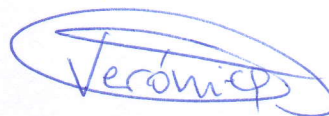


$(\kappa, \mu)$ -ESPACIOS DE CURVATURA  
 $\phi$ -SECCIONAL CONSTANTE  
GENERALIZADOS

Memoria presentada por  
Verónica Martín Molina pa-  
ra la obtención del título de  
Doctora en Matemáticas.



Fdo.: Verónica Martín Molina

Vº Bº del doctor director:



Alfonso Carriazo Rubio



DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA  
UNIVERSIDAD DE SEVILLA



A mi familia y amigos, y  
en especial a mi padre, por  
todo su apoyo y ánimo.



# Resumen

A lo largo de los años, numerosos autores han estudiado la forma del tensor de curvatura de una variedad Riemanniana para intentar clasificarla. Buena parte de los trabajos que han aparecido sobre la materia son los que se centran en ver qué ocurre cuando la curvatura seccional, holomorfa o  $\phi$ -seccional de la variedad es constante y consisten en generalizar su tensor de curvatura. Así aparecieron en Geometría Compleja los *espacios de curvatura holomorfa constante generalizados* a partir de las variedades Kaehlerianas con curvatura holomorfa constante y en Geometría de Contacto los *espacios de curvatura  $\phi$ -seccional constante generalizados* a partir de las variedades Sasakianas con curvatura  $\phi$ -seccional constante.

En la presente memoria, daremos un paso más allá y analizaremos qué ocurre al generalizar el tensor de curvatura de un  $(\kappa, \mu)$ -espacio o un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio cuya curvatura  $\phi$ -seccional en un punto no dependa de la elección de la  $\phi$ -sección en dicho punto (en la literatura científica, suele decirse en inglés que sea “pointwise constant”). Definiremos así los  *$(\kappa, \mu)$ -espacios de curvatura  $\phi$ -seccional constante generalizados* y los  *$(\kappa, \mu, \nu)$ -espacios de curvatura  $\phi$ -seccional constante generalizados*, estudiando cómo se comportan cuando tienen estructura de contacto métrica, casi-cosimpléctica o casi-Kenmotsu. Daremos resultados de obstrucción o ejemplos en todos los casos posibles.



# Summary

Throughout the years, many authors have studied the form of the curvature tensor of a Riemannian manifold in order to classify this last one. A good portion of the works that have appeared on the topic concentrate on what happens when the sectional, holomorphic or  $\phi$ -sectional curvature of the manifold is constant and consist in generalising its curvature tensor. This way appeared in Complex Geometry the *generalized complex space forms* from the Kahlerian manifolds with constant holomorphic curvature (known as complex space forms) and in Contact Geometry the *generalized Sasakian space forms* from the Sasakian manifolds with constant  $\phi$ -sectional curvature (known as Sasakian space forms).

In the present work, we will go one step further and analyse what occurs when we generalise the curvature tensor of a  $(\kappa, \mu)$ -space or a  $(\kappa, \mu, \nu)$ -space whose  $\phi$ -sectional curvature in a point does not depend on the election of the  $\phi$ -section in such a point (is “pointwise constant”). We will then define *generalized  $(\kappa, \mu)$ -space forms* and *generalized  $(\kappa, \mu, \nu)$ -space forms*, studying how they behave when they have contact metric, almost cosymplectic or almost Kenmotsu structures. We will give obstruction results or examples in all the possible cases.





# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>III</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Variedades casi-contacto métricas . . . . .	1
1.2. El tensor $h$ . . . . .	4
1.3. Algunas notaciones . . . . .	6
<b>2. <math>(\kappa, \mu)</math>-espacios de curvatura <math>\phi</math>-seccional constante generalizados</b>	<b>9</b>
2.1. Definición y primeros resultados . . . . .	9
2.2. $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s con estructura de contacto métrica . . . . .	19
2.3. $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s y transformaciones $D_a$ -homotéticas . . . . .	44
2.4. $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s con otras estructuras . . . . .	65
<b>3. <math>(\kappa, \mu, \nu)</math>-espacios de curvatura <math>\phi</math>-seccional constante generalizados</b>	<b>69</b>
3.1. Definición y primeros resultados . . . . .	69
3.2. $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s con otras estructuras . . . . .	89
3.3. $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s conformemente llanos . . . . .	126
<b>Conclusions</b>	<b>147</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>151</b>



# Introducción

Una parte destacada de la Geometría Diferencial consiste en estudiar el tensor de curvatura de una variedad Riemanniana. Numerosos geómetras se han dedicado a definir herramientas que permitan determinarlo para proporcionar clasificaciones de dichas variedades.

Una de esas herramientas es la curvatura seccional de una variedad, que recordaremos a continuación. Para cada punto  $p$  de  $M$  y cada subespacio  $\pi$  de dimensión 2 del espacio tangente a  $M$  en  $p$ ,  $T_pM$ , se define la *curvatura seccional*  $K_p(\pi)$  de  $\pi$  como  $K_p(\pi) = g_p(R_p(u, v)v, u)$ , donde  $u$  y  $v$  son vectores de  $\pi$  ortonormales. Si  $K_p(\pi)$  es constante para toda sección plana  $\pi$  de  $T_pM$  y para todo punto  $p$  de  $M$ , entonces se afirma que  $M$  es un *espacio de curvatura constante*. Es bien conocido que el tensor de curvatura de  $M$  satisface entonces la siguiente ecuación

$$R(X, Y)Z = k\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\},$$

para cualesquiera campos diferenciables  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , siendo  $k$  una constante. Como ejemplos notables de *espacios de curvatura constante* podemos encontrar los espacios euclídeos ( $k = 0$ ) o las esferas con sus métricas usuales ( $k = 1$ ).

Si analizamos las variedades complejas desde un punto de vista Riemanniano, veremos que presentan un comportamiento análogo al descrito anteriormente. En efecto, dada  $(M, J, g)$  una variedad Kaehleriana, se define para cada campo unitario  $X$  la *curvatura seccional holomorfa* de  $X$  como la curvatura seccional  $K(X, JX)$  de la sección plana generada por  $X$  y  $JX$ . Si todas las curvaturas seccionales holomorfas tienen el mismo valor constante  $c$ , entonces se dirá que  $M$  es un *espacio de curvatura holomorfa constante*  $c$  y se sabe que su tensor de curvatura tiene la forma:

$$R(X, Y)Z = \frac{c}{4}\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y + g(JY, Z)JX - g(JX, Z)JY + 2g(X, JY)JZ\}.$$

Ahora bien, es posible modelizar estos espacios tomando como modelos el espacio proyectivo complejo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n(c)$  (si  $c > 0$ ), el espacio euclídeo complejo  $\mathbb{C}^n$  (si  $c = 0$ ) o el espacio hiperbólico complejo  $\mathbb{C}\mathbb{H}^n(c)$  (si  $c < 0$ ).

F. Tricerri y L. Vanhecke dieron un paso más allá en su trabajo [56] al presentar la noción de *espacio de curvatura holomorfa constante generalizado* como aquella variedad

casi-Hermítica cuyo tensor de curvatura satisface la expresión

$$R(X, Y)Z = f_1\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \\ + f_2\{g(JY, Z)JX - g(JX, Z)JY + 2g(X, JY)JZ\},$$

donde  $f_1$  y  $f_2$  son dos funciones diferenciables en  $M$ . Posteriormente, diversos autores realizaron trabajos sobre este tipo de variedades, destacando [52], en el que Z. Olszak dio interesantes ejemplos en dimensión 4.

Es natural preguntarse qué ocurre en dimensión impar al estudiar el análogo natural de las variedades casi-Hermíticas: las variedades casi-contacto métricas. Dada una variedad Sasakiana  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$ , recordamos que una sección plana  $\pi$  de  $T_pM$  generada por un vector unitario  $X$ , ortogonal a  $\xi$ , y por  $\phi X$  recibe el nombre de  $\phi$ -sección y que su curvatura seccional  $K(\pi)$  se conoce como *curvatura  $\phi$ -seccional*. Si todas sus curvaturas  $\phi$ -seccionales toman el mismo valor  $c$ , se dice que  $M$  es un *espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante  $c$*  y se comprueba que su tensor de curvatura puede escribirse de la siguiente forma:

$$R(X, Y)Z = \frac{c+3}{4} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \\ + \frac{c-1}{4} \{g(\phi Y, Z)\phi X - g(\phi X, Z)\phi Y + 2g(X, \phi Y)\phi Z \\ + \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\xi\}.$$

Estos espacios también pueden ser clasificados, dependiendo de si  $c > -3$ ,  $c = -3$  o  $c < -3$ .

En [2], P. Alegre, D. E. Blair y A. Carriazo introdujeron el concepto de *espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante generalizado* (*generalized Sasakian space form* en inglés, que abreviaremos como *g.S.s.f.*) como aquella variedad casi-contacto métrica cuyo tensor de curvatura toma la forma

$$R(X, Y)Z = f_1 \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \\ + f_2 \{g(\phi Y, Z)\phi X - g(\phi X, Z)\phi Y + 2g(X, \phi Y)\phi Z\} \\ + f_3 \{\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\xi\},$$

siendo  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$  funciones diferenciables en  $M$ . Esta escritura puede abreviarse como

$$R = f_1R_1 + f_2R_2 + f_3R_3,$$

donde  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  son los tensores definidos por:

$$R_1(X, Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y, \\ R_2(X, Y)Z = g(X, \phi Z)\phi Y - g(Y, \phi Z)\phi X + 2g(X, \phi Y)\phi Z, \\ R_3(X, Y)Z = \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\xi. \quad (0.0.1)$$

Tras estudiar las propiedades fundamentales de dichos espacios y obtener algunos resultados de obstrucción, encontraron ejemplos no triviales en cualquier dimensión, usando para ello diferentes herramientas geométricas tales como los productos alabeados o los cambios conformes (y similares) de métrica (ver [5]). En un trabajo posterior, [3], P. Alegre y A. Carriazo analizaron con más detalle la estructura de los  $g.S.s.f.$ 's llegando, entre otras, a la conclusión de que si la correspondiente variedad es de contacto métrica y tiene dimensión mayor o igual que 5, las funciones  $f_1, f_2, f_3$  han de ser constantes. En [4] dieron caracterizaciones de las subvariedades de estos espacios, además de estudiar sus curvaturas seccional y escalar y su tensor de Ricci. Para más información sobre el trabajo original de P. Alegre y A. Carriazo, véase [1].

Hay también varios artículos recientes sobre el tema realizados por diversos autores. En [6], P. Alegre, A. Carriazo, Y. H. Kim y D. W. Yoon dan resultados sobre la desigualdad de B.-Y. Chen para subvariedades de espacios de curvatura holomorfa constante generalizados y  $g.S.s.f.$ 's. En [7], los dos primeros autores, junto con C. Özgür y S. Sular, estudian cuándo una subvariedad slant de un  $g.S.s.f.$  hereda tal estructura, obteniendo resultados generales y algunos ejemplos explícitos. R. Al-Ghefari, F. R. Al-Solamy y M. H. Shahid estudian en [8] y [9] las subvariedades CR de  $g.S.s.f.$ 's. En [38], S. Hong y M. M. Tripathi tratan la curvatura de Ricci de estos espacios, mientras que en [41], U. K. Kim da resultados en el caso de que sean conformemente llanos o localmente simétricos. Por último, D. W. Yoon y K. S. Cho estudian en [58] inmersiones de productos alabeados en  $g.S.s.f.$ 's, estableciendo desigualdades entre invariantes intrínsecos y extrínsecos.

No obstante, existen ejemplos destacados de variedades de contacto métricas cuyo tensor de curvatura adopta una forma más general que el de los  $g.S.s.f.$ 's, como los  $(\kappa, \mu)$ -espacios con estructura de contacto métrica, curvatura  $\phi$ -seccional constante y dimensión mayor o igual que 5. Recordemos que una variedad casi-contacto métrica  $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$  se dice  $(\kappa, \mu)$ -espacio si su tensor de curvatura satisface la igualdad

$$R(X, Y)\xi = \kappa\{\eta(Y)X - \eta(X)Y\} + \mu\{\eta(Y)hX - \eta(X)hY\}, \quad (0.0.2)$$

para todos  $X, Y$  en  $M$ , donde  $\kappa$  y  $\mu$  son constantes,  $h = \frac{1}{2}L_\xi\phi$  y  $L$  es la derivada de Lie usual.

D. E. Blair, T. Koufogiorgos y V. J. Papantoniou fueron los primeros en interesarse en los  $(\kappa, \mu)$ -espacios con estructura de contacto métrica en [11], si bien los denominaron *variedades de contacto métricas en las que  $\xi$  pertenece a la distribución  $(\kappa, \mu)$ -nula*. En ese artículo probaron que la condición anterior es invariante por transformaciones  $D_a$ -homotéticas, aunque las constantes sí varían. Los  $(\kappa, \mu)$ -espacios engloban a las variedades Sasakianas ( $\kappa = 1, h = 0$ ), pero son más interesantes los ejemplos no-Sasakianos. El clásico es el de un fibrado tangente esférico de una variedad Riemanniana llana con curvatura seccional constante distinta de 1, dotado de la estructura de variedad de contacto métrica usual ([11]).

En [15], E. Boeckx fue el primero en llamar a estas variedades  $(\kappa, \mu)$ -*espacios*, clasificándolos al año siguiente en [16]. R. Sharma generalizó la definición en [54], donde estudió las variedades de contacto métricas que verificaban la condición (0.0.2) para  $\kappa$  y  $\mu$  funciones diferenciables en  $M$  independientes de la elección de los campos vectoriales  $X$  e  $Y$ . Estas nuevas variedades se llaman  $(\kappa, \mu)$ -*espacios generalizados*. Más tarde, T. Koufogiorgos y C. Tsihlias probaron en [46] que en dimensiones mayores o iguales que 5 las funciones  $\kappa, \mu$  deben ser constantes y presentaron ejemplos en dimensión 3 con funciones no constantes. Posteriores autores estudiaron variedades casi-contacto métricas satisfaciendo la ecuación (0.0.2), pero con estructura casi-cosimpléctica: H. Endo en [31], [32] y [33] y P. Dacko en [25]. Por tanto, de ahora en adelante usaremos el nombre  $(\kappa, \mu)$ -*espacio* para denotar una variedad casi-contacto métrica que verifica la condición (0.0.2) y especificaremos cualquier estructura adicional.

T. Koufogiorgos probó en [43] que si un  $(\kappa, \mu)$ -espacio  $M$  tiene estructura de contacto métrica, curvatura  $\phi$ -seccional constante  $F$  y dimensión mayor o igual que 5, entonces su tensor de curvatura es de la forma

$$R = \frac{F+3}{4}R_1 + \frac{F-1}{4}R_2 + \left(\frac{F+3}{4} - \kappa\right)R_3 + R_4 + \frac{1}{2}R_5 + (1-\mu)R_6,$$

donde  $R_1, R_2, R_3$  son los tensores definidos anteriormente en (0.0.1) y  $R_4, R_5, R_6$  vienen dados por

$$\begin{aligned} R_4(X, Y)Z &= g(Y, Z)hX - g(X, Z)hY + g(hY, Z)X - g(hX, Z)Y, \\ R_5(X, Y)Z &= g(hY, Z)hX - g(hX, Z)hY + g(\phi hX, Z)\phi hY - g(\phi hY, Z)\phi hX, \\ R_6(X, Y)Z &= \eta(X)\eta(Z)hY - \eta(Y)\eta(Z)hX + g(hX, Z)\eta(Y)\xi - g(hY, Z)\eta(X)\xi, \end{aligned} \quad (0.0.3)$$

para cualesquiera campos vectoriales  $X, Y, Z$  en  $M$ .

El objetivo de la primera parte de este trabajo es introducir el concepto de  $(\kappa, \mu)$ -*espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante generalizado* como aquella variedad casi-contacto métrica cuyo tensor de curvatura tenga la forma

$$R = f_1R_1 + f_2R_2 + f_3R_3 + f_4R_4 + f_5R_5 + f_6R_6,$$

donde  $f_1, \dots, f_6$  son funciones diferenciables en  $M$  y  $R_1, \dots, R_6$  los tensores anteriormente vistos en (0.0.1) y (0.0.3). Estos espacios surgen de manera natural a la vista del desarrollo de esta parte de la Geometría Diferencial y es obvio que engloban a los *espacios de curvatura  $\phi$ -seccional constante generalizados* (basta tomar  $f_4 = f_5 = f_6 = 0$ ), con los que comparten algunas propiedades. Por ejemplo, el hecho de que para un  $(\kappa, \mu)$ -*espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante generalizado* es equivalente ser variedad Sasakiana y ser variedad  $K$ -contacto.

Por razones obvias, el nombre en inglés de un  $(\kappa, \mu)$ -*espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante generalizado* debe ser *generalized  $(\kappa, \mu)$ -space form*. Para simplificar la notación, de aquí en adelante usaremos la abreviatura  $g.(\kappa, \mu)$ -*s.f.*

Más recientemente, T. Koufogiorgos, M. Markellos y V. J. Papantoniou introdujeron en [44] el concepto de *variedad*  $(\kappa, \mu, \nu)$ -*contacto métrica* como aquella variedad de contacto métrica  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$  cuyo tensor de curvatura satisface la igualdad

$$R(X, Y)\xi = \kappa\{\eta(Y)X - \eta(X)Y\} + \mu\{\eta(Y)hX - \eta(X)hY\} + \nu\{\eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY\}, \quad (0.0.4)$$

para todos  $X, Y$  en  $M$ , donde  $\kappa, \mu$  y  $\nu$  son funciones.

Probaron que, en dimensión mayor o igual que 5,  $\kappa$  y  $\mu$  son necesariamente constantes y  $\nu$  se anula, luego las *variedades*  $(\kappa, \mu, \nu)$ -*contacto métricas* son en particular  $(\kappa, \mu)$ -espacios. Demostraron también que al aplicarles transformaciones  $D_a$ -homotéticas siguen siendo *variedades*  $(\kappa, \mu, \nu)$ -*contacto métricas*, aunque con distintas funciones, resultado que usaron para proporcionar infinitos ejemplos en dimensión 3 con  $\nu$  una función no nula.

Ahora bien, otros autores también han estudiado variedades casi-contacto métricas satisfaciendo la igualdad (0.0.4), pero con estructuras distintas. Tal es el caso de P. Dacko y Z. Olszak, que en [26] definieron un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -*espacio casi-cosimpléctico* como la variedad casi-cosimpléctica que cumple (0.0.4), pero con  $\kappa, \mu, \nu$  funciones variando exclusivamente en la dirección del tensor  $\xi$ . En [27] dieron ejemplos de dicho tipo de espacios.

G. Dileo y A. M. Pastore analizaron en [29] los  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacios con estructura casi-Kenmotsu. Específicamente, lo que ellas llamaron *variedades en las que  $\xi$  pertenece a la distribución  $(\kappa, \mu)$ -nula* (para nosotros  $(\kappa, \mu)$ -espacios) y *variedades en las que  $\xi$  pertenece a la distribución  $(\kappa, \mu)'$ -nula* (con nuestra notación,  $(\kappa, 0, -\mu)$ -espacios).

Análogamente al caso de los  $(\kappa, \mu)$ -espacios, unificaremos notaciones definiendo un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -*espacio* como aquella variedad casi-contacto métrica que satisfaga la igualdad (0.0.4) para  $\kappa, \mu, \nu$  funciones. Especificaremos aparte cualquier estructura adicional.

En la segunda parte de este trabajo estudiaremos el tensor de curvatura de los  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacios con estructura de contacto métrica (sólo en dimensión 3, puesto que en dimensión mayor o igual que 5 la función  $\nu$  se anula), casi-cosimpléctica y casi-Kenmotsu. Ello dará pie a la definición de  $(\kappa, \mu, \nu)$ -*espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante generalizado* como aquella variedad casi-contacto métrica cuyo tensor de curvatura tenga la forma

$$R = f_1R_1 + f_2R_2 + f_3R_3 + f_4R_4 + f_5R_5 + f_6R_6 + f_7R_7 + f_8R_8,$$

donde  $f_1, \dots, f_8$  son funciones diferenciables en  $M$ ,  $R_1, R_2, R_3$  los tensores anteriormente vistos en (0.0.1) y  $R_4, R_5, R_6$  en (0.0.3). Los tensores  $R_7$  y  $R_8$  son los siguientes:

$$R_7(X, Y)Z = g(Y, Z)\phi hX - g(X, Z)\phi hY + g(\phi hY, Z)X - g(\phi hX, Z)Y, \\ R_8(X, Y)Z = \eta(X)\eta(Z)\phi hY - \eta(Y)\eta(Z)\phi hX + g(\phi hX, Z)\eta(Y)\xi - g(\phi hY, Z)\eta(X)\xi.$$

Este tipo de variedad se denotará  $M(f_1, \dots, f_8)$  y en inglés se llamará *generalized*  $(\kappa, \mu, \nu)$ -*space form*, que simplificaremos de aquí en adelante como  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -*s.f.* Es obvio por definición que los  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -*s.f.*'s engloban a los  $g.(\kappa, \mu)$ -*s.f.*'s (basta tomar  $f_7 = f_8 = 0$ ).

Para llevar a cabo nuestro estudio hemos estructurado esta memoria de la siguiente manera. En primer lugar, presentamos un capítulo de preliminares, en el que se recogen los distintos tipos de espacios casi-contacto métricos y sus respectivas propiedades. Además, daremos la definición y algunos resultados del tensor  $h$  que usaremos a lo largo de la memoria, así como unificaremos algunas notaciones que en la literatura suelen variar dependiendo del autor.

El segundo capítulo, que consta de cuatro secciones, engloba el trabajo realizado sobre  $g.(\kappa, \mu)$ -*s.f.*'s. Así, en la primera sección comprobaremos que algunos resultados válidos para los  $g.S.s.f.$ 's son también ciertos para los  $g.(\kappa, \mu)$ -*s.f.*'s. Partiendo de algunas identidades que se cumplen para el tensor de curvatura de una variedad Sasakiana obtendremos igualdades similares para  $g.(\kappa, \mu)$ -*s.f.*'s, que después compararemos con los obtenidos en [2] para  $g.S.s.f.$ 's.

En la Sección 2.2 veremos que los  $g.(\kappa, \mu)$ -*s.f.*'s con estructura de contacto métrica son  $(\kappa, \mu)$ -espacios generalizados con  $\kappa = f_1 - f_3$  y  $\mu = f_4 - f_6$ , luego podremos usar la numerosa literatura existente sobre este tipo de variedades. Probaremos que en dimensión mayor o igual que 5 son  $(-f_6, 1 - f_6)$ -espacios con curvatura  $\phi$ -seccional constante  $2f_6 - 1$ . Es más, se cumple que  $f_4 = 1$ ,  $f_5 = 1/2$  y que  $f_1, f_2, f_3$  dependen linealmente de  $f_6$ , que resulta constante. Daremos un método para la construcción de infinitos ejemplos de este tipo. En dimensión 3 demostraremos que la escritura del tensor de curvatura de un  $g.(\kappa, \mu)$ -*s.f.* no es única y daremos varias propiedades y resultados que los clasifican parcialmente. Al final de la sección comprobaremos que los ejemplos de  $(\kappa, \mu)$ -espacios generalizados con  $\kappa$  y  $\mu$  no constantes que T. Koufogiorgos y C. Tsihlias dan en [46] son  $g.(\kappa, \mu)$ -*s.f.*'s con funciones  $f_1, f_3$  y  $f_4$  no constantes.

El hecho de que las transformaciones  $D_a$ -homotéticas dejen invariante la condición (0.0.2), aunque para distintas funciones  $\kappa$  y  $\mu$ , nos llevará a estudiar en la Sección 2.3 cómo afectan estas transformaciones a un  $g.(\kappa, \mu)$ -*s.f.* Veremos que las nuevas variedades así obtenidas no serán, en general,  $g.(\kappa, \mu)$ -*s.f.*'s, pero que sí lo son si redefinimos los  $g.(\kappa, \mu)$ -*s.f.*'s  $M(f_1, \dots, f_6)$  con el tensor

$$R_5(X, Y)Z = g(hY, Z)hX - g(hX, Z)hY + g(\phi hX, Z)\phi hY - g(\phi hY, Z)\phi hX$$

dividido en dos de la forma  $R_5 = R_{5,1} - R_{5,2}$  para

$$\begin{aligned} R_{5,1}(X, Y)Z &= g(hY, Z)hX - g(hX, Z)hY, \\ R_{5,2}(X, Y)Z &= g(\phi hY, Z)\phi hX - g(\phi hX, Z)\phi hY, \end{aligned}$$

con funciones  $f_{5,1}$  y  $f_{5,2}$ . Los espacios así definidos, que denominaremos  $g.(\kappa, \mu)$ -*s.f.*'s con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$  englobarán a los  $g.(\kappa, \mu)$ -*s.f.*'s  $M(f_1, \dots, f_6)$



de forma trivial. Gracias al Teorema 2.3.5, sabemos que si realizamos una transformación  $D_a$ -homotética sobre un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f., lo que obtenemos es un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido, luego bastaría hacer transformaciones de los ejemplos obtenidos en la sección anterior para conseguir infinitos ejemplos de  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$ .

La situación es especial en dimensión 3, donde podemos escribir el tensor  $R_{5,2}$  en función de  $R_1$  y  $R_2$ , luego si transformamos  $D_a$ -homotéticamente un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_6)$  volvemos a obtener otro. Este hecho nos proporcionará infinitos ejemplos de espacios con funciones no constantes, pues bastaría transformar los obtenidos en la Sección 2.2.

En la última sección de este capítulo, 2.4, probaremos que si una variedad tiene estructura trans-Sasakiana, entonces  $h = 0$ . Por tanto, los  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s con estructura trans-Sasakiana son en realidad  $g.S.s.f.$ 's, ya estudiados en [3]. También incluiremos algunos resultados sobre  $C(\alpha)$ -variedades.

El tercer capítulo consta de tres secciones, en las que se recogerán los resultados obtenidos sobre  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s. Así, en la Sección 3.1 estudiaremos el tensor de curvatura de un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura de contacto métrico y dimensión 3. Probaremos que dicho tensor no tiene escritura única y que puede tomar, entre otras, las formas

$$R = FR_1 + (F - \kappa)R_3 + \mu R_4 + \nu R_7 = FR_1 + (F - \kappa)R_3 + \mu R_4 - \nu R_8,$$

donde  $F$  es la curvatura  $\phi$ -seccional de la variedad. Esto nos llevará a definir los  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s como vimos anteriormente, englobando a los  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s. Por tanto, los ejemplos de  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacios con  $\nu$  no nulo que aparecen en [44] son en particular  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s, para los que calcularemos explícitamente el tensor de curvatura. Veremos asimismo que el recíproco se cumple, es decir, que un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_8)$  con estructura de contacto métrica es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con  $\kappa = f_1 - f_3$ ,  $\mu = f_4 - f_6$  y  $\nu = f_7 - f_8$ . Usaremos dicho resultado y los que aparecen en [44] para probar que, cuando la dimensión es mayor o igual que 5,  $f_4 = 1$ ,  $f_5 = 1/2$ ,  $f_7 = f_8 = 0$  y  $f_1, f_2, f_3$  dependen linealmente de  $f_6$ , que será constante.

En la Sección 3.2 llevaremos a cabo un estudio detallado sobre los  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s con estructuras casi-cosimpléctica y casi-Kenmotsu, presentando resultados profundos y concluyentes. Tal y como ocurría para la estructura de contacto métrica, con cualquiera de las dos estructuras mencionadas se cumple que un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_8)$  es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con  $\kappa = f_1 - f_3$ ,  $\mu = f_4 - f_6$  y  $\nu = f_7 - f_8$ . En dimensión mayor o igual que 5, hallaremos la forma del tensor de curvatura de un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructuras casi-cosimpléctica (y cumpliendo  $\kappa < 0$ ) y casi-Kenmotsu (con  $\kappa < 1$ ). En el primer caso

$$R = -\kappa R_3 - R_{5,2} - \mu R_6 - \nu R_8$$

y en el segundo

$$R = -R_1 - (\kappa + 1)R_3 - R_{5,2} - \mu R_6 + R_7 - (\nu - 1)R_8.$$

Esto supone la justificación de la definición de los tensores  $R_7$  y  $R_8$  y la introducción de  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, \dots, f_8)$  de manera análoga a como se hizo con los  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$ . En todos los casos posibles, presentaremos ejemplos explícitos o demostraremos la no existencia de los espacios tratados, tanto con estructura casi-cosimpléctica como con estructura casi-Kenmotsu. Por ejemplo, probaremos que un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio de dimensión 3 con cualquiera de las estructuras tiene tensor de curvatura

$$R = FR_1 + (F - \kappa)R_3 + \mu R_4 + \nu R_7,$$

luego será un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f., de los que daremos ejemplos.

En la última sección del tercer capítulo, daremos primero la escritura del tensor de Schouten y el tensor de Weyl de un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_8)$  en función de  $f_1, \dots, f_8$  y los tensores  $R_1, \dots, R_8$ . Usaremos dicho resultado para dar condiciones necesarias y suficientes para que un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. sea conformemente llano en el caso de que la dimensión sea mayor o igual que 5 y el tensor  $h$  satisfaga algunas propiedades naturales. Probaremos también algunos resultados si la estructura es de contacto métrica, casi-cosimpléctica o casi-Kenmotsu. Por último, analizaremos los  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s con estructura de contacto métrica que sean conformemente simétricos,  $\xi$ -conformemente llanos y  $\phi$ -conformemente llanos. Es de señalar que, aunque no se haya estudiado lo anterior para  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s, no es necesario hacerlo, puesto que los  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s engloban a los anteriores.

Esto ilustra perfectamente la ventaja de usar marcos cada vez más amplios para analizar espacios que antes se estudiaban de manera más o menos dispersa, lo que supone una de las razones por las que hemos introducido los espacios que definimos.

Por último, incluimos un capítulo de conclusiones escrito en inglés, requisito imprescindible para optar a la mención de “Doctor Europeo” bajo la normativa actual (al igual que el resumen en inglés). Cerramos la memoria con una lista de las referencias bibliográficas que se han ido citando a lo largo de la misma, a la que hemos añadido los artículos [20] y [21], donde recogemos los resultados principales del segundo capítulo y [19], [10], artículos en preparación que reunirán los resultados del tercer capítulo. En una página final, recopilamos las definiciones de los principales tensores que mencionamos en la memoria, para mayor comodidad del lector.

Finalmente, me gustaría aprovechar esta introducción para dar las gracias al Profesor Dr. D. Alfonso Carriazo Rubio por todo el tiempo y esfuerzo que me ha dedicado a lo largo del proceso de elaboración de este trabajo, y por darme ánimos cuando más lo necesitaba. También querría agradecer al Director del Departamento de Geometría y Topología, Profesor Dr. D. José Luis Cabrerizo Jaraíz, el haber puesto a mi disposición los medios necesarios para llevar a cabo mi investigación. Asimismo, este estudio ha sido facilitado por las becas que he disfrutado, que me fueron concedidas por la Universidad de Sevilla (FPI, del 1 de enero al 31 de agosto de 2008) y el Ministerio de Educación (FPU, del 1 de septiembre de 2008 hasta el presente).

Tampoco puedo olvidar mencionar a los siguientes profesores, muchos de los cuales visitaron la Universidad de Sevilla o visité yo durante el proceso de realización del trabajo contenido en esta memoria y que me brindaron su apoyo en forma de sugerencias y consejos: Alfonso Romero (Universidad de Granada), Luis Alías (Universidad de Murcia), Mukut Mani Tripathi (Banaras Hindu University, India), Kadri Arslan y Cengizhan Murathan (Uludağ Üniversitesi, Turquía), Hassan Ugail (University of Bradford, Reino Unido), Udo Simon (TU Berlin, Alemania), Young Ho Kim (Kyungpook National University, Corea), Leopold Verstraelen (Katholieke Universiteit Leuven, Bélgica), Stefan Haesen (Simon Stevin Institute, Bélgica), Bang-Yen Chen y David E. Blair (Michigan State University, Estados Unidos), Adela e Ion Mihai (Universitatea din București, Rumanía) y Anna Maria Pastore y Anna Maria Candela (Università degli Studi di Bari “Aldo Moro”, Italia).



# Capítulo 1

## Preliminares

En este primer capítulo recordaremos los distintos tipos de estructuras casi-contacto métricas y sus principales propiedades. A continuación daremos la definición y algunas propiedades del tensor  $h$  y por último fijaremos ciertas notaciones que usaremos más adelante. Para más detalles ver [11].

A lo largo de esta memoria todas las funciones serán diferenciables y las variedades conexas a menos que se especifique lo contrario.

### 1.1. Variedades casi-contacto métricas

Se define el tensor de curvatura de una variedad Riemanniana  $M$  con conexión Riemanniana  $\nabla$  como

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

para cualesquiera campos  $X, Y, Z$  en  $M$ . Dados  $X, Y, Z, W$  campos tangentes a  $M$ , notaremos

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W).$$

En general, si  $T$  es un tensor de tipo  $(0, 3)$  sobre  $M$ , utilizaremos la misma notación para referirnos al tensor de tipo  $(0, 4)$  dado por

$$T(X, Y, Z, W) = g(T(X, Y)Z, W),$$

para cualesquiera campos  $X, Y, Z, W$  en  $M$ .

Se dice que una variedad de dimensión  $2n + 1$ ,  $M^{2n+1}$ , es una *variedad casi-contacto* si existen  $\phi$  un tensor de tipo  $(1, 1)$ , un campo vectorial  $\xi$  y una 1-forma  $\eta$  tales que

$$\eta(\xi) = 1, \tag{1.1.1}$$

$$\phi^2(X) = -X + \eta(X)\xi, \tag{1.1.2}$$

para todo campo  $X$  en  $M$ . Se dice que  $\xi$  es el *campo de estructura* y que  $M$  tiene una  $(\phi, \xi, \eta)$ -estructura.

Una variedad casi-contacto  $M^{2n+1}$  verifica las siguientes propiedades:

$$\phi\xi = 0, \quad (1.1.3)$$

$$\eta \circ \phi = 0, \quad (1.1.4)$$

$$\text{rango}(\phi) = 2n. \quad (1.1.5)$$

Una métrica  $g$  en  $M$  se dice *adaptada a la estructura casi-contacto* si verifica

$$g(X, \xi) = \eta(X), \quad (1.1.6)$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad (1.1.7)$$

para todos  $X, Y$  campos en  $M^{2n+1}$ .

Una variedad casi-contacto dotada de una métrica adaptada  $g$  se llama *variedad casi-contacto métrica* y se dice que tiene una  $(\phi, \xi, \eta, g)$ -estructura o una estructura casi-contacto métrica. A lo largo de esta memoria se usará  $M$  en lugar de  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$  siempre que no haya lugar a confusión.

En una variedad casi-contacto métrica se cumple

$$g(X, \phi Y) = -g(\phi X, Y), \quad (1.1.8)$$

para cualesquiera campos  $X, Y$  en  $M$ . En particular  $g(X, \phi X) = 0$  para todo  $X$  en  $M^{2n+1}$ .

Llamaremos *2-forma fundamental* de  $M$  y denotaremos por  $\Phi$  a la 2-forma definida por

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y), \quad (1.1.9)$$

para cualesquiera  $X, Y$  campos en  $M^{2n+1}$ . En virtud de (1.1.8), se verifica que  $\Phi$  es antisimétrica (necesario para ser 2-forma) y, como  $\phi$  tiene rango  $2n$ ,  $\eta \wedge \Phi^n \neq 0$ .

Se dice que una variedad casi-contacto métrica  $M^{2n+1}$  es *de contacto métrica* si  $\Phi = d\eta$ . En ese caso  $\eta$  se llama *forma de contacto* y cumple  $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ .

Usaremos la siguiente notación

$$(\nabla_X \phi)Y = \nabla_X \phi Y - \phi \nabla_X Y, \quad (1.1.10)$$

para cualesquiera campos  $X, Y$  en  $M$ .

Por otra parte, en una variedad de contacto métrica se verifican las siguientes ecuaciones:

$$\nabla_\xi \phi = 0, \quad (1.1.11)$$

$$\nabla_\xi \xi = 0. \quad (1.1.12)$$

Una variedad de contacto métrica  $M$  se denomina *variedad  $K$ -contacto* si  $\xi$  es un campo de Killing con respecto a  $g$ . Se prueba que una variedad de contacto métrica es  $K$ -contacto si y sólo si se verifica

$$\nabla_X \xi = -\phi X, \quad (1.1.13)$$

para todo campo  $X$  en  $M$ .

De hecho, toda variedad casi-contacto métrica con  $\nabla_X \xi = -\phi X$  es una variedad  $K$ -contacto (Proposición 1.1.1. de [1]). Además, en una variedad  $K$ -contacto se verifica

$$(\nabla_X \phi)Y = R(\xi, X)Y,$$

para todos  $X, Y$  campos en  $M$ .

Se dice que la estructura casi-contacto de  $M^{2n+1}$  es *normal* si el tensor de torsión de Nijenhuis, dado por

$$[\phi, \phi](X, Y) = \phi^2[X, Y] + [\phi X, \phi Y] - \phi[\phi X, Y] - \phi[X, \phi Y],$$

verifica la siguiente ecuación:

$$[\phi, \phi](X, Y) = -2d\eta(X, Y)\xi.$$

Una variedad de contacto métrica normal se denomina *variedad Sasakiana*. Se prueba que toda variedad Sasakiana es  $K$ -contacto, aunque el recíproco no es cierto en general (sí en dimensión 3, ver [11]). Además, una variedad casi-contacto métrica es Sasakiana si y sólo si

$$(\nabla_X \phi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X, \quad (1.1.14)$$

para cualesquiera campos  $X, Y$  en  $M$ .

Puede demostrarse que la siguiente igualdad es cierta en toda variedad Sasakiana

$$R(X, Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y, \quad (1.1.15)$$

para todos  $X, Y$  campos en  $M$ .

Una *variedad cosimpléctica* es una variedad casi-contacto métrica normal con  $\eta$  y  $\Phi$  formas cerradas. Se demuestra que una variedad casi-contacto métrica es cosimpléctica si y sólo si  $\nabla\phi = 0$ , es decir, si y sólo si  $\phi$  es paralelo con respecto a  $\nabla$ . El ejemplo canónico de este tipo de espacio es el producto de una variedad de Kaehler y un intervalo de la recta real, donde la estructura compleja es la restricción de  $\phi$  a las subvariedades integrales. Sin embargo, hay ejemplos de variedades cosimplécticas que no son globalmente el producto de una variedad de Kaehler y una variedad 1-dimensional (ver [23] para dimensión 3 y [48] para dimensión mayor o igual que 5). Para más detalles, consultar [11].

Recordamos asimismo que una variedad casi-contacto métrica  $M$  se dice que tiene una *estructura trans-Sasakiana*  $(\alpha, \beta)$  si existen  $\alpha$  y  $\beta$  funciones diferenciables en  $M$  tales que

$$(\nabla_X \phi)Y = \alpha(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X) + \beta(g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X), \quad (1.1.16)$$

para todos  $X, Y$  en  $M$ .

Podemos observar que una variedad cosimpléctica es una variedad trans-Sasakiana con  $\alpha = \beta = 0$  y que una variedad Sasakiana es aquella con  $\alpha = 1$  y  $\beta = 0$ . A las variedades trans-Sasakianas con  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$  se les llama *variedades de Kenmotsu*. Otros casos ampliamente estudiados son las variedades  $\alpha$ -Sasakianas ( $\beta = 0$ ) o las  $\beta$ -Kenmotsu ( $\alpha = 0$ ).

J. C. Marrero probó en [47] que toda variedad trans-Sasakiana  $(\alpha, \beta)$  de dimensión mayor o igual que 5 es de tipo  $(0, \beta)$  o  $(\alpha, 0)$ .

Una variedad trans-Sasakiana  $(\alpha, \beta)$  verifica las siguientes igualdades

$$\nabla_X \xi = -\alpha\phi X + \beta(X - \eta(X)\xi), \quad (1.1.17)$$

$$d\eta = \alpha\Phi. \quad (1.1.18)$$

Por último, veamos dos tipos de variedades que engloban en particular a las cosimplécticas y Kenmotsu.

Se dice que una variedad casi-contacto métrica  $M$  es *casi-cosimpléctica* si  $d\eta = 0$  y  $d\Phi = 0$ , donde  $\Phi$  viene dada por (1.1.9). Sería *cosimpléctica* si fuera casi-cosimpléctica y la estructura casi-contacto fuera además normal (equivalente a que  $\nabla\phi = 0$ ).

Llamaremos *casi-Kenmotsu* a una variedad casi-contacto métrica  $M$  tal que  $d\eta = 0$  y  $d\Phi = 2\eta \wedge \Phi$ . Si además es normal, sabemos que es *Kenmotsu*.

En ambas estructuras se cumple que  $\nabla_\xi \phi = 0$  (ecuaciones (2.10) de [51] para la estructura casi-cosimpléctica y (2.5) de [42] para la estructura casi-Kenmotsu).

## 1.2. El tensor $h$

En una variedad casi-contacto métrica, se define el tensor  $h$  como  $h = \frac{1}{2}L_\xi \phi$ , siendo  $L$  la derivada de Lie usual.

**Proposición 1.2.1.** *Se cumple que  $h\xi = 0$ .*

*Demostración.* Por definición,

$$2h\xi = (L_\xi \phi)\xi = L_\xi(\phi\xi) - \phi L_\xi \xi = [\xi, \phi\xi] - \phi[\xi, \xi] = 0,$$

donde se ha usado (1.1.3). □



Probaremos ahora un sencillo pero muy útil lema:

**Lema 1.2.2.** *Si  $M$  es una variedad de contacto métrica, entonces  $\eta \circ h = 0$ .*

*Demostración.* Como (1.1.11) es cierto en variedades de contacto métricas, obtenemos que

$$\begin{aligned} (\eta \circ h)X &= \eta(hX) = g(hX, \xi) = \frac{1}{2}g((L_\xi\phi)X, \xi) = \frac{1}{2}g([\xi, \phi X] - \phi[\xi, X], \xi) \\ &= \frac{1}{2}g(\nabla_\xi\phi X - \nabla_{\phi X}\xi - \phi\nabla_\xi X + \phi\nabla_X\xi, \xi) = \frac{1}{2}g((\nabla_\xi\phi)X - \nabla_{\phi X}\xi + \phi\nabla_X\xi, \xi) \\ &= \frac{1}{2}g(-\nabla_{\phi X}\xi + \phi\nabla_X\xi, \xi) = \frac{1}{2}[-g(\nabla_{\phi X}\xi, \xi) + \eta(\phi\nabla_X\xi)] = 0, \end{aligned}$$

para todo campo  $X$  en  $M$ .

En la última igualdad se ha usado (1.1.4) y que  $2g(\nabla_{\phi X}\xi, \xi) = (\phi X)g(\xi, \xi) = 0$  por ser  $\xi$  unitario.  $\square$

Los siguientes resultados se prueban en [11]:

**Lema 1.2.3.** *En una variedad de contacto métrica,  $h$  es un operador simétrico,*

$$\nabla_X\xi = -\phi X - \phi hX, \quad (1.2.1)$$

para todo campo  $X$ ,  $h$  anticonmuta con  $\phi$  y  $th = 0$ .

**Lema 1.2.4.** *Una variedad de contacto métrica  $M^{2n+1}$  es una variedad  $K$ -contacto si y sólo si  $S(\xi, \xi) = 2n$ , siendo  $S$  el tensor de curvatura de Ricci.*

**Nota 1.2.5.** *Del Lema 1.2.3 se deduce que si  $X$  es un autovector de  $h$  asociado al autovalor  $\lambda$ , entonces  $h\phi X = -\phi hX = -\lambda\phi X$  y por tanto  $\phi X$  es autovector de  $h$  asociado a  $-\lambda$ .*

*Otra consecuencia de este lema es una demostración más simple del Lema 1.2.2:*

$$(\eta \circ h)X = \eta(hX) = g(hX, \xi) = g(X, h\xi) = 0,$$

para todo campo  $X$ , en virtud de la Proposición 1.2.1.

**Teorema 1.2.6.** *Dada una variedad de contacto métrica,  $h = 0$  si y sólo si  $\xi$  es un campo de Killing.*

El Teorema anterior es equivalente a afirmar que una variedad de contacto métrica es  $K$ -contacto si y sólo si  $h = 0$ . Este resultado podría probarse fácilmente teniendo en cuenta que una variedad de contacto métrica siempre cumple (1.2.1), luego la fórmula (1.1.13) sería cierta si y sólo si  $h = 0$ .

Hasta ahora hemos estudiado el comportamiento del tensor  $h$  cuando la variedad tiene estructura de contacto métrica. Veremos que en el caso de que sea casi-cosimpléctica o casi-Kenmotsu,  $h$  cumple lemas análogos al 1.2.3. En efecto, gracias al artículo [31] para variedades casi-cosimplécticas y el [28] para variedades casi-Kenmotsu, tenemos que:

**Lema 1.2.7.** *En una variedad casi-cosimpléctica,  $h$  es un operador simétrico,*

$$\nabla_X \xi = -\phi hX, \quad (1.2.2)$$

para todo campo  $X$ ,  $h$  anticonmuta con  $\phi$  y  $trh = 0$ .

**Lema 1.2.8.** *En una variedad casi-Kenmotsu,  $h$  es un operador simétrico,*

$$\nabla_X \xi = -\phi^2 X - \phi hX, \quad (1.2.3)$$

para todo campo  $X$ ,  $h$  anticonmuta con  $\phi$  y  $trh = 0$ .

Es fácil comprobar que en ambas estructuras se sigue cumpliendo que  $h\xi = 0$  (que es cierto para toda variedad casi-contacto métrica) y que  $\eta \circ h = 0$  (porque  $h$  es simétrica y  $h\xi = 0$ ).

### 1.3. Algunas notaciones

En este apartado se fijan algunas notaciones que en la literatura suelen variar según el autor.

Sean  $M$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n$  y  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una referencia local ortonormal. Se define el *tensor de Ricci*,  $S$ , como

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^n R(e_i, X, Y, e_i),$$

y de ahí el *operador de Ricci*,  $Q$ , como el tensor que verifica

$$S(X, Y) = g(QX, Y),$$

para cualesquiera  $X, Y$  campos en  $M$ . Por lo tanto,

$$QX = \sum_i R(X, e_i)e_i.$$

Definiremos la curvatura escalar como sigue:

$$\tau = \sum_j S(e_j, e_j) = \sum_{i,j} R(e_i, e_j, e_j, e_i) = trQ.$$

Es preciso señalar que algunos autores usan definiciones alternativas. Así, también podemos encontrar:

$$\tau = \frac{1}{n(n-1)} \sum_j S(e_j, e_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} R(e_i, e_j, e_j, e_i) = \frac{1}{n(n-1)} \text{tr}Q,$$

al igual que

$$\tau = \sum_{i < j} R(e_i, e_j, e_j, e_i) = \frac{1}{2} \text{tr}Q.$$

A continuación presentaremos otros conceptos que aparecen normalmente en la literatura:

Dada una variedad casi-contacto métrica de dimensión  $2n + 1$ ,  $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ , una  $\phi$ -base es una base ortonormal  $\{e_i, \dots, e_n, \phi e_i, \dots, \phi e_n, \xi\}$ .

Se llama  $\phi$ -sección de  $M$  en  $p \in M$  a una sección  $\Pi \subseteq T_p(M)$  tal que  $\Pi = \text{Span}\{X_p, \phi X_p\}$  para cierto vector  $X_p$  unitario y ortogonal a  $\xi_p$ . Se define la *curvatura  $\phi$ -seccional* de  $\Pi$  como

$$K(X, \phi X) = R(X, \phi X, \phi X, X).$$

Análogamente se define la *curvatura  $\xi$ -seccional* de la  $\xi$ -sección  $\Pi = \text{Span}\{X_p, \xi_p\}$  para cierto vector  $X_p$  unitario y ortogonal a  $\xi_p$  como

$$K(X, \xi) = R(X, \xi, \xi, X).$$

Más generalmente, escribiremos

$$K(X, Y) = R(X, Y, Y, X),$$

para cualesquiera campos  $X, Y$ .

Por último, recordaremos la identidad de Ricci para un tensor  $(1, 1)$ , análoga a la que K. Yano proporcionó en [57] para 1-formas y tensores  $(2, 1)$ . Dado un tensor  $(1, 1)$   $T$  en una variedad Riemanniana  $M$ , se comprueba fácilmente que se satisface la *Identidad de Ricci para  $T$* :

$$R(X, Y)TZ - TR(X, Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y T)Z - (\nabla_Y \nabla_X T)Z - (\nabla_{[X, Y]} T)Z, \quad (1.3.1)$$

para todos  $X, Y, Z$  campos en  $M$ , donde  $R$  es la curvatura de Riemann de  $M$ .



# Capítulo 2

## $(\kappa, \mu)$ -espacios de curvatura $\phi$ -seccional constante generalizados

### 2.1. Definición y primeros resultados

En esta sección daremos la definición formal de  $(\kappa, \mu)$ -espacios de curvatura  $\phi$ -seccional constante generalizados, que englobará a los  $g.S.s.f.$ 's y a los  $(\kappa, \mu)$ -espacios con estructura de contacto métrica, curvatura  $\phi$ -seccional constante y dimensión mayor o igual que 5. Probaremos resultados generales sobre estos espacios y estudiaremos algunas identidades interesantes que verifica su tensor de curvatura.

**Definición 2.1.1.** Diremos una variedad casi-contacto métrica  $M$  es un  $(\kappa, \mu)$ -espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante generalizado si existen funciones  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$  y  $f_6$  en  $M$  tales que

$$R = f_1R_1 + f_2R_2 + f_3R_3 + f_4R_4 + f_5R_5 + f_6R_6, \quad (2.1.1)$$

donde  $R$  es el tensor de curvatura de  $M$  y  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$  son los tensores dados por

$$\begin{aligned} R_1(X, Y)Z &= g(Y, Z)X - g(X, Z)Y, \\ R_2(X, Y)Z &= g(X, \phi Z)\phi Y - g(Y, \phi Z)\phi X + 2g(X, \phi Y)\phi Z, \\ R_3(X, Y)Z &= \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\xi, \\ R_4(X, Y)Z &= g(Y, Z)hX - g(X, Z)hY + g(hY, Z)X - g(hX, Z)Y, \\ R_5(X, Y)Z &= g(hY, Z)hX - g(hX, Z)hY + g(\phi hX, Z)\phi hY - g(\phi hY, Z)\phi hX, \\ R_6(X, Y)Z &= \eta(X)\eta(Z)hY - \eta(Y)\eta(Z)hX + g(hX, Z)\eta(Y)\xi - g(hY, Z)\eta(X)\xi, \end{aligned}$$

para cualesquiera campos vectoriales  $X, Y, Z$ , siendo  $h = \frac{1}{2}L_\xi\phi$  y  $L$  la derivada de Lie usual.

Denotaremos tal variedad como  $M(f_1, \dots, f_6)$ . En inglés utilizaremos el nombre generalized  $(\kappa, \mu)$ -space form, que abreviaremos por  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. a lo largo de esta memoria.

**Nota 2.1.2.** Es obvio que los  $(\kappa, \mu)$ -espacios con estructura de contacto métrica, curvatura  $\phi$ -seccional constante  $c$  y dimensión mayor o igual que 5 son ejemplos naturales de  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s, donde  $f_1 = \frac{c+3}{4}$ ,  $f_2 = \frac{c-1}{4}$ ,  $f_3 = \frac{c+3}{4} - \kappa$ ,  $f_4 = 1$ ,  $f_5 = \frac{1}{2}$ ,  $f_6 = 1 - \mu$  son constantes (como vimos en la Introducción). También lo son los  $g.S.s.f.$ 's (definidos en [2]) para  $f_4 = f_5 = f_6 = 0$  y  $f_1, f_2, f_3$  no necesariamente constantes.

Gracias al Teorema 1.2.6, los siguientes resultados que eran ciertos para  $g.S.s.f.$ 's siguen siéndolo para  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s:

**Teorema 2.1.3.** Sea  $M(f_1, \dots, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. Si  $M$  es  $K$ -contacto, entonces  $f_3 = f_1 - 1$ . Además,  $M$  es Sasakiano.

*Demostración.* Si  $M$  es  $K$ -contacto, sabemos por el Teorema 1.2.6 que  $h = 0$ , luego  $R_4 = R_5 = R_6 = 0$  y el tensor de curvatura de  $M(f_1, \dots, f_6)$  tiene la forma  $R = \sum_{i=1}^6 f_i R_i = \sum_{i=1}^3 f_i R_i$ . Por tanto,  $M$  es un  $g.S.s.f.$  con estructura  $K$ -contacto y obtenemos el resultado buscado usando la Proposición 3.6 y el Teorema 3.7 de [2].  $\square$

**Teorema 2.1.4.** Sea  $M(f_1, \dots, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. Si  $M$  es Sasakiano, entonces  $f_2 = f_3 = f_1 - 1$ .

*Demostración.* Por hipótesis, puede probarse igual que en el teorema anterior que  $M$  es un  $g.S.s.f.$  con estructura Sasakiana. Luego  $f_2 = f_3 = f_1 - 1$  por el Teorema 3.15 de [2].  $\square$

**Nota 2.1.5.** Una variedad Sasakiana es siempre  $K$ -contacto, pero el recíproco no es cierto en general, sólo en dimensión 3. Sin embargo, hemos visto que ambos conceptos son equivalentes para  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s.

Usando los Lemas 1.2.3 y 1.2.4 se obtiene:

**Teorema 2.1.6.** Sea  $M(f_1, \dots, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica. Si en  $M$  se cumple que  $f_3 = f_1 - 1$ , entonces  $M$  es Sasakiano.

*Demostración.* Sea  $M^{2n+1}$  una variedad de contacto métrica cumpliendo  $f_3 = f_1 - 1$ . Sabemos por el Teorema 2.1.3 que bastaría con probar que  $M$  es  $K$ -contacto, que es equivalente a demostrar que  $S(\xi, \xi) = 2n$ , en virtud del Lema 1.2.4.

En efecto, dada una referencia local ortonormal  $\{e_i, \dots, e_{2n}, \xi\}$ , entonces

$$\begin{aligned}
R(e_i, \xi, \xi, e_i) &= f_1 \{g(\xi, \xi)g(e_i, e_i) - g(e_i, \xi)g(\xi, e_i)\} \\
&+ f_2 \{g(e_i, \phi\xi)g(\phi\xi, e_i) - g(\xi, \phi\xi)g(\phi e_i, e_i) + 2g(e_i, \phi\xi)g(\phi\xi, e_i)\} \\
&+ f_3 \{\eta(e_i)\eta(\xi)g(\xi, e_i) - \eta(\xi)\eta(\xi)g(e_i, e_i) \\
&\quad + g(e_i, \xi)\eta(\xi)g(\xi, e_i) - g(\xi, \xi)\eta(e_i)g(\xi, e_i)\} \\
&+ f_4 \{g(\xi, \xi)g(he_i, e_i) - g(e_i, \xi)g(h\xi, e_i) \\
&\quad + g(h\xi, \xi)g(e_i, e_i) - g(he_i, \xi)g(\xi, e_i)\} \\
&+ f_5 \{g(h\xi, \xi)g(he_i, e_i) - g(he_i, \xi)g(h\xi, e_i) \\
&\quad + g(\phi he_i, \xi)g(\phi h\xi, e_i) - g(\phi h\xi, \xi)g(\phi he_i, e_i)\} \\
&+ f_6 \{\eta(e_i)\eta(\xi)g(h\xi, e_i) - \eta(\xi)\eta(\xi)g(he_i, e_i) \\
&\quad + g(he_i, \xi)\eta(\xi)g(\xi, e_i) - g(h\xi, \xi)\eta(e_i)g(\xi, e_i)\} \\
&= f_1 - f_3 + (f_4 - f_6)g(he_i, e_i) = 1 + (f_4 - f_6)g(he_i, e_i),
\end{aligned}$$

donde hemos aplicado (1.1.1), (1.1.3), la Proposición 1.2.1 y la hipótesis  $f_1 - f_3 = 1$ .

Así,

$$\begin{aligned}
S(\xi, \xi) &= \sum_{i=1}^{2n} R(e_i, \xi, \xi, e_i) + R(\xi, \xi, \xi, \xi) = \sum_{i=1}^{2n} (1 + (f_4 - f_6)g(he_i, e_i)) = \\
&= 2n + (f_4 - f_6) \sum_{i=1}^{2n} g(he_i, e_i) = 2n + (f_4 - f_6)trh = 2n,
\end{aligned}$$

pues  $trh = 0$  tal y como indica el Lema 1.2.3. □

Calcularemos a continuación la curvatura  $\phi$ -seccional  $K(X, \phi X)$ , la curvatura  $\xi$ -seccional  $K(X, \xi)$  y  $K(\phi X, \xi)$  en los  $g(\kappa, \mu)$ -s.f. 's.

**Proposición 2.1.7.** *Sea  $M(f_1, \dots, f_6)$  un  $g(\kappa, \mu)$ -s.f. Entonces la curvatura  $\phi$ -seccional de la  $\phi$ -sección generada por un campo  $X$  unitario y ortogonal a  $\xi$  viene dada por*

$$K(X, \phi X) = f_1 + 3f_2 + f_4g((h - \phi h\phi)X, X).$$

Si  $M$  tiene además estructura de contacto métrica, entonces la curvatura  $\phi$ -seccional es

$$K(X, \phi X) = f_1 + 3f_2,$$

luego no depende de la elección de  $X$ .

*Demostración.* Dado  $X$  un campo unitario y ortogonal a  $\xi$ , la curvatura  $\phi$ -seccional de la sección generada por  $\{X, \phi X\}$  es:

$$\begin{aligned}
K(X, \phi X) &= R(X, \phi X, \phi X, X) = \\
&= f_1\{g(\phi X, \phi X)g(X, X) - g(X, \phi X)g(\phi X, X)\} \\
&+ f_2\{g(X, \phi^2 X)g(\phi^2 X, X) - g(\phi X, \phi^2 X)g(\phi X, X) \\
&\quad + 2g(X, \phi^2 X)g(\phi^2 X, X)\} \\
&+ f_3\{\eta(X)\eta(\phi X)g(\phi X, X) - \eta(\phi X)\eta(\phi X)g(X, X) \\
&\quad + g(X, \phi X)\eta(\phi X)g(\xi, X) - g(\phi X, \phi X)\eta(X)g(\xi, X)\} \\
&+ f_4\{g(\phi X, \phi X)g(hX, X) - g(X, \phi X)g(h\phi X, X) \\
&\quad + g(h\phi X, \phi X)g(X, X) - g(hX, \phi X)g(\phi X, X)\} \\
&+ f_5\{g(h\phi X, \phi X)g(hX, X) - g(hX, \phi X)g(h\phi X, X) \\
&\quad + g(\phi hX, \phi X)g(\phi h\phi X, X) - g(\phi h\phi X, \phi X)g(\phi hX, X)\} \\
&+ f_6\{\eta(X)\eta(\phi X)g(h\phi X, X) - \eta(\phi X)\eta(\phi X)g(hX, X) \\
&\quad + g(hX, \phi X)\eta(\phi X)g(\xi, X) - g(h\phi X, \phi X)\eta(X)g(\xi, X)\},
\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta (1.1.2), (1.1.4) y (1.1.7) obtenemos:

$$\begin{aligned}
K(X, \phi X) &= f_1 + 3f_2 + f_4\{g(hX, X) + g(h\phi X, \phi X)\} = \\
&= f_1 + 3f_2 + f_4g((h - \phi h\phi)X, X).
\end{aligned}$$

Si  $M$  tiene estructura de contacto métrica, entonces  $h\phi = -\phi h$  en virtud del Lema 1.2.3 y obtendríamos

$$(h - \phi h\phi)X = (h + h\phi^2)X = h(X + \phi^2 X) = h(X - X) = 0.$$

Por tanto,  $K(X, \phi X) = f_1 + 3f_2$ , como queríamos demostrar.  $\square$

**Proposición 2.1.8.** *Sea  $M(f_1, \dots, f_6)$  un g. $(\kappa, \mu)$ -s.f. Entonces la curvatura  $\xi$ -seccional de la  $\xi$ -sección generada por un campo  $X$  unitario y ortogonal a  $\xi$  viene dada por*

$$K(X, \xi) = f_1 - f_3 + (f_4 - f_6)g(hX, X).$$

*Demostración.* Dado  $X$  un campo unitario y ortogonal a  $\xi$ , la curvatura  $\xi$ -seccional de la sección generada por  $\{X, \xi\}$  es:



$$\begin{aligned}
K(X, \xi) &= R(X, \xi, \xi, X) = \\
&= f_1\{g(\xi, \xi)g(X, X) - g(X, \xi)g(\xi, X)\} \\
&+ f_2\{g(X, \phi\xi)g(\phi\xi, X) - g(\xi, \phi\xi)g(\phi X, X) + 2g(X, \phi\xi)g(\phi\xi, X)\} \\
&+ f_3\{\eta(X)\eta(\xi)g(\xi, X) - \eta(\xi)\eta(X)g(X, X) + \\
&\quad + g(X, \xi)\eta(\xi)g(\xi, X) - g(\xi, \xi)\eta(X)g(\xi, X)\} \\
&+ f_4\{g(\xi, \xi)g(hX, X) - g(X, \xi)g(h\xi, X) \\
&\quad + g(h\xi, \xi)g(X, X) - g(hX, \xi)g(\xi, X)\} \\
&+ f_5\{g(h\xi, \xi)g(hX, X) - g(hX, \xi)g(h\xi, X) \\
&\quad + g(\phi hX, \xi)g(\phi h\xi, X) - g(\phi h\xi, \xi)g(\phi hX, X)\} \\
&+ f_6\{\eta(X)\eta(\xi)g(hX, X) - \eta(\xi)\eta(X)g(hX, X) \\
&\quad + g(hX, \xi)\eta(\xi)g(\xi, X) - g(h\xi, \xi)\eta(X)g(\xi, X)\},
\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta (1.1.1)), (1.1.3) y la Proposición 1.2.1 obtenemos

$$K(X, \xi) = f_1 - f_3 + (f_4 - f_6)g(hX, X),$$

como queríamos demostrar.  $\square$

**Corolario 2.1.9.** *Sea  $M(f_1, \dots, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. Si  $X$  es un campo unitario y ortogonal a  $\xi$ , entonces*

$$K(\phi X, \xi) = f_1 - f_3 + (f_4 - f_6)g(h\phi X, \phi X).$$

Por tanto, si  $M$  es una variedad de contacto métrica,

$$K(\phi X, \xi) = f_1 - f_3 - (f_4 - f_6)g(hX, X).$$

*Demostración.* Dado  $X$  un campo unitario y ortogonal a  $\xi$ ,  $\phi X$  es también unitario y ortogonal a  $\xi$ , luego obtendríamos por la Proposición 2.1.8 que

$$K(\phi X, \xi) = f_1 - f_3 + (f_4 - f_6)g(h\phi X, \phi X).$$

Si  $M$  tiene estructura de contacto métrica, entonces  $h\phi = -\phi h$  y tendríamos  $g(h\phi X, \phi X) = -g(\phi hX, \phi X) = -g(hX, X)$  para todo campo  $X$  ortogonal a  $\xi$ . Por tanto,

$$K(\phi X, \xi) = f_1 - f_3 - (f_4 - f_6)g(hX, X),$$

como queríamos demostrar.  $\square$

Estudiaremos ahora algunas identidades que cumple el tensor de curvatura de un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f., y las compararemos con las de las variedades Sasakianas. El siguiente resultado aparece en [11], pág. 94:

**Lema 2.1.10.** *Sea  $M$  una variedad Sasakiana. Si llamamos*

$$\begin{aligned}\tilde{P}(X, Y, Z, W) &= d\eta(X, Z)g(Y, W) - d\eta(X, W)g(Y, Z) \\ &\quad - d\eta(Y, Z)g(X, W) + d\eta(Y, W)g(X, W),\end{aligned}$$

entonces tenemos que

$$R(X, Y, Z, \phi W) + R(X, Y, \phi Z, W) = -\tilde{P}(X, Y, Z, W), \quad (2.1.2)$$

para cualesquiera campos vectoriales  $X, Y, Z, W$  en  $M$  y

$$R(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) = R(X, Y, Z, W), \quad (2.1.3)$$

$$R(X, \phi X, Y, \phi Y) = R(X, Y, X, Y) + R(X, \phi Y, X, \phi Y) - 2\tilde{P}(X, Y, X, \phi Y), \quad (2.1.4)$$

para cualesquiera  $X, Y, Z, W$  ortogonales a  $\xi$ .

