $X$ .

Notemos que la convexidad no es requerida para lograr dendritas como compactificaciones de Freudenthal de espacios dendríticos. De hecho, hay ejemplos sencillos de estos espacios que no son convexos como demuestra en el siguiente

**Ejemplo II.1A.9.** Consideremos el dendrita  $X$  descrito en el Ejemplo II.1A.2. Sea  $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$  la sucesión  $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ . Denotemos  $x_0 = (0, 0)$  y consideremos el conjunto cerrado  $F = \{x_n\}_{n \geq 0}$ . Claramente  $X$  es un dendrita cuyo orden parcial natural  $\preceq$  se define como sigue: dado  $x = (a_1, a_2)$  y  $y = (b_1, b_2)$  ambos en  $X$  tenemos que  $x \preceq y$  si  $a_1 \leq b_1$  siempre que  $x, y \in \Delta$  ó  $x$  e  $y$  pertenezcan al mismo segmento  $\langle x_0, x_i \rangle$  para algún  $i \geq 2$ .

Seguidamente probamos que  $X$  no es convexo. En efecto, supongamos que el conjunto cerrado  $F = \bigcap F_\alpha$  se puede escribir como una intersección de uniones finitas  $F_\alpha = (\bigcup_{i \in I_\alpha} L(z_i)) \cup (\bigcup_{j \in J_\alpha} M(y_j))$ . Notemos que cada  $L(z_i)$  contiene a lo más dos puntos de  $F$ , y por tanto podemos asumir sin pérdida



de generalidad que  $F \subset \bigcup_{j \in J_\alpha} M(y_j)$  para cada  $\alpha$ . Entonces encontramos  $j_\alpha \in J_\alpha$  tal que  $x_0 \in M(y_{j_\alpha})$  y así  $M(y_{j_\alpha}) = M(x_0) = X \subset F$ , lo que es una contradicción.

## §II.2. Una nueva equivalencia del Teorema de Hahn-Mazurkiewicz

Esta sección está dedicada a relacionar el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz con un reciente resultado obtenido por Bognár ([8]; Thm. A). Empezamos observando que el mencionado resultado de Bognár es una consecuencia inmediata del Teorema II.1.3. Explícitamente,

**Teorema II.2.1** ([8]; Thm. A). *Sea  $E$  un espacio métrico localmente conexo y localmente compacto. Sea  $M \subset E$  un continuo y sean  $d, e \in M$ . Entonces existe una aplicación continua  $f : [0, 1] \rightarrow E$  tal que  $f(0) = d$ ,  $f(1) = e$  y  $M \subset f([0, 1])$ .*

**Demostración.** Como  $M$  es conexo podemos asumir, escogiendo si es necesario la componente conexa de  $E$  que contiene a  $M$ , que  $E$  es conexo (y por tanto un continuo generalizado de Peano de acuerdo con la Nota I.3.1). El Teorema II.1.3(c) establece una sobreyección propia  $g : T_{\mathcal{C}} \rightarrow E$ . En particular  $g^{-1}(M)$  es un conjunto compacto no vacío y existe un subárbol compacto  $T \subset T_{\mathcal{C}}$  con  $g^{-1}(M) \subset T$ . Ahora no es difícil encontrar una aplicación continua sobreyectiva  $h : [0, 1] \rightarrow T$  con  $h(0) = x_0 \in g^{-1}(e)$  y  $h(1) = x_1 \in g^{-1}(d)$ . Para esto simplemente consideramos una sucesión  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_s < t_{s+1} = 1$  donde  $s$  es el número de vértices  $\{v_1, \dots, v_s\}$  de  $T$ ; entonces  $h$  sobre  $[t_{i-1}, t_i]$  ( $1 \leq i \leq s + 1$ ) es un camino desde  $v_{i-1}$  a  $v_i$  en  $T$  con  $v_0 = x_0$  y  $v_{s+1} = x_1$ . La composición  $f = g \circ h : [0, 1] \rightarrow E$  es una aplicación con las propiedades requeridas.  $\square$

**Definición II.2.2.** Los espacios para los que se cumple el Teorema II.2.1 decimos que tienen la *propiedad de Bognár*.

**Nota II.2.3.** En el Ejemplo I.4.14 se muestra un continuo generalizado no de Peano que cumple la propiedad de Bognár. En efecto, por compacidad, todo

continuo está en una de las tres componentes conexas por caminos y cada una de ellas cumple la propiedad de Bognár trivialmente.

Si llamamos a un espacio  $X$  *crecientemente conexo* si posee una sucesión exhaustiva de continuos, entonces la propiedad de Bognár caracteriza a los continuos generalizados de Peano entre los continuos generalizados crecientemente conexos. En efecto, todo continuo generalizado de Peano es crecientemente conexo y cumple la propiedad de Bognár por el Teorema II.1.3. Recíprocamente, si  $X$  admite una sucesión exhaustiva de continuos  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  y cumple la propiedad de Bognár, el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz nos da para cada  $X_i$  un continuo de Peano  $Y_i$  con  $X_i \subset Y_i$ . Entonces podemos encontrar una subsucesión  $\{n_s\}_{s \geq 1}$  con

$$X_1 \subset Y_1 \subset \text{int}X_{n_1} \subset \text{int}Y_{n_1} \subset Y_{n_1} \subset \text{int}X_{n_2} \subset \text{int}Y_{n_2} \subset Y_{n_2} \dots$$

lo que demuestra que  $X$  es un continuo generalizado de Peano por el Teorema II.1.3(d).

El espacio  $\Sigma$  representado en la Figura III.4 más adelante es un ejemplo de continuo generalizado no localmente conexo que sí verifica la propiedad de Bognár.

Como Bognár demostró en [8], el Teorema II.2.1 implica el Teorema clásico de Hahn-Mazurkiewicz. Seguidamente probaremos que ambos resultados son en realidad equivalentes. En la Nota II.2.5 presentamos una demostración alternativa que usa la compactificación de Freudenthal.

**Teorema II.2.4.** *Los siguientes tres enunciados son equivalentes:*

- (a) *Todo espacio métrico localmente conexo y localmente compacto  $E$  cumple la propiedad de Bognár.*
- (b) *Todo continuo generalizado de Peano  $E$  cumple la propiedad de Bognár.*
- (c) *Cualquier continuo de Peano  $X$  es la imagen continua del intervalo unidad  $[0, 1]$ .*

**Demostración.** (a)  $\Rightarrow$  (b) es obvio. Igualmente (b)  $\Rightarrow$  (c) es inmediato tomando  $E = M = X$  en la propiedad de Bognár.

Para ver (c)  $\Rightarrow$  (a), si  $M \subset E$  es un continuo, consideramos la componente  $X \subset E$  que contiene a  $M$ . Por la conexión local de  $E$  y la Nota I.3.1,  $X$  es un continuo generalizado de Peano y por el Teorema II.1.3 existe<sup>2</sup>  $P \subset X$  subcontinuo de Peano con  $M \subset \text{int}P$ . Aplicamos el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz (II.1.2) y encontramos una aplicación continua  $f : [0, 1] \rightarrow P \subset X$  con  $f(I) = P$ . Modificamos  $f$ , como en la demostración del Teorema II.2.1, para que  $f(0) = e$  y  $f(1) = d$  y llegamos así a probar que  $E$  posee la propiedad de Bognár.  $\square$

**Nota II.2.5.** Se puede usar la compactificación de Freudenthal para dar la siguiente demostración alternativa a (c)  $\Rightarrow$  (a) en el Teorema II.2.4 sin usar el Teorema II.1.3. Como antes, podemos considerar que  $E$  es conexo y por tanto un continuo generalizado de Peano. Así que la compactificación de Freudenthal  $\widehat{E}$  es un continuo de Peano (II.1.10) para el cual (II.1.3(c)) nos proporciona una sobrección continua  $f : [0, 1] \rightarrow \widehat{E}$ . Usando los mismo argumentos de la demostración del Teorema II.2.1 podemos también suponer que  $f(0) = e$  y  $f(1) = d \in M$ .

Sea  $K \subset E$  un compacto tal que  $M \subset \text{int}K$  y sea  $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$  la descomposición del compacto  $A = f^{-1}(\mathcal{F}(E))$  en la unión disjunta de cerrados  $A_i = A \cap f^{-1}\left(\overline{U_i^{\widehat{E}}}\right)$  donde  $U_i$  son las componentes no acotadas de  $X - K$ .

Ahora procedemos como en la demostración de la Proposición II.1.11 y si  $s_1$  y  $t_1$  son el primer y último elemento en  $B_n = A_1 \cap f^{-1}(\mathcal{F}(E))$ , observamos que  $B_1 \subset \text{int}A_1$  por lo que podemos encontrar  $\epsilon > 0$  tal que  $s_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon \in f^{-1}(U_1)$ . Entonces cambiamos  $f$  por una nueva aplicación  $f_1 : [0, 1] \rightarrow \widehat{E}$  que coincide con  $f$  fuera de  $[s_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon]$  y es un camino en  $U_1$  de  $f(s_1 - \epsilon)$  a  $f(t_1 + \epsilon)$ . De esta forma, si  $F_1 = \overline{U_1^{\widehat{E}}} \cap \mathcal{F}(E)$  tenemos que  $f_1([0, 1]) \cap F_1 = \emptyset$  y reiteramos el proceso hasta conseguir una aplicación  $f_n : [0, 1] \rightarrow \widehat{E}$  tal que  $f_n([0, 1]) \cap F_j = \emptyset$  para  $1 \leq j \leq n$ , por lo que  $f_n : [0, 1] \rightarrow E$  ya que  $\mathcal{F}(X) = \bigcup_{j=1}^n F_j$ . Además  $f_n$  coincide con  $f$  en el compacto  $f^{-1}(K)$  y por tanto  $M \subset f_n([0, 1])$ ,  $f_n(0) = e$  y  $f_n(1) = d$ . Ésto demuestra (II.2.4(a)).

<sup>2</sup>El subcontinuo  $P$  se puede obtener aplicando el Lema IV.2.5 dentro de la teoría clásica de los continuos.

### §II.3. Generalizaciones del Teorema II.2.1

Esta sección contiene algunas generalizaciones del Teorema II.2.1 involucrando los finales de Freudenthal. Comencemos fijando alguna notación. Sean  $E$  un espacio métrico no compacto, localmente compacto y localmente conexo y  $A \subset E$  un conjunto conexo cerrado. La componente conexa  $X \subset E$  que contiene a  $A$  es un continuo generalizado de Peano y  $A$  es un subcontinuo generalizado cerrado (ver Nota I.3.1). Sea  $F_A = \overline{A}^{\tilde{X}} \cap \mathcal{F}(X)$ . Primero probamos

**Teorema II.3.1.** *Con la notación anterior supongamos que tenemos un árbol  $T$  y un homeomorfismo  $g : \mathcal{F}(T) \rightarrow F_A$ . Entonces para cualquier final  $\varepsilon \in F_A$  y sucesiones  $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset T$  y  $\{a_n\}_{n \geq 1} \subset A$  convergiendo a los finales  $g^{-1}(\varepsilon)$  y  $\varepsilon$ , respectivamente, existe una aplicación propia  $f : T \rightarrow E$  tal que  $f(t_n) = a_n$  para todo  $n \geq 1$  y  $A \subset f(T)$ .*

En la demostración del Teorema II.3.1 usaremos los siguientes lemas esencialmente conocidos

**Lema II.3.2.** *Para cualquier subconjunto  $A \subset T$  de un árbol ordenado  $T$  con vértice raíz  $v_0 \in T$  (ver Definición II.1.17) existe el subárbol minimal  $T_A$  con  $A \subset T_A$  y  $v_0 \in T_A$ .*

**Demostración.** Sea  $T_A = \bigcap T'$  la intersección de todos los subárboles  $T' \subset T$  con  $v_0 \in T'$  y  $A \subset T'$ . Entonces  $T_A$  es un conjunto conexo pues dados cualesquiera dos vértices  $p, q \in T'$  el único arco que los conecta está contenido en  $T'$ . Por lo tanto  $T_A$  es necesariamente un árbol y claramente  $v_0 \in T_A$ .  $\square$

**Lema II.3.3.** *Sean  $T$  y  $T'$  dos árboles y  $g : \mathcal{F}(T) \rightarrow \mathcal{F}(T')$  una aplicación continua. Dadas dos sucesiones  $\{t_n\}$  y  $\{t'_n\}$  convergiendo a los finales  $\varepsilon$  y  $g(\varepsilon)$  respectivamente, existe una aplicación propia  $h : T \rightarrow T'$  con  $h_* = g$  y  $h(t_n) = t'_n$  para todo  $n \geq 1$ . Es más, si  $g$  es sobreyectiva  $h$  se puede elegir sobreyectiva.*

**Demostración.** En (II.1.16) se construye una aplicación propia  $f : T \rightarrow T'$  con  $f_* = g$  que puede ser elegida sobreyectiva si  $g$  es sobreyectiva. Aquí simplemente modificamos  $f$  para obtener una aplicación propia  $h : T \rightarrow T'$  con

$h(t_n) = t'_n$  para todo  $n \geq 1$ . Concretamente, como  $\{t'_n\}_{n \geq 1}$  converge al mismo final que  $\{f(t_n)\}_{n \geq 1}$ , existe una sucesión de caminos  $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$  que unen  $\gamma_n(0) = t'_n$  a  $\gamma_n(1) = f(t_n)$  tal que si  $L \subset T'$  es compacto entonces existe  $n_0$  tal que para cualquier  $n \geq n_0$   $\gamma_n \cap L = \emptyset$  (ver Proposición II.1.13). Entonces subdividimos  $T$  para añadir todos los  $t_n$  como nuevos vértices y extender la sucesión  $\{\gamma_n\}$  a la sucesión  $\{\gamma_v\}$  de caminos donde  $v$  varía entre los vértices de la subdivisión, definiendo  $\gamma_v = \gamma_n$  si  $v = t_n$  y  $\gamma_v$  el camino constante  $\gamma_v(t) = f(v)$  si  $v \neq t_n$ . Usando esta sucesión, definimos  $h : T \rightarrow T'$  sobre cada arista  $\langle v, w \rangle$  (identificada con  $[0, 1]$ ) por  $h(t) = \gamma_v(3t)$  si  $0 \leq t \leq 1/3$ ,  $h(t) = f(3t - 1)$  si  $1/3 \leq t \leq 2/3$  y  $h(t) = \gamma_w(3 - 3t)$  si  $2/3 \leq t \leq 1$ . Se comprueba directamente que  $h$  es una sobreyección propia con  $h(t_n) = t'_n$ .  $\square$

**Demostración del Teorema II.3.1.** De acuerdo con el Teorema II.1.3(b) existe un árbol  $T'$  y una sobreyección propia  $r : T' \rightarrow X$  que induce un homeomorfismo  $r_* : \mathcal{F}(T') \rightarrow \mathcal{F}(X)$ . Sea  $T'_{r^{-1}(A)} \subset T'$  el subárbol dado por el Lema II.3.2 para  $r^{-1}(A) \subset T'$ . Como  $r$  es propia se puede comprobar que  $\mathcal{F}(T') \cap \widehat{r}^{-1}(\overline{A}^{\widehat{X}}) = r_*^{-1}(F_A) = \mathcal{F}(T'_{r^{-1}(A)})$ . Aquí  $\widehat{r}$  es la extensión de Freudenthal de  $r$ . Más aún, como  $r_*$  es un homeomorfismo,  $F_A$  es homeomorfo a  $\mathcal{F}(T'_{r^{-1}(A)})$ . Entonces, escogiendo  $t'_n \in r^{-1}(a_n)$ , el Lema II.3.3 nos proporciona una sobreyección propia  $h : T \rightarrow T'_{r^{-1}(A)}$  con  $h(t_n) = t'_n$  para  $n \geq 1$ , y la composición  $f = r \circ h : T \rightarrow X$  es la aplicación requerida.  $\square$

La imagen  $Y = r(T'_{r^{-1}(A)})$  en la demostración del Teorema II.3.1 es un continuo generalizado de Peano por el Teorema II.1.3(b). Más aún, también se observa en dicha demostración que  $\mathcal{F}(Y)$  es homeomorfo a  $F_A$ . Por lo tanto tenemos el siguiente resultado como un complemento al Teorema II.3.1.

**Teorema II.3.4.** *Existe un continuo generalizado de Peano  $Y \subset E$  tal que  $A \subset Y$  y  $\mathcal{F}(Y)$  es homeomorfo a  $F_A$ .*

**Nota II.3.5.** (a) Si  $E = X = A$  entonces el Teorema II.3.1 implica el Teorema II.1.3(b), probando que ambos resultados son en realidad equivalentes.

(b) Como no todos los finales de un árbol arbitrario tienen el mismo comportamiento topológico, no podemos esperar que el Teorema II.3.1 nos proporcione una sobreyección propia que aplique una sucesión convergente a un

final arbitrario a la sucesión dada  $\{a_n\}$ . En efecto, si  $E = X = T$  es el árbol descrito en la siguiente figura

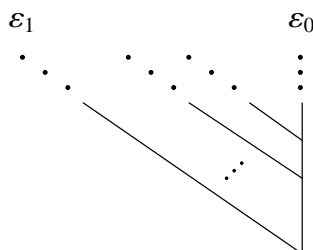


Figura II.3

es claro que no existe una sobreyección propia  $T \rightarrow T$  que envíe una sucesión convergente al final  $\varepsilon_0$  a una sucesión convergente al final  $\varepsilon_1$ . De cualquier forma, para el árbol binario de Cantor  $T_{\mathfrak{C}}$  con  $\mathcal{F}(T_{\mathfrak{C}}) = \mathfrak{C}$  el conjunto de Cantor, podemos probar con la notación ya fijada al comienzo de la sección el siguiente

**Teorema II.3.6.** *Dada una sucesión  $\{a_n\} \subset A$  que converge a un final cualquiera  $\varepsilon \in F_A$  y cualquier sucesión  $\{t_n\}$  que converge a un final en  $\mathcal{F}(T_{\mathfrak{C}}) = \mathfrak{C}$ , existe una aplicación propia  $f : T_{\mathfrak{C}} \rightarrow E$  tal que  $A \subset f(T_{\mathfrak{C}})$  y  $f(t_n) = a_n$  para todo  $n \geq 1$ .*

En la demostración del Teorema II.3.6 usaremos la siguiente observación

**Nota II.3.7.** Si  $A \subset \mathfrak{C} = \mathcal{F}(T_{\mathfrak{C}})$  es un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor  $\mathfrak{C}$ , existe un subárbol  $T \subset T_{\mathfrak{C}}$  con  $\mathcal{F}(T) = A$ . En efecto,  $T$  se puede escoger como el subárbol generado por todos los vértices  $v$  para los cuales  $T_v$  define al menos un final en  $A$ . Aquí  $T_v \subset T$  es el árbol generado por los vértices  $w \geq v$ , ver Definición II.1.17.

**Demostración del Teorema II.3.6.** Sea  $T \subset T_{\mathfrak{C}}$  un subárbol que contiene el vértice raíz cuyo espacio de finales es homeomorfo a  $F_A$  (Nota II.3.7) y sea  $g : \mathcal{F}(T) \rightarrow F_A$  un homeomorfismo. Por el Teorema II.3.1 existe una aplicación propia  $\tilde{f} : T \rightarrow E$  tal que  $\tilde{f}(t'_n) = a_n$  para una sucesión  $\{t'_n\}$  que converge al final  $\varepsilon' = g^{-1}(\varepsilon)$ . Seguidamente observamos que cualquier conjunto cerrado de  $\mathfrak{C}$  es un retracto de  $\mathfrak{C}$  ([43]; 15.2) y escogemos una retracción  $r : \mathcal{F}(T_{\mathfrak{C}}) =$

$\mathfrak{C} \rightarrow \mathcal{F}(T)$  (esto es,  $r(x) = x$  si  $x \in \mathcal{F}(T)$ ). Es más, como  $\mathfrak{C}$  es un espacio homogéneo ([59]; 7.22) podemos encontrar un homeomorfismo  $\psi : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$  con  $\psi(\varepsilon_0) = \varepsilon'$ , donde  $\varepsilon_0$  es el final límite de la sucesión  $\{t_n\}$ . Por lo tanto, aplicando el Lema II.3.3 a la composición  $r \circ \psi : \mathfrak{C} \rightarrow \mathcal{F}(T)$  obtenemos una aplicación propia  $h : T_{\mathfrak{C}} \rightarrow T$  con  $h(t_n) = t'_n$  para  $n \geq 1$ . La composición  $f = \tilde{f} \circ h$  es la aplicación propia deseada.  $\square$

Si consideramos aplicaciones continuas ordinarias, tenemos también el siguiente análogo del Teorema II.2.1.

**Teorema II.3.8.** *Dada una sucesión arbitraria  $\{a_n\} \subset A$  y una sucesión creciente  $\{t_n\}$  en la semirecta  $\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$ , existe una aplicación continua  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow E$  tal que  $A \subset f(\mathbb{R}_{\geq 0})$  y  $f(t_n) = a_n$  para todo  $n \geq 1$ .*

**Demostración.** Sea  $g : T \rightarrow E$  una aplicación propia dada por el Teorema II.3.1. Elijamos  $z_n \in g^{-1}(a_n)$  y  $t'_n \in (t_n, t_{n+1})$ . Después de ordenar el conjunto de vértices de  $T$ ,  $\{v_n\}_{n \geq 0}$ , con  $v_0$  el vértice raíz, definimos una sobreyección continua  $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow T$  de tal forma que  $h(0) = v_0$ ,  $h(t_n) = z_n$  y  $h(t'_n) = v_n$ . La composición  $f = g \circ h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow E$  satisface los requerimientos.  $\square$





# Sucesiones inversas de aplicaciones propias

---

Este capítulo estudia la conexión y los finales de Freudenthal de espacios obtenidos como límites inversos de sucesiones de espacios no compactos con aplicaciones de enlace propias. En concreto, probamos que los límites inversos de sucesiones de rectas euclídeas (espacios tipo línea) o semirectas euclídeas (espacios tipo rayo) preservan la conexión y los finales de Freudenthal (Teoremas III.3.4 y III.4.2). Sin embargo esto no es cierto para árboles sin vértices terminales con tres o más finales. Es más, mostramos que la categoría de los espacios tipo rayo y aplicaciones propias no admite un objeto universal (Teorema III.3.6).

## §III.1. Límites inversos con aplicaciones de enlace propias

Aunque en algunos resultados nos restringiremos a los continuos generalizados y continuos generalizados de Peano, trabajaremos en general en la categoría de los espacios topológicos admisibles (ver §I.3) y las aplicaciones propias.

**Notación III.1.1.** Usaremos la notación  $X = \lim_{\leftarrow p} \{X_n, f_n\}$  para representar el límite inverso (ver Apéndice B) de una sucesión  $X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \xleftarrow{f_2} \dots \xleftarrow{f_{n-1}} X_n \xleftarrow{f_n} \dots$  con aplicaciones de enlace  $f_n$  propias.

Obsérvese que al eliminar la compacidad, el límite  $X$  puede ser el espacio vacío. Por ejemplo si consideramos la sucesión de inclusiones  $X_1 \supset X_2 \supset \dots$  donde  $X_n = [n, +\infty)$ . Para límites inversos no vacíos tenemos el siguiente lema; compárese con ([24], 3.7.12).

**Lema III.1.2.** *Un límite inverso  $X = \varprojlim \{X_n, f_n\}$  de espacios admisibles es un espacio admisible. Es más, las proyecciones naturales  $\pi_n : X \rightarrow X_n$  son aplicaciones propias (y por tanto  $X$  no es compacto si los espacios  $X_n$  no lo son). Además, si las aplicaciones  $f_n$  son monótonas entonces también lo son las proyecciones  $\pi_n$ .*

Recordemos que G. T. Whyburn introdujo en [81] la noción de aplicación monótona como aquella en que la fibra de cualquier punto de su codominio es conexa, es decir, una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  se dice *monótona* si es un sobrejección continua tal que  $f^{-1}(y)$  es conexo para cada  $y \in Y$ . El nombre de “monótona” proviene del hecho de que una función real continua tiene fibras conexas si y sólo si es creciente o decreciente.

**Lema III.1.3** ([24]; 6.1.29). *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación cerrada (en particular, si  $f$  es propia) y monótona entre dos espacios admisibles, entonces para todo conexo  $C \subset Y$  se verifica que  $f^{-1}(C)$  es conexo.*

**Demostración del Lema III.1.2.** El espacio  $X \subset \prod_{n \geq 1} X_n$  es metrizable y segundo numerable ya que hereda ambas propiedades del producto (B.5). Veamos que las proyecciones canónicas  $\pi_n : X \rightarrow X_n$  son propias; para esto, sea  $K \subset X_n$  un compacto y consideremos que la sucesión inversa  $\mathcal{S} \equiv K \leftarrow f_n^{-1}(K) \leftarrow f_{n+1}^{-1}(f_n^{-1}(K)) \leftarrow \dots$  donde cada término es compacto pues las aplicaciones de enlace son propias. Entonces  $\pi_n^{-1}(K) = \varprojlim \mathcal{S}$  es un compacto no vacío.

Para comprobar la compacidad local de  $X$ , sea  $\Omega = \prod_{i=1}^n U_i \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$  un entorno de  $(x_1, x_2, \dots) \in X$  donde  $U_i$  es un entorno compacto de  $x_i$ . Entonces el conjunto cerrado  $\Omega_X = X \cap \Omega$  es compacto pues está contenido en un conjunto compacto

$$U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \times f_{n+1}^{-1}(U_n) \times (f_{n+2} \circ f_{n+1})^{-1}(U_n) \times \dots$$

Aquí usamos que  $X$  es cerrado en  $\prod_{n \geq 1} X_n$  (B.5) y que las aplicaciones  $f_n$  son propias.

Finalmente, supongamos que  $f_n$  es monótona para todo  $n \geq 1$ . Dado  $y \in X_n$  tenemos  $\pi_n^{-1}(y) = \varprojlim \{y \leftarrow f_n^{-1}(y) \leftarrow f_{n+1}^{-1}(f_n^{-1}(y)) \leftarrow \dots\}$  donde todos los espacios son conexos y compactos, luego  $\pi_n^{-1}(y)$  es no vacío y conexo.  $\square$

**Corolario III.1.4.** *Cualquier límite inverso de continuos generalizados  $X = \varprojlim_p \{X_n, f_n\}$  con aplicaciones de enlace monótonas es un continuo generalizado.*

Usando la compactificación por un punto de Alexandroff,  $X^+ = X \cup \{\infty\}$ , probaremos seguidamente que los límites inversos de sucesiones inversas con aplicaciones de enlace propias pueden ser identificados como límites inversos ordinarios “punteados”. Para ello, consideremos la siguiente notación.

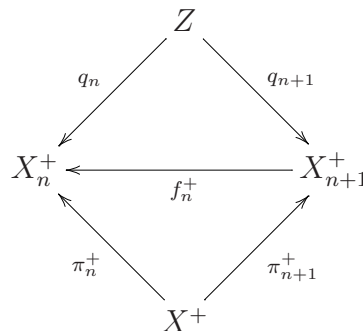
**Notación III.1.5.** Si  $X_n$  es un espacio punteado por  $x_n \in X_n$ , por  $X = \varprojlim_* \{X_n, g_n\}$  queremos denotar que  $X$  es el límite de una sucesión inversa cuyas aplicaciones de enlace satisfacen  $g_n^{-1}(x_n) = x_{n+1}$  para todo  $n$ . Recordemos que por la Proposición I.1.8 toda aplicación propia  $f : X \rightarrow Y$  se extiende a una aplicación continua  $f^+ : X^+ \rightarrow Y^+$  tomando  $f^+(\infty) = \infty$ .

Entonces

**Proposición III.1.6.** *Para cualquier espacio admisible  $X$  son equivalentes:*

- (a)  $X = \varprojlim_p \{X_n, f_n\}$ .
- (b)  $X^+ = \varprojlim_\infty \{X_n^+, f_n^+\}$ .

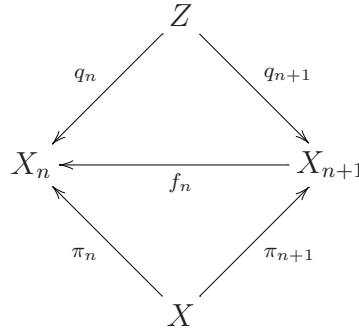
**Demostración.** Para probar (a)  $\Rightarrow$  (b) consideremos el siguiente diagrama conmutativo (para todo  $n \geq 1$ )



donde  $Z$  es un espacio arbitrario. Del diagrama sigue que  $q_n^{-1}(\infty) = q_{n+1}^{-1}(\infty)$  para todo  $n \geq 1$ . Entonces, si  $C = q_n^{-1}(\infty)$ , la propiedad universal de los límites inversos nos da una aplicación continua  $\varphi : Z - C \rightarrow X$  tal que  $\pi_n \circ \varphi = q_n|_{Z-C}$  para  $n \geq 1$ . Ahora, extendemos  $\varphi$  a  $\tilde{\varphi} : Z \rightarrow X^+$  tomando  $\tilde{\varphi}(x) = \infty$  si  $x \in C$ . De esta forma,  $\tilde{\varphi}$  es continua. En efecto, sea  $\Omega$  un conjunto abierto de  $X^+$ . Seguidamente vemos que  $\tilde{\varphi}^{-1}(\Omega)$  es abierto en  $Z$ . Esto es claro si  $\infty \notin \Omega$  pues  $\Omega$  es abierto en  $X$  y así  $\varphi^{-1}(\Omega) = \tilde{\varphi}^{-1}(\Omega) \subset Z - C$  es abierto en  $Z$ .

Supongamos que  $\infty \in \Omega$ . Entonces  $X - \Omega$  es compacto y la cuestión se reduce a mostrar que  $\tilde{\varphi}^{-1}(\Omega) = \varphi^{-1}(\Omega - \{\infty\}) \cup C$  es abierto. Debido a la continuidad de  $\varphi$ ,  $\varphi^{-1}(\Omega - \{\infty\})$  es abierto en  $Z$ . Más aún, dado  $x \in C$  sabemos que  $q_n(x) = \infty$  y que  $\pi_n(X - \Omega) = \pi_n^+(X - \Omega)$  es compacto en  $X_n$ . Por tanto,  $(X - \pi_n(X - \Omega)) \cup \{\infty\}$  es un entorno abierto de  $\infty$  para todo  $m \geq n$ . Entonces  $q_m^{-1}((X_m - \pi_m(X - \Omega)) \cup \{\infty\})$  es un conjunto abierto que contiene a  $x$  para todo  $m \geq n$  y está contenido en  $\varphi^{-1}(\Omega - \{\infty\}) \cup C$ .

Recíprocamente, para probar (b)  $\Rightarrow$  (a) consideremos el siguiente diagrama donde  $Z$  es un espacio arbitrario



Dado que  $X^+ = \varprojlim_{\leftarrow \infty} X_n^+$  sabemos que existe  $\phi : Z \rightarrow X^+$  tal que  $\pi_n^+ \circ \phi = \tilde{q}_n$  donde  $\tilde{q}_n$  es la composición de  $q_n$  con la correspondiente inclusión  $X_n \subset X_n^+$ . Más aún  $\infty \notin \phi(Z)$  y así  $\phi : Z \rightarrow X$  satisface  $\pi_n \circ \phi = q_n$  para todo  $n \geq 1$ .  $\square$

Como un espacio admisible  $X$  se sumerge como un conjunto cerrado en  $\mathbb{R}^k$  si y sólo si  $X^+$  se sumerge en la  $k$ -esfera  $S^k$ , el siguiente corolario es una consecuencia inmediata del Teorema de inmersión ([59]; 2.36) debido a J. R. Isbell.

**Corolario III.1.7.** Si  $X = \varprojlim_p \{X_n, f_n\}$  donde cada  $X_n$  es homeomorfo a un conjunto cerrado no trivial de  $\mathbb{R}^k$ , entonces  $X$  se puede sumergir como un conjunto cerrado en  $\mathbb{R}^{2k}$ .

**Demostración.** Si  $X_n$  es cerrado en  $\mathbb{R}^k$  entonces  $X_n^+$  es compacto en  $S^k$ . Además, por la Proposición III.1.6  $X^+ = \varprojlim_p \{X_n^+, f_n^+\}$  y entonces, por el Teorema de Isbell,  $X^+ \subset S^{2k}$ . Por lo tanto la inmersión  $X \hookrightarrow \mathbb{R}^{2k}$  es propia, es decir  $X$  es homeomorfo a un conjunto cerrado de  $\mathbb{R}^{2k}$ .  $\square$

## §III.2. Límites inversos que preservan los finales de Freudenthal

La compacidad es crucial, no solo para la existencia de un límite inverso, sino también para la preservación de la conexión. De hecho, si consideramos la sucesión inversa de árboles con un sólo final  $X_n$  cuyo bosquejo vemos en la siguiente figura, su límite consiste en dos copias de la semirecta euclídea  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ .

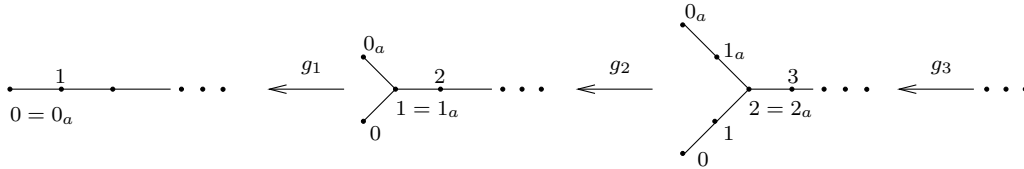


Figura III.1: Sucesión inversa de árboles con un sólo final.

Aquí  $g_n$  es la identidad sobre  $[0, \infty) \cup [0_a, n_a)$  y lleva linealmente el intervalo  $[n_a, (n+1)_a]$  sobre  $[n, n+1]$  en la forma obvia.

A continuación estudiamos la relación entre la conexión de  $X = \varprojlim_p \{X_n, f_n\}$  y el comportamiento de las aplicaciones de enlace  $f_n$  con respecto a los finales. Comenzamos observando que dado un límite inverso  $X = \varprojlim_p \{X_n, f_n\}$  de espacios admisibles, podemos considerar el límite inverso de las compactificaciones de Freudenthal y extensiones correspondientes  $\varprojlim_p \{\widehat{X}_n, \widehat{f}_n\}$ . Entonces

**Proposición III.2.1.** Si  $X = \varprojlim_p \{X_n, f_n\}$  es un límite inverso de continuos generalizados entonces existe una sobreyección canónica continua  $\varphi : \widehat{X} \rightarrow \varprojlim \{\widehat{X}_n, \widehat{f}_n\}$ .

**Demostración.** Es claro que las extensiones  $\widehat{\pi}_n : \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}_n$  de las proyecciones  $\pi_n : X \rightarrow X_n$  definen una aplicación canónica  $\varphi : \widehat{X} \rightarrow L = \varprojlim \{\widehat{X}_n, \widehat{f}_n\}$ . Más aún, la imagen  $\varphi(\widehat{X}) \subset \varprojlim \widehat{X}_n$  es compacta, y por tanto  $D = \varprojlim \widehat{X}_n - \varphi(\widehat{X})$  es un conjunto abierto en  $\varprojlim \widehat{X}$  contenido en el conjunto compacto  $F = \varprojlim \{\mathcal{F}(X_n), f_{n*}\}$ . Si  $D \neq \emptyset$  y  $\varepsilon \in D$ , la 0-dimensionalidad de  $F$  establece un entorno abierto y cerrado  $\Omega \subset D$  de  $\varepsilon$  en  $F$ . Por lo tanto,  $\Omega$  es abierto en  $\varprojlim \widehat{X}_n$  y cerrado en  $F$ , y entonces también es compacto en  $\varprojlim \widehat{X}_n$ . Esto contradice la conexión de  $\varprojlim \widehat{X}_n$  y necesariamente  $D = \emptyset$ . Aquí usamos que los espacios  $\widehat{X}_n$  son continuos.  $\square$

**Corolario III.2.2.** Bajo las suposiciones anteriores, existe una aplicación sobreyectiva entre los finales de Freudenthal de  $X = \varprojlim_p \{X_n, f_n\}$  y el límite inverso de espacios de finales de Freudenthal  $\varprojlim \{\mathcal{F}(X_n), f_{n*}\}$ .

**Definición III.2.3.** Decimos que una sucesión inversa  $\{X_1 \xleftarrow{g_1} X_2 \xleftarrow{g_2} \dots\}$  con aplicaciones de enlace propias es *fiel en los finales* si las aplicaciones de enlace inducen homeomorfismos  $g_{n*} : \mathcal{F}(X_{n+1}) \cong \mathcal{F}(X_n)$  para todo  $n$ . Es más, su límite  $X = \varprojlim_p \{X_n, g_n\}$  se dice que *preserva los finales* si las proyecciones canónicas  $\pi_n : X \rightarrow X_n$  inducen homeomorfismos  $\pi_{n*} : \mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(X_n)$  para todo  $n$ .

Obviamente, sucesiones de espacios con un único final son fieles a los finales. El siguiente ejemplo muestra que los límites de sucesiones fieles en los finales pueden tener un espacio de finales no metrizable.

**Ejemplo III.2.4.** Sea  $\{p_i\}_{i \geq 1}$  una sucesión creciente de números primos donde  $p_1 = 2$  y consideremos la sucesión inversa formada por los árboles

$$X_n = ([1, +\infty) \times \{0\}) \cup \{\{p_i^n\} \times [0, p_i^n]\}_{i \geq 1} \quad (n \geq 1)$$

y las aplicaciones propias  $f_n : X_{n+1} \rightarrow X_n$  definidas como sigue:  $f_n(x, 0) =$

$(x, 0)$  si  $x \in [1, \infty)$ ;  $f_n(p_i^n, x) = (p_i^{n-1} + x, 0)$  si  $0 \leq x \leq p_i^{n-1}(p_i - 1)$  y  $f_n(p_i^n, x) = (p_i^{n-1}, x - p_i^{n-1}(p_i - 1))$  si  $p_i^{n-1}(p_i - 1) \leq x \leq p_i^n$ .

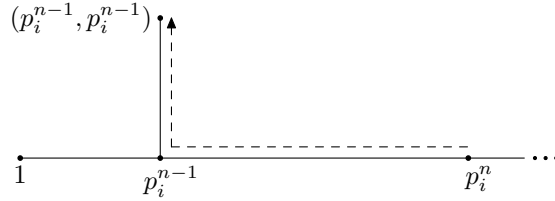


Figura III.2: Imagen en  $X_{n-1}$  del segmento  $\{p_i^n\} \times [0, p_i^n] \subset X_n$  por  $f_{n-1}$ .

No es difícil comprobar que  $X = \lim_{\leftarrow p} X_n \cong [1, +\infty) \sqcup \left( \bigsqcup_{i \geq 1} [p_i, +\infty) \right)$ , y entonces  $\mathcal{F}(X)$  no puede ser metrizable por el Teorema I.4.7.

**Proposición III.2.5.** *Supongamos que el límite  $X = \lim_{\leftarrow p} \{X_n, g_n\}$  de una sucesión inversa de continuos generalizados fiel en los finales preserva los finales. Entonces  $X$  es conexo y por tanto, un continuo generalizado.*

En la demostración de la Proposición III.2.5 usaremos la siguiente generalización directa de resultados bien conocidos en el caso compacto (Proposición B.6). Incluimos las demostraciones por completitud.

**Lema III.2.6.** *Sea  $A \subset X = \lim_{\leftarrow p} \{X_i, f_i\}$  un conjunto cerrado donde los  $X_i$  son espacios admisibles. Si  $\pi_i : X \rightarrow X_i$  son las proyecciones canónicas, entonces  $A = \lim_{\leftarrow p} \{\pi_i(A), f'_i\}$  para las restricciones obvias  $f'_i$ .*

**Demostración.** Es inmediato que  $A \subset L = \lim_{\leftarrow p} \{\pi_i(A), f'_i\}$ ; más aún, dado  $x = (x_i)_{i \geq 1} \in L$  existe un elemento  $y_i \in A$  tal que  $\pi_i(y_i) = x_i$  para todo  $i$ . Por lo tanto  $\pi_k(y_i) = x_k$  para todo  $k \leq i$ , y así la sucesión  $\{y_i\}$  converge a  $x$  en  $X$ , de donde  $x \in A$  puesto que  $A$  es un conjunto cerrado.  $\square$

**Lema III.2.7.** *Sean  $A_1, A_2 \subset X$  conjuntos cerrados de un límite inverso  $X = \lim_{\leftarrow p} \{X_i, f_i\}$  de espacios admisibles. Si  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$  y  $A_1$  ó  $A_2$  es compacto, entonces  $A_1 \cap A_2 = \lim_{\leftarrow p} \{\pi_i(A_1) \cap \pi_i(A_2), f_i^1\}$  para las restricciones obvias  $f_i^1$ .*

**Demostración.** Como cada  $\pi_i(A_1) \cap \pi_i(A_2)$  es compacto, el límite  $L = \lim_{\leftarrow p} \{\pi_i(A_1) \cap \pi_i(A_2), f_i^1\}$  no es vacío. Es más, por el Lema III.2.6  $A_1 \cap A_2 =$

$\lim_{\leftarrow p} \{\pi_i(A_1 \cap A_2), f_i^2\} \subset L$  para la restricción correspondiente  $f_i^2$ . Recíprocamente, dado  $x = (x_i)_{i \geq 1} \in L$  existe un elemento  $y_i^j \in A_j$  tal que  $\pi_i(y_i^j) = x_i$  para todo  $i \geq 1$  y  $j = 1, 2$ . Como en la demostración del Lema III.2.6, las sucesiones  $y_i^1$  y  $y_i^2$  convergen a  $x$  en  $X$  y así  $x \in A_1 \cap A_2$ . Aquí usamos que  $A_1$  y  $A_2$  son conjuntos cerrados.  $\square$

**Nota III.2.8.** El límite inverso que aparece al comienzo de esta sección muestra que el Lema III.2.7 no se verifica si se elimina la compacidad.

**Demostración de la Proposición III.2.5.** Supongamos por un momento que  $X = A_1 \cup A_2$  es una unión disjunta de dos conjuntos abiertos (y por tanto cerrados). Consideremos la compactificación de Freudenthal y las extensiones  $\widehat{\pi}_i : \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}_i$  y tomemos  $Z_i = \overline{A_i}^{\widehat{X}}$ . Por el Lema III.2.6  $Z_i = \lim_{\leftarrow} \{\widehat{\pi}_n(Z_i), f'_n\}$  para las restricciones obvias  $f'_n$ . Más aún, la conexión de  $\widehat{X}_n$  nos lleva a  $\widehat{\pi}_n(Z_1) \cap \widehat{\pi}_n(Z_2) \neq \emptyset$  para cada  $n$ . Aplicando el Lema III.2.7,  $Z_1 \cap Z_2 = \lim_{\leftarrow} \{\widehat{\pi}_n(Z_1) \cap \widehat{\pi}_n(Z_2), f''_n\}$  para las correspondientes restricciones  $f''_n$ , y por tanto  $Z_1 \cap Z_2 = Z_1 \cap Z_2 \cap \mathcal{F}(X) \neq \emptyset$ . Así, para cualquier final  $\mathcal{U} \in Z_1 \cap Z_2$ , el Lema I.2.5 implica  $A_1, A_2 \in \mathcal{U}$  de donde  $\emptyset = A_1 \cap A_2 \in \mathcal{U}$ , que es una contradicción.  $\square$

También tenemos el siguiente recíproco parcial de la Proposición III.2.5

**Proposición III.2.9.** *Si el límite  $X = \lim_{\leftarrow p} \{D_i, f_i\}$  de una sucesión de dendritas fiel en los finales es conexo por caminos, entonces el límite preserva los finales.*

**Demostración.** Puesto que  $X$  es un continuo generalizado podemos describir los finales de Freudenthal de  $X$  por medio de cuasicomponentes. Supongamos por un momento que existen dos finales distintos  $\varepsilon_1 = (Q_n^1)_{n \geq 1}$ ,  $\varepsilon_2 = (Q_n^2)_{n \geq 1} \in \mathcal{F}(X)$  con  $\varepsilon = \pi_{i*}(\varepsilon_1) = \pi_{i*}(\varepsilon_2) \in \mathcal{F}(X_i)$  ( $i \geq 1$ ) para las proyecciones  $\pi_i : X \rightarrow X_i$ . Como  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$  las cuasicomponentes  $Q_n^1$  y  $Q_n^2$  son disjuntas para un  $n$  lo suficientemente grande. Sean  $L_j \subset \widehat{X} - \text{int}K_n$  ( $j = 1, 2$ ) continuos en  $\widehat{X}$  dados por el Lema I.4.13 con  $\varepsilon_j \in L_j$  y  $L_j \cap \text{Fr}K_n \neq \emptyset$ . Entonces, para la extensión de Freudenthal de  $\pi_i$ ,  $\widehat{\pi}_i(L_j)$  es un conjunto conexo en  $\widehat{D}_i$  con  $\varepsilon \in \widehat{\pi}_i(L_1) \cap \widehat{\pi}_i(L_2)$ ; donde  $\widehat{D}_i$  es dendrita por el Lema II.1A.5. Por lo tanto  $\Omega_i = \widehat{\pi}_i(L_1) \cup \widehat{\pi}_i(L_2)$  es también un conjunto conexo en  $\widehat{D}_i$ . Si  $\Omega_0^i = \Omega_i \cap \mathcal{F}(D_i)$ ,



entonces  $\Omega - \Omega_0 = \pi_i(L_1 - L_0^1) \cup \pi_i(L_2 - L_0^2)$  con  $L_0^j = L_j \cap \mathcal{F}(X)$ . Notemos que  $L_j - L_0^j$  es cerrado en  $X$ .

Más aún, sea  $\Gamma \subset X$  un camino con  $\Gamma \cap L_j \neq \emptyset$  para  $j = 1, 2$ . Luego  $\pi_i(\Gamma)$  es un continuo en  $D_i$  y también lo es  $\Sigma_i = \widehat{\pi}_i(\Gamma) \cap \Omega = \pi_i(\Gamma) \cap (\Omega - \Omega_0)$  pues los dendritas son hereditariamente unicoherentes por (II.1A.7(e)). En particular, para las restricciones  $f'_i : \Sigma_{i+1} \rightarrow \Sigma_i$  el límite inverso  $\Sigma = \varprojlim \{\Sigma_i, f'_i\} \subset X$  es un continuo. Sin embargo, el Lema III.2.7 establece que

$$\Sigma = \Gamma \cap ((L_1 - L_0^1) \cup (L_2 - L_0^2))$$

donde el miembro derecho de la igualdad no es conexo. Esto es una contradicción que concluye la demostración.  $\square$

**Nota III.2.10.** La Proposición III.2.9 se verifica para  $X$  un continuo generalizado de Peano (ver Nota II.1.1).

Las aplicaciones de enlace monótonas producen sucesiones inversas fieles en los finales. De manera más precisa,

**Teorema III.2.11.** *Cualquier sucesión  $\{X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \xleftarrow{f_2} \dots\}$  de espacios admisibles donde las aplicaciones enlace son propias y monótonas es fiel en los finales. Más aún, su límite inverso preserva los finales.*

La demostración es una consecuencia inmediata de la siguiente

**Proposición III.2.12.** *Cualquier aplicación propia y monótona  $f : X \rightarrow Y$  entre espacios admisibles es fiel en los finales.*

Decimos que una aplicación propia  $f : X \rightarrow Y$  es *fiel en los finales* si la aplicación inducida  $f_* : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$  es un homeomorfismo. A continuación usaremos el siguiente lema cuya demostración es un sencillo ejercicio.

**Lema III.2.13** ([24]; 1.4.C). *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua y cerrada. Entonces para todo  $A \subset X$  se tiene que  $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ . Es más, si  $A, B \subset X$ , entonces  $f(A) \subset f(B)$  implica que  $f(\overline{A}) \subset f(\overline{B})$ .*

**Demostración de la Proposición III.2.12.** Dados dos finales (esto es,  $\mathcal{A}$ -ultrafiltros) diferentes  $\mathcal{U}_1$  y  $\mathcal{U}_2 \in \mathcal{F}(X)$ , existen dos conjuntos cerrados de frontera compacta  $U_1 \in \mathcal{U}_1$  y  $U_2 \in \mathcal{U}_2$  con  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  y  $\text{Fr}U_1 \cup \text{Fr}U_2 \subset \text{int}K$  con  $K$  compacto. Más aún, podemos suponer que  $K = f^{-1}(L)$  para algún compacto  $L \subset Y$ . Aquí usamos que  $f$  es propia. Por el Lema I.2.3,  $X - \text{int}K \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$  y entonces  $F_1 = U_1 - \text{int}K$  y  $F_2 = (X - \text{int}K) - F_1$  forman una partición de  $X - \text{int}K$  en dos conjuntos abiertos y cerrados con  $F_1 \in \mathcal{U}_1$  y  $F_2 \in \mathcal{U}_2$  pues  $U_2 - \text{int}K \subset F_2$ .

Por otra parte  $f(F_1) \cap f(F_2) = \emptyset$ ; en efecto, si  $f(x_1) = f(x_2)$  para  $x_i \in F_i$  entonces el conjunto conexo  $f^{-1}(f(x_1))$  corta a  $F_1$  y  $F_2$  lo cual es una contradicción. Aquí usamos la monotonía de  $f$ . De esta forma  $f(F_1)$  y  $f(F_2)$  son una partición de  $Y - \text{int}L = f(X - \text{int}K)$  (la igualdad sigue del Lema III.2.13) en dos conjuntos cerrados (y por tanto abiertos). En consecuencia la frontera de  $f(F_i)$  en  $Y$  es compacta para  $i = 1, 2$ . De acuerdo con el Lema I.2.5,  $\mathcal{U}_i \in \overline{F_i}^{\widehat{X}}$  y por la continuidad de la extensión de Freudenthal  $\widehat{f}(\mathcal{U}_i) = f_*(\mathcal{U}_i) \in \overline{f(F_i)}^{\widehat{Y}}$  y por tanto  $f(F_i) \in f_*(\mathcal{U}_i)$  de nuevo por el Lema I.2.5. Más aún,  $f(F_1) \cap f(F_2) = \emptyset$  establece que  $f_*(\mathcal{U}_1) \neq f_*(\mathcal{U}_2)$ . Esto muestra que  $f_*$  es inyectiva.

La sobreyección de  $f_*$  sigue del hecho de que las aplicaciones monótonas son sobreyectivas y el Lema I.2.10.  $\square$

**Demostración del Teorema III.2.11.** Se sigue de la Proposición III.2.12 que las aplicaciones inducidas  $\mathcal{F}(X_n) \rightarrow \mathcal{F}(X_{n-1})$  son homeomorfismos. Para comprobar que el límite inverso preserva los finales, observamos que las proyecciones  $\pi_n$  son monótonas por el Lema III.1.2, y aplicamos otra vez la Proposición III.2.12.  $\square$

### §III.3. Espacios tipo rayo

Seguidamente consideraremos el análogo propio de la bien conocida clase de los espacios tipo arco en la teoría de los continuos. Concretamente,

**Definición III.3.1.** Decimos que un espacio  $X \neq \emptyset$  es un *espacio tipo rayo* si  $X = \varprojlim_p \{X_n, f_n\}$  donde  $X_n = \mathbb{R}_{\geq 0}$  es la semirecta euclídea para cada  $n \geq 1$ .

**Teorema III.3.2.** *Si  $X$  es un continuo generalizado de Peano tipo rayo entonces  $X \cong \mathbb{R}_{\geq 0}$ .*

**Demostración.** Tenemos  $X = \varprojlim_p \{X_n, f_n\}$  donde cada  $X_n \cong \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Como cada  $X_n^+$  es un arco y por la Proposición III.1.6  $X^+ \cong \varprojlim_{\infty} \{X_n^+, f_n^+\}$ , se sigue que  $X^+$  es tipo arco y por ([59]: 8.41) se verifica que  $X^+ \cong [a, b]$ . Entonces, puesto que  $X^+ - \{\infty\} = X$  es conexo (al ser continuo generalizado), se tiene que  $\infty$  no puede separar a  $X$  por lo que debe corresponder a uno de los extremos de  $X^+$  y por tanto  $X$  será homeomorfo a  $[a, b] \cong \mathbb{R}_{\geq 0}$  ó  $(a, b] \cong \mathbb{R}_{\geq 0}$ .  $\square$

**Lema III.3.3.** *Sea  $X = \varprojlim_p \{\mathbb{R}_{\geq 0}, f_n\}$  un espacio tipo rayo. Si  $F_1$  y  $F_2$  son dos subconjuntos cerrados, conexos y no compactos en  $X$ , entonces  $F_1 \subset F_2$  ó  $F_2 \subset F_1$ .*

**Demostración.** Como las proyecciones  $\pi_n : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  son propias (III.1.2),  $\pi_n(F_1)$  y  $\pi_n(F_2)$  son subconjuntos cerrados, conexos y no compactos en  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ . Por lo tanto cada  $\pi_n(F_j)$  ( $j = 1, 2$ ) es un intervalo cerrado y no acotado y entonces  $\pi_n(F_1) \subset \pi_n(F_2)$  ó  $\pi_n(F_2) \subset \pi_n(F_1)$ . Nótese que si  $\pi_m(F_1) \subset \pi_m(F_2)$  para algún  $m$ , entonces  $\pi_n(F_1) \subset \pi_n(F_2)$  para todo  $n \leq m$ . Así, la existencia de un subsucesión infinita  $\{n_j\}$  con  $\pi_{n_j}(F_1) \subset \pi_{n_j}(F_2)$  establece  $\pi_n(F_1) \subset \pi_n(F_2)$  para todo  $n \geq 1$ . Más aún, por el Lema III.2.6  $F_i = \varprojlim_p \{\pi_n(F_i), f'_n\}$  donde  $f'_n : \pi_{n+1}(F_i) \rightarrow \pi_n(F_i)$  ( $i = 1, 2$ ), y así  $F_1 \subset F_2$ .

