Juegos simples vectoriales

Memoria presentada por

Jesús Rodríguez Oña

para acceder al grado de doctor

Director: Francisco Ramón Fernández Garcia

Departamento de Estadistica e Investigación Operativa
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla

Índice general

INTRODUCCIÓN

Cuando, en una situación real, escogemos una decisión de un conjunto de posibles decisiones $\mathcal{D}$, optamos por el resultado $r(d)$ que esa decisión producirá cuando sea implementada.

Así,

- al escoger un modo de "cortes por guillotina" en un sistema productivo, nos conduce a unos ciertos patrones útiles y un cierto material de desecho.
- al escoger entre ciertas cantidades de valores de bolsa, tenemos un porcentaje de participaciones de las empresas que sustentan dichos valores.
- al decidir por un tipo de organización de la producción a lo largo de un cierto periodo nos produce unas ciertas cantidades de bienes a lo largo de dicho periodo.

Para la elección de una decisión del conjunto $\mathcal{D}$ debemos de tener un cierto conocimiento sobre los resultados de estas decisiones para saber cuando una elección es mejor que otra. Pero esto no es fácil, pues los resultados, a veces, son complejos para su comparación directa.

En este trance, la teoría de la utilidad trata de asignar valores numéricos a los resultados, $u(r(d)) \stackrel{\mathcal{D}}{=} u(d)$, de modo que si una decisión d_1 se considera mejor que otra d_2, $d_1 > d_2$, entonces su utilidad sea mayor, $u(d_1) > u(d_2)$.

Este camino no es fácil de establecer, aunque es el más empleado ya que siempre se pueden encontrar procedimientos de valoración numérica de los resultados haciendo valoraciones globales sobre ellos.

Así, en la decisión de los “cortes por guillotina”, podemos valorar los resultados en razón a la pérdida económica que nos supone una cierta cantidad de material de desecho. En la cartera de valores podemos tomar como valor la esperanza personal que nos produce nuestra inversión, a tenor de los posibles rendimientos que nosotros asignamos a las diferentes empresas. Mientras que el valor de la producción puede hacerse a través de la valoración actual que damos a los diferentes productos que se obtengan a lo largo del periodo.

Pero estos procedimientos pueden no estar totalmente de acuerdo con los deseos sobre los resultados que tenga el decisor, pues puede ocurrir que un resultado tenga un mejor valor que otro, y sin embargo el decisor no pueda afirmar que prefiere uno a otro, ya que en unos aspectos prefiere uno y en otros prefiere otro.

Por ello, puede ser más interesante valorar los resultados en espacios más generales que la recta real que nos permitan recoger mejor las preferencias que el decisor tiene sobre los resultados. Estos espacios están dotados de un orden parcial que nos permite decir si unos resultados son mejores que otros, pero que entre algunos resultados no podemos afirmar cuál de ellos es mejor.

En este caso las valoraciones de los “cortes por guillotina” podemos darlas a través del número de los distintos patrones que produce, así como la cantidad de material de desecho. La valoración, entonces, se hace a través de un vector del espacio euclídeo $\mathbb{R}^k$. Si consideramos el caso de la cartera de valores sería mejor representarla por una variable aleatoria que indicara los posibles valores que podamos recibir, así como las probabilidades que suponemos que determinan dichos valores. En este caso el espacio de valoración sería el espacio de las variables aleatorias. Finalmente, la producción a lo largo de un cierto periodo vendría dada por una función $f(t)$ que nos indica la producción que tenemos en cada instante del periodo y cuyo espacio de valoraciones es un espacio funcional.

Lógicamente, a medida que la representación de las valoraciones tenga unos elementos incomparables entre sí, mayor debe de ser el número de posibles mejores decisiones, lo que puede considerarse como un inconveniente. Pero constituye un reflejo de que, en la realidad, las diferentes alternativas no pueden descartarse por no tener peores resultados.

Esta es la causa de intentar emplear una función de valor numérico, pues en este caso siempre existirá una mejor decisión, y si existen varias todas son equivalentes respecto del valor. No obstante, por hacer más fácil la decisión no podemos valorar mal las decisiones.

Somos conscientes de que si el decisor incorpora suficiente información sobre las decisiones para poder producir un orden total, tendremos soluciones óptimas aceptables, pero cuando no podamos obtener más que un orden parcial, el conjunto de los maximales de este orden también representan las mejores acciones, ya que no puede saber cómo escoger entre ellas. En un espacio parcialmente ordenado, podría ocurrir que las decisiones particulares que tenemos las podamos ordenar totalmente. Lo que no podemos hacer es transformar los valores, pues la compatibilidad de los órdenes es en un solo sentido.

Como conclusión llegamos a que las valoraciones de las decisiones se deben de hacer en el espacio en que podamos mejor recoger los deseos del decisor. No podemos forzar "por comodidad operativa" el espacio de valoraciones, ya que eso nos llevaría a un gran error al no reflejar los deseos del decisor.

Y debemos de recordar que independientemente de la valoración de las decisiones, siempre es posible escoger entre ellas las mejores, aunque este concepto de mejor sea algo diferente en los órdenes parciales que en los órdenes totales.

Lo que afirmamos para el proceso general de decisión, sirve también en teoría de juegos. Así, en teoría de juegos cooperativos, la función característica toma valores en la recta real para indicar la fuerza o potencia de las coaliciones, pero puede que esto no sea siempre posible y tener en muchas situaciones que valorar las coaliciones sobre espacios parcialmente ordenados.

Habiendo valorado los resultados y habiendo tomado una decisión d^* como la mejor, no quiere decir que el resultado de dicha acción $r(d^*)$ tenga por valor $v(r(d^*))$, puesto que esto es lo que nosotros le hemos asignado. Lo que realmente ocurre es que implementando d^* obtenemos como recompensa $r(d^*)$.

Si esta decisión d^* es llevada a cabo por un conjunto $N = \{1, ..., n\}$ de decisores, debemos de discutir cómo va a ser repartido el resultado entre los diversos agentes.

No obstante como, generalmente, esto no es posible, lo que se hace es repartir la valoración del resultado, entendiendo que el valor que asignamos del mismo a cada agente tiene la misma interpretación que dábamos a la valoración de las decisiones.

Lo que es incongruente es valorar las decisiones con un procedimiento y hacer repartos sobre otros tipos de valoraciones, ya que se supone que las valoraciones asignadas a los agentes son similares a las dadas a las decisiones (Ver [5]).

También hay que hacer notar que aunque no hemos repartido el resultado entre los agentes, y consecuentemente ningún agente puede verse como dueño de parte del mismo, si que cualquiera de ellos puede valorar su participación, e incluso puede traspasar o vender su parte a otro agente.

Esta memoria está dedicada a un caso particular de los procesos de decisión en los que hay varios decisores en competencia y en el que los pagos de los resultados están valorados vectorialmente, situaciones conocidas como juegos vectoriales (Ver [9], [42] y [43]).

Nosotros consideramos el estudio de estos juegos en el caso en que los pagos se hagan de una forma cualitativa que serán denominados juegos simples vectoriales.

La teoría de juegos ha estudiado estas situaciones sólo en los casos en que las cualidades son dicotómicas bajo el epígrafe de juegos simples. Tradicionalmente, se ha tomado como valor de una coalición 1 o 0, según obtenga o no el objetivo pretendido. Las coaliciones que tienen valor uno reciben el nombre de coaliciones ganadoras y las que tienen valor cero perdedoras. Sin embargo, los juegos simples constituyen una simplificación de la realidad, en el sentido de que, en cualquier situación de la vida real los jugadores se encuentran confrontados no ante un objetivo de tipo cualitativo, sino frente a varios objetivos de este tipo. En esta nueva situación, una coalición cualquiera alcanzará una parte de estos objetivos, por lo que las coaliciones se clasifican en varios tipos de familias. Este es el caso, objeto de nuestro estudio, al que llamaremos juego simple vectorial, reservando, por tanto, el nombre de juego simple escalar para el modelo clásico.

Destacamos que estos juegos son introducidos por primera vez, por lo que no existen referencias en la literatura a los mismos, siendo los referentes que manejamos los que se hacen en relación con los juegos simples escalares.

En el Capítulo 1 se dan las definiciones básicas y distintos ejemplos de juegos simples vectoriales. Los juegos valoran las coaliciones según k criterios. Los juegos que nosotros estudiamos al ser cualitativos valorarán las coaliciones según una k-upla de ceros y unos, la cuál es conocida como patrón de la coalición. Estos patrones (o coaliciones) se agrupan en clases que constituyen el eje central de estos juegos y vienen a extender la clasificación dicotómica (clase de coaliciones ganadoras y clase de coaliciones perdedoras de los juegos simples clásicos). Además la agrupación de patrones en clases puede realizarse de muchas formas, por lo que es necesario establecer la clasificación para definir el juego simple vectorial. De ahí que un juego simple vectorial esté determinado por un conjunto de jugadores N, k criterios y una clasificación. Un caso especialmente importante lo constituyen los juegos simples vectoriales monótonos, los cuáles son de gran aplicación en los sistemas de votación. Estos juegos presentan la particularidad de que coaliciones más grandes (o la ampliación de coaliciones) consiguen más criterios, por lo que la mayor parte de esta memoria está dedicada al estudio de estos juegos.

Cuando los criterios pasan a ser “pertenecer a una clase determinada”, tenemos la forma canónica del juego simple que utilizaremos a la hora de estudiar los índices de los jugadores. Por último, comprobaremos que la familia de juegos simples vectoriales tiene la estructura de retículo distributivo y veremos que tiene dos bases que son de gran utilidad en el desarrollo de la teoría, la de los juegos de unanimidad y la de los juegos de identidad.

En el Capítulo 2 estudiamos juegos simples asociados a un juego simple vectorial que resultan de hacer operaciones de agregación de clases por unión o intersección y/o marginalidad y establecemos la relación entre la composición clásica de juegos simples escalares y el juego simple vectorial que resulta de la composición de dichos juegos simples escalares. Como caso particular, prestamos especial atención al juego simple vectorial multicameral que por operaciones de agregación y marginalidad respecto a sus clases produce los distintos sistemas multicamerales, de los cuáles citamos algunos ejemplos.

En el Capítulo 3 definimos los diversos tipos de coaliciones y jugadores. Hacemos una clasificación de los juegos y vemos su caracterización. A continuación, estudiamos la importancia de los jugadores de un juego simple vectorial.

En el Capítulo 4 se aborda el problema del reparto de los beneficios entre los jugadores de los juegos cooperativos, reparto que en este caso es del tipo conjunto. En particular, estudiamos el core y llegamos a que existen dos tipos de core, el core de preferencia y el core de dominancia, el primero de los cuáles no está vacío si existe, al menos, un jugador veto en cada una de las clases del juego y el segundo si existe, al menos, un jugador veto en cualquiera de las clases. También estudiamos el core en las operaciones de agregación y/o marginalidad efectuadas con las clases y llegamos a que el core del juego simple marginal correspondiente a la unión de varias clases no está vacío si existen jugadores vetos comunes a todas ellas y a que el core del juego simple marginal correspondiente a la intersección de varias clases no está vacío si, al menos, una clase tiene un jugador veto.

En el Capítulo 5 vemos que al igual que un juego simple escalar admite una representación ponderada a través de un juego de mayoría ponderada o de un juego de vector ponderado, también un juego simple vectorial admite una representación ponderada que, al igual que en el caso escalar, nos permite repartir el valor del juego entre los jugadores en base a sus pesos. Continuamos viendo las relaciones entre los jugadores de un juego simple vectorial, tanto en su forma canónica como en su expresión ponderada, respecto a una clase o a varias clases y el orden que entre ellos puede existir, así como la resistencia a cambios.

Debemos de hacernos también la pregunta de si cualquier juego simple vectorial puede ser representado mediante una expresión ponderada, pues de este modo podremos siempre indicar el valor de un jugador a través de las ponderaciones del juego. La respuesta la damos mediante una extensión del clásico teorema de Taylor, el cuál, en este caso, nos permite contestar afirmativamente a la pregunta anterior, ya que podemos siempre construir, usando dicho teorema, una forma ponderada asociada al juego simple vectorial considerado que nos da, además, una cota superior de la dimensión que de dicha extensión pueda tener. Finalmente, estudiamos las consecuencias de este teorema para los juegos marginales de la agregación de clases.

En el Capítulo 6 se tratan las formas de reparto definidas a través de los valores asociados a un juego. Damos la definición de valor asociado a juegos cooperativos que toman valores en espacios vectoriales generales, definiendo en ellos los axiomas y principios que los jugadores pueden aceptar.

En estos espacios vectoriales puede que exista una base o no. En el caso en que no existe no podemos seguir el conocido razonamiento de Shapley, razón por la que caracterizamos el valor de Shapley usando la idea de justicia de Myerson. Sin embargo, como en los juegos cooperativos vectoriales conocemos bases de juegos de unanimidad sobre los diferentes criterios, seguimos el citado razonamiento que, además, generalizamos al caso de espacios vectoriales que dispongan de una base aunque haya que extender el axioma de linealidad. Establecemos además los conceptos clásicos de potencial y sus consecuencias para los juegos cooperativos.

En la misma línea, definimos para los juegos simples vectoriales los índices de Shapley-Shubik y Banzhaf, así como dichos índices sobre clases agregadas.

Finalmente, introducimos brevemente el concepto de semivalor para englobar ambos índices en un concepto común, dejando un tratamiento detallado de estos semivalores para un estudio posterior y terminamos el capítulo viendo cómo estos índices pueden ser calculados a través de las extensiones multilineales.

Capítulo 1

JUEGOS SIMPLES VECTORIALES

1.1. Introducción

A lo largo de esta memoria vamos a ver situaciones de la vida real que pueden ser modeladas por un tipo particular de juegos, que llamaremos juegos simples vectoriales. Nuestro objetivo será el estudio matemático de dichos juegos.

Sabemos que un juego cooperativo es una situación derivada de una actividad en la que los elementos o actores que intervienen (los jugadores) persiguen alcanzar un determinado objetivo mediante la colaboración entre ellos, pues de esta forma tienen más posibilidades de conseguirlo que si actúan individualmente. Esta colaboración se manifiesta a través de asociaciones o coaliciones. Por tanto, un juego cooperativo es modelado por una pareja (N, v), dónde $N = \{1, 2, ..., n\}$ es el conjunto de jugadores que intervienen en el proceso y v, conocida como función característica, asocia a cualquier coalición S de jugadores, $S \subseteq N$, un valor que indica lo que puede conseguir si todos sus miembros deciden cooperar. En el caso en que se forma la gran coalición porque, por las características del juego, todos deciden cooperar, obtienen $v(N)$.

Muchas situaciones de la vida real son susceptibles de ser estudiadas como juegos coope-

rativos. Los jugadores que intervienen pueden ser personas, organizaciones, instituciones. Una Mancomunidad de Municipios puede verse en algunas circunstancias como un juego cooperativo. Asociándose todos o parte de ellos con el fin de realizar tareas en común tales como construir una potabilizadora de agua de mar, situar un vertedero, asegurar el servicio de limpieza, etc, conllevan unos determinados costes (la proximidad o lejanía de los centros urbanos, el menor impacto ambiental posible, etc) y beneficios (el ahorro que significa para cada municipio un desembolso menor), lo que permite valorar las coaliciones que puedan formarse de acuerdo a la consecución de los objetivos. El valor de una coalición es la cantidad mínima que puede obtener la coalición si todos sus miembros se asocian para trabajar en equipo. Y $v(N)$ será el valor a repartir entre todos los municipios si todos se asocian en la Mancomunidad.

Generalmente, las situaciones de cooperación se producen cuando el objetivo a conseguir es cuantitativo y ello se ve reflejado en los valores que toma la función característica. No obstante, existen situaciones importantes en las cuáles las valoraciones de los objetivos solamente pueden hacerse de un modo cualitativo. La teoría de juegos ha estudiado estas situaciones en los casos en que las cualidades son dicotómicas bajo el epígrafe de juegos simples.

Este es el caso de un parlamento en el que se vota la aprobación de una ley por mayoría simple. Una coalición de parlamentarios es ganadora si consigue la mitad más uno de los votos. Cualquier coalición ganadora permitirá la aprobación de la ley.

Tradicionalmente, para poder estudiar estas situaciones, se ha tomado como valor de una coalición 1 o 0, según obtenga o no el objetivo pretendido. Las coaliciones que tienen valor uno reciben el nombre de coaliciones ganadoras y las que tienen valor cero perdedoras.

Sin embargo, los juegos simples constituyen una simplificación de la realidad, en el sentido de que, en cualquier situación de la vida real los jugadores se encuentran confrontados no ante un objetivo de tipo cualitativo, sino frente a varios objetivos de tipo cualitativo. Este es el caso, objeto de nuestro estudio, al que llamaremos juego simple vectorial, reservando, por tanto, el nombre de juego simple escalar para el modelo clásico.

En el caso escalar, consideramos un objetivo único de tipo cualitativo. Las coaliciones podrán alcanzarlo o no. Si una coalición consigue alcanzar el objetivo, será una coalición ganadora y en caso contrario, perdedora. De ahí que todas las coaliciones posibles quedan englobadas en dos familias, la de las coaliciones ganadoras y la de las perdedoras.

En el caso vectorial, al considerar varios objetivos de tipo cualitativo, una coalición cualquiera alcanzará una parte de ellos, por lo que las posibles coaliciones se clasifican en varios tipos de familias.

Consideremos los miembros de una corporación que deben aprobar o no la gestión de dos directores generales. Cada miembro puede votar a favor o en contra de cada uno de ellos. Una coalición cualquiera puede aprobar la gestión de uno de ellos, de los dos o de ninguno, por lo que las coaliciones se agrupan en cuatro familias.

1.2. Definiciones básicas

Sea N un conjunto finito de elementos llamados jugadores y supongamos la existencia de k objetivos O_i sobre $\mathcal{P}(N)$, en el sentido de que para todo subconjunto S de N, llamado coalición, podemos medir cada objetivo en una escala normalizada del 0 al 1.

Usamos los puntos del hipercubo unidad k-dimensional $[0,1]^k$ como valoración de los objetivos por parte de una coalición.

De esta forma se ha definido la aplicación $\breve{\phi}$ que asocia a cada coalición una k-upla,

$$\breve{\phi} : \mathcal{P}(N) \to [0,1]^k$$

Definición 1.2.1 *Un juego vectorial de k objetivos normalizados es un par $(N, \breve{\phi})$, dónde N es el conjunto de jugadores y $\breve{\phi}$ la función, $\breve{\phi} : \mathcal{P}(N) \to [0,1]^k$, que asocia a cada coalición una k-upla del hipercubo k-dimensional unitario.*

Por tanto, cuando los objetivos son de tipo cuantitativo, las coaliciones se valoran en cualquier punto del hipercubo unitario k-dimensional, ya que cada objetivo admite valores desde 0 a 1. Pero, si definimos objetivos de tipo cualitativo, que en lo sucesivo llamaremos criterios, las coaliciones se valorarán en los vértices del hipercubo, ya que cada criterio sólo admite los valores 0 ó 1. Entonces, el juego vectorial resultante se llamará juego vectorial de k criterios.

Definición 1.2.2 *Un juego vectorial de k criterios es un par (N, ϕ), siendo N el conjunto de jugadores y ϕ la función, $\phi : \mathcal{P}(N) \to \{0,1\}^k$, que asocia a cada coalición una k-upla, cuyos unos indican los criterios $C_1, C_2, ..., C_k$ que la coalición verifica y los ceros los criterios que no verifica.*

El juego vectorial de k criterios se puede definir partiendo de un juego vectorial. Definimos para ello unos criterios C_i a partir de los objetivos O_i estableciendo unos niveles o *goals* c_i en los O_i. De este modo, una coalición S verifica el criterio C_i si el valor del objetivo O_i de S supera o iguala el nivel c_i y no verifica C_i si no supera el nivel:

$$\left[\breve{\phi}(S)\right]_i \geq c_i \Rightarrow [\phi(S)]_i = 1 \quad , \text{S verifica } C_i$$
$$\left[\breve{\phi}(S)\right]_i < c_i \Rightarrow [\phi(S)]_i = 0 \quad , \text{S no verifica } C_i$$

Ejemplo 1.2.1 ***El juego de votación simultánea de varios candidatos***

Sea un sistema de votación múltiple formado por n electores y k candidatos. Cada elector puede votar a k' candidatos, $k' \leq k$ (emite a lo más un voto por candidato).

Cuando cada votante de una coalición S emite su voto y se procede al recuento de votos de todos los miembros de la coalición, resulta que el candidato 1 ha obtenido $n_1(S)$ votos, el candidato 2 $n_2(S)$ votos, etc.

Entonces, podemos definir la función $\hat{\phi}$ como

$$\forall S \in \mathcal{P}(N), \quad \hat{\phi}(S) = \begin{pmatrix} n_1(S) \\ n_2(S) \\ \ldots \\ n_k(S) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k \quad con \quad n(S) \leq k' \times s \quad y \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^k n_i(S) = n(S) \\ card(S) = s \end{array} \right.$$

Los valores así obtenidos son elementos de $\mathbb{R}^k$ y definen un juego vectorial k-dimensional $(N, \hat{\phi})$. Si normalizamos dichos valores dividiéndolos por el número de votos emitidos, obtenemos el juego vectorial normalizado $(N, \breve{\phi})$.

A partir de este juego vectorial normalizado se puede definir un juego vectorial (N, ϕ) de k criterios, definiendo una función

$$\phi : \mathcal{P}(N) \to \{0, 1\}^k$$

sin más que establecer condiciones sobre los $n_i(S)$, dando lugar a criterios u objetivos de tipo cualitativo. Si $\dfrac{n_i(S)}{n} \times 100 \geq q_i\,\%$, la componente correspondiente de ϕ es 1 y si no, 0.

En el estudio que sigue nos referiremos exclusivamente a los juegos vectoriales de k criterios.

Entenderemos por clasificación sobre $\mathcal{P}(N)$ toda agrupación de las $2^n - 1$ coaliciones en r familias o clases, $\{U_1, U_2, ..., U_r\}$, de modo que la unión de todas ellas coincide con

$\mathcal{P}(N)$,

$$\bigcup_{i=1}^{r} U_i = \mathcal{P}(N)$$

Cuando las familias que definen la clasificación son disjuntas dos a dos,

$$U_i \cap U_j = \emptyset \qquad \forall i, j = 1, ..., r \qquad i \neq j$$

la clasificación se llama partición.

Las clasificaciones $\{U_1, U_2, ..., U_r\}$ sobre $\mathcal{P}(N)$ pueden definirse de dos formas:

1. Mediante condiciones sobre los criterios*, $\{C_1, C_2, ..., C_k\}$, que deseamos que verifique cada familia U_i.

   Si estas condiciones sobre los criterios llevan implícita la idea de "a más, mejor" las clases se denominan positivas, U_i^+ y, en caso contrario, negativas, U_i^-.

2. Mediante sus patrones, entendiendo por patrón $\mathbf{P}_i$ de una clase U_i el conjunto de k-uplas que son imágenes por ϕ de las coaliciones que integran la clase.

Hay que hacer notar que lo mismo que las clases no tienen por qué ser disjuntas, tampoco tienen por qué serlo los patrones que las definen. Los patrones de las clases serán disjuntos si la clasificación es una partición.

Tampoco la familia de patrones tiene por qué recubrir el hipercubo unidad,

$$\bigcup_{i=1}^{r} \mathbf{P}_i \subseteq \{0,1\}^k$$

sólo lo recubrirá en el caso de que la aplicación ϕ sea sobreyectiva.

Cuando un patrón $\mathbf{P}_i$ viene dado por una lista grande de k-uplas, comprobar si una coalición está en U_i es más complicado de hacer que ver si la coalición verifica las condiciones que definen U_i. Pero, a veces, el conjunto de patrones puede ser representado por sus elementos maximales (o minimales), por lo que será muy sencillo comprobar si la k-upla correspondiente a una coalición precede (o sigue) a un elemento maximal (o minimal).

Ejemplo 1.2.1 Votación simultánea de varios candidatos (Continúa)

Sea un caso particular del juego de votación múltiple de varios candidatos compuesto por un conjunto N de 100 electores y cinco candidatos. Cada elector emite un voto en el que pueden aparecer 3 nombres como máximo. Es decir, $n = 100$, $k = 5$ y $k' = 3$. Un candidato es elegido si obtiene 51 % votos o más ($\frac{n_i(S)}{n} \times 100 \geq 51\,\%$).

---

*También se pueden definir clasificaciones para los juegos vectoriales con objetivos cuantitativos, sin más que establecer condiciones sobre ellos.

Este es un juego de votación en el que cada elector emite un voto $(w_{i1}, w_{i2}, w_{i3}, w_{i4}, w_{i5})$, *siendo* w_{ij} *cero o uno y* $\sum_{j=1}^{5} w_{ij} \leq 3$.

Podemos considerar cinco criterios: $\{C_1\}$, $i \in \{1, 2, ..., 5\}$. *El criterio* C_i *se alcanza cuando el candidato* i *obtiene* 51 *votos o más.*

La función ϕ *hace corresponder a cada coalición* S *una 5-upla de ceros y unos. Si* S *fuera una coalición para la que sólo* $n_4(S) \geq 51$ *y* $n_5(S) \geq 51$, *entonces*

$$\phi(S) = (0, 0, 0, 1, 1)$$

Al valorar todas las posibles coaliciones de electores, tenemos un juego vectorial de 5 *criterios* (N, ϕ).

Las labores encomendadas a estos candidatos nos permiten definir la clasificación siguiente, formada por tres clases positivas y una negativa

1. *La clase* U_1 *de las coaliciones que verifican los tres primeros criterios o los dos primeros y el último. Su patrón es* $\mathbf{P}_1 = \{(1, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 1)\}$.

2. *La clase* U_2 *de las coaliciones que verifican el cuarto y el quinto criterios. Su patrón es* $\mathbf{P}_2 = \{(0, 0, 0, 1, 1)\}$.

3. *La clase* U_3 *de las coaliciones que verifican los criterios 2 y 4 y 3 y 4. Su patrón es* $\mathbf{P}_3 = \{(0, 1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1, 0)\}$.

4. *La clase* U_4 *(residual) del resto de las coaliciones. Su patrón es*

$$\mathbf{P}_4 = \{(0, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0),$$

$$(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0),$$

$$(1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 1)\}$$

Ejemplo 1.2.2 *(Cooperativa industrial) Un conjunto* N *de* 10 *individuos con diferentes cualificaciones profesionales (ver tabla adjunta) desean asociarse para formar una cooperativa industrial. Cada cooperativa puede cubrir los siguientes campos: mecánico, eléctrico, chapa-pintura y venta-almacén.*

Cualificaciones de los individuos				
	Mecánica	*Eléctrica*	*Chapa-pintura*	*Venta-almacén*
1	x			
2	x	x		
3	x	x		x
4		x		
5			x	
6	x	x	x	
7				x
8				x
9	x			x
10	x			x

y los criterios que se adoptan para que cada cooperativa ofrezca un servicio son:

1. C_1*: reunir, al menos,* 4 *cualificaciones en mecánica para poder ofrecer la especialidad de Mecánica.*

2. C_2*: reunir, al menos,* 2 *cualificaciones en eléctrica para poder ofrecer la especialidad de Eléctrica .*

3. C_3*: reunir, al menos,* 2 *cualificaciones en chapa-pintura para poder ofrecer la especialidad de Chapa y pintura.*

4. C_4*: reunir, al menos,* 1 *cualificación en venta-almacén para poder ofrecer la especialidad de Venta y Almacén.*

La función $\phi : \mathcal{P}(N) \to \{0,1\}^4$ *asocia a cada cooperativa de individuos una cuaterna, cuyos unos indican los criterios que verifica y los ceros los que no. Así, para las cooperativas* $\{1,2,4,5\}$ *y* $\{1,3,5,6,7\}$*:*

$$\phi(\{1,2,4,5\}) = (0,1,0,0) \qquad \phi(\{1,3,5,6,7\}) = (0,1,1,1)$$

La primera reúne 2 cualificaciones en mecánica, 2 en eléctrica y 1 en chapa-pintura, luego su imagen es $(0,1,0,0)$ *y la segunda reúne 3 en mecánica, 2 en eléctrica, 2 en chapa-pintura y 2 en venta-almacén, por tanto su imagen es* $(0,1,1,1)$*. Al valorar todas las posibles coaliciones, tenemos un juego vectorial de* 4 *criterios* (N,ϕ)*.*

La Administración no permite formar cooperativas que ofrezcan un sólo campo de actuación y especifica que las cooperativas que se formen deben ofrecer, al menos:

1. *tres servicios, uno de los cuáles debe ser chapa y pintura .*

2. *tres servicios, dos de los cuáles debe ser mecánica y venta y almacén*

mientras que el resto de las coaliciones que pueden formarse no son admisibles.

Tenemos, de esta forma, la clasificación $U = \{U_1, U_2, U_3\}$*, en la que* U_1 *está formada por las cooperativas del primer apartado,* U_2 *por las cooperativas del segundo apartado y* U_3 *por las coaliciones no admisibles. Nótese que las dos primeras clases son positivas porque al aumentar el número de empleados de un taller, podrá aumentar el número de servicios que ofrece (nunca disminuir) y la tercera clase es negativa porque al disminuir el número de operarios de una de sus posibles coaliciones, también podrá disminuir el número de servicios que ofrece (nunca aumentar).*

Los patrones de las clases U_1*,* U_2 *y* U_3 *son:*

$\mathbf{P}_1 = \{(1,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$,

$\mathbf{P}_2 = \{(1,1,0,1),(1,0,1,1),(1,1,1,1)\}$ *y*

$\mathbf{P}_3$ *formado por el resto de cuaternas.*

Otra Administración podría autorizar, con los mismos criterios, las cooperativas que ofrecen, al menos,

1. *los servicios de mecánica y eléctrica (clase* U_1'*).*

2. *los servicios de mecánica y chapa y pintura (clase* U_2'*).*

3. *los servicios de mecánica y venta y almacén (clase* U_3'*).*

y no autoriza el resto (clase U_4'*).*

Los patrones de las clases U_1'*,* U_2'*,* U_3' *y* U_4' *son:*

$\mathbf{P}_1' = \{(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,1,1,1)\}$,

$\mathbf{P}_2' = \{(1,0,1,0),(1,1,1,0),(1,0,1,1),(1,1,1,1)\}$,

$\mathbf{P}_3' = \{(1,0,0,1),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(1,1,1,1)\}$ *y*

$\mathbf{P}_4' = \{(0,0,0,0),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$.

Nótese, como en la anterior clasificación, que las tres primeras clases son positivas y la cuarta clase negativa, por las mismas razones anteriormente dadas.

1.2.1. Juegos simples vectoriales

Un juego con un solo criterio es conocido como juego simple escalar. En él tenemos, por una parte, las coaliciones de patrón 1 (o ganadoras) y, por otra, las de patrón 0 (o perdedoras), quedando agrupadas las coaliciones en dos familias de una forma natural.

Un juego vectorial de k criterios es un par (N, ϕ) formado por un conjunto de jugadores $N = \{1, 2, ..., n\}$ y una función

$$\phi : \mathcal{P}(N) \rightarrow \{0, 1\}^k$$

que asocia a cada coalición de $\mathcal{P}(N)$ una k-upla que indica qué criterios de los definidos, $C_1, C_2, ..., C_k$, verifica la coalición. De esta forma, las coaliciones quedan agrupadas en k familias, las que verifican el criterio 1, las que verifican el criterio 2, etc.

Pero, para los mismos k criterios podemos adoptar diferentes clasificaciones que, darán lugar a otros tipos de juegos vectoriales. Dichas clasificaciones pueden venir dadas por condiciones sobre los criterios o por medio de los patrones que queremos que verifiquen.

De esta forma llegamos a las siguientes definiciones:

Definición 1.2.3 *Un juego simple vectorial es un par $(N, v_{\phi,U})$ en el que N es el conjunto de jugadores y $v_{\phi,U}$ es la función característica que asocia a cada coalición el conjunto de clases de las que forma parte.*

$$v_{\phi,U} : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathcal{P}(U)$$

siendo ϕ la función construida a partir de los k criterios y U una clasificación definida sobre ellos.

Por tanto, cualquiera que sea la coalición S, $v_{\phi,U}$ nos indica a qué clases pertenece S.

Un juego simple vectorial se representa por $(N, v_{\phi,U})$ y la familia de todos ellos por $S(N, v_{\phi,U})$.

Sabemos que cada clase U_i tiene un patrón $\mathbf{P}_i$. Si, en lugar de conocer la descripción de las clases, conocemos sus patrones también sabremos cuando una coalición pertenece a una clase, por lo que puede darse otra definición de juego simple vectorial equivalente:

Definición 1.2.4 *Un juego simple vectorial es un par $(N, v_{\phi,\mathbf{P}})$ en el que N el conjunto de jugadores y $v_{\phi,\mathbf{P}}$ es la función característica que asocia a cada coalición el conjunto de clases de las que forma parte.*

$$v_{\phi,\mathbf{P}} : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathcal{P}(U)$$

siendo ϕ la función construida a partir de los k criterios y $\mathbf{P}$ la familia de patrones que definen la clasificación U.

En este caso se representa por $(N, v_{\phi,\mathbf{P}})$.

Ejemplo 1.2.1 (Continúa) *A partir del Juego de Votación Simultánea se puede construir un juego simple* $(N, v_{\phi,U})$*, por el que sabemos a qué clase o clases pertenece cada coalición. Por ejemplo, la coalición formada por 76 electores, 40 de los cuáles votan a los candidatos dos, cuatro y cinco, 16 electores a los candidatos dos, tres y cuatro y 20 electores a los candidatos cuatro y cinco, tiene por patrón* $(0, 1, 0, 1, 1)$ *y, por consiguiente, pertenece a la clase* U_2 *porque supera una de las 5-uplas minimales de su patrón, la* $(0, 0, 0, 1, 1)$*, y también a la clase* U_3 *por superar una de las 5-uplas minimales de su patrón, la* $(0, 1, 0, 1, 0)$*.*

Ejemplo 1.2.2 (Continúa) *A partir del ejemplo de la Cooperativa Industrial se pueden construir dos juegos simples* $(N, v_{\phi,U})$ *y* $(N, v_{\phi,U'})$*, en los que cada función* v *nos dice a qué clase o clases pertenece cada coalición o cooperativa. Por el primer juego simple* $(N, v_{\phi,U})$*, la cooperativa* $\{1, 5, 6, 9, 10\}$ *pertenece a las clases* U_1 *y* U_2 *porque su imagen es la cuaterna* $(1, 0, 1, 1)$ *que forma parte del patrón de ambas. Por el segundo juego simple* $(N, v_{\phi,U'})$*, la misma cooperativa* $\{1, 5, 6, 9, 10\}$ *forma parte de las clases* U_2' *y* U_3' *por la misma razón.*

1.2.2. El juego simple escalar

Son casos particulares de juegos simples vectoriales los juegos simples clásicos.

Un juego simple escalar, (N, v), es un juego simple vectorial,$(N, v_{\phi,U})$, en el que ϕ coincide con v y la clasificación viene dada por dos familias mutuamente excluyentes, $U = \{U_1, U_2\}$, que verifican

- $v(S) = 1 \Leftrightarrow S \in U_1$
- $v(S) = 0 \Leftrightarrow S \in U_2$

y, por tanto, $\emptyset \in U_2$ y $N \in U_1$, es decir $v(\emptyset) = 0$ y $v(N) = 1$.

La función característica clasifica las coaliciones en dos familias, la familia U_1 de las que se aplican en 1 o ganadoras, por lo que en este caso se nota por $\mathcal{W}$ y la familia U_2 de las que se aplican en 0 o perdedoras, que se nota por $\mathcal{L}$. Es por ello que el juego simple también se expresa mediante $(N, \mathcal{W})$ o $(N, \mathcal{L})$.

1.3. Juegos simples vectoriales monótonos

El caso más frecuente, y al que está dedicada la mayor parte de esta memoria, es aquél en que el juego es monótono.

Siguiendo el caso escalar y la naturaleza de las clases, diremos:

Definición 1.3.1 *Un juego simple vectorial* $(N, v_{\phi,U})$ *es monótono si:*

$$S_1 \subset S_2 \text{ y } S_2 \in U_i^- \Rightarrow S_1 \in U_i^-$$

$$S_1 \subset S_2 \text{ y } S_1 \in U_i^+ \Rightarrow S_2 \in U_i^+$$

Es decir, si una coalición S pertenece a una clase positiva U_i^+, cualquier supercoalición de ella también pertenece a dicha clase. Y si S pertenece a una clase negativa U_i^-, cualquier subcoalición de ella también pertenece a dicha clase. En el caso escalar (para un juego simple monótono) se decía: toda supercoalición de una coalición ganadora es ganadora y toda subcoalición de una perdedora es perdedora.

En el siguiente teorema, veremos que esta condición de monotonía se traduce en que los vectores de los patrones sean cerrados para las uniones y las intersecciones si estas operaciones dan lugar a coaliciones de la misma clase.

En $\{0,1\}^k$ tenemos definidas las operaciones unión e intersección de patrones:

$$x \vee y = \text{sup(x,y)} \qquad x \wedge y = \text{inf(x,y)}$$

Además, los patrones están ordenados en el orden natural siguiendo el esquema del diagrama de Hasse.

Ejemplo 1.2.1 (Continúa) *El juego de votación simultánea es un juego simple vectorial monótono.*

Veamos primero que se cumple la condición para una clase positiva (las clases U_1*,* U_2 *y* U_3*) y luego para una negativa (la clase* U_4*). Sea, la coalición* A *de* U_2 *formada por* 53 *electores,* 21 *de los cuáles votan a los candidatos tres, cuatro y cinco y* 32 *votan a uno, cuatro y cinco. Su imagen,* $\phi(A) = (0,0,0,1,1) \in \mathbf{P}_2$*. Si esta coalición* A *consigue la adhesión de* 19 *electores que votan a los candidatos uno, dos y tres. La nueva coalición* B *tiene por imagen* $\phi(B) = (1,0,0,1,1) \in \mathbf{P}_2$*, de ahí que* $B \in U_2$*.*

Análogamente, si C *es una coalición de* U_4 *formada por* 20 *electores que votan los candidatos uno, dos y tres y* 43 *electores que votan uno, tres y cinco,* $\phi(C) = (1,0,1,0,0)$*, es evidente que cualquier subcoalición* D*, formada por* 20 *electores que votan a uno, dos y tres y* 30 *electores que votan a uno, tres y cinco, reúne menos votos y tiene por imagen* $\phi(D) = (0,0,0,0,0)$*. Luego* $D \in U_4$*.*

Ejemplo 1.2.2 (Continúa) *La cooperativa industrial es un ejemplo de juego simple vectorial monótono. Veamos que si una clase es positiva y una coalición pertenece a la clase, cualquier supercoalición de ella, también pertenece, y que si una clase es negativa y una coalición pertenece a la clase, cualquier subcoalición de ella, también pertenece a la clase.*

En este ejemplo son clases positivas U_1 y U_2 y negativa U_3. Vamos a comprobar que se verifica para U_2. Recordamos que esta clase tenía por patrón:

$$\mathbf{P}_2 = \{(1,1,0,1),(1,0,1,1),(1,1,1,1)\}$$

Sea la cooperativa $A = \{1,2,6,9\} \in U_2$ que reúne 4 cualificaciones en mecánica, 2 en eléctrica 1 en chapa-pintura y 1 en venta-almacén Su imagen $\phi(A) = (1,1,0,1) \in \mathbf{P}_2$. Sea ahora una supercoalición de A, $B = \{1,2,5,6,9\}$, que reúne 4 cualificaciones en mecánica, 2 en eléctrica, 2 en chapa-pintura y 1 en venta-almacén. Su imagen $\phi(B) = (1,1,1,1) \in \mathbf{P}_2$. Es decir, $B \in U_2$.

Análogamente para U_3 (Recordamos que esta clase tenía por patrón, $\mathbf{P}_3$, el conjunto de cuaternas con dos unos y dos ceros, o un uno y tres ceros, o cuatro ceros). Sea la cooperativa $C = \{1,2,4,5\}$ que reúne 2 cualificaciones en mecánica, 2 en eléctrica y 1 en chapa-pintura. Su imagen $\phi(C) = (0,1,0,0) \in \mathbf{P}_3$. Es evidente que cualquier subcoalición reunirá menos cualificaciones. Por ejemplo, $D = \{1,4,5\}$ reúne 1 cualificación en mecánica, 1 en eléctrica y 1 en chapa-pintura. Su imagen $\phi(D) = (0,0,0,0) \in \mathbf{P}_3$. Por tanto, $D \in U_3$.

Teorema 1.3.1 *Un juego simple vectorial es monótono sii los patrones de clases positivas (negativas) asociados al juego son cerrados por uniones (intersecciones), cuando éstos sean imágenes de alguna coalición.*

Demostración.

$\Rightarrow$ Se cumple que el juego es monótono.

- hay que ver que los patrones son cerrados respecto a $\vee$. Se parte de:

  $$S_1 \subset S_2 \text{ y } S_1 \in U_i^+ \Rightarrow S_2 \in U_i^+$$

  Es decir, si una coalición pertenece a una clase positiva, cualquier otra que la contenga también pertenece a dicha clase. Como $S_1 \subset S_1 \cup S_2$ y $S_1 \in U_i^+$, entonces $S_1 \cup S_2 \in U_i^+$, y por ser $\phi(S_1) = x$, $\phi(S_2) = y$ y $\phi(S_1 \cup S_2) = x \vee y$, se sigue que los patrones son cerrados respecto a $\vee$, porque $x \vee y$ corresponde a una coalición de la clase U_i^+.

- hay que ver que los patrones son cerrados respecto a $\wedge$. Se parte de:

  $$S_1 \subset S_2 \text{ y } S_2 \in U_i^- \Rightarrow S_1 \in U_i^-$$

  Es decir, si una coalición pertenece a una clase negativa, cualquier otra contenida en ella también pertenece a dicha clase. Como $S_1 \cap S_2 \subset S_2$ y $S_2 \in U_i^-$, entonces

$S_1 \cap S_2 \in U_i^-$, y por ser $\phi(S_1) = x$, $\phi(S_2) = y$ y $\phi(S_1 \cap S_2) = x \wedge y$, se sigue que los patrones son cerrados respecto a $\wedge$, porque $x \wedge y$ corresponde a una coalición de la clase U_i^-.

$\Leftarrow$ Sea $S_1 \subset S_2$ y $S_1 \in U_i^+$. Llamamos a $\phi(S_1) = x$, a $\phi(S_2) = y$, y por ser los patrones cerrados respecto a $\vee$, entonces $x \vee y \in \mathbf{P}_i$, por tanto $\phi(S_2) = \phi(S_1 \cup S_2) = x \vee y \in \mathbf{P}_i$.

Es decir, también $S_2 \in U_i^+$.

Análogamente se demuestra para las clases negativas. $\square$

Teorema 1.3.2 *Un juego simple vectorial es monótono sii*

$$S_1 \subset S_2 \text{ y } S_2 \in U_i^- \Rightarrow \phi(S_1) \leq \phi(S_2)$$

$$S_1 \subset S_2 \text{ y } S_1 \in U_i^+ \Rightarrow \phi(S_1) \leq \phi(S_2)$$

Demostración.

$\Rightarrow$ Si es monótono,

$$S_1 \subset S_2 \text{ y } S_1 \in U_i^+ \Rightarrow S_2 \in U_i^+$$

y como $\phi(S_1) = x$, $\phi(S_2) = y$ y $x \leq x \vee y = y$, según el orden de $\{0, 1\}^k$, entonces

$$\phi(S_1) = x \leq x \vee y = \phi(S_1 \cup S_2) = \phi(S_2)$$

Por tanto, $\phi(S_1) \leq \phi(S_2)$.

Análogamente, como

$$S_1 \subset S_2 \text{ y } S_2 \in U_i^- \Rightarrow S_1 \in U_i^-$$

entonces

$$\phi(S_1) = \phi(S_1 \cap S_2) = x \wedge y \leq y = \phi(S_2)$$

Por tanto, $\phi(S_1) \leq \phi(S_2)$.

$\Leftarrow$ Para las clases positivas, sea $\phi(S_1) \leq \phi(S_2)$ y $S_1 \subset S_2$ y $S_1 \in U_i^+$. Hay que ver que $S_2 \in U_i^+$.

Se tiene que $\phi(S_1) = x \in \mathbf{P}_i$ y $\phi(S_2) = y$. Por ser los patrones cerrados respecto a $\vee$, $x \vee y \in \mathbf{P}_i$ y como $\phi(S_2) = \phi(S_1 \cup S_2) = x \vee y$ y $x \vee y = y$, entonces $S_2 \in U_i^+$.

Análogamente se demuestra para las clases negativas. $\square$

El teorema anterior nos dice que los patrones (o las clases) son conjuntos parcialmente ordenados según el orden natural a partir de las coaliciones que en ellos se apliquen.

Por tanto, en los juegos vectoriales simples monótonos podemos definir los patrones que definen cada clase a través de los elementos minimales (o maximales), según la operación para la que sea cerrada la clase.

Asociamos a cada $\mathbf{P}_i$ el subconjunto $\mathbf{P}_i^m$ de los elementos minimales (o $\mathbf{P}_i^M$ de los elementos maximales) de dicho conjunto. Partiendo de estos conjuntos $\mathbf{P}_i^m$ (o $\mathbf{P}_i^M$), que llamaremos patrones minimales (o maximales), dada cualquier coalición S podemos saber si pertenece a la clase U_i comprobando si $\phi(S)$ es mayor o igual vectorialmente que alguno de los elementos de $\mathbf{P}_i^m$ (o menor o igual que alguno de los elementos de $\mathbf{P}_i^M$).

En virtud de lo anterior supondremos que los juegos vectoriales monótonos verifican que $\phi(N) = (1, 1, ..., 1)$, ya que si $\phi(N)$ tuviera algún cero, la componente correspondiente sería cero en todas las coaliciones, por lo que el criterio nunca se verificaría y se podría eliminar.

Por convenio, o porque existe una clase negativa, supondremos que $\phi(\emptyset) = (0, 0, ..., 0)$, ya que si alguna componente fuera uno, todas las coaliciones lo tendrían y por razones análogas se podría eliminar.

Teorema 1.3.3 *En un juego vectorial simple monótono, el conjunto de todos los patrones minimales forman un conjunto de corte para el grafo de Hasse (Análogamente para los maximales).*

Demostración.

Dado un juego simple vectorial cualquiera $(N, v_{\phi,U})$, su clasificación U está formada por dos subfamilias, la $\{U_i \backslash i \in I\}$ de las clases positivas y la $\{U_i \backslash i \notin I\}$ de las clases negativas. Cada clase positiva tiene, al menos, un patrón minimal, de forma que todas sus coaliciones se aplican en él (o ellos) o en los posteriores a él (o ellos). Sea $\mathcal{S}$ conjunto de todos los patrones minimales de todas las clases positivas.

Análogamente, cada clase negativa tiene uno o varios patrones maximales y cada una de sus coaliciones tiene como patrón un maximal o uno anterior. Sea $\mathcal{T}$ conjunto de todos los patrones maximales de todas las clases negativas.