Denotaremos ahora

$$\begin{aligned}P(X, Y, Z, W) &= g(X, \phi Z)g(Y, W) - g(X, \phi W)g(Y, Z) \\ &\quad - g(Y, \phi Z)g(X, W) + g(Y, \phi W)g(X, Z),\end{aligned}$$

para cualesquiera campos vectoriales  $X, Y, Z, W$  en  $M$ . En particular, si  $M$  es una variedad de contacto métrica,  $P = \tilde{P}$ . Estudiaremos a continuación si se cumplen unas identidades análogas a las del Lema 2.1.10 para  $g(\kappa, \mu)$ -s.f.'s.

**Teorema 2.1.11.** *Si  $M(f_1, \dots, f_6)$  es un  $g(\kappa, \mu)$ -s.f., entonces*

$$\begin{aligned}R(X, Y, Z, \phi W) + R(X, Y, \phi Z, W) &= -(f_1 - f_2)P(X, Y, Z, W) \\ &\quad - f_4\{P(hX, Y, Z, W) + P(X, hY, Z, W)\} - 2f_5P(hX, hY, Z, W).\end{aligned} \quad (2.1.5)$$

para cualesquiera campos  $X, Y, Z, W$  ortogonales a  $\xi$ .

*Demostración.* Dados  $X, Y, Z, W$  ortogonales a  $\xi$ , tenemos que

$$\begin{aligned}&R(X, Y, Z, \phi W) + R(X, Y, \phi Z, W) = \\ &= f_1\{g(Y, Z)g(X, \phi W) - g(X, Z)g(Y, \phi W)\} \\ &+ f_2\{g(X, \phi Z)g(\phi Y, \phi W) - g(Y, \phi Z)g(\phi X, \phi W) + 2g(X, \phi Y)g(\phi Z, \phi W)\} \\ &+ f_3\{\eta(X)\eta(Z)g(Y, \phi W) - \eta(Y)\eta(Z)g(X, \phi W) \\ &\quad + g(X, Z)\eta(Y)g(\xi, \phi W) - g(Y, Z)\eta(X)g(\xi, \phi W)\} \\ &+ f_4\{g(Y, Z)g(hX, \phi W) - g(X, Z)g(hY, \phi W) \\ &\quad + g(hY, Z)g(X, \phi W) - g(hX, Z)g(Y, \phi W)\} \\ &+ f_5\{g(hY, Z)g(hX, \phi W) - g(hX, Z)g(hY, \phi W) \\ &\quad + g(\phi hX, Z)g(\phi hY, \phi W) - g(\phi hY, Z)g(\phi hX, \phi W)\} \\ &+ f_6\{\eta(X)\eta(Z)g(hY, \phi W) - \eta(Y)\eta(Z)g(hX, \phi W) \\ &\quad + g(hX, Z)\eta(Y)g(\xi, \phi W) - g(hY, Z)\eta(X)g(\xi, \phi W)\} +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + f_1\{g(Y, \phi Z)g(X, W) - g(X, \phi Z)g(Y, W)\} \\
& + f_2\{g(X, \phi^2 Z)g(\phi Y, W) - g(Y, \phi^2 Z)g(\phi X, \phi W) + 2g(X, \phi Y)g(\phi^2 Z, W)\} \\
& + f_3\{\eta(X)\eta(\phi Z)g(Y, W) - \eta(Y)\eta(\phi Z)g(X, W) \\
& \quad + g(X, \phi Z)\eta(Y)g(\xi, W) - g(Y, Z)\eta(X)g(\xi, W)\} \\
& + f_4\{g(Y, \phi Z)g(hX, W) - g(X, \phi Z)g(hY, W) \\
& \quad + g(hY, \phi Z)g(X, W) - g(hX, \phi Z)g(Y, W)\} \\
& + f_5\{g(hY, \phi Z)g(hX, W) - g(hX, \phi Z)g(hY, W) \\
& \quad + g(\phi hX, \phi Z)g(\phi hY, \phi W) - g(\phi hY, \phi Z)g(\phi hX, W)\} \\
& + f_6\{\eta(X)\eta(\phi Z)g(hY, W) - \eta(Y)\eta(\phi Z)g(hX, W) \\
& \quad + g(hX, \phi Z)\eta(Y)g(\xi, W) - g(hY, \phi Z)\eta(X)g(\xi, W)\},
\end{aligned}$$

de donde, usando (1.1.2), (1.1.7) y (1.1.4) y agrupando términos resulta

$$\begin{aligned}
& R(X, Y, Z, \phi W) + R(X, Y, \phi Z, W) = \\
& = f_1\{g(Y, Z)g(X, \phi W) - g(X, Z)g(Y, \phi W) + g(Y, \phi Z)g(X, W) - g(X, \phi Z)g(Y, W)\} \\
& + f_2\{g(X, \phi Z)g(Y, W) - g(Y, \phi Z)g(X, W) + g(X, Z)g(Y, \phi W) - g(Y, Z)g(X, \phi W)\} \\
& + f_4\{g(Y, Z)g(hX, \phi W) - g(X, Z)g(hY, \phi W) + g(hY, Z)g(X, \phi W) - g(hX, Z)g(Y, \phi W) \\
& \quad + g(Y, \phi Z)g(hX, W) - g(X, \phi Z)g(hY, W) + g(hY, \phi Z)g(X, W) - g(hX, \phi Z)g(Y, W)\} \\
& + 2f_5\{g(hY, Z)g(hX, \phi W) - g(hX, Z)g(hY, \phi W) \\
& \quad - g(hX, \phi Z)g(hY, W) + g(hY, \phi Z)g(hX, W)\}.
\end{aligned}$$

Bastaría utilizar la definición de  $P$  para obtener (2.1.5).  $\square$

**Nota 2.1.12.** *El resultado anterior es la versión para  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s de la ecuación (2.1.2) del Lema 2.1.10. Si  $M(f_1, \dots, f_6)$  tuviera estructura Sasakiana, entonces  $h = 0$  (por el Teorema 1.2.6) y obtendríamos que*

$$R(X, Y, Z, \phi W) + R(X, Y, \phi Z, W) = -(f_1 - f_2)P(X, Y, Z, W) \quad (2.1.6)$$

para cualesquiera  $X, Y, Z, W$  ortogonales a  $\xi$ . Comparando esta ecuación con (2.1.2) y usando  $\tilde{P} = P$  (por tener la variedad estructura de contacto) se deduce que  $f_1 - f_2 = 1$ , lo que ya sabíamos por el Teorema 2.1.4.

En el caso de los  $g.S.s.f.$ 's,  $f_4 = f_5 = f_6 = 0$ , así que se obtendría directamente (2.1.6) (Proposición 3.14 de [2]).

**Teorema 2.1.13.** *Si  $M(f_1, \dots, f_6)$  es un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f., entonces*

$$R_i(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) = R_i(X, Y, Z, W), \quad (2.1.7)$$

para cualesquiera campos  $X$  e  $Y$  ortogonales a  $\xi$  y  $Z, W$  arbitrarios, donde  $i = 1, 2, 3, 6$ . Por tanto:

$$\begin{aligned}
& R(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) - f_4 R_4(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) - f_5 R_5(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) \\
& = R(X, Y, Z, W) - f_4 R_4(X, Y, Z, W) - f_5 R_5(X, Y, Z, W).
\end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Si  $M(f_1, \dots, f_6)$  tiene estructura de contacto métrica, se cumple también que

$$\begin{aligned} R_4(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) &= -R_4(X, Y, Z, W), \\ R_5(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) &= R_5(X, Y, Z, W), \end{aligned}$$

luego:

$$R(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) = R(X, Y, Z, W) - 2f_4 R_4(X, Y, Z, W). \quad (2.1.9)$$

*Demostración.* Dados  $X, Y$  ortogonales a  $\xi$ , tenemos que

$$\begin{aligned} R_1(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) &= g(\phi Y, \phi Z)g(\phi X, \phi W) - g(\phi X, \phi Z)g(\phi Y, \phi W) \\ &= g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W) \\ &= R_1(X, Y, Z, W), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) &= g(\phi X, \phi^2 Z)g(\phi^2 Y, \phi W) - g(\phi Y, \phi^2 Z)g(\phi^2 X, \phi W) \\ &\quad + 2g(\phi X, \phi^2 Y)g(\phi^2 Z, \phi W) \\ &= g(X, \phi Z)g(\phi Y, W) - g(Y, \phi Z)g(\phi X, W) \\ &\quad + 2g(X, \phi Y)g(\phi Z, W) \\ &= R_2(X, Y, Z, W), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_3(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) &= \eta(\phi X)\eta(\phi Z)g(\phi Y, \phi W) - \eta(\phi Y)\eta(\phi Z)g(\phi X, \phi W) \\ &\quad + g(\phi X, \phi Z)\eta(\phi Y)g(\xi, \phi W) - g(\phi Y, \phi Z)\eta(\phi X)g(\xi, \phi W) \\ &= 0 = R_3(X, Y, Z, W), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_6(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) &= \eta(\phi X)\eta(\phi Z)g(h\phi Y, \phi W) - \eta(\phi Y)\eta(\phi Z)g(h\phi X, \phi W) \\ &\quad + g(h\phi X, \phi Z)\eta(\phi Y)g(\xi, \phi W) - g(h\phi Y, \phi Z)\eta(\phi X)g(\xi, \phi W) \\ &= 0 = R_6(X, Y, Z, W), \end{aligned}$$

donde se han utilizado (1.1.2), (1.1.7) y (1.1.4). Esto prueba las ecuaciones (2.1.7), mientras que (2.1.8) resulta trivialmente de (2.1.1) y (2.1.7).

Si  $M(f_1, \dots, f_6)$  tiene estructura de contacto métrica, entonces sabemos por el Lema 1.2.3 que  $\phi h = -h\phi$ . Si además usamos que  $X, Y$  son ortogonales a  $\xi$ , obtenemos que:

$$\begin{aligned} R_4(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) &= g(\phi Y, \phi Z)g(h\phi X, \phi W) - g(\phi X, \phi Z)g(h\phi Y, \phi W) \\ &\quad + g(h\phi Y, \phi Z)g(\phi X, \phi W) - g(h\phi X, \phi Z)g(\phi Y, \phi W) \\ &= -g(Y, Z)g(hX, W) + g(X, Z)g(hY, W) \\ &\quad - g(hY, Z)g(X, W) + g(hX, Z)g(Y, W) \\ &= -R_4(X, Y, Z, W), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_5(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) &= g(h\phi Y, \phi Z)g(h\phi X, \phi W) - g(h\phi X, \phi Z)g(h\phi Y, \phi W) \\ &\quad + g(\phi h\phi X, \phi Z)g(\phi h\phi Y, \phi W) - g(\phi h\phi Y, \phi Z)g(\phi h\phi X, \phi W) \\ &= g(hY, Z)g(hX, W) - g(hX, Z)g(hY, W) \\ &\quad + g(\phi hX, Z)g(\phi hY, W) - g(\phi hY, Z)g(\phi hX, W) \\ &= R_5(X, Y, Z, W). \end{aligned}$$

Usando estas igualdades en (2.1.8) deducimos (2.1.9).  $\square$

**Nota 2.1.14.** *El teorema anterior es la adaptación para  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s de la ecuación (2.1.3) del Lema 2.1.10. Si  $M(f_1, \dots, f_6)$  tuviera estructura Sasakiana, entonces  $h = 0$  por el Teorema 1.2.6, luego  $R_4 = R_5 = 0$  y los resultados coincidirían. En el caso de los  $g.S.s.f.$ 's,  $f_4 = f_5 = f_6 = 0$ , así que se obtendría directamente (2.1.3) sin necesidad de exigir condiciones adicionales (Proposición 3.17 de [2]).*

*Debido a las propiedades de simetría del tensor  $R$ , podríamos cambiar en el enunciado del teorema la hipótesis “ $X, Y$  ortogonales a  $\xi$  y  $Z, W$  arbitrarios” por “ $Z, W$  ortogonales a  $\xi$  y  $X, Y$  arbitrarios”.*

**Teorema 2.1.15.** *Si  $M(f_1, \dots, f_6)$  es un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica, entonces*

$$\begin{aligned} R(X, \phi X, Y, \phi Y) &= R(X, Y, X, Y) + R(X, \phi Y, X, \phi Y) \\ &\quad - 2(f_1 - f_2)P(X, Y, X, \phi Y) - 2f_4P(X, Y, hX, \phi Y) \end{aligned}$$

para cualesquiera campos  $X, Y$  ortogonales a  $\xi$ .

*Demostración.* Dados  $X, Y$  ortogonales a  $\xi$ , sabemos por la Proposición 3.18 de [2] que el tensor de curvatura  $R$  de un  $g.S.s.f.$   $M(f_1, f_2, f_3)$  cumple

$$\begin{aligned} R(X, \phi X, Y, \phi Y) &= R(X, Y, X, Y) + R(X, \phi Y, X, \phi Y) \\ &\quad - 2(f_1 - f_2)P(X, Y, X, \phi Y). \end{aligned}$$

Usando (1.1.4) y el hecho de que  $\eta(X) = \eta(Y) = 0$  si  $X, Y$  son ortogonales a  $\xi$  se obtiene fácilmente que

$$R_6(X, \phi X, Y, \phi Y) = R_6(X, Y, X, Y) = R_6(X, \phi Y, X, \phi Y) = 0.$$

Por tanto, dados  $X, Y$  campos cualesquiera ortogonales a  $\xi$ , el tensor de curvatura

de un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. cumplirá

$$\begin{aligned}
& R(X, \phi X, Y, \phi Y) - R(X, Y, X, Y) - R(X, \phi Y, X, \phi Y) \\
&= -2(f_1 - f_2)P(X, Y, X, \phi Y) \\
&+ f_4\{g(\phi X, Y)g(hX, \phi Y) - g(X, Y)g(h\phi X, \phi Y) \\
&\quad + g(h\phi X, Y)g(X, \phi Y) - g(hX, Y)g(\phi X, \phi Y) \\
&\quad - g(Y, X)g(hX, Y) + g(X, X)g(hY, Y) \\
&\quad - g(hY, X)g(X, Y) + g(hX, X)g(Y, Y) \\
&\quad - g(\phi Y, X)g(hX, \phi Y) + g(X, X)g(h\phi Y, \phi Y) \\
&\quad - g(h\phi X, X)g(X, \phi Y) + g(hX, X)g(\phi Y, \phi Y)\} \\
&+ f_5\{g(h\phi X, Y)g(hX, \phi Y) - g(hX, Y)g(h\phi X, \phi Y) \\
&\quad + g(\phi hX, Y)g(\phi h\phi X, \phi Y) - g(\phi h\phi X, Y)g(\phi hX, \phi Y) \\
&\quad - g(hY, X)g(hX, Y) + g(hX, X)g(hY, Y) \\
&\quad - g(\phi hX, X)g(\phi hY, Y) + g(\phi hY, X)g(\phi hX, Y) \\
&\quad - g(h\phi Y, X)g(hX, \phi Y) + g(hX, X)g(h\phi Y, \phi Y) \\
&\quad - g(\phi hX, X)g(\phi h\phi Y, \phi Y) + g(\phi h\phi Y, X)g(\phi hX, \phi Y)\}
\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta (1.1.7), (1.1.8) y el Lema 1.2.3 obtenemos

$$\begin{aligned}
& R(X, \phi X, Y, \phi Y) - R(X, Y, X, Y) - R(X, \phi Y, X, \phi Y) \\
&= -2(f_1 - f_2)P(X, Y, X, \phi Y) \\
&\quad - 2f_4\{g(X, \phi Y)g(hX, \phi Y) + g(X, Y)g(hX, Y) - g(Y, Y)g(hX, X)\} \\
&= -2(f_1 - f_2)P(X, Y, X, \phi Y) - 2f_4P(X, Y, hX, \phi Y),
\end{aligned}$$

que es resultado que buscábamos. □

**Nota 2.1.16.** *El resultado anterior es la versión para  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s de la ecuación (2.1.4) del Lema 2.1.10. Si  $M(f_1, \dots, f_6)$  tiene estructura Sasakiana, entonces sabemos por el Teorema 1.2.6 que  $h = 0$  y obtenemos que*

$$\begin{aligned}
R(X, \phi X, Y, \phi Y) &= R(X, Y, X, Y) + R(X, \phi Y, X, \phi Y) \\
&\quad - 2(f_1 - f_2)P(X, Y, X, \phi Y)
\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

para cualesquiera  $X, Y$  campos ortogonales a  $\xi$ . Comparando esta ecuación con (2.1.4) y usando que  $\tilde{P} = P$  se deduce que  $f_1 - f_2 = 1$ , hecho ya sabido por el Teorema 2.1.4.

En el caso de los  $g.S.s.f.$ 's,  $f_4 = f_5 = f_6 = 0$ , así que se obtendría directamente (2.1.10) (Proposición 3.18 de [2]).

## 2.2. $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. 's con estructura de contacto métrica

Hemos visto en la sección anterior que si  $M(f_1, \dots, f_6)$  es un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica y  $f_1 - f_3 = 1$ , entonces es Sasakiano. Ahora bien, esto significa en particular que  $h = 0$ , luego nuestra variedad es un  $g.S.s.f.$   $M(f_1, f_2, f_3)$  con estructura Sasakiana. Así, si  $M$  es conexa y tiene dimensión mayor o igual que 5, sabemos por [3] que las funciones  $f_1, f_2, f_3$  han de ser constantes.

Pero quedó abierto el problema de qué ocurre en el resto de los casos. ¿Es posible encontrar ejemplos de  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. 's que tengan estructura de contacto métrica con funciones no constantes? Demostraremos en esta sección que esto no es posible si la dimensión es mayor o igual que 5, pero que existen ejemplos en dimensión 3. Para ello usaremos el concepto de  $(\kappa, \mu)$ -espacio generalizado.

Recordamos que una variedad casi-contacto métrica  $M$  se dice un  $(\kappa, \mu)$ -espacio generalizado si existen  $\kappa$  y  $\mu$  funciones diferenciables tales que

$$R(X, Y)\xi = \kappa\{\eta(Y)X - \eta(X)Y\} + \mu\{\eta(Y)hX - \eta(X)hY\}, \quad (2.2.1)$$

para cualesquiera campos diferenciables  $X, Y$  en  $M$ , donde  $h$  es el operador definido en la sección de Preliminares. Si  $\kappa$  y  $\mu$  son constantes, se les llama  $(\kappa, \mu)$ -espacios, habiendo sido estudiados en primer lugar en [12] con estructura de contacto métrica, aunque todavía no eran denominados de esa forma.

Veamos primero que los  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. 's con estructura de contacto métrica son variedades de este tipo.

**Teorema 2.2.1.** *Si  $M(f_1, \dots, f_6)$  es un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica, entonces es un  $(\kappa, \mu)$ -espacio generalizado, con  $\kappa = f_1 - f_3$  y  $\mu = f_4 - f_6$ .*

*Demostración.* Basta usar la definición de  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. y las propiedades de  $h$  en una variedad de contacto métrica para obtener:

$$R(X, Y)\xi = (f_1 - f_3)\{\eta(Y)X - \eta(X)Y\} + (f_4 - f_6)\{\eta(Y)hX - \eta(X)hY\},$$

para todos  $X, Y$ . □

Sabemos por los Teoremas 2.1.4 y 2.1.6 que un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_6)$  con estructura de contacto métrica es Sasakiano si y sólo si  $\kappa = f_1 - f_3 = 1$ . Bajo las mismas hipótesis, también sabemos que  $f_2 = f_3$  (Teorema 2.1.4) y que  $h = 0$  (en una variedad Sasakiana,  $\xi$  es un campo de Killing y aplicamos el Teorema 1.2.6, luego podemos tomar  $f_4 = f_5 = f_6 = 0$ ).

En el resto de esta sección estudiaremos  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. 's  $M(f_1, \dots, f_6)$  no-Sasakianos, i.e., aquéllos con  $\kappa = f_1 - f_3 \neq 1$ . En este caso,  $\kappa < 1$ , tal y como se deduce del siguiente teorema de [12]:

**Teorema 2.2.2.** Si  $M^{2n+1}$  es un  $(\kappa, \mu)$ -espacio con estructura de contacto métrica, entonces  $\kappa \leq 1$ . Si  $\kappa = 1$ , entonces  $h = 0$  y  $M$  es una variedad Sasakiana. Si  $\kappa < 1$ , entonces  $M$  admite tres distribuciones integrables y ortogonales entre sí,  $D(0)$ ,  $D(\lambda)$  y  $D(-\lambda)$ , determinadas por los autoespacios de  $h$ , donde  $\lambda = \sqrt{1 - \kappa}$ . Además,

$$R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_{-\lambda} = (\kappa - \mu)\{g(\phi Y_\lambda, Z_{-\lambda})\phi X_\lambda - g(\phi X_\lambda, Z_{-\lambda})\phi Y_\lambda\}, \quad (2.2.2)$$

$$R(X_{-\lambda}, Y_{-\lambda})Z_\lambda = (\kappa - \mu)\{g(\phi Y_{-\lambda}, Z_\lambda)\phi X_{-\lambda} - g(\phi X_{-\lambda}, Z_\lambda)\phi Y_{-\lambda}\}, \quad (2.2.3)$$

$$R(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_{-\lambda} = \kappa g(\phi X_\lambda, Z_{-\lambda})\phi Y_{-\lambda} + \mu g(\phi X_\lambda, Y_{-\lambda})\phi Z_{-\lambda}, \quad (2.2.4)$$

$$R(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_\lambda = -\kappa g(\phi Y_{-\lambda}, Z_\lambda)\phi X_\lambda - \mu g(\phi Y_{-\lambda}, X_\lambda)\phi Z_\lambda, \quad (2.2.5)$$

$$R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_\lambda = (2(1 + \lambda) - \mu)\{g(Y_\lambda, Z_\lambda)X_\lambda - g(X_\lambda, Z_\lambda)Y_\lambda\}, \quad (2.2.6)$$

$$R(X_{-\lambda}, Y_{-\lambda})Z_{-\lambda} = (2(1 - \lambda) - \mu)\{g(Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda})X_{-\lambda} - g(X_{-\lambda}, Z_{-\lambda})Y_{-\lambda}\}, \quad (2.2.7)$$

donde  $X_\lambda, Y_\lambda, Z_\lambda \in D(\lambda)$  y  $X_{-\lambda}, Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda} \in D(-\lambda)$ .

**Nota 2.2.3.** Por el Teorema anterior, para un  $(\kappa, \mu)$ -espacio con estructura de contacto métrica es equivalente el ser “no-Sasakiano” y cumplir que  $\kappa < 1$ , luego de aquí en adelante usaremos ambas condiciones indistintamente.

**Nota 2.2.4.** Cuando escribimos que  $M$  es un  $(\kappa, \mu)$ -espacio generalizado con estructura de contacto métrica y  $\kappa < 1$  queremos decir que la función  $\kappa$  cumple la condición en todo punto de  $M$ . Ello no supone ninguna condición extra en el caso de que la variedad sea de dimensión mayor o igual que 5 por el Teorema 2.2.7, que presentaremos más adelante. En dimensión 3, bastaría tomar  $B = \{p \in M \mid \kappa(p) = 1\}$  y redefinir  $M$  como  $M - B$ , que sería subconjunto abierto de  $M$  y por tanto también variedad.

En [43] se prueban los siguientes resultados, el primero de los cuales fue la inspiración para la definición de los  $g(\kappa, \mu)$ -s.f.'s:

**Teorema 2.2.5.** Sea  $M$  un  $(\kappa, \mu)$ -espacio con estructura de contacto métrica y dimensión mayor o igual que 5. Si la curvatura  $\phi$ -seccional en cualquier punto de  $M$  es independiente de la elección de la  $\phi$ -sección en ese punto, entonces es constante en  $M$  y el tensor de curvatura viene dado por

$$R = \left(\frac{F+3}{4}\right) R_1 + \left(\frac{F-1}{4}\right) R_2 + \left(\frac{F+3}{4} - \kappa\right) R_3 + R_4 + \frac{1}{2}R_5 + (1-\mu)R_6, \quad (2.2.8)$$

donde  $F$  es la curvatura  $\phi$ -seccional constante. Además, si  $\kappa \neq 1$ , entonces  $\mu = \kappa + 1$  y  $F = -2\kappa - 1$ .

**Teorema 2.2.6.** Sea  $M$  un  $(\kappa, \mu)$ -espacio con estructura de contacto métrica no-Sasakiana y dimensión mayor o igual que 5. Entonces  $M$  tiene curvatura  $\phi$ -seccional constante si y sólo si  $\mu = \kappa + 1$ .

También tenemos los siguientes teoremas, probados en [46]:



**Teorema 2.2.7.** *Si  $M^{2n+1}$  es un  $(\kappa, \mu)$ -espacio generalizado con estructura de contacto métrica no-Sasakiana y dimensión mayor o igual que 5, entonces las funciones  $\kappa$  y  $\mu$  son constantes, i.e.,  $M^{2n+1}$  es un  $(\kappa, \mu)$ -espacio.*

**Teorema 2.2.8.** *Sea  $M$  un  $(\kappa, \mu)$ -espacio generalizado con estructura de contacto métrica no-Sasakiana. Si  $\kappa$  y  $\mu$  satisfacen la condición  $a\kappa + b\mu = c$  (con  $a, b, c$  constantes), entonces  $\kappa$  y  $\mu$  son constantes.*

Aplicando los resultados anteriores a un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_6)$  con estructura de contacto métrica, obtenemos:

**Teorema 2.2.9.** *Si  $M(f_1, \dots, f_6)$  es un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica no-Sasakiana y  $a(f_1 - f_3) + b(f_4 - f_6) = c$  ( $a, b, c$  constantes), entonces  $f_1 - f_3$  y  $f_4 - f_6$  son constantes.*

*Demostración.* Obviamente bastaría usar los Teoremas 2.2.1 y 2.2.8. □

Asimismo, podemos probar la unicidad del tensor  $R$  de un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. de dimensión mayor o igual que 5 bajo determinadas hipótesis.

**Lema 2.2.10.** *Si  $M(f_1, \dots, f_6)$  es un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica,  $\kappa = f_1 - f_3 < 1$  y de dimensión mayor o igual que 5, entonces la escritura de su tensor de curvatura es única.*

*Demostración.* Supongamos que el tensor de curvatura de un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. puede escribirse como

$$R = f_1 R_1 + f_2 R_2 + f_3 R_4 + f_4 R_4 + f_5 R_5 + f_6 R_6$$

y

$$R = f_1^* R_1 + f_2^* R_2 + f_3^* R_4 + f_4^* R_4 + f_5^* R_5 + f_6^* R_6.$$

Entonces tenemos en particular que

$$\begin{aligned} & ((f_1 - f_1^*)R_1 + (f_2 - f_2^*)R_2 + (f_3 - f_3^*)R_4 \\ & + (f_4 - f_4^*)R_4 + (f_5 - f_5^*)R_5 + (f_6 - f_6^*)R_6)(X, Y)Z = 0, \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

para todos  $X, Y, Z$  campos en  $M$ .

Además, sabemos por el Teorema 2.2.1 que  $M$  es a la vez un  $(f_1 - f_3, f_4 - f_6)$ -espacio generalizado y un  $(f_1^* - f_3^*, f_4^* - f_6^*)$ -espacio generalizado, luego  $f_1 - f_3 = f_1^* - f_3^*$  y  $f_4 - f_6 = f_4^* - f_6^*$ . Aplicando el Teorema 2.2.7 obtenemos que  $f_1 - f_3, f_4 - f_6$  son constantes, luego  $M$  es un  $(f_1 - f_3, f_4 - f_6)$ -espacio y aplicando el Teorema 2.2.2 obtenemos que  $TM = D(0) \oplus D(\lambda) \oplus D(-\lambda)$ , donde  $\lambda = \sqrt{1 - f_1 + f_3} > 0$ .

Si elegimos en (2.2.9) campos  $X, Y \in D(\lambda)$  unitarios y ortogonales entre sí (posible porque la dimensión es mayor o igual que 5) y  $Z = \phi X$ , obtenemos que:

$$-(f_2 - f_2^*) + (f_5 - f_5^*)\lambda^2 = 0. \quad (2.2.10)$$

Tomando ahora  $X, Z \in D(-\lambda)$  campos unitarios y ortogonales entre sí e  $Y = \phi Z$ , conseguimos:

$$-(f_2 - f_2^*) - (f_5 - f_5^*)\lambda^2 = 0. \quad (2.2.11)$$

Para campos  $X, Y \in D(\lambda)$  unitarios y ortogonales entre sí e  $Y = \phi X$ , resulta:

$$f_2 - f_2^* = 0. \quad (2.2.12)$$

Si tomamos ahora  $X = Z \in D(\lambda)$  unitario e  $Y = \phi X$ , se sigue que:

$$(f_1 - f_1^*) + 3(f_2 - f_2^*) = 0. \quad (2.2.13)$$

De (2.2.9) conseguimos las dos ecuaciones siguientes para elecciones  $X, Y \in D(\lambda)$  unitarios y ortogonales entre sí,  $Z = X$ ; y  $X, Y \in D(-\lambda)$  unitarios y ortogonales entre sí,  $Z = Y$ , respectivamente:

$$-(f_1 - f_1^*) - 2\lambda(f_4 - f_4^*) - \lambda^2(f_5 - f_5^*) = 0, \quad (2.2.14)$$

$$(f_1 - f_1^*) - 2\lambda(f_4 - f_4^*) + \lambda^2(f_5 - f_5^*) = 0, \quad (2.2.15)$$

Si reunimos las ecuaciones (2.2.10)-(2.2.15), obtenemos el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} -(f_2 - f_2^*) + (f_5 - f_5^*)\lambda^2 &= 0 \\ -(f_2 - f_2^*) - (f_5 - f_5^*)\lambda^2 &= 0 \\ f_2 - f_2^* &= 0 \\ f_1 - f_1^* + 3(f_2 - f_2^*) &= 0 \\ -(f_1 - f_1^*) - 2\lambda(f_4 - f_4^*) - \lambda^2(f_5 - f_5^*) &= 0 \\ (f_1 - f_1^*) - 2\lambda(f_4 - f_4^*) + \lambda^2(f_5 - f_5^*) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Como  $\lambda > 0$ , obtenemos que

$$f_1 = f_1^*, \quad f_2 = f_2^*, \quad f_4 = f_4^*, \quad f_5 = f_5^*.$$

Además, sabíamos que  $\kappa = f_1 - f_3 = f_1^* - f_3^*$  y que  $\mu = f_4 - f_6 = f_4^* - f_6^*$ , luego

$$f_3 = f_3^*, \quad f_6 = f_6^*.$$

Concluimos por tanto que la escritura del tensor de curvatura de Riemann  $R$  es única.  $\square$

En particular, de este lema se deduce:

**Corolario 2.2.11.** *Si  $M(f_1, \dots, f_6)$  es un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. de dimensión mayor o igual que 5 con estructura de contacto métrica y  $\kappa = f_1 - f_3 < 1$ , entonces  $M$  es llana si y sólo si  $f_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, 6$ .*

*Demostración.* Si  $M$  es llana,  $R$  admite una escritura con funciones nulas, que por el Lema 2.2.10 es única. El recíproco es trivial.  $\square$

Finalmente probamos el siguiente teorema, en el que demostramos en particular que las funciones de un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. de dimensión mayor o igual que 5 y estructura de contacto métrica no-Sasakiana son constantes y están relacionadas entre sí. El recíproco se obtendrá como consecuencia directa del Teorema 2.2.5.

**Teorema 2.2.12.** *Sea  $M(f_1, \dots, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica. Si  $M$  es no-Sasakiano y de dimensión mayor o igual que 5, entonces tiene curvatura  $\phi$ -seccional constante  $F$  y se verifican las siguientes expresiones:*

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{f_6 + 1}{2}, & f_2 &= \frac{f_6 - 1}{2}, & f_3 &= \frac{3f_6 + 1}{2}, \\ f_4 &= 1, & f_5 &= \frac{1}{2}, & f_6 &= \text{constante} > -1, \\ \kappa &= -f_6 & &= \text{constante} < 1, & & (2.2.16) \\ \mu &= 1 - f_6 & &= \text{constante} < 2, & & \\ F &= 2f_6 - 1 & &= \text{constante} > -3. & & \end{aligned}$$

Es decir,  $M$  es un  $(-f_6, 1 - f_6)$ -espacio con curvatura  $\phi$ -seccional constante  $F = 2f_6 - 1 > -3$ .

Recíprocamente, sea  $M$  una variedad de contacto métrica de dimensión mayor o igual que 5. Si  $M$  es un  $(-f_6, 1 - f_6)$ -espacio con curvatura  $\phi$ -seccional constante  $F = 2f_6 - 1 > -3$ , entonces es un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_6)$  no-Sasakiano, con estructura de contacto métrica y cuyas funciones verifican las ecuaciones (2.2.16).

*Demostración.* Sabemos por el Teorema 2.2.1 que  $M$  es un  $(f_1 - f_3, f_4 - f_6)$ -espacio generalizado y, por el Teorema 2.2.7 que  $f_1 - f_3, f_4 - f_6$  son constantes. Luego  $M$  es un  $(f_1 - f_3, f_4 - f_6)$ -espacio y aplicando el Teorema 2.2.2 obtenemos que el tensor de curvatura cumple las ecuaciones (2.2.2)-(2.2.7) para  $\kappa = f_1 - f_3$ ,  $\mu = f_4 - f_6$ ,  $X_\lambda, Y_\lambda, Z_\lambda \in D(\lambda)$  y  $X_{-\lambda}, Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda} \in D(-\lambda)$ :

$$\begin{aligned} R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_{-\lambda} &= (f_1 - f_3 - f_4 + f_6)\{g(\phi Y_\lambda, Z_{-\lambda})\phi X_\lambda - g(\phi X_\lambda, Z_{-\lambda})\phi Y_\lambda\}, \\ R(X_{-\lambda}, Y_{-\lambda})Z_\lambda &= (f_1 - f_3 - f_4 + f_6)\{g(\phi Y_{-\lambda}, Z_\lambda)\phi X_{-\lambda} - g(\phi X_{-\lambda}, Z_\lambda)\phi Y_{-\lambda}\}, \\ R(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_{-\lambda} &= (f_1 - f_3)g(\phi X_\lambda, Z_{-\lambda})\phi Y_{-\lambda} + (f_4 - f_6)g(\phi X_\lambda, Y_{-\lambda})\phi Z_{-\lambda}, \\ R(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_\lambda &= -(f_1 - f_3)g(\phi Y_{-\lambda}, Z_\lambda)\phi X_\lambda - (f_4 - f_6)g(\phi Y_{-\lambda}, X_\lambda)\phi Z_\lambda, \\ R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_\lambda &= (2(1 + \sqrt{1 - f_1 + f_3}) - f_4 + f_6)\{g(Y_\lambda, Z_\lambda)X_\lambda - g(X_\lambda, Z_\lambda)Y_\lambda\}, \\ R(X_{-\lambda}, Y_{-\lambda})Z_{-\lambda} &= (2(1 - \sqrt{1 - f_1 + f_3}) - f_4 + f_6)\{g(Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda})X_{-\lambda} - g(X_{-\lambda}, Z_{-\lambda})Y_{-\lambda}\}. \end{aligned}$$

Por otra parte, gracias a la expresión que tiene el tensor de curvatura de un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. y al hecho de que estamos trabajando en una variedad de contacto métrica, obte-

nemos:

$$\begin{aligned}
R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_{-\lambda} &= (f_2 - f_5(1 - f_1 + f_3))\{g(\phi Y_\lambda, Z_{-\lambda})\phi X_\lambda - g(\phi X_\lambda, Z_{-\lambda})\phi Y_\lambda\}, \\
R(X_{-\lambda}, Y_{-\lambda})Z_\lambda &= (f_2 - f_5(1 - f_1 + f_3))\{g(\phi Y_{-\lambda}, Z_\lambda)\phi X_{-\lambda} - g(\phi X_{-\lambda}, Z_\lambda)\phi Y_{-\lambda}\}, \\
R(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_{-\lambda} &= -(f_2 + f_5(1 - f_1 + f_3))g(\phi X_\lambda, Z_{-\lambda})\phi Y_{-\lambda} - 2f_2g(\phi X_\lambda, Y_{-\lambda})\phi Z_{-\lambda} \\
&\quad + (f_1 - f_5(1 - f_1 + f_3))g(Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda})X_\lambda, \\
R(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_\lambda &= (f_2 + f_5(1 - f_1 + f_3))g(\phi Y_{-\lambda}, Z_\lambda)\phi X_\lambda + 2f_2g(\phi Y_{-\lambda}, X_\lambda)\phi Z_\lambda \\
&\quad + (-f_1 + f_5(1 - f_1 + f_3))g(X_\lambda, Z_\lambda)Y_{-\lambda}, \\
R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_\lambda &= \left( f_1 + f_5(1 - f_1 + f_3) + 2f_4\sqrt{1 - f_1 + f_3} \right) \\
&\quad \times \{g(Y_\lambda, Z_\lambda)X_\lambda - g(X_\lambda, Z_\lambda)Y_\lambda\}, \\
R(X_{-\lambda}, Y_{-\lambda})Z_{-\lambda} &= \left( f_1 + f_5(1 - f_1 + f_3) - 2f_4\sqrt{1 - f_1 + f_3} \right) \\
&\quad \times \{g(Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda})X_{-\lambda} - g(X_{-\lambda}, Z_{-\lambda})Y_{-\lambda}\}.
\end{aligned}$$

Igualando los dos conjuntos de ecuaciones conseguimos:

$$\begin{aligned}
(f_1 - f_3 - f_4 + f_6)\{g(\phi Y_\lambda, Z_{-\lambda})\phi X_\lambda - g(\phi X_\lambda, Z_{-\lambda})\phi Y_\lambda\} &= \\
= (f_2 - f_5(1 - f_1 + f_3))\{g(\phi Y_\lambda, Z_{-\lambda})\phi X_\lambda - g(\phi X_\lambda, Z_{-\lambda})\phi Y_\lambda\}, & \quad (2.2.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f_1 - f_3 - f_4 + f_6)\{g(\phi Y_{-\lambda}, Z_\lambda)\phi X_{-\lambda} - g(\phi X_{-\lambda}, Z_\lambda)\phi Y_{-\lambda}\} &= \\
= (f_2 - f_5(1 - f_1 + f_3))\{g(\phi Y_{-\lambda}, Z_\lambda)\phi X_{-\lambda} - g(\phi X_{-\lambda}, Z_\lambda)\phi Y_{-\lambda}\}, & \quad (2.2.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f_1 - f_3)g(\phi X_\lambda, Z_{-\lambda})\phi Y_{-\lambda} + (f_4 - f_6)g(\phi X_\lambda, Y_{-\lambda})\phi Z_{-\lambda} &= \\
= -(f_2 + f_5(1 - f_1 + f_3))g(\phi X_\lambda, Z_{-\lambda})\phi Y_{-\lambda} - 2f_2g(\phi X_\lambda, Y_{-\lambda})\phi Z_{-\lambda} + & \quad (2.2.19) \\
+ (f_1 - f_5(1 - f_1 + f_3))g(Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda})X_\lambda,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-(f_1 - f_3)g(\phi Y_{-\lambda}, Z_\lambda)\phi X_\lambda - (f_4 - f_6)g(\phi Y_{-\lambda}, X_\lambda)\phi Z_\lambda &= \\
= (f_2 + f_5(1 - f_1 + f_3))g(\phi Y_{-\lambda}, Z_\lambda)\phi X_\lambda + 2f_2g(\phi Y_{-\lambda}, X_\lambda)\phi Z_\lambda + & \quad (2.2.20) \\
+ (-f_1 + f_5(1 - f_1 + f_3))g(X_\lambda, Z_\lambda)Y_{-\lambda},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2(1 + \sqrt{1 - f_1 + f_3}) - f_4 + f_6)\{g(Y_\lambda, Z_\lambda)X_\lambda - g(X_\lambda, Z_\lambda)Y_\lambda\} &= \\
= (f_1 + f_5(1 - f_1 + f_3) + 2f_4\sqrt{1 - f_1 + f_3})\{g(Y_\lambda, Z_\lambda)X_\lambda - g(X_\lambda, Z_\lambda)Y_\lambda\}, & \quad (2.2.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2(1 - \sqrt{1 - f_1 + f_3}) - f_4 + f_6)\{g(Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda})X_{-\lambda} - g(X_{-\lambda}, Z_{-\lambda})Y_{-\lambda}\} &= \\
= (f_1 + f_5(1 - f_1 + f_3) - 2f_4\sqrt{1 - f_1 + f_3})\{g(Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda})X_{-\lambda} - g(X_{-\lambda}, Z_{-\lambda})Y_{-\lambda}\}. & \quad (2.2.22)
\end{aligned}$$

Como la dimensión es mayor o igual que 5, podemos tomar en la ecuación (2.2.17)  $X_\lambda$  e  $Y_\lambda$  ortogonales y unitarios, así que si  $Z_{-\lambda} = \phi X_\lambda$  obtenemos

$$(f_1 - f_3 - f_4 + f_6)(-\phi Y_\lambda) = (f_2 - f_5(1 - f_1 + f_3))(-\phi Y_\lambda)$$

y deducimos que

$$f_1 - f_3 - f_4 + f_6 = f_2 - f_5(1 - f_1 + f_3). \quad (2.2.23)$$

Análogamente, podemos tomar en la ecuación (2.2.18)  $X_{-\lambda}$  e  $Y_{-\lambda}$  ortogonales. Así, si  $Z_\lambda = \phi X_{-\lambda}$  obtenemos la misma ecuación que antes.

De (2.2.19) conseguimos tres ecuaciones, dependiendo de la elección que hagamos. Si tomamos  $Y_{-\lambda}$  y  $Z_{-\lambda}$  ortogonales y unitarios y  $X_\lambda = \phi Z_{-\lambda}$ , obtenemos:

$$-(f_1 - f_3) = f_2 + f_5(1 - f_1 + f_3). \quad (2.2.24)$$

Para  $Y_{-\lambda}$  y  $Z_{-\lambda}$  ortogonales y unitarios y  $X_\lambda = \phi Y_{-\lambda}$ , resulta:

$$-(f_4 - f_6) = 2f_2 \quad (2.2.25)$$

Si tomamos ahora  $Y_{-\lambda} = Z_{-\lambda}$  unitarios y  $X_\lambda = \phi Y_{-\lambda}$ , se sigue que:

$$-(f_1 - f_3) - (f_4 - f_6) = f_1 + 3f_2. \quad (2.2.26)$$

De (2.2.20) conseguimos las tres ecuaciones anteriores para elecciones  $X_\lambda \perp Z_\lambda$ ,  $Y_{-\lambda} = \phi Z_\lambda$ ;  $X_\lambda \perp Z_\lambda$ ,  $Y_{-\lambda} = \phi X_\lambda$  y  $X_\lambda = Z_\lambda$ ,  $Y_{-\lambda} = \phi X_\lambda$ , respectivamente.

En (2.2.21) escogemos  $X_\lambda = Z_\lambda \perp Y_\lambda$  unitarios y obtenemos

$$2(1 + \sqrt{1 - f_1 + f_3}) - f_4 + f_6 = f_1 + f_5(1 - f_1 + f_3) + 2f_4\sqrt{1 - f_1 + f_3}. \quad (2.2.27)$$

Por último, si en (2.2.22) tomamos  $Y_{-\lambda} = Z_{-\lambda} \perp X_{-\lambda}$  unitarios resulta

$$2(1 - \sqrt{1 - f_1 + f_3}) - f_4 + f_6 = f_1 + f_5(1 - f_1 + f_3) - 2f_4\sqrt{1 - f_1 + f_3}. \quad (2.2.28)$$

Si reunimos las ecuaciones (2.2.23)-(2.2.28) y las ordenamos, obtendremos el siguiente sistema compatible indeterminado

$$\left. \begin{aligned} f_1 - f_2 - f_3 - f_4 + f_6 + f_5(1 - f_1 + f_3) &= 0 \\ f_1 + f_2 - f_3 + f_5(1 - f_1 + f_3) &= 0 \\ 2f_2 + f_4 - f_6 &= 0 \\ 2f_1 + 3f_2 - f_3 + f_4 - f_6 &= 0 \\ f_5(1 - f_1 + f_3) + 2(f_4 - 1)\sqrt{1 - f_1 + f_3} + f_1 + f_4 - f_6 - 2 &= 0 \\ f_5(1 - f_1 + f_3) + 2(1 - f_4)\sqrt{1 - f_1 + f_3} + f_1 + f_4 - f_6 - 2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{f_6 + 1}{2}, & f_2 &= \frac{f_6 - 1}{2}, & f_3 &= \frac{3f_6 + 1}{2}, \\ f_4 &= 1, & f_5 &= \frac{1}{2}, & f_6 &\text{ arbitraria.} \end{aligned}$$

Luego  $\kappa = f_1 - f_3 = -f_6$ ,  $\mu = f_4 - f_6 = 1 - f_6$  y  $F = f_1 + 3f_2 = 2f_6 - 1$ . Ahora bien, sabíamos que  $\kappa$  es una constante menor que 1, luego  $f_6$  es una constante mayor que  $-1$  y obtenemos así el resultado buscado.

Probaremos ahora el recíproco. Dado un  $(-f_6, 1 - f_6)$ -espacio con estructura de contacto métrica, dimensión mayor o igual que 5 y curvatura  $\phi$ -seccional  $F = 2f_6 - 1 > -3$ , resulta entonces que  $f_6$  debe ser una función constante mayor que  $-1$ . Basta aplicar ahora el Teorema 2.2.5 con  $F = 2f_6 - 1$  para obtener que la variedad tiene tensor de curvatura

$$R = \frac{f_6 + 1}{2}R_1 + \frac{f_6 - 1}{2}R_2 + \frac{3f_6 + 1}{2}R_3 + R_4 + \frac{1}{2}R_5 + f_6R_6, \quad (2.2.29)$$

luego es un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_6)$  con estructura de contacto métrica y funciones  $f_1, \dots, f_6$  cumpliendo las ecuaciones del enunciado. Es obvio que el espacio es no-Sasakiano porque  $\kappa = f_1 - f_3 = -f_6 < 1$ .  $\square$

**Nota 2.2.13.** *Observamos que  $f_4, f_5 \neq 0$ , luego no hay ejemplos de g.S.s.f.'s que sean no-Sasakianos y de dimensión mayor o igual que 5 (algo ya visto en [3]).*

**Ejemplo 2.2.14.** *Daremos ahora un método para construir  $(-f_6, 1 - f_6)$ -espacios con estructura de contacto métrica, dimensión mayor o igual que 5 y curvatura  $\phi$ -seccional  $F = 2f_6 - 1$  para cada función  $f_6$  constante y mayor que  $-1$ , que sabemos por el teorema anterior que serán ejemplos de  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s  $M(f_1, \dots, f_6)$  con estructura de contacto métrica:*

*Sea  $M^{2n+1}(n > 1)$  una variedad con curvatura seccional constante  $c > -1$  y distinta de 1. Entonces su fibrado tangente esférico con la métrica usual,  $(T_1M, \phi_1, \xi_1, \eta_1, g_1)$ , es un  $(\kappa, \mu)$ -espacio con estructura de contacto métrica, donde  $\kappa = c(2 - c) \neq 1$  y  $\mu = -2c < 2$  (Teorema 4 de [12]).*

*Mediante una transformación  $D_a$ -homotética (donde  $a$  es una constante positiva) obtenemos  $(T_1M, \bar{\phi}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{g})$ , con  $\bar{\phi} = \phi_1, \bar{\xi} = \frac{1}{a}\xi_1, \bar{\eta} = a\eta_1$  y  $\bar{g} = ag_1 + a(a - 1)\eta_1 \otimes \eta_1$ . Sabemos gracias a [12] que esta variedad es un  $(\bar{\kappa}, \bar{\mu})$ -espacio con estructura de contacto métrica, donde  $\bar{\kappa} = \frac{\kappa + a^2 - 1}{a^2} \neq 1$  y  $\bar{\mu} = \frac{\mu + 2a - 2}{a}$ .*

*Si elegimos  $a = \frac{\kappa - 1}{\mu - 2} > 0$ , entonces  $\bar{\mu} = \bar{\kappa} + 1$  y  $(T_1M, \bar{\phi}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{g})$  tiene curvatura  $\bar{\phi}$ -seccional constante  $\bar{F} = -(\bar{\kappa} + \bar{\mu})$  en virtud de los Teoremas 2.2.5 y 2.2.6.*

*Por tanto,  $\bar{\kappa} = -f_6, \bar{\mu} = 1 - f_6$  y  $\bar{F} = 2f_6 - 1$  si y sólo si*

$$(3 - f_6)c^2 + (10 + 2f_6)c + (3 - f_6) = 0.$$

*Si  $f_6 = 3$ , esta ecuación tiene solución  $c = 0$ , que en particular es mayor que  $-1$  y distinta de 1. Si  $f_6 \neq 3$ , entonces la ecuación tiene soluciones reales distintas de 1*

$$c = \frac{-5 - f_6 \pm 4\sqrt{f_6 + 1}}{3 - f_6},$$

por ser  $f_6$  mayor que  $-1$ . Además, si tomamos la raíz positiva se comprueba que  $c$  es también mayor que  $-1$ . Así que hemos conseguido ejemplos de  $(-f_6, 1 - f_6)$ -espacios con las condiciones buscadas para toda  $f_6 > -1$ .

El Teorema 2.2.12 también se puede demostrar aplicando el Teorema 2.2.5. En efecto, si  $M(f_1, \dots, f_6)$  es un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica y dimensión mayor o igual que 5, entonces  $M$  es un  $(\kappa, \mu)$ -espacio con  $\kappa = f_1 - f_3 < 1$  y  $\mu = f_4 - f_6$  constantes en virtud de los Teoremas 2.2.1 y 2.2.7. Además, sabemos por el Teorema 2.1.8 que su curvatura  $\phi$ -seccional es  $F = f_1 + 3f_2$ , luego no depende de la elección de la  $\phi$ -sección en cada punto y podemos aplicar el Teorema 2.2.5, del que obtenemos que  $F$  es constante en  $M$  y el tensor de curvatura tiene la forma:

$$R = \frac{F+3}{4}R_1 + \frac{F-1}{4}R_2 + \left(\frac{F+3}{4} - \kappa\right)R_3 + R_4 + \frac{1}{2}R_5 + (1-\mu)R_6,$$

donde  $\kappa = f_1 - f_3 < 1$ ,  $\mu = f_4 - f_6$  y  $F = f_1 + 3f_2$  son constantes. Como  $\kappa < 1$ , entonces  $\mu = \kappa + 1 = f_1 - f_3 + 1$  y  $F = -2\kappa - 1 = -2f_1 + 2f_3 - 1$  y el tensor se escribiría

$$R = \frac{-f_1 + f_3 + 1}{2}R_1 + \frac{-f_1 + f_3 - 1}{2}R_2 + \frac{-3f_1 + 3f_3 + 1}{2}R_3 + R_4 + \frac{1}{2}R_5 + (-f_1 + f_3)R_6.$$

Comparando la forma del tensor  $R$  en (2.1.1) con la expresión anterior, sabemos por la unicidad de la escritura del tensor de curvatura en dimensión mayor o igual que 5 (Lema 2.2.10) que:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{-f_1 + f_3 + 1}{2}, & f_4 &= 1, \\ f_2 &= \frac{-f_1 + f_3 - 1}{2}, & f_5 &= 1/2, \\ f_3 &= \frac{-3f_1 + 3f_3 + 1}{2}, & f_6 &= -f_1 + f_3. \end{aligned}$$

De donde volvemos a obtener los mismos valores de  $f_1, \dots, f_6$  que en (2.2.16). El resto de constantes se consiguen de  $\kappa = f_1 - f_3 < 1$  (que implica  $f_6 > -1$ ),  $\mu = f_4 - f_6$  y  $F = f_1 + 3f_2$ .

¿Qué podemos decir si  $\dim M = 3$ ? Primero veremos que la escritura del tensor de curvatura de un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. de dimensión 3 que tenga estructura de contacto métrica no es única. Esto contrasta con lo que ocurre en dimensión mayor o igual que 5, donde sabemos por el Lema 2.2.10 que sí lo era.

Utilizaremos para ello el siguiente lema, que aparece en [45].

**Lema 2.2.15.** Si  $M^3$  un  $(\kappa, \mu)$ -espacio generalizado de contacto métrico, entonces

$$h^2 = (\kappa - 1)\phi^2.$$

Si además  $\kappa < 1$ , sabemos que existe en todo punto una  $\phi$ -base  $\{X, \phi X, \xi\}$  tal que

$$hX = \lambda X, \quad h\phi X = -\lambda\phi X, \quad h\xi = 0,$$

donde  $\lambda = \sqrt{1 - \kappa}$ .

Denotaremos a la  $\phi$ -base del Lema anterior  $h$ -base.

**Teorema 2.2.16.** Sea  $M^3(f_1, \dots, f_6)$  un  $g(\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica tal que  $\kappa < 1$ . Si su tensor de curvatura puede escribirse simultáneamente como

$$R = f_1 R_1 + f_2 R_2 + f_3 R_3 + f_4 R_4 + f_5 R_5 + f_6 R_6 \quad (2.2.30)$$

y

$$R = f_1^* R_1 + f_2^* R_2 + f_3^* R_3 + f_4^* R_4 + f_5^* R_5 + f_6^* R_6, \quad (2.2.31)$$

entonces las funciones  $f_i$  y  $f_i^*$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , están relacionadas de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} f_1^* &= f_1 + f, & f_2^* &= f_2 - f/3, & f_3^* &= f_3 + f, \\ f_4^* &= f_4 + \bar{f}, & f_6^* &= f_6 + \bar{f}, \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

donde  $f$  y  $\bar{f}$  son funciones diferenciables en  $M$ .

*Demostración.* Por el Teorema 2.2.1 y el Lema 2.2.15, podemos tomar una  $h$ -base  $\{X, \phi X, \xi\}$ . Si calculamos ahora  $K(X, \xi)$ ,  $K(\phi X, \xi)$  y  $K(X, \phi X)$  usando tanto (2.2.30) como (2.2.31), obtenemos que

$$\begin{aligned} K(X, \phi X) &= f_1 + 3f_2 = f_1^* + 3f_2^*, \\ K(X, \xi) &= f_1 - f_3 + (f_4 - f_6)g(hX, X) = f_1^* - f_3^* + (f_4^* - f_6^*)g(hX, X), \\ K(\phi X, \xi) &= f_1 - f_3 - (f_4 - f_6)g(hX, X) = f_1^* - f_3^* - (f_4^* - f_6^*)g(hX, X), \end{aligned}$$

en virtud de las Proposiciones 2.1.7 y 2.1.8 y del Corolario 2.1.9.

Como hemos tomado una  $h$ -base,

$$g(hX, X) = \sqrt{1 - \kappa} g(X, X) = \sqrt{1 - \kappa} > 0.$$

Sumando y restando las dos últimas ecuaciones resulta entonces el siguiente sistema compatible indeterminado

$$\left. \begin{aligned} (f_1^* - f_1) + 3(f_2^* - f_2) &= 0 \\ (f_1^* - f_1) - (f_3^* - f_3) &= 0 \\ (f_4^* - f_4) - (f_6^* - f_6) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

cuya solución general puede escribirse como (2.2.32). □



**Nota 2.2.17.** En las condiciones del teorema anterior, si  $\kappa = f_1 - f_3 = 1$ , entonces  $M^3$  es Sasakiana y por tanto un g.S.s.f.  $M(f_1, f_2, f_3)$ . P. Alegre y A. Carriazo prueban en [3] que la relación existente entre las funciones vendría dada por

$$f_1^* = f_1 + f, \quad f_2^* = f_2 - f/3, \quad f_3^* = f_3 + f,$$

donde  $f$  es una función diferenciable en  $M$ .

**Nota 2.2.18.** También podemos preguntarnos qué relación tienen  $f_5$  y  $f_5^*$  bajo las condiciones del teorema anterior, ya que no aparecen entre las relaciones del enunciado. Ello se debe a que el  $R_5 = 0$  si  $M^3$  tiene estructura de contacto métrica, luego podemos tomar  $f_5$  y  $f_5^*$  funciones arbitrarias, como veremos en los próximos Lema y Teorema respectivamente.

Veremos a continuación que el recíproco del Teorema 2.2.16 también es cierto. Para ello presentaremos primero un lema técnico:

**Lema 2.2.19.** Sea  $M^3$  una variedad casi-contacto métrica. Entonces se cumple que:

$$R_2 = 3(R_1 + R_3). \quad (2.2.33)$$

Si además  $M^3$  tiene estructura de contacto métrica, entonces:

$$R_5 = 0, \quad (2.2.34)$$

$$R_6 = -R_4. \quad (2.2.35)$$

*Demostración.* Para obtener (2.2.33) basta realizar los cálculos correspondientes utilizando una  $\phi$ -base. Para las otras dos ecuaciones necesitamos la hipótesis de contacto métrico para poder usar que  $h$  es un operador simétrico y que anticonmuta con  $\phi$  (por el Lema 1.2.3).  $\square$

**Teorema 2.2.20.** Sea  $M^3(f_1, \dots, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica. Si definimos las funciones  $f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^*, f_6^*$  como en (2.2.32) para ciertas funciones  $f, \bar{f}$  en  $M$  y tomamos  $f_5^*$  arbitraria, entonces  $M^3$  es también un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.  $M^3(f_1^*, \dots, f_6^*)$ .

*Demostración.* Si usamos la definición de  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. y (2.2.32) tenemos:

$$R = \sum_{i=1}^6 f_i R_i = \sum_{i=1}^6 f_i^* R_i + \left( f(-R_1 + \frac{1}{3}R_2 - R_3) - \bar{f}(R_4 + R_6) + (f_5 - f_5^*)R_5 \right).$$

Para obtener (2.2.31) sería suficiente aplicar el Lema 2.2.19.  $\square$

Ahora bien, aunque la escritura de  $R$  no sea única, podemos elegir una destacada:

**Corolario 2.2.21.** Sea  $M^3(f_1, \dots, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica. Entonces su tensor de curvatura puede escribirse como

$$R = f_1^* R_1 + f_3^* R_3 + f_4^* R_4,$$

es decir, es también un espacio  $M^3(f_1^*, 0, f_3^*, f_4^*, 0, 0)$ , donde

$$f_1^* = f_1 + 3f_2, \quad f_3^* = f_3 + 3f_2, \quad f_4^* = f_4 - f_6.$$

*Demostración.* Bastaría usar el teorema anterior con  $f = 3f_2, \bar{f} = -f_6$  y  $f_5^* = 0$ .  $\square$

**Nota 2.2.22.** Si queremos considerar una forma única del tensor de curvatura de un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. de dimensión 3 y estructura de contacto métrica, elegiremos  $R$  satisfaciendo  $f_2^* = f_5^* = f_6^* = 0$  y diremos que tiene forma canónica.

Ya probamos que si un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_6)$  tiene estructura de contacto métrica y  $f_1 - f_3 = 1$ , entonces el espacio es Sasakiano. Si  $f_4 - f_6 = 0$ , sabemos por el corolario anterior que el espacio puede escribirse como  $M(f_1^*, 0, f_3^*, 0, 0, 0)$ , luego es un  $g.S.s.f.$  con estructura de contacto métrica (ya estudiados en [3]).

D. Blair, T. Koufogiorgos y V. J. Papantoniou clasificaron en [12] los  $(\kappa, \mu)$ -espacios con estructura de contacto métrica y dimensión 3 mediante el siguiente teorema:

**Teorema 2.2.23.** Si  $M$  es un  $(\kappa, \mu)$ -espacio con estructura de contacto métrica y dimensión 3, entonces  $M$  es o Sasakiano ( $\kappa = 1, h = 0$ ) o localmente isométrico a uno de los siguientes grupos de Lie con métrica invariante a izquierda:  $SU(2)$  (o  $SO(3)$ ),  $SL(2, \mathbb{R})$  (o  $O(1, 2)$ ),  $E(2)$  (grupo de los movimientos rígidos en un 2-espacio euclídeo) o  $E(1, 1)$  (grupo de los movimientos rígidos en un 2-espacio de Minkowski).

Es más, esta estructura puede ocurrir en los siguientes casos:

- $SU(2)$  o  $SO(3)$  si  $1 - \lambda - \frac{\mu}{2} > 0$  y  $1 + \lambda - \frac{\mu}{2} > 0$ .
- $SL(2, \mathbb{R})$  o  $O(1, 2)$  si  $\begin{cases} 1 - \lambda - \frac{\mu}{2} < 0 & y & 1 + \lambda - \frac{\mu}{2} > 0 \\ \text{ó} \\ 1 - \lambda - \frac{\mu}{2} < 0 & y & 1 + \lambda - \frac{\mu}{2} < 0. \end{cases}$
- $E(2)$  si  $1 - \lambda - \frac{\mu}{2} = 0$  y  $\mu < 2$ .
- $E(1, 1)$  si  $1 + \lambda - \frac{\mu}{2} = 0$  y  $\mu > 2$ .

Ahora utilizamos los Teoremas 2.2.1, 2.2.2 y 2.2.23 para probar el siguiente resultado:

**Teorema 2.2.24.** Sea  $M^3(f_1, \dots, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica. Si  $f_1 - f_3 \neq 1$  y  $f_4 - f_6$  son constantes, entonces  $M$  cumple que

$$2f_1 + 3f_2 - f_3 + f_4 - f_6 = 0,$$

y es localmente isométrico a uno de los siguientes grupos de Lie con métrica invariante a izquierda:  $SU(2)$  (o  $SO(3)$ ),  $SL(2, \mathbb{R})$  (o  $O(1, 2)$ ),  $E(2)$  (grupo de los movimientos rígidos en un 2-espacio euclídeo) o  $E(1, 1)$  (grupo de los movimientos rígidos en un 2-espacio de Minkowski).

Es más, esta estructura puede ocurrir en los siguientes casos:

- $SU(2)$  o  $SO(3)$  si  $1 - \lambda - \frac{\mu}{2} > 0$  y  $1 + \lambda - \frac{\mu}{2} > 0$ .
- $SL(2, \mathbb{R})$  o  $O(1, 2)$  si  $\begin{cases} 1 - \lambda - \frac{\mu}{2} < 0 & y & 1 + \lambda - \frac{\mu}{2} > 0 \\ \text{ó} \\ 1 - \lambda - \frac{\mu}{2} < 0 & y & 1 + \lambda - \frac{\mu}{2} < 0. \end{cases}$
- $E(2)$  si  $1 - \lambda - \frac{\mu}{2} = 0$  y  $\mu < 2$ .
- $E(1, 1)$  si  $1 + \lambda - \frac{\mu}{2} = 0$  y  $\mu > 2$ .

donde  $\kappa = f_1 - f_3$ ,  $\lambda = \sqrt{1 - \kappa}$  y  $\mu = -2f_1 - 3f_2 + f_3$ .

*Demostración.* Si  $f_1 - f_3 \neq 1$  y  $f_4 - f_6$  son constantes, entonces tenemos por el Teorema 2.2.1 que  $M$  es un  $(\kappa, \mu)$ -espacio con  $\kappa = f_1 - f_3 \neq 1$  y  $\mu = f_4 - f_6$ . Aplicamos el Teorema 2.2.2 y obtenemos que  $R$ , el tensor de curvatura de  $M$ , debe cumplir las 6 ecuaciones (2.2.2)-(2.2.7). Si sustituimos en ellas la forma que tiene  $R$  en un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f., veremos que las ecuaciones (2.2.2) y (2.2.3) no aportan información porque

$$g(\phi Y_\lambda, Z_{-\lambda})\phi X_\lambda - g(\phi X_\lambda, Z_{-\lambda})\phi Y_\lambda = 0 = g(\phi Y_{-\lambda}, Z_\lambda)\phi X_{-\lambda} - g(\phi X_{-\lambda}, Z_\lambda)\phi Y_{-\lambda}.$$

Ello se debe a que la variedad  $M$  es de dimensión 3, luego  $\dim D(\lambda) = \dim D(-\lambda) = 1$ . Por tanto, dados  $\phi X_\lambda, \phi Y_\lambda, Z_{-\lambda} \in D(-\lambda)$ , podemos escribir  $\phi X_\lambda = p_1 Z_{-\lambda}$  y  $\phi Y_\lambda = p_2 Z_{-\lambda}$ , para ciertas funciones  $p_1$  y  $p_2$ . Sustituyendo, obtenemos que

$$g(\phi Y_\lambda, Z_{-\lambda})\phi X_\lambda - g(\phi X_\lambda, Z_{-\lambda})\phi Y_\lambda = p_1 p_2 g(Z_{-\lambda}, Z_{-\lambda})Z_{-\lambda} - p_1 p_2 g(Z_{-\lambda}, Z_{-\lambda})Z_{-\lambda} = 0.$$

La otra igualdad se obtiene de forma análoga.