Si la subsucesión  $\{n_j\}_{j \geq 1}$  no existe, entonces necesariamente existe un  $n_0$  para el cual  $\pi_n(F_2) \subset \pi_n(F_1)$  para todo  $n \geq n_0$ , y entonces  $F_2 \subset F_1$ .  $\square$

**Teorema III.3.4.** *Cualquier espacio tipo rayo  $X$  es un continuo generalizado con un solo final.*

**Demostración.** Según el Lema III.3.3,  $X$  tiene a lo sumo una componente conexa no compacta. Es más, de la Proposición III.1.6 se deduce que la compactificación de Alexandroff  $X^+$  es un continuo (tipo arco) y entonces, el Teorema I.4.12 muestra que la clausura de cualquier componente  $C \subset X = X^+ - \{\infty\}$  debe contener a  $\infty \in C$ . Por lo tanto,  $X$  coincide con su única componente no compacta; esto es,  $X$  no tiene componentes compactas y  $X$  es un continuo generalizado.

Supongamos que  $X$  tiene dos finales diferentes  $\varepsilon_i = (Q_n^i)_{n \geq 1}$  ( $i = 1, 2$ ) definidos por sucesiones de cuasicomponentes  $Q_n^i \subset X - \text{int}K_n$  para una sucesión exhaustiva  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  de  $X$ . Como  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ , existe un  $n_0$  tal que las cuasicomponentes  $Q_{n_0}^1$  y  $Q_{n_0}^2$  son disjuntas. Sea  $C_i \subset Q_{n_0}^i$  una componente no compacta dada por el Lema I.4.13. Como cada  $Q_n^i$  es un conjunto cerrado también lo es  $C_i$ , y el Lema III.3.3 establece que  $C_1 \subset C_2 \subset Q_{n_0}^2$  ó  $C_2 \subset C_1 \subset Q_{n_0}^1$ . En ambos casos  $Q_{n_0}^1 \cap Q_{n_0}^2 \neq \emptyset$  lo que es una contradicción.  $\square$

**Nota III.3.5.** En la teoría de los continuos los espacios tipo arco están caracterizados por la existencia de  $\epsilon$ -aplicaciones  $f : X \rightarrow [0, 1]$  (es decir, para cada  $x \in X$  el diámetro  $\text{diám}(f^{-1}(f(x)))$  es más pequeño que  $\epsilon$ ) para todo  $\epsilon > 0$ .

Un paso crucial en la demostración de este resultado es el hecho de que una tal  $\epsilon$ -aplicación  $f$  satisface que existe  $\delta > 0$  tal que  $\text{diám}(f^{-1}(A)) < \epsilon$  si  $\text{diám}(A) < \delta$ ; ver ([59]; 2.33). Esta propiedad no se tiene para espacios tipo rayo; en efecto, el homeomorfismo lineal  $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  definido por  $g(n) = n$  y  $g(n + \frac{1}{2}) = n + \frac{1}{n}$  es una  $\epsilon$ -aplicación para todo  $\epsilon > 0$  pero para los conjuntos  $A_n = [n, n + \frac{1}{n}]$  se tiene que  $\text{diám}(A_n) < \frac{1}{n}$  y  $\text{diám}(g^{-1}(A_n)) = \frac{1}{2}$  para todo  $n$ .

Con la idea de obtener una caracterización de los espacios tipo rayo en términos de  $\epsilon$ -aplicaciones  $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cong [0, 1)$ , tenemos que considerar en  $X$  métricas que estén *controladas en el infinito*; esto es, para cada  $\eta > 0$  existe un conjunto compacto  $K \subset X$  tal que  $d(x, y) < \eta$  si  $x, y \in X - K$  (estas métricas son exactamente las restricciones a  $X$  de métricas sobre la compactificación de Alexandroff  $X^+$ ).

De esta forma, un espacio  $X$  es tipo rayo si y sólo si para cualquier métrica controlada en el infinito  $d$  sobre  $X$  y cualquier  $\epsilon > 0$  existe una  $\epsilon$ -aplicación  $f : (X, d) \rightarrow [0, 1)$ . Para esto observamos que  $X$  es tipo rayo si y sólo si  $X^+ = \varprojlim_{\infty} \mathbb{R}_{\geq 0}^+$  (Proposición III.1.6). Entonces un cuidadoso estudio de los argumentos seguidos en la demostración de ([59]; 12.19) muestra que  $X^+ = \varprojlim_{\infty} \mathbb{R}_{\geq 0}^+$  si y sólo si para todo  $\epsilon > 0$  existe una  $\epsilon$ -aplicación  $f : X^+ \rightarrow \varprojlim_{\infty} \mathbb{R}_{\geq 0}^+ \cong [0, 1]$  con  $f^{-1}(1) = \infty \in X^+$ .

Es bien sabido que la clase de los espacios tipo arco contiene un objeto universal (ver [66]). Recordemos que un espacio  $U$  se dice que es *universal* en una categoría topológica  $\mathbf{C}$  si cualquier espacio de  $\mathbf{C}$  se puede sumergir en  $U$ .

En contraste, la clase de los espacios tipo rayo no admite un espacio universal. Más precisamente,

**Teorema III.3.6.** *No existe un espacio universal en la subcategoría llena<sup>1</sup>  $\mathbf{TR}$  de  $\mathbf{Topp}$  de los espacios tipo rayo y las aplicaciones propias.*

Para esto definimos

**Definición III.3.7.** Un *espacio sin rayo* es un espacio que no admite una inmersión propia de la semirecta  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ .

**Demostración del Teorema III.3.6.** Sea  $X$  un espacio tipo rayo sin rayo en  $\mathbf{TR}$  (ver III.3.8 para un ejemplo) y sea  $Y = \mathbb{R}_{\geq 0}$  una semirecta. Supongamos que existe un espacio universal  $U \in \mathbf{TR}$ . Esto implica la existencia de inmersiones cerradas  $X, Y \subset U$ . Por el Lema III.3.3 tenemos que  $X \subset Y$  ó  $Y \subset X$ . La última opción se puede eliminar pues  $Y$  es espacio sin rayo, y entonces tenemos que necesariamente  $X \subset Y$ , pero entonces  $X$  es un subconjunto conexo en  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  el cual es un intervalo. Esto es una contradicción y la demostración concluye.  $\square$

**Ejemplo III.3.8.** En lo que sigue describimos un ejemplo de espacio tipo rayo sin rayo. Para ello consideramos la familia de segmentos unidad  $A_i^j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = i, j - 1 \leq y \leq j\}$  y  $B_j^i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = j, i - 1 \leq x \leq i\}$  que forman la red plana de cuadrados unidad. Sea  $X_n$  el rayo en esta red plana obtenido añadiendo a la unión  $\bigcup\{A_i^j; 1 \leq j < +\infty, 2n(j - 1) \leq i \leq 2nj\}$  un conjunto mínimo de segmentos horizontales  $B_j^i$ ; ver Figura III.3.

Las aplicaciones enlace propias  $f_n : X_{n+1} \rightarrow X_n$  vienen dadas por las aplicaciones obvias que llevan linealmente el segmento  $A_i^j \subset X_{n+1}$  sobre  $A_{i-2(j-1)}^j \subset X_n$  si  $2(n + 1)(j - 1) \leq i \leq 2(n + 1)j - 2$  y sobre  $A_{2nj}^j$  si  $2(n + 1)j - 2 \leq i \leq 2(n + 1)j$ .

Afirmamos que  $X = \lim_{\leftarrow p} \{X_n, f_n\}$  es homeomorfo a el espacio  $\Sigma = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Sigma_k$  representado en la Figura III.4. Para esto observamos que  $X_n$  se descompone como  $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_n^k$  donde  $X_n^k$  es el arco en  $X_n$  conteniendo  $\bigcup_{2(k-1) \leq i \leq 2k} A_i^k$ . Más aún  $f_n(X_{n+1}^k) = X_n^k$  para todo  $n, k \geq 1$ . Es una comprobación directa que para

<sup>1</sup>Una subcategoría  $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$  se dice llena si para todo par de objetos  $X, Y$  en  $\mathbf{D}$  los conjuntos de morfismos  $\mathbf{D}(X, Y) = \mathbf{C}(X, Y)$  entre  $X$  e  $Y$  coinciden.

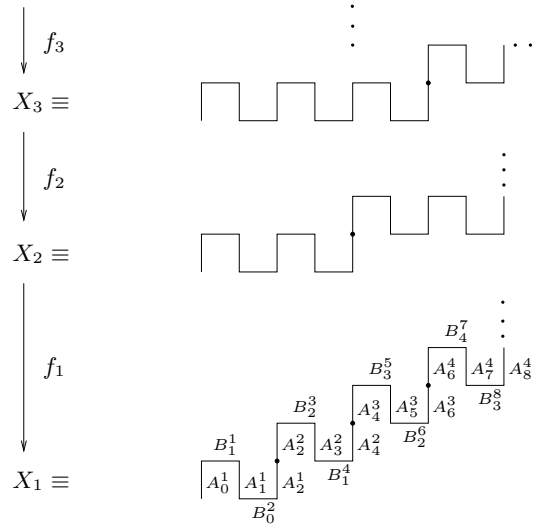


Figura III.3: La sucesión inversa  $X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \xleftarrow{f_2} \dots \xleftarrow{f_{n-1}} X_n \xleftarrow{f_n} X_{n+1} \dots$

las restricciones  $f_n^k = f|_{X_n^k}$ , el límite inverso  $X^k = \varprojlim \{X_n^k, f_n^k\}$  es un subconjunto cerrado en  $X$  y  $X = \bigcup_{k=1}^\infty X^k$ . Es más, la definición de las aplicaciones de enlace  $f_n$  establece homeomorfismos  $\varphi_k : \Sigma^k \cong X^k$  donde  $\Sigma^k$  es la curva “seno del topólogo”  $\Sigma_k \subset \Sigma$ . Los homeomorfismos  $\varphi_k$  son compatibles en los puntos  $\{p_k\}_{k \geq 1}$  y definen un homeomorfismo  $\varphi = \bigcup_{k=1}^\infty \varphi_k : \Sigma = \bigcup_{k=1}^\infty \Sigma_k \cong X = \bigcup_{k=1}^\infty X^k$ .

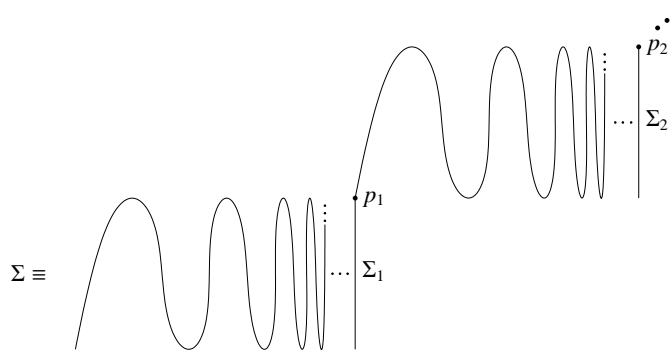


Figura III.4: El espacio  $\Sigma$ .

## §III.4. Espacios tipo árbol y cuestiones abiertas

La definición de un espacio tipo rayo admite la siguiente generalización inmediata

**Definición III.4.1.** Un espacio  $X$  se dice que es *tipo árbol* si es el límite  $X = \varprojlim_p \{X_n, f_n\}$  donde cada  $X_n$  es un árbol localmente finito para todo  $n \geq 1$ . En particular, si  $\{X_n, f_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión fiel en los finales donde cada  $X_n = T$  es un árbol localmente finito fijo para todo  $n \geq 1$ , se dice que  $X$  es *tipo  $T$* .

Si  $T = \mathbb{R}$  es la recta euclídea, diremos que  $X$  es un *espacio tipo línea*. El Teorema III.3.4 se extiende para estos espacios; concretamente,

**Teorema III.4.2.** *Cualquier espacio  $X$  tipo línea es un continuo generalizado con dos finales.*

**Demostración.** Supongamos que  $X = \varprojlim_p \{\mathbb{R}, f_n\}$  no es conexo y que tiene una componente compacta  $D$ . La compactificación por un punto  $X^+$  es un continuo (tipo  $S^1$ ) por la Proposición III.1.6 y el Teorema I.4.12 implica que  $\infty \in D$ , lo que es una contradicción. Luego todas las componentes son no compactas.

Supongamos que  $X$  tiene al menos 3 componentes  $C_1, C_2$  y  $C_3$ . Como las proyecciones son aplicaciones propias, tenemos que  $\pi_n(C_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) son conjuntos cerrados conexos no compactos de  $\mathbb{R}$ , por lo que son intervalos cerrados no acotados y por tanto al menos dos de ellos están relacionados por inclusión; digamos por ejemplo que  $\pi_n(C_1) \subset \pi_n(C_2)$ . Argumentando como en la demostración del Lema III.2.6 obtenemos

$$C_1 = \varprojlim_p \{\pi_n(C_1), f_n^1\} \subset \varprojlim_p \{\pi_n(C_2), f_n^2\} = C_2,$$

lo que es una contradicción. Aquí  $f_n^i : \pi_{n+1}(C_i) \rightarrow \pi_n(C_i)$  es la correspondiente restricción de  $f_n$ .

Nos queda descartar el caso en que  $X$  tiene exactamente dos componentes no compactas  $C_1$  y  $C_2$ . Para esto observamos que la conexión de  $\mathbb{R}$  implica que para cada  $n$  los intervalos no acotados  $\pi_n(C_i)$  ( $i = 1, 2$ ) deben tener una intersección no vacía  $A_n = \pi_n(C_1) \cap \pi_n(C_2) \neq \emptyset$  que podemos suponer que es un intervalo compacto para todo  $n \geq n_0$ , porque de otra manera  $\pi_n(C_1) \subset \pi_n(C_2) = \mathbb{R}$  (o viceversa) para cada  $n$ , y procederíamos igual que en el caso anterior.

La compacidad de los  $A_n$  establece que  $\emptyset \neq \varprojlim \{A_i, f'_n\} \subset C_1 \cap C_2$  para las restricciones  $f'_n = f_n|_{A_{n+1}}$ , lo que es una contradicción. Por lo tanto  $X$  es un continuo generalizado.

Es más, el Corolario III.2.2 nos muestra que  $X$  tiene al menos dos finales. Aquí usamos que la sucesión que define  $X$  es fiel en los finales. Seguidamente comprobamos que el número de finales es a lo más 2. En efecto, supongamos en caso contrario que  $\varepsilon_i = (Q_n^i)_{n \geq 1}$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) son tres finales distintos donde, para cada  $n$ ,  $Q_n^i \subset X - \text{int}K_n$  es una cuasicomponente para la sucesión exhaustiva  $\{K_n\}_{n \geq 1}$ . Entonces existe  $m$  tal que las cuasicomponentes  $Q_m^1, Q_m^2, Q_m^3$  son disjuntas dos a dos. Si, para cada  $i \leq 3$ ,  $C_i \subset Q_m^i$  es una componente no compacta dada por el Lema I.4.13, entonces para cada  $n \geq 1$ , al menos dos de las tres proyecciones conexas no compactas  $\pi_n(C_i)$  comparten un final de  $\mathbb{R}$ . Para ser precisos, supongamos que  $+\infty$  es un final de  $\pi_n(C_1)$  y  $\pi_n(C_2)$ , de donde  $\pi_n(C_1) \subset \pi_n(C_2)$  ó  $\pi_n(C_2) \subset \pi_n(C_1)$  para cada  $n \geq 1$ . Razonando como en la demostración del Lema III.3.3 se puede comprobar sin dificultad que  $C_1 \subset C_2$  ó  $C_2 \subset C_1$ , lo que contradice la suposición  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ . Procediendo análogamente en cualquier otro caso se concluye la demostración.  $\square$

Ejemplos sencillos nos muestran que el resultado anterior sobre espacios tipo rayo y tipo línea no se cumple para otros árboles. En concreto, un espacio tipo  $T$ , con  $T$  un árbol con un solo final, puede no preservar los finales y ser no conexo como muestra el ejemplo ilustrado en la Figura III.1. Más aún, el Ejemplo III.2.4 muestra que el espacio de finales de  $X$  puede incluso no ser metrizable.

Se puede encontrar fácilmente un ejemplo que muestre un espacio tipo  $T$ , donde  $T$  sea un árbol sin vértices finales, que no preserve los finales y no sea



conexo; véase Figura III.5, en la cual se representa una sucesión inversa cuyo límite es la unión  $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}_a$  de dos copias distintas de la recta euclídea.

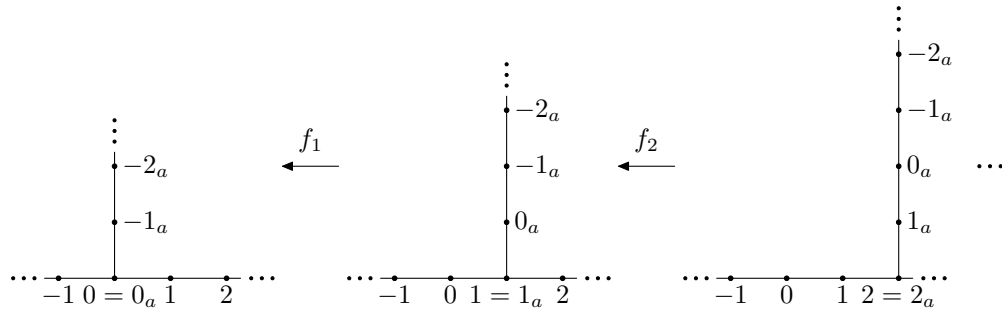


Figura III.5: Sucesión inversa cuyo límite inverso son dos copias disjuntas de  $\mathbb{R}$ .

Ahora estamos preparados para caracterizar los dendritas como espacios tipo árbol. Presentamos una demostración alternativa en la Sección §III.4A.

**Teorema III.4.3.** *El continuo generalizado de Peano  $D$  es dendrítico si y sólo si es tipo árbol; es decir,  $D = \varprojlim_p \{T_i, f_i\}$  donde,  $T_i$  es un árbol para todo  $i \geq 1$ . Es más, se puede conseguir que la sucesión  $\{T_i, f_i\}$  sea fiel en los finales y por tanto que  $D$  preserve los finales.*

**Demostración.** Supongamos que  $D = \varprojlim_p \{T_i, f_i\}$  para una sucesión de árboles  $T_i$ . De acuerdo con la Proposición II.1A.3(a), sólo necesitamos probar que  $D$  no contiene ciclos. Para esto, sea  $A \subset D$  un subcontinuo cualquiera. Si  $p_i : D \rightarrow T_i$  es la correspondiente proyección canónica, tenemos que  $p_i(A) \subset T_i$  para todo  $i \geq 0$ , luego cada  $p_i(A)$  es un compacto conexo y por tanto un subárbol compacto de  $T_j$ . Así  $A = \varprojlim \{p_i(A), f'_i\}$ , con  $f'_i : p_{i+1}(A) \rightarrow p_i(A)$  la restricción de  $f_i$ , es un dendrita compacto por la versión compacta del Teorema III.4.3 ([59]; 10.50)) y el resultado sigue de la Proposición II.1A.3(b).

Por la Proposición II.1.14 sabemos que existe  $T \hookrightarrow D$  un árbol de finales de  $D$ ; entonces  $\widehat{T} \subset \widehat{D}$  y  $\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(D)$ . Ahora procedemos como en ([59]; 10.27) para el dendrita  $\widehat{D}$  (ver Proposición II.1A.5) con la única diferencia de que aquí no empezamos la construcción inductiva con un único vértice sino con toda la compactificación  $\widehat{T}$ . Más aún, para un conjunto denso numerable  $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset \widehat{D}$ , construimos una sucesión creciente de conjuntos compactos  $\widehat{T} = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_i \subset \dots$  donde  $\overline{A_{i+1} - A_i}$  es el único arco  $\gamma_{i+1}$

que va desde el primer  $x_n \notin A_i$  a algún punto en  $A_i$ . Observemos que para cada  $i$ ,  $T_i = A_i - \mathcal{F}(T)$  es un árbol en  $D$  con  $\mathcal{F}(T_i) = \mathcal{F}(T)$  debido al hecho de que  $\widehat{D}$  es dendrítico.

Notemos que,  $\widehat{D} = \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i}$  debido a la densidad de  $\{x_n\}_{n \geq 1}$ . Es más, por ([59]; 10.32) también sabemos que  $\widehat{D} = \varprojlim \{A_i, r_i^{i+1}\}$  donde las aplicaciones enlace  $r_i^{i+1} : A_{i+1} \rightarrow A_i$  son las retracciones naturales que, por definición, verifican que, para cada  $i \geq 0$ ,  $(r_i^{i+1})^{-1}(\mathcal{F}(T)) = \mathcal{F}(T)$ . Esto significa que las restricciones  $f_i = r_i^{i+1} : T_{i+1} \rightarrow T_i$  son aplicaciones propias y  $D = \varprojlim_p \{T_i, f_i\}$ .  $\square$

El ejemplo III.2.4 nos sugiere la siguiente cuestión

**Cuestión III.4.4.** Supongamos que  $X = \varprojlim_p \{T_n, f_n\}$  es el límite de los árboles  $T_n$  con un número finito de puntos de ramificación. ¿Es el espacio de finales de  $X$  metrizable?

Como una consecuencia de la Proposición III.2.5, si  $X$  es un espacio tipo  $T$  que preserva los finales, entonces  $X$  es conexo. Pero todavía no tenemos una respuesta positiva o un contraejemplo para el recíproco; concretamente,

**Cuestión III.4.5.** ¿Preserva los finales cualquier espacio conexo tipo  $T$ ?

Un respuesta parcialmente positiva se dió en la Proposición III.2.9. También el siguiente ejemplo sencillo nos muestra que para un grafo  $G$  localmente finito y un solo final existen espacios conexos tipo  $G$  que no preservan los finales. Por ejemplo, la recta euclídea  $\mathbb{R}$  es el límite inverso de la siguiente sucesión de grafos de un sólo final.

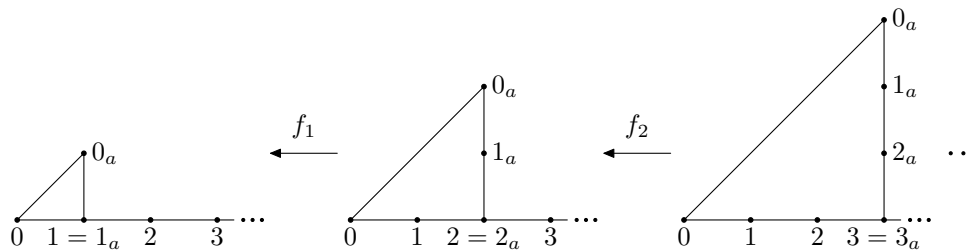


Figura III.6: Sucesión inversa cuyo límite inverso es  $\mathbb{R}$ .

## §III.4A. Dendritas y nervios de recubrimientos

Como una aproximación alternativa al Teorema III.4.3 damos aquí una demostración que es esencialmente una aplicación de la versión propia de un teorema debido a Freudenthal (Teorema III.4A.2). Para esto, recordemos que dado un recubrimiento  $\mathcal{W} = \{W_j\}_{j \in J}$  de un espacio  $X$ , el *nervio de  $\mathcal{W}$*  es el complejo simplicial abstracto  $\mathcal{N}(\mathcal{W})$  cuyos vértices  $\{p_j\}_{j \in J}$  están en biyección con los conjuntos de  $\mathcal{W}$  de tal forma que  $\langle p_{j_0}, p_{j_1}, \dots, p_{j_m} \rangle \in \mathcal{N}(\mathcal{W})$  es declarado un símplice si y sólo si  $W_{j_0} \cap W_{j_1} \cap \dots \cap W_{j_m} \neq \emptyset$ . Nótese que  $\mathcal{N}(\mathcal{W})$  es un complejo simplicial localmente finito si  $\mathcal{W}$  es un recubrimiento localmente finito. Empezamos con la siguiente

**Proposición III.4A.1.** *Sea  $X$  un continuo generalizado de Peano y  $\{K_j\}_{j \geq 1}$  una sucesión exhaustiva en  $X$ . Sea  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \geq 1}$  un recubrimiento numerable localmente finito por conjuntos abiertos con clausura compacta y tal que  $\mathcal{U}$  refina a la familia  $\mathcal{C} = \{C_j^k\}_{j \geq 0, k \in I_j}$  de componentes no acotadas  $C_j^k \subset V_j = X - K_j$ . Entonces  $\mathcal{F}(\mathcal{N}(\mathcal{U})) \cong \mathcal{F}(X)$ .*

**Demostración.** Probaremos que la aplicación estándar (ver [24])  $\lambda : X \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{U})$  induce una biyección continua entre los espacios de finales. Recordemos que la aplicación  $\lambda$  viene dada por  $\lambda(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(x)$  con

$$\lambda_i(x) = \frac{d(x, X - U_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} d(x, X - U_i)} \quad (i \geq 1)$$

donde  $d$  es una métrica sobre  $X$ . Nótese que para todo  $x \in X$  las sumas son finitas por ser  $\mathcal{U}$  localmente finito y  $\lambda(x) \in \langle p_{i_1}, \dots, p_{i_k} \rangle \subset \mathcal{N}(\mathcal{U})$  si  $x \in \bigcap_{j=1}^k U_{i_j}$ . Más aún, ya que el recubrimiento  $\mathcal{U}$  es localmente finito y las clausuras de todos los  $U \in \mathcal{U}$  son compactas, se deduce que  $\lambda$  es una aplicación propia.

Para probar que la aplicación inducida  $\lambda_* : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{N}(\mathcal{U}))$  es biyectiva, para cada índice  $i$  elegimos un punto  $p_i \in U_i - \bigcup_{j \neq i} U_j$  y lo identificamos con el vértice en  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$  representado por  $U_i$ . Cada uno de estos puntos será llamado

un *punto distinguido*. En caso de que  $U_i \subset \bigcup_{j \neq i} U_j$ , simplemente quitamos  $U_i$  del recubrimiento  $\mathcal{U}$ . Nótese que  $\lambda(p_i) = p_i$  con este convenio.

Primeramente observamos que cualquier final  $\varepsilon \in \mathcal{F}(X)$  puede alcanzarse por un rayo  $r : [0, \infty) \rightarrow X$  con  $r(n)$  un punto distinguido para cada  $n \geq 0$ . En efecto, sea  $r' : [0, \infty) \rightarrow X$  cualquier rayo con  $r'_*(\infty) = \varepsilon$ . Como  $\mathcal{U}$  es una familia localmente finita y  $\mathcal{U}$  refina a  $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \geq 1}$ , es fácil encontrar una familia de arcos localmente finita  $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$  que una  $r'(n)$  con un punto distinguido  $t_n$ . Entonces definimos  $r : [0, \infty) \rightarrow X$  por  $r = H_1$  donde  $H : [0, \infty) \times I \rightarrow X$  es la composición  $\tilde{r} \circ \rho$  donde  $\rho : [0, \infty) \times I \rightarrow [0, \infty) \times \{0\} \cup \mathbb{N} \times I$  viene dada por las copias de una retracción fija  $[0, 1] \times I \rightarrow [0, 1] \times \{0\} \cup \{0, 1\} \times I$ , y  $\tilde{r}$  es la unión de  $r'$  sobre  $[0, \infty) \times \{0\}$  y la familia localmente finita de arcos  $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$ .

Para probar que  $\lambda_*$  es inyectiva, consideremos  $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathcal{F}(X)$  dos finales con  $\lambda_*(\varepsilon) = \lambda_*(\varepsilon')$ . Por la observación previa existen rayos  $r, s : [0, \infty) \rightarrow X$  con  $r_*(\infty) = \varepsilon$  y  $s_*(\infty) = \varepsilon'$  para los que  $r(n)$  y  $s(n)$  son puntos distinguidos para todo  $n \geq 0$ . Por el Teorema de aproximación celular propia ([6]; IV.1.6) podemos asumir que los rayos  $\lambda \circ r$  y  $\lambda \circ s$  son simpliciales. Además, puesto que ambos definen el mismo final, existe una familia localmente finita de arcos simpliciales  $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$  que unen los vértices  $\lambda \circ r(n) = r(n)$  y  $\lambda \circ s(n) = s(n)$  en  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ . Para cada  $n \geq 0$  consideremos  $j(n)$  como el entero positivo  $j \geq 1$  más pequeño tal que  $V_j$  contiene a los  $U_i$  cuyos puntos distinguidos caen en  $\tau_n$ . Notemos que  $j(n) \rightarrow \infty$  si  $n \rightarrow \infty$  pues la familia de arcos  $\{\tau_n\}_{n \geq 0}$  es localmente finita. Para cada arista  $\langle v, w \rangle$  en  $\tau_n$  los conjuntos  $U_{i(v)}$  y  $U_{i(w)}$  cuyos puntos distinguidos son  $v$  y  $w$  se cortan y por tanto pertenecen a la misma componente  $C_{j(n)}^{k(n)} \subset V_{j(n)}$ . Inductivamente todos los puntos distinguidos en  $\tau_n$  pertenecen a la misma componente  $C_{j(n)}^{k(n)}$  y así  $\varepsilon = \varepsilon'$ .

Finalmente, para comprobar que  $\lambda_*$  es sobreyectiva empezamos con una sucesión de vértices de  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$   $\{v_n\}_{n \geq 0}$  que definen un final  $\varepsilon \in \mathcal{F}(\mathcal{N}(\mathcal{U}))$ . Por lo tanto cada  $v_n$  determina un conjunto abierto  $U(v_n)$  del recubrimiento  $\mathcal{U}$  y los puntos distinguidos de estos conjuntos definen como mínimo un final  $\eta \in \mathcal{F}(X)$  para el que  $\lambda_*(\eta) = \varepsilon$ .  $\square$

Junto con la Proposición III.4A.1, el otro ingrediente en la demostración alternativa del Teorema III.4.3 es la siguiente versión propia del Teorema clásico

de Freudenthal ([59]; 2.13).

**Teorema III.4A.2** ([71]; Prop. 13). *Sea  $X$  un espacio admisible con  $\dim X \leq n$ . Dada cualquier sucesión localmente finita de refinamientos abiertos  $\mathcal{U}_1 > \mathcal{U}_2 > \mathcal{U}_3 \dots$  tales que  $\text{mesh } \mathcal{U}_i \leq \frac{1}{i}$  y  $\text{ord } \mathcal{U}_i \leq n$  existen aplicaciones propias  $g_i : P_{i+1} \rightarrow P_i$  para las cuales  $X = \varprojlim_p \{P_i, g_i\}$ . Aquí  $P_i$  denota al poliedro subyacente al nervio  $N(\mathcal{U}_i)$ .*

Recordemos que, dado un recubrimiento  $\mathcal{U}$  de un espacio  $X$ , se denota por  $\text{mesh } \mathcal{U}$  al calibre de  $\mathcal{U}$  que es el supremo de los diámetros de todos los miembros de  $\mathcal{U}$  y que el orden de  $\mathcal{U}$ ,  $\text{ord } \mathcal{U}$ , es el mayor entero  $n$  tal que  $\mathcal{U}$  contiene  $n + 1$  conjuntos con intersección no vacía.

**Demostración de la necesidad en III.4.3 (alternativa).** Comenzamos con cualquier recubrimiento localmente finito  $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \geq 1}$  de  $D$  por abiertos de clausura compacta. Dada una sucesión exhaustiva  $\{K_i\}_{i \geq 1}$  de  $D$ , sea  $\mathcal{U}'_0 = \{U_j \cap V_i\}_{j,i \geq 1}$  donde  $V_i = X - K_i$ . Puesto que  $D$  es unidimensional encontramos un refinamiento  $\mathcal{U}_1 < \mathcal{U}'_0$  por conjuntos conexos con  $\text{mesh } \mathcal{U}_1 \leq 1$ , y  $\text{ord } \mathcal{U}_1 \leq 2$ . Por lo tanto si  $U_1, U_2, U_3 \in \mathcal{U}_1$  entonces  $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \emptyset$  y así  $\mathcal{N}(\mathcal{U}_1)$  no tiene 2-símplices; esto es,  $\dim(\mathcal{N}(\mathcal{U}_1)) \leq 1$ . Además, se puede deducir fácilmente de este hecho y de la Proposición II.1A.7(c) que  $N(\mathcal{U}_1)$  no tiene ciclos y así  $N(\mathcal{U}_1)$  es un árbol. Es más,  $\mathcal{F}(N(\mathcal{U}_1))$  es homeomorfo a  $\mathcal{F}(D)$  por la Proposición III.4A.1. Inductivamente, construimos de esta forma una sucesión de refinamientos como en el Teorema III.4A.2 con la propiedad adicional de que cada nervio  $N(\mathcal{U}_i)$  es un árbol con su espacio de finales  $\mathcal{F}(N(\mathcal{U}_i))$  homeomorfo a  $\mathcal{F}(D)$ . Ahora el resultado sigue del Teorema III.4A.2. □

## §III.5. Un dendrita universal

En esta sección describimos un espacio universal  $U$  en la subcategoría llena  $\mathbf{Dend} \subset \mathbf{Topp}$  de los dendritas compactos o no y las aplicaciones propias (Teorema III.5.2). El espacio  $U$  será un subconjunto abierto conveniente del conocido dendrita compacto universal  $W$  definido por T. Ważewski en [79]; ver también [57] y [59].

Para nuestro propósito describiremos  $W$  de una manera ligeramente distinta a la original de Ważewski. Para ello recordamos (ver Definición II.1.17) que dado un árbol  $T$  con vértice raíz  $v_0 \in T$  el  $n$ -ésimo nivel de  $T$   $L_n \subset T$  es el conjunto de vértices  $L_n = \{v \in T; |v| = n\}$ . Aquí  $|v|$  denota el número de vértices en el único arco  $\gamma_v$  desde  $v_0$  a  $v$  y se escribe  $v \leq w$  si  $v$  aparece en  $\gamma_w$ .

Si  $I = [0, 1]$ , empezamos construyendo el siguiente árbol  $T_U \subset I^2$  en el cuadrado unidad  $I^2 = I \times I$ . El vértice raíz  $u_0 \in T_U$  es el punto  $u_0 = (\frac{1}{2}, 0)$  y hay  $(n + 1)!$  vértices de  $T_U$  en el nivel  $L_n$  ( $n \geq 1$ ) localizados en la recta horizontal  $y = \frac{n}{n+1}$ . Además, cada vértice  $u$  con  $|u| = n$  tiene  $n + 1$  sucesores. Claramente el espacio de finales  $\mathcal{F}(T_U) \subset I \times \{1\}$  es homeomorfo al conjunto de Cantor. Las aristas que emanan de un vértice  $u \in T_U$  estarán ordenadas de forma natural de izquierda a derecha.

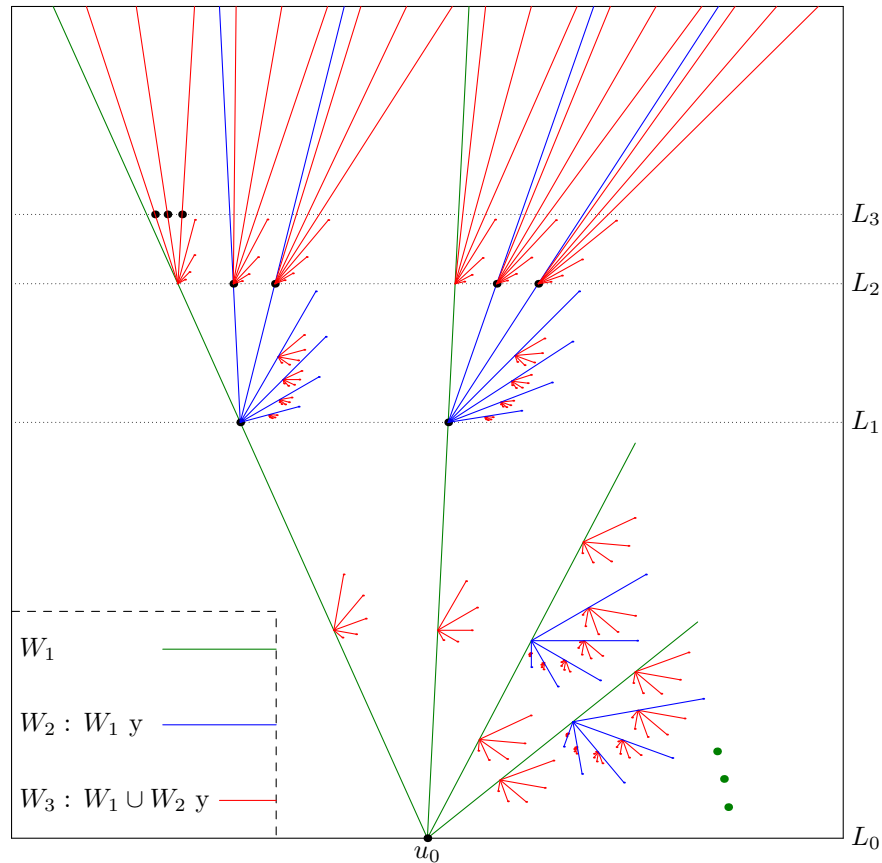


Figura III.7:  $W_1, W_2$  y  $W_3$ .

Ahora consideramos un primer espacio  $W_1$  que es la estrella  $W_1 = S \subset I^2$

obtenida como la unión en el vértice raíz  $u_0$  de una cantidad numerable de arcos de líneas rectas  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n, \dots$  con diámetros  $\text{diám}(\Gamma_i) \rightarrow 0$  tales que  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  consisten en las clausuras (esto es, los rayos y los finales definidos por ellos) de los rayos en  $T_U$  que emanan desde  $u_0$  y avanzan eligiendo la rama más a la izquierda en cada nivel  $L_n$  según se sube. Más aún  $\Gamma_i \subset \{(x, y) \in I^2; 0 \leq y < \frac{1}{2}\}$  para  $i \geq 3$ . Un segundo espacio  $W_2$  es el resultado de añadir una copia de la estrella  $S$  en un punto interior de cada arco de  $W_1$  de forma que para los dos primeros arcos de  $W_1$  los puntos interiores escogidos sean los vértices en el nivel  $L_1$  y los dos primeros arcos  $\Gamma_1^u$  y  $\Gamma_2^u$  de la copia pegada a  $u \in L_1$  son las clausuras de los rayos en  $T_U$  que parten desde  $u$  a través de las aristas de  $T_U$  situadas a la derecha de la que en  $W_1$  contiene a  $u$  y entonces suben por la rama más a la izquierda en cada  $u' \in L_n$  con  $n \geq 2$ . Además  $\Gamma_i^u \subset \{(x, y) \in I^2; \frac{1}{2} \leq y < \frac{2}{3}\}$  para  $i \geq 3$ ; ver Figura III.7.

En el siguiente paso pegamos una copia de la estrella  $S$  en el punto interior de cada arco de  $W_2$  de manera que para los tres arcos que emanan desde los vértices de  $L_1$  los puntos interiores escogidos sean los vértices en el nivel  $L_2$ . Y ahora los tres primeros arcos  $\Gamma_1^u, \Gamma_2^u$  y  $\Gamma_3^u$  de la copia  $S_u$  añadidos a  $u \in L_2$  son la clausura de los rayos en  $T_U$  que emanan desde  $u$  a través de las aristas a la derecha de la que en  $W_2$  contiene a  $u$  y suben por la rama más a la izquierda en cada  $u' \in L_n$  para  $n \geq 3$ . Más aún,  $\Gamma_i^u \subset \{(x, y) \in I^2; \frac{2}{3} \leq y < \frac{3}{4}\}$  para  $i \geq 4$ .

Procedemos por inducción para obtener una sucesión creciente  $W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_i \subset \dots$  de dendritas tal que la clausura  $W = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i}$  es topológicamente equivalente al dendrita universal de Ważewski tal y como se describe en [59]; ver Figura III.8.

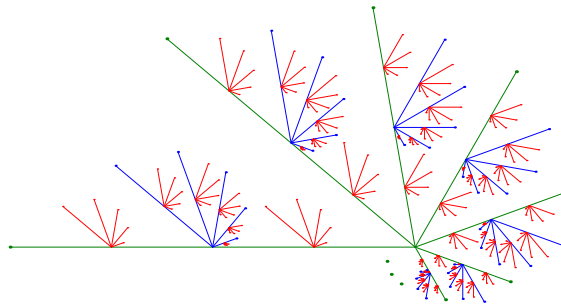


Figura III.8: *Dendrita universal de Ważewski* .

**Nota III.5.1.** (a) Alternativamente, se puede comprobar que  $W$  coincide con la clausura  $\overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} \Omega_i}$  donde  $\Omega_0 = \widehat{T}_U \subset I^2$  es la compactificación de Freudenthal de  $T_U$  y  $\Omega_i$  ( $i \geq 1$ ) se obtiene de  $\Omega_{i-1}$  pegando a cada vértice  $v \in L_i$  una copia de la estrella  $S$  descrita anteriormente en cada punto medio de los arcos en  $\Omega_{i-1} \cap \{(x, y) \in I^2; y < \frac{i}{i+1}\}$ .

(b) Obsérvese que la construcción de  $W$  determina para cada arco  $\Gamma \subset T_U$  un subcontinuo  $W_\Gamma$  que es homeomorfo a  $W$ . En particular los puntos de ramificación en  $W_\Gamma \cap \Gamma$  son densos en  $\Gamma$ . Ver Figura III.9.

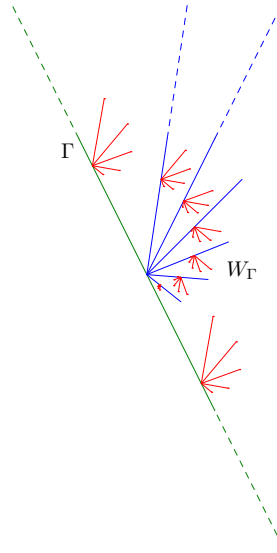


Figura III.9:  $W_\Gamma$ .

Sea  $U = W - (I \times \{1\})$  el conjunto abierto conexo de  $W$  (y por tanto un dendrita; ver Proposición II.1A.5) obtenido al quitar los finales de Freudenthal  $\mathcal{F}(T_U)$  de  $W$ . Ahora probamos

**Teorema III.5.2.**  $U$  es universal en la categoría **Dend**.

**Demostración.** Dado  $D \in \mathbf{Dend}$  sea  $T \subset D$  un árbol de finales de  $D$ ; ver Proposición II.1.14. Comenzamos construyendo un inmersión cerrada  $\phi_0 : T \hookrightarrow T_U$  como sigue. Elegimos un vértice raíz  $v_0 \in T$  y denotamos por  $n(v)$  al número de sucesores de  $v \in T$  para el orden inducido sobre  $T$  por  $v_0$  y sea  $n_j = \max\{n(v); |v| = j\}$ . Para  $v_0$  escogemos  $\phi_0(v_0) \in T_U$  tal que  $|\phi_0(v_0)| \geq m_0 = n_0$ , donde el orden sobre  $T_U$  está inducido por el vértice raíz  $u_0 \in T_U$  dado



anteriormente. Para cada  $v \in T$  con  $|v| = 1$  escogemos  $m_1 > \max\{n_0, n_1, n_2\}$  y  $\phi_0(v) \in T_U$  con  $|\phi_0(v)| = m_1$  y  $\phi_0(v) \neq \phi_0(v')$  si  $v \neq v'$ . Esto es posible pues  $m_1 > n_0$ . Si  $v \in T$  y  $|v| = 2$  escogemos  $m_2 > \max\{n_i; 0 \leq i \leq 3\}$  y  $\phi_0(v) \in T_U$  con  $|\phi_0(v)| = m_2$  y  $\phi_0(v) \neq \phi_0(v')$  si  $v \neq v'$  y  $\phi_0(v) \geq \phi_0(w)$  si  $v \geq w$ . Ambas condiciones pueden ser satisfechas pues  $m_1 \geq n_2$ . Procedemos por inducción para obtener una inmersión  $\phi_0 : \text{Vert}(T) \hookrightarrow \text{Vert}(T_U)$  que determina una inmersión  $\phi_0 : T \hookrightarrow T_U$  ya que  $\phi_0(w) \leq \phi_0(v)$  si  $v \leq w$ . Además  $\phi_0$  se extiende a una inmersión  $\widehat{\phi}_0 : \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{T}_U$  entre las compactificaciones.

Modificamos  $\phi_0$  para obtener una inmersión más conveniente  $\varphi_0$  que lleve puntos de ramificación de  $D$  en  $T$  en puntos de ramificación de  $W$  en  $T_U$ . Para esto, dado cualquier arco (ordenado)  $\gamma_{v,v'} \subset T$  consideramos un conjunto denso  $E_{v,v'} \subset \gamma_{v,v'}$  que contenga todos los puntos de ramificación de  $D$  situados sobre  $\gamma_{v,v'}$ . Sea  $E_{\phi_0(v), \phi_0(v')}$  el conjunto denso (numerable) en el arco  $\gamma_{\phi_0(v), \phi_0(v')} = \phi_0(\gamma_{v,v'})$ , formado por los puntos de ramificación de  $W$  en ese arco (ver Nota III.5.1(b)). Consideramos un homeomorfismo  $\varphi_{v,v'} : \gamma_{v,v'} \rightarrow \gamma_{\phi_0(v), \phi_0(v')}$  con  $\varphi_{v,v'}(E_{v,v'}) = E_{\phi_0(v), \phi_0(v')}$ ,  $\varphi_{v,v'}(v) = \phi_0(v)$  y  $\varphi_{v,v'}(v') = \phi_0(v')$ . La existencia de tal homeomorfismo sigue de ([24]; 4.3.H(a)). Entonces  $\varphi_0$  se define como la unión  $\varphi_0 = \bigcup_{v < v'} \varphi_{v,v'}$ .

De esta manera tenemos el siguiente diagrama conmutativo de flechas sólidas

$$\begin{array}{ccccc}
 D & \hookrightarrow & \widehat{D} & & \\
 \uparrow & & \uparrow & \searrow \widehat{\varphi} & \\
 T & \hookrightarrow & \widehat{T} & & \\
 \downarrow \varphi_0 & & \downarrow \widehat{\varphi}_0 & & \\
 T_U & \hookrightarrow & \widehat{T}_U & \hookrightarrow & W = \widehat{U}
 \end{array}$$

Si siguiendo [59] extenderemos  $\widehat{\varphi}_0$  a una inmersión  $\widehat{\varphi} : \widehat{D} \hookrightarrow \widehat{U}$  con  $\widehat{\varphi}(\mathcal{F}(D)) = \widehat{\varphi}_0(\mathcal{F}(T)) \subset \mathcal{F}(T_U) = \mathcal{F}(U)$  y por tanto la restricción  $\varphi : D \hookrightarrow U$  será la inmersión cerrada que se requiere. Para ello, recordamos que, de acuerdo con la demostración del Teorema III.4.3, tenemos  $\widehat{D} = \varprojlim A_j$  donde los  $A_j$

son dendritas compactos construidos a partir de un conjunto denso numerable  $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset \widehat{D}$  formando una sucesión creciente  $\widehat{T} = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_j \subset \dots$  tal que para cada  $j$ ,  $\gamma_{j+1} = \overline{A_{j+1} - A_j}$  es el único arco que va desde el primer  $x_n \notin A_j$  a algún punto en  $A_j$  y las retracciones naturales  $r_j^{j+1} : A_{j+1} \rightarrow A_j$  son las aplicaciones enlace en el sistema inverso. Ahora construimos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \widehat{T} = A_0 & \xleftarrow{r_0^1} & A_1 & \xleftarrow{r_1^2} & \dots & \xleftarrow{r_{j-1}^j} & A_j & \xleftarrow{r_j^{j+1}} & \dots \\
 \downarrow \widehat{\varphi}_0 & & \downarrow \widehat{\varphi}_1 & & & & \downarrow \widehat{\varphi}_j & & \\
 \widehat{T}_U = \Omega_0 & \xleftarrow{g_0^{n(1)}} & \Omega_{n(1)} & \xleftarrow{g_{n(1)}^{n(2)}} & \dots & \xleftarrow{g_{n(j-1)}^{n(j)}} & \Omega_{n(j)} & \xleftarrow{g_{n(j)}^{n(j+1)}} & \dots
 \end{array}$$

donde los  $\Omega_j$  fueron definidos en la Nota III.5.1 y para cada  $j \geq 0$  definimos la aplicación  $g_j^{j+1} : \Omega_{j+1} \rightarrow \Omega_j$  que es la identidad sobre  $\Omega_j$  y lleva cada estrella  $S$  en  $\Omega_{j+1} - \Omega_j$  al punto de pegamiento. Entonces denotamos  $g_k^j = g_k^{k+1} \circ \dots \circ g_{j-1}^j : \Omega_j \rightarrow \Omega_k$  si  $j > k$ . De la definición de las aplicaciones  $g_j$  se sigue que  $W = \varprojlim \{\Omega_i, g_i\}$ .

Finalmente veamos cómo elegir la subsucesión  $\{n(j)\}$  y las aplicaciones  $\widehat{\varphi}_j$ . Para esto, sea  $B \subset \widehat{D}$ , el conjunto numerable de todos los puntos de ramificación de  $W$ . Sean  $p_0$  y  $p_1$  los puntos extremos del arco  $\gamma_1$  con  $\{p_0\} = A_0 \cap \gamma_1$ . En  $\gamma_1$  seleccionamos un subconjunto numerable y denso  $E \subset \gamma_1' = \gamma_1 - \{p_0, p_1\}$  con  $B \cap \gamma_1' \subset E$ . Elegimos  $n(1)$  para que  $\varphi_0(p_0)$  ya aparezca en  $\Omega_{n(1)}$  como punto de ramificación dentro de la arista  $\rho \subset T_U$  que lo contiene y usamos ([24]; 4.3.H(a)) para llevar homeomórficamente  $E$  al conjunto (denso) de los puntos de ramificación de  $\rho$ . Así podemos extender  $\widehat{\varphi}_0$  a una inmersión  $\widehat{\varphi}_1 : A_1 \rightarrow \Omega_{n(1)}$  tal que  $\widehat{\varphi}_1(B \cap \gamma_1')$  son puntos de ramificación en  $\Omega_{n(1)}$ ,  $\widehat{\varphi}_1(p_0) = \widehat{\varphi}_0(p_0)$  y  $\widehat{\varphi}_1(\gamma_1 - \{p_0\}) \subset \Omega_{n(1)} - \Omega_0$ . Procediendo de manera inductiva, obtenemos  $\widehat{\varphi}_j$  para todo  $j \geq 0$ .

Debido a que  $\widehat{\varphi}_j$  es una inmersión para cada  $j \geq 0$ , es inmediato comprobar que la aplicación inducida  $\widehat{\varphi} : \widehat{D} \hookrightarrow \widehat{U}$  es también una inmersión.  $\square$

Como  $U$  se puede sumergir como un conjunto cerrado en  $\mathbb{R}^2$  deducimos del Teorema III.5.2 el siguiente

**Corolario III.5.3.** *Todos los dendritas compactos o no son propiamente planos.*



# Sobre la extensión de Freudenthal de aplicaciones propias confluentes

---

La interesante clase de aplicaciones confluentes (que contiene a las aplicaciones monótonas y abiertas) fue introducida originalmente por J. J. Charatonik en [14]. Posteriormente varias generalizaciones han aparecido en la literatura. En este capítulo, además de aplicaciones confluentes, consideramos aplicaciones semiconfluentes y débilmente confluentes definidas por T. Maćkowiak [51] y A. Lelek [46], respectivamente.

Algunos autores han usado las aplicaciones con fibra compacta para extender resultados sobre aplicaciones confluentes desde la teoría clásica de los continuos al ambiente de los espacios no compactos. Como una contribución a este esfuerzo, en este capítulo estudiamos el comportamiento de aplicaciones propias confluentes, semiconfluentes y débilmente confluentes respecto a las compactificaciones de Alexandroff y Freudenthal.

## §IV.1. Dos casos triviales: aplicaciones monótonas y aplicaciones abiertas

Ya vimos que cualquier sobreyección propia y monótona  $f : X \rightarrow Y$  entre espacios admisibles induce un homeomorfismo entre los espacios de finales de

Freudenthal (III.2.12). Como una consecuencia inmediata obtenemos

**Proposición IV.1.1.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una sobreyección propia y monótona entre espacios admisibles. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (a)  $f$  es monótona.
- (b) La extensión de Freudenthal  $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$  es monótona.
- (c) La extensión de Alexandroff  $f^+ : X^+ \rightarrow Y^+$  es monótona.

**Demostración.** Las implicaciones (b)  $\Rightarrow$  (a) y (c)  $\Rightarrow$  (a) son obvias. Veamos (a)  $\Rightarrow$  (b). Sabemos por la Proposición III.2.12 que  $f$  induce un homeomorfismo entre los espacios de finales, así que para cada punto  $y \in \widehat{Y}$  se tiene que su imagen inversa  $f^{-1}(y)$  o es un final, si  $y \in \mathcal{F}(Y)$ , o es un conexo, por ser  $f$  monótona, si  $y \in Y$ .

Para probar (a)  $\Rightarrow$  (c) consideremos un punto  $y \in Y^+$ . Si  $y \in Y$  entonces  $(f^+)^{-1}(y) = f^{-1}(y)$  que es conexo por ser  $f$  monótona. En el caso en que  $y = \infty$ ,  $(f^+)^{-1}(y) = \infty$  por lo que  $f^+$  es monótona.  $\square$

Para la clase de las aplicaciones abiertas, también tenemos

**Proposición IV.1.2.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una sobreyección propia entre espacios admisibles. Son equivalentes:*

- (a)  $f$  es abierta.
- (b) La extensión de Freudenthal  $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$  es abierta.
- (c) La extensión de Alexandroff  $f^+ : X^+ \rightarrow Y^+$  es abierta.