Por otro lado, una coalición cualquiera tiene como patrón un minimal o un posterior (y pertenece a una clase positiva) o un maximal o uno anterior (y pertenece a una clase negativa). En cualquier caso, los conjuntos $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ constituyen dos cortes para el grafo de Hasse, pues si existieran elementos fuera de ellos podrían ser suprimidos por la definición del juego y no serían patrones del mismo. $\square$

Especial importancia tiene el caso en que todas las clases son positivas, menos una que denominaremos residual, $\mathcal{R}$, ya que estamos interesados en familias de coaliciones que superan determinadas condiciones. Éste será el tipo de juegos simples vectoriales que estudiaremos a lo largo de esta memoria. No obstante, el estudio que haremos se podrá generalizar, sin dificultad, a juegos simples vectoriales con más de una clase residual.

Como en el caso escalar, a las clases positivas las llamaremos clasificatorias o ganadoras, U_1, U_2, ..., U_r. Y siempre se dirá: *"Sea el juego simple vectorial definido por la clasificación* $\{U_1, U_2, ..., U_r\}$*..."*, obviando la clase residual $\mathcal{R}$.

A las coaliciones que toman como valor los patrones minimales de las clases, las denominaremos coaliciones ganadoras minimales según la clase correspondiente y a las que toman por valores los patrones maximales de la clase residual las denominaremos coaliciones perdedoras maximales. Estas coaliciones minimales ganadoras y maximales perdedoras son tales que si las primeras pierden un jugador se convierten en perdedoras y si las segundas ganan uno en ganadoras en, al menos, una clase. Cuando el juego simple vectorial está definido así, se dice que está en la forma (N, U).

Ejemplo 1.2.1 (Continúa) *El juego de votación simultánea* $(N, v_{\phi,U})$ *es un juego simple vectorial monótono, por lo que sus clases positivas vendrán dadas por sus patrones minimales y la negativa por su patrón maximal.*

Clases	Patrones
U_1	(1,1,1,0,0),(1,1,0,0,1)
U_2	(0,0,0,1,1)
U_3	(0,1,0,1,0),(0,0,1,1,0)
$\mathcal{R}$	(1,1,0,0,0),(1,0,1,0,0),(1,0,0,1,0), (1,0,0,0,1),(0,1,0,0,1),(0,0,1,0,1)

Sea, por ejemplo, la coalición A formada por 51 *electores que votan a los candidatos* 4 *y* 5*. Su imagen es* $\phi(A) = (0, 0, 0, 1, 1)$*. Es una coalición minimal ganadora de la segunda clase, ya que si pierde un sólo votante deja de tener ese patrón.*

Sin embargo, sea ahora, la coalición B, formada por 51 *electores que votan los candidatos* 1 *y* 3*. B no es maximal perdedora ya que, aunque su imagen sea* $\phi(B) = (1, 0, 1, 0, 0)$*, al ganar un votante no deja de ser perdedora.*

Ejemplo 1.2.2 (Continúa) *El juego de la Cooperativa Industrial es un juego simple vectorial monótono y, por tanto, su clasificación puede venir dada por los elementos minimales del patrón.*

Para la primera clasificación $U = \{U_1, U_2\}$*, las clases positivas vendrán dadas por sus patrones minimales y la negativa por su patrón maximal:*

Clases	Patrones
U_1	(1,1,1,0),(1,0,1,1),(0,1,1,1)
U_2	(1,1,0,1),(1,0,1,1)
$\mathcal{R}$	(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)

A dichos patrones minimales (o maximales) le corresponden las coaliciones minimales (o maximales). Así, $\{1,2,3,6\}$ *es una cooperativa minimal de la segunda clase porque sus imagen es la cuaterna minimal* $(1,1,0,1)$ *y si pierde un sólo miembro deja de ser minimal ganadora. Análogamente,* $\{1,2,4,5,6\}$ *sería maximal de* $\mathcal{R}$ *porque si gana un sólo miembro pasa a ser ganadora.*

Igualmente, para la segunda clasificación $U' = \{U_1', U_2', U_3'\}$*, sus patrones minimales y maximal son:*

Clases	Patrones
U_1'	(1,1,0,0)
U_2'	(1,0,1,0)
U_3'	(1,0,0,1)
$\mathcal{R}'$	(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)

1.4. Forma canónica de un juego simple vectorial

Sea un juego simple vectorial, $(N, v_{\phi,U})$ o $(N, v_{\phi,\mathbf{P}})$, definido por una clasificación $\{U_1, ..., U_r\}$ o un conjunto de r patrones $\{\mathbf{P}_1, ..., \mathbf{P}_r\}$, siendo el patrón $\mathbf{P}_i$ el conjunto de k-uplas que definen la clase U_i. En el caso de ser el juego monótono, cada clase vendrá dada por sus patrones minimales o maximales. Es decir,

- si la clase U_i es positiva viene dada por sus patrones minimales $\mathbf{P}_i = \{\mathbf{P}_i^1, \mathbf{P}_i^2, ...\}$

$$\forall S \in U_i \text{ se cumple que } \phi(S) \geq \mathbf{P}_i^j \quad \text{para algún j}$$

- si la clase U_i es negativa viene dada por sus patrones maximales $\mathbf{P}_i = \{\mathbf{P}_i^1, \mathbf{P}_i^2, ...\}$

$$\forall S \in U_i \text{ se cumple que } \phi(S) \leq \mathbf{P}_i^j \quad \text{para algún j}$$

El juego simple vectorial $(N, v_{\phi,U})$ tiene un **juego canónico asociado** (N, ν) **r-vectorial**, cuyos r criterios son, respectivamente, pertenecer a la clase U_i, $i = 1, ..., r$. Es decir,

$$\nu(S) \in \{0,1\}^r \text{ con } \nu(S) = (\delta_i(S))_{i=1,...,r} \text{ siendo } \begin{cases} \delta_i(S) = 1 \text{ si } S \in U_i \\ \delta_i(S) = 0 \text{ si } S \notin U_i \end{cases}$$

Al representar canónicamente un juego no tenemos necesidad de conocer los patrones de las clases porque sabemos, dada una coalición, a qué clases pertenece.

Todo juego simple vectorial tiene asociado de esta forma un juego canónico que, a su vez, es un juego simple r-vectorial, cuyas clases $\{U_1, ..., U_r\}$ vienen definidas por los patrones unitarios $(e_i)_{i=1,...,r}$.

No obstante hay que hacer notar que pueden haber diferentes juegos simples vectoriales con la misma clasificación, por lo que su forma canónica será la misma.

En los ejemplos vistos anteriormente, las formas canónicas serían:

Ejemplo 1.2.1(Continúa) *Para el juego de Votación Simultánea la forma canónica sería* (N, ν)*, siendo* ν *la función característica que aplica cada coalición en una terna con un* 1 *en la componente* i *si la coalición pertenece a* U_i*. La clase* U_1 *está formada por las coaliciones que eligen los candidatos* A*,* B *y* C *o* A*,* B *y* E *y su imagen por* ν *tiene un* 1 *en la primera componente. La clase* U_2 *está formada por las coaliciones que eligen los candidatos* D *y* E *y su imagen por* ν *tiene un* 1 *en la segunda componente. La clase* U_3 *está formada por las coaliciones que eligen los candidatos* B *y* D *o* C *y* D*, y su imagen por* ν *tiene un* 1 *en la tercera componente.*

Ejemplo 1.2.2 (Continúa) *Para el el juego de la Cooperativa Industrial la forma canónica sería* (N, ν)*, siendo* ν *la función característica que aplica cada coalición en un elemento de* $\{0, 1\}^2$*. Las coaliciones de la clase* U_1 *(las posibles cooperativas que ofrecen, al menos, tres servicios, uno de los cuáles es chapa-pintura) tienen por* ν *una imagen cuya primera componente es 1 y las coaliciones de la clase* U_2 *(las cooperativas que ofrecen, al menos, tres servicios, dos de los cuáles deben ser mecánica y venta-almacén) tienen por* ν *una imagen cuya segunda componente es 1.*

Teorema 1.4.1 *La forma canónica de un juego simple vectorial monótono es un juego simple vectorial monótono.*

Demostración.

Sea un juego simple vectorial monótono $(N, v_{\phi,U})$, su forma canónica es otro juego simple vectorial (N, ν) con la misma clasificación y patrón la base canónica de $\{0, 1\}^r$, de manera que todas las coaliciones de la clase U_i tienen por ν imagen 1 en la componente i.

Veamoslo primero para las clases positivas. Al ser $(N, v_{\phi,U})$ un juego monótono, si $S_1 \subset S_2$ y S_1 está en la clase U_i^+, S_2 también está en dicha clase. Por consiguiente $\nu(S_2)$ tiene al igual que $\nu(S_1)$ un 1 en la componente i. Como S_2 contiene a S_1, está en todas las clases positivas que contienen a S_1, luego tiene los mismos unos que $\nu(S_1)$ y en la misma posición. Pero como S_2 puede estar en otra familia U_j^+ a la que no pertenece S_1, tendría otro 1 en la componente j, mientras que S_1 no. Luego, $\nu(S_1) \leq \nu(S_2)$.

Análogamente se demuestra que ν es monótona para las clases negativas.

Por tanto, en cualquier caso, la estructura monótona del juego simple vectorial de k criterios se traslada a cualquier juego simple vectorial, dado por una clasificación, por la monotonía de ϕ. □.

Nuestro objetivo consiste en buscar las transformaciones $T : \{0,1\}^k \to \{0,1\}^r$ tales que:

$$\nu(S) = T(\phi(S))$$

Una primera solución se obtiene a través de la forma extendida del juego que, veremos en un principio en un caso particular y luego generalizaremos.

Definición 1.4.1 *Para un juego simple vectorial monótono $(N, v_{\phi,U})$, cuyas r clases U_i vienen dadas cada una por una única k-upla definiendo el patrón de la clase, minimal o maximal, (el cardinal de $\mathbf{P}_i$ es 1), llamamos forma canónica extendida del juego a la función $\overset{*}{v}$ definida por*

$$\overset{*}{v}(S) = \begin{bmatrix} \breve{\mathbf{P}}_1 \\ \breve{\mathbf{P}}_2 \\ \vdots \\ \breve{\mathbf{P}}_r \end{bmatrix} \times \phi(S)^t$$

dónde $\breve{\mathbf{P}}_i$ es el vector normalizado de $\mathbf{P}_i$ mediante $\dfrac{\mathbf{P}_i}{\sum \mathbf{P}_i}$.

Teorema 1.4.2 *Sea el juego simple vectorial monótono $(N, v_{\phi,U})$, cuyas r clases U_i vienen dadas por una única k-upla, minimal o maximal, y $\overset{*}{v}$ la forma canónica extendida del juego. Entonces, la función característica ν de la forma canónica asociada al juego (N, ν) viene dada por la parte entera de $\overset{*}{v}(S)$, componente a componente:*

$$\nu(S) = \left(\left[\overset{*}{v}_i(S) \right]_{i=1,\ldots,r} \right)$$

Demostración.

Si la coalición S está en la clase U_i, entonces $\phi(S) \geq \mathbf{P}_i$ y la componente i de $\overset{*}{v}(S)$, $\breve{\mathbf{P}}_i \cdot \phi(S)$, vale 1. Si la coalición S no está en la clase U_i, entonces $\phi(S) \ngeq \mathbf{P}_i$ y la componente i de $\overset{*}{v}(S)$, $\breve{\mathbf{P}}_i \cdot \phi(S)$, es menor que 1.

Como $\nu(S)$ es la parte entera de $\overset{*}{v}(S)$, tendrá por componente i, 1 si $S \in U_i$, y, 0 si $S \notin U_i$. Por tanto, ν es la función característica de la forma canónica, ya que $\nu(S)$ indica a qué clases pertenece la coalición S. $\square$

Ejemplo 1.4.1 *Sea el juego simple $2k$-vectorial en el que hay una clasificación en dos clases $\{U_1, U_2\}$, siendo sus patrones $\mathbf{P}_1 = (1,0,1,0,...,1,0)$ y $\mathbf{P}_2 = (0,1,0,1,...,0,1)$, por lo que una coalición S pertenece a la clase U_1 si tiene todas las componentes impares de unos, y pertenece a U_2 si tiene todas las componentes pares de unos.*

La forma canónica extendida del juego viene dada por

$$\overset{*}{v}(S) = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 & \frac{1}{k} & 0 & ... & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 & \frac{1}{k} & ... & 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix} \times \phi(S)'$$

que estará valorada por (a,b) siendo a y b menores o iguales que uno, mientras que la forma canónica, $\nu(S) = ([a],[b])$, estará valorada en $\{0,1\}^2$ al tomar parte entera en dichas componentes.

El teorema anterior se puede generalizar con una pequeña modificación al caso en que las clases vienen dadas por un patrón de cardinal mayor que 1.

Definición 1.4.2 *Para un juego simple vectorial monótono $(N, v_{\phi,U})$, cuyas r clases U_i vienen dadas cada una por un patrón de cardinal $|\mathbf{P}_i| = j_i$, minimal o maximal, llamamos formas canónicas extendidas del juego a las funciones $\overset{*}{v}_k$ definidas por*

$$\overset{*}{v}_k(S) = \begin{bmatrix} \breve{\mathbf{P}}_{j1} \\ \breve{\mathbf{P}}_{j2} \\ \vdots \\ \breve{\mathbf{P}}_{jr} \end{bmatrix} \times \phi(S)^t$$

dónde $\breve{\mathbf{P}}_{ji}$ es el vector normalizado de $\mathbf{P}_{ji}$, $\mathbf{P}_{ji} \in \mathbf{P}_i$, mediante $\dfrac{\mathbf{P}_{ji}}{\sum_i \mathbf{P}_{ji}}$.

Teorema 1.4.3 *Sea el juego simple vectorial monótono $(N, v_{\phi,U})$, cuyas r clases U_i vienen dadas por un patrón de cardinal $|\mathbf{P}_i| = j_i$, minimal o maximal, $\overset{*}{v}_k$ ($k \in j_i$) las formas canónicas extendidas y v_k las formas canónicas asociadas a $\overset{*}{v}_k$. Entonces, la función característica ν de la forma canónica asociada al juego (N, ν) viene dada por el máximo de las formas canónicas v_k.*

Demostración.

El número de formas canónicas extendidas es

$$|\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{P}_2| \cdot ... \cdot |\mathbf{P}_r|$$

Cada una de las componentes i de las formas canónicas extendidas, $\overset{*}{v}_k\ (S)$, es 1 o un número menor que 1, por tanto la componente i de las correspondientes $v_k(S)$ valen 1 ó 0. Es decir, la componente i de $\nu(S)$ es 1 si alguna de las componentes i de $v_k(S)$ es 1 y 0 en caso contrario. La razón de tomar el máximo es porque si $S \in U_i$, S tiene que superar alguna k-upla de $\mathbf{P}_i$ y si $S \notin U_i$ no supera ninguna de las k-uplas de $\mathbf{P}_i$. Por tanto, si la componente i de $\nu(S)$ vale 1 es porque $S \in U_i$ y si vale 0 porque $S \notin U_i$, luego ν es la función característica de la forma canónica del juego. □

El siguiente ejemplo ilustra el teorema.

Ejemplo 1.2.2 (Continúa) *Sea el juego de votación simultánea. En él se definió una clasificación formada por cuatro clases, tres de ellas positivas y una negativa. Las positivas eran* U_1 *(formada por las coaliciones que verifican los tres primeros criterios o los dos primeros y el último) de patrón minimal* $\mathbf{P}_1 = \{(1,1,1,0,0),(1,1,0,0,1)\}$*,* U_2 *(formada por las coaliciones que verifican el cuarto y el quinto criterios) de patrón minimal* $\mathbf{P}_2 = \{(0,0,0,1,1)\}$ *y* U_3 *(formada por las coaliciones que verifican los criterios 2 y 4 y 3 y 4) de patrón minimal* $\mathbf{P}_3 = \{(0,1,0,1,0),(0,0,1,1,0)\}$.

Aquí se definen 4 *formas canónicas extendidas ya que hay* 2 *posibilidades para* $\breve{\mathbf{P}}_1$*, una para* $\breve{\mathbf{P}}_2$ *y dos para* $\breve{\mathbf{P}}_3$*:*

$$\overset{*}{v}_1\ (S) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \times \phi(S)' \quad \overset{*}{v}_2\ (S) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \times \phi(S)'$$

$$\overset{*}{v}_3\ (S) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \times \phi(S)' \quad \overset{*}{v}_4\ (S) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \times \phi(S)'$$

y cada $v_i(S)$ *se define como la parte entera de* $\overset{*}{v}_i\ (S)$ *y* $\nu(S)$ *como el máximo de los* $v_i(S)$*.*

Sea, por ejemplo, la coalición A formada por 55 electores que eligen a los candidatos C, D y E. Su imagen es $v(A) = (0,0,1,1,1)$, entonces

$$\overset{*}{v}_1(S) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overset{*}{v}_2(S) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{*}{v}_3(S) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overset{*}{v}_4(S) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$\overset{*}{v}_1(S) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \overset{*}{v}_2(S) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \overset{*}{v}_3(S) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \overset{*}{v}_4(S) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto,

$v_1(S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad v_2(S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad v_3(S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad v_4(S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Y el máximo de estos cuatro es $\nu(S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Esto puede ser extendido a juegos monótonos generales:

$$T(\text{ vectores } (x_1, ..., x_k) \text{ verificando relaciones lineales }) \in \{0,1\}^r$$

Lógicamente, al truncar $\overset{*}{v}(S)$ para obtener la forma canónica del juego, se pierde información sobre el juego original, por lo que muchos juegos simples vectoriales sobre una misma familia $\{U_i\}_{i=1,\ldots,r}$, pueden tener el mismo juego canónico asociado.

Pero, desde el punto de vista de las aplicaciones de los juegos simples vectoriales, suele ocurrir que la única información relevante es la referida a la verificación o no de un criterio, y no de la proximidad a verificarlo que se posea.

1.5. El retículo de los juegos simples vectoriales monótonos

La familia de juegos simples vectoriales $S(N, v_{\phi,U})$ o $S^v(N,\nu)$ es el conjunto de juegos simples vectoriales monótonos cuyas funciones características responden a los mismos k

criterios y cuyas clasificaciones se hacen con los mismos patrones o condiciones. Es un retículo distributivo y completo, bien a partir de una relación de orden o desde un punto de vista algebraico:

1. **Por la relación de orden**
   Es un retículo completo porque es a la vez inf- y supsemirretículo completos. Es decir, es un conjunto ordenado en el cual todo par de elementos admite un mayorante mínimo (supremo) y un minorante máximo (ínfimo). Y es completo porque todo subconjunto admite supremo e ínfimo.

2. **Desde un punto de vista algebraico**
   Partiendo del orden parcial anterior y desde un punto de vista algebraico, se definirían las operaciones:

$$(u \vee v)(S) = \max\ \{u(S), v(S)\} = (\max\ (i_1, j_1), \max\ (i_2, j_2), ..., \max\ (i_k, j_k)) \quad (1.1)$$

$$(u \wedge v)(S) = \min\ \{u(S), v(S)\} = (\min\ (i_1, j_1), \min\ (i_2, j_2), ..., \min\ (i_k, j_k)) \quad (1.2)$$

$$\text{siendo } u(S) = (i_1, i_2, ..., i_k) \text{ y } v(S) = (j_1, j_2, ..., j_k),$$

   operaciones que son asociativas:

$$u \vee (v \vee w) = (u \vee v) \vee w \qquad u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w$$

   conmutativas:

$$u \vee v = v \vee u \qquad u \wedge v = v \wedge u$$

   idempotentes:

$$u \vee u = u \qquad u \wedge u = u$$

   y están ligadas por la ley de absorción:

$$u \vee (v \wedge u) = u \qquad u \wedge (v \vee u) = u$$

   También es modular:

$$u \leq v \Rightarrow u \vee (v \wedge w) = (u \vee v) \wedge w \quad (1.3)$$

   distributivo:

$$u \wedge (v \vee w) = (u \wedge v) \vee (u \wedge w) \quad \forall u, v, w \in S(N, v_{\phi,U}) \quad (1.4)$$

$$u \vee (v \wedge w) = (u \vee v) \wedge (u \vee w) \quad \forall u, v, w \in S(N, v_{\phi,U}) \quad (1.5)$$

(Se puede comprobar que distributivo $\Rightarrow$ modular)
y complementado porque existen dos elementos $v_\emptyset$ y v_N, tales que todo juego simple vectorial v admite un juego simple vectorial complementario $\overline{v}$ que verifica:

$$v \vee \overline{v} = v_N \qquad v \wedge \overline{v} = v_\emptyset \tag{1.6}$$

Por tanto, $S(N, v_{\phi,U})$ es un álgebra de Boole.

Análogamente, partiendo de las operaciones se define un orden parcial:

$$u \leq v \Leftrightarrow u \wedge v = u \tag{1.7}$$

$$u \leq v \Leftrightarrow u \vee v = v \tag{1.8}$$

que lo convierte en retículo distributivo y completo. Es decir, hemos llegado a que ambas estructuras, álgebra de Boole y retículo distributivo y completo son equivalentes.

Dentro de $S(N, v_{\phi,U})$ existen dos colecciones de juegos simples vectoriales especiales con valores en $\{0,1\}^k$, los juegos de unanimidad y los juegos de identidad, que se definen a continuación.

Los juegos simples vectoriales de unanimidad u_S^l son aquellos cuya componente l es:

$$u_S^l(T) = \begin{cases} (0, ..., 1, ..., 0) & si \quad S \subseteq T \\ (0, ..., 0, ..., 0) & si \quad S \nsubseteq T \end{cases}$$

En total, hay $(2^n - 1) \times k$ juegos de unanimidad y forman un sistema generador para el retículo $S(N, v_{\phi,U})$.

Análogamente, los juegos de identidad i_S^l son aquellos cuya componente l:

$$i_S^l(T) = \begin{cases} (0, ..., 1, ..., 0) & si \quad S = T \\ (0, ..., 0, ..., 0) & si \quad S \neq T \end{cases}$$

Vamos a demostrar que ambas familias (los juegos de unanimidad y los juegos de identidad) constituyen sendas bases del retículo, por lo cual su dimensión será $(2^n - 1) \cdot k$.

Teorema 1.5.1 *Los juegos de unanimidad forman una base de* $S(N, v_{\phi,U})$.

Demostración.

Efectivamente, constituyen un sistema generador:

$$\forall v \in S(N, v_{\phi,U}) \text{ y } \forall l \in \{1, 2, ..., k\} \text{ se cumple que } v = \bigvee_{l \in K; S \subseteq N | S \neq \emptyset} \alpha_S^l u_S^l$$

Los coeficientes α_S^l se determinan de forma unívoca resolviendo un sistema para cada l. Para cada coalición no vacía T tenemos la siguiente ecuación vectorial

$$v(T) = \bigvee_{l\in K; S\subseteq T\subseteq N|S\neq\emptyset} \alpha_S^l u_S^l(T) = (\bigvee_{S\subseteq T\subseteq N|S\neq\emptyset} \alpha_S^1, \bigvee_{S\subseteq T\subseteq N|S\neq\emptyset} \alpha_S^2, ..., \bigvee_{S\subseteq T\subseteq N|S\neq\emptyset} \alpha_S^k)$$

Al haber k superíndices, habrá k sistemas y un total de $(2^n - 1)\cdot k$ ecuaciones.

$$v_1(T) = \bigvee_{S\subseteq T\subseteq N|S\neq\emptyset} \alpha_S^1, \quad v_2(T) = \bigvee_{S\subseteq T\subseteq N|S\neq\emptyset} \alpha_S^2, \quad ..., \qquad v_k(T) = \bigvee_{S\subseteq T\subseteq N|S\neq\emptyset} \alpha_S^k$$

siendo los α_S^l los dividendos de Harsany del juego v

$$\alpha_S^l = \bigvee_{T\subseteq S\subseteq N} (-1)^{s-t} v_l(T)$$

Los juegos de unanimidad son linealmente independientes

$$\bigvee_{S\subseteq N|S\neq\emptyset} \beta_S^l u_S^l = v_\emptyset \Rightarrow \beta_S^l = 0$$

Para cada coalición T,

$$\bigvee_{S\subseteq T\subseteq N|S\neq\emptyset} \beta_S^l u_S^l(T) = v_\emptyset(T) \Rightarrow (\bigvee_{S\subseteq T\subseteq N|S\neq\emptyset} \beta_S^1, \bigvee_{S\subseteq T\subseteq N|S\neq\emptyset} \beta_S^2, ..., \bigvee_{S\subseteq T\subseteq N|S\neq\emptyset} \beta_S^k) = (0, 0, ..., 0)$$

y resulta para cada T un sistema homogéneo de k ecuaciones, cuya única solución es la trivial. En total, $2^N - 1$ sistemas.$\square$

De esta forma, cualquier juego de unanimidad se podrá expresar en la familia (i_S^l) y cualquier juego de identidad en la familia (u_S^l).

Los juegos de unanimidad en función de los juegos de identidad

$$u_S^l = \bigvee_{S\subseteq V} i_V^l$$

Efectivamente, $\forall T \in \mathcal{P}(N)$,

$$u_S^l(T) = \bigvee_{S\subseteq V} i_V^l(T) = \begin{cases} i_T^l(T) = (0, ..., 1, ..., 0) & si \quad T = V \supseteq S \\ i_S(T) = (0, ..., 0, ..., 0) & si \quad T \subset S \end{cases}$$

Los juegos de identidad en función de los juegos de unanimidad

$$i_S^l = \bigwedge_{S\subseteq V} u_V^l$$

Efectivamente, $\forall T \in \mathcal{P}(N)$,

$$i_S^l(T) = \bigwedge_{S \subseteq V} u_V^l(T) = \begin{cases} u_S^l(T) = (0, ..., 1, ..., 0) & si \quad V = T = S \\ u_S^l(T) = (0, ..., 0, ..., 0) & si \quad T \neq S \end{cases}$$

Cualquier juego v en función de los juegos de unanimidad

$$v = \bigvee_{l=1}^{k} \left(\bigwedge_{S \subseteq T} v^l(S) u_T^l \right)$$

Cualquier juego v en función de los juegos de identidad

$$v = \bigvee_{l=1}^{k} \left(\bigvee_{S \subseteq N} v^l(S) i_S^l \right)$$

Capítulo 2

JUEGOS SIMPLES ASOCIADOS A UN JUEGO SIMPLE VECTORIAL.

2.1. Introducción

Dado un juego simple vectorial, existen juegos derivados del mismo cuando establecemos criterios alternativos relacionados con los criterios que definen el juego.

Estudiamos en este capítulo los juegos que se originan cuando se hacen operaciones con las clases que definen el juego, así como las situaciones más frecuentes en las que se define un juego simple escalar a partir del correspondiente vectorial, que suelen denominarse en la literatura juegos marginales.

2.2. Juegos simples asociados a un juego simple vectorial

Partiendo de un juego simple vectorial de k criterios y de las distintas clasificaciones, se pueden establecer diferentes juegos simples vectoriales.

En lo que sigue veremos cómo por operaciones de agregación conseguimos nuevos juegos simples partiendo de un juego simple vectorial.

2.2.1. Composición de clases.

Dado un juego simple $(N, v_{\phi,U})$, podemos definir por medio de funciones de utilidad nuevos juegos simples vectoriales al agregar clases a la clasificación original $U = \{U_1, U_2, ..., U_r\}$, teniendo en cuenta que la nueva familia debe ser también una clasificación.

La función de utilidad que define la agregación de clases transforma una clasificación en otra

$$u : \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(U)$$

Las operaciones definidas por la función de utilidad se efectúan sobre clases, bien positivas bien negativas, por la monotonía de estos juegos. Por lo cuál las clases positivas vienen descritas por sus elementos minimales y las negativas por sus maximales.

Para todo juego simple vectorial, $(N, v_{\phi,U})$, definimos su forma canónica (N, ν), en dónde ν es la función

$$\nu : \mathcal{P}(N) \rightarrow \{0, 1\}^r$$

En él, $\forall S \in \mathcal{P}(N)$, los unos de $\nu(S)$ indican las clases a las que pertenece S y los ceros a las que no.

El juego (N, ν) determina r juegos simples escalares componentes, (N, ν_i), definidos por

$$\nu_i(S) = 1 \Rightarrow S \in U_i \quad \text{y} \quad \nu_i(S) = 0 \Rightarrow S \notin U_i$$

Veamos cómo afectan las operaciones de composición a la clasificación y a la función ν.

1. **Por unión.**

   La función de utilidad viene definida por la unión clases.

   Dadas dos clases U_i y U_j, llamamos clase unión $U_i \cup U_j$ a la clase resultante que tiene como patrones los patrones de ambas clases.

   Teorema 2.2.1 *Dado un juego simple vectorial monótono $(N, v_{\phi,U})$, el juego vectorial resultante de agregar dos o más clases a través de la unión es un juego simple vectorial monótono $(N, v_{\phi,U'})$, que tiene por patrón de la nueva clase la unión de los patrones de las clases agregadas.*

   Demostración.

   Dado el juego $(N, v_{\phi,U})$ de clasificación $U = \{U_1, ..., U_r\}$, al agregar dos o más clases, $\{U_i / i \in I \subset \{1, 2, ..., r\}\}$, a través de la unión, tendremos una nueva clasificación

U' formada por $r+1$ clases, que coincide con la U en las r primeras clases U_i, obteniéndose la clase restante U'_* de U' como $\cup_{i \in I} U_i$. La nueva clasificación sigue siendo un recubrimiento de $\mathcal{P}(N)$. Los patrones de la clase unión son todos los patrones de cada una de las clases unidas. Y la monotonía del juego resultante no se ve afectada porque ϕ no varía y por la definición efectuada de la nueva clase. Por tanto, $(N, v_{\phi,U'})$ es otro juego simple vectorial monótono. $\square$

Teorema 2.2.2 *Dado un juego simple r-vectorial monótono (N, ν), el juego vectorial resultante de agregar $|I|$ clases*

$$I \subset \{1, 2, ..., r\}, |I| \geq 2$$

a través de la unión es otro juego simple $(r+1)$-vectorial monótono (N, ν'), cuyos juegos componentes verifican

$$\forall S \in \mathcal{P}(N) \quad \begin{cases} \nu'_i(S) = \nu_i(S) & si\ i \in \{1, 2, ..., r\} \\ \nu'_*(S) = \bigvee_{i \in I} \nu_i(S) & para\ la\ nueva\ clase \end{cases}$$

Demostración.

Al agregar dos o más clases $\{U_i / i \in I \subset \{1, 2, ..., r\}\}$, de la clasificación U a través de la unión, tendremos una nueva clasificación U' que coincide con la U en las r primeras clases U_i, obteniéndose la nueva clase U'_* de U' como $\cup_{i \in I} U_i$. Los juegos componentes de las r primera clases de la nueva clasificación son los mismos que los de la antigua, por lo que

$$\nu'_i(S) = \nu_i(S), \quad \forall i \in \{1, 2, ..., r\} \text{ y } \forall S \in \mathcal{P}(N)$$

y el que corresponde a U'_*, ν'_*, toma el valor 1 si alguno de los juegos componentes ν_i toma el valor 1 y 0 en caso contrario. Por tanto, está definido por

$$\nu'_* : \mathcal{P}(N) \to \{0, 1\} \quad \nu'_*(S) = \bigvee_{i \in I} \nu_i(S), \quad \forall S \in \mathcal{P}(N)$$

Es decir, el juego componente ν'_* es el supremo de los juegos componentes $\{\nu_i; i \in I\}$ Por tanto, (N, ν') es otro juego simple $(r+1)$-vectorial monótono puesto que el supremo conserva la monotonía. $\square$

Ejemplo 2.2.1 *Sea el juego simple vectorial $(N, v_{\phi,U})$ con $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, de-*

finido por la clasificación $U = \{U_1, U_2, U_3\}$

Clases	*Coaliciones*
U_1	*Minimales* $\{1,2,6\},\{1,3,4\}$
U_2	*Minimales* $\{1,5\},\{1,2,4\}$
U_3	*Minimales* $\{1,3,6\},\{1,4,6\}$

En forma canónica, el juego vendría dado por (N, ν)*, siendo*

$$\nu : \mathcal{P}(N) \to \{0,1\}^3$$

De esta forma, dada una coalición, se sabe a qué clases pertenece conociendo su imagen.

La coalición $S = \{1,3,4,6\}$ *estaría en las clases* U_1 *y* U_3 *y*

$$\nu(S) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Otras coaliciones tendrían por imágenes:

$$\nu(1356) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nu(136) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nu(12345) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad ...$$

Al agregar por unión las dos primeras clases tendremos otro juego $(N, v_{\phi,U'})$*, siendo* U' *la clasificación*

Clases	*Coaliciones*
$U'_1 = U_1$	*Minimales* $\{1,2,6\},\{1,3,4\}$
$U'_2 = U_2$	*Minimales* $\{1,5\},\{1,2,4\}$
$U'_3 = U_3$	*Minimales* $\{1,3,6\},\{1,4,6\}$
$U'_* = U_1 \cup U_2$	*Minimales* $\{1,5\},\{1,2,4\},\{1,2,6\},\{1,3,4\}$

En forma canónica, el juego vendría dado por (N, ν')*, siendo*

$$\nu' : \mathcal{P}(N) \to \{0,1\}^4$$

Para cualquier coalición S*, la cuarta componente de* $\nu'(S)$ *se obtiene tomando el supremo de las dos primeras componentes de* $\nu(S)$ *y las tres primeras componentes son las de* $\nu(S)$*. Así,*

$$\nu'(1346) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nu'(1356) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nu'(136) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad ...$$

2. **Por intersección.**

   La función de utilidad viene definida por la intersección de clases.

   Dadas dos clases U_i y U_j, llamamos clase intersección $U_i \cap U_j$ a la clase resultante cuyos patrones son comunes a ambas clases a la vez.

   Partiendo de un juego simple vectorial definido por una clasificación U, al agregar clases por intersección definimos un nuevo juego cuya clasificación U'' es la anterior más la clase (o clases) intersección.

   Teorema 2.2.3 *Dado un juego simple vectorial monótono* $(N, v_{\phi,U})$*, el juego vectorial resultante de agregar dos o más clases positivas a través de la intersección, es un juego simple vectorial monótono* $(N, v_{\phi,U''})$ *que tiene por patrón de la nueva clase la intersección de los patrones de las clases agregadas.*

   Demostración.

   Al agregar por intersección $|I|$ $(I \subset \{1,2,...,r\})$ clases positivas (negativas) de la clasificación U, formamos una nueva clasificación U'' añadiendo a la clasificación original la clase intersección

$$U'' = \{U_1'', ..., U_r'', U_*''\} \qquad \begin{cases} U_i'' = U_i & \forall i \in \{1,2,...,r\} \\ U_*'' = \bigcap_{i \in I} U_i \end{cases}$$

   La nueva clasificación sigue siendo un recubrimiento de $\mathcal{P}(N)$. Los patrones de la clase intersección U_*'' son los comunes a las clases intersecadas U_i y los de U_i'' los de U_i. Por lo tanto todos los patrones del juego original siguen estando considerados en el nuevo juego. La monotonía del juego resultante no se ve afectada porque ϕ no varía y porque la nueva clase es otra clase positiva. Por tanto, $(N, v_{\phi,U''})$ es otro juego simple vectorial monótono. □

Teorema 2.2.4 *Dado un juego simple r-vectorial monótono (N, ν), el juego vectorial resultante de agregar $|I|$ clases*

$$I \subset \{1, 2, ..., r\}, |I| \geq 2$$

a través de la intersección, es otro juego simple vectorial (N, ν''), cuyos juegos componentes coinciden con los de (N, ν) en las r clases comunes y en la nueva clase con el ínfimo de todos los que se agregan:

$$\forall S \in \mathcal{P}(N) \quad \begin{cases} \nu''_i(S) = \nu_i(S) & \forall i \in \{1, 2, ..., r\} \\ \nu''_*(S) = \bigwedge_{i \in I} \nu_i(S) & \end{cases}$$

Demostración.

Al agregar dos o más clases $\{U_i / i \in I\}$, de la clasificación $U = \{U_1, U_2, ..., U_r\}$ a través de la intersección, tendremos una nueva clasificación $U'' = \{U''_1, U''_2, ..., U''_r, U''_*\}$ que coincide con la U en las r primeras clases

$$U''_i = U_i \quad \forall i \in \{1, 2, ..., r\}$$

mientras que la nueva clase es la intersección de las clases agregadas

$$U''_* = \bigcap_{i \in I} U_i$$

Por tanto,

- los juegos componentes asociados al primer grupo de clases son los mismos,

$$\nu''_i(S) = \nu_i(S), \quad \forall i \in \{1, 2, ..., r\} \text{ y } \forall S \in \mathcal{P}(N)$$

- el juego componente asociado a la clase intersección ν''_* está bien definido ya que toma el valor 1 si todos los juegos componentes de las clases agregadas toman el valor 1 y 0 en cualquier otro caso, es decir,

$$\nu''_*(S) = \bigwedge_{i \in I} \nu_i(S), \quad \forall S \in \mathcal{P}(N)$$

Luego el juego componente correspondiente a la clase intersección es el ínfimo de los juegos componentes $\{\nu_i; i \in I\}$ Por tanto, (N, ν'') es otro juego simple vectorial monótono puesto que tanto el ínfimo como el supremo conservan la monotonía. □

Ejemplo 2.2.1 (Continúa) *Al agregar por intersección las dos primeras clases tendremos otro juego $(N, v_{\phi,U''})$, siendo U'' la clasificación*

Clases	*Coaliciones*
$U''_1 = U_1$	*Las minimales* $\{1,2,6\}, \{1,3,4\}$
$U''_2 = U_2$	*Las minimales* $\{1,5\}, \{1,2,4\}$
$U''_3 = U_3$	*Las minimales* $\{1,3,6\}, \{1,4,6\}$
$U''_* = U_1 \cap U_2$	*Las minimales* $\{1,2,3,4\}, \{1,2,4,6\}, \{1,2,5,6\}, \{1,3,4,5\}$

En forma canónica, el juego vendría dado por (N, ν''), siendo

$$\nu'' : \mathcal{P}(N) \to \{0,1\}^4$$

Para cualquier coalición S, $\nu''(S)$ se obtiene tomando

- *por primera, segunda y tercera componente de $\nu''(S)$ la la correspondiente de $\nu(S)$ y*
- *por cuarta componente de $\nu''(S)$ el ínfimo de las dos primeras componentes de $\nu(S)$.*

Así,

$$\nu''(1346) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nu''(1356) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nu''(1256) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

2.3. Juegos marginales

Unos de los juegos simples vectoriales resultantes del juego original $(N, v_{\phi,U})$ más interesantes son los conocidos como juegos marginales.

Se obtienen cuando la función de utilidad que definimos transforma la clasificación original $\{U_1, ..., U_r, \mathcal{R}\}$ en otra que deja invariables una serie de clases $\{U_{i_1}, ..., U_{i_p}\}$, mientras que la clase unión de las restantes menos la unión de las que permanecen se agrega por unión a la clase residual. Con esto conseguimos un juego simple vectorial de clasificación

$$\{U_{i_1}, ..., U_{i_p}, \mathcal{R}'\} \ , \ \mathcal{R}' = \left[\left(\bigcup_{i=1}^{r} U_i \right) \setminus \left(\bigcup_{i=i_1}^{i_p} U_i \right) \right] \cup \mathcal{R}$$

Si partimos del juego simple r-vectorial en forma canónica, (N, ν), llegamos a otro juego simple p-vectorial $(N, \nu^{'})$ cuyos p juegos simples componentes forman parte de los r originales

$$\nu^{'}(S) = (\nu_1^{'}(S), ..., \nu_p^{'}(S)) = (\nu_{i_1}(S), ..., \nu_{i_p}(S))$$

Especial interés tienen estos juegos marginales cuando se realizan respecto de una sola clase U_i. Los llamaremos juegos marginales asociados a una clase, respecto a una clase o simplemente juegos marginales de la clase.

Teorema 2.3.1 *Dado un juego vectorial monótono $(N, v_{\phi,U})$, el juego resultante sobre la clasificación $\{U_i, \mathcal{R}'\}$, según el procedimiento anterior, es un juego simple escalar monótono.*

Demostración.

Efectivamente, el juego original tiene la clasificación $U = \{U_1, ..., U_i, ..., U_r, \mathcal{R}\}$. De él pasamos a otro definido por la clasificación

$$U' = \{U_i, \mathcal{R}'\} \quad \text{siendo} \quad \mathcal{R}' = \left[\left(\bigcup_{j \in \{1,2,...,r\}, j \neq i} U_j \right) \setminus U_i \right] \bigcup \mathcal{R}$$

que es un juego simple escalar cuya familia SI está formada por las coaliciones de la clase U_i, mientras que la familia NO son las nuevas coaliciones residuales. Es decir, a las residuales iniciales se unen las que resultan de la unión de las restantes clases menos la clase U_i. $\square$

Ejemplo 1.2.2 (Continúa) *En el ejemplo de la Cooperativa Industrial, se definió un juego simple vectorial cuya clasificación era:*

Clases	Patrones
U_1	(1,1,1,0),(1,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1)
U_2	(1,1,0,1),(1,0,1,1),(1,1,1,1)
$\mathcal{R}$	(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)

En forma canónica, es un juego simple 2-vectorial (N, ν) *definido por*

$$\nu : \mathcal{P}(N) \rightarrow \{0,1\}^2$$

Uno de sus juegos marginales es el juego simple escalar determinado por las dos familias siguientes: la primera formada por las cooperativas que, al menos, ofrecen 3 servicios, uno de los cuales debe ser chapa y pintura U_1 *(familia SI) y la segunda por todas las demás* $(U_2 \backslash U_1) \cup \mathcal{R}$ *(familia NO). La primera se puede expresar por sus patrones minimales y la segunda por sus maximales, según muestra el cuadro:*

Clases	Patrones	
U_1	(1,1,1,0),(1,0,1,1),(0,1,1,1)	Minimales
$(U_2 \backslash U_1) \cup \mathcal{R}$	(1,1,0,1),(1,0,1,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1)	Maximales

Y, en forma canónica, es un juego simple 1-vectorial (o escalar) $(N, \nu^{'})$ *definido por*

$$\nu^{'} : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbb{R} \quad \textit{tal que } \forall S \in \mathcal{P}(N) \begin{cases} \nu^{'}(S) = 1 & si \quad \nu(S) = (1,1) \text{ ó } (1,0) \\ \nu^{'}(S) = 0 & si \quad \nu(S) = (0,1) \text{ ó } (0,0) \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.1 (Continúa) *En la Votación Simultánea, un juego marginal es* (N, U), $U = \{\mathcal{W}, \mathcal{L}\}$ *siendo* $\mathcal{W}$ *la familia de coaliciones que consiguen que sean elegidos los candidatos D y E* ($U \equiv U_2$) *y* $\mathcal{L}$ *el resto.*

Ejemplo 2.3.1 *El Procedimiento de Enmiendas de la Constitución Canadiense es un sistema de votación en el que las mociones presentadas se aprueban si son apoyadas por, al menos, el 50 % de la población y 7 o más provincias. La composición de éstas en porcentajes del censo de 1961 es: Prince Edward Island (1 %), Newfoundland (3 %), New Brunswick (3 %), Nova Scotia (4 %), Manitoba (5 %), Saskatchewan (5 %), Alberta (7 %), British Columbia (9 %), Quebec (29 %) y Ontario (34 %).*

Si establecemos los criterios "tener 7 o más provincias" y "representar, al menos, el 50 % de la población" podemos definir un juego simple vectorial de clasificación $U = \{U_1, U_2, \mathcal{R}\}$, *determinada por los patrones* $\mathbf{P}_1 = \{(1,0),(1,1)\}$, $\mathbf{P}_2 = \{(0,1),(1,1)\}$ *y* $\mathbf{P}_{\mathcal{R}} = \{(0,0)\}$.

Sobre este juego simple vectorial se pueden definir los siguientes juegos marginales:

- *El marginal* $\{U_1, \mathcal{R}'\}$, *que es un juego simple escalar cuyo criterio es que las coaliciones sean de 7 o más provincias.*
- *El marginal* $(U_2, \mathcal{R}'')$, *que es otro juego simple escalar cuyo criterio es que las coaliciones reúnan, al menos, al 50 % de la población de Canadá.*

Pero también el Procedimiento de Enmiendas de la Constitución Canadiense es un juego simple escalar $(N, v_{\phi,U'})$ *que responde a la clasificación* $U' = \{U'_1, \mathcal{R}'''\}$*, en dónde* $U'_1 = U_1 \cap U_2$ *("coaliciones que representan a 7 provincias o más y, al menos, al 50 % de la población") y* $\mathcal{R}''' = [(U_1 \cup U_2) \backslash (U_1 \cap U_2)] \cup \mathcal{R}$ *("todas las demás coaliciones").*

2.4. Juegos compuestos marginales

En esta sección vamos a ver cómo los juegos simples compuestos clásicos pueden interpretarse como los juegos marginales de un juego simple vectorial cuyos juegos componentes son, precisamente, los juegos simples que se componen.

Para esta interpretación, recordaremos en primer lugar qué se entiende por juegos compuestos. En segundo lugar, formaremos el juego simple vectorial cuyos juegos componentes son los juegos simples de partida y por marginalidad respecto a operaciones de agregación de sus clases obtendremos los juegos compuestos. Como caso particular, estudiaremos los sistemas multicamerales.

La composición de juegos simples fue introducida por von Neumann-Morgenstern ([38]), desarrollada por Shapley ([21]), Black ([2]) y por muchos otros autores, entre ellos Owen ([16]) y Taylor y Zwicker ([41]). Definimos un juego compuesto como un juego simple construido a partir de dos o más juegos simples componentes. Shapley estudió especialmente los juegos simples compuestos suma y producto. Dados dos juegos simples escalares $(N_i, \mathcal{W}_i)$, $i \in \{1, 2\}$, definió el juego simple escalar suma $(N, \mathcal{W}) = (N_1, \mathcal{W}_1) \bigoplus (N_2, \mathcal{W}_2)$ como aquel cuyo conjunto de jugadores es $N = N_1 \cup U_2$ y

$$\forall S \in \mathcal{W}, S \cap N_1 \in \mathcal{W}_1 \text{ ó } S \cap N_2 \in \mathcal{W}_2$$

y el juego simple escalar producto $(N, \mathcal{W}') = (N_1, \mathcal{W}_1) \bigotimes (N_2, \mathcal{W}_2)$ como aquel cuyo conjunto de jugadores es N y

$$\forall S \in \mathcal{W}', S \cap N_1 \in \mathcal{W}_1 \text{ y } S \cap N_2 \in \mathcal{W}_2$$

definiciones que pueden generalizarse a más juegos simples componentes.