Las ecuaciones (2.2.6) y (2.2.7) tampoco son útiles porque

$$g(Y_\lambda, Z_\lambda)X_\lambda - g(X_\lambda, Z_\lambda)Y_\lambda = 0 = g(Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda})X_{-\lambda} - g(X_{-\lambda}, Z_{-\lambda})Y_{-\lambda}.$$

En efecto, si  $X_\lambda, Y_\lambda, Z_\lambda \in D(\lambda)$ , entonces podemos escribir  $Y_\lambda = p_3 X_\lambda$  y  $Z_\lambda = p_4 X_\lambda$ , para ciertas funciones  $p_3$  y  $p_4$ , y obtenemos que

$$g(Y_\lambda, Z_\lambda)X_\lambda - g(X_\lambda, Z_\lambda)Y_\lambda = p_3 p_4 g(X_\lambda, X_\lambda)X_\lambda - p_3 p_4 g(X_\lambda, X_\lambda)X_\lambda = 0.$$

La otra igualdad se prueba análogamente.

Si tomamos en (2.2.30)  $Y_{-\lambda} = Z_{-\lambda}$  unitarios y  $X_\lambda = \phi Y_{-\lambda}$ , entonces  $-(f_1 - f_3) - (f_4 - f_6) = f_1 + 3f_2$ .

Si tomamos ahora en (2.2.5)  $X_\lambda = Z_\lambda$  unitarios e  $Y_{-\lambda} = \phi X_\lambda$ , entonces obtenemos de nuevo  $-(f_1 - f_3) - (f_4 - f_6) = f_1 + 3f_2$ .

De aquí se obtiene directamente que  $2f_1 + 3f_2 - f_3 + f_4 - f_6 = 0$  y  $\mu = -2f_1 - 3f_2 + f_3$ . Bastaría aplicar el Teorema 2.2.23 para obtener el resto del enunciado.  $\square$

**Nota 2.2.25.** La fórmula del teorema anterior generaliza la ecuación (3.3.9) de [3], que era cierta para g.S.s.f.'s  $M^3(f_1, f_2, f_3)$  con estructura de contacto métrica no-Sasakiana.

D. E. Blair, T. Koufogiorgos y R. Sharma estudiaron en [13] las variedades de contacto métricas que cumplen  $Q\phi = \phi Q$  y obtuvieron la siguiente proposición:

**Proposición 2.2.26.** Dada una variedad de contacto métrica  $(M^3, \phi, \xi, \eta, g)$ , las siguientes condiciones son equivalentes:

(i)  $M$  es  $\eta$ -Einstein,

(ii)  $Q\phi = \phi Q$ ,

(iii)  $M$  es un  $(\kappa, 0)$ -espacio, para cierta constante  $\kappa$ ,

donde  $Q$  denota el operador de Ricci.

Recordemos que una variedad  $\eta$ -Einstein es una variedad de contacto métrico cumpliendo

$$Q = aI + b\eta \otimes \xi,$$

donde  $a, b$  son funciones diferenciables en  $M$ .

Gracias al Teorema 2.2.1, sabemos que un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_6)$  con estructura de contacto métrica cumple la condición (iii) si y sólo si  $f_1 - f_3$  es constante y  $f_4 - f_6 = 0$ . Comprobaremos a continuación cuándo se cumplen las condiciones (i) y (ii), para lo que primero hallaremos  $Q$ :

**Proposición 2.2.27.** Sea  $M^{2n+1}(f_1, \dots, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica. Entonces el operador de Ricci  $Q$  viene dado por:

$$Q = (2nf_1 + 3f_2 - f_3)I - (3f_2 + (2n - 1)f_3)\eta \otimes \xi + ((2n - 1)f_4 - f_6)h. \quad (2.2.36)$$

Si, además, suponemos que  $\kappa = f_1 - f_3 \neq 1$  y  $\mu = f_4 - f_6$  son constantes, entonces  $M$  es un  $(\kappa, \mu)$ -espacio no-Sasakiano y

$$Q = (2(n - 1) - n\mu)I + (2(1 - n) + n(2\kappa + \mu))\eta \otimes \xi + (2(n - 1) + \mu)h. \quad (2.2.37)$$

*Demostración.* Tomamos una  $\phi$ -base  $\{e_1, \dots, e_n, \phi e_1, \dots, \phi e_n, \xi\}$  en  $M^{2n+1}(f_1, \dots, f_6)$ . Entonces, en virtud de (2.1.1):

$$\begin{aligned}
R(X, e_i)e_i &= f_1\{X - g(X, e_i)e_i\} + 3f_2g(X, \phi e_i)\phi e_i - f_3\eta(X)\xi \\
&\quad + f_4\{hX - g(X, e_i)he_i + g(he_i, e_i)X - g(hX, e_i)e_i\} \\
&\quad + f_5\{g(he_i, e_i)hX - g(hX, e_i)he_i - g(hX, \phi e_i)\phi he_i + g(he_i, \phi e_i)\phi hX\} \\
&\quad - f_6g(he_i, e_i)\eta(X)\xi, \\
R(X, \phi e_i)\phi e_i &= f_1\{X - g(X, \phi e_i)\phi e_i\} + 3f_2g(X, e_i)e_i - f_3\eta(X)\xi \\
&\quad + f_4\{hX - g(X, \phi e_i)h\phi e_i - g(he_i, e_i)X - g(hX, \phi e_i)\phi e_i\} \\
&\quad + f_5\{-g(he_i, e_i)hX + g(hX, \phi e_i)\phi he_i + g(hX, e_i)he_i - g(he_i, \phi e_i)\phi hX\} \\
&\quad + f_6g(he_i, e_i)\eta(X)\xi, \\
R(X, \xi)\xi &= (f_1 - f_3)\{X - \eta(X)\xi\} + (f_4 - f_6)hX.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
QX &= \sum_{i=1}^n R(X, e_i)e_i + \sum_{i=1}^n R(X, \phi e_i)\phi e_i + R(X, \xi)\xi = \\
&= f_1\{nX - \sum_{i=1}^n g(X, e_i)e_i + nX - \sum_{i=1}^n g(X, \phi e_i)\phi e_i + X - \eta(X)\xi\} \\
&\quad + 3f_2\left\{\sum_{i=1}^n (g(X, \phi e_i)\phi e_i + g(X, e_i)e_i)\right\} \\
&\quad - f_3\{n\eta(X)\xi + n\eta(X)\xi + X - \eta(X)\xi\} \\
&\quad + f_4\left\{nhX + \sum_{i=1}^n (-g(X, e_i)he_i + g(he_i, e_i)X - g(hX, e_i)e_i)\right. \\
&\quad \quad \left. + nhX + \sum_{i=1}^n (-g(X, \phi e_i)h\phi e_i - g(he_i, e_i)X - g(hX, \phi e_i)\phi e_i) + hX\right\} \\
&\quad + f_5\left\{\sum_{i=1}^n (g(he_i, e_i)hX - g(hX, e_i)he_i - g(hX, \phi e_i)\phi he_i + g(he_i, \phi e_i)\phi hX)\right. \\
&\quad \quad \left. + \sum_{i=1}^n (-g(he_i, e_i)hX + g(hX, \phi e_i)\phi he_i + g(hX, e_i)he_i - g(he_i, \phi e_i)\phi hX)\right\} \\
&\quad + f_6\left\{\sum_{i=1}^n (-g(he_i, e_i) + g(he_i, e_i))\eta(X)\xi - hX\right\},
\end{aligned}$$

donde usamos el Lema 1.2.3 y el hecho de que podemos escribir  $hX$  tanto como

$$hX = \sum_{i=1}^n (g(hX, e_i)e_i + g(hX, \phi e_i)\phi e_i + g(hX, \xi)\xi) = \sum_{i=1}^n (g(hX, e_i)e_i + g(hX, \phi e_i)\phi e_i)$$

como

$$hX = h \left( \sum_{i=1}^n (g(X, e_i)e_i + g(X, \phi e_i)\phi e_i + g(X, \xi)\xi) \right) = \sum_{i=1}^n (g(X, e_i)he_i + g(X, \phi e_i)h\phi e_i),$$

obteniendo

$$\begin{aligned} QX &= 2nf_1X + 3f_2\{X - \eta(X)\xi\} - f_3\{X + (2n-1)\eta(X)\xi\} + (2n-1)f_4hX - f_6hX \\ &= (2nf_1 + 3f_2 - f_3)X - (3f_2 + (2n-1)f_3)\eta(X)\xi + ((2n-1)f_4 - f_6)hX, \end{aligned}$$

para todo  $X$ .

Si  $\kappa = f_1 - f_3 \neq 1$  y  $\mu = f_4 - f_6$  son constantes, entonces  $M$  es un  $(\kappa, \mu)$ -espacio no-Sasakiano. Si su dimensión es mayor o igual que 5, se cumplen las ecuaciones (2.2.16) en virtud del Teorema 2.2.12 y obtenemos:

$$\begin{aligned} 2nf_1 + 3f_2 - f_3 &= 2n\frac{f_6 + 1}{2} + 3\frac{f_6 - 1}{2} - \frac{3f_6 + 1}{2} = \\ &= n(f_6 + 1) - 2 = n(1 - \mu + 1) - 2 = 2(n-1) - n\mu, \\ -3f_2 - f_3(2n-1) &= -3\frac{f_6 - 1}{2} - \frac{3f_6 + 1}{2}(2n-1) = -3nf_6 + 2 - n = \\ &= n(-2f_6 - f_6) + 2 - n = n(2\kappa + \mu - 1) + 2 - n = \\ &= n(2\kappa + \mu) + 2 - 2n = 2(1-n) + n(2\kappa + \mu), \\ f_4(2n-1) - f_6 &= 2n - 1 + \mu - 1 = 2(n-1) + \mu. \end{aligned}$$

Si la dimensión de  $M$  es 3 ( $n = 1$ ), entonces sabemos que  $2f_1 + 3f_2 - f_3 + f_4 - f_6 = 0$  por el Teorema 2.2.24, luego:

$$\begin{aligned} 2f_1 + 3f_2 - f_3 &= -(f_4 - f_6) = -\mu, \\ -3f_2 - f_3 &= 2f_1 - 2f_3 + f_4 - f_6 = 2\kappa + \mu \\ f_4 - f_6 &= \mu, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

**Nota 2.2.28.** La proposición anterior generaliza el Teorema 3.8 de [3], que se demostró para g.S.s.f.'s. En [12] se prueba que la expresión (2.2.37) es cierta para todo  $(\kappa, \mu)$ -espacio con estructura de contacto métrica y dimensión  $2n + 1$  con  $\kappa < 1$ .

**Nota 2.2.29.** Podemos observar que del resultado anterior se deduce que si  $M^{2n+1}(f_1, \dots, f_6)$  es un g. $(\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica con  $h \neq 0$ , entonces es  $\eta$ -Einstein si y sólo si  $f_4(2n-1) - f_6 = 0$ . En particular,  $M^3(f_1, \dots, f_6)$  con  $h \neq 0$  cumple la condición (i) de la Proposición 2.2.26 si y sólo si  $f_4 - f_6 = 0$ .

Usando la Proposición 2.2.27 también podemos probar lo siguiente:

**Proposición 2.2.30.** Sea  $M^{2n+1}(f_1, \dots, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica. Entonces

$$Q\phi - \phi Q = 2((2n - 1)f_4 - f_6)h\phi,$$

donde  $Q$  denota el operador de Ricci en  $M$ .

*Demostración.* Sustituyendo en (2.2.36) el campo  $X$  por  $\phi X$  y utilizando (1.1.4) obtenemos:

$$Q\phi X = (2nf_1 + 3f_2 - f_3)\phi X + ((2n - 1)f_4 - f_6)h\phi X.$$

Aplicamos ahora  $\phi$  a (2.2.36) y usamos (1.1.3) y  $\phi h = -h\phi$ :

$$\phi QX = (2nf_1 + 3f_2 - f_3)\phi X - ((2n - 1)f_4 - f_6)h\phi X.$$

Luego

$$Q\phi X - \phi QX = 2((2n - 1)f_4 - f_6)h\phi X,$$

para todo  $X$ . □

**Nota 2.2.31.** En [12] se prueba que un  $(\kappa, \mu)$ -espacio con estructura de contacto métrica y dimensión  $2n + 1$  cumple que  $Q\phi - \phi Q = 2(2(n - 1) + \mu)h\phi$ . Esta fórmula coincide con la de la proposición anterior en el caso de  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s  $M^{2n+1}(f_1, \dots, f_6)$ . En efecto, si  $M$  es Sasakiana entonces  $h = 0$  y es trivial. Podemos suponer así que  $M$  es no-Sasakiana. Si  $n = 1$ , los resultados coinciden exactamente pues  $\mu = f_4 - f_6$ . Si  $n > 1$ , entonces  $f_4(2n - 1) - f_6 = 2(n - 1) + \mu$  si y sólo si  $f_4 = 1$ , que es cierto en virtud del Teorema 2.2.12.

Es de señalar que en la Proposición 2.2.30 no ha sido necesario que  $f_1 - f_3$  y  $f_4 - f_6$  fueran constantes, tal y como se supone en [12].

**Nota 2.2.32.** De la proposición anterior se deduce que un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.  $M^{2n+1}(f_1, \dots, f_6)$  con estructura de contacto métrica y  $h \neq 0$  cumple  $Q\phi = \phi Q$  si y sólo si  $f_4(2n - 1) - f_6 = 0$ . En particular,  $M^3$  con  $h \neq 0$  cumpliría la condición (ii) de la Proposición 2.2.26 si y sólo si  $f_4 - f_6 = 0$ .

Podemos resumir los resultados anteriores en la siguiente proposición:

**Proposición 2.2.33.** Sea  $M^3(f_1, \dots, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica y  $h \neq 0$ . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i)  $M^3$  es  $\eta$ -Einstein,
- (ii)  $Q\phi = \phi Q$ ,
- (iii)  $M^3$  es un  $(f_1 - f_3, 0)$ -espacio, donde  $f_1 - f_3$  es una constante,
- (iv)  $f_4 - f_6 = 0$ ,

donde  $Q$  denota el operador de Ricci.

**Nota 2.2.34.** Un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.  $M^3(f_1, \dots, f_6)$  con estructura de contacto métrica y  $h = 0$  es un g.S.s.f., luego las tres primeras condiciones son siempre ciertas, como ya se probó en [2] y [3]. Además,  $R_4 = R_5 = R_6 = 0$ , así que podemos tomar  $f_4 = f_5 = f_6 = 0$  y se cumpliría en particular la cuarta condición.

**Nota 2.2.35.** Obsérvese que la Proposición 2.2.33 significa en particular que si un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.  $M^3(f_1, \dots, f_6)$  con estructura de contacto métrica y  $h \neq 0$  cumple que  $f_4 - f_6 = 0$ , entonces  $f_1 - f_3$  es una constante. Si  $h = 0$ , sabemos por la Nota anterior que  $f_1 - f_3$  es otra vez constante. Esto sería un caso particular del Teorema 10 que R. Sharma prueba en [54]:

“Sea  $M$  una variedad de contacto métrica. Si  $R(X, Y)Z = \kappa(\eta(Y)X - \eta(X)Y)$  para cierta función  $\kappa$  independiente de la elección de los campos  $X$  e  $Y$ , entonces  $\kappa$  es constante en  $M$ ”.

D. Blair y H. Chen probaron en [14] el siguiente teorema, que mejora la clasificación de las variedades de contacto métricas que cumplen  $Q\phi = \phi Q$  dada en [13]:

**Teorema 2.2.36.** Sea  $M^3$  una variedad de contacto métrica tal que  $Q\phi = \phi Q$ . Entonces  $M^3$  es Sasakiana, llana o localmente isométrica al grupo de Lie  $SU(2)$  o  $SL(2, \mathbb{R})$  con métrica invariante a izquierda. En el último caso,  $M^3$  tiene curvatura  $\xi$ -seccional constante  $\kappa < 1$  y curvatura  $\phi$ -seccional constante  $-\kappa$  (la estructura puede darse en  $SU(2)$  si  $\kappa > 0$  y en  $SL(2, \mathbb{R})$  para  $\kappa < 0$ ).

Del teorema anterior se puede deducir la proposición siguiente:

**Proposición 2.2.37.** Sea  $M^3(f_1, \dots, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica. Si  $f_1 - f_3 \neq 1$  y  $f_4 - f_6 = 0$ , entonces  $f_1 - f_3$  y  $f_1 + 3f_2$  son constantes y se cumple que  $2f_1 + 3f_2 - f_3 = 0$ .

*Demostración.* Como  $f_4 - f_6 = 0$ , ya probamos que  $M^3$  cumple  $Q\phi = \phi Q$ . Además,  $M^3$  es no-Sasakiano porque es un  $(f_1 - f_3, 0)$ -espacio con  $f_1 - f_3 \neq 1$ . Luego, por el teorema anterior, el espacio es llano o cumple que  $K(X, \xi) = -K(X, \phi X) = \kappa$  es constante, para todo  $X$  unitario y ortogonal a  $\xi$ .

Ahora bien,

$$K(X, \phi X) = f_1 + 3f_2$$

y

$$K(X, \xi) = f_1 - f_3 - (f_4 - f_6)g(hX, X) = f_1 - f_3$$

en virtud de las Proposiciones 2.1.7 y 2.1.8.

Si  $M^3$  es llana, entonces  $K(X, \phi X) = 0 = K(X, \xi)$ , luego  $f_1 + 3f_2 = -(f_1 - f_3) = 0$  (y constante, en particular) y concluimos que  $2f_1 + 3f_2 - f_3 = 0$ .

Si  $K(X, \xi) = \kappa = -K(X, \phi X)$ , entonces  $f_1 - f_3 = -(f_1 + 3f_2) = \kappa$  es constante y  $2f_1 + 3f_2 - f_3 = 0$ .  $\square$



**Nota 2.2.38.** El resultado anterior podría haber sido obtenido como caso particular del Teorema 2.2.24. En efecto, si  $f_4 - f_6 = 0$ , entonces  $f_1 - f_3 \neq 1$  es constante y estamos en las hipótesis del citado teorema, consiguiendo así la ecuación buscada:  $2f_1 + 3f_2 - f_3 = 0$ . De ella deducimos que  $f_1 + 3f_2 = -(f_1 - f_3)$  también es constante.

Estudiaremos ahora el valor de la curvatura escalar:

**Proposición 2.2.39.** Sea  $M^3(f_1, \dots, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica. Entonces

$$\tau = 2(3f_1 + 3f_2 - 2f_3).$$

Además, si  $\kappa = f_1 - f_3 \neq 1$  y  $\mu = f_4 - f_6$  son constantes, se tiene que

$$\tau = 2(\kappa - \mu).$$

*Demostración.* La curvatura escalar de  $M^3$  es por definición

$$\tau = \sum_{i,j=1}^3 R(e_i, e_j, e_j, e_i),$$

donde  $\{e_1, e_2, e_3\}$  es una base ortonormal cualquiera en  $M^3$ . Si tomamos una  $\phi$ -base  $\{X, \phi X, \xi\}$ , entonces:

$$\begin{aligned} \tau &= R(X, \phi X, \phi X, X) + R(X, \xi, \xi, X) + R(\phi X, X, X, \phi X) + R(\phi X, \xi, \xi, \phi X) + \\ &\quad + R(\xi, X, X, \xi) + R(\xi, \phi X, \phi X, \xi) = \\ &= 2K(X, \phi X) + 2K(X, \xi) + 2K(\phi X, \xi) = \\ &= 2(K(X, \phi X) + K(X, \xi) + K(\phi X, \xi)), \end{aligned}$$

y usando las Proposiciones 2.1.7 y 2.1.8 y el Corolario 2.1.9 obtenemos:

$$\begin{aligned} \tau &= 2(f_1 + 3f_2 + f_1 - f_3 + (f_4 - f_6)g(hX, X) + f_1 - f_3 - (f_4 - f_6)g(hX, X)) = \\ &= 2(3f_1 + 3f_2 - 2f_3). \end{aligned}$$

Además, si  $\kappa = f_1 - f_3 \neq 1$  y  $\mu = f_4 - f_6$  son constantes, se tiene por el Teorema 2.2.24 que

$$2f_1 + 3f_2 - f_3 + f_4 - f_6 = 0,$$

luego

$$3f_1 + 3f_2 - 2f_3 = (2f_1 + 3f_2 - f_3) + (f_1 - f_3) = -(f_4 - f_6) + (f_1 - f_3) = \kappa - \mu,$$

como queríamos demostrar. □

**Nota 2.2.40.** En [12] se calcula  $\tau$  para  $(\kappa, \mu)$ -espacios con estructura de contacto métrica y de cualquier dimensión, pero en la proposición anterior no ha hecho falta usar que  $\kappa$  y  $\mu$  sean constantes para probar el resultado general.

**Corolario 2.2.41.** *Sea  $M^3(f_1, \dots, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica y  $\kappa = f_1 - f_3 \neq 1, \mu = f_4 - f_6$  constantes. Entonces el operador de Ricci en  $M^3$  puede escribirse:*

$$Q = -\left(\kappa - \frac{\tau}{2}\right) I + \left(3\kappa - \frac{\tau}{2}\right) \eta \otimes \xi + \left(\kappa - \frac{\tau}{2}\right) h.$$

*Demostración.* Si sustituimos  $n = 1$  en la fórmula del operador de Ricci  $Q$  obtenida en la Proposición 2.2.27 tendríamos que

$$QX = -\mu X + (2\kappa + \mu)\eta(X)\xi + \mu hX,$$

para todo  $X$ . Basta usar ahora que la curvatura escalar es  $\tau = 2(\kappa - \mu)$  por la Proposición 2.2.39.  $\square$

Usando las fórmulas de  $Q$  y  $\tau$  dadas por las Proposiciones 2.2.27 y 2.2.39 y la expresión que relaciona ambas con  $R$  en una variedad Riemanniana de dimensión 3,

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z = & g(Y, Z)QX - g(X, Z)QY + g(QY, Z)X - g(QX, Z)Y \\ & - \frac{\tau}{2}(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y), \end{aligned} \quad (2.2.38)$$

para cualesquiera  $X, Y, Z$ , llegamos a la misma expresión que se conocía del Corolario 2.2.21:

**Proposición 2.2.42.** *Sea  $M^3(f_1, \dots, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.  $M^3(f_1, \dots, f_6)$  con estructura de contacto métrica. Entonces, la forma canónica de su tensor de curvatura viene dada por:*

$$R = (f_1 + 3f_2)R_1 + (3f_2 + f_3)R_3 + (f_4 - f_6)R_4.$$

*Si además  $\kappa = f_1 - f_3 \neq 1$  y  $\mu = f_4 - f_6$  son constantes, se tiene que:*

$$R = -(\kappa + \mu)R_1 - (2\kappa + \mu)R_3 + \mu R_4.$$

*Demostración.* Ya hemos probado que  $\tau = 2(3f_1 + 3f_2 - 2f_3)$  y  $QX = aX + b\eta(X)\xi + \mu hX$ , donde  $a = 2f_1 + 3f_2 - f_3$ ,  $b = -(3f_2 + f_3)$  y  $\mu = f_4 - f_6$ . Usando (2.2.38)

obtenemos:

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= g(Y, Z)QX - g(X, Z)QY + g(QY, Z)X - \\
&\quad - g(QX, Z)Y - \frac{\tau}{2}(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) = \\
&= ag(Y, Z)X + bg(Y, Z)\eta(X)\xi + \mu g(Y, Z)hX \\
&\quad - ag(X, Z)Y - bg(X, Z)\eta(Y)\xi - \mu g(X, Z)hY \\
&\quad + ag(Y, Z)X + b\eta(Y)\eta(Z)X + \mu g(hY, Z)X \\
&\quad - ag(X, Z)Y - b\eta(X)\eta(Z)Y - \mu g(hX, Z)Y \\
&\quad - (3f_1 + 3f_2 - 2f_3)R_1(X, Y)Z = \\
&= 2aR_1(X, Y)Z + b(-R_3(X, Y)Z) + \mu R_4(X, Y)Z \\
&\quad - (3f_1 + 3f_2 - 2f_3)R_1(X, Y)Z = \\
&= (4f_1 + 6f_2 - 2f_3)R_1(X, Y)Z + (3f_2 + f_3)R_3(X, Y)Z + \\
&\quad + (f_4 - f_6)R_3(X, Y)Z - (3f_1 + 3f_2 - 2f_3)R_1(X, Y)Z = \\
&= (f_1 + 3f_2)R_1(X, Y)Z + (3f_2 + f_3)R_3(X, Y)Z + (f_4 - f_6)R_4(X, Y)Z.
\end{aligned}$$

Si además  $\kappa = f_1 - f_3 \neq 1$  y  $\mu = f_4 - f_6$  son constantes, se tiene por el Teorema 2.2.24 que  $2f_1 + 3f_2 - f_3 + f_4 - f_6 = 0$ , luego  $f_1 + 3f_2 = -(\kappa + \mu)$  y  $3f_2 + f_3 = -(2\kappa - \mu)$ .  $\square$

Por último, comprobaremos que el ejemplo de  $(\kappa, \mu)$ -espacio generalizado con estructura de contacto métrica, dimensión 3 y  $\kappa, \mu$  no constantes que dan T. Koufogiorgos y C. Tsihlias en [46] es un  $g(\kappa, \mu)$ -s.f.  $M^3(f_1^*, 0, f_3^*, f_4^*, 0, 0)$  con  $f_1^*, f_3^*, f_4^*$  no constantes.

**Ejemplo 2.2.43.** Sea  $M^3$  la variedad  $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_3 \neq 0\}$ , donde  $(x_1, x_2, x_3)$  son las coordenadas usuales de  $\mathbb{R}^3$ . Los campos

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad e_2 = -2x_2x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{2x_1}{x_3^2} \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{1}{x_3^2} \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad e_3 = \frac{1}{x_3} \frac{\partial}{\partial x_2}$$

son linealmente independientes en cada punto de  $M$  y se tiene que:

$$[e_1, e_2] = \frac{2}{x_3^2} e_3, \quad [e_2, e_3] = 2e_1 + \frac{1}{x_3^3} e_3, \quad [e_1, e_3] = 0.$$

Sean  $g$  la métrica Riemanniana definida por  $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\nabla$  su conexión Riemanniana y  $R$  el tensor de curvatura de  $g$ .

Sea  $\eta$  la 1-forma definida por  $\eta(X) = g(X, e_1)$ , para todo campo  $X$  en  $M$ , que es una forma de contacto porque  $\eta \wedge d\eta \neq 0$ . En efecto,

$$\eta = \eta \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right) dx_1 + \eta \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right) dx_2 + \eta \left( \frac{\partial}{\partial x_3} \right) dx_3,$$

de donde podemos calcular

$$\eta = dx_1 - 2x_2x_3^6dx_3, \quad d\eta = -2x_3^6dx^2 \wedge dx_3.$$

Por tanto,  $\eta \wedge d\eta = -2x_3^6dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \neq 0$  en  $M$  por la definición de la variedad.

Sea  $\phi$  el tensor  $(1,1)$  definido por

$$\phi e_1 = 0, \quad \phi e_2 = e_3, \quad \phi e_3 = -e_2.$$

Usando la linealidad de  $\phi, d\eta$  y  $g$  se prueba que

$$\eta(e_1) = 1, \quad \phi^2(X) = -X + \eta(X)e_1, \quad d\eta(X, Y) = g(X, \phi Y),$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

para todos  $X, Y$  en  $M$ . Luego  $(\phi, e_1, \eta, g)$  define una estructura de contacto métrica en  $M$ . Usando la fórmula de Koszul se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1}e_2 &= \left(-1 + \frac{1}{x_3^2}\right)e_3, & \nabla_{e_1}e_3 &= \left(1 - \frac{1}{x_3^2}\right)e_2, & \nabla_{e_2}e_3 &= \left(1 + \frac{1}{x_3^2}\right)e_1, \\ \nabla_{e_2}e_1 &= -\left(1 + \frac{1}{x_3^2}\right)e_3, & \nabla_{e_3}e_1 &= \left(1 - \frac{1}{x_3^2}\right)e_2, & \nabla_{e_3}e_2 &= \left(-1 + \frac{1}{x_3^2}\right)e_1 - \frac{1}{x_3^3}e_3, \\ \nabla_{e_1}e_1 &= 0, & \nabla_{e_2}e_2 &= 0, & \nabla_{e_3}e_3 &= \frac{1}{x_3^3}e_2. \end{aligned}$$

El tensor  $h$  cumple  $he_1 = 0, he_2 = \lambda e_2, he_3 = -\lambda e_3$ , donde  $\lambda = \frac{1}{x_3^2}$ . Si ponemos  $\mu = 2\left(1 - \frac{1}{x_3^2}\right)$  y  $\kappa = 1 - \frac{1}{x_3^4}$ , puede comprobarse que

$$R(X, Y)\xi = \kappa(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + \mu(\eta(Y)hX - \eta(X)hY),$$

luego hemos visto que  $M$  es un  $(\kappa, \mu)$ -espacio generalizado con  $\kappa, \mu$  funciones diferenciables y no constantes en  $M$ .

Veremos que  $M$  es también un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. (en forma canónica, para simplificar los cálculos)  $M(f_1^*, 0, f_3^*, f_4^*, 0, 0)$ . Para ello calcularemos  $R(e_i, e_j)e_k$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3$ , usando tanto la definición de curvatura Riemanniana

$$R(e_i, e_j)e_k = \nabla_{e_i}\nabla_{e_j}e_k - \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}e_k - \nabla_{[e_i, e_j]}e_k$$

como la fórmula  $R = \sum_{i=1,3,4} f_i^* R_i$  e imponemos que coincidan para todo  $i, j, k$ . Como el sistema que obtendremos resultará compatible, esto significará que los tensores

de curvatura definidos de las dos maneras serán iguales para determinadas funciones  $f_1^*, f_3^*, f_4^*$ .

De la definición se sigue que las curvaturas no triviales son:

$$\begin{aligned}
R(e_1, e_2)e_1 &= -R(e_2, e_1)e_1 = -(\kappa + \lambda\mu)e_2, \\
R(e_1, e_2)e_2 &= -R(e_2, e_1)e_2 = (\kappa + \mu\lambda)e_1, \\
R(e_1, e_2)e_3 &= -R(e_2, e_1)e_3 = 0, \\
R(e_1, e_3)e_1 &= -R(e_3, e_1)e_1 = (-\kappa + \lambda\mu)e_2, \\
R(e_1, e_3)e_2 &= -R(e_3, e_1)e_2 = 0, \\
R(e_1, e_3)e_3 &= -R(e_3, e_1)e_3 = (\kappa - \mu\lambda)e_1, \\
R(e_2, e_3)e_1 &= -R(e_3, e_2)e_1 = 0, \\
R(e_2, e_3)e_2 &= -R(e_3, e_2)e_2 = (\kappa + \mu - 2\lambda^3)e_3, \\
R(e_2, e_3)e_3 &= -R(e_3, e_2)e_3 = -(\kappa + \mu - 2\lambda^3)e_2.
\end{aligned}$$

Por otra parte, sabemos que todo  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.  $M(f_1^*, 0, f_3^*, f_4^*, 0, 0)$  con estructura de contacto métrica es un  $(\kappa^*, \mu^*)$ -espacio generalizado con  $\kappa^* = f_1^* - f_3^*$ ,  $\mu^* = f_4^*$ . Si usamos la fórmula  $R = \sum_{i=1,3,4} f_i^* R_i$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
R(e_1, e_2)e_1 &= -R(e_2, e_1)e_1 = -(\kappa^* + \lambda\mu^*)e_2, \\
R(e_1, e_2)e_2 &= -R(e_2, e_1)e_2 = (\kappa^* + \lambda\mu^*)e_1, \\
R(e_1, e_2)e_3 &= -R(e_2, e_1)e_3 = 0, \\
R(e_1, e_3)e_1 &= -R(e_3, e_1)e_1 = (-\kappa^* + \lambda\mu^*)e_3, \\
R(e_1, e_3)e_2 &= -R(e_3, e_1)e_2 = 0, \\
R(e_1, e_3)e_3 &= -R(e_3, e_1)e_3 = (\kappa^* - \lambda\mu^*)e_1, \\
R(e_2, e_3)e_1 &= -R(e_3, e_2)e_1 = 0, \\
R(e_2, e_3)e_2 &= -R(e_3, e_2)e_2 = -f_1^*e_3, \\
R(e_2, e_3)e_3 &= -R(e_3, e_2)e_3 = f_1^*e_2.
\end{aligned}$$

Si igualamos las ecuaciones anteriores resulta que:

$$\left\{ \begin{array}{l}
-\kappa + \lambda\mu e_2 = -(\kappa^* + \lambda\mu^*)e_2 \\
\kappa + \lambda\mu e_1 = (\kappa^* + \lambda\mu^*)e_1 \\
0 = 0 \\
(-\kappa + \lambda\mu)\phi e_2 = (-\kappa^* + \lambda\mu^*)\phi e_2 \\
0 = 0 \\
\kappa - \lambda\mu e_1 = (\kappa^* - \lambda\mu^*)e_1 \\
0 = 0 \\
(\kappa + \mu - 2\lambda^3)e_3 = -f_1^*e_3 \\
-(\kappa + \mu - 2\lambda^3)e_2 = f_1^*e_2
\end{array} \right.$$

lo que se reduce al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \kappa + \lambda\mu = \kappa^* + \lambda\mu^* \\ \kappa - \lambda\mu = \kappa^* - \lambda\mu^* \\ f_1^* = -(\kappa + \mu - 2\lambda^3). \end{cases}$$

Este sistema es compatible determinado, cumpliendo su solución

$$\begin{cases} \kappa = \kappa^* = f_1^* - f_3^* \\ \mu = \mu^* = f_4^* \\ f_1^* = -(\kappa + \mu - 2\lambda^3). \end{cases}$$

de donde se deduce que

$$\begin{cases} f_1^* = -3 + \frac{2}{x_3^2} + \frac{1}{x_3^4} + \frac{2}{x_3^6} \\ f_3^* = -4 + \frac{2}{x_3^2} + \frac{1}{x_3^4} + \frac{2}{x_3^6} \\ f_4^* = 2 \left( 1 - \frac{1}{x_3^2} \right). \end{cases}$$

Concluimos que el ejemplo anterior es un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica  $M^3(f_1^*, 0, f_3^*, f_4^*, 0, 0)$ , donde  $f_1^*, f_3^*, f_4^*$  son funciones no constantes.

**Nota 2.2.44.** Veamos cómo el Ejemplo 2.2.43 nos permite ilustrar los resultados obtenidos anteriormente.

La curvatura escalar de la variedad del ejemplo es por definición

$$\begin{aligned} \tau &= R(e_1, e_2, e_2, e_1) + R(e_1, e_3, e_3, e_1) + R(e_2, e_1, e_1, e_2) + R(e_2, e_3, e_3, e_2) + \\ &+ R(e_3, e_1, e_1, e_3) + R(e_3, e_2, e_2, e_3) = \\ &= 2(g(R(e_1, e_2)e_2, e_1) + g(R(e_1, e_3)e_3, e_1) + g(R(e_2, e_3)e_3, e_2)) = \\ &= 2(g((\kappa^* + \lambda\mu^*)e_1, e_1) + g((\kappa^* - \lambda\mu^*)e_1, e_1) + g(f_1^*e_2, e_2)), \end{aligned}$$

y usando los cálculos ya realizados obtendríamos

$$\begin{aligned} \tau &= 2(\kappa^* + \lambda\mu^* + \kappa^* - \lambda\mu^* + f_1^*) = 2(f_1^* + 2\kappa^*) = 2(3f_1^* - 2f_3^*) = \\ &= 2 \left( -1 + \frac{2}{x_3^2} - \frac{1}{x_3^4} + \frac{2}{x_3^6} \right). \end{aligned}$$

Esto coincide con el valor de  $\tau$  que se obtendría mediante la fórmula de la Proposición 2.2.39:

$$\tau = 2(3f_1^* + 3f_2^* - 2f_3^*) = 2(3f_1^* - 2f_3^*) = 2 \left( -1 + \frac{2}{x_3^2} - \frac{1}{x_3^4} + \frac{2}{x_3^6} \right),$$

pues  $f_2^* = 0$ .

Conocemos explícitamente el valor de la curvatura de Riemann de la variedad del ejemplo, luego podemos también calcular su operador de Ricci, que por definición sería

$$\begin{aligned}
QX &= R(X, e_1)e_1 + R(X, e_2)e_2 + R(X, e_3)e_3 \\
&= f_1^*(R_1(X, e_1)e_1 + R_1(X, e_2)e_2 + R_1(X, e_3)e_3) \\
&\quad + f_3^*(R_3(X, e_1)e_1 + R_3(X, e_2)e_2 + R_3(X, e_3)e_3) \\
&\quad + f_4^*(R_4(X, e_1)e_1 + R_4(X, e_2)e_2 + R_4(X, e_3)e_3) \\
&= 2f_1^*X - f_3^*(X + \eta(X)\xi) + f_4^*hX \\
&= (2f_1^* - f_3^*)X - f_3^*\eta(X)\xi + f_4^*hX \\
&= \left(-2 + \frac{2}{x_3^2} + \frac{2}{x_3^6}\right)X - \left(-4 + \frac{2}{x_3^2} + \frac{2}{x_3^4} + \frac{2}{x_3^6}\right)\eta(X)\xi + 2\left(1 - \frac{1}{x_3^2}\right)hX,
\end{aligned}$$

así que

$$Q\phi - \phi Q = 4\left(1 - \frac{1}{x_3^2}\right)h\phi.$$

Ambas fórmulas coinciden con las de las Proposiciones 2.2.27 y 2.2.30, para valores

$$\begin{aligned}
f_1 &= -3 + \frac{2}{x_3^2} + \frac{1}{x_3^4} + \frac{2}{x_3^6}, & f_2 &= f_5 = f_6 = 0, \\
f_3 &= -4 + \frac{2}{x_3^2} + \frac{2}{x_3^4} + \frac{2}{x_3^6}, & f_4 &= 2\left(1 - \frac{1}{x_3^2}\right).
\end{aligned}$$

Sin embargo,

$$2f_1 + 3f_2 - f_3 + f_4 - f_6 = \frac{2}{x_3^6} \neq 0$$

y

$$\tau = 2\left(-1 + \frac{2}{x_3^2} - \frac{1}{x_3^4} + \frac{2}{x_3^6}\right) \neq 2\left(-1 + \frac{2}{x_3^2} - \frac{1}{x_3^4}\right) = 2(\kappa - \mu),$$

no contradicen el Teorema 2.2.24 o la segunda fórmula de la Proposición 2.2.39 porque la variedad no satisface la hipótesis de ser  $\kappa$  y  $\mu$  constantes.

**Ejemplo 2.2.45.** El segundo ejemplo de  $(\kappa, \mu)$ -espacio generalizado con estructura de contacto métrica y dimensión 3 dado por T. Koufogiorgos y C. Tsihlias en [46] es también un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. de contacto métrico  $M^3(f_1^*, 0, f_3^*, f_4^*, 0, 0)$  con funciones no

constantes:

$$\begin{cases} f_1^* &= -3 - \frac{2}{x_3^4} + \frac{1}{x_3^8} + \frac{10}{x_3^{14}} \\ f_3^* &= -4 - \frac{2}{x_3^4} + \frac{2}{x_3^8} + \frac{10}{x_3^{14}} \\ f_4^* &= 2 \left( 1 + \frac{1}{x_3^4} \right). \end{cases}$$

No realizaremos las comprobaciones correspondientes porque resultarían análogas a las del Ejemplo 2.2.43.

### 2.3. $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s y transformaciones $D_a$ -homotéticas

En esta sección estudiaremos cómo afectan las transformaciones  $D_a$ -homotéticas a los  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s. Veremos que la nueva variedad obtenida no es en general un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. (aunque sí en dimensión 3), pero que un pequeño cambio en la definición del tensor de curvatura de la variedad original haría que lo fuera. Daremos infinitos ejemplos de espacios en cualquier dimensión con estructura de contacto métrica. Por último comprobaremos cómo afectaría este cambio en la definición a los resultados ya probados.

Dada una variedad casi-contacto métrica  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$ , se recuerda que una transformación  $D_a$ -homotética viene definida por

$$\bar{\phi} = \phi, \quad \bar{\xi} = \frac{1}{a}\xi, \quad \bar{\eta} = a\eta, \quad \bar{g} = ag + a(a-1)\eta \otimes \eta, \quad (2.3.1)$$

donde  $a$  es una constante positiva (ver [55]). Está claro que la variedad transformada  $(M, \bar{\phi}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{g})$  es también casi-contacto métrica y que

$$\bar{h} = \frac{1}{a}h. \quad (2.3.2)$$

Además, es bien conocido ([12], [46]) que si a un  $(\kappa, \mu)$ -espacio generalizado con estructura de contacto métrica se le aplica una transformación  $D_a$ -homotética se obtiene un  $(\bar{\kappa}, \bar{\mu})$ -espacio generalizado con estructura de contacto métrica y

$$\bar{\kappa} = \frac{\kappa + a^2 - 1}{a^2}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu + 2a - 2}{a}, \quad (2.3.3)$$

para cada  $a > 0$ .

Veamos primero cómo afectan las transformaciones  $D_a$ -homotéticas al tensor de curvatura de una variedad casi-contacto métrica o de contacto métrica.



**Lema 2.3.1.** Si  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$  es una variedad casi-contacto métrica con conexión Riemanniana  $\nabla$ , la conexión  $\bar{\nabla}$  de  $(M, \bar{\phi}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{g})$  viene dada por

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y = & \nabla_X Y + \frac{a-1}{2a} \{g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, X) - g(\eta(X)Y + \eta(Y)X, \nabla_X \xi)\} \xi \\ & + \frac{a-1}{2} \{ \eta(X) \nabla_Y \xi + \eta(Y) \nabla_X \xi - \sum_{i=1}^{2n} g(\eta(X)Y + \eta(Y)X, \nabla_{e_i} \xi) e_i \}, \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

para todos  $X, Y$  campos en  $M$  siendo  $\{e_1, \dots, e_{2n}, \xi\}$  una base local ortonormal de campos.

Además, si  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$  tiene estructura de contacto métrica, entonces  $(M, \bar{\phi}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{g})$  es también de contacto métrica y se verifica que

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{a-1}{a} g(hX, \phi Y) \xi - (a-1) \{ \eta(X) \phi Y + \eta(Y) \phi X \}, \quad (2.3.5)$$

para todos  $X, Y$  campos en  $M$ .

*Demostración.* Sabemos que la conexión  $\bar{\nabla}$  está determinada a partir de  $\bar{g}$  por la fórmula de Koszul

$$\begin{aligned} 2\bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, Z) = & X\bar{g}(Y, Z) + Y\bar{g}(X, Z) - Z\bar{g}(X, Y) \\ & + \bar{g}([X, Y], Z) + \bar{g}([Z, X], Y) - \bar{g}([Y, Z], X), \end{aligned}$$

para  $X, Y, Z$  campos en  $M$ .

Si desarrollamos la expresión usando la definición de  $\bar{g}$  y el hecho de que  $a$  es constante obtendremos

$$\begin{aligned} 2ag(\bar{\nabla}_X Y, Z) + 2a(a-1)\eta(\bar{\nabla}_X Y)\eta(Z) = & \\ = & X(ag(Y, Z) + a(a-1)\eta(Y)\eta(Z)) + Y(ag(X, Z) + a(a-1)\eta(X)\eta(Z)) \\ & - Z(ag(X, Y) + a(a-1)\eta(X)\eta(Y)) + ag([X, Y], Z) + a(a-1)\eta([X, Y])\eta(Z) \\ & + ag([Z, X], Y) + a(a-1)\eta([Z, X])\eta(Y) - ag([Y, Z], X) - a(a-1)\eta([Y, Z])\eta(X) = \\ = & 2ag(\nabla_X Y, Z) + a(a-1)\{ \eta(Z)(2g(\nabla_X Y, \xi) + g(Y, \nabla_X \xi) + g(X, \nabla_Y \xi)) + \\ & + \eta(Y)(g(Z, \nabla_X \xi) - g(X, \nabla_Z \xi)) + \eta(X)(g(Z, \nabla_Y \xi) - g(Y, \nabla_Z \xi)) \}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} g(\bar{\nabla}_X Y, Z) + (a-1)\eta(\bar{\nabla}_X Y)\eta(Z) = & \\ = & g(\nabla_X Y, Z) + \frac{a-1}{2} \{ \eta(Z)(2g(\nabla_X Y, \xi) + g(Y, \nabla_X \xi) + g(X, \nabla_Y \xi)) \\ & + \eta(Y)(g(Z, \nabla_X \xi) - g(X, \nabla_Z \xi)) + \eta(X)(g(Z, \nabla_Y \xi) - g(Y, \nabla_Z \xi)) \}. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Si tomamos en (2.3.6)  $X$  e  $Y$  ortogonales a  $\xi$ , quedaría

$$g(\bar{\nabla}_X Y, Z) + (a-1)\eta(\bar{\nabla}_X Y)\eta(Z) = g(\nabla_X Y, Z) + \frac{a-1}{2}\eta(Z)\eta(\nabla_X Y - \nabla_Y X).$$

Por tanto, si  $Z = \xi$  entonces obtenemos

$$\eta(\bar{\nabla}_X Y) = \frac{a+1}{2a}\eta(\nabla_X Y) + \frac{a-1}{2a}\eta(\nabla_Y X).$$

Si  $Z$  es ortogonal a  $\xi$ , entonces

$$g(\bar{\nabla}_X Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z).$$

Así pues, dados  $X$  e  $Y$  ortogonales a  $\xi$  y  $\{e_1, \dots, e_{2n}, \xi\}$  base local ortonormal, se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= \sum_{i=1}^{2n} g(\bar{\nabla}_X Y, e_i)e_i + \eta(\bar{\nabla}_X Y)\xi = \\ &= \sum_{i=1}^{2n} g(\nabla_X Y, e_i)e_i + \left( \frac{a+1}{2a}\eta(\nabla_X Y) - \frac{a-1}{2a}\eta(\nabla_Y X) \right) \xi = \\ &= \sum_{i=1}^{2n} g(\nabla_X Y, e_i)e_i + \eta(\nabla_X Y)\xi - \frac{a-1}{2a}(\eta(\nabla_X Y) + \eta(\nabla_Y X))\xi = \\ &= \nabla_X Y - \frac{a-1}{2a}\eta(\nabla_X Y + \nabla_Y X)\xi. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Tomamos en (2.3.6)  $X$  ortogonal a  $\xi$  e  $Y = \xi$ , con lo cual

$$\begin{aligned} g(\bar{\nabla}_X \xi, Z) + (a-1)\eta(\bar{\nabla}_X \xi)\eta(Z) &= \\ &= g(\nabla_X \xi, Z) + \frac{a-1}{2}\{\eta(Z)g(X, \nabla_\xi \xi) + g(Z, \nabla_X \xi) - g(X, \nabla_Z \xi)\}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $\eta(\nabla_X \xi) = \frac{1}{2}X(g(\xi, \xi)) = 0$  por ser  $\xi$  unitario.

Por tanto, para  $Z = \xi$  se obtiene

$$\eta(\bar{\nabla}_X \xi) = 0.$$

Si  $Z$  es ortogonal a  $\xi$ , se verifica

$$g(\bar{\nabla}_X \xi, Z) = \frac{a+1}{2}g(\nabla_X \xi, Z) - \frac{a-1}{2}g(X, \nabla_Z \xi).$$

Así pues, dados  $X$  ortogonal a  $\xi$ ,  $Y = \xi$  y  $\{e_1, \dots, e_{2n}, \xi\}$  base local ortonormal, resulta

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X \xi &= \sum_{i=1}^{2n} g(\bar{\nabla}_X \xi, e_i) e_i + \eta(\bar{\nabla}_X \xi) \xi = \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \left( \frac{a+1}{2} g(\nabla_X \xi, e_i) e_i - \frac{a-1}{2} g(X, \nabla_{e_i} \xi) e_i \right) = \\
&= \frac{a+1}{2} \nabla_X \xi - \frac{a-1}{2} \sum_{i=1}^{2n} g(X, \nabla_{e_i} \xi) e_i,
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

donde hemos vuelto a usar que  $\eta(\nabla_X \xi) = 0$ .

Ahora consideramos en (2.3.6)  $X = \xi$  e  $Y$  ortogonal a  $\xi$ . Entonces

$$g(\bar{\nabla}_\xi Y, Z) + (a-1)\eta(\bar{\nabla}_\xi Y)\eta(Z) = g(\nabla_\xi Y, Z) + \frac{a-1}{2} \{ \eta(Z)\eta(\nabla_\xi Y) + g(Z, \nabla_Y \xi) - g(Y, \nabla_Z \xi) \}.$$

Si tomamos sucesivamente  $Z = \xi$  y  $Z$  ortogonal a  $\xi$  resulta que

$$\eta(\bar{\nabla}_\xi Y) = \eta(\nabla_\xi Y),$$

$$g(\bar{\nabla}_\xi Y, Z) = g(\nabla_\xi Y, Z) + \frac{a-1}{2} \{ g(Z, \nabla_Y \xi) - g(Y, \nabla_Z \xi) \}.$$

Así pues, dados  $X = \xi$ ,  $Y$  ortogonal a  $\xi$  y  $\{e_1, \dots, e_{2n}, \xi\}$  base local ortonormal, se obtiene

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_\xi Y &= \sum_{i=1}^{2n} g(\bar{\nabla}_\xi Y, e_i) e_i + \eta(\bar{\nabla}_\xi Y) \xi = \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \left( g(\nabla_\xi Y, e_i) e_i + \frac{a-1}{2} \{ g(e_i, \nabla_Y \xi) e_i - g(Y, \nabla_{e_i} \xi) e_i \} \right) + \eta(\nabla_\xi Y) \xi = \\
&= \sum_{i=1}^{2n} g(\nabla_\xi Y, e_i) e_i + \eta(\nabla_\xi Y) \xi + \frac{a-1}{2} \left( \sum_{i=1}^{2n} g(\nabla_Y \xi, e_i) e_i - \sum_{i=1}^{2n} g(Y, \nabla_{e_i} \xi) e_i \right) = \\
&= \nabla_\xi Y + \frac{a-1}{2} \nabla_Y \xi - \frac{a-1}{2} \sum_{i=1}^{2n} g(Y, \nabla_{e_i} \xi) e_i.
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Por último, si elegimos  $X = Y = \xi$  en (2.3.6) resulta

$$g(\bar{\nabla}_\xi \xi, Z) + (a-1)\eta(\bar{\nabla}_\xi \xi)\eta(Z) = ag(\nabla_\xi \xi, Z).$$

Si tomamos sucesivamente  $Z = \xi$  y  $Z$  ortogonal a  $\xi$  obtenemos

$$\begin{aligned}\eta(\bar{\nabla}_\xi \xi) &= 0, \\ g(\bar{\nabla}_\xi \xi, Z) &= ag(\nabla_\xi \xi, Z).\end{aligned}$$

Luego

$$\bar{\nabla}_\xi \xi = \sum_{i=1}^{2n} g(\bar{\nabla}_\xi \xi, e_i) e_i + \eta(\bar{\nabla}_\xi \xi) \xi = a \sum_{i=1}^{2n} g(\nabla_\xi \xi, e_i) e_i = a \nabla_\xi \xi. \quad (2.3.10)$$

Finalmente, si tomamos  $X$  e  $Y$  dos campos cualesquiera, los descomponemos de la forma  $X = \tilde{X} + \eta(X)\xi$  e  $Y = \tilde{Y} + \eta(Y)\xi$ , con  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$  ortogonales a  $\xi$ , y usamos las ecuaciones (2.3.7)-(2.3.10), resulta:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X Y &= \bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} + \eta(X) \bar{\nabla}_\xi \tilde{Y} + X(\eta(Y))\xi + \eta(Y) \bar{\nabla}_{\tilde{X}} \xi + \eta(X) \eta(Y) \bar{\nabla}_\xi \xi = \\ &= \nabla_X Y - \frac{a-1}{2a} \eta(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} + \nabla_{\tilde{Y}} \tilde{X}) \xi \\ &\quad + \frac{a-1}{2} \left( \nabla_{\eta(Y)\tilde{X} + \eta(X)\tilde{Y} + 2\eta(X)\eta(Y)\xi} \xi - \sum_{i=1}^{2n} g(\eta(X)\tilde{Y} + \eta(Y)\tilde{X}, \nabla_{e_i} \xi) e_i \right).\end{aligned}$$

Considerando que

$$\eta(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} + \nabla_{\tilde{Y}} \tilde{X}) = -g(\nabla_X \xi, Y) + \eta(X)g(\nabla_\xi \xi, Y) - g(\nabla_Y \xi, X) + \eta(Y)g(\nabla_\xi \xi, X)$$

y que

$$\eta(Y)\tilde{X} + \eta(X)\tilde{Y} + 2\eta(X)\eta(Y)\xi = \eta(X)Y + \eta(Y)X,$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + \frac{a-1}{2a} \{g(\nabla_X \xi, Y) - \eta(X)g(\nabla_\xi \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, X) - \eta(Y)g(\nabla_\xi \xi, X)\} \xi \\ &\quad + \frac{a-1}{2} \{ \nabla_{\eta(X)Y + \eta(Y)X} \xi - \sum_{i=1}^{2n} g(\eta(X)Y + \eta(Y)X - 2\eta(X)\eta(Y)\xi, \nabla_{e_i} \xi) e_i \}.\end{aligned}$$

Basta observar que  $g(\xi, \nabla_{e_i} \xi) = \frac{1}{2} e_i(g(\xi, \xi)) = 0$  y agrupar para obtener (2.3.4).

Si  $M$  tiene estructura de contacto métrica, se cumplen la Proposición 1.2.1 y el Lema 1.2.3 y unos meros cálculos dan

$$\begin{aligned}g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, X) - g(\eta(X)Y + \eta(Y)X, \nabla_\xi \xi) &= 2g(hX, \phi Y), \\ \nabla_{\eta(X)Y + \eta(Y)X} \xi &= -\eta(X)(\phi Y + \phi hY) - \eta(Y)(\phi X + \phi hX), \\ \sum_{i=1}^{2n} g(\eta(X)Y + \eta(Y)X, \nabla_{e_i} \xi) e_i &= \eta(X)(\phi Y + h\phi Y) + \eta(Y)(\phi X + h\phi X).\end{aligned}$$

Basta sustituir en (2.3.4) para obtener (2.3.5).  $\square$

Utilizaremos ahora (2.3.5) para demostrar la siguiente proposición.

**Proposición 2.3.2.** *Si  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$  es una variedad de contacto métrica con curvatura Riemanniana  $R$ , el tensor de curvatura de Riemann  $\bar{R}$  de  $(M, \bar{\phi}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{g})$  viene dado por*

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z \\
&+ (a-1)\{-g(X, \phi Z)\phi Y + g(Y, \phi Z)\phi X - 2g(X, \phi Y)\phi Z \\
&\quad + \eta(X)(\nabla_Y \phi)Z - \eta(Y)(\nabla_X \phi)Z + \eta(Z)((\nabla_Y \phi)X - (\nabla_X \phi)Y)\} \\
&+ \frac{a-1}{a}\{g((\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y, Z)\xi + g(\phi h Y, Z)\phi h X - g(\phi h X, Z)\phi h Y\} \\
&+ (a-1)^2\{\eta(Z)(\eta(Y)X - \eta(X)Y)\} \\
&+ \frac{(a-1)^2}{a}\{\eta(Y)g(hX, Z)\xi - \eta(X)g(hY, Z)\xi\}, \tag{2.3.11}
\end{aligned}$$

para todos  $X, Y, Z$  campos en  $M$ .

*Demostración.* Sean  $X, Y, Z$  campos cualesquiera en  $M$ . Si desarrollamos la expresión

$$\bar{R}(X, Y)Z = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z$$

usando la ecuación (2.3.5), tras largos cálculos obtenemos

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z \\
&+ (a-1)\{-\eta(X)\phi(\nabla_Y Z) - \eta(\nabla_Y Z)\phi X + \eta(Y)\phi(\nabla_X Z) + \eta(\nabla_X Z)\phi Y \\
&\quad - g(hY, \phi Z)\phi X + g(hX, \phi Z)\phi Y - 2g(X, \phi Y)\phi Z \\
&\quad + \eta(Z)(\nabla_Y \phi X - \nabla_X \phi Y + \phi(\nabla_X Y - \nabla_Y X)) \\
&\quad - X(\eta(Z))\phi Y + \eta(X)\nabla_Y \phi Z + Y(\eta(Z))\phi X - \eta(Y)\nabla_X \phi Z\} \\
&+ \frac{a-1}{a}\{g(hX, \phi \nabla_Y Z)\xi - g(hY, \phi \nabla_X Z)\xi \\
&\quad + X(g(hY, \phi Z))\xi - Y(g(hX, \phi Z))\xi \\
&\quad - g(h[X, Y], \phi Z)\xi - g(hY, \phi Z)\phi h X + g(hX, \phi Z)\phi h Y\} \\
&+ (a-1)^2\{\eta(Z)(\eta(Y)X - \eta(X)Y)\} \\
&+ \frac{(a-1)^2}{a}\{\eta(Y)g(hX, Z)\xi - \eta(X)g(hY, Z)\xi\}. \tag{2.3.12}
\end{aligned}$$

Si usamos ahora el Lema 1.2.3 y el hecho de que  $\nabla$  es la conexión de Levi-Civita

de  $g$ , el sumando de coeficiente  $(a - 1)$  de la expresión (2.3.12) se escribiría:

$$\begin{aligned}
& -\eta(X)\phi(\nabla_Y Z) - \eta(\nabla_Y Z)\phi X + \eta(Y)\phi(\nabla_X Z) + \eta(\nabla_X Z)\phi Y \\
& -g(hY, \phi Z)\phi X + g(hX, \phi Z)\phi Y - 2g(X, \phi Y)\phi Z \\
& + \eta(Z)(\nabla_Y \phi X - \nabla_X \phi Y + \phi(\nabla_X Y - \nabla_Y X)) \\
& - X(\eta(Z))\phi Y + \eta(X)\nabla_Y \phi Z + Y(\eta(Z))\phi X - \eta(Y)\nabla_X \phi Z \\
= & (-\eta(\nabla_Y Z) - g(hY, \phi Z) + Y(\eta(Z)))\phi X \\
& + (\eta(\nabla_X Z) + g(hX, \phi Z) - X(\eta(Z)))\phi Y - 2g(X, \phi Y)\phi Z \\
& + \eta(X)(\nabla_Y \phi)Z - \eta(Y)(\nabla_X \phi)Z + \eta(Z)((\nabla_Y \phi)X - (\nabla_X \phi)Y) \\
= & (-\eta(\nabla_Y Z) - g(hY, \phi Z) + \eta(\nabla_Y Z) - g(\phi Y, Z) - g(\phi hY, Z))\phi X \\
& + (\eta(\nabla_X Z) + g(hX, \phi Z) - \eta(\nabla_X Z) + g(\phi X, Z) + g(\phi hX, Z))\phi Y - 2g(X, \phi Y)\phi Z \\
& + \eta(X)(\nabla_Y \phi)Z - \eta(Y)(\nabla_X \phi)Z + \eta(Z)((\nabla_Y \phi)X - (\nabla_X \phi)Y) \\
= & -g(X, \phi Z)\phi Y + g(Y, \phi Z)\phi X - 2g(X, \phi Y)\phi Z \\
& + \eta(X)(\nabla_Y \phi)Z - \eta(Y)(\nabla_X \phi)Z + \eta(Z)((\nabla_Y \phi)X - (\nabla_X \phi)Y).
\end{aligned}$$

Y el término que multiplica al coeficiente  $(a - 1)/a$ :

$$\begin{aligned}
& g(hX, \phi \nabla_Y Z)\xi - g(hY, \phi \nabla_X Z)\xi + X(g(hY, \phi Z))\xi - Y(g(hX, \phi Z))\xi \\
& - g(h[X, Y], \phi Z)\xi - g(hY, \phi Z)\phi hX + g(hX, \phi Z)\phi hY \\
= & (-g(\phi hX, \nabla_Y Z) + g(\phi hY, \nabla_X Z) - g(\nabla_X \phi hY, Z) - g(\nabla_X Z, \phi hY) \\
& + g(\nabla_Y \phi hX, Z) + g(\nabla_Y Z, \phi hX) + g(\phi h(\nabla_X Y - \nabla_Y X), Z))\xi \\
& + g(hY, \phi Z)\phi hX + g(hX, \phi Z)\phi hY \\
= & (-g(\nabla_X \phi hY, Z) + g(\nabla_Y \phi hX, Z) + g(\phi h \nabla_X Y, Z) - g(\phi h \nabla_Y X, Z))\xi \\
& + g(hY, \phi Z)\phi hX + g(hX, \phi Z)\phi hY \\
= & g((\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y, Z)\xi + g(hY, \phi Z)\phi hX + g(hX, \phi Z)\phi hY.
\end{aligned}$$

Sustituyendo ambas expresiones en (2.3.12) se llega a (2.3.11), la ecuación que buscábamos.  $\square$

Dada una variedad de contacto métrica  $(M, \bar{\phi}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{g})$ , se definen los tensores  $\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_6$  de manera análoga a como se hizo con  $R_1, \dots, R_6$  en (0.0.1) y (0.0.3). Daremos ahora un par de lemas que serán útiles para demostrar el próximo teorema.

**Lema 2.3.3.** *Sea  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$  una variedad de contacto métrica con curvatura Riemanniana  $R$  y tensores  $R_1, \dots, R_6$  definidos como en (0.0.1) y (0.0.3). Entonces los*

tensores  $\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_6$  cumplen

$$\begin{aligned} R_1(X, Y)Z &= \frac{1}{a}\bar{R}_1(X, Y)Z - (a-1)(\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y), \\ R_2(X, Y)Z &= \frac{1}{a}\bar{R}_2(X, Y)Z, \\ R_3(X, Y)Z &= \frac{1}{a}\bar{R}_3(X, Y)Z + (a-1)(\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y), \\ R_4(X, Y)Z &= \bar{R}_4(X, Y)Z - (a-1)(\eta(Y)\eta(Z)hX - \eta(X)\eta(Z)hY), \\ R_5(X, Y)Z &= a\bar{R}_5(X, Y)Z, \\ R_6(X, Y)Z &= \bar{R}_6(X, Y)Z + (a-1)(\eta(Y)\eta(Z)hX - \eta(X)\eta(Z)hY), \end{aligned}$$

para cualesquiera  $X, Y$  y  $Z$  campos en  $M$ .

*Demostración.* Sólo hay que sustituir en  $\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_6$  las igualdades (2.3.1) y (2.3.2).  $\square$

**Lema 2.3.4.** *Sea  $M^{2n+1}$  un  $(\kappa, \mu)$ -espacio generalizado con estructura de contacto métrica. Entonces*

$$(\nabla_X \phi)Y = g(X + hX, Y)\xi - \eta(Y)(X + hX), \quad (2.3.13)$$

$$\begin{aligned} (\nabla_X \phi h)Y - (\nabla_Y \phi h)X &= \phi((\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X) = \\ &= (1 - \kappa)\{\eta(Y)X - \eta(X)Y\} + (1 - \mu)\{\eta(Y)hX - \eta(X)hY\}, \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

para todos  $X, Y$  campos en  $M$ .

*Demostración.* Similar a la dada para  $(\kappa, \mu)$ -espacios con estructura de contacto métrica en el Lema 3.1 de [12]. Sólo hay que tener en cuenta que estamos suponiendo que la función  $\kappa$  cumple  $\kappa = 1$  o  $\kappa < 1$  en todo punto de  $M$ , como ya comentamos en la Nota 2.2.4.  $\square$

**Teorema 2.3.5.** *Sea  $M(f_1, \dots, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica  $(\phi, \xi, \eta, g)$ . Entonces el tensor de curvatura de Riemann  $\bar{R}$  de la variedad obtenida mediante una transformación  $D_a$ -homotética puede ser escrito como*

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= \left( \frac{f_1}{a}\bar{R}_1 + \frac{f_2 - a + 1}{a}\bar{R}_2 + \frac{1}{a^2}((a-1)f_1 + f_3 + 1 - a^2)\bar{R}_3 \right. \\ &\quad \left. + f_4\bar{R}_4 + af_5\bar{R}_5 + \frac{1}{a}((a-1)f_4 + f_6 - 2(a-1))\bar{R}_6 \right) (X, Y)Z \\ &\quad + (a-1)\{\bar{g}(\bar{\phi}hY, Z)\bar{\phi}hX - \bar{g}(\bar{\phi}hX, Z)\bar{\phi}hY\}, \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

para todos  $X, Y, Z$  campos en  $M$ .

