

R. 23.627

BCA.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS

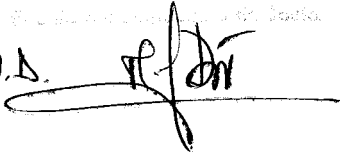
*Avances sobre el problema de
localización
continua de un único centro*

Antonio Manuel Rodríguez Chía

28

59

6 de Julio 1998

J.F. 

Infancia

Departamento de Educación

21 de Julio 1998

6- Julio 1998

For. de Matemáticas

Operaciones de D. F. & Estadística e Int. Oper. H. F. A.

OPERACIONES DE ESTADÍSTICA

2.23627

LBS 1144277

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
SEVILLA

043
260

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

*Avances sobre el problema de
localización
continua de un único centro*

Memoria de Tesis que presenta

Antonio Manuel Rodríguez Chía

para optar al grado de Doctor en Matemáticas.

Director de Tesis

Dr. D. Justo Puerto Albandoz

Profesor Titular de Universidad

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

Universidad de Sevilla

Fdo.: Justo Puerto Albandoz

Sevilla 1.998

Agradecimientos

A JUSTO PUERTO ALBANDOZ quien además de ser mi director y de guiarme en el terreno científico ha sido mi amigo.

A mis compañeros de departamento y en especial a mis compañeros de área, que han facilitado desde un principio la elaboración de esta memoria, así como han contribuido en la no agradable tarea de las correcciones.

Al departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Sevilla, y en particular a los directores durante la realización de esta memoria D. RAFAEL INFANTES MACÍAS y D. FRANCISCO RAMÓN FERNÁNDEZ GARCÍA, que han permitido el uso de sus servicios como uno más.

A mis amigos que me han demostrado en todo momento porqué son mis amigos, ayudándome y dando ánimos.

A mis padres y hermanos que nunca perdieron su fé en mí y me animaron en los momentos más difíciles.

*A mis padres
y hermanos.*

Índice General

1	Introducción	1
1.1	Reseñas históricas	2
1.2	Espacio solución	4
1.3	Ubicaciones existentes	5
1.4	Nueva ubicación	5
1.5	Función objetivo	7
1.6	Distancias	9
1.7	Resumen de contenidos	12
2	Localización con condiciones variables	15
2.1	Introducción	15
2.2	El algoritmo de Weiszfeld para el problema básico de localización dinámica	18
2.2.1	Algoritmo dinámico de Weiszfeld	20
2.2.2	Propiedades del algoritmo dinámico de Weiszfeld	23
2.2.3	La convergencia del algoritmo dinámico de Weiszfeld	27
2.3	Un algoritmo convergente para un problema general de localización dinámica	37
2.3.1	El algoritmo dinámico hiperbólico de Weiszfeld	43
2.3.2	La convergencia del algoritmo	48
2.4	Posicionamiento de unidades de servicio	52
2.4.1	El caso de la función distancia rectangular	57
2.4.2	El caso de la función de medida de la distancia euclídea al cuadrado	64

2.5	Notas finales	67
3	El problema ordenado de Weber	71
3.1	Problema ordenado de Weber con calibradores poliédricos	73
3.1.1	Modelo unifacilidad	79
3.1.2	Extensión al caso multifacilidad	85
3.1.3	El modelo multifacilidad no intercambiable	86
3.1.4	El modelo multifacilidad intercambiable	90
3.1.5	Caso restringido	92
3.1.6	Caso no poliédrico	95
3.2	El problema ordenado de Weber con atracción y repulsión	98
3.2.1	El modelo	99
3.2.2	Formulaciones equivalentes	102
3.2.3	El algoritmo	105
3.3	Notas finales	110
4	Problemas de localización multiobjetivo	111
4.1	El problema de localización generalizado Punto-Objetivo	112
4.1.1	Problema Punto-Objetivo con calibradores mixtos	113
4.1.2	Problema Punto-Objetivo reforzado con calibradores mixtos	122
4.1.3	Problema Punto-Objetivo con inf-distancias mixtas	126
4.2	Caracterizaciones geométricas en \mathbb{R}^2 . El caso con inf-distancias mixtas	128
4.3	Problema multiobjetivo	146
4.3.1	Propiedades geométricas del problema ordenado con inf-distancias	148
4.3.2	Soluciones del problema multiobjetivo	159
4.4	Notas finales	165

Índice de Figuras

3.1	Medriatriz	75
3.2	Mediatrix	77
3.3	Regiones ordenadas	80
3.4	No convexidad de la función objetivo.	82
3.5	Convexos elementales generalizados	86
3.6	Solución óptima	87
3.7	Dos-facilidad	90
3.8	Ejemplo de atracción y repulsión.	107
4.1	Correspondiente al Lema 4.2.1.	131
4.2	Correspondiente al Lema 4.2.2.	132
4.3	Correspondiente a la Proposición 4.2.6	144

Índice de Tablas

- 2.1 Iteraciones de la adaptación del algoritmo de Weiszfeld 35
- 2.2 Iteraciones del algoritmo de Weiszfeld para los puntos en $(0,2)$ 36
- 2.3 Iteraciones del algoritmo de Weiszfeld para los puntos en $(2,5)$ 38
- 2.4 Iteraciones del algoritmo hiperbólico dinámico de Weiszfeld 53
- 2.5 Iteraciones puntuales del algoritmo de Weiszfeld para los puntos en $[0, 2]$ 54
- 2.6 Iteraciones puntuales del algoritmo de Weiszfeld para los puntos en $[2, 5]$ 55

- 3.1 Evaluaciones dadas por el Algoritmo 4.2 109

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de la Teoría de la Localización consiste en determinar una o varias localizaciones para uno o más servicios con respecto a un conjunto de ubicaciones conocidas a priori, que usualmente denominamos puntos de demanda, optimizando alguna medida de efectividad.

La Teoría de la Localización se encuentra inmersa dentro del campo de la Investigación Operativa, por eso su estudio es cuantitativo y analítico. En este sentido, ante cada problema tenemos que adaptar un modelo, de forma que no se trabaja directamente con la situación real, sino con una abstracción de ella.

En nuestro caso estamos interesados en el desarrollo de modelos matemáticos, por ello en esta memoria, nos concentramos en la formulación de problemas, construcción de modelos y desarrollo de técnicas de resolución de este tipo de situaciones.

Existen dos tipos diferentes de modelos matemáticos: 1) descriptivos, y 2) normativos. En los primeros, el modelo sólo se usa para describir y no se toman ningún tipo de decisiones, ejemplos típicos de estos modelos son los modelos de colas, donde se estudian las medidas de efectividad para describir el sistema. Los segundos se usan para la toma de decisiones. La mayoría de los modelos que vamos a estudiar en esta memoria son de este tipo.

A veces resulta difícil clasificar en diferentes áreas los problemas considerados den-

tro de un campo de investigación. Sin embargo, la localización parece tener tres áreas principales: 1) localización continua, 2) problemas de localización-asignación, denominada de forma general localización discreta, y 3) localización en redes.

La localización continua considera problemas de localización en los cuales las ubicaciones pueden estar colocadas en cualquier lugar de un espacio continuo. La localización discreta considera que el número de lugares candidatos para ubicar el servicio o servicios es finito. Finalmente, los problemas de localización donde los puntos de demanda están sobre un grafo y se puede ubicar el servicio sobre los nodos o aristas del mismo se denominan problemas de localización en redes.

En esta memoria vamos a estar únicamente interesados en el primer tipo de problemas. Excelentes referencias en este campo son: Drezner (1995), Love et al. (1988), Francis et al. (1992) o Puerto (1995).

1.1 Reseñas históricas

El origen de la Teoría de la Localización se les puede atribuir a los antiguos griegos porque ellos fueron los primeros que estudiaron las propiedades de los puntos singulares dependiendo de la configuración de unos puntos dados y siendo más concretos se cree que cuando la armada Saracena en el 638 a.d. destruyó la Biblioteca de Alejandría contenía al menos tres soluciones diferentes del problema que hoy denominamos problema de Weber.

Más recientemente, Pierre Fermat (1601-1665) al final de un célebre trabajo sobre máximos y mínimos, enuncia el siguiente problema al que no le encuentra solución. *“Dados tres puntos A, B , y C en el plano, encontrar un cuarto punto P , tal que la suma de las distancias a los otros tres puntos sea mínima”.*

Este problema fue resuelto geoméricamente por Evangelista Torricelli (1608-1647). Su procedimiento consiste en considerar un triángulo equilátero sobre cada lado del triángulo que se obtiene al unir los puntos dados y trazar la circunferencia que circuns-

cribe a cada uno de ellos. El punto intersección, que es llamado punto de Torricelli, es la solución.

En 1834, Heinen prueba que el resultado obtenido por Torricelli no es cierto de forma general ya que si uno de los ángulos que forman los tres puntos de demanda es igual o superior a 120 grados el vértice correspondiente a este ángulo es la solución del problema.

En su *Doctrine and Application of Fluxions* (1750), Simpson generaliza este problema para obtener el punto que minimiza la suma ponderada de las distancia a tres puntos dados.

En 1857, Sylvester considera un problema equivalente de localización bajo el criterio minimax, donde se busca el menor círculo que contiene un conjunto de puntos. En 1860 él da una solución geométrica que se atribuye a Pierce.

A. Weber (1909) propone como criterio para la localización de las industrias la minimización de los costos de transportes o equivalentemente las distancias de viaje, que es la base del problema de la mediana.

Debido a que estos científicos no disponían de ordenador los métodos de resolución no podían ser iterativos sino geométricos. Uno de los primeros métodos analíticos para resolver el problema de Fermat-Weber se debe a Weiszfeld (1937) y se encuentra en su artículo "*Sur le point lequél la somme des distances de n points donnés est minimum*" en *Tôhoku Mathematics Journal* (1937). Se trata de un procedimiento iterativo para localizar un nuevo servicio que minimiza la suma ponderada de las distancias euclídeas a cualquier punto de demanda. Este artículo escrito en francés, enviado desde Praga y publicado en una revista japonesa en 1937, fue virtualmente desconocido hasta finales de los sesenta. Por esta razón el método fue redescubierto por otros investigadores a finales de los cincuenta y principios de los sesenta.

A finales de los años sesenta es cuando la Teoría de Localización se diversifican y comienza a interesar a arquitectos, economistas, ingenieros, geógrafos, especialistas en ciencias de la empresa, investigadores operativos, analistas de sistema, planificadores

urbanos, etcétera, convirtiéndose así en una cuestión multidisciplinar. Este hecho, junto con el rápido desarrollo de los ordenadores posibilita que problemas para los que sólo se disponía de métodos de resolución geométricos y físicos sean tratados numéricamente.

Finalmente, hemos de hacer notar que en las dos últimas décadas el número de trabajos publicados en revistas relacionadas con la Teoría de la Localización ha tenido un gran auge, de tal forma que la prestigiosa *Mathematical Reviews* y *Zentralblatt für Mathematik/Mathematics Abstract* ha incluido en su *1991 Mathematics Subject Classification* con el número 90B85 Localización continua y 90B80 Localización discreta dentro de los 18 títulos dentro de la sección 90Bxx de *Operations Research and Management Science*.

1.2 Espacio solución

El espacio solución es el espacio soporte donde el problema está definido, éste contiene como elementos las ubicaciones existentes y las nuevas. La elección de un espacio solución apropiado es crucial, porque determina aspectos tan importantes como la precisión o la resolubilidad del modelo. Algunos de los espacios soluciones usuales son:

- *Espacios discretos*: existen un número finito de candidatos.
- *Redes*: usualmente representan una red de comunicación. Los nodos son los elementos importantes que representan las ciudades o cruces. Los arcos representan las conexiones entre nodos, como carreteras, calles, conexiones de luz, etcétera.
- *Espacio euclídeo \mathbb{R}^n* : esta clase de espacios se usa cuando el problema presenta aspectos regionales que no tienen que ser discretizados. Además, puede ser usado para modelar redes cuando el número de nodos y arcos es demasiado grande.

Los casos $n = 2$ y $n = 3$ tienen un significado físico. Los casos $n > 3$ han sido usados para modelar y resolver problemas de estimación estadística.

- *Esfera*: es útil para modelar situaciones reales con distancias de grandes magnitudes.
- *Superposición de un grafo sobre un espacio continuo*: éste es un espacio solución donde hay una red, para las conexiones de alta velocidad, superpuesta sobre un espacio continuo.

1.3 Ubicaciones existentes

En términos de Teoría de Localización, las ubicaciones existentes son el conjunto de usuarios que requieren ser servidos, por ello se les denomina puntos de demanda. Usualmente se modelan mediante un conjunto A y una función intensidad asociada a cada uno de estos puntos que es una medida de probabilidad sobre A .

Existen dos formas diferentes para representar la demanda: por un conjunto finito de puntos o por regiones del espacio solución.

En el primer caso, nos enfrentamos con el conjunto de puntos, $A = \{a_1, \dots, a_M\}$ y un conjunto de pesos representando la importancia (intensidad) de la demanda generada en cada punto $\{\omega_1, \dots, \omega_M\}$.

En el modelo regional, tratamos con una región \mathcal{R} (no necesariamente conexa), incluida en el espacio solución y alguna medida de probabilidad. Esta representa la importancia de cada subconjunto medible de la región \mathcal{R} .

1.4 Nueva ubicación

La localización de la nueva ubicación es la variable de decisión del problema general de localización. Esta variable está caracterizada por:

- a) Número y cualidad de los servicios que se ubican. Si es más de uno, será necesario especificar las características de cada uno de ellos. Cuando son idénticos,

como por ejemplo buzones de correo, nos enfrentamos ante un modelo multifacilidad, por otro lado, en el caso de servicios de salud, podemos encontrarnos ante problemas de localización jerarquizados.

b) Naturaleza del servicio, distinguimos entre servicios atractivos y repulsivos.

Un servicio es atractivo cuando todos los puntos de demanda valoran positivamente el acercamiento de la posición destinada a la ubicación de la nueva facilidad. Se pueden considerar centros atractivos aquellos que produzcan beneficios de tipo económico, cultural etcétera a los puntos de demanda, como por ejemplo una biblioteca, un hospital, etcétera.

Sin embargo, en la segunda mitad del siglo XX han ido apareciendo diferentes tipos de centros de servicio o lugares de almacenamiento que pueden causar daños o perjuicios a la salud, que deterioran el medio ambiente o que puedan constituir una amenaza a nuestro bienestar o estilo de vida. En definitiva, centros de servicio que preferimos tener lo más lejos posible. Así ocurre con la ubicación de centrales nucleares, cementerios de residuos radiactivos, fábricas que producen contaminación ambientales por gases, ruidos , radiaciones, plantas de tratamiento de desechos de los centros urbanos (basureros) incluso otro tipo de centros de servicio, como centros para el tratamiento y rehabilitación de pacientes drogodependientes y cárceles que producen la movilidad de personas afectadas tan pronto como se enteran de la posibilidad de tener cerca un centro de este tipo, como bien conocemos por los medios de comunicación. De hecho aunque los orígenes de la Teoría de la Localización son lejanos en el tiempo, la mayoría de los trabajos se han realizado en los últimos 40 años y no es hasta finales de los setenta cuando aparecen los primeros trabajos sobre localización de centros peligrosos.

1.5 Función objetivo

Debido a que el estudio de la Teoría de la Localización que vamos a llevar a cabo es de tipo cuantitativo, los problemas que consideramos tienen la formulación común;

$$\text{opt}_{x=(x_1, \dots, x_N) \in S} F \left(d(a, (x_1, \dots, x_N))_{a \in A} \right)$$

donde

F es la función globalizadora (no necesariamente escalar).

opt significa optimizar, es decir, minimizar o maximizar.