*Demostración.* Es obvio que (b) ó (c) implican (a). Es más, si  $f$  es una aplicación abierta y  $U \subset X^+$  es un abierto básico, entonces o  $U$  es abierto en  $X$  y entonces  $f^+(U) = f(U)$  es abierto en  $Y$  y por tanto en  $Y^+$ ; ó  $U = X^+ - K$  para algún compacto  $K \subset X$ , y entonces  $f^+(U)$  es un entorno de todos los puntos en el conjunto abierto  $f(X - K) = f^+(U) - \{\infty\}$  así como entorno de  $\infty \in Y^+ - f(K) \subset f^+(U)$ . Para el caso de la extensión de Freudenthal, será suficiente demostrar la igualdad  $\widehat{f}(\Omega^\natural) = f(\Omega)^\natural$  para cualquier abierto

básico  $\Omega^\natural \subset \widehat{X}$  en el Lema I.2.6 y de acuerdo con este mismo lema bastaría comprobar que  $f_*(\Omega^\mathcal{F}) = (f(\Omega))^\mathcal{F}$ . Para ello observamos que si  $\mathcal{U} \in (f(\Omega))^\mathcal{F}$  es un  $\mathcal{A}$ -ultrafiltro entonces también  $\mathcal{U} \in (f(\Omega_0))^\mathcal{F}$  donde  $\Omega_0 = \Omega \cup \text{Fr}\Omega = \overline{\Omega}$  es la clausura del abierto de frontera compacto  $\Omega$ . Entonces  $f(\Omega_0) \in \mathcal{U}$  de acuerdo con el Lema I.2.5 y por tanto  $\Omega_0$  está en el  $\mathcal{A}$ -filtro  $f^{-1}(\mathcal{U})$  engendrado por los conjuntos  $f^{-1}(U)$  con  $U \in \mathcal{U}$ . Sea  $\mathcal{V}$  un  $\mathcal{A}$ -ultrafiltro conteniendo a  $f^{-1}(\mathcal{U})$ . Entonces  $\Omega_0 \in \mathcal{V}$  así que el Lema I.2.5 nos da  $\mathcal{V} \in \overline{\Omega_0}^{\widehat{X}} = \overline{\Omega}^{\widehat{X}} \cup \text{Fr}\Omega$ . Por tanto,  $\mathcal{V} \in \Omega^\mathcal{F}$  y  $f_*(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$  (ver Proposición I.2.10). Luego  $(f(\Omega))^\mathcal{F} \subset f_*(\Omega^\mathcal{F})$ . La otra inclusión es trivial.  $\square$

Las aplicaciones propias monótonas tienen un comportamiento especial sobre los dendritas como muestra el siguiente teorema que extiende ([38]; 5.5). Para ello recordamos que dados dos espacios admisibles  $X$  e  $Y$ , una sobreyección continua  $f : X \rightarrow Y$  se dice *hereditariamente monótona* si para todo subcontinuo  $B \subset X$  y para todo  $y \in Y$ ,  $(f|_B)^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap B$  es conexo de  $B$ .

**Teorema IV.1.3** (c.f. ([38]; 5.5)). *Un continuo generalizado de Peano  $X$  es un dendrita si y sólo si toda sobreyección propia y monótona  $f : X \rightarrow Y$  es hereditariamente monótona.*

**Demostración.** Supongamos que  $X$  es un dendrita y  $B \subset X$  un subcontinuo y por tanto un dendrita compacto (II.1A.3(b)). Entonces para todo  $y \in Y$ ,  $(f|_B)^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap B \subset B$  donde  $f^{-1}(y)$  es conexo de  $X$ , pues  $f$  es monótona; y aplicando la Proposición II.1A.7(c) tenemos que  $(f|_B)^{-1}(y)$  es un conexo de  $B$ .

Veamos la suficiencia. Supongamos que  $X$  no es un dendrita, entonces por la Proposición II.1A.3(a) sabemos que existe una curva cerrada  $\Sigma \subset X$ . Tomemos un arco  $\Gamma \subset \Sigma$ ; la clausura de su complemento en  $\Sigma$ ,  $\Gamma'$ , también es un arco y la intersección  $\Gamma \cap \Gamma'$  son dos puntos  $p$  y  $q$  de  $\Sigma$ . Consideramos la descomposición  $\mathcal{D}$  de  $X$  que consiste en los puntos de  $X - \Gamma$  y  $\Gamma$ . Entonces el cociente  $Y = X/\mathcal{D}$  es un continuo generalizado de Peano (II.1.4), y la proyección  $f : X \rightarrow Y$  es monótona. Por hipótesis la restricción  $f|_\Gamma$  debería ser monótona pero  $f^{-1}(f(p)) = \{p, q\}$  lo que es una contradicción.  $\square$

## §IV.2. Aplicaciones confluentes I

En esta sección estudiamos el comportamiento de las extensiones de Freudenthal de aplicaciones confluentes propias. Comenzamos recordando que dados dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$ , una sobreyección continua  $f : X \rightarrow Y$  se dice *confluente* si para cualquier subcontinuo  $B \subset Y$  tenemos que  $f(A) = B$  para cualquier componente  $A \subset f^{-1}(B)$ .

El origen de esta definición, debida a Charatonik, es un antiguo resultado de Whyburn donde se establece que las aplicaciones propias abiertas son confluentes ([82]; 11.1). Obsérvese que se sigue inmediatamente del Lema III.1.3 que

**Lema IV.2.1.** *Cualquier aplicación cerrada (en particular, si  $f$  es propia) y monótona  $f : X \rightarrow Y$  es confluente.*

El siguiente ejemplo muestra la necesidad de la hipótesis de que  $f$  sea cerrada en el Lema IV.2.1.

**Ejemplo IV.2.2.** Consideremos el siguiente continuo  $W \subset \mathbb{R}^2$  conocido como *círculo polaco*.

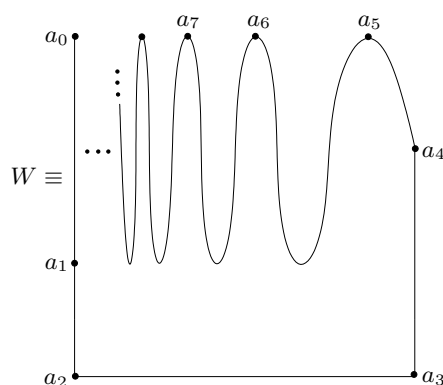


Figura IV.1:  $W$  círculo polaco.

Definamos la aplicación inyectiva  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(\mathbb{R}_{\geq 0}) = W$  y envía cada intervalo  $[n-1, n] \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$  con  $n \geq 1$  sobre el arco  $\gamma_{n-1, n} \subset W$  que une  $a_{n-1}$  con  $a_n$  en  $W$ . Observemos que  $f$  es monótona pero no es cerrada (o



equivalentemente, propia). Pero además, para el continuo  $C \subset W$  resaltado en la siguiente figura

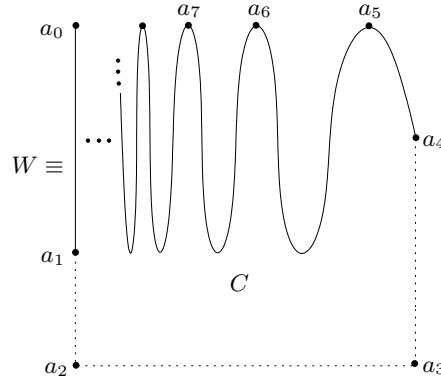


Figura IV.2: Continuo  $C$  en el círculo polaco.

tenemos que  $f^{-1}(C) = [0, 1] \cup [4, +\infty) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$  y  $f([0, 1]) = \gamma_{0,1} \neq C$  por lo que  $f$  no es confluyente.

La siguiente proposición muestra que las aplicaciones monótonas y confluentes coinciden para funciones reales propias

**Proposición IV.2.3.** *Cualquier sobreyección confluyente propia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es monótona.*

**Demostración.** Supongamos que  $f^{-1}(y_0)$  no es conexo para algún  $y_0 \in \mathbb{R}$ , así que podemos encontrar  $z \in \mathbb{R} - f^{-1}(y_0)$  tal que  $f^{-1}(y_0)$  corta a los intervalos abiertos  $(z, \infty)$  y  $(-\infty, z)$ . Más aún, como  $f$  es sobreyectiva, entonces también lo es la aplicación inducida  $f_* : \mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{\pm\infty\} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{\pm\infty\}$ . Por tanto  $f_*$  es necesariamente biyectiva. Supongamos que  $f_*(\infty) = \infty$  y  $f_*(-\infty) = -\infty$ .

Por otro lado, como  $z \notin f^{-1}(y_0)$  tenemos que  $y_0 < f(z)$  ó  $y_0 > f(z)$ . Supongamos que ocurre lo primero y apliquemos la confluencia de  $f$  al intervalo cerrado  $[f(z), \infty)$  para obtener un conjunto cerrado, conexo no compacto, esto es, un intervalo de la forma  $[a, \infty)$  con  $z \in [a, \infty)$  y  $f([a, \infty)) = [f(z), \infty)$ . Aquí usamos la suposición  $f_*(\infty) = \infty$ . Entonces  $[z, \infty) \subset [a, \infty)$  y por tanto existe un  $x_0 \in f^{-1}(y_0) \cap [a, \infty)$ , para el que alcanzamos la contradicción  $y_0 \in [f(z), \infty)$ . Argumentos similares se emplean para las otras opciones  $f_*(\infty) = -\infty$  e  $y_0 > f(z)$ . □

La siguiente proposición recoge una propiedad que será de utilidad más adelante. La demostración es análoga a la presentada para el caso compacto en [59].

**Proposición IV.2.4** (c.f. ([59]; 13.27)). *Sean  $X, Y, Z$  espacios admisibles y sean  $f_1 : X \rightarrow Y$  y  $f_2 : Y \rightarrow Z$  aplicaciones propias. Entonces se verifican:*

- (a) *Si  $f_1$  y  $f_2$  son confluentes, entonces  $f = f_2 \circ f_1$  es confluyente.*
- (b) *Si  $f = f_2 \circ f_1$  es confluyente, entonces  $f_2$  es confluyente.*

También usaremos los siguientes lemas

**Lema IV.2.5** (c.f. ([59]; 13.19)). *Sea  $X$  un continuo generalizado de Peano y sea  $B$  un subcontinuo de  $X$ . Entonces, existe una sucesión decreciente de entornos abiertos y conexos de  $B$ ,  $\{W_n\}_{n \geq 1}$ , tales que las clausuras  $\overline{W_n} = B_n$  son subcontinuos de Peano y  $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ .*

**Demostración del Lema IV.2.5.** Escogemos una sucesión exhaustiva de  $X$  formada por subcontinuos de Peano (Teorema II.1.3(d))  $\{K_s\}_{s \geq 1}$  para la que podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $B \subset K_1$ , y seguimos esencialmente la demostración del Lema ([59]; 13.19) con  $Y = K_1$ . Explícitamente, por ([59]; 8.4) y ([59]; 8.9), dado  $n \geq 1$  podemos encontrar un recubrimiento de  $B$  por subconjuntos abiertos conexos  $U_1, \dots, U_m$  con las siguientes propiedades para cada  $1 \leq k \leq m = m(n)$ : (i)  $\text{diám}(U_k) < \frac{1}{n}$ ; (ii)  $U_k \cap B \neq \emptyset$ ; y (iii) cada  $U_k$  es localmente conexo (de hecho cumple la propiedad<sup>1</sup>  $\mathcal{S}$ ). Consideremos el abierto  $W_n = \bigcup_{k=1}^m U_k$ . Nótese que  $W_n$  es conexo por (ii). Además,  $B_n = \overline{W_n} = \bigcup_{k=1}^m \overline{U_k}$  es localmente conexo y por tanto un continuo de Peano pues cada  $\overline{U_k}$  lo es por ([59]; 8.5). Aquí usamos que cualquier unión finita de cerrados localmente conexos es localmente conexa ([45]; Thm. 1, pág. 230). Por (i), se sigue que  $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n$ .  $\square$

**Lema IV.2.6** (c.f. ([59]; 13.38)). *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una sobreyección confluyente entre espacios admisibles. Dados cualquier subconjunto  $B \subset Y$  y cualquier*

---

<sup>1</sup>Un subconjunto no vacío  $Y \subset X$  de un espacio métrico  $X$  se dice que tiene la *propiedad  $\mathcal{S}$*  si para cada  $\epsilon > 0$  hay un número finito de subconjuntos conexos  $A_1, \dots, A_n$  de  $Y$  tales que  $Y = \bigcup_{i=1}^n A_i$  con diámetro  $\text{diám}(A_i) < \epsilon$  para cada  $i = 1, \dots, n$ .

componente  $A \subset f^{-1}(B)$ , entonces la restricción  $\tilde{f} = f|_A : A \rightarrow B$  es confluente.

**Demostración.** Observemos que dado cualquier continuo  $C \subset B$  y cualquier componente  $D \subset \tilde{f}^{-1}(C) = A \cap f^{-1}(C)$ , la componente  $D_0 \subset f^{-1}(C) \subset f^{-1}(B)$  que contiene a  $D$  corta a  $A$  y por tanto,  $D_0 \subset A \cap f^{-1}(C)$ . Así que, necesariamente,  $D = D_0$  y  $\tilde{f}(D) = f(D_0) = C$  ya que  $f$  es confluente.  $\square$

Seguidamente destacamos algunas propiedades que se preservan por aplicaciones propias confluentes como una extensión de resultados clásicos sobre aplicaciones confluentes entre continuos. Comenzamos con el siguiente lema que permite usar sucesiones exhaustivas para reducir las demostraciones a resultados conocidos en la teoría de los continuos.

**Lema IV.2.7.** *Dada una aplicación propia  $f : X \rightarrow Y$  entre espacios admisibles, los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (a)  $f$  es confluente.
- (b)  $f|_{f^{-1}(A)} : f^{-1}(A) \rightarrow A$  es confluente para cada subconjunto  $A \subset Y$ .
- (c)  $f|_{f^{-1}(K)} : f^{-1}(K) \rightarrow K$  es confluente para cada subconjunto compacto  $K \subset Y$ .

**Demostración.** (b)  $\Rightarrow$  (c) es obvio; más aún (a)  $\Rightarrow$  (b) es inmediato, pues para cualquier subcontinuo  $C \subset A$ , aplicamos que  $f$  es confluente para obtener que cualquier componente conexa  $H \subset f^{-1}(C) \subset f^{-1}(A)$  verifica  $f(H) = C$  y el resultado sigue.

También (c)  $\Rightarrow$  (a) se comprueba sin dificultad. En efecto, dado cualquier subcontinuo  $C \subset Y$  la restricción  $f_0 = f|_{f^{-1}(C)} : f^{-1}(C) \rightarrow C$ , es confluente por hipótesis luego tenemos que  $f(H) = f_0(H) = C$  para cualquier componente  $H \subset f^{-1}(C) = f_0^{-1}(C)$ .  $\square$

**Nota IV.2.8.** Por el Teorema II.1.3(d), los subconjuntos compactos en el Lema IV.2.7(c) se pueden reemplazar por subcontinuos de Peano siempre que  $Y$  sea un continuo generalizado de Peano.

**Teorema IV.2.9.** *Las aplicaciones confluentes propias preservan las siguientes clases de espacios:*

- (a) *Dendritas.*
- (b) *Grafos.*
- (c) *Árboles.*

**Demostración.** Como los grafos dendríticos son árboles, (c) sigue directamente de (a) y (b). Para demostrar (a) observamos que la imagen de cualquier sobreyección propia  $f : X \rightarrow Y$  es un continuo generalizado de Peano (II.1.4). Entonces el Teorema II.1.3(d) nos da una sucesión exhaustiva  $\{Y_n\}_{n \geq 1}$  de subcontinuos de Peano tales que la restricción  $f_n = f|_{f^{-1}(Y_n)} : f^{-1}(Y_n) \rightarrow Y_n$  es confluyente para cada  $n \geq 1$ . Aquí aplicamos la Nota IV.2.8. Es más, por el Lema IV.2.6 la restricción  $f_n|_H : H \rightarrow Y_n$  es también confluyente para cada componente  $H \subset f^{-1}(Y_n)$ . En particular,  $H$  es un dendrita por la Proposición II.1A.3 y por tanto cada  $Y_n$  es un dendrita por ([59]; 13.40), y también lo es  $Y$ , otra vez por la Proposición II.1A.3.

Para demostrar (b) usamos de nuevo que la restricción  $f|_H : H \rightarrow Y_n$  de  $f$  a cualquier componente  $H \subset f^{-1}(Y_n)$  es una aplicación confluyente para todo  $n \geq 1$ . Ahora  $H$  es un grafo por ([59]; 9.10.1), y entonces ([59]; 13.31) establece que  $Y_n$  es un grafo para todo  $n \geq 1$ . Así  $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$  es una unión localmente finita de grafos compactos y por tanto un grafo localmente finito.  $\square$

**Nota IV.2.10.** Como vemos en el teorema anterior, las aplicaciones confluentes propias imponen importantes restricciones a sus imágenes. Véase, por ejemplo, el Corolario IV.6.11 para el caso en el que el dominio de la aplicación considerada sea  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  ó  $\mathbb{R}$ . Destacamos también el Corolario VI.4.2 y el Teorema VI.4.5 donde se observan interesantes relaciones entre la homotopía en el infinito del dominio y del codominio impuestas por estas aplicaciones.

En contraste a lo que ocurre con las aplicaciones monótonas y abiertas (Proposiciones IV.1.1 y IV.1.2), las extensiones de Freudenthal de aplicaciones confluentes no tienen por qué ser confluentes como muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo IV.2.11.** Consideremos el continuo generalizado  $X$  de la siguiente figura

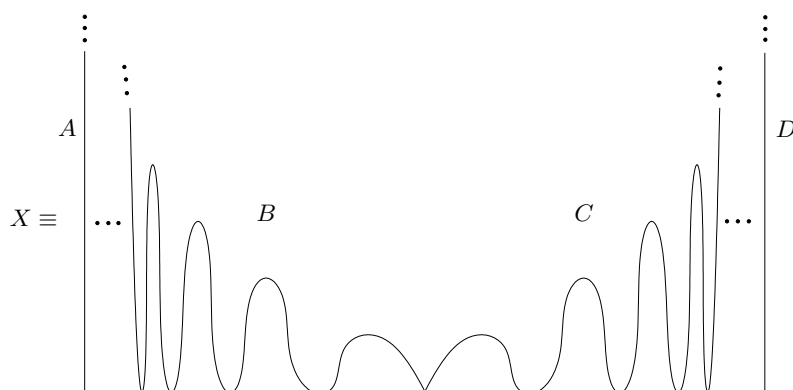


Figura IV.3: Continuo generalizado  $X$ .

y el continuo generalizado  $Y$  que se representa a continuación

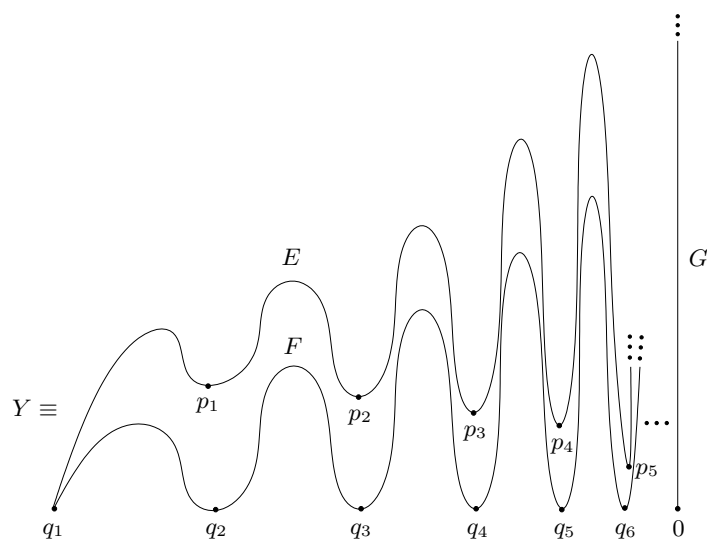


Figura IV.4: Continuo generalizado  $Y$ .

donde las sucesiones  $\{p_n\}_{n \geq 1} \subset E$  y  $\{q_n\}_{n \geq 1} \subset F$  convergen a 0 (por ejemplo  $p_n = (\frac{1}{n}, 0)$  y  $q_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ ). Definamos una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  que envíe  $A$  y  $D$  homeomorficamente sobre  $G$  y análogamente  $B$  y  $C$  sobre  $E$  y  $F$ , respectivamente. Es inmediato comprobar que  $f$  es propia y confluyente. Sin embargo, si consideramos las compactificaciones  $\widehat{X}$  e  $\widehat{Y}$

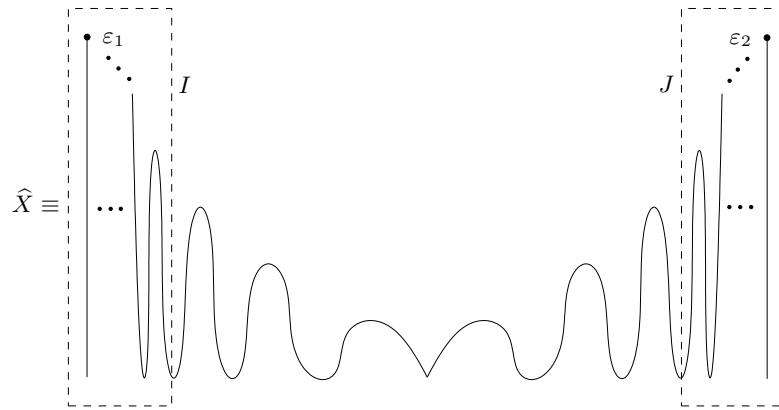


Figura IV.5:  $\widehat{X}$  compactificación de  $X$ .

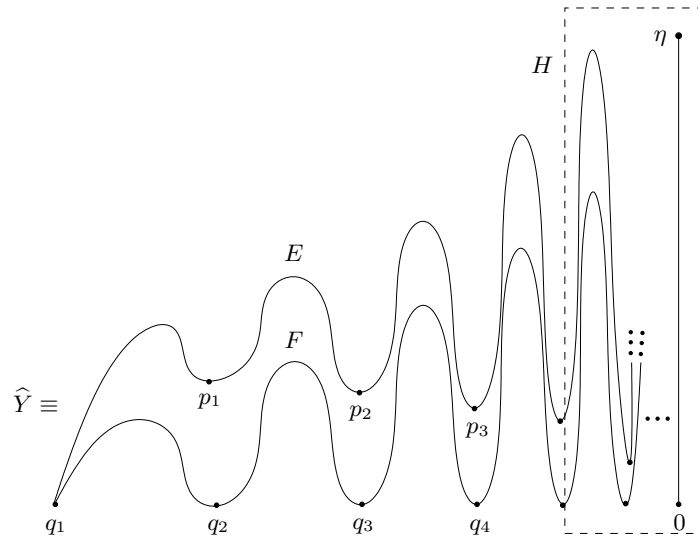


Figura IV.6:  $\widehat{Y}$  compactificación de  $Y$ .

la extensión de Freudenthal  $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$  no es confluyente. En efecto, basta considerar el continuo  $H \subset \widehat{Y}$  representado en la Figura IV.6 y observar que  $f^{-1}(H) = I \sqcup J$  es la unión disjunta de las componentes  $I$  y  $J$  representadas en la Figura IV.5 cuyas imágenes no coinciden con  $H$  ya que  $\widehat{f}(I) \cap F = \emptyset$  y  $\widehat{f}(J) \cap E = \emptyset$ .

Sin embargo, para aplicaciones confluentes propias ligeras cuyos codominios sean continuos generalizados de Peano tenemos (compárese con ([59]; 13.29))

**Teorema IV.2.12.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un sobrejección propia ligera entre continuos generalizados y supongamos además que  $Y$  es localmente conexo. Entonces,  $f$  es confluente si y sólo si  $f$  es abierta.*

Recordemos que una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  se dice *ligera* si cada fibra  $f^{-1}(y)$  es totalmente desconexa.

**Demostración del Teorema IV.2.12.** Como se mencionó antes, Whyburn ya demostró que las aplicaciones abiertas son siempre confluentes ([82]; 11.1). Para probar el recíproco, sea  $U \subset X$  cualquier abierto y tomemos un  $y \in f(U)$ . Como  $Y$  es localmente conexo,  $y$  admite una base numerable de entornos  $\{V_n\}_{n \geq 1}$  formada por subcontinuos de Peano encajados (IV.2.5). Más aún, dado  $x \in f^{-1}(y)$  la confluencia de  $f$  establece que  $f(H_n) = V_n$  para la componente de  $x$   $H_n \subset f^{-1}(V_n)$  ( $i \geq 1$ ). Nótese que  $H_{n+1} \subset H_n$ . Por consiguiente la intersección  $H = \bigcap_{n \geq 1} H_n$  es un continuo ([45]; Thm. 4, pág. 170) que contiene a  $x$  y por tanto  $y \in f(H) \subset \bigcap_{n \geq 1} V_n = \{y\}$ . En particular,  $H$  está contenido en la fibra totalmente desconexa  $f^{-1}(y)$ , por lo que  $H$  sólo tiene un elemento  $H = \{x\} \subset U$ . En particular, existe un  $n_0$  tal que  $H_n \subset U$  si  $n \geq n_0$  ([59]; 1.7). Así,  $y = f(x) \in f(H_n) = V_n \subset f(U)$  muestra que  $f(U)$  es un entorno de  $y$  para todo  $y \in f(U)$ ; esto es,  $f(U)$  es un conjunto abierto y  $f$  es abierta.  $\square$

El teorema anterior nos conduce a un análogo parcial de las Proposiciones IV.1.1 y IV.1.2 para las aplicaciones confluentes

**Teorema IV.2.13.** *Sean  $X$  e  $Y$  continuos generalizados y supongamos además que  $Y$  es localmente conexo. Entonces, cualquier sobrejección propia  $f : X \rightarrow Y$  es confluente si y sólo si su extensión de Freudenthal  $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$  es confluente.*

**Demostración.** La condición suficiente es obvia (IV.2.7). Supongamos que  $f$  es confluente, entonces el teorema de factorización monótona-ligera ([24]; 6.2.22) establece que  $f = f_2 \circ f_1$  es la composición de una sobrejección monótona propia  $f_1 : X \rightarrow Z$  y una sobrejección ligera propia  $f_2 : Z \rightarrow Y$ . Obsérvese que  $Z$  es también un continuo generalizado pues cualquier aplicación propia preserva la metrizabilidad y la compacidad local (I.1.10). Más aún, como  $f$  es confluente, también lo es  $f_2$  (IV.2.4(b)) y el Teorema IV.2.12 establece que  $f_2$

es una aplicación abierta. Por consiguiente, las extensiones de Freudenthal  $\widehat{f}_1$  y  $\widehat{f}_2$  son monótonas y abiertas por las Proposiciones IV.1.1 y IV.1.2, respectivamente. Así,  $\widehat{f}_1$  y  $\widehat{f}_2$  son aplicaciones confluentes y por tanto también lo es  $\widehat{f} = \widehat{f}_2 \circ \widehat{f}_1$  (IV.2.4(a)).  $\square$

En [49], Lelek y E. D. Tymchatyn introdujeron una noción diferente de aplicación confluyente  $f : X \rightarrow Y$  que requiere que para todo  $C \subset Y$  cerrado y conexo y para toda cuasicomponente  $Q \subset f^{-1}(C)$  se cumpla que  $f(Q) = C$ ; ver ([49]; 1.4(c')). Como las cuasicomponentes coinciden con las componentes para espacios compactos ([45]; Thm. 2, pág. 169) las dos definiciones son equivalentes para estos espacios. El siguiente corolario extiende este hecho al caso no compacto.

**Corolario IV.2.14.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una sobreyección propia entre continuos generalizados donde  $Y$  es localmente conexo. Entonces son equivalentes:*

- (a)  $f$  es confluyente en el sentido de Lelek-Tymchatyn.
- (b)  $f$  es confluyente.
- (c) Para todo  $\Gamma \subset Y$  conexo y toda cuasicomponente  $Q \subset f^{-1}(\Gamma)$ ,  $f(Q) = \Gamma$ .

**Demostración.** (a)  $\Rightarrow$  (b) es inmediato pues para un continuo  $C$ , las componentes y las cuasicomponentes de  $f^{-1}(C)$  coinciden al ser  $f^{-1}(C)$  compacto. Aquí usamos que  $f$  es propia. Es más, (c)  $\Rightarrow$  (a) es trivial. Para probar (b)  $\Rightarrow$  (c) observamos que la extensión  $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$  es confluyente y por tanto lo es de la forma de Lelek-Tymchatyn. Ahora aplicamos ([49]; 3.1(iii)) para obtener que toda cuasicomponente  $Q \subset \widehat{f}^{-1}(\Gamma) = f^{-1}(\Gamma)$  cumple que  $f(Q) = \Gamma$ .  $\square$

### §IV.3. Aplicaciones confluentes II

Esta sección contiene una demostración alternativa del Teorema IV.2.13 basada en una extensión de ([59]; 13.22) y ([59]; 13.20) a la categoría propia que se establece en el Teorema IV.3.1. Aparte del posible interés de este resultado en sí mismo, la nueva demostración requiere de la mayoría de lemas técnicos



necesarios para tratar con las aplicaciones semi y débilmente confluentes a las que no es posible extender la demostración corta del Teorema IV.2.13 que dimos en en la Sección §IV.2.

Si  $\mathcal{C}$  denota una clase de subconjuntos conexos del espacio  $Y$ , diremos que una sobreyección continua  $f : X \rightarrow Y$  es  $\mathcal{C}$ -confluente si para cualquier conjunto  $B \in \mathcal{C}$  y cualquier componente  $C \subset f^{-1}(B)$ , se tiene la igualdad  $f(C) = B$ . El siguiente teorema muestra que otras familias de subconjuntos conexos pueden reemplazar a la familia de los subcontinuos para establecer la confluencia de una aplicación propia con codominio localmente conexo. Explícitamente,

**Teorema IV.3.1.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una sobreyección propia con  $Y$  un continuo generalizado de Peano. Entonces  $f$  es confluente si y sólo si  $f$  es  $\mathcal{C}_i$ -confluente para cualquiera de las siguientes clases de subespacios conexos de  $Y$  ( $1 \leq i \leq 3$ ):*

- (a)  $\mathcal{C}_1$  es la clase de los subcontinuos de Peano.
- (b)  $\mathcal{C}_2$  es la clase de los subcontinuos generalizados de Peano.
- (c)  $\mathcal{C}_3$  es la clase de los subespacios abiertos conexos (o, equivalentemente, subcontinuos generalizados de Peano abiertos).

En la demostración del Teorema IV.3.1 usaremos el siguiente lema.

**Lema IV.3.2.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una sobreyección propia  $\mathcal{C}_3$ -confluente con  $Y$  un continuo generalizado de Peano. Entonces dados  $U \subset Y$  abierto conexo y una componente  $H \subset f^{-1}(U)$ , la restricción  $g = f|_H : H \rightarrow U$  también es  $\mathcal{C}_3$ -confluente.*

**Demostración.** Sea  $V \subset U$  abierto y conexo. Sea  $L \subset g^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap H$  una componente. Se comprueba sin dificultad que  $L$  es una componente conexas de  $f^{-1}(V)$ . En efecto, si  $L_0$  es la componente conexas de  $f^{-1}(V)$  que contiene a  $L$ , entonces  $L \subset L_0 \cap H \neq \emptyset$  y por consiguiente  $L_0 \subset H$ . Por lo tanto  $L = L_0$  es una componente de  $g^{-1}(V)$ . Así, por hipótesis,  $f(L) = V \subset U = f(H)$  y por tanto  $g(L) = V$ .  $\square$

**Demostración del Teorema IV.3.1.** Si  $f$  es confluyente, entonces es obvio que  $f$  es  $\mathcal{C}_1$ -confluyente. La implicación (b)  $\Rightarrow$  (c) también es inmediata. Seguidamente probamos (a)  $\Rightarrow$  (b). Para ello, dado un continuo generalizado de Peano  $C \subset Y$ , sea  $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$  una sucesión exhaustiva de subcontinuos de Peano de  $C$  (Teorema II.1.3(d)). Entonces, dada cualquier componente  $A \subset f^{-1}(C)$  y  $x \in A$  existe  $n_0$  con  $f(x) \in C_n$  para todo  $n \geq n_0$ . Así, para las componentes  $A_n \subset f^{-1}(C_n)$  que contienen a  $x$  tenemos que  $A_n \subset A$  y  $A_n \subset A_{n+1}$  para todo  $n \geq n_0$ . Más aún, por (a)  $f(\bigcup_{n \geq n_0} A_n) = \bigcup_{n \geq n_0} C_n = C \subset f(A)$ , luego  $f(A) = C$ .

Finalmente veamos que si  $f$  es  $\mathcal{C}_3$ -confluyente también es confluyente. En efecto, el Lema IV.2.5 garantiza que todo subcontinuo  $C \subset Y$  se puede escribir como una intersección  $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$  donde  $B_n = \overline{U_n}$  es un subcontinuo de Peano,  $U_n$  es abierto conexo y  $C \subset U_{n+1} \subset U_n$  para todo  $n \geq 1$ . Si  $A \subset f^{-1}(C) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(U_n)$  es una componente, tenemos que  $A \subset H_1 \subset f^{-1}(U_1)$  para cierta componente  $H_1$ ; además, la  $\mathcal{C}_3$ -confluencia establece que  $f(H_1) = U_1$ . Aplicando el Lema IV.3.2 a la restricción  $f_1 = f|_{H_1} : H_1 \rightarrow U_1$  obtenemos que  $f(H_2) = U_2$  para cualquier componente  $H_2 \subset f_1^{-1}(U_2) \subset H_1$ . Procediendo por inducción, construimos una sucesión  $\{H_n\}_{n \geq 1}$  tal que para cada  $n \geq 1$ ,  $H_{n+1}$  es una componente conexa de  $f^{-1}(U_{n+1}) \subset H_n$  y  $f(H_n) = U_n$ . Aquí  $f_n = f|_{H_n} : H_n \rightarrow U_n$  es la restricción correspondiente.

Obsérvese que si  $D_n \subset f^{-1}(B_n)$  es la componente de  $f^{-1}(B_n)$  que contiene a  $H_n$ , tenemos que  $D_{n+1} \subset D_n$  ( $n \geq 1$ ) puesto que  $H_{n+1} \subset H_n$  y  $f^{-1}(B_{n+1}) \subset f^{-1}(B_n)$ . Es más, la intersección  $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$  es un continuo ([45]; Thm. 4, pág. 170) y  $A \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \subset f^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = f^{-1}(C)$ . Por tanto  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$  ya que  $A \subset f^{-1}(C)$  se ha supuesto que es una componente. Además, dado  $y \in C = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$  tenemos que  $f^{-1}(y) \cap H_n \neq \emptyset$  para todo  $y$  pues  $f(H_n) = U_n$ . Como  $U_{n+1} \subset U_n$  para todo  $n \geq 1$  se sigue por la compacidad de  $f^{-1}(y)$  que la intersección de cerrados encajados

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (f^{-1}(y) \cap D_n) = f^{-1}(y) \cap \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \right) \neq \emptyset$$

no es vacía. Es decir; existe  $x \in A = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$  con  $f(x) = y$ . Por tanto,  $f(A) = C$  y  $f$  es confluyente.  $\square$

**Nota IV.3.3.** Si en las hipótesis del Teorema IV.3.1 prescindimos de que  $Y$  sea localmente conexo, entonces el resultado no se tiene en general. Por ejemplo, la aplicación propia confluyente  $f : X \rightarrow Y$  entre continuos generalizados del Ejemplo IV.2.11 no es  $\mathcal{C}_2$ -confluyente. En efecto, manteniendo la notación empleada allí, el subcontinuo generalizado  $E = F \cup G \subset Y$  satisface que  $f^{-1}(E)$  es la unión disjunta de dos componentes,  $A$  y  $C \cup D$ , y  $f(A)$  está estrictamente contenida en  $E$ .

Para la segunda demostración del Teorema IV.2.13 también necesitamos los siguientes lemas.

**Lema IV.3.4.** Sean  $f : X \rightarrow Y$  una sobreyección propia entre continuos generalizados y  $H$  un abierto de  $\hat{Y}$ . Dado cualquier componente  $D \subset \hat{f}^{-1}(H)$  con  $D \cap \mathcal{F}(X) \neq \emptyset$ , se tiene la igualdad

$$D = \overline{D - \mathcal{F}(X)}^{\hat{f}^{-1}(H)}.$$

En particular,  $D \cap X = D - \mathcal{F}(X) \neq \emptyset$  es siempre no vacío.

**Demostración.** Comenzamos fijando una sucesión exhaustiva  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  en  $X$  y escribiendo  $A = \overline{D - \mathcal{F}(X)}^{\hat{f}^{-1}(H)}$ . Es claro que  $D - \mathcal{F}(X) \subset A \subset D$ . Aquí usamos que  $D$  es cerrado en  $\hat{f}^{-1}(H)$ .

Más aún, dado cualquier final  $\varepsilon \in D$  escribimos  $\varepsilon = (Q_n)_{n \geq 1}$  donde  $Q_n \subset X - \text{int}K_n$  es una cuasicomponente y  $Q_{n+1} \subset Q_n$  y consideramos cualquier entorno abierto  $W$  de  $\varepsilon$  en  $\hat{f}^{-1}(H)$ . Como  $\hat{f}^{-1}(H)$  es abierto en  $\hat{X}$ , también lo es  $W$ . Así, la topología de  $\hat{X}$  nos proporciona un  $n_0 \geq 1$  y un conjunto  $N$  abierto en  $X$  de frontera  $\text{Fr}N \subset \text{int}K_{n_0}$  tal que  $N^* = \overline{N}^{\hat{X}}$  es un entorno de  $\varepsilon$  con  $N^* \subset W \subset \hat{f}^{-1}(H)$ . Obsérvese que  $Q_n \subset N$  para todo  $n$  suficientemente grande. Por otro lado, podemos aplicar el Lema I.4.13 para encontrar un continuo  $M \subset \hat{H}$  tal que

$$M \subset \overline{Q_{n_0}}^{\hat{X}} \subset N^* \subset W \subset \hat{f}^{-1}(H)$$

con  $\varepsilon \in M$  y  $M \cap \text{Fr}K_{n_0} \neq \emptyset$ . Por lo tanto  $M \subset D$  por definición de componente y

$$\emptyset \neq M \cap X \subset (W \cap D) \cap X = W \cap (D - \mathcal{F}(X))$$

muestra que  $\varepsilon \in A$ , así  $D \subset A$  y la demostración termina.  $\square$

**Lema IV.3.5.** *Sea  $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$  la extensión de Freudenthal de una sobreyección propia entre continuos generalizados. Si  $H \subset \hat{Y}$  es abierto, entonces cualquier componente  $D \subset \hat{f}^{-1}(H)$  es la clausura en  $\hat{f}^{-1}(H)$  de la unión de la familia*

$$\mathcal{C}_D = \{C \text{ componente de } f^{-1}(H - \mathcal{F}(X)) \text{ con } C \subset D\}.$$

**Demostración.** Como  $D$  es cerrado en  $Z = \hat{f}^{-1}(H)$ , tenemos  $\overline{\bigcup_{C \in \mathcal{C}_D} C}^Z \subset D$ . Recíprocamente, cualquier componente  $U \subset D - \mathcal{F}(X)$  está contenida en alguna componente  $C \subset f^{-1}(H - \mathcal{F}(X)) \subset Z$ , y así  $U \subset C \subset D$ . Entonces el Lema IV.3.4 establece que  $D = \overline{D - \mathcal{F}(X)}^Z \subset \overline{\bigcup_{C \in \mathcal{C}_D} C}^Z$ .  $\square$

**Demostración (alternativa) del Teorema IV.2.13.** La suficiencia es obvia. Supongamos pues que  $f$  es confluyente. Por el Teorema IV.3.1, para ver que  $\hat{f}$  es confluyente bastará probar que  $\hat{f}$  es  $\mathcal{C}_3$ -confluyente. Para esto, sea  $H \subset \hat{Y}$  un subconjunto abierto conexo cualquiera. Por la Proposición II.1.11,  $H - \mathcal{F}(Y)$  también es abierto y conexo en  $Y$  y el Teorema IV.3.1 establece que

$$f(C) = H - \mathcal{F}(Y) \tag{IV.3.A}$$

para toda componente  $C \subset f^{-1}(H - \mathcal{F}(Y))$ .

Seguidamente aplicamos el Lema IV.3.5 para obtener para cualquier componente  $D \subset \hat{f}^{-1}(H) = Z$

$$\hat{f}(D) = \hat{f}\left(\overline{\bigcup_{C \in \mathcal{C}_D} C}^Z\right) \stackrel{(I)}{=} \overline{f\left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}_D} C\right)}^H = \overline{H - \mathcal{F}(Y)}^H \stackrel{(II)}{=} H$$

donde  $\mathcal{C}_D$  es la familia de todas las componentes  $C \subset f^{-1}(H - \mathcal{F}(X))$  contenidas en  $D$ . Aquí (I) sigue del Lema III.2.13 aplicado a la restricción  $\hat{f}: Z = \hat{f}^{-1}(H) \rightarrow H$  que es una aplicación propia. Más aún, (II) sigue de ser  $H - \mathcal{F}(X)$  denso en el abierto  $H$ .  $\square$

### §IV.4. Aplicaciones débilmente confluentes

Como una amplia generalización de las aplicaciones confluentes, Lelek introdujo en [46] la clase de las aplicaciones débilmente confluentes; ver también [47]. Recordemos que una sobreyección continua  $f : X \rightarrow Y$  entre espacios topológicos se denomina *débilmente confluyente* si para todo subcontinuo  $B \subset Y$  existe alguna componente conexa  $C \subset f^{-1}(B)$  tal que  $f(C) = B$ . Es obvio que las aplicaciones confluentes son débilmente confluentes. Más generalmente, dada una familia  $\mathcal{C}$  de subconjuntos conexos de  $Y$  se dice que  $f$  es *débilmente  $\mathcal{C}$ -confluyente* si para todo  $B \in \mathcal{C}$  existe alguna componente  $C \subset f^{-1}(B)$  con  $f(C) = B$ .

El sencillo ejemplo que sigue muestra que el Teorema IV.3.1 no se cumple en general para la clase de las aplicaciones débilmente confluentes.

**Ejemplo IV.4.1.** Consideremos el continuo generalizado  $X$  que se representa en la siguiente figura:

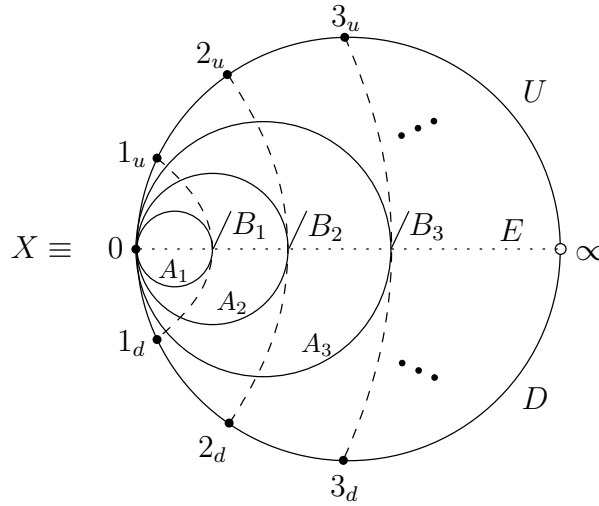


Figura IV.7

Por  $A_i$  ( $i \geq 1$ ) denotamos a las circunferencias descritas en la Figura IV.7 y tomamos  $A_0 = \{0\}$ . Más aún, los  $B_i$  son segmentos de longitud decreciente que convergen a  $\infty$  con  $A_i \cap B_j = \emptyset$  si  $i \neq j$  y  $A_i \cap B_i = \{a_i\}$ . De esta forma definimos  $X = (\bigcup_{i \geq 0} A_i) \cup U \cup D \cup (\bigcup_{i \geq 1} B_i)$  donde  $U$  y  $D$  son los arcos exteriores superior e inferior, respectivamente, que unen 0 con  $\infty$ .

Más aún, por  $\Gamma_i$  ( $i \geq 1$ ) denotaremos a los arcos punteados de extremos  $i_u$  e  $i_d$  con  $\Gamma_0 = \{0\}$ . Obsérvese que  $\Gamma_i \cap A_i = \{a_i\}$ . Además, sean  $A_{i,+}$  y  $A_{i,-}$  las semicircunferencias de  $A_i$  que quedan por encima y por debajo del segmento  $E$ , respectivamente. Obsérvese que, fijado  $i$ , para todo  $j \geq i + 1$ ,  $\Gamma_i \cap A_j$  es un par de puntos  $\{p_j^i, q_j^i\}$  con  $p_j^i \in A_{j,+}$  y  $q_j^i \in A_{j,-}$  que convergen a  $i_u$  e  $i_d$ , respectivamente, ver Figura IV.7.

Sea  $Y$  el grafo obtenido como la unión de  $A_1$  con la semirecta  $[0, \infty)$ .

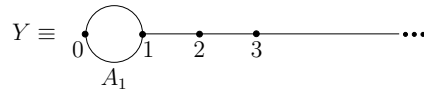


Figura IV.8

Definimos la aplicación  $f : X \rightarrow Y$  que lleva  $a_i$  en  $i$  para todo  $i \geq 0$  y tal que la imagen del segmento  $B_i$  es homeomorfa al intervalo  $[i, i + 1]$  para todo  $i \geq 1$ . Además,  $f$  es la identidad sobre  $A_1$ ; finalmente, si  $i \geq 0$  y  $D_{i,+}$  y  $D_{i,-}$  denotan la unión disjunta de subarcos en  $A_{j,+}$  y  $A_{j,-}$  ( $j \geq i$ ), respectivamente, contenidos en la región comprendida entre  $\Gamma_i$  y  $\Gamma_{i+1}$ , entonces  $f$  lleva de manera obvia  $D_{0,+}$  y  $D_{0,-}$  sobre  $A_{1,+}$  y  $A_{1,-}$ , respectivamente, e igualmente y  $D_{i,+} \cup D_{i,-}$  sobre el segmento  $[i, i + 1]$  ( $i \geq 1$ ).

No es difícil comprobar que  $f$  es propia y débilmente confluyente. Sin embargo,  $f$  no es débilmente  $\mathcal{C}_3$ -confluyente; en efecto, dado el abierto conexo  $\Omega \subset Y$  representado en la siguiente Figura,

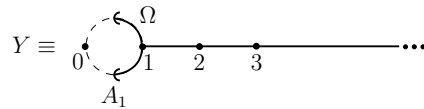


Figura IV.9

para cualquier componente  $A \subset f^{-1}(\Omega)$ , tenemos que  $A \subset U$  ó  $A \subset D$ . Aquí usamos que  $f$  es propia. Así  $f(A) = \Omega_+ \cup [1, +\infty) \neq \Omega$  ó  $f(A) = \Omega_- \cup [1, +\infty) \neq \Omega$  donde  $\Omega_{\pm} = \Omega \cap A_{1,\pm}$ .

Sin embargo aún podemos demostrar el siguiente resultado parcial.

**Teorema IV.4.2.** *Toda sobreyección propia débilmente  $\mathcal{C}_3$ -confluente  $f : X \rightarrow Y$  entre continuos generalizados donde  $Y$  es localmente conexo es débilmente confluente.*

La demostración del Teorema IV.4.2 así como otras demostraciones en esta sección y en las secciones siguientes usa el siguiente hecho: Dada una sucesión de subcontinuos  $\{C_n\}_{n \geq 1}$  en un espacio compacto  $X$ , la convergencia de una sucesión  $x_n \in C_n$ , garantiza que el límite inferior  $\text{Li}C_n$  es no vacío, y entonces ([45]; Thm. 6, pág.171) establece que

**Hecho IV.4.3.** *El límite superior  $\text{Ls}C_n$  es un subcontinuo de  $X$ .*

**Demostración del Teorema IV.4.2.** Sea  $C \subset Y$  un subcontinuo. Por el Lema IV.2.5 existe una sucesión decreciente de entornos abiertos y conexos  $C \subset U_n$  tales que  $\overline{U_n} = B_n$  es un subcontinuo de Peano para cada  $n$  y  $C = \bigcap_{n \geq 1} B_n$ . Por hipótesis para cada  $n$  existe una componente  $W_n \subset f^{-1}(U_n)$  con  $f(W_n) = U_n$ , y así,  $f(\overline{W_n}) = \overline{U_n} = B_n$ . Aquí usamos el Lema III.2.13. Sea  $y_0 \in C$  y  $x_n \in \overline{W_n}$  con  $f(x_n) = y_0$ . Puesto  $f^{-1}(y_0)$  es compacto, podemos suponer que la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  converge a algún  $x_0 \in f^{-1}(y_0)$  (esto siempre se tiene para alguna subsucesión). Sea  $L_0 = \text{Ls}\overline{W_n}$  el continuo en  $f^{-1}(\overline{U_1})$  que nos da (IV.4.3). Afirmamos que

$$f(L_0) = C. \quad (\text{IV.4.A})$$

En efecto; dado  $z \in L_0$  existe una sucesión  $z_s \in \overline{W_{n_s}} \subset f^{-1}(\overline{U_{n_s}})$  convergiendo a  $z$ . Como  $\bigcap_{s \geq 1} f^{-1}(\overline{U_{n_s}}) = f^{-1}(C)$  se sigue que  $f(z) \in C$ . Recíprocamente para todo  $y \in C$ , se tiene  $f^{-1}(y) \cap \overline{W_n} \neq \emptyset$  para todo  $n$  y podemos escoger una sucesión  $\{p_n\}_{n \geq 1}$  con  $p_n \in f^{-1}(y) \cap \overline{W_n}$ . Esta sucesión admite una subsucesión que converge a algún  $p_y \in f^{-1}(y) \cap L_0$  por compacidad. Por consiguiente,  $y \in f(L_0)$  y se tiene la igualdad (IV.4.A). Ahora, es inmediato que  $f(H_0) = C$  para la componente  $H_0 \subset f^{-1}(C)$  que contenga a  $L_0$ .  $\square$

Si el dominio (y por tanto el codominio por (II.1.4)) de una sobreyección propia débilmente confluente  $f : X \rightarrow Y$  es un continuo generalizado de Peano, obtenemos el análogo al Teorema IV.3.1. Esto es,

**Teorema IV.4.4.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una sobreyección propia con  $X$  un continuo generalizado de Peano. Entonces  $f$  es débilmente confluyente si y sólo si  $f$  es débilmente  $\mathcal{C}_i$ -confluyente ( $1 \leq i \leq 3$ ) para cualquiera de las clases  $\mathcal{C}_i$  de subespacios conexos de  $Y$  en el Teorema IV.3.1.*

**Demostración.** Probaremos el siguiente diagrama de implicaciones

$$\begin{array}{ccc}
 \text{d. confluyente} & \xrightarrow{(1)} & \text{d. } \mathcal{C}_1\text{-confluyente} \\
 \uparrow (3) & & \downarrow \\
 \text{d. } \mathcal{C}_3\text{-confluyente} & \xleftarrow{(2)} & \text{d. } \mathcal{C}_2\text{-confluyente}
 \end{array}$$

Nótese que (1) y (2) son obvios. Es más (3) es el Teorema IV.4.2. Finalmente, supongamos que  $f$  es débilmente  $\mathcal{C}_1$ -confluyente y sea  $C \subset Y$  un subcontinuo generalizado de Peano. Por el Teorema II.1.3(d) podemos encontrar una sucesión exhaustiva de  $C$ ,  $\{C_n\}_{n \geq 1}$ , formada por subcontinuos de Peano. Por hipótesis existe una componente  $H_n$  de  $K_n = f^{-1}(C_n)$  con  $f(H_n) = C_n$ .