*Demostración.* Si aplicamos el Lema 2.3.4 a la expresión (2.3.11) y usamos la definición de los tensores  $R_1, \dots, R_6$  obtendremos

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z \\
&+ (a-1)\{-R_2(X, Y)Z - R_3(X, Y)Z - R_6(X, Y)Z \\
&\quad + (\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y) + (\eta(Y)\eta(Z)hX - \eta(X)\eta(Z)hY)\} \\
&+ \frac{a-1}{a}\{(f_1 - f_3 - 1)R_3(X, Y)Z + (f_4 - f_6 - 1)R_6(X, Y)Z \\
&\quad + (f_1 - f_3 - 1)(\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y) \\
&\quad + (f_4 - f_6 - 1)(\eta(Y)\eta(Z)hX - \eta(X)\eta(Z)hY) \\
&\quad + g(\phi hY, Z)\phi hX - g(\phi hX, Z)\phi hY\} \\
&+ (a-1)^2\{\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\} \\
&+ \frac{(a-1)^2}{a}\{R_6(X, Y)Z + \eta(Y)\eta(Z)hX - \eta(X)\eta(Z)hY\}.
\end{aligned}$$

Si ahora agrupamos términos resulta que:

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)Z &= f_1 R_1(X, Y)Z + (f_2 - a + 1)R_2(X, Y)Z \\
&+ \frac{1}{a}((a-1)f_1 + f_3 + 1 - a^2)R_3(X, Y)Z + f_4 R_4(X, Y)Z + f_5 R_5(X, Y)Z \\
&+ \frac{1}{a}((a-1)f_4 + f_6 - 2(a-1))R_6(X, Y)Z \\
&+ \frac{a-1}{a}(f_1 - f_3 + a^2 - 1)\{\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\} \\
&+ \frac{a-1}{a}(f_4 - f_6 + 2(a-1))\{\eta(Y)\eta(Z)hX - \eta(X)\eta(Z)hY\} \\
&+ \frac{a-1}{a}\{g(\phi hY, Z)\phi hX - g(\phi hX, Z)\phi hY\}. \tag{2.3.16}
\end{aligned}$$

Si usamos el Lema 2.3.3 en (2.3.16) y ordenamos, entonces

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)Z &= \frac{f_1}{a}\bar{R}_1(X, Y)Z + \frac{f_2 - a + 1}{a}\bar{R}_2(X, Y)Z \\
&+ \frac{1}{a^2}((a-1)f_1 + f_3 + 1 - a^2)\bar{R}_3(X, Y)Z + f_4\bar{R}_4(X, Y)Z \\
&+ af_5\bar{R}_5(X, Y)Z + \frac{1}{a}((a-1)f_4 + f_6 - 2(a-1))\bar{R}_6(X, Y)Z \\
&+ \frac{a-1}{a}\{g(\phi hY, Z)\phi hX - g(\phi hX, Z)\phi hY\}.
\end{aligned}$$

Para obtener la ecuación (2.3.15) bastaría observar que

$$g(\phi hY, Z)\phi hX - g(\phi hX, Z)\phi hY = a(\bar{g}(\bar{\phi}hY, Z)\bar{\phi}hX - \bar{g}(\bar{\phi}hX, Z)\bar{\phi}hY)$$

en virtud de (2.3.1) y (2.3.2). □



**Nota 2.3.6.** Observemos en primer lugar que, al realizar una transformación  $D_a$ -homotética con  $a \neq 1$  a un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. el resultado deja de ser un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. No obstante, el teorema anterior sugiere que sería útil redefinir el concepto de  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_6)$  con el tensor

$$R_5(X, Y)Z = g(hY, Z)hX - g(hX, Z)hY + g(\phi hX, Z)\phi hY - g(\phi hY, Z)\phi hX$$

dividido en dos de la forma  $R_5 = R_{5,1} - R_{5,2}$  para

$$\begin{aligned} R_{5,1}(X, Y)Z &= g(hY, Z)hX - g(hX, Z)hY, \\ R_{5,2}(X, Y)Z &= g(\phi hY, Z)\phi hX - g(\phi hX, Z)\phi hY, \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

con funciones  $f_{5,1}$  y  $f_{5,2}$ .

Es obvio que los espacios así definidos, que denominaremos  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$  englobarán a los  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s  $M(f_1, \dots, f_6)$  porque

$$\begin{aligned} R &= f_1 R_1 + f_2 R_2 + f_3 R_3 + f_4 R_4 + f_5 R_5 + f_6 R_6 \\ &= f_1 R_1 + f_2 R_2 + f_3 R_3 + f_4 R_4 + f_5 R_{5,1} - f_5 R_{5,2} + f_6 R_6, \end{aligned}$$

luego bastaría tomar  $f_{5,1} = f_5$  y  $f_{5,2} = -f_5$ . Así, el Teorema 2.3.5 indica que si realizamos una transformación  $D_a$ -homotética sobre un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f., lo que obtenemos es un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido, cuyas funciones vendrán dadas por:

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= \frac{f_1}{a}, & \bar{f}_2 &= \frac{f_2 - a + 1}{a}, \\ \bar{f}_3 &= \frac{1}{a^2}((a-1)f_1 + f_3 + 1 - a^2), & \bar{f}_4 &= f_4 \\ \bar{f}_{5,1} &= af_5, & \bar{f}_{5,2} &= -af_5 + a - 1, \\ \bar{f}_6 &= \frac{1}{a}((a-1)f_4 + f_6 - 2(a-1)). \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

De hecho, podemos generalizar el Teorema 2.3.5, partiendo ya de un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido, obteniendo entonces el siguiente resultado:

**Teorema 2.3.7.** Sea  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido y estructura de contacto métrica  $(\phi, \xi, \eta, g)$ . Entonces el tensor de curvatura de Riemann  $\bar{R}$  de la variedad obtenida mediante una transformación  $D_a$ -homotética puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \frac{f_1}{a}\bar{R}_1 + \frac{f_2 - a + 1}{a}\bar{R}_2 + \frac{1}{a^2}((a-1)f_1 + f_3 + 1 - a^2)\bar{R}_3 + f_4\bar{R}_4 \\ &+ af_{5,1}\bar{R}_{5,1} + (af_{5,2} + a - 1)\bar{R}_{5,2} + \frac{1}{a}((a-1)f_4 + f_6 - 2(a-1))\bar{R}_6. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

*Demostración.* La primera parte de la prueba es igual que la de (2.3.11). La primera ecuación que cambiaría sería (2.3.16), que quedaría:

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)Z &= f_1 R_1(X, Y)Z + (f_2 - a + 1)R_2(X, Y)Z \\
&+ \frac{1}{a}((a - 1)f_1 + f_3 + 1 - a^2)R_3(X, Y)Z + f_4 R_4(X, Y)Z \\
&+ f_{5,1} R_{5,1}(X, Y)Z + \left( f_{5,2} + \frac{a - 1}{a} \right) R_{5,2}(X, Y)Z \\
&+ \frac{1}{a}((a - 1)f_4 + f_6 - 2(a - 1))R_6(X, Y)Z \\
&+ \frac{a - 1}{a}(f_1 - f_3 + a^2 - 1)\{\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\} \\
&+ \frac{a - 1}{a}(f_4 - f_6 + 2(a - 1))\{\eta(Y)\eta(Z)hX - \eta(X)\eta(Z)hY\}.
\end{aligned}$$

Para conseguir (2.3.19) basta usar el Lema 2.3.3 y el hecho de que

$$R_{5,1}(X, Y)Z = a\bar{R}_{5,1}(X, Y)Z,$$

$$R_{5,2}(X, Y)Z = a\bar{R}_{5,2}(X, Y)Z,$$

para todos  $X, Y, Z$  en  $M$ . □

**Nota 2.3.8.** *Observemos que, tal y como indica el Teorema 2.3.7, al realizar una transformación  $D_a$ -homotética sobre un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido, obtenemos nuevamente un espacio de este tipo, cuyas funciones vendrán dadas por (2.3.18) salvo*

$$\bar{f}_{5,1} = af_{5,1}, \quad \bar{f}_{5,2} = af_{5,2} + a - 1.$$

En dimensión 3, al transformar  $D_a$ -homotéticamente los  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s, volvemos a obtener  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s, es decir, espacios sin el tensor  $R_5$  dividido. Esto ocurre gracias al Lema 2.2.19 y al siguiente resultado:

**Lema 2.3.9.** *Sea  $M^3$  un  $(\kappa, \mu)$ -espacio generalizado con estructura de contacto métrica. Entonces:*

$$R_{5,2} = (\kappa - 1)(R_1 + R_3), \tag{2.3.20}$$

*Demostración.* Si  $\kappa = 1$ , se cumple que  $h = 0$  por el Teorema 2.2.2, luego  $R_{5,2} = 0$  por definición y la ecuación (2.3.20) es trivial.

Si  $\kappa < 1$ , sabemos por el Lema 2.2.15 que existe una  $\phi$ -base  $\{E, \phi E, \xi\}$  satisfaciendo  $hE = \lambda E$ , donde  $\lambda = \sqrt{1 - \kappa}$ . Si calculamos  $R_2(X, Y)Z$  y  $R_{5,2}(X, Y)Z$  para todos

$X, Y, Z \in \{E, \phi E, \xi\}$ , es fácil comprobar que los únicos valores no nulos son:

$$\begin{aligned} R_2(E, \phi E)e &= -3\phi E, \\ R_2(E, \phi E)\phi e &= 3E, \\ R_{5,2}(E, \phi E)e &= -(\kappa - 1)\phi E, \\ R_{5,2}(E, \phi E)\phi e &= (\kappa - 1)E. \end{aligned}$$

Por tanto,  $R_{5,2}(X, Y)Z = \frac{\kappa - 1}{3}R_2(X, Y)Z$ , para cualesquiera campos  $X, Y, Z$ . Bastaría sustituir la fórmula (2.2.33),  $R_2 = 3(R_1 + R_3)$ , en la ecuación anterior para obtener (2.3.20).  $\square$

De los Lemas 2.2.19 y 2.3.9 podemos obtener una generalización del Corolario 2.2.21, que da la forma canónica del tensor de curvatura de Riemann de un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. de dimensión 3 y estructura de contacto:

**Proposición 2.3.10.** *Sea  $M^3(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido y estructura de contacto métrica. Entonces su tensor de curvatura puede escribirse como*

$$R = f_1^*R_1 + f_3^*R_3 + f_4^*R_4,$$

donde

$$\begin{aligned} f_1^* &= f_1 + 3f_2 + (f_{5,1} + f_{5,2})(f_1 - f_3 - 1), \\ f_3^* &= f_3 + 3f_2 + (f_{5,1} + f_{5,2})(f_1 - f_3 - 1), \\ f_4^* &= f_4 - f_6. \end{aligned}$$

*Demostración.* Si  $\kappa = f_1 - f_3 = 1$ , entonces la variedad es Sasakiana, luego en particular es un  $g.S.s.f.$   $M(f_1, f_2, f_3)$  con  $f_2 = f_3 = f_1 - 1$ . Obtendríamos el resultado que buscamos por el Corolario 2.2.21 (también puede usarse [3]).

Si  $\kappa = f_1 - f_3 < 1$ , tenemos por el Lema 2.2.19 y la expresión  $R_5 = R_{5,1} - R_{5,2}$  que

$$\begin{aligned} R &= f_1R_1 + f_2R_2 + f_3R_3 + f_4R_4 + f_{5,1}R_{5,1} + f_{5,2}R_{5,2} + f_6R_6 \\ &= f_1R_1 + 3f_2(R_1 + R_3) + f_3R_3 + f_4R_4 + f_{5,1}R_{5,2} + f_{5,2}R_{5,2} - f_6R_4 \\ &= (f_1 + 3f_2)R_1 + (f_3 + 3f_2)R_3 + (f_4 - f_6)R_4 + (f_{5,1} + f_{5,2})R_{5,2}. \end{aligned}$$

Aplicando ahora el Lema 2.3.9, obtenemos que

$$\begin{aligned} R &= (f_1 + 3f_2)R_1 + (f_3 + 3f_2)R_3 + (f_4 - f_6)R_4 + (f_{5,1} + f_{5,2})R_{5,2} \\ &= (f_1 + 3f_2)R_1 + (f_3 + 3f_2)R_3 + (f_4 - f_6)R_4 + (f_{5,1} + f_{5,2})(f_1 - f_3 - 1)(R_1 + R_3), \\ &= (f_1 + 3f_2 + (f_{5,1} + f_{5,2})(f_1 - f_3 - 1))R_1 \\ &\quad + (f_3 + 3f_2 + (f_{5,1} + f_{5,2})(f_1 - f_3 - 1))R_3 + (f_4 - f_6)R_4, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.  $\square$

De la Proposición 2.3.10 y el Teorema 2.3.5 se consigue el siguiente resultado, que prueba que en dimensión 3 un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. sigue siéndolo al ser deformado por una transformación  $D_a$ -homotética. Para ello se utilizará la *escritura canónica* del tensor de curvatura descrita en la Nota 2.2.22.

**Teorema 2.3.11.** *Sea  $M^3(f_1, 0, f_3, f_4, 0, 0)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica  $(\phi, \xi, \eta, g)$ . Entonces el tensor de curvatura de Riemann  $\bar{R}$  de la variedad obtenida mediante una transformación  $D_a$ -homotética puede ser escrito como*

$$\bar{R} = \bar{f}_1 \bar{R}_1 + \bar{f}_3 \bar{R}_3 + \bar{f}_4 \bar{R}_4,$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= \frac{1}{a^2}((2a-1)f_1 - (a-1)f_3 - 3a^2 + 2a + 1), \\ \bar{f}_3 &= \frac{1}{a^2}(2(a-1)f_1 + (2-a)f_3 - 4a^2 + 2a + 2), \\ \bar{f}_4 &= \frac{1}{a}(f_4 + 2(a-1)). \end{aligned} \tag{2.3.21}$$

Por tanto,  $(M, \bar{\phi}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{g})$  sería un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.  $M^3(\bar{f}_1, 0, \bar{f}_3, \bar{f}_4, 0, 0)$ .

*Demostración.* Dado  $M^3(f_1, 0, f_3, f_4, 0, 0)$ , aplicamos el Teorema 2.3.5 con  $f_2 = f_5 = f_6 = 0$  y obtenemos que la variedad transformada sería un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido  $M^3(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{5,1}, \hat{f}_{5,2}, \hat{f}_6)$ , cuyas funciones vendrán dadas por:

$$\begin{aligned} \hat{f}_1 &= \frac{f_1}{a}, & \hat{f}_2 &= \frac{-a+1}{a}, \\ \hat{f}_3 &= \frac{1}{a^2}((a-1)f_1 + f_3 + 1 - a^2), & \hat{f}_4 &= f_4, \\ \hat{f}_{5,1} &= 0, & \hat{f}_{5,2} &= a-1, \\ \hat{f}_6 &= \frac{1}{a}((a-1)f_4 - 2(a-1)). \end{aligned}$$

Aplicando ahora la Proposición 2.3.10, obtenemos que la variedad transformada tiene tensor de curvatura:

$$\bar{R} = \bar{f}_1 \bar{R}_1 + \bar{f}_3 \bar{R}_3 + \bar{f}_4 \bar{R}_4,$$

donde

$$\begin{aligned}
\bar{f}_1 &= \widehat{f}_1 + 3\widehat{f}_2 + (\widehat{f}_{5,1} + \widehat{f}_{5,2})(\widehat{f}_1 - \widehat{f}_3 - 1) \\
&= \frac{f_1}{a} + 3\frac{-a+1}{a} + (a-1) \left( \frac{f_1}{a} - \frac{1}{a^2}((a-1)f_1 + f_3 + 1 - a^2) - 1 \right), \\
\bar{f}_3 &= \widehat{f}_3 + 3\widehat{f}_2 + (\widehat{f}_{5,1} + \widehat{f}_{5,2})(\widehat{f}_1 - \widehat{f}_3 - 1) \\
&= \frac{1}{a^2}((a-1)f_1 + f_3 + 1 - a^2) + 3\frac{-a+1}{a} \\
&\quad + (a-1) \left( \frac{f_1}{a} - \frac{1}{a^2}((a-1)f_1 + f_3 + 1 - a^2) - 1 \right), \\
\bar{f}_4 &= \widehat{f}_4 - \widehat{f}_6 = f_4 - \frac{1}{a}((a-1)f_4 - 2(a-1)).
\end{aligned}$$

Bastarían unos cálculos para conseguir (2.3.21). □

**Ejemplo 2.3.12.** Si tomamos el Ejemplo 2.2.43, que ya comprobamos que es un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.  $M^3(f_1, 0, f_3, f_4, 0, 0)$  con estructura de contacto métrica para funciones no constantes

$$\begin{aligned}
f_1 &= -3 + \frac{2}{x_3^2} + \frac{1}{x_3^4} + \frac{2}{x_3^6}, \\
f_3 &= -4 + \frac{2}{x_3^2} + \frac{2}{x_3^4} + \frac{2}{x_3^6}, \\
f_4 &= 2 \left( 1 - \frac{1}{x_3^2} \right),
\end{aligned}$$

al hacerle una transformación  $D_a$ -homotética obtendríamos nuevamente un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.  $M^3(\bar{f}_1, 0, \bar{f}_3, \bar{f}_4, 0, 0)$  con

$$\begin{aligned}
\bar{f}_1 &= \frac{1}{a^2} \left( -3a^2 + \frac{2a}{x_3^2} + \frac{1}{x_3^4} + \frac{2a}{x_3^6} \right), \\
\bar{f}_3 &= \frac{2}{a^2} \left( -2a^2 + \frac{a}{x_3^2} + \frac{1}{x_3^4} + \frac{a}{x_3^6} \right), \\
\bar{f}_4 &= \frac{2}{a} \left( a - \frac{1}{x_3^2} \right),
\end{aligned}$$

para cada  $a > 0$  constante arbitraria.

Por tanto, hemos conseguido infinitos ejemplos de  $M^3(\bar{f}_1, 0, \bar{f}_3, \bar{f}_4, 0, 0)$  de contacto métrico, es decir, de  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $\bar{f}_1, \bar{f}_3, \bar{f}_4$  funciones no constantes.

Cabe ahora plantearse cómo cambiarían los resultados ya probados en las secciones 2.1 y 2.2 al sustituir el concepto de  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. por el de  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido. Reescribiremos a continuación algunos de ellos. Obviamente, en las correspondientes demostraciones sólo señalaremos aquellos pasos en los que se produce algún cambio significativo.

Los tres primeros resultados no varían:

**Teorema 2.3.13.** *Sea  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido. Si  $M$  es  $K$ -contacto, entonces  $f_3 = f_1 - 1$ . Además,  $M$  es Sasakiana.*

*Demostración.* Apenas cambia porque si  $M$  es  $K$ -contacto,  $h = 0$  y tendríamos que  $R_5 = R_{5,1} = R_{5,2} = 0$ .  $\square$

**Teorema 2.3.14.** *Sea  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido. Si  $M$  es Sasakiana, entonces  $f_2 = f_3 = f_1 - 1$ .*

*Demostración.* Si  $M$  es Sasakiana,  $h = 0$ , luego  $R_5 = R_{5,1} = R_{5,2} = 0$ . El resto permanece igual.  $\square$

**Teorema 2.3.15.**  *$M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido y estructura de contacto métrica. Si en  $M$  se cumple que  $f_3 = f_1 - 1$ , entonces  $M$  es Sasakiana.*

*Demostración.* Apenas varía porque, dada una base local ortonormal  $\{e_i, \dots, e_{2n}, \xi\}$ , entonces

$$R_5(e_i, \xi, \xi, e_i) = R_{5,1}(e_i, \xi, \xi, e_i) = R_{5,2}(e_i, \xi, \xi, e_i) = 0,$$

y el resto seguiría igual.  $\square$

La curvatura  $\phi$ -seccional  $K(X, \phi X)$  sí que varía, aunque la  $\xi$ -seccional  $K(X, \xi)$  y  $K(\phi X, \xi)$  permanecen iguales:

**Proposición 2.3.16.** *Sea  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido. Entonces la curvatura  $\phi$ -seccional de la  $\phi$ -sección generada por un campo  $X$  unitario y ortogonal a  $\xi$  viene dada por*

$$\begin{aligned} K(X, \phi X) &= f_1 + 3f_2 + f_4g((h - \phi h\phi)X, X) \\ &\quad + (f_{5,1} + f_{5,2})(g(h\phi X, \phi X)g(hX, X) - g(hX, \phi X)g(h\phi X, X)). \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

*Si  $M$  tiene además estructura de contacto métrica, entonces la curvatura  $\phi$ -seccional de  $\{X, \phi X\}$  es*

$$K(X, \phi X) = f_1 + 3f_2 - (f_{5,1} + f_{5,2})(g(hX, X)^2 + g(hX, \phi X)^2). \quad (2.3.23)$$

*Demostración.* En lugar de

$$\begin{aligned} K(X, \phi X) = & \dots \\ & + f_5 \{g(h\phi X, \phi X)g(hX, X) - g(hX, \phi X)g(h\phi X, X) \\ & + g(\phi hX, \phi X)g(\phi h\phi X, \phi X) - g(\phi h\phi X, \phi X)g(\phi hX, X)\} + \dots \end{aligned}$$

tendríamos que poner

$$\begin{aligned} K(X, \phi X) = & \dots \\ & + f_{5,1} \{g(h\phi X, \phi X)g(hX, X) - g(hX, \phi X)g(h\phi X, X)\} \\ & + f_{5,2} \{-g(\phi hX, \phi X)g(\phi h\phi X, X) + g(\phi h\phi X, \phi X)g(\phi hX, X)\} + \dots \end{aligned}$$

y obtendríamos (2.3.22).

Si  $M$  es una variedad de contacto métrica, entonces  $h\phi = -\phi h$  en virtud del Lema 1.2.3 y se sigue que

$$(h - \phi h\phi)X = (h + h\phi^2)X = h(X + \phi^2 X) = h(X - X) = 0,$$

$$g(h\phi X, \phi X)g(hX, X) - g(hX, \phi X)g(h\phi X, X) = -g(hX, X)^2 - g(hX, \phi X)^2,$$

de donde se concluye (2.3.23).  $\square$

**Proposición 2.3.17.** *Sea  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido. Entonces la curvatura  $\xi$ -seccional de la  $\xi$ -sección generada por un campo  $X$  unitario y ortogonal a  $\xi$  viene dada por*

$$K(X, \xi) = f_1 - f_3 + (f_4 - f_6)g(hX, X).$$

*Demostración.* Dado  $X$  un campo unitario y ortogonal a  $\xi$ , los cálculos de  $K(X, \xi)$  no varían respecto a los de la Proposición 2.1.8 porque

$$R_5(X, \xi, \xi, X) = R_{5,1}(X, \xi, \xi, X) = R_{5,2}(X, \xi, \xi, X) = 0$$

y el resto permanecería igual.  $\square$

**Corolario 2.3.18.** *Sea  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido. Si  $X$  es un campo unitario y ortogonal a  $\xi$ , entonces*

$$K(\phi X, \xi) = f_1 - f_3 + (f_4 - f_6)g(h\phi X, \phi X). \quad (2.3.24)$$

Por tanto, si  $M$  es una variedad de contacto métrica,

$$K(\phi X, \xi) = f_1 - f_3 - (f_4 - f_6)g(hX, X). \quad (2.3.25)$$

*Demostración.* Dado un campo  $X$  unitario y ortogonal a  $\xi$ ,  $\phi X$  también lo es, luego (2.3.24) se deduce directamente de la proposición anterior.

Si  $M$  tiene estructura de contacto métrica, entonces  $h\phi = -\phi h$  por el Lema 1.2.3 y se cumple que  $g(h\phi X, \phi X) = -g(\phi h X, \phi X)$  para todo campo  $X$  ortogonal a  $\xi$ . Sustituyendo en (2.3.24), obtenemos (2.3.25).  $\square$

Análogamente puede demostrarse que el Teorema 2.1.15 no varía si tomamos el tensor  $R_5$  dividido, y que los Teoremas 2.1.11 y 2.1.13 quedarían:

**Teorema 2.3.19.** *Si  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$  es un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido, entonces*

$$R(X, Y, Z, \phi W) + R(X, Y, \phi Z, W) = -(f_1 - f_2)P(X, Y, Z, W) \\ - f_4\{P(hX, Y, Z, W) + P(X, hY, Z, W)\} - (f_{5,1} - f_{5,2})P(hX, hY, Z, W).$$

para cualesquiera campos  $X, Y, Z, W$  ortogonales a  $\xi$ .

**Teorema 2.3.20.** *Si  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$  es un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido, entonces*

$$R_i(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) = R_i(X, Y, Z, W),$$

para cualesquiera campos  $X$  e  $Y$  ortogonales a  $\xi$  y  $Z, W$  arbitrarios, donde  $i = 1, 2, 3, 6$ . Por tanto:

$$R(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) - f_4 R_4(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) \\ - f_{5,1} R_{5,1}(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) - f_{5,2} R_{5,2}(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) = \\ = R(X, Y, Z, W) - f_4 R_4(X, Y, Z, W) - f_{5,1} R_{5,1}(X, Y, Z, W) - f_{5,2} R_{5,2}(X, Y, Z, W).$$

Si  $M(f_1, \dots, f_6)$  tiene estructura de contacto métrica, se cumple también que

$$R_4(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) = -R_4(X, Y, Z, W), \\ R_{5,1}(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) = R_{5,1}(X, Y, Z, W), \\ R_{5,2}(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) = R_{5,2}(X, Y, Z, W),$$

luego:

$$R(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) = R(X, Y, Z, W) - 2f_4 R_4(X, Y, Z, W).$$

Ya hemos reescrito todos los resultados de la Sección 2.1. Veamos ahora algunos resultados destacados de la Sección 2.2.

El Teorema 2.2.1 sigue siendo cierto para  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s con  $R_5$  dividido y estructura de contacto métrica.



**Teorema 2.3.21.** *Si  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$  es un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido y estructura de contacto métrica, entonces es un  $(\kappa, \mu)$ -espacio generalizado, con  $\kappa = f_1 - f_3$  y  $\mu = f_4 - f_6$ .*

La demostración apenas varía respecto a la del Teorema 2.2.1, y por tanto se omite.

Usando la nueva notación que hemos introducido, podemos escribir de la siguiente forma un resultado que Boeckx demostró en [15] y que está basado en [12]:

**Teorema 2.3.22.** *Sea  $M$  un  $(\kappa, \mu)$ -espacio con estructura de contacto métrica no-Sasakiana, i.e., con  $\kappa < 1$ . Entonces su tensor de curvatura  $R$  viene dado por:*

$$R = \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) R_1 - \frac{\mu}{2} R_2 + \left(1 - \frac{\mu}{2} - \kappa\right) R_3 \\ + R_4 + \frac{1 - \frac{\mu}{2}}{1 - \kappa} R_{5,1} + \frac{\kappa - \frac{\mu}{2}}{1 - \kappa} R_{5,2} + (1 - \mu) R_6.$$

**Nota 2.3.23.** *Es de señalar que el Teorema anterior significa que todo  $(\kappa, \mu)$ -espacio con estructura de contacto métrica no-Sasakiana es un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido*

$$M\left(1 - \frac{\mu}{2}, -\frac{\mu}{2}, 1 - \frac{\mu}{2} - \kappa, 1, \frac{1 - \mu/2}{1 - \kappa}, \frac{\kappa - \mu/2}{1 - \kappa}, 1 - \mu\right).$$

*Esto no entra en conflicto con el Teorema 2.2.12 porque, si  $\kappa = -f_6$  y  $\mu = 1 - f_6$ , entonces*

$$\frac{1 - \frac{\mu}{2}}{1 - \kappa} R_{5,1} + \frac{\kappa - \frac{\mu}{2}}{1 - \kappa} R_{5,2} = \frac{1 - \frac{1-f_6}{2}}{1 + f_6} R_{5,1} + \frac{-f_6 - \frac{1-f_6}{2}}{1 + f_6} R_{5,2} = \frac{1}{2}(R_{5,1} - R_{5,2}) = \frac{1}{2}R_5,$$

*luego la variedad sería un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con el tensor  $R_5$  sin dividir.*

Finalmente estudiaremos cómo afectaría la división del tensor  $R_5$  al Teorema 2.2.12.

**Teorema 2.3.24.** *Sea  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido y estructura de contacto métrica. Si  $M$  es no-Sasakiano y de dimensión mayor o igual que 5, entonces se verifican las siguientes expresiones:*

$$f_1 = \frac{f_6 + 1}{2}, \quad f_2 = \frac{f_6 - 1}{2}, \quad f_4 = 1, \\ f_{5,1} = \frac{f_6 + 1}{2f_3 - f_6 + 1}, \quad f_{5,2} = \frac{2(-f_3 + f_6)}{2f_3 - f_6 + 1}, \\ f_3, f_6 \text{ constantes}, \quad 2f_3 - f_6 > -1, \\ \kappa = \frac{-2f_3 + f_6 + 1}{2}, \quad \mu = 1 - f_6. \tag{2.3.26}$$

Es decir,  $M$  es un  $\left(\frac{-2f_3 + f_6 + 1}{2}, 1 - f_6\right)$ -espacio con  $2f_3 - f_6 > -1$ .

Recíprocamente, si  $M$  es un  $\left(\frac{-2f_3 + f_6 + 1}{2}, 1 - f_6\right)$ -espacio con estructura de contacto métrica, dimensión mayor o igual que 5 y cumple que  $2f_3 - f_6 > -1$ , entonces es un  $g(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$ , donde las funciones  $f_1, \dots, f_6$  satisfacen las ecuaciones (2.3.26).

*Demostración.* Si reproducimos la demostración original con el tensor  $R_5$  dividido veremos que cambian todas las ecuaciones menos la tercera. El sistema tiene una incógnita adicional pero el mismo número de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} f_1 - f_2 - f_3 - f_4 + f_6 - f_{5,2}(1 - f_1 + f_3) &= 0 \\ f_1 + f_2 - f_3 - f_{5,2}(1 - f_1 + f_3) &= 0 \\ 2f_2 + f_4 - f_6 &= 0 \\ 2f_1 + 3f_2 - f_3 + f_4 - f_6 - (f_{5,1} + f_{5,2})(1 - f_1 + f_3) &= 0 \\ f_{5,1}(1 - f_1 + f_3) + 2(f_4 - 1)\sqrt{1 - f_1 + f_3} + f_1 + f_4 - f_6 - 2 &= 0 \\ f_{5,1}(1 - f_1 + f_3) + 2(1 - f_4)\sqrt{1 - f_1 + f_3} + f_1 + f_4 - f_6 - 2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Es compatible indeterminado y su solución deja sin determinar dos de las funciones en lugar de una como en el Teorema 2.2.12 debido a la incógnita extra que aparece en él:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{f_6 + 1}{2}, & f_2 &= \frac{f_6 - 1}{2}, & f_4 &= 1, \\ f_{5,1} &= \frac{f_6 + 1}{2f_3 - f_6 + 1}, & f_{5,2} &= \frac{2(-f_3 + f_6)}{2f_3 - f_6 + 1}, & f_3, f_6 &\text{arbitrarias.} \end{aligned}$$

El resto del resultado se obtiene del hecho de que  $\kappa = f_1 - f_3 = \frac{-2f_3 + f_6 + 1}{2} < 1$  y  $\mu = 1 - f_6$  son constantes, luego  $f_3$  y  $f_6$  también deben serlo.

Recíprocamente, si  $M$  es un  $\left(\frac{-2f_3 + f_6 + 1}{2}, 1 - f_6\right)$ -espacio con estructura de contacto métrica, dimensión mayor o igual que 5 y cumple que  $2f_3 - f_6 > -1$ , entonces  $M$  es una variedad no-Sasakiana y  $f_3, f_6$  deben ser funciones constantes (Teoremas 2.2.2 y 2.2.7). Basta aplicar ahora el Teorema 2.3.22 con  $\kappa = \frac{-2f_3 + f_6 + 1}{2}$  y  $\mu = 1 - f_6$  para obtener que  $M$  es un  $g(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido:

$$M\left(\frac{f_6 + 1}{2}, \frac{f_6 - 1}{2}, f_3, 1, \frac{f_6 + 1}{2f_3 - f_6 + 1}, \frac{2(-f_3 + f_6)}{2f_3 - f_6 + 1}, f_6\right).$$

Luego  $M$  sería un  $g(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$ , donde las funciones  $f_1, \dots, f_6$  cumplirían las ecuaciones (2.3.26).  $\square$

**Nota 2.3.25.** Es fácil comprobar que si  $f_{5,1} = -f_{5,2} = f_5$ , los últimos resultados coinciden con los de los  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s. En efecto, la Proposición 2.3.16 sería la misma que la 2.1.7 porque  $f_{5,1} + f_{5,2} = 0$  y del Teorema 2.3.19 obtendríamos la misma fórmula que de 2.1.11 porque  $f_{5,1} - f_{5,2} = 2f_5$ . Análogamente, los Teoremas 2.1.13 y 2.3.20 coincidirían porque

$$-f_{5,1}R_{5,1} - f_{5,2}R_{5,2} = -f_5R_{5,1} + f_5R_{5,2} = -f_5(R_{5,1} - R_{5,2}) = -f_5R_5.$$

Finalmente, si suponemos en el Teorema 2.3.24 que  $f_{5,1} = -f_{5,2} = f_5$ , eso significa que  $f_{5,1} = \frac{f_6 + 1}{2f_3 - f_6 + 1} = -f_{5,2} = \frac{2(-f_3 + f_6)}{2f_3 - f_6 + 1}$ , luego  $f_3 = \frac{3f_6 + 1}{2}$ , de donde deducimos que  $\kappa = -f_6$  y que  $f_6 > -1$ . Por lo que se cumpliría el Teorema 2.2.12.

Ya vimos en el Ejemplo 2.3.12 modelos de  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s con  $R_5$  dividido de dimensión 3 y estructura de contacto métrico. Para terminar esta sección daremos dos tipos de ejemplos de  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s con  $R_5$  dividido de dimensión mayor o igual que 5.

**Ejemplo 2.3.26.** Sabemos por el Teorema 2.2.12 que todo  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_6)$  con estructura de contacto métrica, dimensión mayor o igual que 5 y cumpliendo  $f_1 - f_3 < 1$  es un  $(-f_6, 1 - f_6)$ -espacio cuyas funciones  $f_1, \dots, f_6$  satisfacen:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{f_6 + 1}{2}, & f_2 &= \frac{f_6 - 1}{2}, & f_3 &= \frac{3f_6 + 1}{2}, \\ f_4 &= 1, & f_5 &= \frac{1}{2}, & f_6 &= \text{constante} > -1. \end{aligned}$$

Además, construimos en el Ejemplo 2.2.14 modelos de este tipo de espacio para toda  $f_6 > -1$ . Si le aplicamos a dichos ejemplos transformaciones  $D_a$ -homotéticas, obtenemos por la Nota 2.3.6  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s con  $R_5$  dividido  $M(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{5,1}, \bar{f}_{5,2}, \bar{f}_6)$  con funciones constantes

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= \frac{f_6 + 1}{2a}, & \bar{f}_2 &= \frac{f_6 - 2a + 1}{2a}, & \bar{f}_3 &= \frac{1}{2a^2}((a + 2)f_6 - 2a^2 + a + 2), & \bar{f}_4 &= 1, \\ \bar{f}_{5,1} &= \frac{a}{2}, & \bar{f}_{5,2} &= \frac{a - 2}{2}, & \bar{f}_6 &= \frac{1}{a}(f_6 - a + 1) > -1 \end{aligned}$$

para toda constante  $a > 0$  y  $f_6 > -1$ .

Es fácil comprobar que las funciones  $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_6$  satisfacen las ecuaciones del Teorema 2.3.24. Además, si  $a \neq 1$  (la variedad transformada es distinta de la original), entonces  $\bar{f}_{5,1} \neq -\bar{f}_{5,2}$ , luego los nuevos ejemplos no son  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s.

Usaremos la Nota 2.3.23 para obtener el siguiente tipo de ejemplos.

**Ejemplo 2.3.27.** Sea  $M$  una variedad de dimensión mayor o igual que 5 y curvatura seccional constante  $c > -1$  ( $c \neq 1$ ). Entonces el fibrado tangente esférico de  $M$ ,  $(T_1M, \phi_1, \xi_1, \eta_1, g_1)$ , es un  $(\kappa, \mu)$ -espacio con estructura de contacto métrica, donde  $\kappa = c(2 - c) \neq 1$  y  $\mu = -2c$  (ver Teorema 4 de [12]). Por la Nota 2.3.23,  $T_1M$  es también un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$  con funciones

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 + c, & f_2 &= c, & f_3 &= 1 - c + c^2, \\ f_4 &= 1, & f_{5,1} &= \frac{c+1}{(c-1)^2}, & f_{5,2} &= \frac{c(3-c)}{(c-1)^2}, & f_6 &= 1 + 2c. \end{aligned}$$

Si le aplicamos ahora a  $T_1M$  una transformación  $D_a$ -homotética, obtenemos por el Teorema 2.3.7 ejemplos de  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s con  $R_5$  dividido  $M(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{5,1}, \bar{f}_{5,2}, \bar{f}_6)$  con funciones

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= \frac{c+1}{a}, & \bar{f}_2 &= \frac{c-a+1}{a}, & \bar{f}_3 &= \frac{1}{a^2}(-a^2 + (c+1)a + (c-1)^2), \\ \bar{f}_4 &= 1, & \bar{f}_{5,1} &= \frac{a(c+1)}{(c-1)^2}, & \bar{f}_{5,2} &= \frac{a(c+1)}{(c-1)^2} - 1, & \bar{f}_6 &= \frac{1}{a}(-a + 2(c+1)), \end{aligned}$$

que dependen de los parámetros  $c > -1$  ( $c \neq 1$ ) y  $a > 0$ .

Estos espacios son en particular de dimensión mayor o igual que 5 y estructura de contacto métrica no-Sasakiana porque  $\kappa = \bar{f}_1 - \bar{f}_3 = 1 - \frac{(c-1)^2}{a^2} < 1$ .

**Nota 2.3.28.** Los ejemplos 2.3.27 también pueden obtenerse con un razonamiento similar al del Ejemplo 2.2.14. En efecto, por el recíproco del Teorema 2.3.24, todo  $((-2f_3 + f_6 + 1)/2, 1 - f_6)$ -espacio con estructura de contacto métrica, dimensión mayor o igual que 5 y que cumpla  $2f_3 - f_6 > -1$  es un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$ , donde las funciones  $f_1, \dots, f_6$  cumplen las ecuaciones (2.3.26). A continuación construiremos espacios de este tipo para cualesquiera constantes  $f_3, f_6 > -1$ .

Sea  $M^{2n+1}$  ( $n > 1$ ) una variedad con curvatura seccional constante  $c > -1$  y distinta de 1. Entonces el fibrado tangente esférico con la métrica usual,  $(T_1M, \phi_1, \xi_1, \eta_1, g_1)$ , es un  $(\kappa, \mu)$ -espacio con estructura de contacto métrica, donde  $\kappa = c(2 - c) \neq 1$  y  $\mu = -2c < 2$  (Teorema 4 de [12]).

Mediante una transformación  $D_a$ -homotética (donde  $a$  es una constante positiva) obtenemos  $(T_1M, \bar{\phi}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{g})$ , que sabemos que es un  $(\bar{\kappa}, \bar{\mu})$ -espacio con estructura de contacto métrica donde  $\bar{\kappa} = \frac{\kappa + a^2 - 1}{a^2} \neq 1$  y  $\bar{\mu} = \frac{\mu + 2a - 2}{a}$ .

Exigimos ahora que  $\bar{\kappa} = \frac{-2f_3 + f_6 + 1}{2}$  y  $\bar{\mu} = 1 - f_6$ , es decir, que

$$\frac{c(2-c) + a^2 - 1}{a^2} = \frac{-2f_3 + f_6 + 1}{2}, \quad \frac{-2c + 2a - 2}{a} = 1 - f_6.$$

Si despejáramos  $f_3$  y  $f_6$  en términos de  $a$  y  $c$  y calculáramos el resto de las funciones usando (2.3.26), entonces volveríamos a obtener el Ejemplo 2.3.27. Ahora bien, nos interesa ver que existen constantes  $a > 0$  y  $c > -1$  ( $c \neq 1$ ) cumpliendo ambas ecuaciones para todas las constantes  $f_3, f_6$  tales que  $2f_3 - f_6 > -1$ .

De la segunda ecuación tenemos que  $a(f_6 + 1) = 2(c + 1)$ . Como  $a > 0$  y  $c > -1$ , deducimos que  $f_6 > -1$ , lo cual, unido a que  $2f_3 - f_6 > -1$ , hace que  $f_3 > -1$ . Luego podemos escribir  $a = \frac{2(c+1)}{f_6+1}$ , que sustituido en la primera ecuación da:

$$(f_6^2 + 4f_6 - 4f_3 - 1)c^2 - 2(f_6^2 + 4f_3 + 3)c + f_6^2 + 4f_6 - 4f_3 - 1 = 0.$$

Si  $f_6^2 + 4f_6 - 4f_3 - 1 = 0$ , esta ecuación tiene solución  $c = 0$ , que en particular es mayor que  $-1$  y distinta de  $1$ .

Si  $f_6^2 + 4f_6 - 4f_3 - 1 \neq 0$ , entonces la ecuación tiene soluciones reales

$$c = \frac{f_6^2 + 4f_3 + 3 \pm 2(f_6 + 1)\sqrt{2(2f_3 - f_6 + 1)}}{f_6^2 + 4f_6 - 4f_3 - 1} \neq 1,$$

porque  $2f_3 - f_6 > -1$ . Además, si tomamos la raíz positiva se comprueba que  $c$  es también mayor que  $-1$ , por lo que hemos conseguido ejemplos de  $((-2f_3 + f_6 + 1)/2, 1 - f_6)$ -espacios con las condiciones buscadas para todas  $f_3, f_6 > -1$ .

## 2.4. $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s con otras estructuras

Veremos en esta sección que si una variedad tiene estructura trans-Sasakiana, entonces  $h = 0$ , luego todo  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_6)$  con estructura trans-Sasakiana es un  $g.S.s.f.$  También repasaremos el concepto de  $C(\alpha)$ -variedad y comprobaremos que, bajo algunas hipótesis, son también  $g.S.s.f.$ 's. Así, ni la estructura trans-Sasakiana ni la de  $C(\alpha)$ -variedad resultarán interesantes a la hora de estudiar los  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s, a diferencia de lo que ocurría con los  $g.S.s.f.$ 's (ver [3]).

Probaremos a continuación un par de propiedades que las variedades con estructura trans-Sasakiana tienen en común con las de contacto métricas, seguidas del resultado principal y un corolario:

**Proposición 2.4.1.** *Sea  $M$  una variedad trans-Sasakiana. Entonces:*

$$\nabla_\xi \phi = 0 \quad \text{y} \quad \nabla_\xi \xi = 0.$$

*Demostración.* Usando la definición obtenemos:

$$(\nabla_\xi \phi)Y = \alpha(g(\xi, Y)\xi - \eta(Y)\xi) + \beta(g(\phi\xi, Y)\xi - \eta(Y)\phi\xi) = \alpha(\eta(Y)\xi - \eta(Y)\xi) = 0.$$

De la propiedad (1.1.17) se deduce:  $\nabla_\xi \xi = -\alpha\phi\xi + \beta(\xi - \eta(\xi)\xi) = 0$ .  $\square$

**Proposición 2.4.2.** *Si  $M$  es una variedad trans-Sasakiana, entonces  $h = 0$ .*

*Demostración.* Si operamos y usamos las propiedades habituales

$$\begin{aligned} 2hX &= (L_\xi\phi)X = L_\xi\phi X - \phi L_\xi X = [\xi, \phi X] - \phi[\xi, X] = \\ &= \nabla_\xi\phi X - \nabla_{\phi X}\xi - \phi\nabla_\xi X + \phi\nabla_X\xi = (\nabla_\xi\phi)X - \nabla_{\phi X}\xi + \phi\nabla_X\xi, \end{aligned}$$

de donde se deduciría en virtud de (1.1.17) y la proposición anterior que

$$2hX = -\nabla_{\phi X}\xi + \phi\nabla_X\xi = \alpha\phi^2 X - \beta(\phi X - \eta(\phi X)\xi) - \alpha\phi^2 X + \beta(\phi X - \eta(X)\phi\xi) = 0,$$

para todo campo  $X$  en  $M$ .  $\square$

**Corolario 2.4.3.** *Toda variedad trans-Sasakiana con estructura de contacto métrica es Sasakiana.*

*Demostración.* En virtud de la Proposición anterior sabemos que  $h = 0$ . Ahora bien, toda variedad de contacto métrica que cumpla  $h = 0$  es  $K$ -contacto, luego  $\nabla_X\xi = -\phi X$ . Si comparamos esa fórmula con (1.1.17) deducimos que  $\alpha = 1$  y  $\beta = 0$ , que es precisamente una de las caracterizaciones de las variedades Sasakianas.  $\square$

D. Janssens y L. Vanhecke definieron en [39] una *casi  $C(\alpha)$ -variedad* como aquella variedad casi-contacto métrica para la que existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que para todos  $X, Y, Z, W$  campos diferenciables en  $M$  se cumple que

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &= R(X, Y, \phi Z, \phi W) + \alpha\{-g(X, Z)g(Y, W) + g(X, W)g(Y, Z) \\ &\quad + g(X, \phi Z)g(Y, \phi W) - g(X, \phi W)g(Y, \phi Z)\}. \end{aligned}$$

Se define una  *$C(\alpha)$ -variedad* como una casi  $C(\alpha)$ -variedad que además es normal. Es bien conocido que las variedades cosimplécticas son  $C(0)$ -variedades, las  $\alpha$ -Sasakianas  $C(\alpha^2)$ -variedades y las  $\beta$ -Kenmotsu  $C(-\beta^2)$ -variedades.

A continuación veremos que si una  $C(\alpha)$ -variedad tiene curvatura  $\phi$ -seccional constante, su tensor de curvatura está completamente determinado.

**Teorema 2.4.4.** [39] *Sea  $M$  una  $C(\alpha)$ -variedad de dimensión mayor o igual que 5. Entonces la variedad tiene curvatura  $\phi$ -seccional constante  $F$  si y sólo si es un g.S.s.f.  $M\left(\frac{F+3\alpha}{4}, \frac{F-\alpha}{4}, \frac{F-\alpha}{4}\right)$ .*

**Nota 2.4.5.** *El resultado anterior engloba a otros de diversos autores para variedades Sasakianas (ver [49]), cosimplécticas (ver [22]) y Kenmotsu (Teorema 3.6.1 de [40]). Además, podemos decir algo más si la dimensión es 3 en el caso de las variedades  $\beta$ -Kenmotsu.*

**Proposición 2.4.6.** [53] Si  $M^3$  es una variedad  $\beta$ -Kenmotsu, entonces es un g.S.s.f.  $M\left(\frac{\tau}{2} + 2\beta^2 + 2\beta', 0, \frac{\tau}{2} + 3\beta^2 + 3\beta'\right)$ , donde  $\tau$  es la curvatura escalar de la variedad. Además, el operador de Ricci puede escribirse como

$$Q = \left(\frac{\tau}{2} + \beta^2 + \beta'\right)I - \left(\frac{\tau}{2} + 3\beta^2 + 3\beta'\right)\eta \otimes \xi.$$

Otra versión de la primera parte de este resultado se demuestra en particular en [3, Teorema 4.7], como consecuencia del estudio de los  $g.S.s.f$ 's con estructura trans-Sasakiana. La segunda parte se obtiene por el Teorema 3.10 del citado artículo.





# Capítulo 3

## $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacios de curvatura $\phi$ -seccional constante generalizados

### 3.1. Definición y primeros resultados

En esta sección estudiaremos el tensor de curvatura de Riemann de los  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacios con estructura de contacto métrica, que está totalmente determinado en dimensión 3. Veremos también cómo les afectan las transformaciones  $D_a$ -homotéticas.

Los  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacios con estructura de contacto métrica fueron definidos recientemente en [44] como variedades de contacto métrico  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$  tales que su tensor de curvatura satisface

$$\begin{aligned} R(X, Y)\xi = & \kappa \{ \eta(Y)X - \eta(X)Y \} + \mu \{ \eta(Y)hX - \eta(X)hY \} \\ & + \nu \{ \eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY \}, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

para funciones diferenciables  $\kappa, \mu$  y  $\nu$  en  $M$  independientes de la elección de los campos  $X$  e  $Y$ .

Fue probado en [44] que todo  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura de contacto métrica de dimensión mayor o igual que 5 es un  $(\kappa, \mu)$ -espacio ( $\nu = 0$ ,  $\kappa$  y  $\mu$  constantes), pero que existen ejemplos en dimensión 3 con  $\nu \neq 0$  y  $\kappa$  no constante. Se demostró además que  $\kappa \leq 1$  y que la variedad es Sasakiana si y sólo si  $\kappa = 1$ . Si  $\kappa \neq 1$  es constante, entonces  $\nu = 0$  y la variedad sería un  $(\kappa, \mu)$ -espacio. Por ello, se define un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con  $\kappa, \mu$  y  $\nu$  funciones, aunque no incluyamos la palabra “generalizados” en su nombre, pues no tendría mucho sentido un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con funciones  $\kappa, \mu, \nu$  constantes (a diferencia de lo que ocurría con los  $(\kappa, \mu)$ -espacios, donde  $\kappa$  y  $\mu$  son constantes, y los  $(\kappa, \mu)$ -espacios generalizados, donde  $\kappa$  y  $\mu$  son funciones).

**Nota 3.1.1.** *En dimensión 3, igual que hicimos anteriormente para  $(\kappa, \mu)$ -espacios generalizados (ver Nota 2.2.4), cuando escribimos que  $M$  es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con*

$\kappa = 1$  o  $\kappa < 1$  queremos decir que la función  $\kappa$  cumple la condición en todo punto de  $M$ . En lo sucesivo, cada vez que supongamos que  $\kappa \neq 1$ , estaremos considerando que  $\kappa < 1$  en todos los puntos de  $M$ . Para ello bastaría tomar  $B = \{p \in M / \kappa(p) = 1\}$  y redefinir  $M$  como  $M - B$ , que sería subconjunto abierto de  $M$  y por tanto también variedad.

Veremos a continuación qué forma adopta el tensor de curvatura de un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio de dimensión 3.

**Teorema 3.1.2.** *Sea  $M^3$  un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura de contacto métrica. Entonces su tensor de curvatura puede escribirse como*

$$R = \left(\frac{\tau}{2} - 2\kappa\right) R_1 + \left(\frac{\tau}{2} - 3\kappa\right) R_3 + \mu R_4 + \nu R_7,$$

donde  $\tau$  es la curvatura escalar de  $M$ , los tensores  $R_1, R_3, R_4$  son los mismos que aparecen en (2.1.1) y  $R_7$  viene dado por

$$R_7(X, Y)Z = g(Y, Z)\phi hX - g(X, Z)\phi hY + g(\phi hY, Z)X - g(\phi hX, Z)Y, \quad (3.1.2)$$

para todos  $X, Y, Z$  campos en  $M$ .

*Demostración.* Recordamos la ecuación (2.2.38), que es válida para toda variedad Riemanniana 3-dimensional

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= g(Y, Z)QX - g(X, Z)QY + g(QY, Z)X - g(QX, Z)Y \\ &\quad - \frac{\tau}{2}(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y), \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

donde  $\tau$  es la curvatura escalar y  $Q$  el operador de Ricci.

Gracias a la Proposición 3.1 de [44] también sabemos que:

$$Q = \left(\frac{\tau}{2} - \kappa\right) I - \left(\frac{\tau}{2} - 3\kappa\right) \eta \otimes \xi + \mu h + \nu \phi h. \quad (3.1.4)$$

Substituyendo la ecuación (3.1.4) en (3.1.3) obtenemos:

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= g(Y, Z) \left( \left(\frac{\tau}{2} - \kappa\right) X - \left(\frac{\tau}{2} - 3\kappa\right) \eta(X)\xi + \mu hX + \nu \phi hX \right) \\ &\quad - g(X, Z) \left( \left(\frac{\tau}{2} - \kappa\right) Y - \left(\frac{\tau}{2} - 3\kappa\right) \eta(Y)\xi + \mu hY + \nu \phi hY \right) \\ &\quad + \left(\frac{\tau}{2} - \kappa\right) g(Y, Z)X - \left(\frac{\tau}{2} - 3\kappa\right) \eta(Y)\eta(Z)X \\ &\quad + \mu g(hY, Z)X + \nu g(\phi hY, Z)X \\ &\quad - \left(\frac{\tau}{2} - \kappa\right) g(X, Z)Y + \left(\frac{\tau}{2} - 3\kappa\right) \eta(X)\eta(Z)Y \\ &\quad - \mu g(hX, Z)Y - \nu g(\phi hX, Z)Y \\ &\quad - \frac{\tau}{2}(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) \end{aligned}$$

Y agrupando términos podemos escribir:

$$R(X, Y)Z = \left(\frac{\tau}{2} - 2\kappa\right) R_1(X, Y)Z + \left(\frac{\tau}{2} - 3\kappa\right) R_3(X, Y)Z + \mu R_4(X, Y)Z \\ + \nu \{g(Y, Z)\phi hX - g(X, Z)\phi hY + g(\phi hY, Z)X - g(\phi hX, Z)Y\}.$$

Basta definir el tensor  $R_7$  como se ha hecho en (3.1.2) para conseguir el resultado deseado.  $\square$

Ahora bien, podemos interpretar los coeficientes del Teorema 3.1.2 mediante el siguiente resultado:

**Proposición 3.1.3.** *Sea  $M^3$  un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura de contacto métrica. Entonces su curvatura  $\phi$ -seccional es  $F = \frac{\tau}{2} - 2\kappa$ .*

*Demostración.* Sea  $\{E, \phi E, \xi\}$  una  $\phi$ -base. Debido a que la dimensión de  $M$  es 3, existe una sola  $\phi$ -sección, luego la curvatura  $\phi$ -seccional  $F = R(X, \phi X, \phi X, X)$  en un punto  $p \in M$  no depende de la elección de  $X$  y podemos escribir  $F = R(E, \phi E, \phi E, E)$ .

Si usamos ahora el Teorema 3.1.2 obtenemos:

$$F = R(E, \phi E, \phi E, E) = \left(\frac{\tau}{2} - 2\kappa\right) R_1(E, \phi E, \phi E, E) + \left(\frac{\tau}{2} - 3\kappa\right) R_3(E, \phi E, \phi E, E) \\ + \mu R_4(E, \phi E, \phi E, E) + \nu R_7(E, \phi E, \phi E, E).$$

Ahora bien, por las propiedades de la  $\phi$ -base y el Lema 1.2.3, resulta que:

$$R_1(E, \phi E, \phi E, E) = g(\phi E, \phi E)g(E, E) - g(E, \phi E)g(\phi E, E) = g(E, E)^2 = 1, \\ R_4(E, \phi E, \phi E, E) = g(\phi E, \phi E)g(hE, E) - g(E, \phi E)g(h\phi E, E) \\ + g(h\phi E, \phi E)g(E, E) - g(hE, \phi E)g(\phi E, E) \\ = g(hE, E) + g(h\phi E, \phi E) = g(hE, E) - g(\phi hE, \phi E) \\ = g(hE, E) - g(hE, E) + \eta(hE)\eta(E) = 0,$$

Análogamente se comprueba que

$$R_3(E, \phi E, \phi E, E) = R_7(E, \phi E, \phi E, E) = 0.$$

Concluimos por tanto que

$$F = R(E, \phi E, \phi E, E) = \frac{\tau}{2} - 2\kappa,$$

que es lo que buscábamos.  $\square$

Es obvio entonces que el Teorema 3.1.2 puede enunciarse también de la siguiente forma:

**Corolario 3.1.4.** *Sea  $M^3$  un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura de contacto métrica. Entonces su tensor de curvatura puede ser escrito como*

$$R = FR_1 + (F - \kappa)R_3 + \mu R_4 + \nu R_7, \quad (3.1.5)$$

donde  $F$  es la curvatura  $\phi$ -seccional y  $R_1, R_3, R_4, R_7$  son los tensores definidos en (2.1.1) y (3.1.2).

**Nota 3.1.5.** *El Corolario anterior podría usarse para proporcionar una demostración alternativa del Corolario 2.2.21. En efecto, si  $M^3(f_1, \dots, f_6)$  es un  $g, (\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica, entonces  $M$  es en particular un  $(\kappa, \mu)$ -espacio generalizado con  $\kappa = f_1 - f_3$ ,  $\mu = f_4 - f_6$  (Teorema 2.2.1) y curvatura  $\phi$ -seccional  $F = f_1 + 3f_2$  (Proposición 2.1.7). En virtud del corolario anterior y el hecho de que un  $(\kappa, \mu)$ -espacio generalizado es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con  $\nu = 0$ , obtenemos que*

$$R = FR_1 + (F - \kappa)R_3 + \mu R_4 + \nu R_7 = (f_1 + 3f_2)R_1 + (f_3 + 3f_2)R_3 + (f_4 - f_6)R_4,$$

como queríamos probar.

**Nota 3.1.6.** *El Corolario 3.1.4 también se podría haber obtenido de manera análoga al Teorema 4.1 de [43] (enunciado en esta memoria como Teorema 2.2.5), que afirma que un  $(\kappa, \mu)$ -espacio con estructura de contacto métrica, dimensión mayor o igual que 5 y curvatura  $\phi$ -seccional  $F = K(X, \phi X)$  independiente de  $X$  tiene tensor de curvatura*

$$R = \frac{F+3}{4}R_1 + \frac{F-1}{4}R_2 + \left(\frac{F+3}{4} - \kappa\right)R_3 + R_4 + \frac{1}{2}R_5 + (1-\mu)R_6,$$

y  $F$  es constante.

La hipótesis sobre la dimensión sólo se utiliza para probar que  $F$  es constante, no la forma de  $R$ , luego el razonamiento también es válido en dimensión 3, donde  $K(X, \phi X)$  siempre es independiente de  $X$ . Al adaptar dicha demostración al caso de los  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacios con estructura de contacto métrica obtendríamos que la fórmula de  $R(\tilde{X}, \tilde{Y})Z$  no varía si  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  son campos ortogonales a  $\xi$ :

$$\begin{aligned} R(\tilde{X}, \tilde{Y})Z &= \frac{F+3}{4}(g(\tilde{Y}, Z)\tilde{X} - g(\tilde{X}, Z)\tilde{Y}) \\ &\quad + \frac{F-1}{4}(g(\tilde{X}, \phi Z)\phi\tilde{Y} - g(\tilde{Y}, \phi Z)\phi\tilde{X} + 2g(\tilde{X}, \phi\tilde{Y})\phi Z) \\ &\quad + g(\tilde{Y}, Z)h\tilde{X} - g(\tilde{X}, Z)h\tilde{Y} + g(h\tilde{Y}, Z)\tilde{X} - g(h\tilde{X}, Z)\tilde{Y} \\ &\quad + \frac{1}{2}(g(h\tilde{Y}, Z)h\tilde{X} - g(h\tilde{X}, Z)h\tilde{Y} + g(\phi h\tilde{Y}, Z)\phi h\tilde{X} - g(\phi h\tilde{X}, Z)\phi h\tilde{Y}) \\ &= \frac{F+3}{4}R_1(\tilde{X}, \tilde{Y})Z + \frac{F-1}{4}R_2(\tilde{X}, \tilde{Y})Z + R_4(\tilde{X}, \tilde{Y})Z + \frac{1}{2}R_5(\tilde{X}, \tilde{Y})Z. \end{aligned}$$

En [44] se prueba que todo  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura de contacto métrico cumple:

$$R(\xi, X)Y = \kappa(g(X, Y)\xi + \eta(Y)X) + \mu(g(hX, Y)\xi - \eta(Y)hX) + \nu(g(\phi hY, X)\xi - \eta(Y)\phi hX). \quad (3.1.6)$$

Por lo tanto, si usamos el hecho de que cualquier campo puede escribirse como  $X = \tilde{X} + \eta(X)\xi$ , donde  $\tilde{X}$  es ortogonal a  $\xi$ , conseguimos

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= R(\tilde{X}, \tilde{Y})Z - \eta(Y)R(\xi, \tilde{X})Z + \eta(X)R(\xi, \tilde{Y})Z \\ &= \frac{F+3}{4}R_1(\tilde{X}, \tilde{Y})Z + \frac{F-1}{4}R_2(\tilde{X}, \tilde{Y})Z + R_4(\tilde{X}, \tilde{Y})Z + \frac{1}{2}R_5(\tilde{X}, \tilde{Y})Z \\ &\quad - \eta(Y)\{\kappa(g(\tilde{X}, Z)\xi + \eta(Z)\tilde{X}) + \mu(g(h\tilde{X}, Z)\xi - \eta(Z)h\tilde{X}) \\ &\quad\quad + \nu(g(\phi hZ, \tilde{X})\xi - \eta(Z)\phi h\tilde{X})\} \\ &\quad + \eta(X)\{\kappa(g(\tilde{Y}, Z)\xi - \eta(Z)\tilde{Y}) + \mu(g(h\tilde{Y}, Z)\xi - \eta(Z)h\tilde{Y}) \\ &\quad\quad + \nu(g(\phi hZ, \tilde{Y})\xi - \eta(Z)\phi h\tilde{Y})\}. \end{aligned}$$

Tras unos cálculos donde utilizamos la definición de los tensores  $R_1, \dots, R_6$  y que  $\tilde{X} = X - \eta(X)\xi$ , obtenemos la fórmula del tensor de curvatura  $R(X, Y)Z$  para cualesquiera campos  $X, Y, Z$ :

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \frac{F+3}{4}(R_1(X, Y)Z + R_3(X, Y)Z) + \frac{F-1}{4}R_2(X, Y)Z \\ &\quad + (R_4(X, Y)Z + R_6(X, Y)Z) + \frac{1}{2}R_5(X, Y)Z \\ &\quad - \kappa R_3(X, Y)Z - \mu R_6(X, Y)Z - \nu\{\eta(X)\eta(Z)\phi hY - \eta(Y)\eta(Z)\phi hX \\ &\quad\quad + g(\phi hX, Z)\eta(Y)\xi - g(\phi hY, Z)\eta(X)\xi\} \\ &= \frac{F+3}{4}R_1(X, Y)Z + \frac{F-1}{4}R_2(X, Y)Z + \left(\frac{F+3}{4} - \kappa\right)R_3(X, Y)Z \\ &\quad + R_4(X, Y)Z + \frac{1}{2}R_5(X, Y)Z + (1 - \mu)R_6(X, Y)Z \\ &\quad - \nu\{\eta(X)\eta(Z)\phi hY - \eta(Y)\eta(Z)\phi hX \\ &\quad\quad + g(\phi hX, Z)\eta(Y)\xi - g(\phi hY, Z)\eta(X)\xi\}. \end{aligned}$$

Si denotamos por  $R_8$  al término que multiplica a  $\nu$ , es decir,

$$\begin{aligned} R_8(X, Y)Z &= \eta(X)\eta(Z)\phi hY - \eta(Y)\eta(Z)\phi hX \\ &\quad + g(\phi hX, Z)\eta(Y)\xi - g(\phi hY, Z)\eta(X)\xi, \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

podemos escribir el tensor de curvatura de Riemann como

$$R = \frac{F+3}{4}R_1 + \frac{F-1}{4}R_2 + \left(\frac{F+3}{4} - \kappa\right)R_3 + R_4 + \frac{1}{2}R_5 + (1 - \mu)R_6 - \nu R_8,$$

que usando el Lema 2.2.19 quedaría:

$$\begin{aligned}
R &= \frac{F+3}{4}R_1 + 3\frac{F-1}{4}(R_1 + R_3) + \left(\frac{F+3}{4} - \kappa\right)R_3 + R_4 + (1-\mu)(-R_4) - \nu R_8 \\
&= \left(\frac{F+3}{4} + 3\frac{F-1}{4}\right)R_1 + \left(\frac{F+3}{4} - \kappa + 3\frac{F-1}{4}\right)R_3 + (1-1+\mu)R_4 - \nu R_8 \\
&= FR_1 + (F-\kappa)R_3 + \mu R_4 - \nu R_8.
\end{aligned}$$

Este resultado coincide con (3.1.5) gracias al siguiente lema:

**Lema 3.1.7.** *Sea  $M^3$  una variedad de contacto métrica. Entonces se cumple que:*

$$R_8 = -R_7. \quad (3.1.8)$$

*Demostración.* Probar (3.1.8) sería equivalente a probar que  $(R_7 + R_8)(X, Y)Z = 0$ , donde  $X, Y, Z$  son campos de una  $\phi$ -base  $\{E, \phi E, \xi\}$ . Ahora bien, si usamos las propiedades (1.1.2) y (1.1.7) de una variedad casi-contacto métrica obtenemos que, dados  $X, Y, Z$  campos cualesquiera:

$$(R_7 + R_8)(X, Y)Z = g(\phi Y, \phi Z)\phi hX - g(\phi X, \phi Z)\phi hY - g(\phi hY, Z)\phi^2 X + g(\phi hX, Z)\phi^2 Y.$$

Por tanto, como  $\phi\xi = h\xi = 0$ , es obvio que  $(R_7 + R_8)(X, Y)Z = 0$  si  $X, Y$  o  $Z$  son el campo  $\xi$ . Sólo quedarían por comprobar dos casos, que se anulan gracias a las propiedades de  $h$  (Lema 1.2.3):

$$\begin{aligned}
(R_7 + R_8)(E, \phi E)E &= g(\phi^2 E, \phi E)\phi hE - g(\phi E, \phi E)\phi h\phi E \\
&\quad - g(\phi h\phi E, E)\phi^2 E + g(\phi hE, E)\phi^3 E \\
&= -g(E, \phi E)\phi hE - hE + g(hE, E)E - g(\phi hE, E)\phi E \\
&= -hE + g(hE, E)E + g(hE, \phi E)\phi E = -hE + hE = 0, \\
(R_7 + R_8)(E, \phi E)\phi E &= g(\phi^2 E, \phi^2 E)\phi hE - g(\phi E, \phi^2 E)\phi h\phi E \\
&\quad - g(\phi h\phi E, \phi E)\phi^2 E + g(\phi hE, \phi E)\phi^3 E \\
&= g(E, E)\phi hE + g(\phi E, E)hE + g(h\phi E, E)E - g(\phi hE, \phi E)\phi E \\
&= \phi hE + g(h\phi E, E)E + g(h\phi E, \phi E)\phi E = \phi hE + h\phi E \\
&= \phi hE - \phi hE = 0,
\end{aligned}$$

lo que finaliza la demostración. □

**Ejemplo 3.1.8.** *El Corolario 3.1.4 también implica que los ejemplos de  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacios de dimensión 3 con funciones no constantes dados en [44] tienen tensores de curvatura de la forma (3.1.5), así que sólo habría que calcular la curvatura  $\phi$ -seccional*

$F$  para obtener el tensor explícitamente. A continuación veremos en detalle el Ejemplo 4.2 de [44].