S es el espacio solución.

x es la nueva facilidad.

A es el conjunto de ubicaciones existentes.

a es una ubicación existente.

$d(\cdot, \cdot)$ es la medida de las distancias.

La elección de la función objetivo que tiene que ser usada es a veces difícil de determinar. Hemos de hacer notar, que la solución final depende fuertemente de esa elección (ver Carrizosa et al. (1990)). De esta forma, es importante esforzarse en la parte del proceso de modelado.

Varios intentos han sido propuestos en la literatura para evitar esta dificultad. El más ampliamente aceptado consiste en establecer unos principios de racionalidad que debe verificar nuestra solución y entonces intentar obtener funciones objetivo a través de un proceso basado en una axiomática.

A continuación enumeramos algunos de los problemas que van a tratarse a lo largo de esta memoria como ejemplo de diferentes funciones objetivos.

1. *Problema de Weber o modelo minisum.* El problema consiste en la minimización de la distancia esperada a una nueva facilidad x

$$\min_{x \in X} \int d(x, s) d\nu(s)$$

cuando A es finito, el problema es

$$\min_{x \in X} \sum_{a \in A} \mu(s) d(x, s).$$

El modelo minisum representa un criterio económico, en el sentido de minimizar el costo promedio que soporta la localización de un nuevo servicio.

2. *Problema del centro o modelo minimax,* es similar al problema anterior, pero ahora, la minimización es de la máxima distancia ponderada por μ , es decir,

$$\min_{x \in X} \sup_{a \in A} \mu(s) d(x, s)$$

cuando A es finito el supremo puede ser reemplazado por un máximo. El modelo minimax representa un criterio de calidad de servicio proporcionado.

3. *El problema Cent-dian,* dado un escalar positivo $\lambda > 0$, la función objetivo es una combinación convexa de la función objetivo suma y la función objetivo máximo. Es decir, el problema es

$$\min_{x \in X} \lambda \int d(x, s) d\mu(s) + (1 - \lambda) \sup_{a \in A} \mu(s) d(x, s)$$

El modelo cent-dian representa un criterio intermedio entre el modelo minimax y el minisum debido a que dichos criterios están contrapuestos en la mayoría de los problemas.

4. *Problema ordenado de Weber,* dado un número finito de ubicaciones existentes y pesos $\omega_1, \dots, \omega_M$ ordenados en orden no decreciente el problema consiste en encontrar la localización de un punto x que minimice la siguiente suma de distancias,

$$\min_{x \in X} \sum_{i=1}^M \omega_i d_{(i)}(x)$$

donde $d_{(i)}(x)$ es el i -ésimo elemento en la lista ordenada de distancias

$$d(x, a_{\sigma_1}) \leq \dots \leq d(x, a_{\sigma_M}).$$

Esta función es similar a la del problema de Weber, sin embargo, incluye como casos particulares todos los problemas mencionados anteriormente.

5. *Problema multiobjetivo*: cuando se plantea localizar un servicio se debe establecer el criterio bajo el cual va a ser ubicado que puede ser el minimizar los costos totales, minimizar la máxima distancia o maximizar la mínima distancia etcétera. Cuando existe un único criterio el problema de localización se reduce a optimizar la función objetivo que determina ese criterio, en este caso hablamos de problema uniobjetivo.

Sin embargo, existen situaciones reales donde el criterio empleado para ubicar un servicio no es único, con lo cual, nos planteamos el encontrar una solución que sea óptima frente a varios criterios simultáneamente, estos tipos de problemas se denominan problemas de localización multiobjetivo y a su solución (si existe) se le denomina punto ideal. Este punto rara vez existe, ya que los objetivos suelen ser contrapuestos, así pues, el concepto de solución ideal es poco operativo. Esto impone la necesidad de utilizar el concepto de solución no dominada. Éste concepto nos permitirá al menos conocer cuando no existen soluciones mejores que las que hemos encontrado. Para una discusión detallada sobre la naturaleza multiobjetivo del problema de localización véase el artículo de ReVelle, Cohon y Shobrys (1981).

1.6 Distancias

La ubicación de un nuevo centro va a depender de la posición relativa de éste con respecto a los puntos de demanda, a través de la noción de distancia.

La distancia en un espacio métrico X , es una función que asigna un valor real no negativo $d(x, y)$ a cada par (x, y) . Las propiedades que debe verificar esta función para que sea una métrica son

1. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (simetría).
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \quad \forall x, y, z \in X$ (desigualdad triangular).

Además, cuando nuestro objetivo es resolver problemas de optimización, como es nuestro caso, se le exigen algunas propiedades adicionales como puede ser la convexidad, que tenga expresión analítica o linealidad a trozos; de forma que podamos usar el análisis convexo, las herramientas del análisis o las técnicas de programación lineal respectivamente.

Un calibrador $\gamma(\cdot)$ es una función definida sobre el espacio X que toma valores reales y que verifica las siguientes propiedades;

1. $\gamma(x) \geq 0 \quad \forall x \in X$.
2. $\gamma(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.
3. $\gamma(\lambda x) = \lambda \gamma(x)$ cuando $\lambda > 0$.
4. $\gamma(x + y) \leq \gamma(x) + \gamma(y)$.

Esta función queda perfectamente definida a través de su bola unidad $B = \{x \in X : \gamma(x) \leq 1\}$, que debe de ser compacta, convexa y en cuyo interior debe contener el origen, mediante el funcional de Minkowsky, $\gamma(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda B\}$.

Decimos que una distancia procede de un calibrador cuando para todo $x, y \in X$ se verifica que $d(x, y) = \gamma(y - x)$. En el caso de que la bola unidad sea simétrica se tiene que $\gamma(\cdot)$ es una norma.

Toda función $d(\cdot, \cdot)$ definida sobre $X \times X$ que toma valores reales y que verifica las propiedades de una métrica (excepto la simetría) y además es convexa, procede de un calibrador.

Entre las distancias más usuales destacamos la euclídea que procede de la norma euclídea $\gamma(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, que tiene la ventaja de tener como bola unidad el círculo, que permanece invariante ante rotaciones.

En segundo lugar, destacamos la distancia rectangular o Manhattan derivada de la norma rectangular $\gamma(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Se usa para modelar situaciones de redes rectangulares o de movimientos de robots que generalmente tienen sus movimientos restringidos a dos, de forma que cada movimiento está generado por dos motores independientes que no pueden trabajar simultáneamente y que tienen velocidades constantes e iguales.

También destacamos a la norma de Tchebycheff que procede de la norma l_∞ , es decir, $\gamma(x) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$ y que puede ser considerada en el plano como la distancia rectilínea a la que se le ha aplicado un giro de 45 grados. Como aplicación podemos usar el ejemplo anterior de los robots, en el caso que se permitan que ambos motores se muevan simultáneamente.

Las distancias mencionadas anteriormente son casos particulares de las distancia l_p que proceden de la norma $\gamma_p(x) = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$. Para las cuales debemos destacar que ha habido trabajos que han considerado que este tipo de normas para unos determinados p son las más adecuadas para modelar las distancias entre puntos de unas determinadas regiones cuya red de carretera sea lo suficientemente densa.

Finalmente mencionamos las distancias que proceden de calibradores poliédricos y que fueron introducidos por Witzgall (1964). Hay que destacar el comportamiento lineal de este tipo de calibradores lo que facilita la resolución de los problemas formulados con este tipo de funciones. Casos particulares de éstos son la norma l_1 y la l_∞ .

1.7 Resumen de contenidos

En esta memoria, se abordan diferentes versiones del problema de Weber, además de diferentes problemas multiobjetivo que generalizan una buena parte de los problemas multiobjetivo estudiados hasta la fecha. Por esta razón, la memoria que se presenta se estructura de la siguiente forma.

En el Capítulo 1 abordamos problemas de localización que se caracterizan porque las condiciones iniciales del problema, ubicación de los puntos de demanda, pesos, ... no son fijas. Analizamos dos enfoques diferentes, en el primero, los puntos de demanda han sido sustituidos por trayectorias, por lo que dichos puntos varían con el tiempo, mientras que en el segundo, la demanda va a estar definida a través de una variable aleatoria con su correspondiente distribución. Para ambos problemas encontraremos soluciones óptimas, que serán, en el primero trayectorias y en el segundo una variables aleatorias.

En el Capítulo 2 consideramos el problema ordenado de Weber, introducido por Puerto y Fernández (1995). Este tipo de problema a pesar de tener la dificultad de que no tiene una expresión común en todo el espacio como suma de distancias, presenta la ventaja de permitir un tratamiento común da diferentes modelos clásicos de localización pueden ser considerados como casos particulares de él. En particular, en este capítulo estudiamos el caso de calibradores poliédricos, caracterizando las soluciones, así como desarrollando algoritmos que nos permiten calcular la solución óptima en tiempo polinomial. Finalmente, hemos incluido un modelo con pesos positivos y negativos, que modela aquellas situaciones reales en las cuales se pretende ubicar un centro nocivo o semi-deseado.

En el Capítulo 3, se consideran diferentes versiones de problemas multiobjetivo donde la demanda puede venir representada a través de puntos o de conjuntos y tales que cada elemento de demanda puede tener asociado un calibrador diferente, es decir, la distancias desde un punto cualquiera a dos puntos o conjuntos de demanda pueden estar medidas con diferentes calibradores. Para estos problemas definimos diferentes

conjuntos de soluciones, que responden a diferentes grados de exigencia en cuanto a la dominancia. Finalmente, en este capítulo se considera un problema multiobjetivo en el que cada objetivo es una función ordenada de Weber con respecto a distancias a conjuntos. Caracterizaremos el conjunto de soluciones y desarrollaremos un algoritmo eficiente que nos permita calcularlas.

Capítulo 2

Localización con condiciones variables

2.1 Introducción

El objetivo de este capítulo es el estudio de problemas de localización en los que alguno de los elementos del problema no sean fijos. En este sentido consideramos los casos en los que las condiciones iniciales, puntos de demanda o pesos pueden cambiar en el tiempo, así como el caso en que la demanda sea aleatoria. Es importante señalar que este tipo de formulaciones modela con mayor precisión situaciones reales donde la demanda cambia con el tiempo (demanda estacional) o donde los incidentes son aleatorios (accidentes o emergencias).

En la literatura se pueden hallar diferentes modelos para este tipo de problemas. Así, en Wesolowsky (1973), se propone un modelo que consiste en la minimización de la siguiente función objetivo

$$\min \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{m_k} f_{ki}(x_k, y_k) + \sum_{k=2}^r c_k z_k$$

con $z_k \in \{0, 1\}$, $z_k = 0$ si $d_{k-1,k} = 0$. Y donde m_k es el número de destinos en el período k , $f_{ki}(x_k, y_k)$ es el valor de la función de costo desde la ubicación (x_k, y_k) en el

período k al destino i , c_k es el costo de movimiento de una facilidad en el comienzo del período k y $d_{k-1,k}$ es la distancia a la que es movida la ubicación óptima en la etapa k . Para la resolución de este modelo se propuso un método de enumeración; en el que en cada etapa, el problema se reduce a un problema estático.

Posteriormente, en Wesolowsky (1975), se desarrolla un modelo que puede considerarse como una versión dinámica del problema de localización y asignación en el cual las condiciones iniciales varían en un número finito de etapas. Para la resolución de este problema se desarrolla un método basado en la programación dinámica.

En Drezner y Wesolowsky (1991) se estudia una versión del problema de Weber en el cual los pesos son funciones dependientes del tiempo. Se pretende buscar una solución que puede variar un número finito de veces. Este problema tiene un gran número de aplicaciones, por ejemplo la colocación de servicios destinados al turismo, los cuales tienen una utilización diferente según las estaciones, o bien, el número de puestos contra incendios en los bosques, que pasan de ser prácticamente nulos en épocas de lluvia, a ser muy numerosos en épocas calurosas. En estos dos ejemplos la solución óptima no debería ser independiente del tiempo, sino que para obtener una solución más real, ésta debería venir dada en función de la época.

Para este problema existe un algoritmo en el caso que las distancias estén medidas a través de la norma l_1 , los pesos sean funciones lineales del tiempo y sólo se permita un salto, Drezner y Wesolowsky (1991). Recientemente, en Rodríguez-Chía (1995) se aborda para este mismo problema, el caso de que se permita un número finito de saltos, desarrollándose un método basado en la programación dinámica, que permite la obtención de la forma explícita de sus soluciones.

Con respecto al problema con demanda aleatoria podríamos citar los trabajos de Larson y Odoni (1981), Levine (1986) o en el caso de que la demanda fuese conocida Anderson y Fontenot (1992) y Carrizosa et al. (1998).

En este capítulo, presentamos tres nuevos modelos de localización. En los dos primeros las condiciones iniciales varían puesto que los puntos de demanda van a ser

sustituidos por trayectorias, con lo cual, pasamos a considerar un problema de optimización en un espacio infinito dimensional, mientras que en el tercero, dichas condiciones varían ya que la demanda va a venir determinada por una variable aleatoria, con lo cual, pasamos a considerar un problema de optimización estocástica.

En las dos primeras secciones comprobaremos que los problemas planteados no son una extensión directa del caso puntual, ya que la solución obtenida al resolver dicho problema para cada punto de la trayectoria produce una solución con peor valor objetivo que la obtenida al resolverlo directamente. Para resolverlo recurriremos a una adaptación del algoritmo de Weiszfeld a dichos problemas, este algoritmo es un método iterativo basado en la ecuación de punto fijo obtenido a partir de la condición necesaria de optimalidad de este problema. Varios artículos han tratado sobre la convergencia de este algoritmo, así como han ofrecido diferentes mejoras y extensiones (véase, por ejemplo, Morris y Verdini (1979), Chandrasekaran y Tamir (1989), Drezner (1992) o Brimberg y Love (1993) (en el caso de normas l^p)). Una razón que justifica el uso de dicho algoritmo en este capítulo es que la formulación de los modelos que vamos a considerar no se ajustan a las condiciones de Euler-Lagrange. En nuestro caso, la función objetivo no puede ser escrita de la forma $\int F(t, x, x') dt$, que es necesaria para el uso de las condiciones de Euler-Lagrange.

Finalmente, en el tercer modelo, suponiendo que la demanda viene dada por una variable aleatoria de cuya distribución sólo conocemos la media, buscamos como solución óptima aquella variable aleatoria que minimice la máxima distancia esperada a la demanda. Estudiamos los casos en los que las distancias estén medidas a través de la norma l_1 y de la norma euclídea al cuadrado.

2.2 El algoritmo de Weiszfeld para el problema básico de localización dinámica

En esta primera sección, como anticipábamos en la introducción, vamos a estudiar una generalización del problema clásico de Weber, donde los puntos de demanda han sido sustituidos por trayectorias. Para ello, primero presentaremos el modelo probando que está bien definido, para posteriormente desarrollar un algoritmo que nos conduzca a una solución óptima, obteniendo resultados de convergencia.