Desde nuestro punto de vista, a partir de estos r juegos simples escalares componentes $(N_i, \mathcal{W}_i)$, podemos considerar un juego simple vectorial (N, U), tal que

$$N = \bigcup_{i=1}^{r} N_i \quad \text{y} \quad U = \{U_1, U_2, ..., U_r\}, \text{ siendo } U_i = \mathcal{W}_i$$

Las coaliciones de U_i son las de $\mathcal{W}_i$ pero pueden formar parte de ellas otros jugadores no pertenecientes a N_i que serían nulos para la clase U_i.

Si en este juego vectorial

1. agregamos todas las clases por unión, tenemos un juego simple escalar definido por la clasificación $\{U'_*, \mathcal{R}\}$, siendo

$$U'_* = \bigcup_{i=1}^{r} U_i$$

y haciendo el juego simple marginal de la clase U'_* obtenemos el juego simple compuesto suma.

2. agregamos todas las clases por intersección, obtenemos otro juego simple vectorial definido por la clasificación $\{U''_1, U''_2, ..., U''_r, U''_*\}$, siendo

$$U''_i = U_i \quad \forall i \in \{1, 2, ..., r\} \quad \text{y} \quad U''_* = \bigcap_{i=1}^{r} U_i$$

y haciendo el juego simple marginal de la clase U''_* obtenemos el juego simple compuesto producto.

El ejemplo siguiente nos muestra la forma de componer juegos simples escalares a través de operaciones de agregación.

Ejemplo 2.4.1 *Sean los juegos simples escalares* $(N, \mathcal{W}_1)$ *y* $(N, \mathcal{W}_2)$*,* $N_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ *y* $N_2 = \{5, 6, 7\}$*, descritos por sus familias de coaliciones ganadoras* $\mathcal{W}_1$ *y* $\mathcal{W}_2$*, respectivamente*

$(N, \mathcal{W}_1)$

$\mathcal{W}_1$	$\{1, 2\}, \{1, 3, 4\}$

$(N, \mathcal{W}_2)$

$\mathcal{W}_2$	$\{5\}, \{6, 7\}$

A partir de ellos formamos el juego simple vectorial (N, U)*,* $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$(N, U) \quad U = \{U_1, U_2, \mathcal{R}\}$

U_1	*Coaliciones minimales* $\{1, 2\}, \{1, 3, 4\}$
U_2	*Coaliciones minimales* $\{5\}, \{6, 7\}$
$\mathcal{R}$	*Resto de coaliciones*

y por agregación de clases, los juegos simples vectoriales (N, U') y (N, U''), el primero por unión y el segundo por intersección

(N, U')

U'_1	<u>*Coaliciones minimales*</u> $\{1,2\},\{1,3,4\}$
U'_2	<u>*Coaliciones minimales*</u> $\{5\},\{6,7\}$
U'_*	<u>*Coaliciones minimales*</u> $\{1,2\},\{1,3,4\},\{5\},\{6,7\}$
$\mathcal{R}$	*Resto de coaliciones*

(N, U'')

U''_1	<u>*Coaliciones minimales*</u> $\{1,2\},\{1,3,4\}$
U''_2	<u>*Coaliciones minimales*</u> $\{5\},\{6,7\}$
U''_*	<u>*Coaliciones minimales*</u> $\{1,2,5\},\{1,3,4,5\},\{1,2,6,7\},\{1,3,4,6,7\}$
$\mathcal{R}''$	*Resto de coaliciones*

Y haciendo los juegos marginales de las clases U'_* y U''_* obtenemos los juegos compuestos suma $(N, \mathcal{W}) = (N, \mathcal{W}_1)\bigoplus(N, \mathcal{W}_2)$ y producto $(N, \mathcal{W}') = (N, \mathcal{W}_1)\bigotimes(N, \mathcal{W}_2)$, dónde $\mathcal{W} = U'_*$ y $\mathcal{W}' = U''_*$.

Un caso de composición de juegos simples muy estudiado en la literatura son los sistemas multicamerales, que obtendremos por marginalidad de la unión o intersección de clases del juego simple vectorial multicameral, juego que describimos a continuación.

Partiendo de r cámaras K_i, constituidas cada una por N_i jugadores (Los conjuntos de jugadores de las distintas cámaras, N_1, N_2, ..., N_r, son disjuntos, aunque podrían haber jugadores comunes), se desarrolla un juego simple $(N_i, \mathcal{W}_i)$, definimos un juego simple vectorial (N, U), llamado multicameral, sobre el conjunto de jugadores N, $N = \bigcup_{i=1}^{r} N_i$ y clasificación $U = \{U_1, U_2, ..., U_r\}$. Las coaliciones de la clase U_i son las de $\mathcal{W}_i$, aunque ahora estas coaliciones pueden además constar de otros jugadores de $N - N_i$ que son nulos para la clase U_i.

Los diferentes sistemas multicamerales conocidos se pueden obtener como juegos marginales de las agregaciones por unión o intersección de las clases de este juego simple vectorial multicameral.

Ejemplo 2.4.2 ***(Juego de unanimidad vía individualismo)***

Si en cada cámara se desarrolla un juego de unanimidad, las coaliciones ganadoras de $\mathcal{W}_i$ tienen todos los jugadores. Es decir, la única coalición ganadora en la cámara K_i es N_i.

El juego simple vectorial multicameral que formamos es tal que las coaliciones de cada clase U_i contienen, al menos, todos los jugadores de la cámara correspondiente. Si hacemos la agregación por unión de todas las clases tenemos una nueva clase, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{r} U_i$, cuyas *coaliciones tienen, como mínimo, todos los jugadores de una cámara. El juego simple marginal de la nueva clase se conoce como juego de unanimidad vía individualismo.*

Ejemplo 2.4.3 ***(Juego individualista vía unanimidad)***

Si en cada cámara se desarrolla un juego individualista: una coalición es ganadora si, al menos, tiene un jugador de la cámara.

Entonces, cada clase U_i del juego simple vectorial multicameral está formada por las coaliciones que, al menos, tienen un jugador de N_i.

Al agregar las clases del juego simple vectorial multicameral (N, U) por intersección, las coaliciones de la nueva clase, $\bigcap_{i=1}^{r} U_i$, son aquellas que, al menos, tienen un votante de cada una de las cámaras. El juego simple marginal que corresponde a esta agregación es el conocido como composición de juegos individualistas vía unanimidad.

Ejemplo 2.4.4 ***(El Colegio Electoral americano)***

Las cámaras de este juego son los 51 estados de la Unión. En cada cámara se desarrolla un juego de mayoría por el cuál se eligen a unos representantes y éstos, a su vez, por otro juego de mayoría eligen al Presidente. Este mismo juego se obtiene como juego marginal de la intersección de las 51 clases del juego simple vectorial multicameral.

Ejemplo 2.4.5 ***(El Sistema Federal)***

El Sistema Federal (Brams, Affuso y Mac Kilgore, [39]) está constituido por dos cámaras:

- *el Congreso*

  integrado por 435 Congresistas y el Presidente. En él las mociones se aprueban por, al menos, mayoría de dos tercios de los Congresistas o, al menos, 218 Congresistas y el Presidente.

- *el Senado*

  integrado por 100 Senadores, el Presidente y el Vicepresidente, éste último con la facultad de desempatar. En él las mociones se aprueban por, al menos, mayoría de dos tercios de los Senadores o, al menos, 50 Senadores, el Presidente y el Vicepresidente o, al menos, 51 Senadores y el Presidente.

En el Sistema Federal una coalición de representantes es ganadora cuando consigue mayoría en ambas cámaras. Para ello, como mínimo debe estar integrada por:

1. *290 Congresistas y 67 Senadores.*

2. *218 Congresistas, 50 Senadores, el Presidente y el Vicepresidente.*

3. *218 Congresistas, 51 Senadores y el Presidente.*

El Sistema Federal nos permite definir un juego simple vectorial bicameral dado por la clasificación $\{U_1, U_2, \mathcal{R}\}$*, la primera clase está formada por las coaliciones ganadoras en el Senado, la segunda por las ganadoras en el Congreso y la tercera por las restantes. A partir de él y agregando primero por intersección las clases* U_1 *y* U_2 *y luego haciendo el marginal de dicha intersección, se obtiene el Sistema Federal* $\{U_1', \mathcal{R}'\}$ *cuya clase* U_1' *está formada por las coaliciones ganadoras en ambas cámaras y cuya clase residual está formada por las restantes:*

$$U_1' = U_1 \cap U_2 \qquad\qquad \mathcal{R}' = [(U_1 \cup U_2) \backslash (U_1 \cap U_2)] \cup \mathcal{R}$$

Si hacemos el marginal de la unión de las dos clases del juego simple vectorial bicameral obtenemos otro sistema de votación en el que son ganadoras las coaliciones ganadoras en el Senado o en el Congreso y perdedoras las restantes.

Capítulo 3

JUGADORES, COALICIONES Y CLASES DE JUEGOS

3.1. Introducción

Los juegos simples vectoriales dan lugar a una nueva situación en la que aparecen una gama más amplia de jugadores, coaliciones y clases de juegos y, por tanto, a un mayor número de teoremas de caracterización, que particularizados al caso escalar son los resultados ya conocidos en la literatura (Goel, [8]).

3.2. Coaliciones y jugadores

Vamos a definir los diversos tipos de coaliciones y jugadores de un juego simple vectorial dado en forma canónica (N, ν) o por su clasificación asociada $\{U_1, U_2, ..., U_r\}$.

Cada clase U_i define una familia U_i^m de coaliciones minimales, de forma que cualquier subcoalición de ellas no pertenece a la familia U_i. Las coaliciones son ganadoras si pertenecen a alguna de las r familias U_i (si pertenecen a todas las familias se llaman ganadoras absolutas) y perdedoras si pertenecen a la familia de las coaliciones residuales

$$\mathcal{R} = \mathcal{P}(N) \setminus \bigcup_{i \in \{1,\ldots,r\}} U_i$$

En el caso particular en que estas coaliciones están formadas por un solo jugador, éste será

- ganador de una clase, si pertenece a ella,
- ganador absoluto, si pertenece a todas las clases y
- perdedor, si es residual.

Definición 3.2.1 *Una coalición $S \in U_i$ tal que:*

- *$N \setminus S \notin \mathcal{R}$ es una coalición conflictiva para la clase U_i. Todas ellas forman la familia U_i^c.*
- *$N \setminus S \in \mathcal{R}$, es una coalición decisiva para la clase U_i. Todas ellas forman la familia U_i^d.*

Análogamente, S es una coalición conflictiva absoluta si es ganadora absoluta y $N \setminus S$ no es residual y S es decisiva absoluta si es ganadora absoluta y $N \setminus S$ es residual.

Si la coalición S, conflictiva para la clase U_i, está formada por un solo jugador $\{i\}$, el jugador $\{i\}$ es un jugador capaz de la clase. Si además $\{i\}$ es ganador absoluto, se llamará capaz absoluto.
Si la coalición S, decisiva para la clase U_i, está formada por un solo jugador $\{i\}$, el jugador $\{i\}$ es un jugador decisivo para la clase.

Definición 3.2.2 *Una coalición $S \in \mathcal{R}$ tal que:*

- *$N \setminus S \in U_i$, es una coalición perdedora estricta. Todas ellas forman la familia $\mathcal{L}_i^e$ (las coaliciones perdedoras estrictas son las complementarias de las ganadoras decisivas).*
- *$N \setminus S \in \mathcal{R}$, es una coalición de bloqueo. Todas ellas forman la familia $\mathcal{L}^b$.*

Si la coalición S, perdedora estricta, está formada por un solo jugador $\{i\}$, el jugador $\{i\}$ es un jugador perdedor estricto.
Si la coalición S, perdedora de bloqueo, está formada por un solo jugador $\{i\}$, el jugador $\{i\}$ es un jugador veto absoluto.

Se verifica que:

$$U_i = U_i^c \cup U_i^d \quad ; \quad \mathcal{R} = \left(\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{L}_i^e \right) \cup \mathcal{L}^b$$

Definición 3.2.3 *Un jugador $\{i\}$ es veto de una clase si todas las coaliciones de la clase lo incluyen. Y es veto absoluto si lo es de todas las clases.*

Si $\{i\}$ es un jugador veto de una clase U_i, todas las coaliciones de la clase lo contienen, por tanto, $N\backslash\{i\} \notin U_i$. Y si $\{i\}$ es veto absoluto, $N\backslash\{i\}$ no está en ninguna clase U_i, es decir, $N\backslash\{i\} \in \mathcal{R}$.

Definición 3.2.4 *Un dictador de una clase es un jugador $\{i\}$ que es veto de la clase y ganador de la clase (Un dictador absoluto es un jugador $\{i\}$ que es veto absoluto y ganador absoluto).*

Definición 3.2.5 *Un jugador $\{i\}$ ganador de una clase tal que $N\backslash\{i\}$ es residual es un jugador decisivo para la clase (Un jugador $\{i\}$ ganador absoluto tal que $N\backslash\{i\}$ es residual es un jugador decisivo absoluto).*

Se verifica que:

- Un jugador decisivo de una clase es un jugador veto absoluto y ganador de la clase.
- Un jugador decisivo absoluto es un dictador absoluto.

Definición 3.2.6 *Un jugador $\{i\}$ es nulo para una clase si para toda coalición S perdedora o ganadora de la clase, $S \cup \{i\}$ sigue siendo perdedora o ganadora respecto a dicha clase. Si es un jugador nulo para todas las clases, se dirá, jugador nulo.*

Cuando el juego viene dado en forma canónica la caracterización de las coaliciones y los jugadores es la siguiente, indicando por $(1, ..., 1, ..., 1)/(0, ..., 0, ..., 0)$ que todas las componentes son unos/ceros y por $(..., \overset{x}{1}, ...)/(..., \overset{x}{0}, ...)$ que la componente x-ésima es 1/0, es decir que la coalición es ganadora/perdedora respecto a la clase U_x, $x \in \{1, 2, ..., r\}$.

	Coaliciones S	
Conflictivas	$\nu(S) = (..., \overset{x}{1}, ...)$	$\nu(N\backslash S) = (..., \overset{y}{1}, ...)$
Conflictivas absolutas	$\nu(S) = (1, ..., 1, ..., 1)$	$\nu(N\backslash S) = (..., \overset{x}{1}, ...)$
Decisivas	$\nu(S) = (..., \overset{x}{1}, ...)$	$\nu(N\backslash S) = (0, ..., 0, ..., 0)$
Decisivas absolutas	$\nu(S) = (1, ..., 1, ..., 1)$	$\nu(N\backslash S) = (0, ..., 0, ..., 0)$
Perdedoras estrictas	$\nu(S) = (0, ..., 0, ..., 0)$	$\nu(N\backslash S) = (..., \overset{x}{1}, ...)$
Perdedoras de bloqueo	$\nu(S) = (0, ..., 0, ..., 0)$	$\nu(N\backslash S) = (0, ..., 0, ..., 0)$

	Jugadores $\{i\}$		
Capaces	$\nu(\{i\}) = (..., \overset{x}{1}, ...)$	$\nu(N\backslash\{i\}) = (..., \overset{y}{1}, ...)$	$x = y$ o $x \neq y$
Capaces absolutos	$\nu(\{i\}) = (1, ..., 1, ..., 1)$	$\nu(N\backslash\{i\}) = (..., \overset{x}{1}, ...)$	
Decisivos	$\nu(\{i\}) = (..., \overset{x}{1}, ...)$	$\nu(N\backslash\{i\}) = (0, ..., 0, ..., 0)$	
Decisivos absolutos o dictadores	$\nu(\{i\}) = (1, ..., 1, ..., 1)$	$\nu(N\backslash\{i\}) = (0, ..., 0, ..., 0)$	
Dictador relativo	$\nu(\{i\}) = (..., \overset{x}{1}, ...)$	$\nu(N\backslash\{i\}) = (..., \overset{y}{1}, ...)$	$x \neq y$
Perdedor estricto	$\nu(\{i\}) = (0, ..., 0, ..., 0)$	$\nu(N\backslash\{i\}) = (..., \overset{x}{1}, ...)$	
Veto absoluto	$\nu(\{i\}) = (0, ..., 0, ..., 0)$	$\nu(N\backslash\{i\}) = (0, ..., 0, ..., 0)$	

Ejemplo 3.2.1 *Sea el juego simple vectorial definido sobre* $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *por la clasificación:*

$$U_1 = \{\{3, 4\}, \{4, 5, 6\}\} \quad U_2 = \{\{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}\} \quad U_3 = \{\{1\}\}$$

Podemos observar que:

1. $\{4\}$ *es un jugador veto de* U_1*,* $\{2\}$ *y* $\{3\}$ *son jugadores vetos de* U_2 *y* $\{1\}$ *es un jugador veto de* U_3*.*
2. $\{1\}$ *es un jugador capaz de* U_3 *porque está en* U_3 *y* $N\backslash\{1\} \in U_1$ *ó* $N\backslash\{1\} \in U_2$*.*
3. $\{1\}$ *y* $\{2\}$ *son nulos para* U_1 *y* $\{2\}$*,* $\{3\}$*,* $\{4\}$*,* $\{5\}$ *y* $\{6\}$ *son, también, nulos para* U_3*.*
4. $\{1\}$ *es un dictador de* U_3*.*

Ejemplo 3.2.2 *Sea el juego simple vectorial definido sobre* $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *por la clasificación:*

$$U_1 = \{\{1\}, \{2, 6\}\} \quad U_2 = \{\{1\}, \{3, 4\}\} \quad U_3 = \{\{1\}, \{2, 5, 6\}\}$$

Podemos observar que $\{1\}$ *es un jugador capaz absoluto.*

Para que el jugador $\{1\}$ *fuera dictador debería cumplirse que* $N\backslash\{1\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ *fuera residual, lo que sólo ocurre cuando las clases están formadas únicamente por el jugador* $\{1\}$*. Pero, entonces hay una única clase formada por* $\{1\}$ *y el juego simple no sería vectorial, sino escalar.*

El ejemplo anterior nos conduce a enunciar el teorema:

Teorema 3.2.1 *Los juegos simples vectoriales con un jugador dictador absoluto son juegos simples escalares.*

Demostración.

Si $\{i\}$ es un jugador dictador absoluto de un juego simple vectorial definido por la clasificación $U = \{U_1, U_2, ..., U_r\}$, $\{i\}$ pertenece a todas las clases por ser ganador absoluto y por ser veto absoluto, $N\backslash\{i\} \in \mathcal{R}$, por lo que todas las clases tienen a $\{i\}$ como coalición minimal y son todas la misma. De esta forma, el juego viene dado por la clasificación $U = \{\mathcal{W}, \mathcal{L}\}$, siendo $\mathcal{W}^m = \{\{i\}\}$ y $\mathcal{L}^M = \{N\backslash\{i\}\}$. $\square$

También, podemos comprobar la existencia de jugadores veto en el ejemplo de la cooperativa industrial:

Ejemplo 1.2.2 (Continúa) *Para la cooperativa industrial se definió un juego simple vectorial dado por el cuadro:*

Clases	Patrones
U_1	(1,1,1,0),(1,0,1,1),(0,1,1,1)
U_2	(1,1,0,1),(1,0,1,1)
$\mathcal{R}$	(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)

Los jugadores 5 *y* 6 *son vetos para la primera clase porque* $N\backslash\{5\} \notin U_1$ *y tampoco* $N\backslash\{6\} \notin U_1$. *Por ser vetos para la clase* U_1, *todas las coaliciones de la clase deben de contenerlos. Y por no ser vetos para la segunda clase no son vetos absolutos.*

Al conjunto de jugadores vetos de una clase (todas las coaliciones de la clase los contienen) lo designamos por $\mathcal{V}_i$. Así habrían r conjuntos vetos, tantos como clases. Los jugadores vetos absolutos son los vetos comunes a todas las clases y forman el conjunto

$$\mathcal{V} = \bigcap_{i\in\{1,2,...,r\}} \mathcal{V}_i$$

Si S es ganadora en las clases U_j, $j \in J \subseteq \{1, 2, ..., r\}$, S incluye todos los jugadores vetos relativos de estas clases

$$\bigcup_{j\in J} \mathcal{V}_j$$

y si $J = \{1, 2, ..., r\}$, S es ganadora absoluta. Por tanto, una coalición ganadora absoluta incluye todos los jugadores vetos, relativos y absolutos (no olvidemos que los absolutos son los relativos comunes a todas las clases)

Teorema 3.2.2 *En un juego simple vectorial es imposible que coexistan*

1. *un jugador veto absoluto* $\{x\}$ *y un jugador capaz* $\{y\}$.

2. *un jugador veto relativo* $\{x\}$ *y un jugador capaz absoluto* $\{y\}$.

pero si pueden coexistir un jugador veto y un capaz, relativos ambos, si son de distintas clases.

Demostración.
1) Sea $\{y\}$ un jugador capaz. Es decir, $\{y\}$ y $N \backslash \{y\}$ son ganadoras. Al ser $\{x\}$ veto absoluto $N \backslash \{x\}$ es perdedora. Sin embargo, como $\{y\}$ está en $N \backslash \{x\}$, $\{y\}$ sería perdedor, lo que va en contra de la definición de jugador capaz.
2) Por ser $\{x\}$ veto relativo, $\{x\}$ es veto de una clase U_i y $N \backslash \{x\} \notin U_i$. Como $\{y\}$ es capaz absoluto está en todas las clases. Además, $\{y\} \in N \backslash \{x\}$. Por tanto, $N \backslash \{x\}$ está en todas las clases, lo que contradice que $\{x\}$ sea veto relativo.
3) Para ver que en un juego simple vectorial pueden existir un jugador capaz y un jugador veto relativo de distintas clases, basta con diseñar un juego simple vectorial con la clasificación $\{U_1, U_2, U_3\}$, en el que $\{x\}$ es veto relativo de U_1 ($N \backslash \{x\} \notin U_1$) y $N \backslash \{x\} \in U_2$, e $\{y\}$ es capaz relativo, $\{y\} \in U_2$ y $N \backslash \{y\} \in U_3$, y no hay contradicción alguna. □

Análogamente,

Teorema 3.2.3 *Si en un juego simple vectorial existen jugadores vetos absolutos, entonces no pueden haber coaliciones conflictivas.*

Demostración.
Sabemos que si existen jugadores veto absolutos, todas las coaliciones ganadoras (relativas o absolutas) los incluyen. Por tanto, no puede haber ninguna coalición conflictiva S porque S y $N \backslash S$ incluirían todos los vetos absolutos y entonces no serían disjuntas. □

A la inversa, el teorema no es cierto porque se pueden construir juegos simples vectoriales sin coaliciones conflictivas que, sin embargo, no tienen jugadores vetos absolutos. Este es el caso del ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.2.3 *El juego simple vectorial definido sobre* $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *por la clasificación:*

$$U_1 = \{\{3, 4\}, \{4, 5, 6\}\} \quad U_2 = \{\{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}\}$$

no tiene coaliciones conflictivas ni jugadores vetos absolutos. Los jugadores vetos que posee son relativos, $\{4\}$ *de* U_1 *y* $\{2\}$ *de* U_2.

Luego, son sólo los juegos sin jugadores veto absolutos los que pueden tener coaliciones conflictivas.

En general, se observa una relación entre coaliciones decisivas y existencia de jugadores veto absolutos y entre coaliciones conflictivas y no existencia de jugadores vetos absolutos.

3.3. Subjuegos simples vectoriales

Dado un juego simple vectorial (N, U), decimos que (N', U') es el juego simple vectorial inducido en N' por (N, U) si $N' \subset N$ y $U'_i = \{S \cap N' \backslash S \in U_i\}$. Se dirá entonces que (N', U') es un subjuego de (N, U).

Cuando los jugadores de $N \backslash N'$ son nulos, diremos que (N', U') es denso.

Cada juego simple vectorial (N, U), $U = \{U_1, ..., U_r\}$, tiene asociado un juego simple vectorial (N, U^*), siendo $U^* = \{U_1^*, ..., U_r^*\}$. Las clases U_i^* están formadas por las coaliciones decisivas de U_i, mientras que el resto de coaliciones son residuales. Este juego (N, U^*) es un juego propio como veremos en la sección siguiente.

3.4. Clases de juegos simples vectoriales

En esta sección veremos cómo se clasifican los distintos juegos simples vectoriales atendiendo a las familias U_i^c y $\mathcal{L}^b$:

1. Un juego simple vectorial es **propio** si todas sus coaliciones ganadoras son decisivas. Es decir, $U_i^c = \emptyset$, $\forall i \in R$. En otro caso se dice **impropio**.

2. Un juego simple vectorial es **estrictamente propio** cuando es propio pero, al menos, una coalición perdedora bloquea. Es decir, $U_i^c = \emptyset$, $\forall i \in R$, y $\mathcal{L}^b \neq \emptyset$.

3. Un juego simple vectorial es **fuerte** cuando las coaliciones perdedoras son todas perdedoras estrictas. Es decir, si $\mathcal{L}^b = \emptyset$. En otro caso se dice **débil**.

4. Un juego simple vectorial es **estrictamente fuerte** cuando es fuerte pero, al menos, una coalición ganadora es conflictiva. Es decir, si $\mathcal{L}^b = \emptyset$ y $\exists i \in R$ para la que $U_i^c \neq \emptyset$.

5. Un juego simple vectorial es **decisivo** si toda coalición ganadora es decisiva y toda coalición perdedora es perdedora estricta. Es decir, propio y fuerte simultáneamente.

3.5. Teoremas de caracterización

Teorema 3.5.1 *Un juego simple vectorial con, al menos, un jugador veto absoluto es propio.*

Demostración.
Hay que ver que toda coalición ganadora S es decisiva.

Por ser $\{i\}$ un jugador veto absoluto, $N\backslash\{i\} \in \mathcal{R}$ y por ser S ganadora incluye todos los jugadores vetos absolutos: $\{i\} \in S$. Entonces $N\backslash S \subset N\backslash\{i\} \Rightarrow N\backslash S \in \mathcal{R} \Rightarrow S$ es decisiva.

Es decir, S es ganadora y $N\backslash S$ es perdedora. Luego, todas las coaliciones ganadoras son decisivas. □

Ejemplo 3.5.1 *Sea el juego simple vectorial sobre $N = \{1,2,3,4,5\}$ definido por la clasificación:*

$$U_1 = \{\{1,2,5\}\} \quad U_2 = \{\{1,3,4\}\} \quad U_3 = \{\{1,4,5\}\}$$

Como $\{1\}$ es un jugador veto absoluto, todas las coaliciones ganadoras lo contienen y $N\backslash\{1\} = \{2,3,4,5\}$ es residual.

Si S es una coalición ganadora cualquiera, contiene al jugador veto absoluto y por tanto $N\backslash S \subseteq N\backslash\{1\}$. Es decir, para toda coalición ganadora S, $N\backslash S$ es residual. Luego, el juego simple vectorial es propio.

Teorema 3.5.2 *Un juego simple vectorial con un dictador absoluto es un juego simple escalar propio.*

Demostración.
Por el teorema 3.5.1, un juego simple vectorial con un jugador veto absoluto es propio. Como el dictador absoluto $\{x\}$ es un veto absoluto, entonces el juego es propio. Pero, es un juego propio formado por sólo dos clases, una positiva cuya coalición minimal ganadora es $\{x\}$ y otra negativa (la residual) cuya coalición maximal perdedora es $N\backslash\{x\}$.
Por consiguiente, el juego es escalar y propio. □

Ejemplo 3.5.2 *Sea un juego simple vectorial sobre $N = \{1,2,3,4,5\}$ con un dictador absoluto, el jugador $\{1\}$, entonces cualquier clasificación sería del tipo:*

$$U_1 = \{\{1\}\} \quad U_2 = \{\{1\}\} \quad U_3 = \{\{1\}\}$$

porque $\{1\}$ es ganador y veto absoluto y por el teorema anterior, el juego es propio. Además, se trata de un juego simple escalar, ya que sólo existen la clase del dictador y la residual.

Teorema 3.5.3 *Un juego simple vectorial con un jugador capaz (relativo o absoluto) es impropio.*

Demostración
Para que un juego simple vectorial sea impropio, al menos, una coalición ganadora tiene que ser conflictiva. Al existir $\{i\}$ capaz, se cumple que $\{i\}$ y $N\backslash\{i\}$ son ganadoras.
Luego se cumple el teorema porque tanto $\{i\}$ como $N\backslash\{i\}$ son ganadoras conflictivas. $\Box$

También, por el teorema 3.2.2, sabemos que en un juego simple vectorial no pueden coexistir un jugador veto absoluto y un jugador capaz. Por ello, al haber un jugador capaz, no hay ningún jugador veto absoluto y todas las coaliciones no tienen por qué ser decisivas y habrá alguna conflictiva. Luego, el juego es impropio.

Ejemplo 3.5.3 *Sea el juego simple vectorial sobre $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definido por la clasificación:*

$$U_1 = \{\{1\}\} \quad U_2 = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}\} \quad U_3 = \{\{1, 4, 5\}\}$$

El jugador $\{1\}$ es capaz relativo, porque $\{1\}$ está en U_1 y $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ en U_2. Es decir, existe una coalición ganadora conflictiva ($\{1\}$). Por tanto, el juego es impropio.

Teorema 3.5.4 *Un juego simple vectorial con un jugador capaz (relativo o absoluto) es fuerte.*

Demostración
Para que un juego simple vectorial sea fuerte toda coalición perdedora debe ser perdedora estricta. Al existir $\{i\}$ capaz, se cumple que $\{i\}$ y $N\backslash\{i\}$ son ganadoras.

Sea una coalición S perdedora cualquiera, $S \in \mathcal{R}$. Es absurdo que $\{i\} \in S$, ya que S sería ganadora por contener a $\{i\}$, por tanto $\{i\} \notin S$ e $\{i\} \in N\backslash S$ y $N\backslash S$ sería ganadora. Luego S es perdedora estricta. $\Box$

Ejemplo 3.5.3 (Continúa) *Se trata de un juego fuerte porque toda coalición perdedora es perdedora estricta. Efectivamente, ninguna coalición perdedora contiene a $\{1\}$ porque entonces sería ganadora, lo que significa que $\{1\} \in N\backslash S$ y $N\backslash S$ es ganadora.*

Teorema 3.5.5 *Un juego simple vectorial con un dictador absoluto es fuerte.*

Demostración
Un dictador absoluto $\{i\}$ es ganador y $N\backslash\{i\}$ residual. Si S es una coalición perdedora cualquiera no puede contener al dictador porque sería ganadora. Entonces, $N\backslash S$ si contiene al dictador y es ganadora. Luego, toda coalición perdedora S es perdedora estricta y, por tanto, el juego simple vectorial es fuerte. $\Box$

Teorema 3.5.6 *Un juego simple vectorial con un jugador veto absoluto que no sea dictador es débil.*

Demostración
Sea $\{i\}$ el jugador veto absoluto. Entonces $N\backslash\{i\}$ es perdedora. Por tanto, ambas bloquean y el juego es débil. $\square$

Ejemplo 3.5.1 (Continúa) *Es un juego débil porque* $\{1\}$ *y* $\{2, 3, 4, 5\}$ *son perdedoras y, por tanto, bloquean.*

Teorema 3.5.7 *Un juego simple vectorial propio, pero no estrictamente propio, es decisivo.*

Demostración
Por ser un juego simple vectorial propio, toda coalición ganadora es decisiva y por ser estrictamente propio no hay ninguna coalición perdedora que bloquea. Por tanto, todas las coaliciones perdedoras son perdedoras estrictas y las coaliciones ganadoras son decisivas. $\square$

Ejemplo 3.5.1 (Continúa) *Este juego es decisivo porque es propio y ninguna perdedora bloquea. Esto siempre ocurre cuando hay un dictador absoluto.*

Teorema 3.5.8 *Un juego simple vectorial fuerte, pero no estrictamente fuerte, es decisivo.*

Demostración
Por ser fuerte, todas las coaliciones perdedoras son perdedoras estrictas y por no ser estrictamente fuerte no hay coaliciones ganadoras conflictivas. Por tanto, las coaliciones ganadoras son decisivas y las perdedoras, perdedoras estrictas. $\square$

Ejemplo 3.5.4 *Un juego con un dictador absoluto es un juego decisivo porque toda coalición ganadora es decisiva y toda perdedora es perdedora estricta.*

Teorema 3.5.9 *Las clases* $\{U_1, U_2, ..., U_r, \mathcal{R}\}$ *de un juego simple vectorial verifican:*

1. *si es decisivo,* $\mathcal{P}(N)\backslash \bigcup_{i\in\{1,2,\ldots,r\}} U_i = \mathcal{R}$.

2. *si es estrictamente propio,* $\mathcal{P}(N)\backslash \bigcup_{i\in\{1,2,\ldots,r\}} U_i \subset \mathcal{R}$.

3. *si es estrictamente fuerte,* $\mathcal{P}(N)\backslash\mathcal{R} \subset \bigcup_{i\in\{1,2,\ldots,r\}} U_i$.

Demostración

Sea un juego simple vectorial,

1. por ser decisivo, todas las coaliciones ganadoras son decisivas y las perdedoras son perdedoras estrictas. La familia $\mathcal{P}(N)\backslash \bigcup_{i\in\{1,2,\ldots,r\}} U_i$ está formada por las complementarias de las ganadoras decisivas, que son las perdedoras estrictas y, además, las únicas perdedoras. De ahí la igualdad.

2. por ser estrictamente propio, todas las coaliciones ganadoras son decisivas y sus complementarias, $\mathcal{P}(N)\backslash \bigcup_{i\in\{1,2,\ldots,r\}} U_i$, son perdedoras estrictas. Pero $\mathcal{R}$ está compuesta por las perdedoras estrictas y las de bloqueo. Por tanto,
$$\mathcal{P}(N)\backslash \bigcup_{i\in\{1,2,\ldots,r\}} U_i \subset \mathcal{R}$$

3. por ser estrictamente fuerte, todas las coaliciones perdedoras son perdedoras estrictas y sus complementarias, $\mathcal{P}(N)\backslash\mathcal{R}$ son ganadoras decisivas. Pero $\bigcup_{i\in\{1,2,\ldots,r\}} U_i$ está compuesta por las ganadoras decisivas y las conflictivas. De ahí, que se cumpla la inclusión
$$\mathcal{P}(N)\backslash\mathcal{R} \subset \bigcup_{i\in\{1,2,\ldots,r\}} U_i$$

. $\square$

Capítulo 4

SOLUCIONES DE JUEGOS SIMPLES VECTORIALES

4.1. Introducción

Uno de los problemas más interesantes de la teoría de juegos cooperativos es cómo dividir los beneficios totales entre todos los jugadores.

En los juegos vectoriales además, hay que ver cómo repartir entre todos los jugadores en las distintas clases. Suponemos que si todos ellos deciden cooperar y formar la gran coalición N, repartirán el vector $v(N)$ de beneficios entre todos ellos y en todas las clases. Los repartos que estudiamos en este capítulo son los de tipo conjunto. En particular, el core. El core ha sido estudiado en el caso escalar por diversos autores, entre ellos Davis y Maschler ([35]), Shapley ([22]), Peleg ([17]), Owen ([15] y [16]) y Aumann ([29]), y ha sido establecido para los juegos cooperativos vectoriales por F.R. Fernández, M.A. Hinojosa y J. Puerto([37]). Nosotros lo estudiaremos según la relación de orden que establezcamos en $\mathbb{R}^n$, siguiendo la línea marcada por F.R. Fernández y J. Puerto ([31]).

4.2. Imputaciones y core

Cada matriz de valores no negativos, se denomina matriz de pagos

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1r} & x_{2r} & \dots & x_{nr} \end{pmatrix}$$

Llamaremos X^i, $i \in N$, a los n vectores columna y X_j, $j \in R$, a los r vectores filas.

Dado un juego simple vectorial en forma canónica, (N, v), definido por una clasificación $U = \{U_1, U_2, ..., U_r\}$, diremos

Definición 4.2.1 *Una preimputación es una matriz de pagos X eficiente. Es decir, verifica*

$$\sum_{i \in N} X^i = v(N)$$

Entonces, X^i representa el pago del jugador $\{i\}$ en cada una de las clases y X_j el pago de cada jugador en la clase j (o la importancia del mismo en el logro que proporciona $v(N)$).

Teniendo en cuenta que en $\mathbb{R}^r$ se puede considerar dos órdenes diferentes:

1. El **orden de preferencia**:

   Un vector a es mayor o igual que otro b cuando lo supera en las r componentes

   $$\forall a, b \in \mathbb{R}^r \quad \text{se escribe} \quad a \geq b$$

2. El **orden no peor que**:

   Un vector a no es peor que otro b cuando lo supera en, al menos, una de las r componentes

   $$\forall a, b \in \mathbb{R}^r \quad \text{se escribe} \quad a \gtrsim b$$

Si, además, exigimos que se cumpla la racionalidad individual. Es decir, el pago de cada jugador no sea peor que su valor $v(\{i\})$, diremos

Definición 4.2.2 *Se llama imputación a toda preimputación que verifica, para todo jugador $\{i\}$:*

$$X^i \gtrsim v(\{i\})$$

Llamaremos $\mathcal{I}$ al conjunto de imputaciones del juego.

Y si estas imputaciones cumplen la racionalidad colectiva (en el orden correspondiente), entonces forman el core de preferencia o el core de dominancia del juego.

Definición 4.2.3 *El core de preferencia está formado por todas las imputaciones que verifican la racionalidad colectiva*

$$\forall S \in \mathcal{P}(N) : X^S \geq v(S)$$

Notaremos al core de preferencia por $C^{\geq}$.

Definición 4.2.4 *El core de dominancia está formado por todas las imputaciones que verifican la racionalidad colectiva*

$$\forall S \in \mathcal{P}(N) : X^S \gtrsim v(S)$$

Notaremos al core de dominancia por $C^{\gtrsim}$.

Es evidente:

Teorema 4.2.1 *El core de preferencia está incluido en el core de dominancia*

$$C^{\geq} \subseteq C^{\gtrsim}$$

Demostración.

Las imputaciones de preferencia verifican la racionalidad colectiva en el orden de preferencia, $X^S \geq v(S)$, lo que implica que también verifican la racionalidad colectiva en el orden no peor que, $X^S \gtrsim v(S)$. A la inversa, el teorema no es cierto. $\square$

Owen demostró ([15]), en el caso escalar, que el core de un juego simple no está vacío si existe, al menos, un jugador veto.

Vamos a generalizar este resultado a los juegos simples vectoriales.

El core de preferencia de un juego simple vectorial está formado por todas las imputaciones X que verifican

$$X \begin{cases} \sum_{i \in N} X^i = v(N) & \\ X^i \gtrsim v(i) & \forall i \in N \\ \sum_{i \in S} X^i \geq v(S) & \forall S \in \mathcal{P}(N) \end{cases}$$

La restricción a cada clase de una imputación de $C^{\geq}$ es una imputación de la clase.

Se puede enunciar los siguientes teoremas

Teorema 4.2.2 *El core de preferencia no está vacío si existe, al menos, un jugador veto en cada una de las clases.*

Demostración.

Si existe un jugador veto en cada clase, el reparto de $v(N)$ correspondiente a la clase es íntegramente para el jugador veto. Si todos ellos forman una coalición, se reparten $v(N)$ entre ellos, recibiendo cada uno el total en su componente y nada en las demás. A no ser que sea veto en otras clases, en cuyo caso repartiría con los demás. □

Corolario 4.2.1 *Si existe un jugador veto absoluto, recibe un pago en cada una de las componentes.*

Demostración.

Efectivamente, por ser veto absoluto es veto en todas las clases y, por tanto, el core de preferencia no está vacío. Si este veto absoluto no es el único veto de una clase, en la componente correspondiente sólo obtiene parte del reparto, pero si es el único en una componente en ella obtiene el total. □

Teorema 4.2.3 *El core de dominancia no está vacío si existe, al menos, un jugador veto en cualquiera de las clases.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos que ningún jugador $\{p\}$ es veto de ninguna clase. Por tanto, $N \backslash \{p\}$ es una coalición ganadora absoluta.

Sabemos que las imputaciones del core de dominancia verifican

$$X \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i \in N} X^i = v(N) & \\ X^i \gtrsim v(i) & \forall i \in N \\ \sum_{i \in S} X^i \gtrsim v(S) & \forall S \in \mathcal{P}(N) \end{array} \right.$$

Pero, por ser $N \backslash \{p\}$ ganadora absoluta (para todo jugador $\{p\}$), tenemos que $\sum_{i \neq p} X^i = v(N)$ y sería $X^p = (0)$. Como esto ocurre para todo jugador $\{p\}$ y toda imputación X, la matriz X tendría todas sus columnas (0) y no sería una imputación.

Por tanto, la hipótesis de partida es falsa y existe un jugador veto. □

Ejemplo 4.2.1 *Sea el juego simple vectorial definido sobre* $N = \{1, 2, 3, 4\}$ *por la si-*

guiente clasificación:

Clases	*Coaliciones*
U_1	*Minimales* $\{1,2\}, \{1,3,4\}$
U_2	*Minimales* $\{2,3\}, \{2,4\}$
$\mathcal{R}$	*Maximales*

La clase U_1 *tiene a* $\{1\}$ *como jugador veto y la* U_2 *a* $\{2\}$. *Es decir,* $\mathcal{V} = \{1,2\}$, *lo que quiere decir que el core de preferencia no está vacío*

$$C^{\geq} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo 4.2.2 *Sea el juego simple vectorial definido sobre* $N = \{1,2,3,4\}$ *por la siguiente clasificación:*

Clases	*Coaliciones*
U_1	*Minimales* $\{1,2\}, \{1,3,4\}$
U_2	*Minimales* $\{2,3\}, \{1,4\}$
$\mathcal{R}$	*Maximales*

La clase U_1 *tiene a* $\{1\}$ *como jugador veto y la* U_2 *a ninguno, lo que quiere decir que el core de preferencia está vacío y el de dominancia no. Este último está formado por las imputaciones siguientes:*

$$C^{\gtrsim} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \setminus \sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 1, \forall \alpha_i \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

4.3. Imputaciones y core en operaciones de agregación

Si se efectúan operaciones de intersección o unión entre las clases de un juego simple vectorial, la clasificación resultante define un nuevo juego simple vectorial. Vamos a estudiar qué sucede en cada uno de los casos, tanto con el nuevo juego simple vectorial como con el juego marginal resultante de la operación.

4.3.1. Unión de clases

Sea el juego simple vectorial en forma canónica (N, ν), cuya clasificación asociada es $\{U_1, U_2, ..., U_r\}$. Si las clases U_j, $j \in J \subseteq \{1, 2, ..., r\}$, se agregan por unión, resulta un nuevo juego (N, ν') cuya clasificación asociada está formada por las $r+1$ clases siguientes

$$\{U_j'\} \text{ tal que } \begin{cases} U_j' = U_j & si \quad j \in \{1, 2, ..., r\} \\ U_*' = \bigcup_{j \in J} U_j \end{cases}$$

La clase unión, $U_*' = \bigcup_{j \in J} U_j$, es una clase positiva y tiene una familia de coaliciones minimales ganadoras que verifica

$$\left| \left(\bigcup_{j \in J} U_j \right)^m \right| \leq \sum_{j \in J} |U_j^m|$$

Para los jugadores vetos de la clase unión, podemos enunciar

Teorema 4.3.1 *Los jugadores vetos de la clase unión son los jugadores vetos comunes a cada una de las clases agregadas. Es decir,*

$$\bigcap_{j \in J} \mathcal{V}_j$$

siendo $\mathcal{V}_j$ los jugadores vetos de la clase U_j.

Demostración.

Sean $\{U_j; j \in J\}$ las clases que se unen y x un veto de la clase U_{j_1}, $j_1 \in J$. Entonces $N \backslash x \not\subset U_{j_1}$, pero puede ocurrir que $N \backslash x \in U_{j_2}$, $j_2 \in J$. Para que esto no suceda, debe ser x veto de cada una de las clases U_j, en cuyo caso $N \backslash x \not\subset U_j$, $\forall j \in J$

$$N \backslash x \not\subset \bigcap_{j \in J} U_j$$

Es decir, los jugadores vetos de la clase unión son todos los vetos comunes a las clases que se unen. □

Corolario 4.3.1 *El core del juego simple marginal correspondiente a la unión de varias clases no está vacío si existen jugadores vetos comunes a todas ellas.*

Demostración.

La demostración se basa en que la unión de clases hereda todos los jugadores vetos comunes a las clases que se unen y como, además, el juego marginal correspondiente es escalar, por el teorema de Owen, si tiene algún jugador veto su core no es vacío. □

Ejemplo 4.3.1 *Sea el juego simple vectorial (N, ν) definido sobre $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ cuya clasificación asociada es:*

Clases	*Coaliciones*
U_1	$\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,2,3,4\},$ $\{1,2,3,5\},\{1,2,4,5\},\{1,2,3,4,5\}$
U_2	$\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,4,5\},\{1,2,3,4\},$ $\{1,2,3,5\},\{1,2,4,5\},\{1,2,3,4,5\}$

Observamos que los jugadores vetos de U_1 son $\mathcal{V}_1 = \{1, 2\}$ y los de U_2, $\mathcal{V}_2 = \{2\}$. En el juego marginal ν_1 correspondiente a la clase U_1, los jugadores $\{1\}$ y $\{2\}$ se reparten el valor del juego y en ν_2 sólo 2. Las imputaciones de preferencia son del tipo

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \setminus \sum_{i=1}^{2} \alpha_i = 1, \forall \alpha_i \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

El nuevo juego simple vectorial, $(N, \nu^{'})$, resultante de unir las dos clases de nuestro ejemplo viene dado por la clasificación

Clases	*Coaliciones*
$U_1' = U_1$	$\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,2,3,4\},$ $\{1,2,3,5\},\{1,2,4,5\},\{1,2,3,4,5\}$
$U_2' = U_2$	$\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,4,5\},\{1,2,3,4\},$ $\{1,2,3,5\},\{1,2,4,5\},\{1,2,3,4,5\}$
$U_*^{'} = U_1 \cup U_2$	$\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},$ $\{2,4,5\},\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,4,5\},\{1,2,3,4,5\},$

Observamos que la clase unión $U_*^{'}$ hereda los jugadores vetos comunes de las clases U_1 y U_2, $\mathcal{V}_*^{'} = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \{2\}$ y, por consiguiente, el valor del juego marginal $(N, \nu_*^{'})$ es íntegramente para $\{2\}$. La única imputación de su core de preferencia es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.3.2. Intersección de clases

Sea el juego simple vectorial en forma canónica (N, ν), cuya clasificación asociada es $\{U_1, U_2, ..., U_r\}$. Si las clases U_j, $j \in J \subseteq \{1, 2, ..., r\}$, se agregan por intersección, resulta un nuevo juego $(N, \nu^{''})$ cuya clasificación asociada es

$$\{U_1^{''}, ..., U_r^{''}, U_*^{''}\} \quad \begin{cases} U_j^{''} = U_j & \forall j \in \{1, 2, ..., r\} \\ U_*^{''} = \bigcap_{j \in J} U_j \end{cases}$$

La clase intersección, $\bigcap\limits_{j\in J} U_j$, es una clase positiva y tiene una familia de coaliciones minimales ganadoras que verifica

$$\left|\left(\bigcap_{j\in J} U_j\right)^m\right| = \prod_{j\in J} |U_j^m|$$

Para los jugadores vetos de la clase intersección se puede enunciar

Teorema 4.3.2 *Los jugadores vetos de la clase intersección son los jugadores vetos de cada una de las clases que se agregan.*

Demostración.