Sea  $M^3$  la variedad  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z > 0\}$ , donde  $(x, y, z)$  son las coordenadas usuales de  $\mathbb{R}^3$ . Los campos

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = (2y + 2z) \frac{\partial}{\partial x} + \left( - \left( \frac{yc}{2} + zc + \frac{1}{2z} \right) y + \frac{1}{c} e^{cx} z \right) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z},$$

donde  $c$  es una constante no nula, son linealmente independientes en cada punto de  $M$  y se tiene que:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = e^{cx} z e_2, \quad [e_2, e_3] = 2e_1 - \left( yc + zc + \frac{1}{2z} \right) e_2.$$

Sean  $g$  la métrica Riemanniana definida por  $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\nabla$  su conexión Riemanniana y  $R$  el tensor de curvatura de  $\nabla$ .

Sea  $\eta$  la 1-forma definida por  $\eta(X) = g(X, e_1)$ , para todo campo  $X$  en  $M$ , que es una forma de contacto porque  $\eta \wedge d\eta \neq 0$ . Sea  $\phi$  el tensor  $(1, 1)$  definido por

$$\phi e_1 = 0, \quad \phi e_2 = e_3, \quad \phi e_3 = -e_2.$$

Usando la linealidad de  $\phi, d\eta$  y  $g$  se prueba que

$$\eta(e_1) = 1, \quad \phi^2(X) = -X + \eta(X)e_1, \quad d\eta(X, Y) = g(X, \phi Y),$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

para todos  $X, Y$  en  $M$ . Luego  $(\phi, e_1, \eta, g)$  define una estructura de contacto métrica en  $M$ . Usando la fórmula de Koszul se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_2 &= \left( -1 - \frac{1}{2} e^{cx} z \right) e_3, & \nabla_{e_2} e_1 &= \left( -1 - \frac{1}{2} e^{cx} z \right) e_3, \\ \nabla_{e_1} e_3 &= \left( 1 + \frac{1}{2} e^{cx} z \right) e_2, & \nabla_{e_3} e_1 &= \left( 1 - \frac{1}{2} e^{cx} z \right) e_2, \\ \nabla_{e_2} e_3 &= \left( 1 + \frac{1}{2} e^{cx} z \right) e_1 - \left( yc + zc + \frac{1}{2z} \right) e_2, & \nabla_{e_3} e_2 &= \left( -1 + \frac{1}{2} e^{cx} z \right) e_1, \\ \nabla_{e_2} e_2 &= \left( yz + zc + \frac{1}{2z} \right) e_3, & \nabla_{e_3} e_3 &= 0. \end{aligned}$$

El tensor  $h$  cumple  $he_1 = 0, he_2 = \lambda e_2, he_3 = -\lambda e_3$ , donde  $\lambda = \frac{1}{2} e^{cx} z$ . Puede comprobarse que  $M$  es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio de dimensión 3 con estructura de contacto métrica,  $\kappa = 1 - \frac{e^{2cx} z^2}{4}, \mu = 2 + e^{cx} z$  y  $\nu = c \neq 0$ .

Por la definición de curvatura de Riemann y los cálculos anteriores hallamos la curvatura  $\phi$ -seccional

$$F = - \left( 3 + \frac{3}{2}c^2y^2 + 3yzc^2 + \frac{3cy}{2z} + \frac{3}{4z^2} + c^2z^2 - \frac{1}{4}e^{2cx}z^2 \right),$$

y concluimos que la variedad tiene tensor de curvatura de Riemann

$$R = FR_1 + (F - \kappa)R_3 + \mu R_4 + \nu R_7,$$

donde  $\kappa, \mu, \nu, F$  son conocidos.

Es natural plantearse si es posible escribir la curvatura  $\phi$ -seccional de un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio en función de  $\kappa, \mu$  y  $\nu$ . Esto simplificaría las cuentas necesarias para obtener el tensor de curvatura de la variedad, pues no tendríamos que calcular los distintos valores de  $\nabla_{e_i}e_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Para ello necesitaremos los siguientes lemas, el primero de los cuales es una generalización del Lema 2.2.15:

**Lema 3.1.9.** [44, Lemas 4.2 y 4.4] Si  $M^{2n+1}$  es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio de contacto métrico, entonces

$$h^2 = (\kappa - 1)\phi^2.$$

Si además  $\kappa < 1$ , sabemos que existe en todo punto una base local ortonormal  $\{e_i, \phi e_i, \xi\}$  tal que

$$he_i = \lambda e_i, \quad h\phi e_i = -\lambda \phi e_i, \quad h\xi = 0,$$

para todo  $i = 1, \dots, n$ , donde  $\lambda = \sqrt{1 - \kappa}$ .

**Lema 3.1.10.** [18, Lema 2.1] Sea  $M^3$  una variedad de contacto métrica. Dada una  $\phi$ -base  $\{E, \phi E, \xi\}$  tal que  $hE = \lambda E$ , en los puntos en los que  $h \neq 0$  se cumple que

$$\begin{aligned} \nabla_\xi E &= -\alpha \phi E, & \nabla_E \xi &= -(\lambda + 1)\phi E, \\ \nabla_\xi \phi E &= \alpha E, & \nabla_{\phi E} \xi &= -(\lambda - 1)E, \\ \nabla_E \phi E &= -\frac{1}{2\lambda}((\phi E)(\lambda) + A)E + (\lambda + 1)\xi, & \nabla_{\phi E} E &= -\frac{1}{2\lambda}(E(\lambda) + B)\phi E + (\lambda - 1)\xi, \\ \nabla_E E &= \frac{1}{2\lambda}((\phi E)(\lambda) + A)\phi E, & \nabla_{\phi E} \phi E &= \frac{1}{2\lambda}(E(\lambda) + B)E, \end{aligned}$$

donde  $\alpha$  es una función diferenciable,  $A = S(\xi, E)$ ,  $B = S(\xi, \phi E)$  y  $S$  es el tensor de Ricci de  $M$ .

Usando el Lema anterior y los resultados de [44], obtenemos que:



**Proposición 3.1.11.** *Sea  $M^3$  un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura de contacto métrica. Si  $\kappa < 1$ , su curvatura  $\phi$ -seccional tiene la forma*

$$F = -\kappa - \mu - \frac{3}{4\lambda^2}((E(\lambda))^2 + ((\phi E)(\lambda))^2) + \frac{1}{2\lambda}(E^2(\lambda) + (\phi E)^2(\lambda)), \quad (3.1.9)$$

donde  $\lambda = \sqrt{1 - \kappa}$  y  $\{E, \phi E, \xi\}$  es una  $\phi$ -base tal que  $hE = \lambda E$ . De forma equivalente,  $F$  puede ser escrita como:

$$F = -\kappa - \mu - \frac{5}{16(1 - \kappa)^2}((E(\kappa))^2 + ((\phi E)(\kappa))^2) - \frac{1}{4(1 - \kappa)}(E^2(\kappa) + (\phi E)^2(\kappa)). \quad (3.1.10)$$

*Demostración.* Sabemos por el Lema 3.1.9 que existe una  $\phi$ -base  $\{E, \phi E, \xi\}$  tal que  $hE = \lambda E$ , donde  $\lambda = \sqrt{1 - \kappa} > 0$ . Por tanto,  $h \neq 0$  en todo punto de  $M$  y se cumplen las ecuaciones del Lema anterior. Además, tenemos por la Proposición 3.1 de [44] que  $\alpha = \mu/2$  y que  $S(\xi, X) = 0$  para todo campo  $X$  tal que  $\eta(X) = 0$ , luego  $A = B = 0$ . Sustituyendo en las ecuaciones del lema, éstas quedarían:

$$\begin{aligned} \nabla_\xi E &= -\frac{\mu}{2}\phi E, & \nabla_E \xi &= -(\lambda + 1)\phi E, \\ \nabla_\xi \phi E &= \frac{\mu}{2}E, & \nabla_{\phi E} \xi &= -(\lambda - 1)E, \\ \nabla_E \phi E &= -\frac{1}{2\lambda}(\phi E)(\lambda)E + (\lambda + 1)\xi, & \nabla_{\phi E} E &= -\frac{1}{2\lambda}E(\lambda)\phi E + (\lambda - 1)\xi, \\ \nabla_E E &= \frac{1}{2\lambda}(\phi E)(\lambda)\phi E, & \nabla_{\phi E} \phi E &= \frac{1}{2\lambda}E(\lambda)E. \end{aligned}$$

Si usamos ahora que  $[E, \phi E] = \nabla_E \phi E - \nabla_{\phi E} E$  y la definición de curvatura  $\phi$ -seccional, en virtud de las ecuaciones anteriores tenemos la fórmula (3.1.9):

$$\begin{aligned} F &= R(E, \phi E, \phi E, E) = g(\nabla_E \nabla_{\phi E} \phi E - \nabla_{\phi E} \nabla_E \phi E - \nabla_{[E, \phi E]} \phi E, E) \\ &= -\kappa - \mu + E \left( \frac{1}{2\lambda} E(\lambda) \right) + (\phi E) \left( \frac{1}{2\lambda} (\phi E)(\lambda) \right) - \frac{1}{4\lambda^2} (E(\lambda))^2 - \frac{1}{4\lambda^2} ((\phi E)(\lambda))^2 \\ &= -\kappa - \mu - \frac{3}{4\lambda^2} ((E(\lambda))^2 + ((\phi E)(\lambda))^2) + \frac{1}{2\lambda} (E^2(\lambda) + (\phi E)^2(\lambda)). \end{aligned}$$

Bastaría utilizar ahora que  $\lambda = \sqrt{1 - \kappa} > 0$  para obtener (3.1.10).  $\square$

**Nota 3.1.12.** *Si usamos la fórmula (3.1.9) para calcular la curvatura  $\phi$ -seccional en*

el Ejemplo 3.1.8, obtenemos que

$$\begin{aligned}
F = R(e_2, e_3, e_3, e_2) &= -\kappa - \mu - \frac{3}{4\lambda^2}((e_2(\lambda))^2 + (e_3(\lambda))^2) + \frac{1}{2\lambda}(e_2^2(\lambda) + e_3^2(\lambda)) \\
&= -3 + \frac{e^{2cx}z^2}{4} - e^{cx}z - \frac{3}{e^{2cx}z^2} \left( yzc + z^2c + \frac{1}{2} \right)^2 e^{2cx} \\
&\quad + \frac{1}{e^{cx}z} \left( 3yz^2c + \frac{3}{2}y^2zc + 2z^3c + \frac{3}{2}y + 3z + \frac{e^{cx}z^2}{c} \right) ce^{cx} \\
&= - \left( 3 + \frac{3}{2}c^2y^2 + 3yzc^2 + \frac{3cy}{2z} + \frac{3}{4z^2} + c^2z^2 - \frac{1}{4}e^{2cx}z^2 \right),
\end{aligned}$$

que coincide con lo ya calculado en el ejemplo.

**Nota 3.1.13.** Si suponemos que  $\kappa$  sólo varía en la dirección de  $\xi$ , de la ecuación (3.1.10) se deduce que  $F = -\kappa - \mu$ . Por tanto, el Corolario 3.1.4 quedaría:

**Corolario 3.1.14.** Sea  $M^3$  un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura de contacto métrica. Si  $\kappa < 1$  sólo varía en la dirección de  $\xi$ , entonces su tensor de curvatura puede ser escrito como

$$R = -(\kappa + \mu)R_1 - (2\kappa + \mu)R_3 + \mu R_4 + \nu R_7, \quad (3.1.11)$$

donde  $R_1, R_3, R_4, R_7$  son los tensores definidos en (2.1.1) y (3.1.2).

Estudiaremos ahora cómo afectan las transformaciones  $D_a$ -homotéticas al tensor de curvatura de un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura de contacto métrica  $M^3$ .

Ya sabemos por [44] que al aplicar una transformación  $D_a$ -homotética ( $a > 0$ ) a un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura de contacto métrica obtenemos otro  $(\bar{\kappa}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$ -espacio con estructura de contacto métrica, donde

$$\bar{\kappa} = \frac{\kappa + a^2 - 1}{a^2}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu + 2a - 2}{a}, \quad \bar{\nu} = \frac{\nu}{a}. \quad (3.1.12)$$

Por el Corolario 3.1.4, dicha variedad transformada tiene tensor de curvatura que puede escribirse de la siguiente forma:

$$\bar{R} = \bar{F}\bar{R}_1 + (\bar{F} - \bar{\kappa})\bar{R}_3 + \bar{\mu}\bar{R}_4 + \bar{\nu}\bar{R}_7,$$

donde  $\bar{F}$  es la curvatura  $\bar{\phi}$ -seccional y  $\bar{R}_1, \bar{R}_3, \bar{R}_4, \bar{R}_7$  son los tensores previamente definidos.

Ahora bien, podemos relacionar la curvatura  $\bar{\phi}$ -seccional  $\bar{F}$  con la curvatura  $\phi$ -seccional de la variedad original,  $F$ . Sea  $X$  un campo ortogonal a  $\bar{\xi}$  y unitario respecto a  $\bar{g}$ . Entonces

$$\begin{aligned}
\bar{g}(X, \bar{\xi}) &= \frac{1}{a}\bar{g}(X, \xi) = g(X, \xi) + (a - 1)g(X, \xi) = ag(X, \xi) = 0, \\
\bar{g}(X, X) &= ag(X, X) + a(a - 1)\eta(X)\eta(X) = ag(X, X),
\end{aligned}$$

luego  $X$  es también ortogonal a  $\xi$  respecto a  $g$  y cumple que  $g(X, X) = 1/a$ .

Por tanto, si usamos (2.3.1) y la fórmula (2.3.11), que relaciona  $\bar{R}$  y  $R$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}\bar{F} &= \bar{R}(X, \bar{\phi}X, \bar{\phi}X, X) = \bar{g}(\bar{R}(X, \bar{\phi}X)\bar{\phi}X, X) = \bar{g}(\bar{R}(X, \phi X)\phi X, X) \\ &= \bar{g}(R(X, \phi X)\phi X, X) - 3(a-1)g(X, X)\bar{g}(X, X) \\ &\quad + \frac{a-1}{a}(g(hX, \phi X)\bar{g}(\phi hX, X) - g(hX, X)\bar{g}(hX, X)) \\ &= aR(X, \phi X)\phi X, X) - 3\frac{a-1}{a} - (a-1)(g(hX, X)^2 + g(hX, \phi X)^2) \\ &= a\frac{1}{a^2}F - 3\frac{a-1}{a} - (a-1)(g(hX, X)^2 + g(hX, \phi X)^2).\end{aligned}$$

Es decir, que la curvatura  $\bar{\phi}$ -seccional puede escribirse como

$$\bar{F} = \frac{1}{a}F - 3\frac{a-1}{a} - (a-1)(g(hX, X)^2 + g(hX, \phi X)^2). \quad (3.1.13)$$

Si  $\kappa = 1$ , entonces  $\bar{\kappa} = 1$  y la variedad transformada es Sasakiana, luego  $h = 0$  y obtenemos que

$$\bar{F} = \frac{1}{a}F - 3\frac{a-1}{a}. \quad (3.1.14)$$

Si  $\kappa < 1$ , entonces  $\bar{\kappa} < 1$  y sabemos por el Lema 3.1.9 que existe una  $\bar{\phi}$ -base  $\{X, \bar{\phi}X, \bar{\xi}\}$  tal que  $\bar{h}X = \bar{\lambda}X$  y  $\bar{h}\bar{\phi}X = -\bar{\lambda}\bar{\phi}X$ , donde  $\bar{\lambda} = \sqrt{1 - \bar{\kappa}}$ . Por tanto,

$$g(hX, X)^2 + g(hX, \phi X)^2 = 1 - \bar{\kappa} = \frac{1 - \kappa}{a^2}$$

y tenemos que

$$\bar{F} = \frac{1}{a}F - 3\frac{a-1}{a} - \frac{a-1}{a^2}(1 - \kappa) = \frac{1}{a}F - \frac{a-1}{a^2}(3a + 1 - \kappa). \quad (3.1.15)$$

Podemos utilizar la fórmula (3.1.15) para cualquier  $\kappa$  porque coincide con (3.1.14) para  $\kappa = 1$ . Así, el tensor de curvatura  $\bar{R}$  del  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio transformado tiene la siguiente forma:

$$\bar{R} = \bar{f}_1\bar{R}_1 + \bar{f}_3\bar{R}_3 + \bar{f}_4\bar{R}_4 + \bar{f}_7\bar{R}_7,$$

donde

$$\begin{aligned}\bar{f}_1 &= \frac{1}{a}F - \frac{a-1}{a^2}(3a + 1 - \kappa), \\ \bar{f}_3 &= \frac{1}{a}F + \frac{1}{a^2}((a-2)\kappa - 4a^2 + 2a + 2), \\ \bar{f}_4 &= \frac{1}{a}(\mu + 2a - 2), \\ \bar{f}_7 &= \frac{\nu}{a},\end{aligned}$$

y  $F$  es la curvatura  $\phi$ -seccional de la variedad original. Luego podemos determinar por completo la curvatura de la variedad transformada conociendo únicamente los  $\kappa, \mu, \nu$  y  $F$  originales.

A continuación extenderemos la noción de  $(\kappa, \mu)$ -espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante generalizado ( $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.) hasta englobar a los  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacios.

**Definición 3.1.15.** *Un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante generalizado es una variedad casi-contacto métrica cuyo tensor de curvatura puede ser escrito como*

$$R = f_1 R_1 + f_2 R_2 + f_3 R_3 + f_4 R_4 + f_5 R_5 + f_6 R_6 + f_7 R_7 + f_8 R_8, \quad (3.1.16)$$

donde  $f_1, \dots, f_8$  son funciones arbitrarias en  $M$ ,  $R_1, \dots, R_6$  son los tensores que aparecen en (2.1.1),  $R_7$  es el tensor de (3.1.2) y  $R_8$  el de (3.1.7). Lo denotaremos por  $M(f_1, \dots, f_8)$ .

Por analogía con los  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s, en inglés los denominaremos generalized  $(\kappa, \mu, \nu)$ -space forms y, por brevedad, de ahora en adelante utilizaremos la abreviatura  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s.

Es obvio que, en virtud del Corolario 3.1.4, los  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacios con estructura de contacto métrica y  $\kappa < 1$  son  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s con funciones  $f_1 = F$ ,  $f_3 = F - \kappa$ ,  $f_4 = \mu$ ,  $f_7 = \nu$  y  $f_2 = f_5 = f_6 = f_8 = 0$ , donde  $F$  es la curvatura  $\phi$ -seccional de la variedad.

Podemos obtener fácilmente el siguiente resultado, que coincidiría con el Teorema 2.2.1 en el caso de que el  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. cumpliera  $f_7 = f_8 = 0$ .

**Proposición 3.1.16.** *Si  $M(f_1, \dots, f_8)$  es un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica, entonces es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con  $\kappa = f_1 - f_3$ ,  $\mu = f_4 - f_6$  y  $\nu = f_7 - f_8$ .*

*Demostración.* Ya sabíamos por el Teorema 2.2.1 que

$$\begin{aligned} & (f_1 R_1 + f_2 R_2 + f_3 R_3 + f_4 R_4 + f_5 R_5 + f_6 R_6)(X, Y)\xi = \\ & = (f_1 - f_3) \{ \eta(Y) X - \eta(X) Y \} + (f_4 - f_6) \{ \eta(Y) hX - \eta(X) hY \}. \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que

$$R_7(X, Y)\xi = \eta(Y) \phi hX - \eta(X) \phi hY,$$

$$R_8(X, Y)\xi = -(\eta(Y) \phi hX - \eta(X) \phi hY).$$

Luego podemos concluir que la variedad es un  $(f_1 - f_3, f_4 - f_6, f_7 - f_8)$ -espacio.  $\square$

Podemos plantearnos ahora cómo cambiarían los resultados probados en las secciones 2.1 y 2.2 al sustituir el concepto de  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. por el de  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. Reescribiremos a continuación algunos de ellos, en los que señalaremos solamente aquellos pasos en los que se produce algún cambio significativo.

Los tres primeros resultados no varían. En las demostraciones de los dos primeros basta usar que los tensores  $R_7$  y  $R_8$  se anulan si  $h = 0$ . Para el tercer resultado daremos una demostración alternativa, más corta que la original.

**Teorema 3.1.17.** *Sea  $M(f_1, \dots, f_8)$  un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. Si  $M$  es  $K$ -contacto, entonces  $f_3 = f_1 - 1$ . Además,  $M$  es Sasakiano.*

**Teorema 3.1.18.** *Sea  $M(f_1, \dots, f_8)$  un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. Si  $M$  es Sasakiano, entonces  $f_2 = f_3 = f_1 - 1$ .*

**Teorema 3.1.19.** *Sea  $M(f_1, \dots, f_8)$  un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica. Si en  $M$  se cumple que  $f_3 = f_1 - 1$ , entonces  $M$  es Sasakiano.*

*Demostración.* Si  $f_3 = f_1 - 1$ , sabemos por la Proposición 3.1.16 que  $M$  es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con  $\kappa = f_1 - f_3 = 1$ , luego es Sasakiano por el Teorema 5.3 de [44].  $\square$

Veremos ahora que las curvaturas  $\phi$ -seccional  $K(X, \phi X)$ ,  $\xi$ -seccional  $K(X, \xi)$  y  $K(\phi X, \xi)$  de un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. varían respecto a las de un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.

**Proposición 3.1.20.** *Sea  $M(f_1, \dots, f_8)$  un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. Entonces la curvatura  $\phi$ -seccional de la  $\phi$ -sección generada por un campo  $X$  unitario y ortogonal a  $\xi$  viene dada por*

$$K(X, \phi X) = f_1 + 3f_2 + f_4g((h - \phi h\phi)X, X) + f_7g((\phi h + h\phi)X, X). \quad (3.1.17)$$

*Si  $M$  tiene además estructura de contacto métrica, entonces la curvatura  $\phi$ -seccional de  $\{X, \phi X\}$  es*

$$K(X, \phi X) = f_1 + 3f_2. \quad (3.1.18)$$

*Demostración.* Dado un campo  $X$  unitario y ortogonal a  $\xi$ , sabemos por la Proposición 2.1.7 que

$$\begin{aligned} K(X, \phi X) &= (f_1R_1 + \dots + f_8R_8)(X, \phi X, \phi X, X) \\ &= f_1 + 3f_2 + f_4g((h - \phi h\phi)X, X) \\ &\quad + f_7R_7(X, \phi X, \phi X, X) + f_8R_8(X, \phi X, \phi X, X). \end{aligned}$$

Ahora bien, podemos calcular

$$\begin{aligned}
R_7(X, \phi X, \phi X, X) &= g(\phi X, \phi X)g(\phi hX, X) - g(X, \phi X)g(\phi hX, X) \\
&\quad + g(\phi h\phi X, \phi X)g(X, X) - g(\phi hX, \phi X)g(\phi X, X) \\
&= g(\phi hX, X) + g(h\phi X, X) = g((\phi h + h\phi)X, X), \\
R_8(X, \phi X, \phi X, X) &= \eta(X)\eta(\phi X)g(\phi h\phi X, X) - \eta(\phi X)\eta(\phi X)g(\phi hX, X) \\
&\quad + g(\phi hX, \phi X)\eta(\phi X)\eta(X) - g(\phi h\phi X, \phi X)\eta(X)\eta(X) = 0,
\end{aligned}$$

que al sustituir en la fórmula anterior nos da (3.1.17).

Si  $M$  es una variedad de contacto métrica, entonces  $h\phi = -\phi h$  en virtud del Lema 1.2.3 y se sigue que

$$(h - \phi h\phi)X = (h + h\phi^2)X = h(X + \phi^2 X) = h(X - X) = 0,$$

$$g((\phi h + h\phi)X, X) = g((\phi h - \phi h)X, X) = 0,$$

de donde obtenemos (3.1.18). □

**Proposición 3.1.21.** *Sea  $M(f_1, \dots, f_8)$  un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. Entonces la curvatura  $\xi$ -seccional de la  $\xi$ -sección generada por un campo  $X$  unitario y ortogonal a  $\xi$  viene dada por*

$$K(X, \xi) = f_1 - f_3 + (f_4 - f_6)g(hX, X) + (f_7 - f_8)g(\phi hX, X). \quad (3.1.19)$$

*Demostración.* Dado  $X$  un campo unitario y ortogonal a  $\xi$ , tenemos por la Proposición 2.1.8 que

$$K(X, \xi) = f_1 - f_3 + (f_4 - f_6)g(hX, X) + f_7 R_7(X, \xi, \xi, X) + f_8 R_8(X, \xi, \xi, X).$$

Por la definición de los tensores  $R_7$  y  $R_8$ , es fácil comprobar que

$$R_7(X, \xi, \xi, X) = -R_8(X, \xi, \xi, X) = g(\phi hX, X),$$

que sustituyendo en la fórmula anterior nos da (3.1.19). □

**Corolario 3.1.22.** *Sea  $M(f_1, \dots, f_8)$  un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. Si  $X$  es un campo unitario y ortogonal a  $\xi$ , entonces*

$$K(\phi X, \xi) = f_1 - f_3 + (f_4 - f_6)g(h\phi X, \phi X) + (f_7 - f_8)g(h\phi X, X). \quad (3.1.20)$$

Por tanto, si  $M$  es una variedad de contacto métrica,

$$K(\phi X, \xi) = f_1 - f_3 - (f_4 - f_6)g(hX, X) - (f_7 - f_8)g(\phi hX, X). \quad (3.1.21)$$

*Demostración.* Dado un campo  $X$  unitario y ortogonal a  $\xi$ ,  $\phi X$  también lo es, luego (3.1.20) se deduce directamente de la proposición anterior.

Si  $M$  tiene estructura de contacto métrica, entonces  $h\phi = -\phi h$  y se cumple que  $g(h\phi X, \phi X) = -g(\phi h X, \phi X)$  para todo campo  $X$  ortogonal a  $\xi$ . Sustituyendo en (3.1.20), obtenemos (3.1.21).  $\square$

Ya hemos reescrito los resultados más importantes de la Sección 2.1. Veamos ahora los más destacados de la Sección 2.2. El primero, el Teorema 2.2.1, ya fue generalizado para  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s con estructura de contacto métrica en la Proposición 3.1.16, que afirma que todo  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio. Por tanto, podemos usar los numerosos resultados de [44]. Entre otros, el Teorema 4.1 prueba que todo  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura de contacto métrica y dimensión mayor o igual que 5 es Sasakiano o  $(\kappa, \mu)$ -espacio. Por tanto, un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica y dimensión mayor o igual que 5 es Sasakiano (y sus funciones relacionadas entre sí por el Teorema 3.1.18) o es un  $(\kappa, \mu)$ -espacio, es decir, cumple que  $\nu = 0$  y  $\kappa, \mu$  son constantes.

Por un razonamiento similar al del Teorema 2.2.12, se prueba que el siguiente resultado es cierto:

**Teorema 3.1.23.** *Sea  $M(f_1, \dots, f_8)$  un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica. Si  $M$  es no-Sasakiano y de dimensión mayor o igual que 5, entonces tiene curvatura  $\phi$ -seccional constante  $F$  y se verifican las siguientes expresiones*

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{f_6 + 1}{2}, & f_2 &= \frac{f_6 - 1}{2}, & f_3 &= \frac{3f_6 + 1}{2}, \\ f_4 &= 1, & f_5 &= \frac{1}{2}, & f_6 &= \text{constante} > -1, \\ \kappa &= -f_6 & &= \text{constante} < 1, \\ \mu &= 1 - f_6 & &= \text{constante} < 2, \\ \nu &= f_7 = f_8 & &= 0, \\ F &= 2f_6 - 1 & &= \text{constante} > -3. \end{aligned}$$

Es decir,  $M$  es un  $(-f_6, 1 - f_6)$ -espacio con curvatura  $\phi$ -seccional constante  $F = 2f_6 - 1 > -1$ .

*Demostración.* Sabemos por la Proposición 3.1.16 y el Teorema 4.1 de [44] que la variedad es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con  $\kappa = f_1 - f_3$ ,  $\mu = f_4 - f_6$  constantes y  $\nu = f_7 - f_8 = 0$ . Es decir, que  $M$  es en particular un  $(\kappa, \mu)$ -espacio cuyo tensor de curvatura satisface las ecuaciones (2.2.2)-(2.2.7) del Teorema 2.2.2, la primera de las cuales es:

$$R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_{-\lambda} = (f_1 - f_3 - f_4 + f_6)\{g(\phi Y_\lambda, Z_{-\lambda})\phi X_\lambda - g(\phi X_\lambda, Z_{-\lambda})\phi Y_\lambda\}, \quad (3.1.22)$$

para todos campos  $X_\lambda, Y_\lambda \in D(\lambda)$  y  $Z_{-\lambda} \in D(-\lambda)$ .

Por otra parte, gracias a la expresión que tiene el tensor de curvatura de un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. y al hecho de que estamos trabajando en una variedad de contacto métrica, también obtenemos que:

$$\begin{aligned} R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_{-\lambda} &= (f_2 - f_5(1 - f_1 + f_3))\{g(\phi Y_\lambda, Z_{-\lambda})\phi X_\lambda - g(\phi X_\lambda, Z_{-\lambda})\phi Y_\lambda\} \\ &\quad + f_7\sqrt{1 - f_1 + f_3} g(\phi Y_\lambda, Z_{-\lambda})X_\lambda - g(\phi X_\lambda, Z_{-\lambda})Y_\lambda, \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

para todos campos  $X_\lambda, Y_\lambda \in D(\lambda)$  y  $Z_{-\lambda} \in D(-\lambda)$ .

Igualando las ecuaciones (3.1.22) y (3.1.23) conseguimos:

$$\begin{aligned} (f_1 - f_3 - f_4 + f_6)\{g(\phi Y_\lambda, Z_{-\lambda})\phi X_\lambda - g(\phi X_\lambda, Z_{-\lambda})\phi Y_\lambda\} &= \\ = (f_2 - f_5(1 - f_1 + f_3))\{g(\phi Y_\lambda, Z_{-\lambda})\phi X_\lambda - g(\phi X_\lambda, Z_{-\lambda})\phi Y_\lambda\} & \\ + f_7\sqrt{1 - f_1 + f_3} g(\phi Y_\lambda, Z_{-\lambda})X_\lambda - g(\phi X_\lambda, Z_{-\lambda})Y_\lambda. & \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

Como la dimensión es mayor o igual que 5, podemos tomar en la ecuación (3.1.24) campos  $X_\lambda$  e  $Y_\lambda$  unitarios y ortogonales entre sí, luego eligiendo  $Z_{-\lambda} = \phi X_\lambda$  obtenemos

$$(f_1 - f_3 - f_4 + f_6)(-\phi Y_\lambda) = (f_2 - f_5(1 - f_1 + f_3))(-\phi Y_\lambda) - f_7 Y_\lambda,$$

luego

$$\begin{aligned} f_1 - f_3 - f_4 + f_6 &= f_2 - f_5(1 - f_1 + f_3), \\ f_7 &= 0. \end{aligned}$$

De la última ecuación y de  $\nu = f_7 - f_8 = 0$ , deducimos que  $f_8 = 0$ . Por tanto, la variedad es un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_6)$  y el resto del resultado lo obtenemos aplicando el Teorema 2.2.12.  $\square$

**Nota 3.1.24.** Ya sabíamos que un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_8)$  con estructura de contacto métrica y dimensión mayor o igual que 5 no-Sasakiano cumple que  $\nu = f_7 - f_8 = 0$ , pero hemos podido probar también que  $f_7 = f_8 = 0$ . Por tanto, no existen  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s de dimensión mayor o igual que 5 y estructura de contacto métrica que no sean  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s. En efecto, si el  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. fuera no-Sasakiano, podemos aplicar el Teorema anterior y si es Sasakiano, entonces  $h = 0$ , luego en particular tendríamos que  $R_4 = \dots = R_8 = 0$ .

Veremos a continuación qué ocurre en dimensión 3. Análogamente a lo que pasa en el caso de  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s, la escritura del tensor de curvatura de Riemann de los  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s con estructura de contacto métrica y dimensión 3 no es única:



**Teorema 3.1.25.** Sea  $M^3(f_1, \dots, f_8)$  un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica tal que  $\kappa < 1$ . Si su tensor de curvatura puede escribirse simultáneamente como

$$R = f_1 R_1 + f_2 R_2 + f_3 R_3 + f_4 R_4 + f_5 R_5 + f_6 R_6 + f_7 R_7 + f_8 R_8 \quad (3.1.25)$$

y

$$R = f_1^* R_1 + f_2^* R_2 + f_3^* R_3 + f_4^* R_4 + f_5^* R_5 + f_6^* R_6 + f_7^* R_7 + f_8^* R_8, \quad (3.1.26)$$

entonces las funciones  $f_i$  y  $f_i^*$ ,  $i = 1, \dots, 8$ , están relacionadas de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} f_1^* &= f_1 + f, & f_2^* &= f_2 - f/3, & f_3^* &= f_3 + f, \\ f_4^* &= f_4 + \bar{f}, & f_6^* &= f_6 + \bar{f}, & f_7^* &= f_7 + \bar{\bar{f}}, & f_8^* &= f_8 + \bar{\bar{f}}, \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

donde  $f$ ,  $\bar{f}$  y  $\bar{\bar{f}}$  son funciones diferenciables en  $M$ .

*Demostración.* Por la Proposición 3.1.16, la variedad es un  $(\kappa, \nu, \nu)$ -espacio con

$$\begin{aligned} \kappa &= f_1 - f_3 = f_1^* - f_3^*, \\ \mu &= f_4 - f_6 = f_4^* - f_6^*, \\ \nu &= f_7 - f_8 = f_7^* - f_8^*. \end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos en virtud de la Proposición 3.1.20 que la curvatura  $\phi$ -seccional es

$$F = f_1 + 3f_2 = f_1^* + 3f_2^*.$$

Reuniendo todas las ecuaciones resulta entonces el siguiente sistema compatible indeterminado

$$\left. \begin{aligned} (f_1^* - f_1) + 3(f_2^* - f_2) &= 0 \\ (f_1^* - f_1) - (f_3^* - f_3) &= 0 \\ (f_4^* - f_4) - (f_6^* - f_6) &= 0 \\ (f_7^* - f_7) - (f_8^* - f_8) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

cuya solución general puede escribirse como (3.1.27).  $\square$

Veremos a continuación que el recíproco del Teorema 3.1.25 también es cierto.

**Teorema 3.1.26.** Sea  $M^3(f_1, \dots, f_8)$  un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica. Si definimos las funciones  $f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^*, f_6^*, f_7^*, f_8^*$  como en (3.1.27) para ciertas funciones  $f, \bar{f}, \bar{\bar{f}}$  en  $M$  y tomamos  $f_5^*$  arbitraria, entonces  $M^3$  es también un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M^3(f_1^*, \dots, f_8^*)$ .

*Demostración.* Si usamos la definición de  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. y (3.1.27) tenemos:

$$\begin{aligned} R &= \sum_{i=1}^8 f_i R_i = \sum_{i=1}^8 f_i^* R_i \\ &+ f(-R_1 + \frac{1}{3}R_2 - R_3) - \bar{f}(R_4 + R_6) + (f_5 - f_5^*)R_5 - \bar{\bar{f}}(R_7 + R_8). \end{aligned}$$

Para obtener (3.1.26) sería suficiente aplicar los Lemas 2.2.19 y 3.1.7.  $\square$

**Corolario 3.1.27.** Sea  $M^3(f_1, \dots, f_8)$  un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica. Entonces su tensor de curvatura puede escribirse como

$$R = f_1^* R_1 + f_3^* R_3 + f_4^* R_4 + f_7^* R_7,$$

es decir, es también un espacio  $M^3(f_1^*, 0, f_3^*, f_4^*, 0, 0, f_7^*, 0)$ , donde

$$f_1^* = f_1 + 3f_2, \quad f_3^* = f_3 + 3f_2, \quad f_4^* = f_4 - f_6, \quad f_7^* = f_7 - f_8.$$

*Demostración.* Bastaría usar el teorema anterior con funciones  $f = 3f_2$ ,  $\bar{f} = -f_6$ ,  $\bar{\bar{f}} = -f_8$  y  $f_5^* = 0$ .  $\square$

**Nota 3.1.28.** Si queremos considerar una forma única del tensor de curvatura de un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. de dimensión 3 y estructura de contacto métrica, elegiremos  $R$  satisfaciendo  $f_2^* = f_5^* = f_6^* = f_8^* = 0$  y diremos que tiene forma canónica.

**Nota 3.1.29.** Si  $M^3(f_1, \dots, f_8)$  es un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica, sabemos por las Proposiciones 3.1.16 y 3.1.20 que  $M^3$  es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con  $\kappa = f_1 - f_3$ ,  $\mu = f_4 - f_6$ ,  $\nu = f_7 - f_8$  y curvatura  $\phi$ -seccional  $F = f_1 + 3f_2$ . Por tanto, aplicando el Corolario anterior concluimos que su tensor de curvatura puede escribirse como

$$\begin{aligned} R &= (f_1 + 3f_2)R_1 + (f_3 + 3f_2)R_3 + (f_4 - f_6)R_6 + (f_7 - f_8)R_7 \\ &= (f_1 + 3f_2)R_1 + ((f_1 + 3f_2) - (f_1 - f_3))R_3 + (f_4 - f_6)R_6 + (f_7 - f_8)R_7 \\ &= FR_1 + (F - \kappa)R_3 + \mu R_4 + \nu R_7, \end{aligned}$$

que coincide con la ecuación (3.1.5) del Corolario 3.1.4.

También podemos calcular el operador de Ricci y la curvatura escalar de un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica y dimensión 3 (si su dimensión es mayor o igual que 5, sería por el Teorema 3.1.23 un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. y bastaría aplicar la Proposición 2.2.27).

**Proposición 3.1.30.** Dado un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M^3(f_1, \dots, f_8)$  con estructura de contacto métrica, el operador de Ricci tiene la forma

$$Q = (2f_1 + 3f_2 - f_3)I - (3f_2 + f_3)\eta \otimes \xi + (f_4 - f_6)h + (f_7 - f_8)\phi h \quad (3.1.28)$$

y la curvatura escalar viene dada por

$$\tau = 2(3f_1 + 3f_2 - 2f_3). \quad (3.1.29)$$

*Demostración.* Tomemos ahora una  $\phi$ -base  $\{E, \phi E, \xi\}$ . Usando la definición del operador de Ricci y la fórmula (2.2.36), con  $n = 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} QX &= (2f_1 + 3f_2 - f_3)X - (3f_2 + f_3)\eta(X)\xi + (f_4 - f_6)hX \\ &\quad + f_7(R_7(X, E)E + R_7(X, \phi E)\phi E + R_7(X, \xi)\xi) \\ &\quad + f_8(R_8(X, E)E + R_8(X, \phi E)\phi E + R_8(X, \xi)\xi). \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

Podemos calcular fácilmente que

$$\begin{aligned} R_7(X, E)E &= \phi hX + g(X, E)h\phi E + g(\phi hE, E)X - g(\phi hX, E)E, \\ R_7(X, \phi E)\phi E &= \phi hX - g(X, \phi E)hE - g(\phi hE, E)X - g(\phi hX, \phi E)\phi E, \\ R_7(X, \xi)\xi &= \phi hX. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} R_7(X, E)E + R_7(X, \phi E)\phi E + R_7(X, \xi)\xi & \\ &= \phi hX + g(X, E)h\phi E + g(\phi hE, E)X - g(\phi hX, E)E \\ &\quad + \phi hX - g(X, \phi E)hE - g(\phi hE, E)X - g(\phi hX, \phi E)\phi E + \phi hX \\ &= 3\phi hX + h(-g(X, \phi E)E + g(X, E)\phi E) - (g(\phi hX, E)E + g(\phi hX, \phi E)\phi E) \\ &= 3\phi hX + h(g(\phi X, E)E + g(\phi X, \phi E)\phi E) - (g(\phi hX, E)E + g(\phi hX, \phi E)\phi E) \\ &= 3\phi hX + h\phi X - \phi hX = 3\phi hX - \phi hX - \phi hX = \phi hX. \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

Análogamente, se calcula que

$$\begin{aligned} R_8(X, E)E + R_8(X, \phi E)\phi E &= 0, \\ R_8(X, \xi)\xi &= -\phi hX, \end{aligned}$$

luego

$$R_8(X, E)E + R_8(X, \phi E)\phi E + R_8(X, \xi)\xi = -\phi hX. \quad (3.1.32)$$

Al sustituir (3.1.31) y (3.1.32) en (3.1.30) obtenemos (3.1.28).

Hallamos por último la curvatura escalar usando la  $\phi$ -base anterior y la fórmula (3.1.28):

$$\begin{aligned} \tau = \text{tr}Q &= g(QE, E) + g(Q\phi E, \phi E) + g(Q\xi, \xi) = \\ &= 3(2f_1 + 3f_2 - f_3) - (3f_2 + f_3) = 2(3f_1 + 3f_2 - 2f_3). \end{aligned}$$

La ecuación (3.1.29) queda así probada.  $\square$

**Nota 3.1.31.** Las fórmulas (3.1.28) y (3.1.29) son una generalización para  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s de las probadas para  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s: (2.2.36) (con  $n = 1$ ) y la ecuación de la Proposición 2.2.39.

**Nota 3.1.32.** Por el Corolario 3.1.4, el tensor de curvatura de un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M^3(f_1, \dots, f_8)$  puede escribirse como

$$R = f_1^* R_1 + f_3^* R_4 + f_4^* R_4 + f_7^* R_7,$$

con funciones  $f_1^* = F$ ,  $f_2^* = F - \kappa$ ,  $f_4^* = \mu$  y  $f_7^* = \nu$ . En virtud de las fórmulas (3.1.28) y (3.1.29), el operador de Ricci y la curvatura escalar también vienen dados por:

$$Q = (2f_1^* - f_3^*)I - f_3^* \eta \otimes \xi + f_4^* h + f_7^* \phi h = (\kappa + F)I + (\kappa - F)\eta \otimes \xi + \mu h + \nu \phi h,$$

$$\tau = 2(3f_1^* - 2f_3^*) = 2(F + 2\kappa).$$

**Corolario 3.1.33.** Dado un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M^3(f_1, \dots, f_8)$  con estructura de contacto métrica,

$$Q\phi - \phi Q = 2((f_4 - f_6)h\phi + (f_7 - f_8)h). \quad (3.1.33)$$

Por tanto, en los puntos donde  $h \neq 0$ ,  $Q\phi = \phi Q$  si y sólo si  $f_4 - f_6 = f_7 - f_8 = 0$ .

*Demostración.* Por la fórmula (3.1.28),

$$Q\phi - \phi Q = (f_4 - f_6)(h\phi - \phi h) + (f_7 - f_8)(\phi h\phi - \phi^2 h).$$

Bastaría aplicar el Lema 1.2.3 para obtener (3.1.33).

Por tanto,  $Q\phi = \phi Q$  si y sólo si

$$(f_4 - f_6)h\phi + (f_7 - f_8)h = h((f_4 - f_6)\phi + (f_7 - f_8)I) = 0.$$

Donde  $h \neq 0$ , esta ecuación es equivalente a que  $(f_4 - f_6)\phi X + (f_7 - f_8)X = 0$ , para todo campo  $X$  ortogonal a  $\xi$ . Recordamos por último que  $X$  y  $\phi X$  son ortogonales entre sí, luego esta última ecuación es equivalente a  $f_4 - f_6 = f_7 - f_8 = 0$ .  $\square$

Ahora bien, sabemos por la Proposición 2.2.26 que, para una variedad de contacto métrica  $(M^3, \phi, \xi, \eta, g)$ , la condición  $Q\phi = \phi Q$  es equivalente a ser  $\eta$ -Einstein y a ser  $(\kappa, 0)$ -espacio, para cierta constante  $\kappa$ . Por tanto, teniendo en cuenta el Corolario anterior y la Proposición 3.1.16, podemos generalizar la Proposición 2.2.33 para  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. 's:

**Proposición 3.1.34.** Sea  $M^3(f_1, \dots, f_8)$  un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes en los puntos donde  $h \neq 0$ :

- (i)  $M^3$  es  $\eta$ -Einstein,
- (ii)  $Q\phi = \phi Q$ ,
- (iii)  $M^3$  es un  $(f_1 - f_3, 0)$ -espacio, donde  $f_1 - f_3$  es una constante,

$$(iv) f_4 - f_6 = f_7 - f_8 = 0,$$

donde  $Q$  denota el operador de Ricci.

En resumen, los  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s con estructura de contacto métrica son  $(\kappa, \mu)$ -espacios si la dimensión es mayor o igual que 5 (ya estudiados en la Sección 2.2) o  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacios si la dimensión es 3 (estudiados en [44]).

Sin embargo, los  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s de dimensión mayor o igual que 5 son más interesantes de estudiar con otras estructuras. Aunque veremos en la siguiente sección que no existen en dimensión mayor o igual que 5 si la estructura es casi-cosimpléctica o casi-Kenmotsu, sí que existen si escribimos el tensor  $R_5$  dividido (como ya hicimos para el caso de contacto métrico). Daremos asimismo ejemplos explícitos.

### 3.2. $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s con otras estructuras

En esta sección estudiaremos cómo se comportan los  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s con estructuras casi-cosimpléctica y casi-Kenmotsu, cuyas definiciones se recogieron en la sección 1.1. En primer lugar, se prueba el siguiente resultado de forma análoga a la Proposición 3.1.16, pues  $h$  tiene las mismas propiedades de simetría y anticonmutatividad con  $\phi$  (ver Sección 1.2).

**Proposición 3.2.1.** *Si  $M(f_1, \dots, f_8)$  es un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con estructura casi-cosimpléctica o casi-Kenmotsu, entonces es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con  $\kappa = f_1 - f_3$ ,  $\mu = f_4 - f_6$  y  $\nu = f_7 - f_8$ .*

Por tanto, podemos usar los variados resultados para  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacios que aparecen en la literatura.

El siguiente lema generaliza la ecuación (3.1.6), que era cierta para estructura de contacto métrica.

**Lema 3.2.2.** *Dado  $M$  un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio casi-cosimpléctico o casi-Kenmotsu, se cumple que*

$$\begin{aligned} R(\xi, X)Y &= \kappa(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X) + \mu(g(hX, Y)\xi - \eta(Y)hX) \\ &\quad + \nu(g(\phi hX, Y)\xi - \eta(Y)\phi hX), \end{aligned}$$

para todos  $X, Y$  campos diferenciables en  $M$ .

*Demostración.* Por la definición de  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio y las propiedades de  $R$  y  $h$  se tiene

que para todos los campos  $X, Y, Z$

$$\begin{aligned}
g(R(\xi, X)Y, Z) &= g(R(Y, Z)\xi, X) \\
&= g(\kappa(\eta(Z)Y - \eta(Y)Z) + \mu(\eta(Z)hY - \eta(Y)hZ) \\
&\quad + \nu(\eta(Z)\phi hY - \eta(Y)\phi hZ), X) \\
&= g(\kappa(g(Y, X)\xi - \eta(Y)X) + \mu(g(hY, X)\xi - \eta(Y)hX) \\
&\quad + \nu(g(\phi hY, X)\xi - \eta(Y)\phi hX), Z),
\end{aligned}$$

y usando que  $h$  es simétrica y que  $h\phi = -\phi h$  obtendríamos la ecuación buscada.  $\square$

Nos centraremos en primer lugar en los  $g(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s con estructura casi-cosimpléctica. Por la Proposición 3.2.1 sabemos que son  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacios casi-cosimpléticos, que han sido ampliamente estudiados. Para  $\mu = \nu = 0$ , P. Dacko publicó [25], donde demostraba que  $\kappa$  debe ser constante, y H. Endo presentó múltiples resultados en [31] y [32]. Este último autor también examinó en [33] y [34] los espacios con  $\nu = 0$  y  $\kappa, \mu$  constantes. Posteriormente, P. Dacko y Z. Olszak estudiaron en [26] y [27] los  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacios casi-cosimpléticos con  $\kappa, \mu$  y  $\nu$  funciones que sólo varían en la dirección del campo  $\xi$ .

Probaremos a continuación algunos resultados para cualesquiera funciones  $\kappa, \mu$  y  $\nu$ , que extienden y completan los anteriormente publicados.

**Proposición 3.2.3.** *Si  $M^{2n+1}$  es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura casi-cosimpléctica, entonces*

$$h^2 = \kappa\phi^2, \quad (3.2.1)$$

luego  $\kappa \leq 0$  y  $\kappa = 0$  si y sólo si  $h = 0$ . Además,

$$\begin{aligned}
(\nabla_Y\phi h)X - (\nabla_X\phi h)Y &= \kappa(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + \mu(\eta(Y)hX - \eta(X)hY) \\
&\quad + \nu(\eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY),
\end{aligned} \quad (3.2.2)$$

$$\nabla_\xi\phi h = \mu h + \nu\phi h, \quad (3.2.3)$$

$$\xi(\kappa) = 2\nu\kappa, \quad (3.2.4)$$

para todos  $X, Y$  campos en  $M$ .

Si  $\kappa = 0$ , entonces  $h = 0$  y  $M$  es variedad cosimpléctica si su dimensión es 3.

Si  $\kappa < 0$ , los autovalores de  $h$  son 0 (con multiplicidad 1) y  $\pm\lambda = \pm\sqrt{-\kappa}$  (cada uno con multiplicidad  $n$ ). Además, se cumple que  $\mu = -2g(\nabla_\xi X, \phi X)$  para todo campo  $X$  autovector de  $h$  asociado al autovalor  $\lambda$  o  $-\lambda$ .

*Demostración.* Podemos deducir de la definición de  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio o del Lema 3.2.2 que

$$R(\xi, X)\xi = \kappa\phi^2 X - \mu hX - \nu\phi hX, \quad (3.2.5)$$

para cualquier campo  $X$ . Además, podemos calcular:

$$\begin{aligned} R(\xi, \phi X)\xi &= -\kappa\phi X - \mu h\phi X - \nu hX, \\ \phi R(\xi, \phi X)\xi &= -\kappa\phi^2 X - \mu hX - \nu\phi hX. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Uniendo las ecuaciones (3.2.5) y (3.2.6), obtenemos que

$$\frac{1}{2}(R(\xi, X)\xi - \phi R(\xi, \phi X)\xi) = \kappa\phi^2 X.$$

Ahora bien, sabemos por el Lema 1.2 de [31] que en una variedad casi-cosimpléctica se cumple que

$$\frac{1}{2}(R(\xi, X)\xi - \phi R(\xi, \phi X)\xi) = h^2 X.$$

Igualando ambas ecuaciones obtenemos (3.2.1). Dado un campo  $X$  ortogonal a  $\xi$ , tenemos entonces que

$$g(hX, hX) = g(h^2 X, X) = \kappa g(\phi^2 X, X) = -\kappa g(X, X),$$

luego  $\kappa \leq 0$  y deducimos que  $\kappa = 0$  si y sólo si  $h = 0$  por ser  $h$  simétrica.

Si  $\kappa = 0$ , entonces  $h = 0$  y en virtud de (1.2.2) obtenemos que  $\nabla\xi = 0$ . Si  $M$  es de dimensión 3, basta aplicar el Corolario 5.6. de [51], que dice que una variedad casi-contacto métrica de dimensión 3 es cosimpléctica si y sólo si  $\nabla\xi = 0$ .

Por ser  $M$  casi-cosimpléctica, tenemos por el Lema 1.1 de [34] que

$$R(X, Y)\xi = (\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y,$$

por lo que bastaría igualar esta ecuación y (3.1.1) para conseguir (3.2.2).

Si hacemos  $Y = \xi$  en (3.2.2), deducimos que

$$(\nabla_\xi \phi h)X - (\nabla_X \phi h)\xi = -\kappa\phi^2 X + \mu hX + \nu\phi hX.$$

Por otro lado, si usamos  $h\xi = 0$ ,  $\nabla_X \xi = -\phi hX$  y (3.2.1), entonces

$$(\nabla_X \phi h)\xi = \nabla_X \phi h\xi - \phi h\nabla_X \xi = \phi h\phi hX = -\phi^2 h^2 X = h^2 X = \kappa\phi^2 X,$$

y al sustituir en la ecuación anterior obtenemos (3.2.3).

Si  $\kappa = 0$ , entonces (3.2.4) es trivial. Si  $\kappa < 0$ , por las propiedades de  $\phi$  y de  $h$  sabemos que los autovalores de  $h$  son 0 (con multiplicidad 1) y  $\pm\lambda = \pm\sqrt{-\kappa} \neq 0$  (cada uno con multiplicidad  $n$ ). Tomemos un campo unitario  $X$ , autovector de  $h$  asociado al autovalor  $\lambda = \sqrt{-\kappa}$  (denotado  $X \in D(\lambda)$ ), que es ortogonal a  $\xi$  y cumple por (3.2.3) que

$$(\nabla_\xi \phi h)X = \mu hX + \nu\phi hX = \lambda\mu X + \lambda\nu\phi X. \quad (3.2.7)$$

Multiplicando (3.2.7) por  $\phi X$  a ambos lados se tiene que

$$\begin{aligned}
\lambda\nu &= g((\nabla_\xi\phi h)X, \phi X) = g(\nabla_\xi\lambda\phi X - \phi h\nabla_\xi X, \phi X) \\
&= g(\xi(\lambda)\phi X + \lambda\nabla_\xi\phi X - \phi h\nabla_\xi X, \phi X) \\
&= \xi(\lambda) + \lambda g(\nabla_\xi\phi X, \phi X) - g(\phi h\nabla_\xi X, \phi X) = \xi(\lambda) - g(\nabla_\xi X, \phi h\phi X) \\
&= \xi(\lambda) - g(\nabla_\xi X, hX) = \xi(\lambda) - \lambda g(\nabla_\xi X, X) = \xi(\lambda) = -\frac{1}{2\lambda}\xi(\kappa),
\end{aligned}$$

de donde despejando obtenemos  $\xi(\kappa) = -2\lambda^2\nu = 2\kappa\nu$ , es decir, (3.2.4).

Si hacemos ahora el producto de (3.2.7) por  $X$ :

$$\begin{aligned}
\lambda\mu &= g((\nabla_\xi\phi h)X, X) = g(\nabla_\xi\lambda\phi X - \phi h\nabla_\xi X, X) = g(\xi(\lambda)\phi X + \lambda\nabla_\xi\phi X - \phi h\nabla_\xi X, X) \\
&= \lambda g(\nabla_\xi\phi X, X) - g(\nabla_\xi X, \phi hX) = \lambda(\xi(g(X, \phi X)) - g(\nabla_\xi X, \phi X)) - \lambda g(\nabla_\xi X, \phi X) \\
&= -2\lambda g(\nabla_\xi X, \phi X).
\end{aligned}$$

Además, tenemos por hipótesis que  $\lambda \neq 0$ , luego  $\mu = -2g(\nabla_\xi X, \phi X)$  para todo  $X \in D(\lambda)$ .

Si tomamos  $X$  autovector de  $h$  asociado al autovalor  $-\lambda$ , volvemos a conseguir las mismas ecuaciones.  $\square$

**Nota 3.2.4.** *P. Dacko y Z. Olszak demostraron en [26] que si en un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio generalizado con estructura casi-cosimpléctica y funciones  $\kappa$ ,  $\mu$  y  $\nu$  que sólo varían en la dirección de  $\xi$  se cumple que  $\kappa = 0$  en un punto, entonces  $\kappa$  se anula en todo punto. Si el espacio tiene dimensión mayor o igual que 5, demostraremos más adelante que las funciones  $\kappa$ ,  $\mu$  y  $\nu$  sólo varían en la dirección de  $\xi$  (Teorema 3.2.8), luego la función  $\kappa$  es nula o menor que 0 en todo punto de la variedad.*

*En dimensión 3, análogamente al caso de contacto métrico (ver Nota 3.1.1), cuando escribamos que  $M$  es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura casi-cosimpléctica y  $\kappa = 0$  o  $\kappa < 0$  también queremos decir que la función  $\kappa$  cumple la condición en todo punto de  $M$ . Para ello bastaría tomar  $B = \{p \in M / \kappa(p) = 0\}$  y redefinir  $M$  como  $M - B$ , que sería subconjunto abierto de  $M$  y por tanto también variedad.*

Mostraremos ahora algunas fórmulas que necesitaremos en resultados posteriores.

**Proposición 3.2.5.** *Si  $M$  es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura casi-cosimpléctica y  $\kappa < 0$ , entonces para cualesquiera campos  $X, Y$  se cumple:*

$$(\nabla_X\phi)Y = g(hX, Y)\xi - \eta(Y)hX, \quad (3.2.8)$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_Y h)X - (\nabla_X h)Y &= \kappa(\eta(X)\phi Y - \eta(Y)\phi X + 2g(X, \phi Y)\xi) \\
&\quad + \mu(\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX) - \nu(\eta(X)hY - \eta(Y)hX).
\end{aligned} \quad (3.2.9)$$



*Demostración.* Por el Lema 1.2 de [34], sabemos que

$$2(\nabla_{hX}\phi)Y = -R(\xi, X)Y - \phi R(\xi, X)\phi Y + \phi R(\xi, \phi X)Y - R(\xi, \phi X)\phi Y.$$

Usando ahora la fórmula de  $R(\xi, X)Y$  del Lema 3.2.2, conseguimos que

$$(\nabla_{hX}\phi)Y = \kappa(\eta(Y)X - g(X, Y)\xi),$$

para todos  $X, Y$ . Si sustituimos  $X$  por  $hX$  y usamos la Proposición 3.2.3 y el hecho de que  $\nabla_\xi\phi = 0$  (por ser la variedad casi-cosimpléctica), obtenemos

$$-\kappa(\nabla_X\phi)Y = \kappa(\eta(Y)hX - g(hX, Y)\xi).$$

Como además tenemos que  $\kappa < 0$ , la ecuación (3.2.8) se deduce ya trivialmente.

Puede comprobarse fácilmente que

$$(\nabla_X\phi h)Y - (\nabla_Y\phi h)X = (\nabla_X\phi)hY - (\nabla_Y\phi)hX + \phi((\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X). \quad (3.2.10)$$

Ahora bien, sabemos por (3.2.8) que

$$(\nabla_X\phi)hY - (\nabla_Y\phi)hX = g(hX, hY)\xi - \eta(hY)hX - g(hY, hX)\xi + \eta(hX)hY = 0,$$

luego por (3.2.2) y (3.2.10) tenemos que

$$\begin{aligned} \phi((\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X) &= (\nabla_X\phi h)Y - (\nabla_Y\phi h)X = \\ &= \kappa(\eta(X)Y - \eta(Y)X) + \mu(\eta(X)hY - \eta(Y)hX) + \nu(\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX). \end{aligned}$$

Si aplicamos  $\phi$  a ambos términos y usamos las propiedades del operador  $h$ ,

$$\begin{aligned} (\nabla_Y h)X - (\nabla_X h)Y &= -\eta((\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X)\xi + \kappa(\eta(X)\phi Y - \eta(Y)\phi X) \\ &\quad + \mu(\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX) - \nu(\eta(X)hY - \eta(Y)hX). \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Por otro lado, de  $h\xi = 0$ , (3.2.1) y (1.2.2) obtenemos que:

$$\begin{aligned} \eta((\nabla_X h)Y) &= g(\nabla_X hY, \xi) = -g(\nabla_X \xi, hY) = -g(h\nabla_X \xi, Y) = g((\nabla_X h)\xi, Y), \\ (\nabla_X h)\xi &= \nabla_X h\xi - h\nabla_X \xi = h\phi hX = -\kappa\phi^3 X = \kappa\phi X. \end{aligned}$$

De ambas ecuaciones deducimos

$$\eta((\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X) = g((\nabla_X h)\xi, Y) - g((\nabla_Y h)\xi, X) = -2\kappa g(X, \phi Y),$$

que al sustituir en (3.2.11) da (3.2.9). □

**Nota 3.2.6.** Aunque la ecuación (3.2.9) del Lema anterior se haya probado únicamente para  $\kappa < 0$ , es también trivialmente cierta para  $\kappa = 0$ . En efecto, si  $\kappa = 0$ , entonces  $h^2 = 0$  por la ecuación (3.2.1) y obtenemos que  $h = 0$  por ser  $h$  un operador simétrico. Es obvio por lo tanto que se cumple (3.2.9).

A continuación demostraremos que en dimensión mayor o igual que 5, las funciones  $\kappa, \mu$  y  $\nu$  sólo varían en la dirección de  $\xi$ . Para ello necesitaremos el siguiente lema.

**Lema 3.2.7.** *Si  $M$  es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura casi-cosimpléctica, entonces*

$$\begin{aligned} & \xi(\kappa)(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + \xi(\mu)(\eta(Y)hX - \eta(X)hY) + \xi(\nu)(\eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY) \\ & - X(\kappa)\phi^2 Y + X(\mu)hY + X(\nu)\phi hY + Y(\kappa)\phi^2 X - Y(\mu)hX - Y(\nu)\phi hX = 0, \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

para todos  $X, Y, Z$  campos en  $M$ .

*Demostración.* Probaremos el resultado de manera similar al Lema 4.3. de [44], que afirma que la ecuación (3.2.12) es cierta para  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacios con estructura de contacto métrica. Si derivamos la ecuación (3.1.1) a lo largo de un campo arbitrario  $Z$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} \nabla_Z R(X, Y)\xi &= Z(\kappa)(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + Z(\mu)(\eta(Y)hX - \eta(X)hY) \\ &+ \nabla_Z(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + \nabla_Z(\eta(Y)hX - \eta(X)hY) \\ &+ \nabla_Z(\eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY), \end{aligned}$$

para todos  $X, Y, Z$ .

Ahora bien, si usamos (1.2.2) y el hecho de que  $\nabla$  es la conexión de Levi-Civita de  $g$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla_Z(\eta(Y)X - \eta(X)Y) &= Z(\eta(Y))X + \eta(Y)\nabla_Z X - Z(\eta(X))Y - \eta(X)\nabla_Z Y \\ &= (g(\nabla_Z Y, \xi) + g(Y, \nabla_Z \xi))X + \eta(Y)\nabla_Z X \\ &\quad - (g(\nabla_Z X, \xi) + g(X, \nabla_Z \xi))Y - \eta(X)\nabla_Z Y \\ &= \eta(\nabla_Z Y)X - g(Y, \phi hZ)X + \eta(Y)\nabla_Z X \\ &\quad - (\eta(\nabla_Z X)Y - g(X, \phi hZ)Y + \eta(X)\nabla_Z Y), \end{aligned}$$

para todos  $X, Y, Z$ .