Consideramos el espacio normado $X_p := L^p(I, \mathbb{R}^m)$ siendo I un intervalo finito. Es decir, $x \in X_p$ significa que

$$\begin{aligned} x &: I \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\mapsto x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t)) \end{aligned}$$

donde cada $x_k(\cdot)$ pertenece a $L^p(I, \mathbb{R})$ para todo $k = 1, \dots, m$. La norma en este espacio está definida para cualquier $x \in X_p$ por

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^m |x_k|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

y para cualquier $x_k \in L^p(I, \mathbb{R})$ por

$$|x_k|_p := \left(\int_I |x_k(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Finalmente, para obtener una mejor comprensión del contenido del capítulo usaremos $m(B)$ para denotar la medida de Lebesgue del conjunto medible B , *e.c.t.* para decir en casi todo y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para denotar el producto escalar definido como sigue:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle &: X_p \times X_r \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle = \int_I \sum_{k=1}^m x_k(t) y_k(t) dt \end{aligned}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$.

De esta forma, dado un número finito de trayectorias $A \subseteq X_p$ el problema consiste en buscar una nueva trayectoria x^* que resuelva el siguiente problema de optimización

$$\inf_{x \in X_p} F_p(x) = \sum_{a \in A} \omega_a \|x - a\|_p \quad (1_p)$$

donde ω_a son constantes mayores que 0. A este problema le denominaremos a partir de ahora, el problema dinámico de Weber (ver Bimberg y Love (1993) y Puerto y Rodríguez-Chía (1995)).

Hemos de hacer notar que X_p es un espacio infinito dimensional, lo que supone una dificultad añadida ya que sus topologías son más complejas que la topología de \mathbb{R}^m . En efecto, se sabe que los teoremas de existencia de mínimos, como por ejemplo el teorema de Weirstrass, en los cuales se usa el concepto de compacidad no suelen usarse, debido principalmente a la ausencia de caracterizaciones de los compactos en dichos espacios. Sin embargo, evitaremos dichos inconvenientes usando resultados que relacionen la topología débil y fuerte de estos espacios.

Antes de describir el algoritmo que va a resolver el Problema (1_p) , vamos a estudiar propiedades que aseguran que estos problemas están bien definidos y que tienen solución.

Teorema 2.2.1 *Para todo $p \in (1, +\infty)$ se tiene que*

$$\inf_{x \in X_p} F_p(x) = \min_{x \in X_p} F_p(x)$$

Demostración:

La demostración de este teorema se puede considerar como un caso particular de la demostración del Teorema 2.3.1. □

Hemos de hacer notar que el resultado anterior no es cierto para $p = 1$, ya que el espacio X_1 no es reflexivo. Para asegurar la existencia, en este caso, usamos la inyección de X_1 en el espacio de las funciones de variación acotada, $NBV(I, \mathbb{R}^m)$. Debido a que $NBV(I, \mathbb{R}^m)$ puede ser unívocamente identificado con el dual del espacio de funciones

continuas, $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m)$, el Problema (1_1) también tiene solución óptima en $NBV(I, \mathbb{R}^m)$. Por tanto, una vez que tenemos asegurada la existencia pasamos a estudiar la unicidad del Problema (1_1) , para ello, introducimos el concepto de colinealidad.

Definición 2.2.1 *El conjunto A de puntos de demanda se dice que no es colineal si contiene tres elementos a , a' y a'' tales que no existe $\lambda \in [0, 1]$ verificando que $a = \lambda a' + (1 - \lambda)a''$ e.c.t..*

Teorema 2.2.2 *Si el conjunto A de puntos de demanda no es colineal entonces existe una única solución óptima del Problema (1_p) , $\forall p \in (1, +\infty)$.*

Demostración:

Consideramos la función $F(x) = \sum_{a \in A} \omega_a d_a(x)$ donde $d_a(x) = \|x - a\|_p$. Probaremos que $F(\cdot)$ es una función estrictamente convexa cuando A no es colineal.

Si F no es estrictamente convexa existe $\theta \in (0, 1)$, $x, y \in X_p$ con $x \neq y$ tal que

$$d_a(\theta x + (1 - \theta)y) = \theta d_a(x) + (1 - \theta)d_a(y) \quad \forall a \in A$$

lo que implica que existe $\lambda_a \geq 0$ tal que $x(t) - a(t) = \lambda_a(y(t) - a(t))$ e.c.t. . Puesto que $x \neq y$, se sigue que $\lambda_a \neq 1$. De aquí,

$$\frac{1}{1 - \lambda_a} x(t) - \frac{\lambda_a}{1 - \lambda_a} y(t) = a(t) \quad \text{e.c.t. y } \forall a \in A$$

lo que contradice que A no es colineal. Con lo cual se obtiene que $F(\cdot)$ es estrictamente convexa. □

2.2.1 Algoritmo dinámico de Weiszfeld

La función objetivo $F_p(\cdot)$ es convexa porque la norma $\|\cdot\|_p$ es una función convexa para $p \geq 1$. De la convexidad de F_p obtenemos que la condición necesaria para la optimilidad es también suficiente (ver Bazaraa y Shetty (1979)). La condición general

de optimalidad es $\frac{\partial F_p}{\partial x_k}(x; h) \geq 0 \quad \forall h \in X_p \quad k = 1, \dots, m \quad p > 1$ donde $\frac{\partial F}{\partial x_k}(x; h)$ representa la derivada direccional de F_p en x en la dirección h .

Sin embargo, no podemos usar esta expresión para desarrollar un algoritmo iterativo que resuelva este problema. No obstante, para las soluciones que no coinciden en casi todo con una función de demanda, $\frac{\partial F_p}{\partial x_k}(x; h)$ es la derivada Gateaux, es decir, es una aplicación lineal y continua de X_p . Por tanto, x es solución de (1_p) si y solo si

$$\frac{\partial F_p}{\partial x_k}(x; h) = 0 \quad k = 1, \dots, m \quad \forall h \in X_p \quad p > 1. \quad (2.1)$$

Hemos de hacer notar que la expresión anterior no puede ser usada para $p = 1$ porque $F_p(\cdot)$ no es diferenciable para $p = 1$.

La derivada en (2.1) puede ser escrita para un k particular con $1 \leq k \leq m$, como

$$\sum_{a \in A} \omega_a \left(\|x - a\|_p^{1-p} \int_I |x_k(t) - a_k(t)|^{p-2} (x_k(t) - a_k(t)) h_k(t) dt \right) = 0 \quad \forall h = (h_1, \dots, h_m) \in X_p.$$

$$\sum_{a \in A} \frac{\omega_a}{\|x - a\|_p^{p-1}} \langle |x_k - a_k|^{p-2} (x_k - a_k), h_k \rangle = 0 \quad \forall h_k \in L^p(I, \mathbb{R}).$$

Usando la completitud de X_p , se obtiene la siguiente expresión,

$$\sum_{a \in A} \frac{\omega_a}{\|x - a\|_p^{p-1}} |x_k(t) - a_k(t)|^{p-2} (x_k(t) - a_k(t)) = 0 \quad e.c.t.$$

Despejando x_k obtenemos que la condición para que sea la solución óptima del problema (1_p) es;

$$x_k(t) = \sum_{a \in A} \frac{\frac{\omega_a |x_k(t) - a_k(t)|^{p-2}}{\|x - a\|_p^{p-1}} a_k(t)}{\sum_{a \in A} \frac{\omega_a |x_k(t) - a_k(t)|^{p-2}}{\|x - a\|_p^{p-1}}} \quad \forall k = 1, \dots, m.$$

Con lo cual, obtenemos un proceso iterativo a través de una ecuación de punto fijo, $\psi(x) = x$; donde $\psi(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_N(x))$ viene dada por

$$\psi_k(x^q)(t) = \sum_{a \in A} \frac{\frac{\omega_a |x_k^q(t) - a_k(t)|^{p-2}}{\|x^q - a\|_p^{p-1}} a_k(t)}{\sum_{a \in A} \frac{\omega_a |x_k^q(t) - a_k(t)|^{p-2}}{\|x^q - a\|_p^{p-1}}} \quad \forall k = 1, \dots, m. \quad (2.2)$$

La principal diferencia de esta expresión con respecto al esquema obtenido para el caso finito dimensional es que en su forma actual $\psi(x)$ es una función de t . Con lo cual, el proceso iterativo es

$$x_k^{q+1}(t) = \sum_{a \in A} \frac{\frac{\omega_a |x_k^q(t) - a_k(t)|^{p-2}}{\|x^q - a\|_p^{p-1}}}{\sum_{a \in A} \frac{\omega_a |x_k^q(t) - a_k(t)|^{p-2}}{\|x^q - a\|_p^{p-1}}} a_k(t) \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.3)$$

De esta definición podemos hacer las siguientes observaciones:

1. Caso $p \geq 2$.

Si $x^q = a$ e.c.t., para algún $a \in A$ entonces x^{q+1} no está bien definido por lo que modificaremos la definición de la iteración x^{q+1} , siendo $x^{q+1}(t) = a(t) \quad \forall t$. Por eso, x^{q+1} , es finalmente definido de la siguiente forma

$$x^{q+1} = \begin{cases} \psi(x^q), & \text{si } x^q - a \neq 0 \quad \text{e.c.t. para todo } a \in A \\ a, & \text{si } x^q - a = 0 \quad \text{e.c.t., para algún } a \in A. \end{cases}$$

2. Caso $1 \leq p < 2$. En este caso definimos el siguiente conjunto

$$A_k(x) = \{t \in I : \exists a \in A, \quad |x_k(t) - a_k(t)| = 0\}. \quad (2.4)$$

Si existe $A_k(x^q) \subseteq I$, con $m(A_k(x^q)) > 0$, se define $x_k^{q+1}(t) = a_k(t)$ para todo $t \in A_k(x^q)$.

Con lo cual, $x_k^{q+1}(t)$ queda definido del siguiente modo

$$x_k^{q+1}(t) = \begin{cases} a_k(t), & \forall t \in A_k(x^q) \\ \psi_k(x^q)(t), & \forall t \in I \setminus A_k(x^q). \end{cases}$$

Observación 2.2.1 Las iteraciones definidas por el algoritmo dinámico de Weiszfeld no coinciden con la función generada por la aplicación del algoritmo de Weiszfeld clásico a cada punto de I lo que puede verse fácilmente a través de la expresión de las iteraciones

(2.3). Para $p > 1$, esa fórmula depende para $t \in I$ de la norma de $\|x^q - a\|_p$ para todo $a \in A$. Esta dependencia no aparece en la aproximación puntual porque en este caso para cada $t \in I$ depende de $\|x^q(t) - a(t)\|_p$ (donde aquí $\|\cdot\|_p$ representa la norma l_p en \mathbb{R}^m). Para obtener más detalles ver el Ejemplo 2.2.1 en la Sección 2.2.3, donde se muestra que la solución obtenida al resolver el problema en cada punto del intervalo I es peor que la solución del problema obtenida al iterar en X_p .

2.2.2 Propiedades del algoritmo dinámico de Weiszfeld

En esta sección presentamos algunas propiedades preliminares del esquema iterativo introducido previamente. Para estudiar la convergencia de este esquema consideramos los siguientes conjuntos,

$$H_k = \{x \in X_p : \exists A_k(x) \text{ con } m(A_k(x)) > 0\}$$

donde $A_k(x)$ fue definido en (2.4). Y de aquí, introducimos el conjunto

$$S_p = \begin{cases} \bigcup_k H_k, & \text{si } 1 \leq p < 2 \\ \hat{A}, & \text{si } p \geq 2 \end{cases}$$

donde \hat{A} es el conjunto de funciones con el mismo cardinal que A , tales que para cada $\hat{a} \in \hat{A}$ existe un único $a \in A$ con $\hat{a} = a$ en casi todo.

Se obtiene directamente que este proceso iterativo es realmente una modificación del método descendente del gradiente. Sin embargo, la convergencia global depende del rango de posibles valores que toma el parámetro p . En efecto, supuesto que $x^q \neq a$ e.c.t. para todo $a \in A$,

$$x_k^{q+1}(t) = x_k^q(t) - \sum_{a \in A} \frac{\frac{\omega_a |x_k^q(t) - a_k(t)|^{p-2}}{\|x^q - a\|_p^{p-1}}}{\sum_{a \in A} \frac{\omega_a |x_k^q(t) - a_k(t)|^{p-2}}{\|x^q - a\|_p^{p-1}}} (x_k^q(t) - a_k(t))$$

entonces $x^{q+1} = (x_1^{q+1}, \dots, x_m^{q+1})$ verifica que

$$x^{q+1}(t) = x^q(t) - S^{q+1}(t) \nabla F_p(x^q)(t)$$

donde $S^{q+1}(t)$ es una matriz diagonal $N \times N$ siendo la k -ésima componente

$$S_k^{q+1}(t) = \frac{1}{\sum_{a \in A} \frac{\omega_a |x_k^q(t) - a_k(t)|^{p-2}}{\|x^q - a\|_p^{p-1}}}.$$

Definición 2.2.2 Una función $x \in X_p$ se dice regular con respecto al Problema (1_p) si $x \notin S_p$.

Proposición 2.2.1 Sea x^* una solución óptima del Problema (1_p) con $p > 1$.

a) Si $x^q = x^*$ e.c.t. entonces $x^{q+1} = x^*$ e.c.t.

b) $x^q \notin S_p$ y $x^{q+1} = x^q$ e.c.t. entonces $x^q = x^*$ e.c.t.

La demostración es similar a la dada en el caso finito dimensional por Brimberg y Love (1993) y por ello no se incluye en esta memoria.

Proposición 2.2.2 (Propiedad descendente) Si $1 \leq p \leq 2$, y x^{q+1} y x^q no coinciden en casi todo entonces $F(x^{q+1}) < F(x^q)$.