Obsérvese que  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  forma una sucesión exhaustiva de  $f^{-1}(C)$ , y por la conexión de  $H_n$  podemos encontrar una sucesión  $x_n \in H_n \cap \text{Fr}K_1 \neq \emptyset$  para todo  $n \geq 2$ . Entonces, por compacidad, existe una subsucesión  $\{x_{n_j}\}_{j=1}^\infty$  que converge a algún  $x_0 \in \text{Fr}K_1$ . Además,  $x_0 \in \text{int}K_2$  y podemos elegir un entorno abierto y conexo de  $x_0 \in \Theta \subset \text{int}K_2$  y un  $j_0$  suficientemente grande tal que  $x_{n_j} \in \Theta \cap H_{n_j}$  para todo  $j \geq j_0$ . Aquí usamos que  $X$  es localmente conexo. Como  $\Theta \subset K_n$  ( $n \geq 2$ ), tenemos que  $\Theta \subset H_{n_j}$  para todo  $j \geq j_0$  y por tanto

$$\Theta \subset H_{n_{j_0}} \subset H_{n_{j_0+1}} \subset H_{n_{j_0+2}} \subset \dots$$

Sea  $H \subset f^{-1}(C)$  la componente conexa tal que  $\Theta \subset H$ ; entonces  $\bigcup_{j=j_0}^\infty H_{n_j} \subset H$  y

$$C = \bigcup_{j=j_0}^\infty C_{n_j} = \bigcup_{j=j_0}^\infty f(H_{n_j}) \subset f(H) \subset C$$

con lo que  $f(H) = C$  y por tanto  $f$  es débilmente  $\mathcal{C}_2$ -confluyente. □



A pesar del fallo del análogo al Teorema IV.3.1, aún podemos demostrar la versión del Teorema IV.2.13 para aplicaciones débilmente confluentes. Explícitamente,

**Teorema IV.4.5.** *Sean  $X$  e  $Y$  un continuos generalizados con  $Y$  localmente conexo. Entonces, cualquier sobreyección propia  $f : X \rightarrow Y$  es débilmente confluyente si y sólo si su extensión de Freudenthal  $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$  es débilmente confluyente.*

**Demostración.** La condición suficiente es obvia. Supongamos que  $f$  es débilmente confluyente y sea  $C \subset \hat{Y}$  un continuo. Por el Lema IV.2.5 existe una sucesión decreciente  $\{U_n\}_{n \geq 1}$  de entornos conexos y abiertos  $C \subset U_n$  tales que (i)  $P_n = \overline{U_n}^{\hat{Y}}$  es un subcontinuo de Peano; y (ii)  $C = \bigcap_{n \geq 1} P_n$ . Más aún, la Proposición II.1.11 establece que  $W_n = U_n - \mathcal{F}(Y)$  es un conjunto abierto y conexo en  $Y$  para todo  $n \geq 1$ . Por tanto  $W_n$  es un continuo generalizado de Peano y entonces, para cada  $n$ , existe una sucesión exhaustiva de  $W_n$  formada por subcontinuos de Peano  $\{K_i^n\}_{i \geq 1}$  por (II.1.3(d)). Puesto que  $f$  es débilmente confluyente, para cada par  $(n, i)$  existe una componente conexa  $H_i^n \subset f^{-1}(K_i^n)$  tal que  $f(H_i^n) = K_i^n$ . Dado  $p_1 \in K_1^n$ , como  $f$  es propia, la intersección no vacía  $f^{-1}(p_1) \cap H_i^n$  es compacta para todo  $i \geq 1$ . Así, cualquier sucesión  $\{x_i\}_{i \geq 1} \subset f^{-1}(p_1) \cap H_i^n$  contiene una subsucesión que converge a algún punto  $z_0 \in f^{-1}(p_1)$ . Para facilitar la notación podemos asumir que  $z_0$  es el límite de la sucesión completa. En tal caso, para todo  $n \geq 1$  el continuo  $L_n = \text{Ls}H_i^n \subset \hat{X}$  dado por (IV.4.3) satisface

$$L_n \subset \overline{\hat{f}^{-1}(W_n)}^{\hat{X}} \subset \hat{f}^{-1}\left(\overline{W_n}^{\hat{Y}}\right) = \hat{f}^{-1}(P_n).$$

Veamos que  $W_n \subset \hat{f}(L_n)$  y así  $\hat{f}(L_n) = P_n$  para todo  $n \geq 1$ . En efecto; sea  $x \in W_n$  y sea  $i_0$  el mínimo de los  $i$  tales que  $x \in K_i^n$ . Tomemos  $a_i \in f^{-1}(x) \cap H_i^n \neq \emptyset$  para todo  $i \geq i_0$ . La compacidad de  $f^{-1}(x)$  implica que la sucesión  $\{a_i\}_{i \geq i_0}$  admite una subsucesión que converge a algún  $a \in L_n \cap f^{-1}(x)$ ; esto es,  $x = f(a) \in \hat{f}(L_n)$ . Por otro lado, la condición (ii) sobre los  $P_n$  implica que dado  $z \in C$  existe  $q_n \in L_n \subset \hat{f}^{-1}(P_n) \subset \hat{f}^{-1}(P_1)$  con  $\hat{f}(q_n) = z$ . Por tanto, la sucesión  $\{q_n\}_{n \geq 1} \subset \hat{f}^{-1}(z)$ , contiene una subsucesión, que podemos suponer que es la sucesión completa, convergiendo a algún  $q_0 \in \hat{f}^{-1}(z)$ . Por

consiguiente podemos aplicar de nuevo (IV.4.3) para obtener el continuo  $L_0 = \text{Ls}L_n \subset \widehat{f}^{-1}(P_1)$ . Seguidamente probamos

$$\widehat{f}(L_0) = C \quad (\text{IV.4.B})$$

Para ello observamos que cualquier  $x \in L_0$  es el límite de una sucesión  $x_s \in L_{n_s}$ . Por continuidad,  $\widehat{f}(x)$  es el límite de la sucesión  $\widehat{f}(x_s) \in P_{n_s}$  que cae en la sucesión encajada de subcontinuos de Peano  $\{P_n\}_{n \geq 1}$  y así  $\widehat{f}(x) \in \bigcap_{n \geq 1} P_n = C$ . Recíprocamente, para cualquier  $y \in C$ , usamos (ii) para escoger una sucesión  $y_n = f(x_n) \in P_n = \widehat{f}(L_n)$  que converge a  $y$  con  $x_n \in L_n$ . Puesto que  $f$  es propia, existe una subsucesión  $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1}$  convergente a algún  $x_0 \in L_0$ . De esto sigue inmediatamente que  $y = \widehat{f}(x_0) \in \widehat{f}(L_0)$ .

De (IV.4.B) se sigue trivialmente que  $\widehat{f}(H) = C$  para la componente  $H \subset \widehat{f}^{-1}(C)$  que contiene a  $L_0$  y con esto termina la demostración.  $\square$

Al igual que para las aplicaciones confluentes, Lelek y Tymchatyn introducen en [49] una definición más general de aplicación débilmente confluyente. Explícitamente, una aplicación  $f : X \rightarrow Y$ , con  $f^{-1}(y)$  compacto para todo  $y \in Y$ , es llamada débilmente confluyente si cumple que para todo  $C \subset Y$  cerrado y conexo existe una cuasicomponente  $Q \subset f^{-1}(C)$  tal que  $f(Q) = C$  ([49]; 1.4(w')). Esta definición equivale a la habitual en el ambiente compacto donde las cuasicomponentes coinciden con las componentes (ver ([45]; Thm. 2, pág. 169)). Para el caso no compacto podemos demostrar

**Corolario IV.4.6.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una sobreyección propia entre continuos generalizados donde  $Y$  es localmente conexo. Entonces son equivalentes:*

- (a)  $f$  es débilmente confluyente en el sentido de Lelek-Tymchatyn.
- (b)  $f$  es débilmente confluyente.
- (c) Para todo  $\Gamma \subset Y$  conexo existe una cuasicomponente  $Q \subset f^{-1}(\Gamma)$  tal que  $f(Q) = \Gamma$ .

**Demostración.** (a)  $\Rightarrow$  (b) es obvio. De forma similar (c)  $\Rightarrow$  (a) es trivial. Veamos (b)  $\Rightarrow$  (c). El Teorema IV.4.5 nos asegura que  $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$  es una

aplicación débilmente confluyente entre espacios compactos. Por lo tanto,  $\widehat{f}$  es débilmente confluyente en la forma de Lelek-Tymchatyn. Ahora, aplicando ([49]; 3.4(iii)) tenemos que existe una cuasicomponente  $Q \subset \widehat{f}^{-1}(\Gamma) = f^{-1}(\Gamma)$  que cumple que  $f(Q) = \Gamma$ .  $\square$

## §IV.5. Aplicaciones semiconfluentes

Las aplicaciones semiconfluentes, introducidas por T. Maćkowiak en [51], forman una clase intermedia entre las aplicaciones confluentes y las débilmente confluentes. Recordemos que una sobreyección continua  $f : X \rightarrow Y$  es *semiconfluyente* si para todo subcontinuo  $B \subset Y$  y para todo par de componentes conexas  $C, D \subset f^{-1}(B)$  se verifica que  $f(C) \subset f(D)$  ó  $f(D) \subset f(C)$ . De las definiciones se deduce inmediatamente el siguiente

**Lema IV.5.1.** *Una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  propia y confluyente entre dos espacios admisibles es semiconfluyente.*

En esta sección estudiamos las extensiones de Freudenthal de las aplicaciones propias semiconfluentes. Observemos que la extensión de Freudenthal  $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$  de la aplicación confluyente del Ejemplo IV.2.11 no es semiconfluyente.

La relación entre aplicaciones semiconfluentes y débilmente confluentes no es obvia. Usaremos el siguiente lema, análogo a un resultado de T. Maćkowiak ([51]; 3.1) para continuos, para comprobar que las aplicaciones semiconfluentes son débilmente confluentes. La demostración es la misma que en el caso compacto pues la compacidad de las preimágenes de los continuos está garantizada para aplicaciones propias.

**Lema IV.5.2** (c.f. ([51]; 3.1)). *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una sobreyección propia y semiconfluyente donde  $X$  e  $Y$  son dos espacios admisibles. Para cada subcontinuo  $B$  de  $Y$  y para cada familia  $\mathcal{C}$  de componentes de  $f^{-1}(B)$  tal que la unión  $\bigcup\{C : C \in \mathcal{C}\}$  es cerrada en  $X$ , existe una componente  $C' \in \mathcal{C}$  cuya imagen por  $f$  es maximal en el sentido de que  $f(C') = f(\bigcup\{C : C \in \mathcal{C}\})$ .*

**Lema IV.5.3** (c.f. ([51]; 3.2)). *Toda aplicación propia semiconfluyente entre dos espacios admisibles es débilmente confluyente.*

**Demostración.** En efecto; sea  $B$  un subcontinuo de  $Y$ . Al ser  $f$  propia,  $f^{-1}(B)$  es compacto; y aplicando el Lema IV.5.2 para la familia  $\mathcal{C}$  de todas las componentes de  $f^{-1}(B)$ , existe una componente  $C' \in \mathcal{C}$  tal que  $f(C') = f(\bigcup\{C; C \in \mathcal{C}\}) = f(f^{-1}(B)) = B$  por lo que  $f$  es débilmente confluyente.  $\square$

Al contrario que en el caso de las aplicaciones débilmente confluentes, los resultados para aplicaciones confluentes en la sección §IV.3 se extienden directamente a las aplicaciones semiconfluentes. En particular, el análogo del Teorema IV.3.1 se tiene para aplicaciones semiconfluentes. Explícitamente, si definimos para cualquier clase  $\mathcal{C}$  de subconjuntos conexos la noción de aplicación  $\mathcal{C}$ -semiconfluyente tal y como se hizo en la sección §IV.2 para aplicaciones confluentes, podemos enunciar y demostrar el siguiente

**Teorema IV.5.4.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una sobreyección propia con  $Y$  un continuo generalizado de Peano. Entonces  $f$  es semiconfluyente si y sólo si  $f$  es  $\mathcal{C}_i$ -semiconfluyente ( $1 \leq i \leq 3$ ) para cualquiera de las clases  $\mathcal{C}_i$  en el Teorema IV.3.1.*

En la demostración del Teorema IV.5.4 usaremos el siguiente lema

**Lema IV.5.5.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua y consideremos la intersección  $Z = \bigcap_{n \geq 1} Z_n$  de una sucesión decreciente de subconjuntos compactos. Entonces  $f(Z) = \bigcap_{n \geq 1} f(Z_n)$ .*

**Demostración.** Es claro que  $f(Z) \subset \bigcap_{n \geq 1} f(Z_n)$ . Recíprocamente, consideremos  $x \in \bigcap_{n \geq 1} f(Z_n)$ , entonces  $x = f(z_n)$  donde  $z_n \in Z_n \subset Z_1$ . Puesto que  $Z_1$  es compacto, existe una subsucesión  $\{z_{n_j}\}_{j \geq 1}$  que converge a algún  $w \in Z_1$ . Como la intersección de los  $Z_n$  es  $Z$ , es fácil comprobar que  $w \in Z$ , y por tanto  $x = f(w) \in f(Z)$ .  $\square$

**Demostración del Teorema IV.5.4.** Recordemos que  $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \supset \mathcal{C}_3$  son las clases de subcontinuos de Peano, subcontinuos generalizados de Peano y subconjuntos abiertos y conexos de  $Y$ , respectivamente. Así, es claro que las aplicaciones semiconfluentes son  $\mathcal{C}_1$ -semiconfluentes y que las aplicaciones  $\mathcal{C}_2$ -semiconfluentes son  $\mathcal{C}_3$ -semiconfluentes.

Supongamos ahora que  $f$  es  $\mathcal{C}_1$ -semiconfluente y tomemos cualquier  $C \in \mathcal{C}_2$ . Si dos componentes  $A, B \subset f^{-1}(C)$  verifican

$$f(A) - f(B) \neq \emptyset \neq f(B) - f(A),$$

existen  $y = f(a) \in f(A) - f(B)$  e  $y' = f(b) \in f(B) - f(A)$  con  $a \in A$  y  $b \in B$ . Sea  $\Gamma \subset C$  un arco que une  $y$  e  $y'$ . Aquí usamos que  $C$  es arco-conexo. Si  $D$  y  $D'$  son las componentes de  $a$  y  $b$  en  $f^{-1}(\Gamma)$  respectivamente, entonces o  $f(D) \subset f(D') \subset f(B)$  y por tanto  $y = f(a) \in f(B)$ , o bien  $f(D') \subset f(D) \subset f(A)$  y por tanto  $y' = f(b) \in f(A)$ . Alcanzamos una contradicción y por tanto  $f$  es  $\mathcal{C}_2$ -semiconfluente.

Finalmente, supongamos que  $f$  es  $\mathcal{C}_3$ -semiconfluente y sean dos componentes cualesquiera  $P, Q \subset f^{-1}(C)$  con  $C \subset Y$  un subcontinuo arbitrario. Aplicando el Lema IV.2.5 podemos escribir  $C = \bigcap_{n \geq 1} C_n$  como una intersección de continuos de Peano  $C_n = \overline{U_n}$  que son las clausuras de una sucesión decreciente de entornos abiertos y conexos  $U_n \supset C$ . Por lo tanto, para cada  $n \geq 1$  encontramos componentes  $P_n, Q_n \subset f^{-1}(U_n)$  con  $P \subset P_n$  y  $Q \subset Q_n$ . Es más, como

$$P \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{P_n} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(C_n) = f^{-1}(C),$$

se sigue que la intersección conexa  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{P_n}$  coincide con la componente  $P$ . De manera similar  $Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{Q_n}$ .

Más aún, por hipótesis, para cada  $n \geq 1$ , tenemos  $f(P_n) \subset f(Q_n)$  ó  $f(Q_n) \subset f(P_n)$  y así,  $f(\overline{P_n}) \subset f(\overline{Q_n})$  ó  $f(\overline{Q_n}) \subset f(\overline{P_n})$  por el Lema III.2.13.

Supongamos que existe una subsucesión  $\{n_j\}_{j \geq 1}$  con  $f(\overline{P_{n_j}}) \subset f(\overline{Q_{n_j}})$  para cada  $j \geq 1$ . Entonces el Lema IV.5.5 establece que

$$f(P) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f(\overline{P_{n_j}}) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f(\overline{Q_{n_j}}) = f(Q).$$

En caso contrario, existe un  $n_0$  tal que  $f(\overline{Q_n}) \subset f(\overline{P_n})$  para todo  $n \geq n_0$

y, de manera similar, el Lema IV.5.5 establece que  $f(Q) \subset f(P)$ . Esto muestra que  $f$  es semiconfluente y termina la demostración.  $\square$

Al igual que se hizo con las aplicaciones confluentes, usamos el Teorema IV.5.4 para demostrar

**Teorema IV.5.6.** *Sean  $X$  un continuo generalizado e  $Y$  un continuo generalizado de Peano. Cualquier sobreyección propia  $f : X \rightarrow Y$  es semiconfluente si y sólo si su extensión de Freudenthal  $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$  es semiconfluente.*

**Demostración.** La suficiencia es obvia. Supongamos pues que  $f$  es semiconfluente. Por el Teorema IV.5.4 será suficiente comprobar la  $\mathcal{C}_3$ -semiconfluencia de  $\hat{f}$ . Para esto, sea  $H \subset \hat{Y}$  un subconjunto abierto conexo. Entonces  $H - \mathcal{F}(Y)$  es conexo por la Proposición II.1.11 y como  $f$  es  $\mathcal{C}_3$ -semiconfluente (Teorema IV.5.4) tenemos, para dos componentes cualesquiera  $C, C' \subset f^{-1}(H - \mathcal{F}(Y))$ , que

$$f(C) \subset f(C') \text{ ó } f(C') \subset f(C). \quad (\text{IV.5.A})$$

Por otro lado, dadas dos componentes  $D, D' \subset Z = \hat{f}^{-1}(H)$  aplicamos el Lema IV.3.5 para obtener

$$D = \overline{\bigcup_{C \in \mathcal{C}_D} C}^Z \text{ y } D' = \overline{\bigcup_{C' \in \mathcal{C}_{D'}} C'}^Z \quad (\text{IV.5.B})$$

donde  $\mathcal{C}_D$  es la familia de componentes  $C \subset f^{-1}(H - \mathcal{F}(X))$  con  $C \subset D$ . De forma similar  $\mathcal{C}_{D'}$ . Supongamos que

$$\hat{f}(D) - \hat{f}(D') \neq \emptyset \text{ y } \hat{f}(D') - \hat{f}(D) \neq \emptyset$$

y sean  $d \in D, d' \in D'$  con  $\hat{f}(d) \notin \hat{f}(D')$  y  $\hat{f}(d') \notin \hat{f}(D)$ . Por (IV.5.B) encontramos sucesiones  $x_n \in C_n \in \mathcal{C}_D$  y  $x'_n \in C'_n \in \mathcal{C}_{D'}$  que convergen a  $d$  y  $d'$ , respectivamente. Entonces (IV.5.A) establece una subsucesión  $\{n_j\}_{j \geq 1}$  tal que para todo  $j \geq 1$

$$f(C_{n_j}) \subset f(C'_{n_j}) \subset H \text{ ó } f(C'_{n_j}) \subset f(C_{n_j}) \subset H \quad (\text{IV.5.C})$$

Supongamos que se da el primer caso. Entonces

$$\widehat{f}(d) \in \overline{f\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_{n_j}\right)^H} \subset \overline{f\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C'_{n_j}\right)^H} \stackrel{(I)}{=} \widehat{f}\left(\overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} C'_{n_j}}^Z\right) \stackrel{(II)}{\subset} \widehat{f}(D') \quad (\text{IV.5.D})$$

que es una contradicción. Aquí aplicamos el Lema III.2.13 a la restricción  $\widehat{f} : Z = \widehat{f}^{-1}(H) \rightarrow H$  para obtener (I), y (II) sigue de (IV.5.B). De forma similar razonamos con el segundo caso en (IV.5.C).  $\square$

## §IV.6. El caso especial de las aplicaciones que preservan finales

Como se vió en la Proposición IV.1.1, la monotonía se transfiere sin dificultad y con total generalidad a las extensiones de Freudenthal. En esta sección probaremos que las extensiones de Freudenthal preservan la confluencia y la confluencia débil de aplicaciones fieles en los finales entre continuos generalizados. Por contra, esto no es cierto para aplicaciones semiconfluentes.

La propiedad crucial se establece en la siguiente

**Proposición IV.6.1.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una sobreyección débilmente confluente y fiel en los finales entre continuos generalizados. Entonces, para cada subcontinuo  $C \subset \widehat{Y}$  con  $C \cap \mathcal{F}(X) \neq \emptyset$  la familia  $\mathcal{J} = \mathcal{J}_C$  de componentes de  $\widehat{f}^{-1}(C)$  que cortan a  $\mathcal{F}(X)$  se reduce a un único elemento  $D$  que además cumple  $\widehat{f}(D) = C$ .*

En la demostración de la Proposición IV.6.1 usaremos los siguientes lemas.

**Lema IV.6.2.** *Cualesquiera dos componentes distintas  $D_j \in \mathcal{J}$  ( $j = 1, 2$ ) tienen imágenes disjuntas  $\widehat{f}(D_1) \cap \widehat{f}(D_2) = \emptyset$ .*

**Demostración.** Supongamos, en el caso contrario, que  $E = \widehat{f}(D_1) \cap \widehat{f}(D_2)$  contiene al menos un punto  $p \in E$ . Sea  $\{K_i\}_{i \geq 1}$  una sucesión exhaustiva de  $Y$  para la que  $p \in \text{int}K_1$ . Entonces, (I.4.12) aplicado a cada continuo  $M_j = \widehat{f}(D_j)$

( $j = 1, 2$ ) nos dice que la componente de  $p$  en  $M_i^j = M_j \cap K_i$ , digamos  $\Gamma_i^j$ , necesariamente corta a la frontera

$$\text{Fr}_{M_j} M_i^j \subset F_i^j = \text{Fr}K_i \cap M_i^j.$$

Para cada  $i \geq 1$ , la unión  $\Gamma_i = \Gamma_1^j \cup \Gamma_2^j$  es un continuo tal que

$$\Gamma_i \cap F_n^j \neq \emptyset \text{ para } i \geq n \text{ y } j = 1, 2. \quad (\text{IV.6.A})$$

Es más, como  $f$  es débilmente confluyente, para cada  $i \geq 1$  existe una componente  $A_i \subset f^{-1}(\Gamma_i)$  con  $f(A_i) = \Gamma_i$ . En particular,  $f^{-1}(p) \cap A_i \neq \emptyset$  para todo  $i \geq 1$  y existe una sucesión  $\{a_i\}_{i \geq 1}$  con  $a_i \in A_i$  y  $f(a_i) = p$ . Como  $f$  es propia, podemos suponer sin pérdida de generalidad que esta sucesión converge a algún  $a_0 \in f^{-1}(p)$ . Sea  $L = \text{Ls}A_i \subset \widehat{f}^{-1}(C)$  el subcontinuo de  $\widehat{X}$  proporcionado por (IV.4.3), y sea  $D_0 \subset \widehat{f}^{-1}(C)$  la componente que contiene a  $L$ . Si  $M_0 = \widehat{f}(D_0)$  afirmamos que cada intersección

$$M_0 \cap M_j \neq \emptyset \quad (j = 1, 2) \quad (\text{IV.6.B})$$

contiene como mínimo un final, y así la suposición de que  $f$  es fiel en los finales establece que  $D_1 = D_0 = D_2$  y la intersección  $E$  debe ser vacía siempre que  $D_1 \neq D_2$ .

Fijemos cualquier  $n \geq 1$ . Por (IV.6.A) podemos encontrar una sucesión  $\{y_i^n\}_{i \geq n} \subset \Gamma_i \cap F_n^1$  y por tanto una sucesión  $\{x_i^n\}_{i \geq n}$  con  $x_i^n \in A_i$  y  $f(x_i^n) = y_i^n$ .

Como  $f$  es propia y  $\text{Fr}K_n$  es compacto, la sucesión  $\{x_i^n\}_{i \geq n} \subset f^{-1}(F_n^1)$  contiene una subsucesión que converge a algún  $x_0^n \in L \cap f^{-1}(F_n^1) \subset D_0 \cap f^{-1}(F_n^1)$ . Aquí usamos que  $L = \text{Ls}A_i$  es un límite superior. Observemos que

$$y_0^n = f(x_0^n) \in M_0 \cap F_n^1 \subset M_0 \cap M_1 \cap \text{Fr}K_n \quad (n \geq 1)$$

forman una sucesión no acotada, y por tanto contiene una subsucesión que converge a algún final en  $M_0 \cap M_1$ . De forma similar,  $M_0 \cap M_2$  contiene al menos un final. Esto demuestra la afirmación (IV.6.B) y la demostración termina.  $\square$



**Lema IV.6.3.** *La unión disjunta*

$$Z = \bigsqcup \{D; D \in \mathcal{J}\} \quad (\text{IV.6.C})$$

es cerrada y por tanto compacta en  $\widehat{f}^{-1}(C)$ . En particular, la unión disjunta  $\widehat{f}(Z) = \bigsqcup_{D \in \mathcal{J}} \widehat{f}(D)$  dada por el Lema IV.6.2 es un conjunto compacto en  $C$  y por tanto la restricción  $\widehat{f}_Z : Z \rightarrow \widehat{f}(Z)$  es una aplicación cerrada.

**Demostración.** Para ello consideramos cualquier sucesión  $x_n \in D_n \in \mathcal{J}$  que converge a algún  $x_0 \in \widehat{f}^{-1}(C)$  y escojamos un final  $\varepsilon_n \in \mathcal{F}(X) \cap D_n$  para cada  $n$ . El límite superior  $L = \text{Ls}D_n$  es un subcontinuo de  $\widehat{f}^{-1}(C)$  que contiene a  $x_0$  (IV.4.3) y, por la compacidad de  $\mathcal{F}(X)$ , la sucesión  $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$  contienen una subsucesión que converge a algún final  $\varepsilon_0$ . Entonces  $\varepsilon_0$  cae en el límite superior  $L$  y si  $D_0$  es la componente de  $x_0$  en  $\widehat{f}^{-1}(C)$  obtenemos que  $\varepsilon_0 \in L \subset D_0$  y por tanto  $x_0 \in Z$ . Esto muestra que  $Z$  es un conjunto cerrado.  $\square$

**Lema IV.6.4.** *Con la notación del Lema IV.6.3 se cumple la igualdad  $\widehat{f}(Z) = C$ .*

**Demostración.** En efecto, cualquier final  $\varepsilon \in C \cap \mathcal{F}(Y)$  cae en la imagen de  $Z$  por la definición de la familia  $\mathcal{J}$ . Por otra parte, si  $y \in C - \mathcal{F}(Y)$  tomemos una sucesión exhaustiva de compactos  $\{Y_n\}_{n \geq 1}$  en  $Y$  con  $y \in Y_1$ . Usando (I.4.12), para cada  $n$ , la componente de  $y$ ,  $C_n \subset Y_n$  corta la frontera  $\text{Fr}Y_n$ . Como  $f$  es débilmente confluyente, existe una componente  $B_n \subset f^{-1}(C_n)$  tal que  $f(B_n) = C_n$ . Notemos que  $B_n \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$  para cada  $n \geq 1$  y por tanto existe una sucesión  $b_n \in B_n$  tal que  $f(b_n) = y$ . Como  $f^{-1}(y)$  es compacto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\{b_n\}_{n \geq 1}$  converge a algún  $b_0 \in f^{-1}(y)$ . Sea  $B = \text{Ls}B_n$  el continuo en  $f^{-1}(C)$  obtenido aplicando (IV.4.3). Obviamente,  $b_0 \in B$  e  $y = f(b_0) \in f(B)$ . Más aún, puesto que  $C_n \cap \text{Fr}Y_n \neq \emptyset$  para todo  $n \geq 1$ , existe una subsucesión  $\{n_s\}_{s \geq 1}$  y puntos  $q_s \in C_{n_s} \cap \text{Fr}Y_{n_s}$  que convergen a algún final  $\eta \in \mathcal{F}(Y)$ . Puesto que  $f(B_n) = C_n$  ( $n \geq 1$ ) y  $f$  es propia, existe una sucesión

$$\{x_t\}_{t \geq 1} \subset f^{-1}(\{q_s\}_{s \geq 1} \cup \{\eta\}) \subset f^{-1}(C)$$

con  $f(x_t) = q_{s_t}$  que converge a algún final  $\mu \in \mathcal{F}(X) \cap B$ . Por consiguiente,  $\widehat{f}(\mu) = \eta$  y por tanto  $B \cap \mathcal{F}(X) \neq \emptyset$ . Así, la componente de  $f^{-1}(C)$  que contiene a  $B$  pertenece a la familia  $\mathcal{J}$ , de donde  $y \in f(B) \subset f(Z)$ .  $\square$

**Demostración de la Proposición IV.6.1.** Observemos primero que puesto que cada  $D \in \mathcal{J}$  es una componente de  $\widehat{f}^{-1}(C)$ ,  $\mathcal{J}$  es la familia de todas las componentes del compacto  $Z$ . Por lo tanto ([45]; Thm. 3, pág.148) proporciona una aplicación continua  $\varphi : Z \rightarrow \mathfrak{C}$  en el conjunto de Cantor  $\mathfrak{C}$ , tal que las fibras de  $\varphi$  son las cuasicomponentes (= componentes por compacidad, ver ([45]; Thm. 3, pág.169)) de  $Z$ ; esto es, los conjuntos  $D \in \mathcal{J}$ .

De acuerdo con los lemas anteriores, la familia  $\mathcal{G} = \{\widehat{f}(D); D \in \mathcal{J}\}$  es una descomposición de  $\widehat{f}(Z) = C$ . Sea  $\pi : C \rightarrow C/\mathcal{G}$  la aplicación cociente. Por otro lado, sabemos que la restricción  $\widehat{f}_Z : Z \rightarrow C$  es una sobreyección cerrada ((IV.6.3) y (IV.6.4)). Entonces  $\widehat{f}_Z$  es una aplicación cociente y también lo es la composición  $\pi \circ \widehat{f}_Z : Z \rightarrow C/\mathcal{G}$ . Más aún, la aplicación  $\psi : C/\mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{C}$  dada por  $\psi([x]) = \varphi(z)$  cuando  $\pi \widehat{f}_Z(z) = [x]$  está bien definida puesto que  $\widehat{f}_Z(z), \widehat{f}_Z(z') \in D$  si y sólo si  $z, z' \in D$  por el Lema IV.6.2. De esta forma el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{C} \\
 \widehat{f}_Z \downarrow & & \uparrow \psi \\
 C & \xrightarrow{\pi} & C/\mathcal{G}
 \end{array}$$

establece que  $\psi$  es continua ([24]; 2.4.2) y entonces, la conexión de  $C$  muestra que  $\varphi(Z) = \psi\pi(C)$  es constante en el espacio totalmente desconexo  $\mathfrak{C}$ . Por tanto  $\mathcal{J}$  se reduce a una única componente  $D$  y  $\widehat{f}(D) = C$ .  $\square$

A continuación usamos la Proposición IV.6.1 para demostrar

**Teorema IV.6.5.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una sobreyección propia entre continuos generalizados que es fiel en los finales de Freudenthal. Entonces  $f$  es (débilmente) confluente si y sólo si su extensión de Freudenthal  $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$  también lo es.*

Para la demostración necesitamos el siguiente

**Lema IV.6.6.** *Sea  $X$  un continuo y  $A \neq X$  un subcontinuo no trivial de  $X$ . Si  $K \subset X$  es un subconjunto compacto tal que  $A \cap K = \emptyset$ , entonces existe un continuo  $B$  en  $X$  con  $K \cap B = \emptyset$  y  $A \subsetneq B$ .*

**Demostración.** Si  $d(A, K) = \delta > 0$ , consideremos el abierto  $G = \{x \in X; d(x, A) < \frac{\delta}{2}\}$  para el cual  $A \subset G$  y  $K \cap \overline{G} = \emptyset$ . Aplicando ([45]; Thm. 4, pág. 173) obtenemos un continuo  $B$  con  $A \subsetneq B \subset \overline{G}$ . En particular  $K \cap B = \emptyset$ .  $\square$

**Demostración del Teorema IV.6.5.** Obviamente si  $\widehat{f}$  es (débilmente) confluente también lo es  $f$ . Más aún, el recíproco en el caso de la confluencia débil es un consecuencia inmediata de la Proposición IV.6.1.

Ahora, supongamos que  $f$  es confluente y sea  $C \subset \widehat{Y}$  un subcontinuo que contiene como mínimo un final entonces,  $\widehat{f}^{-1}(C)$  se reduce a la única componente dada por la Proposición IV.6.1. En efecto, si  $D \subset \widehat{f}^{-1}(C)$  es una componente que no corta a  $\mathcal{F}(X)$ , la imagen  $\widehat{f}(D) = f(D) \subset C$  es un continuo en  $\widehat{Y}$  con  $f(D) \cap \mathcal{F}(Y) = \emptyset$ . Aplicando el Lema IV.6.6 encontramos un subcontinuo  $A \subsetneq C$  tal que  $f(D) \subsetneq A$  y  $A \cap \mathcal{F}(Y) = \emptyset$ . Más aún, como  $D$  es una componente de  $\widehat{f}^{-1}(C)$ , es también una componente de  $f^{-1}(A)$  y por la confluencia de  $f$ , necesariamente  $f(D) = A$  lo cual es una contradicción.  $\square$

La siguiente proposición es complementaria de la Proposición IV.6.1 para la extensión de Alexandroff de una aplicación propia  $f : X \rightarrow Y$  vista como una aplicación fiel en  $\infty$ . Explícitamente,

**Proposición IV.6.7.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación débilmente confluente entre espacios admisibles. Entonces para cualquier subcontinuo  $C \subset Y^+$  con  $\infty \in C$ , tenemos que  $f^+(D_\infty) = C$  para la componente  $\infty \in D_\infty \subset (f^+)^{-1}(C)$ .*

**Demostración.** Sea  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión exhaustiva de  $Y$ . Dado  $p \in C - \{\infty\}$ , aplicamos el Lema I.4.11 a la componente de  $p$  para obtener una sucesión creciente de continuos  $\{C_n^p\}_{n \geq 1}$  tal que  $p \in C_1^p$ ,  $C_{n+1}^p - K_n \neq \emptyset$  y  $C_n^p \subset C_{n+1}^p \subset C_p$ .

Por hipótesis, para cada continuo  $C_n^p$  existe una componente conexa  $D_n^p \subset f^{-1}(C_n^p)$  tal que  $f(D_n^p) = C_n^p$ . Nótese que además cada  $D_n^p$  es un continuo

pues  $f$  es propia. Por tanto para cada  $n$  existe  $d_n^p \in D_n^p$  tal que  $f(d_n^p) = p$ . Como  $\{d_n^p\}_{n \geq 1} \subset f^{-1}(p)$  es una sucesión en el compacto  $f^{-1}(p)$ , existe una subsucesión, que supondremos la sucesión completa, que converge a un punto  $d_0^p \in f^{-1}(p)$ . Sea  $D_0^p = \text{Ls}D_n^p$  el continuo en  $f^{-1}(C)$  dado por (IV.4.3). Observemos que  $\infty \in D_0^p$  para todo  $p$  puesto que  $f(D_{n+1}^p) - K_n = C_{n+1}^p - K_n \neq \emptyset$  para todo  $n \geq 1$  y  $D_0^p$  es cerrado en  $X^+$ . En particular, el conjunto

$$D_0 = \bigcup_{p \in C - \{\infty\}} D_0^p$$

es conexo y por tanto  $D_0 \subset D_\infty$ . Más aún, para cada  $p \in C - \{\infty\}$ ,  $f(d_0^p) = p$ , y así  $C \subset f(D_0) \subset f(D_\infty) \subset C$ , lo que implica  $f(D_\infty) = C$ .  $\square$

Como consecuencia inmediata de la Proposición IV.6.7 se obtiene

**Teorema IV.6.8.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una sobreyección propia entre espacios admisibles. Entonces  $f$  es (débilmente) confluyente si y sólo si  $f^+ : X^+ \rightarrow Y^+$  también lo es.*

**Demostración.** La suficiencia es obvia. Más aún, el recíproco en el caso de la confluencia débil es una consecuencia inmediata de la Proposición IV.6.7.

Para la confluencia, el mismo razonamiento que se usa en la demostración del Teorema IV.6.5 demuestra que necesariamente  $(f^+)^{-1}(C)$  es conexo.  $\square$

El siguiente ejemplo muestra que los Teoremas IV.6.5 y IV.6.8 no se cumplen para aplicaciones semiconfluentes.

**Ejemplo IV.6.9.** Consideremos el continuo generalizado  $Y$  que consiste en la espiral  $S_Y$  y en el intervalo abierto  $E_Y$  y su copia homeomorfa  $X$  tal y como se representan en la Figura IV.10.

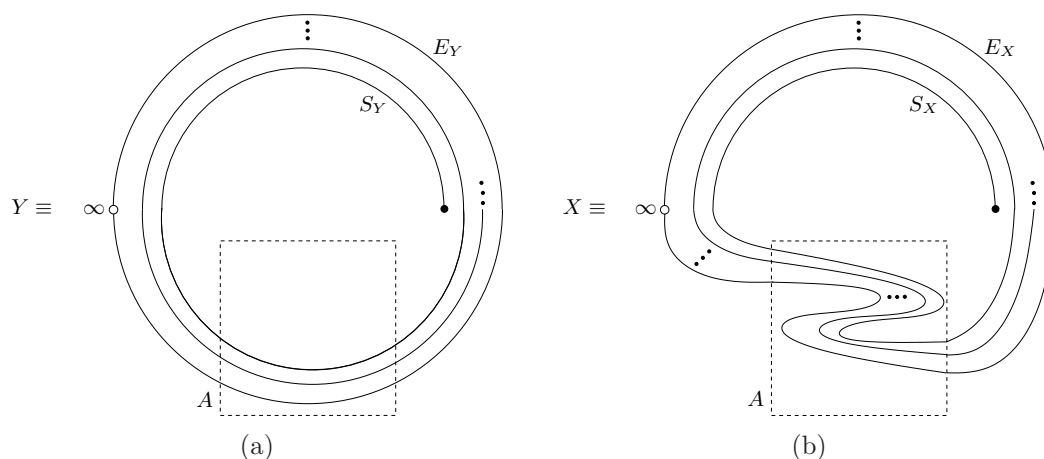


Figura IV.10

Sea  $f : X \rightarrow Y$  la aplicación propia definida como la identidad fuera del cuadrado  $A$  y definida en  $A$  por la proyección representada en la Figura IV.11 para cada nivel.

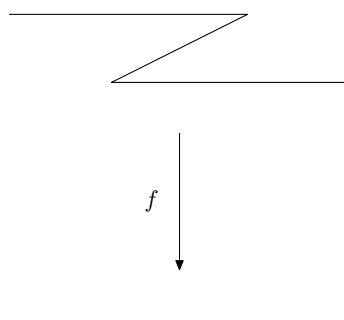


Figura IV.11

Se puede comprobar sin dificultad que  $f$  es semiconfluente pero  $f^+ : X^+ \rightarrow Y^+$  no lo es. Para esto último, observemos que la contraimagen del continuo  $C \subset E_Y^+ \cong S^1$  en la Figura IV.12 consiste en la componente  $D$  dada por la Proposición IV.6.7 y dos componentes más  $D_1, D_2 \subset (f^+)^{-1}(C)$  cuyas imágenes no son comparables por inclusión.

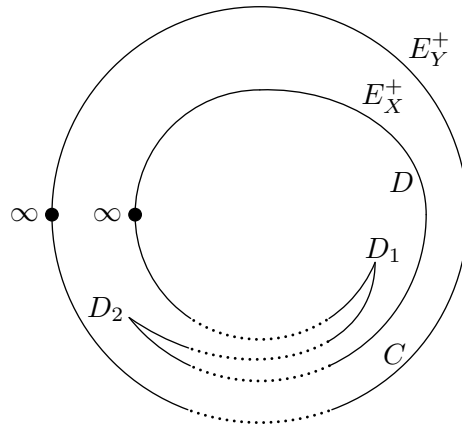


Figura IV.12

Finalizamos el capítulo presentando dos consecuencias del Teorema IV.6.8.

**Corolario IV.6.10** (c.f. ([63]; Thm. 4)). *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una sobreyección propia donde  $X$  es un continuo generalizado e  $Y$  es tipo rayo o tipo línea (en particular si  $Y = \mathbb{R}_{\geq 0}$  ó  $Y = \mathbb{R}$ ). Entonces  $f$  es débilmente confluyente.*

**Demostración.** Supongamos que  $Y$  es tipo rayo. Entonces  $Y^+$  es tipo arco (III.1.6) y por ([63]; Thm. 4) la extensión  $f^+ : X^+ \rightarrow Y^+$  es débilmente confluyente y del Teorema IV.6.8 se sigue que  $f$  es débilmente confluyente.

Si  $Y = \varprojlim_p \{\mathbb{R}, g_n\}$  es tipo línea, tenemos que  $Y$  es un continuo generalizado con dos finales (III.4.2), de donde se sigue fácilmente que la sobreyección  $\widehat{Y} \rightarrow Z = \varprojlim \{\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{g}_n\}$  en (III.2.1) es un homeomorfismo y por tanto  $\widehat{Y}$  es tipo arco. Ahora se sigue de nuevo por ([63]; Thm. 4) que la extensión de Freudenthal  $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$  es débilmente confluyente y por tanto  $f$  es débilmente confluyente (IV.2.7).  $\square$

En ([60]; 3.1 y 3.2) S. B. Nadler caracteriza los espacios localmente conexos y métricos que son la imagen por una aplicación confluyente de la semirecta y la recta euclídea respectivamente. Mediante el uso del Teorema IV.6.8 podemos dar una demostración alternativa para el caso de las imágenes propias. Explícitamente

**Corolario IV.6.11.** *La imagen de una semirecta bajo una aplicación propia confluyente es también una semirecta. Más aún, la imagen por una aplicación*

*propia y confluyente de una recta es o bien un recta o una semirecta.*

**Demostración.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow Y$  una sobreyección propia y confluyente. Por el Teorema IV.6.8  $f^+ : S^1 \cong \mathbb{R}^+ \rightarrow Y^+$  es confluyente, entonces  $Y^+$  es homeomorfo a  $S^1$  o al intervalo  $[0, 1]$  por ([59]; 13.31). En el primer caso  $Y = Y^+ - \{\infty\} \cong \mathbb{R}$ . En el segundo caso, como  $Y = Y^+ - \{\infty\}$  es conexo, entonces  $\infty$  es uno de los extremos de  $Y^+$ , y así  $Y \cong \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Si reemplazamos  $\mathbb{R}$  por la semirecta  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ , entonces  $Y^+ \cong [0, 1]$  es ahora homeomorfo a un arco ([59]; 13.31) y como antes  $Y \cong \mathbb{R}_{\geq 0}$ .  $\square$





## Parte B

Nuevos resultados en la  
topología algebraico-geométrica  
de los continuos generalizados



# Sobre la topología de los continuos de Peano localmente 2-conexos

---

Recientemente C. Thomassen ([74] y [75]) ha obtenido una serie de interesantes resultados sobre continuos de Peano con alta conexión local. Las demostraciones originales no reparan en la íntima conexión de esos resultados con potentes teoremas clásicos debidos a K. Kuratowski, S. Claytor y K. Borsuk. En este capítulo nos aproximamos a los teoremas de Thomassen desde este enfoque alternativo y los generalizamos al caso no compacto.

## §V.1. Enunciado de los teoremas principales

En este capítulo damos demostraciones puramente topológicas de los dos siguientes teoremas<sup>1</sup> que generalizan los resultados en [75].

**Teorema V.1.1.** *Sea  $X$  un continuo generalizado de Peano 2-conexo y localmente plano. Entonces  $X$  es un subconjunto cerrado de una superficie  $M_X$  cuyo borde  $\partial M_X = \bigsqcup_{i \in I} \mathbb{R}$  consiste en una sucesión (posiblemente vacía o finita) de copias de la recta euclídea. Además, la inclusión  $i : X \subset M_X$  es fiel en los finales. En el caso particular de que  $X$  sea compacto la superficie  $M_X$  es cerrada (esto es, compacta y sin bordes).*

---

<sup>1</sup>La terminología aún no definida se dará en las secciones posteriores.



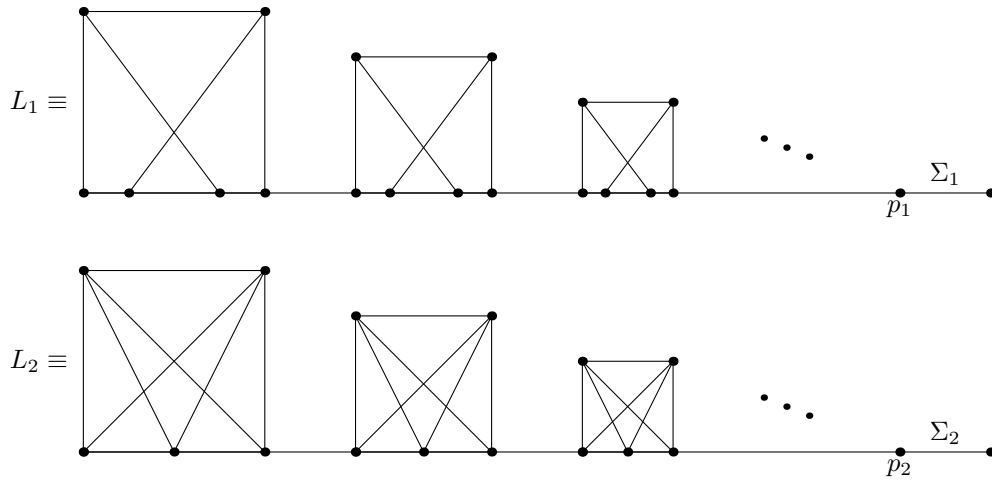


Figura V.2: Curvas de Claytor  $L_1$  y  $L_2$ .

que todo grafo completo infinito contiene las curvas  $L_1$  y  $L_2$  (Nota V.6.4), el Teorema V.1.3 pone de manifiesto que las curvas de Claytor son las configuraciones prohibidas mínimas que caracterizan la planaridad local de un continuo de Peano localmente 2-conexo. Usaremos también las curvas de Claytor para mostrar que no es cierta un conjetura de Thomassen sobre la caracterización de la planaridad de los continuos de Peano; ver el final de la Sección §V.3.

## §V.2. Continuos de Peano localmente 2-conexos

Comenzamos con la siguiente

**Definición V.2.1.** Un espacio  $X$  se dice *2-conexo* si ningún punto separa  $X$ . Más generalmente, un espacio  $X$  se dice *n-conexo* si ningún conjunto con a lo más  $n - 1$  puntos separa  $X$ . Por un *espacio  $\omega$ -conexo* queremos decir un espacio que es  $n$ -conexo para todo  $n \geq 1$ .

La correspondiente versión local de 2-conexión es clara.

**Definición V.2.2.** Un espacio  $X$  se denomina *localmente 2-conexo* si para cada  $x \in X$  y cualquier entorno  $U$  de  $x$  existe otro entorno  $V \subset U$  tal que  $V - \{x\}$  es conexo.

El siguiente lema nos muestra que la 2-conexión local implica de hecho la  $\omega$ -conectividad.

**Lema V.2.3.** *Sea  $X$  un continuo generalizado de Peano localmente 2-conexo. Entonces cualquier conjunto conexo abierto  $U \subset X$  es  $\omega$ -conexo. Más aún, si la clausura  $\bar{U}$  es localmente conexa (es decir,  $\bar{U}$  es un continuo generalizado de Peano) entonces  $\bar{U}$  es también  $\omega$ -conexo.*

**Demostración.** El abierto  $U$  es un continuo generalizado de Peano y por tanto es arcoconexo (Nota II.1.1); esto es,  $U$  es 1-conexo. Supongamos por inducción que  $U$  es  $n$ -conexo, y dados  $x, y \in U$  sea  $A = \{a_1 \dots a_n\} \subset U - \{x, y\}$ . Por la hipótesis de inducción existe al menos un arco  $\gamma \subset U$  que une  $x$  a  $y$  tal que  $\gamma \cap A$  contiene a lo más a  $a_n$ . Si  $a_n \in \gamma$  entonces escogemos un entorno 2-conexo de  $a_n$ ,  $V \subset U$ , tal que  $(A \cup \{x, y\}) \cap V = \{a_n\}$  y modificamos  $\gamma$  dentro de  $V$  para obtener un nuevo arco  $\gamma'$  con  $\gamma' \cap A = \emptyset$ .

Supongamos que  $\bar{U}$  es localmente conexo. Dados  $x_1, x_2 \in \bar{U}$  y un conjunto  $S \subset \bar{U} - \{x_1, x_2\}$  que consiste en  $n$  puntos ( $n \geq 1$ ), usamos la conexión local para encontrar pequeños entornos abiertos y arcoconexos  $W_1$  y  $W_2$  de  $x_1$  y  $x_2$ , respectivamente, en  $\bar{U}$  con  $(W_1 \cup W_2) \cap S = \emptyset$ . Entonces escogemos  $y_1 \in U \cap W_1$  e  $y_2 \in U \cap W_2$  y aplicamos la primera parte del lema a  $U$  para obtener un arco  $\gamma \subset U - S$  que une  $y_1$  a  $y_2$ . Fácilmente encontramos un arco en  $\gamma \cup W_1 \cup W_2 \subset \bar{U}$  que una  $x_1$  a  $x_2$  y evita a  $S$ .  $\square$

**Lema V.2.4.** *Sea  $X$  un continuo generalizado de Peano localmente 2-conexo y sea  $U$  un entorno abierto de un continuo  $C \subset X$ . Entonces existe un entorno  $V \subset U$  de  $C$  que es un continuo de Peano  $\omega$ -conexo y cuyo interior es conexo y por tanto un continuo generalizado de Peano localmente 2-conexo.*

**Demostración.** De acuerdo con el Lema IV.2.5 podemos encontrar un entorno abierto  $W \supset C$  tal que  $C \subset W \subset \bar{W} \subset U$  y tal que  $\bar{W}$  es un subcontinuo de Peano de  $X$ . Entonces por el Lema V.2.3 concluimos que  $V = \bar{W}$  cumple las condiciones requeridas.  $\square$

Con el fin de simplificar la escritura establecemos la siguiente

**Definición V.2.5.** Por un  $\omega$ -entorno de un subconjunto  $A$  entendemos un continuo de Peano  $\omega$ -conexo  $V$  cuyo interior es un conjunto abierto y conexo

(es decir, un continuo generalizado de Peano localmente 2-conexo) que contiene a  $A$ .

El Lema V.2.4 lleva a

**Corolario V.2.6.** *Cualquier subcontinuo de un continuo generalizado de Peano localmente 2-conexo admite un base de entornos formada por  $\omega$ -entornos.*

Concerniente a la  $n$ -conexión, G. Nöbeling [61] y L. Zippin [84] extendieron un teorema clásico de K. Menger para grafos a continuos y continuos generalizados respectivamente. Explícitamente,

**Teorema V.2.7** ([84]; Principal Theorem, pág. 96). *Sea  $X$  un continuo generalizado de Peano  $n$ -conexo. Dados dos puntos cualesquiera  $p, q \in X$ , existen  $n$  arcos independientes en  $X$  que van desde  $p$  a  $q$  (es decir, los arcos son disjuntos dos a dos excepto en  $\{p, q\}$ ).*

Finalizamos esta sección con el enunciado del siguiente lema consecuencia del teorema de Nöbeling-Zippin anterior.

**Lema V.2.8** ([84], pág. 112). *Para cualquier  $n \geq 1$  sean  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  y  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  dos conjuntos disjuntos en un continuo generalizado de Peano  $\omega$ -conexo  $X$ . Entonces existen  $n$  arcos independientes  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  que conectan todos los puntos en  $A$  con todos los puntos en  $B$ ; esto es, los arcos son disjuntos dos a dos y sus extremos caen en  $A \cup B$ . Es más, dado cualquier  $x \in X - B$  existen  $n$  arcos independientes desde  $x$  a  $B$ .*

## §V.3. Planaridad de los continuos de Peano localmente 2-conexos

Esta sección reúne algunos resultados y observaciones relativos a la planaridad de los continuos (generalizados) de Peano. Comenzamos resaltando que un resultado reciente debido a Thomassen [74] que caracteriza la planaridad de los continuos de Peano localmente 2-conexos es una consecuencia inmediata de un antiguo teorema debido a Claytor [17]; compárese con ([64]; 1.2).

Aquí demostramos este hecho directamente para continuos generalizados de Peano. Para esto usaremos la siguiente extensión del teorema de Claytor.

**Teorema V.3.1** ([4]; 1.1). *Sea  $X$  un continuo generalizado de Peano. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (1)  $X$  se sumerge en  $S^2$  (o equivalentemente en  $\mathbb{R}^2$  si  $X \neq S^2$ ).
- (2) Cualquier subcontinuo  $K \subset X$  se sumerge en  $S^2$ .
- (3)  $X$  no contiene ningún conjunto homeomorfo a  $K_5, K_{3,3}, L_1, L_2$ .
- (4) La compactificación de Freudenthal  $\widehat{X}$  se sumerge en  $S^2$ .

Como señaló el mismo Claytor ([17]; Thm. C) las curvas  $L_1$  y  $L_2$  son redundantes si  $X$  es 2-conexo. Más precisamente, el punto límite  $p_i \in L_i$  en la Figura V.2 no separa  $L_i$  en  $X$  y se puede encontrar un arco  $\gamma_i \subset X - \{p_i\}$  desde un punto  $x_i \in \Sigma_i$  a un punto  $y_i \in L_i - \Sigma_i$ . Las uniones  $L_1 \cup \gamma_1$  y  $L_2 \cup \gamma_2$  contienen una copia de  $K_{3,3}$  y  $K_5$ , respectivamente. En efecto, puesto que  $p_i \notin \gamma_i$  existe un entorno  $U_i \subset L_i$  de  $p_i$  con  $U_i \cap \gamma_i = \emptyset$ . Entonces la unión de un pequeño "bloque"  $B_i \subset U_i$  con los arcos  $[y_i, x_i] \subset L_i$  y  $\gamma_i$  es  $K_{3,3}$  ó  $K_5$ ; ver Figura V.3.

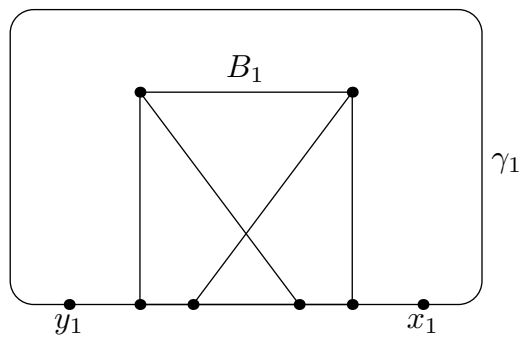


Figura V.3:  $K_{3,3} = B_1 \cup [y_1, x_1] \cup \gamma_1$ .

De esta manera se sigue como una consecuencia directa del Teorema V.3.1 la siguiente extensión de ([74]; Thm. 4.3)

**Teorema V.3.2** (c.f. ([74]; Thm. 4.3)). *Un continuo generalizado de Peano localmente 2-conexo se sumerge en la 2-esfera si y sólo si  $X$  no contiene a ninguno de los grafos de Kuratowski  $K_5$  y  $K_{3,3}$ .*



**Nota V.3.3.** Merece la pena mencionar que anteriormente a su teorema general, Claytor dió en [18] una larga y algo engorrosa demostración del caso especial cuando  $X$  es 2-conexo. Ver [58] para una demostración corta de este caso especial; y por tanto una demostración alternativa más al Teorema de Thomassen en ([74]; 4.3).

Seguidamente resaltamos que las curvas no planas  $L_1$  y  $L_2$  dadas por el Teorema de Claytor son contraejemplos a la siguiente afirmación sugerida por Thomassen en [74] como posible teorema.