Si desarrollamos análogamente los otros sumandos conseguimos:

$$\begin{aligned} \nabla_Z R(X, Y)\xi &= Z(\kappa)(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + Z(\mu)(\eta(Y)hX - \eta(X)hY) \\ &\quad + Z(\nu)(\eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY) \\ &+ \kappa(\eta(\nabla_Z Y)X - g(Y, \phi hZ)X + \eta(Y)\nabla_Z X \\ &\quad - (\eta(\nabla_Z X)Y - g(X, \phi hZ)Y + \eta(X)\nabla_Z Y)) \\ &+ \mu(\eta(\nabla_Z Y)hX - g(Y, \phi hZ)hX + \eta(Y)\nabla_Z hX \\ &\quad - (\eta(\nabla_Z X)hY - g(X, \phi hZ)hY + \eta(X)\nabla_Z hY)) \\ &+ \nu(\eta(\nabla_Z Y)\phi hX - g(Y, \phi hZ)\phi hX + \eta(Y)\nabla_Z \phi hX \\ &\quad - (\eta(\nabla_Z X)\phi hY - g(X, \phi hZ)\phi hY + \eta(X)\nabla_Z \phi hY), \end{aligned}$$

para todos  $X, Y, Z$ .

De la expresión anterior, (3.1.1) y (1.2.2), deducimos que

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z R)(X, Y)\xi &= \nabla_Z R(X, Y)\xi - R(\nabla_Z X, Y)\xi - R(X, \nabla_Z Y)\xi - R(X, Y)\nabla_Z \xi \\
&= Z(\kappa)(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + Z(\mu)(\eta(Y)hX - \eta(X)hY) \\
&\quad + Z(\nu)(\eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY) \\
&\quad + \kappa(-g(Y, \phi hZ)X + g(X, \phi hZ)Y) \\
&\quad + \mu(-g(Y, \phi hZ)hX + g(X, \phi hZ)hY + \eta(Y)(\nabla_Z h)X - \eta(X)(\nabla_Z h)Y) \\
&\quad + \nu(-g(Y, \phi hZ)\phi hX + g(X, \phi hZ)\phi hY + \eta(Y)(\nabla_Z \phi h)X - \eta(X)(\nabla_Z \phi h)Y), \\
&\quad + R(X, Y)\phi hZ,
\end{aligned}$$

para todos  $X, Y, Z$ .

Si sustituimos la expresión anterior en la segunda identidad de Bianchi

$$(\nabla_Z R)(X, Y)\xi + (\nabla_X R)(Y, Z)\xi + (\nabla_Y R)(Z, X)\xi = 0,$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
&Z(\kappa)(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + Z(\mu)(\eta(Y)hX - \eta(X)hY) + Z(\nu)(\eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY) \\
&X(\kappa)(\eta(Z)Y - \eta(Y)Z) + X(\mu)(\eta(Z)hY - \eta(Y)hZ) + X(\nu)(\eta(Z)\phi hY - \eta(Y)\phi hZ) \\
&Y(\kappa)(\eta(X)Z - \eta(Z)X) + Y(\mu)(\eta(X)hZ - \eta(Z)hX) + Y(\nu)(\eta(X)\phi hZ - \eta(Z)\phi hX) \\
&\quad + \mu(\eta(Y)((\nabla_Z h)X - (\nabla_X h)Z) + \eta(Z)((\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X) \\
&\quad \quad + \eta(X)((\nabla_Y h)Z - (\nabla_Z h)Y)) \\
&\quad + \nu(\eta(Y)((\nabla_Z \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Z) + \eta(Z)((\nabla_X \phi h)Y - (\nabla_Y \phi h)X) \\
&\quad \quad + \eta(X)((\nabla_Y \phi h)Z - (\nabla_Z \phi h)Y)) \\
&\quad + R(X, Y)\phi hZ + R(Y, Z)\phi hX + R(Z, X)\phi hY = 0,
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

para todos  $X, Y, Z$ .

Usando la ecuación (3.2.9) y la Nota 3.2.6, puede comprobarse que

$$\begin{aligned}
&\eta(Y)((\nabla_Z h)X - (\nabla_X h)Z) + \eta(Z)((\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X) + \eta(X)((\nabla_Y h)Z - (\nabla_Z h)Y) \\
&\quad = -2\kappa(\eta(Y)g(\phi X, Z) + \eta(Z)g(\phi Y, X) + \eta(X)g(\phi Z, Y))\xi.
\end{aligned}$$

De la ecuación (3.2.2) obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\eta(Y)((\nabla_Z \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Z) + \eta(Z)((\nabla_X \phi h)Y - (\nabla_Y \phi h)X) \\
&\quad + \eta(X)((\nabla_Y \phi h)Z - (\nabla_Z \phi h)Y) = 0.
\end{aligned}$$

Sustituyendo ambas ecuaciones en (3.2.13) quedaría:

$$\begin{aligned}
& Z(\kappa)(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + Z(\mu)(\eta(Y)hX - \eta(X)hY) + Z(\nu)(\eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY) \\
& X(\kappa)(\eta(Z)Y - \eta(Y)Z) + X(\mu)(\eta(Z)hY - \eta(Y)hZ) + X(\nu)(\eta(Z)\phi hY - \eta(Y)\phi hZ) \\
& Y(\kappa)(\eta(X)Z - \eta(Z)X) + Y(\mu)(\eta(X)hZ - \eta(Z)hX) + Y(\nu)(\eta(X)\phi hZ - \eta(Z)\phi hX) \\
& - 2\kappa\mu(\eta(Y)g(\phi X, Z) + \eta(Z)g(\phi Y, X) + \eta(X)g(\phi Z, Y))\xi \\
& + R(X, Y)\phi hZ + R(Y, Z)\phi hX + R(Z, X)\phi hY = 0.
\end{aligned}$$

Si hacemos  $Z = \xi$  en esta última ecuación, tenemos que:

$$\begin{aligned}
& \xi(\kappa)(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + \xi(\mu)(\eta(Y)hX - \eta(X)hY) + \xi(\nu)(\eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY) \\
& - X(\kappa)\phi^2 Y + X(\mu)hY + X(\nu)\phi hY + Y(\kappa)\phi^2 X - Y(\mu)hX - Y(\nu)\phi hX, \\
& - 2\kappa\mu g(\phi Y, X)\xi + R(Y, \xi)\phi hX + R(\xi, X)\phi hY = 0.
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Basta usar el Lema 3.2.2 y la ecuación (3.2.1) para comprobar que

$$\begin{aligned}
& - 2\kappa\mu g(\phi Y, X)\xi + R(Y, \xi)\phi hX + R(\xi, X)\phi hY \\
& = - 2\kappa\mu g(\phi Y, X)\xi + \kappa g(X, \phi hY)\xi + \mu g(hX, \phi hY)\xi + \nu g(\phi hX, \phi hY)\xi \\
& - \kappa g(Y, \phi hX)\xi - \mu g(hY, \phi hX)\xi - \nu g(\phi hY, \phi hX)\xi \\
& = - 2\kappa\mu g(\phi Y, X)\xi + 2\mu g(hX, \phi hY)\xi = - 2\kappa\mu g(\phi Y, X)\xi + 2\kappa\mu g(\phi Y, X)\xi = 0,
\end{aligned}$$

que al sustituir en (3.2.14) nos da (3.2.12).  $\square$

Podemos usar el Lema anterior para probar lo siguiente:

**Teorema 3.2.8.** *Si  $M^{2n+1}$  es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura casi-cosimpléctica de dimensión mayor o igual que 5, entonces*

$$X(\kappa) = X(\mu) = X(\nu) = 0,$$

para todo campo  $X$  ortogonal a  $\xi$ , es decir, las funciones  $\kappa$ ,  $\mu$  y  $\nu$  sólo varían en la dirección de  $\xi$ .

*Demostración.* Si  $\kappa = 0$ , entonces  $h = 0$ , luego podemos tomar  $\mu = \nu = 0$  en (3.1.1) y el resultado se obtendría trivialmente.

Si  $\kappa < 0$ , podemos tomar, gracias a la Proposición 3.2.3, una base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n, \phi e_1, \dots, \phi e_n, \xi\}$  tal que  $he_i = \lambda e_i$ , donde  $\lambda = \sqrt{-\kappa} \neq 0$ . Por el lema anterior, sabemos que se cumple (3.2.12).

Si tomamos  $X = e_i, Y = \phi e_i$  en (3.2.12) y hacemos el producto con  $e_i$  y  $\phi e_i$ , obtenemos que para cualquier  $i = 1, \dots, n$ :

$$-\phi e_i(\kappa) - \lambda \phi e_i(\mu) + \lambda e_i(\nu) = 0,$$

$$e_i(\kappa) - \lambda e_i(\mu) - \lambda \phi e_i(\nu) = 0.$$

Si elegimos  $X = e_i, Y = e_j$ , con  $i \neq j$  (posible porque la dimensión es mayor o igual que 5) y hacemos el producto por  $e_j$  y  $\phi e_j$ , entonces para todo  $i = 1, \dots, n$ :

$$e_i(\kappa) + \lambda e_i(\mu) = 0,$$

$$e_i(\nu) = 0.$$

Si hacemos  $X = \phi e_i, Y = \phi e_j$  (con  $i \neq j$ ) en (3.2.12), y multiplicamos por  $e_i$  y  $\phi e_i$ , tenemos que para cualquier  $i = 1, \dots, n$  se cumple:

$$\phi e_i(\kappa) - \lambda \phi e_i(\mu) = 0,$$

$$\phi e_i(\nu) = 0.$$

Uniendo todas las ecuaciones se obtiene un sistema de solución

$$e_i(\kappa) = \phi e_i(\kappa) = e_i(\mu) = \phi e_i(\mu) = e_i(\nu) = \phi e_i(\nu) = 0,$$

para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Luego  $X(\kappa) = X(\mu) = X(\nu) = 0$ , para todo campo  $X$  ortogonal a  $\xi$ .  $\square$

Por tanto, si la dimensión es mayor o igual que 5 podemos usar los resultados de [26] y [27], que resumiremos a continuación. La dimensión 3 se estudiará aparte al final de la sección.

**Proposición 3.2.9.** [26] *Sea  $M^{2n+1}$  un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura casi-cosimpléctica, donde  $\kappa, \mu, \nu$  sólo varían en la dirección de  $\xi$ .*

*Si  $\kappa = 0$  en algún punto de  $M$ , entonces  $\kappa$  es la función idénticamente nula en  $M$  y  $h = 0$ , luego se cumpliría que  $R(X, Y)\xi = 0$  para todos  $X, Y$  en  $M$ . Además,  $M$  es localmente el producto de un intervalo abierto y de una variedad casi-Kähler.*

*Si  $\kappa < 0$ , entonces los autovalores de  $h$  son 0 (con multiplicidad 1) y  $\pm\sqrt{-\kappa}$  (cada uno con multiplicidad  $n$ ). En particular,  $\kappa$  es constante si y sólo si  $\nu = 0$ .*

Consideremos una transformación  $D$ -homotética de la estructura casi-contacto métrica  $(\phi, \xi, \eta, g)$  (ver [26]) definida como

$$\bar{\phi} = \phi, \quad \bar{\xi} = \frac{1}{\beta}\xi, \quad \bar{\eta} = \beta\eta, \quad \bar{g} = \alpha g + (\beta^2 - \alpha)\eta \otimes \eta, \quad (3.2.15)$$

donde  $\alpha$  es una constante positiva y  $\beta$  una función que sólo varía en la dirección de  $\xi$  y no se anula en ningún punto de la variedad.

**Proposición 3.2.10.** [26, Prop.1 y 2] Si  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$  es una variedad casi-cosimpléctica, el tensor  $\bar{h}$  y la conexión de Levi-Civita  $\bar{\nabla}$  de la variedad transformada se relacionan con los originales de la siguiente forma:

$$\bar{h} = \frac{1}{\beta}h, \quad (3.2.16)$$

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{\beta^2 - \alpha}{\beta^2}g(\phi h X, Y)\xi + \frac{\xi(\beta)}{\beta}\eta(X)\eta(Y)\xi, \quad (3.2.17)$$

para todos  $X, Y$  campos en  $M$ .

**Proposición 3.2.11.** [26, Prop.3 y 7] Los  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacios con estructura casi-cosimpléctica, donde  $\kappa, \mu, \nu$  sólo varían en la dirección de  $\xi$ , se transforman en  $(\bar{\kappa}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$ -espacios con estructura casi-cosimpléctica con

$$\bar{\kappa} = \frac{\kappa}{\beta^2}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\beta}, \quad \bar{\nu} = \frac{\nu\beta - \xi(\beta)}{\beta^2},$$

donde  $\bar{\kappa}, \bar{\mu}, \bar{\nu}$  sólo varían en la dirección de  $\bar{\xi}$ .

Por tanto, todo  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura casi-cosimpléctica y  $\kappa < 0$  puede transformarse en un  $(-1, \bar{\mu}, 0)$ -espacio casi-cosimpléctico con  $\bar{\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{-\kappa}}$ .

Por la Proposición 3.2.11 podemos obtener la forma que adquiere el tensor de curvatura de Riemann de un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio casi-cosimpléctico estudiando la forma de un  $(\kappa, \mu)$ -espacio con dicha estructura. Por la Proposición 3.2.3, sabemos que estos últimos cumplen  $\xi(\kappa) = 0$ , luego en dimensión mayor o igual que 5  $\kappa$  sería constante y  $\mu$  sólo variaría en la dirección de  $\xi$ . Esto implica que podemos usar los resultados de [34], pues, aunque en dicho artículo Endo se centra en  $(\kappa, \mu)$ -espacios casi-cosimplécticos con  $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$ , un repaso de las demostraciones nos lleva a comprobar que también son ciertos en el caso de que  $\mu$  no sea constante pero sólo varíe en la dirección de  $\xi$ . Podemos utilizar entonces el Teorema 3.1 de [34], que quedaría así en nuestro caso:

**Teorema 3.2.12.** Si  $M$  es un  $(\kappa, \mu)$ -espacio con estructura casi-cosimpléctica y  $\kappa < 0$ , donde  $\kappa, \mu$  sólo varían en la dirección de  $\xi$ , entonces

$$\begin{aligned} R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_{-\lambda} &= \kappa\{g(\phi Y_\lambda, Z_{-\lambda})\phi X_\lambda - g(\phi X_\lambda, Z_{-\lambda})\phi Y_\lambda\}, \\ R(X_{-\lambda}, Y_{-\lambda})Z_\lambda &= \kappa\{g(\phi Y_{-\lambda}, Z_\lambda)\phi X_{-\lambda} - g(\phi X_{-\lambda}, Z_\lambda)\phi Y_{-\lambda}\}, \\ R(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_{-\lambda} &= -\kappa g(X_\lambda, \phi Z_{-\lambda})\phi Y_{-\lambda}, \\ R(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_\lambda &= -\kappa g(Z_\lambda, \phi Y_{-\lambda})\phi X_\lambda, \\ R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_\lambda &= 0, \\ R(X_{-\lambda}, Y_{-\lambda})Z_{-\lambda} &= 0, \end{aligned}$$

donde  $X_{\pm\lambda}, Y_{\pm\lambda}, Z_{\pm\lambda}$  son autovectores de  $h$  asociados a los autovalores  $\pm\lambda = \pm\sqrt{-\kappa}$ .

Usando el teorema anterior y el Lema 3.2.2, daremos explícitamente la forma que adquiere el tensor de curvatura de un  $(\kappa, \mu)$ -espacio con estructura casi-cosimpléctica y  $\kappa < 0$ . Recuérdese que los tensores  $R_1, \dots, R_6$  están definidos en (2.1.1) y  $R_{5,2}$  en (2.3.17).

**Teorema 3.2.13.** *Sea  $M$  un  $(\kappa, \mu)$ -espacio de dimensión mayor o igual que 5 con estructura casi-cosimpléctica y  $\kappa < 0$ . Entonces su tensor de curvatura de Riemann puede escribirse como*

$$R = -\kappa R_3 - R_{5,2} - \mu R_6.$$

Por tanto,  $M$  es un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$  con funciones

$$f_1 = f_2 = 0, \quad f_3 = -\kappa, \quad f_4 = f_{5,1} = 0, \quad f_{5,2} = -1 \quad \text{y} \quad f_6 = -\mu.$$

*Demostración.* Como  $\kappa < 0$ , sabemos por la Proposición 3.2.9 que  $TM = D(\lambda) \oplus D(-\lambda) \oplus \langle \xi \rangle$ , donde  $\lambda = \sqrt{-\kappa} > 0$ . Dado  $X$  campo diferenciable en  $M$ , podemos escribir  $X = X_\lambda + X_{-\lambda} + \eta(X)\xi$ , donde  $X_{\pm\lambda}$  es un autovector de  $h$  asociado al autovalor  $\pm\lambda$ . Entonces, por las propiedades de  $R$  obtenemos que

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= R(X_\lambda + X_{-\lambda}, Y_\lambda + Y_{-\lambda})(Z_\lambda + Z_{-\lambda}) + \eta(X)R(\xi, Y)Z \\ &\quad + \eta(Y)R(X, \xi)Z + \eta(Z)R(X_\lambda + X_{-\lambda}, Y_\lambda + Y_{-\lambda})\xi, \end{aligned}$$

de donde usando (2.2.1) conseguimos

$$R(X, Y)Z = R(X_\lambda + X_{-\lambda}, Y_\lambda + Y_{-\lambda})(Z_\lambda + Z_{-\lambda}) + \eta(X)R(\xi, Y)Z + \eta(Y)R(X, \xi)Z. \quad (3.2.18)$$

Por el Lema 3.2.2 (con  $\nu = 0$ ) y la definición de los tensores  $R_1, \dots, R_6$ , podemos comprobar que

$$\eta(X)R(\xi, Y)Z + \eta(Y)R(X, \xi)Z = -\kappa R_3(X, Y)Z - \mu R_6(X, Y)Z. \quad (3.2.19)$$

Por el Teorema 3.2.12, obtenemos que

$$\begin{aligned} &R(X_\lambda + X_{-\lambda}, Y_\lambda + Y_{-\lambda})(Z_\lambda + Z_{-\lambda}) = \\ &= R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_\lambda + R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_{-\lambda} + R(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_\lambda + R(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_{-\lambda} \\ &\quad + R(X_{-\lambda}, Y_\lambda)Z_\lambda + R(X_{-\lambda}, Y_\lambda)Z_{-\lambda} + R(X_{-\lambda}, Y_{-\lambda})Z_\lambda + R(X_{-\lambda}, Y_{-\lambda})Z_{-\lambda} \\ &= \kappa \{ g(X_\lambda, \phi Z_{-\lambda})\phi Y_\lambda - g(Y_\lambda, \phi Z_{-\lambda})\phi X_\lambda + g(Y_{-\lambda}, \phi Z_\lambda)\phi X_\lambda - g(X_\lambda, \phi Z_{-\lambda})\phi Y_{-\lambda} \\ &\quad - g(X_{-\lambda}, \phi Z_\lambda)\phi Y_\lambda + g(Y_\lambda, \phi Z_{-\lambda})\phi X_{-\lambda} - g(Y_{-\lambda}, \phi Z_\lambda)\phi X_{-\lambda} + g(X_{-\lambda}, \phi Z_\lambda)\phi Y_{-\lambda} \} \\ &= \kappa \{ (g(X_\lambda, \phi Z_{-\lambda}) - g(X_{-\lambda}, \phi Z_\lambda))(\phi Y_\lambda - \phi Y_{-\lambda}) \\ &\quad - (g(Y_\lambda, \phi Z_{-\lambda}) - g(Y_{-\lambda}, \phi Z_\lambda))(\phi X_\lambda - \phi X_{-\lambda}) \}. \end{aligned}$$

Ahora bien, de la descomposición  $X = X_\lambda + X_{-\lambda} + \eta(X)\xi$  puede deducirse que  $X_\lambda = \frac{1}{2}(X - \eta(X)\xi + \frac{1}{\lambda}hX)$  y que  $X_{-\lambda} = \frac{1}{2}(X - \eta(X)\xi - \frac{1}{\lambda}hX)$ , luego

$$\begin{aligned}
R(X_\lambda + X_{-\lambda}, Y_\lambda + Y_{-\lambda})(Z_\lambda + Z_{-\lambda}) &= \\
&= \kappa\{(g(X_\lambda, \phi Z_{-\lambda}) - g(X_{-\lambda}, \phi Z_\lambda)(\phi Y_\lambda - \phi Y_{-\lambda}) \\
&\quad + (g(Y_{-\lambda}, \phi Z_\lambda) - g(Y_\lambda, \phi Z_{-\lambda})(\phi X_\lambda - \phi X_{-\lambda}))\} \\
&= \kappa\{\frac{1}{\lambda}g(hX, \phi Z)\frac{1}{\lambda}\phi hY - \frac{1}{\lambda}g(hY, \phi Z)\frac{1}{\lambda}\phi hX\} \\
&= \frac{\kappa}{\lambda^2}\{-g(\phi hX, Z)\phi hY + g(\phi hY, Z)\phi hX\} = -R_{5,2}(X, Y)Z.
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Sustituyendo (3.2.19) y (3.2.20) en (3.2.18), concluimos que

$$R(X, Y)Z = -\kappa R_3(X, Y)Z - \mu R_6(X, Y)Z - R_{5,2}(X, Y)Z,$$

para todos  $X, Y, Z$  campos en  $M$ . □

**Nota 3.2.14.** *Por el Teorema anterior, todo  $(\kappa, 0)$ -espacio casi-cosimpléctico con  $\kappa =$  constante  $< 0$  tiene tensor de curvatura  $R = -\kappa R_3 - R_{5,2}$ , lo que coincide con el Lema 5 de [25].*

*Además, el teorema es análogo al Teorema 2.3.22, que trata los  $(\kappa, \mu)$ -espacios con estructura de contacto métrica y  $\kappa < 1$ .*

**Ejemplo 3.2.15.** *Por la Proposición 3.2.11, sabemos que todo  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura casi-cosimpléctica y  $\kappa < 0$  puede transformarse en un  $(-1, \bar{\mu}, 0)$ -espacio casi-cosimpléctico con  $\bar{\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{-\kappa}}$ . P. Dacko y Z. Olszak dieron en [27] modelos de ejemplos de  $(-1, \mu, 0)$ -espacios con estructura casi-cosimpléctica, que denotaron por  $N(\mu)$ . En virtud del Teorema 3.2.13, estos espacios son  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$  con funciones*

$$f_1 = f_2 = 0, \quad f_3 = 1, \quad f_4 = f_{5,1} = 0, \quad f_{5,2} = -1 \text{ y } f_6 = -\mu.$$

Usaremos ahora las transformaciones  $D$ -homotéticas dadas por (3.2.15) para conseguir a partir del teorema anterior el tensor de curvatura de un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio de dimensión mayor o igual que 5 con estructura casi-cosimpléctica y  $\kappa < 0$ .

**Corolario 3.2.16.** *Si  $M$  es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio de dimensión mayor o igual que 5 con estructura casi-cosimpléctica y  $\kappa < 0$ , entonces su tensor de curvatura de Riemann puede escribirse como*

$$R = -\kappa R_3 - R_{5,2} - \mu R_6 - \nu R_8.$$



*Demostración.* Si descomponemos los campos en  $M$  de la forma  $X = \tilde{X} + \eta(X)\xi$ , donde  $\tilde{X}$  es un campo ortogonal a  $\xi$ , obtenemos:

$$R(X, Y)Z = R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} + \eta(X)R(\xi, Y)Z + \eta(Y)R(X, \xi)Z.$$

Por el Lema 3.2.2 y la definición de los tensores  $R_1, \dots, R_8$ , comprobamos que

$$\eta(X)R(\xi, Y)Z + \eta(Y)R(X, \xi)Z = -\kappa R_3(X, Y)Z - \mu R_6(X, Y)Z + \nu R_8(X, Y)Z,$$

que al sustituir en la ecuación anterior da

$$R(X, Y)Z = R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} - \kappa R_3(X, Y)Z - \mu R_6(X, Y)Z + \nu R_8(X, Y)Z. \quad (3.2.21)$$

No conocemos en general  $R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}$  para un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio, pero si usamos las transformaciones  $D$ -homotéticas (3.2.15) con  $\alpha = 1$  y  $\beta = \sqrt{-\kappa}$ , obtenemos una variedad transformada que es un  $(-1, \bar{\mu})$ -espacio, con  $\bar{\mu} = \mu/\sqrt{-\kappa}$ . Esto se debe a la Proposición 3.2.11, que puede aplicarse gracias a que las funciones  $\kappa, \mu, \nu$  sólo varían en la dirección de  $\xi$  por el Teorema 3.2.8.

Dado  $\tilde{X}$  campo ortogonal a  $\xi$  respecto a  $g$ , entonces

$$\bar{g}(\tilde{X}, \bar{\xi}) = \frac{1}{\beta}g(\tilde{X}, \xi) = \beta g(\tilde{X}, \xi) = 0,$$

luego también es ortogonal a  $\bar{\xi}$  respecto a  $\bar{g}$ . Sabemos pues por el Teorema 3.2.13 que se cumple

$$\bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} = \bar{R}_3(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} - \bar{R}_{5,2}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} - \bar{\mu}\bar{R}_6(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} = -\bar{R}_{5,2}(X, Y)Z,$$

para todos  $X, Y, Z$  campos en  $M$ . Además, si usamos (3.2.15) y (3.2.16), podemos comprobar que  $\bar{R}_{5,2}(X, Y)Z = -1/\kappa R_{5,2}(X, Y)Z$  para todos  $X, Y, Z$ , luego

$$\bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} = \frac{1}{\kappa}R_{5,2}(X, Y)Z. \quad (3.2.22)$$

Basta ahora ver la relación entre  $R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}$  y  $\bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}$ .

Si sustituimos  $\alpha = 1$  y  $\beta = \sqrt{-\kappa}$  en la fórmula (3.2.17) y usamos (3.2.4), obtenemos que

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{\kappa + 1}{\kappa}g(\phi h X, Y)\xi + \nu\eta(X)\eta(Y)\xi.$$

Por la definición del tensor de curvatura de Riemann

$$\bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} = \bar{\nabla}_{\tilde{X}}\bar{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{Z} - \bar{\nabla}_{\tilde{Y}}\bar{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Z} - \bar{\nabla}_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]}\tilde{Z}$$

y el hecho de que  $\tilde{X}(\kappa) = \tilde{Y}(\kappa) = 0$  (Teorema 3.2.8), tras algunos cálculos se llega a

$$\begin{aligned} \overline{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} &= R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} + \frac{\kappa+1}{\kappa}(-g(\phi h\tilde{Y}, \tilde{Z})\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\xi + g(\phi h\tilde{X}, \tilde{Z})\overline{\nabla}_{\tilde{Y}}\xi \\ &\quad + (g(\phi h\tilde{Y}, \nabla_{\tilde{X}}\tilde{Z}) - g(\phi h\tilde{X}, \nabla_{\tilde{Y}}\tilde{Z})) \\ &\quad + \tilde{Y}(g(\phi h\tilde{X}, \tilde{Z})) - \tilde{X}(g(\phi h\tilde{Y}, \tilde{Z})) + g(\phi h[\tilde{X}, \tilde{Y}], \tilde{Z}))\xi. \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

Ahora bien,  $\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\xi = -\sqrt{-\kappa}\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\bar{\xi} = \sqrt{-\kappa}\phi h\tilde{X} = -\phi h\tilde{X}$ , luego

$$-g(\phi h\tilde{Y}, \tilde{Z})\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\xi + g(\phi h\tilde{X}, \tilde{Z})\overline{\nabla}_{\tilde{Y}}\xi = g(\phi h\tilde{Y}, \tilde{Z})\phi h\tilde{X} - g(\phi h\tilde{X}, \tilde{Z})\phi h\tilde{Y} = R_{5,2}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}.$$

Por las propiedades de la conexión de Levi-Civita y la ecuación (3.2.2), se obtiene que

$$\begin{aligned} g(\phi h\tilde{Y}, \nabla_{\tilde{X}}\tilde{Z}) - g(\phi h\tilde{X}, \nabla_{\tilde{Y}}\tilde{Z}) + \tilde{Y}(g(\phi h\tilde{X}, \tilde{Z})) - \tilde{X}(g(\phi h\tilde{Y}, \tilde{Z})) \\ + g(\phi h[\tilde{X}, \tilde{Y}], \tilde{Z}) = g((\nabla_{\tilde{Y}}\phi h)\tilde{X} - (\nabla_{\tilde{X}}\phi h)\tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0. \end{aligned}$$

Si usamos las dos fórmulas anteriores en (3.2.23), conseguimos

$$\overline{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} = R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} + \frac{\kappa+1}{\kappa}R_{5,2}(X, Y)Z,$$

que al sustituir en (3.2.22) y despejar nos da

$$R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} = -R_{5,2}(X, Y)Z, \quad (3.2.24)$$

para todos  $X, Y, Z$  campos en  $M$ .

Sustituyendo (3.2.24) en (3.2.21), concluimos que

$$R(X, Y)Z = -\kappa R_3(X, Y)Z - \mu R_6(X, Y)Z + \nu R_8(X, Y)Z - R_{5,2}(X, Y)Z,$$

para todos  $X, Y, Z$  campos en  $M$ . □

Cabe ahora plantearse si los  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacios de dimensión mayor o igual que 5 con estructura casi-cosimpléctica y  $\kappa < 0$  pueden ser  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s  $M(f_1, \dots, f_8)$ . La respuesta la encontramos en el siguiente resultado. Los  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s de dimensión 3 con estructura casi-cosimpléctica se estudiarán al final de esta sección junto con los de estructura casi-Kenmotsu.

**Proposición 3.2.17.** *No existen  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s  $M(f_1, \dots, f_8)$  de dimensión mayor o igual que 5 con estructura casi-cosimpléctica y  $\kappa = f_1 - f_3 < 0$ .*

*Demostración.* Probaremos el resultado por Reducción al Absurdo. Supongamos que existe un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_8)$  de dimensión mayor o igual que 5, con estructura casi-cosimpléctica y  $\kappa = f_1 - f_3 < 0$ . Así,

$$R = f_1 R_1 + \dots + f_8 R_8.$$

Como su estructura es casi-cosimpléctica,  $M$  es también un  $(f_1 - f_3, f_4 - f_6, f_7 - f_8)$ -espacio con  $f_1 - f_3 < 0$ ,  $f_4 - f_6$  y  $f_7 - f_8$  variando sólo en la dirección de  $\xi$  (Proposición 3.2.1 y Teorema 3.2.8). Podemos aplicar entonces el Corolario 3.2.16 y obtener que el tensor de curvatura se escribe como

$$R = -(f_1 - f_3)R_3 - R_{5,2} - (f_4 - f_6)R_6 - (f_7 - f_8)R_8.$$

Igualando ambas expresiones de  $R$  y usando que  $R_5 = R_{5,1} - R_{5,2}$  obtenemos que

$$(f_1(R_1 + R_3) + f_2 R_2 + f_4(R_4 + R_6) + f_5 R_{5,1} + (1 - f_5)R_{5,2} + f_7(R_7 + R_8))(X, Y)Z = 0, \quad (3.2.25)$$

para todos  $X, Y, Z$  en  $M$ .

Sabemos por la Proposición 3.2.9 que  $TM = D(\lambda) \oplus D(-\lambda) \oplus \langle \xi \rangle$ , donde  $\dim D(\lambda) = \dim D(-\lambda) = n \geq 2$  (porque la dimensión es mayor o igual que 5). Si tomamos en la ecuación (3.2.25)  $X, Y \in D(\lambda)$  campos unitarios y ortogonales entre sí y  $Z = \phi X$ , entonces obtenemos que

$$-f_2 + (1 - f_5)(f_1 - f_3) = 0, \quad f_7 = 0.$$

Si elegimos  $X, Z \in D(-\lambda)$  unitarios y ortogonales entre sí e  $Y = \phi Z$  se obtiene que

$$f_2 + (1 - f_5)(f_1 - f_3) = 0, \quad f_7 = 0.$$

Tomando  $X, Z \in D(\lambda)$  unitarios y ortogonales entre sí e  $Y = \phi X$ , conseguimos que

$$f_2 = 0.$$

Si  $X = Z \in D(\lambda)$  es unitario e  $Y = \phi X$ , entonces

$$2f_1 + 3f_2 - f_3 = 0.$$

Si elegimos  $X, Y \in D(\lambda)$  unitarios y ortogonales entre sí y  $Z = X$ , deducimos que

$$f_1 + f_5(f_3 - f_1) + 2f_4\sqrt{f_3 - f_1} = 0, \quad f_7 = 0.$$

Se obtiene análogamente para  $X, Y \in D(-\lambda)$  unitarios y ortogonales entre sí y  $Z = Y$ , que

$$f_1 + f_5(f_3 - f_1) - 2f_4\sqrt{f_3 - f_1} = 0, \quad f_7 = 0.$$

Uniendo todas las ecuaciones obtenemos el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} -f_2 + (1 - f_5)(f_1 - f_3) &= 0 \\ f_2 + (1 - f_5)(f_1 - f_3) &= 0 \\ f_2 &= 0 \\ 2f_1 + 3f_2 - f_3 &= 0 \\ f_1 + f_5(f_3 - f_1) + 2f_4\sqrt{f_3 - f_1} &= 0 \\ f_1 + f_5(f_3 - f_1) - 2f_4\sqrt{f_3 - f_1} &= 0 \\ f_7 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Si usamos el hecho de que  $f_1 - f_3 < 0$ , deducimos que  $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_7 = 0$  y  $f_5 = 1$ , que es una contradicción con la hipótesis  $f_1 - f_3 < 0$ . Por tanto, no existen  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s  $M(f_1, \dots, f_8)$  de dimensión mayor o igual que 5, estructura casi-cosimpléctica y  $\kappa = f_1 - f_3 < 0$ .  $\square$

**Nota 3.2.18.** *El Corolario 3.2.16 y la Proposición 3.2.17 sugieren que sería útil introducir el concepto de  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido de manera análoga a como ya hicimos para los  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s con  $R_5$  dividido. Definimos pues un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, \dots, f_8)$  como una variedad casi-contacto métrica cuyo tensor de curvatura puede escribirse como*

$$R = f_1R_1 + f_2R_2 + f_3R_3 + f_4R_4 + f_{5,1}R_{5,1} + f_{5,2}R_{5,2} + f_6R_6 + f_7R_7 + f_8R_8.$$

Como  $R_5 = R_{5,1} - R_{5,2}$ , es obvio que todo  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_8)$  es un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, \dots, f_8)$  con  $f_{5,1} = f_5$  y  $f_{5,2} = -f_5$ .

En virtud del Corolario 3.2.16, todo  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio de dimensión mayor o igual que 5 con estructura casi-cosimpléctica y  $\kappa < 0$  es un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, \dots, f_8)$  con funciones:

$$f_1 = f_2 = f_4 = f_{5,1} = f_7 = 0, \quad f_3 = -\kappa, \quad f_{5,2} = -1, \quad f_6 = -\mu, \quad f_8 = -\nu.$$

**Ejemplo 3.2.19.** *Ya vimos en el Ejemplo 3.2.15 que P. Dacko y Z. Olszak dieron en [27] modelos de ejemplos de  $(-1, \mu, 0)$ -espacios con estructura casi-cosimpléctica. Si le hacemos una transformación  $D$ -homotética a estos espacios obtendremos  $(\bar{\kappa}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$ -espacios casi-cosimplécticos con*

$$\bar{\kappa} = -\frac{1}{\beta^2} < 0, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\beta}, \quad \bar{\nu} = -\frac{\xi(\beta)}{\beta^2}.$$

Por la Nota anterior, si estos espacios transformados tienen dimensión mayor o igual que 5, entonces son  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, \dots, f_8)$  con funciones:

$$f_1 = f_2 = 0, \quad f_3 = \frac{1}{\beta^2}, \quad f_4 = f_{5,1} = 0, \quad f_{5,2} = -1, \quad f_6 = -\frac{\mu}{\beta}, \quad f_7 = 0, \quad f_8 = \frac{\xi(\beta)}{\beta^2}.$$

Es de resaltar que, en este caso,  $f_{5,1} \neq -f_{5,2}$  y  $f_8$  es en general una función no constante, luego estos espacios no son  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s  $M(f_1, \dots, f_8)$  o  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$ . Esto justifica la definición y estudio de los  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, \dots, f_8)$ .

Es fácil comprobar que también se cumple para los  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s con  $R_5$  dividido un resultado análogo a las Proposiciones 3.1.16 y 3.2.1.

**Proposición 3.2.20.** Si  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, \dots, f_8)$  es un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido con estructura de contacto métrica, casi-cosimpléctica o casi-Kenmotsu, entonces es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con  $\kappa = f_1 - f_3$ ,  $\mu = f_4 - f_6$  y  $\nu = f_7 - f_8$ .

*Demostración.* Análoga a la de la Proposición 3.2.1. Basta sustituir  $R_5(X, Y)\xi = 0$  por  $R_{5,1}(X, Y)\xi = R_{5,2}(X, Y)\xi = 0$ .  $\square$

Antes de continuar probaremos la unicidad de la escritura del tensor de curvatura de Riemann de un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, \dots, f_8)$  de dimensión mayor o igual que 5 con estructura casi-cosimpléctica y  $\kappa < 0$ .

**Teorema 3.2.21.** Si  $M^{2n+1}(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, \dots, f_8)$  es un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido de dimensión mayor o igual que 5 con estructura casi-cosimpléctica y  $\kappa < 0$ , entonces la escritura de su tensor de curvatura es única.

*Demostración.* Supongamos que podemos escribir el tensor de curvatura de Riemann de  $M$  como

$$R = f_1 R_1 + f_2 R_2 + f_3 R_3 + f_4 R_4 + f_{5,1} R_{5,1} + f_{5,2} R_{5,2} + f_6 R_6 + f_7 R_7 + f_8 R_8$$

y

$$R = f_1^* R_1 + f_2^* R_2 + f_3^* R_3 + f_4^* R_4 + f_{5,1}^* R_{5,1} + f_{5,2}^* R_{5,2} + f_6^* R_6 + f_7^* R_7 + f_8^* R_8,$$

para ciertas funciones  $f_i, f_i^*$ ,  $i = 1, \dots, 8$ .

Entonces

$$(f_1 - f_1^*)R_1 + (f_2 - f_2^*)R_2 + (f_3 - f_3^*)R_3 + (f_4 - f_4^*)R_4 \quad (3.2.26) \\ + (f_{5,1} - f_{5,1}^*)R_{5,1} + (f_{5,2} - f_{5,2}^*)R_{5,2} + (f_6 - f_6^*)R_6 + (f_7 - f_7^*)R_7 + (f_8 - f_8^*)R_8 = 0.$$

Por otro lado, sabemos por la Proposición 3.2.20 que  $M$  es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con

$$\begin{aligned} \kappa &= f_1 - f_3 = f_1^* - f_3^*, \\ \mu &= f_4 - f_6 = f_4^* - f_6^*, \\ \nu &= f_7 - f_8 = f_7^* - f_8^*. \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

Aplicando la Proposición 3.2.9 obtenemos que

$$TM = D(\lambda) \oplus D(-\lambda) \oplus \langle \xi \rangle, \quad (3.2.28)$$

donde  $\pm\lambda$  son autovalores del operador  $h$ ,  $\lambda > 0$  y  $\dim D(\lambda) = \dim D(-\lambda) = n \geq 2$  (porque la dimensión es mayor o igual que 5).

Si tomamos en la ecuación (3.2.26)  $X, Y \in D(\lambda)$  campos unitarios y ortogonales entre sí y  $Z = \phi X$ , entonces obtenemos que

$$f_2 - f_2^* + \lambda^2(f_{5,2} - f_{5,2}^*) = 0, \quad f_7 - f_7^* = 0.$$

Si elegimos  $X, Z \in D(-\lambda)$  unitarios y ortogonales entre sí e  $Y = \phi Z$  se obtiene que

$$-(f_2 - f_2^*) + \lambda^2(f_{5,2} - f_{5,2}^*) = 0, \quad f_7 - f_7^* = 0.$$

Tomando  $X, Z \in D(\lambda)$  unitarios y ortogonales entre sí e  $Y = \phi X$ , conseguimos que

$$f_2 - f_2^* = 0.$$

Si  $X = Z \in D(\lambda)$  es unitario e  $Y = \phi X$ , entonces

$$-(f_1 - f_1^*) - 3(f_2 - f_2^*) + \lambda^2(f_{5,1} - f_{5,1}^*) + \lambda^2(f_{5,2} - f_{5,2}^*) = 0.$$

Si elegimos  $X, Y \in D(\lambda)$  unitarios y ortogonales entre sí y  $Z = X$ , deducimos que

$$f_1 - f_1^* + 2\lambda(f_4 - f_4^*) + \lambda^2(f_{5,1} - f_{5,1}^*) = 0, \quad f_7 - f_7^* = 0.$$

Se obtiene análogamente para  $X, Y \in D(-\lambda)$  unitarios y ortogonales entre sí y  $Z = Y$ , que

$$f_1 - f_1^* - 2\lambda(f_4 - f_4^*) + \lambda^2(f_{5,1} - f_{5,1}^*) = 0, \quad f_7 - f_7^* = 0.$$

Uniando todas las ecuaciones obtenemos el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} f_2 - f_2^* + \lambda^2(f_{5,2} - f_{5,2}^*) &= 0 \\ -(f_2 - f_2^*) + \lambda^2(f_{5,2} - f_{5,2}^*) &= 0 \\ f_2 - f_2^* &= 0 \\ -(f_1 - f_1^*) - 3(f_2 - f_2^*) + \lambda^2(f_{5,1} - f_{5,1}^*) + \lambda^2(f_{5,2} - f_{5,2}^*) &= 0 \\ f_1 - f_1^* + 2\lambda(f_4 - f_4^*) + \lambda^2(f_{5,1} - f_{5,1}^*) &= 0 \\ f_1 - f_1^* - 2\lambda(f_4 - f_4^*) + \lambda^2(f_{5,1} - f_{5,1}^*) &= 0 \\ f_7 - f_7^* &= 0 \end{aligned} \right\}$$

que podemos resolver usando que  $\lambda > 0$ . Su solución sería:

$$f_1 - f_1^* = f_2 - f_2^* = f_4 - f_4^* = f_{5,1} - f_{5,1}^* = f_{5,2} - f_{5,2}^* = f_7 - f_7^* = 0.$$

Por las ecuaciones (3.2.27), tenemos también que

$$f_3 - f_3^* = f_6 - f_6^* = f_8 - f_8^* = 0,$$

y concluimos que  $f_i = f_i^*$  para todo  $i = 1, \dots, 8$ . Así, la escritura del tensor de curvatura es única.  $\square$

Es de señalar que el teorema anterior también es cierto si la estructura es de contacto métrica y  $\kappa < 1$  o si la estructura es casi-Kenmotsu y  $\kappa < -1$ :

**Teorema 3.2.22.** *Si  $M^{2n+1}(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, \dots, f_8)$  es un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido de dimensión mayor o igual que 5 con estructura de contacto métrica y  $\kappa < 1$  o con estructura casi-Kenmotsu y  $\kappa < -1$ , entonces la escritura de su tensor de curvatura es única.*

*Demostración.* Análoga a la del Teorema 3.2.21. Sólo cambiaría el resultado necesario para obtener (3.2.28), que en el caso de estructura de contacto métrico sería el Lema 3.1.9 y en el caso casi-Kenmotsu la Proposición 3.2.28, que presentaremos más adelante.  $\square$

**Ejemplo 3.2.23.** *(Continuación del 3.2.19) Si elegimos  $\beta$  no constante en el Ejemplo 3.2.19, entonces  $f_8 \neq 0$ , luego dichos ejemplos de  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, \dots, f_8)$  con estructura casi-cosimpléctica no pueden ser  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$ , en virtud del teorema anterior.*

**Nota 3.2.24.** *El Teorema 3.2.21 proporciona una demostración de la Proposición 3.2.17 alternativa a la que dimos originalmente. En efecto, supongamos que existe una variedad de dimensión mayor o igual que 5 que es un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_8)$  con estructura casi-cosimpléctica y  $\kappa = f_1 - f_3 < 0$ . Entonces  $M$  es también un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, \dots, f_8)$  con  $f_{5,1} = f_5$  y  $f_{5,2} = -f_5$ , luego*

$$R = f_1 R_1 + f_2 R_2 + f_3 R_3 + f_4 R_4 + f_5 R_{5,1} - f_5 R_{5,2} + f_6 R_6 + f_7 R_7 + f_8 R_8.$$

*Por otra parte, como la variedad tiene estructura casi-cosimpléctica, es también un  $(f_1 - f_3, f_4 - f_6, f_7 - f_8)$ -espacio con  $f_1 - f_3 < 0$ ,  $f_4 - f_6$  y  $f_7 - f_8$  variando sólo en la dirección de  $\xi$  (Proposición 3.2.1 y Teorema 3.2.8). Podemos aplicar entonces el Corolario 3.2.16 y obtener que el tensor de curvatura se escribe como*

$$R = -(f_1 - f_3)R_3 - R_{5,2} - (f_4 - f_6)R_6 - (f_7 - f_8)R_8.$$

*Por el Teorema 3.2.21, las funciones de las dos escrituras del tensor de curvatura  $R$  deben coincidir, así que tendríamos en particular que  $f_5 = 0$  y  $f_5 = 1$ , lo cual es absurdo. La no existencia queda así probada.*

También podemos usar el Teorema 3.2.21 para determinar algunas de las funciones de un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, \dots, f_8)$  de dimensión mayor o igual que 5, estructura casi-cosimpléctica y  $f_1 - f_3 < 0$ , análogamente a como ya hicimos en el Teorema 2.3.24 para estructura de contacto métrica.

**Teorema 3.2.25.** *Sea  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, \dots, f_8)$  un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido y estructura casi-cosimpléctica. Si  $M$  es de dimensión mayor o igual que 5 y se cumple que  $f_1 - f_3 < 0$ , entonces  $M$  verifica*

$$f_1 = f_2 = f_4 = f_{5,1} = f_7 = 0, \quad f_{5,2} = -1, \quad f_3 > 0,$$

y  $f_3, f_6, f_8$  son funciones que sólo varían en la dirección de  $\xi$ . Es decir,  $M$  es un  $(-f_3, -f_6, -f_8)$ -espacio con  $f_3 > 0$ .

*Demostración.* Por la Proposición 3.2.20, sabemos que  $M$  es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con  $\kappa = f_1 - f_3 < 0$ ,  $\mu = f_4 - f_6$  y  $\nu = f_7 - f_8$ . Estamos pues en las condiciones del Corolario 3.2.16, luego el tensor de curvatura de Riemann puede escribirse como

$$R = -\kappa R_3 - R_{5,2} - \mu R_6 - \nu R_8 = -(f_1 - f_3)R_3 - R_{5,2} - (f_4 - f_6)R_6 - (f_7 - f_8)R_8.$$

Por la definición de  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido y la unicidad de la escritura del tensor de curvatura (Teorema 3.2.21), obtenemos que

$$f_1 = f_2 = f_4 = f_{5,1} = f_7 = 0, \quad f_{5,2} = -1.$$

Por tanto,  $\kappa = -f_3$ ,  $\mu = -f_6$  y  $\nu = -f_8$ . Por hipótesis,  $f_1 - f_3 = -f_3 < 0$ , luego  $f_3 > 0$ . El resto del resultado se obtiene por el Teorema 3.2.8, que afirma que  $\kappa$ ,  $\mu$  y  $\nu$  sólo varían en la dirección de  $\xi$ .  $\square$

Analizaremos ahora el caso de los  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s con estructura casi-Kenmotsu, que sabemos por la Proposición 3.2.1 que son  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacios casi-Kenmotsu. G. Dileo y A. M. Pastore estudiaron en [29] los  $(\kappa, \mu)$ -espacios y  $(\kappa, 0, \nu)$ -espacios casi-Kenmotsu con  $\kappa, \mu, \nu$  constantes, aunque usaron una notación diferente. Entre otros resultados, probaron que si un  $(\kappa, \mu)$ -espacio es casi-Kenmotsu, donde  $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$ , entonces  $\kappa = -1$  y  $h = 0$  (Teorema 4.1). Si un  $(\kappa, 0, \nu)$ -espacio es casi-Kenmotsu, con  $\kappa, \nu \in \mathbb{R}$  y  $h \neq 0$ , entonces  $\kappa < -1$  y  $\nu = 2$  (Proposición 4.1). También dieron ejemplos de  $(-1 - \lambda^2, 0, 2)$ -espacios con estructura casi-Kenmotsu para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Dichos resultados se pueden generalizar para  $\kappa, \mu, \nu$  funciones:

**Proposición 3.2.26.** *Si  $M$  es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura casi-Kenmotsu, entonces*

$$h^2 = (\kappa + 1)\phi^2, \tag{3.2.29}$$

luego  $\kappa \leq -1$  y  $\kappa = -1$  si y sólo si  $h = 0$ . Además,

$$\nabla_\xi h = (\nu - 2)h - \mu\phi h, \tag{3.2.30}$$

$$\xi(\kappa) = 2(\kappa + 1)(\nu - 2), \tag{3.2.31}$$

$$\begin{aligned} (\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y &= (\kappa + 1)(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + \mu(\eta(Y)hX - \eta(X)hY) \\ &\quad + (\nu - 1)(\eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY). \end{aligned} \tag{3.2.32}$$

*Demostración.* Por la definición de  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio, sabemos que

$$R(\xi, X)\xi = \kappa\phi^2 X - \mu hX - \nu\phi hX. \tag{3.2.33}$$



Además, podemos calcular

$$\begin{aligned} R(\xi, \phi X)\xi &= -\kappa\phi X - \mu h\phi X - \nu hX, \\ \phi R(\xi, \phi X)\xi &= -\kappa\phi^2 X - \mu hX - \nu\phi hX. \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

Uniendo las ecuaciones (3.2.33) y (3.2.34), obtenemos que

$$\frac{1}{2}(R(\xi, X)\xi - \phi R(\xi, \phi X)\xi) = \kappa\phi^2 X.$$

Ahora bien, sabemos por la Proposición 5 de [28] que una variedad casi-Kenmotsu cumple

$$\frac{1}{2}(R(\xi, X)\xi - \phi R(\xi, \phi X)\xi) = -\phi^2 X + h^2 X.$$

Por tanto,  $\kappa\phi^2 = -\phi^2 + h^2$  y concluimos (3.2.29). Dado un campo  $X$  ortogonal a  $\xi$ , tenemos entonces que

$$g(hX, hX) = g(h^2 X, X) = (\kappa + 1)g(\phi^2 X, X) = -(\kappa + 1)g(X, X),$$

luego  $\kappa \leq -1$  y deducimos que  $\kappa = -1$  si y sólo si  $h = 0$  por ser  $h$  simétrico.

Tenemos por la Proposición 5 de [28] que

$$(\nabla_\xi h)X = -\phi X - 2hX - \phi h^2 X - \phi R(X, \xi)\xi.$$

Si usamos (3.2.29) y la definición de  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio, obtenemos (3.2.30).

Para demostrar la tercera igualdad derivaremos la primera en la dirección de  $\xi$ . Obtenemos que

$$\nabla_\xi h^2 = \xi(\kappa)\phi^2 + (\kappa + 1)\nabla_\xi \phi^2. \quad (3.2.35)$$

Como  $\nabla_\xi \phi = 0$  (ver [51]), entonces  $\nabla_\xi \phi^2 = 0$ , pues  $(\nabla_\xi \phi^2)X = (\nabla_\xi \phi)\phi X + \phi(\nabla_\xi \phi)X$  para todo campo  $X$ .

Pero, usando (3.2.30), podemos escribir

$$\begin{aligned} (\nabla_\xi h^2)X &= (\nabla_\xi h)hX + h((\nabla_\xi h)X) \\ &= (\nu - 2)h^2 X - \mu\phi h^2 X + (\nu - 2)h^2 X - \mu h\phi hX = 2(\kappa + 1)(\nu - 2)\phi^2 X, \end{aligned}$$

en virtud de (3.2.29).

Sustituyendo los valores de  $\nabla_\xi \phi^2$  y de  $\nabla_\xi h^2$  en (3.2.35), conseguimos (3.2.31).

Por la Proposición 4 de [28] se cumple que

$$R(X, Y)\xi = (\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y + \eta(X)(Y - \phi hY) - \eta(Y)(X - \phi hX),$$

de donde al despejar y usar la definición de  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio obtenemos

$$\begin{aligned} (\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y &= R(X, Y)\xi - \eta(X)(Y - \phi hY) + \eta(Y)(X - \phi hX) \\ &= (\kappa + 1)(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + \mu(\eta(Y)hX - \eta(X)hY) \\ &\quad + (\nu - 1)(\eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY), \end{aligned}$$

y por lo tanto (3.2.32). □

**Nota 3.2.27.** Es obvio que la Proposición 3.2.1 y la ecuación (3.2.31) implican que un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_8)$  con estructura casi-Kenmotsu debe satisfacer  $\xi(\kappa) = \xi(f_1 - f_3) = 2(f_1 - f_3 + 1)(f_7 - f_8 - 2)$ . Por tanto, si  $\kappa = f_1 - f_3$  es constante, entonces dicha constante es  $-1$  (caso especial detallado en la siguiente proposición) o  $\nu = f_7 - f_8 = 2$ .

Análogamente, un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_6)$  con estructura casi-Kenmotsu cumple que  $\xi(f_1 - f_3) = -4(f_1 - f_3 + 1)$ . Por tanto, si  $\kappa = f_1 - f_3$  es una constante, entonces dicha constante es  $-1$ .

Esta situación contrasta con lo que ocurre para los  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s  $M(f_1, \dots, f_6)$  con estructura casi-cosimpléctica, de los que sólo podemos afirmar por la ecuación (3.2.4) que satisfacen que  $\xi(f_1 - f_3) = 0$ .

La ecuación (3.2.29) de la Proposición anterior hace que el valor de  $\kappa$  juegue un papel importante a la hora de estudiar el comportamiento de los  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacios con estructura casi-Kenmotsu. A continuación estudiaremos estos espacios según  $\kappa = -1$  o  $\kappa < -1$ , consiguiendo resultados que generalizan los contenidos en [29].

**Proposición 3.2.28.** Sea  $M^{2n+1}$  un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura casi-Kenmotsu.

Si  $\kappa = -1$ , entonces  $h = 0$  y  $M^{2n+1}$  es localmente el producto alabeado  $M' \times_{f^2} N^{2n}$ , donde  $N^{2n}$  es una variedad casi-Kaehler,  $M'$  un intervalo abierto de coordenada  $t$  y  $f^2 = ce^{2t}$  para alguna constante positiva  $c$ . Además, es una variedad de Kenmotsu si la dimensión es 3 ( $n = 1$ ).

Si  $\kappa < -1$  ( $h \neq 0$ ) entonces  $M$  no es una variedad de Kenmotsu y los autovalores de  $h$  (iguales a los de  $\phi h$ ) son 0 (con multiplicidad 1) y  $\pm\lambda = \pm\sqrt{-1 - \kappa} \neq 0$  (cada uno con multiplicidad  $n$ ). Además, se cumple que  $\mu = -2g(\nabla_\xi X, \phi X)$  para todo  $X$  autovector unitario de  $h$  asociado a  $\pm\lambda$ .

*Demostración.* Si  $\kappa = -1$ , se obtiene por (3.2.29) que  $h = 0$ . Por el Teorema 2 de [28] sabemos que  $M^{2n+1}$  es localmente el producto alabeado  $M' \times_{f^2} N^{2n}$ , donde  $N^{2n}$  es una variedad casi-Kaehler,  $M'$  un intervalo abierto de coordenada  $t$  y  $f^2 = ce^{2t}$  para alguna constante positiva  $c$ . Al sustituir  $h = 0$  en la ecuación (1.2.3) tenemos que  $\nabla\xi = -\phi^2$  y por la Proposición 3 de [28] conocemos que toda variedad casi-Kenmotsu de dimensión 3 cumpliendo dicha propiedad es de Kenmotsu.

Si  $\kappa < -1$ , entonces se deduce de (3.2.29) y de las propiedades de  $h$  que los autovalores de  $h$  son 0 (con multiplicidad 1) y  $\pm\sqrt{-1 - \kappa}$  (cada uno con multiplicidad  $n$ ). Como  $(\phi h)^2 = h^2$ , los autovalores de  $\phi h$  coinciden con los de  $h$ . Además, de  $h \neq 0$  deducimos por la Proposición 2.4.2 que  $M$  no tiene estructura trans-Sasakiana luego, en particular, no es variedad de Kenmotsu.

Si tomamos  $X$  autovector unitario de  $h$  asociado a  $\lambda \neq 0$  (que denotaremos  $X \in D(\lambda)$ ), obtenemos de (3.2.30) que

$$\xi(\lambda)X + \lambda\nabla_\xi X - h\nabla_\xi X = \lambda(\nu - 2)X - \lambda\mu\phi X,$$

que al multiplicar por  $\phi X$  da

$$-\lambda\mu = \lambda g(\nabla_\xi X, \phi X) - g(h\nabla_\xi X, \phi X) = 2\lambda g(\nabla_\xi X, \phi X).$$

Como  $\lambda \neq 0$ , entonces  $\mu = -2g(\nabla_\xi X, \phi X)$ . Si tomamos  $X \in D(-\lambda)$ , volvemos a conseguir la misma ecuación.  $\square$

Análogamente a como hicimos en la Proposición 3.2.5 para estructura casi-cosimpléctica, demostraremos ahora algunas fórmulas para  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacios con estructura casi-Kenmotsu que necesitaremos en resultados posteriores.

**Proposición 3.2.29.** *Si  $M$  es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura casi-Kenmotsu y  $\kappa < -1$ , entonces para cualesquiera campos  $X, Y$  se cumple:*

$$(\nabla_X \phi)Y = g(hX + \phi X, Y)\xi - \eta(Y)(hX + \phi X), \quad (3.2.36)$$

$$\begin{aligned} (\nabla_Y h)X - (\nabla_X h)Y &= (\kappa + 1)(\eta(X)\phi Y - \eta(Y)\phi X - 2g(\phi X, Y)\xi) \\ &\quad + \mu(\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX) - (\nu - 1)(\eta(X)hY - \eta(Y)hX). \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

*Demostración.* Sabemos por la Proposición 2.5 de [29] que en toda variedad casi-Kenmotsu se cumple que

$$\begin{aligned} R(\xi, X, Y, Z) - R(\xi, X, \phi Y, \phi Z) + R(\xi, \phi X, Y, \phi Z) + R(\xi, \phi X, \phi Y, Z) \\ = 2(\nabla_{hX} \Phi)(Y, Z) + 2\eta(Y)g(Z, X - \phi hX) - 2\eta(Z)g(Y, X - \phi hX). \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

Ahora bien, por el Lema 3.2.2, se calcula que

$$\begin{aligned} g(R(\xi, X)Y, Z) - g(R(\xi, X)\phi Y, \phi Z) + g(R(\xi, \phi X)Y, \phi Z) + g(R(\xi, \phi X)\phi Y, Z) \\ = 2\kappa g(\eta(Z)X - g(X, Z)\xi, Y). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (\nabla_{hX} \Phi)(Y, Z) &= \nabla_{hX}(\Phi(Y, Z) - \Phi(\nabla_{hX} Y, Z) - \Phi(Y, \nabla_{hX} Z)) \\ &= hX(g(Y, \phi Z)) - g(\nabla_{hX} Y, \phi Z) - g(Y, \phi \nabla_{hX} Z) \\ &= hX(g(Y, \phi Z)) - hX(g(Y, \phi Z)) + g(\nabla_{hX} \phi Z, Y) - g(Y, \phi \nabla_{hX} Z) \\ &= g(\nabla_{hX} \phi Z, Y) - g(Y, \phi \nabla_{hX} Z) = g((\nabla_{hX} \phi)Z, Y). \end{aligned}$$

Sustituyendo en (3.2.38) se deduce que

$$\kappa g(\eta(Z)X - g(X, Z)\xi, Y) = g((\nabla_{hX} \phi)Z, Y) + \eta(Y)g(Z, X - \phi hX) - \eta(Z)g(Y, X - \phi hX),$$

para todo  $Y$ , luego

$$\kappa(\eta(Z)X - g(X, Z)\xi) = (\nabla_{hX} \phi)Z + g(Z, X - \phi hX)\xi - \eta(Z)(X - \phi hX),$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} (\nabla_{hX}\phi)Z &= \kappa(\eta(Z)X - g(X, Z)\xi) - g(Z, X - \phi hX)\xi + \eta(Z)(X - \phi hX) = \\ &= (\kappa + 1)(\eta(Z)X - g(X, Z)\xi) + g(Z, \phi hX)\xi - \eta(Z)\phi hX. \end{aligned}$$

Si sustituimos  $X$  por  $hX$  y usamos (3.2.29) y el hecho de que  $\kappa < -1$ , conseguimos

$$(\nabla_{\phi^2 X}\phi)Z = -g(hX + \phi X, Z)\xi + \eta(Z)(hX + \phi X).$$

Como  $\nabla_\xi\phi = 0$ , entonces  $\nabla_{\phi^2 X}\phi = -\nabla_X\phi + \eta(X)\nabla_\xi\phi = -\nabla_X\phi$  y deducimos (3.2.36).

Un cálculo sencillo da

$$(\nabla_X\phi h)Y - (\nabla_Y\phi h)X = (\nabla_X\phi)hY - (\nabla_Y\phi)hX + \phi((\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X).$$

Por otro lado, sabemos por (3.2.36) que

$$\begin{aligned} (\nabla_X\phi)hY - (\nabla_Y\phi)hX &= g(hX + \phi X, hY)\xi - \eta(hY)(hX + \phi X) \\ &\quad - g(hY + \phi Y, hX)\xi + \eta(hX)(hY + \phi Y) = 0, \end{aligned}$$

luego por (3.2.32) tenemos que

$$\begin{aligned} \phi((\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X) &= (\nabla_X\phi h)Y - (\nabla_Y\phi h)X = (\kappa + 1)(\eta(X)Y - \eta(Y)X) \\ &\quad + \mu(\eta(X)hY - \eta(Y)hX) + (\nu - 1)(\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX). \end{aligned}$$

Si aplicamos  $\phi$  a ambos términos y usamos las propiedades del operador  $h$ ,

$$\begin{aligned} (\nabla_Y h)X - (\nabla_X h)Y &= -\eta((\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X)\xi + (\kappa + 1)(\eta(X)\phi Y - \eta(Y)\phi X) \\ &\quad + \mu(\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX) - (\nu - 1)(\eta(X)hY - \eta(Y)hX). \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

Por otro lado, de  $h\xi = 0$  y las ecuaciones (3.2.29) y (1.2.3), conseguimos que

$$(\nabla_X h)\xi = -hX + (\kappa + 1)\phi X,$$

así que

$$\begin{aligned} \eta((\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X) &= g(Y, (\nabla_X h)\xi) - g(X, (\nabla_Y h)\xi) \\ &= g(Y, -hX + (\kappa + 1)\phi X) - g(X, -hY + (\kappa + 1)\phi Y) \\ &= -g(Y, hX) + (\kappa + 1)g(Y, \phi X) + g(X, hY) - (\kappa + 1)g(X, \phi Y) \\ &= 2(\kappa + 1)g(\phi X, Y), \end{aligned}$$

que al sustituir en (3.2.39) da (3.2.37). □

**Nota 3.2.30.** Es notable la similitud entre la ecuación (3.2.36) para estructura casi-Kenmotsu y la ecuación (3.2.8) para estructura casi-cosimpléctica. De hecho, la expresión de esta última es “parte” de la primera. Ambas ecuaciones han sido probadas para  $\kappa < 0$  en el caso casi-cosimpléctico y  $\kappa < -1$  en el caso casi-Kenmotsu, luego  $h \neq 0$  (por (3.2.1) y (3.2.29)). Si también fuesen ciertas para  $h = 0$ , entonces se cumpliría (1.1.16) con  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$  y  $(\alpha, \beta) = (0, 1)$  respectivamente, luego las variedades serían cosimpléctica y de Kenmotsu respectivamente.