Demostración:

Suponiendo que conocemos x^q , sabemos que

$$x_k^{q+1}(t) = \sum_{a \in A} \frac{\frac{\omega_a |x_k^q(t) - a_k(t)|^{p-2}}{\|x^q - a\|_p^{p-1}}}{\sum_{a \in A} \frac{\omega_a |x_k^q(t) - a_k(t)|^{p-2}}{\|x^q - a\|_p^{p-1}}} a_k(t).$$

Definimos $V(x^q) = \{k : x^q \notin H_k\}$. Para cada trayectoria dada $y_k \in L^p(I, \mathbb{R})$ y $k \in V(x^q)$ consideramos

$$g_k(y_k)(t) = \sum_{a \in A} \frac{\omega_a |x_k^q(t) - a_k(t)|^{p-2}}{\|x^q - a\|_p^{p-1}} (y_k(t) - a_k(t))^2.$$

g_k como función de y_k es estrictamente convexa y

$$\frac{\partial}{\partial y_k} g_k(y_k)(t) = 2 \sum_{a \in A} \frac{\omega_a |x_k^q(t) - a_k(t)|^{p-2}}{\|x^q - a\|_p^{p-1}} (y_k(t) - a_k(t)).$$

De esta forma, su mínimo se alcanza en

$$y_k(t) = \sum_{a \in A} \frac{\frac{\omega_a |x_k^q(t) - a_k(t)|^{p-2}}{\|x^q - a\|_p^{p-1}}}{\sum_{a \in A} \frac{\omega_a |x_k^q(t) - a_k(t)|^{p-2}}{\|x^q - a\|_p^{p-1}}} a_k(t)$$

y cuando t varía y_k coincide en casi todo con $x_k^{q+1} \forall k$. De esta forma, la función g_k es estrictamente convexa y alcanza su mínimo en x_k^{q+1} . Como x_k^{q+1} es el mínimo, entonces:

$$g_k(x_k^{q+1})(t) < g_k(x_k^q)(t) = \sum_{a \in A} \frac{\omega_a |x_k^q(t) - a_k(t)|^p}{\|x^q - a\|_p^{p-1}} \quad e.c.t. \quad (2.5)$$

Por otro lado, para $k \notin V(x^q)$ existe un conjunto $A_k(x^q)$, con $x_k^q(t) = a_k(t) \quad \forall t \in A_k(x^q)$ para algún $a \in A$. Con lo cual, si $t \in A_k(x^q) \quad x_k^{q+1}(t) = x_k^q(t)$. En este caso definimos para cada t

$$h_k(y)(t) = \begin{cases} \sum_{a \in A} \frac{\omega_a |y(t) - a_k(t)|^p}{\|x^q - a\|_p^{p-1}}, & t \in A_k(x^q) \\ g_k(y)(t), & t \notin A_k(x^q). \end{cases} \quad (2.6)$$

Ahora bien, para todo $k \in V(x^q)$ puesto $x_k^{q+1}(t) = x_k^q(t)$ cuando $t \in A_k(x^q)$ se tiene que

$$h_k(x_k^{q+1})(t) = h_k(x_k^q)(t) \quad t \in A_k(x^q)$$

y usando (2.5) y (2.6) para todo $t \notin A_k(x^q)$ se tiene que

$$h_k(x_k^{q+1})(t) < h_k(x_k^q)(t) \quad t \notin A_k(x^q).$$

De esta forma obtenemos que;

$$\begin{aligned} & \int_I \left(\sum_{k \in V(x^q)} g_k(x_k^{q+1})(t) + \sum_{k \notin V(x^q)} h_k(x_k^{q+1})(t) \right) dt \\ & < \int_I \left(\sum_{k \in V(x^q)} g_k(x_k^q)(t) + \sum_{k \notin V(x^q)} h_k(x_k^q)(t) \right) dt \\ & = \sum_{a \in A} \sum_{k=1}^m \omega_a \|x^q - a\|_p^{1-p} \int_I |x_k^q(t) - a_k(t)|^p dt \\ & = \sum_{a \in A} \omega_a \|x^q - a\|_p \\ & = F(x^q). \end{aligned} \quad (2.7)$$

La desigualdad estricta previamente obtenida se debe a la convexidad estricta de $g_k(\cdot)$, y al hecho de que alcance su mínimo en x_{k+1} . Además, se tiene que

$$\begin{aligned}
& \int_I \left(\sum_{k \in V(x^q)} g_k(x_k^{q+1})(t) + \sum_{k \notin V(x^q)} h_k(x_k^{q+1})(t) \right) dt \\
&= \int_I \left(\sum_{a \in A} \sum_{k \in V(x^q)} \frac{\omega_a |x_k^q(t) - a_k(t)|^{p-2}}{\|x^q - a\|_p^{p-1}} (x_k^{q+1}(t) - a_k(t))^2 \right) dt \\
&+ \int_{t \notin A_k(x^q)} \left(\sum_{a \in A} \sum_{k \notin V(x^q)} \frac{\omega_a |x_k^q(t) - a_k(t)|^{p-2}}{\|x^q - a\|_p^{p-1}} (x_k^{q+1}(t) - a_k(t))^2 \right) dt \\
&+ \int_{t \in A_k(x^q)} \left(\sum_{a \in A} \sum_{k \notin V(x^q)} \frac{\omega_a |x_k^{q+1}(t) - a_k(t)|^p}{\|x^q - a\|_p^{p-1}} \right) dt.
\end{aligned}$$

Si $k \notin V(x^q)$ y $t \in A_k(x^q)$ entonces tenemos que $x_k^q(t) = x_k^{q+1}(t)$.

Con lo cual, considerando la igualdad anterior obtenemos que;

$$\begin{aligned}
& \int_I \left(\sum_{k \in V(x^q)} g_k(x_k^{q+1})(t) + \sum_{k \notin V(x^q)} h_k(x_k^{q+1})(t) \right) dt \\
&= \int_I \left(\sum_{a \in A} \sum_{k=1}^m \omega_a \|x^q - a\|_p^{1-p} |x_k^q(t) - a_k(t)|^{p-2} (x_k^{q+1}(t) - a_k(t))^2 \right) dt.
\end{aligned}$$

Acotando la segunda parte de la igualdad, obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}
& \int_I \sum_{a \in A} \sum_{k=1}^m \omega_a \|x^q - a\|_p^{1-p} |x_k^q(t) - a_k(t)|^{p-2} (x_k^{q+1}(t) - a_k(t))^2 dt \\
&\geq \int_I \sum_{a \in A} \sum_{k=1}^m \omega_a \|x^q - a\|_p^{1-p} \left\{ \frac{p-2}{p} |x_k^q(t) - a_k(t)|^p + \frac{2}{p} |x_k^{q+1}(t) - a_k(t)|^p \right\} dt \quad (2.8) \\
&= \sum_{a \in A} \omega_a \left(1 - \frac{2}{p}\right) \|x^q - a\|_p + \frac{2}{p} \sum_{a \in A} \omega_a \|x^q - a\|_p^{1-p} \sum_{k=1}^m \int_I |x_k^{q+1}(t) - a_k(t)|^p dt \\
&\geq \sum_{a \in A} \omega_a \left(1 - \frac{2}{p}\right) \|x^q - a\|_p + \frac{2}{p} \sum_{a \in A} \omega_a \left[(1-p) \|x^q - a\|_p + p \|x^{q+1} - a\|_p \right] \quad (2.9) \\
&= -F(x^q) + 2F(x^{q+1}) \quad (2.10)
\end{aligned}$$

donde la misma desigualdad (ver Capítulo 1 en Beckenbach y Bellman (1965)) ha sido empleada en (2.8) y (2.9). De esta forma, de (2.7) y (2.10), obtenemos las siguientes desigualdades

$$-F(x^q) + 2F(x^{q+1}) < F(x^q) \quad 1 \leq p \leq 2$$

De aquí, obtenemos que

$$F(x^{q+1}) < F(x^q) \quad 1 \leq p \leq 2.$$

Con lo cual, hemos probado que nuestro algoritmo genera una sucesión descendente para $1 \leq p \leq 2$. \square

La validez de la desigualdad (2.8) requiere que $\frac{p-2}{2} \leq 2$, es decir, $p \leq 6$. De igual forma para la desigualdad (2.8) es necesario que $1 - p \leq 0$, es decir, $p \geq 1$.

Bajo las mismas hipótesis que en la Proposición 2.2.2 se obtienen los siguientes resultados.

Corolario 2.2.1 *La sucesión dada por $\{F(x^q)\}_{q \in \mathbb{N}}$ donde $\{x^q\}_{q \in \mathbb{N}}$ es una sucesión generada por la función ψ , es convergente para $p \in (1, 2]$.*

Proposición 2.2.3 *Para cualquier punto de arranque x_0 y $p \in (1, 2]$, la sucesión generada por el algoritmo, contiene al menos una subsucesión débilmente convergente.*

Demostración:

Puesto que se verifica que

$$\|x^q\|_p \leq \sum_{a \in A} \|a\|_p \quad \forall q \geq 1$$

la sucesión $\{x^q\}_{q \in \mathbb{N}}$ está acotada. Usando que cada conjunto acotado en X_p es débilmente secuencialmente compacto, ver Daniel (1971), se obtiene que la sucesión generada por la aplicación ψ contiene una subsucesión débilmente convergente. \square

2.2.3 La convergencia del algoritmo dinámico de Weiszfeld

En esta sección estudiaremos la convergencia del algoritmo propuesto para resolver el problema dinámico de Weber. Mostraremos que bajo determinadas hipótesis, para $p = 1$ y para $p = 2$, el esquema converge a una solución óptima del Problema (1_p) .

Además, veremos que para probar la convergencia para $p \in (1, 2)$ se necesitan hipótesis adicionales sobre las funciones de demanda, lo que demuestra la diferencia existente entre espacios finito e infinito dimensionales.

CASO $p = 1$ y $p = 2$

Lema 2.2.1 *El algoritmo dado por el esquema $x^q = \psi(x^{q-1})$ donde ψ fue definido en (2.2) es convergente para $p = 1$ y para $p = 2$.*

Demostración:

Caso $p = 1$

Este es un caso especial porque la norma en el espacio X_1 es no diferenciable. De esta forma, la ecuación de punto fijo obtenida para desarrollar el algoritmo de Weiszfeld no es necesariamente una condición de optimalidad. A pesar de eso, consideramos el esquema del algoritmo de Weiszfeld obtenido para $p > 1$. Es decir, el esquema viene dado por la siguiente expresión

$$x_k^{q+1}(t) = \sum_{a \in A} \frac{\omega_a |x_k^q(t) - a_k(t)|^{-1}}{\sum_{a \in A} \omega_a |x_k^q(t) - a_k(t)|^{-1}} a_k(t) \quad k = 1, \dots, m$$

Esta sucesión coincide con la sucesión generada por el algoritmo de Weiszfeld para el caso puntual y se sabe, por Brimberg y Love (1993), que el esquema es convergente en el caso puntual. Sea $x^*(t)$ el límite puntual, entonces se tiene que

1.

$$(x^q - x^*)(t) \rightarrow 0 \quad \text{para todo } t \in I.$$

2. Además

$$|x_k^q(t)| = \sum_{a \in A} \frac{\omega_a |x_k^q(t) - a_k(t)|^{-1}}{\sum_{a \in A} \omega_a |x_k^q(t) - a_k(t)|^{-1}} |a_k(t)| \leq \sum_{a \in A} |a_k(t)| \quad \forall k = 1, \dots, m.$$

Por tanto, debido a que $x^q(t)$ converge a $x^*(t)$ para todo $t \in I$, tenemos que $|x_k^*(t)| \leq \sum_{a \in A} |a_k(t)| \quad \forall k = 1, \dots, m$. De donde, podemos deducir que

$$|(x_k^q - x_k^*)(t)| \leq |x_k^q(t)| + |x_k^*(t)| \leq 2 \sum_{a \in A} |a_k(t)| \quad \forall k.$$

Con lo cual podemos usar el teorema de la convergencia dominada, obteniéndose que x^* es también el límite de la sucesión considerada en la topología fuerte del espacio X_1 .

Caso $p = 2$

La sucesión generada por el algoritmo para $p = 2$ viene dada por

$$x^{q+1}(t) = \sum_{a \in A} \frac{\frac{\omega_a}{\|x^q - a\|_2}}{\sum_{a \in A} \frac{\omega_a}{\|x^q - a\|_2}} a(t).$$

De esta forma, se sigue que $\{x^q\} \subset \text{aff}\{A\}$, donde $\text{aff}\{A\}$ es la variedad lineal afín generada por los elementos de A . Puesto que en nuestro caso la variedad está generada por un número finito de elementos entonces $\dim(\text{aff}\{A\}) < \infty$.

Por tanto, por la Proposición 2.2.3 la sucesión $\{x^q\}_{q \in \mathbb{N}}$ contiene una subsucesión débilmente convergente y está incluida en una variedad lineal de dimensión finita deducimos que dicha subsucesión es fuertemente convergente.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x^{k+1} \neq x^k$ para todo k . Veamos que toda la sucesión es convergente, para ello, razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que la sucesión $\{x^q\}$ tiene dos puntos de acumulación $p_1 \neq p_2$. Podemos considerar una bola B_1 , centrada en p_1 tal que $p_2 \notin B_1$. Además, podemos elegir una subsucesión $\{x^{n_k}\}_{k \geq 1}$ verificando:

1. $x^{n_k} \rightarrow p_1$
2. $x^{n_k+1} = \psi(x^{n_k}) \notin B_1$ para todo $k \geq 1$,

ya que en caso contrario p_2 no sería un punto de acumulación diferente de p_1 .

La subsucesión $\{\psi(x^{n_k})\}_{k \geq 1}$ tiene un límite porque bajo estas hipótesis ψ es una función continua. Además, este límite es igual a $\psi(p_1)$. Puesto que la sucesión completa $\{\psi(x^{n_k})\}_{k \geq 1}$ no pertenece a B_1 entonces $\psi(p_1)$ no pertenece a $\text{int}(B_1)$. De esta forma $\psi(p_1) \notin B_1$, por lo que $\psi(p_1) \neq p_1$, entonces aplicando la Proposición 2.2.2 se tiene que $F(\psi(p_1)) < F(p_1)$.

Sin embargo, tenemos que

$$x^{n_k} \neq \psi(x^{n_k}) \text{ y } \psi(x^{n_k}) \neq x^{n_{k+1}}$$

Aplicando la Proposición 2.2.2, obtenemos que

$$F(x^{n_k}) > F(\psi(x^{n_k})) = F(x^{n_{k+1}}) > F(x^{n_{k+1}})$$

tomando límites cuando k tiende a infinito

$$F(p_1) \geq F(\psi(p_1)) \geq F(p_1)$$

lo que implica que $F(p_1) = F(\psi(p_1))$, que contradice el hecho de que $F(p_1) > F(\psi(p_1))$.

□

Teorema 2.2.3 *Sea $\{x^q\}_{q \in \mathbb{N}}$ una sucesión regular generada por el algoritmo para $p = 1$ o 2 cuyos límites no coinciden con una función de demanda en casi todo. Entonces $\{x^q\}_{q \in \mathbb{N}}$ converge a una solución óptima del Problema (1_p) .*

Demostración:

Puesto que para $p = 1$ las iteraciones de la adaptación del algoritmo de Weiszfeld son las mismas que en el caso puntual (ver Lema 2.2.1) se obtiene directamente la convergencia de los resultados de convergencia en Brimberg y Love (1993). Para $p = 2$, usando de nuevo el Lema 2.2.1 la sucesión generada por el algoritmo converge bajo estas hipótesis. Sea x^* dicho límite, entonces se tiene que;

$$x^* = \lim_{q \rightarrow \infty} x^q = \lim_{q \rightarrow \infty} x^{q+1} = \psi(\lim_{q \rightarrow \infty} x^q) = \psi(x^*).$$

Como hemos supuesto que $x^* \notin A$, entonces $x^* - \psi(x^*) = 0$ es equivalente a que la derivada Gateaux de F en x^* en la dirección h sea igual a cero para cualquier $h \in Y_2$. Es decir,

$$\nabla F(x^*, h) = 0 \quad \forall h \in Y_2.$$

De esta forma, x^* es una solución óptima.

□

En cuanto a la regularidad de las soluciones óptimas generadas por el método para $p = 2$, hemos de puntualizar que dichas soluciones tienen las mismas propiedades que las funciones de demanda, dado que pertenecen a la variedad lineal afín generada por esas funciones de demanda.

CASO $p \in (1, 2)$

En la sección previa hemos probado la convergencia del algoritmo dinámico de Weiszfeld para $p = 1$ y para $p = 2$. La demostración para $p = 2$ está basada en el hecho de que podemos obtener una subsucesión convergente de la sucesión generada por la adaptación del algoritmo de Weiszfeld a este problema. Sin embargo, si $p \in (1, 2)$ esta solución no es posible. Por esta razón, necesitamos imponer condiciones adicionales sobre las funciones de demanda que nos permitan obtener la convergencia del algoritmo en este caso. Para ello, vamos a considerar los espacios de Sobolev denotados por $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$ (véase el Apéndice donde se hace una descripción de los mismos).

Lema 2.2.2 *Si cada función del conjunto A de funciones de demanda está acotada e incluida en $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$, la función de arranque $x^0 \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$ y $x^{q-1} \notin S_p$ entonces $x^q = \psi(x^{q-1})$ está incluido en $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$.*

Demostración:

En primer lugar, recordamos que ψ fue definido en (2.2) como

$$\psi(x)(t) = \sum_{a \in A} \varphi_{a,x}(t) a(t)$$

donde

$$\varphi_{a,x}(t) = \frac{\omega_a \|x - a\|^{1-p} |x(t) - a(t)|^{p-2}}{\sum_{a \in A} \omega_a \|x - a\|^{1-p} |x(t) - a(t)|^{p-2}}.$$

Con lo cual para probar que la sucesión generada por el algoritmo está incluida en $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$ es suficiente probar que $\psi(x)$ y $\psi'(x)$ pertenecen a X_p para todo $x \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m) \setminus S_p$.