Sea x un jugador veto de una clase cualquiera U_j. Por la definición de jugador veto, $N\backslash x \not\subset U_j$ y como

$$\bigcap_{j\in J} U_j \subset U_j, \text{ entonces } N\backslash x \not\subset \bigcap_{j\in J} U_j$$

Es decir, $N\backslash x$ no está en la clase intersección, por tanto x es veto para dicha clase. Y esto ocurre para todos los vetos de las clases intersecadas. $\square$

El juego marginal correspondiente a la intersección de clases $\bigwedge\limits_{j\in J} v_j$, hereda los jugadores vetos de cada una de las clases, por lo que reparte su valor entre ellos.

Ejemplo 4.3.2 *Sea el juego simple vectorial (N, ν) definido sobre $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ cuya clasificación asociada es:*

Clases	*Coaliciones*
U_1	$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5\}$
U_2	$\{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\}, \{1,2,3,4,5\}$

Al agregar por intersección las clases U_1 y U_2 del juego (N, ν), el nuevo juego simple vectorial (N, ν'') obtenido tiene la clasificación asociada:

Clases	*Coaliciones*
$U_1'' = U_1$	$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5\}$
$U_2'' = U_2$	$\{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\}, \{1,2,3,4,5\}$
$U_*'' = U_1 \cap U_2$	$\{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\}, \{1,2,3,4,5\}$

Los jugadores vetos de las clases U_1'' *y* U_2'' *son los mismos que los de* U_1 *y* U_2*, respectivamente, mientras que los de* U_*'' *son los de ambas.*

$$\mathcal{V}_1'' = \{1\}, \quad \mathcal{V}_2'' = \{2\} \quad y \quad \mathcal{V}_*'' = \{1, 2\}$$

Corolario 4.3.2 *El core del juego simple marginal correspondiente a la intersección de varias clases no está vacío si, al menos, una clase tiene un jugador veto.*

Demostración.
La demostración se sigue del hecho de que la intersección de clases hereda todos los jugadores vetos de cada una de las clases intersecadas y como, además, el juego marginal correspondiente es escalar, por el teorema de Owen, si tiene algún jugador veto su core no es vacío. $\square$

Capítulo 5

JUEGOS SIMPLES VECTORIALES PONDERADOS

5.1. Introducción

Otro procedimiento alternativo al estudiado en el capítulo anterior para establecer la importancia de los jugadores es representar el juego a través de un sistema ponderado y podremos indicar el valor del juego, al igual que en el caso escalar, según los pesos de los jugadores.

En este capítulo partiendo de la ponderación desde el punto de vista escalar (Ver [11], [40], [41] y [26]), introduciremos un concepto similar para el caso vectorial. Veremos la relación existente entre los jugadores respecto a una clase o a varias, tanto en la forma canónica del juego como en la ponderada (Ver [6] y [25]).

Debemos de hacernos también la pregunta de si cualquier juego simple vectorial puede ser representado mediante una expresión ponderada, ya que de este modo podremos indicar el valor de un jugador a través de las expresiones ponderadas del juego. La contestación la damos mediante una extensión del clásico teorema de Taylor, el cuál, en este caso nos permite responder afirmativamente a la pregunta anteriormente planteada, pues podremos construir siempre, usando dicho teorema, una expresión ponderada asociada al juego simple vectorial considerado y además nos da una cota superior de la dimensión. Finalmente, estudiamos las consecuencias de este teorema para los juegos marginales de la agregación de clases.

5.2. Representaciones ponderadas de los juegos simples escalares

Un juego simple monótono es un par (N, v), en el que N es el conjunto de jugadores y v la función característica, $v : \mathcal{P}(N) \to \{0, 1\}$ definida por

$$\begin{cases} v(S) \in \{0,1\} & \forall S \in N \\ v(S) = 0 & si \quad S = \emptyset \\ v(S) \leq v(T) & si \quad S \subseteq T \end{cases}$$

que clasifica las coaliciones en dos familias, la familia de coaliciones ganadoras y la familia de coaliciones perdedoras:

$$\mathcal{W} = \{S | S \in \mathcal{P}(N) \text{ y } v(S) = 1\} \qquad y \qquad \mathcal{L} = \{S | S \in \mathcal{P}(N) \text{ y } v(S) = 0\}$$

Un caso particular de juegos simples monótonos son los sistemas de votación.

Los jugadores de un sistema de votación se conocen como votantes. Ante la presentación de una moción (o cualquier propuesta), cada uno tiene la posibilidad de responder con un sí o un no. El sistema de votación define el conjunto de reglas que especifican cuando un conjunto de síes consigue sacar adelante la moción (coalición ganadora) y cuando no (coalición perdedora). Un ejemplo de sistema de votación es el siguiente.

Ejemplo 5.2.1 ***El Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas*** *está formado actualmente por 15 países:*

1. *cinco permanentes con derecho a veto: China, Reino Unido, Francia, Federación Rusa y Estados Unidos, y*

2. *diez no permanentes: Alemania, Guinea, México, Pakistán, España, Siria, Angola, Bulgaria, Camerún y Chile.*

La aprobación de cualquier moción requiere al menos 9 votos afirmativos y ningún voto en contra de cualquiera de los 5 países con derecho a veto.

Un ejemplo de coalición perdedora en el conflicto de Iraq hubiera sido cualquier coalición en la que no participara Francia, puesto que previamente su ministro de AA.EE. había declarado que iba a ejercer el derecho a veto.

A veces, es posible asignar unos pesos a los jugadores, de forma que sumando los pesos de los miembros de una coalición si superan o igualan una cantidad fija (llamada cuota), las coalición será ganadora y si no supera dicha cantidad será perdedora. En base a ello, se dice que:

Definición 5.2.1 *Un juego simple es de mayoría ponderada si se pueden definir unos pesos w_i y una cuota q, $w_i, q \in \mathbb{R}$, de manera que una coalición S es ganadora si supera la cuota ($\sum_{i \in S} w_i \geq q$) y es perdedora si no supera dicha cuota ($\sum_{i \in S} w_i < q$).*

Abreviadamente, se escribirá JMP y se notará por $[q; w_1, w_2, ..., w_n]$.

Ejemplo 5.2.2 *El Parlamento Europeo actual es un sistema de votación cuyo reglamento interno da a sus miembros los siguientes pesos:*

Paises	*Peso*
Alemania	99
Francia, Reino Unido, Italia	87
España	64
Holanda	31
Bélgica, Grecia, Portugal	25
Suecia	22
Austria	21
Dinamarca, Finlandia	16
Irlanda	15
Luxemburgo	6

y establece la cuota de 314, la mitad más uno de la suma de todos los pesos, para obtener mayorías.

De esta forma, tenemos definido de forma casi inmediata el juego simple de mayoría ponderada

$$[314; 99, 87, 87, 87, 64, 31, 25, 25, 25, 22, 21, 16, 16, 15, 6]$$

Un ejemplo de coalición ganadora, S, estaría formada por Alemania, Reino Unido, Francia e Italia:

$$w(S) = 99 + 3 \times 87 = 360 \geq 314$$

y de una coalición perdedora, T, por España y Holanda:

$$w(T) = 64 + 31 = 95 < 314$$

5.2.1. Juegos simples definidos por un juego de mayoría ponderada

En algunos casos, un juego simple escalar se puede representar por un solo juego de mayoría ponderada. Los pesos y la cuota del JMP pueden establecerse a priori o pueden hallarse a partir de la definición del juego.

Ejemplo 5.2.1 (Continúa) *En el caso del Consejo de Seguridad, los pesos y la cuota se calculan aplicando la definición de este sistema de votación (Taylor, [26], [41] y [40]) y resulta que el Consejo de Seguridad es un juego de mayoría ponderada que asigna peso 1 a los miembros no permanentes y peso 7 a los permanentes y establece la cuota en 39. Notemos que el poder de veto de un miembro permanente, como es el caso de Francia, significa que la coalición formada por todos los países menos Francia es perdedora*

$$4 \times 7 + 10 \times 1 = 28 + 10 = 38 < 39$$

En otros casos, son los pesos y la cuota los que definen el juego. El Parlamento Europeo es un ejemplo de un sistema de votación que está definido por un juego de mayoría ponderada al definir expresamente la ponderación y la cuota.

5.2.2. Juegos simples escalares definidos por un juego de vector ponderado

Sin embargo, no siempre un juego simple escalar viene definido por un conjunto de pesos y una cuota escalares. A veces, los pesos y las cuotas son vectoriales.

Definición 5.2.2 *Un juego simple es de vector ponderado cuando existen unos pesos $\overrightarrow{w}_i \in \mathbb{R}^k$ y una cuota $\overrightarrow{q} \in \mathbb{R}^k$ vectoriales, $[\overrightarrow{q}; \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, ..., \overrightarrow{w}_n]$, de manera que una coalición es ganadora si supera cuota ($w(S) = \sum_{i \in S} \overrightarrow{w}_i \geq \overrightarrow{q}$) y es perdedora si no supera cuota ($w(S) = \sum_{i \in S} \overrightarrow{w}_i \ngeq \overrightarrow{q}$).*

Ejemplo 2.4.5 (Continúa) *Este es el caso del Sistema Federal Americano que se puede representar por un juego simple de vector ponderado definido por un vector cuota y unos vectores pesos (del Presidente, del Vicepresidente, de los 435 Congresistas y de los 100*

Senadores)

$$\left[\begin{pmatrix} 67 \\ 290 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 16\frac{1}{2} \\ 72 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overset{435}{\dots}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overset{100}{\dots}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

Esta caracterización nos permite saber si una coalición es ganadora o perdedora con sólo calcular su peso. Por ejemplo, la coalición S *formada por* 52 *senadores, el Presidente y* 230 *congresistas es ganadora porque su peso supera la cuota*

$$w(S) = 52 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16\frac{1}{2} \\ 72 \end{pmatrix} + 230 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68\frac{1}{2} \\ 302 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 67 \\ 290 \end{pmatrix}$$

mientras que la coalición T *formada por* 48 *senadores y* 300 *congresistas es perdedora porque su peso no supera la cuota*

$$w(T) = 48 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 300 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 300 \end{pmatrix} \ngeq \begin{pmatrix} 67 \\ 290 \end{pmatrix}$$

no siendo posible representar dicho sistema de votación mediante pesos y cuota escalares.

El juego simple escalar de vector ponderado se suele representar por

$$\left[\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_m \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ \dots \\ w_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_{12} \\ w_{22} \\ \dots \\ w_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} w_{1n} \\ w_{2n} \\ \dots \\ w_{mn} \end{pmatrix}\right]$$

y puede ser interpretado como la intersección de los m juegos de mayoría ponderada:

$$[q_1; w_{11}, w_{12}, \dots, w_{1n}], [q_2; w_{21}, w_{22}, \dots, w_{2n}], \dots, [q_m; w_{m1}, w_{m2}, \dots, w_{mn}]$$

Ejemplo 2.4.5 (Continúa) *El Sistema Federal se obtiene como la intersección de dos juegos de mayoría ponderada, los que se desarrollan en cada una de las cámaras*

$$\textit{Congreso:} \left[\begin{array}{c|cccccccc} 290 & 72 & 0 & 1 & \overbrace{\cdots}^{435} & 1 & 0 & \overbrace{\cdots}^{100} & 0 \end{array}\right]$$

$$\textit{Senado:} \left[\begin{array}{c|cccccccc} 67 & 16\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \overbrace{\cdots}^{435} & 0 & 1 & \overbrace{\cdots}^{100} & 1 \end{array}\right]$$

pudiendo verse los diferentes pesos que tienen el Presidente, el Vicepresidente, los Congresistas y los Senadores en ambas cámaras.

Los juegos simples considerados hasta ahora son juegos simples escalares, ya que, en cualquiera de los dos casos, si es un juego de mayoría ponderada o un juego de vector ponderado*, las coaliciones se clasifican en dos familias, la de las coaliciones ganadoras y la de las coaliciones perdedoras. Por tanto, se puede enunciar el siguiente teorema clásico (Taylor, [26],[41] y [40]).

Teorema 5.2.1 *Un juego simple escalar se puede representar siempre como un juego de vector ponderado.*

5.3. Representaciones ponderadas de los juegos simples vectoriales

El problema que nos planteamos ahora es ver si es posible encontrar una representación ponderada de los juegos simples vectoriales.

Generalizando el caso escalar, podemos definir la representación ponderada de un juego simple vectorial.

Definición 5.3.1 *Se llama representación ponderada de un juego simple vectorial a un conjunto de vectores-peso* $\overrightarrow{w}_i \in \mathbb{R}^k$ *(*$i \in \{1, 2, ..., n\}$*) y vectores-cuota* $\overrightarrow{q}_l \in \mathbb{R}^k$ *(*$l \in \{1, 2, ..., p\}$*)*

$$\overrightarrow{w}_i = \begin{pmatrix} w_{1i} \\ w_{2i} \\ \cdots \\ w_{ki} \end{pmatrix} \qquad y \ \overrightarrow{q}_l = \begin{pmatrix} q_{1l} \\ q_{2l} \\ \cdots \\ q_{kl} \end{pmatrix}$$

tales que clasifican a cualquier coalición S *en alguna de las* r *clases, según que su peso,* $w(S) = \sum_{i \in S} \overrightarrow{w}_i$*, supere alguna de las cuotas que caracterizan a dicha clase.*

Es decir, el juego simple vectorial en forma canónica, (N, ν)*, tendrá una representación ponderada si está definido por la función característica* $\nu : \mathcal{P}(N) \to \{0, 1\}^r$ *tal que* $\forall S \in \mathcal{P}(N)$*:*

$$\nu(S) = (\nu_1(S), \nu_2(S), ..., \nu_r(S)) \quad y \quad \nu_j(S) = \begin{cases} 1 & si \quad \exists \overrightarrow{q}_l \in \mathcal{Q}_j : w(S) \geq \overrightarrow{q}_l \\ 0 & si \quad \forall \overrightarrow{q}_l \in \mathcal{Q}_j : w(S) \ngeq \overrightarrow{q}_l \end{cases}$$

Se representará por

$$[\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \cdots, \mathcal{Q}_r | \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, \cdots, \overrightarrow{w}_n]$$

*Notemos que un juego de mayoría ponderada es un juego de vector ponderado dado por una sola ponderación escalar.

Nótese que en este caso, a diferencia del visto en el apartado anterior, no solamente la clasificación no es dicotómica, sino que además cualquiera de las clases puede estar definida por un conjunto finito de cuotas.

Ejemplo 1.2.1 (Continúa) *El juego de votación simultánea definido mediante una clasificación U dada por los patrones $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)$, dónde los tres primeros son minimales y el cuarto (correspondiente a la clase residual) es maximal:*

1. $\mathbf{P}_1 = \{(1,1,1,0,0), (1,1,0,0,1)\}$
2. $\mathbf{P}_2 = \{(0,0,0,1,1)\}$
3. $\mathbf{P}_3 = \{(0,1,0,1,0), (0,0,1,1,0)\}$
4. $\mathbf{P}_4 = \{(1,1,0,0,0), (1,0,1,0,0), (1,0,0,1,0), (1,0,0,0,1), (0,1,0,0,1), (0,0,1,0,1)\}$

es un juego simple vectorial en forma ponderada.

La expresión ponderada del juego es

$$[\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3 | \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, \cdots, \overrightarrow{w}_{100}]$$

siendo

$$\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 51 \\ 51 \\ 51 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 51 \\ 51 \\ 0 \\ 0 \\ 51 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 51 \\ 51 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{Q}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 51 \\ 0 \\ 51 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 51 \\ 51 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y los vectores peso de cada jugador son 5-uplas de ceros y unos, con 3 *unos como máximo.*

De esta manera, tenemos definido el juego simple vectorial pues sabemos a qué familia o familias pertenece cada coalición. Así, una coalición S formada por 63 *votantes, de los que* 53 *votan a los candidatos segundo y cuarto,* 8 *votan al cuarto y al quinto y* 2 *votan al primero, segundo y tercero, tiene peso*

$$w(S) = 53 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 8 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 53+2 \\ 2 \\ 53+8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 55 \\ 2 \\ 61 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Por tanto, pertenece a la familia U_3 porque supera la primera cuota de $\mathcal{Q}_3$.

Dado un juego simple vectorial por su representación ponderada, el juego marginal realizado respecto de una clase es un juego simple escalar, cuyas coaliciones ganadoras son las que superan alguna de las cuotas que definen la clase y las perdedoras el resto. Es, por tanto, un juego simple de vector ponderado, que llamaremos generalizado para distinguirlo del juego simple de vector ponderado en el que una coalición es ganadora si supera una sola cuota vectorial $q \in \mathbb{R}^k$.

Definición 5.3.2 *Un juego simple escalar es de vector ponderado generalizado si existen unos vectores-peso $\overrightarrow{w}_i$ ($i \in \{1, 2, ..., n\}$) y unos vectores-cuota $\overrightarrow{q}_l$ ($l \in \{1, 2, ..., p\}$)*

$$\overrightarrow{w}_i = \begin{pmatrix} w_{1i} \\ w_{2i} \\ \ldots \\ w_{ki} \end{pmatrix} \qquad y \ \overrightarrow{q}_l = \begin{pmatrix} q_{1l} \\ q_{2l} \\ \ldots \\ q_{kl} \end{pmatrix}$$

tales que clasifican a cualquier coalición S según su peso, $w(S) = \sum_{i \in S} \overrightarrow{w}_i$, en dos clases $\{\mathcal{W}, \mathcal{L}\}$, las que superan alguna cuota ($\mathcal{W}$) y las que no superan ninguna cuota ($\mathcal{L}$).

Es decir, el juego simple escalar en forma canónica, (N, ν), tendrá una representación ponderada generalizada si está definido por la función característica $\nu : \mathcal{P}(N) \to \{0, 1\}$ tal que

$$\forall S \in \mathcal{P}(N): \quad \nu(S) = \begin{cases} 1 & si \ \ \exists \overrightarrow{q}_l \ se \ cumple \ que \ w(S) \geq \overrightarrow{q}_l \\ 0 & si \ \ \forall \overrightarrow{q}_l \ se \ cumple \ que \ w(S) \ngeq \overrightarrow{q}_l \end{cases}$$

5.4. Operaciones de agregación en representaciones ponderadas

Las diferentes operaciones de agregación de clases, estudiadas en capítulos anteriores, pueden realizarse también a través de las representaciones ponderadas.

Partimos, en todos los casos de un juego simple vectorial (N, ν) con clasificación asociada $U = \{U_1, ..., U_r\}$ y representación ponderada

$$[\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \cdots, \mathcal{Q}_r | \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, \cdots, \overrightarrow{w}_n]$$

1. Agregación de clases por unión

   Al agregar por unión las $|J|$ clases $\{U_{i_1}, ...U_{i_{|J|}}\}$ de un juego simple vectorial en forma ponderada, obtenemos un nuevo juego simple vectorial formado por las $r + 1$ clases $\{U_1', ..., U_r', U_*'\}$, cuya representación es la siguiente

$$\left[\mathcal{Q}_1', \mathcal{Q}_2', \cdots, \mathcal{Q}_r', \mathcal{Q}_*' | \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, \cdots, \overrightarrow{w}_n\right]$$

siendo

$$\begin{cases} \mathcal{Q}'_j = \mathcal{Q}_j & si \quad j \in \{1, 2, ..., r\} \\ \mathcal{Q}'_* = \bigcup_{j \in J} \mathcal{Q}_j \end{cases}$$

Es decir, la nueva clase U'_* está definida por todas las cuotas de cada una de las clases agregadas por la unión.

2. Agregación de clases por intersección

   Al agregar por intersección las $|J|$ clases $\{U_{i_1}, ...U_{i_{|J|}}\}$ de un juego simple vectorial en forma ponderada, obtenemos un nuevo juego simple vectorial formado por $r+1$ clases, cuya representación es la siguiente

$$\left[\mathcal{Q}''_1, \mathcal{Q}''_2, \cdots, \mathcal{Q}''_r, \mathcal{Q}''_* | \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, \cdots, \overrightarrow{w}_n\right]$$

   siendo $\mathcal{Q}''_j = \mathcal{Q}_j$ si $j \in \{1, 2, ..., r\}$ y $\mathcal{Q}''_*$ está formada por los siguientes supremos q_l

$$\overrightarrow{q}_l = \overrightarrow{q}_{i_1} \vee \overrightarrow{q}_{i2} \vee ... \vee \overrightarrow{q}_{i_J}, \forall \overrightarrow{q}_{i_j} \in \mathcal{Q}_j, j \in J \text{ y } l \in \prod_{j \in J} card(\mathcal{Q}_{i_j})$$

Ejemplo 1.2.1 (Continúa) *En el juego de votación simultánea definido por la clasificación* $U = \{U_1, U_2, U_3\}$ *de patrones minimales*

- $\mathbf{P}_1 = \{(1,1,1,0,0), (1,1,0,0,1)\}$
- $\mathbf{P}_2 = \{(0,0,0,1,1)\}$
- $\mathbf{P}_3 = \{(0,1,0,1,0), (0,0,1,1,0)\}$

vamos a ver las expresiones ponderadas de los nuevos juegos construidos por operaciones de agregación :

1. Agregación por unión

   Si agregamos las dos últimas clases por unión, obtenemos un nuevo juego de clasificación $U' = \{U'_1, U'_2, U'_3, U'_*\}$*, dónde* $U'_i = U_i$*,* $i \in \{1, 2, 3\}$*, y* $U'_* = U_2 \cup U_3$ *de patrones minimales* $\mathbf{P}'_i = \mathbf{P}_i$*,* $i \in \{1, 2, 3\}$*, y* $\mathbf{P}'_* = \mathbf{P}_2 \cup \mathbf{P}_3 = \{(0,0,0,1,1), (0,1,0,1,0), (0,0,1,1,0)\}$.

   Y cuya representación ponderada es $[\mathcal{Q}'_1, \mathcal{Q}'_2, \mathcal{Q}'_3, \mathcal{Q}'_*; \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, ..., \overrightarrow{w}_{100}]$*, siendo*

$$\mathcal{Q}'_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 51 \\ 51 \\ 51 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 51 \\ 51 \\ 0 \\ 0 \\ 51 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{Q}'_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 51 \\ 51 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{Q}'_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 51 \\ 0 \\ 51 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 51 \\ 51 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \; y$$

$$\mathcal{Q}'_* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 51 \\ 51 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 51 \\ 0 \\ 51 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 51 \\ 51 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Agregación por intersección

   Si agregamos las dos últimas clases por intersección, obtenemos un nuevo juego de clasificación $U'' = \{U''_1, U''_2, U''_3, U''_*\}$*, con* $U''_i = U_i$*,* $i \in \{1,2,3\}$*, y* $U''_* = U_2 \cap U_3$ *y cuyos patrones son* $\mathbf{P}''_i = \mathbf{P}_i$*,* $i \in \{1,2,3\}$*, mientras que* $\mathbf{P}''_*$ *viene dado por los supremos de las cuotas de* U_2 *y* U_3*:* $(0,0,0,51,51) \vee (0,51,0,51,0) = (0,51,0,51,51)$ *y* $(0,0,0,51,51) \vee (0,0,51,51,0) = (0,0,51,51,51)$. *Su representación ponderada es* $[\mathcal{Q}''_1, \mathcal{Q}''_2, \mathcal{Q}''_3, \mathcal{Q}''_*; \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, ..., \overrightarrow{w}_{100}]$*, siendo:*

$$\mathcal{Q}''_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 51 \\ 51 \\ 51 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 51 \\ 51 \\ 0 \\ 0 \\ 51 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{Q}''_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 51 \\ 51 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{Q}''_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 51 \\ 0 \\ 51 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 51 \\ 51 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ y}$$

$$\mathcal{Q}''_* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 51 \\ 0 \\ 51 \\ 51 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 51 \\ 51 \\ 51 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo 2.4.5 (Continúa) *Supongamos un juego simple vectorial derivado del Sistema Federal cuya representación ponderada es la siguiente:*

$$\left[\begin{array}{c|c|cc||ccccccccc} 75 & 50 & 70 & 67 & 16\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 218 & 290 & 240 & 250 & 72 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]$$

La clasificación asociada está formada por tres clases. La clase U_1 *de las coaliciones que superan la primera cuota* $\begin{pmatrix} 75 \\ 218 \end{pmatrix}$*, la clase* U_2 *de las coaliciones que superan la segunda cuota* $\begin{pmatrix} 50 \\ 290 \end{pmatrix}$ *y la clase* U_3 *de las coaliciones que superan la tercera* $\begin{pmatrix} 70 \\ 240 \end{pmatrix}$

o/y la cuarta cuota $\begin{pmatrix} 67 \\ 250 \end{pmatrix}$. *Nótese que dicho juego representa tres tipos de votación que se podrían llevar a cabo en el Sistema Federal. Cuando realizamos operaciones de agregación de clases podemos obtener diferentes tipos de sistemas de votación, incluso el propio Sistema Federal.*

Si agregamos por intersección las clases U_2 *y* U_3 *y luego hacemos el juego marginal respecto a la clase intersección, obtenemos el Sistema Federal.*

La clase intersección tiene por cuotas minimales los supremos de una cuota de U_2 *y una de* U_3

$$\begin{pmatrix} 50 \\ 290 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 70 \\ 240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 290 \end{pmatrix} \;y\; \begin{pmatrix} 50 \\ 290 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 67 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 \\ 290 \end{pmatrix}$$

En este caso resulta un sistema definido por la segunda cuota, ya que la primera está dominada por ella y, por tanto, es equivalente al Sistema Federal.

5.4.1. Propiedades

Teorema 5.4.1 *Cada uno de los juegos marginales de un juego simple vectorial en forma ponderada es un juego simple de vector ponderado generalizado.*

Demostración.

Si el juego simple vectorial viene dado por $[\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \cdots, \mathcal{Q}_r | \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, \cdots, \overrightarrow{w}_n]$ y consideramos el juego simple marginal respecto de la clase U_i, $[\mathcal{Q}_i; \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, ..., \overrightarrow{w}_n]$, cuya familia SI es U_i y cuya familia NO es el resto, $\mathcal{P}(N) \backslash U_i$, obtenemos un juego simple de vector ponderado generalizado. $\square$

Definición 5.4.1 *Dado un juego simple vectorial* (N, U) *de clasificación* $U = \{U_1, U_2, ..., U_r\}$ *y* $N' \subset N$*, se llama subjuego al par* (N', U')*, dónde* $U' = \{U_1 \cap N', U_2 \cap N', ..., U_r \cap N'\}$. *Y* (N', U') *es denso si todos los jugadores de* $N \backslash N'$ *son nulos.*

Teorema 5.4.2 *Si* (N', U') *es un juego simple vectorial en forma ponderada, subjuego denso de* (N, U)*, entonces* (N, U) *es un juego simple vectorial en forma ponderada.*

Demostración.

Sea $N' = \{1, 2, ..., n'\} \subseteq N$. Por hipótesis, (N', U') tiene la expresión ponderada

$$[Q_1^{'}, Q_2^{'}, ..., Q_p^{'} | \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, ..., \overrightarrow{w}_{n'}]$$

Como los jugadores de $N\backslash N'$ son nulos absolutos, les damos peso nulo y tenemos la expresión ponderada de (N, U)

$$[Q_1', Q_2', ..., Q_p' | \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, ..., \overrightarrow{w}_{n'}, \overrightarrow{0}, ..., \overrightarrow{0}] \qquad \square$$

5.5. Relaciones entre jugadores de un juego simple vectorial

La relación de deseabilidad se extiende a los juegos simples vectoriales de una forma natural.

En el caso escalar las definiciones hacen referencia a las clases del juego, $\mathcal{W}$ y $\mathcal{L}$. Así, se dice que un jugador $\{x\}$ es menos o igual deseable que otro $\{y\}$ cuando al unirse $\{x\}$ a una coalición cualquiera X $(x, y \notin X)$, si $X \cup \{x\}$ es ganadora, también lo es $X \cup \{y\}$, etc.

En el caso vectorial, las definiciones hacen referencia a las diferentes clases $\{U_1, U_2, ..., U_r\}$.

Definición 5.5.1 *Un jugador $\{x\}$ es menos o igual deseable que otro $\{y\}$ respecto a una clase U_i, $x \preceq_i y$, cuando*

$$\forall X \in \mathcal{P}(N\backslash\{x, y\}) \textit{ se cumple } X \cup \{x\} \in U_i \Rightarrow X \cup \{y\} \in U_i$$

La relación $\preceq_i$ es un preorden, ya que es reflexiva y transitiva. Debido a la ausencia de antisimetría, definimos la relación de equivalencia asociada, $\sim_i$,

$$x \sim_i y \Leftrightarrow x \preceq_i y \text{ e } y \preceq_i x$$

y diremos que

Definición 5.5.2 *Dos jugadores $\{x\}$ e $\{y\}$ tienen el mismo poder, la misma influencia o son igualmente deseables respecto a una clase U_i, $x \sim_i y$, cuando $\forall X \in \mathcal{P}(N)$:*

$$X \cup \{x\} \in U_i \Leftrightarrow X \cup \{y\} \in U_i$$

$$X \cup \{x\} \notin U_i \Leftrightarrow X \cup \{y\} \notin U_i$$

La relación $\sim_i$ clasifica al conjunto de jugadores en clases de equivalencia respecto a U_i, $N/\sim_i$, cada una de las cuáles está formada por los jugadores igualmente deseables para la clase U_i. La relación $\preceq_i$ induce un orden parcial en el conjunto cociente.

$$N/\sim_i = \{N_1^i, N_2^i, ..., N_{n_i}^i\}$$

representando cada clase N_j^i el conjunto de jugadores que son igualmente comparables entre si. Si el orden es total (o lo que es igual, dos jugadores son siempre comparables), se podrá escribir:

$$N_1^i \geq N_2^i \geq ... \geq N_{n_i}^i$$

en dónde $N_{j_1}^i \geq N_{j_2}^i$ indica que los jugadores de la primera clase son más deseables que los de la segunda respecto a la clase U_i del juego.

Definición 5.5.3 *Una clase es completa cuando todo par de jugadores son comparables respecto de ella.*

Definición 5.5.4 *Un juego simple vectorial es completo cuando todas sus clases son completas y en cada una de ellas los jugadores están ordenados de la misma forma.*

El juego simple marginal respecto de una clase de un juego simple vectorial completo es completo, pero puede ocurrir que todos los juegos marginales respecto de cada una de las clases sean completos y el juego simple vectorial no sea completo, porque los jugadores tengan distintos órdenes en las clases.

Si existen jugadores-veto para una clase completa, estos forman la clase más deseada, mientras que los jugadores nulos forman la clase de los menos deseados.

Ejemplo 5.5.1 *Sea el juego simple vectorial (N, v) dado en forma canónica, cuya clasificación viene dada por*

$$\begin{cases} U_1 = \{123, 124, 125, 234, 235, 245, 1234, 1235, 1245, 1345, 2345, N\} \\ U_2 = \{134, 135, 145, 1234, 1235, 1245, 1345, 2345, N\} \\ U_3 = \{234, 235, 245, 345, 1234, 1235, 1245, 1345, 2345, N\} \\ \mathcal{R} = \{\emptyset, 1, 2, 3, 4, 5, 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45\} \end{cases}$$

Comparamos todos los posibles pares de jugadores, viendo qué ocurre al añadir uno u otro a una coalición cualquiera. Con las coaliciones de un jugador no es necesario hacerlo porque resultan coaliciones de dos votantes y son todas residuales, ni con las coaliciones de tres votantes porque resultan coaliciones de cuatro votantes y todas ellas son ganadoras absolutas.

1. *Comparación de 1 y 2*

$v(134) = (0,1,0) \diamond v(234) = (1,0,1)$	$1 \leq_1 2$
$v(135) = (0,1,0) \diamond v(235) = (1,0,1)$	$1 \leq_3 2$
$v(145) = (0,1,0) \diamond v(245) = (1,0,1)$	$1 \geq_2 2$

2. *Comparación de 1 y 3*

$v(124) = (1,0,0) \diamond v(234) = (1,0,1)$	$1 \sim_1 3$
$v(125) = (1,0,0) \diamond v(235) = (1,0,1)$	$1 \leq_3 3$
$v(145) = (0,1,0) \diamond v(345) = (0,0,1)$	$1 \geq_2 3$

3. *Comparación de 1 y 4*

$v(123) = (1,0,0) \diamond v(234) = (1,0,1)$	$1 \sim_1 4$
$v(125) = (1,0,0) \diamond v(245) = (1,0,1)$	$1 \leq_3 4$
$v(135) = (0,1,0) \diamond v(345) = (0,0,1)$	$1 \geq_2 4$

4. *Comparación de 1 y 5*

$v(123) = (1,0,0) \diamond v(235) = (1,0,1)$	$1 \sim_1 5$
$v(124) = (1,0,0) \diamond v(245) = (1,0,1)$	$1 \leq_3 5$
$v(134) = (0,1,0) \diamond v(345) = (0,0,1)$	$1 \geq_2 5$

5. *Comparación de 2 y 3*

$v(124) = (1,0,0) \diamond v(134) = (0,1,0)$	$2 \leq_2 3$
$v(125) = (1,0,0) \diamond v(135) = (0,1,0)$	$2 \sim_3 3$
$v(245) = (1,0,1) \diamond v(345) = (0,0,1)$	$2 \geq_1 3$

6. *Comparación de 2 y 4*

$v(123) = (1,0,0) \diamond v(134) = (0,1,0)$	$2 \geq_1 4$
$v(125) = (1,0,0) \diamond v(145) = (0,1,0)$	$2 \leq_2 4$
$v(235) = (1,0,1) \diamond v(345) = (0,0,1)$	$2 \sim_3 4$

7. *Comparación de 2 y 5*

$v(123) = (1,0,0) \diamond v(135) = (0,1,0)$	$2 \geq_1 5$
$v(124) = (1,0,0) \diamond v(145) = (0,1,0)$	$2 \leq_2 5$
$v(234) = (1,0,1) \diamond v(345) = (0,0,1)$	$2 \sim_3 5$

8. *Comparación de 3 y 4*

$v(123) = (1,0,0) \diamond v(124) = (1,0,0)$	$3 \sim 4$
$v(135) = (0,1,0) \diamond v(145) = (0,1,0)$	
$v(235) = (1,0,1) \diamond v(245) = (1,0,1)$	

9. Comparación de 3 y 5

$v(123) = (1,0,0) \diamond v(125) = (1,0,0)$	$3 \sim 5$
$v(134) = (0,1,0) \diamond v(145) = (0,1,0)$	
$v(234) = (1,0,1) \diamond v(245) = (1,0,1)$	

10. Comparación de 4 y 5

$v(124) = (1,0,0) \diamond v(125) = (1,0,0)$	$4 \sim 5$
$v(134) = (0,1,0) \diamond v(135) = (0,1,0)$	
$v(234) = (1,0,1) \diamond v(235) = (1,0,1)$	

De esta forma, el orden es completo respecto de cada clase:

1. *Respecto a* U_1: $\{2\} \geq_1 \{1,3,4,5\}$
2. *Respecto a* U_2: $\{1\} \geq_2 \{3,4,5\} \geq_2 \{2\}$
3. *Respecto a* U_3: $\{2,3,4,5\} \geq_3 \{1\}$

y por ser completo, los pesos de los jugadores están ordenados en forma escalar o vectorial. En el caso que nos ocupa escalar y cada una de las clases se puede expresar por un JMP: $[4;1,2,1,1,1]$, $[7;3,1,2,2,2]$ *y* $[6;1,2,2,2,2]$, *respectivamente.*

Entonces, el juego simple vectorial tiene la representación ponderada:

$$\left[\begin{array}{c|c|c||ccccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

por lo que podemos observar que el juego simple vectorial no es completo, pero si los marginales de cada una de sus tres clases.

También, se puede definir la relación extendida a un conjunto de clases o a todas las clases:

Definición 5.5.5 *Un jugador* $\{x\}$ *es menos o igual deseable que otro* $\{y\}$ *respecto a una serie de clases* U_i, *con* $i \in I \subset \{1,2,...,r\}$, $x \preceq_I y$, *cuando*

$$\forall X \in \mathcal{P}(N \backslash \{x,y\}) \text{ y } \forall i \in I \text{ se cumple } X \cup \{x\} \in U_i \Rightarrow X \cup \{y\} \in U_i$$

Definición 5.5.6 *Un jugador* $\{x\}$ *es menos o igual deseable que otro* $\{y\}$ *respecto a todas las clases* U_i, $x \preceq y$, *cuando*

$$\forall X \in \mathcal{P}(N \backslash \{x, y\}) \text{ y } \forall i \in \{1, 2, ..., r\} \text{ se cumple } X \cup \{x\} \in U_i \Rightarrow X \cup \{y\} \in U_i$$

o también,

Definición 5.5.7 *Un jugador* $\{x\}$ *es menos o igual deseable que otro* $\{y\}$ *respecto a todas las clases* U_i, $x \preceq y$ *si al superar* $X \cup \{x\}$ *una cuota de cualquier clase, también* $X \cup \{y\}$ *supera una cuota de la misma clase.*

En el caso general, para el juego simple vectorial en forma canónica (N, ν), las relaciones "menor o igualmente deseables" quedarían como:

$$x \preceq_i y \Leftrightarrow \nu_i(X \cup \{x\}) \leq \nu_i(X \cup \{y\})$$

$$x \preceq_I y \Leftrightarrow \nu_i(X \cup \{x\} \leq \nu_i(X \cup \{y\}), \quad \forall i \in I$$

$$x \preceq y \Leftrightarrow \nu(X \cup \{x\}) \leq \nu(X \cup \{y\})$$

Igualmente que en el caso escalar se decía que dos jugadores $\{x\}$ e $\{y\}$ no eran comparables cuando en unos casos convenía la unión con $\{x\}$ y en otros con $\{y\}$, sin seguir una regla fija, en el caso vectorial se dirá:

Definición 5.5.8 *Dos jugadores* $\{x\}$ *e* $\{y\}$ *no son comparables con respecto a una clase* U_i *cuando* $\exists X, X' \in \mathcal{P}(N \backslash \{x, y\})$ *tales que*

$$X \cup \{x\} \in U_i \text{ pero } X \cup \{y\} \notin U_i \text{ e } Y \cup \{y\} \in U_i \text{ pero } Y \cup \{x\} \notin U_i$$

En general, se escribe $x|_i y$.

De la misma forma, se definirían $x|_I y$ y $x|y$.

Ejemplo 5.5.1 (Continúa) *En este juego, respecto a todas las clases, los jugadores* $\{3\}$, $\{4\}$ *y* $\{5\}$ *son igualmente deseables y los jugadores* $\{1\}$ *y* $\{2\}$ *son incomparables entre si y con respecto a los demás.*

Teorema 5.5.1 *Si una clase es completa, el juego marginal respecto de ella es un juego simple completo, que puede ser representado por un juego de mayoría ponderado o una representación ponderada vectorial totalmente ordenada.*

Demostración: Al ser la clase completa, los jugadores se encuentran ordenados en clases de equivalencia y se puede representar por una ponderación cuyos pesos están totalmente ordenados, pudiendo ser éstos escalares (un JMP) o vectoriales. □

5.6. Relaciones entre jugadores de un juego en forma ponderada

En el caso en que el juego simple vectorial venga dado por su expresión ponderada, también se pueden considerar los conceptos de deseabilidad dados anteriormente.

5.6.1. Juegos simples escalares

En un juego simple escalar, en relación a las ponderaciones, debemos considerar dos casos:

1. El primero, cuando los pesos y la cuota son escalares.

   Es el caso de los JMP (juegos de mayoría ponderada), $[q; w_1, w_2, ..., w_n]$. En ellos, dos jugadores cualesquiera i y j son comparables, puesto que sus pesos guardan una de las relaciones: $w_i < w_j$ o $w_i > w_j$ o $w_i = w_j$. Luego, un JMP es siempre completo.

2. El segundo, cuando los pesos y la cuota son vectoriales.

   Es el caso de los juegos simples de vector ponderado o de vector ponderado generalizado.

   En los juegos simples de vector ponderado $[\vec{q}; \vec{w_1}, \vec{w_2}, ..., \vec{w_n}]$ ó de vector ponderado generalizado $[\vec{q_1}, \vec{q_2}, ..., \vec{q_p}, ; \vec{w_1}, \vec{w_2}, ..., \vec{w_n}]$,

$$\left[\begin{array}{c|cccc} q_1 & w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ q_2 & w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_m & w_{m1} & w_{m2} & \cdots & w_{mn} \end{array}\right] \quad \text{ó} \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1p} & w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2p} & w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \dots & q_{mp} & w_{m1} & w_{m2} & \cdots & w_{mn} \end{array}\right]$$

   Para que dos jugadores sean comparables en "sentido estricto" (componente a componente) se debe cumplir una cualquiera de las tres relaciones siguientes

$$\begin{pmatrix} w_{i1} \\ w_{i2} \\ \cdots \\ w_{im} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} w_{j1} \\ w_{j2} \\ \cdots \\ w_{jm} \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} w_{i1} \\ w_{i2} \\ \cdots \\ w_{im} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} w_{j1} \\ w_{j2} \\ \cdots \\ w_{jm} \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} w_{i1} \\ w_{i2} \\ \cdots \\ w_{im} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{j1} \\ w_{j2} \\ \cdots \\ w_{jm} \end{pmatrix}$$

   Por consiguiente, los pesos vectoriales tienen que estar ordenados (en los m JMP componentes, los pesos de los n jugadores están ordenados de la misma manera y los jugadores se pueden reordenar en orden creciente o decreciente según sus pesos, dando lugar a ponderaciones crecientes o decrecientes).

El juego simple $(N, \mathcal{W}^m)$, descrito por sus coaliciones ganadoras minimales

$$\mathcal{W}^m = \{123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156, 234, 235, 236, 245, 246, 256\}$$

es un juego completo (Carreras y Freixas, [30]). No es un JMP, sino un juego simple de vector ponderado descrito por la ponderación vectorial

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

y en forma clásica por dos ponderaciones decrecientes $[3; 1, 1, 1, 1, 1, 1]$ y $[5; 3, 3, 1, 1, 1, 1]$

Y, por tanto, el orden de los jugadores es $\{1, 2\} \geq \{3, 4, 5, 6\}$.

Es decir, exigir que un juego simple escalar sea completo (los pesos vectoriales de los jugadores estén ordenados) es un requisito demasiado fuerte que no todos los juegos simples de vector ponderado van a cumplir, como le sucede, por ejemplo, al Sistema Federal.

5.6.2. Juegos simples vectoriales

Cuando el juego simple vectorial viene dado por una expresión ponderada:

$$[\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \cdots, \mathcal{Q}_r | \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, \cdots, \overrightarrow{w}_n]$$

(las cuotas y los pesos son elementos de $\mathbb{R}^k$), las relaciones entre jugadores se pueden definir de forma análoga.

En general, decimos que dos jugadores son comparables cuando uno es menos deseable que otro o cuando son igualmente deseables. Ahora, diremos

Definición 5.6.1 *Un jugador $\{x\}$ es menos o igual deseable que otro $\{y\}$ respecto a una clase U_i, $x \preceq_i y$, cuando $\forall X \in \mathcal{P}(N \backslash \{x, y\})$,*

$$Si\ \exists \overrightarrow{q}_j^i \in \mathcal{Q}_i / w(X \cup \{x\}) \geq \overrightarrow{q}_j^i \quad \Rightarrow \quad \exists \overrightarrow{q}_l^i \in \mathcal{Q}_i / w(X \cup \{y\}) \geq \overrightarrow{q}_l^i$$

Esta relación $\preceq_i$ entre los jugadores es un preorden ya que es reflexiva y transitiva. La ausencia de antisimetría se puede subsanar definiendo cuando dos jugadores son igualmente deseables

Definición 5.6.2 *Dos jugadores $\{x\}$ e $\{y\}$ tienen el mismo poder, la misma influencia o son igualmente deseables respecto a una clase U_i, $x \sim_i y$, cuando $\forall X \in \mathcal{P}(N)$:*

1. *Si $X \cup \{x\}$ supera cuota en $\mathcal{Q}_i$, también $X \cup \{y\}$ y, viceversa.*

2. Si $X \cup \{x\}$ no supera cuota en $\mathcal{Q}_i$, tampoco $X \cup \{y\}$, ni a la inversa.

De esta forma la relación $\sim_i$ clasifica a los jugadores en clases de equivalencia. Cada clase de equivalencia está formada por todos los jugadores igualmente deseables respecto a la clase. En el caso en que todo par de jugadores son comparables respecto a la clase, el orden es total y la clase es completa.

Por último, diremos que

Definición 5.6.3 *Dos jugadores $\{x\}$ e $\{y\}$ no son comparables con respecto a una clase U_i cuando $\exists X, X' \in \mathcal{P}(N \backslash \{x,y\})$ tales que $X \cup \{x\}$ alcanza cuota en $\mathcal{Q}_i$ pero $X \cup \{y\}$ no, e $Y \cup \{y\}$ alcanza cuota en $\mathcal{Q}_i$ e $Y \cup \{x\}$ no.*

Estas relaciones pueden ser generalizadas a un conjunto de clases o a todas las clases de forma similar a como se hizo en la sección anterior.

Veamos en un ejemplo que si los vectores peso no están ordenados, el juego simple vectorial en forma ponderada no es completo.

Ejemplo 5.6.1 *Sea el juego simple vectorial en forma ponderada (N, U) dado por*

$$\left[\begin{array}{ll|l||llllll}
3,3 & 2 & 1,5 & 0,5 & 1 & 1 & 0,9 & 0,6 & 1,9 \\
1 & 1,5 & 1,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,6 & 0,4 & 0,1 \\
2,3 & 2 & 2,5 & 0,2 & 0,9 & 1,2 & 1 & 0,4 & 1 \\
1,8 & 2 & 1,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,2 & 1,2
\end{array}\right]$$

dónde $U = \{U_1, U_2, \mathcal{R}\}$ es la clasificación formada por dos clases positivas y una residual. La primera clase viene definida por los dos primeros vectores cuota y la segunda clase por el tercer vector cuota.

Si formamos todas las coaliciones posibles y calculamos su peso, observamos que las ganadoras minimales de U_1 son: $\{2,4,6\}$, $\{2,5,6\}$, $\{3,4,6\}$, $\{4,5,6\}$, $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3,6\}$, $\{1,3,4,5\}$ y $\{2,3,4,5\}$ y las de U_2: $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3,5\}$, $\{1,2,3,6\}$, $\{1,3,4,5\}$, $\{1,3,4,6\}$, $\{1,4,5,6\}$, $\{2,3,4,5\}$, $\{2,3,4,6\}$, $\{2,4,5,6\}$ y $\{3,4,5,6\}$.