**Afirmación V.3.4** ([74]; 4.5). *Un espacio  $X$  conexo, localmente conexo, compacto y metrizable (esto es, un continuo de Peano)  $X$  se sumerge en la 2-esfera si y sólo si  $X$  no contiene a ninguno de los grafos de Kuratowski  $K_{3,3}$  y  $K_5$  y a ninguna tachuela con agujeros.*

En [74] por una *tachuela con agujeros* se entiende la unión  $D' = D \cup \Gamma$  de un subespacio de la 2-esfera  $D \subset S^2$  compacto, localmente conexo y esencialmente 3-conexo junto con un arco  $\Gamma$ . Más aún, la intersección  $D \cap \Gamma = \{q\}$  se reduce a un extremo de  $\Gamma$  y  $q$  no cae en la frontera de las caras de  $D$  en el sentido de [74]; esto es, las componentes del complemento  $S^2 - D$ .

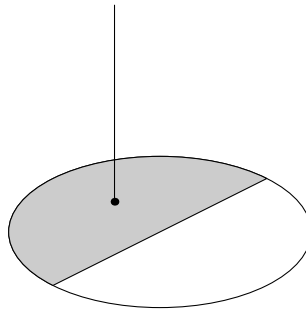


Figura V.4: *Tachuela con agujeros*

Recordemos un espacio  $D$  se dice que es *esencialmente 3-conexo* si para cualesquiera elementos  $x, y \in D$  la diferencia  $D - \{x, y\}$  es conexa o tiene precisamente dos componentes, uno de los cuales es un arco desde  $x$  a  $y$ . Notemos que una inmersión de  $D$  en  $S^2$  es única por ([64]; Thm. 2).

Es inmediato comprobar que las curvas de Claytor  $L_i$  no contienen una copia de  $K_{3,3}$  ó  $K_5$ . A continuación veremos que tampoco contienen una ta-

chuela sin agujeros, y así la Afirmación V.3.4, tal y como se enuncia, no se tiene para  $L_i$ . En efecto, cualquier subespacio  $D \subset L_i$  esencialmente 3-conexo es necesariamente 2-conexo y así, está contenido en un “bloque”  $B \subset L_i$ . Esto sigue directamente del hecho de que cada punto en el arco une dos bloques consecutivos de  $L_i$  es un punto de corte de  $L_i$ . Por consiguiente  $D$  es un grafo por ([59]; 9.10.1). Por lo tanto cualquier unión  $D' = D \cup \Gamma \subset B \cup \Gamma$  de  $D$  con un arco  $\Gamma$  tal que  $D \cap \Gamma$  es un extremo de  $\Gamma$  es un grafo plano. Por lo tanto  $D'$  no puede ser una tachuela.

**Nota V.3.5.** Mencionamos aquí que S. Mardešić y J. Segal demostraron en ([54], Thm. 1) que un poliedro  $P$  contiene una curva de Claytor  $L_i$  si y sólo si contiene una copia del subespacio  $F_2 \subset \mathbb{R}^3$  llamado *disco con antena*

$$F_2 = \{(x, y, 0); x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(0, 0, z); 0 \leq z \leq 1\}.$$

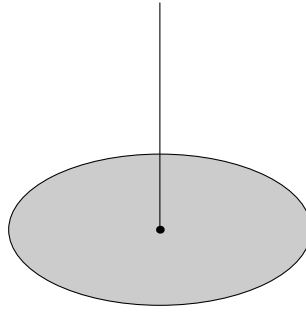


Figura V.5: *Disco con antena*

Por lo tanto un poliedro  $P$  es plano si y sólo si  $P$  no contiene ninguno de los grafos de  $K_{3,3}$ ,  $K_5$  y ningún disco con antena. Notemos que  $F_2$  es una tachuela sin agujeros.

Es bien conocido que los grafos  $K_{3,3}$  y  $K_5$  no juegan el mismo papel en el criterio de planaridad de Kuratowski-Claytor para los continuos de Peano del Teorema V.3.1. De hecho cualquier inmersión  $K_5 \subset G$  en un continuo (generalizado) de Peano 3-conexo da lugar a una inmersión  $K_{3,3} \subset G$  ([36]) y así  $K_{3,3}$  es suficiente para caracterizar la planaridad en la clase de los continuos de Peano 3-conexos. Seguidamente probamos que los papeles de  $K_{3,3}$  y  $K_5$  resultan ser equivalentes bajo la asunción de 2-conexión local.

**Proposición V.3.6.** *Sea  $X$  un continuo generalizado de Peano localmente 2-conexo. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (a)  $X$  no es plano.
- (b) Existe una inmersión  $K_{3,3} \subset X$ .
- (c) Existe una inmersión  $K_5 \subset X$ .

**Lema V.3.7.** *Sea  $K_{3,3} \subset X$  un grafo bipartito con vértices  $\{a_1, a_2, a_3\}$  y  $\{b_1, b_2, b_3\}$  en un continuo generalizado de Peano localmente 2-conexo  $X$ . Supongamos que existen dos arcos distintos  $\alpha, \beta \subset X$  tales que  $(\alpha \cup \beta) \cap K_{3,3} = \{p_1, p_2, q_1, q_2\}$  y  $\alpha$  corre entre  $p_1 \in (a_1, b_3)$  y  $p_2 \in (a_2, b_3)$  y  $\beta$  corre entre  $q_1 \in (b_1, a_3)$  y  $q_2 \in (b_2, a_3)$ . Entonces existe una inmersión  $K_5 \subset X$ .*

**Demostración.** Aplicamos el Corolario V.2.6 para obtener  $\omega$ -entornos disjuntos en  $X$   $A_1, A_2, B_1, B_2$  de las aristas  $[a_1, p_1], [a_2, p_2], [b_1, q_1]$  y  $[b_2, q_2]$ , respectivamente. Sean  $s_0^i, s_j^i \in A_i$  ( $1 \leq j \leq 3$ ) los últimos puntos en las intersecciones  $\alpha \cap A_i$  y  $[a_i, b_j] \cap A_i$ , respectivamente. De manera similar, sean  $t_0^i, t_j^i \in B_i$  ( $1 \leq j \leq 3$ ) los últimos puntos en  $\beta \cap B_i$  y  $[a_i, b_j] \cap B_i$ , respectivamente. Como  $A_i$  y  $B_i$  son  $\omega$ -conexos, el Lema V.2.8 nos permite encontrar cuatro arcos independientes  $\sigma_j^i \subset A_i$  ( $0 \leq j \leq 3$  y  $i = 1, 2$ ) que conectan un punto  $\tilde{a}_i \in \text{int}A_i$  a  $s_j^i$ . De manera similar escogemos cuatro arcos independientes  $\tau_j^i \subset B_i$  que unan un punto  $\tilde{b}_i \in \text{int}B_i$  a  $t_j^i$ .

Aplicamos otra vez el Corolario V.2.6 para obtener un  $\omega$ -entorno  $\Omega \subset X$  de la arista  $[a_3, b_3]$  evitando la unión  $\alpha \cup \beta \cup (\bigcup_{i,j=1,2} [a_i, b_j])$ . Sean  $\rho_{a_i}, \rho_{b_i} \subset \Omega$  ( $i = 1, 2$ ) cuatro arcos independientes que unan un punto  $v \in \text{int}\Omega$  a los últimos puntos en las intersecciones  $\Omega \cap [a_i, b_j]$  y  $\Omega \cap [b_i, a_3]$  respectivamente. Ahora es fácil encontrar una copia de  $K_5$ , con vértices  $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i$  ( $i = 1, 2$ ) y  $v$ , en la unión  $\Omega \cup (\bigcup_{i=1}^2 (A_i \cup B_i)) \cup K_{3,3}$ .  $\square$

**Demostración de la Proposición V.3.6.** (a)  $\implies$  (b) Fue observado antes del enunciado del teorema. Más aún (c)  $\implies$  (a) es obvio. Queda comprobar (b)  $\implies$  (c). Sea  $L \subset X$  un grafo bipartito con vértices  $\{a_1, a_2, a_3\}$  y  $\{b_1, b_2, b_3\}$ . Será suficiente encontrar dos arcos  $\alpha$  y  $\beta$  bajo las condiciones del Lema V.3.7. Para esto procedemos como sigue. Sean  $\Omega_{a_3}$  y  $\Omega_{b_3}$   $\omega$ -entornos disjuntos de  $a_3$

y  $b_3$ , respectivamente, que eviten la unión  $\bigcup_{i,j=1,2}[a_i, b_j]$ . Aquí usamos el Corolario V.2.6. Sean  $a_3^i \in \Omega_{a_3}$  y  $b_3^i \in \Omega_{b_3}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) los últimos puntos en las intersecciones  $[a_3, b_i] \cap \Omega_{a_3}$  y  $[a_i, b_3] \cap \Omega_{b_3}$  respectivamente. Como  $\text{int}\Omega_{a_3}$  e  $\text{int}\Omega_{b_3}$  son localmente 2-conexos, y por tanto  $\omega$ -conexos (Lema V.2.3), el Teorema V.2.7 proporciona circunferencias  $\Sigma_{a_3} \subset \text{int}\Omega_{a_3}$  y  $\Sigma_{b_3} \subset \text{int}\Omega_{b_3}$ . Entonces unimos los puntos  $a_3^i$  a  $\Sigma_{a_3}$  por tres arcos disjuntos  $\gamma_{a_3}^i \subset \Omega_{a_3}$ . Aquí aplicamos el Lema V.2.8. De forma similar, los puntos  $b_3^i$  se unen a  $\Sigma_{b_3}$  por tres arcos disjuntos  $\gamma_{b_3}^i \subset \Omega_{b_3}$ . Ahora no es difícil localizar una nueva copia  $\tilde{L}$  de  $K_{3,3}$  en  $L \cup (\bigcup_{i=1,2} \gamma_{b_3}^i) \cup (\bigcup_{i=1,2} \gamma_{a_3}^i) \cup \Sigma_{a_3} \cup \Sigma_{b_3}$  tal que  $\tilde{L}$  admite dos arcos  $\alpha \subset \Sigma_{b_3}$  y  $\beta \subset \Sigma_{a_3}$  bajo las condiciones del Lema V.3.7 y la demostración queda completada.  $\square$

**Conjetura V.3.8.** En [3] se da una caracterización de los continuos generalizados de Peano que son sumergibles como conjuntos cerrados en  $\mathbb{R}^2$  (es decir, sin puntos de acumulación) usando los grafos de R. Halin. Parece viable un resultado similar a la Proposición V.3.6 de forma que los continuos generalizados de Peano localmente 2-conexos que admitan una inmersión plana cerrada quedarían caracterizados por un par de grafos prohibidos que consistan en un grafo de Kuratowski y un grafo de Halin.

## §V.4.    La estructura de los continuos generalizados de Peano localmente planos y localmente 2-conexos.

Esta sección proporciona una demostración alternativa del resultado de Thomassen en [75] que establece que un entorno típico en un continuo (generalizado) de Peano  $X$  localmente plano y localmente 2-conexo es topológicamente equivalente a una 2-esfera de la que han sido borrados los interiores de una sucesión de discos disjuntos dos a dos de diámetros decrecientes. Las circunferencias que bordean estos discos serán esenciales en las demostraciones de los resultados más importantes del capítulo que presentamos en la siguiente sección.

Recordemos que un espacio  $X$  se dice que es *localmente plano* si cada punto

$x \in X$  admite un entorno plano, y por tanto una base de entornos de conjuntos planos. El siguiente lema es una consecuencia inmediata del Corolario V.2.6.

**Lema V.4.1.** *Sea  $X$  un continuo generalizado de Peano localmente plano y localmente 2-conexo. Cada punto  $x \in X$  admite una base numerable de entornos  $\mathcal{B}_x = \{C_i^x\}_{i \geq 1}$  que consiste en  $\omega$ -entornos planos.*

Como una consecuencia de ([45]; Thm. 4(ii), pág. 512) dada cualquier inmersión  $\varphi : C_i^x \rightarrow S^2$  de  $C_i^x \in \mathcal{B}_x$ , cada componente  $R \subset S^2 - \varphi(C_i^x)$  es un disco abierto cuya frontera  $\text{Fr}R$  es su circunferencia borde. Esta observación nos lleva a la siguiente

**Definición V.4.2.** Una *carta* de  $X$  en  $x \in X$  es un par  $(C_i^x, \varphi)$  donde  $C_i^x$  es un  $\omega$ -entorno plano de  $x$  y  $\varphi : C_i^x \rightarrow S^2$  es una inmersión. Un punto  $x \in X$  se dice que es *terminal* si existe una carta  $(C_i^z, \varphi)$  para algún  $z \in X$  tal que  $x \in \text{int}C_i^z$  y  $\varphi(x) \in \text{Fr}R$  cae en la frontera de una componente  $R \subset S^2 - \varphi(C_i^z)$ .

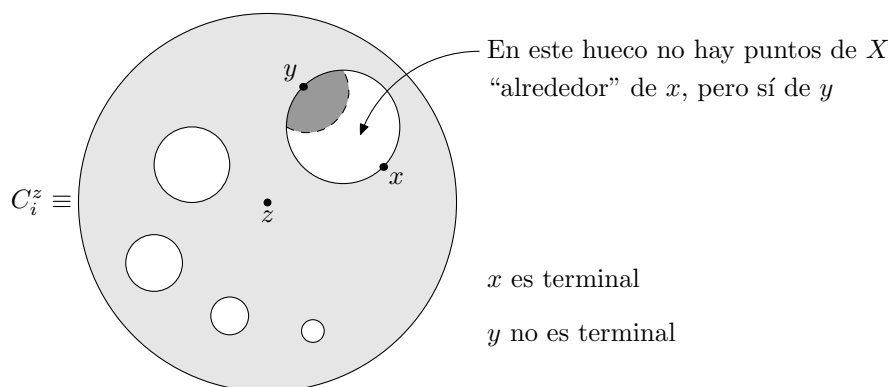


Figura V.6: *Puntos terminales y no terminales.*

Para comprobar que los puntos terminales en la Definición V.4.2 están bien definidos podríamos usar un teorema reciente de Thomassen ([64]; Thm. 2), que muestra que los continuos de Peano planos y 3-conexos admiten una única inmersión en  $S^2$  para garantizar que la definición de punto terminal no depende de la carta usada en su definición. Merece la pena remarcar que ese resultado de Thomassen ya estaba incluido en un antiguo artículo de V. W. Adkisson ([1]; Thm. II). De cualquier forma, en aras de la completitud, seguidamente presentamos una demostración independiente de este hecho en la Proposición

V.4.7 más adelante así como de otras propiedades de las cartas. Comenzamos con el siguiente

**Lema V.4.3.** *Sea  $U \subset S^2$  un subespacio localmente 2-conexo para el que existe una circunferencia  $S$  tal que  $U \cap S = (s, t)$  es un arco abierto y  $U$  evita una de las componentes de  $S^2 - S$ . Entonces  $U - S$  es (arco) conexo.*

**Demostración.** Dados  $a, b \in U - S$  sea  $\rho \subset U$  un arco que corre desde  $a$  a  $b$ , y sea  $a_0, b_0 \in U$  el primer y último punto en  $\rho \cap S \neq \emptyset$  (si es vacío, no hay nada que probar). Elegimos un arco  $[p, q] \subset (s, t)$  que contiene en su interior el arco  $[a_0, b_0]$  (posiblemente  $a_0 = b_0$ ). Sea  $W \subset U$  un abierto conexo tal que  $[p, q] \subset W$  y  $a, b \notin W$ . Por el Lema V.2.3  $W$  es  $\omega$ -conexo y también lo es  $W - \{w\}$  para cualquier punto  $w \in (a_0, b_0)$  (posiblemente  $w = a_0 = b_0$  si  $a_0 = b_0$ ). Por el Teorema V.2.7 encontramos dos arcos independientes  $\gamma_1, \gamma_2 \subset W$  desde  $p$  a  $q$  (es decir,  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{p, q\}$ ) que evitan  $w$ . Sea  $x_1^i \in \gamma_i$  el último punto de  $\gamma_i$  en el arco abierto  $(s, w)$  y  $x_2^i \in \gamma_i$  el primer punto después de  $x_1^i$  en  $(w, t)$ . Una comprobación sencilla muestra que el Teorema de Jordan excluye los casos  $x_1^1, x_2^1 \in (p, w)$  y  $x_2^1, x_2^2 \in (w, q)$ . Por lo tanto  $x_1^i \geq p$  ó  $x_2^i \geq q$  para algún  $i = 1, 2$ . Sea  $\Gamma \subset \gamma_i \subset W$  el subarco que corre desde  $x_1^i$  a  $x_2^i$ . Como  $a, b \notin W$  se usa otra vez el Teorema de Jordan para garantizar que  $\rho \cap \Gamma \neq \emptyset$  y fácilmente se encuentra un arco en  $\rho \cup \Gamma \subset U$  que une  $a$  con  $b$  fuera de  $S$ .  $\square$

Más adelante usaremos las siguientes propiedades básicas de las cartas.

**Lema V.4.4.** *Dada una carta  $(C_i^x, \varphi)$ , las componentes  $R_n \subset S^2 - \varphi(C_i^x)$  son numerables; en particular,  $\text{diám}(R_n) \rightarrow 0$  y  $\text{diám}(\text{Fr}R_n) \rightarrow 0$  si hay un número infinito de componentes distintas.*

**Demostración.** Es consecuencia de ([45]; Thm. 6, pág. 231) y ([45]; Thm. 10, pág. 515).  $\square$

**Lema V.4.5.** *Para cualesquiera carta  $(C_i^x, \varphi)$  y componentes  $R_1, R_2 \subset S^2 - \varphi(C_i^x)$ , la intersección  $\varphi^{-1}(\text{Fr}R_1 \cap \text{Fr}R_2) \cap \text{int}C_i^x$  es vacía si  $\text{Fr}R_1 \neq \text{Fr}R_2$ .*

**Demostración.** Supongamos lo contrario; es decir, que existe  $z \in \text{Fr}R_1 \cap \text{Fr}R_2$  tal que  $\varphi^{-1}(z)$  es un punto interior en  $C_i^x$ . Sea  $L_i \subset R_i \cup \{z\}$  un arco tal que  $z \in L_i$ . Aquí usamos que  $R_i \cup \text{Fr}R_i$  es un disco cerrado.

Consideremos un pequeño disco cerrado  $D \subset S^2$  alrededor de  $z$  y un subarco  $L \subset L_1 \cup L_2$  con  $\partial L = \partial D \cap L$ . Sean  $E_1$  y  $E_2$  las dos componentes de  $D - L$ . En ambas componentes existen sucesiones de puntos de  $\varphi(C_i^x)$  que convergen a  $z$ . En efecto, de otra forma  $L_1$  y  $L_2$  quedarían unidos por arcos que no cortarían las fronteras  $\text{Fr}K_1 \cup \text{Fr}K_2$ .

Por otro lado, como el interior  $U = \text{int}C_i^x$  es un entorno localmente 2-conexo de  $\varphi^{-1}(z)$ , podemos encontrar un entorno 2-conexo de  $z$   $W \subset U \cap \varphi^{-1}(D)$  y puntos  $p_i \in W \cap \varphi^{-1}(E_i)$  que se pueden unir por un arco  $\Gamma \subset W - \{z\}$ . Entonces,  $\varphi(U) \cap L \neq \emptyset$  por el Teorema de Jordan, lo que contradice que  $\varphi(U) \cap (L - \{z\}) = \emptyset$  por construcción.

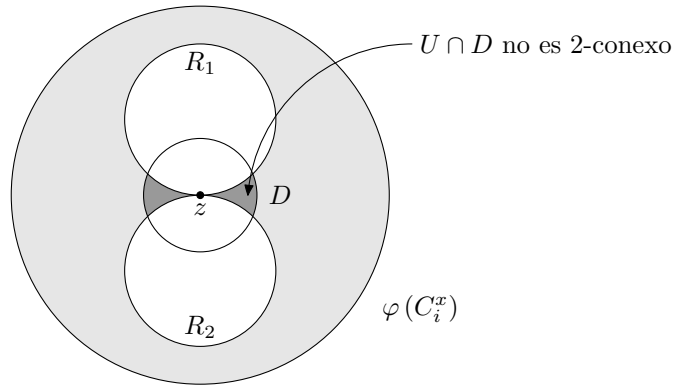


Figura V.7

□

**Lema V.4.6.** Sean  $(C_i^x, \varphi)$  y  $(C_j^y, \psi)$  dos cartas en un continuo generalizado de Peano localmente plano y localmente 2-conexo. Supongamos que  $z \in \text{int}C_i^x \cap \text{int}C_j^y$  es un punto tal que  $\varphi(z) \in \text{Fr}R$  para alguna componente  $R \subset S^2 - \varphi(C_i^x)$ . Entonces existe una componente  $R' \subset S^2 - \psi(C_j^y)$  con  $\psi(z) \in \text{Fr}R'$ .

**Demostración.** Sea  $C_k^z \subset \text{int}C_i^x \cap \text{int}C_j^y$  un  $\omega$ -entorno plano de  $z$ . Como  $S^2 - \varphi(C_i^x) \subset S^2 - \varphi(C_k^z)$  sea  $R' \subset S^2 - \varphi(C_k^z)$  una componente que contiene  $R$ . En consecuencia  $\varphi(z) \in \overline{R} \subset \overline{R}'$ , y así  $\varphi(z) \in \text{Fr}R'$ .

Seguidamente tomamos un entorno abierto conexo  $U \subset C_k^z$  de  $z$  tal que  $U \cap S$  es un arco abierto donde  $S = \varphi^{-1}(\text{Fr}R')$ . Por el Lema V.4.3,  $U - S$  es

conexo y por tanto  $\psi(U) - \psi(S)$  también lo es y está contenido en una de las dos componentes de  $S^2 - \psi(S) = R_1 \sqcup R_2$ , digamos  $\psi(U - S) \subset R_1$ .

Ahora probamos que  $\psi(z)$  pertenece a la clausura de una componente  $R_0 \subset S^2 - \psi(C_j^y)$  con  $R_0 \subset R_2$ , luego  $\psi(z) \in \text{Fr}R_0$  y el lema queda demostrado. En efecto, como  $\psi(z) \in \psi(S) = \text{Fr}R_2$  existe una sucesión  $x_n \in R_2$  que converge a  $\psi(z)$ . Esta sucesión cae eventualmente fuera de  $\psi(C_j^y)$  pues de lo contrario, como  $U$  es un entorno de  $z$ , existiría una subsucesión de  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  contenida en  $\psi(U - S) \subset R_1$ . Así  $x_n \in R_2 - \psi(C_j^y)$  para  $n$  suficientemente grande. Entonces consideramos las componentes  $R'_n \subset S^2 - \psi(C_j^y) \subset S^2 - \psi(S)$  con  $x_n \in R'_n$ . Notemos que  $R'_n \subset R_2$  pues  $x_n \in R_2$ . Afirmamos que la familia  $\mathcal{R} = \{R'_n\}_{n \geq 1}$  es finita. En efecto, si suponemos que  $\mathcal{R}$  es infinita, el Lema V.4.4 implica que  $\text{diám}(R'_n) \rightarrow 0$  y así  $\text{diám}(\text{Fr}R'_n) \rightarrow 0$ . Como  $U$  es un entorno de  $z$  existe algún  $n_0$  tal que  $\text{Fr}R'_n \subset \psi(U)$  si  $n \geq n_0$ . En consecuencia  $\text{Fr}R'_n \subset \psi(U) \cap \overline{R_2} \subset \psi(S)$  para todo  $n \geq n_0$  lo que es imposible ya que cada  $\text{Fr}R'_n$  al igual que  $\psi(S)$  son circunferencias. Así  $\mathcal{R}$  es necesariamente finita y existe  $R_0 \in \mathcal{R}$  que contiene una subsucesión de  $\{x_n\}_{n \geq 1}$ . Luego  $\psi(z) \in \overline{R_0}$ .  $\square$

Como una consecuencia inmediata del Lema V.4.6 se obtiene

**Proposición V.4.7.** *La definición de un punto terminal no depende de la elección de las cartas.*

Gracias a la Proposición V.4.7 tenemos un conjunto bien definido  $\mathcal{T} \subset X$  formado por todos los puntos terminales de  $X$ . Llamaremos a  $\mathcal{T}$  el *conjunto terminal* de  $X$ . Por un *arco (abierto) o circunferencia terminal* entendemos un arco (abierto) o circunferencia contenida en  $\mathcal{T}$ .

Observemos que el Lema V.4.5 y la independencia de las cartas en la definición de punto terminal (V.4.7) muestran que dado cualquier  $\omega$ -entorno plano  $C_i^x$  y cualquier punto terminal  $t \in \mathcal{T} \cap \text{int}C_i^x$  existe una única circunferencia  $S_t^{(x,i)} \subset C_i^x$  tal que  $t \in S_t^{(x,i)}$  y  $\varphi(S_t^{(x,i)})$  es la frontera de una componente de  $S^2 - \varphi(C_i^x)$  para cualquier inmersión  $\varphi : C_i^x \rightarrow S^2$ . Llamamos a  $S_t^{(x,i)}$  *circunferencia característica* de  $t$  en  $C_i^x$ . Obsérvese que no todos los puntos de  $S_t^{(x,i)}$  deben ser terminales.

**Lema V.4.8.** *Si  $(C_i^x, \varphi)$  es una carta y  $z \in C_i^x$  es el punto límite de una*



sucesión  $z_n \in \varphi^{-1}(\text{Fr}R_n) - \mathcal{T}$  de puntos no terminales situados en la frontera de componentes  $R_n \subset S^2 - \varphi(C_i^x)$ , entonces  $z \notin \text{int}C_i^x$ .

**Demostración.** En caso contrario existiría un  $n_0$  tal que  $z_n \in \text{int}C_i^x$  si  $n \geq n_0$ . Pero esto indica que  $z_n$  debería ser un punto terminal al estar sobre el borde de una componente de  $S^2 - \varphi(C_i^x)$ .  $\square$

**Lema V.4.9.** *Cualquier  $z \in \mathcal{T} \cap \text{int}C_i^x$  cae en un arco abierto contenido en  $\mathcal{T} \cap S_z^{(x,i)}$ . Es más, cualquier arco (abierto)  $\Gamma \subset \mathcal{T} \cap \text{int}C_i^x$  es parte de la circunferencia característica  $S_z^{(x,i)}$  de algún  $z \in \mathcal{T}$ .*

**Demostración.** Cada  $z \in \text{int}C_i^x \cap \mathcal{T}$  es un punto interior en la circunferencia característica  $S_z^{(x,i)}$  y por lo tanto existe un arco abierto  $\Gamma \subset \text{int}C_i^x \cap S_z^{(x,i)}$ , y todos los puntos de  $\Gamma$  son terminales por definición.

Cualquier arco  $\Gamma \subset \mathcal{T} \cap \text{int}C_i^x$  se puede expresar como una unión disjunta  $\Gamma = \bigsqcup_{p \in \Gamma} (S_p^{(x,i)} \cap \Gamma)$ . Entonces existe sólo una  $S_{p_0}^{(x,i)}$  con  $\Gamma \subset S_{p_0}^{(x,i)}$  pues de otra forma podríamos expresar el continuo  $\Gamma$  como la unión disjunta de una familia numerable de cerrados, lo que contradice ([45]; Thm. 6, pág. 173). Si  $\Gamma$  es un arco abierto, razonamos tal y como lo hicimos anteriormente para cada arco en una sucesión creciente de arcos  $\Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_n \subset \dots$  recubriendo a  $\Gamma$ .  $\square$

**Definición V.4.10.** Un *trioide* es la unión de tres arcos  $[a, b]$ ,  $[a, c]$ ,  $[a, d]$  que dos a dos únicamente tienen en común el punto  $a$ .

**Proposición V.4.11.** *El conjunto terminal  $\mathcal{T}$  no contiene un trioide.*

**Demostración.** Si  $A = [a, b] \cup [a, c] \cup [a, d] \subset \mathcal{T}$  es un trioide entonces cualquier  $\omega$ -entorno plano  $C_i^a$  contiene un trioide  $A' \subset A$  en su interior y por el Lema V.4.9  $A'$  está contenido en la circunferencia característica  $S_a^{(x,i)}$  lo cual es una contradicción.  $\square$

La proposición anterior nos permite determinar la naturaleza topológica del conjunto terminal  $\mathcal{T}$ . Concretamente,

**Proposición V.4.12.** *Cada componente arcoconexa de  $\mathcal{T}$  es una circunferencia o un arco abierto terminal que es un conjunto cerrado de  $X$ .*

**Demostración.** Sea  $C \subset \mathcal{T}$  una componente arcoconexa de  $\mathcal{T}$ . El Lema V.4.9 implica que si  $z \in C \cap \text{int}C_i^x$ , entonces  $C$  contiene un arco abierto  $\Gamma_z$  con  $z \in \Gamma_z$ . En particular  $C \neq \{z\}$ . Más aún, el arco  $\Gamma_z \subset S_z^{(x,i)}$  es parte de la circunferencia característica de  $z$  en  $C_i^x$  y la intersección  $I_z^{(x,i)} = C \cap S_z^{(x,i)}$  es un abierto de  $S_z^{(x,i)}$ . En efecto, cualquier  $y \in I_z^{(x,i)}$  es un punto terminal en  $S_z^{(x,i)} \subset C_i^x$  y por tanto  $y \in C \cap \text{int}C_i^x$ . Al igual que para  $z$ , existe un arco abierto  $\Gamma_y \subset I_z^{(x,i)}$  ya que  $S_y^{(x,i)}$  también es la circunferencia terminal de  $y$  en  $C_i^x$ . De hecho tenemos que

$$I_z^{(x,i)} = C \cap \text{int}C_i^x \quad (\text{V.4.A})$$

lo que probará que  $I_z^{(x,i)}$  es también abierto de  $C$ ; esto es,  $C$  es localmente la recta euclídea y por la clasificación de las 1-variedades se sigue que  $C$  es una circunferencia terminal o un arco abierto terminal.

Veamos la igualdad en (V.4.A). Si  $p \in I_z^{(x,i)}$  entonces  $p$  es un punto terminal y  $p \in C \cap \text{int}C_i^x$ . Recíprocamente, todo punto  $q \in C \cap \text{int}C_i^x$  debe estar en  $S_z^{(x,i)}$  pues en caso contrario debe existir un arco de  $q$  a  $\Gamma_z \subset S_z^{(x,i)}$  que sólo corta a  $\Gamma_z$  en su punto final y por tanto  $\mathcal{T}$  contiene un trióide lo que contradice la Proposición V.4.11.

Seguidamente comprobaremos que todo arco abierto terminal  $C = (a, b)$  es un conjunto cerrado en  $X$ . En efecto, de lo contrario debe existir una sucesión  $\{w_n\}_{n \geq 1} \subset (a, b)$  que converge a algún  $w \in X - C$ . Entonces, dado cualquier  $\omega$ -entorno plano  $C_i^w$  de  $w$  encontramos  $n_0$  con  $w_n \in \text{int}C_i^w$  si  $n \geq n_0$ . Además las circunferencias características  $S_{w_n}^{(w,i)}$  en  $C_i^w$  no son terminales (de otra forma,  $S_{w_n}^{(w,i)} \subset (a, b)$  lo que es imposible), y podemos encontrar puntos  $x_n \in S_{w_n}^{(w,i)} - \mathcal{T}$ .

Si existe un  $n_1$  tal que  $S_{w_{n_1}}^{(w,i)}$  contiene un número infinito de  $w_n$ , entonces  $w \in S_{w_{n_1}}^{(w,i)}$  y necesariamente  $w \in \mathcal{T}$  ya que  $w \in \text{int}C_i^w$ . Más aún, por el Lema V.4.9 existe un arco abierto  $\Gamma \subset S_{w_{n_1}}^{(w,i)} \cap \mathcal{T}$  con  $w \in \Gamma$  y así  $\Gamma$  contiene infinitos  $w_n$ . En particular  $w \in \Gamma \subset C$  pues  $w_n \in C$ ; este no es el caso y necesariamente existen infinitas circunferencias  $S_{w_n}^{(w,i)}$ . Por lo tanto  $\text{diám}(S_{w_n}^{(w,i)}) \rightarrow 0$  por la primera parte del Lema V.4.4 y la sucesión  $x_n \in S_{w_n}^{(w,i)} - \mathcal{T}$  converge a  $w$  ya que  $w_n \rightarrow w$ . Esto contradice el Lema V.4.8 y la demostración concluye.  $\square$

**Corolario V.4.13.** *Si  $X$  es compacto, entonces toda componente arcoconexa*

de  $\mathcal{T}$  es una circunferencia.

Denotemos por  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$  a la familia de todas las componentes arcoconexas de  $\mathcal{T}$ . A continuación demostraremos que la subfamilia  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}^* \subset \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$  formada por todas las circunferencias terminales es una sucesión nula en el sentido de la siguiente definición.

**Definición V.4.14.** Una colección  $\mathcal{A} = \{A_i\}$  de subconjuntos de diámetro no nulo de un espacio admisible  $X$  se dice que forma una *sucesión nula* si para cualquier compacto  $K$  y cualquier  $\epsilon > 0$  sólo un número finito de los conjuntos  $A_i$  con  $A_i \cap K \neq \emptyset$  tiene diámetro  $\text{diám}(A_i) > \epsilon$  mayor que  $\epsilon$ .

**Nota V.4.15.** (a) En caso de que la distancia sobre  $X$  sea la restricción de una distancia sobre la compactificación por un punto  $X^+$ , la condición sobre el conjunto compacto  $K$  es redundante.

(b) Nótese que de la definición se sigue que  $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \{A \in \mathcal{A}; A \cap K_n \neq \emptyset \text{ y } \text{diám}(A) \geq \frac{1}{j}\}$  es en efecto una sucesión. Aquí  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión exhaustiva de  $X$ .

**Proposición V.4.16.** *La familia  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}^*$  es una sucesión nula de circunferencias disjuntas dos a dos.*

**Demostración.** Supongamos que existen  $\epsilon_0$ , un conjunto compacto  $K_0$  y una sucesión  $S_1, \dots, S_n, \dots$  de circunferencias terminales tales que  $\text{diám}(S_n) \geq \epsilon_0$  y  $S_n \cap K_0 \neq \emptyset$  para todo  $n \geq 1$ . La compacidad de  $K_0$  nos permite asumir que una sucesión  $x_n \in S_n \cap K_0$  converge a un punto  $x_0 \in K_0$ . Sea  $(C_i^{x_0}, \varphi)$  una carta en  $x_0$  tal que  $\text{diám}(C_i^{x_0}) \leq \frac{\epsilon_0}{4}$  así que  $S_n - C_i^{x_0} \neq \emptyset$  para todo  $n \geq 1$ . La convergencia de  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  implica la existencia de algún  $n_0$  tal que  $x_n \in \text{int}C_i^{x_0}$  si  $n \geq n_0$ . Por el Lema V.4.9 cada circunferencia característica  $S_{x_n}^{(x_0, i)}$  debe contener puntos  $z_n \in S_{x_n}^{(x_0, i)} - \mathcal{T}$  no terminales pues  $S_n \neq S_{x_n}^{(x_0, i)}$  para todo  $n$  ya que  $\text{diám}(S_{x_n}^{(x_0, i)}) \leq \text{diám}(C_i^{x_0})$ , y esto contradice el Lema V.4.8 ya que  $x_0 \in \text{int}C_i^{x_0}$ .  $\square$

Para los arcos abiertos terminales tenemos

**Proposición V.4.17.** *La familia  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}} - \mathcal{A}_{\mathcal{T}}^* = \{A_{\alpha}\}$  de arcos abiertos terminales es localmente finita en  $X$  y por tanto numerable.*

**Demostración.** Si  $\{A_\alpha\}$  no es localmente finita en el punto  $x \in X$  entonces existe una sucesión  $a_s \in A_{\alpha_s}$  ( $s \geq 1$ ) de puntos en diferentes  $A_{\alpha_s}$  tal que  $\{a_s\}_{s \geq 1}$  converge a  $x$ . Fijado un  $w$ -entorno plano de  $x$ ,  $C_i^x$ , tenemos que existe  $s_0$  con  $a_s \in C_i^x$  para  $s \geq s_0$  y cada  $a_s$  ( $s \geq s_0$ ) determina una circunferencia característica  $S_{a_s}^{(x,i)} \subset C_i^x$ . Es más, en cada una de ellas podemos encontrar  $x_s \in S_{a_s}^{(x,i)} - \mathcal{T} \neq \emptyset$  pues en caso contrario  $S_{a_s}^{(x,i)} \subset A_{\alpha_s}$  que es imposible. Además, sólo puede existir una cantidad finita de tales circunferencias pues si no  $\text{diám}(S_{a_s}^{(x,i)}) \rightarrow 0$  (Lema V.4.4) y como  $\{a_s\}_{s \geq 1}$  converge a  $x \in \text{int}C_i^x$  también lo hace la sucesión  $\{x_s\}_{s \geq 1}$  y ello está en contradicción con el Lema V.4.8.

Como la familia  $\{S_{a_s}^{(x,i)}\}_{s \geq 1}$  es finita, entonces infinitos  $a_s$  caen en una misma circunferencia característica  $S_{a_{s_0}}^{(x,i)}$ . En particular,  $x \in S_{a_{s_0}}^{(x,i)}$ , y  $x \in \mathcal{T}$  es necesariamente un punto terminal. Ahora el Lema V.4.9 nos proporciona un arco abierto  $\Gamma \subset \mathcal{T} \cap S_{a_{s_0}}^{(x,i)}$  conteniendo a  $x$  y por tanto a casi todos los  $a_s$  que aparecen en  $S_{a_{s_0}}^{(x,i)}$ . Pero entonces,  $\Gamma \subset A_{\alpha_s}$  para infinitos  $n_s$  y esto contradice que los  $A_\alpha$  sean disjuntos.  $\square$

## §V.5. $\mathcal{S}$ -curvas en una superficie

Recordemos que por una *curva* se indica un continuo generalizado de Peano unidimensional. Más aún, una  $\mathcal{S}$ -curva en una superficie  $M$  es una curva  $X \subset M$  cuyo complemento  $M - X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{int}D_k$  es la unión de los interiores de una sucesión de discos cerrados disjuntos dos a dos  $D_k \subset M - \partial M$  ( $k \geq 1$ ). Nótese que  $\partial M \subset X$ .

**Nota V.5.1.** Igual que en el caso compacto ([9]; pág. 82) las condiciones de que  $X$  sea una  $\mathcal{S}$ -curva en  $M$  son equivalentes a que los discos cerrados disjuntos  $\mathcal{D} = \{D_k\}_{k \geq 1}$  formen una sucesión nula y la unión  $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$  sea densa en  $M$ . Como usaremos esta segunda definición alternativa y la observación en [9] no contiene una demostración y sólo se refiere al caso compacto, damos en la sección auxiliar §V.5A una demostración de esta equivalencia ya que no hemos encontrado una referencia adecuada en la literatura para el caso que nos ocupa.

**Lema V.5.2.** *Sea  $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i \geq 1}$  una sucesión nula (posiblemente vacía) de discos cerrados disjuntos dos a dos en el interior de la superficie  $M$ , entonces existe una  $\mathcal{S}$ -curva  $C \subset M - \bigcup_{i \geq 1} \text{int} D_i$ . En particular cualquier superficie contiene una  $\mathcal{S}$ -curva.*

**Demostración.** Extenderemos  $\mathcal{D}$  a una sucesión nula de discos cerrados disjuntos dos a dos  $\mathcal{B} = \{B_s\}_{s \geq 1}$  cuya unión  $\bigcup_{s=1}^{\infty} B_s$  sea densa en  $M$ . Esto es equivalente a decir que  $C = M - \bigcup_{s=1}^{\infty} \text{int} B_s$  es una  $\mathcal{S}$ -curva de acuerdo con la Nota V.5.1.

Para construir la sucesión  $\mathcal{B}$  consideramos el conjunto cerrado  $F = \overline{\bigcup_{i \geq 1} D_i} \cup \partial M$ . Si  $F = M$  no hay nada que hacer. En caso contrario, sea  $D = \{d_n\}_{n \geq 1}$  un subconjunto numerable denso en el subespacio abierto  $M - F$ . Definimos inductivamente una sucesión  $\mathcal{B}' = \{B'_j\}_{j \geq 1}$  tal que  $B'_j$  es un disco cerrado de centro  $d_{n_j}$  y radio  $\epsilon_j$  donde  $d_{n_j}$  es el primer elemento en  $\{d_n\}_{n \geq n_{j-1}}$  tal que  $d_n \notin \bigcup_{k=1}^{j-1} B'_k$  y  $\epsilon_j \leq \frac{1}{j}$  se elige de forma que  $B'_j \cap (\bigcup_{k=1}^{j-1} B'_k \cup F) = \emptyset$ . Comenzamos con  $n_1 = 1$ , y escogemos  $\epsilon_1 \leq 1$  con  $B'_1 \cap F = \emptyset$ .

Es claro que todos los discos en  $\mathcal{B}'$  son disjuntos dos a dos. Es más,  $M - F \subset \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} B'_j}$ ; en efecto, dados  $x \notin F$  y cualquier entorno abierto  $\Omega$  de  $x$ , sea  $d_n \in D \cap \Omega$ . Si  $n \neq n_j$  para todo  $j$  entonces  $n_{j_0} < n < n_{j_0+1}$  para algún  $j_0$  y  $d_n \in B'_k$  para algún  $k \leq j_0$ . Así  $x \in \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} B'_j}$ . Definimos  $\mathcal{B} = \mathcal{D} \cup \mathcal{B}'$  y por tanto  $M = (M - F) \cup F \subset \overline{\{B; B \in \mathcal{B}\}}$ .  $\square$

Un teorema debido a Borsuk ([9]; 7.4) establece que cualesquiera dos  $\mathcal{S}$ -curvas en una superficie cerrada  $M$  son homeomorfas. Los mismos argumentos, basados en el Teorema de descomposición de Moore ([21]; §25 Thm. 1), también funcionan para  $\mathcal{S}$ -curvas en una superficie arbitraria con borde, compacta o no. En concreto,

**Teorema V.5.3.** *La inclusión  $i : A \subset M$  de cualquier  $\mathcal{S}$ -curva en una superficie  $M$  es fiel en los finales. Más aún, dada la inclusión  $i' : A' \subset M$  de otra  $\mathcal{S}$ -curva, existe un homeomorfismo  $\psi : A \rightarrow A'$  tal que el diagrama de homeomorfismos*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}(A) & \xrightarrow[\cong]{\psi_*} & \mathcal{F}(A') \\
 & \searrow \cong & \swarrow \cong \\
 & \mathcal{F}(M) &
 \end{array}$$

$i_*$                        $i'_*$

*conmuta.*

En la demostración del Teorema V.5.3 aplicamos algunos resultados profundos sobre descomposición de superficies. En concreto, dada una sucesión nula de discos cerrados  $\mathcal{D} = \{D_k\}_{k \geq 1}$  es una superficie  $M$ , la aplicación cociente  $\pi : M \rightarrow M/\mathcal{D}$  que lleva cada  $D_k$  a un punto  $*_k$  es una descomposición semicontinua de tipo celular ([21]; §2, Prop. 9) y el Teorema de Moore sobre descomposiciones de tipo celular de superficies establece

**Teorema V.5.4** ([21]; §25, Thm. 1). *El cociente  $\pi : M \rightarrow M/\mathcal{D}$  es una descomposición de  $M$  fuertemente reducible; y así para cualquier conjunto abierto  $U \subset M$  con  $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k \subset U$  existe un homeomorfismo  $f : M \rightarrow M/\mathcal{D}$  tal que  $f = \pi$  en el complementario de  $U$ .*

**Corolario V.5.5.** *Sea  $\{D_i\}_{i \geq 1}$  una sucesión nula de discos cerrados disjuntos dos a dos en la superficie  $M$ , entonces la inclusión  $M - \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{int} D_i = \widetilde{M} \subset M$  es fiel en los finales.*

**Demostración.** Por el Teorema V.5.4,  $M/\mathcal{D}$  es una superficie y ([21]; §21; Thm. 4) aplicado a  $\{*_k = \pi(D_k)\}_{k \geq 1}$  muestra que existe una triangulación  $M/\mathcal{D} \cong |K|$  (que consideramos una igualdad) tal que el 1-esqueleto  $K^1$  evita al conjunto  $\{*_k\}_{k \geq 1}$ . Por lo tanto  $\pi^{-1}(K^1)$  es un conjunto cerrado en  $M$  que evita  $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$ . Más aún, el Teorema V.5.4 aplicado al conjunto abierto  $U = M - \pi^{-1}(K^1)$  proporciona un homeomorfismo  $f : M \rightarrow M/\mathcal{D}$  tal que  $f = \pi$  sobre  $\pi^{-1}(K^1)$  y así  $\pi : \pi^{-1}(K^1) \rightarrow K^1$  es un homeomorfismo. En particular  $f^{-1} : |K| \rightarrow M$  es una triangulación de  $M$  tal que cada disco de  $\mathcal{D}$  cae en el interior de un triángulo de  $K$ . Entonces, para cada triángulo  $\sigma \in K$  la familia  $\mathcal{D}_\sigma = \{D_k, D_k \subset \text{int}\sigma\}$  es una sucesión nula en  $\sigma$  que no corta a  $\partial\sigma$ . Obsérvese que cada diferencia  $\tilde{\sigma} = \sigma - \bigcup\{\text{int} D_k; D_k \in \mathcal{D}_\sigma\} = \bigcap_{D_k \in \mathcal{D}_\sigma} (\sigma - \text{int} D_k)$  es un conjunto compacto conexo.

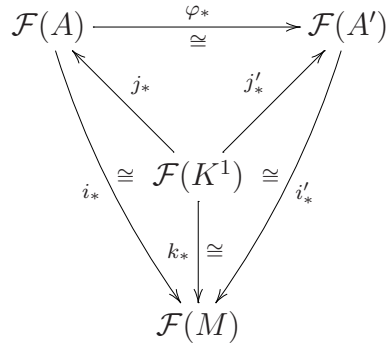
Sea  $\{N_j\}_{j \geq 1}$  una sucesión creciente de poliedros  $N_j = |K_j|$  triangulados por subcomplejos finitos  $K_j \subset K$  tales que  $N_j \subset \text{int}N_{j+1}$  y las intersecciones  $E_j = N_j \cap (\overline{M - N_j})$  son unidimensionales. Para cada  $j$ , sea  $\widetilde{N}_j \subset N_j$  el subconjunto  $\widetilde{N}_j = N_j - \bigcup \{\text{int}D_k; D_k \in \mathcal{D}_\sigma, \sigma \in K_j\}$ .

La familia  $\{\widetilde{N}_j\}_{j \geq 1}$  es una sucesión creciente de conjuntos compactos en  $\widetilde{M}$  y, es más, como  $K^1 \subset \widetilde{M}$  es fácil comprobar que existe una correspondencia biunívoca entre las componentes de  $M - \text{int}N_j$  y  $\widetilde{M} - \text{int}\widetilde{N}_j$  que lleva la componente  $C \subset M - \text{int}N_j$  a la componente  $\widetilde{C} = C - \bigcup \{D_k \in \mathcal{D}_\sigma; \sigma \subset C\}$ . De aquí se deduce que la inclusión  $\widetilde{M} \subset M$  induce un homeomorfismo  $\mathcal{F}(\widetilde{M}) \cong \mathcal{F}(M)$ .  $\square$

Ahora podemos demostrar el Teorema V.5.3.

**Demostración del Teorema V.5.3.** Sean  $\mathcal{D} = \{D_k\}_{k \geq 1}$  y  $\mathcal{D}' = \{D'_k\}_{k \geq 1}$  dos sucesiones nulas de discos cerrados disjuntos dos a dos en el interior de  $M$  que definen las  $\mathcal{S}$ -curvas  $A = M - \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{int}D_k$  y  $A' = M - \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{int}D'_k$ , respectivamente. Como se hizo en la demostración del Corolario V.5.5, aplicamos el Teorema V.5.4 a la aplicación cociente  $\pi : M \rightarrow M/\mathcal{D}$  para conseguir una triangulación  $K$  de  $M/\mathcal{D}$  tal que el 1-esqueleto  $K^1$  evita al conjunto  $\{\pi(D_k)\}_{k \geq 1} \cup \{\pi(D'_k)\}_{k \geq 1}$  y así  $K$  se levanta a una triangulación de  $M$ , también denotada por  $K$ , para la que cada disco de  $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$  cae en el interior de un triángulo de  $K$ . En particular, para cada triángulo  $\sigma \in K$  las familias  $\mathcal{D}_\sigma = \{D_k; D_k \subset \text{int}\sigma\}$  y  $\mathcal{D}'_\sigma = \{D'_k; D'_k \subset \text{int}\sigma\}$  son sucesiones nulas en  $\sigma$  evitando  $\partial\sigma$ , tal que  $A \cap \sigma$  and  $A' \cap \sigma$  son  $\mathcal{S}$ -curvas en  $\sigma$  que contienen  $\partial\sigma$ . Seguidamente aplicamos a cada  $\sigma$  un teorema debido a Whyburn ([83]; Thm. 3) para obtener un homeomorfismo  $\varphi_\sigma : A \cap \sigma \rightarrow A' \cap \sigma$  que es la identidad sobre  $\partial\sigma \subset A \cap A'$ . Entonces  $\varphi = \bigcup_{\sigma \in K} \varphi_\sigma : A \cong A'$  es el homeomorfismo requerido.

Es más, puesto que  $K^1 \subset A \cap A'$  y  $\varphi$  se restringe a la identidad sobre  $K^1$ , obtenemos el diagrama donde todas las flechas, salvo  $\varphi_*$ , están inducidas por inclusiones



En este diagrama los triángulos interiores conmutan y  $i_*$  e  $i'_*$  son homeomorfismos por el Corolario V.5.5. Además usamos el hecho bien conocido de que los finales de Freudenthal de un poliedro quedan determinados por el 1-esqueleto de cualquier triangulación para obtener que  $k_*$  es un homeomorfismo. Entonces  $i'_*\varphi_* = i_*$  y la demostración queda completada.  $\square$

Recordemos que un subespacio  $U \subset M$  se dice *universal* para una categoría topológica  $\mathbf{P}$  si cualquier  $P \in \mathbf{P}$  se puede sumergir como un subespacio cerrado de  $U$ . La siguiente proposición es una consecuencia inmediata del Teorema V.5.3.

**Proposición V.5.6.** *Cualquier  $\mathcal{S}$ -curva  $U$  en una superficie  $M$  es universal para la categoría  $\mathbf{P}$  de conjuntos cerrados unidimensionales de  $M$ . Más aún, dado un conjunto cerrado unidimensional  $C \subset M$  existe una inmersión cerrada  $\rho : C \rightarrow U$  para la que el homeomorfismo  $i_* : \mathcal{F}(U) \cong \mathcal{F}(M)$  inducido por la inclusión  $U \subset M$  en el Corolario V.5.5 se restringe a un homeomorfismo  $\rho(C)^{\mathcal{F}} \cong C^{\mathcal{F}}$ .*

**Demostración.** Si  $C \in \mathcal{P}$  y  $F = C \cup \partial M$  entonces  $\text{int}F = \emptyset$  por el Lema V.5A.6 y por lo tanto  $\overline{M - F} = M$ . Sea  $\{D_i\}_{i \geq 1}$  una sucesión nula de discos cerrados disjuntos contenidos en el conjunto abierto  $M - F$  para el cual  $M - F \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i}$  como en la demostración del Lema V.5.2. Entonces  $M = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i}$  pues  $M - F$  es denso en  $M$ . Esto es suficiente para probar que  $Z = M - \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{int}D_i$  es una  $\mathcal{S}$ -curva (Nota V.5.1). Entonces el teorema V.5.3 establece un homeomorfismo  $\psi : Z \rightarrow U$  y por consiguiente una inmersión cerrada  $\rho : C \subset F \subset Z \xrightarrow{\psi} U$  para la que se comprueba fácilmente que  $i_*(\overline{\rho(C)} \cap \mathcal{F}(U)) = \overline{C} \cap \mathcal{F}(M)$  para la inclusión  $i : U \subset M$ .  $\square$



## §V.5A. Sobre la definición de $\mathcal{S}$ -curva

A continuación vamos a comprobar la afirmación hecha en la Nota V.5.1 para el cerrado  $X = M - \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{int}D_k$  obtenido como el complementario de una familia de discos cerrados  $\mathcal{D} = \{D_k\}_{k \geq 1}$  disjuntos dos a dos en una superficie  $M$ . Esto es, las condiciones

- (1)  $X$  es un continuo generalizado de Peano.
- (2)  $\dim X = 1$

que definen a  $X$  como una  $\mathcal{S}$ -curva en  $M$  son equivalentes a

- (1') La familia  $\mathcal{D} = \{D_k\}_{k \geq 1}$  es una sucesión nula en  $M$ .
- (2') La unión  $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$  es densa en  $M$ .

Empezamos con el siguiente lema.