Puesto que $0 \leq \varphi_{a,x}(t) \leq 1$ para todo t , se tiene que $\psi(x)$ está acotada por la función $\sum_{a \in A} a$ la cual pertenece a X_p , por tanto, $\psi(x) \in X_p \forall x \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m) \setminus S_p$. Veamos que $\psi'(x) \in X_p \forall x \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m) \setminus S_p$. Sabemos que

$$\psi'(x)(t) = \sum_{a \in A} \varphi'_{a,x}(t)a(t) + \sum_{a \in A} \varphi_{a,x}(t)a'(t)$$

Debido a que $0 \leq \varphi_{a,x}(t) \leq 1$ y que $a \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$ se tiene que $\sum_{a \in A} \varphi_{a,x}(t)a'(t) \in X_p$. Ahora bien, debido a que todo $a \in A$ está acotada, para probar que $\sum_{a \in A} \varphi'_{a,x}(t)a(t) \in X_p$ sólo tenemos que probar que $\sum_{a \in A} \varphi'_{a,x}(t) \in X_p$, para ello, calculamos $\varphi'_{a,x}(\cdot)$.

Para simplificar la notación introducimos los siguientes elementos

$$\begin{aligned} h_{a,x}(t) &:= |x(t) - a(t)|^{p-2} \\ q_{a,x} &:= \omega_a \|x - a\|_p^{1-p} \\ c_x(t) &:= \left(\sum_{a \in A} q_{a,x} h_{a,x}(t) \right)^2. \end{aligned}$$

De esta forma podemos escribir $\varphi'_{a,x}$ del siguiente modo

$$\varphi'_{a,x}(t) = \frac{q_{a,x} h'_{a,x}(t) \sum_{b \in A} q_{b,x} h_{b,x}(t) - q_{a,x} h_{a,x}(t) \sum_{b \in A} q_{b,x} h'_{b,x}(t)}{c_x(t)}$$

Observamos que $\sum_{a \in A} \varphi'_{a,x}(t) = 0$, de donde se deduce el resultado. □

A continuación estudiaremos la convergencia del algoritmo propuesto para la resolución del problema dinámico de Weber. Para ello, hemos de hacer notar que la sucesión generada por el algoritmo está acotada, por tanto, sabemos que contiene una subsucesión débilmente convergente en X_p , sin embargo, este resultado no es suficiente para asegurar la convergencia fuerte de dicha sucesión. De esta forma, para obtener la convergencia global de este proceso iterado para $p \in (1, 2)$ haremos la hipótesis adicional de que la función de arranque pertenece al espacio de Sobolev $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$.

Teorema 2.2.4 *Si cada función de demanda $a \in A$ pertenece a $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$ y está acotada, la función de arranque en el algoritmo también pertenece a $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$ y la*

sucesión generada por el algoritmo y su límite son funciones regulares para $p \in (1, 2)$, entonces se tiene que dicha sucesión converge a una solución óptima del Problema (1_p) para $p \in (1, 2)$.

Demostración:

Hemos probado que la sucesión generada por el algoritmo está acotada. Por el Lema 2.2.2 se tiene que está incluida en el espacio de Sobolev $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$, de donde se deduce usando el Lema 2.5.1 apartado ii) (del Apéndice), que existe una subsucesión fuertemente convergente en X_p . Además, por la Proposición 2.2.2, la sucesión generada por el algoritmo es descendente, con lo cual, usando un razonamiento análogo al realizado para el caso $p = 2$, obtenemos que la sucesión completa es convergente y su límite es la solución óptima del Problema (1_p) . \square

A continuación, mostramos un ejemplo que ilustra el uso de la adaptación del algoritmo de Weiszfeld al problema dinámico de Weber. Además, se muestra que la aplicación puntual del algoritmo clásico de Weiszfeld en cada punto no proporciona la solución óptima del problema dinámico de Weber. Denotamos por $\chi_I(t)$ la función indicador del intervalo I , es decir,

$$\chi_I(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in I \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (2.11)$$

Ejemplo 2.2.1 Consideramos el espacio $X_2 = L^2([0, 5], \mathbb{R}^2)$. En este espacio consideramos las siguientes funciones de demanda

$$\begin{aligned} a_1(t) &= (0, 0) \chi_{(0,2)}(t) + (5, 4) \chi_{(2,5)}(t) \\ a_2(t) &= (4, 0) \chi_{(0,2)}(t) + (1, 2) \chi_{(2,5)}(t) \\ a_3(t) &= (2, 4) \chi_{(0,2)}(t) + (7, 3) \chi_{(2,5)}(t) \end{aligned}$$

y los pesos

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{2}{5} \quad \omega_3 = \frac{1}{5}.$$

Usamos para resolver este problema la adaptación que hemos desarrollado del algoritmo de Weiszfeld con la función de arranque

$$x_o(t) = (2, 0.5) \chi_{(0,2)}(t) + (4, 3.5) \chi_{(2,5)}(t).$$

La Tabla 2.1 muestra las iteraciones del algoritmo. La columna *It.* da el número de iteraciones; la columna *Funciones* da la función en cada iteración y la columna *Objetivo* da el valor de la función objetivo del problema en la correspondiente iteración.

Un total de 139 iteraciones fueron necesarias para obtener una solución óptima. En la parte izquierda de la tabla podemos ver las 28 primeras iteraciones y en la parte derecha mostramos las 28 últimas iteraciones. Observamos que la solución óptima es $(0.614988, 0.285896) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.69251) \chi_{(2,5)}(t)$ y su valor objetivo es 5.29298.

Por otro lado, también hemos resuelto el problema puntualmente. Es decir, hemos resuelto el problema usando el algoritmo de Weiszfeld en cada punto del intervalo $[0, 5]$. Debido a que estamos considerando funciones escalonadas con un salto como funciones de demanda, sólo tenemos que resolver dos problemas de Weber diferentes. Uno teniendo como puntos de demanda $(0, 0)$, $(4, 0)$ y $(2, 4)$ y otro con $(5, 4)$, $(1, 2)$ y $(7, 3)$. Las Tablas 2.2 y 2.3 muestran las iteraciones de estos dos problemas, usando como puntos de arranque los puntos $(2, 0)$ y $(4, 3)$, respectivamente.

La solución obtenida después de la aplicación de este procedimiento es $(2, 0.516398) \chi_{(0,2)} + (5, 4) \chi_{(2,5)}$ y el valor objetivo en esta función es 5.73320.

La comparación de este valor con 5.29298 (el valor objetivo de la solución obtenido previamente) muestra que la adaptación del algoritmo de Weiszfeld no puede ser considerada como una extensión trivial del caso puntual, ya que dicha extensión no funciona ni en un ejemplo tan simple como el tratado.

It.	Funciones	Objetivo	It.	Funciones	Objetivo
1	$(1.3358, 0.515323) \chi_{(0,2)}(t) + (4.17952, 3.3321) \chi_{(2,5)}(t)$	5.33666	112	$(0.614993, 0.285898) \chi_{(0,2)}(t) + 4.6709, 3.6925) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
2	$(1.22076, 0.492286) \chi_{(0,2)}(t) + (4.27153, 3.38962) \chi_{(2,5)}(t)$	5.3233	113	$(0.614993, 0.285898) \chi_{(0,2)}(t) + 4.67091, 3.6925) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
3	$(1.12804, 0.46992) \chi_{(0,2)}(t) + (4.34188, 3.43598) \chi_{(2,5)}(t)$	5.31443	114	$(0.614992, 0.285898) \chi_{(0,2)}(t) + 4.67091, 3.6925) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
4	$(1.05272, 0.448851) \chi_{(0,2)}(t) + (4.39613, 3.47364) \chi_{(2,5)}(t)$	5.30842	115	$(0.614992, 0.285897) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.6925) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
5	$(0.991041, 0.429736) \chi_{(0,2)}(t) + (4.4387, 3.50448) \chi_{(2,5)}(t)$	5.30428	116	$(0.614992, 0.285897) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.6925) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
6	$(0.940075, 0.41278) \chi_{(0,2)}(t) + (4.47271, 3.52996) \chi_{(2,5)}(t)$	5.30137	117	$(0.614991, 0.285897) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.6925) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
7	$(0.897583, 0.397911) \chi_{(0,2)}(t) + (4.50033, 3.55121) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29928	118	$(0.614991, 0.285897) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.6925) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
8	$(0.861848, 0.384934) \chi_{(0,2)}(t) + (4.52309, 3.56908) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29777	119	$(0.61499, 0.285897) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.6925) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
9	$(0.831556, 0.373619) \chi_{(0,2)}(t) + (4.54206, 3.58422) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29665	120	$(0.61499, 0.285897) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.6925) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
10	$(0.805691, 0.363746) \chi_{(0,2)}(t) + (4.55806, 3.59715) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29582	121	$(0.61499, 0.285897) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.69251) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
11	$(0.783464, 0.355114) \chi_{(0,2)}(t) + (4.57165, 3.60827) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29519	122	$(0.61499, 0.285897) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.69251) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
12	$(0.764254, 0.347549) \chi_{(0,2)}(t) + (4.58329, 3.61787) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29471	123	$(0.61499, 0.285896) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.69251) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
13	$(0.747566, 0.340902) \chi_{(0,2)}(t) + (4.59334, 3.62622) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29434	124	$(0.614989, 0.285896) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.69251) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
14	$(0.733005, 0.335046) \chi_{(0,2)}(t) + (4.60204, 3.6335) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29406	125	$(0.614989, 0.285896) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.69251) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
15	$(0.720247, 0.329875) \chi_{(0,2)}(t) + (4.60963, 3.63988) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29384	126	$(0.614989, 0.285896) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.69251) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
16	$(0.70903, 0.325299) \chi_{(0,2)}(t) + (4.61627, 3.64549) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29366	127	$(0.614989, 0.285896) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.69251) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
17	$(0.699136, 0.321239) \chi_{(0,2)}(t) + (4.6221, 3.65043) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29352	128	$(0.614989, 0.285896) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.69251) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
18	$(0.690385, 0.31763) \chi_{(0,2)}(t) + (4.62724, 3.65481) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29342	129	$(0.614989, 0.285896) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.69251) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
19	$(0.682626, 0.314416) \chi_{(0,2)}(t) + (4.63179, 3.65869) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29333	130	$(0.614989, 0.285896) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.69251) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
20	$(0.67573, 0.31155) \chi_{(0,2)}(t) + (4.63582, 3.66214) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29326	131	$(0.614989, 0.285896) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.69251) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
21	$(0.669589, 0.308989) \chi_{(0,2)}(t) + (4.6394, 3.66521) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29321	132	$(0.614989, 0.285896) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.69251) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
22	$(0.664111, 0.306698) \chi_{(0,2)}(t) + (4.64259, 3.66794) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29316	133	$(0.614989, 0.285896) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.69251) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
23	$(0.659217, 0.304646) \chi_{(0,2)}(t) + (4.64543, 3.67039) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29313	134	$(0.614989, 0.285896) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.69251) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
24	$(0.654837, 0.302806) \chi_{(0,2)}(t) + (4.64797, 3.67258) \chi_{(2,5)}(t)$	5.2931	135	$(0.614989, 0.285896) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.69251) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
25	$(0.650913, 0.301155) \chi_{(0,2)}(t) + (4.65024, 3.67454) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29308	136	$(0.614989, 0.285896) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.69251) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
26	$(0.647394, 0.299671) \chi_{(0,2)}(t) + (4.65228, 3.6763) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29306	137	$(0.614988, 0.285896) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.69251) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
27	$(0.644234, 0.298336) \chi_{(0,2)}(t) + (4.6541, 3.67788) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29304	138	$(0.614988, 0.285896) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.69251) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298
28	$(0.641393, 0.297135) \chi_{(0,2)}(t) + (4.65574, 3.6793) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29303	139	$(0.614988, 0.285896) \chi_{(0,2)}(t) + (4.67091, 3.69251) \chi_{(2,5)}(t)$	5.29298

Table 2.1: Iteraciones de la adaptacin del algoritmo de Weiszfeld

It.	Funciones	Objetivo
1	(2., 0.503666)	2.34922
2	(2., 0.514076)	2.34919
3	(2., 0.515972)	2.34919
4	(2., 0.51632)	2.34919
5	(2., 0.516383)	2.34919
6	(2., 0.516395)	2.34919
7	(2., 0.516397)	2.34919
8	(2., 0.516398)	2.34919
9	(2., 0.516398)	2.34919
10	(2., 0.516398)	2.34919
11	(2., 0.516398)	2.34919
12	(2., 0.516398)	2.34919
13	(2., 0.516398)	2.34919
14	(2., 0.516398)	2.34919

Tabla 2.2: Iteraciones del algoritmo de Weiszfeld para los puntos en (0,2)

2.3 Un algoritmo convergente para un problema general de localización dinámica

En la sección anterior hemos tratado una extensión del problema de Weber que hemos denominado problema de Weber dinámico. Para la resolución de este problema hemos desarrollado un algoritmo que genera una sucesión convergente en el caso que dicha sucesión sea regular. Ahora en esta sección vamos a formular un problema con una función objetivo más general que nos permitirá modelar un mayor número de situaciones reales. El procedimiento que vamos a seguir se basa en la obtención de las soluciones óptimas de unos problemas aproximados cuya función objetivo será totalmente diferenciable. Hemos de hacer notar, que esta formulación incluirá como caso particular el problema dinámico de Weber, y que del procedimiento desarrollado para su resolución se obtendrá un algoritmo que garantizará que todo punto de acumulación de la sucesión generada por dicho algoritmo será una solución óptima del problema dinámico de Weber, aun en el caso de que dicha sucesión no sea regular.

De esta forma, al igual que en la sección anterior consideraremos el espacio normado $X_p = L^p(I, \mathbb{R}^m)$ con la norma $\|x\|_p = \left(\int_I \sum_{k=1}^m |x_k(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$ donde I es un intervalo acotado. Dado un conjunto finito $A \subseteq X_p$ y una función continuamente diferenciable $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ con $\mathbb{R}_+^{|A|} \subset S$ consideramos el siguiente problema de optimización

$$\inf_{x \in X_p} f_0(x) := g(d(x)) \quad (2.12)$$

donde $d(x) = \left(\|x - a\|_p \right)_{a \in A}$. A esta formulación la denominamos problema dinámico generalizado de Weber.

Observemos que esta formulación incluye el problema clásico de Weber en un espacio finito dimensional (Brimberg y Love (1993), Frenk et al. (1994)), y el problema dinámico de Weber (Problema (1_p)), para lo que basta tomar la función g como la suma de las componentes del vector distancia $d(x)$ (ver Puerto y Rodríguez-Chía (1995)).