Para comparar cada par de jugadores, por ejemplo $\{1\}$ y $\{2\}$, formamos todas las coaliciones, en las que no entran ellos, con posibilidades de ser ganadoras. A saber:

$$\{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,6\}, \{3,4,5\}, \{3,4,6\}, \{3,5,6\}, \{4,5,6\}$$

y añadimos a cada una de ellas los jugadores $\{1\}$ *y* $\{2\}$*:*

$134^{\mathcal{R}}$	$234^{\mathcal{R}}$	$156^{\mathcal{R}}$	256^{1}
$135^{\mathcal{R}}$	$235^{\mathcal{R}}$	1345^{1}	2345^{1}
$136^{\mathcal{R}}$	$236^{\mathcal{R}}$	1346^{2}	2346^{2}
$145^{\mathcal{R}}$	$245^{\mathcal{R}}$	$1356^{\mathcal{R}}$	$2356^{\mathcal{R}}$
$146^{\mathcal{R}}$	246^{1}	1456^{2}	2456^{2}

Y comparando la columna primera con la segunda y la tercera con la cuarta, vemos que respecto a U_1*,* $\{1\}$ *es menos deseable que* $\{2\}$ *e igualmente deseables con respecto a* U_2*.*

Una vez comparados todos los jugadores respecto a cada clase, llevamos los resultados a unas tablas:

U_1

	1	2	3	4	5	6
1		$\uparrow$	$\uparrow$	NO	NO	NO
2			$\uparrow$	NO	$\leftarrow$	NO
3				NO	NO	NO
4					$\leftarrow$	NO
5						NO
6						

U_2

	1	2	3	4	5	6
1		$\times$	$\uparrow$	$\uparrow$	NO	NO
2			$\uparrow$	$\uparrow$	NO	NO
3				NO	$\leftarrow$	$\leftarrow$
4					$\leftarrow$	$\leftarrow$
5						$\times$
6						

En dónde:

- $\times$ *indica que los jugadores son igualmente comparables*
- $\uparrow$ *indica que el jugador de la izquierda es menos deseable que el de arriba*
- $\leftarrow$ *indica que el jugador de arriba es menos deseable que el de la izquierda*
- *NO indica que los jugadores no son comparables*

Así, por ejemplo, observamos que

- $\{5\}$ *es menos deseable que* $\{3\}$ *respecto a* U_2 *porque* $\{3\}$ *hace ganadoras a las mismas coaliciones que* $\{5\}$ *(*$\{1,4,6\}$ *y* $\{2,4,6\}$*) y además a* $\{1,2,6\}$*, mientras que* $\{5\}$ *no.*
- $\{1\}$ *y* $\{2\}$ *son igualmente deseables respecto a* U_2 *ya que ambas hacen ganadoras a las coaliciones* $\{3,4,6\}$ *y* $\{4,5,6\}$ *y perdedoras a las demás.*
- $\{3\}$ *y* $\{5\}$ *no son comparables respecto a* U_1 *porque* $\{5\}$ *hace ganadora a* $\{2,6\}$ *y* $\{3\}$ *no y* $\{3\}$ *hace ganadora a* $\{1,2,4\}$ *y* $\{5\}$ *no. En este caso se escribe* $\{3\}|_1\{5\}$*.*

El esquema muestra la relación. En él, el sentido de la flecha indica menos deseable que y los jugadores entre llaves igualmente deseables.

$$
\begin{array}{ccccc}
\multicolumn{5}{c}{U_1} \\
\hline
 & & \{4\} & & \\
 & \nearrow & & & \\
\{5,6\} & & & & \{1\} \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 & & \{3\} & & \\
 & \nearrow & & & \\
\{2\} & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
\multicolumn{5}{c}{U_2} \\
\hline
 & & \{1,2\} & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
\{3\} & & & & \{4\} \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & \{5,6\} & &
\end{array}
$$

5.7. Resistencia a cambios

Tres son los conceptos de resistencia conocidos en el caso escalar (Taylor, [26], [41] y [40]) que ordenados del más débil al más fuerte, son: resistencia a cambios uno a uno, 2-resistencia a cambios y resistencia a cambios (En inglés: swap robust, 2-trade robust y trade robust, respectivamente). Veamoslos en los juegos simples vectoriales:

Definición 5.7.1 *Un juego simple vectorial es resistente a cambios uno a uno respecto a una clase cuando al intercambiar dos coaliciones A y B de la clase los jugadores $\{x\}$ e $\{y\}$ ($\{x\} \in A, \{y\} \in B, \{x\} \notin B, \{y\} \notin A$), al menos una de las coaliciones resultantes $A' = A - \{x\} + \{y\}$ y $B' = B - \{y\} + \{x\}$ pertenece a la clase.*

Definición 5.7.2 *Un juego simple vectorial es 2-resistente a cambios respecto a una clase cuando al intercambiar dos conjuntos de jugadores V_x y V_y de dos coaliciones A y B de la clase, al menos una de las coaliciones resultantes $A' = A - V_x + V_y$ y $B' = B - V_y + V_x$ pertenece a la clase.*

Definición 5.7.3 *Un juego simple vectorial es resistente a cambios respecto a una clase cuando al intercambiar jugadores de una familia de coaliciones de la clase, al menos una de las coaliciones resultantes pertenece a la clase.*

De manera análoga se darían las definiciones respecto de varias clases.

Dos resultados conocidos, el primero de Taylor y el segundo de Carreras y Freixas, del caso escalar son:

a) "un juego simple es un JMP sii es resistente a cambios"(Taylor, [26], [41] y [40]) y

b) “no todo juego simple completo es un JMP”(Carreras y Freixas, [30])

La demostración del primero se basaba en el hecho de que en un JMP todos los jugadores son comparables debido a que sus pesos son números reales y que $\mathbb{R}$ está totalmente ordenado. Para demostrar el segundo se ponía el contraejemplo de Carreras, es decir un juego simple completo que no es un JMP.

Por tanto:

Teorema 5.7.1 *Una clase resistente a cambios tiene como representación un JMP.*

Demostración.

Sabemos que el juego marginal respecto de una clase es un juego simple. Si este juego simple es un JMP, entonces es resistente a cambios, ya que ambas cosas son equivalentes. Por tanto, si la clase es resistente a cambios, tiene como representación ponderada un JMP. □

Teorema 5.7.2 *Sea un juego simple vectorial* (N, U) *y una familia de clases* $\{U_{i_1}, U_{i_2}, ..., U_{i_p}\}$ *resistentes a cambios, entonces las nuevas clases obtenidas por agregación son resistentes a cambios si sus juegos marginales asociados son JMP.*

Demostración. La demostración se deduce de dos resultados conocidos. El primero, obtenido por Taylor, dice que un juego simple es resistente a cambios sii es un JMP y el segundo que el juego simple marginal asociado a una clase de un juego simple vectorial es un juego simple escalar. □

5.8. Dimensión de un juego simple vectorial

Es conocido que todo juego simple escalar se puede expresar por una expresión ponderada de una de las dos formas siguientes:

1. por una ponderación escalar, $[q; w_1, w_2, ..., w_n]$, $w_i, q \in \mathbb{R}$, si es un juego simple escalar de mayoría ponderada (JMP) o,

2. por una ponderación vectorial, $[\overrightarrow{q}; \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, ..., \overrightarrow{w}_n]$, $\overrightarrow{w}_i, \overrightarrow{q} \in \mathbb{R}^k$, si es un juego simple escalar de vector ponderado.

En el primer caso, su dimensión es 1 y en el segundo su dimensión es k, siendo ésta el menor orden de todas sus ponderaciones vectoriales, entendiendo por orden de una ponderación vectorial la dimensión del espacio de sus vectores pesos o cuota.

Nos preguntamos ahora si un juego simple vectorial admite una representación ponderada y cuál sería su dimensión.

5.8.1. El teorema de Taylor y su extensión

Para un juego simple escalar cualquiera, Taylor comprueba que existe, al menos, una expresión de vector ponderado. Define la dimensión como el menor orden de todas las expresiones de vector ponderado que describen al juego y da una cuota superior de la dimensión.

Teorema 5.8.1 ***(Teorema de Taylor)*** *El número de coaliciones perdedoras de un juego simple escalar es una cota superior de su dimensión.*

La demostración se hace (Taylor, [26] y [41]) construyendo para cada coalición perdedora L un JMP en el que ella es perdedora y todas las demás ganadoras, para ello da peso -1 a cada uno de los jugadores de L, al resto de jugadores peso 1 y establece la cuota $-|L|+1$. De esta forma, una coalición cualquiera es ganadora si es ganadora en todos los JMP y perdedora en cualquier otro caso.

Pero, la cota superior puede disminuir en el caso de los juegos simples monótonos.

Teorema 5.8.2 ***(Teorema de Taylor)*** *El número de coaliciones maximales perdedoras p de un juego simple escalar monótono es una cota superior de su dimensión.*

La demostración se hace (Taylor, [40]) construyendo para cada coalición maximal perdedora L un JMP en el que ella es perdedora y todas las demás ganadoras, dando peso 1 a cada uno de los jugadores de L, al resto de jugadores peso $|L|+1$ y estableciendo la cuota $|L|+1$. De esta forma, en los p JMP son perdedoras todas las maximales perdedoras y todas sus subcoaliciones, mientras que el resto de coaliciones son ganadoras.

Dicho número p es una cota superior de la dimensión, ya que muchos juegos simples tienen un número elevado de coaliciones maximales perdedoras y, sin embargo, su dimensión es mucho más pequeña. Este es el caso del Sistema Federal que tiene un gran número de coaliciones perdedoras maximales y dimensión dos.

Nuestro interés se centra ahora en obtener un resultado parecido para el caso vectorial. Es decir, queremos representar todo juego simple vectorial en forma ponderada para así poder definir la dimensión. Sin embargo, veremos que todo juego simple vectorial puede ser representado de dos formas diferentes. La primera resulta de definir cada clase a través de más de una cuota y la segunda usando una sola cuota para cada clase y las llamaremos, respectivamente, representación ponderada generalizada y representación ponderada canónica del juego. Como pueden haber muchas representaciones ponderadas canónicas y cada una puede tener un orden distinto, llamamos dimensión al menor orden de todas ellas, entendiendo por orden la dimensión del espacio vectorial de los vectores pesos y cuotas de las distintas representaciones.

La demostración del teorema de Taylor extendido tiene una parte constructiva que nos da la forma de la expresión ponderada que tiene un juego simple vectorial cualquiera y partiendo de ella establecemos una cota de la dimensión del juego.

Teorema 5.8.3 ***(Teorema extendido de Taylor)*** *La dimensión de un juego simple vectorial definido por las clases U_1, U_2, ..., U_r, cuyas familias de coaliciones perdedoras son $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, ..., $\mathcal{L}_r$, está acotada superiormente por el cardinal de las coaliciones maximales perdedoras de la unión de todas ellas*

$$|\,(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{L}_r)^M\,|$$

Demostración.

La demostración del teorema tiene una primera parte constructiva en la que comprobamos que siempre es posible encontrar una expresión ponderada del juego simple vectorial, canónica o no, cuyo orden el número de coaliciones maximales perdedoras del juego simple vectorial. Y una segunda parte en la que constatamos que el orden de las representaciones que construimos es una cuota superior de la dimensión.

Sea p el número de coaliciones maximales perdedoras del juego simple vectorial. Unas, p_1 lo serán de la primera clase, otras, p_2 de la segunda, etc, pudiendo ocurrir que algunas sean perdedoras maximales de varias clases.

1. Expresión ponderada generalizada (cada clase viene dada por tantos vectores cuota como coaliciones maximales perdedoras tiene la clase)

   Para cada coalición perdedora maximal L_k^i de la clase U_i se construye un JMP en el que ella es perdedora y sus supercoaliciones son ganadoras, pero todas las demás coaliciones son perdedoras. Para ello, escogemos:

$$\forall k \in \{1, 2, ..., p_i\} \rightarrow \left[q_k^i; w_{k1}^i, w_{k2}^i, \cdots, w_{kn}^i\right] \begin{cases} w_{ki}^i = 1 & si \quad i \in L_k^i \\ w_{ki}^i < \frac{1}{n-|L_k^i|+1} & si \quad i \notin L_k^i \\ q_k^i = |L_k^i| + \frac{1}{n-|L_k^i|+1} & \end{cases}$$

   Así, encontramos para cada clase U_i la representación ponderada generalizada siguiente

$$\left[\begin{array}{cccc||cccc}
q_1^i & 0 & \cdots & 0 & w_{11}^i & w_{12}^i & \cdots & w_{1n}^i \\
0 & q_2^i & \cdots & 0 & w_{21}^i & w_{22}^i & \cdots & w_{2n}^i \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & q_{p_i}^i & w_{p_1 1}^i & w_{p_1 2}^i & \cdots & w_{p_i n}^i
\end{array}\right]$$

De esta forma, la expresión ponderada generalizada del juego simple vectorial de orden p adopta la forma:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc||cccc}
q_1^1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & w_{11}^1 & w_{12}^1 & \cdots & w_{1n}^1 \\
0 & q_2^1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & w_{21}^2 & w_{22}^2 & \cdots & w_{2n}^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & q_{p_1}^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & w_{p_1 1}^1 & w_{p_1 2}^1 & \cdots & w_{p_1 n}^1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & q_1^2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & w_{11}^2 & w_{12}^2 & \cdots & w_{1n}^2 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & q_2^2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & w_{21}^2 & w_{22}^2 & \cdots & w_{2n}^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{p_2}^2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & w_{p_2 1}^2 & w_{p_2 2}^2 & \cdots & w_{p_2 n}^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & q_1^r & 0 & \cdots & 0 & w_{11}^r & w_{12}^r & \cdots & w_{1n}^r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & q_2^r & \cdots & 0 & w_{21}^r & w_{22}^r & \cdots & w_{2n}^r \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & q_{p_r}^r & w_{p_r 1}^r & w_{p_r 2}^r & \cdots & w_{p_r n}^r
\end{array}\right]$$

Las primeras p_1 columnas de la expresión anterior constituyen la familia de cuotas $\mathcal{Q}_1$ que define la clase U_1, las segundas p_2 columnas la familia de cuotas $\mathcal{Q}_2$ de la clase U_2, etc, y las r-ésimas p_r columnas la familia de cuotas $\mathcal{Q}_r$ de la clase U_r. Finalmente, las últimas n columnas son los vectores pesos de los jugadores.

En forma abreviada

$$[\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, ..., \mathcal{Q}_r | \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, ..., \overrightarrow{w}_n]$$

El número de filas (la dimensión del espacio al que pertenecen los vectores cuotas y los vectores pesos)

$$\sum_{i=1}^{r} p_i = p$$

es el orden de la expresión ponderada generalizada.

2. Expresión ponderada canónica (cada clase viene dada por una sola cuota)

   Para cada coalición perdedora maximal L_k^i de la clase U_i se construye un JMP en el que ella es perdedora y todas las demás coaliciones son ganadoras. Para ello, escogemos:

$$\forall k \in \{1,2,...,p_i\} \rightarrow \left[\overline{q}_k^i;\overline{w}_{k1}^i,\overline{w}_{k2}^i,\cdots,\overline{w}_{kn}^i\right] \begin{cases} \overline{w}_{ki}^i = 1 & si \quad i \in L_k^i \\ \overline{w}_{ki}^i = |L_k^i|+1 & si \quad i \notin L_k^i \\ \overline{q}_k^i = |L_k^i|+1 \end{cases}$$

   Así, encontramos para cada clase U_i una representación de vector ponderado de orden p_i

$$\left[\begin{array}{c||cccc} \overline{q}_1^j & \overline{w}_{11}^j & \overline{w}_{12}^j & \cdots & \overline{w}_{1n}^j \\ \overline{q}_2^j & \overline{w}_{21}^j & \overline{w}_{22}^j & \cdots & \overline{w}_{2n}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{q}_{p_i1}^j & \overline{w}_{p_i1}^j & \overline{w}_{p_i2}^j & \cdots & \overline{w}_{p_in}^j \end{array}\right]$$

   De esta forma, la expresión ponderada canónica del juego simple vectorial que hemos encontrado es de orden p, $p=\sum_{i=1}^r p_i$, y adopta la forma:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c||cccc} \overline{q}_1^1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{w}_{11}^1 & \overline{w}_{12}^1 & \cdots & \overline{w}_{1n}^1 \\ \overline{q}_2^1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{w}_{21} & \overline{w}_{22} & \cdots & \overline{w}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{q}_{p_1}^1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{w}_{p_11}^1 & \overline{w}_{p_12}^1 & \cdots & \overline{w}_{p_1n}^1 \\ 0 & \overline{q}_1^2 & \cdots & 0 & \overline{w}_{11}^2 & \overline{w}_{12}^2 & \cdots & \overline{w}_{1n}^2 \\ 0 & \overline{q}_2^2 & \cdots & 0 & \overline{w}_{21}^2 & \overline{w}_{22}^2 & \cdots & \overline{w}_{2n}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \overline{q}_{p_2}^2 & \cdots & 0 & \overline{w}_{p_21}^2 & \overline{w}_{p_22}^2 & \cdots & \overline{w}_{p_2n}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \overline{q}_1^r & \overline{w}_{11}^r & \overline{w}_{12}^r & \cdots & \overline{w}_{1n}^r \\ 0 & 0 & \cdots & \overline{q}_2^r & \overline{w}_{21}^r & \overline{w}_{22}^r & \cdots & \overline{w}_{2n}^r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \overline{q}_{p_r}^r & \overline{w}_{p_r1}^r & \overline{w}_{p_r2}^r & \cdots & \overline{w}_{p_rn}^r \end{array}\right]$$

Como hemos definido la dimensión de un juego simple vectorial como el menor orden posible de todas las expresiones ponderadas canónicas, podemos afirmar que p es una cota superior de la dimensión. □

Corolario 5.8.1 *La dimensión del juego escalar marginal respecto de una clase U_i de un juego simple vectorial está acotada superiormente por $p_i = |L_i^M|$.*

Demostración.

Si consideramos el juego marginal respecto de la clase U_i, éste tendría la representación

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} q_1^i & 0 & \cdots & 0 & w_{11}^i & w_{12}^j & \cdots & w_{1n}^i \\ 0 & q_2^i & \cdots & 0 & w_{21}^i & w_{22} & \cdots & w_{2n}^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{p_i}^i & w_{p_i1}^i & w_{p_i2}^i & \cdots & w_{p_in}^i \end{array}\right]$$

que corresponde a un juego simple escalar de vector ponderado generalizado de orden p_i cuya familia de coaliciones ganadoras está formada por todas las coaliciones que superan cuota en, al menos, alguno de los p_i juegos de mayoría ponderada $[q_k^i; w_{k1}^i, w_{k2}^i i, \cdots, w_{kn}^i]$, $i \in \{1, 2, ..., p_i\}$.

Pero, también tendría la representación de vector ponderado de orden p_i

$$\left[\begin{array}{c||cccc} \overline{q}_1^i & \overline{w}_{11}^i & \overline{w}_{12}^i & \cdots & \overline{w}_{1n}^i \\ \overline{q}_2^i & \overline{w}_{21}^i & \overline{w}_{22}^i & \cdots & \overline{w}_{2n}^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{q}_{p_i1}^i & \overline{w}_{p_i1}^i & \overline{w}_{p_i2}^i & \cdots & \overline{w}_{p_in}^i \end{array}\right]$$

que nos indica que la dimensión del juego simple marginal está acotada por p_i. □

Corolario 5.8.2 *Cualquier juego simple escalar dado por una expresión de vector ponderado generalizado admite una representación de vector ponderado, por lo que su dimensión está acotada por el orden de esta representación.*

Demostración: Dado un juego simple escalar por una representación de vector ponderado generalizado

$$\left[\begin{array}{cccc||cccc} q_{11} & q_{21} & \cdots & q_{l1} & w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{l1} & w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{k1} & q_{k2} & \cdots & q_{kl} & w_{k1} & w_{k2} & \cdots & w_{kn} \end{array}\right]$$

construimos las coaliciones ganadoras que superan el primer vector de cuotas, las que superan el segundo, etc, y las que superan el l-ésimo. Del conjunto de todas ellas obtenemos las coaliciones ganadoras minimales y, a partir de ellas, las s coaliciones maximales perdedoras. A continuación, aplicamos el teorema de Taylor del caso escalar para obtener la expresión de vector ponderado

$$\left[\begin{array}{c||cccc} q_1 & \overline{w}_{11} & \overline{w}_{12} & \cdots & \overline{w}_{1n} \\ q_2 & \overline{w}_{21} & \overline{w}_{22} & \cdots & \overline{w}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_s & \overline{w}_{s1} & \overline{w}_{s2} & \cdots & \overline{w}_{sn} \end{array}\right]$$

Y el orden s de esta expresión es la cuota de la dimensión del juego simple escalar. □

Corolario 5.8.3 *Cualquier juego simple vectorial admite una expresión ponderada canónica cuyo orden es una cota superior de su dimensión.*

Demostración.

Por el corolario 5.8.2, toda clase U_i dada en forma de vector ponderado generalizado puede expresarse en forma de vector ponderado

$$\left[\begin{array}{cccc||cccc} q^i_{11} & q^i_{21} & \cdots & q^i_{l1} & w^i_{11} & w^i_{12} & \cdots & w^i_{1n} \\ q^i_{21} & q^i_{22} & \cdots & q^i_{l1} & w^i_{21} & w^i_{22} & \cdots & w^i_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q^i_{k_i1} & q^i_{k_i2} & \cdots & q^i_{k_il} & w^i_{k_i1} & w^i_{k_i2} & \cdots & w^i_{k_in} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{c||cccc} q^i_1 & \overline{w}^i_{11} & \overline{w}^i_{12} & \cdots & \overline{w}^i_{1n} \\ q^i_2 & \overline{w}^i_{21} & \overline{w}^i_{22} & \cdots & \overline{w}^i_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q^i_{s_i} & \overline{w}^i_{s_i1} & \overline{w}^i_{s_i2} & \cdots & \overline{w}^i_{s_in} \end{array}\right]$$

siendo su orden s_i una cota superior de su dimensión[**]. Si repetimos el proceso para cada una de las clases, obtenemos

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c||cccc}
\overline{q}_1^1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{w}_{11}^1 & \overline{w}_{12}^1 & \cdots & \overline{w}_{1n}^1 \\
\overline{q}_2^1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{w}_{21} & \overline{w}_{22} & \cdots & \overline{w}_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\overline{q}_{s_1}^1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{w}_{s_1 1}^1 & \overline{w}_{s_1 2}^1 & \cdots & \overline{w}_{s_1 n}^1 \\
0 & \overline{q}_1^2 & \cdots & 0 & \overline{w}_{11}^2 & \overline{w}_{12}^2 & \cdots & \overline{w}_{1n}^2 \\
0 & \overline{q}_2^2 & \cdots & 0 & \overline{w}_{21}^2 & \overline{w}_{22}^2 & \cdots & \overline{w}_{2n}^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \overline{q}_{s_2}^2 & \cdots & 0 & \overline{w}_{s_2 1}^2 & \overline{w}_{s_2 2}^2 & \cdots & \overline{w}_{s_2 n}^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & \overline{q}_1^r & \overline{w}_{11}^r & \overline{w}_{12}^r & \cdots & \overline{w}_{1n}^r \\
0 & 0 & \cdots & \overline{q}_2^r & \overline{w}_{21}^r & \overline{w}_{22}^r & \cdots & \overline{w}_{2n}^r \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & \overline{q}_{s_r}^r & \overline{w}_{s_r 1}^r & \overline{w}_{s_r 2}^r & \cdots & \overline{w}_{s_r n}^r
\end{array}\right]$$

por lo que la dimensión del juego simple vectorial es menor o igual que $s_1+s_2+\cdots+s_r$, que es la suma de las cotas superiores de las dimensiones de las clases. □

Ejemplo 5.8.1 *Sea un juego simple vectorial, compuesto de* 6 *jugadores y dos clases,* U_1 *y* U_2.

Supongamos que $p_1 = 5$ *y* $p_2 = 3$, *siendo las coaliciones perdedoras maximales de la primera clase*

$$\{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{2,4,5,6\}, \{1,2,3,5,6\}, \{1,3,4,5,6\}$$

y las de la segunda clase

$$\{2,5\}, \{1,2,3,4,6\}, \{1,3,4,5,6\}$$

Al haber 8 *coaliciones maximales perdedoras, la dimensión del juego simple vectorial está acotada por este número.*

1. *En la primera expresión ponderada, la generalizada, tenemos para cada clase tantas cuotas como coaliciones maximales perdedoras. Así, la clase* U_1 *viene definida por* 5 *cuotas y la clase* U_2 *por* 3 *cuotas. Nótese que las clases* U_1 *y* U_2 *tienen una coalición*

[**] Por dimensión de la clase entendemos la dimensión del juego simple marginal referido a la clase.

maximal común, la $\{1,3,4,5,6\}$*, de ahí que compartan una cuota y el orden de la expresión sea* 7 *y no* 8*:*

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc||cccccc} \frac{13}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{13}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{2} & 0 & 0 & \frac{11}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{2} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

2. *En la segunda expresión ponderada, la canónica, cada clase viene definida por una sola cuota. Nótese que la coalición maximal perdedora común da lugar al mismo JMP, por lo que el orden de la expresión ponderada canónica construida es* 7 *y no* 8 *y la cota superior de la dimensión del juego es* 7*.*

$$\left[\begin{array}{c|c||cccccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & 5 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{c|c||cccccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & 5 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right]$$

El número de coaliciones maximales perdedoras, p, encontrado como cota para la dimensión de un juego simple vectorial por la extensión del teorema de Taylor, puede mejorarse en el caso en que las clases tienen coaliciones maximales comunes como hemos podido observar en el ejemplo anterior.

Teorema 5.8.4 *Sea* (N,ν) *un juego simple vectorial dado por la clasificación* $\{U_i/i \in \{1,2,...,r\}\}$*,* p_i *el número de coaliciones maximales perdedoras de la clase* U_i*,* $p_{i,j}$ *el número de coaliciones maximales perdedoras comunes a* U_i *y* U_j *(*$i \neq j$*),* $p_{i,j,k}$ *el número de coaliciones maximales perdedoras comunes a* U_i*,* U_j *y* U_k *(*$i \neq j \neq k$*), etc, entonces la dimensión generalizada del juego está acotado superiormente por*

$$\sum_i p_i - \sum_{i,j}^{i\neq j} p_{i,j} + \sum_{i,j,k}^{i\neq j\neq k} p_{i,j,k} - \cdots \pm p_{1,2,...,r}$$

Demostración.

La parte constructiva del teorema de Taylor nos permite construir una expresión ponderada cuyo orden es el número de coaliciones maximales perdedoras, es decir $\sum_{i=1}^{r} p_i$. Sin embargo, podemos conseguir una expresión de menor orden si tenemos en cuenta que una coalición maximal perdedora común a varias clases debe dar lugar a una sola fila de la expresión ponderada. La cota que se conseguiría se obtendría sumando el número de coaliciones maximales perdedoras de las clases, pero como habría algunas comunes a cada dos clases habría que restar a dicha suma la suma de éstas. Entonces, sin embargo, habríamos restado el número de coaliciones maximales perdedoras comunes a tres clases, por lo que habría que sumarlo al cómputo general, pero a su vez habría que restar el número de las que son comunes a cuatro clases. Y así sucesivamente hasta llegar a las coaliciones maximales perdedoras comunes a las r clases o hasta que no haya más comunes. De ahí, que el número

$$\sum_{i} p_i - \sum_{i,j}^{i\neq j} p_{i,j} + \sum_{i,j,k}^{i\neq j\neq k} p_{i,j,k} - \cdots \pm p_{1,2,\ldots,r}$$

es la cota superior más pequeña que podemos encontrar para la dimensión del juego simple vectorial a través del teorema de Taylor. □

5.8.2. La dimensión de la agregación de clases

Cuando se efectúa una agregación de clases en un juego simple vectorial, por unión o intersección, tenemos dos situaciones, según el tipo de expresión ponderada que define al juego:

1. El juego viene definido en forma ponderada generalizada.

   el El juego marginal de una unión de clases viene definido por las cuotas de las clases que se unen y el de la intersección por los diferentes supremos que se obtienen tomando una cuota de cada una de las clases que se intersecan. Es decir, en ambos casos, el juego marginal está en forma de vector ponderado generalizado. Para obtener una cota superior de su dimensión tendremos que expresarlo en forma de vector ponderado (corolario 5.8.2) y el orden de esta expresión servirá de cota superior de la dimensión del juego marginal de la agregación de clases.

2. El juego viene definido en forma ponderada canónica.

   En este caso la unión de clases viene definida por tantas cuotas como clases se unen, por lo que la cota superior de la dimensión de su juego marginal se calcula como en el apartado anterior. Sin embargo, en el caso de la intersección, como cada clase viene dada por una cuota, sólo tenemos un supremo. Es decir, el juego simple marginal de la intersección está ya en forma de vector ponderado, por lo que la cota superior de su dimensión es la del juego simple vectorial del que procede.

Ejemplo 2.4.2 (Continúa) *Partiendo de r cámaras K_i, en cada una de las cuáles se desarrolla un juego de unanimidad con una única coalición ganadora N_i y n_i coaliciones maximales perdedoras (las de cardinal $n_i - 1$), formamos un juego simple vectorial multicameral tal que las coaliciones de cada clase U_i contienen todos los jugadores de la cámara K_i y que tiene como coaliciones maximales perdedoras las de todas las clases y, por tanto, su orden está acotado por $n_1 + n_2 + \cdots + n_r$. Sin embargo, encontramos la expresión ponderada canónica de orden r siguiente:*

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c||c} n_1 & 0 & \cdots & 0 & 1\overbrace{\cdots}^{n_1}1 \;\; 0\overbrace{\cdots}^{n_2}0 \;\; \cdots \;\; 0\overbrace{\cdots}^{n_r}0 \\ 0 & n_2 & \cdots & 0 & 0\overbrace{\cdots}^{n_1}0 \;\; 1\overbrace{\cdots}^{n_2}1 \;\; \cdots \;\; 0\overbrace{\cdots}^{n_r}0 \\ 0 & 0 & \cdots & n_r & 0\overbrace{\cdots}^{n_1}0 \;\; 0\overbrace{\cdots}^{n_2}0 \;\; \cdots \;\; 1\overbrace{\cdots}^{n_r}1 \end{array}\right]$$

que nos indica que la dimensión del juego simple vectorial multicameral está acotada por r.

Si hacemos la agregación por unión de las r clases, tenemos una nueva clase cuyas coaliciones tienen, como mínimo, todos los jugadores de una cámara. El marginal de esta clase es el juego de unanimidad vía individualismo.

Por tanto, este marginal viene definido por las r cuotas que definen cada una de las clases y su expresión ponderada generalizada es

$$\left[\begin{array}{cccc||c} n_1 & 0 & \cdots & 0 & 1\overbrace{\cdots}^{n_1}1 \;\; 0\overbrace{\cdots}^{n_2}0 \;\; \cdots \;\; 0\overbrace{\cdots}^{n_r}0 \\ 0 & n_2 & \cdots & 0 & 0\overbrace{\cdots}^{n_1}0 \;\; 1\overbrace{\cdots}^{n_2}1 \;\; \cdots \;\; 0\overbrace{\cdots}^{n_r}0 \\ 0 & 0 & \cdots & n_r & 0\overbrace{\cdots}^{n_1}0 \;\; 0\overbrace{\cdots}^{n_2}0 \;\; \cdots \;\; 1\overbrace{\cdots}^{n_r}1 \end{array}\right]$$

Pero, al ser un juego simple escalar, podemos expresarlo por un juego de vector ponderado aplicando el corolario 5.8.2. Esta expresión de vector ponderado viene definida por $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$ JMP, cada uno de los cuáles, se obtiene dando peso 1 a un jugador de N_i, $i \in \{1, 2, ..., r\}$, y al resto 0 y estableciendo en todos ellos cuota 1.

$$\left[\begin{array}{c||c|c|c|c} 1 & 1 \;\; 0\overbrace{\cdots}^{n_1-1}0 & 1 \;\; 0\overbrace{\cdots}^{n_2-1}0 & \cdots & 1 \;\; 0\overbrace{\cdots}^{n_r-1}0 \end{array}\right]$$

Para dos clases con 2 y 3 jugadores, respectivamente, el juego de vector ponderado es:

$$\left[\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

y la cota superior de la dimensión es 2×3*.*

Así, en el caso general, tenemos que $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$ *es una cota superior de la dimensión.*

No obstante, la cota que proporciona el teorema de Taylor puede ser reducida, ya que formamos una expresión de vector ponderado de orden

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_{r-1}$$

cada una de cuyas filas es un JMP del tipo

$$\left[\begin{array}{c||c|c|c|c} n_r & n_r \quad 0 \overbrace{\cdots}^{n_1 - 1} 0 & n_r \quad 0 \overbrace{\cdots}^{n_2 - 1} 0 & \cdots & n_r \overbrace{\cdots}^{n_r - 1} n_r \end{array}\right]$$

En cada uno de estos JMP un jugador de cada una de las $r-1$ *primeras cámaras tiene peso* n_r *y el resto peso* 0*, mientras que los de la cámara* r *tienen todos peso* 1*.*

Y para el mismo caso particular, el nuevo juego de vector ponderado es

$$\left[\begin{array}{c|ccccc} 3 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

con lo cuál hemos rebajado la cuota de 2×3 *a* 2*.*

Albina Puente en su tesis doctoral ([18]), demuestra que la cota superior

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_{r-1}$$

es exactamente la dimensión de este tipo de juegos.

Ejemplo 2.4.3 (Continúa) *Partiendo de* r *cámaras* K_i*, en cada una de las cuáles se desarrolla un juego individualista (una coalición es ganadora si, al menos, tiene un jugador de la cámara), formamos un juego simple vectorial multicameral en el que cada clase* U_i *está formada por las coaliciones que, al menos, tienen un jugador de* N_i*, mientras que una coalición es maximal perdedora de la cámara si tiene todos los jugadores menos los* *de la propia cámara. En total, el juego simple vectorial multicameral tiene r coaliciones maximales perdedoras:*

$$\{N - N_1, N - N_2, ..., N - N_r\}$$

Y su expresión ponderada es la canónica:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c||cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1\cdots 1 & 0\cdots 0 & \cdots & 0\cdots 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\cdots 0 & 1\cdots 1 & \cdots & 0\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 & \cdots & 1\cdots 1 \end{array}\right]$$

Al agregar las clases por intersección, las coaliciones de la nueva clase tienen un votante de cada una de las cámaras. El juego simple marginal que corresponde a esta agregación es el juego simple escalar conocido como composición de juegos individualistas vía unanimidad. Su representación ponderada, que es de orden r, está definida por una sola cuota (el supremo de las r cuotas):

$$\left[\begin{array}{c||cccc} 1 & 1\cdots 1 & 0\cdots 0 & \cdots & 0\cdots 0 \\ 1 & 0\cdots 0 & 1\cdots 1 & \cdots & 0\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 & \cdots & 1\cdots 1 \end{array}\right]$$

por lo que su dimensión está acotada por r.

Si hay p cámaras con un solo jugador, estos p jugadores son vetos para la clase intersección, luego todas sus coaliciones deben contenerlos. Suponiendo que el orden de los cardinales de las cámaras N_1, N_2, ..., N_{p+1}, N_{p+2}, ..., N_r es

$$1 \leq 1 \leq ... \leq 1 \leq n_{p+1} \leq n_{p+2} \leq ... \leq n_r$$

El cardinal de las p primeras es 1 porque están formadas por un sólo jugador.

El siguiente juego de vector ponderado de orden $r - p$

$$\left[\begin{array}{c||ccccccccccccccc} p\cdot n_{p+1}+1 & n_{p+1} & \cdots & n_{p+1} & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

es una descripción del juego de unanimidad vía individualismo porque en él son ganadoras todas las coaliciones que contienen, al menos, un jugador de cada cámara. Cada una de sus filas es un JMP

- *En la primera fila cada jugador veto tiene peso* n_{p+1}, *cada uno de los jugadores de* N_{p+1} *peso* 1, *los restantes jugadores peso* 0 *y la cuota es* $p \cdot n_{p+1} + 1$.
- *En la segunda fila la cuota es* 1, *los jugadores de la cámara* N_{p+2} *tienen peso* 1 *y los restantes peso* 0.
- $\cdots$
- *En la última fila la cuota es* 1, *los jugadores de la cámara* N_r *tienen peso* 1 *y los demás* 0.

Por existir esta expresión de vector ponderado, su dimensión será menor o igual que $r-p$. *Y como demuestra Albina Puente en su tesis doctoral ([18]) es, exactamente,* $r-p$.

Ejemplo 2.4.5 (Continúa) *Partiendo de las dos cámaras norteamericanas: el Senado (compuesto por* 100 *senadores, el Presidente y el Vicepresidente) y el Congreso (compuesto por* 435 *congresistas y el Presidente), formamos un juego simple vectorial bicameral, cuya primera clase está formada por todas las coaliciones ganadoras en el Senado y su segunda clase por todas las ganadoras en el Congreso. En la primera clase todos los congresistas son nulos y las coaliciones ganadoras son las que obtienen, al menos, los dos tercios del Senado (67 votos). En la segunda clase todos los senadores y el Vicepresidente son nulos y las coaliciones ganadoras son también las que obtienen, al menos, los dos tercios del Congreso (290) votos. Este juego simple vectorial tiene la representación canónica*

$$\left[\begin{pmatrix} 67 \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 \\ 290 \end{pmatrix} \Bigg\| \begin{pmatrix} 16\frac{1}{2} \\ 72 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overset{435}{\ldots}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overset{100}{\ldots}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

Es decir, las coaliciones de la primera clase son aquellas que superan o igualan la primera cuota y las de la segunda clase las que superan o igualan la segunda cuota.

La dimensión de este juego simple vectorial bicameral está acotada por 2. *Es exactamente* 2 *porque no se puede encontrar una expresión ponderada de menor orden (la de menor orden es un JMP).*

La representación de vector ponderado generalizado del juego marginal de la intersección es

$$\left[\begin{pmatrix} 67 \\ 290 \end{pmatrix} || \begin{pmatrix} 16\frac{1}{2} \\ 72 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{435}, \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{100}\right]$$

siendo su cuota el supremo de las cuotas que definen las clases. Como esta expresión viene en función de una sola cuota es de vector ponderado. Por tanto, su dimensión, en el sentido de Taylor, está acotada por 2 *y es exactamente* 2 *por la misma razón anterior. Nótese que este marginal es precisamente el Sistema Federal.*

Sin embargo, el juego marginal de la unión viene definido por dos cuotas y para representarlo por un juego de vector ponderado y obtener una cota superior de la dimensión hay que seguir el procedimiento indicado en el corolario 5.8.2, aunque es inviable debido al gran número de coaliciones ganadoras. Esto nos indica que, a veces, es interesante tener representado al juego en forma ponderada generalizada.

Capítulo 6

VALORES DE UN JUEGO SIMPLE VECTORIAL

6.1. Introducción

Las soluciones de los repartos de los juegos cooperativos se representan bajo dos formas: la forma de conjuntos, que se obtiene al imponer condiciones a los tipos de soluciones y la forma de valores, que se obtiene al buscar funciones de reparto que verifiquen determinados axiomas. La clase de repartos de tipo conjunto que hemos considerado en esta memoria son los de tipo core. Los conceptos de valor que vamos a considerar son los valores de Shapley y Banzhaf. Recordemos que estos valores son formas de reparto de los juegos, que asocian a cada juego un único reparto a cada jugador y que se denomina valor del juego para dicho jugador (Ver [34]). Comenzamos dando la definición de valor asociado a juegos cooperativos que toman valores en espacios vectoriales generales, definiendo en ellos los axiomas y principios que los jugadores pueden aceptar. En estos espacios vectoriales puede que exista una base o no. En el caso en que no existe no podemos seguir el conocido razonamiento de Shapley ([20]), razón por la que caracterizamos el valor de Shapley usando la idea de justicia de Myerson ([12]). Sin embargo, como en los juegos cooperativos vectoriales conocemos bases de juegos de unanimidad sobre los diferentes criterios, seguimos el citado razonamiento que, además, generalizamos al caso de espacios vectoriales que dispongan de una base aunque haya que extender el axioma de linealidad.

Es bien conocido que, en el caso de los juegos simples, los valores de los jugadores indican el poder que tienen los mismos en hacer ganadoras a las coaliciones. Es pues, el objetivo de este capítulo el establecer los índices de poder de Shapley y Banzhaf para los juegos simples vectoriales como una extensión de los índices definidos para los juegos escalares ([16], [33]).

6.2. Valores en juegos cooperativos generalizados

Decimos que tenemos un juego cooperativo generalizado en forma de función característica cuando definimos un par (N, v) en el que $N = \{1, 2, ..., n\}$ es el conjunto de jugadores y $v(.)$ la función característica que valora a cada subconjunto (o coalición) S de N en un espacio vectorial $\bigodot$ arbitrario, en el que hay definido un orden parcial* $\stackrel{>}{\cdot}$ y cuyo espacio de parámetros es $\mathbb{R}$, es decir

$$v : 2^N \rightarrow \bigodot$$

Suponemos que $v(S) \in \bigodot$, aunque en una aproximación más general sería $v(S) \subset \bigodot$, pero para nuestro estudio sobre valores asociados a estos juegos, tomamos como $v(S)$ un punto del espacio $\bigodot$, el cual puede ser escogido de $v(S)$ bien a través de su elemento maximal $v(S) \geq x, \forall x \in v(S)$, o bien a través de la optimización en $v(S)$ de alguna función de utilidad $u : \bigodot \rightarrow \mathbb{R}$, compatible con el orden $\stackrel{>}{\cdot}$ definido en $\bigodot$.

Cuando se estudian los valores asociados a un juego cooperativo, se trata de buscar reglas de asignación o reparto que nos permitan decir lo que corresponde a cada jugador cuando estos cooperan y obtienen el valor $v(N)$, pues de las propiedades que la regla tenga, la cooperación entre los jugadores se producirá o no.

Estas reglas permiten el reparto en cualquier juego. Consideramos el conjunto de juegos cooperativos generalizados sobre $\bigodot$, que representaremos por $G^N(\bigodot)$. De esta forma, una regla de asignación será cualquier aplicación ψ tal que

$$\psi : G^N(\bigodot) \rightarrow \bigodot^n$$

Así, a cada juego $(N, v) \in G^N(\bigodot)$, que identificamos por su función característica v, asociamos un vector $(\psi_1(v), ..., \psi_n(v))$, con $\psi_i(v) \in \bigodot$, que nos indica la parte del reparto

*Supondremos que en este orden parcial dos elementos son iguales si y solo si son el mismo elemento.

que el jugador i va a recibir con dicha regla. A veces, se le llama valor del juego para dicho jugador.

Como indicábamos anteriormente, este valor debe tener ciertas propiedades si queremos que el proceso de cooperación tenga lugar.

Si queremos repartir el valor $v(N) \in \bigodot$ del juego, deberá ser

$$\sum_{i \in N} \psi_i(v) = v(N)$$

lo que se conoce como principio de eficiencia. Aunque si sólo deseamos indicar la importancia que el jugador i tiene en el juego, puede que no sea deseable el principio como veremos posteriormente.

Dado que, en cualquier caso, $\psi_i(v)$ indica la importancia que dicho jugador tiene en el proceso cooperativo, debe de estar definido a través de las contribuciones marginales que dicho jugador hace al unirse a coaliciones a las que no pertenece:

$$d_i(S) = v(S \cup \{i\}) - v(S) \quad \forall S \subset N \backslash \{i\}$$

A veces se considera el vector $2^n - 1$ dimensional ($|N| = n$) de las contribuciones marginales de un jugador $\{i\}$ a todas las coaliciones, aunque como es lógico, algunas tendrán valor cero.

En base a estas contribuciones marginales, podemos buscar la forma que tendrán estos valores

$$\psi_i(v) = \phi_i\left(d_i(S)\right)$$

teniendo presente ciertas propiedades deseables para los jugadores.

Previamente, vamos a realizar un breve análisis del modo de obtener un conjunto de aportaciones marginales para un jugador:

Dado el conjunto de jugadores $N = \{1, 2, ..., n\}$, tomamos en él una permutación cualquiera σ, que nos da una ordenación de los jugadores que representaremos por $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$, dónde σ_i representa al jugador que hemos colocado en la posición i-ésima en dicha permutación σ.

Basándonos en esta ordenación lineal:

$$\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad ... \quad \sigma_{n-1} \quad \sigma_n$$

podemos definir las contribuciones marginales de modo recurrente en este orden:

$$\psi(\sigma_1) = v(\sigma_1) - v(\emptyset) = v(\sigma_1)$$

$$\psi(\sigma_2) = v(\sigma_1\sigma_2) - v(\sigma_1)$$

$$...$$

$$\psi(\sigma_i) = v(\sigma_1...\sigma_{i-1}\sigma_i) - v(\sigma_1...\sigma_{i-1})$$

$$...$$

$$\psi(\sigma_n) = v(N) - v(\sigma_1\sigma_2...\sigma_{n-1})$$

Notemos que este reparto es una asignación eficiente puesto que:

$$\sum_{i\in N} \psi(\sigma_i) = v(N)$$

lo que ocurriría también cualquiera que fuera el orden elegido σ, aunque cada permutación daría, en general, un reparto diferente.

Este reparto tiene la dificultad de tener presente sólo una de las contribuciones marginales del individuo.

6.2.1. Axiomática

En general, deseamos que los valores verifiquen un conjunto de axiomas que permitan caracterizarlos. Estos axiomas deben ser ampliamente aceptados por todos los jugadores.

Un primer axioma que deseamos que verifiquen es el axioma de linealidad.

Dados dos juegos v y w de $G^N(\bigodot)$, se define el juego $v + w$ como

$$(v + w)(S) = v(S) + w(S)$$

Axioma de linealidad: *Un valor ψ_i definido en $G^N(\bigodot)$ se dice que es lineal si $\forall v, w \in G^N(\bigodot)$ y $\forall i \in N$ se cumple que*

$$\psi_i(u + w) = \psi_i(u) + \psi_i(w)$$

Los valores descritos anteriormente sobre cada conjunto de permutaciones son lineales.

Cuando un jugador $\{i\}$ sólo aporta a cualquier coalición su valor individual

$$d_i(S) = v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(\{i\}) \quad \forall S \subset N\backslash\{i\}$$

diremos que es un jugador nulo.