**Lema V.5A.1.** *Sea  $C_0 = C \cup D \subset M$  un continuo unión de un disco  $D$  y un continuo  $C$ . Si  $\text{int}D - C \neq \emptyset$  entonces  $C_0 - \text{int}D$  también es un continuo.*

**Demostración.** Si  $x \in \text{int}D - C$  entonces  $C_0 - \{x\}$  sigue siendo conexo. Aquí usamos que  $D$  es 2-conexo (V.2.1). Haciendo uso de la existencia de una retracción  $r : D - \{x\} \rightarrow \partial D$ , la extendemos a una retracción  $\tilde{r} : C_0 - \{x\} \rightarrow \partial D \cup (C - \text{int}D) = C_0 - \text{int}D$ , lo que demuestra que  $C_0 - \text{int}D$  es conexo.  $\square$

**Lema V.5A.2.** *Supongamos que se cumple (1') y sea  $C \subset M$  un subcontinuo. Si  $\mathcal{D}_C = \{D_k \in \mathcal{D}; D_k \cap C \neq \emptyset \text{ y } D_k - C \neq \emptyset\}$  el conjunto  $C_0 = C \cup \{D_k \in \mathcal{D}_C\}$  es un continuo.*

**Demostración.** La conexión de  $C_0$  es obvia. Para ver la compacidad, sea  $\{x_s\}_{s \geq 1} \subset C_0$  una sucesión arbitraria en  $C_0$ . El único caso a estudiar es cuando  $x_s \in D_{k(s)}$  y  $\{D_{k(s)}\}_{s \geq 1}$  es una subfamilia infinita de discos. Entonces tomamos un compacto  $K \subset M$  con  $C \subset \text{int}K$  y observamos que por ser  $\mathcal{D}$  una sucesión nula sólo un número finito de los discos en  $\mathcal{D}_C$  intersectan  $\text{Fr}K$ . Así pues

la sucesión  $\{x_s\}_{s \geq 1}$  contiene una subsucesión  $\{x_{s_j}\}_{j \geq 1}$  convergente a algún  $x_0 \in K$ . Escogiendo puntos  $y_j \in D_{k(s_j)} \cap C$  tenemos que por ser  $\mathcal{D}$  una sucesión nula,  $\{y_j\}_{j \geq 1}$  también converge a  $x_0$  y por tanto  $x_0 \in C \subset C_0$ . Así pues  $C_0$  es compacto.  $\square$

**Lema V.5A.3.** *La condición (1') implica la condición (1).*

**Demostración.** Bastará demostrar que  $X$  es conexo y localmente conexo.

Para ver que  $X$  es conexo<sup>2</sup> elegimos una sucesión exhaustiva de  $M$ ,  $\{M_i\}_{i \geq 1}$ , formada por superficies compactas y conexas ([10]; 3.1). Ahora, dados dos elementos  $x, y \in X$  elegimos  $M_i$  con  $x, y \in \text{int}M_i$  y consideramos la subfamilia  $\mathcal{D}_i = \{D_k \in \mathcal{D}; D_k \cap M_i \neq \emptyset\}$ .

El conjunto

$$L_0 = M_i - \bigcup \{\text{int}D_k; D_k \subset M_i\}$$

es un continuo pues coincide con la intersección

$$L_0 = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left( M_i - \bigcup_{k=1}^j \{\text{int}D_k; D_k \subset M_i\} \right)$$

obtenida como intersección de superficies compactas conexas. Aquí usamos que ninguna superficie puede ser separada por una cantidad finita de discos. Nótese además que  $\partial M_i \subset L_0$  pues ningún punto del borde posee un entorno homeomorfo a un disco abierto. Más aún, si  $\mathcal{D}_i^0 = \{D_k \in \mathcal{D}_i; D_k - M_i \neq \emptyset\}$  tenemos por el Lema V.5A.2 que  $L_1 = L_0 \cup \{D_k; D_k \in \mathcal{D}_i^0\}$  es un continuo y por el Lema V.5A.1 lo es cada conjunto en la intersección

$$L = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left( L_1 - \bigcup_{k=1}^j \{\text{int}D_k; D_k \in \mathcal{D}_i^0\} \right)$$

que coincide con

$$L = M_i - \bigcup \{\text{int}D_k; D_k \in \mathcal{D}_i\} = M_i - \bigcup \{\text{int}D_k; D_k \in \mathcal{D}\} \subset X,$$

---

<sup>2</sup>Para la conexión no se usa la condición (1').

así pues  $L$  es un continuo en  $X$  que contiene a  $x$  e  $y$ . Con ello hemos probado que  $X$  es conexo.

Se puede seguir un razonamiento análogo para probar que  $X$  es localmente conexo. En efecto, dado  $x \in X$  sea  $U \subset M$  un entorno de  $x$  homeomorfo al disco unidad  $B^2$  y con  $x$  como imagen del origen. Si  $V \subset U$  es el entorno correspondiente al disco de radio  $\frac{1}{2}$ , sea  $\mathcal{D}_V = \{D_k \in \mathcal{D}; D_k \cap V \neq \emptyset\}$ . Por la condición (1') sólo una cantidad finita de discos  $D_k \in \mathcal{D}_V$  posee algún punto fuera de  $U$  pues en caso contrario existiría una sucesión  $D_{k_s} \in \mathcal{D}_V$  con  $D_{k_s} \cap \text{Fr}U \neq \emptyset$  y  $D_{k_s} \cap V \neq \emptyset$  lo que implica que  $\text{diám}(D_{k_s}) \geq d(\text{Fr}U, V) > 0$  para todo  $s \geq 1$ . Sea  $N \subset V$  un entorno de  $x$  tal que si  $D_k \in \mathcal{D}_V$  corta a  $N$  entonces  $D_k \subset U$ . Podemos suponer que  $N$  corresponde al disco de radio  $\varepsilon$  en  $B^2$ . Ahora razonamos como en el caso de la conexión más arriba para demostrar que

$$N \cap X = N - \bigcup \{\text{int}D_k; D_k \in \mathcal{D}_N\} \subset U \cap X$$

es un subcontinuo de  $U \cap X$ . Esto demuestra que  $X$  es localmente conexo y termina la demostración.  $\square$

**Lema V.5A.4.** *La condición (1) implica la condición (1').*

**Demostración.** Supongamos por el contrario que existen  $\varepsilon_0 > 0$ , un compacto  $K_0$  y una sucesión de discos  $D_n = D_{k_n}$  tales que  $D_n \cap K_0 \neq \emptyset$  y  $\text{diám}(D_n) \geq \varepsilon_0$  para todo  $n \geq 1$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe una sucesión  $x_n \in D_n$  convergiendo a algún  $x_0 \in K_0$ . Escogiendo un compacto mayor, si es necesario, podemos suponer además que  $x_0 \in \text{int}K_0$ .

Consideramos los discos  $D_n$  en la compactificación por un punto de  $X$ ,  $X^+$ . De acuerdo con ([59]; 4.18) existe una subsucesión de estos discos que converge a un continuo  $Z \subset X^+$ . Podemos suponer que tal subsucesión es toda la sucesión  $\{D_n\}_{n \geq 1}$ . Nótese que  $x_0 \in Z$ .

Sea  $U$  un disco en  $M$  entorno de  $x_0$  y sean  $U_n \subset U$  discos también entornos de  $x_0$  tales que  $\text{diám}(U_n) < \frac{\varepsilon_0}{2^n}$ . En particular  $Z - U_1 \neq \emptyset$  pues en caso contrario  $Z \subset U_1$  y para  $n$  suficientemente grande  $D_n \subset U_1$  y  $\text{diám}(D_n) < \frac{\varepsilon_0}{2}$ .

Escogemos un punto  $z_0 \in Z - U_1$  y sucesiones<sup>3</sup>  $x_n \in \partial D_n \cap U_3$  y  $z_n \in \partial D_n - U_1$  convergiendo a  $x_0$  y  $z_0$ , respectivamente.

Sea  $\Omega = \overline{U_1 - U_2}$  la corona circular comprendida entre los discos  $U_1$  y  $U_2$ . Pasamos a escoger para cada  $n \geq 1$  un arco  $\Gamma_n \subset \partial D_n$  que atraviese  $\Omega$  y tenga un extremo en cada componente de  $\partial\Omega = F_1 \sqcup F_2$ . Para ello se toma uno de los arcos en  $\partial D_n$  entre  $x_n$  y  $z_n$ , sea  $\Gamma'_n$ , y por conexión se observa que  $\Gamma'_n$  debe cortar tanto a  $F_1$  como a  $F_2$  y se escoge  $\Gamma_n \subset \Gamma'_n$  como el subarco comprendido entre el último punto en  $\Gamma'_n \cap F_1$  y el primero después de él en tocar  $F_2$ .

La sucesión de arcos  $\{\Gamma_n\}_{n \geq 1}$  posee una subsucesión que converge a un continuo  $\Gamma_0 \subset \Omega$  ([59]; 4.18). Por simplificar la notación suponemos que toda sucesión converge a  $\Gamma_0$ . Nótese que  $\Gamma_0 \cap F_i \neq \emptyset$  ( $i = 1, 2$ ).

Como  $\text{int}\Omega$  es un abierto en  $M$ , la intersección  $W_n = \text{int}\Omega \cap D_n$  es un abierto en el disco  $D_n$  que contiene al arco abierto  $\Gamma_n^0 = \Gamma_n - (F_1 \cup F_2) = \Gamma_n - \text{Fr}\Omega$ . En particular, la componente conexa  $W_n^0 \subset W_n$  que contiene a  $\Gamma_n^0$  es un abierto (arcoconexo) de  $D_n$  contenido en  $\text{int}\Omega$ . Además todo arco  $\Sigma \subset \text{int}\Omega$  que cruce  $\Gamma_n$  debe tocar a  $W_n^0 - \partial D_n$ . En efecto,  $W_n^0 - \partial D_n$  es arcoconexo y debe estar contenido en una de las dos componentes en que la unión disjunta  $\Gamma_n^0 \sqcup \Gamma_{n+1}^0$  divide a  $\text{int}\Omega$ . Es más,  $(W_n^0 - \partial D_n) \cup \Gamma_n^0$  es un abierto en dicha componente y necesariamente corta a  $\Sigma$  fuera de  $\Gamma_n^0$ .

Como los arcos  $\Gamma_n$  forman parte del cerrado  $X$ , entonces  $\Gamma_0 \subset X$  y si  $y \in \text{int}\Omega \cap \Gamma_0$  (recordar que  $\Gamma_0$  corta a  $F_1$  y  $F_2$ ) entonces por la condición (1) debe existir un entorno (arco) conexo  $N \subset X$  de  $y$  en  $X$  contenido en  $\text{int}\Omega \cap X$ . Pero entonces si  $y_n \in \Gamma_n$  son puntos convergiendo a  $y$ , debe existir  $n_0 \geq 1$  tal que  $y_n \in N$  si  $n \geq n_0$ . Ahora bien, todo arco en  $N \subset \text{int}\Omega$  de  $y$  a  $y_{n_0}$  atraviesa  $\Gamma_{n_0+1}$  o bien todo arco en  $N \subset \text{int}\Omega$  de  $y$  a  $y_{n_0+1}$  atraviesa  $\Gamma_{n_0}$ . En cualquier caso, hay arcos en  $N \subset X$  que tocan el interior de algún  $D_n$  que es disjunto con  $X$ . Llegamos a una contradicción y  $\mathcal{D}$  debe ser necesariamente una sucesión nula.  $\square$

**Lema V.5A.5.** *Las condiciones (2) y (2') son equivalentes.*

<sup>3</sup>Estas sucesiones siempre existen pues si  $E$  es un disco entorno de  $x_0$  con  $E \cap \partial D_n = \emptyset$ , como  $\partial D_n$  divide  $M$  en dos componentes conexas (una de las cuales es  $\text{int}D_n$ ) y necesariamente  $D_n \cap E \neq \emptyset$ , se sigue que  $E \subset \text{int}D_n$  y  $E$  sería disjunto con los demás discos  $D_n$  lo que es una contradicción. Análogamente para  $z_0$ .

Este lema es consecuencia inmediata del siguiente resultado bien conocido.

**Lema V.5A.6.** *Sea  $M$  una  $n$ -variedad. Para todo cerrado  $X \subset M$  se tiene que  $\text{int}X = \emptyset$  si y sólo si  $\dim X \leq n - 1$ .*

**Demostración.** Es claro que  $\text{int}X = \emptyset$  si y sólo si para todo  $U \subset M$  homeomorfo a la bola cerrada unidad  $B^n$  se tiene que  $\text{int}_U(U \cap X) = \emptyset$ . Usamos ([25]; 1.8.12) para concluir que esto último equivale a que  $\dim(U \cap X) \leq n - 1$ . Ahora se recubre  $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$  por una cantidad numerable de copias de  $B^n$  y se sigue de ([25]; 1.5.3) que

$$\dim X = \dim \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_n \cap X) \right) \leq n - 1.$$

Recíprocamente, si  $\dim X \leq n - 1$  entonces  $\dim(U \cap X) \leq n - 1$  para todo  $U$  como antes por ([25]; 1.2.2) y por tanto  $\text{int}_U(U \cap X) = \emptyset$  para todo  $U$ , de donde  $\text{int}X = \emptyset$ .  $\square$

**Demostración del Lema V.5A.5.** Si la unión  $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$  es densa, también lo es  $\bigcup_{k=1}^{\infty} \text{int}D_k$  y por tanto  $\text{int}(M - \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{int}D_k) = \text{int}X = \emptyset$ , de donde  $\dim X \leq 1$  por el Lema V.5A.6. De ser  $X$  conexo (ver la nota al pie en la página 136) se sigue que  $\dim X = 1$ .

Recíprocamente, si  $\dim X = 1$  de nuevo el Lema V.5A.6 nos dice que  $\text{int}X = \emptyset$  y la unión  $\bigcup_{k=1}^{\infty} \text{int}D_k$  es densa, de aquí se sigue inmediatamente que  $D$  es denso.  $\square$

## §V.6. Demostraciones de los resultados principales

Estamos preparados para probar los teoremas enunciados en la Sección §V.1. Comenzamos con la sucesión nula  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}^*$  de circunferencias terminales de  $X$  en la Proposición V.4.16 y formamos el conjunto  $M_X = X \cup \{cS; S \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}^*\}$  que consiste en la unión de  $X$  y conos disjuntos dos a dos  $cS = \frac{S \times [0,1]}{S \times \{1\}}$ ,  $S \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}^*$ . Consideramos el espacio topológico obtenido dotando al conjunto  $M_X$  con la

topología para la cual la familia de conjuntos  $\{U_i^x\}_{i \geq 1}$  definidos seguidamente en los apartados (a)-(c) forman una base de entornos de cada  $x \in M_X$ .

- (a) Si  $x \in cS - X$  entonces  $\{U_i^x\}_{i \geq 1}$  es una base de entornos de  $x$  en el cono abierto  $cS - S$ .

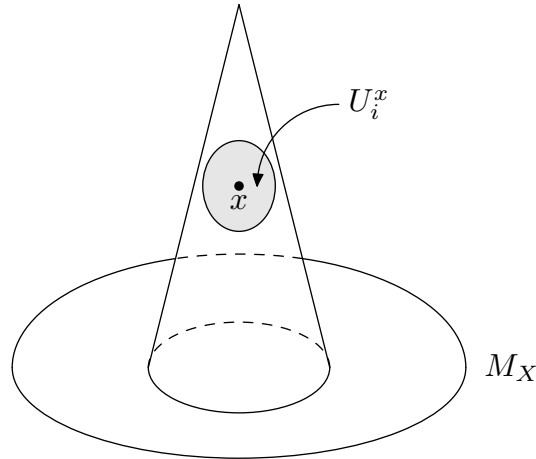


Figura V.8

- (b) Si  $x \in X - \mathcal{T}$  entonces  $U_i^x = C_i^x \cup \{cS; S \subset C_i^x\}$  donde  $\{C_i^x\}_{i \geq 1}$  es una base de entornos de  $x$  que consiste en  $\omega$ -entornos planos. Puede verse una ilustración de  $U_i^x$  en la siguiente figura.

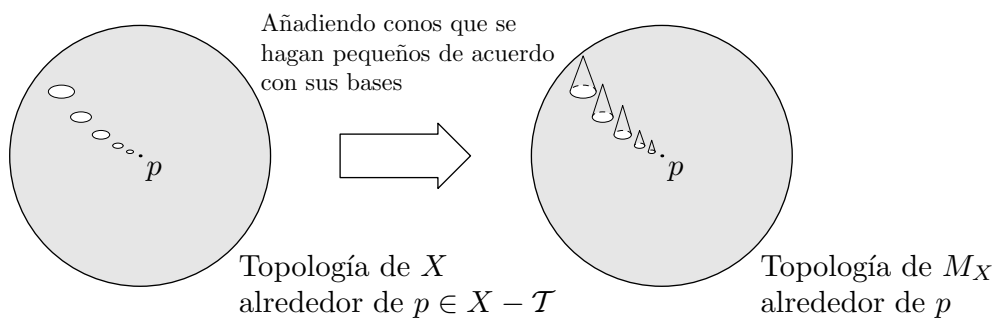


Figura V.9

- (c) Si  $x \in \mathcal{T}$  y su componente arcoconexa  $E_x \subset \mathcal{T}$  es un arco abierto, entonces  $U_i^x = C_i^x \cup \{cS; S \subset C_i^x\}$ . De lo contrario, si  $E_x$  es una circunferencia entonces  $U_i^x = C_i^x \cup \{cS; S \subset C_i^x, S \neq S_x^{(x,i)}\} \cup W_i^x \times [0, \frac{1}{i+1}]$  donde  $\{W_i^x\}_{i \geq 1}$  es una base de entornos de  $x$  en la circunferencia característica

$S_x^{(x,i)}$  y  $W_i^x \times [0, \frac{1}{i+1}]$  denota el subconjunto obvio del cono  $cS_x^{(x,i)}$ . Ver Figura V.10.

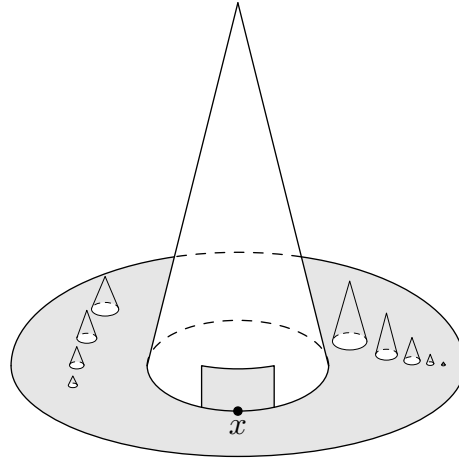


Figura V.10

**Demostración del Teorema V.1.1.** Dada cualquier carta  $(C_i^x, \varphi)$  podemos suponer que la frontera de cada componente  $R_n \subset S^2 - \varphi(C_i^x)$  contiene algún punto terminal (y por tanto es una circunferencia característica) pues en caso contrario  $x \in \text{int}C_i^x$  sería el límite de una sucesión  $z_k \in \varphi^{-1}(\text{Fr}R_{n_k}) - \mathcal{T}$  lo que contradice el Lema V.4.8.

Es más, si  $x \in \text{int}C_i^x$  es terminal, entonces podemos suponer además que su circunferencia característica  $S_x^{(x,i)}$  es la única que hay en  $C_i^x$  que contiene algún punto terminal, pues en caso contrario existiría una sucesión de circunferencias características  $S_{y_n}^{(x,i)} \subset C_i^x$  con puntos  $x_n \in S_{y_n}^{(x,i)} - \mathcal{T}$  y tal que  $\{y_n\}_{n \geq 1}$  convergiendo a  $x$ . Pero entonces  $\text{diám}(S_{y_n}^{(x,i)}) \rightarrow 0$  por el Lema V.4.4 y por tanto los puntos no terminales  $x_n$  convergen a  $x \in \text{int}C_i^x$  lo que contradice el lema V.4.8.

Bajo las condiciones anteriores extendemos la inmersión  $\varphi : C_i^x \rightarrow S^2$  a una inmersión  $\tilde{\varphi} : U_i^x \rightarrow S^2$  como sigue. Para cada circunferencia terminal  $S \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}^*$  con  $S \subset C_i^x$  ( $S \neq S_x^{(x,i)}$  si  $x$  es terminal)  $\tilde{\varphi}$  es la extensión cono que lleva  $cS$  sobre la componente de  $S^2 - \varphi(C_i^x)$  acotada por  $\varphi(S)$ . Si además  $x$  es terminal entonces  $\tilde{\varphi}$  se define como la extensión cilíndrica de  $\varphi|_{W_i^x}$  que lleva  $W_i^x \times [0, \frac{1}{i+1}]$  en la componente acotada por  $\varphi(S_x^{(x,i)})$ ; esto es,  $\tilde{\varphi}(x, t) = (\varphi(x), t)$  si identificamos dicha componente con el disco.

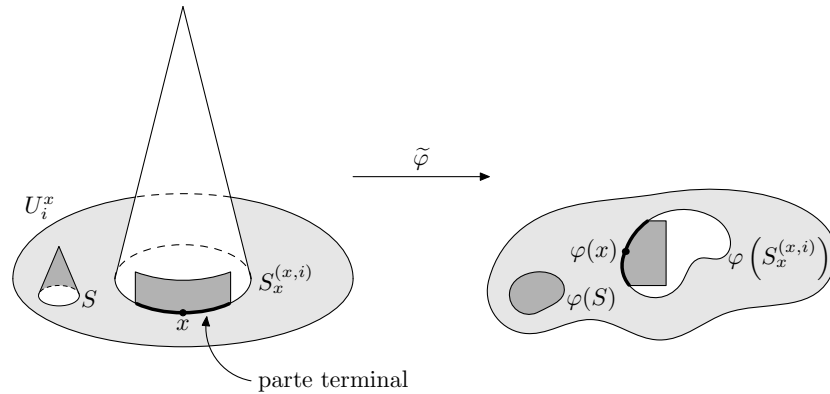


Figura V.11

De esta forma, salvo que  $x \in X$  esté situado sobre un arco abierto terminal,  $U_i^x$  es homeomorfo por  $\tilde{\varphi}$  a un entorno euclídeo de  $\varphi(x)$  en  $S^2$ . En otro caso  $U_i^x$  es homeomorfo a un entorno de  $\varphi(x)$  en el complemento  $S^2 - \text{int}B^2$  de un disco abierto con  $\varphi(x) \in \partial B^2$ . Ver Figura V.11. Por tanto, todos los puntos de  $M_X$  tienen entornos euclídeos bidimensionales y por ellos  $M_X$  es una superficie cuyo borde coincide con la familia localmente finita de arcos abiertos terminales en  $\mathcal{A}_T - \mathcal{A}_T^*$ ; ver la Proposición V.4.17.

Es una consecuencia inmediata de la definición de  $M_X$  que la familia de conos  $\{cS; S \in \mathcal{A}_T^*\}$  es una sucesión nula (Definición V.4.14) y así el Corolario V.5.5 establece que la inclusión  $i : X \subset M_X$  induce un homeomorfismo  $\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(M_X)$ .  $\square$

**Nota V.6.1.** Obsérvese que  $M_X$  es una superficie cerrada siempre que  $X$  sea compacto.

Ahora estamos preparados para demostrar el Teorema V.1.2. Puede verse una idea de la demostración en la Figura V.12.

**Demostración del Teorema V.1.2.** Usamos el Lema V.5.2 para extender la sucesión nula de conos disjuntos dos a dos  $cS \subset M_X - \partial M_X$  sobre circunferencias terminales  $S \in \mathcal{A}_T^*$  a una sucesión nula de discos cerrados  $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \geq 1}$  tal que  $M_X^1 = M_X - \bigcup_{i \geq 1} \text{int}B_i$  es una  $\mathcal{S}$ -curva en  $M_X$ . Así que, dada una inmersión cerrada  $\psi : Y \rightarrow M_X$  de un espacio métrico unidimensional, usamos la Proposición V.5.6 para obtener una nueva inmersión



$\rho : \psi(Y) \rightarrow M_X^1 \subset X$ , para la cual la inclusión  $i : M_X^1 \rightarrow M_X$  induce un homeomorfismo  $\overline{\rho\psi(Y)} \cap \mathcal{F}(M_X^1) \cong \overline{\psi(Y)} \cap \mathcal{F}(M)$ . Aquí las clausuras están en las correspondientes compactificaciones de Freudenthal.

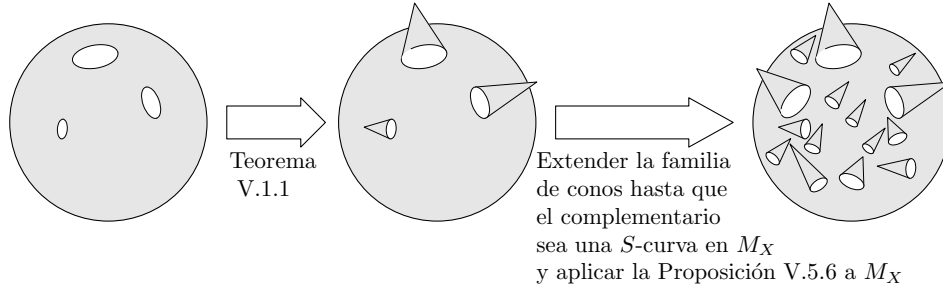


Figura V.12: Boceto de la demostración del Teorema V.1.2.

Se puede comprobar que la inmersión  $\varphi = \rho\psi : Y \rightarrow X$  satisface la igualdad  $i_* \left( \overline{\varphi(Y)} \cap \mathcal{F}(X) \right) = \overline{\psi(Y)} \cap \mathcal{F}(M_X)$ . Aquí usamos el diagrama conmutativo de homeomorfismos

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}(M_X^1) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{F}(M_X) \\
 & \searrow \cong & \swarrow \cong \\
 & & \mathcal{F}(X)
 \end{array}$$

inducidos por las inclusiones correspondientes. □

**Nota V.6.2.** Está claro que la superficie  $M_X$  se puede extender a una superficie  $\widetilde{M}_X$  sin borde añadiendo una copia del semiplano  $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$  a cada componente de  $\partial M_X = \bigsqcup_{i \in I} \mathbb{R}$ . Sin embargo, ejemplos sencillos muestran que no todas las curvas en  $\widetilde{M}_X$  se pueden sumergir topológicamente como un conjunto cerrado en  $X$ . En efecto, esto ocurre para  $X = M_X = \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ ,  $\widetilde{M}_X = \mathbb{R}^2$  y el retículo  $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \subset \widetilde{M}_X$ .

Seguidamente usamos el Teorema V.1.2 para probar el Teorema V.1.3. Para esto necesitaremos además el siguiente lema; compárese con ([75]; 4.2).

**Lema V.6.3.** *Sea  $X$  un continuo generalizado de Peano localmente 2-conexo. Si  $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$  es un sucesión que converge a  $x_0 \in X$  entonces existe un arco  $[a, b] \subset X$  que contiene a  $x_0$  en su interior y tal que una subsucesión de  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  cae en uno de los subarcos determinados por  $x_0$ .*

**Demostración.** Como  $X$  es  $\omega$ -conexo (Lema V.2.3), dados dos puntos  $a, b \in X - \{x_0\}$  el Lema V.2.8 nos dice que existen dos arcos independientes que corren desde  $x_0$  a  $a$  y  $b$ , respectivamente y por tanto existe un arco  $\Gamma = [a, b] \subset X$  que contiene a  $x_0$  en su interior. Si  $\Gamma$  contiene infinitos puntos de la sucesión, no hay nada que probar. Supongamos que  $\Gamma \cap \{x_n\}_{n \geq 1}$  se reduce a un número finito de puntos, de manera que podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $\Gamma \cap \{x_n\}_{n \geq 1} = \emptyset$ . Usamos el Corolario V.2.6 para obtener un  $\omega$ -entorno  $W_1$  de  $x_0$ . Tampoco hay pérdida de generalidad en suponer que  $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset W_1$ . Consideremos tres puntos  $y_1, y_2, y_3 \in W_1 \cap [a, b]$  en el interior del subarco  $[x_0, b]$ . Usando el Lema V.2.8 de nuevo encontramos tres arcos disjuntos (excepto en  $x_1$ )  $\gamma_1^1, \gamma_2^1, \gamma_3^1 \subset W_1$  desde  $x_1$  a  $y_1, y_2, y_3$ , respectivamente, que evitan  $x_0$ . Sea  $z_i$  el primer punto en la intersección  $\gamma_i^1 \cap \Gamma$ . Como mínimo dos de los tres puntos  $\{z_1, z_2, z_3\}$  caen en uno de los subarcos de  $[a, b]$  determinados por  $x_0$ . Otra vez, por el Corolario V.2.6 escogemos un pequeño  $\omega$ -entorno  $W_2 \subset W_1$  de  $x_0$  que evite la unión  $\tilde{\gamma}_1^1 \cup \tilde{\gamma}_2^1 \cup \tilde{\gamma}_3^1$  donde  $\tilde{\gamma}_i^1 \subset \gamma_i^1$  es el subarco comprendido entre  $x_1$  y  $z_i$ . Tomamos  $x_{n_2} \in W_2$  y obtenemos tres arcos desde  $x_{n_2}$  al arco  $\Gamma$  tal que dos de ellos tocan a  $\Gamma$  en el mismo subarco. Procediendo inductivamente de esta forma, obtenemos una sucesión encajada de  $\omega$ -entornos de  $x_0$   $\{W_k\}_{k \geq 1}$  y una subsucesión  $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1} \subset \{x_n\}_{n \geq 1}$  con  $x_{n_k} \in W_k$  y tal que para todo  $k \geq 1$  existen dos arcos  $\rho_k^1$  y  $\rho_k^2$  desde  $x_{n_k}$  al mismo subarco de  $\Gamma$ , digamos  $[x_0, b]$ , que verifican  $\rho_k^1 \cap \rho_k^2 = \{x_{n_k}\}$  y  $\rho_k^i \cap \rho_{k'}^j = \emptyset$  si  $k \neq k'$ . Entonces es fácil cambiar el subarco  $[x_0, b]$  para obtener un nuevo arco  $\Gamma' \subset \Gamma \cup \{\rho^i\}_{k \geq 1}^{i=1,2}$  desde  $a$  a  $b$ , pasando por  $x_0$ , y tal que la subsucesión  $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1}$  es parte del subarco  $\Gamma'$  que va desde  $x_0$  a  $b$ . Ver Figura V.13. □

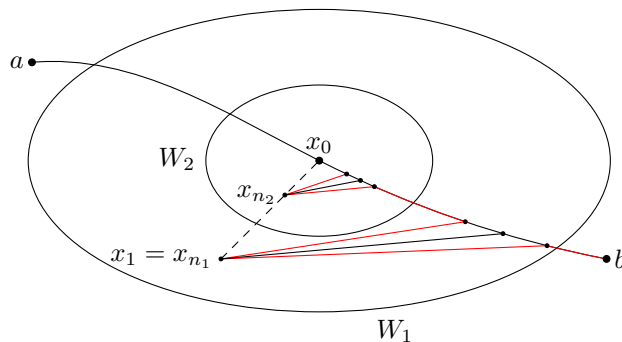


Figura V.13

Seguidamente procederemos a demostrar V.1.3.

**Demostración del Teorema V.1.3.** Probaremos (a)  $\iff$  (b). Mediante el uso de la Proposición V.3.6 la misma demostración con los cambios obvios demuestra (a)  $\iff$  (c).

La demostración de (b)  $\Rightarrow$  (a) es obvia. Veamos (a)  $\Rightarrow$  (b). Se presentan dos casos:

**Caso A:** Supongamos que existe un entorno abierto conexo  $U$  de  $p$  tal que  $W = U - \{p\}$  es localmente plano. Entonces  $W$  es un continuo generalizado de Peano localmente plano, localmente 2-conexo y por tanto existe una superficie  $M_W$  que satisface el Teorema V.1.1. Más aún, el punto  $p$  se corresponde, a través del homeomorfismo  $\mathcal{F}(W) \cong \mathcal{F}(M_W)$  en el Teorema V.1.1, con un final aislado<sup>4</sup>  $\varepsilon \in \mathcal{F}(M_W)$  que no puede ser plano pues, de lo contrario  $U$  sería localmente plano en  $p$ . Por consiguiente existe una sucesión de asas o gorros cruzados (usamos la clasificación de las superficies abiertas en [44]) en  $M_W$  que convergen a  $\varepsilon$ , y no es difícil encontrar una inmersión cerrada  $\psi'_0 : L'_1 \rightarrow M_W$  del grafo infinito no conexo  $L'_1 = L_1 \sqcup \mathbb{R}_{\geq 0}$  de la Figura V.14

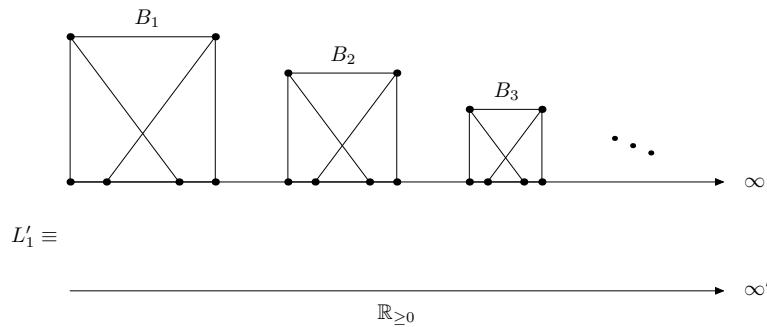


Figura V.14: El grafo  $L'_1$ .

de tal forma que los finales  $\infty$  y  $\infty'$  son aplicados a  $\varepsilon$ , cada bloque  $B_i$  cae en un asa o un gorro cruzado, y  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  sorteja todas las asas y gorros cruzados tal y como se indica en la Figura V.15.

<sup>4</sup>En efecto, si  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión exhaustiva de  $U$  y  $\{U_n\}_{n \geq 1}$  es una base de entornos abiertos conexos encajados de  $p$  con  $U_n - \{p\}$  conexo, entonces  $\{K_n - U_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión exhaustiva para  $W - \{p\}$  y  $p$  se identifica con el final  $\varepsilon \in \mathcal{F}(W)$  dado por  $\varepsilon = (U_n - \{p\})_{n \geq 1}$ .

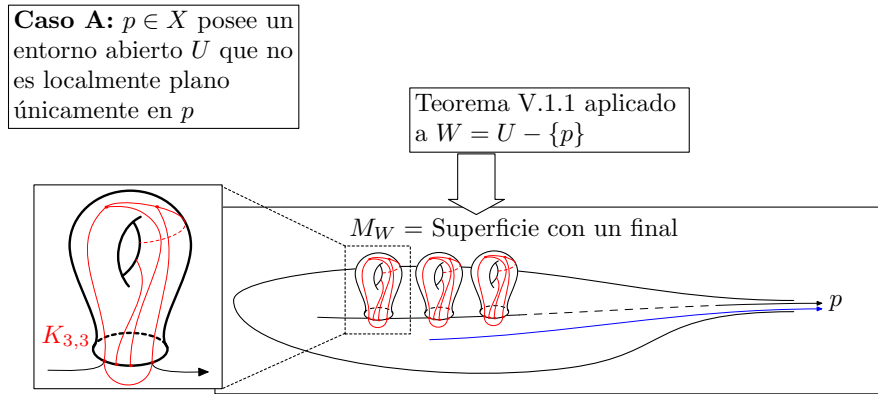


Figura V.15: Teorema V.1.1 aplicado a  $W = U - \{p\}$ .

Entonces aplicamos el Teorema V.1.2 para obtener una inmersión cerrada  $\psi'_1 : L'_1 \rightarrow W$  para la cual la inclusión  $i : W \rightarrow M_W$  satisface  $i_*(p) = \varepsilon$  si  $p$  es considerado como un final de Freudenthal de  $W$ . En consecuencia  $\psi'_1$  induce una inmersión  $\psi_1 : L_1 = L'_1 \cup \{p_1\} \rightarrow U = W \cup \{p\}$  con  $\psi_1(p_1) = p$  y el teorema está probado si  $p$  es un punto no plano aislado. La idea gráfica puede verse en el esquema de la Figura V.16.

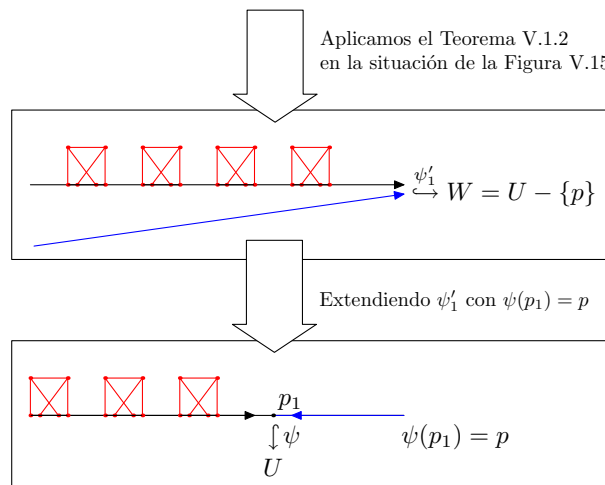


Figura V.16: Conclusión del Caso A en la demostración de (a)  $\implies$  (b).

**Caso B:** En lo que sigue probamos el teorema para el caso en que existe una sucesión  $\{p_i\}_{i \geq 1}$  que converge a  $p$  tal que  $X$  no es localmente plana en ningún  $p_i$ . Usando el Lema V.6.3 existe un arco  $\Gamma = [a, b] \subset X$  con  $p \in (a, b)$  y una subsucesión de  $\{p_i\}_{i \geq 1}$  en uno de los subarcos de  $\Gamma$  definidos por  $p$ , digamos

$[p, b]$ . De hecho podemos suponer sin perder generalidad que  $\{p_i\}_{i \geq 1} \subset [p, b]$  para toda la sucesión. Ahora aplicamos el Corolario V.2.6 para encontrar una sucesión nula  $\{C_i\}_{i \geq 1}$  donde cada  $C_i$  es un  $\omega$ -entorno de  $p_i$ . Como  $\text{int}C_i$  es un continuo generalizado de Peano no plano y localmente 2-conexo, contiene una copia  $K_i \subset \text{int}C_i$  del grafo  $K_{3,3}$ ; ver Proposición V.3.6.

**Caso B:** Existe  $\{p_i\}_{i \geq 1}$  sucesión de puntos donde  $X$  no es localmente plano y  $p_i \rightarrow p$

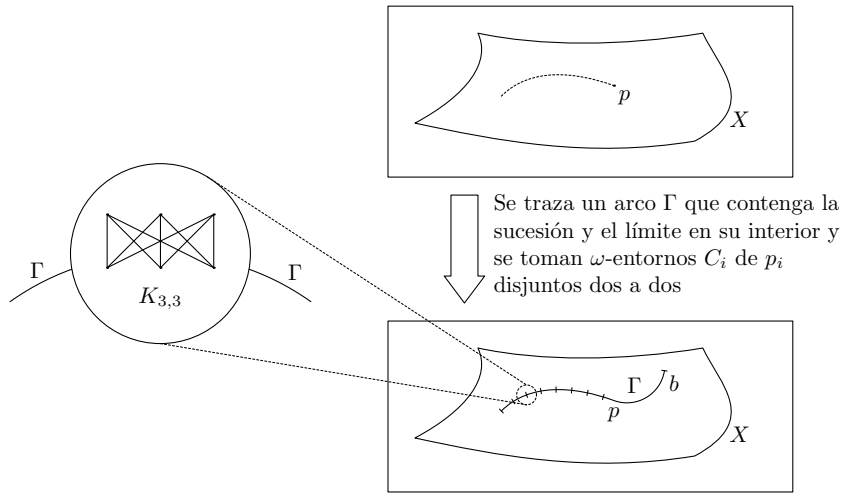


Figura V.17: Copia de  $K_{3,3}$  en cada  $\text{int}C_i$ .

Para cada  $i \geq 1$  consideramos los puntos  $r_i, s_i \in C_i$  definidos como el primero y el último punto en la intersección  $C_i \cap \Gamma$ , respectivamente. Como el complemento  $C_i - V_i$  del conjunto de vértices de  $K_i$  sigue siendo  $\omega$ -conexo, obtenemos arcos disjuntos  $\rho_i$  y  $\sigma_i$  en  $C_i - V_i$  que unen  $r_i$  y  $s_i$  con  $K_i$ , respectivamente. Aquí usamos el Lema V.2.8. Entonces se observa, después del estudio de los casos originados por las posibles posiciones (esencialmente tres) de los puntos de intersección  $\rho_i \cap K_i$  y  $\sigma_i \cap K_i$ , que el grafo  $G_i$  en la Figura V.18

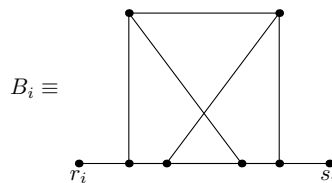


Figura V.18: El grafo  $G_i$ .

se sumerge en  $K_i \cup \rho_i \cup \sigma_i \subset C_i$  con  $G_i \cap \text{Fr}C_i = \{s_i, r_i\}$ . Ahora se puede encontrar fácilmente una copia de la curva de Claytor  $L_1$  en la unión  $\Gamma \cup (\bigcup_{i \geq 1} G_i)$  con  $p$  en el lugar de  $p_1$ . Ésto finaliza la demostración.

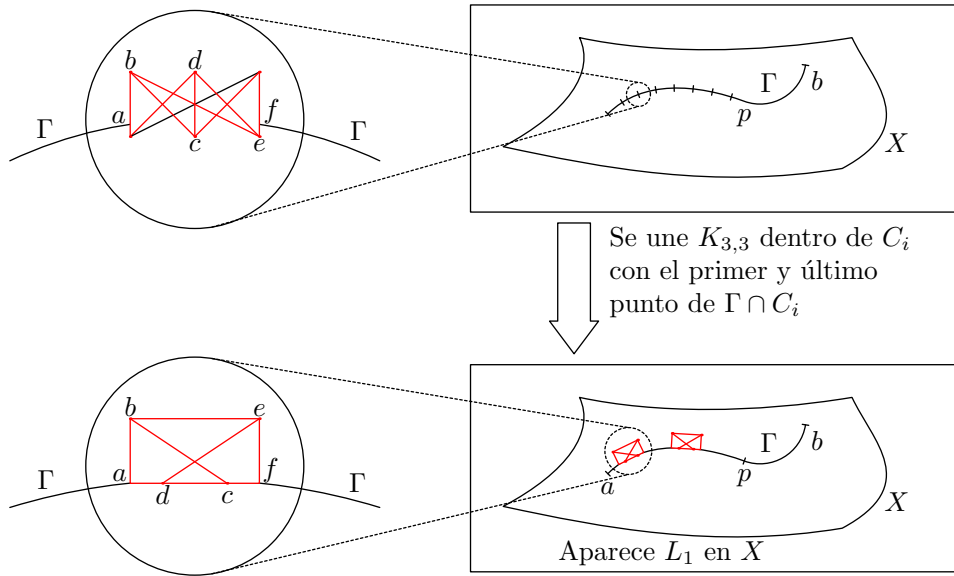


Figura V.19: Conclusión del Caso B en la demostración de (a)  $\Rightarrow$  (b).

□

**Nota V.6.4.** Como se indicó al final de la Sección §V.1, Thomassen caracterizó en ([75]; 4.6) el fallo de la planaridad local de  $X$  en el punto  $p$  por la existencia de un grafo completo infinito  $K_\infty \subset X$  conteniendo a  $p$ . Es inmediato comprobar que  $L_1$  (análogamente,  $L_2$ ) se puede sumergir en el grafo completo  $K_\infty$  cuyos vértices son los puntos marcados en grueso en la representación de  $L_1$  en la Figura V.2. Por tanto la caracterización de Thomassen implica el Teorema V.1.3. No obstante, creemos de interés el resaltar, como hace este teorema independientemente del resultado de Thomassen, que basta la presencia de una copia de  $L_1$  (o equivalentemente  $L_2$ ) para caracterizar la no planaridad de  $X$  alrededor de  $p$  sin necesidad de utilizar el grafo  $K_\infty$ , considerablemente más complicado.

# Propiedades homotópicas de las aplicaciones confluentes en la categoría propia

---

En este capítulo establecemos algunas propiedades de naturaleza homotópica para las aplicaciones confluentes en la categoría propia. Analizamos en este marco la caracterización debida a J. H. Case y R. E. Chamberlin de los continuos tipo árbol así como el teorema de T. B. McLean sobre la preservación de los espacios tipo árbol por aplicaciones confluentes. Damos contraejemplos para los correspondientes análogos propios y extendemos resultados de varios autores en la teoría clásica de los continuos a espacios no compactos. Finalmente, describimos el comportamiento de estas aplicaciones respecto a los pro-grupos fundamentales, generalizando resultados de J. Grispolakis y otros autores. Dejamos abiertas dos cuestiones que creemos de interés (Cuestión VI.3.8 y Conjetura VI.4.6).

## §VI.1. Homotopía propia y finales de Freudenthal

Esta sección recoge varios resultados de la literatura que relacionan los finales de Freudenthal con el tipo de homotopía propia de un continuo generalizado de Peano. Además, como una aportación original, extendemos la equivalencia entre tipos de homotopía propia de árboles y tipos de homeomorfía de los con-

juntos cerrados del conjunto de Cantor a los continuos generalizados de Peano dendríticos.

Como es habitual,  $[X, Y]$  denota el conjunto de las clases de homotopía de aplicaciones  $X \rightarrow Y$ . En la categoría propia el conjunto correspondiente de clases de homotopía propia se denotará por  $[X, Y]_p$ . Referimos a [73] para los resultados elementales de la teoría de homotopía clásica usados en este capítulo. A continuación recopilamos algunas definiciones básicas de la categoría propia y su teoría de homotopía necesarias en este capítulo; ver [6] ó [33] para un tratamiento completo sobre estos aspectos, ver [62] para una revisión general de la teoría de homotopía propia. Comenzamos recordando que las clases de homotopía propia de rayos en  $[\mathbb{R}_{\geq 0}, X]_p$  se llaman *finales fuertes* de  $X$ . Se puede comprobar fácilmente, usando la descripción de los finales de Freudenthal en la Proposición II.1.13, que un final fuerte  $[r] \in [\mathbb{R}_{\geq 0}, X]_p$  define un único final de Freudenthal  $r_*(\infty) \in \mathcal{F}(X)$ . De esta forma, existe una aplicación bien definida

$$\rho : [\mathbb{R}_{\geq 0}, X]_p \rightarrow \mathcal{F}(X) \quad (\text{VI.1.A})$$

que es sobreyectiva para espacios cuyos finales de Freudenthal son definidos por rayos. Este es el caso de los continuos generalizados de Peano; ver Proposición II.1.14.

Es bien conocido que el espacio de finales es un invariante del tipo de homotopía propia del espacio. Explícitamente

**Proposición VI.1.1** ([6]; I.9.13). *Si  $f, g : X \rightarrow Y$  son propiamente homotópicas entre espacios admisibles, entonces  $f_* = g_* : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ .*

**Demostración.** Sea  $H : X \times I \rightarrow Y$  una homotopía propia entre  $f$  y  $g$ . Si consideramos  $p_1 : X \times I \rightarrow X$  la proyección natural e  $i_\epsilon : X \rightarrow X \times I$  ( $\epsilon = 0, 1$ ) son las inclusiones  $i_\epsilon(x) = (x, \epsilon)$ , en el siguiente diagrama



$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{i_{1*}} & \mathcal{F}(X \times I) & \xleftarrow{i_{0*}} & \mathcal{F}(X) \\
 & \xleftarrow{p_{1*}} & \downarrow H_* & \xrightarrow{p_{1*}} & \\
 & \searrow g_* & \mathcal{F}(X) & \swarrow f_* & \\
 & & & & 
 \end{array}$$

tenemos que

$$id_{\mathcal{F}(X)} = i_{0*} \circ p_{1*} = i_{1*} \circ p_{1*}. \tag{VI.1.B}$$

Pero  $p_1$  es propia y monótona, luego  $p_{1*}$  es un homeomorfismo (III.2.12). Por lo tanto de (VI.1.B) se obtiene que  $i_{0*} = i_{1*}$  y por consiguiente  $f_* = H_* \circ i_{0*} = H_* \circ i_{1*} = g_*$ .  $\square$

**Corolario VI.1.2.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una equivalencia de homotopía propia entre espacios admisibles. Entonces  $f_* : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$  es un homeomorfismo. Esto es, toda equivalencia de homotopía propia es fiel en los finales.*

Si denotamos por **Cantor** la subcategoría llena de **Top** de los espacios compactos 0-dimensionales (o equivalentemente los espacios homeomorfos a subconjuntos cerrados del conjunto de Cantor; ([24]; 6.2.16)) y por **CG**  $\subset$  **Topp** la subcategoría llena de los continuos generalizados, existe un funtor

$$\mathcal{F} : \mathbf{CG} \rightarrow \mathbf{Cantor}$$

que lleva  $X$  en un conjunto de finales y toda aplicación propia  $f : X \rightarrow Y$  en **CG** en su aplicación inducida  $f_* : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$  definida en la Proposición I.2.8 (ver también Nota I.4.5).

Además, de acuerdo con la Proposición VI.1.1,  $\mathcal{F}$  factoriza a través de la categoría homotópica de **CG**.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{CG} & & \\
 \downarrow & \searrow \mathcal{F} & \\
 \mathbf{CG}/\simeq_p & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathbf{Cantor}
 \end{array} \tag{VI.1.C}$$

Si  $\mathbf{Tree} \subset \mathbf{CG}$  es la subcategoría llena de los árboles se tiene

**Teorema VI.1.3** ([6]; II.1.10). *El funtor  $\mathcal{F}$  induce una equivalencia de categorías<sup>1</sup>*

$$\mathcal{F} : \mathbf{Tree}/ \simeq_p \rightarrow \mathbf{Cantor}$$

*En particular dados dos árboles  $T$  y  $T'$  obtenemos una biyección*

$$\mathcal{F} : [T, T']_p \cong \mathbf{Top}(\mathcal{F}(T), \mathcal{F}(T')).$$

*Además  $T$  tiene el mismo tipo de homotopía propia que  $T'$  si y sólo si  $\mathcal{F}(T)$  y  $\mathcal{F}(T')$  son homeomorfos.*

Si consideramos  $\mathbf{Dend} \subset \mathbf{Top}$  la subcategoría llena de los continuos generalizados de Peano dendríticos, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema VI.1.4.** *La inclusión  $\Psi : \mathbf{Tree} \subset \mathbf{Dend}$  induce una equivalencia de categorías homotópicas*

$$\Psi : \mathbf{Tree}/ \simeq_p \rightarrow \mathbf{Dend}/ \simeq_p$$

Del teorema anterior se deduce inmediatamente

**Corolario VI.1.5.** *Dos dendritas son propiamente homotópicamente equivalentes si y sólo si sus espacios de finales de Freudenthal son homeomorfos.*

Como consecuencia de los Teoremas VI.1.4 y VI.1.3 tenemos

**Corolario VI.1.6.** *El funtor  $\mathcal{F}$  en (VI.1.C) induce una equivalencia de categorías*

$$\mathcal{F} : \mathbf{Dend}/ \simeq_p \rightarrow \mathbf{Cantor}$$

---

<sup>1</sup>Una *equivalencia de categorías* entre las categorías  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$  se define como un par de funtores  $\mathcal{S} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ ,  $\mathcal{T} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  junto con isomorfismos naturales  $Id_{\mathbf{C}} \cong \mathcal{T} \circ \mathcal{S}$  e  $Id_{\mathbf{D}} \cong \mathcal{S} \circ \mathcal{T}$ .

En particular obtenemos para los continuos generalizados de Peano dendríticos  $D$  y  $D'$  una biyección

$$\mathcal{F} : [D, D']_p \cong \mathbf{Top}(\mathcal{F}(D), \mathcal{F}(D'))$$

Para la demostración del Teorema VI.1.4 consideraremos la compactificación de Freudenthal de  $D$  y usaremos retracciones  $r_i : \widehat{D} \rightarrow A_i \subset \widehat{D}$  dadas por la bien conocida “aplicación del primer punto” ([59]; 10.26). En concreto, con la notación empleada en la demostración del Teorema III.4.3 se construye  $\widehat{D} = \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i}$  como la clausura de una unión creciente de dendritas compactos  $\widehat{T} = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$  donde cada diferencia  $\overline{A_{i+1}} - A_i$  consiste en un arco  $\gamma_{i+1}$  que toca a  $A_i$  en un único punto. Parametrizamos el arco por una aplicación  $\gamma_{i+1} : [0, 1] \rightarrow A_{i+1} \subset \widehat{D}$  con  $\gamma_{i+1}(0) = A_i \cap \gamma_{i+1}$  y denotamos por  $x_i$  al extremo  $\gamma_{i+1}(1)$ .

La retracción natural  $r_i^{i+1} : A_{i+1} \rightarrow A_i$  está dada por  $r_i^{i+1}(x) = x$  si  $x \in A_i$  y  $r_i^{i+1}(x) = \gamma_i \cap A_i$  si  $x \in A_{i+1} - A_i$ .

Más aún,  $r_i^{i+1}$  se extiende a la retracción  $r_i : \widehat{D} \rightarrow A_i$  que lleva  $x \in \widehat{D} - A_i$  en el punto  $r_i(x) = \lambda_i^x \cap A_i$  que es intersección de  $A_i$  con el único arco  $\lambda_i^x \subset \widehat{D}$  que va de  $x$  a  $A_i$ . De hecho, si  $j_i : A_i \hookrightarrow \widehat{D}$  es la correspondiente inclusión, la sucesión  $\{j_i \circ r_i\}_{i \geq 1}$  converge uniformemente a la identidad  $id_{\widehat{D}}$ ; ver ([59]; 10.27).

**Teorema VI.1.7.** *Todo continuo generalizado de Peano dendrítico  $D$  tiene el mismo tipo de homotopía propia que cualquiera de sus árboles de finales  $T \subset D$  (II.1.18). De hecho  $T$  es un retracto propio de deformación fuerte de  $D$ .*

**Demostración.** Definimos las homotopías  $H_i : A_i \times I \rightarrow A_i$  dadas por  $H_i(x, t) = x$  si  $x \in A_{i-1}$  y  $H_i(x, t) = \gamma_i(st)$  si  $x = \gamma_i(s) \in A_i - A_{i-1}$ .

A partir de las homotopías  $H_i$  definimos  $H : \widehat{D} \times I \rightarrow \widehat{D}$  como sigue. Tomamos  $H(x, 1) = x$  para todo  $x \in \widehat{D}$  y si  $[0, 1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{i-1}{i}, \frac{i}{i+1}]$  entonces para  $t \in [\frac{i-1}{i}, \frac{i}{i+1}]$  definimos  $H(x, t) = j_i H_i(r_i(x), \xi_i(t))$  donde  $\xi_i(t) = (i+1)[it - (i-1)]$ . Nótese que  $H(x, \frac{i-1}{i}) = j_i H_i(r_i(x), 0) = j_{i-1} r_{i-1}(x)$  y  $H(x, \frac{i+1}{i}) = j_i H_i(r_i(x), 1) = j_i r_i(x)$ .