**Nota 3.2.31.** Aunque la ecuación (3.2.37) del Lema anterior se haya probado únicamente para  $\kappa < -1$ , es también trivialmente cierta para  $\kappa = -1$ . En efecto, si  $\kappa = -1$ , entonces  $h^2 = 0$  por la ecuación (3.2.29) y obtenemos que  $h = 0$  por ser  $h$  un operador simétrico. Es obvio entonces que se cumple (3.2.37).

Puede probarse de forma similar a como se hizo para variedades casi-cosimplécticas que el siguiente teorema es cierto:

**Teorema 3.2.32.** Si  $M$  es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura casi-Kenmotsu, entonces se cumple de nuevo (3.2.12):

$$\begin{aligned} & \xi(\kappa)(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + \xi(\mu)(\eta(Y)hX - \eta(X)hY) + \xi(\nu)(\eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY) \\ & - X(\kappa)\phi^2 Y + X(\mu)hY + X(\nu)\phi hY + Y(\kappa)\phi^2 X - Y(\mu)hX - Y(\nu)\phi hX = 0, \end{aligned}$$

para todos  $X, Y, Z$  campos en  $M$ .

Por tanto, si la dimensión de la variedad es mayor o igual que 5,

$$X(\kappa) = X(\mu) = X(\nu) = 0,$$

para todo campo  $X$  ortogonal a  $\xi$ , es decir, las funciones  $\kappa, \mu$  y  $\nu$  sólo varían en la dirección de  $\xi$ .

*Demostración.* Análoga a la del Lema 3.2.7 y el Teorema 3.2.8 para variedades casi-cosimplécticas. Bastaría usar la ecuación (1.2.3) ( $\nabla_X \xi = -\phi^2 X - \phi hX$ ) en lugar de (1.2.2) ( $\nabla_X \xi = -\phi hX$ ) y las Proposiciones 3.2.26 y 3.2.29 en lugar de las Proposiciones 3.2.3 y 3.2.5.  $\square$

Estudiaremos a continuación la forma que tiene el tensor de curvatura Riemanniana en un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio casi-Kenmotsu con  $\kappa < -1$ . Si  $\kappa = -1$ , conocemos su estructura local por la Proposición 3.2.28 y sabemos que  $h = 0$ , luego todo  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. es un  $g.S.s.f.$  Primero presentaremos un par de resultados que generalizan los que en [29] aparecen para  $(\kappa, 0, \nu)$ -espacios, donde  $\kappa$  y  $\nu$  son constantes.

**Proposición 3.2.33.** Sea  $M$  un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio casi-Kenmotsu con  $\kappa < -1$ . Entonces

$$\begin{aligned} R(X, Y)\phi Z - \phi R(X, Y)Z &= \\ &= g(\phi^2 X + \phi hX, Z)(hY + \phi Y) - g(\phi^2 Y + \phi hY, Z)(hX + \phi X) \\ &\quad - g(hY + \phi Y, Z)(\phi^2 X + \phi hX) + g(hX + \phi X, Z)(\phi^2 Y + \phi hY) \\ &\quad + \kappa(\eta(Y)(g(\phi X, Z)\xi - \eta(Z)\phi X) - \eta(X)(g(\phi Y, Z)\xi - \eta(Z)\phi Y)) \\ &\quad - \nu R_6(X, Y)Z + \mu R_8(X, Y)Z, \end{aligned}$$

para todos  $X, Y, Z$  campos en  $M$ .

En particular, si  $X, Y, Z$  son ortogonales a  $\xi$ , entonces

$$\begin{aligned} R(X, Y)\phi Z - \phi R(X, Y)Z &= \\ &= g(-X + \phi hX, Z)(hY + \phi Y) - g(-Y + \phi hY, Z)(hX + \phi X) \quad (3.2.40) \\ &\quad - g(hY + \phi Y, Z)(-X + \phi hX) + g(hX + \phi X, Z)(-Y + \phi hY). \end{aligned}$$

*Demostración.* Sea  $p$  un punto fijo de  $M$  y  $X, Y, Z$  campos locales tales que  $(\nabla X)_p = (\nabla Y)_p = (\nabla Z)_p = 0$ . La identidad de Ricci para  $\phi$ , (1.3.1), quedaría en ese punto:

$$R(X, Y)\phi Z - \phi R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y\phi)Z - \nabla_Y(\nabla_X\phi)Z. \quad (3.2.41)$$

Usando (3.2.36), (1.2.3) y el hecho de que  $\nabla Z = 0$  en  $p$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \nabla_X(\nabla_Y\phi)Z &= \nabla_X(g(hY + \phi Y, Z)\xi - \eta(Z)(hY + \phi Y)) \\ &= X(g(hY + \phi Y, Z))\xi + g(hY + \phi Y, Z)\nabla_X\xi \\ &\quad - X(\eta(Z))(hY + \phi Y) - \eta(Z)\nabla_X(hY + \phi Y) \\ &= g(\nabla_X hY + \nabla_X \phi Y, Z)\xi - g(hY + \phi Y, Z)(\phi^2 X + \phi hX) \\ &\quad + g(\phi^2 X + \phi hX, Z)(hY + \phi Y) - \eta(Z)(\nabla_X hY + \nabla_X \phi Y) \\ &= g(\phi^2 X + \phi hX, Z)(hY + \phi Y) - g(hY + \phi Y, Z)(\phi^2 X + \phi hX) \\ &\quad + g((\nabla_X h)Y + (\nabla_X \phi)Y, Z)\xi - \eta(Z)((\nabla_X h)Y + (\nabla_X \phi)Y). \end{aligned}$$

Si intercambiamos los campos  $X$  e  $Y$  para calcular  $\nabla_Y(\nabla_X\phi)Z$  y sustituimos en (3.2.41), conseguimos:

$$\begin{aligned} R(X, Y)\phi Z - \phi R(X, Y)Z &= \\ &= g(\phi^2 X + \phi hX, Z)(hY + \phi Y) - g(\phi^2 Y + \phi hY, Z)(hX + \phi X) \\ &\quad - g(hY + \phi Y, Z)(\phi^2 X + \phi hX) + g(hX + \phi X, Z)(\phi^2 Y + \phi hY) \quad (3.2.42) \\ &\quad + g((\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X + (\nabla_X \phi)Y - (\nabla_Y \phi)X, Z)\xi \\ &\quad - \eta(Z)((\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X + (\nabla_X \phi)Y - (\nabla_Y \phi)X). \end{aligned}$$

Utilizando (3.2.36) y (3.2.37), obtenemos que

$$\begin{aligned} (\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X + (\nabla_X \phi)Y - (\nabla_Y \phi)X &= \\ &= \kappa(\eta(Y)\phi X - \eta(X)\phi Y - 2g(X, \phi Y)\xi) \\ &\quad + \mu(\eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY) - \nu(\eta(Y)hX - \eta(X)hY), \end{aligned}$$

así que los dos últimos sumandos de (3.2.42) quedarían

$$\begin{aligned}
& g((\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X + (\nabla_X \phi)Y - (\nabla_Y \phi)X, Z)\xi \\
& - \eta(Z)((\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X + (\nabla_X \phi)Y - (\nabla_Y \phi)X) \\
& = \kappa(\eta(Y)g(\phi X, Z)\xi - \eta(X)g(\phi Y, Z)\xi - 2\eta(Z)g(X, \phi Y)\xi \\
& \quad - \eta(Y)\eta(Z)\phi X + \eta(X)\eta(Z)\phi Y + 2\eta(Z)g(X, \phi Y)\xi) \\
& + \mu(\eta(Y)g(\phi hX, Z)\xi - \eta(X)g(\phi hY, Z)\xi - \eta(Y)\eta(Z)\phi hX + \eta(X)\eta(Z)\phi hX) \\
& + \nu(-\eta(Y)g(hX, Z)\xi + \eta(X)g(hY, Z)\xi + \eta(Y)\eta(Z)hX + \eta(X)\eta(Z)hY).
\end{aligned}$$

Por tanto, deducimos al sustituir en la ecuación (3.2.42) que:

$$\begin{aligned}
R(X, Y)\phi Z - \phi R(X, Y)Z = & \\
& = g(\phi^2 X + \phi hX, Z)(hY + \phi Y) - g(\phi^2 Y + \phi hY, Z)(hX + \phi X) \\
& - g(hY + \phi Y, Z)(\phi^2 X + \phi hX) + g(hX + \phi X, Z)(\phi^2 Y + \phi hY) \\
& + \kappa(\eta(Y)(g(\phi X, Z)\xi - \eta(Z)\phi X) - \eta(X)(g(\phi Y, Z)\xi - \eta(Z)\phi Y)) \\
& + \mu(\eta(Y)g(\phi hX, Z)\xi - \eta(X)g(\phi hY, Z)\xi - \eta(Y)\eta(Z)\phi hX + \eta(X)\eta(Z)\phi hX) \\
& + \nu(-\eta(Y)g(hX, Z)\xi + \eta(X)g(hY, Z)\xi + \eta(Y)\eta(Z)hX - \eta(X)\eta(Z)hY).
\end{aligned}$$

Por la definición de  $R_6$  y  $R_8$  obtenemos finalmente la primera ecuación que buscamos. Si los campos son ortogonales a  $\xi$ , entonces  $\eta(X) = \eta(Y) = \eta(Z) = 0$  y las últimas tres líneas se anulan, consiguiendo (3.2.40).  $\square$

**Lema 3.2.34.** *Sea  $M^{2n+1}$  un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio casi-Kenmotsu con  $\kappa < -1$  una función que sólo varía en la dirección de  $\xi$ . Entonces*

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \phi h)Y = & g((\kappa + 1)\phi^2 X - \phi hX, Y)\xi \\
& + \eta(Y)((\kappa + 1)\phi^2 X - \phi hX) + \eta(X)(\mu hY + (\nu - 2)\phi hY),
\end{aligned}$$

para todos  $X, Y, Z$  campos en  $M$ .

*Demostración.* Por la Proposición 3.2.28,  $\phi h$  tiene autovalores  $\pm\lambda = \pm\sqrt{-1 - \kappa} \neq 0$ . Podemos escribir  $TM = D'(\lambda) \oplus D'(-\lambda) \oplus \langle \xi \rangle$ , donde  $D'(\pm\lambda)$  es el conjunto de los autovectores de  $\phi h$  asociados al autovalor  $\pm\lambda$ .

Por la ecuación (3.2.32), sabemos que  $(\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y = 0$  para todos  $X, Y$  ortogonales a  $\xi$ . Si tomamos  $X, Z \in D'(\lambda)$  y  $Y \in D'(-\lambda)$ , entonces tenemos por ser  $\phi h$  simétrico que

$$\begin{aligned}
0 = & g((\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y, Z) = g(\nabla_Y \phi hX - \phi h \nabla_Y X - \nabla_X \phi hY + \phi h \nabla_X Y, Z) \\
= & g(\nabla_Y(\lambda X) - \nabla_X(-\lambda Y), Z) - g(\nabla_Y X - \nabla_X Y, \phi hZ) \\
= & g(\nabla_Y(\lambda X) + \nabla_X(\lambda Y), Z) - \lambda g(\nabla_Y X - \nabla_X Y, Z).
\end{aligned}$$

Como  $\kappa$  sólo varía en la dirección de  $\xi$  y  $X, Y$  son campos ortogonales a  $\xi$ , entonces obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= g(\nabla_Y(\lambda X) + \nabla_X(\lambda Y), Z) - \lambda g(\nabla_Y X - \nabla_X Y, Z) \\ &= \lambda g(\nabla_Y X + \nabla_X Y, Z) - \lambda g(\nabla_Y X - \nabla_X Y, Z) = 2\lambda g(\nabla_X Y, Z). \end{aligned}$$

Ahora bien,  $\lambda \neq 0$ , luego  $0 = g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Z, Y) = -g(\nabla_X Z, Y)$ , de donde deducimos que  $\nabla_X Z \in D'(\lambda) \oplus \langle \xi \rangle$  si  $X, Z \in D'(\lambda)$ . Análogamente se prueba que  $\nabla_X Z \in D'(-\lambda) \oplus \langle \xi \rangle$  si  $X, Z \in D'(-\lambda)$ .

Tomamos ahora una base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n, \phi e_1, \dots, \phi e_n, \xi\}$  tal que  $e_i \in D'(\lambda)$ ,  $\phi e_i \in D'(-\lambda)$ . Dados  $X, Y$  ortogonales a  $\xi$ , se obtiene por (1.2.3) que

$$\nabla_X Y = \sum_i (g(\nabla_X Y, e_i)e_i + g(\nabla_X Y, \phi e_i)\phi e_i) + g(-X + \phi hX, Y)\xi.$$

Si  $X, Y \in D'(\lambda)$ , entonces

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, \phi e_i) &= 0, \\ g(-X + \phi hX, Y) &= g(-X + \lambda X, Y) = (\lambda - 1)g(X, Y), \end{aligned}$$

luego

$$\nabla_X Y = \sum_i g(\nabla_X Y, e_i)e_i + (\lambda - 1)g(X, Y)\xi.$$

Usando que  $\kappa$  sólo varía en la dirección de  $\xi$  y que  $X$  es en particular un campo ortogonal a  $\xi$  deducimos que

$$\begin{aligned} (\nabla_X \phi h)Y &= \nabla_X \phi hY - \phi h \nabla_X Y = \lambda \nabla_X Y - \phi h \nabla_X Y \\ &= \lambda \sum_i g(\nabla_X Y, e_i)e_i + \lambda(\lambda - 1)g(X, Y)\xi \\ &\quad - \sum_i g(\nabla_X Y, e_i)\phi h e_i + (\lambda - 1)g(X, Y)\phi h \xi \\ &= \lambda \sum_i g(\nabla_X Y, e_i)e_i + \lambda(\lambda - 1)g(X, Y)\xi - \lambda \sum_i g(\nabla_X Y, e_i)e_i \\ &= \lambda(\lambda - 1)g(X, Y)\xi. \end{aligned}$$

Si  $X, Y \in D'(-\lambda)$ , se prueba análogamente que  $(\nabla_X \phi h)Y = \lambda(\lambda + 1)g(X, Y)\xi$ .

Tomando ahora  $X \in D'(\lambda)$  e  $Y \in D'(-\lambda)$ , se cumple que

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, e_i) &= 0, \\ g(-X + \phi hX, Y) &= g(-X + \lambda X, Y) = (\lambda - 1)g(X, Y) = 0, \end{aligned}$$



luego

$$\nabla_X Y = \sum_i g(\nabla_X Y, \phi e_i) \phi e_i.$$

Usando de nuevo que  $\kappa$  sólo varía en la dirección de  $\xi$  y que  $X$  es un campo ortogonal a  $\xi$  obtenemos que

$$\begin{aligned} (\nabla_X \phi h)Y &= \nabla_X \phi h Y - \phi h \nabla_X Y = -\lambda \nabla_X Y - \phi h \nabla_X Y \\ &= -\lambda \sum_i g(\nabla_X Y, \phi e_i) \phi e_i - \sum_i g(\nabla_X Y, \phi e_i) \phi h \phi e_i \\ &= -\lambda \sum_i g(\nabla_X Y, \phi e_i) \phi e_i + \lambda \sum_i g(\nabla_X Y, \phi e_i) \phi e_i = 0. \end{aligned}$$

Si  $X \in D'(-\lambda)$  e  $Y \in D'(\lambda)$ , se prueba análogamente que  $(\nabla_X \phi h)Y = 0$ . Además, sabemos por las ecuaciones (1.2.3) y (3.2.29) que

$$(\nabla_X \phi h)\xi = \nabla_X \phi h \xi - \phi h \nabla_X \xi = \phi h \phi^2 X + \phi h \phi h X = -\phi h X - \lambda^2 \phi^2 X.$$

Finalmente, tenemos por (3.2.30) que

$$\nabla_\xi \phi h = (\nabla_\xi \phi)h + \phi(\nabla_\xi h) = \phi((\nu - 2)h - \mu \phi h) = \mu h + (\nu - 2)\phi h.$$

Dado  $X$  un campo arbitrario, podemos escribir  $X = X_\lambda + X_{-\lambda} + \eta(X)\xi$ , donde  $X_\lambda \in D'(\lambda)$  y  $X_{-\lambda} \in D'(-\lambda)$ . Entonces se obtiene que

$$\begin{aligned} (\nabla_X \phi h)Y &= (\nabla_{X_\lambda} \phi h)Y_\lambda + (\nabla_{X_\lambda} \phi h)Y_{-\lambda} + (\nabla_{X_{-\lambda}} \phi h)Y_\lambda + (\nabla_{X_{-\lambda}} \phi h)Y_{-\lambda} \\ &\quad + \eta(Y)(\nabla_{X_\lambda + X_{-\lambda}} \phi h)\xi + \eta(X)(\nabla_\xi \phi h)Y. \end{aligned}$$

Aplicando todo lo obtenido anteriormente se concluye que:

$$\begin{aligned} (\nabla_X \phi h)Y &= \lambda(\lambda - 1)g(X_\lambda, Y_\lambda)\xi + \lambda(\lambda + 1)g(X_{-\lambda}, Y_{-\lambda})\xi \\ &\quad + \eta(Y)(\lambda(\lambda - 1)X_\lambda + \lambda(\lambda + 1)X_{-\lambda}) \\ &\quad + \eta(X)(\mu h Y + (\nu - 2)\phi h Y). \end{aligned} \tag{3.2.43}$$

Si escribimos  $X_\lambda = \frac{1}{2}(X - \eta(X)\xi + \frac{1}{\lambda}\phi h X)$  y  $X_{-\lambda} = \frac{1}{2}(X - \eta(X)\xi - \frac{1}{\lambda}\phi h X)$  y usamos que  $-\lambda^2 = \kappa + 1$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda - 1)X_\lambda + \lambda(\lambda + 1)X_{-\lambda} &= \lambda(\lambda(X_\lambda + X_{-\lambda}) - (X_\lambda - X_{-\lambda})) \\ &= \lambda(\lambda(X - \eta(X)\xi) - \frac{1}{\lambda}\phi h X) = -\lambda^2 \phi^2 X - \phi h X = (\kappa + 1)\phi^2 X - \phi h X, \end{aligned} \tag{3.2.44}$$

luego

$$\begin{aligned}
& \lambda(\lambda - 1)g(X_\lambda, Y_\lambda)\xi + \lambda(\lambda + 1)g(X_{-\lambda}, Y_{-\lambda})\xi = \\
& = \lambda(\lambda - 1)g(X_\lambda, Y)\xi + \lambda(\lambda + 1)g(X_{-\lambda}, Y)\xi \\
& = g(\lambda(\lambda - 1)X_\lambda + \lambda(\lambda + 1)X_{-\lambda}, Y)\xi = g((\kappa + 1)\phi^2 X - \phi hX, Y)\xi. \quad (3.2.45)
\end{aligned}$$

Bastaría sustituir (3.2.44) y (3.2.45) en (3.2.43) para obtener lo que buscábamos.  $\square$

**Proposición 3.2.35.** *Sea  $M$  un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio casi-Kenmotsu con  $\kappa < -1$  una función que sólo varía en la dirección de  $\xi$ . Entonces*

$$\begin{aligned}
& R(X, Y)\phi hZ - \phi hR(X, Y)Z = \quad (3.2.46) \\
& = (\kappa + 2)(g(Y, Z)\phi hX - g(X, Z)\phi hY + g(\phi hX, Z)Y - g(\phi hY, Z)X),
\end{aligned}$$

para todos  $X, Y, Z$  campos ortogonales a  $\xi$ .

*Demostración.* Por la identidad de Ricci de  $\phi h$ , (1.3.1), tenemos que:

$$R(X, Y)\phi hZ - \phi hR(X, Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y \phi h)Z - (\nabla_Y \nabla_X \phi h)Z - (\nabla_{[X, Y]} \phi h)Z. \quad (3.2.47)$$

Ahora bien, por el Lema anterior y (1.2.3) sabemos que para todos  $X, Y, Z$  campos ortogonales a  $\xi$  se cumple que:

$$(\nabla_Y \phi h)Z = -g((\kappa + 1)Y + \phi hY, Z)\xi,$$

$$(\nabla_Y \phi h)\nabla_X Z = -g((\kappa + 1)Y + \phi hY, \nabla_X Z)\xi - g(-X + \phi hX, Z)((\kappa + 1)Y + \phi hY).$$

Por tanto, usando otra vez (1.2.3) y el hecho de que  $\kappa$  sólo varía en la dirección de  $\xi$  obtenemos:

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \nabla_Y \phi h)Z &= \nabla_X(\nabla_Y \phi h)Z - (\nabla_Y \phi h)\nabla_X Z \\
&= -\nabla_X(g((\kappa + 1)Y + \phi hY, Z)\xi) \\
&\quad + g((\kappa + 1)Y + \phi hY, \nabla_X Z)\xi + g(-X + \phi hX, Z)((\kappa + 1)Y + \phi hY) \\
&= -g((\kappa + 1)\nabla_X Y + \nabla_X \phi hY, Z)\xi - g((\kappa + 1)Y + \phi hY, Z)(X - \phi hX) \\
&\quad + g(-X + \phi hX, Z)((\kappa + 1)Y + \phi hY), \quad (3.2.48)
\end{aligned}$$

para todos  $X, Y, Z$  campos ortogonales a  $\xi$ .

Análogamente se prueba que:

$$\begin{aligned}
(\nabla_Y \nabla_X \phi h)Z &= -g((\kappa + 1)\nabla_Y X + \nabla_Y \phi hX, Z)\xi - g((\kappa + 1)X + \phi hX, Z)(Y - \phi hY) \\
&\quad + g(-Y + \phi hY, Z)((\kappa + 1)X + \phi hX), \quad (3.2.49)
\end{aligned}$$

para todos  $X, Y, Z$  campos ortogonales a  $\xi$ .

Además, como  $d\eta = 0$ , sabemos que  $[X, Y]$  es ortogonal a  $\xi$  si  $X$  e  $Y$  lo son, luego

$$(\nabla_{[X, Y]}\phi h)Z = -g((\kappa + 1)[X, Y] + \phi h[X, Y], Z)\xi, \quad (3.2.50)$$

para todos  $X, Y, Z$  campos ortogonales a  $\xi$ .

Sustituyendo (3.2.48), (3.2.49) y (3.2.50) en (3.2.47) y usando las propiedades de  $h$  tenemos que:

$$\begin{aligned} R(X, Y)\phi hZ - \phi hR(X, Y)Z &= g((\nabla_Y\phi h)X - (\nabla_X\phi h)Y, Z)\xi \\ &= (\kappa + 2)(g(Y, Z)\phi hX - g(X, Z)\phi hY + g(\phi hX, Z)Y - g(\phi hY, Z)X), \end{aligned}$$

para todos  $X, Y, Z$  campos ortogonales a  $\xi$ .

Aplicando finalmente (3.2.32) concluimos que se cumple (3.2.46).  $\square$

Basta utilizar las ecuaciones (3.2.40) y (3.2.46) para probar el siguiente teorema de forma análoga a la Proposición 4.2 de [29].

**Teorema 3.2.36.** *Si  $M$  es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura casi-Kenmotsu y  $\kappa < -1$  una función que sólo varía en la dirección de  $\xi$ , entonces*

$$\begin{aligned} R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_{-\lambda} &= 0, \\ R(X_{-\lambda}, Y_{-\lambda})Z_\lambda &= 0, \\ R(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_{-\lambda} &= -(\kappa + 2)g(Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda})X_\lambda, \\ R(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_\lambda &= (\kappa + 2)g(X_\lambda, Z_\lambda)Y_{-\lambda}, \\ R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_\lambda &= (\kappa + 2\lambda)(g(Y_\lambda, Z_\lambda)X_\lambda - g(X_\lambda, Z_\lambda)Y_\lambda), \\ R(X_{-\lambda}, Y_{-\lambda})Z_{-\lambda} &= (\kappa - 2\lambda)(g(Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda})X_{-\lambda} - g(X_{-\lambda}, Z_{-\lambda})Y_{-\lambda}), \end{aligned}$$

donde  $X_{\pm\lambda}, Y_{\pm\lambda}, Z_{\pm\lambda}$  son autovectores de  $\phi h$  asociados a autovalores  $\pm\lambda = \pm\sqrt{-1 - \kappa}$ .

Por el teorema anterior y el Lema 3.2.2, podemos dar explícitamente la expresión del tensor de curvatura de un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura casi-Kenmotsu y  $\kappa < -1$ .

**Teorema 3.2.37.** *Si  $M$  es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura casi-Kenmotsu y  $\kappa < -1$  una función que sólo varía en la dirección de  $\xi$ , entonces su tensor de curvatura de Riemann puede escribirse como*

$$R = -R_1 - (\kappa + 1)R_3 - R_{5,2} - \mu R_6 + R_7 - (\nu - 1)R_8.$$

Por tanto,  $M$  es un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, \dots, f_8)$  con funciones

$$\begin{aligned} f_1 &= -1, & f_2 &= 0, & f_3 &= -(\kappa + 1), & f_4 &= 0, \\ f_{5,1} &= 0, & f_{5,2} &= -1, & f_6 &= -\mu, & f_7 &= 1, & f_8 &= -(\nu - 1). \end{aligned}$$

*Demostración.* Como  $\kappa < -1$ , sabemos por la Proposición 3.2.28 que  $TM = D'(\lambda) \oplus D'(-\lambda) \oplus \langle \xi \rangle$ , donde  $\lambda = \sqrt{-1 - \kappa}$ . Por tanto, dado un campo diferenciable en  $M$ , podemos escribir  $X = X_\lambda + X_{-\lambda} + \eta(X)\xi$ , donde  $X_{\pm\lambda}$  es un autovector de  $\phi h$  asociado al autovalor  $\pm\lambda$ , es decir,  $X_{\pm\lambda} \in D'(\pm\lambda)$ . Entonces, por las propiedades de  $R$  obtenemos que

$$R(X, Y)Z = R(X_\lambda + X_{-\lambda}, Y_\lambda + Y_{-\lambda})(Z_\lambda + Z_{-\lambda}) + \eta(X)R(\xi, Y)Z + \eta(Y)R(X, \xi)Z. \quad (3.2.51)$$

Por el Lema 3.2.2 y la definición de los tensores  $R_1, \dots, R_8$ , podemos comprobar que

$$\eta(X)R(\xi, Y)Z + \eta(Y)R(X, \xi)Z = -\kappa R_3(X, Y)Z - \mu R_6(X, Y)Z - \nu R_8(X, Y)Z. \quad (3.2.52)$$

Por el Teorema 3.2.36, obtenemos que

$$\begin{aligned} & R(X_\lambda + X_{-\lambda}, Y_\lambda + Y_{-\lambda})(Z_\lambda + Z_{-\lambda}) \\ &= R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_\lambda + R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_{-\lambda} + R(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_\lambda + R(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_{-\lambda} \\ &\quad + R(X_{-\lambda}, Y_\lambda)Z_\lambda + R(X_{-\lambda}, Y_\lambda)Z_{-\lambda} + R(X_{-\lambda}, Y_{-\lambda})Z_\lambda + R(X_{-\lambda}, Y_{-\lambda})Z_{-\lambda} \\ &= (\kappa + 2\lambda)(g(Y_\lambda, Z_\lambda)X_\lambda - g(X_\lambda, Z_\lambda)Y_\lambda) \\ &\quad + (\kappa - 2\lambda)(g(Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda})X_{-\lambda} - g(X_{-\lambda}, Z_{-\lambda})Y_{-\lambda}) \\ &\quad + (\kappa + 2)(g(X_\lambda, Z_\lambda)Y_{-\lambda} - g(Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda})X_\lambda - g(Y_\lambda, Z_\lambda)X_{-\lambda} + g(X_{-\lambda}, Z_{-\lambda})Y_\lambda). \end{aligned}$$

Ahora bien, de la descomposición  $X = X_\lambda + X_{-\lambda} + \eta(X)\xi$  puede deducirse que  $X_\lambda = \frac{1}{2}(X - \eta(X)\xi + \frac{1}{\lambda}\phi hX)$  y que  $X_{-\lambda} = \frac{1}{2}(X - \eta(X)\xi - \frac{1}{\lambda}\phi hX)$ , luego no es difícil comprobar que:

$$\begin{aligned} g(Y_\lambda, Z_\lambda)X_\lambda - g(X_\lambda, Z_\lambda)Y_\lambda &= \frac{1}{4}((R_1 + R_3) + \frac{1}{\lambda^2}R_{5,2} + \frac{1}{\lambda}(R_7 + R_8))(X, Y)Z, \\ g(Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda})X_{-\lambda} - g(X_{-\lambda}, Z_{-\lambda})Y_{-\lambda} &= \frac{1}{4}((R_1 + R_3) + \frac{1}{\lambda^2}R_{5,2} - \frac{1}{\lambda}(R_7 + R_8))(X, Y)Z, \\ g(X_\lambda, Z_\lambda)Y_{-\lambda} - g(Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda})X_\lambda - g(Y_\lambda, Z_\lambda)X_{-\lambda} + g(X_{-\lambda}, Z_{-\lambda})Y_\lambda \\ &= \frac{1}{2}(-(R_1 + R_3) + \frac{1}{\lambda^2}R_{5,2})(X, Y)Z. \end{aligned}$$

Por tanto, aplicando que  $\lambda^2 = -(\kappa + 1)$  obtenemos:

$$\begin{aligned} & R(X_\lambda + X_{-\lambda}, Y_\lambda + Y_{-\lambda})(Z_\lambda + Z_{-\lambda}) \\ &= \frac{1}{4}((\kappa + 2\lambda)((R_1 + R_3) + \frac{1}{\lambda^2}R_{5,2} + \frac{1}{\lambda}(R_7 + R_8)) \\ &\quad + (\kappa - 2\lambda)((R_1 + R_3) + \frac{1}{\lambda^2}R_{5,2} - \frac{1}{\lambda}(R_7 + R_8)) \quad (3.2.53) \\ &\quad + (\kappa + 2)(-2(R_1 + R_3) + \frac{2}{\lambda^2}R_{5,2}))(X, Y)Z \\ &= (-R_1 - R_3 - R_{5,2} + R_7 + R_8)(X, Y)Z. \end{aligned}$$

Sustituyendo (3.2.52) y (3.2.53) en (3.2.51), concluimos que

$$R = -R_1 - (\kappa + 1)R_3 - R_{5,2} - \mu R_6 + R_7 - (\nu - 1)R_8,$$

que es lo que buscábamos.  $\square$

**Nota 3.2.38.** Por el Teorema 3.2.32, podemos prescindir en el teorema anterior de la hipótesis “ $\kappa$  es una función que sólo varía en la dirección de  $\xi$ ” si la dimensión es mayor o igual 5. En dimensión 3 es posible simplificar la escritura del tensor de curvatura, como veremos más adelante en el Corolario 3.2.47.

**Ejemplo 3.2.39.** Por el Teorema anterior, los ejemplos que G. Dileo y A. M. Pastore dieron en [29] de  $(-1 - \lambda^2, 0, 2)$ -espacios con estructura casi-Kenmotsu, donde  $\lambda$  es un número real positivo, son en particular  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, \dots, f_8)$  con funciones

$$\begin{aligned} f_1 &= -1, & f_2 &= 0, & f_3 &= \lambda^2 > 0, & f_4 &= 0, \\ f_{5,1} &= 0, & f_{5,2} &= -1, & f_6 &= 0, & f_7 &= 1, & f_8 &= -1. \end{aligned}$$

Además, como  $f_7, f_8 \neq 0$  y la escritura del tensor de curvatura es única si estos ejemplos tienen dimensión mayor o igual que 5 (Teorema 3.2.22), sabemos que no pueden ser  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$ .

Cabe ahora plantearse si los  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacios con estructura casi-Kenmotsu y  $\kappa < -1$  de dimensión mayor o igual que 5 pueden ser  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s, es decir, si se puede escribir su tensor de curvatura sin dividir  $R_5$  en  $R_{5,1}$  y  $R_{5,2}$ . La respuesta es negativa, como veremos en el siguiente resultado. Los  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s de dimensión 3 con estructura casi-Kenmotsu se estudiarán al final de esta sección junto con los de estructura casi-cosimpléctica.

**Proposición 3.2.40.** No existen  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s  $M(f_1, \dots, f_8)$  de dimensión mayor o igual que 5 con estructura casi-Kenmotsu y  $\kappa = f_1 - f_3 < -1$ .

*Demostración.* Probaremos el resultado por Reducción al Absurdo. Supongamos que  $M(f_1, \dots, f_8)$  es un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con estructura casi-Kenmotsu y  $\kappa < -1$ , de dimensión mayor o igual que 5. Entonces  $M$  es también un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido con  $f_{5,1} = f_5$  y  $f_{5,2} = -f_5$ , así que

$$R = f_1R_1 + f_2R_2 + f_3R_3 + f_4R_4 + f_5R_{5,1} - f_5R_{5,2} + f_6R_6 + f_7R_7 + f_8R_8.$$

Por otro lado,  $M$  es un  $(f_1 - f_3, f_4 - f_6, f_7 - f_8)$ -espacio con  $\kappa = f_1 - f_3 < -1$  función que sólo varía en la dirección de  $\xi$  (Proposición 3.2.1 y Teorema 3.2.32). Aplicando el Teorema 3.2.37 obtenemos que su tensor de curvatura puede escribirse como

$$R = -R_1 - (f_1 - f_3 + 1)R_3 - R_{5,2} - (f_4 - f_6)R_6 + R_7 - (f_7 - f_8 - 1)R_8.$$

Por el Teorema 3.2.22, el tensor de curvatura tiene escritura única, luego obtenemos en particular que  $f_5 = 0$  y  $f_5 = 1$ , lo cual es absurdo. Por tanto, no existen  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s  $M(f_1, \dots, f_8)$  de dimensión mayor o igual que 5, estructura casi-Kenmotsu y  $\kappa = f_1 - f_3 < -1$ .  $\square$

**Nota 3.2.41.** *Las Proposiciones 3.2.17 y 3.2.40 significan la no existencia de  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s  $M(f_1, \dots, f_8)$  de dimensión mayor o igual que 5 con estructuras casi-Kenmotsu o casi-cosimpléctica y  $h \neq 0$ . Las demostraciones de ambos hechos usan el que la escritura del tensor de curvatura de un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido de dimensión mayor o igual que 5 es única y que el tensor de curvatura de un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s  $M(f_1, \dots, f_8)$  de dimensión mayor o igual que 5 con estructuras casi-Kenmotsu o casi-cosimpléctica y  $h \neq 0$  incluye el término  $-R_{5,2}$  pero no  $R_{5,1}$ .*

También podemos usar el Teorema 3.2.22 para determinar algunas relaciones entre las funciones de un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, \dots, f_8)$  de dimensión mayor o igual que 5, estructura casi-Kenmotsu y  $f_1 - f_3 < -1$ , análogamente a como ya hicimos en el Teorema 2.3.24 para estructura de contacto métrica y en el Teorema 3.2.25 para estructura casi-cosimpléctica.

**Teorema 3.2.42.** *Sea  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, \dots, f_8)$  un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido y estructura casi-Kenmotsu. Si  $M$  es de dimensión mayor o igual que 5 y cumple que  $f_1 - f_3 < -1$ , entonces  $M$  verifica*

$$f_1 = -1, f_2 = f_4 = f_{5,1} = 0, f_{5,2} = -1, f_7 = 1, f_3 > 0,$$

y  $f_3, f_6, f_8$  son funciones que sólo varían en la dirección de  $\xi$ . Es decir,  $M$  es un  $(-1 - f_3, -f_6, 1 - f_8)$ -espacio con  $f_3 > 0$ .

*Demostración.* Por el Teorema 3.2.20, sabemos que  $M$  es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con  $\kappa = f_1 - f_3 < -1$ ,  $\mu = f_4 - f_6$  y  $\nu = f_7 - f_8$ . Estamos pues en las condiciones del Teorema 3.2.37, luego el tensor de curvatura de Riemann puede escribirse como

$$\begin{aligned} R &= -R_1 - (\kappa + 1)R_3 - R_{5,2} - \mu R_6 + R_7 - (\nu - 1)R_8 \\ &= -R_1 - (f_1 - f_3 + 1)R_3 - R_{5,2} - (f_4 - f_6)R_6 + R_7 - (f_7 - f_8 - 1)R_8. \end{aligned}$$

Por la definición de  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido y la unicidad de la escritura del tensor de curvatura (Teorema 3.2.22), obtenemos que

$$f_1 = -1, f_2 = f_4 = f_{5,1} = 0, f_{5,2} = -1, f_7 = 1.$$

Por tanto,  $\kappa = -1 - f_3$ ,  $\mu = -f_6$  y  $\nu = 1 - f_8$ . Por hipótesis,  $f_1 - f_3 = -1 - f_3 < -1$ , luego  $f_3 > 0$ . El resto del resultado se obtiene por el Teorema 3.2.32, que afirma que  $\kappa, \mu$  y  $\nu$  sólo varían en la dirección de  $\xi$ .  $\square$

Por último, veremos qué ocurre en el caso de que un  $g(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con estructura casi-cosimpléctica o casi-Kenmotsu tenga dimensión 3. Usando el Lema 3.2.2, podemos probar un análogo del Teorema 3.1.2 para estas estructuras.

**Teorema 3.2.43.** *Sea  $M^3$  un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura casi-cosimpléctica (respectivamente casi-Kenmotsu) y  $\kappa < 0$  (resp.  $\kappa < -1$ ). Entonces su tensor de curvatura puede escribirse como*

$$R = \left(\frac{\tau}{2} - 2\kappa\right) R_1 + \left(\frac{\tau}{2} - 3\kappa\right) R_3 + \mu R_4 + \nu R_7,$$

donde  $\tau$  es la curvatura escalar de  $M$  y los tensores  $R_1, R_3, R_4, R_7$  son los que aparecen en (2.1.1) y (3.1.2).

*Demostración.* Recordamos en primer lugar la ecuación (2.2.38), que es válida para toda variedad Riemanniana de dimensión 3:

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= g(Y, Z)QX - g(X, Z)QY + g(QY, Z)X - g(QX, Z)Y \\ &\quad - \frac{\tau}{2}(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y). \end{aligned}$$

Tomemos ahora una  $\phi$ -base  $\{E, \phi E, \xi\}$  tal que  $hE = \lambda E$ , donde  $\lambda = \sqrt{-\kappa}$  (resp.  $\lambda = \sqrt{-1 - \kappa}$ ), que es posible gracias a la Proposición 3.2.3 (resp. 3.2.28). Usando el Lema 3.2.2 y esta base puede calcularse que

$$\begin{aligned} Q\xi &= R(\xi, E)E + R(\xi, \phi E)\phi E + R(\xi, \xi)\xi \\ &= (\kappa + \lambda\mu)\xi + (\kappa - \lambda\mu)\xi + 0 = 2\kappa\xi. \end{aligned}$$

Si hacemos  $Y = Z = \xi$  en (2.2.38) y usamos que  $Q\xi = 2\kappa\xi$  y  $g(QX, Y) = g(QY, X)$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} R(X, \xi)\xi &= QX - \eta(X)Q\xi + \eta(Q\xi)X - \eta(QX)\xi - \frac{\tau}{2}(X - \eta(X)\xi) \\ &= QX - 2\kappa\eta(X)\xi + 2\kappa X - 2\kappa\eta(X)\xi - \frac{\tau}{2}(X - \eta(X)\xi) \\ &= \left(2\kappa - \frac{\tau}{2}\right) X + \left(\frac{\tau}{2} - 4\kappa\right) \eta(X)\xi + QX. \end{aligned}$$

Despejando  $QX$  y haciendo  $Y = \xi$  en (3.1.1) podemos escribir:

$$\begin{aligned} QX &= R(X, \xi)\xi - \left(2\kappa - \frac{\tau}{2}\right) X - \left(\frac{\tau}{2} - 4\kappa\right) \eta(X)\xi \\ &= \kappa(X - \eta(X)\xi) + \mu hX + \nu \phi hX - \left(2\kappa - \frac{\tau}{2}\right) X - \left(\frac{\tau}{2} - 4\kappa\right) \eta(X)\xi \\ &= \left(\frac{\tau}{2} - \kappa\right) X + \left(3\kappa - \frac{\tau}{2}\right) \eta(X)\xi + \mu hX + \nu \phi hX. \end{aligned}$$

Si sustituimos la expresión de  $QX$  anterior en (2.2.38) y usamos las definiciones de  $R_1, R_3, R_4$  y  $R_7$ , conseguimos finalmente la ecuación buscada.  $\square$

El siguiente resultado puede probarse análogamente a como se hizo en el caso de variedades de contacto métricas:

**Proposición 3.2.44.** *Sea  $M^3$  un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura casi-cosimpléctica (resp. casi-Kenmotsu) y  $\kappa < 0$  (resp.  $\kappa < -1$ ). Entonces su curvatura  $\phi$ -seccional es  $F = \frac{\tau}{2} - 2\kappa$ .*

Por tanto, el Teorema 3.2.43 puede ser reescrito como:

**Corolario 3.2.45.** *Sea  $M^3$  un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura casi-cosimpléctica (resp. casi-Kenmotsu) y  $\kappa < 0$  (resp.  $\kappa < -1$ ). Entonces su tensor de curvatura tiene la forma*

$$R = FR_1 + (F - \kappa)R_3 + \mu R_4 + \nu R_7,$$

donde  $F$  es la curvatura  $\phi$ -seccional y  $R_1, R_3, R_4, R_7$  son los tensores definidos en (2.1.1) y (3.1.2). En particular,  $M$  es un  $g(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M(F, 0, F - \kappa, \mu, 0, 0, \nu, 0)$ .

**Nota 3.2.46.** *Es de señalar que la expresión del tensor de curvatura del Corolario anterior coincide con la obtenida en el Corolario 3.1.4 para  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacios de dimensión 3 con estructura de contacto métrica. Ello se debe a que en las tres estructuras (casi-cosimpléctica, casi-Kenmotsu y de contacto métrica), el tensor  $h$  cumple las mismas propiedades: es simétrico y anticonmuta con  $\phi$  (Lemas 1.2.3, 1.2.7 y 1.2.8).*

Bajo algunas hipótesis extra, podemos escribir  $F$  en función de  $\kappa$ , con lo que el tensor de curvatura quedaría determinado. El resultado siguiente para estructuras casi-cosimpléctica y casi-Kenmotsu es análogo al Corolario 3.1.14 para estructura de contacto métrica:

**Corolario 3.2.47.** *Sea  $M^3$  un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura casi-cosimpléctica. Si  $\kappa < 0$  y  $\kappa, \mu, \nu$  sólo varían en la dirección de  $\xi$ , entonces su tensor de curvatura puede ser escrito como*

$$R = -\kappa R_1 - 2\kappa R_3 + \mu R_4 + \nu R_7,$$

donde  $R_1, R_2, R_4, R_7$  son los tensores definidos en (2.1.1) y (3.1.2).

Sea  $M^3$  un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura casi-Kenmotsu. Si  $\kappa < -1$  es una función que sólo varía en la dirección de  $\xi$ , entonces su tensor de curvatura puede ser escrito como

$$R = -(\kappa + 2)R_1 - 2(\kappa + 1)R_3 + \mu R_4 + \nu R_7.$$

*Demostración.* En dimensión 3,  $F = R(X, \phi X, \phi X, X)$  no depende de la elección de  $X$  unitario, luego podemos tomar  $X = E$ , un autovector de  $h$  asociado al autovalor  $\lambda = \sqrt{-\kappa} \neq 0$ , por la Proposición 3.2.3 si la estructura es casi-cosimpléctica.

No conocemos en general la curvatura  $\phi$ -seccional de un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio, pero si usamos las transformaciones  $D$ -homotéticas (3.2.15) con  $\alpha = 1$  y  $\beta = \sqrt{-\kappa}$ , obtenemos una variedad transformada que es un  $(-1, \bar{\mu})$ -espacio, con  $\bar{\mu} = \mu/\sqrt{-\kappa}$ .



Razonando de forma similar a como se hizo en la demostración del Corolario 3.2.16, se obtiene que, para todos  $X, Y, Z$  campos en  $M$

$$\bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} = R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} + \frac{\kappa + 1}{\kappa}R_{5,2}(X, Y)Z,$$

donde  $X = \tilde{X} + \eta(X)\xi$  y  $\tilde{X}$  es ortogonal a  $\xi$ .

Por tanto, tenemos en particular que:

$$F = R(E, \phi E, \phi E, E) = \bar{R}(E, \phi E, \phi E, E) - \frac{\kappa + 1}{\kappa}R_{5,2}(E, \phi E, \phi E, E). \quad (3.2.54)$$

Por otro lado, como  $E$  es un campo unitario respecto a  $g$  y ortogonal a  $\xi$ , por (3.2.15) también es unitario respecto a  $\bar{g}$  y ortogonal a  $\bar{\xi}$ , luego en virtud del Teorema 3.2.12 se cumple:

$$\bar{R}(E, \phi E, \phi E, E) = \bar{g}(E, \bar{\phi}^2 E)\bar{g}(\bar{\phi}^2 E, E) = 1.$$

Por la definición del tensor  $R_{5,2}$ , (2.3.17), y las propiedades de  $h$  (Lema 1.2.7):

$$R_{5,2}(E, \phi E, \phi E, E) = g(\phi hX, X)^2 + g(hX, X)^2 = \lambda^2(g(\phi X, X)^2 + g(X, X)^2) = \lambda^2 = -\kappa.$$

Sustituyendo las dos últimas ecuaciones en (3.2.54) obtenemos que

$$F = 1 + \frac{\kappa + 1}{\kappa}(-\kappa) = -\kappa.$$

Basta sustituir  $F = -\kappa$  en el Corolario 3.2.45 anterior para conseguir lo que buscábamos.

En el caso de tener estructura casi-Kenmotsu, tomamos  $X$  autovector de  $\phi h$  asociado al autovalor  $\lambda = \sqrt{-1 - \kappa} \neq 0$  (posible por la Proposición 3.2.28). Sabemos por el Teorema 3.2.36 que  $F = -(\kappa + 2)g(\phi X, \phi X)g(X, X) = -(\kappa + 2)$  y concluimos que  $R = -(\kappa + 2)R_1 - 2(\kappa + 1)R_3 + \mu R_4 + \nu R_7$ .  $\square$

**Nota 3.2.48.** *Las expresiones del tensor de curvatura del Corolario 3.2.16 y el Teorema 3.2.37 coinciden con las del Corolario anterior en el caso de que la dimensión sea 3. En efecto, puede comprobarse que las ecuaciones (2.2.33), (2.2.34), (2.2.35), (3.1.8) son ciertas si la estructura es casi-cosimpléctica o casi-Kenmotsu, aunque originalmente probamos las tres últimas sólo para estructura de contacto métrica.*

*Si la estructura es casi-cosimpléctica, se prueba análogamente a la ecuación (2.3.20) que  $R_{5,2} = \kappa(R_1 + R_3)$ . Por tanto, el tensor de curvatura de la variedad puede escribirse como:*

$$\begin{aligned} R &= -\kappa R_3 - R_{5,2} - \mu R_6 - \nu R_8 = -\kappa R_3 - \kappa(R_1 + R_3) - \mu(-R_4) - \nu(-R_7) \\ &= -\kappa R_1 - 2\kappa R_3 + \mu R_4 + \nu R_7. \end{aligned}$$

Si la estructura es casi-Kenmotsu, también puede demostrarse que  $R_{5,2} = (\kappa + 1)(R_1 + R_3)$ , luego el tensor de curvatura tendría la forma

$$\begin{aligned} R &= -R_1 - (\kappa + 1)R_3 - R_{5,2} - \mu R_6 + R_7 - (\nu - 1)R_8 \\ &= -R_1 - (\kappa + 1)R_3 - (\kappa + 1)(R_1 + R_3) - \mu(-R_4) + R_7 - (\nu - 1)(-R_7) \\ &= -(\kappa + 2)R_1 - 2(\kappa + 1)R_3 + \mu R_4 + \nu R_7. \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.2.49.** Por el Corolario anterior, los ejemplos de  $(-1, \mu, 0)$ -espacios casi-cosimplécticos (con  $\mu$  variando únicamente en la dirección de  $\xi$ ) que aparecen en [27] son en dimensión 3 ejemplos de  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s  $M^3(f_1, \dots, f_6)$  con funciones:

$$f_1 = 1, f_2 = 0, f_3 = 2, f_4 = \mu, f_5 = f_6 = 0.$$

Análogamente, los ejemplos de  $(-1 - \lambda^2, 0, 2)$ -espacios casi-Kenmotsu (con  $\lambda$  un número real positivo) que aparecen en [29] son ejemplos de  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s  $M^3(f_1, \dots, f_8)$  con funciones:

$$f_1 = -1 + \lambda^2, f_2 = 0, f_3 = 2\lambda^2, f_4 = f_5 = f_6 = 0, f_7 = 2, f_8 = 0.$$

Finalmente, es razonable plantearse qué ocurre si la variedad de dimensión 3 tiene estructura casi-cosimpléctica y  $\kappa = 0$  o casi-Kenmotsu y  $\kappa = -1$ .

Si  $M^3$  es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio casi-cosimpléctico con  $\kappa = 0$ , entonces  $h = 0$  y  $M$  es una variedad cosimpléctica por la Proposición 3.2.3. En virtud de la Proposición 2.4.6 (con  $\beta = 0$ ), obtenemos que el tensor de curvatura de la variedad puede escribirse como  $R = \frac{\tau}{2}R_1 + \frac{\tau}{2}R_3$ , resultado que coincide con el Teorema 3.2.43.

Análogamente, si  $M^3$  es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio casi-Kenmotsu y  $\kappa = -1$ , entonces  $h = 0$  y  $M$  es una variedad de Kenmotsu por la Proposición 3.2.28. En virtud de la Proposición 2.4.6 (con  $\beta = -1$ ), obtenemos que el tensor de curvatura de la variedad puede escribirse como  $R = \left(\frac{\tau}{2} + 2\right)R_1 + \left(\frac{\tau}{2} + 3\right)R_3$ , resultado que vuelve a coincidir con el Teorema 3.2.43.

### 3.3. $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s conformemente llanos

En esta sección daremos primero condiciones necesarias y suficientes para que un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. sea conformemente llano en el caso de que la dimensión sea mayor o igual que 5 y el tensor  $h$  satisfaga algunas propiedades. Obtendremos también algunos resultados si la estructura es de contacto métrica, casi-Kenmotsu o casi-cosimpléctica. Por último, estudiaremos los  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s con estructura de contacto métrica que sean conformemente simétricos,  $\xi$ -conformemente llanos y  $\phi$ -conformemente llanos.

Por la definición de los tensores  $R_4, \dots, R_8$  es fácil ver que se anulan si  $h = 0$ . Por tanto, los  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s  $M(f_1, \dots, f_8)$  con  $h = 0$  son  $g.S.s.f$ 's  $M(f_1, f_2, f_3)$ , que fueron ya estudiados en el caso de ser conformemente llanos por U. K. Kim en [41]. Entre otros, probó el hecho de que un  $g.S.s.f$ .  $M(f_1, f_2, f_3)$  de dimensión mayor o igual que 5 es conformemente llano si y sólo si  $f_2 = 0$ . Daremos en esta sección un resultado similar en el caso de que  $h \neq 0$  (como en secciones anteriores, supondremos que  $h = 0$  o  $h \neq 0$  en todos los puntos de  $M$ ).

Por último, estudiaremos qué ocurre cuando un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. es conformemente simétrico,  $\xi$ -conformemente llano o  $\phi$ -conformemente llano.

Veamos primero la forma que adquieren la curvatura escalar y el operador de Ricci en un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_8)$ .

**Proposición 3.3.1.** *Dado un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M^{2n+1}(f_1, \dots, f_8)$  tal que  $h$  es un operador simétrico cumpliendo  $h\phi = -\phi h$ , el operador de Ricci tiene la forma*

$$Q = (2nf_1 + 3f_2 - f_3)I - (3f_2 + (2n - 1)f_3)\eta \otimes \xi + ((2n - 1)f_4 - f_6)h + ((2n - 1)f_7 - f_8)\phi h \quad (3.3.1)$$

y la curvatura escalar viene dada por

$$\tau = 2n((2n + 1)f_1 + 3f_2 - 2f_3). \quad (3.3.2)$$

*Demostración.* Generalizaremos a dimensión arbitraria la prueba de la Proposición 3.1.30 (para dimensión 3), que sólo utilizaba la hipótesis de contacto métrico para que  $h$  fuese un operador simétrico cumpliendo  $h\phi = -\phi h$ .

Tomemos una  $\phi$ -base  $\{e_1, \dots, e_n, \phi e_1, \dots, \phi e_n, \xi\}$ . Usando la definición del operador de Ricci y la fórmula (2.2.36) obtenemos:

$$\begin{aligned} QX = & (2nf_1 + 3f_2 - f_3)X - (3f_2 + f_3(2n - 1))\eta(X)\xi + (f_4(2n - 1) - f_6)hX \\ & + f_7 \left( \sum_{i=1}^n (R_7(X, e_i)e_i + R_7(X, \phi e_i)\phi e_i) + R_7(X, \xi)\xi \right) \\ & + f_8 \left( \sum_{i=1}^n (R_8(X, e_i)e_i + R_8(X, \phi e_i)\phi e_i) + R_8(X, \xi)\xi \right) \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Podemos calcular fácilmente que

$$\begin{aligned} R_7(X, e_i)e_i + R_7(X, \phi e_i)\phi e_i = & 2\phi hX + h(g(\phi X, e_i)e_i + g(\phi X, \phi e_i)\phi e_i) \\ & - (g(\phi hX, e_i)e_i + g(\phi hX, \phi e_i)\phi e_i) \\ R_7(X, \xi)\xi = & \phi hX. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n (R_7(X, e_i)e_i + R_7(X, \phi e_i)\phi e_i) + R_7(X, \xi)\xi = (2n + 1)\phi hX \\
& + h \left( \sum_{i=1}^n (g(\phi X, \phi e_i)\phi e_i + g(\phi X, e_i)e_i) \right) - \sum_{i=1}^n (g(\phi hX, e_i)e_i + g(\phi hX, \phi e_i)\phi e_i) \\
& = (2n + 1)\phi hX + h\phi X - \phi hX = (2n - 1)\phi hX. \tag{3.3.4}
\end{aligned}$$

Análogamente, se calcula que

$$\begin{aligned}
R_8(X, e_i)e_i + R_8(X, \phi e_i)\phi e_i &= 0, \\
R_8(X, \xi)\xi &= -\phi hX,
\end{aligned}$$

luego

$$\sum_{i=1}^n (R_8(X, e_i)e_i + R_8(X, \phi e_i)\phi e_i) + R_8(X, \xi)\xi = -\phi hX. \tag{3.3.5}$$

Al sustituir (3.3.4) y (3.3.5) en (3.3.3) obtendríamos (3.3.1).

Hallamos por último la curvatura escalar usando la  $\phi$ -base anterior y la fórmula (3.3.1):

$$\begin{aligned}
\tau = \text{tr}Q &= \sum_{i=1}^n (g(Qe_i, e_i) + g(Q\phi e_i, \phi e_i)) + g(Q\xi, \xi) = \\
& = (2n + 1)(2nf_1 + 3f_2 - f_3) - (3f_2 + f_3(2n - 1)) = 2n((2n + 1)f_1 + 3f_2 - 2f_3).
\end{aligned}$$

□

**Nota 3.3.2.** Las propiedades “ $h$  es simétrico” y “ $h\phi = -\phi h$ ” son ciertas si la variedad tiene estructura de contacto métrica, casi-Kenmotsu o casi-cosimpléctica, por ejemplo. Por tanto, el resultado anterior generaliza la Proposición 3.1.30 para estructura de contacto métrica y es cierta además para estructuras casi-cosimpléctica y casi-Kenmotsu.

Se recuerda que una variedad Riemanniana se dice que es *conformemente llana* si es localmente conforme a una variedad llana. El *tensor de Schouten* de una variedad  $M^{2n+1}$  se define como

$$L = -\frac{1}{2n - 1}Q + \frac{\tau}{4n(2n - 1)}I, \tag{3.3.6}$$

y el de *tensor de Weyl* como

$$W(X, Y)Z = R(X, Y)Z - (g(LX, Z)Y - g(LY, Z)X + g(X, Z)LY - g(Y, Z)LX), \tag{3.3.7}$$

para todos  $X, Y, Z$  campos en  $M$ .

Si la dimensión de una variedad  $M$  es mayor o igual que 5, es bien sabido que  $M$  es conformemente llana si y sólo si el tensor de Weyl  $W$  se anula idénticamente. En dimensión 3, este tensor siempre es nulo y la variedad es conformemente llana si y sólo si el tensor de Schouten es un tensor de Codazzi, es decir, si cumple que  $(\nabla_X L)Y - (\nabla_Y L)X = 0$ , para todos  $X, Y$  campos en  $M$ . De hecho, si una variedad  $M$  tiene dimensión 3, entonces  $W = 0$  es equivalente a que se cumpla la ecuación (2.2.38), que sabemos es cierta para toda variedad Riemanniana  $M^3$ .

Veamos qué forma adquieren los tensores de Weyl y de Schouten en un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M^{2n+1}(f_1, \dots, f_8)$ .

**Proposición 3.3.3.** *Dado un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M^{2n+1}(f_1, \dots, f_8)$  tal que  $h$  es un operador simétrico cumpliendo  $h\phi = -\phi h$ , el tensor de Schouten tiene la forma*

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{2} \left( f_1 + \frac{3}{2n-1} f_2 \right) I + \left( \frac{3}{2n-1} f_2 + f_3 \right) \eta \otimes \xi \\ & - \left( f_4 - \frac{1}{2n-1} f_6 \right) h - \left( f_7 - \frac{1}{2n-1} f_8 \right) \phi h \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

y el tensor de Weyl viene dado por

$$W = -\frac{3}{2n-1} f_2 R_1 + f_2 R_2 - \frac{3}{2n-1} f_2 R_3 + \frac{1}{2n-1} f_6 R_4 + f_5 R_5 + f_6 R_6 + \frac{1}{2n-1} f_8 R_7 + f_8 R_8. \quad (3.3.9)$$

*Demostración.* Para obtener (3.3.8) basta sustituir las fórmulas (3.3.1) y (3.3.2) en (3.3.6), la definición del tensor  $L$ .

Usando ahora (3.3.8) y la definición de los tensores  $R_1, \dots, R_8$ , hallamos que

$$\begin{aligned} g(LX, Z)Y - g(LY, Z)X + g(X, Z)LY - g(Y, Z)LX = \\ = \left( f_1 + \frac{3}{2n-1} f_2 \right) R_1(X, Y)Z + \left( \frac{3}{2n-1} f_2 + f_3 \right) R_3(X, Y)Z \\ + \left( f_4 - \frac{1}{2n-1} f_6 \right) R_4(X, Y)Z + \left( f_7 - \frac{1}{2n-1} f_8 \right) R_7(X, Y)Z. \end{aligned}$$

Si sustituimos ahora esta última fórmula en la definición del tensor de Weyl, (3.3.7), y aplicamos (3.1.16), conseguimos

$$\begin{aligned}
W &= \sum_{i=1}^8 f_i R_i - \left( f_1 + \frac{3}{2n-1} f_2 \right) R_1 - \left( \frac{3}{2n-1} f_2 + f_3 \right) R_3 \\
&\quad - \left( f_4 - \frac{1}{2n-1} f_6 \right) R_4 - \left( f_7 - \frac{1}{2n-1} f_8 \right) R_7 \\
&= -\frac{3}{2n-1} f_2 R_1 + f_2 R_2 - \frac{3}{2n-1} f_2 R_3 + \frac{1}{2n-1} f_6 R_4 \\
&\quad + f_5 R_5 + f_6 R_6 + \frac{1}{2n-1} f_8 R_7 + f_8 R_8,
\end{aligned}$$

que es lo que buscábamos.  $\square$

**Nota 3.3.4.** Dado un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M^3(f_1, \dots, f_8)$  tal que  $h$  es un operador simétrico cumpliendo  $h\phi = -\phi h$ , el tensor de Weyl viene dado por

$$\begin{aligned}
W &= -3f_2 R_1 + f_2 R_2 - 3f_2 R_3 + f_6 R_4 + f_5 R_5 + f_6 R_6 + f_8 R_7 + f_8 R_8 \\
&= f_2(-3(R_1 + R_3) + R_2) + f_5 R_5 + f_6(R_4 + R_6) + f_8(R_7 + R_8).
\end{aligned}$$

Es fácil ver entonces que se cumple  $W = 0$  en virtud de las ecuaciones (2.2.33), (2.2.34), (2.2.35) y (3.1.8), que afirman que

$$R_2 = 3(R_1 + R_3), \quad R_5 = 0, \quad R_6 = -R_4 \quad \text{y} \quad R_8 = -R_7.$$

Aunque las tres últimas sólo las probamos para estructura de contacto métrica, realmente sólo se necesita que  $h$  sea un operador simétrico cumpliendo  $h\phi = -\phi h$ .

**Teorema 3.3.5.** Sea  $M^{2n+1}(f_1, \dots, f_8)$  un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. de dimensión mayor o igual que 5. Si  $h \neq 0$ ,  $h$  es simétrico y cumple  $h\phi = -\phi h$ , entonces  $M$  es conformemente llano si y sólo si  $f_2 = f_5 R_5 = f_6 = f_8 = 0$ .

*Demostración.* Como la dimensión es mayor o igual que 5, la variedad  $M^{2n+1}$  es conformemente llana si y sólo si el tensor de Weyl  $W$  se anula.

Por la ecuación (3.3.9), es obvio que si  $f_2 = f_5 R_5 = f_6 = f_8 = 0$  entonces  $W = 0$ .

Si  $W = 0$ , entonces se cumple en particular que  $W(X, \xi)\xi = 0$  para todo campo  $X$  ortogonal a  $\xi$ . Gracias a la ecuación (3.3.9), esto significa que

$$\frac{2(1-n)}{2n-1}(f_6 hX + f_8 \phi hX) = 0.$$

Ahora bien, como  $2n+1 > 3$ , entonces  $\frac{2(1-n)}{2n-1} < 0$  y obtenemos que  $f_6 hX + f_8 \phi hX = 0$ . Aplicando que  $hX$  y  $\phi hX$  son ortogonales entre sí y que  $h \neq 0$ , tenemos que  $f_6 = f_8 = 0$ . Por tanto, el tensor de Weyl (3.3.9) satisface la ecuación

$$W = -\frac{3}{2n-1} f_2 R_1 + f_2 R_2 - \frac{3}{2n-1} f_2 R_3 + f_5 R_5 = 0. \quad (3.3.10)$$

Si tomamos ahora  $X = \phi Y$  y  $Z = Y$ , donde  $Y$  es un campo unitario ortogonal a  $\xi$ , obtenemos que  $\frac{6(1-n)}{2n-1} f_2 \phi Y = 0$ . Aplicando nuevamente el hecho de que  $2n+1 > 3$ , obtenemos que  $\frac{6(1-n)}{2n-1} < 0$ , luego  $f_2 = 0$ .

Por tanto el tensor de Weyl sería  $W = f_5 R_5 = 0$  y concluiríamos la prueba.  $\square$

**Nota 3.3.6.** Dado un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M^{2n+1}(f_1, \dots, f_8)$  con dimensión mayor o igual que 5 y  $h = 0$ , entonces  $R_4 = \dots = R_8 = 0$ , luego  $M$  es un g.S.s.f.  $M(f_1, f_2, f_3)$ . U. K. Kim probó en [41] que estos espacios son conformemente llanos si y sólo si  $f_2 = 0$ . El Teorema 3.3.5 es obviamente una generalización de este resultado porque en el caso de que tengamos  $h = 0$ , podemos tomar  $f_5 = f_6 = f_8 = 0$  directamente.

**Nota 3.3.7.** La condición  $f_5 R_5 = 0$  del Teorema 3.3.5 no es en general equivalente a  $f_5 = 0$  porque el tensor  $R_5$  puede ser idénticamente nulo, como ocurre en dimensión 3. Sin embargo, si  $f_5 = 0$ , es obvio que  $f_5 R_5 = 0$  y si  $R_5 = 0$ , entonces  $f_5$  es una función arbitraria, luego podemos elegir en particular  $f_5 = 0$ .

En virtud de la Nota 3.3.2, tenemos que las variedades con estructura caso-cosimpléctica o casi-Kenmotsu cumplen las propiedades de  $h$  que exigimos en la Proposición anterior. Ahora bien, sabemos por la Proposición 3.2.17 que no existen  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. 's de dimensión mayor o igual que 5 con estructura casi-cosimpléctica y  $h \neq 0$  (equivalente a  $\kappa < 0$ ). Análogamente, tampoco existen  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. 's de dimensión mayor o igual que 5 con estructura casi-Kenmotsu y  $h \neq 0$  (equivalente a  $\kappa < -1$ ) por la Proposición 3.2.40.