Este jugador recibe en cualquier índice basado en el orden, trivialmente, el valor $\psi_i(v) = v(\{i\})$. Esto, en general, recibe el nombre de

Axioma del jugador nulo: *Todo jugador nulo de un juego $v \in G^N(\bigodot)$ tiene por valor $\psi_i(v) = v(\{i\})$.*

Estos dos axiomas nos dicen que el valor se puede expresar por

$$\psi_i(v) = \sum_{S \subset N \backslash \{i\}} \lambda^i(S) d_i(S)$$

Si suponemos que el valor va a ser lineal, todas las ponderaciones de las contribuciones marginales del individuo deberán verificar

$$\sum_{S \subset N \backslash \{i\}} \lambda^i(S) = 1$$

lo que deberemos de tener presente al definir el correspondiente valor.[**]

Por otro lado, como principio de que todos los jugadores reciben su valor en función de la estructura del juego, y no de la numeración de los jugadores en N y definiendo el juego permutado[***] $\sigma v \in G^N(\bigodot)$ (siendo σ la permutación $(\sigma_1 ... \sigma_n)$) de un juego $v \in G^N(\bigodot)$ por

$$\forall S \subset N : \quad \sigma v(\sigma S) = v(S) \quad \text{siendo } \sigma S = \{\sigma_i | i \in S\}$$

se suele aceptar el

Axioma de simetría: *Dado un juego $v \in G^N(\bigodot)$, la permutación σ y el juego permutado $\sigma v \in G^N(\bigodot)$, se verifica que*

$$\psi_i(v) = \psi_{\sigma_i}(\sigma v)$$

En este caso se dice que el valor definido en $G^N(\bigodot)$ es simétrico. Ello conlleva, si aceptamos un valor lineal, que los coeficientes $\lambda^i(S)$ no dependen del jugador i ni de la coalición S, sino sólo de su tamaño $s = |S|$, dadas las aplicaciones que se producen por las permutaciones de los jugadores. Es decir, la linealidad y la simetría nos dan valores del tipo

$$\psi_i(v) = \sum_{S \subset N \backslash \{i\}} \lambda_s d_i(S) \quad \text{con} \quad |S| = s$$

Volvamos al esquema de las permutaciones para buscar la forma que debe de tener $\psi_i(v)$ para que se verifique el principio de eficiencia que enunciábamos al comienzo.

Si partimos de que el valor solo debe verificar el principio de linealidad para que sea eficiente su valor, y dado que todo índice asociado a σ es eficiente, basta tomar como indicador un valor medio de cualquier distribución de probabilidad definida sobre el espacio de las permutaciones $\prod$.

[**] Cuando, además, las aportaciones marginales son todas no negativas, $d_i(S) \geq 0$, es decir, tenemos juegos monótonos, las ponderaciones de las aportaciones marginales del jugador pueden entenderse como una distribución de probabilidad sobre las mismas. Lo que hace que se cumpla el término de valores probabilísticos.

[***] También conocido como juego de permutación σ sobre v.

Dada la distribución de probabilidad $\{p_\sigma\}$ sobre $\prod$, definimos su valor asociado como

$$\psi_i(v, p_\sigma) = \sum_{\sigma \in \prod} p_\sigma \psi(\sigma_i)$$

Estos valores pueden escribirse de la forma anterior

$$\psi_i(v, p_\sigma) = \sum_{\sigma \in \prod} p_\sigma \psi(\sigma_i) = \sum_{S \subset N \backslash \{i\}} \left(\sum_{\sigma \in \prod ; S = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, i\}} \right) (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

La forma más sencilla de definir una distribución de probabilidad en $\prod$ es tomando la ley uniforme, $p_\sigma = \frac{1}{n!}$. Cuando escribimos el valor en forma lineal, dos permutaciones cualesquiera σ^1 y σ^2 dan al jugador $\{i\}$ la misma aportación marginal si los jugadores $(\sigma_1^j, \ldots, \sigma_{i-1}^j)$, $j = 1, 2$, son los mismos aunque estén en distinto orden. Hay, por ello, $(s-1)!(n-s)!$ órdenes que tienen el mismo valor para el jugador $\{i\}$, por lo que:

$$\psi_i(v) = \sum_{S \subset N \backslash \{i\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

es decir,

$$\lambda^i(S) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$$

Este índice es conocido como valor de Shapley del juego v.

Dada la definición del mismo, es eficiente y lineal, pero además verifica el axioma del jugador nulo, simetría y monotonía, como hemos indicado en las condiciones dadas para estos valores.

No obstante, a la eficiencia podríamos llegar por otro camino, al imponer directamente que un indicador lineal sea eficiente

$$\sum_{i \in N} \psi_i(v) = \sum_{i \in N} \sum_{S \subset N \backslash \{i\}} \lambda^i(S) \left(v(S \cup \{i\}) - v(S)\right) = \sum_{S \subset N} v(S) \left(\sum_{i \in S} \lambda^i(S \backslash \{i\}) - \sum_{i \notin S} \lambda^i(S) \right)$$

lo que nos indica que

$$\sum_{i \in S} \lambda^i(S \backslash \{i\}) = \sum_{i \notin S} \lambda^i(S)$$

$$\sum_{i \in N} \lambda^i(N \backslash \{i\}) = 1$$

para que se verifique la eficiencia.

Si imponemos la simetría, tendremos que

$$s \cdot \lambda_{s-1} = (n-s) \cdot \lambda_s$$

con la condición de contorno $\lambda_{n-1} = \frac{1}{n}$,

lo que nos conduce al valor de Shapley nuevamente.

A veces se pide que la eficiencia se verifique para cualquier conjunto S, $S \subseteq N$, que sea un soporte (*"carrier"*), es decir

$$v(T) = v(T \cap S) \quad \forall T \subset N$$

(Nótese que N es siempre un soporte)

6.2.2. El valor de Shapley en juegos cooperativos generalizados

Hemos visto algunos tipos de valores asociados a un juego, destacando por sus propiedades el valor de Shapley. La importancia de este valor es considerable, pues es el único que verifica las propiedades de aditividad, simetría, eficiencia y jugador nulo.

No obstante la demostración clásica del teorema de Shapley no es válida en los juegos cooperativos generalizados, $G^N(\bigodot)$, al no tener definida, de modo general, una base para el espacio vectorial $\bigodot$. Posteriormente, consideraremos esta hipótesis. Como veremos más adelante, dicho camino es posible si $\bigodot$ es isomorfo a $\mathbb{R}^n$, pero para establecer el teorema de caracterización, usaremos otra caracterización realizada por Myerson para este valor.

Todo el razonamiento anterior está basado en la posibilidad de definir órdenes de tipo lineal entre los jugadores, para de este modo poder definir las aportaciones marginales de los jugadores.

Myerson plantea la cuestión de un modo más general que esta relación lineal, pues sólo considera las aportaciones marginales aceptadas por los jugadores (y no todas ellas), a las que impone una cierta condición a la hora del reparto.

La idea se basa en que si tenemos dos jugadores $\{i\}$ y $\{j\}$ en un juego, que obtienen $v(i)$ y $v(j)$ por si mismos y $v(i,j)$ si cooperan entre ellos, la cooperación les debe de llevar a una regla de reparto *"equitativa"* sobre las ganancias:

$$\psi_i(v) = v(i) + \frac{1}{2}\left[v(i,j) - v(i) - v(j)\right]$$

y que coincide con el valor de Shapley del juego para juegos cooperativos bipersonales.

Myerson define su regla de reparto partiendo de una cierta estructura de agrupación entre jugadores e impone que si dos jugadores buscan una agrupación mayor, ambos jugadores tengan el mismo beneficio marginal cuando se produzca dicha cooperación (Ver [32] para un estudio sistemático de las implicaciones que conlleva una cooperación parcial).

Dado un juego cooperativo generalizado (N, v), definimos sobre el conjunto de jugadores N una relación binaria $i\mathcal{R}j$ sii $\{i\}$ y $\{j\}$ desean cooperar para repartirse el beneficio que pueden conseguir en el juego anteriormente definido.

Aceptamos que esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva.

Dicha relación produce una partición de N en subconjuntos disjuntos:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \{C_1, ..., C_R\}$$

tales que

$$C_i \cap C_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j \in \{1, 2, ..., R\}, \qquad \text{y} \bigcup_{j=1}^{R} C_j = N$$

Sobre esta partición se induce un nuevo juego $(\mathcal{P}_{\mathcal{R}}, v/\mathcal{R})$ que está definido tomando como jugadores las clases y por función característica

$$(v/\mathcal{R})(S) = \sum_{T \in S/\mathcal{R}} v(T) \quad \forall S \subset N$$

donde $S/\mathcal{R}$ expresa el conjunto de clases en las que hay elementos de S:

$$S/\mathcal{R} = \{\{i | i\mathcal{R}j, i \in S\} | j \in S\}$$

es decir, las clases partición inducidas en S por la relación $\mathcal{R}$.[****]

Así, si $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y tenemos que $1\mathcal{R}2$, $1\mathcal{R}4$, $2\mathcal{R}4$ y $3\mathcal{R}4$, entonces $\{1, 2, 3\}/\mathcal{R} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ mientras que $N/\mathcal{R} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5\}\}$.

En esta situación los jugadores que aceptan cooperar, desean repartirse el beneficio que consiguen con su cooperación, es decir, los jugadores en C_i desean repartirse $v(C_i)$, que es lo que consiguen si persisten en su cooperación.

Por tanto, un valor o regla de asignación eficiente es cualquier función

$$\psi : G^N(\bigodot; \mathcal{R}) \to \bigodot^n$$

de modo que para cada juego $v \in G^N(\bigodot)$ y cualquier relación $\mathcal{R}$, proporcione a cada jugador i, un valor $\psi_i(v, \mathcal{R})$ tal que

$$\sum_{i \in S} \psi_i(v, \mathcal{R}) = v(S) \quad \forall S \in N/\mathcal{R} \text{ y cada } \mathcal{R} \tag{6.1}$$

Nótese que si $\mathcal{R}$ es una relación completa, $i\mathcal{R}j$, cualesquiera que sean i y j, por lo que $N/\mathcal{R}$ se reduce a una sola clase (la gran coalición), el valor definido cumpliría la condición de eficiencia clásica.

[****] La relación $\mathcal{R}$ se considera transitiva para definir el conjunto cociente $\mathcal{P}/\mathcal{R}$. En $S/\mathcal{R}$, la partición solo tiene presente las coaliciones permitidas directamente por la relación $\mathcal{R}$ en su estructura inicial.

Dado que existen muchas reglas eficientes, como puede ser la regla de reparto igualitario, buscamos aquella que cumple lo que Myerson define como principio de igual ganancia para los jugadores que produzcan acuerdos bilaterales.

Dados acuerdos bilaterales de dos individuos i y j que pertenecen a clases diferentes en una relación $\mathcal{R}$, es decir $i \not\mathcal{R} j$, cuando deciden cooperar ambos individuos y aceptar que $i\mathcal{R}j$, se produce una nueva relación $\mathcal{R}'$, en la que el conjunto de partición $\mathcal{P}'_{\mathcal{R}}$ se obtiene del original $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ al fusionar las clases en las que estaban ambos individuos en una sola clase, manteniendo las relaciones existentes junto a la nueva que ha producido el nuevo contexto.

Diremos, en este contexto, que:

La regla de reparto ψ

$$\text{es justa sii } \psi_i(v, \mathcal{R}') - \psi_i(v, \mathcal{R}) = \psi_j(v, \mathcal{R}') - \psi_j(v, \mathcal{R}) \tag{6.2}$$

es decir, independientemente de lo que ocurra a los restantes jugadores, los jugadores que producen el acuerdo tendrán la misma ganancia marginal.

La regla igualitaria no tiene esta propiedad, pues si tenemos un reparto igualitario en dos clases S_1 y S_2 con $\frac{v(S_1)}{|S_1|} \neq \frac{v(S_2)}{|S_2|}$, al decidir cooperar dos individuos de clases diferentes y aplicar la regla igualitaria a la clase $S_1 \cup S_2$, no tienen ambos individuos igual ganancia marginal.

Incluso si nos basamos en una relación lineal, y vamos dando a los individuos de cada conjunto que se forma $(\sigma_1 ... \sigma_i)$ el mismo valor:

$$\frac{1}{i} v(\sigma_1 ... \sigma_i)$$

esta regla igualitaria no verifica el principio de igual ganancia marginal, pues cada nuevo individuo recibe condicionalmente una cantidad diferente de lo que reciben los anteriores individuos.

Una regla justa y eficiente para este orden lineal se obtiene al dar a los individuos que producen la nueva coalición, $S = (\sigma_1 ... \sigma_{i-1})$ y $S \cup \{i\} = (\sigma_1 ... \sigma_i)$, la mitad de la aportación marginal $v(\sigma_1 ... \sigma_i) - v(\sigma_1 ... \sigma_{i-1})$. No obstante, este reparto está asociado a un modo especial de definir la relación $\mathcal{R}$ entre los jugadores.

En general, nos preguntamos si existen reglas que verifiquen ambas condiciones. La respuesta es:

"Dicha regla existe y es única", como demostraremos a continuación.

Teorema 6.2.1 *Dado un juego cooperativo (N, v) generalizado, existe una única regla de asignación de valores para los jugadores que es eficiente y justa.*

Demostración.

Supongamos que existen dos reglas de asignación $\psi^j : G^N(\bigodot;\mathcal{R}) \to \bigodot^n$, $j = 1,2$, diferentes, que verifican los principios de eficiencia y justicia.

Sea $\hat{\mathcal{R}}$ la relación con menor número de pares tal que

$$\psi^1 \left\{G^N(\bigodot;\hat{\mathcal{R}})\right\} \neq \psi^2 \left\{G^N(\bigodot;\hat{\mathcal{R}})\right\}$$

sean estos valores $(\psi_1^1...\psi_n^1)$ y $(\psi_1^2...\psi_n^2)$ diferentes. Por la minimalidad de la relación $\hat{\mathcal{R}}$, si s y t son dos jugadores relacionados, $s\hat{\mathcal{R}}t$, tendremos que en la relación $\hat{\mathcal{R}}'$ originada por la supresión de este par, se tendrá:

$$\psi^1 \left(G^N(\bigodot,\hat{\mathcal{R}}')\right) \neq \psi^2 \left(G^N(\bigodot,\hat{\mathcal{R}}')\right)$$

y por tanto, el principio de justicia indica que:

$$y_s^1 - y_t^1 = \psi_s^1(v,\hat{\mathcal{R}}') - \psi_t^1(v,\hat{\mathcal{R}}') = \psi_s^2(v,\hat{\mathcal{R}}') - \psi_t^2(v,\hat{\mathcal{R}}') = y_s^2 - y_t^2$$

lo que nos indica que $y_s^1 - y_s^2 = y_t^1 - y_t^2$, cualesquiera que sean s y t, relacionados por $\mathcal{R}$, en una cierta componente S, por lo que esta diferencia que representamos por $d_S(\mathcal{R})$ no depende de s.

Pero la eficiencia nos indica que

$$\sum_{i\in S} \psi_i^1 = \sum_{i\in S} \psi_i^2 = v(S)$$

así que $0 = \sum_{i\in S}(\psi_i^2 - \psi_i^1) = |S|d_S(\mathcal{R})$, lo que nos dice que $d_S(\mathcal{R}) = 0$.

Así que las diferencias son todas nulas, $y^1 = y^2$ sobre $\hat{\mathcal{R}}'$, lo que produce una contradicción.

Por tanto, sólo existe una regla de asignación. □

Teorema 6.2.2 *Toda regla de asignación que verifique los principios de linealidad, soporte y simetría, verifica los principios de eficiencia y justicia.*

Demostración.

Dada $\mathcal{R}$, para cada $S \in N/\mathcal{R}$, definimos el juego u^S por su función característica:

$$u^S(T) = \sum_{F\in(T\cap S)/\mathcal{R}} v(F) \quad \forall T \subset N$$

Dado que dos jugadores $i,j \in T$ tales que $i\mathcal{R}j$ también están en N, se tiene que

$$T/\mathcal{R} = \bigcup_{S\in N/\mathcal{R}} (T\cap S)/\mathcal{R}$$

Por lo que

$$v/\mathcal{R} = \sum_{S \in N/\mathcal{R}} u^S$$

Pero dado que S es un soporte para u^S puesto que $u^S(T) = u^S(T \cap S)$. El axioma sobre el soporte nos dice que para cualquier $S \in N/\mathcal{R}$ y cualquier $T \in N/\mathcal{R}$

$$\sum_{i \in S} \psi_i(u^T) = \begin{cases} u^T(N) & si \quad S = T \\ 0 & si \quad S \cap T = \emptyset \end{cases}$$

y debido al axioma de linealidad, si $S \in N/\mathcal{R}$ se tiene que

$$\sum_{i \in S} \psi_i(v/\mathcal{R}) = \sum_{i \in S} \psi_i \left(\sum_{T \in N/\mathcal{R}} u^T \right) = \sum_{T \in N/\mathcal{R}} \sum_{i \in S} \psi_i(u^T) = u^S(N) = \sum_{T \in S/\mathcal{R}} v(T) = v(S)$$

luego el valor verifica el principio de eficiencia si verifica la linealidad y el axioma sobre el soporte.

Veamos que para ser justo necesita el axioma de simetría. Sea una relación $\mathcal{R}$ con $i\mathcal{R}j$, y tomemos $w = v/\mathcal{R} - v/\mathcal{R}'$ siendo $\mathcal{R}'$ igual a $\mathcal{R}$ salvo que $i \not\mathcal{R} j$.

Notemos que $S/\mathcal{R} = S/\mathcal{R}'$ si (i, j) no están en S. Así, si $i \notin S$ o $j \notin S$ se tiene que:

$$w(S) = \sum_{T \in S/\mathcal{R}} v(T) - \sum_{T \in S/\mathcal{R}'} v(T) = 0$$

Por lo que las únicas coaliciones no valoradas por cero, en el juego que w define son las que contienen a i y a j. Es decir, sus jugadores veto.

Por simetría se verifica que

$$\psi_i(w) = \psi_j(w)$$

La linealidad del valor nos dice que

$$\psi_i(v/\mathcal{R}) - \psi_i(v/\mathcal{R}') = \psi_i(v/\mathcal{R}) - \psi_i(v/\mathcal{R}')$$

por lo que estas dos propiedades de linealidad y simetría nos obligan a la justicia. □

Corolario 6.2.1 *La regla de Shapley es la única que verifica los principios de linealidad, soporte y simetría.*

Teorema 6.2.3 *Si el juego v es superaditivo, la regla eficiente y justa es estable*[*****] *en el sentido de que:*

$$\psi_i(v, \mathcal{R}) \geq \psi_i(v, \mathcal{R}')$$

[*****] La estabilidad nos conduce a la cooperación en el juego general, buscando los jugadores formar la gran coalición.

$$\psi_j(v, \mathcal{R}) \geq \psi_j(v, \mathcal{R}')$$

siendo los pares de $\mathcal{R}$ *iguales a los de* $\mathcal{R}'$ *salvo que* $i\mathcal{R}j$ *pero* $i \not\mathcal{R}'j$

Demostración.

Dados $i\mathcal{R}j$, la relación $\mathcal{R}'$ definida igual a $\mathcal{R}$ suprimiendo este par de elementos nos produce que $S/\mathcal{R}' \subset S/\mathcal{R}$ y si $i \notin S$, entonces $S/\mathcal{R}' = S/\mathcal{R}$.

Dado que el juego es superaditivo

$$(v/\mathcal{R})(S) = \sum_{T \in S/\mathcal{R}} v(T) \geq \sum_{T \in S/\mathcal{R}'} v(T) = (v/\mathcal{R}')(S)$$

siendo igualdad si $i \notin S$. Lo que nos dice que en el juego $w = v/\mathcal{R} - v/\mathcal{R}'$ se tiene que $w(S) \geq 0$ si $\in S$ y $w(S) = 0$ si $i \in S$, por lo que en el sentido de Shapley es $\psi_i(w) \geq 0$ y

$$\psi_i(v/\mathcal{R}) - \psi_i(v/\mathcal{R}') \geq 0 \qquad \square$$

6.3. El valor de Shapley en juegos cooperativos vectoriales

En 1953 L.J. Shapley ([20]) demostró que existe un único valor definido sobre los juegos superaditivos en forma de función característica que satisface determinados axiomas.

Nosotros vamos a extender el valor de Shapley a los juegos n-personales vectoriales de k objetivos, lo que nos permitirá definir dicho valor para los juegos simples vectoriales. Para hacer esta extensión podemos emplear los resultados obtenidos en la sección anterior, aunque en este caso, al existir una base del espacio, podemos seguir la línea clásica empleada por Shapley.

Recordamos que un juego vectorial de k objetivos es un par (N, v), dónde N es el conjunto de jugadores y v la función, $v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}^k$, que asocia a cada coalición una k-upla de números reales con la condición de que $v(\emptyset)$ es la k-upla nula.

La clase de todos estos juegos es $G^v(N)$.

Intuitivamente, $v(S)$ representa el valor de la coalición S, es decir, el menor pago que pueden conseguir independientemente del resto de jugadores.

Para cada juego v, queremos medir a priori el valor de cada jugador $\{i\}$, teniendo en cuenta la cooperación. Dicho valor será un vector de $\mathbb{R}^k$ que se nota por: $\phi_i(v)$.

Shapley ([20]) propuso, en el caso escalar, tres condiciones o axiomas que debía cumplir dicho valor y demostró que la función ϕ que las verifica está determinada de forma unívoca. Nosotros seguiremos una línea similar para caracterizar los valores de los jugadores de un juego vectorial.

La extensión natural del teorema de Shapley será:

Teorema 6.3.1 *Hay una única función* $\phi : G^v(N) \to \mathbb{R}^{k\times n}$ *que satisface los tres axiomas siguientes:*

S1. Si S *es un soporte de* v*, entonces* $\sum_{i\in S} \phi_i(v) = v(S)$

S2. Para cualquier permutación σ *y cualquier jugador* i

$$\phi_{\sigma(i)}(\sigma v) = \phi_i(v)$$

S3. Para v_1 *y* v_2 *cualesquiera, entonces*

$$\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2)$$

y dicha función tiene por expresión:

$$\phi_i(v) = \sum_{\{i\in S\subset N\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \left[v(S) - v(S\backslash\{i\})\right] \tag{6.3}$$

Demostración.

Para hacer la demostración recordamos que $G^v(N)$ es un espacio vectorial de dimensión $(2^n - 1) \times k$ y que tenemos definidas sendas bases, la de los juegos de unanimidad y la de los de identidad:

$$u_S^l(T) = \begin{cases} (0, ..., 0, ..., 0) & si \quad S \not\subseteq T \\ (0, ..., 1, ..., 0) & si \quad S \subseteq T \end{cases}$$

$$i_S^l(T) = \begin{cases} (0, ..., 0, ..., 0) & si \quad S \neq T \\ (0, ..., 1, ..., 0) & si \quad S = T \end{cases}$$

En virtud de ello, todo juego se podrá expresar como una combinación lineal de unos u otros. En particular, de los juegos de identidad:

$$v = \sum_S \delta_S^l i_S^l = \sum_S v_l(S) i_S^l \quad \forall l \in K = \{1, 2, ..., k\} \tag{6.4}$$

Análogamente se expresaría un juego de unanimidad como combinación lineal de los juegos de identidad:

$$u_S^l = \sum_{T;S\subseteq T} i_T^l \tag{6.5}$$

1. Para ver que $\phi(v)$ es único adaptamos la demostración de Dubey ([4]) del caso escalar al caso vectorial.

Aplicamos primero el axioma S3 a (6.4) y (6.5):

$$\phi(v) = \phi\left(\sum_S \delta_S^l i_S^l\right) = \sum_S v_l(S)\phi(i_S^l) \tag{6.6}$$

$$\phi(u_S^l) = \sum_{T;S\subseteq T} \phi(i_T^l) \tag{6.7}$$

y así, $\phi(v)$ es único por (6.6) si lo es cada $\phi(i_S^l)$. Y para demostrar que cada $\phi(i_S^l)$ es único, hay que demostrar por (6.7) que $\phi(u_S^l)$ y $\phi(i_T^l)$, para $T \neq S$, son únicos.

- $\phi(u_S^l)$ es único.

  S y todos sus superconjuntos son soportes del juego u_S^l y por S1,

  $$\sum_{i\in S} \phi_i(u_S^l) = u_S^l(S) = (0, ..., 1, ..., 0)$$

  y $\forall j \notin S$ se cumple que

  $$\sum_{i\in S\cup j} \phi_i(u_S^l) = (0, ..., 1, ..., 0)$$

  lo que implica que $\phi_j(u_S^l) = (0, ..., 0, ..., 0)$ para $\forall j \notin S$.

  Además, si σ es una permutación que intercambia los jugadores i y j de S y deja los demás igual, entonces $\sigma u_S^l = u_S^l$ y por S2,

  $$\phi_i(u_S^l) = \phi_j(u_S^l) \quad \forall i, j \in S$$

  Por tanto,

  $$\sum_{i\in S} \phi_i(u_S^l) = |S| \cdot \phi_i(u_S^l) = (0, ..., 1, ..., 0)$$

  y

  $$\phi_i(u_S^l) = \begin{cases} (0, ..., \frac{1}{|S|}, ..., 0) & si \quad i \in S \\ (0, ..., 0, ..., 0) & si \quad i \notin S \end{cases}$$

  luego $\phi(u_S^l)$ es único.

- Si demostramos por el método de inducción que cada $\phi(i_S^l)$ es único, entonces por lo anterior y por (6.6) y (6.7), también lo será $\phi(v)$.
  - Para $|S| = n$, $u_N^l = i_N^l$ y como $\phi(i_N^l) = \phi(u_N^l)$, entonces $\phi(i_N^l)$ es único.
  - Para $|S| = n - 1$, $u_S^l = i_S^l + i_N^l$ y por ser únicos $\phi(u_S^l)$ y $\phi(u_N^l)$, también lo es $\phi(i_S^l)$.

- Suponemos que es cierto hasta $|S| = p + 1$, veamos que también lo es para $|S| = p$. Sabemos que $u_S^l = i_S^l + \sum_{T;S\subset T} i_T^l$, es decir $\phi(u_S^l) = \phi(i_S^l) + \sum_{T;S\subset T} \phi(i_T^l)$. Además todos los $\phi(i_T^l)$ para $|T| \geq p+1$ y $\phi(u_S^l)$ son únicos, por tanto también lo es $\phi(i_S^l)$ para $|T| = p$

Luego, si ϕ existe, es único.

2. La función ϕ definida por (6.3) es la única que verifica los axiomas S1, S2 y S3.

La demostración de la unicidad lleva implícita la forma de construir ϕ.

Suponemos que

$$\phi_i(i_S^l) = \begin{cases} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} & si \quad i \in S \\ -\frac{s}{n-s} \cdot \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} & si \quad i \notin S \end{cases} \tag{6.8}$$

Vamos a demostrarlo por inducción:

- Para $|S| = n$ se cumple.
  Sabemos que $\phi(i_N^l) = \phi(u_N^l)$ (es decir $\phi_i(i_N^l) = \phi_i(u_N^l)$) y que $\phi_i(u_N^l) = \frac{1}{n}$. Calculamos $\phi_i(i_N^l)$ para ver que la fórmula (6.8) es válida

$$\phi_i(i_N^l) = \frac{(n-1)!(n-n)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

- Para $|S| = n - 1$ también se cumple.
  Ahora, $u_S^l = i_S^l + u_N^l$ o $i_S^l = u_S^l - u_N^l$ y $\phi_i(i_S^l) = \phi_i(u_S^l) - \phi_i(u_N^l)$.
  Por (6.8) sabemos que

$$\phi_i(i_S^l) = \phi_i(u_S^l) - \phi_i(u_N^l) = \begin{cases} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} & si \quad i \in S \\ 0 - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n} & si \quad i \notin S \end{cases}$$

  y por la fórmula

$$\phi_i(i_S^l) = \begin{cases} \frac{(n-1-1)!1!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)} & si \quad i \in S \\ -\frac{n-1}{1} . \frac{(n-2)!1!}{n!} = -\frac{1}{n} & si \quad i \notin S \end{cases}$$

- Suponemos que se cumple hasta $|S| = p + 1$ (inclusive). Entonces por (6.7) se cumple que

$$\phi_i(i_S^l) = \begin{cases} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} & si \quad i \in S \\ -\frac{s}{n-s} \cdot \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} & si \quad i \notin S \end{cases}$$

  para $|S| = p$.

Y sustituyendo en la expresión (6.6)

$$\phi(v_l) = \sum_{\emptyset \neq S \subset N} v_l(S)\phi(i^l_{S)})$$

tenemos que

$$\phi_i(v_l) = \sum_{i \in S \subset N} \left[\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \cdot v_l(S) - \frac{s-1}{n-s+1} \cdot \frac{(s-2)!(n-s+1)!}{n!} \cdot v_l(S \backslash \{i\}) \right] =$$

$$\sum_{i \in S \subset N} \left[\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \cdot v_l(S) - \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \cdot v_l(S \backslash \{i\}) \right]$$

o lo que es igual

$$\phi_i(v_l) = \sum_{\{i \in S \subset N\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v_l(S) - v_l(S \backslash \{i\})]$$

que en forma vectorial es

$$\phi_i(v) = \begin{pmatrix} \sum_{\{i \in S \subset N\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v_1(S) - v_1(S \backslash \{i\})] \\ \sum_{\{i \in S \subset N\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v_2(S) - v_2(S \backslash \{i\})] \\ \cdots \\ \sum_{\{i \in S \subset N\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v_k(S) - v_k(S \backslash \{i\})] \end{pmatrix}$$

y extrayendo los coeficientes

$$\phi_i(v) = \sum_{\{i \in S \subset N\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \begin{pmatrix} [v_1(S) - v_1(S \backslash \{i\})] \\ [v_2(S) - v_2(S \backslash \{i\})] \\ \cdots \\ [v_k(S) - v_k(S \backslash \{i\})] \end{pmatrix}$$

adopta la forma típica (6.3) del valor de Shapley

$$\phi_i(v) = \sum_{\{i \in S \subset N\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v(S) - v(S \backslash \{i\})]$$

Y así queda demostrado que la función ϕ es la única que satisface los axiomas S1, S2 y S3.□

El valor de Shapley asigna a cada jugador en cada componente una media ponderada de sus contribuciones marginales a las coaliciones a las que pertenece.

Ejemplo 6.3.1 *Sea el juego simple vectorial* (N, v)*,* $N = \{1, 2, 3\}$*, definido por:*

$$v(\emptyset) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(\{1\}) = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad v(\{2\}) = \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \end{pmatrix}, \quad v(\{3\}) = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$v(\{1,2\}) = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad v(\{1,3\}) = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad v(\{2,3\}) = \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix}, \quad v(N) = \begin{pmatrix} 160 \\ 140 \end{pmatrix}$$

Utilizando la fórmula (6.3) obtenemos el valor de Shapley del jugador $\{1\}$

$$\phi_1(v) = \frac{0!2!}{3!}\left[v(\{1\}) - v(\emptyset)\right] + \frac{1!1!}{3!}\left[v(\{1,2\}) - v(\{2\})\right] +$$

$$\frac{1!1!}{3!}\left[v(\{1,3\}) - v(\{3\})\right] + \frac{2!0!}{3!}\left[v(N) - v(\{2,3\})\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}\right] + \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 40 \\ 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \end{pmatrix}\right] + \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 40 \\ 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}\right] + \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 160 \\ 140 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 20 \\ 25 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 80 \\ 80 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 20+20+10+160 \\ 30+25+20+160 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 39,1 \end{pmatrix}$$

y análogamente los valores de Shapley de los demás jugadores:

$$\phi_2(v) = \begin{pmatrix} 60 \\ 59,1 \end{pmatrix}, \quad \phi_3(v) = \begin{pmatrix} 65 \\ 41,6 \end{pmatrix}$$

6.3.1. El valor de Shapley en juegos cooperativos generalizados especiales

Análogamente se puede estudiar el valor de Shapley en el caso general en que los juegos están definidos sobre espacios vectoriales con bases no finitas, sin más que adaptar el axioma de aditividad al caso infinito.

Si llamamos a una de estas bases $B = \{p^i\}_{i \in J}$, $p^i \in \odot$, podemos enunciar el siguiente teorema que es una generalización del valor de Shapley.

Teorema 6.3.2 *Hay una única función* $\psi : G^N(\odot) \to \odot^n$, *con una base* B *del espacio vectorial* $\odot$, *que satisface los tres axiomas siguientes:*

S1. Si S *es un soporte de* v, *entonces* $\sum_{i \in S} \phi_i(v) = v(S)$

S2. Para cualquier permutación σ *y cualquier jugador* i

$$\phi_{\sigma(i)}(\sigma v) = \phi_i(v)$$

S3'. Para cualquier familia v_i, $i \in I$,

$$\phi\left(\sum_{i \in I} v_i\right) = \sum_{i \in I} \phi(v_i)$$

Este teorema se demuestra adaptando la demostración del valor de Shapley dada anteriormente, para lo cual definimos los juegos de unanimidad de $G^N(\bigodot)$ como

$$u_S^{p^i}(T) = \begin{cases} 0_{\bigodot} & si \quad S \not\subset T \\ p^i & si \quad S \subset T \end{cases}$$

A continuación y antes de pasar al estudio de los valores para los juegos simples vectoriales, vamos a ver otra forma de caracterizar el valor de Shapley diferente de la forma axiomática. Seguiremos los trabajos de Hart y Mas-Colell ([27]) adaptándolos al caso vectorial, aunque puede realizarse sobre $G^N(\bigodot)$.

En primer lugar, veremos que el valor de Shapley se obtiene a partir de la función potencial y que conserva las diferencias. En segundo lugar, que el valor de Shapley queda caracterizado por dos propiedades: la consistencia y la justicia para juegos bipersonales.

6.3.2. Potencial

Sea $G^v(N)$ el conjunto de todos los juegos vectoriales de k criterios en forma de función característica y $G^v(S)$ el conjunto de todos los juegos vectoriales de k criterios restringidos a S, siendo S una coalición cualquiera.

Definimos una función

$$P : G^v \to \mathbb{R}^k$$

que asocia a cada juego (N, v) una k-upla de $\mathbb{R}^k$.

La contribución marginal de un jugador $\{i\}$ está definida por el vector columna diferencia de las k-uplas correspondientes a los juegos (N, v) y $(N\backslash\{i\}, v)$ (el restringido de v a $N\backslash\{i\}$)

$$D^i P(N, v) = P(N, v) - P(N\backslash\{i\}, v) \tag{6.9}$$

La función P, que cumple que $P(\emptyset, v) = (0, \overset{k}{\ldots}, 0)^t$, se llama función potencial si verifica la condición de eficiencia, es decir, la suma de las contribuciones marginales de todos los jugadores es el valor del juego

$$\sum_{i=1}^{n} D^i P(N, v) = v(N) \tag{6.10}$$

Teorema 6.3.3 *Existe una única función potencial P. Para cada juego (N, v), la matriz de pagos $(D^i P(N, v)_{i \in N})$ (formada por los vectores columna $D^i P(N, v)$) coincide con el valor de Shapley del juego. Además, el potencial de cualquier juego está unívocamente determinado por (6.10).*

Demostración.

Vamos a ver que $D^i P(N, v) = \phi_i(N, v)$ (Por $\phi_i(N, v)$ indicamos el valor de Shapley del juego (N, v)).

Desarrollando la condición de eficiencia

$$\sum_{i=1}^{n} [P(N, v) - P(N \backslash \{i\}, v)] = v(N)$$

$$|N| \cdot P(N, v) - \sum_{i=1}^{n} P(N \backslash \{i\}, v) = v(N)$$

vemos que (6.10) se puede escribir como

$$P(N, v) = \frac{1}{|N|} \left[v(N) + \sum_{i \in N} P(N \backslash \{i\}, v) \right] \tag{6.11}$$

Así, empezando con $P(\emptyset, v) = (0, \overset{k}{\ldots}, 0)^t$, $P(N, v)$ queda determinado en forma recursiva

$$P(\{i\}, v) = \frac{1}{1} [v(\{i\}) + P(\emptyset, v)] = v(\{i\})$$

$$\ldots$$

A continuación, se expresa (N, v) en la base de los juegos de unanimidad $\{u_S^l\}$

$$v = \left(\sum_{S \subset N} c_S^l u_S^l \right)_l \tag{6.12}$$

y en la de los juegos de identidad

$$v = \left(\sum_{S \subset N} v_l(S) i_S^l \right)_l \tag{6.13}$$

y expresando los juegos de identidad en la base $\{u_S^l\}$

$$i_S^l = \sum_{S \subset T} (-1)^{s-t} u_T^l$$

y sustituyendo esta expresión en (6.13) e identificando los coeficientes resultantes con los de (6.12), resulta

$$c_S^l = \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} v_l(T) \tag{6.14}$$

y estos coeficientes c_S^l divididos por los cardinales de las coaliciones dan lugar a los dividendos de Harsanyi $d_S^l = \frac{c_S^l}{|S|}$. A partir de ellos, se escribe la función P

$$P(N, v) = \sum_S d_S^l \tag{6.15}$$

Esta función P definida por (6.15) es la función potencial, que coincide con el valor de Shapley, que es como bien se sabe $\phi_i(N, v) = \sum_{S:i\in S} d_S^l$. $\square$

Ejemplo 6.3.1 (Continúa) *Vamos a ver en primer lugar que las contribuciones marginales $D^i P(N, v)$ definidas por la función potencial coinciden con los valores de Shapley. En segundo lugar que los dividendos de Harsanyi ([10]) definen la función potencial y los valores de Shapley.*

1. *Procedemos al cálculo de los potenciales de los juegos reducidos aplicando la fórmula de recurrencia (6.11) según la tabla (En ella abreviamos la forma de escribir los*

potenciales. Así $P(\{1,2\},v)$ lo escribimos como $P(12)$, etc.):

	$P(12)$	$P(13)$	$P(23)$	$P(123)$
$v(1)$	$\begin{pmatrix}10\\15\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10\\15\end{pmatrix}$		
$v(2)$	$\begin{pmatrix}20\\25\end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix}20\\25\end{pmatrix}$	
$v(3)$		$\begin{pmatrix}30\\10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}30\\10\end{pmatrix}$	
$v(12)$	$\begin{pmatrix}40\\50\end{pmatrix}$			
$v(13)$		$\begin{pmatrix}40\\30\end{pmatrix}$		
$v(23)$			$\begin{pmatrix}80\\60\end{pmatrix}$	
$v(N)$				$\begin{pmatrix}160\\140\end{pmatrix}$
$P(12,v)$				$\begin{pmatrix}35\\45\end{pmatrix}$
$P(13,v)$				$\begin{pmatrix}40\\27,5\end{pmatrix}$
$P(23,v)$				$\begin{pmatrix}65\\47,5\end{pmatrix}$
Totales	$\begin{pmatrix}70\\90\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}80\\55\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}130\\95\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}300\\260\end{pmatrix}$
Potenciales	$\begin{pmatrix}35\\45\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}40\\27,5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}65\\47,5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}100\\86,6\end{pmatrix}$

La fila de totales se refiere a los corchetes de la fórmula de recurrencia

$$P(S,v) = \frac{1}{s}\left[v(S) + \sum_{i\in S} P(S\backslash\{i\},v)\right]$$

Para obtener la fila de los potenciales de los subjuegos se divide la fila de totales por el cardinal de S.

Y, finalmente, las contribuciones marginales de cada jugador $\{i\}$ se obtienen restando al potencial del juego, $P(N,v)$ el de cada uno de sus subjuegos $P(N\backslash\{i\},v)$ (fórmula 6.9), es decir a la última casilla de la tabla se le resta cada una de las tres anteriores:

$$D^1P(N,v) = \begin{pmatrix} 35 \\ 39,1 \end{pmatrix}, \quad D^2P(N,v) = \begin{pmatrix} 60 \\ 59,1 \end{pmatrix}, \quad D^3P(N,v) = \begin{pmatrix} 65 \\ 41,6 \end{pmatrix}$$

que coinciden con los valores de Shapley.

2. *Calculamos los coeficientes* $c_S^l = \sum_{T\subset S}(-1)^{s-t}v_l(T)$

$c_{\{1\}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$
$c_{\{2\}} = \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \end{pmatrix}$
$c_{\{3\}} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$
$c_{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$
$c_{\{1,3\}} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$
$c_{\{2,3\}} = \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 25 \end{pmatrix}$
$c_{\{1,2,3\}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 160 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 50 \end{pmatrix}$

y a partir de ellos los coeficientes de Harsanyi

$d_{\{1\}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$	$d_{\{2\}} = \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \end{pmatrix}$	$d_{\{3\}} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$	$d_{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$
$d_{\{1,3\}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2,5 \end{pmatrix}$	$d_{\{2,3\}} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12,5 \end{pmatrix}$	$d_{\{1,2,3\}} = \begin{pmatrix} 20 \\ 16,6 \end{pmatrix}$	

Y vemos que

$$P(N,v) = \sum_{S\subset N} d_S^l = \begin{pmatrix} 160 \\ 130 \end{pmatrix}$$

y que los valores de Shapley también coinciden:

$$\phi_1(v) = d_{\{1\}} + d_{\{1,2\}} + d_{\{1,3\}} + d_{\{1,2,3\}} = \begin{pmatrix} 35 \\ 39,1 \end{pmatrix}, \quad \text{etc.}$$

Se puede hacer otra interpretación del potencial a partir del siguiente modelo de probabilidad para escoger de forma aleatoria un subconjunto S de N ($|S| = s$ y $|N| = n$): en primer lugar, el tamaño s se puede escoger entre $1, 2, ..., n$ con probabilidad $\frac{1}{n}$; en segundo lugar, el subconjunto S se puede escoger con probabilidad $\frac{1}{\binom{n}{s}}$. Ordenando además las $n!$ permutaciones, tomamos un punto s y escogemos el correspondiente S. Así,

Proposición 6.3.1 *La función potencial P para todo juego (N, v) es*

$$P(N, v) = E\left[\frac{n}{s}v(S)\right]$$

Demostración.

Según la distribución de probabilidad anterior, el potencial es

$$P(N, v) = \sum_{S \subset N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} v(S) \tag{6.16}$$

Y es evidente entonces que la contribución marginal $D^i P$ coincide con el valor de Shapley:

$$D^i P(N, v) = P(N, v) - P(N \backslash \{i\}, v) = \sum_{i \in S \subset N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v(S) - v(S \backslash \{i\}] = \phi_i(v) \quad \square$$

6.3.3. Conservación de las diferencias

Otra forma de asignar pagos, que nos lleva a la misma solución, es a través de las diferencias. Supongamos que tenemos para todo par de jugadores $\{i\}$ y $\{j\}$ los vectores d^{ij}, compatibles en el sentido de que:

1. $d^{ii} = 0$
2. $d^{ij} = -d^{ji}$
3. $d^{ij} + d^{jk} = d^{ik} \quad \forall i, j, k \in N$

Dados estos vectores d^{ij}, una matriz de pagos (ψ_i) conserva las diferencias si para todo par de jugadores:

$$\psi_i - \psi_j = d^{ij}$$

Veremos que existe una única matriz de pagos eficiente que conserva las diferencias y es

$$\psi_i = \frac{1}{|N|}\left[v(N) + \sum_j d^{ij}\right], \quad \psi_j = \psi_i - d^{ij}$$

Para tener la solución, necesitamos obtener las diferencias. Esto se hace en forma recursiva.

Suponemos que los pagos se han obtenido para todos los subjuegos estrictos de (N, v). Es decir, conocemos el pago del jugador $\{i\}$, $\psi_i(S)$, en el subjuego (S, v) $(i \in S \subset N)$

$$d^{ij} = \psi_i(N\backslash\{j\}) - \psi_j(N\backslash\{i\}) \tag{6.17}$$

La matriz de pagos solución satisface

$$\sum_{i \in N} \psi_i(N) = v(N) \tag{6.18}$$

$$\psi_i(N) - \psi_i(N\backslash\{j\}) = \psi_j(N) - \psi_j(N\backslash\{i\}) \tag{6.19}$$

La expresión (6.19) ha sido utilizada por Myerson (1980) con el nombre de contribuciones balanceadas[******].

Teorema 6.3.4 *La solución, anteriormente construida, que conserva las diferencias está perfectamente definida. Además, se genera con una función potencial, es decir, coincide con el valor de Shapley.*

Demostración.

Sea el juego (N, v). Supongamos por inducción que se ha determinado la solución para todos los subjuegos estrictos (S, v) $(S \subset N, S \neq N)$ y que está generada por la función potencial

$$\psi_i(S) = P(S) - P(S\backslash\{i\}) \tag{6.20}$$

Es evidente, por la eficiencia, que (6.20) se cumple para los subjuegos con $|S| = 1$.

Suponemos por inducción que se cumple para $|S| = n - 1$ y vamos a ver que también se cumple para N. Tenemos que

$$d^{ij} = \psi_i\left(N\backslash\{j\}\right) - \psi_j\left(N\backslash\{i\}\right)$$

$$= \left[P\left(N\backslash\{j\}\right) - P\left(N\backslash\{i,j\}\right)\right] - \left[P\left(N\backslash\{i\}\right) - P\left(N\backslash\{i,j\}\right)\right]$$

$$= \left[P\left(N\backslash\{j\}\right) - P\left(N\backslash\{i\}\right)\right]$$

[******] La conservación de las diferencias es una generalización del reparto equitativo del superávit para juegos bipersonales. Es decir:

$$\psi_i = \psi_i(\{i,j\}) = v(\{i\}) + \frac{1}{2}\left[v(\{i,j\}) - v(\{i\}) - v(\{j\})\right]$$

$$\psi_j = \psi_j(\{i,j\}) = v(\{j\}) + \frac{1}{2}\left[v(\{i,j\}) - v(\{i\}) - v(\{j\})\right]$$

Y restando ambas:

$$\psi_i - \psi_j = v(\{i\}) - v(\{j\})$$

Además, $(\psi_i(N))$ está bien definida y:

$$\psi_i(N) - \psi_j(N) = d^{ij} = P\left(N\backslash\{j\}\right) - P\left(N\backslash\{i\}\right)$$

Fijando i y haciendo la media sobre j y en virtud de la eficiencia:

$$\psi_i(N) - \frac{1}{n}v(N) = \frac{1}{n}\sum_{j\in N} P\left(N\backslash\{j\}\right) - P\left(N\backslash\{i\}\right)$$

Luego,

$$\psi_i(N) + P\left(N\backslash\{i\}\right) = \frac{1}{n}\left[v(N) + \sum_{j\in N} P\left(N\backslash\{j\}\right)\right]$$

y como el segundo miembro es el potencial $P(N)$

$$\psi_i(N) + P\left(N\backslash\{i\}\right) = P\left(N\right) \Rightarrow \psi_i(N) = P\left(N\right) - P\left(N\backslash\{i\}\right)$$

Por tanto, (6.20) se cumple para N y la solución que conserva las diferencias es el valor de Shapley $\psi_i(N) = D^i P(N)$. $\square$

6.3.4. Consistencia

También se puede justificar el valor de Shapley por su comportamiento sobre ciertos subjuegos que se producen a partir del juego original.

Sea ψ una función solución $\psi : G^v(N) \to \mathbb{R}^{k\times n}$ y (N,v) un juego, si $T \subset N$ llamamos juego reducido (T, v_T^{ϕ}) aquel que viene definido por

$$v_T^{\psi}(S) = v(S\cup\overline{T}) - \sum_{i\in\overline{T}} \psi_i(S\cup\overline{T}, v) \quad \text{para toda } S\subset T \tag{6.21}$$

Decimos que la función solución ψ es consistente si al aplicarla al juego reducido da los mismos valores que al aplicarla al juego original:

$$\psi_j(T, v_T^{\psi}) = \psi_j(N, v) \quad \text{para todo } j\in T \tag{6.22}$$

Para computar el valor de una coalición S de T, tenemos que considerar el juego resultante después de pagar a los miembros de $T\backslash S$ o, lo que es igual, considerar el juego reducido $(S\cup\overline{T}, v)$.