Es claro que  $H$  es continua sobre  $\widehat{D} \times [0, 1)$  ya que es continua en los cerrados  $\widehat{D} \times [\frac{i-1}{i}, \frac{i}{i+1}]$  ( $i \geq 1$ ) que forman una familia localmente finita en  $\widehat{D} \times [0, 1)$ . Así pues sólo es necesario comprobar la continuidad de  $H$  sobre  $\widehat{D} \times \{1\}$ . Para ello usaremos que la sucesión  $\{j_i \circ r_i\}_{i \geq 1}$  converge uniformemente a  $id_{\widehat{D}}$  como se indicó anteriormente. En efecto, sea  $U \subset \widehat{D}$  un entorno abierto localmente conexo (y por tanto arcoconexo) de  $x_0 \in \widehat{D}$ . Sea  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon \subset U$  donde  $B_\epsilon$  es la bola abierta de centro  $x_0$  y radio  $\epsilon$ . En particular, la convergencia uniforme de la sucesión  $\{j_i \circ r_i\}_{i \geq 1}$  nos permite encontrar  $i_0 \geq 1$  tal que  $d(r_i(x), x) < \frac{\epsilon}{2}$  para todo  $i \geq i_0$  y  $x \in \widehat{D}$ .

En particular, si  $B_{\frac{\epsilon}{2}}$  es la bola abierta de centro  $x_0$  y radio  $\frac{\epsilon}{2}$  tenemos que

$$d(r_i(x), x_0) \leq d(r_i(x), x) + d(x, x_0) < \epsilon$$

para todo  $x \in B_{\frac{\epsilon}{2}}$ . Así pues,  $r_i(x) \in B_\epsilon \subset U$  para todo  $x \in B_{\frac{\epsilon}{2}}$  e  $i \geq i_0$  y por tanto  $\lambda_i^x$ , que es el único camino en  $\widehat{D}$  de  $x$  a  $r_i(x) \in A_i$ , está contenido en  $U$  por ser éste arcoconexo. Además, si  $r_i(x) \in A_i - A_{i-1}$ , el subarco  $\Gamma_i^x \subset \gamma_i$  de  $r_i(x)$  a  $A_{i-1}$  está contenido en  $\lambda_{i-1}^x \subset U$  si  $i \geq i_0 + 1$ .

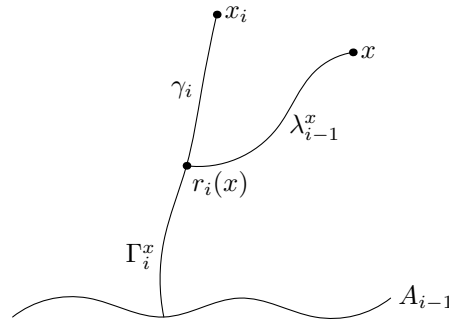


Figura VI.1

Es más, de la definición de la homotopía  $H_i$  se deduce inmediatamente

$$H_i(r_i(x), t) = \Gamma_i^x \subset \lambda_{i-1}^x \subset U \quad \left( \frac{i-1}{i} \leq t \leq \frac{i}{i-1} \right)$$

para  $i \geq i_0 + 1$ . En caso de que  $r_i(x) \in A_{i-1}$  entonces  $H_i(r_i(x), t) = r_i(x) = r_{i-1}(x) \in U$ . Por tanto, de la definición de  $H$  se sigue

$$H \left( B_{\frac{\varepsilon}{2}} \times \left( \frac{i_0}{i_0 + 1}, 1 \right] \right) \subset U$$

lo que demuestra la continuidad de  $H$ . Puesto que  $H^{-1}(\varepsilon) = \{\varepsilon\} \times I$  para todo final  $\varepsilon \in \mathcal{F}(D) = \mathcal{F}(T)$ , se sigue inmediatamente que la restricción  $H : D \times I \rightarrow D$  es una homotopía propia entre  $j_0 r_0$  e  $id_D$ , y  $r_0 : D \rightarrow T$  es un retracto de deformación fuerte en la categoría propia.  $\square$

**Demostración del Teorema VI.1.4.** Sea

$$\Phi : \mathbf{Dend}/ \simeq_p \rightarrow \mathbf{Tree}/ \simeq_p$$

el funtor definido como sigue: dada la dendrita  $D \in \mathbf{Dend}$  escogemos un árbol de finales fijo  $i_D : T_D \subset D$  y una retracción por deformación  $r_D : D \rightarrow T_D$  dada por el Teorema VI.1.7. Más aún, si  $D = T$  es un árbol entonces escogemos  $T_D = T$  y  $r_D = id_T$ . Entonces, si  $f : D \rightarrow D'$  es una aplicación en  $\mathbf{Dend}$ , definimos

$$\Phi[f] = [r_{D'} \circ f \circ i_D] : T_D \rightarrow T_{D'}$$

de acuerdo con el diagrama

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{[f]} & D' \\ \uparrow [i_d] & & \downarrow [r_{D'}] = [i_{D'}]^{-1} \\ T_D & \xrightarrow{\Phi[f]} & T_{D'} \end{array}$$

Entonces la composición  $\Psi \circ \Phi : \mathbf{Dend}/ \simeq_p \rightarrow \mathbf{Dend}/ \simeq_p$  es naturalmente equivalente a  $Id_{\mathbf{Dend}/ \simeq_p}$  por medio de la equivalencia natural

$$\{[r_D] : D \rightarrow \Psi\Phi(D) = T_D\}$$

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{[f]} & D' \\
 \downarrow r_D & & \searrow r_D \\
 T_D & \xrightarrow{\Psi\Phi[f]=\Phi[f]} & T_{D'} = \Psi\Phi(D')
 \end{array}$$

Es más, la composición  $\Psi \circ \Phi = Id_{\mathbf{Tree}/\simeq_p}$  es el funtor identidad por definición de  $\Phi$ . □

El Teorema VI.1.7 también establece que cualquier dendrita es contráctil. De hecho ambas condiciones son equivalentes y cualquiera de ellas caracteriza a los espacios dendríticos entre los continuos generalizados de Peano unidimensionales. Explícitamente tenemos las siguientes caracterizaciones de naturaleza homotópica; compárese con ([69]; 3).

**Teorema VI.1.8.** *Sea  $D$  un continuo generalizado de Peano unidimensional. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a)  $D$  es un espacio dendrítico.
- (b)  $D$  es un retracto de deformación propia fuerte de cualquier árbol de finales  $T \subset D$ . Si  $\mathcal{F}(D) = \emptyset$  (esto es,  $D$  es compacto) entonces  $T$  puede ser cualquier árbol en  $D$ .
- (c)  $D$  es contráctil.
- (d) El grupo fundamental  $\pi_1(D, d_0) = 0$  es trivial.
- (e)  $D$  es no recubrible; esto es, los únicos espacios recubridores de  $D$  son los triviales.
- (f)  $D$  es contráctil respecto a cualquier grafo  $G$ .
- (g)  $D$  es contráctil respecto a  $S^1$ .

**Nota VI.1.9.** Recordemos que todos los dendritas son espacios unidimensionales. Esto sigue del Teorema III.4.3 y ([24]; 7.3.I). Alternativamente, se puede usar el Corolario II.1A.6 como sigue. Sean  $x \in D$  y  $U$  un entorno abierto de  $x$ . Es claro que cada componente en  $\text{Fr}U$  se reduce a un punto (y por tanto

$\dim(\text{Fr}U) = 0$ ; ver ([24]; 6.2.9) pues, de otra forma, cualquier componente conexa no trivial  $C$  es arcoconexa por el Corolario II.1A.6, y entonces es fácil encontrar un ciclo en la unión de los arcos  $\Gamma \cup \alpha \cup \beta$  donde  $\Gamma \subset C$  y  $\alpha$  y  $\beta$  son arcos en  $D$  que unen  $x \notin \Gamma$  con los extremos de  $\Gamma$ .

**Demostración del Teorema VI.1.8.** Obsérvese que (a)  $\Rightarrow$  (b) es el Teorema VI.1.7 mientras que (b)  $\Rightarrow$  (c)  $\Rightarrow$  (d) y (f)  $\Rightarrow$  (g) son obvias. Además, (d)  $\Rightarrow$  (e) es un hecho bien conocido en teoría de homotopía (ver ([26]; 3.4.32)).

(e)  $\Rightarrow$  (f) Supongamos que existe  $f : D \rightarrow G$  que no es homotópicamente trivial. Al ser  $G$  un grafo, su recubridor universal  $p : \tilde{G} \rightarrow G$  es un árbol. Es más, podemos asegurar que  $\tilde{G}$  es un grafo cuyos vértices y aristas son el levantamiento por  $p$  de los vértices y aristas de  $G$  ([73]; 3.8.3). Entonces la construcción llamada pull-back, nos da un espacio recubridor  $\tilde{D}$  de  $D$  que encaja en el siguiente diagrama

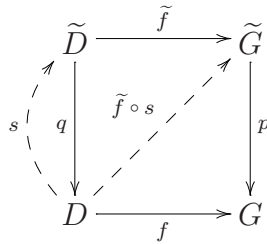
$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{D} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{G} \\
 \downarrow q & & \downarrow p \\
 D & \xrightarrow{f} & G
 \end{array}$$

donde  $\tilde{D} = \{(x, d) \in \tilde{G} \times D, p(x) = f(d)\}$ ,  $\tilde{f}(x, d) = x$  y  $q(x, d) = d$ .

Al ser  $D$  no recubrible por hipótesis, el espacio recubridor  $\tilde{D}$  es necesariamente trivial; esto es, existe un diagrama conmutativo

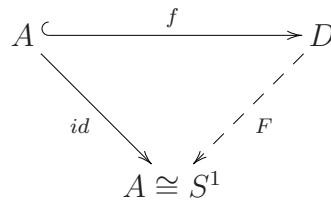
$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{D} & \xrightarrow{\cong} & D \times F \\
 \searrow q & & \swarrow \pi_1 \\
 & D &
 \end{array}$$

por lo que tenemos que escogiendo una sección  $s : D \rightarrow \tilde{D}$  la composición  $f = p \circ \tilde{f} \circ s$  factoriza a través de  $\tilde{G}$ .



En consecuencia  $f$  debería ser homotópicamente trivial lo que contradice la suposición de partida.

Sólo queda demostrar (g)  $\Rightarrow$  (a). Por reducción al absurdo supongamos que  $D$  no es dendrítico; es decir, que existe una inmersión  $f : A \hookrightarrow D$  donde  $A$  es una curva cerrada simple. Al ser  $X$  unidimensional, ([24]; 1.9.2) nos asegura que existe una extensión de  $f$  a todo  $X$ ,  $F : D \rightarrow S^1$ ,



Por hipótesis  $F$  es homotópicamente trivial y por tanto del diagrama anterior se desprende que  $id$  también lo es. Como ésto no es posible por el bien conocido Teorema de la no retracción, la demostración concluye. □

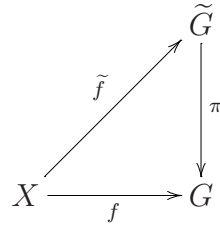
## §VI.2.    Aplicaciones confluentes y aplicaciones propiamente esenciales

En la teoría de homotopía ordinaria una aplicación homotópica a una aplicación constante se denomina *inesencial* (en otro caso se dice *esencial*). El siguiente lema nos da una caracterización intrínseca en la categoría propia de aquellas aplicaciones propias con codominio un grafo que son inesenciales.

**Lema VI.2.1.** *Sea  $f : X \rightarrow G$  una aplicación propia de un continuo generalizado  $X$  en un grafo  $G$ . Entonces  $f$  es inesencial si y sólo si  $f = g \circ r$  es una composición de aplicaciones propias donde  $g : T \rightarrow G$  está definida en un árbol  $T$ .*



**Demostración.** Supongamos que  $f$  es inesencial, entonces por ([73]; 2.2.3) existe un levantamiento de  $f$



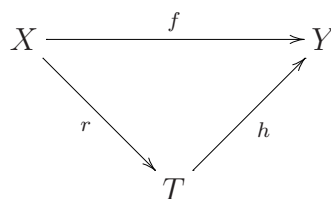
al espacio de recubrimiento universal de  $G$  que es un árbol localmente finito. Aquí usamos que  $G$  es localmente finito. Más aún,  $\tilde{f}$  es propia; en efecto, puesto que  $f$  es propia,  $f^{-1}(\pi(K))$  es compacto para cualquier conjunto compacto  $K \subset \tilde{G}$  y la conmutatividad del diagrama anterior establece la inclusión  $\tilde{f}^{-1}(K) \subset f^{-1}(\pi(K))$ . Así el conjunto cerrado  $\tilde{f}^{-1}(K)$  es compacto.

Al ser  $\tilde{f}$  es propia, el espacio conexo  $T = \tilde{f}(X)$  es un subárbol cerrado de  $\tilde{G}$ . Sea  $r : X \rightarrow T$  la restricción de  $\tilde{f}$  sobre la imagen. Es más, aunque  $\pi$  no es propia en general, la restricción  $g = \pi|_T : T \rightarrow G$  es propia; en efecto, sea  $L \subset G$  un compacto. Como  $f$  es propia,  $f^{-1}(L)$  es compacto y entonces también lo es  $\tilde{f}(f^{-1}(L))$ . Se comprueba inmediatamente que  $g^{-1}(L) \subset \tilde{f}(f^{-1}(L))$  y por tanto el conjunto cerrado  $g^{-1}(L)$  es compacto. De esta forma obtenemos la factorización requerida  $f = r \circ g$ .

El recíproco sigue directamente del hecho de que cualquier árbol es contráctil. □

En la teoría de homotopía propia los puntos son reemplazados por árboles para tener en cuenta los finales de los espacios. Así,

**Definición VI.2.2.** Dada una aplicación fiel en los finales  $h : T \rightarrow Y$  donde  $T$  es un árbol, diremos que una aplicación propia  $f : X \rightarrow Y$  es *propriamente  $h$ -inesencial* si existe un diagrama de aplicaciones propias



que conmuta salvo homotopía propia. Diremos que  $f$  es *propriadamente inesencial* cuando sea propriadamente  $h$ -inesencial para todo  $h$ . De otra manera,  $f$  se dirá *propriadamente  $h$ -esencial* o *propriadamente esencial*, respectivamente. Naturalmente, si  $X$  ó  $Y$  (y, necesariamente también  $X$  en este caso) es compacto entonces todo queda reducido a las aplicaciones esenciales e inesenciales ordinarias.

**Nota VI.2.3.** Un ejemplo trivial de aplicación propia que es inesencial pero propriadamente  $h$ -esencial para todo  $h$  es la inclusión de la recta real  $\mathbb{R}$  en la unión  $Y$  del eje  $OX$  con una sucesión de circunferencias  $C_n$  de radios  $n \geq 1$ .

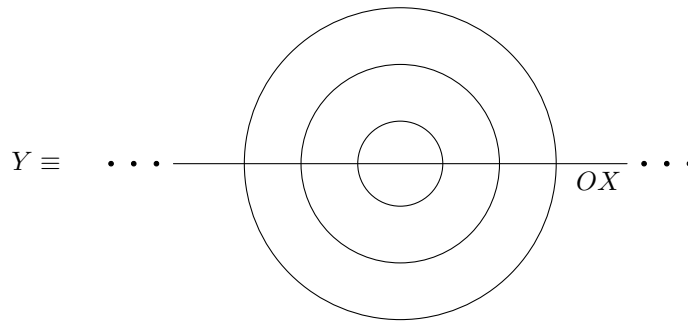


Figura VI.2

En contraste, cualquier aplicación fiel en los finales  $f : X \rightarrow G$  de un continuo generalizado a un grafo que sea inesencial es propriadamente  $h$ -inesencial para algún  $h$ . En efecto, en la factorización  $f : X \xrightarrow{g} T \xrightarrow{h} G$  a través de un árbol  $T$  proporcionada por el Lema VI.2.1 podemos reemplazar, si es necesario, el árbol  $T$  por su subárbol cerrado  $g(X) \subset T$  de forma que no hay pérdida de generalidad en asumir que  $g$  es sobreyectiva. Esto establece que la aplicación inducida  $g_* : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(T)$  también es sobreyectiva (III.2.12). Como  $f_*$  es un homeomorfismo, se sigue que  $g_*$ , y por tanto  $h_*$ , son inyectivas, y consecuentemente son homeomorfismos. Así,  $f$  es propriadamente  $h$ -inesencial.

**Nota VI.2.4.** Notemos que para los espacios de llegada con un único final fuerte, las aplicaciones propriadamente esenciales coinciden con las aplicaciones propriadamente  $h$ -esenciales para cualquier  $h$  fijado. Recordemos que  $\mathbb{R}^n$  con  $n \geq 2$  es un ejemplo clásico de espacio con un final fuerte (una demostración sigue directamente del Lema VI.3.11 más adelante).

Incluimos en esta sección dos resultados sobre la esencialidad de las aplicaciones propias confluentes. Comenzamos con la extensión al caso no compacto del conocido resultado en la teoría de continuos que establece que las aplicaciones confluentes de continuos sobre grafos no contráctiles son esenciales; ver ([59]; 13.39) para una demostración.

**Proposición VI.2.5.** *Cualquier sobreyección confluente propia  $f : X \rightarrow G$  de un continuo generalizado sobre un grafo no contráctil es esencial.*

**Demostración.** En otro caso, por el Lema VI.2.1,  $f : X \xrightarrow{g} T \xrightarrow{h} G$  factoriza a través de un árbol  $T$ . Entonces puesto que la composición  $f = h \circ g$  es confluente, por la Proposición IV.2.4 se tiene que también lo es  $h$ . Pero entonces, el Teorema IV.2.9 establece que  $G$  es un árbol, lo que es una contradicción.  $\square$

**Nota VI.2.6.** En el enunciado de la Proposición VI.2.5 no se puede prescindir de la suposición de que  $f$  sea propia. En efecto, la aplicación exponencial  $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$   $f(s) = e^{2\pi is}$  es confluente inesencial y no propia.

El siguiente teorema no tiene análogo en la teoría de homotopía ordinaria pues el plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$  es contráctil.

**Teorema VI.2.7.** *Sea  $X$  un continuo generalizado. Cualquier sobreyección confluente propia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$  es propiamente esencial.*

**Demostración.** De lo contrario, supongamos que  $f$  no es propiamente esencial. Entonces existe una homotopía propia  $H : X \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $H|_{X \times \{0\}} = f$  y  $H|_{X \times \{1\}} = i \circ r$  donde  $i : \mathbb{R}_{\geq 0} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$  puede suponerse que es la inclusión  $x \mapsto (x, 0)$  de acuerdo con la Nota VI.2.4. Como  $H$  es propia, existe un subconjunto compacto  $L \subset X$  con

$$H((X - L) \times I) \subset \mathbb{R}^2 - B \tag{VI.2.A}$$

donde  $B$  denota el disco unidad abierto en  $\mathbb{R}^2$  centrado en el origen. La compacidad de  $f(L)$  nos permite encontrar un  $a > 0$  suficientemente grande tal que  $S_a \cap f(L) = \emptyset$  para la circunferencia  $S_a \subset \mathbb{R}^2$  de radio  $a$ . Por lo tanto,

$$H(f^{-1}(S_a) \times I) \subset H((X - L) \times I) \subset \mathbb{R}^2 - B.$$

Además, como  $f$  es confluyente, también lo es su restricción  $f|_{f^{-1}(S_a)} : f^{-1}(S_a) \rightarrow S_a$ , (IV.2.7) y por tanto, si  $A$  es un componente conexa de  $f^{-1}(S_a)$  tenemos que  $f(A) = S_a$  y la restricción sobre la imagen  $f_a = f : A \rightarrow S_a$  es confluyente (IV.2.6), y por tanto esencial ([59], 13.39). Sin embargo, la restricción  $H : A \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 - B$  es una homotopía entre  $f|_A : A \rightarrow \mathbb{R}^2 - B$  y  $i \circ r|_A$ , donde esta composición factoriza a través del intervalo  $r(A)$  y entonces es inessential. Finalmente, la retracción obvia  $\rho : \mathbb{R}^2 - B \rightarrow S_a$  es una equivalencia de homotopía y por tanto  $f_a = \rho \circ f|_A$  es inessential. Esto conduce a una contradicción y la demostración concluye.  $\square$

**Nota VI.2.8.** Como una consecuencia del Teorema VI.2.7, no hay aplicaciones propias confluentes  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$  para  $n \geq 3$ . Esto sigue del hecho bien conocido de que el conjunto de las clases de homotopía propia  $[\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^2]_p = *$  se reduce al elemento trivial; ver ([6]; V.4.11) para una demostración. Obsérvese que la proyección natural  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$  es confluyente. Discutiremos la existencia de aplicaciones propias confluentes con más detalle en la Sección §VI.4.

### §VI.3. Algunas propiedades homotópicas relacionadas con los espacios tipo árbol en la categoría propia

Según el Teorema IV.2.9, las aplicaciones propias confluentes preservan árboles. Comenzamos discutiendo si dichas aplicaciones preservan también los espacios tipo árbol. De hecho, el Teorema IV.2.9 muestra que esta cuestión tiene una respuesta positiva bajo la suposición de conexión local puesto que los espacios tipo árbol localmente conexos son exactamente dendritas tal y como se demuestra en el Teorema III.4.3. Esto nos permite reescribir el Teorema IV.2.9 como sigue

**Teorema VI.3.1.** *La imagen por una aplicación confluyente propia y sobreyectiva de un continuo generalizado de Peano tipo árbol es un continuo generalizado de Peano tipo árbol.*

Seguidamente procedemos a analizar el caso general sin la suposición de conexión local. Para continuos, McLean demostró el siguiente

**Teorema VI.3.2** ([52]; Thm. 2.1). *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación confluyente de un continuo unidimensional  $X$  tipo árbol a un continuo unidimensional  $Y$ , entonces  $Y$  es tipo árbol.*

La demostración depende de manera crucial de la siguiente caracterización homotópica debida a Case y Chamberlin de los espacios tipo árbol.

**Teorema VI.3.3** ([13]; Thm. 1). *Un continuo unidimensional  $X$  es tipo árbol si y sólo si cualquier aplicación continua sobre un grafo compacto es inesencial.*

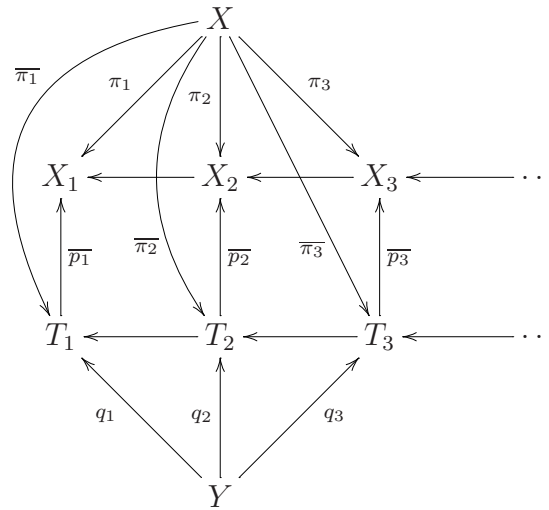
Una extensión parcial del teorema anterior al ambiente no compacto es el siguiente

**Teorema VI.3.4.** *Sea  $X$  un continuo generalizado unidimensional. Si, para cualquier grafo  $G$ , cada sobreyección propia  $f : X \rightarrow G$  es inesencial, entonces  $X$  es tipo árbol.*

**Demostración.** Por la versión propia del Teorema de Freudenthal (III.4A.2),  $X = \lim_{\leftarrow p} \{X_n, f_n\}$  es un límite inverso de grafos con aplicaciones de enlace propias  $f_n : X_{n+1} \rightarrow X_n$ . Denotemos por  $\pi_n : X \rightarrow X_n$  las proyecciones canónicas.

Para cada  $n \geq 1$  consideramos el recubrimiento universal  $p_n : \widetilde{X}_n \rightarrow X_n$  y escojamos un punto  $(x_n^0)_{n \geq 1} \in X$ . Como la aplicación  $\pi_n$  es inesencial, dado  $\widetilde{x}_n^0 \in p_n^{-1}(x_n^0)$ , existe un levantamiento  $\widetilde{\pi}_n : X \rightarrow \widetilde{X}_n$  con  $\widetilde{\pi}_n(x) = \widetilde{x}_n^0$ . Aquí usamos ([73]; 2.4.1). De forma similar, la propiedad de recubrimiento de homotopías ([73]; 2.2.3) nos da aplicaciones  $\widetilde{f}_n : \widetilde{X}_{n+1} \rightarrow \widetilde{X}_n$  con  $\widetilde{f}_n(\widetilde{x}_{n+1}^0) = \widetilde{x}_n^0$  tal que  $p_n \circ \widetilde{f}_n = f_n \circ p_{n+1}$ .

Igual que se hizo en la demostración del Lema VI.2.1, consideremos para cada  $n \geq 1$  el subárbol  $T_n = \widetilde{\pi}_n(X) \subset \widetilde{X}_n$  para el que las restricciones  $\overline{p}_n : T_n \rightarrow X_n$  y  $\overline{\pi}_n : X \rightarrow T_n$  de  $p_n$  y  $\widetilde{\pi}_n$ , respectivamente, son aplicaciones propias. Más aún, se puede comprobar sin dificultad que  $\widetilde{f}_n(T_{n+1}) = T_n$  y que  $\widetilde{f}_n : T_{n+1} \rightarrow T_n$  es propia. Sea  $Y = \lim_{\leftarrow p} \{T_n, \widetilde{f}_n\}$  el correspondiente límite inverso y  $q_n : Y \rightarrow T_n$  las proyecciones canónicas. Tenemos así el siguiente diagrama conmutativo



Finalmente, observemos que las aplicaciones  $\overline{\pi}_n$  inducen una aplicación  $\overline{p} : Y \rightarrow X$  para la cual la aplicación  $\phi : X \rightarrow Y$  definida por  $\phi(x) = (\overline{\pi}_n(x))_{n \geq 1}$  es una sección; esto es,  $\overline{p} \circ \phi = id_X$ . En efecto,  $\phi$  está bien definida por la unicidad de levantamientos ([73]; 2.2.2) pues tanto  $\tilde{f}_n \circ \pi_{n+1}$  como  $\tilde{\pi}_n$  son levantamientos de  $\pi_n$  por  $\tilde{x}_n^0$ . Más aún

$$(\overline{p}_n \overline{\pi}_n(x))_{n \geq 1} = (\pi_n(x))_{n \geq 1}$$

Además, como  $\phi^{-1}(A) \subset \overline{p}(A)$  para cualquier conjunto  $A \subset Y$ , se sigue que  $\phi$  es una inmersión propia, y así  $\phi(X)$  es un conjunto cerrado conexo de  $Y$ . Es más,  $\phi(X) = \varprojlim_p \{q_n(\phi(X)), \tilde{f}'_n\}$  para las correspondientes restricciones de  $\tilde{f}_n$  (III.2.6) y así,  $X$  es homeomorfo al espacio tipo árbol  $\phi(X)$  obtenido como límite inverso de subárboles  $q_n(\phi(X)) \subset T_n$ . □

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco del Teorema VI.3.4 no es cierto incluso para aplicaciones fieles en los finales.

**Ejemplo VI.3.5.** Consideremos el subespacio  $X \subset \mathbb{R}^2$  descrito en líneas gruesas en la Figura VI.3 y denotemos por  $G$  la cuerda de círculos  $\{C_n\}_{n \geq 1}$  (numerados de izquierda a derecha) de diámetro  $\frac{1}{4}$  y segmentos horizontales localizada en mitad de la misma figura. Si  $X_{-1}$  y  $X_1$  son los subespacios de  $X$  por encima y por debajo de  $G$ , respectivamente, definimos la sobreyección propia fiel a los finales  $f : X \rightarrow G$  como sigue. Para cualquier  $x \in X_\epsilon$  ( $\epsilon = \pm 1$ ),

$f(x) \in \Gamma_x^\epsilon \cap G$  es el primer punto en la intersección del grafo  $G$  con la semirecta  $\Gamma_x^\epsilon = \{x + \lambda(0, \epsilon); \lambda \geq 0\}$ .

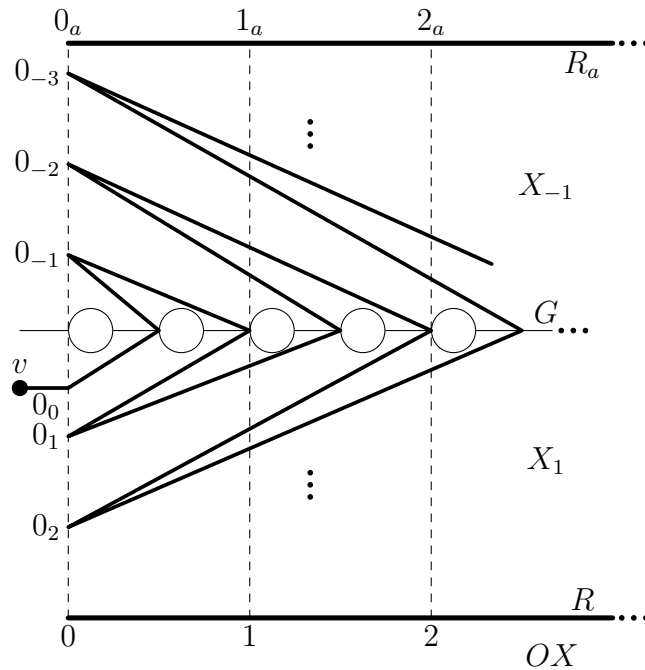


Figura VI.3

Tenemos que  $f$  es esencial ya que en caso contrario, por la Nota VI.2.3, la aplicación  $f = h \circ g$  es una composición de aplicaciones propias con  $h$  definida sobre un árbol  $T$  con un sólo final, y por tanto del mismo tipo de homotopía propia que  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  (VI.1.3). Pero esto conduce a una contradicción pues los rayos  $g = f|_R : R \cong \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow G$  y  $g' = f|_{R_a} : R_a \cong \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow G$  representan diferentes finales fuertes de  $G$ . En efecto, si no es así existe una homotopía propia  $H : \mathbb{R}_{\geq 0} \times I \rightarrow G$  con  $H(x, 0) = g(x)$  y  $H(x, 1) = g'(x)$ . Entonces, escogemos  $n_0 \geq 1$  suficientemente grande para que  $C_{n_0} \cap H(\{0\} \times I) = \emptyset$ . Más aún, sean  $P_0$  y  $P_1$  las clausuras de las componentes compacta y no compacta del complementario  $G - C_{n_0}$ , respectivamente, y  $r : G \rightarrow C_{n_0}$  la retracción que lleva todo  $P_i$  al punto  $x_i = P_i \cap C_{n_0}$  ( $i = 0, 1$ ). Seguidamente usamos que  $H$  es propia para encontrar  $m_0 \geq n_0$  con  $H([m_0, \infty) \times I) \subset P_1$  y observamos que la composición  $F = r \circ H : [0, m_0] \times I \rightarrow C_{n_0}$  restringida al borde  $\partial L$  de  $L = [0, m_0] \times I$  define un lazo  $\alpha = F|_{\partial L}$  que coincide con  $g \cup g'$  sobre  $A = [\frac{n_0}{2}, \frac{2n_0+1}{4}] \times \{0, 1\}$  y lleva las componentes de  $(0, 0)$  y  $(m_0, 0)$  en  $L - A$  sobre  $x_0$  y  $x_1$ , respectivamente. Por tanto,  $\alpha$  representa un generador del grupo

fundamental  $\pi_1(C_{n_0}) \cong \mathbb{Z}$  pero, por otro lado,  $\alpha$  es nulhomotópica por  $F$ . Esta contradicción muestra que  $g$  y  $g'$  definen distintos finales fuertes de  $G$ .

Queda comprobar que  $X$  es un espacio tipo árbol. En efecto, veremos que  $X = \varprojlim_p \{T_n, f_n\}$ , donde  $T_n$  ( $n \geq 0$ ) es el árbol que consiste en la unión por un punto de una copia  $[0_a, n_a]$  del intervalo  $[0, n] \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$  con la semirecta  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  mediante la identificación  $n = n_a$ , junto con un segmento extra  $A_n = [v_n, 0_a]$  añadido en  $0_a$ ; ver Figura VI.4.

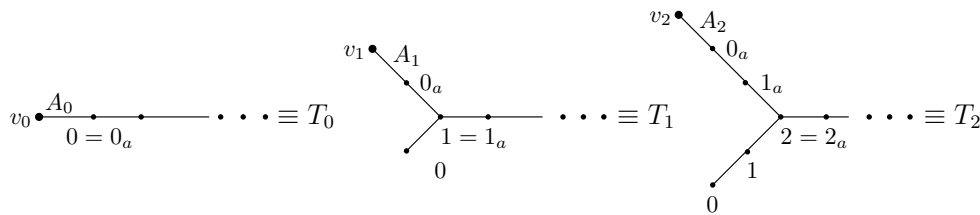


Figura VI.4:

Comenzamos definiendo para cada  $n \geq 0$  la sobreyección propia  $\pi_n : X \rightarrow T_n$  como la proyección obvia en el subespacio de  $X$  que cae en el semiplano  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq n\}$  y la aplicación lineal que lleva los  $l(n) = 4n^2 - 2n + 1$  segmentos que forman el arco poligonal  $R_n \subset X$  que va desde  $v$  a  $0_{-n}$  en  $l(n)$  intervalos consecutivos adyacentes que cubran el segmento  $A_n$ . Finalmente, todos los segmentos contenidos en  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq n\}$  que no tocan  $R_n$  y contienen  $0_{-k}$ , con  $k \geq n$ , son llevados linealmente sobre  $[0_a, n_a]$ , mientras que los segmentos que contienen  $0_k$ , con  $k \geq n$ , son llevados linealmente sobre  $[0, n]$ .

Seguidamente definiremos, para cada  $n \geq 0$ , la aplicación de enlace  $f_{n+1} : T_{n+1} \rightarrow T_n$  como la aplicación lineal a trozos que es la identidad en  $[0, \infty) \cup [0_a, n_a]$  y lleva el intervalo  $[n_a, (n+1)_a]$  sobre  $[n, n+1]$  de la forma obvia. Más aún,  $f_n$  lleva los primeros  $l(n)$  segmentos de los  $l(n+1)$  que componen la partición  $\pi_{n+1}(R_{n+1}) = A_{n+1}$  de  $A_n$  sobre los  $l(n)$  segmentos de la partición  $\pi_n(R_n) = A_n$  y los  $l(n+1) - l(n)$  intervalos restantes tal y como se especifica en la Figura VI.5.

Se comprueba sin dificultad a partir de las definiciones que tanto  $\pi_n$  como  $f_n$  son aplicaciones propias para las que  $f_n \circ \pi_{n+1} = \pi_n$  para todo  $n \geq 0$ . También se puede comprobar que la aplicación  $\phi : X \rightarrow \varprojlim_p \{T_n, f_n\}$  definida



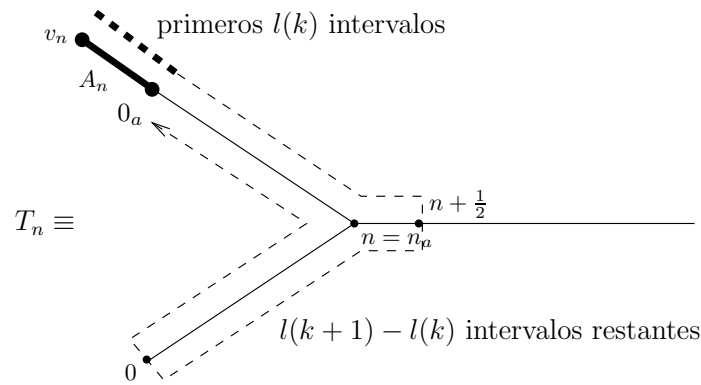


Figura VI.5:  $f_n(A_{n+1}) \subset T_n$ .

por  $\phi(x) = (\pi_0(x), \pi_1(x), \pi_2(x), \dots)$  es una biyección propia y por tanto un homeomorfismo, demostrando así que  $X$  es tipo árbol.

En caso de restringirnos a los continuos generalizados de Peano, tenemos el siguiente resultado que añade dos nuevas caracterizaciones a aquellas ya dadas en los Teoremas III.4.3 y VI.1.8.

**Teorema VI.3.6** (c.f. ([13]; Thm. 1)). *Sea  $X$  un continuo generalizado de Peano unidimensional. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (a)  $X$  es tipo árbol.
- (b) *Cualquier aplicación propia fiel en los finales  $f : X \rightarrow G$  en un grafo es propiamente  $h$ -inesencial para algún  $h$ .*
- (c) *Cualquier aplicación propia  $f : X \rightarrow G$  en un grafo es inesencial.*

**Demostración.** La implicación (c)  $\Rightarrow$  (b) es la Nota VI.2.3. Además (a)  $\Rightarrow$  (c) es obvio ya que todo árbol es contráctil. Finalmente, para probar (b)  $\Rightarrow$  (a) bastará ver que  $X$  es una dendrita ya que por el Teorema III.4.3 todo dendrita es tipo árbol. Para ello, supongamos por el contrario que existe una curva cerrada simple  $\Sigma \subset X$  (ver Proposición II.1A.3). Si  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión exhaustiva de subcontinuos de Peano de  $X$  (II.1.7), podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\Sigma \subset \text{int}K_1$ . Sea  $r : X \rightarrow T$  una sobreyección fiel en los finales (VI.1.7), para la que podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $r(K_1) = v_0$  es un vértice de  $T$ .

Consideremos el grafo  $G$  definido identificando un punto de  $\Sigma$  con  $v_0 \in T$ . Usando la unidimensionalidad de  $X$ , y por tanto de  $K_1$ , extendemos la aplicación  $id \cup r : \Sigma \cup FrK_1 \rightarrow \Sigma$  a una aplicación  $r_1 : K_1 \rightarrow \Sigma$ . Aquí usamos ([24]; 7.4.13). Así, pegando  $r_1$  y  $r|_{X-intK_1}$  tenemos una aplicación fiel en los finales bien definida  $f : X \rightarrow G$  que es esencial pues  $f$  es la identidad sobre  $\Sigma$  y por tanto propiamente  $h$ -esencial para toda aplicación  $h$  fiel en los finales. Esto contradice (d) y la demostración termina.  $\square$

Al igual que el Teorema de Case y Chamberlin (VI.3.3), el Teorema de McLean (VI.3.2) tampoco es cierto en la categoría propia; esto es, las aplicaciones confluentes propias no preservan los continuos generalizados tipo árbol tal y como muestra el siguiente

**Ejemplo VI.3.7.** Sea  $X \subset \mathbb{R}^2$  el continuo generalizado con dos finales dibujado con línea gruesa en la Figura VI.6. El espacio  $X$  es tipo árbol, de hecho tipo línea; en efecto,  $X = \varprojlim_p \{T_n, f_n\}$  donde  $T_n \cong \mathbb{R}$  es la línea en la Figura VI.6 que consiste en las dos semirectas  $R_1$  y  $R_2$  junto con el arco en  $X$  limitado por los dos “picos” de altura  $n$ . Más aún, la aplicación canónica  $\pi_n : X \rightarrow T_n$  lleva  $x = (x_1, x_2)$  con  $x_1 \leq 0$  ( $x_1 \geq 0$ , respectivamente) al primer punto en la intersección  $\Gamma_x \cap T_n$  donde  $\Gamma_x$  la semirecta horizontal que empieza en  $x$  y corre hacia la derecha (izquierda, resp.). Las aplicaciones de enlace  $f_n : T_{n+1} \rightarrow T_n$  se definen de una manera similar. No es difícil comprobar que  $\pi_n$  y  $f_n$  son sobreyecciones propias para todo  $n \geq 1$  y que  $X = \varprojlim_p \{T_n, f_n\}$ .

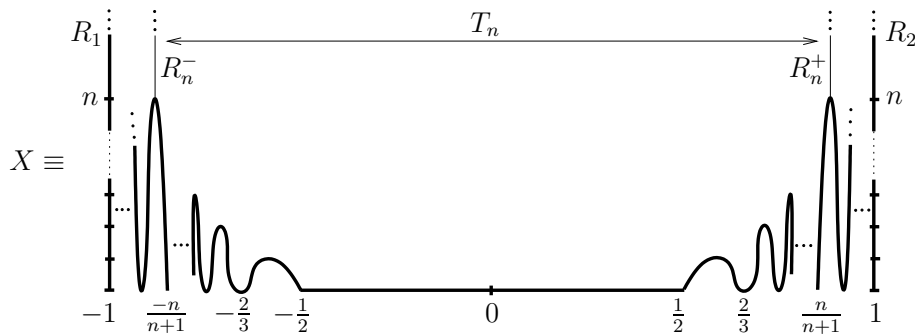


Figura VI.6

Por otro lado, si  $Y$  es el continuo generalizado de la Figura VI.7 tomamos la sobreyección propia  $f : X \rightarrow Y$  que lleva 0 a  $w$ , deja fijos los puntos que quedan a la derecha de  $\frac{1}{2}$  en  $X$  y lleva  $\frac{-n}{n+1}$  a  $\frac{n+1}{n}$ . Nótese que  $f$  es confluyente pues

cualquier continuo  $C \subset Y$  es un arco contenido o bien en el rayo  $R_2 = f(R_1)$  o en su complemento  $Y - R_2$ .

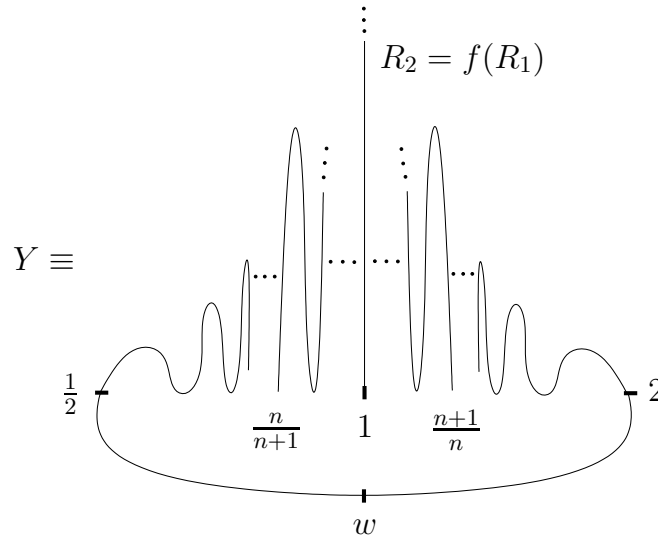


Figura VI.7

Sin embargo,  $Y$  no es tipo árbol (o equivalentemente tipo rayo). En efecto, supongamos por un momento que  $Y = \varprojlim_p \{Y_n, g_n\}$  con aplicaciones canónicas  $q_n : Y \rightarrow Y_n$  donde  $Y_n$  es un árbol para cada  $n \geq 1$ . De hecho, podemos reemplazar, si fuera necesario, los árboles  $Y_n$  por los subárboles cerrados  $q_n(Y) \subset Y_n$  y todavía  $Y = \varprojlim_p \{q_n(Y), h_n\}$  para las restricciones de  $h_n = g_n|_{q_n(Y)}$  (III.2.6). De esta forma podemos asumir sin pérdida de generalidad que las aplicaciones  $q_n$  son sobreyectivas y los árboles  $Y_n$  tienen un único final. En particular las compactificaciones  $Y_n^+ = \widehat{Y_n}$  son dendritas (II.1A.5). Es más, de acuerdo con la Proposición III.1.6,  $Y^+ = \varprojlim_p \{Y_n^+, g_n^+\}$  es un límite inverso “punteado” con las extensiones  $q_n^+ : Y^+ \rightarrow Y_n^+$  como aplicaciones canónicas.

Sea  $Y = A \cup B$  la descomposición de  $Y$  en los dos subcontinuos generalizados simétricos y cerrados obvios con  $A \cap B = R_2 \cup \{w\}$ . Para los subcontinuos correspondientes  $A^+, B^+ \subset Y^+$ , cada intersección  $q_n^+(A^+) \cap q_n^+(B^+)$  es también un subcontinuo pues  $Y_n^+$  es una dendrita y por tanto unicoherente (II.1A.7(c)). Más aún,  $\varprojlim_p \{q_n^+(A^+) \cap q_n^+(B^+), \tilde{g}_n^+\} = A^+ \cap B^+$  para las restricciones obvias de  $g_n^+$  (B.6(b)), y entonces  $A^+ \cap B^+ = R_2^+ \cup \{w\}$  debe ser conexo. Esta contradicción muestra que  $Y = f(X)$  no es tipo árbol.

**Cuestión VI.3.8.** En el ejemplo anterior  $X$  tiene dos finales mientras que  $Y$

sólo tiene uno. Por tanto, todavía permanece abierta la cuestión de determinar si las aplicaciones propias confluentes fieles en los finales preservan los espacios tipo árbol.

Junto con la caracterización homotópica de los continuos tipo árbol de Case-Chamberlin (VI.3.3), el otro ingrediente fundamental de la demostración en [52] de la invarianza de los continuos tipo árbol bajo aplicaciones confluentes es el hecho de que dado un grafo  $G$  y una aplicación confluyente  $f : X \rightarrow Y$  entre continuos, la aplicación

$$f^\# : [Y, G] \rightarrow [X, G]$$

definida por  $f^\#([g]) = [g \circ f]$  refleja el elemento trivial; esto es,  $g$  es inessential si y sólo si también lo es  $g \circ f$ . Seguidamente probamos dos análogos propios a esta propiedad. Comenzamos con el siguiente teorema que proviene de un resultado de Lelek ([48]; pág.229).

**Teorema VI.3.9.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una sobreyección propia y confluyente entre continuos generalizados. Si para la aplicación propia  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^2$  la composición  $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$  es propiamente inessential, entonces también lo es  $g$ .*

Para la demostración del Teorema VI.3.9 observamos que el resultado original de Lelek en [48] se extiende fácilmente a

**Proposición VI.3.10.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una sobreyección propia confluyente entre espacios admisibles. Si  $g : Y \rightarrow S^1$  es una aplicación continua tal que  $g \circ f : X \rightarrow S^1$  es inessential, entonces  $g : Y \rightarrow S^1$  es inessential.*

**Demostración.** Sea  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  el recubrimiento universal de  $S^1$  dado por la función exponencial  $f(t) = e^{2\pi it}$ . Puesto que  $g \circ f$  es homotópicamente trivial, existe un levantamiento  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  de  $g \circ f$ . Debido a que  $f$  es propia, el subconjunto  $A_y = \varphi(f^{-1}(y)) \subset p^{-1}(g(y)) \cong \mathbb{Z}$  es compacto, y por tanto finito. Sea  $m_y$  el mínimo de  $A_y$  en el orden de  $\mathbb{R}$ .

La aplicación  $\psi : Y \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\psi(y) = m_y$  es continua. En efecto, para cualquier subconjunto compacto  $K \subset Y$ ,  $f^{-1}(K)$  es también compacto. Aquí usamos que  $f$  es propia. Es más, por el Lema IV.2.7 la restricción

$f : f^{-1}(K) \rightarrow K$  es confluyente y para cualquier componente  $H \subset f^{-1}(K)$  la restricción  $f|_H : H \rightarrow K$  es también confluyente (IV.2.6). Entonces la demostración del teorema ([48]; pág. 299) aplicado a  $f|_H$  demuestra que  $\psi$  es continua en el compacto arbitrario  $K \subset Y$ , de aquí se sigue que  $\psi$  es continua en todo  $Y$ .  $\square$

La demostración del Teorema VI.3.9 también usa el siguiente lema bien conocido en teoría de homotopía propia. Por completitud damos aquí una demostración.

**Lema VI.3.11.** *Sea  $X$  un espacio admisible. Para cualquier espacio compacto  $K$  la proyección canónica  $p_1 : K \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow K$  induce una biyección entre clases de homotopía*

$$p_1 : [X, K \times \mathbb{R}_{\geq 0}]_p \rightarrow [X, K].$$

**Demostración.** Sea  $r : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  una aplicación propia<sup>2</sup>, entonces para cualquier aplicación  $f : X \rightarrow K$  la igualdad  $\tilde{f}(x) = (f(x), r(x))$  define una aplicación propia  $\tilde{f} : X \rightarrow K \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  pues  $\tilde{f}^{-1}(K \times [0, a]) \subset r^{-1}([0, a])$  para todo  $a \geq 0$ . Claramente  $p_{1*}[\tilde{f}] = f$ , y así  $p_{1*}$  es sobreyectiva.

Más aún, si  $f, g : X \rightarrow K \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  son aplicaciones propias y  $H$  es una homotopía entre  $p_1 \circ f$  y  $p_1 \circ g$  consideramos la aplicación  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow K \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  dada por  $\tilde{H}(x, t) = (H(x, t), F(x, t))$  donde  $F : X \times I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  es una homotopía propia de  $p_2 \circ f$  a  $p_2 \circ g$ . Aquí usamos el hecho bien conocido de que  $[X, \mathbb{R}_{\geq 0}]_p = \{*\}$  se reduce a un elemento<sup>3</sup>. Igual que  $\tilde{f}$  en la primera parte,  $\tilde{H}$  resulta ser una homotopía propia entre  $f$  y  $g$ , y así  $p_{1*}$  es inyectiva.  $\square$

**Demostración del Teorema VI.3.9.** Sea  $H : X \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una homotopía propia entre  $g \circ f$  y la composición  $i \circ r$  donde  $r : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  es una aplicación propia e  $i : \mathbb{R}_{\geq 0} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$  puede suponerse la inclusión canónica  $x \mapsto (x, 0)$  (ver

<sup>2</sup>Tal aplicación puede ser construida por el siguiente argumento bien conocido: si  $\{K_j\}_{j \geq 0}$  es una sucesión exhaustiva de  $X$  con  $K_0 = \emptyset$ , el Teorema de extensión de Tietze proporciona aplicaciones continuas  $f_j = \overline{K_{j+1} - K_j} \rightarrow [j, j+1]$  con  $f_j(\text{Fr}K_{j+1}) = j+1$ ,  $f_j(\text{Fr}K_j) = j$ . La unión de las  $f_j$  define una sobreyección propia sobre  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ .

<sup>3</sup>Nótese que  $(1-t)f(x) + tg(x)$  es una aplicación propia de  $X \times I$  en  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  si  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  son propias.

Nota VI.2.4). Si  $B$  es el disco unidad abierto, sea  $K \subset X$  un subconjunto compacto tal que  $r^{-1}([0, 1]) \subset U$  y  $H^{-1}(B) \subset U \times I$  donde  $U = \text{int}K$ . Ahora elegimos otro compacto  $L \subset Y$  tal que  $g^{-1}(B) \subset V$  y  $K \subset f^{-1}(V)$  con  $V = \text{int}L$ . Entonces, para  $Z = f^{-1}(Y - V) = X - f^{-1}(V)$  la restricción de  $H$

$$\tilde{H} : Z \times I \subset (X - U) \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 - B$$

es una homotopía entre las composiciones de restricciones

$$Z \xrightarrow{\tilde{r}} [1, \infty) \xrightarrow{\tilde{i}} \mathbb{R}^2 - B$$

y

$$Z \xrightarrow{\tilde{f}} Y - V \xrightarrow{\tilde{g}} \mathbb{R}^2 - B$$

donde  $\tilde{f}$  es sobreyectiva y confluyente (IV.2.7).

Si  $\rho : \mathbb{R}^2 - B = S^1 \times [1, \infty) \rightarrow S^1$  es el retracto de deformación definido por la proyección obvia sobre la circunferencia unidad, la composición  $\rho \circ \tilde{g} \circ \tilde{f} : Z \rightarrow S^1$  es inessential puesto que  $[1, \infty)$  es contráctil. Así, la Proposición VI.3.10 aplicada a  $\tilde{f}$  establece que  $\rho \circ \tilde{g}$  es inessential también. Por tanto  $\tilde{g}$  es inessential, y así es propiamente inessential por el Lema VI.3.11; esto es, existe un diagrama de aplicaciones propias

$$\begin{array}{ccc} Y - V & \xrightarrow{\tilde{g}} & \mathbb{R}^2 - B \\ \eta \downarrow & \nearrow k & \\ \mathbb{R}_{\geq 0} & & \end{array}$$

que es conmutativo salvo homotopía propia, digamos  $G : \tilde{g} \simeq k \circ \eta$ . Extendemos  $\eta$  a una aplicación propia  $\bar{\eta} : Y \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  usando el teorema de Tietze. Aquí usamos que  $Y - V$  es un conjunto cerrado con un complemento de clausura compacta y que  $\eta$  es propia. Finalmente, consideramos la aplicación propia

$$g \cup G \cup k \circ \bar{\eta} : Y \times \{0\} \cup (Y - V) \times I \cup Y \times \{1\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - B \subset \mathbb{R}^2$$

y usamos otra vez el teorema de Tietze para extender esta aplicación a una homotopía propia  $F : Y \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$  entre  $g$  y  $k \circ \bar{\eta}$ . Esto demuestra que  $g$  es propiamente inesencial.  $\square$

El resultado final de esta sección es el siguiente análogo propio de un resultado clásico debido a S. Eilenberg ([23]; Thm. 5); ver ([45]; Thm. 4, pág. 433) para una demostración.