La no diferenciablez de la función objetivo f_0 en las funciones de demanda

It.	Funciones	Objetivo	It.	Funciones	Objetivo
1	(4.44796, 3.47534)	2.32396	30	(4.99952, 3.99928)	2.23613
2	(4.61555, 3.59042)	2.29595	31	(4.99961, 3.99942)	2.23612
3	(4.72927, 3.68265)	2.2776	32	(4.99969, 3.99953)	2.23611
4	(4.80511, 3.75471)	2.2656	33	(4.99975, 3.99962)	2.2361
5	(4.85635, 3.81)	2.25759	34	(4.9998, 3.9997)	2.2361
6	(4.89194, 3.85215)	2.25208	35	(4.99984, 3.99976)	2.23609
7	(4.91742, 3.88433)	2.24818	36	(4.99987, 3.9998)	2.23609
8	(4.93613, 3.90904)	2.24536	37	(4.99989, 3.99984)	2.23608
9	(4.95015, 3.92814)	2.24326	38	(4.99991, 3.99987)	2.23608
10	(4.96082, 3.94302)	2.24169	39	(4.99993, 3.9999)	2.23608
11	(4.96904, 3.95467)	2.24049	40	(4.99994, 3.99992)	2.23608
12	(4.97544, 3.96385)	2.23956	41	(4.99996, 3.99993)	2.23607
13	(4.98045, 3.9711)	2.23884	42	(4.99996, 3.99995)	2.23607
14	(4.98439, 3.97687)	2.23827	43	(4.99997, 3.99996)	2.23607
15	(4.98752, 3.98146)	2.23783	44	(4.99998, 3.99996)	2.23607
16	(4.99, 3.98512)	2.23748	45	(4.99998, 3.99997)	2.23607
17	(4.99198, 3.98804)	2.2372	46	(4.99998, 3.99998)	2.23607
18	(4.99356, 3.99039)	2.23697	47	(4.99999, 3.99998)	2.23607
19	(4.99483, 3.99227)	2.23679	48	(4.99999, 3.99999)	2.23607
20	(4.99584, 3.99378)	2.23665	49	(4.99999, 3.99999)	2.23607
21	(4.99665, 3.99499)	2.23654	50	(4.99999, 3.99999)	2.23607
22	(4.99731, 3.99597)	2.23645	51	(4.99999, 3.99999)	2.23607
23	(4.99783, 3.99675)	2.23637	52	(5., 3.99999)	2.23607
24	(4.99825, 3.99738)	2.23631	53	(5., 3.99999)	2.23607
25	(4.99859, 3.99789)	2.23626	54	(5., 4.)	2.23607
26	(4.99887, 3.9983)	2.23623	55	(5., 4.)	2.23607
27	(4.99909, 3.99863)	2.2362	56	(5., 4.)	2.23607
28	(4.99926, 3.9989)	2.23617	57	(5., 4.)	2.23607
29	(4.99941, 3.99911)	2.23615	58	(5., 4.)	2.23607

Tabla 2.3: Iteraciones del algoritmo de Weiszfeld para los puntos en (2,5)

nos obliga a considerar un problema de optimización alternativo, similar al sugerido por Eyster et al. (1973), que denominamos aproximación hiperbólica. Este problema consiste en reemplazar cada vector $v = (v_1, \dots, v_m) \in X_p$ por $\xi_\varepsilon(v) = \left((v_1^2 + \varepsilon^2 \chi_I)^{\frac{1}{2}}, \dots, (v_m^2 + \varepsilon^2 \chi_I)^{\frac{1}{2}} \right)$ con $\varepsilon > 0$ y $\chi_I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida en (2.11). Obteniéndose la siguiente formulación del problema;

$$\inf_{x \in X_p} f_\varepsilon(x) := g(d_\varepsilon(x)) \quad (2.13)$$

donde $d_\varepsilon(x) = \left(\|\xi_\varepsilon(x - a)\|_p \right)_{a \in A}$.

Usaremos el Problema (2.13) para obtener la solución del Problema (2.12) por medio de un proceso iterativo. Debido a que la función objetivo f_ε es diferenciable en casi todo (e.c.t.) se puede obtener una solución óptima x_ε^* para (2.13) usando la condición necesaria $\nabla f_\varepsilon(x_\varepsilon^*) = 0$.

Una vez que el problema ha sido formulado, nuestro primer paso es obtener condiciones suficientes que aseguren que los Problemas (2.12) y (2.13) estén bien definidos, y que sus conjuntos de soluciones óptimas estén incluidos en el espacio considerado.

El primer resultado de esta sección es un teorema de localización que nos da una cota superior de la norma de las soluciones óptimas de (2.12) y (2.13).

Lema 2.3.1 *Si x^* es una solución óptima del Problema (2.12) o (2.13) entonces*

$$\|x^*\|_p \leq 2 \max_{a \in A} \|a\|_p + 1$$

Demostración:

Sin pérdida de generalidad, consideramos el Problema (2.13) con $\varepsilon < \min \left\{ 1, \frac{1}{m(I)^{\frac{1}{p}}} \right\}$. Debido a que g es una función creciente en sus componentes, si x^* es una solución óptima no existe $y \in X_p$ tal que $\|\xi_\varepsilon(y - a)\|_p < \|\xi_\varepsilon(x^* - a)\|_p \quad \forall a \in A$. Entonces, $\forall y \in X_p, \exists a \in A$, tal que $\|\xi_\varepsilon(x^* - a)\|_p \leq \|\xi_\varepsilon(y - a)\|_p$. Por tanto, para $y = 0$ tenemos que

$$\|\xi_\varepsilon(x^* - a)\|_p \leq \|\xi_\varepsilon(a)\|_p \quad \text{para algún } a \in A.$$

De aquí,

$$\|x^*\|_p - \|a\|_p \leq \|\xi_\varepsilon(x^* - a)\|_p \leq \|a\|_p + \varepsilon m(I)^{\frac{1}{p}} \quad \forall \varepsilon < \min \left\{ 1, \frac{1}{m(I)^{\frac{1}{p}}} \right\}$$

y por tanto

$$\|x^*\|_p \leq 2 \max_{a \in A} \|a\|_p + 1.$$

Por lo tanto, cualquier solución óptima del Problema (2.13) está incluido en el conjunto

$$C_p = \{y \in X_p : \|y\|_p \leq 2 \max_{a \in A} \|a\|_p + 1\}. \quad (2.14)$$

Observemos que la misma demostración se obtiene tomando $\varepsilon = 0$, si consideramos el Problema (2.12). \square

Este lema nos lleva a probar un teorema que establece la existencia de soluciones óptimas para los Problemas (2.12) y (2.13).

Teorema 2.3.1 *Los Problemas (2.12) y (2.13) tienen soluciones óptimas en $L^p(I, \mathbb{R}^m)$ para cualquier $p \in (1, +\infty)$.*

Demostración:

En efecto, f y f_ε son funciones continuas y convexas definidas sobre X_p cuyo conjunto de soluciones óptimas están incluidas en el conjunto C_p (introducido en (2.14)). Debido a que C_p es un conjunto convexo, cerrado y acotado, la Proposición 38.12 en Ekeland et al. (1979), asegura que ambos problemas tienen soluciones óptimas. \square

Hemos de hacer notar que a partir del teorema anterior podemos reemplazar los símbolos “inf” por “min” en los problemas considerados.

Por otro lado, cualquier solución óptima de (2.13) tiene que pertenecer al conjunto

$$\Gamma_{f_\varepsilon} = \{x \in X_p : \nabla f_\varepsilon(x) = 0\} \quad (2.15)$$

porque f_ε es diferenciable en casi todo. En lo que sigue, buscaremos una condición suficiente de unicidad para el Problema (2.13). Para desarrollar tal condición probamos un lema previo.

Lema 2.3.2 *La función $\|\xi_\varepsilon(y - a)\|_p$ es estrictamente convexa para todo $a \in A$ y para cualquier $p \in (1, +\infty)$.*

Demostración:

En efecto, $\|\cdot\|_p$ es una función estrictamente convexa para cualquier $p \in (1, +\infty)$. Además, $\xi_\varepsilon(\cdot - a)$ es un vector cuyas componentes son funciones convexas. De esta forma, la función compuesta $\|\xi_\varepsilon(\cdot - a)\|_p$ es convexa. Para probar la convexidad estricta tenemos que probar que las componentes de $\xi_\varepsilon(\cdot - a)$ son funciones estrictamente convexas. Se sabe que, para cada $t \in I$ y cualquier $y \in X_p$

$$\xi_\varepsilon(y - a)(t) = \left(\left\| \left(y_1(t) - a_1(t), \varepsilon \chi_I(t) \right) \right\|_2, \dots, \left\| \left(y_m(t) - a_m(t), \varepsilon \chi_I(t) \right) \right\|_2 \right)$$

donde $\|\cdot\|_2$ es la norma l_2 en \mathbb{R}^2 .

Para ello, razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que no es estrictamente convexa, entonces existe $x, y \in X_p$ con $x(t) \neq y(t)$ e.c.t. tal que la siguiente ecuación se tiene en casi todo, para todo k ,

$$\left\| \left(\theta x_k(t) + (1 - \theta)y_k(t) - a_k(t), \varepsilon \chi_I(t) \right) \right\|_2 = \theta \left\| \left(x_k(t) - a_k(t), \varepsilon \chi_I(t) \right) \right\|_2 + (1 - \theta) \left\| \left(y_k(t) - a_k(t), \varepsilon \chi_I(t) \right) \right\|_2$$

Esta ecuación implica la condición que hace que la desigualdad de Minkowski se haga igualdad, ver Spivak (1970), es decir, debe existir $\lambda \in \mathbb{R}$ verificando la siguiente expresión

$$\left(\theta(x_k(t) - a_k(t)), \theta\varepsilon \right) = \lambda \left((1 - \theta)(y_k(t) - a_k(t)), (1 - \theta)\varepsilon \right) \quad \forall t \in I. \quad (2.16)$$

De la igualdad de las segundas componentes en (2.16) obtenemos que

$$\lambda = \frac{\theta}{1 - \theta},$$

y de la igualdad de las primeras componentes que

$$x_k(t) - a_k(t) = y_k(t) - a_k(t) \quad (\text{e.c.t.}) \text{ y para cualquier } 1 \leq k \leq m,$$

por lo que

$$x(t) = y(t) \quad (\text{e.c.t.}).$$

Hecho que está en contradicción con las hipótesis del lema. \square

El resultado de unicidad viene dado en el siguiente resultado.

Teorema 2.3.2 *Si la función $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ es cuasiconvexa, creciente y continuamente diferenciable en \mathbb{R}_+^m entonces Γ_{f_ε} , definido en (2.15), sólo contiene la única solución óptima del Problema (2.13).*

Demostración:

El Lema 2.3.2 junto con el Teorema 3.3.3. de Bazaraa y Shetty (1979) implican que la función $d_{\varepsilon,a}(x) := \|\xi_\varepsilon(x - a)\|_p$ verifica que

$$d_{\varepsilon,a}(x + h) - d_{\varepsilon,a}(x) > \langle \nabla d_{\varepsilon,a}(x), h \rangle \quad \forall a \in A \quad \forall h \in X_p; \quad (2.17)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ está definido en el Apéndice.

Consideremos $\bar{x} \in \Gamma_{f_\varepsilon}$, entonces la derivada direccional de f_ε en \bar{x} en la dirección h , $f'_\varepsilon(\bar{x}, h)$, verifica que

$$0 = f'_\varepsilon(\bar{x}, h) = \sum_{a \in A} \frac{\partial g}{\partial z_a}(d_\varepsilon(\bar{x})) \langle \nabla d_{\varepsilon,a}(\bar{x}), h \rangle \quad \forall h \in X_p.$$

Usando la desigualdad (2.17) y el hecho de que g es creciente se obtiene que

$$0 < \sum_{a \in A} \frac{\partial g}{\partial z_a}(d_\varepsilon(\bar{x})) \left(d_{\varepsilon,a}(\bar{x} + h) - d_{\varepsilon,a}(\bar{x}) \right) \quad \forall h \in X_p.$$

Esto implica por la cuasiconvexidad de g y el Teorema 3.5.4 de Bazaraa y Shetty (1979) que

$$f_\varepsilon(\bar{x} + h) > f_\varepsilon(\bar{x}) \quad \forall h \in X_p$$

lo que nos lleva a que \bar{x} es la única solución del Problema (2.13). \square

Nótese que los mismos resultados pueden obtenerse bajo hipótesis menos restrictivas, por ejemplo, sería suficiente que g fuera no decreciente en al menos una componente.

2.3.1 El algoritmo dinámico hiperbólico de Weiszfeld

El objetivo de este apartado va a ser el de desarrollar un algoritmo para resolver el Problema (2.13), consistente en la adaptación hiperbólica del algoritmo de Weiszfeld al problema dinámico generalizado. Este algoritmo se basa en la condición necesaria $\nabla f_\varepsilon(x_\varepsilon^*) = 0$ para que x_ε^* sea una solución óptima de (2.13). Hemos de hacer notar que en este caso la condición necesaria es también suficiente por el Teorema 2.3.2 y puede ser escrita como:

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_k}(x; h) = 0 \quad k = 1, \dots, m \quad \forall h \in X_p \quad p > 1$$

donde $\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(x; h)$ denota la diferencial Gateaux en x en la dirección h .

Equivalentemente, esta derivada puede ser escrita para un k particular con $1 \leq k \leq m$, como

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial z_a}(d_\varepsilon(x)) \|\xi_\varepsilon(x-a)\|_p^{1-p} \left(\int_I \xi_{\varepsilon,k}(x-a)(t)^{p-2} (x_k(t) - a_k(t)) h_k(t) dt \right) = 0$$

para todo $p > 1$ y para todo $h \in X_p$.

Usando la completitud de X_p , se tiene la siguiente expresión,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial z_a}(d_\varepsilon(x)) \|\xi_\varepsilon(x-a)\|_p^{1-p} \xi_{\varepsilon,k}(x-a)(t)^{p-2} (x_k(t) - a_k(t)) = 0 \quad \forall p > 1 \quad \forall k = 1, \dots, m.$$

De aquí, se obtiene un proceso iterativo por medio de la ecuación de punto fijo, $T_\varepsilon(x) = x$; donde $T_\varepsilon(x) = (T_{\varepsilon,1}(x), \dots, T_{\varepsilon,m}(x))$ viene dado por

$$T_{\varepsilon,k}(x)(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial g}{\partial z_a}(d_\varepsilon(x)) \|\xi_\varepsilon(x-a)\|_p^{1-p} \xi_{\varepsilon,k}(x-a)(t)^{p-2}}{\sum_{b \in A} \frac{\partial g}{\partial z_b}(d_\varepsilon(x)) \|\xi_\varepsilon(x-b)\|_p^{1-p} \xi_{\varepsilon,k}(x-b)(t)^{p-2}} a_k(t) \quad \forall k = 1, \dots, m. \quad (2.18)$$

La aplicación T_ε está bien definida porque, $\xi_{\varepsilon,k}(x-a)(t) > 0 \quad \forall a \in A, \quad \forall k = 1, \dots, m$ y para cualquier $t \in I$. Además, $\|\xi_\varepsilon(x-a)\|_p^{1-p} > 0$ y $\frac{\partial g}{\partial z_a}(d_\varepsilon(x)) > 0$ para cualquier $a \in A$ porque g es una función creciente. De esta forma, si consideramos la

ecuación de punto fijo $T_\varepsilon(x) = x$ con $x \in X_p$, obtenemos el siguiente esquema iterativo.

$$x_k^{q+1}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial g}{\partial z_a}(d_\varepsilon(x)) \|\xi_\varepsilon(x-a)\|_p^{1-p} \xi_{\varepsilon,k}(x-a)(t)^{p-2}}{\sum_{b \in A} \frac{\partial g}{\partial z_b}(d_\varepsilon(x)) \|\xi_\varepsilon(x-b)\|_p^{1-p} \xi_{\varepsilon,k}(x-b)(t)^{p-2}} a_k(t) \quad \forall k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.19)$$

Una vez que el algoritmo ha sido descrito mostramos dos propiedades importantes para probar la convergencia del algoritmo. De tal forma que, en la primera, se prueba que el algoritmo es descendente y, en la segunda, que bajo unas determinadas condiciones la sucesión generada por el algoritmo está incluida en el espacio de Sobolev $W^{1,p}(I; \mathbb{R}^m)$.