En dimensión 3 sí que existen  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. 's casi-cosimpléticos con  $h \neq 0$  ( $\kappa < 0$ ). P. Dacko y Z. Olszak dan en [24] una familia de ejemplos de variedades casi-cosimpléticas y conformemente llanas, pero no cosimpléticas o localmente llanas, que dependen de un parámetro real  $a$ . Si tomamos  $a = 0$ , entonces obtenemos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 3.3.8.** Sea  $M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^3$  el semiespacio superior de  $\mathbb{R}^3$  y denotemos por  $(x, y, z)$  a las coordenadas cartesianas de  $\mathbb{R}^3$  restringidas a  $M$ . Definimos la estructura casi-cosimpléctica  $(\phi, \xi, \eta, g)$  en  $M$  como

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial}{\partial x} &= z^2 \frac{\partial}{\partial y}, & \phi \frac{\partial}{\partial y} &= -\frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial x}, & \phi \frac{\partial}{\partial z} &= 0, \\ \xi &= \frac{\partial}{\partial z}, & \eta &= dz, \\ g &= z^2 dx \otimes dx + \frac{1}{z^2} dy \otimes dy + dz \otimes dz. \end{aligned}$$

La 2-forma fundamental es  $\Phi = 2dx \wedge dy$ . Se cumple que  $d\eta = d\Phi = 0$  y que si notamos

$$R(e_i, e_j)e_k = \sum_{l=1}^3 R_{ijkl}e_l,$$

entonces las únicas componentes no nulas del tensor de curvatura  $R$  son:

$$R_{1212} = -\frac{1}{z^2}, \quad R_{2323} = \frac{2}{z^2}.$$

Si tomamos la  $\phi$ -base global

$$e_1 = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = z \frac{\partial}{\partial y} = \phi e_1, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z} = \xi,$$

entonces

$$\begin{aligned} he_1 &= \frac{1}{z}e_2, & he_2 &= \frac{1}{z}e_1, & he_3 &= 0, \\ \phi he_1 &= -\frac{1}{z}e_1, & \phi he_2 &= \frac{1}{z}e_2, & \phi he_3 &= 0, \end{aligned}$$

luego puede comprobarse que

$$\begin{aligned} R(e_1, e_2)e_3 &= 0 = -\frac{1}{z^2}(\eta(e_2)e_1 - \eta(e_1)e_2) - \frac{1}{z}(\eta(e_2)\phi he_1 - \eta(e_1)\phi he_2), \\ R(e_1, e_3)e_3 &= 0 = -\frac{1}{z^2}(\eta(e_3)e_1 - \eta(e_1)e_3) - \frac{1}{z}(\eta(e_3)\phi he_1 - \eta(e_1)\phi he_3), \\ R(e_2, e_3)e_3 &= -\frac{2}{z^2}e_2 = -\frac{1}{z^2}(\eta(e_3)e_2 - \eta(e_2)e_3) - \frac{1}{z}(\eta(e_3)\phi he_2 - \eta(e_2)\phi he_3). \end{aligned}$$

Por tanto, el ejemplo es un  $(-1/z^2, 0, -1/z)$ -espacio con estructura casi-cosimpléctica. Como  $\kappa = -1/z^2 < 0$  y la curvatura  $\phi$ -seccional es  $F = R(e_1, e_2, e_2, e_1) = R_{1221} = 1/z^2$ , se deduce del Corolario 3.2.45 que su tensor de curvatura tiene la forma

$$R = \frac{1}{z^2}R_1 + \frac{2}{z^2}R_3 - \frac{1}{z}R_7,$$

donde  $R_1, R_3, R_7$  son los tensores usuales. En particular, la variedad  $M$  es un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M(1/z^2, 0, 2/z^2, 0, 0, 0, -1/z, 0)$ .

Ahora bien, también existen ejemplos de  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s con  $R_5$  dividido de dimensión mayor o igual que 5 y estructura casi-cosimpléctica o casi-Kenmotsu, como vimos



en los Ejemplos 3.2.23 y 3.2.39 respectivamente. Seguiremos a continuación un razonamiento análogo al del Teorema 3.3.5 para demostrar que no pueden ser conformemente llanos.

En primer lugar, calcularemos el operador de Ricci y la curvatura escalar de un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido con estructura casi-cosimpléctica o casi-Kenmotsu, como ya hicimos en la Proposición 3.3.1 para  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. 's. Como ambas estructuras tienen en común que  $h$  es un operador simétrico y que  $h\phi = -\phi h$ , probaremos el resultado en general para variedades cumpliendo estas condiciones.

**Proposición 3.3.9.** *Dado un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido  $M^{2n+1}(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, \dots, f_8)$  tal que  $h$  es un operador simétrico cumpliendo  $h\phi = -\phi h$ , el operador de Ricci tiene la forma*

$$Q = (2nf_1 + 3f_2 - f_3)I - (3f_2 + (2n - 1)f_3)\eta \otimes \xi + ((2n - 1)f_4 - f_6)h + ((2n - 1)f_7 - f_8)\phi h - (f_{5,1} + f_{5,2})h^2 \quad (3.3.11)$$

y la curvatura escalar viene dada por

$$\tau = 2n((2n + 1)f_1 + 3f_2 - 2f_3) - (f_{5,1} + f_{5,2})trh^2. \quad (3.3.12)$$

*Demostración.* Tomemos una  $\phi$ -base  $\{e_1, \dots, e_n, \phi e_1, \dots, \phi e_n, \xi\}$  en  $M^{2n+1}(f_1, \dots, f_8)$ . Usando la definición de  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido y las propiedades de  $h$ , obtenemos  $R(X, e_i)e_i$ ,  $R(X, \phi e_i)\phi e_i$  y  $R(X, \xi)\xi$ :

$$\begin{aligned} R(X, e_i)e_i &= f_1\{X - g(X, e_i)e_i\} + 3f_2g(X, \phi e_i)\phi e_i - f_3\eta(X)\xi \\ &\quad + f_4\{hX - g(X, e_i)he_i + g(he_i, e_i)X - g(hX, e_i)e_i\} \\ &\quad + f_{5,1}\{g(he_i, e_i)hX - g(hX, e_i)he_i\} \\ &\quad + f_{5,2}\{-g(he_i, \phi e_i)\phi hX + g(hX, \phi e_i)\phi he_i\} \\ &\quad - f_6g(he_i, e_i)\eta(X)\xi \\ &\quad + f_7\{\phi hX + g(X, e_i)h\phi e_i + g(\phi he_i, e_i)X - g(\phi hX, e_i)e_i\} \\ &\quad - f_8g(\phi he_i, e_i)\eta(X)\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(X, \phi e_i)\phi e_i &= f_1\{X - g(X, \phi e_i)\phi e_i\} + 3f_2g(X, e_i)e_i - f_3\eta(X)\xi \\ &\quad + f_4\{hX - g(X, \phi e_i)h\phi e_i - g(he_i, e_i)X - g(hX, \phi e_i)\phi e_i\} \\ &\quad - f_{5,1}\{g(he_i, e_i)hX + g(hX, \phi e_i)h\phi e_i\} \\ &\quad - f_{5,2}\{g(\phi he_i, e_i)\phi hX + g(hX, e_i)he_i\} \\ &\quad + f_6g(he_i, e_i)\eta(X)\xi \\ &\quad + f_7\{\phi hX - g(X, \phi e_i, \phi e_i)he_i - g(\phi he_i, e_i)X - g(\phi hX, \phi e_i)\phi e_i\} \\ &\quad + f_8g(\phi he_i, e_i)\eta(X)\xi, \end{aligned}$$

$$R(X, \xi)\xi = (f_1 - f_3)\{X - \eta(X)\xi\} + (f_4 - f_6)hX + (f_7 - f_8)\phi hX.$$

Sustituyendo las fórmulas anteriores en la definición del operador de Ricci, tras algunos cálculos obtenemos:

$$\begin{aligned}
QX &= \sum_{i=1}^n R(X, e_i)e_i + \sum_{i=1}^n R(X, \phi e_i)\phi e_i + R(X, \xi)\xi = \\
&= (2nf_1 + 3f_2 - f_3)X - (3f_2 + (2n - 1)f_3)\eta(X)\xi \\
&+ ((2n - 1)f_4 - f_6)hX + ((2n - 1)f_7 - f_8)\phi hX \\
&+ f_{5,1} \sum_{i=1}^n (g(he_i, e_i)hX - g(hX, e_i)he_i - g(he_i, e_i)hX - g(hX, \phi e_i)h\phi e_i) \\
&+ f_{5,2} \sum_{i=1}^n (g(\phi he_i, e_i)\phi hX - g(\phi hX, e_i)\phi he_i - g(\phi he_i, e_i)\phi hX - g(hX, e_i)he_i) \\
&= (2nf_1 + 3f_2 - f_3)X - (3f_2 + (2n - 1)f_3)\eta(X)\xi \\
&+ ((2n - 1)f_4 - f_6)hX + ((2n - 1)f_7 - f_8)\phi hX \\
&- f_{5,1} \sum_{i=1}^n (g(hX, e_i)he_i + g(hX, \phi e_i)h\phi e_i) \\
&- f_{5,2} \sum_{i=1}^n (g(\phi hX, e_i)\phi he_i + g(hX, e_i)he_i).
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

Ahora bien, es fácil ver que

$$\sum_{i=1}^n (g(hX, e_i)he_i + g(hX, \phi e_i)h\phi e_i) = h \left( \sum_{i=1}^n (g(hX, e_i)e_i + g(hX, \phi e_i)\phi e_i) \right) = h^2 X,$$

$$\sum_{i=1}^n (g(\phi hX, e_i)\phi he_i + g(hX, e_i)he_i) = h \left( \sum_{i=1}^n (g(hX, \phi e_i)\phi e_i + g(hX, e_i)e_i) \right) = h^2 X.$$

Insertando ambas expresiones en (3.3.13) obtenemos que

$$\begin{aligned}
QX &= (2nf_1 + 3f_2 - f_3)X - (3f_2 + (2n - 1)f_3)\eta(X)\xi \\
&+ ((2n - 1)f_4 - f_6)hX + ((2n - 1)f_7 - f_8)\phi hX - (f_{5,1} + f_{5,2})h^2 X,
\end{aligned}$$

para todo  $X$ .

Hallamos por último la curvatura escalar usando la  $\phi$ -base anterior y la fórmula

(3.3.11):

$$\begin{aligned}
\tau = \text{tr}Q &= \sum_{i=1}^n (g(Qe_i, e_i) + g(Q\phi e_i, \phi e_i)) + g(Q\xi, \xi) \\
&= 2n((2n+1)f_1 + 3f_2 - 2f_3) \\
&\quad - (f_{5,1} + f_{5,2}) \left( \sum_{i=1}^n (g(h^2 e_i, e_i) + g(h^2 \phi e_i, \phi e_i)) + g(h^2 \xi, \xi) \right) \\
&= 2n((2n+1)f_1 + 3f_2 - 2f_3) - (f_{5,1} + f_{5,2}) \text{tr}h^2,
\end{aligned}$$

luego la fórmula (3.3.12) queda probada.  $\square$

**Nota 3.3.10.** Si la variedad de la Proposición anterior es un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_8)$ , es decir, no tiene el tensor  $R_5$  dividido, entonces podemos escribir el tensor de curvatura con  $f_{5,1} = f_5$  y  $f_{5,2} = -f_5$ . Tenemos en particular que  $f_{5,1} + f_{5,2} = 0$ , así que las fórmulas (3.3.11) y (3.3.12) coinciden con (3.3.1) y (3.3.2).

Hallaremos ahora los tensores de Schouten y de Weyl de un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido cumpliendo que  $h$  es un operador simétrico y que  $h\phi = -\phi h$ .

**Proposición 3.3.11.** Dado un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido  $M^{2n+1}(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, \dots, f_8)$  tal que  $h$  es un operador simétrico cumpliendo  $h\phi = -\phi h$ , el tensor de Schouten tiene la forma

$$\begin{aligned}
L &= -\frac{1}{2} \left( f_1 + \frac{3}{2n-1} f_2 + \frac{1}{2n(2n-1)} (f_{5,1} + f_{5,2}) \text{tr}h^2 \right) I \\
&\quad + \left( \frac{3}{2n-1} f_2 + f_3 \right) \eta \otimes \xi - \left( f_4 - \frac{1}{2n-1} f_6 \right) h - \left( f_7 - \frac{1}{2n-1} f_8 \right) \phi h \quad (3.3.14) \\
&\quad + \frac{1}{2n-1} (f_{5,1} + f_{5,2}) h^2,
\end{aligned}$$

y el tensor de Weyl viene dado por

$$\begin{aligned}
W(X, Y)Z &= \left( -\frac{1}{2n-1} \left( 3f_2 + \frac{1}{2n} (f_{5,1} + f_{5,2}) \text{tr}h^2 \right) R_1 + f_2 R_2 - \frac{3}{2n-1} f_2 R_3 \right. \\
&\quad + \frac{1}{2n-1} f_6 R_4 + f_{5,1} R_{5,1} + f_{5,2} R_{5,2} + f_6 R_6 \\
&\quad \left. + \frac{1}{2n-1} f_8 R_7 + f_8 R_8 \right) (X, Y)Z \\
&\quad - \frac{1}{2n-1} (f_{5,1} + f_{5,2}) (g(h^2 X, Z)Y - g(h^2 Y, Z)X + g(X, Z)h^2 Y - g(Y, Z)h^2 X). \quad (3.3.15)
\end{aligned}$$

*Demostración.* Análogamente a como hicimos en la Proposición 3.3.3, para obtener (3.3.14) basta sustituir las fórmulas del operador de Ricci y la curvatura escalar, (3.3.11) y (3.3.12), en (3.3.6), la definición del tensor L.

Usando ahora (3.3.14) y la definición de los tensores  $R_1, \dots, R_8$ , hallamos que

$$\begin{aligned} & g(LX, Z)Y - g(LY, Z)X + g(X, Z)LY - g(Y, Z)LX \\ &= \left( \left( f_1 + \frac{3}{2n-1}f_2 + \frac{1}{2n(2n-1)}(f_{5,1} + f_{5,2})trh^2 \right) R_1 + \left( \frac{3}{2n-1}f_2 + f_3 \right) R_3 \right. \\ & \quad \left. + \left( f_4 - \frac{1}{2n-1}f_6 \right) R_4 + \left( f_7 - \frac{1}{2n-1}f_8 \right) R_7 \right) (X, Y)Z \\ & \quad + \frac{1}{2n-1}(f_{5,1} + f_{5,2})(g(h^2X, Z)Y - g(h^2Y, Z)X + g(X, Z)h^2Y - g(Y, Z)h^2X). \end{aligned}$$

Si sustituimos ahora esta última fórmula en la definición del tensor de Weyl, (3.3.7), y aplicamos la definición de  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido, conseguimos

$$\begin{aligned} W(X, Y)Z &= \left( \sum_{i=1}^8 f_i R_i - \left( f_1 + \frac{3}{2n-1}f_2 + \frac{trh^2}{2n(2n-1)}(f_{5,1} + f_{5,2}) \right) R_1 \right. \\ & \quad \left. - \left( \frac{3}{2n-1}f_2 + f_3 \right) R_3 - \left( f_4 - \frac{1}{2n-1}f_6 \right) R_4 - \left( f_7 - \frac{1}{2n-1}f_8 \right) R_7 \right) (X, Y)Z \\ & \quad - \frac{1}{2n-1}(f_{5,1} + f_{5,2})(g(h^2X, Z)Y - g(h^2Y, Z)X + g(X, Z)h^2Y - g(Y, Z)h^2X), \\ &= \left( - \left( \frac{3}{2n-1}f_2 + \frac{trh^2}{2n(2n-1)}(f_{5,1} + f_{5,2}) \right) R_1 + f_2 R_2 - \frac{3}{2n-1}f_2 R_3 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2n-1}f_6 R_4 + f_{5,1} R_{5,1} + f_{5,2} R_{5,2} + f_6 R_6 + \frac{1}{2n-1}f_8 R_7 + f_8 R_8 \right) (X, Y)Z \\ & \quad - \frac{1}{2n-1}(f_{5,1} + f_{5,2})(g(h^2X, Z)Y - g(h^2Y, Z)X + g(X, Z)h^2Y - g(Y, Z)h^2X), \end{aligned}$$

que es lo que buscábamos. □

**Nota 3.3.12.** Si el espacio de la Proposición anterior es un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_8)$ , es decir, no tiene el tensor  $R_5$  dividido, entonces tenemos en particular que  $f_{5,1} + f_{5,2} = 0$ , así que las fórmulas (3.3.14) y (3.3.15) coinciden con (3.3.8) y (3.3.9).

Usando la fórmula del tensor de Weyl obtenida y los Teoremas 3.2.25 y 3.2.42, demostraremos a continuación que no existen  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s con  $R_5$  dividido  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, \dots, f_8)$  de dimensión mayor o igual que 5 con estructura casi-cosimpléctica y  $f_1 - f_3 < 0$  que sean conformemente llanos. Lo mismo ocurre si la estructura es casi-Kenmotsu y  $f_1 - f_3 < -1$ .

**Teorema 3.3.13.** *Sea  $M^{2n+1}(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, \dots, f_8)$  un g. $(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con  $R_5$  dividido de dimensión mayor o igual que 5. Si tiene estructura casi-cosimpléctica cumpliendo que  $f_1 - f_3 < 0$  (resp. estructura casi-Kenmotsu cumpliendo que  $f_1 - f_3 < -1$ ), entonces no puede ser conformemente llano.*

*Demostración.* Sabemos que, como la dimensión de la variedad  $M^{2n+1}$  es mayor o igual que 5, entonces es conformemente llana si y sólo si el tensor de Weyl  $W$  se anula. Razonaremos por Reducción al Absurdo, es decir, supondremos que  $W$  se anula y llegaremos a una contradicción. Para ello, calcularemos en primer lugar el valor que toma.

Supongamos que la estructura de  $M$  es casi-cosimpléctica y que cumple  $f_1 - f_3 < 0$ . Entonces sabemos por el Teorema 3.2.25 que

$$f_1 = f_2 = f_4 = f_{5,1} = f_7 = 0, \quad f_{5,2} = -1, \quad f_3 > 0.$$

Además, por la ecuación (3.2.1) y el hecho de que  $\kappa = f_1 - f_3 = -f_3$  tenemos que  $h^2 = -f_3\phi^2$  (y en particular  $h \neq 0$  en todo punto). Sustituyendo ambos resultados en (3.3.15) obtenemos que el tensor de Weyl es:

$$\begin{aligned} W(X, Y)Z = & \left( -\frac{\text{tr}\phi^2}{2n(2n-1)}f_3R_1 + \frac{1}{2n-1}f_6R_4 - R_{5,2} + f_6R_6 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2n-1}f_8R_7 + f_8R_8 \right) (X, Y)Z \\ & - \frac{1}{2n-1}f_3(g(\phi^2X, Z)Y - g(\phi^2Y, Z)X + g(X, Z)\phi^2Y - g(Y, Z)\phi^2X). \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Ahora bien, es fácil comprobar que

$$\text{tr}\phi^2 = -2n \quad (3.3.17)$$

y por la definición de  $R_1$  y  $R_3$  tenemos que

$$\begin{aligned} & g(\phi^2X, Z)Y - g(\phi^2Y, Z)X + g(X, Z)\phi^2Y - g(Y, Z)\phi^2X \\ & = -g(X, Z)Y + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y + g(Y, Z)X \\ & \quad + \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\xi \\ & = 2R_1(X, Y)Z + R_3(X, Y)Z. \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Por tanto, si sustituimos (3.3.17) y (3.3.18) en (3.3.16), obtenemos que

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2n-1}f_3R_1 + \frac{1}{2n-1}f_6R_4 - R_{5,2} + f_6R_6 + \frac{1}{2n-1}f_8R_7 + f_8R_8 \\ & \quad - \frac{1}{2n-1}f_3(2R_1 + R_3) \\ &= -\frac{1}{2n-1}f_3R_1 - \frac{1}{2n-1}f_3R_3 + \frac{1}{2n-1}f_6R_4 - R_{5,2} + f_6R_6 + \frac{1}{2n-1}f_8R_7 + f_8R_8. \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

Análogamente, si suponemos que la estructura de  $M$  es casi-Kenmotsu y que cumple  $f_1 - f_3 < -1$ , entonces sabemos por el Teorema 3.2.42 que

$$f_1 = -1, f_2 = f_4 = f_{5,1} = 0, f_{5,2} = -1, f_7 = 1, f_3 > 0.$$

Además, por la ecuación (3.2.29) y el hecho de que  $\kappa = f_1 - f_3 = -1 - f_3$ , tenemos que  $h^2 = (-1 - f_3 + 1)\phi^2 = -f_3\phi^2$  (y en particular  $h \neq 0$  en todo punto). Sustituyendo ambos resultados en (3.3.15) obtenemos que el tensor de Weyl es:

$$\begin{aligned} W(X, Y)Z = & \left( -\frac{\text{tr}\phi^2}{2n(2n-1)}f_3R_1 + \frac{1}{2n-1}f_6R_4 - R_{5,2} + f_6R_6 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2n-1}f_8R_7 + f_8R_8 \right) (X, Y)Z \\ & - \frac{1}{2n-1}f_3(g(\phi^2X, Z)Y - g(\phi^2Y, Z)X + g(X, Z)\phi^2Y - g(Y, Z)\phi^2X). \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Si sustituimos ahora las fórmulas (3.3.17) y (3.3.18) (que son ciertas para cualquier estructura casi-contacto métrica y en particular para estructura casi-Kenmotsu) en (3.3.20), obtenemos otra vez (3.3.19). Por tanto, continuaremos la demostración para ambas estructuras a la vez.

Si el tensor de Weyl se anula, en particular se cumple que  $W(X, \xi)\xi = 0$  para todo campo  $X$  ortogonal a  $\xi$ . Por la definición de  $R_1, \dots, R_8$  y las propiedades de  $h$ , obtenemos entonces al sustituir en (3.3.19) que

$$\frac{2(1-n)}{2n-1}(f_6hX + f_8\phi hX) = 0.$$

Ahora bien,  $2n+1 > 3$ , luego  $\frac{2(1-n)}{2n-1} < 0$  y deducimos que  $f_6hX + f_8\phi hX = 0$ . Como  $hX$  y  $\phi hX$  son ortogonales entre sí y  $h \neq 0$  en todo punto, tenemos que  $f_6 = f_8 = 0$ . Por tanto, el tensor de Weyl tiene la forma

$$W = -\frac{1}{2n-1}f_3R_1 - \frac{1}{2n-1}f_3R_3 - R_{5,2}. \quad (3.3.21)$$

Tomamos ahora  $X = \phi Y$  y  $Z = Y$ , donde  $Y \in D(\lambda) = D(\sqrt{f_3})$ , que es posible porque  $\lambda = \sqrt{-\kappa} = \sqrt{f_3}$  cuando la estructura es casi-cosimpléctica (Proposición 3.2.9) y porque  $\lambda = \sqrt{-1-\kappa} = \sqrt{f_3}$  en el caso casi-Kenmotsu (Proposición 3.2.28). Entonces

$$\begin{aligned} R_1(\phi Y, Y)Y &= \phi Y \\ R_3(\phi Y, Y)Y &= 0 \\ R_{5,2}(\phi Y, Y)Y &= -\lambda^2\phi Y = -f_3\phi Y, \end{aligned}$$

que sustituyendo en la ecuación (3.3.21) nos da

$$\frac{2(n-1)}{2n-1} f_3 \phi Y = 0.$$

Aplicando ahora que  $\frac{2(n-1)}{2n-1} > 0$ , obtenemos que  $f_3 = 0$ . Esto contradice el que hayamos probado anteriormente que  $f_3 > 0$  en ambas estructuras, lo que concluiría la prueba.  $\square$

Veremos finalmente qué ocurre en el caso de que la variedad tenga estructura de contacto métrica. Recordamos primero un teorema que F. Gouli-Andreou y N. Tsolaidou probaron en [35]:

**Teorema 3.3.14.** *Sea  $M$  una variedad de contacto métrica tal que  $\xi$  sea un autovector del operador de Ricci  $Q$ . Si  $M$  es conformemente llana, entonces tiene curvatura constante 0 ó 1.*

Sabemos además por [50] que:

**Teorema 3.3.15.** *Una variedad de contacto métrica con curvatura constante es, o bien de curvatura constante 1 y Sasakiana, o bien de dimensión 3 y llana.*

Usando ambos teoremas podemos probar:

**Teorema 3.3.16.** *Sea  $M^{2n+1}$  un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio con estructura de contacto métrica conformemente llana. Entonces  $M$  es, o bien de curvatura constante 1 y Sasakiana, o bien de dimensión 3 ( $n = 1$ ) y llana.*

*Demostración.* Sabemos por el Lema 4.2 de [44] que un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio de contacto métrico cumple  $Q\xi = 2n\xi$ , luego  $\xi$  es un autovector de  $Q$  y aplicando el Teorema 3.3.14 obtenemos que  $M$  tiene curvatura constante 0 ó 1. Por el Teorema 3.3.15, concluimos que, o bien  $M$  tiene curvatura constante 1 y es Sasakiana, o bien es de dimensión 3 y llana.  $\square$

Como todo  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio (Proposición 3.1.16), deducimos del Teorema anterior lo siguiente:

**Corolario 3.3.17.** *Sea  $M^{2n+1}(f_1, \dots, f_8)$  un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica conformemente llana. Entonces  $M$  es, o bien de dimensión 3 ( $n = 1$ ) y llana (luego podemos tomar  $f_1 = \dots = f_8 = 0$ , escritura de  $R$  que sería la canónica), o bien es Sasakiana y de curvatura constante 1 (luego es un  $g.S.s.f. M(f_1, f_2, f_3)$  con  $f_1 = 1$  y  $f_2 = f_3 = 0$ , escritura de  $R$  que sería la canónica en dimensión 3).*

*Demostración.*  $M$  es un  $(\kappa, \mu, \nu)$ -espacio por la Proposición 3.1.16, luego por el Teorema anterior sabemos que es, o bien de curvatura constante 1 y Sasakiana, o bien de dimensión 3 ( $n = 1$ ) y llana.

Si es llana, entonces podemos tomar  $f_1 = \dots = f_8 = 0$ , escritura que no es única por el Teorema 3.1.26.  $R$  tiene la forma canónica porque  $f_2 = f_5 = f_6 = f_8 = 0$  (Nota 3.1.28).

Si es Sasakiana, entonces es un  $g.S.s.f.$   $M(f_1, f_2, f_3)$  cumpliendo  $f_2 = f_3 = f_1 - 1$  (Teorema 2.1.4). Además, su curvatura  $\phi$ -seccional  $F = f_1 + 3f_2 = 4f_1 - 3$  debe ser 1, luego  $f_1 = 1$  y  $f_2 = f_3 = 0$ . El resto del resultado se obtiene al aplicar de nuevo el Teorema 3.1.26 y la Nota 3.1.28.  $\square$

Por último, estudiaremos qué ocurre cuando un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ - $s.f.$  es *conformemente simétrico*,  $\xi$ -*conformemente llano* o  $\phi$ -*conformemente llano*. Recordaremos en primer lugar estas definiciones. Dado un punto  $p$  de una variedad casi-contacto métrica  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$ , el espacio tangente  $T_p(M)$  puede descomponerse como

$$T_p(M) = \phi(T_p(M)) \oplus \langle \xi_p \rangle$$

y el tensor de Weyl  $W$  puede tomarse como una aplicación:

$$W : T_p(M) \times T_p(M) \times T_p(M) \longrightarrow \phi(T_p(M)) \oplus \langle \xi_p \rangle .$$

Resulta natural considerar los tres casos siguientes:

1.  $W : T_p(M) \times T_p(M) \times T_p(M) \longrightarrow \langle \xi_p \rangle$ , es decir, la proyección de la imagen de  $W$  sobre  $\phi(T_p(M))$  es cero. Esto es equivalente a que

$$g(W(X, Y)Z, \phi T) = 0,$$

para todos  $X, Y, Z, T$  campos de  $M$ . Se dice en tal caso que la variedad es *conformemente simétrica*. Las variedades  $K$ -contacto cumpliendo esta propiedad fueron estudiadas en [36].

2.  $W : T_p(M) \times T_p(M) \times T_p(M) \longrightarrow \phi(T_p(M))$ , es decir, la proyección de la imagen de  $W$  sobre  $\langle \xi_p \rangle$  se anula. Esto es equivalente a que

$$W(X, Y)\xi = 0,$$

para todos  $X, Y$  campos de  $M$ . La variedad se llama entonces  $\xi$ -*conformemente llana*. El estudio del caso  $K$ -contacto puede verse en [37].

3.  $W : \phi(T_p(M)) \times \phi(T_p(M)) \times \phi(T_p(M)) \longrightarrow \langle \xi_p \rangle$ , es decir, cuando  $W$  se restringe a  $\phi(T_p(M)) \times \phi(T_p(M)) \times \phi(T_p(M))$ , la proyección de la imagen de  $W$  sobre  $\phi(T_p(M))$  es cero. Esto es equivalente a que

$$g(W(\phi X, \phi Y)\phi Z, \phi T) = 0,$$



para todos  $X, Y, Z, T$  campos de  $M$  y se dice en tal caso que la variedad es  $\phi$ -conformemente llana. Las variedades  $K$ -contacto con dicha propiedad fueron estudiadas en [37] y las Sasakianas en [30].

**Nota 3.3.18.** *La condición del caso 2 debería ser  $g(W(X, Y)Z, \xi) = 0$  para todos  $X, Y, Z$  campos en  $M$ , pero podemos simplificarla gracias a que se comprueba fácilmente por la definición del tensor de Weyl que éste cumple*

$$W(X, Y, Z, T) = -W(X, Y, T, Z),$$

para cualesquiera campos  $X, Y, Z, T$  en  $M$ .

**Nota 3.3.19.** *Además de los tres casos que acabamos de ver ( $M$  tiene estructuras conformemente simétrica,  $\xi$ -conformemente llana o  $\phi$ -conformemente llana), habría otro que aparecería naturalmente:*

$$W : \phi(T_p(M)) \times \phi(T_p(M)) \times \phi(T_p(M)) \longrightarrow \phi(T_p(M)).$$

Es decir, que  $g(W(\phi X, \phi Y)\phi Z, \xi) = 0$  para todos  $X, Y, Z$  campos en  $M$ . Por la Nota anterior, esta condición es equivalente a que  $W(X, Y)\xi = 0$  para todos  $X, Y$  campos ortogonales a  $\xi$ , luego sería un caso particular de estructura  $\xi$ -conformemente llana.

Si  $M(f_1, \dots, f_8)$  es un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica y dimensión mayor o igual que 5, se comprueba tras unos meros cálculos que dicha condición se cumple siempre.

En dimensión 3, ya sabemos que el tensor de Weyl  $W$  se anula idénticamente. En dimensión mayor o igual que 5, un  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_8)$  con estructura de contacto métrica cumple en particular que  $f_7 = f_8 = 0$  en virtud del Teorema 3.1.23. Nos centraremos entonces en estudiar los  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s  $M(f_1, \dots, f_6)$  con estructura de contacto métrica y dimensión mayor o igual que 5. Distinguiremos dos casos, según  $f_1 - f_3 = 1$  o  $f_1 - f_3 < 1$ .

**Teorema 3.3.20.** *Sea  $M(f_1, \dots, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica y dimensión mayor o igual que 5. Si  $f_1 - f_3 = 1$ , entonces  $M$  es un  $g.S.s.f.$  Sasakiano  $M(f_1, f_1 - 1, f_1 - 1)$   $\xi$ -conformemente llano. Además, son equivalentes:*

1.  $M$  es conformemente llano,
2.  $M$  es conformemente simétrico,
3.  $M$  es  $\phi$ -conformemente llano,
4.  $M$  tiene curvatura seccional constante igual a 1.

5.  $f_1 = 1$ .

*Demostración.* Como  $f_1 - f_3 = 1$ , sabemos por los Teoremas 2.1.4 y 2.1.6 que  $M$  es Sasakiana y que  $f_2 = f_3 = f_1 - 1$ . La curvatura  $\phi$ -seccional es, por la Proposición 2.1.7,  $F = f_1 + 3f_2 = 4f_1 - 3$ . Además,  $h = 0$ , luego  $R_4 = R_5 = R_6 = 0$  y por (3.3.9) obtenemos que

$$W = -\frac{3f_2}{2n-1}R_1 + f_2R_2 - \frac{3f_2}{2n-1}R_3.$$

Un sencillo cálculo sirve para comprobar que  $W(X, Y)\xi = 0$ , para todos  $X, Y$  en  $M$ , luego  $M$  es  $\xi$ -conformemente llana.

Si  $f_1 = 1$ , entonces  $W \equiv 0$ , luego la variedad es conformemente llana, y en particular conformemente simétrica y  $\phi$ -conformemente llana. Además, en tal caso  $f_2 = f_3 = 0$ , luego  $R = R_1$  y puede comprobarse que  $K(X, Y) = 1$  para todos  $X, Y$  campos unitarios y mutuamente ortogonales en  $M$ .

Si la variedad es conformemente simétrica, podemos aplicar el resultado principal de [36], que dice que toda variedad  $K$ -contacto que sea conformemente simétrica tiene curvatura constante 1.

Por el Teorema 3.1 de [30] sabemos que una variedad Sasakiana de dimensión mayor o igual que 5 es  $\phi$ -conformemente llana si y sólo es localmente isométrica a la esfera unidad, es decir, si su curvatura seccional es 1.

Finalmente, si  $M$  tiene curvatura seccional 1, entonces en particular  $F = 4f_1 - 3 = 1$ , por lo que  $f_1 = 1$ .  $\square$

**Nota 3.3.21.** *El Teorema 3.3.5 no es aplicable a la variedad del Teorema anterior porque no se cumple la hipótesis  $h \neq 0$  debido a que en una variedad Sasakiana se satisface  $h \equiv 0$ .*

*Por otra parte, sí que nos encontraríamos en las condiciones del Corolario 3.3.17, del que se deduce que si la variedad es conformemente llana, entonces es Sasakiana, de curvatura seccional igual a 1 y funciones  $f_1 = 1, f_2 = \dots = f_8 = 0$ , resultado contenido en el Teorema anterior.*

Habiendo estudiado ya el caso  $f_1 - f_3 = 1$ , veamos ahora el caso  $f_1 - f_3 < 1$ :

**Teorema 3.3.22.** *Sea  $M(f_1, \dots, f_6)$  un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. con estructura de contacto métrica y dimensión mayor o igual que 5. Si  $f_1 - f_3 < 1$ , entonces:*

1.  $M$  no es conformemente llana.
2.  $M$  es  $\xi$ -conformemente llana si y sólo si  $f_1 = -f_2 = f_3 = f_5 = 1/2, f_4 = 1$  y  $f_6 = 0$ .
3.  $M$  no es  $\phi$ -conformemente llana.
4.  $M$  no es conformemente simétrica.

*Demostración.* Como su dimensión es mayor o igual que 5, si la variedad  $M$  fuera conformemente llana, tendríamos por el Corolario 3.3.17 que sería Sasakiana. Por tanto, se cumpliría que  $f_1 - f_3 = 1$  (Teorema 2.1.4), contradiciendo una de las hipótesis del teorema.

Por el Teorema 2.2.12, sabemos que

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{f_6 + 1}{2}, & f_2 &= \frac{f_6 - 1}{2}, & f_3 &= \frac{3f_6 + 1}{2}, \\ f_4 &= 1, & f_5 &= \frac{1}{2}, & f_6 &= \text{constante} > -1, \end{aligned}$$

lo que, al sustituir en (3.3.9), nos da

$$W = -\frac{3(f_6 - 1)}{2(2n - 1)}R_1 + \frac{f_6 - 1}{2}R_2 - \frac{3(f_6 - 1)}{2(2n - 1)}R_3 + \frac{f_6}{2n - 1}R_4 + \frac{1}{2}R_5 + f_6R_6. \quad (3.3.22)$$

La variedad es  $\xi$ -conformemente llana si y sólo si  $W(X, Y)\xi = 0$ , para todos  $X, Y$  campos en  $M$ . Ahora bien, de un breve cálculo se deduce que

$$W(X, Y)\xi = \frac{2(1 - n)}{2n - 1}f_6(\eta(Y)hX - \eta(X)hY).$$

La variedad es de dimensión mayor o igual que 5 ( $n > 1$ ) y  $h$  no es nulo porque  $f_1 - f_3 < 1$ , luego  $M$  es  $\xi$ -conformemente llana si y sólo si  $f_6 = 0$ . Por las ecuaciones anteriores, esto es equivalente a que sea un  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.  $M(1/2, -1/2, 1/2, 1, 1/2, 0)$ .

Demostraremos ahora que  $M$  no es  $\phi$ -conformemente llana por Reducción al Absurdo. Supongamos que lo sea, es decir, que  $g(W(\phi X, \phi Y)\phi Z, \phi T) = 0$  para todos  $X, Y, Z, T$  campos en  $M$ . Entonces por (3.3.22) se cumple que

$$\begin{aligned} W(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi T) &= \left( -\frac{3(f_6 - 1)}{2(2n - 1)}R_1 + \frac{f_6 - 1}{2}R_2 - \frac{3(f_6 - 1)}{2(2n - 1)}R_3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_6}{2n - 1}R_4 + \frac{1}{2}R_5 + f_6R_6 \right) (\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi T) = 0, \end{aligned}$$

para todos  $X, Y, Z, T$  campos en  $M$ .

Es fácil ver que  $R_3(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi T) = R_6(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi T) = 0$ . Por el Teorema 2.1.13, dados  $X, Y, Z, T$  campos ortogonales a  $\xi$ ,  $R_i(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi T) = R_i(X, Y, Z, T)$  si  $i \neq 4$  y  $R_4(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi T) = -R_4(X, Y, Z, T)$ , luego tendríamos que

$$W(X, Y, Z, T) = \left( -\frac{3(f_6 - 1)}{2(2n - 1)}R_1 + \frac{f_6 - 1}{2}R_2 - \frac{f_6}{2n - 1}R_4 + \frac{1}{2}R_5 \right) (X, Y, Z, T) = 0, \quad (3.3.23)$$

para todos  $X, Y, Z, T$  ortogonales a  $\xi$ .

Como  $\kappa = -f_6 < 1$ , puedo tomar  $X = Z$  campo unitario autovector de  $h$  asociado al autovalor  $\lambda = \sqrt{1 + f_6}$ , que será en particular ortogonal a  $\xi$ . Si elegimos asimismo  $Y = T = \phi X$  ortogonal a  $\xi$ , entonces obtenemos que

$$\begin{aligned} R_1(X, \phi X, X, \phi X) &= -1, \\ R_2(X, \phi X, X, \phi X) &= -3, \\ R_4(X, \phi X, X, \phi X) &= 0, \\ R_5(X, \phi X, X, \phi X) &= 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (3.3.23), quedaría que  $\frac{3(1-n)}{2n-1}(f_6-1) = 0$  Ahora bien,  $n > 1$ , por lo que  $f_6 = 1$ , y la ecuación (3.3.23) se reduciría a

$$W(X, Y, Z, T) = \left( -\frac{1}{2n-1}R_4 + \frac{1}{2}R_5 \right) (X, Y, Z, T) = 0, \quad (3.3.24)$$

para todos  $X, Y, Z, T$  ortogonales a  $\xi$ .

Si elegimos ahora  $X, Y \in D(\lambda) = D(\sqrt{1+f_6}) = D(\sqrt{2})$  campos unitarios y ortogonales entre sí (posible porque la dimensión de la variedad es mayor o igual que 5),  $Z = X$  y  $T = Y$ , entonces

$$\begin{aligned} R_4(X, Y, X, Y) &= -2\sqrt{2}, \\ R_5(X, Y, X, Y) &= -2. \end{aligned}$$

De la ecuación (3.3.24) obtenemos que  $\frac{2\sqrt{2}}{2n-1} - 1 = 0$ , que es equivalente a que  $n = \sqrt{2} + \frac{1}{2} \in \mathbb{N}$ , lo cual es imposible.

Demostraremos también por Reducción al Absurdo que  $M$  no es conformemente simétrica. Si lo fuera, entonces  $g(W(X, Y)Z, \phi T) = 0$  para todos  $X, Y, Z, T$  campos en  $M$ , es decir, que

$$\begin{aligned} W(X, Y, Z, \phi T) &= \left( -\frac{3(f_6-1)}{2(2n-1)}R_1 + \frac{f_6-1}{2}R_2 - \frac{3(f_6-1)}{2(2n-1)}R_3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_6}{2n-1}R_4 + \frac{1}{2}R_5 + f_6R_6 \right) (X, Y, Z, \phi T) = 0, \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

para todos  $X, Y, Z, T$  campos en  $M$ .

Si tomamos  $Y = Z = \xi$ , entonces  $\frac{2(1-n)}{2n-1}f_6g(hX, \phi T) = 0$ , para todos  $X, T$  campos en  $M$ . Como  $\kappa = -f_6 < 1$ , podemos elegir  $X \in D(\lambda)$  unitario y  $T = \phi X$ , por lo que  $g(hX, \phi T) = -\lambda = -\sqrt{1+f_6} \neq 0$ , luego  $f_6 = 0$ .

Sustituyendo en (3.3.25), quedaría que

$$W(X, Y, Z, \phi T) = \left( \frac{3}{2(2n-1)} R_1 - \frac{1}{2} R_2 + \frac{3}{2(2n-1)} R_3 + \frac{1}{2} R_5 \right) (X, Y, Z, \phi T) = 0, \quad (3.3.26)$$

para todos  $X, Y, Z, T$  campos en  $M$ .

Elegimos por último  $X \in D(\lambda) = D(1)$  unitario,  $Y = \phi X$  y  $Z = T = X$ . Entonces

$$W(X, \phi X, X, \phi X) = \left( \frac{3}{2(2n-1)} R_1 - \frac{1}{2} R_2 + \frac{3}{2(2n-1)} R_3 + \frac{1}{2} R_5 \right) (X, \phi X, X, \phi X) = 0.$$

Ya sabíamos que

$$\begin{aligned} R_1(X, \phi X, X, \phi X) &= -1, \\ R_2(X, \phi X, X, \phi X) &= -3, \\ R_5(X, \phi X, X, \phi X) &= 0. \end{aligned}$$

Además,  $R_3(X, \phi X, X, \phi X) = 0$  porque  $X, \phi X$  son ortogonales a  $\xi$ . Por tanto, de (3.3.26) se deduce que  $-\frac{3}{2(2n-1)} + \frac{3}{2} = \frac{3(n-1)}{2n-1} = 0$ , lo cual es imposible porque la dimensión es mayor o igual que 5.  $\square$

**Nota 3.3.23.** *Hay ejemplos de  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s  $M(1/2, -1/2, 1/2, 1, 1/2, 0)$  con estructura de contacto métrica de dimensión mayor o igual que 5 pues basta tomar  $f_6 = 0$  en el Ejemplo 2.2.14.*



# Conclusions

Having finished the main part of this work, we will use this last chapter to summarise the principal results that were presented in it. First of all, we recall that the aim of its first part was to introduce the concept of *generalized  $(\kappa, \mu)$ -space form* as an almost contact metric manifold whose curvature tensor has the form

$$R = f_1R_1 + f_2R_2 + f_3R_3 + f_4R_4 + f_5R_5 + f_6R_6,$$

where  $f_1, \dots, f_6$  are differentiable functions on  $M$  and  $R_1, \dots, R_6$  are the tensors given by

$$\begin{aligned} R_1(X, Y)Z &= g(Y, Z)X - g(X, Z)Y, \\ R_2(X, Y)Z &= g(X, \phi Z)\phi Y - g(Y, \phi Z)\phi X + 2g(X, \phi Y)\phi Z, \\ R_3(X, Y)Z &= \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\xi, \\ R_4(X, Y)Z &= g(Y, Z)hX - g(X, Z)hY + g(hY, Z)X - g(hX, Z)Y, \\ R_5(X, Y)Z &= g(hY, Z)hX - g(hX, Z)hY + g(\phi hX, Z)\phi hY - g(\phi hY, Z)\phi hX, \\ R_6(X, Y)Z &= \eta(X)\eta(Z)hY - \eta(Y)\eta(Z)hX + g(hX, Z)\eta(Y)\xi - g(hY, Z)\eta(X)\xi, \end{aligned}$$

for every vector fields  $X, Y, Z$ , where  $h = \frac{1}{2}L_\xi\phi$  and  $L$  is the usual Lie derivative.

These spaces appeared naturally and included the generalized Sasakian space forms. They were denoted as  $M(f_1, \dots, f_6)$  and their name shortened to  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.

After a brief chapter of Preliminaries, the  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s were studied in the second chapter, which had four sections. In the first section we proved that some results that are true for  $g.S.s.f.$ 's also hold for  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s. Using some identities satisfied by the curvature tensor of a Sasakian manifold we obtained similar ones for  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s, which we compared later to the ones presented in [2] for  $g.S.s.f.$ 's.

In the Section 2.2 we saw that the  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s with contact metric structure are generalized  $(\kappa, \mu)$ -spaces with  $\kappa = f_1 - f_3$  and  $\mu = f_4 - f_6$ , so we were able to use the abundant literature that exists on such type of manifold. Then, we proved that in dimension greater than or equal to 5 they are  $(-f_6, 1 - f_6)$ -space forms with constant  $\phi$ -sectional curvature  $2f_6 - 1$ . Moreover, they also satisfy that  $f_4 = 1$ ,  $f_5 = 1/2$  and that  $f_1, f_2, f_3$  depend linearly on  $f_6$ , which is constant. We gave a method for

the construction of infinitely many examples of this type. In dimension 3 we proved that the writing of the curvature tensor of a  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. is not unique and we gave several properties and results that classify them partially. At the end of the section we checked that the examples of generalized  $(\kappa, \mu)$ -spaces with non-constant  $\kappa$  and  $\mu$  that T. Koufogiorgos and C. Tsihlias give in [46] are  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s with non-constant functions  $f_1, f_3$  and  $f_4$ .

The fact that the  $D_a$ -homothetic deformations leave invariant the condition

$$R(X, Y)\xi = \kappa\{\eta(Y)X - \eta(X)Y\} + \mu\{\eta(Y)hX - \eta(X)hY\},$$

although with different functions  $\kappa$  and  $\mu$ , led us to study in the Section 2.3 how these deformations affect a  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. We saw that these newly obtained manifolds were not, in general,  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s, but that they would be if we redefined the  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s  $M(f_1, \dots, f_6)$  with the tensor  $R_5$  divided in two as  $R_5 = R_{5,1} - R_{5,2}$  for

$$\begin{aligned} R_{5,1}(X, Y)Z &= g(hY, Z)hX - g(hX, Z)hY, \\ R_{5,2}(X, Y)Z &= g(\phi hY, Z)\phi hX - g(\phi hX, Z)\phi hY, \end{aligned}$$

with functions  $f_{5,1}$  and  $f_{5,2}$ . The spaces thus defined, which we called  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s with divided  $R_5$  and denoted as  $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$ , included trivially the  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s  $M(f_1, \dots, f_6)$ . Thanks to Theorem 2.3.5, we proved that if we apply a  $D_a$ -homothetic deformation to a  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f., we obtain a  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f. with divided  $R_5$ , hence it would be enough to deform the examples obtained in the previous section in order to get infinitely many examples of  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s with divided  $R_5$   $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$ .

The situation is special in dimension 3, where we can write the tensor  $R_{5,2}$  in terms of  $R_1$  and  $R_2$ , so if we  $D_a$ -homothetically deform a  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_6)$  we obtain another one. This fact provided us with many examples of spaces with non-constant functions, because we can transform the ones obtained in the Section 2.2.

In the last section of the first chapter, 2.4, we proved that if a manifold has trans-Sasakian structure, then  $h = 0$ . Therefore, the  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s with trans-Sasakian structure are really  $g.S.s.f.$ 's, already studied in [3]. We also included some results on  $C(\alpha)$ -manifolds.

In the third chapter, organised in three sections, we recalled the concept of  $(\kappa, \mu, \nu)$ -space, notation that we used to refer to the almost contact metric manifolds that satisfy the equality

$$\begin{aligned} R(X, Y)\xi &= \kappa\{\eta(Y)X - \eta(X)Y\} + \mu\{\eta(Y)hX - \eta(X)hY\} \\ &\quad + \nu\{\eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY\}, \end{aligned}$$

for  $\kappa, \mu, \nu$  functions, specifying apart any additional structures (like contact metric, almost cosymplectic or almost Kenmotsu).



In Section 3.1 we studied the curvature tensor of a contact metric  $(\kappa, \mu, \nu)$ -space of dimension 3. We proved that such a tensor does not have a unique writing but can take, among others, the forms

$$R = FR_1 + (F - \kappa)R_3 + \mu R_4 + \nu R_7 = FR_1 + (F - \kappa)R_3 + \mu R_4 - \nu R_8,$$

where  $F$  is the  $\phi$ -sectional curvature of the manifold and the tensors  $R_7$  and  $R_8$  are the following:

$$\begin{aligned} R_7(X, Y)Z &= g(Y, Z)\phi hX - g(X, Z)\phi hY + g(\phi hY, Z)X - g(\phi hX, Z)Y, \\ R_8(X, Y)Z &= \eta(X)\eta(Z)\phi hY - \eta(Y)\eta(Z)\phi hX + g(\phi hX, Z)\eta(Y)\xi - g(\phi hY, Z)\eta(X)\xi. \end{aligned}$$

This lead to the definition of a *generalized  $(\kappa, \mu, \nu)$ -space form* as an almost contact metric manifold whose curvature tensor has the form

$$R = f_1R_1 + f_2R_2 + f_3R_3 + f_4R_4 + f_5R_5 + f_6R_6 + f_7R_7 + f_8R_8,$$

where  $f_1, \dots, f_8$  are differentiable functions on  $M$  and  $R_1, \dots, R_8$  the previously defined tensors.

This type of manifold was denoted by  $M(f_1, \dots, f_8)$  and its name shortened to  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. They trivially included the  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s. Thus, the examples of contact metric  $(\kappa, \mu, \nu)$ -spaces with non-zero  $\nu$  that appear in [44] are in particular  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s, for which we calculated explicitly the curvature tensor. We also saw that the converse is true, i.e. that a contact metric  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_8)$  is a  $(\kappa, \mu, \nu)$ -space with  $\kappa = f_1 - f_3$ ,  $\mu = f_4 - f_6$  and  $\nu = f_7 - f_8$ . We used that result and those that appear in [44] to prove that, when dimension is greater than or equal to 5,  $f_4 = 1$ ,  $f_5 = 1/2$ ,  $f_7 = f_8 = 0$  and that  $f_1, f_2, f_3$  depend linearly on  $f_6$ , which is constant.

In the Section 3.2 we carried out a detailed study of the  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s with almost cosymplectic and almost Kenmotsu structures, presenting profound and conclusive results. As it happened for the contact metric structure, with any of the two mentioned structures it holds that a  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_8)$  is a  $(\kappa, \mu, \nu)$ -space with  $\kappa = f_1 - f_3$ ,  $\mu = f_4 - f_6$  and  $\nu = f_7 - f_8$ . In dimension greater than or equal to 5, we found the writing of the curvature tensor of a  $(\kappa, \mu, \nu)$ -space with almost cosymplectic structure (satisfying  $\kappa < 0$ ) and almost Kenmotsu structure ( $\kappa < -1$ ). In the first case,

$$R = -\kappa R_3 - R_{5,2} - \mu R_6 - \nu R_8$$

and in the second

$$R = -R_1 - (\kappa + 1)R_3 - R_{5,2} - \mu R_6 + R_7 - (\nu - 1)R_8.$$

This meant the justification of the definition of the tensors  $R_7$  and  $R_8$ , as well as the introduction of the  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s with divided  $R_5$   $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, \dots, f_8)$  analogously as it was done for the  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s with divided  $R_5$   $M(f_1, \dots, f_{5,1}, f_{5,2}, f_6)$ . For

all the possible cases, we presented explicit examples or we proved the non-existence of the mentioned spaces, for both almost cosymplectic as well as for almost Kenmotsu structures.

For example, we showed that a  $(\kappa, \mu, \nu)$ -space of dimension 3 with any of the structures has curvature tensor

$$R = FR_1 + (F - \kappa)R_3 + \mu R_4 + \nu R_7,$$

hence it will be a  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f., of which we gave instances in the Example 3.2.49.

In the last section of the third chapter, we first gave the writing of the Schouten and the Weyl tensors on a  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.  $M(f_1, \dots, f_8)$  in terms of the functions  $f_1, \dots, f_8$  and the tensors  $R_1, \dots, R_8$ . We later used that result to give necessary and sufficient conditions for a  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f. to be conformally flat if the dimension is greater than or equal to 5 and the tensor  $h$  satisfies some natural properties. We also proved some results in the case that the structure is contact metric, almost cosymplectic or almost Kenmotsu. Lastly, we analysed the contact metric  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s which are conformally flat,  $\xi$ -conformally flat or  $\phi$ -conformally flat. It is worth mentioning that, even if we did not study such a situation for  $g.(\kappa, \mu)$ -s.f.'s, it is not necessary to do so, because the  $g.(\kappa, \mu, \nu)$ -s.f.'s include them.

This illustrates perfectly the advantage of offering larger frameworks in order to analyse spaces that were previously studied in a more or less disperse way, which constitutes one of the reasons for which we have introduced the spaces defined.

# Bibliografía

- [1] P. Alegre. *Subvariedades en espacios de curvatura  $\phi$ -seccional constante generalizados*. Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, 2005.
- [2] P. Alegre, D. E. Blair y A. Carriazo. Generalized Sasakian-space-forms. *Israel J. Math.* **141** (2004), 157–183.
- [3] P. Alegre y A. Carriazo. Structures on generalized Sasakian-space-forms. *Differential Geom. Appl.* **26** (2008), no. 6, 656–666.
- [4] P. Alegre y A. Carriazo. Submanifolds of generalized Sasakian space forms. *Taiwanese J. Math.* **13** (2009), 923–941.
- [5] P. Alegre y A. Carriazo. Generalized Sasakian-space-forms and conformal changes of the metric. *Results Math.* **59** (2011), no. 3–4, 485–493.
- [6] P. Alegre, A. Carriazo, Y. H. Kim y D. W. Yoon. B.-Y. Chen’s inequality for submanifolds of generalized space forms. *Indian J. Pure Appl. Math.* **38** (2007), 185–201.
- [7] P. Alegre, A. Carriazo, C. Özgür y S. Sular. New examples of generalized Sasakian-space-forms. Enviado para su publicación.
- [8] R. Al-Ghefari, F. R. Al-Solamy y M. H. Shahid. CR-submanifolds of generalized Sasakian space forms. *JP J. Geom. Topol.* **6** (2006), 151–166.
- [9] R. Al-Ghefari, F. R. Al-Solamy y M. H. Shahid. Contact CR-warped product submanifolds in generalized Sasakian space forms. *Balkan J. Geom. Appl.* **11** (2006), 1–10.
- [10] K. Arslan, A. Carriazo, V. Martín-Molina y C. Murathan. The curvature tensor of  $(\kappa, \mu, \nu)$ -contact metric manifolds. Preprint.
- [11] D. E. Blair. *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*. Birkhäuser, Boston, 2002.

- [12] D. E. Blair, T. Koufogiorgos y V. J. Papantoniou. Contact metric manifolds satisfying a nullity condition. *Israel J. Math.* **91** (1995), 189–214.
- [13] D. E. Blair, T. Koufogiorgos y R. Sharma. A classification of 3-dimensional contact metric manifolds with  $Q\phi = \phi Q$ . *Kodai Math. J.* **13** (1990), 391–401.
- [14] D. E. Blair y H. Chen. A classification of 3-dimensional contact metric manifolds with  $Q\phi = \phi Q$ , II. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica* **20** (1992), no. 4, 379–383.
- [15] E. Boeckx. A class of locally  $\phi$ -symmetric contact metric spaces. *Arch. Math.* **2** (1999), 466–472.
- [16] E. Boeckx. A full classification of contact metric  $(\kappa, \mu)$ -spaces. *Illinois J. Math.* **44** (2000), no. 1, 212–219.
- [17] J. L. Cabrerizo, L. M. Fernández, M. Fernández y Z. Guo. The structure of a class of  $K$ -contact manifolds. *Acta Math. Hungar.* **82** (1999), no. 4, 331–340.
- [18] G. Calvaruso, D. Perrone y L. Vanhecke. Homogeneity on three-dimensional contact metric manifolds. *Israel J. Math.* **114** (1999), 301–321.
- [19] A. Carriazo y V. Martín-Molina. Almost cosymplectic and almost Kenmotsu generalized  $(\kappa, \mu, \nu)$ -space forms. Preprint.
- [20] A. Carriazo y V. Martín-Molina. Generalized  $(\kappa, \mu)$ -space forms and  $D_\alpha$ -homothetic deformations. Aparecerá en *Balkan J. Geom. Appl.* **16** (2011), no. 1, 37–47.
- [21] A. Carriazo, V. Martín-Molina y M. M. Tripathi. Generalized  $(\kappa, \mu)$ -space forms. Enviado para su publicación.
- [22] C. L. Bejan. Almost semi-invariant submanifolds in coymplectic manifolds of constant  $\phi$ -secional curvature. *An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.)* **32** (1986), 63–72.
- [23] D. Chinea, M. de León y J.C. Marrero. Topology of cosymplectic manifolds. *J. Math. Pures Appl.* **72** (1993), 567–591.
- [24] P. Dacko. On conformally flat almost cosymplectic manifolds with Kählerian leaves. *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino* **56** (1998), no. 1, 89–103.
- [25] P. Dacko. On almost cosymplectic manifolds with the structure vector field  $\xi$  belonging to the  $\kappa$ -nullity distribution. *Balkan J. Geom. Appl.* **5** (2000), no. 2, 47–60.

- [26] P. Dacko y Z. Olszak. On almost cosymplectic  $(\kappa, \mu, \nu)$ -spaces. *Banach Center Publ.* **69** (2005), 211–220.
- [27] P. Dacko y Z. Olszak. On almost cosymplectic  $(-1, \mu, 0)$ -spaces. *Cent. Eur. J. Math.* **3** (2005), no. 2, 318–330.
- [28] G. Dileo y A. M. Pastore. Almost Kenmotsu Manifolds and local symmetry. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **14** (2007), 343–354.
- [29] G. Dileo y A. M. Pastore. Almost Kenmotsu Manifolds and Nullity Distributions. *J. Geom.* **93** (2009), 46–61.
- [30] M. K. Dwivedi, L. M. Fernández y M. M. Tripathi. The structure of some classes of contact metric manifolds. *Georgian Math. J.* **16** (2009), no. 2, 1–10.
- [31] H. Endo. On Ricci curvatures of almost cosymplectic manifolds. *An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.)* **40** (1994), 75–83.
- [32] H. Endo. On some properties of almost cosymplectic manifolds. *An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.)* **42** (1996), 79–94.
- [33] H. Endo. On some invariant submanifolds in certain almost cosymplectic manifolds. *An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.)* **43** (1997), 383–395.
- [34] H. Endo. Non-existence of almost cosymplectic manifolds satisfying a certain condition. *Tensor (N.S.)* **63** (2002), 272–284.
- [35] F. Gouli-Andreou y N. Tsolakidou. Conformally flat contact metric manifolds with  $Q\xi = \rho\xi$ . *J. Geom* **64** (1999), 80–88.
- [36] Z. Guo. Conformally symmetric  $K$ -contact manifolds (Chinese). *Chinese Quart. J. Math.* **7** (1992), no. 1, 5–10.
- [37] Z. Guo, J.L. Cabrerizo, L.M. Fernández y M. Fernández. On  $\xi$ -conformally flat contact metric manifolds. *Indian J. Pure Appl. Math* **28** (1997), no. 6, 725–734.
- [38] S. Hong y M. M. Tripathi. On Ricci curvature of submanifolds of generalized Sasakian space forms. *Int. J. Pure Appl. Math. Sci.* **2** (2005), 173–201.
- [39] D. Janssens y L. Vanhecke. Almost contact structures and curvature tensors. *Kodai Math. J.* **4** (1981), 1–27.
- [40] K. Kenmotsu. A class of almost contact Riemannian manifolds. *Tôhoku Math. J.* **24** (1972), 93–103.

- [41] U. K. Kim. Conformally flat generalized Sasakian-space-forms and locally symmetric generalized Sasakian-space-forms. *Note Mat.* **26** (2006), 55–67.
- [42] T. W. Kim y H. K. Pak. Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* **21** (2005), no. 4, 841–846.
- [43] T. Koufogiorgos. Contact Riemannian manifolds with constant  $\phi$ -sectional curvature. *Tokyo J. Math.* **20** (1997), no. 1, 13–22.
- [44] T. Koufogiorgos, M. Markellos y V. J. Papantoniou. The harmonicity of the Reeb vector field on contact metric 3-manifolds. *Pacific J. Math.* **234** (2008), no. 2, 325–344.
- [45] T. Koufogiorgos y C. Tsihlias. Generalized  $(\kappa, \mu)$ -contact metric manifolds with  $\|\text{grad}\kappa\| = \text{constant}$ . *J. Geom.* **78** (2003), 83–91.
- [46] T. Koufogiorgos y C. Tsihlias. On the existence of a new class of contact metric manifolds. *Canad. Math. Bull.* **43** (2000), no. 4, 400–447.
- [47] J. C. Marrero. The local structure of trans-Sasakian manifolds. *Ann. Mat. Pura Appl.* **162** (1992), 77–86.
- [48] J. C. Marrero y E. Padrón. New examples of compact cosymplectic solvmanifolds. *Arch. Math.* **34** (1998), no. 3, 337–345.
- [49] K. Ogiue. On almost contact manifolds admitting axiom of planes or axiom of free mobility. *Kodai Math. Sem. Rep.* **16** (1964), 115–128.
- [50] Z. Olszak. On contact metric manifolds. *Tôhoku Math. J.* **31** (1979), 247–253.
- [51] Z. Olszak. On almost cosymplectic manifolds. *Kodai Math. J.* **4** (1981), 239–250.
- [52] Z. Olszak. On the existence of generalized complex space forms. *Israel J. Math.* **65** (1989), 214–218.
- [53] Z. Olszak y R. Rosca. Normal locally conformal almost cosymplectic manifolds. *Publ. Math. Debrecen* **39** (1991), no. 3–4, 315–323.
- [54] R. Sharma. On the curvature of contact metric manifolds. *J. Geom.* **53** (1995), 179–190.
- [55] S. Tanno. The topology of contact Riemannian manifolds. *Illinois J. Math.* **12** (1968), 700–717.
- [56] F. Tricerri y L. Vanhecke. Curvature tensors on almost Hermitian manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.* **267** (1981), 365–398.

- [57] K. Yano. *Integral formulas in Riemannian Geometry*. Pure and Applied Mathematics, no. 1. Marcel Dekker, Inc., New York, 1970.
- [58] D. W. Yoon y K. S. Cho. Inequality for warped products in generalized Sasakian space forms. *Int. Math. J.* **5** (2004), 225–235.





# Fórmulas

Recordaremos aquí las definiciones de los tensores  $R_1, \dots, R_8$  para mayor comodidad del lector:

$$R_1(X, Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y,$$

$$R_2(X, Y)Z = g(X, \phi Z)\phi Y - g(Y, \phi Z)\phi X + 2g(X, \phi Y)\phi Z,$$

$$R_3(X, Y)Z = \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\xi.$$

$$R_4(X, Y)Z = g(Y, Z)hX - g(X, Z)hY + g(hY, Z)X - g(hX, Z)Y,$$

$$R_5(X, Y)Z = g(hY, Z)hX - g(hX, Z)hY + g(\phi hX, Z)\phi hY - g(\phi hY, Z)\phi hX,$$

$$R_6(X, Y)Z = \eta(X)\eta(Z)hY - \eta(Y)\eta(Z)hX + g(hX, Z)\eta(Y)\xi - g(hY, Z)\eta(X)\xi,$$

$$R_7(X, Y)Z = g(Y, Z)\phi hX - g(X, Z)\phi hY + g(\phi hY, Z)X - g(\phi hX, Z)Y,$$

$$R_8(X, Y)Z = \eta(X)\eta(Z)\phi hY - \eta(Y)\eta(Z)\phi hX + g(\phi hX, Z)\eta(Y)\xi - g(\phi hY, Z)\eta(X)\xi.$$

También podemos escribir el tensor  $R_5$  como  $R_5 = R_{5,1} - R_{5,2}$ , donde

$$R_{5,1}(X, Y)Z = g(hY, Z)hX - g(hX, Z)hY,$$

$$R_{5,2}(X, Y)Z = g(\phi hY, Z)\phi hX - g(\phi hX, Z)\phi hY.$$