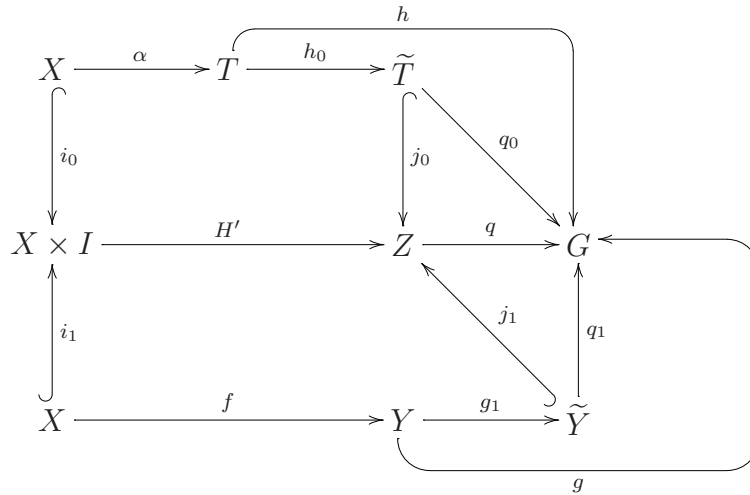
**Teorema VI.3.12.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una sobreyección monótona propia entre continuos generalizados. Si para una aplicación propia  $g : Y \rightarrow G$  en un grafo  $G$  la composición  $g \circ f : X \rightarrow G$  es propiamente  $h$ -inesencial, entonces  $g$  es propiamente  $h$ -inesencial.*

**Demostración.** Por hipótesis, existe una homotopía propia  $H : h \circ \alpha \simeq g \circ f$  donde  $h : T \rightarrow G$  es fiel en los finales y  $T$  es un árbol. Como  $T$  es contráctil, existe un levantamiento  $\tilde{h} : T \rightarrow \tilde{G}$  de  $h$  al recubrimiento universal de  $G$ ,  $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$  ([73]; 2.4.1). Es más, como  $h$  es propia, también lo es  $\tilde{h}$  (ver la demostración del Lema VI.2.1) y por tanto  $\tilde{T} = \tilde{h}(T) \subset \tilde{G}$  es un subárbol cerrado. Además, como  $h$  es fiel en los finales, las restricciones  $h_0 : T \rightarrow \tilde{T}$  y  $q_0 : \tilde{T} \rightarrow G$  de  $\tilde{h}$  y  $\pi$ , respectivamente, son también fieles en los finales (VI.2.3).

Por otro lado, la propiedad del levantamiento de homotopía de  $\pi$  ([73]; 2.2.3) permite encontrar una homotopía  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow \tilde{G}$  con  $\pi \circ \tilde{H} = H$  y  $\tilde{H}(x, 0) = \tilde{h} \circ \alpha$ . En particular,  $\xi(x) = \tilde{H}(x, 1)$  es un levantamiento de la composición  $g \circ f$ . Usando el mismo argumento que antes,  $\tilde{H}$  es también propia, y  $Z = \tilde{H}(X \times I) \subset \tilde{G}$  es un subárbol cerrado. Sean  $H' : X \times I \rightarrow Z$  y  $q : Z \rightarrow G$  las restricciones de  $\tilde{H}$  y  $\pi$ , respectivamente.

Como  $f$  es monótona,  $f^{-1}(y)$  es conexo para todo  $y \in Y$ . Es más, la imagen  $\xi(x)$  de cualquier  $x \in f^{-1}(y)$  cae en el conjunto discreto  $\pi^{-1}(g(y))$ , y por tanto  $\xi(x) = w_y$  es constante sobre  $f^{-1}(y)$ , para todo  $y \in Y$ . Más aún, la aplicación  $\tilde{g} : Y \rightarrow \tilde{G}$  definida por  $\tilde{g}(y) = w_y$  es continua. Para esto usamos que  $\pi$  es una aplicación cociente y  $\pi \tilde{g}(y) = g(y)$ . El argumento usual de la demostración del Lema VI.2.1 demuestra que  $\tilde{g}$  es propia. Nótese que  $\tilde{g} \circ f = \xi$  por definición. Sea  $\tilde{Y} = \tilde{g}(Y) \subset \tilde{G}$  el subárbol correspondiente y  $g_1 : Y \rightarrow \tilde{Y}$  y  $q_1 : \tilde{Y} \rightarrow G$  las restricciones de  $\tilde{g}$  y  $\pi$ , respectivamente.

Finalmente, encontraremos una aplicación  $\beta : Y \rightarrow T$  tal que  $g$  sea propiamente homotópica a  $h \circ \beta$ , estableciendo que  $g$  es propiamente  $h$ -inesencial. Para esto, observamos que las aplicaciones definidas anteriormente forman un diagrama conmutativo



donde  $i_\epsilon(x) = (x, \epsilon)$  ( $\epsilon = 0, 1$ ). Como estas inclusiones son obviamente equivalencias de homotopía propia, son fieles a los finales (VI.1.2). Además, como  $H'$  es sobreyectiva, también lo es la aplicación inducida  $H'_* : \mathcal{F}(X \times I) \rightarrow \mathcal{F}(Z)$  (I.2.10), y así  $j_{0*} : \mathcal{F}(\tilde{T}) \rightarrow \mathcal{F}(Z)$  es sobreyectiva. Como se comprobó anteriormente,  $q_0$  es fiel a los finales y así,  $j_{0*}$  es también inyectiva. Por consiguiente  $j_0$  es fiel en los finales, y la composición  $\psi : T \xrightarrow{h_0} \tilde{T} \xrightarrow{j_0} Z$  es una aplicación de árboles fiel en los finales y por tanto una equivalencia de homotopía propia; ver Teorema VI.1.3. Obtenemos la aplicación  $\beta$  como la composición  $\beta = \varphi \circ j_1 \circ g_1$  donde  $\varphi$  es una inversa homotópica de  $\psi$ . En efecto  $h \circ \beta = q \circ \psi \circ \varphi \circ j_1 \circ g_1$  es propiamente homotópica a  $q \circ j_1 \circ g_1 = q_1 \circ g_1 = g$ . □

## §VI.4. Representación de clases de homotopía propia mediante aplicaciones confluentes

En la Nota VI.2.8 habíamos destacado que, aunque las proyecciones canónicas son ejemplos triviales de aplicaciones confluentes ordinarias, no existen



aplicaciones propias confluentes  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$  para  $n \geq 3$ . En esta sección mostramos que este hecho es detectado por el pro-grupo fundamental. Para esto, recordemos que una aplicación  $p : X \rightarrow Y$  satisface la *propiedad de levantamiento de caminos salvo homotopía (relativa)* (PLC, para acortar) si dado un camino  $\alpha : I = [0, 1] \rightarrow Y$  y un punto  $x \in p^{-1}(\alpha(0))$ , existe un camino  $\tilde{\alpha} : I \rightarrow X$  tal que  $\tilde{\alpha}(0) = x$  y  $p \circ \tilde{\alpha}$  es homotópica a  $\alpha$  con la homotopía fija en los extremos. Esta propiedad fue probada para aplicaciones propias abiertas por S. Smale ([72]; 1) y más tarde fue extendida para aplicaciones propias confluentes por J. Grispolakis ([34]; 3.4).

Seguidamente extendemos el teorema de Grispolakis-Smale a rayos. Explícitamente,

**Teorema VI.4.1.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una sobreyección propia confluyente entre continuos generalizados de Peano. Supongamos que  $Y$  es  $LC^1$ . Entonces, dado cualquier rayo  $\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow Y$  y cualquier punto  $x \in f^{-1}(\alpha(0))$  existe un rayo  $\tilde{\alpha} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X$  tal que  $\tilde{\alpha}(0) = x$  y  $f \circ \tilde{\alpha}$  es propiamente homotópico a  $\alpha$  con una homotopía fija en  $\alpha(0) = f(x)$ .*

Recordemos que un espacio  $Z$  se denomina  $LC^1$  (*localmente simplemente conexo*) si cada punto  $z \in Z$  admite una base de entornos simplemente conexos.

**Demostración.** <sup>4</sup> Comenzamos fijando una sucesión exhaustiva  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  de  $Y$ , y para cada  $y \in Y$  consideramos un par de entornos suyos,  $C_y$  y  $W_y$  con las siguientes propiedades:

- (i)  $C_j \subset \text{int}W_j$  es un continuo en el interior de un subconjunto simplemente conexo  $W_j$ . Aquí usamos la propiedad  $LC^1$  y la conexión local para encontrar  $W_j$  y  $C_j$ .
- (ii) Si  $y \in \overline{K_n - K_{n-1}}$  entonces  $W_y \subset \text{int}K_{n+1} - K_{n-2}$  para todo  $n \geq 1$  con  $K_{-1} = K_0 = \emptyset$ .

---

<sup>4</sup>Se puede dar una demostración alternativa usando el Teorema VI.4.5 que se establece más adelante junto con la bien conocida descripción del conjunto (punteado) de finales fuertes como límite derivado del pro-grupo fundamental (ver ([33]; 16.1.1) o ([6]; V.4.7)) y el hecho de que toda torre de conjuntos (punteados) finitos es pro-isomorfa a una torre cuyas aplicaciones de enlace son sobreyectivas. Nos ha parecido más interesante dar una demostración directa y reducir al mínimo el lenguaje de pro-categoría en esta Memoria.

Entonces aplicamos la compacidad de las diferencias  $D_n = K_n - \text{int}K_{n-1}$  para reducir las familias  $\{C_y\}_{y \in Y}$  y  $\{W_y\}_{y \in Y}$  a dos familias numerables  $\mathcal{C} = \{C_j\}_{j \geq 1}$  y  $\mathcal{W} = \{W_j\}_{j \geq 1}$ , respectivamente, cuyos interiores recubren  $Y$  y todavía satisfacen las propiedades (i) y (ii) así como la siguiente propiedad adicional:

- (iii) Cada diferencia  $D_n$  está cubierta por los interiores de un número finito de conjuntos en  $\mathcal{C}$ .

Notemos que la condición (iii) muestra que los dos recubrimientos  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{W}$  son localmente finitos.

Para cada  $k \geq 0$  aplicamos el lema de Lebesgue para obtener una partición  $\mathcal{J}_k$  de  $J_k = [k, k+1]$  tal que cada subintervalo en  $\mathcal{J}_k$  se envía por  $\alpha$  en un conjunto de  $\mathcal{C}$ . La reunión de todas las particiones  $\mathcal{J}_k$  es una partición de toda la semirecta completa en pequeños intervalos  $I_s = [a_s, a_{s+1}]$  ( $0 \leq s < \infty$ ) con  $a_0 = 0$  y tal que para cada  $s \geq 0$   $\alpha(I_s) \subset C_{j(s)}$  para algún  $j(s)$ .

Ahora estamos preparados para probar el teorema: Aplicamos que  $f$  es confluyente para garantizar que la componente  $D_0 \subset f^{-1}(C_{j(0)})$  de  $x_0 = x \in f^{-1}(\alpha(0))$  satisface  $f(D_0) = C_{j(0)}$ .

Por el Lema IV.2.5,  $D_0$  es la intersección de una sucesión decreciente de subcontinuos de Peano que contienen  $D_0$  en su interior; en particular, existe un subcontinuo de Peano  $B_0$  con  $D_0 \subset \text{int}B_0$  y  $f(B_0) \subset \text{int}W_{j(0)}$ . Sea  $\tilde{\alpha}_0$  un arco en  $B_0$  que une  $x_0$  con un punto  $x_1 \in D_0 \cap f^{-1}(\alpha(a_1)) \neq \emptyset$ . Entonces los caminos en  $W_{j(0)}$ ,  $\alpha|_{[0, a_1]}$  y  $f \circ \tilde{\alpha}_0$  son homotópicos con una homotopía  $H_0$  fija sobre los extremos. Aquí usamos la condición (i).

Repetimos el argumento previo con la componente  $D_1 \subset f^{-1}(C_{j(1)})$  de  $x_1$ , para la cual encontramos un subcontinuo de Peano  $B_1$  con  $D_1 \subset \text{int}B_1 \subset B_1 \subset f^{-1}(\text{int}W_{j(1)})$ . Elegimos un arco  $\tilde{\alpha}_1 \subset B_1$  que une  $x_1$  con un punto  $x_2 \in D_1 \cap f^{-1}(\alpha(a_2)) \neq \emptyset$ . Aquí aplicamos de nuevo que  $f$  es confluyente. Ahora la condición (i) establece que los caminos en  $W_{j(1)}$ ,  $\alpha|_{[a_1, a_2]}$  y  $f \circ \tilde{\alpha}_1$  son homotópicos con una homotopía  $H_1$  fija en los extremos.

Procedemos inductivamente de esta manera para obtener una sucesión de caminos  $\tilde{\alpha}_s \subset f^{-1}(\text{int}W_{j(s)})$  ( $s \geq 0$ ) con puntos finales  $x_s$  y  $x_{s+1}$  donde  $x_0 =$

$x$  y  $x_s \in f^{-1}(\alpha(a_s))$  para todo  $s \geq 0$  y homotopías  $H_s : I \times I \rightarrow W_{j(s)}$  entre  $\alpha|_{[a_s, a_{s+1}]}$  y  $f \circ \tilde{\alpha}_s$  relativas a los extremos. Pegando todos estos caminos definimos una aplicación continua  $\tilde{\alpha} = \bigcup_{s=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_s : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X$ .

Es más, por la condición (iii) anterior la aplicación  $\tilde{\alpha}$  es propia; en efecto, como  $f$  es propia, dado un conjunto compacto  $K \subset X$ , sea  $K_n$  un conjunto compacto de la sucesión exhaustiva original de  $Y$  para la cual  $K \subset \text{int} f^{-1}(K_n)$ . Ahora, como  $\alpha$  es propia existe un entero positivo  $k_0$  con  $\alpha([k_0, \infty)) \subset Y - K_{n+2}$ . Además, por la propiedad (ii) los conjuntos  $W_j$  que cortan  $Y - K_{n+2}$  no cortan a  $K_n$ . Así que, por definición,  $\tilde{\alpha}([k_0, \infty)) \subset X - f^{-1}(K_n) \subset X - K$ ; esto es,  $\tilde{\alpha}^{-1}(K) \subset [0, k_0]$ . De igual forma se puede comprobar que la unión  $H = \bigcup_{s=1}^{\infty} H_s : I \times I \rightarrow Y$  es una homotopía propia entre  $\alpha$  y  $f \circ \tilde{\alpha}$ . Esto finaliza la demostración.  $\square$

Como una consecuencia inmediata del Teorema VI.4.1 obtenemos

**Corolario VI.4.2.** *Bajo las hipótesis del Teorema VI.4.1 la aplicación  $f$  induce una sobreyección entre finales fuertes*

$$f_* : [\mathbb{R}_{\geq 0}, X]_p \rightarrow [\mathbb{R}_{\geq 0}, Y]_p$$

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha].$$

En particular,

**Corolario VI.4.3.** *No existe una aplicación confluyente propia  $f : X \rightarrow Y$  entre poliedros localmente compactos (más generalmente, espacios ANR<sup>5</sup>) si  $X$  tiene un final fuerte e  $Y$  más de uno.*

**Ejemplo VI.4.4.** Sea  $W$  una 3-variedad contráctil tipo Whitehead ([53]) para la cual es sabido que el producto  $W \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^4$  es homeomorfo al espacio euclídeo 4-dimensional. Por lo tanto la proyección  $W \times \mathbb{R} \rightarrow W$  es una aplicación confluyente no propia  $\mathbb{R}^4 \rightarrow W$ . De hecho, ninguna aplicación confluyente  $\mathbb{R}^4 \rightarrow W$  puede ser propia puesto que  $\mathbb{R}^4$  tiene un final fuerte mientras que  $W$  tiene infinitos ([33]; 16.4.13).

---

<sup>5</sup>Un espacio  $X$  se dice ANR en una clase de espacios  $\mathcal{H}$  si  $X \in \mathcal{H}$  y para todo  $Y \in \mathcal{H}$ , tal que  $X \subset Y$  es un subconjunto cerrado, se tiene que para todo entorno  $X \subset N$  en  $Y$  existe una retracción  $r : N \rightarrow X$ ; ver Ch. I §3 y §4 de [55] para más detalles.

Como una consecuencia de la propiedad PLC, Grispolakis demuestra en ([34]; 3.7) que si la clase de homotopía (ordinaria) de una aplicación propia  $f : X \rightarrow Y$  entre continuos generalizados de Peano (siendo  $Y LC^1$ ) se representa por una sobreyección confluyente entonces la familia de clases a derecha (equivalentemente, izquierda)  $\pi_1(Y, y)/\text{Im}f_*$  es finita. Originalmente, este teorema fue probado para aplicaciones abiertas propias por Smale [72]; ver también ([31]; 7.4) y ([20]; 3.1) para otros resultados homotópicos previos sobre aplicaciones monótonas entre continuos de Peano.

El hecho de que los espacios implicados en la Nota VI.2.8 y el Ejemplo VI.4.4 sean contráctiles demuestra que el grupo fundamental no basta para distinguir las clases de homotopía propia representadas por aplicaciones confluentes. Así, aparece el problema de determinar estas clases de homotopía. Usando el llamado pro-grupo fundamental, podemos fácilmente transferir el teorema de Grispolakis a la categoría propia como sigue.

**Teorema VI.4.5.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación propia entre continuos generalizados de Peano, con  $Y LC^1$ , que es propiamente homotópica a una sobreyección confluyente. Entonces, para cualquier rayo  $\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X$ , la torre cociente  $\text{pro-}\pi_1(Y, f \circ \alpha)/\text{Im}(\text{pro-}f_*)$  es isomorfa a una torre de conjuntos finitos en la pro-categoría de torres de conjuntos punteados  $(\mathbf{Set}_\bullet, \mathbf{tow-Set}_\bullet)$ . Es más, si  $f$  es propiamente homotópica a una sobreyección monótona, entonces  $\text{pro-}f_*$  es un epimorfismo en la pro-categoría de torres de grupos  $(\mathbf{Gr}, \mathbf{tow-Gr})$ .*

**Demostración.** Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $f$  es ya una aplicación confluyente. Sean  $\{L_j\}_{j \geq 1}$  una sucesión exhaustiva de  $Y$  y  $U_j \subset X - f^{-1}(L_j)$  y  $W_j \subset Y - L_j$  las componentes determinadas por  $\alpha([t_j, \infty)) \subset U_j$  y  $f\alpha([t_j, \infty)) \subset W_j$ , respectivamente, donde  $\{t_j\}_{j \geq 1}$  es una sucesión creciente en  $[0, \infty)$ . Tenemos que el pro-morfismo inducido  $\text{pro-}f_* : \text{pro-}\pi_1(X, \alpha) \rightarrow \text{pro-}\pi_1(Y, f \circ \alpha)$  está representado por el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi_1(X) & \longleftarrow & \pi_1(U_1, \alpha(t_1)) & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \pi_1(U_n, \alpha(t_n)) & \longleftarrow & \cdots \\
 \downarrow f_* & & \downarrow f_{1*} & & & & \downarrow f_{n*} & & \\
 \pi_1(Y) & \longleftarrow & \pi_1(W_1, f\alpha(t_1)) & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \pi_1(W_n, f\alpha(t_n)) & \longleftarrow & \cdots
 \end{array}$$

donde  $f_n$  denota la correspondiente restricción de  $f$ .

De acuerdo con el Teorema IV.3.1(c) tenemos que, para todo  $j \geq 1$ ,  $f(U_j) = W_j$  por ser  $f$  confluente y  $U_j$  componente de  $X - f^{-1}(L_j) = f^{-1}(W_j)$ . Finalmente, por el Lema IV.2.6 tenemos que cada  $f_j$  es también confluente.

Ahora aplicamos ([34]; 3.7) a cada  $f_j$  para obtener que  $f_{j*}(\pi_1(U_j, x_j))$  tiene índice finito en  $\pi_1(W_j, f(x_j))$  para todo  $j \geq 0$  con  $U_0 = X$  y  $W_0 = Y$ . De esta forma, el tipo de isomorfismía de la torre  $\text{pro-}\pi_1(Y, f \circ \alpha) / \text{Im}(\text{pro-}f_*)$  en  $(\mathbf{Set}_\bullet, \mathbf{tow-Set}_\bullet)$  está representado por una sucesión inversa de conjuntos finitos.

De forma similar, para aplicaciones monótonas obtenemos que cada  $f_{j*}$  es sobreyectiva por ([31]; 7.4) y por tanto  $\text{pro-}f_*$  es un epimorfismo por niveles en  $(\mathbf{Gr}, \mathbf{tow-Gr})$ .  $\square$

El recíproco del mencionado teorema de Grispolakis para aplicaciones monótonas de  $n$ -variedades compactas ( $n \geq 3$ ) a poliedros compactos fue demostrado por J. Walsh ([77]) quien en una serie de artículos extendió este resultado a aplicaciones abiertas y ligeras con codominio espacios ANR compactos. Más tarde Grispolakis extendió los resultados de Walsh a aplicaciones confluentes en [34]. Conjeturamos que el siguiente análogo del teorema de Grispolakis en ([34]; 3.8) es cierto en la categoría propia.

**Conjetura VI.4.6.** El recíproco del Teorema VI.4.5 es cierto para aplicaciones propias  $f : X \rightarrow Y$  donde  $X$  es una  $n$ -variedad abierta conexa ( $n \geq 3$ ) e  $Y$  un espacio ANR.



# Apéndice





# Filtros

---

La versión general de final de Freudenthal que incluimos en esta Memoria está basada en la noción de filtro. Este apéndice contiene las nociones básicas de teoría de filtros usadas en esta Memoria. Dado un conjunto  $X$  sea  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  una familia de subconjuntos de  $X$  conteniendo a  $X$  y cerrada por intersecciones finitas. Un  $\mathcal{A}$ -filtro  $\mathcal{U}$  es una subfamilia  $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$  tal que:

- (a)  $\emptyset \notin \mathcal{U}$ .
- (b) Si  $A, B \in \mathcal{U}$ , entonces  $A \cap B \in \mathcal{U}$ .
- (c) Si  $B \in \mathcal{U}$  y  $B \subset A$  con  $A \in \mathcal{A}$ , entonces  $A \in \mathcal{U}$ .

Una *base de un  $\mathcal{A}$ -filtro* es una familia no vacía  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  tal que:

- (a)  $\emptyset \notin \mathcal{B}$ .
- (b) Si  $A, B \in \mathcal{B}$ , existe  $C \in \mathcal{B}$  tal  $A \cap B \supset C$ .

Claramente, si  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  es una base de  $\mathcal{A}$ -filtro, entonces la familia formada por todos los subconjuntos en  $\mathcal{A}$  que contienen a algún elemento de  $\mathcal{B}$  es un  $\mathcal{A}$ -filtro, llamado  *$\mathcal{A}$ -filtro generado por  $\mathcal{B}$* , que será denotado por  $\mathcal{U}(\mathcal{B})$ . Cuando  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$  coincide con la familia de todos los subconjuntos de  $X$ , los  $\mathcal{A}$ -filtros se llaman simplemente *filtros* sobre  $X$ .

Decimos que  $x$  es un *punto de acumulación de un  $\mathcal{A}$ -filtro  $\mathcal{U}$*  si  $x \in \bigcap \{\bar{U}; U \in \mathcal{U}\}$ .

Es claro que todo  $\mathcal{A}$ -filtro es base de un filtro sobre  $X$ . Entonces se sigue inmediatamente de ([24]; 3.1.24)

**Proposición A.1.** *Todo  $\mathcal{A}$ -filtro sobre un espacio compacto de Hausdorff tiene un punto de acumulación.*

Si el conjunto de  $\mathcal{A}$ -filtros sobre un conjunto  $X$  es no vacío, se define la siguiente relación de orden parcial: el  $\mathcal{A}$ -filtro  $\mathcal{U}_1$  es *más fino* que el  $\mathcal{A}$ -filtro  $\mathcal{U}_2$  si  $\mathcal{U}_1 \supset \mathcal{U}_2$ . Se llamará  $\mathcal{A}$ -ultrafiltro sobre  $X$  a los elementos maximales para esta relación de orden. Obsérvese que si  $\{\mathcal{U}_k\}_{k \in K}$  es una familia de  $\mathcal{A}$ -filtros totalmente ordenada por la relación anterior, entonces  $\mathcal{U} = \bigcup \{\mathcal{U}_k; k \in K\}$  es un  $\mathcal{A}$ -filtro sobre  $X$ . Entonces se deduce del Lema de Zorn que todo  $\mathcal{A}$ -filtro está contenido en un  $\mathcal{A}$ -ultrafiltro aunque este no tiene por qué ser único. El siguiente resultado es inmediato.

**Proposición A.2.** *Son equivalentes:*

- (a)  $\mathcal{U}$  es un  $\mathcal{A}$ -ultrafiltro sobre  $X$ .
- (b) Si  $A \in \mathcal{A}$  y  $A \cap U \neq \emptyset$  para todo  $U \in \mathcal{U}$ , entonces  $A \in \mathcal{U}$ .
- (b) Si  $A \in \mathcal{A}$  y  $X - A \in \mathcal{A}$ , entonces  $A \in \mathcal{U}$  ó  $X - A \in \mathcal{U}$ .

**Ejemplos A.3.** (a) Si  $X$  es un espacio de Hausdorff localmente compacto, la familia  $\mathcal{A}$  de los conjuntos cerrados (abiertos, respectivamente) con frontera compacta es cerrada para intersecciones finitas y contiene a  $X$ . En efecto,  $\text{Fr}X = \emptyset$  e intersecciones finitas de abiertos (cerrados) son abiertos (cerrados). Además para cualquier par de conjuntos  $\text{Fr}(A \cap B) \subset \text{Fr}A \cup \text{Fr}B$  ([24]; 1.3.2) lo que implica que  $\text{Fr}(A \cap B)$  es compacto si  $\text{Fr}A$  y  $\text{Fr}B$  lo son.

- (b) Dado un  $x \in X$ , si  $\mathcal{A}$  contiene al conjunto unitario  $\{x\}$ , entonces la familia  $\mathcal{U}_x = \{A \in \mathcal{A}; x \in A\}$  es un  $\mathcal{A}$ -ultrafiltro. Estos filtros son llamados *triviales*<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Es obvio que la clase  $\mathcal{A}$  de los cerrados con frontera compacta en el Ejemplo A.3(a) contiene todos los conjuntos unitarios.

# La pro-categoría de torres y límites inversos

---

En este apéndice resumimos brevemente el lenguaje de las pro-categorías que usaremos en esta Memoria. Referiremos a [55] para un tratamiento exhaustivo de estas categorías. Recordemos que dada una categoría  $\mathbf{C}$  la *pro-categoría de sucesiones inversas (o torres) en  $\mathbf{C}$* , denotada por  $\mathbf{tow-C}$ , es la categoría de sucesiones inversas  $\underline{X} = X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow \dots$  en  $\mathbf{C}$  y donde los morfismos  $f : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$  están representados por clase de equivalencia  $\underline{f} = [(\{n_j\}, \{f_j\})_{j \geq 1}]$  de pares donde  $\{n_j\}_{j \geq 1}$  es una subsucesión creciente tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_{n_j} & \longleftarrow & X_{n_{j+1}} \\ \downarrow f_j & & \downarrow f_{j+1} \\ Y_j & \longleftarrow & Y_{j+1} \end{array}$$

es conmutativo en  $\mathbf{C}$  para todo  $j \geq 1$  (las flechas horizontales son los morfismos de enlace). Dos pares  $(\{n_j\}, \{f_j\})_{j \geq 1}$  y  $(\{m_j\}, \{f'_j\})_{j \geq 1}$  son equivalentes si existe una subsucesión  $\{k_j\}_{j \geq 1}$  con  $k_j \geq n_j, m_j$  para todo  $j \geq 1$  para la cual los diagramas

$$\begin{array}{ccccc} X_{n_j} & \longleftarrow & X_{k_j} & \longrightarrow & X_{m_j} \\ & \searrow f_j & & \swarrow f'_j & \\ & & & & Y_j \end{array}$$

son conmutativos para todo  $j \geq 1$  (las flechas horizontales son los morfismos de enlace).

En particular, un pro-morfismo  $\underline{f} : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$  representado por el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} X_{n_1} & \longleftarrow & X_{n_2} & \longleftarrow & \cdots & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ Y_1 & \longleftarrow & Y_2 & \longleftarrow & \cdots & & \end{array}$$

es un isomorfismo en  $\mathbf{tow-C}$  si y sólo si para todo  $j$  existe  $j' \geq j$  y un morfismo  $g_j : Y_{j'} \rightarrow X_{n_j}$  en  $\mathbf{C}$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_{n_j} & \longleftarrow & X_{n_{j'}} \\ \downarrow f_j & \swarrow g_j & \downarrow f_{j'} \\ Y_j & \longleftarrow & Y_{j'} \end{array}$$

conmuta. Ver ([55]; Thm. 5.1, pág. 112). En particular, si consideramos la torre  $\underline{X}' = X_{n_1} \leftarrow X_{n_2} \leftarrow \dots$  donde  $\{n_i\}_{i \geq 1}$  es una sucesión estrictamente creciente se tiene que

**Lema B.1** ([55]; Thm. 1, pág. 8).  $\underline{X}$  y  $\underline{X}'$  son pro-isomorfas en  $\mathbf{tow-C}$ .

Tanto para la descripción de los finales que presentamos en la Proposición I.3.15 como para otros resultados de la Memoria, necesitamos también conocer el concepto de límite inverso de torres de espacios topológicos.

Más generalmente, consideramos la categoría  $\mathbf{Set}$  formada por los conjuntos y aplicaciones entre ellos. Sea

$$\underline{X} = \{X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \xleftarrow{f_2} X_3 \xleftarrow{f_3} \dots\}$$

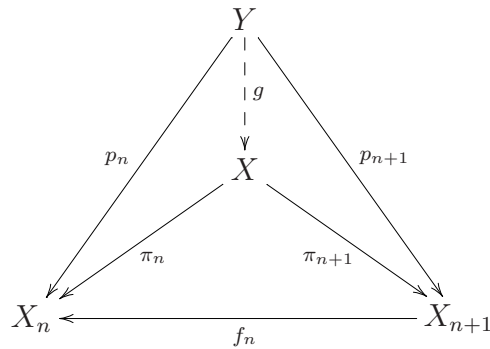
una sucesión inversa en  $\mathbf{tow-Set}$ , que también denotaremos por  $\{X_n, f_n\}$ . El *límite inverso* de  $\underline{X}$  es el objeto

$$\varprojlim \underline{X} = \varprojlim \{X_n, f_n\} = \left\{ (x_n) \in \prod_{n \geq 1} X_n; x_n = f_n(x_{n+1}) \right\}.$$

Obsérvese que para cada  $j \geq 1$  existe una aplicación natural  $\pi_n : \varprojlim \underline{X} \rightarrow X_n$  dada por la restricción de la proyección natural  $\prod_{n \geq 1} X_n \rightarrow X_n$ . Nótese que  $f_n \circ \pi_{n+1} = \pi_n$ .

Esta misma construcción puede ser realizada en la categorías algebraicas habituales (grupos, anillos, módulos) y los morfismos son homomorfismos en la categoría correspondiente. El límite inverso también pertenece a esa categoría. Puede que el límite inverso no exista para torres en una categoría arbitraria, pero si existe entonces es único pues el límite inverso está caracterizado por la siguiente propiedad universal

**Proposición B.2** ([33]; Cap. 11, §2, pág. 235). Sean  $\underline{X} = \{X_n, f_n\}_{n \geq 1}$  una torre en  $\mathbf{tow-C}$  para la cual existe el límite inverso  $\varprojlim \underline{X}$ . Supongamos que existe una familia de morfismos  $\{p_n : Y \rightarrow X_n\}$  para algún objeto  $Y$  y tal que  $f_n \circ p_{n+1} = p_n$  para cada  $n \geq 0$ . Entonces existe un único morfismo  $g : Y \rightarrow \varprojlim \underline{X}$  tal que  $\pi_n \circ g = p_n$ .



Los límites inversos son invariantes por pro-isomorfismos

**Teorema B.3.** Si  $\underline{X}$  y  $\underline{X}'$  son torres pro-isomorfas en  $\mathbf{tow-C}$ , entonces  $\varprojlim \underline{X}$  es isomorfo a  $\varprojlim \underline{X}'$  en  $\mathbf{C}$  si uno de estos límites existe.

En particular, si  $\mathbf{C} = \mathbf{Top}$  es la categoría de los espacios topológicos y las aplicaciones continuas, tenemos que el límite inverso de la sucesión inversa  $\underline{X} = \{X_n, f_n\}_{n \geq 1}$  se considera como subespacio del espacio producto  $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ , esto es,

**Teorema B.4** ([24]; 2.5.5). Sea  $\underline{X} = \{X_n, f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión inversa en **Top** y denotemos por  $\mathcal{T}_n$  la topología de  $X_n$  para cada  $n \geq 1$ . Dado  $X_\infty = \varprojlim \underline{X}$  se verifica que

$$\mathcal{B} = \{\pi_n^{-1}(U); U \in \mathcal{T}_n\}_{n \geq 1}$$

es base de la topología de  $X_\infty$ . Más aún, si para cada  $n \geq 1$  se fija una base  $\mathcal{B}_n$  de la topología de  $X_n$ , entonces se verifica que la subfamilia de  $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B}' = \{\pi_n^{-1}(U); U \in \mathcal{B}_n\}_{n \geq 1}$$

también es una base de la topología de  $X_\infty$ .

En el siguiente resultado destacamos algunas propiedades de los espacios de una sucesión inversa que son heredadas por su límite inverso y que nos serán de utilidad en la Memoria.

**Teorema B.5.** Sea  $\underline{X} = \{X_n, f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión inversa en **Top** y  $X_\infty = \varprojlim \underline{X}$  su límite inverso; entonces se verifican la siguientes propiedades:

- (a) Si  $X_n$  es de Hausdorff para cada  $n \geq 1$ , también lo es  $X_\infty$  ([24]; Thm. 2.5.2). Es más  $X_\infty$  es cerrado en  $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$  ([24]; Thm. 2.5.1).
- (b) Si  $X_n$  es segundo numerable (resp. primero numerable) para cada  $n \geq 1$ , también lo es  $X_\infty$  ([24]; 2.5.E).
- (c) Si  $X_n$  metrizable para cada  $n \geq 1$ , también lo es  $X_\infty$  ([24]; 4.2.5).
- (d) Si  $X_n$  es compacto no vacío para cada  $n \geq 1$ , también lo es  $X_\infty$  ([24]; 3.2.13).
- (e) Si  $X_n$  es continuo para cada  $n \geq 1$ , también lo es  $X_\infty$  ([24]; 6.1.20).

También usaremos la siguiente proposición.

**Proposición B.6** ([12]; pág. 233). Sea  $\underline{X} = \{X_n, f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión inversa de espacios compactos en **Top** y sean  $\pi_n : X_\infty = \varprojlim \underline{X} \rightarrow X_n$  las proyecciones naturales de su límite inverso. Entonces se cumple:

- (a) Para cada compacto  $A \subset X_\infty$ ,  $\{\pi_n(A), f_n|_{\pi_{n+1}(A)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión inversa con aplicaciones de enlace sobreyectivas y

$$\varprojlim \{\pi_n(A), f_n|_{\pi_{n+1}(A)}\} = A = \left( \prod_{n=1}^{\infty} \pi_n(A) \right) \cap X.$$

- (b) Dados dos cerrados  $A, B \subset X_\infty$  tales que  $A \cap B = C \neq \emptyset$ , si  $C_n = \pi_n(A) \cap \pi_n(B)$

$$C = \varprojlim \{C_n, f_n|_{C_{n+1}}\}.$$

También usaremos en esta Memoria torres para las cuales fijamos el primer elemento. Más precisamente, sea  $(\mathbf{C}, \mathbf{tow-C}) \subset \mathbf{Pair}(\mathbf{tow-C})$  la subcategoría llena de pares de  $\mathbf{tow-C}$  cuyos objetos son morfismos  $\underline{X} \rightarrow X_0$  donde  $\underline{X}$  es una torre en  $\mathbf{tow-C}$  y  $X_0$  es un objeto de  $\mathbf{C}$  identificando con la torre constante  $X_0 = X_0 = \dots$ . De esta forma un objeto de  $(\mathbf{C}, \mathbf{tow-C})$  puede ser identificado con una torre  $\underline{X}^0 = X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow \dots$  donde el objeto  $X_0$  está fijado. Con esta identificación, un morfismo en  $(\mathbf{C}, \mathbf{tow-C})$   $\underline{X}^0 \rightarrow \underline{Y}^0$  puede ser representado por un triple  $(f_0, \{n_j\}, \{f_j\})_{j \geq 1}$  donde  $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$  es un morfismo en  $\mathbf{C}$  y los diagramas

$$\begin{array}{ccccc} X_0 & \longleftarrow & X_{n_j} & \longleftarrow & X_{n_{j+1}} \\ \downarrow f_0 & & \downarrow f_j & & \downarrow f_{j+1} \\ Y_0 & \longleftarrow & Y_1 & \longleftarrow & Y_{j+1} \end{array}$$

son conmutativos. Nótese que  $\varprojlim \underline{X} = \varprojlim \underline{X}^0$ .

Las pro-categorías  $(\mathbf{C}, \mathbf{tow-C})$  son especialmente adecuadas para definir los invariantes algebraicos en la categoría propia. Así, si  $\mathbf{Gr}$  es la categoría de grupos, se define en  $(\mathbf{Gr}, \mathbf{tow-Gr})$  el análogo al grupo fundamental de la siguiente manera.

**Definición B.7.** Dado un espacio propiamente basado  $(X, \alpha)$ ; esto es, un rayo  $\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X$  en el espacio admisible  $X$ , el *pro-grupo fundamental* de  $(X, \alpha)$  es el objeto en  $(\mathbf{Gr}, \mathbf{tow-Gr})$

$$\text{pro-}\pi_1(X, \alpha) = \{\pi_1(X, x_0) \leftarrow \pi_1(U_1, x_1) \leftarrow \pi_1(U_2, x_2) \leftarrow \dots\}$$

definido como sigue. Sea  $\{K_j\}_{j \geq 1}$  una sucesión exhaustiva de  $X$  y  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$  una sucesión creciente con  $\alpha([t_j, \infty)) \subset X - K_j$ . Entonces tomemos  $U_j \subset X - K_j$  la componente conexa determinada por  $\alpha([t_j, \infty))$  con  $x_j = \alpha(t_j)$  y  $U_0 = X$ . Los homomorfismos de enlace son las composiciones de los inducidos por inclusiones y los isomorfismos de cambio de punto de base a lo largo del rayo  $\alpha$ .

El tipo de isomorfismo de la torre  $\text{pro-}\pi_1(X, \alpha)$  es independiente de la sucesión exhaustiva y del representante del final fuerte  $[\alpha]$ , pero depende de este final fuerte; ver ([6]; V.4.10) para un ejemplo bien conocido debido a L. C. Siebenmann.

Una aplicación propia  $f : (X, \alpha) \rightarrow (Y, f \circ \alpha)$  induce un morfismo  $\text{pro-}f_* : \text{pro-}\pi_1(X, \alpha) \rightarrow \text{pro-}\pi_1(Y, f \circ \alpha)$  en la categoría **(Gr, tow-Gr)** como sigue. Elegimos una sucesión exhaustiva  $\{L_j\}_{j \geq 1}$  de  $Y$ . Si  $f_j : U_j \rightarrow W_j$  denota la restricción de  $f$  a las componentes  $U_j \subset f^{-1}(Y - L_j)$  y  $W_j \subset Y - L_j$  que contienen a  $\alpha([t_j, \infty))$  y  $f\alpha([t_j, \infty))$ , respectivamente, el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1(X, x_0) & \longleftarrow & \pi_1(U_1, x_1) & \longleftarrow & \pi_1(U_2, x_2) & \longleftarrow & \dots \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_{1*} & & \downarrow f_{2*} & & \\ \pi_1(Y, f(x_0)) & \longleftarrow & \pi_1(W_1, f(x_1)) & \longleftarrow & \pi_1(W_2, f(x_2)) & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

representa el pro-morfismo  $\text{pro-}f_*$ , donde las flechas verticales son las aplicaciones inducidas por  $f$  y  $f_j$  entre los grupos fundamentales. La torre imagen de  $\text{pro-}f_*$ ,  $\text{Im}(\text{pro-}f_*)$ , viene dada por  $\text{Im}(\text{pro-}f_*) = \{\text{Im}f_* \leftarrow \text{Im}f_{1*} \leftarrow \text{Im}f_{2*} \leftarrow \dots\}$  donde los homomorfismos enlace son las restricciones de aquellos de  $\text{pro-}\pi_1(Y, f \circ \alpha)$ . La torre cociente  $\text{pro-}\pi_1(Y, f \circ \alpha) / \text{Im}(\text{pro-}f_*)$  está entonces definida nivel a nivel por las correspondientes clases a derecha (o, equivalentemente, izquierda). Notemos que esta torre no es en general un objeto en **(Gr, tow-Gr)** sino un objeto en la categoría **(Set., tow-Set.)** de torres de



conjuntos punteados y aplicaciones de conjuntos punteados como morfismos de enlace.

Recordemos que un pro-morfismo  $\underline{f} : \underline{G}^0 = \{G_0 \leftarrow G_1 \leftarrow \dots\} \rightarrow \underline{H}^0 = \{H_0 \leftarrow H_1 \leftarrow \dots\}$  en  $(\mathbf{Gr}, \mathbf{tow-Gr})$  representado por el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 G_0 & \xleftarrow{p_0} & G_{n_1} & \xleftarrow{p_1} & G_{n_2} & \xleftarrow{p_2} & \dots \\
 \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \\
 H_0 & \xleftarrow{q_0} & H_1 & \xleftarrow{q_1} & H_2 & \xleftarrow{q_2} & \dots
 \end{array}$$

es un *epimorfismo en  $(\mathbf{Gr}, \mathbf{tow-Gr})$*  si y sólo si  $f_0$  es sobreyectivo y dado  $i \geq 1$  existe  $k(i) \geq i$  tal que  $q_i \circ \dots \circ q_{k(i)-1} \subset \text{Im} f_i$  o, equivalentemente, que  $\underline{G}^0$  es pro-isomorfa en  $(\mathbf{Gr}, \mathbf{tow-Gr})$  a la torre imagen

$$\text{Im}(\underline{f})^0 = \{\text{Im} f_0 \leftarrow \text{Im} f_1 \leftarrow \text{Im} f_2 \leftarrow \dots\}$$

Análogamente  $\underline{f}$  es un *monomorfismo en  $(\mathbf{Gr}, \mathbf{tow-Gr})$*  si  $f_0$  es inyectivo y para todo  $i$  existe  $n_{s(i)} \geq n_i$  tal que  $\ker f_i \subset \ker(p_i \circ \dots \circ p_{s(i)-1})$ . Ver ([55]; Cap. II, §2).



# Bibliografía

---

- [1] V. W. ADKISSON, *Plane Peanian continua with unique maps on the sphere and in the plane*, Trans. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 58–67.
- [2] R. AYALA, M. J. CHÁVEZ, A. QUINTERO, *A Hahn-Mazurkiewicz Theorem for generalized Peano continua*, Arch. Math. **71** (1998) 325–330.
- [3] R. AYALA, M. J. CHÁVEZ, A. MÁRQUEZ, A. QUINTERO, *On the proper planarity of 3-connected generalized Peano continua*, Q&A in General Topology **16** (1998), 171–181.
- [4] R. AYALA, M. J. CHÁVEZ, A. QUINTERO, *On the planarity of Peano generalized continua: an extension of a theorem of S. Claytor*, Colloq. Math. **2** (1998), 175–181.
- [5] B. J. BALL, *Quasicompactifications and shape theory*, Pacific J. Math. **84** (2) (1979), 251–259.
- [6] H. J. BAUES, A. QUINTERO, *Infinite Homotopy Theory*, K-Monographs in Mathematics, 6, Kluwer, 2001.
- [7] N. BOURBAKI, *Elements of Mathematics, General Topology*, Part I, Hermann, 1966.
- [8] M. BOGNÁR, *On the Hahn-Mazurkiewicz Theorem*, Acta Math. Hungar. **102** (1-2) (2004), 37–83.
- [9] K. BORSUK, *On embedding curves in surfaces*, Fund. Math. **59** (1966), 73–89.
- [10] E. M. BROWN, T. W. TUCKER, *On proper homotopy theory for non-compact 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **188** (1974), 105–126.

- [11] G. CANTOR, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, Math. Ann. **21** (4) (1883), 545–591.
- [12] C. E. CAPEL, *Inverse limit spaces*, Duke Math. J. **21** (1954), 233–245.
- [13] J. H. CASE, R. E. CHAMBERLIN, *Characterizations of tree-like continua*, Pacific J. Math. **10** (1960), 73–84.
- [14] J. J. CHARATONIK, *Confluent mappings and unicoherence of continua*, Fund. Math. **56** (1964), 213–220.
- [15] J. J. CHARATONIK, *History of continuum theory, Handbook of the History of General Topology*, vol. 2, 703–786, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [16] J. J. CHARATONIK, P. KRUPSKI, P. PYRIH, *Examples in Continuum Theory*, URL: '<http://adela.karlin.mff.cuni.cz/~pyrih/e/>', November 30, 2001.
- [17] S. CLAYTOR, *Peanian continua not imbeddable in a spherical surface*, Ann. of Math. **38** (1937), 631–646.
- [18] S. CLAYTOR, *Topological immersion of peanian continua in a spherical surface*, Ann. of Math. **35** (1934), 809–835.
- [19] H. COOK, *Continua which admit only the identity mapping onto non-degenerate subcontinua*, Fund. Math. **60** (1966), 241–249.
- [20] M. L. CURTIS, *Deformation-free continua*, Ann. of Math. **57** (1953), 231–247.
- [21] R. J. DAVERMAN, *Decomposition of manifolds*, Pure and Appl. Math., Vol. 124 Academic Press, 1984.
- [22] R. F. DICKMAN, R. A. MCCOY, *The Freudenthal compactification*, Dissertationes Math. **262** (1988), 35 pp.
- [23] S. EILENBERG, *Sur les transformations d'espaces métriques en circonférence*, Fund. Math. **24** (1935), 160–176.
- [24] R. ENGELKING, *General Topology*, Sigma Ser. Pure Math., Vol. VI Heldermann Verlag, 1989.

- [25] R. ENGELKING, *Theory of dimensions. Finite and Infinite*, Sigma Ser. Pure Math., Vol. XX Heldermann Verlag, 1995.
- [26] R. ENGELKING, K. SIEKLUCKI, *Topology. A geometric approach*, Sigma Ser. Pure Math., 4. Heldermann 1992.
- [27] K. FAN, N. GOTTESMAN, *On compactifications of Freudenthal and Wallman*, Indag. Math. **14** (1952), 504–510.
- [28] H. FREUDENTHAL, *Kompaktisierungen und Bikompaktisierungen*, Indag. Math. **13** (1951), 184–192.
- [29] H. FREUDENTHAL, *Neuaufbau der Endentheorie*, Annals of Math. **43** (1942), 261–279.
- [30] H. FREUDENTHAL, *Über die topologischer Räume und Gruppen*, Math. Z. **33** (1931), 692–713.
- [31] T. GANEA, *Simply connected spaces*, Fund. Math. **38** (1951), 179–203.
- [32] F. GARCÍA, M. A. SÁNCHEZ-GRANERO, *Hahn-Mazurkiewicz revisited: A generalization*, Publ. Math. Debrecen **73** (3-4) (2008), 471–488.
- [33] R. GEOGHEGAN, *Topological Methods in Group Theory*, Springer, 2008.
- [34] J. GRISPOLAKIS, *Confluent mappings and the fundamental group*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. **28** (1980), 643–646.
- [35] J. GRISPOLAKIS, E. D. TYMCHATYN, *On confluent mappings and essential mappings - a survey*, Rocky Mountain J. Math. **11** (1981), 131–153.
- [36] D. W. HALL, *A note on primitive skew curves*, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), 935–936.
- [37] C. H. HOUGHTON, *Ends of locally compact groups and their coset spaces*, J. Aust. Math. Soc. **17** (1974), 274–284.
- [38] R. J. HERNÁNDEZ, A. ILLANES, *Tesis de Licenciatura. Dendritas*, Universidad Nacional Autónoma de México, 2007.
- [39] W. T. INGRAM, *An atriodic tree-like continuum with positive span*, Fund. Math. **77** (1972), 99–107.

- [40] W. T. INGRAM, *A brief historical view of continuum theory*, *Topology Appl.* **153** (2006), 1530–1539.
- [41] J. R. ISBELL, *Uniform spaces*, *Amer. Math. Soc. Surveys* **12**, 1964.
- [42] I. M. JAMES, *General Topology and Homotopy Theory*, Springer, 1984.
- [43] G. J. O. JAMESON, *Topology and Normed Spaces*, Chapman and Hall, 1974.
- [44] B. KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie*, Springer-Verlag, 1923.
- [45] K. KURATOWSKI, *Topology*, Vol. II, Academic Press, 1968.
- [46] A. LELEK, *A classification of mappings pertinent to curve theory*, *Proceedings, Univ. of Oklahoma Topology Conference*, Norman, (1972), 97–103.
- [47] A. LELEK, D. R. READ, *Compositions of confluent mappings and some other classes of functions*, *Colloq. Math.* **29** (1974), 101–112.
- [48] A. LELEK, *On confluent mappings*, *Colloq. Math.* **15** (1966), 223–233.
- [49] A. LELEK, E. D. TYMCHATYN, *Pseudo-confluent mappings and classification of continua*, *Can. J. Math.* **6** (1975), 1336–1348.
- [50] J. LERAY, *L'anneau spectral et l'anneau filtré d'une application continue*, *J. de Math. Pure et Appl.* **29** (1959), 1–80.
- [51] T. MAĆKOWIAK, *Semi-confluent mappings and their invariants*, *Fund. Math.* **79** (1973), 251–264.
- [52] T. B. MCLEAN, *Confluent images of tree-like curves are tree-like*, *Duke Math. J.* **39** (1972), 465–473.
- [53] D. R. MCMILLAN JR., *Some contractible open 3-manifolds*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **102** (1962), 373–382.
- [54] S. MARDEŠIĆ AND J. SEGAL, *A note on polyedra embeddable in the plane*, *Duke Math. J.* **33** (1966), 633–638.
- [55] S. MARDEŠIĆ AND J. SEGAL, *Shape Theory: The Inverse System Approach*, North-Holland, 1982.

- [56] S. MAZURKIEWICZ, *Sur les lignes de Jordan*, Fund. Math. **1** (1920), 166–209.
- [57] K. MENGER, *Kurventheorie*, Teubner, 1932.
- [58] E. S. MOISE, *Remarks on the Claytor imbedding Theorem*, Duke Math. J. **19** (1952), 199–202.
- [59] S. B. NADLER, *Continuum Theory*, Marcel Dekker, Inc., New York 1992.
- [60] S. B. NADLER, *The metric confluent images of half-lines and lines*, Fund. Math. **102** (1979), 183–194.
- [61] G. NÖBELING, *Eine Verscharfung des  $n$ -Beinnsatzes*, Fund. Math. **18** (1932), 23–38.
- [62] T. PORTER, *Proper homotopy theory*, Handbook of Algebraic Topology, Ch. III p. 127–167, I. M. James, ed., North-Holland, 1995.
- [63] D. R. READ, *Confluent and related mappings*, Colloq. Math. **29** (1974), 233–239.
- [64] R. B. RICHTER, C. THOMASSEN, *3-connected planar spaces uniquely embed in the sphere*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 4585–4595.
- [65] M. C. RAYBURN, *On the Stoilow-Kérékjártó compactification*, J. London. Math. Soc. **6** (1973), 193–196
- [66] R. M. SCHORI, *A universal snake-like continuum*, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 1313–1316.
- [67] N. SHEKUTKOVSKI, *Quasicomponents and functional separation*, URL: <http://www.impan.gov.pl/BC.old/05Borsuk/notes/Shekutkovski.pdf>.
- [68] A. W. SCHURLE, *Topics in Topology*, North-Holland, 1979.
- [69] E. V. SHCHEPIN, *On maps of the two-dimensional sphere*, Russ. Math. Sur. **58** (2003) 1218–1219.
- [70] L. C. SIEBENMANN, *The obstruction to finding a boundary for an open manifold of dimension greater than five*, Thesis. Princeton University, 1965.

- [71] E. G. SKLJARENKO, *Uniquess Theorems in Homology Theory*, *rm Math. U.S.S.R. Sbornik.* **14** (1971) 199-218.
- [72] S. SMALE, *A note on open maps*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **8** (1957), 391–393.
- [73] E. H. SPANIER, *Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1982.
- [74] C. THOMASSEN, *The locally connected compact metric spaces embeddable in the plane*, *Combinatorica* **24** (4) (2004), 699-718.
- [75] C. THOMASSEN, *Classification of locally 2-connected compact metric spaces*, *Combinatorica* **25** (1) (2005), 85-103.
- [76] I. A. VAINSTEIN, *On closed mappings of metric spaces*, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **57** (1947), 319–321.
- [77] J. J. WALSH, *Monotone and open mappings on manifolds, I*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **209** (1975), 419–432.
- [78] L. E. WARD, JR., *On Dendritic sets*, *Duke Math. J.* **25** (1958), 505–513.
- [79] T. WAŻEWSKI, *Sur les courbes de Jordan ne renfermant aucune courbe simple fermée de Jordan*, *Annales de la Société Polonaise de Matématique* **2** (1923), 49–170.
- [80] G. T. WHYBURN, *Analytic Topology*, *Colloq. Publications*, 28. Amer. Math. Soc., 1942.
- [81] G. T. WHYBURN, *Non-alternating transformations*, *Amer. J. Math.* **56** (1934), 1125–1132.
- [82] G.T. WHYBURN, *Open mappings on locally compact spaces*, *Memoirs Amer. Math. Soc.* **1**, 19 (1950).
- [83] G. T. WHYBURN, *Topological characterization of the Sierpiński curve*, *Fund. Math.* **45** (1958), 320–324.
- [84] L. ZIPPIN, *Independent arcs of a continuous curve*, *Annals of Math.* **34** (1933), 95–113.