El siguiente resultado que prueba que la sucesión generada por el algoritmo es descendente en el valor objetivo, es una adaptación del Teorema 3.2 de Frenk et al. (1994) y su demostración se ha incluido por completitud. En dicha demostración usaremos el siguiente lema cuya demostración se puede encontrar en Beckenbach y Bellman (1967).

Lema 2.3.3 Si $a, b > 0$, $u < 1$ y $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1$ entonces

$$a^{\frac{1}{u}} b^{\frac{1}{v}} \geq \frac{a}{u} + \frac{b}{v}.$$

Proposición 2.3.1 Si $1 < p \leq 2$, $\varphi : \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(z) = g(z_1^{\frac{1}{p}}, \dots, z_m^{\frac{1}{p}})$ es una función cuasicóncava en \mathbb{R}_+^m y $\nabla f_\varepsilon(x) \neq 0$ entonces $f_\varepsilon(T_\varepsilon(x)) < f_\varepsilon(x)$.

Demostración:

Consideremos la función $h_k : X_p \rightarrow X_p$ definida por

$$h_k(y)(t) = \sum_{a \in A} \frac{\partial \varphi}{\partial z_a}(d_\varepsilon(x)^p) \xi_{\varepsilon,k}(x-a)(t)^{p-2} \xi_{\varepsilon,k}(y-a)(t)^2$$

Primero, probamos que

$$h_k(T(x))(t) \leq h_k(x)(t) \quad \forall t \in I, \forall k = 1, \dots, m. \quad (2.20)$$

Para ello, desarrollamos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
h_k(T(x))(t) - h_k(x)(t) &= \sum_{a \in A} \frac{\partial \varphi}{\partial z_a} (d_\varepsilon(x)^p) \xi_{\varepsilon,k}(x-a)(t)^{p-2} \left(\xi_{\varepsilon,k}(T(x)-a)(t)^2 - \right. \\
&\quad \left. - \xi_{\varepsilon,k}(x-a)(t)^2 \right) \\
&= \sum_{a \in A} \frac{\partial \varphi}{\partial z_a} (d_\varepsilon(x)^p) \xi_{\varepsilon,k}(x-a)(t)^{p-2} \left((T_k(x)(t) - a_k(t))^2 - \right. \\
&\quad \left. - (x_k(t) - a_k(t))^2 \right) \\
&= \sum_{a \in A} \frac{\partial \varphi}{\partial z_a} (d_\varepsilon(x)^p) \xi_{\varepsilon,k}(x-a)(t)^{p-2} \left((T_k(x)(t) - a_k(t))^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2(T_k(x)(t) - x_k(t))(x_k(t) - a_k(t)) \right) \\
&= (T_k(x)(t) - x_k(t)) \sum_{a \in A} \frac{\partial \varphi}{\partial z_a} (d_\varepsilon(x)^p) \xi_{\varepsilon,k}(x-a)(t)^{p-2} \left(\right. \\
&\quad \left. (T_k(x)(t) - x_k(t)) + 2(x_k(t) - a_k(t)) \right). \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Puesto que $g(z_1, \dots, z_{|A|}) = \varphi(z_1^{\frac{1}{p}}, \dots, z_{|A|}^{\frac{1}{p}})$ tenemos que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_a}(z) = \frac{1}{p} \frac{\partial g}{\partial z_a}(z) z_a^{\frac{1}{p}-1}$$

y por la definición de $T_k(x)$ tenemos también que

$$\begin{aligned}
&\sum_{a \in A} \frac{\partial g}{\partial z_a} (d_\varepsilon(x)) \|\xi_\varepsilon(x-a)\|^{1-p} \xi_{\varepsilon,k}(x-a)(t)^{p-2} a_k(t) = \\
&T_k(x)(t) \sum_{a \in A} \frac{\partial g}{\partial z_a} (d_\varepsilon(x)) \|\xi_\varepsilon(x-a)\|^{1-p} \xi_{\varepsilon,k}(x-a)(t)^{p-2}.
\end{aligned}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}
(2.21) &= -\frac{1}{p} (T_k(x)(t) - x_k(t))^2 \sum_{a \in A} \frac{\partial g}{\partial z_a} (d_\varepsilon(x)) \|\xi_\varepsilon(x-a)\|^{1-p} \xi_{\varepsilon,k}(x-a)(t)^{p-2} \\
&= -\frac{1}{p} \nabla_k f_\varepsilon(x)(t)^2 \left(\sum_{a \in A} \frac{\partial g}{\partial z_a} (d_\varepsilon(x)) \|\xi_\varepsilon(x-a)\|^{1-p} \xi_{\varepsilon,k}(x-a)(t)^{p-2} \right)^{-1} \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Con lo cual hemos probado la desigualdad (2.20). Ahora, definimos la función

$S_k : X_p \rightarrow X_p$ dada por

$$S_k(y) = \sum_{a \in A} \frac{\partial \varphi}{\partial z_a} (d_\varepsilon(x)^p) \xi_{\varepsilon,k}(y-a)^p.$$

Notemos que $h_k(y)$ y $S_k(y)$ coinciden en $y = x$. Además por el Lema 2.3.3, con $a(t) = \xi_{\varepsilon,k}(T(x) - a)(t)^p$, $b(t) = \xi_{\varepsilon,k}(x - a)(t)^p$ y $\frac{1}{v} = \frac{2}{p}$ obtenemos que

$$h_k(T(x))(t) \geq \frac{2}{p}S_k(T_k(x))(t) + \left(1 - \frac{2}{p}\right)S_k(x)(t) \quad \forall t \in I.$$

De aquí, usando la desigualdad (2.20) y que $S_k(x) = h_k(x)$ se sigue que $S_k(T(x))(t) \leq S_k(x)(t)$ para cualquier $k = 1, \dots, m$, con al menos una desigualdad estricta puesto que $\nabla f_\varepsilon(x) \neq 0$. De esta forma, tenemos que

$$\sum_{k=1}^m S_k(T(x))(t) < \sum_{k=1}^m S_k(x)(t).$$

y

$$\sum_{a \in A} \frac{\partial \varphi}{\partial z_a} (d_\varepsilon(x)^p) (\|\xi_\varepsilon(T(x) - a)\|_p^p - \|\xi_\varepsilon(x - a)\|_p^p) < 0.$$

Finalmente, puesto que φ es cuasicóncava podemos usar el Teorema 3.5.4. de Bazaraa y Shetty (1979) para obtener que

$$\varphi(d_\varepsilon^p(T(x))) \leq \varphi(d_\varepsilon^p(x)),$$

y de aquí

$$f_\varepsilon(T(x)) \leq f_\varepsilon(x).$$

□

A continuación estudiamos la segunda propiedad que nos asegura que bajo determinadas hipótesis la sucesión generada por el algoritmo está incluida en el espacio de Sobolev $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$, (véase el Apéndice donde se hace una descripción de dicho espacio).

Lema 2.3.4 *Si cada función de demanda $a \in A$ está acotada y tanto a como x^0 pertenecen a $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$ entonces la sucesión generada por el algoritmo (2.19) está incluida en $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$.*

Demostración:

El algoritmo está definido por

$$T(x)(t) = \sum_{a \in A} \phi_{a,x}(t) a(t)$$

donde

$$\phi_{a,x}(t) = \frac{\frac{\partial g}{\partial z_a}(d_\varepsilon(x)) \|\xi_\varepsilon(x-a)\|^{1-p} \xi_\varepsilon(x-a)(t)^{p-2}}{\sum_{b \in A} \frac{\partial g}{\partial z_b}(d_\varepsilon(x)) \|\xi_\varepsilon(x-b)\|^{1-p} \xi_\varepsilon(x-b)(t)^{p-2}}.$$

Con lo cual, para mostrar que la sucesión generada por T está incluida en $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$, es suficiente probar que $T(x) \in X_p$ y su derivada pertenecen a X_p para cualquier x en $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$.

Puesto que $0 \leq \phi_{a,x}(t) \leq 1$ para todo t , $T(x)$ está acotado por la función $\sum_{a \in A} a$, que pertenece a X_p . De aquí, $T(x) \in X_p \quad \forall x \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$.

Veamos ahora que $T'(x) \in X_p$, para ello sabemos que

$$T'(x) = \sum_{a \in A} \phi'_{a,x}(t) a(t) + \sum_{a \in A} \phi_{a,x}(t) a'(t)$$

Debido a que $0 \leq \phi_{a,x}(t) \leq 1$ y que $a \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$ se tiene que $\sum_{a \in A} \phi'_{a,x}(t) a(t) \in X_p$. Por otro lado, debido a que las funciones de demanda están acotadas, para probar que $\sum_{a \in A} \phi'_{a,x}(t) a(t) \in X_p$ es suficiente probar que $\sum_{a \in A} \phi'_{a,x}(t) \in X_p$, para ello, calculamos $\phi'_{a,x}(t)$.

Para simplificar la notación introducimos las siguientes funciones

$$\begin{aligned} h_{a,x}(t) &= (\xi_\varepsilon(x(t) - a(t)))^{p-2} \\ q_{a,x} &= \frac{\partial g}{\partial z_a}(d_\varepsilon(x)) \|\xi_\varepsilon(x-a)\|^{1-p} \\ c_x(t) &= \left(\sum_{a \in A} q_{a,x} h_{a,x}(t) \right)^2 \end{aligned}$$

Con lo cual $\phi'_{a,x}(t)$ queda de la siguiente forma

$$\phi'_{a,x}(t) = \frac{q_{a,x} h'_{a,x}(t) \sum_{b \in A} q_{b,x} h_{b,x}(t) - q_{a,x} h_{a,x}(t) \sum_{b \in A} q_{b,x} h'_{b,x}(t)}{c_x(t)}.$$

Por tanto, $\sum_{a \in A} \phi'_{a,x}(t) = 0$, obteniéndose de esta forma el resultado.

□

2.3.2 La convergencia del algoritmo

En esta sección estudiaremos la convergencia del algoritmo propuesto para resolver el problema dinámico generalizado de Weber. Probaremos la convergencia global de este esquema para $p \in (1, 2]$, para ello, comprobaremos que la sucesión generada por el algoritmo (2.19), está acotada, lo que supone que contiene una subsucesión débilmente convergente en X_p . Sin embargo, este resultado no es suficiente, por lo que buscaremos condiciones adicionales que nos aseguren la convergencia fuerte de la sucesión (véase el Apéndice para más detalles de la diferencia entre la convergencia fuerte y la débil). A partir de ahora, supondremos que A y x_o verifican las hipótesis del Lema 2.3.4.

Teorema 2.3.3 *Si la función g es cuasiconvexa, creciente, continuamente diferenciable y $\varphi : \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\varphi(z) = g(z_1^{\frac{1}{p}}, \dots, z_m^{\frac{1}{p}})$, es cuasicóncava en \mathbb{R}_+^n , entonces, dado $\varepsilon > 0$, la sucesión generada por el Algoritmo (2.19) converge fuertemente a una solución óptima del Problema (2.13).*

Demostración:

La sucesión dada por el algoritmo contiene una subsucesión débilmente convergente. Por el Lema 2.3.4 la sucesión completa pertenece al espacio de Sobolev $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$ y por el apartado ii) del Lema 2.5.1 (Apéndice) dicha sucesión es también fuertemente convergente en X_p . Además, bajo estas hipótesis la Proposición 2.3.1 asegura que la sucesión completa es descendente, ya que $\nabla f_\varepsilon(x^q) \neq 0$, de forma que podemos aplicar el teorema de Zangwill en Bazaraa y Shetty (1979) para obtener que la subsucesión considerada converge fuertemente a la función $x_\varepsilon^* \in X_p$, donde x_ε^* verifica que $\nabla f_\varepsilon(x_\varepsilon^*) = 0$. Finalmente, el Teorema 2.3.2 asegura que x_ε^* es la solución óptima del Problema (2.13).

Una vez que hemos probado que existe una subsucesión fuertemente convergente, probaremos que la sucesión completa es fuertemente convergente. Para ello, observamos que la sucesión contiene un único punto de acumulación, x_ε^* . En efecto, cualquier subsucesión es descendente, acotada e incluida en $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$, entonces podemos

aplicar de nuevo el teorema de Zangwill para cualquier subsucesión, obteniéndose que ésta converge a un elemento de Γ_{f_ε} . De aquí, se obtiene que la sucesión completa es convergente, porque Γ_{f_ε} es un conjunto unitario. \square

Una vez que tenemos la prueba de que el algoritmo converge a la solución del Problema (2.13), la parte final de esta sección está dedicada a desarrollar un método para obtener la solución óptima del Problema (2.12).

Para cualquier $\varepsilon > 0$ consideramos el problema

$$P_\varepsilon : \min_{x \in X_p} f_\varepsilon(x) \quad (2.22)$$

Denotemos por $x_{\varepsilon_n}^*$ la solución óptima del Problema (P_{ε_n}) y consideremos una sucesión $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergiendo a 0.

Lema 2.3.5 *La sucesión $\{x_{\varepsilon_n}^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ contiene una subsucesión convergente en la topología fuerte de X_p .*

Demostración:

Puesto que $\{x_{\varepsilon_n}^*\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C_p$, para todo $n \geq 1$, podemos extraer una subsucesión débilmente convergente de ella. Además, puesto que $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$ es un espacio de Banach y $x_{\varepsilon_n}^*$ es el límite de una sucesión de elementos en este espacio entonces $x_{\varepsilon_n}^*$ pertenece a $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$ para cualquier n . Con lo cual, aplicando el apartado ii) del Lema 2.5.1 (Apéndice) queda demostrado el resultado. \square

Teorema 2.3.4 *Si la sucesión $\{x_{\varepsilon_n}^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge fuertemente a x^* entonces $x^* \in \arg \min f_0$.*

Demostración:

Puesto que la sucesión $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente, $\{f_{\varepsilon_n}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es también una sucesión decreciente para cualquier $x \in X_p$. Con lo cual, aplicando el Teorema 2.46 en Attouch (1984), obtenemos que la sucesión $\{f_{\varepsilon_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es epi-convergente en la topología fuerte de X_p (ver Apéndice para una definición de epi-convergencia).

Además, debido a que $\{f_{\varepsilon_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente, aplicando la Proposición 2.48. en Attouch (1984), obtenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{x \in X_p} f_{\varepsilon_n}(x) = \inf_{x \in X_p} \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\varepsilon_n}(x) = \inf_{x \in X_p} f_0(x). \quad (2.23)$$

Por tanto, como $L^p(I, \mathbb{R}^m)$ es un espacio primero numerable, $\{f_{\varepsilon_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es epi-convergente, la sucesión $\{x_{\varepsilon_n}^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ contiene una subsucesión convergente y (2.23) podemos aplicar el Corolario 2.13 de la referencia mencionada anteriormente para obtener que x^* pertenece a $\operatorname{argmin}_{x \in X_p} f_0(x)$. \square

Desde un punto de vista práctico el Teorema 2.3.4 requiere conocer las soluciones óptimas del Problema (2.13) para cada función objetivo f_{ε_n} con $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, para resolver cada uno de estos problemas tenemos que aplicar de nuevo un algoritmo iterativo. De esta forma, aunque podamos obtener valores aproximados para cada $x_n \in \operatorname{argmin} f_{\varepsilon_n}$, la expresión exacta podría no ser calculable. Este proceso puede ser evitado usando un algoritmo diagonal como el que mostraremos a continuación. Denotemos por $T_{\varepsilon_n}^k(x)$ la aplicación de k veces la función T_{ε_n} sobre x , donde T_{ε} fue definida en (2.18). Es decir, $T_{\varepsilon_n}^k(x) = T_{\varepsilon_n}(T_{\varepsilon_n} \cdots T_{\varepsilon_n}(x))$.