La definición del juego reducido se puede escribir como

$$v_T^{\psi}(S) = \sum_{i\in S} \psi_i(S\cup\overline{T}, v)$$

Además, si ψ es eficiente y consistente

$$v_T^{\psi}(T) = \sum_{j\in T}\psi_j(T, v_T^{\psi}) = \sum_{j\in T}\psi_j(N, v) = v(N) - \sum_{j\in\overline{T}}\psi_j(N, v)$$

Lema 6.3.1 *ψ es una función solución consistente sii satisface*

$$\psi_j(T, v_T^\psi) = \psi_j(N, v)\ \forall j \in T$$

para todos los juegos (N, v) y subjuegos (T, v_T^ψ) con $|T| = n - 1$.

Demostración.

La demostración se hace por inducción sobre el tamaño de $\overline{T}$.

Teorema 6.3.5 *El valor de Shapley ϕ es una función solución consistente.*

Demostración.

Como el índice de Shapley es eficiente, $\forall S \subset N\backslash\{i\}$, si llamamos al juego restringido $v_{N-\{i\}}^\psi = v_{-i}$:

$$v_{-i}(S) = v(S \cup \{i\}) - \phi_i(S \cup \{i\}, v) = \sum_{j \in S} \phi_j(S \cup \{i\}, v)$$

$$= \sum_{j \in S} [P(S \cup \{i\}, v) - P(S \cup \{i\}\backslash\{j\}, v)]$$

Comparando,

$$P(S, v_{-i}) = P(S \cup \{i\}, v) + cte \quad \text{ y,}$$

$$\phi_j(N\backslash\{j\}, v_{-i}) = P(N\backslash\{i\}, v_{-i}) - P(N\backslash\{i, j\}, v_{-i})$$

$$= P(N, v) + cte - P(N\backslash\{j\}, v) - cte$$

$$= P(N, v) - P(N\backslash\{j\}, v) = \phi_j(N, v). \quad \square$$

Hemos visto que la consistencia es equivalente a la existencia de la función potencial. El valor de Shapley "casi" queda caracterizado por la consistencia. Este "casi" se refiere a las condiciones iniciales representadas por los juegos bipersonales. Es decir, a los repartos justos.

Una función ϕ es estándar o justa para juegos bipersonales si

$$\psi_i(\{i, j\}, v) = v(\{i\}) + \frac{1}{2}[v(\{i, j\}) - v(\{i\}) - v(\{j\})] \tag{6.23}$$

para todo par de jugadores distintos y todo juego, dicho de otro modo el reparto de $v(\{i, j\}) - v(\{i\}) - v(\{j\})$ se hace de una forma equitativa.

Teorema 6.3.6 *ψ es una función solución consistente y justa para juegos bipersonales sii es el valor de Shapley ϕ.*

Demostración.

$\Leftarrow$) es inmediata.

$\Rightarrow$) En primer lugar, veamos por inducción que ψ es eficiente:

$$\sum_{i \in N} \psi_i(N, v) = v(N)$$

- Es eficiente para $n = 1$, $\psi_i(\{i\}, v) = v(\{i\})$

  Sea $v(\{i\}) = c$ y el juego $(\{i, j\}, \overline{v})$, $i \neq j$, definido por

  $$\overline{v}(\{i\}) = \overline{v}(\{i, j\}) = c, \qquad \overline{v}(\{j\}) = 0$$

  Por ser equitativo,

  $$\psi_i(\{i, j\}, \overline{v}) = \overline{v}(\{i\}) + \frac{1}{2}\left[\overline{v}(\{i, j\}) - \overline{v}(\{i\}) - \overline{v}(\{j\})\right] = c + \frac{1}{2}[c - c - 0] = c, \text{ y}$$

  $$\psi_j(\{i, j\}, \overline{v}) = \overline{v}(\{j\}) + \frac{1}{2}\left[\overline{v}(\{i, j\}) - \overline{v}(\{i\}) - \overline{v}(\{j\})\right] = 0 + \frac{1}{2}[c - c - 0] = 0$$

  por tanto $\overline{v}_{-j}(\{i\}) = c - 0 = c = v(\{i\})$ y por la consistencia

  $$v(\{i\}) = c = \psi_i(\{i, j\}, \overline{v}) = \psi_i(\{i\}, \overline{v}_{-j}) = \psi_i(\{i\}, v)$$

- Se cumple para $|N| = 2$ por ser justa para juegos bipersonales.

- Suponemos que se cumple para todos los juegos con menos de n jugadores. Veamos que es eficiente para $|N| = n$.

  Sea un juego (N, v) y un jugador i, por la consistencia

  $$\sum_{j \in N} \psi_j(N, v) = \sum_{j \in N \backslash \{i\}} \psi_j(N \backslash \{i\}, v_{-i}) + \psi_i(N, v)$$

  y como ψ es eficiente para juegos con $n - 1$ jugadores,

  $$= v_{-i}(N \backslash \{i\}) + \psi_i(N, v) = v(N)$$

  Luego ψ es eficiente.

En segundo lugar, veamos que, también por inducción, ψ admite un potencial. Para ello, se define una función Q sobre todos los juegos de, cómo máximo, dos jugadores distintos, de la siguiente forma:

$Q(\psi, v) = 0$

$Q(\{i\},v) = v(\{i\})$

$Q(\{i,j\},v) = \frac{1}{2}\left[v(\{i\}) + v(\{j\}) + v(\{i,j\})\right]$

$$\psi_i(N,v) = Q(N,v) - Q(N\backslash\{i\},v) \tag{6.24}$$

- Para $|N| = 1$ se cumple

$$\psi_i(\{i\},v) = Q(\{i\},v) - Q(\emptyset,v) = v(\{i\})$$

- También se cumple para $|N| = 2$

$$\psi_i(\{i,j\},v) = Q(\{i,j\},v) - Q(\{j\},v) = \frac{1}{2}\left[v(\{i\}) + v(\{j\}) + v(\{i,j\})\right] - v(\{j\})$$

$$\psi_j(\{i,j\},v) = Q(\{i,j\},v) - Q(\{i\},v) = \frac{1}{2}\left[v(\{i\}) + v(\{j\}) + v(\{i,j\})\right] - v(\{i\})$$

  Y sumando

$$\psi_i(\{i,j\},v) + \psi_j(\{i,j\},v) = v(\{i,j\})$$

  Por ser ψ eficiente y estar generado por un potencial, se trata del valor de Shapley.

- Hay que comprobar ahora, por inducción, que se puede extender al resto de los juegos. Supongamos que sea cierto para todos los juegos con menos de n jugadores.

  Sea el juego (N,v) con n jugadores, hay que demostrar que

$$\psi_i(N,v) + Q(N\backslash\{i\},v)$$

  es el mismo para cualquier i, en cuyo caso sería $Q(N,v)$.

  Para $\forall i,j,k \in N, i \neq j$ y $k \neq i,j$, la consistencia y (6.24):

$$\psi_i(N,v) - \psi_j(N,v) = \psi_i(N\backslash\{k\},v_{-k}) - \psi_j(N\backslash\{k\},v_{-k})$$

$$[Q(N\backslash\{k\},v_{-k}) - Q(N\backslash\{i,k\},v_{-k})] - [Q(N\backslash\{k\},v_{-k}) - Q(N\backslash\{j,k\},v_{-k})]$$

$$[Q(N\backslash\{j,k\},v_{-k}) - Q(N\backslash\{i,j,k\},v_{-k})] - [Q(N\backslash\{i,k\},v_{-k}) - Q(N\backslash\{i,j,k\},v_{-k})]$$

  y de nuevo por la consistencia y (6.24):

$$= \phi^i(N\backslash\{j,k\},v_{-k}) - \phi^j(N\backslash\{i,k\},v_{-k})$$

$$= \phi^i(N\backslash\{j\},v) - \phi^j(N\backslash\{i\},v$$

$$= [Q(N\backslash\{j\},v) - Q(N\backslash\{i,j\},v)] - [Q(N\backslash\{i\},v) - Q(N\backslash\{i,j\},v)]$$

$$= Q(N\backslash\{j\},v) - Q(N\backslash\{i\},v)$$

Y reuniendo el principio con el final

$$\psi_i(N,v) - \psi_j(N,v) = Q(N\backslash\{j\},v) - Q(N\backslash\{i\},v) \Leftrightarrow$$

$$\psi_i(N,v) + Q(N\backslash\{i\},v) = \psi_j(N,v) + Q(N\backslash\{j\},v$$

Por consiguiente, ψ es el valor de Shapley. $\square$

6.4. El índice de Shapley-Shubik para los juegos simples vectoriales

En esta sección vamos a estudiar el valor de Shapley para los juegos simples vectoriales en forma canónica. Recordamos que un juego simple vectorial está en forma canónica, (N,ν), cuando tenemos definida una clasificación y una función característica $\nu : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbb{R}^r$ tal que $\nu(S)$ es una r-upla, cuyos unos indican a qué clases pertenece la coalición y los ceros las clases a las que no pertenece.

El valor de Shapley en los juegos simples escalares es conocido como índice de poder debido a las situaciones en que se aplica: en la política, en organizaciones, en empresas, etc. Más concretamente, se conoce como índice de poder de Shapley-Shubik (Ver [36], [3] [23] y [24]). Vamos a establecer la forma de dicho índice de poder para el caso de los juegos simples vectoriales siguiendo un razonamiento similar al establecido por Dubey y Shapley ([33]) y Dubey ([4]).

En los juegos simples vectoriales, $S^v(N)$, el tercer axioma del teorema de Shapley no puede utilizarse. Por ello se definen dos operaciones, $\vee$ y $\wedge$, que dotan a $S^v(N)$ de la estructura de retículo distributivo:

$$(\nu \vee \nu')(S) = \max\,\{\nu(S), \nu'(S)\} = (\max\,(i_1,j_1), \max\,(i_2,j_2), ..., \max\,(i_r,j_r)) \qquad (6.25)$$

$$(\nu \wedge \nu')(S) = \min\,\{\nu(S), \nu'(S)\} = (\min\,(i_1,j_1), \min\,(i_2,j_2), ..., \min\,(i_r,j_r)) \qquad (6.26)$$

$$\text{siendo } \nu(S) = (i_1, i_2, ..., i_r) \text{ y } \nu'(S) = (j_1, j_2, ..., j_r),$$

y que nos permiten definir un nuevo axioma, el llamado de transferencia S3', que sustituye a S3 (Ver [7]).

De esta forma, el teorema que caracteriza el valor de Shapley para los juegos simples vectoriales dice:

Teorema 6.4.1 *Hay una única función* $\phi : S^v(N) \rightarrow \mathbb{R}^{r\times n}$ *que satisface los tres axiomas siguientes:*

S1. *Si S es un soporte de ν, entonces* $\sum_{i\in S}\phi_i(\nu)=\nu(S)$

S2. *Para cualquier permutación σ y cualquier jugador i*

$$\phi_{\sigma(i)}(\sigma\nu)=\phi_i(\nu)$$

S3'. *Para ν_1 y ν_2 cualesquiera, entonces*

$$\phi(\nu_1\vee\nu_2)+\phi(\nu_1\wedge\nu_2)=\phi(\nu_1)+\phi(\nu_2)$$

y dicha función es

$$\phi_i(\nu)=\begin{pmatrix}\sum_{\{i\in S;S\in U_1;S\backslash\{i\}\notin U_1\}}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\\ \sum_{\{i\in S;S\in U_2;S\backslash\{i\}\notin U_2\}}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\\ \cdots\\ \sum_{\{i\in S;S\in U_r;S\backslash\{i\}\notin U_r\}}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\end{pmatrix}\qquad(6.27)$$

Demostración (Dubey, [4]).

La demostración de la unicidad de ϕ se hará por el procedimiento de inducción sobre las coaliciones minimales ganadoras.

Cada juego simple vectorial ν en cada componente l tiene un número finito de coaliciones minimales ganadoras $S_1^l,...,S_{k_l}^l$ y como los juegos de unanimidad $\{u_{S_j}^l | l=1,2,...,r\}$ forman una base del retículo $S^v(N)$, se verifica que

$$\nu_l=u_{S_1}^l\vee u_{S_2}^l\vee...\vee u_{S_{k_l}}^l$$

Si sólo hubiera la coalición ganadora N (ésta sería la única minimal ganadora), entonces $\nu_l=u_N^l$ y como $\phi(u_N^l)$ está perfectamente definido, entonces $\phi(\nu_l)$ es único.

Para ver que $\phi(\nu_l)$ es único cuando hay coaliciones minimales ganadoras de cardinal inferior a n, consideramos dos casos

1. $\phi(\nu_l)$ es única si sólo hay una coalición minimal ganadora de menor cardinal y éste es $p+1$, $p+2$, ..., n. Veamos que también se cumple para p.

   - Si sólo hay una coalición minimal ganadora (la de cardinal p), entonces $\nu_l=u_S^l$ y $\phi(\nu_l)$ es única.
   - Hay otras coaliciones minimales ganadoras de cardinal mayor que p: S_1, S_2,..., S_m. Tenemos

$$(u_{S_1}^l\vee u_{S_2}^l\vee...\vee u_{S_m}^l)\vee u_S^l=\nu_l\quad\text{o lo que es igual}\quad\nu_l'\vee u_S^l=\nu_l$$

Por tanto, el cardinal menor de las coaliciones minimales ganadoras de ν_l' es mayor que p y por la hipótesis de inducción, $\phi(\nu_l^{'})$ es única.

Pero, por la definición de $\wedge$, el cardinal menor de las coaliciones minimales ganadoras de $u_S^l \wedge \nu_l^{'}$ es mayor que p y de nuevo por la hipótesis de inducción $\phi(\nu_l \wedge \nu_l^{'})$ es único. Aplicando ahora S3'

$$\phi(\nu_l) = \phi(\nu_l^{'} \vee u_S^l) = \phi(\nu_l^{'}) + \phi(u_S^l) - \phi(u_S^l \wedge \nu_l^{'})$$

y como $\phi(\nu_l^{'}) + \phi(u_S^l) - \phi(u_S^l \wedge \nu_l^{'})$ es único, también lo es $\phi(\nu_l)$.

2. Hay más de una coalición minimal ganadora de menor cardinal p. Suponemos por inducción que $\phi(\nu_l)$ es único sea cuál sea p, si el número de coaliciones minimales de menor cardinal es 1, 2, 3, ..., j. Veamos que también $\phi(\nu_l)$ es único cuando este número es $j+1$.

   Sean $S_1, ..., S_{j+1}$ las coaliciones minimales de ν_l con p jugadores cada una. Y sean $T_1, ..., T_m$ el resto de coaliciones minimales de ν_l. Está claro que $|T_i| > p$ y que

   $$(u_{T_1}^l \vee ... \vee u_{T_m}^l \vee u_{S_1}^l \vee ... \vee u_{S_j}^l) \vee u_{S_{j+1}}^l = \nu_l \quad \text{o lo que es igual} \quad \nu_l^{''} \vee u_{S_{j+1}}^l = \nu_l$$

   Es evidente que $\nu_l^{''}$ y $\nu_l^{''} \wedge u_{S_{j+1},1}^l$ satisfacen la hipótesis de inducción, por tanto $\phi(\nu_l^{''})$ y $\phi(\nu_l^{''} \wedge \nu_{S_{j+1},1}^l)$ son únicas. Aplicando S3'

   $$\phi(\nu_l) = \phi(\nu_l^{''} \vee \nu_{S_{j+1}}^l) = \phi(\nu_l^{''}) + \phi(\nu_{S_{j+1}}^l) - \phi(\nu_l^{''} \wedge \nu_{S_{j+1}}^l)$$

   lo que demuestra la unicidad de $\phi(\nu_l)$.

Por lo tanto, $\phi(\nu_l)$ es único, sean cuáles sean las coaliciones minimales ganadoras.

Además, el valor de Shapley definido sobre $S^v(N)$ verifica los axiomas S1, S2 y S3', puesto que $\nu + \nu^{'} = (\nu \vee \nu^{'}) + (\nu \wedge \nu^{'})$ y por S3', $\phi(\nu) + \phi(\nu^{'}) = \phi(\nu \vee \nu^{'}) + \phi(\nu \wedge \nu^{'})$ y queda en la forma

$$\phi_i(\nu_l) = \sum_{\{i \in S \subset N\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [\nu_l(S) - \nu_l(S \backslash \{i\})]$$

Es decir,

$$\phi_i(\nu) = \begin{pmatrix} \sum_{\{i \in S; S \in U_1; S \backslash \{i\} \notin U_1\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \\ \sum_{\{i \in S; S \in U_2; S \backslash \{i\} \notin U_2\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \\ \cdots \\ \sum_{\{i \in S; S \in U_r; S \backslash \{i\} \notin U_r\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \end{pmatrix} \qquad \square$$

Veamos en un ejemplo cómo se calculan los índices vectoriales de Shapley-Shubik en un juego simple vectorial dado en forma canónica:

Ejemplo 6.4.1 *Sea el juego simple vectorial cuya clasificación viene dada por la tabla:*

$Clases$	$Coaliciones$
U_1	$Minimales$ $\{1,2,6\},\{1,3,4\}$
U_2	$Minimales$ $\{1,5\},\{1,2,4\}$
U_3	$Minimales$ $\{1,3,6\},\{1,4,6\}$
$\mathcal{R}$	

Los índices de poder de Shapley-Shubik están basados en el concepto de jugador pivote. Consideramos todas las permutaciones de los jugadores $\{1,2,3,4,5,6\}$*. En total* 720*. Se dice que en la permutación* 261354 *(y leyendo siempre de izquierda a derecha) el jugador* $\{1\}$ *es pivote porque la coalición* $\{2,6,1\}$ *es ganadora y la coalición* $\{2,6\}$ *es perdedora (se suele decir que* $\{1,2,6\}$ *y* $\{2,6\}$ *forman un swing). Esto ocurre en todas las permutaciones que se obtienen dejando fijo a* $\{1\}$ *y permutando de todas las formas posibles los jugadores anteriores y posteriores:* $2!\cdot 3! = 12$*. Y el índice de poder del jugador* $\{i\}$ *es el número de veces en que* $\{i\}$ *es pivote dividido por* $6!$*, que es el número de veces que son pivotes todos los jugadores.*

Para el jugador $\{1\}$ *las coaliciones de* U_1 *a las que su defección hace perdedoras son* $\{1,2,6\}$*,* $\{1,3,4\}$*,* $\{1,2,3,6\}$*,* $\{1,2,4,6\}$*,* $\{1,2,5,6\}$*,* $\{1,2,3,4\}$*,* $\{1,3,4,5\}$*,* $\{1,3,4,6\}$*,* $\{1,2,3,4,5\}$*,* $\{1,2,3,4,6\}$*,* $\{1,2,3,5,6\}$*,* $\{1,2,4,5,6\}$*,* $\{1,3,4,5,6\}$ *y* $\{1,2,3,4,5,6\}$*. Los sumandos que intervienen para calcular el índice de poder son:*

$$\frac{1!\cdot 4!}{6!} = \frac{24}{720}, \quad \frac{2!\cdot 3!}{6!} = \frac{12}{720}, \quad \frac{3!\cdot 2!}{6!} = \frac{12}{720}, \quad \frac{4!\cdot 1!}{6!} = \frac{24}{720}, \quad \frac{5!\cdot 0!}{6!} = \frac{120}{720}$$

$$\phi_1(\nu_1) = 0\cdot\frac{24}{720} + 2\cdot\frac{12}{720} + 6\cdot\frac{12}{720} + 5\cdot\frac{24}{720} + 1\cdot\frac{120}{720} = \frac{336}{720}$$

De manera análoga se procede con el resto de jugadores y clases, resultando los índices vectoriales de Shapley:*

$$\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 & \phi_5 & \phi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{336}{720} & \frac{96}{720} & \frac{96}{720} & \frac{96}{720} & \frac{0}{720} & \frac{96}{720} \\ \frac{420}{720} & \frac{60}{720} & \frac{0}{720} & \frac{60}{720} & \frac{180}{720} & \frac{0}{720} \\ \frac{300}{720} & \frac{0}{720} & \frac{60}{720} & \frac{60}{720} & \frac{0}{720} & \frac{300}{720} \end{pmatrix}$$

A continuación analizamos los nuevos índices de los jugadores de un juego simple vectorial cuando agregamos clases.

*Cada columna representa el índice de poder del jugador en cada uno de los criterios.

6.4.1. Índices de Shapley en la agregación de clases

Dado un juego simple vectorial en forma canónica (N, ν), de clasificación asociada $\{U_1, U_2, ..., U_r\}$, al agregar una serie de clases por unión o intersección hay un caso particular en que los índices están relacionados de una forma sencilla. Este es el caso de la unión e intersección de dos clases U_i y U_j, $i, j \in \{1, 2, ..., r\}$. Los juegos simples marginales asociados a la unión, $\nu_i \vee \nu_j$, y a la intersección, $\nu_i \wedge \nu_j$, verifican el axioma de transferencia:

$$\phi\left(\nu_i \vee \nu_j\right) + \phi\left(\nu_i \wedge \nu_j\right) = \phi(\nu_i) + \phi(\nu_j)$$

El cálculo de los índices de poder de las clases agregadas por unión o intersección se calculan de la forma clásica, dado que dichas operaciones definen los elementos minimales que caracterizan la clase. No obstante, por el axioma de transferencia, si conocemos los índices de las clases y los de la clase unión, podemos conocer los de la clase intersección, o a la inversa.

Ejemplo 6.4.1 (Continúa) *Si agregamos las clases U_1 y U_2 por unión, el juego simple vectorial resultante viene dada por la tabla:*

$Clases$	$Marginales$	$Coaliciones$
$U_1' = U_1$	$\nu_1' = \nu_1$	$\frac{Minimales}{\{1,2,6\},\{1,3,4\}}$
$U_2' = U_2$	$\nu_2' = \nu_2$	$\frac{Minimales}{\{1,5\},\{1,2,4\}}$
$U_3' = U_3$	$\nu_3' = \nu_3$	$\frac{Minimales}{\{1,3,6\},\{1,4,6\}}$
$U_*' = U_1 \cup U_2$	$\nu_*' = \nu_1 \vee \nu_2$	$\frac{Minimales}{\{1,5\},\{1,2,4\},\{1,2,6\},\{1,3,4\}}$
$\mathcal{R}$		

Los índices vectoriales de Shapley de los jugadores de este nuevo juego son:

$$\left(\begin{array}{cccccc} \phi_1' & \phi_2' & \phi_3' & \phi_4' & \phi_5' & \phi_6' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccccc} \frac{336}{720} & \frac{96}{720} & \frac{96}{720} & \frac{96}{720} & \frac{0}{720} & \frac{96}{720} \\ \frac{420}{720} & \frac{60}{720} & \frac{0}{720} & \frac{60}{720} & \frac{180}{720} & \frac{0}{720} \\ \frac{300}{720} & \frac{0}{720} & \frac{60}{720} & \frac{60}{720} & \frac{0}{720} & \frac{300}{720} \\ \frac{468}{720} & \frac{48}{720} & \frac{24}{720} & \frac{48}{720} & \frac{108}{720} & \frac{24}{720} \end{array}\right)$$

Si ahora agregamos las clases U_1 y U_2 por intersección, el nuevo juego simple vectorial *viene definido por la tabla:*

Clases	*Marginales*	*Coaliciones*
$U_1'' = U_1$	$\nu_1'' = \nu_1$	*Minimales* $\{1,2,6\},\{1,3,4\}$
$U_2'' = U_2$	$\nu_2'' = \nu_2$	*Minimales* $\{1,5\},\{1,2,4\}$
$U_3'' = U_3$	$\nu_3'' = \nu_3$	*Minimales* $\{1,3,6\},\{1,4,6\}$
$U_*'' = U_1 \cap U_2$	$\nu_*'' = \nu_1 \wedge \nu_2$	*Las minimales* $\{1,2,3,4\},\{1,2,4,6\},\{1,2,5,6\},\{1,3,4,5\}$
$\mathcal{R}$		

Los índices vectoriales de Shapley de los jugadores de este nuevo juego son:

$$\begin{pmatrix} \phi_1'' & \phi_2'' & \phi_3'' & \phi_4'' & \phi_5'' & \phi_6'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{336}{720} & \frac{96}{720} & \frac{96}{720} & \frac{96}{720} & \frac{0}{720} & \frac{96}{720} \\ \frac{420}{720} & \frac{60}{720} & \frac{0}{720} & \frac{60}{720} & \frac{180}{720} & \frac{0}{720} \\ \frac{300}{720} & \frac{0}{720} & \frac{60}{720} & \frac{60}{720} & \frac{0}{720} & \frac{300}{720} \\ \frac{288}{720} & \frac{108}{720} & \frac{72}{720} & \frac{108}{720} & \frac{72}{720} & \frac{72}{720} \end{pmatrix}$$

Finalmente, podemos comprobar que al agregar las clases U_1 y U_2 por unión $(\nu_1 \vee \nu_2)$ y por intersección$(\nu_1 \wedge \nu_2)$, se verifica el axioma S3' de transferencia:

$$\phi(\nu_1) + \phi(\nu_2) = \phi(\nu_1 \vee \nu_2) + \phi(\nu_1 \wedge \nu_2)$$

Es decir,

$$\phi(\nu_1) + \phi(\nu_2) = \begin{pmatrix} \frac{336}{720} & \frac{96}{720} & \frac{96}{720} & \frac{96}{720} & \frac{0}{720} & \frac{96}{720} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{420}{720} & \frac{60}{720} & \frac{0}{720} & \frac{60}{720} & \frac{180}{720} & \frac{0}{720} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{468}{720} & \frac{48}{720} & \frac{24}{720} & \frac{48}{720} & \frac{108}{720} & \frac{24}{720} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{288}{720} & \frac{108}{720} & \frac{72}{720} & \frac{108}{720} & \frac{72}{720} & \frac{72}{720} \end{pmatrix}$$

$$= \phi(\nu_*') + \phi(\nu_*'') = \phi(\nu_1 \vee \nu_2) + \phi(\nu_1 \wedge \nu_2)$$

Por tanto, los índices de los jugadores del juego ν_*'' se habrían podido calcular a partir de los de ν_*', ν_1 y ν_2 o los de ν_*' a partir de los de ν_*'', ν_1 y ν_2 por

$$\phi(\nu_1) + \phi(\nu_2) = \phi(\nu_*') + \phi(\nu_*'')$$

Si agregamos $|I|$ clases del juego (N, ν) de clasificación $\{U_1, U_2, ..., U_r\}$, por unión o intersección, podemos aplicar el axioma de transferencia sucesivas veces, teniendo en cuenta la estructura de retículo de los juegos simples, para calcular los índices de los juegos marginales correspondientes, $\phi\left(\bigvee_{i\in I}\nu_i\right)$ en función de $\phi\left(\bigwedge_{i\in I}\nu_i\right)$ y a la inversa.

Aplicando el axioma de transferencia para la unión de tres clases U_i, U_j y U_k:

$$\phi\left(\nu_i \vee \nu_j \vee \nu_k\right) = \phi[(\nu_i \vee \nu_j) \vee \nu_k] = \phi\left(\nu_i \vee \nu_j\right) + \phi\left(\nu_k\right) - \phi[(\nu_i \vee \nu_j) \wedge \nu_k]$$

y como $(\nu_i \vee \nu_j) \wedge \nu_k = (\nu_i \wedge \nu_k) \vee (\nu_j \wedge \nu_k)$ por la estructura de retículo, de nuevo por el axioma de transferencia

$$= \phi\left(\nu_i\right) + \phi\left(\nu_j\right) - \phi\left(\nu_i \wedge \nu_j\right) + \phi\left(\nu_k\right) - \left[\phi\left(\nu_i \wedge \nu_k\right) + \phi\left(\nu_j \wedge \nu_k\right) - \phi\left(\nu_i \wedge \nu_j \wedge \nu_k\right)\right]$$

quitando paréntesis y ordenando, resulta la fórmula

$$\phi\left(\nu_i \vee \nu_j \vee \nu_k\right) = \phi\left(\nu_i\right) + \phi\left(\nu_j\right) + \phi\left(\nu_k\right) - \phi\left(\nu_i \wedge \nu_j\right) - \phi\left(\nu_i \wedge \nu_k\right) - \phi\left(\nu_j \wedge \nu_k\right) + \phi\left(\nu_i \wedge \nu_j \wedge \nu_k\right)$$

que es fácilmente generalizable a más clases:

$$\phi\left(\bigvee_{i\in J}\nu_i\right) = \sum_{i\in J}\phi(\nu_i) - \sum_{i,j\in J}^{i\neq j}\phi(\nu_i \wedge \nu_j) + \sum_{i,j,k\in J}^{i\neq j\neq k}\phi(\nu_i \wedge \nu_j \wedge \nu_k) \quad ... \quad \pm\, \phi(\bigwedge_{i\in J}\nu_i)$$

Ejemplo 6.4.1 (Continúa) *Podemos definir otro juego a partir del nuestro, cuya clasificación es* $\{U_1, U_2, U_3\}$*, añadiendo las clases agregadas* $U_1 \cup U_2 \cup U_3$*,* $U_1 \cap U_2$*,* $U_1 \cap U_3$*,*

$U_2 \cap U_3$ y $U_1 \cap U_2 \cap U_3$, que vendría dado por la tabla:

Clases	*Marginales*	*Coaliciones*
U_1	ν_1	*Minimales* $\{1,2,6\},\{1,3,4\}$
U_2	ν_2	*Minimales* $\{1,5\},\{1,2,4\}$
U_3	ν_3	*Minimales* $\{1,3,6\},\{1,4,6\}$
$U_1 \cup U_2 \cup U_3$	$\nu_1 \vee \nu_2 \vee \nu_3$	*Minimales* $\{1,5\},\{1,2,4\},\{1,2,6\},\{1,3,4\},$ $\{1,3,6\},\{1,4,6\}$
$U_1 \cap U_2$	$\nu_1 \wedge \nu_2$	*Minimales* $\{1,2,3,4\},\{1,2,4,6\},\{1,2,5,6\},$ $\{1,3,4,5\}$
$U_1 \cap U_3$	$\nu_1 \wedge \nu_3$	*Minimales* $\{1,2,3,6\},\{1,2,4,6\},\{1,3,4,6\}$
$U_2 \cap U_3$	$\nu_2 \wedge \nu_3$	*Minimales* $\{1,2,4,6\},\{1,3,5,6\},\{1,4,5,6\}$
$U_1 \cap U_2 \cap U_3$	$\nu_1 \wedge \nu_2 \wedge \nu_3$	*Minimales* $\{1,2,4,6\},\{1,2,3,5,6\},\{1,3,4,5,6\}$
$\mathcal{R}$		

Los índices vectoriales de Shapley de los jugadores de este nuevo juego son:

$$\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 & \phi_5 & \phi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{336}{720} & \frac{96}{720} & \frac{96}{720} & \frac{96}{720} & \frac{0}{720} & \frac{96}{720} \\ \frac{420}{720} & \frac{60}{720} & \frac{0}{720} & \frac{60}{720} & \frac{180}{720} & \frac{0}{720} \\ \frac{300}{720} & \frac{0}{720} & \frac{60}{720} & \frac{60}{720} & \frac{0}{720} & \frac{300}{720} \\ \frac{492}{720} & \frac{24}{720} & \frac{24}{720} & \frac{48}{720} & \frac{84}{720} & \frac{48}{720} \\ \frac{288}{720} & \frac{108}{720} & \frac{72}{720} & \frac{108}{720} & \frac{72}{720} & \frac{72}{720} \\ \frac{252}{720} & \frac{72}{720} & \frac{72}{720} & \frac{72}{720} & \frac{0}{720} & \frac{252}{720} \\ \frac{252}{720} & \frac{36}{720} & \frac{36}{720} & \frac{72}{720} & \frac{72}{720} & \frac{252}{720} \\ \frac{228}{720} & \frac{84}{720} & \frac{48}{720} & \frac{84}{720} & \frac{48}{720} & \frac{228}{720} \end{pmatrix}$$

Y podemos comprobar que los índices del juego marginal $\nu_1 \wedge \nu_2 \wedge \nu_3$ (fila cuarta) se obtienen haciendo la suma de los de ν_1, ν_2 y ν_3 (filas primera, segunda y tercera) menos la suma de los de $\nu_1 \wedge \nu_2$, $\nu_1 \wedge \nu_3$ y $\nu_2 \wedge \nu_3$ (filas quinta, sexta y séptima) y más la de $\nu_1 \wedge \nu_2 \wedge \nu_3$

(fila octava):

$$\begin{pmatrix} \frac{492}{720} & \frac{24}{720} & \frac{24}{720} & \frac{48}{720} & \frac{84}{720} & \frac{48}{720} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{336}{720} & \frac{96}{720} & \frac{96}{720} & \frac{96}{720} & \frac{0}{720} & \frac{96}{720} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{420}{720} & \frac{60}{720} & \frac{0}{720} & \frac{60}{720} & \frac{180}{720} & \frac{0}{720} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{300}{720} & \frac{0}{720} & \frac{60}{720} & \frac{60}{720} & \frac{0}{720} & \frac{300}{720} \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} \frac{288}{720} & \frac{108}{720} & \frac{72}{720} & \frac{108}{720} & \frac{72}{720} & \frac{72}{720} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{252}{720} & \frac{72}{720} & \frac{72}{720} & \frac{72}{720} & \frac{0}{720} & \frac{252}{720} \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} \frac{252}{720} & \frac{36}{720} & \frac{36}{720} & \frac{72}{720} & \frac{72}{720} & \frac{252}{720} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{228}{720} & \frac{84}{720} & \frac{48}{720} & \frac{84}{720} & \frac{48}{720} & \frac{228}{720} \end{pmatrix}$$

6.4.2. El potencial en los juegos simples vectoriales

El potencial de los juegos vectoriales es válido para los juegos simples vectoriales ya que su definición sólo requiere la eficiencia de las contribuciones marginales de los jugadores y coincide con el valor de Shapley para estos juegos. Veamos con un ejemplo cómo el potencial nos permite calcular los índices de Shapley-Shubik.

Ejemplo 6.4.2 *Sea el juego simple vectorial (N, ν) definido sobre $N = \{1, 2, 3, 4\}$ por la clasificación $U = \{U_1, U_2\}$:*

$$U_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\} \quad ; \quad U_2 = \{\{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

Calculamos los potenciales de los juegos restringidos a las distintas coaliciones de forma recursiva.

1. *Los potenciales de los subjuegos de conjuntos de jugadores formados por uno o dos son nulos.*

2. *Los potenciales de los subjuegos de conjuntos de jugadores formados por tres:*

$$P(\{1, 2, 3\}, \nu) = \frac{1}{3} \cdot \nu(\{1, 2, 3\}) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = P(\{1, 2, 4\}, \nu)$$

$$P(\{2, 3, 4\}, \nu) = \frac{1}{3} \cdot \nu(\{2, 3, 4) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$P(\{1, 3, 4\}, \nu) = \frac{1}{3} \cdot \nu(\{1, 3, 4\}) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. *El potencial del juego* (N,ν)*:*

$$P(\{1,2,3,4\},\nu) = \frac{1}{4}\cdot[\nu(\{1,2,3,4\}) + P(\{1,2,3\},\nu) + P(\{1,2,4\},\nu) + P(\{2,3,4\},\nu)] =$$

$$\frac{1}{4}\cdot\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\frac{5}{12}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Las contribuciones marginales de los jugadores serán:

$$D^1P(N,\nu) = P(N,\nu) - P(\{2,3,4\},\nu) = \begin{pmatrix}\frac{5}{12}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5}{12}\\0\end{pmatrix}$$

$$D^2P(N,\nu) = P(N,\nu) - P(\{1,3,4\},\nu) = \begin{pmatrix}\frac{5}{12}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5}{12}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$D^3P(N,\nu) = P(N,\nu) - P(\{1,2,4\},\nu) = \begin{pmatrix}\frac{5}{12}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{12}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$D^4P(N,\nu) = P(N,\nu) - P(\{1,2,3\},\nu) = \begin{pmatrix}\frac{5}{12}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{12}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

y verifican la eficiencia:

$$D^1P(N,\nu) + D^2P(N,\nu) + D^3P(N,\nu) + D^4P(N,\nu) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Además, coinciden con los valores de Shapley:

1. $\phi_1(\nu) = \begin{pmatrix}\frac{2!1!}{4!}+\frac{2!1!}{4!}+\frac{3!0!}{4!}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5}{12}\\0\end{pmatrix}$

2. $\phi_2(\nu) = \begin{pmatrix}\frac{2!1!}{4!}+\frac{2!1!}{4!}+\frac{3!0!}{4!}\\\frac{2!1!}{4!}+\frac{3!0!}{4!}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5}{12}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

3. $\phi_3(\nu) = \begin{pmatrix}\frac{2!1!}{4!}\\\frac{2!1!}{4!}+\frac{3!0!}{4!}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{12}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

4. $\phi_4(\nu) = \phi_3(\nu)$ *por simetría entre los jugadores* $\{3\}$ *y* $\{4\}$*.*

6.5. El índice de Banzhaf

El poder de una coalición ha sido medido por muchos otros índices alternativos al de Shapley-Shubik. Para indicar cómo se podría trabajar con ellos, vamos a poner de manifiesto la extensión de uno, el de Banzhaf ([1]), a los juegos simples vectoriales.

Sea un juego simple vectorial en forma canónica (N, ν). En cada una de sus clases U_j, $j \in \{1, ..., r\}$, y para cada jugador $\{i\}$, definimos un swing por medio del par $(S, S \backslash \{i\})^j$, tal que S y $S \backslash \{i\}$ son, respectivamente, coaliciones ganadora y perdedora de la clase U_j. Para cada $\{i\}$, llamamos η_{ij} al número de swings de $\{i\}$ en la clase U_j y $\bar{\eta}_j$ al total de swings de la clase U_j

$$\bar{\eta}_j = \sum_{i \in N} \eta_{ij}$$

Llamaremos a η_i vector swing del jugador $\{i\}$, a η matriz swing de los jugadores y a $\bar{\eta}$ vector total swing:

$$\eta_i = \begin{pmatrix} \eta_{i1} \\ \eta_{i2} \\ \ldots \\ \eta_{ik} \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{21} & \cdots & \eta_{n1} \\ \eta_{12} & \eta_{22} & \cdots & \eta_{n2} \\ \ldots & & & \\ \eta_{1r} & \eta_{2r} & \cdots & \eta_{nr} \end{pmatrix}, \bar{\eta} = \begin{pmatrix} \sum_{i \in N} \eta_{i1} \\ \sum_{i \in N} \eta_{i2} \\ \ldots \\ \sum_{i \in N} \eta_{ir} \end{pmatrix} = \sum_{i \in N} \begin{pmatrix} \eta_{i1} \\ \eta_{i2} \\ \ldots \\ \eta_{ik} \end{pmatrix} = \sum_{i \in N} \eta_i$$

Cuando el número de swings de un jugador $\{i\}$ en una clase U_j es cero, $\eta_{ij} = 0$, el jugador $\{i\}$ es nulo para la clase. Un jugador puede ser nulo para varias clases o simplemente nulo (nulo para todas las clases).

Si en una clase U_j, el número de swings de un jugador $\{i\}$ coincide con el total de swings, $\eta_{ij} = \sum_{i \in N} \eta_{ij}$, entonces $\{i\}$ es un jugador dictador para la clase U_j. Puede ocurrir que un mismo jugador sea dictador respecto a varias clases. En el caso de que existiera un jugador dictador para todas las clases, sería un jugador dictador absoluto.

Los vectores swings η_i son los índices vectoriales de Banzhaf y atribuyen como pago a cada jugador la suma de todas sus contribuciones marginales a las coaliciones a las que pertenece. Se acostumbra a normalizarlos para que su suma sea el vector unitario, porque es más significativa la interpretación de las razones que las cantidades:

$$\beta_i = \begin{pmatrix} \frac{\eta_{i1}}{\bar{\eta}_1} \\ \frac{\eta_{i2}}{\bar{\eta}_2} \\ \ldots \\ \frac{\eta_{ir}}{\bar{\eta}_r} \end{pmatrix}$$

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = \left(\frac{\eta_{1j}}{\bar{\eta}_j}, \frac{\eta_{2j}}{\bar{\eta}_j}, ..., \frac{\eta_{nj}}{\bar{\eta}_j} \right) \qquad \begin{cases} i = 1, ..., n \\ j = 1, ..., r \end{cases}$$

y entonces se les llama vectores índices de Banzhaf normalizados que, en forma matricial, se escribirían:

$$(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = \begin{pmatrix} \frac{\eta_{11}}{\bar{\eta}_1} & \frac{\eta_{21}}{\bar{\eta}_1} & ... & \frac{\eta_{n1}}{\bar{\eta}_1} \\ \frac{\eta_{12}}{\bar{\eta}_2} & \frac{\eta_{22}}{\bar{\eta}_2} & ... & \frac{\eta_{n2}}{\bar{\eta}_2} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\eta_{1r}}{\bar{\eta}_r} & \frac{\eta_{2r}}{\bar{\eta}_r} & ... & \frac{\eta_{nr}}{\bar{\eta}_r} \end{pmatrix}$$

Otra normalización más natural es la de las probabilidades swing de los jugadores

$$\left(\beta_1', \beta_2', ..., \beta_n'\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{21} & ... & \eta_{n1} \\ \eta_{12} & \eta_{22} & ... & \eta_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ \eta_{1r} & \eta_{2r} & ... & \eta_{nr} \end{pmatrix}$$

que resulta del siguiente modelo de probabilidad. Supongamos que en una asamblea se decide sobre "r asuntos" votando aleatoriamente según el resultado de arrojar una moneda. El conjunto S de votantes "si" es una variable aleatoria r-dimensional y asigna probabilidad $\frac{1}{2^{n-1}}$ a cada subconjunto de N en cada una de las r clases. Si S es una coalición ganadora, se aprueban los "r asuntos". Para cada jugador $\{i\}$ y cada clase U_j, las coaliciones ganadoras corresponden al número de swings $(S \cup \{i\}, S \backslash \{i\})^j$. Es decir, la probabilidad de que $\{i\}$ forma swings es $\left(\beta_1', \beta_2', ..., \beta_n'\right)$.

6.5.1. Axiomas del índice de Banzhaf

Para todo juego simple vectorial en forma canónica (N, ν), si σ es una permutación de N definimos $\sigma\nu$ por

$$(\sigma\nu)(S) = \nu\left(\sigma^{-1}(S)\right)$$

Recordamos que para juegos k-vectoriales, definimos las operaciones:

$$(\nu_1 \vee \nu_2)(S) = \max\,\{\nu_1(S), \nu_2(S)\} = (\max\,(i_1, j_1), \max\,(i_2, j_2), ..., \max\,(i_r, j_r)) \quad (6.28)$$

$$(\nu_1 \wedge \nu_2)(S) = \min\,\{\nu_1(S), \nu_2(S)\} = (\min\,(i_1, j_1), \min\,(i_2, j_2), ..., \min\,(i_k r, j_r)) \quad (6.29)$$

$$\text{siendo } \nu_1(S) = (i_1, i_2, ..., i_r) \text{ y } \nu_2(S) = (j_1, j_2, ..., j_r),$$

Está claro que esta familia de juegos es cerrada para las operaciones σ, $\vee$ y $\wedge$ y que la subfamilia de juegos superaditivos es cerrada para σ y $\wedge$.

La generalización al caso vectorial del teorema que caracteriza el valor de Banzhaf dice:

Teorema 6.5.1 *Hay una única función $\phi : S^v(N) \to \mathbb{R}^{r\times n}$ que satisface los siguientes axiomas:*

B1: Si $\{i\}$ es nulo, entonces $\phi_i(\nu) = (0)$.
B2: $\sum_{i \in N} \phi_i(\nu) = \bar{\eta}(\nu)$.
B3: Para cualquier permutación σ de N, $\phi_{\sigma(i)}(\sigma\nu) = \phi_i(\nu)$.
B4: Para cualesquiera (N, ν_1) y (N, ν_2),

$$\phi(\nu_1 \vee \nu_2) + \phi(\nu_1 \wedge \nu_2) = \phi(\nu_1) + \phi(\nu_2)$$

Y más aún, $\phi(\nu) = \eta(\nu)$ para todo (N, ν)

Demostración.

Para las 2^{n-1} coaliciones S de N, hemos definido r juegos de unanimidad. En total, $r \times 2^{n-1}$:

$$u_S^j(T) = \begin{cases} (0, ..., 1, ..., 0) & si \quad S \subseteq T \\ (0, ..., 0, ..., 0) & si \quad S \not\subseteq T \end{cases}$$

Cada jugador $\{i\}$ de $N - S$ es nulo en u_S^j para toda clase j y por B1, $\phi_i(u_S^j) = (0, ..., 0, ..., 0)$.

Además, si σ es la permutación que intercambia $\{i\}$ por $\{k\}$ y deja igual a los demás, entonces $\sigma(u_S^j) = u_S^j$ y por B3, $(\phi_i)(u_S^j) = (\phi_k)(u_S^j)$.

Por tanto, por B2

$$\sum_{i \in S} \phi_i(u_S^j) = |S| \cdot \phi_i(u_S^j) = (0, ..., \bar{\eta}(u_S^j), ..., 0$$

y $\phi_i(u_S^j)$ está unívocamente determinado y viene dado por

$$\phi_i(u_S^j) = \begin{cases} (0, ..., \frac{\bar{\eta}(u_S^j)}{|S|}, ..., 0) & si \quad i \in S \\ (0, ..., 0, ..., 0) & si \quad i \notin S \end{cases}$$

siendo

$$\frac{\bar{\eta}(u_S^j)}{|S|} = 2^{|N-S|}$$

Vamos a demostrar por inducción que para todo juego ν, $\phi(\nu)$ está unívocamente determinado.

Sabemos que cualquier juego ν tiene en cada clase j un número finito m_j de coaliciones minimales, $S_1^j, ..., S_{m_j}^j$, que lo determinan completamente, puesto que $\nu_j(T) = 1$ sii $T \supset S_k^j$ para, al menos, $k = 1, 2, ..., m_j$.

Es decir, $\nu_j = u_{S_1}^j \vee u_{S_2}^j \vee ... \vee u_{S_{m_j}}^j$.

Suponemos por inducción que $\phi(\nu_j)$ está determinado unívocamente si su número de coaliciones minimales es menor que m_j y vamos a demostrar que también está unívocamente determinado si su número de coaliciones minimales es m_j.

Si ν_j no es un juego de unanimidad, u_S^j, es porque $m_j > 1$ y podemos escribir $\nu_j = \nu_j^{'} \vee \nu_j^{''}$, teniendo ambos, $\nu_j^{'}$ y $\nu_j^{''}$, menos coaliciones ganadoras que ν_j. Por ejemplo, $\nu_j^{'} = u_{S_1}^j$ y $\nu_j^{''} = u_{S_2}^j \vee ... \vee u_{S_{m_j}}^j$. Y menos aún tendría $\nu_j^{'} \wedge \nu_j^{''}$. Por tanto, $\phi(\nu_j^{'} \wedge \nu_j^{''})$, $\phi(\nu_j^{'})$, y $\phi(\nu_j^{''})$ están unívocamente determinadas y como por B4:

$$\phi(\nu_j) = \phi(\nu_j^{'} \vee \nu_j^{''}) = \phi(\nu_j^{'}) + \phi(\nu_j^{''}) - \phi(\nu_j^{'} \wedge \nu_j^{''})$$

entonces $\phi(\nu_j)$ está determinada de forma unívoca.

Para probar la existencia, observamos que la demostración de la unicidad lleva implícita una construcción recursiva de ϕ que establece su existencia. Sin embargo, es más fácil comprobar que la función η satisface los axiomas B1-B4. De hecho, los tres primeros son obvios y el cuarto se deriva de

$$\eta_i(\nu) = \begin{pmatrix} \sum_{S:i\in S\subset N} [\nu_1(S) - \nu_1(S\backslash\{i\})] \\ \sum_{S:i\in S\subset N} [\nu_2(S) - \nu_2(S\backslash\{i\})] \\ ... \\ \sum_{S:i\in S\subset N} [\nu_r(S) - \nu_r(S\backslash\{i\})] \end{pmatrix}$$

que representa el total de swings del jugador $\{i\}$ en cada una de las r clases y nos muestra que $\eta(\nu)$ se puede extender a una función lineal de $S^v(N)$, teniendo en cuenta que

$$(\nu \vee \nu^{'}) + (\nu \wedge \nu^{'}) \equiv \nu + \nu^{'}$$

Y ya es obvio B4.□

En el mismo ejemplo en el que calculamos los índices de Shapley, vamos a calcular los índices de Banzhaf, lo que nos indicará que estos dos índices no tienen porqué coincidir.

Ejemplo 6.4.1 (Continúa)

Sea el juego simple vectorial cuya clasificación viene dada por la tabla:

Clases	*Coaliciones*
U_1	*Minimales* $\{1,2,6\},\{1,3,4\}$
U_2	*Minimales* $\{1,5\},\{1,2,4\}$
U_3	*Minimales* $\{1,3,6\},\{1,4,6\}$
$\mathcal{R}$	

1. Clase U_1

   Para el jugador $\{1\}$ *los swings los forman las coaliciones* $\{1,2,6\}$, $\{1,3,4\}$, $\{1,2,3,6\}$, $\{1,2,4,6\}$, $\{1,2,5,6\}$, $\{1,2,3,4\}$, $\{1,3,4,5\}$, $\{1,3,4,6\}$, $\{1,2,3,4,5\}$, $\{1,2,3,4,6\}$, $\{1,2,3,5,6\}$, $\{1,2,4,5,6\}$, $\{1,3,4,5,6\}$ *y* $\{1,2,3,4,5,6\}$.

   Para el jugador $\{2\}$ *los swings los forman las coaliciones* $\{1,2,6\}$, $\{1,2,3,6\}$, $\{1,2,4,6\}$, $\{1,2,5,6\}$, $\{1,2,3,5,6\}$ *y* $\{1,2,4,5,6\}$.

   Para el jugador $\{3\}$ *los swings los forman las coaliciones* $\{1,3,4\}$, $\{1,2,3,4\}$, $\{1,3,4,5\}$, $\{1,3,4,6\}$, $\{1,2,3,4,5\}$ *y* $\{1,3,4,5,6\}$.

   Para el jugador $\{4\}$ *los swings los forman las coaliciones* $\{1,3,4\}$, $\{1,2,3,4\}$, $\{1,3,4,5\}$, $\{1,3,4,6\}$, $\{1,2,3,4,5\}$ *y* $\{1,3,4,5,6\}$.

   El jugador $\{5\}$ *es nulo y no forma swings.*

   Para el jugador $\{6\}$ *los swings los forman las coaliciones* $\{1,2,6\}$, $\{1,2,3,6\}$, $\{1,2,4,6\}$, $\{1,2,5,6\}$, $\{1,2,3,5,6\}$ *y* $\{1,2,4,5,6\}$.

2. Clase U_2

   Procediendo con las clases U_1 *y* U_2 *de forma análoga que se ha hecho para la clase* U_1*, contamos los swings de cada uno de los jugadores. En la clase* U_2*, el jugador* $\{1\}$ *forma* 20 *swings, el jugador* $\{2\}$ *forma* 4 *swings, el jugador* $\{3\}$ *ninguno, el jugador* $\{4\}$ *forma* 4 *swings, el jugador* $\{5\}$ *forma* 12 *swings y el jugador* $\{6\}$ *ninguno.*

3. Clase U_3

   En la clase U_3*, el jugador* $\{1\}$ *forma* 12 *swings, el jugador* $\{2\}$ *ningún swing, el jugador* $\{3\}$ *forma* 4 *swings, el jugador* $\{4\}$ *forma* 4 *swings, el jugador* $\{5\}$ *ningún swing y el jugador* $\{6\}$ *forma* 12 *swings.*

La matriz swing de los jugadores y el vector total swing son:

$$\eta = \begin{pmatrix} 14 & 6 & 6 & 6 & 0 & 6 \\ 20 & 4 & 0 & 4 & 12 & 0 \\ 12 & 0 & 4 & 4 & 0 & 12 \end{pmatrix}, \qquad \overline{\eta} = \begin{pmatrix} 38 \\ 40 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Y los índices normalizados de Banzhaf $\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \end{pmatrix}$ *son:*

$$\begin{pmatrix} \frac{14}{38} & \frac{6}{38} & \frac{6}{38} & \frac{6}{38} & \frac{0}{38} & \frac{6}{38} \\ \frac{20}{40} & \frac{4}{40} & \frac{0}{40} & \frac{4}{40} & \frac{12}{40} & \frac{0}{40} \\ \frac{12}{32} & \frac{0}{32} & \frac{4}{32} & \frac{4}{32} & \frac{0}{32} & \frac{12}{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.39 & 0.16 & 0.16 & 0.16 & 0.00 & 0.16 \\ 0.50 & 0.10 & 0.00 & 0.10 & 0.30 & 0.00 \\ 0.38 & 0.00 & 0.13 & 0.13 & 0.00 & 0.38 \end{pmatrix}$$

y los índices swing de probabilidad $\begin{pmatrix} \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' & \beta_4' & \beta_5' & \beta_6' \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{14}{32} & \frac{6}{32} & \frac{6}{32} & \frac{6}{32} & \frac{0}{32} & \frac{6}{32} \\ \frac{20}{32} & \frac{4}{32} & \frac{0}{32} & \frac{4}{32} & \frac{12}{32} & \frac{0}{32} \\ \frac{12}{32} & \frac{0}{32} & \frac{4}{32} & \frac{4}{32} & \frac{0}{32} & \frac{12}{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.44 & 0.18 & 0.18 & 0.18 & 0.00 & 0.18 \\ 0.62 & 0.13 & 0.00 & 0.13 & 0.36 & 0.00 \\ 0.38 & 0.00 & 0.13 & 0.13 & 0.00 & 0.38 \end{pmatrix}$$

6.5.2. Índices de Banzhaf en la agregación de clases

Sabemos que uno de los axiomas requerido en la definición del índice de Banzhaf es el axioma de transferencia. Es por ello que dado un juego (N, ν) en forma canónica, cuya clasificación asociada es $\{U_1, U_2, ..., U_r\}$, al agregar dos clases por unión e intersección, los índices de probabilidad swings, al igual que los de Shapley-Shubik, verifican dicho axioma de transferencia al normalizar los índices de una forma general (2^{n-1}). Sin embargo, los índices de Banzhaf normalizados no verifican el axioma de transferencia por la forma en que están definidos (están normalizados respecto a los totales de cada clase).

Vamos a comprobar que al agregar clases por unión o intersección, los correspondientes índices (los de probabilidad y no los normalizados) verifican el mismo axioma de transferencia que verificaban los índices de Shapley.

Ejemplo 6.4.1 (Continúa) *Si agregamos las clases U_1 y U_2 por unión, el juego simple vectorial resultante viene dada por la tabla:*

Clases	*Marginales*	*Coaliciones*
$U_1' = U_1$	$\nu_1' = \nu_1$	*Minimales* $\{1,2,6\},\{1,3,4\}$
$U_2' = U_2$	$\nu_2' = \nu_2$	*Minimales* $\{1,5\},\{1,2,4\}$
$U_3' = U_3$	$\nu_3' = \nu_3$	*Minimales* $\{1,3,6\},\{1,4,6\}$
$U_*' = U_1 \cup U_2$	$\nu_*' = \nu_1 \vee \nu_2$	*Minimales* $\{1,5\},\{1,2,4\},\{1,2,6\},\{1,3,4\}$
$\mathcal{R}$		

Procedemos al recuento de swings por jugadores y clases.

Los totales vectoriales de Banzhaf son:

$\eta_{11} = 14$	$\eta_{21} = 6$	$\eta_{31} = 6$	$\eta_{41} = 6$	$\eta_{51} = 0$	$\eta_{61} = 6$	$\bar{\eta}_1 = 38$
$\eta_{12} = 20$	$\eta_{22} = 4$	$\eta_{32} = 0$	$\eta_{42} = 4$	$\eta_{52} = 12$	$\eta_{62} = 0$	$\bar{\eta}_2 = 40$
$\eta_{13} = 12$	$\eta_{23} = 0$	$\eta_{33} = 4$	$\eta_{43} = 4$	$\eta_{53} = 0$	$\eta_{63} = 12$	$\bar{\eta}_3 = 32$
$\eta_{1*} = 24$	$\eta_{2*} = 4$	$\eta_{3*} = 2$	$\eta_{4*} = 4$	$\eta_{5*} = 8$	$\eta_{6*} = 2$	$\bar{\eta}_* = 44$

Y los índices normalizados de Banzhaf $\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \end{pmatrix}$ *son:*

$$\begin{pmatrix} \frac{14}{38} & \frac{6}{38} & \frac{6}{38} & \frac{6}{38} & \frac{0}{38} & \frac{6}{38} \\ \frac{20}{40} & \frac{4}{40} & \frac{0}{40} & \frac{4}{40} & \frac{12}{40} & \frac{0}{40} \\ \frac{12}{32} & \frac{0}{32} & \frac{4}{32} & \frac{4}{32} & \frac{0}{32} & \frac{12}{32} \\ \frac{24}{44} & \frac{4}{44} & \frac{2}{44} & \frac{4}{44} & \frac{8}{44} & \frac{2}{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.39 & 0.16 & 0.16 & 0.16 & 0.00 & 0.16 \\ 0.50 & 0.10 & 0.00 & 0.10 & 0.30 & 0.00 \\ 0.38 & 0.00 & 0.13 & 0.13 & 0.00 & 0.38 \\ 0.54 & 0.09 & 0.05 & 0.09 & 0.18 & 0.05 \end{pmatrix}$$

y los índices swing de probabilidad $\begin{pmatrix} \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' & \beta_4' & \beta_5' & \beta_6' \end{pmatrix}$*:*

$$\begin{pmatrix} \frac{14}{32} & \frac{6}{32} & \frac{6}{32} & \frac{6}{32} & \frac{0}{32} & \frac{6}{32} \\ \frac{20}{32} & \frac{4}{32} & \frac{0}{32} & \frac{4}{32} & \frac{12}{32} & \frac{0}{32} \\ \frac{12}{32} & \frac{0}{32} & \frac{4}{32} & \frac{4}{32} & \frac{0}{32} & \frac{12}{32} \\ \frac{24}{32} & \frac{4}{32} & \frac{2}{32} & \frac{4}{32} & \frac{8}{32} & \frac{2}{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.44 & 0.18 & 0.18 & 0.18 & 0.00 & 0.18 \\ 0.62 & 0.12 & 0.00 & 0.12 & 0.36 & 0.00 \\ 0.38 & 0.00 & 0.13 & 0.13 & 0.00 & 0.38 \\ 0.75 & 0.13 & 0.06 & 0.13 & 0.25 & 0.06 \end{pmatrix}$$

Sea ahora el juego simple vectorial resultante de la intersección de las clases U_1 *y* U_2*, definido por la tabla:*

Clases	*Marginales*	*Coaliciones*
$U_1'' = U_1$	$\nu_1'' = \nu_1$	*Minimales* $\{1,2,6\},\{1,3,4\}$
$U_2'' = U_2$	$\nu_2'' = \nu_2$	*Minimales* $\{1,5\},\{1,2,4\}$
$U_3'' = U_3$	$\nu_3'' = \nu_3$	*Minimales* $\{1,3,6\},\{1,4,6\}$
$U_*'' = U_1 \cap U_2$	$\nu_*'' = \nu_1 \wedge \nu_2$	*Las minimales* $\{1,2,3,4\},\{1,2,4,6\},\{1,2,5,6\},\{1,3,4,5\}$
$\mathcal{R}$		

Procedemos al recuento de swings por jugadores y clases.

Los totales vectoriales de Banzhaf son:

$\eta_{11} = 14$	$\eta_{21} = 6$	$\eta_{31} = 6$	$\eta_{41} = 6$	$\eta_{51} = 0$	$\eta_{61} = 6$	$\bar{\eta}_1 = 38$
$\eta_{12} = 20$	$\eta_{22} = 4$	$\eta_{32} = 0$	$\eta_{42} = 4$	$\eta_{52} = 12$	$\eta_{62} = 0$	$\bar{\eta}_2 = 40$
$\eta_{13} = 12$	$\eta_{23} = 0$	$\eta_{33} = 4$	$\eta_{43} = 4$	$\eta_{53} = 0$	$\eta_{63} = 12$	$\bar{\eta}_3 = 32$
$\eta_{1*} = 10$	$\eta_{2*} = 6$	$\eta_{3*} = 4$	$\eta_{4*} = 6$	$\eta_{5*} = 4$	$\eta_{6*} = 4$	$\bar{\eta}_* = 34$

Y los índices normalizados de Banzhaf $\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \end{pmatrix}$ *son:*

$$\begin{pmatrix} \frac{14}{38} & \frac{6}{38} & \frac{6}{38} & \frac{6}{38} & \frac{0}{38} & \frac{6}{38} \\ \frac{20}{40} & \frac{4}{40} & \frac{0}{40} & \frac{4}{40} & \frac{12}{40} & \frac{0}{40} \\ \frac{12}{32} & \frac{0}{32} & \frac{4}{32} & \frac{4}{32} & \frac{0}{32} & \frac{12}{32} \\ \frac{10}{34} & \frac{6}{34} & \frac{4}{34} & \frac{6}{34} & \frac{4}{34} & \frac{4}{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.39 & 0.16 & 0.16 & 0.16 & 0.00 & 0.16 \\ 0.50 & 0.10 & 0.00 & 0.10 & 0.30 & 0.00 \\ 0.38 & 0.00 & 0.13 & 0.13 & 0.00 & 0.38 \\ 0.29 & 0.18 & 0.13 & 0.18 & 0.12 & 0.12 \end{pmatrix}$$

y los índices swing de probabilidad $\begin{pmatrix} \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 & \beta'_4 & \beta'_5 & \beta'_6 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{14}{32} & \frac{6}{32} & \frac{6}{32} & \frac{6}{32} & \frac{0}{32} & \frac{6}{32} \\ \frac{20}{32} & \frac{4}{32} & \frac{0}{32} & \frac{4}{32} & \frac{12}{32} & \frac{0}{32} \\ \frac{12}{32} & \frac{0}{32} & \frac{4}{32} & \frac{4}{32} & \frac{0}{32} & \frac{12}{32} \\ \frac{10}{32} & \frac{6}{32} & \frac{4}{32} & \frac{6}{32} & \frac{4}{32} & \frac{4}{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.44 & 0.18 & 0.18 & 0.18 & 0.00 & 0.18 \\ 0.62 & 0.12 & 0.00 & 0.12 & 0.36 & 0.00 \\ 0.38 & 0.00 & 0.13 & 0.13 & 0.00 & 0.38 \\ 0.31 & 0.19 & 0.12 & 0.19 & 0.12 & 0.12 \end{pmatrix}$$

Finalmente, se comprueba que se verifica el axioma de transferencia para los índices de Banzhaf de probabilidad y no (como era de esperar) para los normalizados:

1. $\beta(\nu_1) + \beta(\nu_2) \neq \beta(\nu'_*) + \beta(\nu''_*)$

$$\begin{pmatrix} \frac{14}{38} & \frac{6}{38} & \frac{6}{38} & \frac{6}{38} & \frac{0}{38} & \frac{6}{38} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{20}{40} & \frac{4}{40} & \frac{0}{40} & \frac{4}{40} & \frac{12}{40} & \frac{0}{40} \end{pmatrix} \neq$$

$$\begin{pmatrix} \frac{10}{40} & \frac{6}{40} & \frac{4}{40} & \frac{6}{40} & \frac{4}{40} & \frac{4}{40} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{24}{44} & \frac{4}{44} & \frac{2}{44} & \frac{4}{44} & \frac{8}{44} & \frac{2}{44} \end{pmatrix}$$

2. $\beta'(\nu_1) + \beta'(\nu_2) = \beta'(\nu'_*) + \beta'(\nu''_*)$

$$\begin{pmatrix} \frac{14}{32} & \frac{6}{32} & \frac{6}{32} & \frac{6}{32} & \frac{0}{32} & \frac{6}{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{20}{32} & \frac{4}{32} & \frac{0}{32} & \frac{4}{32} & \frac{12}{32} & \frac{0}{32} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{10}{32} & \frac{6}{32} & \frac{4}{32} & \frac{6}{32} & \frac{4}{32} & \frac{4}{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{24}{32} & \frac{4}{32} & \frac{2}{32} & \frac{4}{32} & \frac{8}{32} & \frac{2}{32} \end{pmatrix}$$

Por tanto, los índices de los jugadores del juego ν''_* *se habrían podido calcular a partir de los de* ν'_*, ν_1 *y* ν_2 *o los de* ν'_* *a partir de los de* ν''_*, ν_1 *y* ν_2 *por*

$$\beta'(\nu_1) + \beta'(\nu_2) = \beta'(\nu'_*) + \beta'(\nu''_*)$$

Si ahora agregamos $|I|$ clases del juego (N, ν), dado por la clasificación $\{U_1, U_2, ..., U_r\}$, por unión o intersección, como hacíamos con los índices de Shapley, podemos aplicar el axioma de transferencia sucesivas veces para calcular los índices de los juegos marginales correspondientes, $\beta'\left(\bigvee_{i\in I}\nu_i\right)$ en función de $\beta'\left(\bigwedge_{i\in I}\nu_i\right)$ y a la inversa. Aplicando el axioma de transferencia para la unión de tres clases U_i, U_j y U_k:

$$\beta'\left(\nu_i \vee \nu_j \vee \nu_k\right) = \beta'[(\nu_i \vee \nu_j) \vee \nu_k] = \beta'\left(\nu_i \vee \nu_j\right) + \beta'\left(\nu_k\right) - \beta'[(\nu_i \vee \nu_j) \wedge \nu_k]$$

y como por la estructura de retículo se cumple que $(\nu_i \vee \nu_j) \wedge \nu_k = (\nu_i \wedge \nu_k) \vee (\nu_j \wedge \nu_k)$, de nuevo por el axioma de transferencia

$$= \beta'\left(\nu_i\right) + \beta'\left(\nu_j\right) - \beta'\left(\nu_i \wedge \nu_j\right) + \beta'\left(\nu_k\right) - \left[\beta'\left(\nu_i \wedge \nu_k\right) + \beta'\left(\nu_j \wedge \nu_k\right) - \beta'\left(\nu_i \wedge \nu_j \wedge \nu_k\right)\right]$$

quitando paréntesis y ordenando, resulta la fórmula

$$\beta'\left(\nu_i \vee \nu_j \vee \nu_k\right) = \beta'\left(\nu_i\right) + \beta'\left(\nu_j\right) + \beta'\left(\nu_k\right) - \beta'\left(\nu_i \wedge \nu_j\right) - \beta'\left(\nu_i \wedge \nu_k\right) - \beta'\left(\nu_j \wedge \nu_k\right) + \beta'\left(\nu_i \wedge \nu_j \wedge \nu_k\right)$$

que es fácilmente generalizable a más clases:

$$\beta'\left(\bigvee_{i\in J}\nu_i\right) = \sum_{i\in J}\beta'(\nu_i) - \sum_{i,j\in J}^{i\neq j}\beta'(\nu_i \wedge \nu_j) + \sum_{i,j,k\in J}^{i\neq j\neq k}\beta'(\nu_i \wedge \nu_j \wedge \nu_k) \quad \ldots \quad \pm\,\beta'(\bigwedge_{i\in J}\nu_i)$$

Ejemplo 6.4.1 (Continúa) *Si pasamos a un nuevo juego añadiendo al nuestro las clases agregadas* $U_1 \cup U_2 \cup U_3$*,* $U_1 \cap U_2$*,* $U_1 \cap U_3$*,* $U_2 \cap U_3$ *y* $U_1 \cap U_2 \cap U_3$*, éste viene dado por la* *tabla:*

$Clases$	$Marginales$	$Coaliciones$
U_1	ν_1	$Minimales$ $\{1,2,6\},\{1,3,4\}$
U_2	ν_2	$Minimales$ $\{1,5\},\{1,2,4\}$
U_3	ν_3	$Minimales$ $\{1,3,6\},\{1,4,6\}$
$U_1 \cup U_2 \cup U_3$	$\nu_1 \vee \nu_2 \vee \nu_3$	$Minimales$ $\{1,5\},\{1,2,4\},\{1,2,6\},\{1,3,4\},$ $\{1,3,6\},\{1,4,6\}$
$U_1 \cap U_2$	$\nu_1 \wedge \nu_2$	$Minimales$ $\{1,2,3,4\},\{1,2,4,6\},\{1,2,5,6\},$ $\{1,3,4,5\}$
$U_1 \cap U_3$	$\nu_1 \wedge \nu_3$	$Minimales$ $\{1,2,3,6\},\{1,2,4,6\},\{1,3,4,6\}$
$U_2 \cap U_3$	$\nu_2 \wedge \nu_3$	$Minimales$ $\{1,2,4,6\},\{1,3,5,6\},\{1,4,5,6\}$
$U_1 \cap U_2 \cap U_3$	$\nu_1 \wedge \nu_2 \wedge \nu_3$	$Minimales$ $\{1,2,4,6\},\{1,2,3,5,6\},\{1,3,4,5,6\}$
$\mathcal{R}$		

Los índices vectoriales de Banzhaf de los jugadores de este nuevo juego son:

$$\begin{pmatrix} \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' & \beta_4' & \beta_5' & \beta_6' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{32} & \frac{6}{32} & \frac{6}{32} & \frac{6}{32} & \frac{0}{32} & \frac{6}{32} \\ \frac{20}{32} & \frac{4}{32} & \frac{0}{32} & \frac{4}{32} & \frac{12}{32} & \frac{0}{32} \\ \frac{12}{32} & \frac{0}{32} & \frac{4}{32} & \frac{4}{32} & \frac{0}{32} & \frac{12}{32} \\ \frac{26}{32} & \frac{2}{32} & \frac{2}{32} & \frac{4}{32} & \frac{6}{32} & \frac{4}{32} \\ \frac{10}{32} & \frac{6}{32} & \frac{4}{32} & \frac{6}{32} & \frac{4}{32} & \frac{4}{32} \\ \frac{8}{32} & \frac{4}{32} & \frac{4}{32} & \frac{4}{32} & \frac{0}{32} & \frac{8}{32} \\ \frac{8}{32} & \frac{2}{32} & \frac{2}{32} & \frac{4}{32} & \frac{4}{32} & \frac{8}{32} \\ \frac{6}{32} & \frac{4}{32} & \frac{2}{32} & \frac{4}{32} & \frac{2}{32} & \frac{6}{32} \end{pmatrix}$$

Y podemos comprobar que los índices del juego marginal $\nu_1 \wedge \nu_2 \wedge \nu_3$ (fila cuarta) se obtienen haciendo la suma de los de ν_1, ν_2 y ν_3 (filas primera, segunda y tercera) menos la suma de los de $\nu_1 \wedge \nu_2$, $\nu_1 \wedge \nu_3$ y $\nu_2 \wedge \nu_3$ (filas quinta, sexta y séptima) y más la de $\nu_1 \wedge \nu_2 \wedge \nu_3$

(fila octava):

$$\begin{pmatrix} \frac{26}{32} & \frac{2}{32} & \frac{2}{32} & \frac{4}{32} & \frac{6}{32} & \frac{4}{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{32} & \frac{6}{32} & \frac{6}{32} & \frac{6}{32} & \frac{0}{32} & \frac{66}{32} \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} \frac{20}{32} & \frac{4}{32} & \frac{0}{32} & \frac{4}{32} & \frac{12}{32} & \frac{0}{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{12}{32} & \frac{0}{32} & \frac{4}{32} & \frac{4}{32} & \frac{0}{32} & \frac{12}{32} \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} \frac{10}{32} & \frac{6}{32} & \frac{4}{32} & \frac{6}{32} & \frac{4}{32} & \frac{4}{32} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{8}{32} & \frac{4}{32} & \frac{4}{32} & \frac{4}{32} & \frac{0}{32} & \frac{8}{32} \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} \frac{8}{32} & \frac{2}{32} & \frac{2}{32} & \frac{4}{32} & \frac{4}{32} & \frac{8}{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{32} & \frac{4}{32} & \frac{2}{32} & \frac{4}{32} & \frac{2}{32} & \frac{6}{32} \end{pmatrix}$$

6.6. Semivalores

Los valores son una evaluación a priori de las expectativas de los jugadores. Son funciones que están caracterizadas por un conjunto de axiomas. En este sentido son bien conocidos los axiomas de eficiencia, linealidad y simetría del valor de Shapley, que fue quién inició su estudio. A partir de él otros matemáticos se plantearon la posibilidad de prescindir del axioma de eficiencia, situación en la que ya no es necesario definir el valor a través de las contribuciones marginales de cada permutación mediante un cierto valor medio, como indicábamos en los índices probabilísticos.

Dubey, Neyman y Weber ([28]) definieron un semivalor como un operador $\psi : \mathbf{G} \to \mathbf{AG}$ ($\mathbf{G}$ es el espacio vectorial de juegos con soporte finito o juegos finitos y $\mathbf{AG}$ el de los juegos finitos aditivos) que verifica los axiomas de linealidad, simetría, monotonía y de proyección (títere). Respectivamente:

(1) ψ es lineal

(2) Para todo juego v, toda permutación y toda coalición σ, $\sigma v(\sigma S) = v(S)$.

(3) Si v es monótono, entonces ψv es monótono.

(4) Si v es aditivo, entonces $\psi v = v$.

Estos semivalores están definidos por números reales λ_s, $s = 1, 2, ..., n$ que verifican:

$$\sum_{s=1}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ s \end{pmatrix} \lambda_s = 1, \quad \lambda_s \geq 0$$

por lo que

$$\psi_i(v) = \sum_{i \notin S \subset N} \lambda_s \left[v(S \cup \{i\}) - v(S) \right]$$

Vemos pues que el semivalor es una media ponderada de las contribuciones marginales, pero $\sum_s \lambda_s$ no es necesariamente la unidad. Notemos que los parámetros λ_s ponderan las contribuciones marginales según el tamaño de las coaliciones y dado que cada jugador $\{i\}$ está posicionado en el punto $s+1$, ello ocurre en $\begin{pmatrix} n-1 \\ s \end{pmatrix}$ contribuciones marginales.

Lo más importante es que el recíproco también es cierto.

Para los juegos simples vectoriales, los semivalores se definen:

Definición 6.6.1 *Un semivalor sobre $S^v(N)$ es una aplicación*

$$\psi : S^v(N) \to \mathbb{R}^n$$

que asigna a cada juego simple vectorial una matriz

$$\psi(\nu) = (\psi_i(\nu_j)), \quad i \in N, j \in \{1, 2, ..., r\}$$

que verifica los axiomas siguientes:

1. *Transferencia: $\psi(\nu \vee \nu') + \psi(\nu \wedge \nu') = \psi(\nu) + \psi(\nu')$ para $\forall \nu, \nu' \in S^v(N)$*
2. *Simetría $\psi_{\sigma(i)}(\sigma\nu) = \psi_i(\nu)$ para toda permutación σ de N, todo jugador i y todo juego ν.*
3. *Positividad: $\psi_i(\nu) \geq 0$, $\forall i \in N$.*
4. *Títere: si i es un títere de ν, entonces $\psi_i(\nu) = \nu(\{i\})$.*

Teorema 6.6.1 *Para para cada juego $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_r)$, definimos un semivalor ψ por medio de los siguientes coeficientes de ponderación $(\lambda_s^j)_{s=o}^{n-1}$ tales que $\sum_{s=0}^{n-1} (\lambda_s^j) \begin{pmatrix} n-1 \\ s \end{pmatrix} = 1$ y $\lambda_s^j \geq 0$, para $\forall s$, $s = |S|$ y $\forall j \in \{1, 2, ..., r\}$, de la siguiente forma*

$$\psi_i(\nu_j) = \sum_{S \subseteq N; S \notin U_j; S \cup \{i\} \in U_j} \lambda_s^j \qquad \forall i \in N, \nu \in S^v(N)$$

Recíprocamente, todo semivalor en $S^v(N)$ puede obtenerse de esta forma.
La correspondencia $(\lambda_s^j) \to \psi_j$ es biyectiva.

La demostración de este teorema se puede hacer adaptando la de Dubey ([28]) al caso vectorial.

Los índices de Shapley-Shubik y Banzhaf son casos particulares de los semivalores. El primero está definido para los coeficientes $\lambda_s^j = \dfrac{1}{n\begin{pmatrix} n-1 \\ s \end{pmatrix}}$ y el segundo para $\lambda_s^j = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Estos coeficientes λ_s^j pueden definirse a través de r parámetros $p_j \in \mathbb{R}$ como:

$$\lambda_s^j(p_j) = p_j^s(1-p_j)^{n-s-1}, \quad 0 \leq p_j \leq 1$$

en cuyo caso resultan los semivalores binomiales.

Si $p_j = 0$, tenemos $\lambda_s^j(0) = (1, 0, ..., 0)$ y sólo las contribuciones individuales son importantes en j.

Si $p_j = 1$, tenemos $\lambda_s^j(1) = (0, 0, ..., 0)$ y sólo las contribuciones respecto a la gran coalición son importantes en j.

Estos coeficientes tienen una sencilla interpretación probabilística como la probabilidad de que se forme una determinada coalición al incorporarse a ella los individuos de manera independiente.

Un caso especial de semivalor binomial es aquel en que $p_j = \frac{1}{2}$, conocido como valor de Banzhaf.

6.7. Extensiones multilineales

El valor de Shapley de un juego, en el caso escalar, requiere un gran número de cálculos y más aún en el caso vectorial. Es por ello que se recurre a la extensión multilineal del juego (Ver [19]). La definición dada por Owen ([13], [14] y [16]) puede generalizarse al caso vectorial

Definición 6.7.1 *Sea $(N, v_{\phi,U})$ un juego k-vectorial de soporte $N = \{1, 2, ..., n\}$. La extensión multilineal vectorial del juego es una función f definida por*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{S \subset N} \left\{ \prod_{i \in S} x_i \prod_{i \notin S} (1-x_i) \right\} v(S) \tag{6.30}$$

para $0 \leq x_i \leq 1$ e $i \in \{1, 2, ..., n\}$

Cuando el juego k-vectorial es simple y viene dado en forma canónica (N, ν), entonces

$$\begin{pmatrix} f^1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ f^2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \cdots \\ f^r(x_1, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix} = \sum_{S \subset N} \left\{ \prod_{i \in S} x_i \prod_{i \notin S} (1-x_i) \right\} \begin{pmatrix} \nu_1(S) \\ \nu_2(S) \\ \cdots \\ \nu_r(S) \end{pmatrix}$$

Además
$$\begin{pmatrix} f^1(x_1,x_2,...,x_n) \\ f^2(x_1,x_2,...,x_n) \\ \cdots \\ f^r(x_1,x_2,...,x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{S\in U_1}\left\{\prod_{i\in S}x_i\prod_{i\notin S}(1-x_i)\right\} \\ \sum_{S\in U_2}\left\{\prod_{i\in S}x_i\prod_{i\notin S}(1-x_i)\right\} \\ \cdots \\ \sum_{S\in U_r}\left\{\prod_{i\in S}x_i\prod_{i\notin S}(1-x_i)\right\} \end{pmatrix}$$

Owen obtuvo, en el caso escalar, los índices de Shapley y Banzhaf mediante:
$$\phi_i(\nu) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,t,...,t)dt \qquad \beta_i(\nu) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},...,\frac{1}{2})$$
Fácilmente pueden ser generalizados al caso vectorial, con lo que tendríamos:
$$\phi_i^j(\nu) = \int_0^1 \frac{\partial f^j}{\partial x_i}(t,t,...,t)dt \qquad \beta_i^j(\nu) = \frac{\partial f^j}{\partial x_i}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},...,\frac{1}{2})$$

Ejemplo 6.4.1 (Continúa) *Sea de nuevo el juego cuya clasificación viene dada por la tabla:*

Clases	*Coaliciones*
U_1	*Minimales* $\{1,2,6\},\{1,3,4\}$
U_2	*Minimales* $\{1,5\},\{1,2,4\}$
U_3	*Minimales* $\{1,3,6\},\{1,4,6\}$
$\mathcal{R}$	

A partir de las coaliciones ganadoras de cada clase construimos la forma multilineal vectorial f, por lo que vendrá dada por sus componentes (f^1, f^2, f^3), dónde

$$f^1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = x_1x_2(1-x_3)(1-x_4)(1-x_5)x_6 + x_1x_2x_3(1-x_4)(1-x_5)x_6$$
$$+x_1x_2(1-x_3)x_4(1-x_5)x_6 + x_1x_2(1-x_3)(1-x_4)x_5x_6 + x_1(1-x_2)x_3x_4(1-x_5)(1-x_6)$$
$$+x_1x_2x_3x_4(1-x_5)(1-x_6) + x_1(1-x_2)x_3x_4x_5(1-x_6) + x_1(1-x_2)x_3x_4(1-x_5)x_6$$
$$+x_1x_2x_3x_4(1-x_5)x_6 + x_1x_2x_3(1-x_4)x_5x_6 + x_1x_2(1-x_3)x_4x_5x_6$$
$$+x_1x_2x_3x_4x_5(1-x_6) + x_1(1-x_2)x_3x_4x_5x_6 + x_1x_2x_3x_4x_5x_6$$
$$f^2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = x_1(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)x_5(1-x_6)+x_1x_2(1-x_3)(1-x_4)x_5(1-x_6)$$
$$+x_1(1-x_2)x_3(1-x_4)x_5(1-x_6)+x_1(1-x_2)(1-x_3)x_4x_5(1-x_6)+x_1(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)x_5x_6$$

$$+x_1x_2(1-x_3)x_4(1-x_5)(1-x_6)+x_1x_2x_3x_4(1-x_5)(1-x_6)+x_1x_2(1-x_3)x_4x_5(1-x_6)$$
$$+x_1x_2(1-x_3)x_4(1-x_5)x_6+x_1x_2x_3(1-x_4)x_5(1-x_6)+x_1x_2(1-x_3)(1-x_4)x_5x_6$$
$$+x_1(1-x_2)x_3x_4x_5(1-x_6)+x_1(1-x_2)x_3(1-x_4)x_5x_6+x_1(1-x_2)(1-x_3)x_4x_5x_6$$
$$+x_1x_2x_3x_4x_5(1-x_6)+x_1x_2x_3x_4(1-x_5)x_6+x_1x_2(1-x_3)x_4x_5x_6$$
$$+x_1x_2x_3(1-x_4)x_5x_6+x_1(1-x_2)x_3x_4x_5x_6+x_1x_2x_3x_4x_5x_6$$
$$f^3(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=x_1(1-x_2)x_3(1-x_4)(1-x_5)x_6+x_1x_2x_3(1-x_4)(1-x_5)x_6$$
$$+x_1(1-x_2)x_3x_4(1-x_5)x_6+x_1(1-x_2)x_3(1-x_4)x_5x_6+x_1(1-x_2)(1-x_3)x_4(1-x_5)x_6$$
$$+x_1x_2(1-x_3)x_4(1-x_5)x_6+x_1(1-x_2)(1-x_3)x_4x_5x_6+x_1x_2x_3x_4(1-x_5)x_6$$
$$+x_1x_2x_3(1-x_4)x_5x_6+x_1(1-x_2)x_3x_4x_5x_6+x_1x_2(1-x_3)x_4x_5x_6$$
$$+x_1x_2x_3x_4x_5x_6$$

Por su definición, la extensión multilineal f coincide con ν en los vértices del hipercubo. Por ejemplo, el valor de la extensión multilineal en el vértice $(1,0,1,0,1,0)$ es el de la función característica ν en la coalición $\{1,3,5)\}$:

$$f(1,0,1,0,1,0)=\nu(\{1,3,5\})=(0,1,0)$$

que, como sabemos, nos indica que la coalición pertenece sólo a la clase U_2

Si a las derivadas parciales respecto a cada una de las variables las notamos por

$$\frac{\partial f^1}{\partial x_i}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=f_i^j(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$$

y las particularizamos para $x_i=t$, $i=1,2,3,4,5,6$, tendremos

$$f_i^j(t,t,t,t,t,t)$$

$$\begin{array}{lll}
f_1^1(t,t,t,t,t,t)=2t^2-t^4 & f_1^2(t,t,t,t,t,t)=t+t^2-t^3 & f_1^3(t,t,t,t,t,t)=2t^2-t^3\\
f_2^1(t,t,t,t,t,t)=t^2-t^4 & f_2^2(t,t,t,t,t,t)=t^2-t^3 & f_2^3(t,t,t,t,t,t)=0\\
f_3^1(t,t,t,t,t,t)=t^2-t^4 & f_3^2(t,t,t,t,t,t)=0 & f_3^3(t,t,t,t,t,t)=t^2-t^3\\
f_4^1(t,t,t,t,t,t)=t^2-t^4 & f_4^2(t,t,t,t,t,t)=t^2-t^3 & f_4^3(t,t,t,t,t,t)=t^2-t^3\\
f_5^1(t,t,t,t,t,t)=0 & f_5^2(t,t,t,t,t,t)=t-t^3 & f_5^3(t,t,t,t,t,t)=0\\
f_6^1(t,t,t,t,t,t)=t^2-t^4 & f_6^2(t,t,t,t,t,t)=0 & f_6^3(t,t,t,t,t,t)=2t^2-t^3
\end{array}$$

por lo que los índices de Shapley $\phi_i^j(\nu)$ serán

$$\begin{array}{lll}
\phi_1^1=\int_0^1 f_1^1(t,t,t,t,t,t)dt=\frac{336}{720} & \phi_1^2=\int_0^1 f_1^2(t,t,t,t,t,t)dt=\frac{420}{720} & \phi_1^3=\int_0^1 f_1^3(t,t,t,t,t,t)dt=\frac{300}{720}\\
\phi_2^1=\int_0^1 f_2^1(t,t,t,t,t,t)dt=\frac{96}{720} & \phi_2^2=\int_0^1 f_2^2(t,t,t,t,t,t)dt=\frac{60}{720} & \phi_2^3=\int_0^1 f_2^3(t,t,t,t,t,t)dt=\frac{0}{720}\\
\phi_3^1=\int_0^1 f_3^1(t,t,t,t,t,t)dt=\frac{96}{720} & \phi_3^2=\int_0^1 f_3^2(t,t,t,t,t,t)dt=\frac{0}{720} & \phi_3^3=\int_0^1 f_3^3(t,t,t,t,t,t)dt=\frac{60}{720}\\
\phi_4^1=\int_0^1 f_4^1(t,t,t,t,t,t)dt=\frac{96}{720} & \phi_4^2=\int_0^1 f_4^2(t,t,t,t,t,t)dt=\frac{60}{720} & \phi_4^3=\int_0^1 f_4^3(t,t,t,t,t,t)dt=\frac{60}{720}\\
\phi_5^1=\int_0^1 f_5^1(t,t,t,t,t,t)dt=\frac{0}{720} & \phi_5^2=\int_0^1 f_5^2(t,t,t,t,t,t)dt=\frac{180}{720} & \phi_5^3=\int_0^1 f_5^3(t,t,t,t,t,t)dt=\frac{0}{720}\\
\phi_6^1=\int_0^1 f_6^1(t,t,t,t,t,t)dt=\frac{96}{720} & \phi_6^2=\int_0^1 f_6^2(t,t,t,t,t,t)dt=\frac{0}{720} & \phi_6^3=\int_0^1 f_6^3(t,t,t,t,t,t)dt=\frac{300}{720}
\end{array}$$

y los índices de Banzhaf $\beta_i^j(\nu)$

$$\begin{array}{lll}
\beta_1^1=f_1^1(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{7}{16} & \beta_1^2=f_1^2(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{5}{8} & \beta_1^3=f_1^3(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{3}{8}\\
\beta_2^1=f_2^1(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{3}{16} & \beta_2^2=f_2^2(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{8} & \beta_2^3=f_2^3(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=0\\
\beta_3^1=f_3^1(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{3}{16} & \beta_3^2=f_3^2(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=0 & \beta_3^3=f_3^3(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{8}\\
\beta_4^1=f_4^1(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{3}{16} & \beta_4^2=f_4^2(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{8} & \beta_4^3=f_4^3(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{8}\\
\beta_5^1=f_5^1(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=0 & \beta_5^2=f_5^2(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{3}{8} & \beta_5^3=f_5^3(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=0\\
\beta_6^1=f_6^1(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{3}{16} & \beta_6^2=f_6^2(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=0 & \beta_6^3=f_6^3(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{3}{8}
\end{array}$$

coincidiendo unos y otros con los cálculos obtenidos anteriormente.

Bibliografía

[1] J. Banzhaf. Weighted voting doesn't work: a mathematical analysis. *Rutgers Law Review*, 19:317–343, 1965.

[2] D. Black. *Theory of commitees and elections*. Cambridge University Press, 1958.

[3] S. Brams. *Game Theory and Politics*. Free Press, New York, 1975.

[4] P. Dubey. On the uniqueness of the shapley value. *International Journal of Game Theory*, 4(3):131–139, 1975.

[5] V. Chankong e Y.Y. Haimes. *Multiple Objective Decision Making: Theory and Methodology*. North Holland Series in System Science and Engineering n. 8, 1985.

[6] E. Einy. The desirability relation of simple games. *Mathematical Social Sciences*, 10:155–168, 1985.

[7] V. Feltkamp. Alternative axiomatic characterizations of the shapley and banzhaf values. *International Journal of Game Theory*, 24(2):179–186, 1975.

[8] R. Goel. The weighted majority game. *Opsearch*, 29(4):284–290, 1992.

[9] E.L. Hannan. On games with multiple payoff. *International Journal of Game Theory*, 11(1):13–15, 1982.

[10] J.C. Harsanyi. A simplified bargaining model for the n-person cooperative game. *International Economic Review*, IV:194–220, 1963.

[11] W.F. Lucas. Measuring power in weighted voting systems. *Case Studies in Applied Mathematics. C.U.P.M., Mathematical Association of America*, pages 42–106, 1976.

[12] R.B. Myerson. Graphs and cooperation in games. *Mathematics of Operations Research*, (2):225–229, 1977.

[13] G Owen. Multilinear extensions of games. *Management Science*, 18:64–79, 1972.

[14] G Owen. Multilinear extensions and banzhaf values. *Naval Research Logistics Quartely*, 22:741–750, 1975.

[15] G. Owen. On the core of linear production games. *Mathematical Programming*, 9:358–370, 1975.

[16] G. Owen. *Game theory*. Academic Press, 1995.

[17] B. Peleg. An axiomatization of the core of cooperative games without side payements. *Journal of Mathematical Economics*, 14:203–214, 1985.

[18] M.A. Puente. *Aportaciones a la representabilidad de juegos simples y al cálculo de soluciones de esta clase de juegos*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, Departamento de Matemática Aplicada, 1999.

[19] A.E. Roth. A note on values and multilinear extensions. *Naval Research Logistics Quartely*, 24:517–520, 1977.

[20] L.S. Shapley. A value for n-person games. *Annals of Mathematics Study*, (28):307–317, 1953.

[21] L.S. Shapley. Solutions of compound simple games. *Annals of Mathematics Studies*, 52:267–305, 1964.

[22] L.S. Shapley. Cores of convex games. *International Journal of Game Theory*, (1):11–26, 1971.

[23] P. Straffin. *Topics in the Theory of Voting*. Birkhauser, Boston, 1980.

[24] P. Straffin. *Game Theory and Strategy*. The Mathematical Association of America, 1993.

[25] P. Tannenbaum. Power in weighted voting systems. *The Mathematica Journal*, 7:58–63, 1997.

[26] A. D. Taylor. *Mathematics and Politics: Strategy, Voting, Power and Proof*. Springer-Verlag, 1995.

[27] S. Hart y A. Mas-Colell. Potential, value, and consistency. *Econometrica*, 57(3):589–614, 1989.

[28] P. Dubey y A. Neyman y R.J. Weber. Value theory without efficiency. *Mathematics of Operational Research*, 6(1):122–128, 1981.

[29] R.J. Aumann y B. Peleg y P. Rabinowitz. A method for computing the kernel of n-person games. *Mathematics of Computation*, 19:531–555, 1965.

[30] F. Carreras y J. Freixas. Complete simple games. *Mathematical Social Sciences*, 32:139–155, 1996.

[31] F.R. Fernández y J. Puerto. Partial order cooperative games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 112:331–360, 2002.

[32] R.J. Aumann y J.H. Drèze. Cooperative games with coalitions structure. *International Journal of Game Theory*, 3:217–237, 1974.

[33] P. Dubey y L.S. Shapley. Mathematical properties of the banzhaf power index. *Mathematics of Operations Research*, 4(2):99–131, 1979.

[34] R.J. Aumann y L.S. Shapley. *Values of Nonatomic Games*. Princenton University Press, Princenton, N.J., 1974.

[35] M. Davis y M. Maschler. The kernel of a cooperative game. *Naval Research Logistics Quartely*, 12:223–259, 1965.

[36] L.S. Shapley y M. Shubik. A method for evaluating the distribution of power in a committee system. *American Political Science Review*, (48):787–792, 1954.

[37] F.R. Fernández y M.A. Hinojosa y J. Puerto. Core solutions of vector-valued games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 112:331–360, 2002.

[38] J. Von-Neumann y O. Morgenstern. *Theory of Games and Economical Behaviour*. Wiley, New York, 1944.

[39] S. Brams y P. Affuso y D. Marc Kilgore. Presidential power: a game-theoretic analysis. *The Presidency in American Politics*, pages 55–74, 1989.

[40] A. Taylor y W. Zwicker. A characterization of weighted voting. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 115(4):1089–1094, 1992.

[41] A. Taylor y W. Zwicker. Weighted voting, multicameral representation, and power. *Games and Economic Behaviour*, 5:170–181, 1993.

[42] M. Zeleny. Games with multiple payoff. *International Journal of Game Theory*, 4(4):179–191, 1975.

[43] J. Zhao. The equilibria of a multiple objective game. *International Journal of Game Theory*, 20:171–182, 1991.