Teorema 2.3.5 *Sea $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión definida por $y_n := T_{\varepsilon_n}^n(y_{n-1})$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Entonces, cualquier punto de acumulación de esta sucesión es una solución óptima del Problema (2.12).*

Demostración:

Por el Lema 2.3.5 la sucesión $\{x_{\varepsilon_n}^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ contiene una subsucesión fuertemente convergente a x^* , con $x^* \in \operatorname{argmin} f_0$. Sea $\{x_{n_k}^*\}_{k \in \mathbb{N}}$ dicha sucesión. Consideremos la subsucesión $\{y_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ definida por $y_{n_k} := T_{\varepsilon_{n_k}}^{n_k}(y_{n_k-1})$. De esta forma, tenemos

$$\|y_{n_k} - x^*\|_p \leq \|T_{\varepsilon_{n_k}}^{n_k}(y_{n_k-1}) - x_{n_k}^*\|_p + \|x_{n_k}^* - x^*\|_p.$$

Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe n_k tal que, por el Teorema 2.3.3, $\|T_{\varepsilon_{n_k}}^{n_k}(y_{n_k-1}) - x_{n_k}^*\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ y, por el Teorema 2.3.4, $\|x_{n_k}^* - x^*\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. De tal forma que $\|y_{n_k} - x^*\|_p < \varepsilon$ y el resultado queda demostrado. \square

Corolario 2.3.1 *Si las funciones de demanda no son colineales y la función $g(\cdot)$ es la función suma se tiene que la sucesión generado por este método converge a la solución óptima del problema.*

A continuación mostramos un ejemplo ilustrativo del algoritmo hiperbólico dinámico de Weiszfeld, que pone de manifiesto que la aplicación puntual del algoritmo clásico de Weiszfeld no proporciona la mejor solución del problema generalizado dinámico del problema de Weber. Este hecho hace que nuestro algoritmo sea extremadamente útil.

Ejemplo 2.3.1 *Consideremos para $m = 2$ el espacio $X_{\frac{3}{2}} = L^{\frac{3}{2}}([0, 5], \mathbb{R}^2)$. En este espacio, consideremos las funciones de demanda*

$$a_1(t) = (0, 0) \chi_{[0,2]}(t) + (5, 4) \chi_{[2,5]}(t)$$

$$a_2(t) = (4, 0) \chi_{[0,2]}(t) + (1, 2) \chi_{[2,5]}(t)$$

$$a_3(t) = (2, 4) \chi_{[0,2]}(t) + (7, 3) \chi_{[2,5]}(t),$$

donde χ_I es la función indicador definida en (2.11).

Para este ejemplo elegimos como función g la función suma, de forma que el problema a considerar queda formulado del siguiente modo,

$$f_0(x) = \sum_{i=1}^3 \omega_i \|x - a_i\|_{\frac{3}{2}}$$

con pesos $\omega_1 = \omega_2 = \frac{2}{5}$ $\omega_3 = \frac{1}{5}$.

Para resolver este ejemplo usamos el algoritmo hiperbólico dinámico de Weiszfeld con la sucesión $\varepsilon_n = \frac{0.01}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y la función de arranque

$$x_o(t) = (2, 0.5) \chi_{[0,2]}(t) + (4, 3.5) \chi_{[2,5]}(t).$$

El algoritmo ha sido implementado en Mathematica, encontrándose la solución óptima después de 25 iteraciones. La Tabla 2.4 muestra las iteraciones del algoritmo. La columna *It.* nos da el número de la iteración; la columna *Función* nos da la función

obtenida en cada iteración y la columna *Objetivo* el valor objetivo del problema para la correspondiente iteración.

Observemos que para este ejemplo una solución óptima es

$$(1.18621, 0.127739) \chi_{[0,2]}(t) + (4.69555, 4.4069) \chi_{[2,5]}(t)$$

siendo el valor objetivo óptimo igual a 7.29059.

Por otro lado, también hemos resuelto el problema puntualmente, es decir, usando el algoritmo hiperbólico de Weiszfeld aplicado a cada punto del intervalo $[0, 5]$. Puesto que hemos considerado funciones de demanda con sólo un salto, la cuestión se limita a resolver dos problemas clásicos de Weber. En el primero, teniendo los puntos de demanda $(0, 0)$, $(4, 0)$ y $(2, 4)$ y en el segundo $(5, 4)$, $(1, 2)$ y $(7, 3)$. Tomando como puntos de arranque $(2, 0.5)$ y $(4, 3.5)$, respectivamente, las Tablas 2.5 y 2.6 muestran las iteraciones de estos dos problemas.

Las soluciones obtenidas después de la aplicación de este procedimiento son $(2, 0.126319)$ para el problema en el intervalo $[0, 2]$ y $(5, 4)$ para el problema en el intervalo $[2, 5]$. De esta forma, la solución al problema usando esta aproximación es $(2, 0.126319)\chi_{[0,2]} + (5, 4)\chi_{[2,5]}$ y el valor objetivo evaluado en esta función es 7.61098.

La comparación de este valor con 7.29059 (el valor objetivo de la solución dinámica) muestra que la aproximación hiperbólica del algoritmo de Weiszfeld no se puede evitar a través de la aplicación puntual del algoritmo hiperbólico clásico.

Obsérvese que en este ejemplo hemos considerado las mismas funciones de demanda que en el Ejemplo 2.2.1, pero en el espacio $L^{\frac{3}{2}}(I, \mathbb{R}^2)$ en vez de en el espacio $L^2(I, \mathbb{R}^2)$.

2.4 Posicionamiento de unidades de servicio

En las dos secciones anteriores hemos considerado dos extensiones dinámicas de problemas clásicos de localización en el sentido de que las funciones de demanda varían con el tiempo. En esta sección trataremos otra extensión caracterizada por el hecho

It.	Función	Objetivo
1	$(1.91775, 0.286981) \chi_{[0,2]}(t) + (4.21982, 3.32866) \chi_{[2,5]}(t)$	7.36395
2	$(1.69092, 0.182902) \chi_{[0,2]}(t) + (4.42443, 3.23562) \chi_{[2,5]}(t)$	7.31494
3	$(1.48868, 0.153807) \chi_{[0,2]}(t) + (4.55146, 3.2665) \chi_{[2,5]}(t)$	7.299
4	$(1.35367, 0.142395) \chi_{[0,2]}(t) + (4.62273, 3.32386) \chi_{[2,5]}(t)$	7.2931
5	$(1.27023, 0.135361) \chi_{[0,2]}(t) + (4.66099, 3.36491) \chi_{[2,5]}(t)$	7.29121
6	$(1.224, 0.131231) \chi_{[0,2]}(t) + (4.68044, 3.388) \chi_{[2,5]}(t)$	7.29072
7	$(1.20135, 0.129153) \chi_{[0,2]}(t) + (4.68957, 3.39932) \chi_{[2,5]}(t)$	7.29061
8	$(1.19159, 0.128246) \chi_{[0,2]}(t) + (4.69344, 3.4042) \chi_{[2,5]}(t)$	7.2906
9	$(1.1879, 0.127901) \chi_{[0,2]}(t) + (4.69489, 3.40605) \chi_{[2,5]}(t)$	7.29059
10	$(1.18668, 0.127787) \chi_{[0,2]}(t) + (4.69536, 3.40666) \chi_{[2,5]}(t)$	7.29059
11	$(1.18633, 0.127753) \chi_{[0,2]}(t) + (4.6955, 3.40684) \chi_{[2,5]}(t)$	7.29059
12	$(1.18624, 0.127744) \chi_{[0,2]}(t) + (4.69554, 3.40688) \chi_{[2,5]}(t)$	7.29059
13	$(1.18622, 0.127742) \chi_{[0,2]}(t) + (4.69555, 3.40689) \chi_{[2,5]}(t)$	7.29059
14	$(1.18621, 0.127741) \chi_{[0,2]}(t) + (4.69555, 3.40689) \chi_{[2,5]}(t)$	7.29059
15	$(1.18621, 0.127741) \chi_{[0,2]}(t) + (4.69555, 3.40689) \chi_{[2,5]}(t)$	7.29059
16	$(1.18621, 0.12774) \chi_{[0,2]}(t) + (4.69555, 3.40689) \chi_{[2,5]}(t)$	7.29059
17	$(1.18621, 0.12774) \chi_{[0,2]}(t) + (4.69555, 3.4069) \chi_{[2,5]}(t)$	7.29059
18	$(1.18621, 0.12774) \chi_{[0,2]}(t) + (4.69555, 3.4069) \chi_{[2,5]}(t)$	7.29059
19	$(1.18621, 0.12774) \chi_{[0,2]}(t) + (4.69555, 3.4069) \chi_{[2,5]}(t)$	7.29059
20	$(1.18621, 0.12774) \chi_{[0,2]}(t) + (4.69555, 3.4069) \chi_{[2,5]}(t)$	7.29059
21	$(1.18621, 0.12774) \chi_{[0,2]}(t) + (4.69555, 3.4069) \chi_{[2,5]}(t)$	7.29059
22	$(1.18621, 0.12774) \chi_{[0,2]}(t) + (4.69555, 3.4069) \chi_{[2,5]}(t)$	7.29059
23	$(1.18621, 0.127739) \chi_{[0,2]}(t) + (4.69555, 3.4069) \chi_{[2,5]}(t)$	7.29059
24	$(1.18621, 0.127739) \chi_{[0,2]}(t) + (4.69555, 3.4069) \chi_{[2,5]}(t)$	7.29059

Tabla 2.4: Iteraciones del algoritmo hiperbólico dinámico de Weiszfeld

It.	Función	Objetivo
1	(2., 0.276606)	2.39908
2	(2., 0.158428)	2.39201
3	(2., 0.13055)	2.39163
4	(2., 0.126633)	2.39162
5	(2., 0.126332)	2.39162
6	(2., 0.12632)	2.39162
7	(2., 0.126319)	2.39162
8	(2., 0.126319)	2.39162

Tabla 2.5: Iteraciones puntuales del algoritmo de Weiszfeld para los puntos en $[0, 2]$

de que la posición de la demanda no es fija, sino que va a venir dada por una variable aleatoria.

En la literatura, podemos encontrar diferentes trabajos que han tratado modelos de localización continua donde tanto el servicio buscado como la demanda venían dados por variables aleatorias con una determinada distribución (ver por ejemplo Larson y Odoni (1981), Levine (1986) o De Palma et al. (1994), entre otros). En el caso particular de que la distribución de la demanda sea conocida Anderson y Fontenot (1992) y Carrizosa et al. (1998), desarrollan diferentes modelos de localización, obteniendo éstos últimos que para una distribución conocida de la demanda el mínimo tiempo esperado de respuesta se alcanza cuando el servidor está posicionado en la solución del problema determinístico equivalente.

Sin embargo, pueden encontrarse situaciones donde las hipótesis del conocimiento de la distribución de la demanda no son totalmente realistas, teniéndose una información parcial de ésta, como por ejemplo, el valor de la media de dicha distribución. Este es el caso de una cabeza lectora en el disco duro de un ordenador, donde el servicio es dicha cabeza que lee o escribe en un determinado sector del disco, que será un punto de demanda (ver Vickson, Gerchak y Rotem 1995 para un análisis diferente

It.	Función	Objetivo
1	(4.35746, 3.40509)	2.51804
2	(4.70544, 3.43239)	2.47524
3	(4.85959, 3.56313)	2.46
4	(4.91596, 3.6859)	2.45371
5	(4.94331, 3.77313)	2.45077
6	(4.95962, 3.83259)	2.4493
7	(4.97022, 3.87375)	2.44853
8	(4.97745, 3.90298)	2.44809
9	(4.98258, 3.92428)	2.44783
10	(4.98634, 3.94018)	2.44766
11	(4.98917, 3.95228)	2.44755
12	(4.99133, 3.96165)	2.44748
13	(4.99302, 3.96901)	2.44742
14	(4.99435, 3.97487)	2.44739
15	(4.99542, 3.97957)	2.44736
16	(4.99628, 3.98337)	2.44734
17	(4.99698, 3.98647)	2.44732
18	(4.99754, 3.989)	2.447318
19	(4.99801, 3.99107)	2.4473
20	(4.99839, 3.99278)	2.44729
21	(4.9987, 3.99417)	2.44728
22	(4.99896, 3.99532)	2.44728
23	(4.99917, 3.99626)	2.44728
24	(4.99934, 3.99703)	2.44727
25	(4.99948, 3.99765)	2.44727
26	(4.99959, 3.99815)	2.44727
27	(4.99968, 3.99856)	2.44727
28	(4.99975, 3.99888)	2.44727
29	(4.99981, 3.99914)	2.44726
30	(4.99999, 3.99999)	2.44726

Tabla 2.6: Iteraciones puntuales del algoritmo de Weiszfeld para los puntos en $[2, 5]$

suponiendo el conocimiento de la distribución de la demanda). Cuando la distribución de la demanda es desconocida la minimización clásica de la distancia esperada a la variable aleatoria que representa la demanda no es posible; de esta forma, surge la necesidad de estudiar modelos alternativos. En esta sección proponemos como modelo alternativo aquel que consiste en la minimización de la máxima distancia esperada dentro de una familia de medidas de probabilidad para la demanda, (ver Gallego (1992) o Puerto y Fernández (1998) para análisis similares aplicados a diferentes problemas de Investigación Operativa).

Para el análisis de este modelo introducimos la siguiente notación. Sean $\mathcal{F}(\lambda)$ y $\mathcal{G}(\mu)$ dos familias de variables aleatorias (v. a.) definidas sobre el hipercubo n -dimensional $[0, 1]^n$ con medias $\lambda \in \mathbb{R}^n$ para $\mathcal{F}(\lambda)$ y $\mu \in \mathbb{R}^n$ para $\mathcal{G}(\mu)$. Es decir,

$$\mathcal{F}(\lambda) = \{X : \text{v. a. sobre } [0, 1]^n \text{ con función de distribución } F_X, \int x dF_X(x) = \lambda\}$$

$$\mathcal{G}(\mu) = \{A : \text{v. a. sobre } [0, 1]^n \text{ con función de distribución } G_A, \int a dG_A(a) = \mu\}$$

donde $\mathcal{F}(\lambda)$ representa la distribución del servicio y $\mathcal{G}(\mu)$ la de la demanda, consideramos

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\lambda \in [0, 1]^n} \mathcal{F}(\lambda).$$

Sea γ alguna medida de las distancias definidas sobre \mathbb{R}^n . Como mencionamos anteriormente algunos autores han estudiado el problema

$$\min_{X \in \mathcal{F}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x - a) dF_X(x) dG_A(a)$$

donde es conocida la variable aleatoria A de la distribución de la demanda.

El nuevo modelo no supone ningún conocimiento “a priori” acerca de la distribución de la demanda aparte del valor de su media. Es decir, tenemos casi completa incertidumbre acerca de como es el comportamiento de la demanda, y buscamos la política que una unidad de emergencia, X , tiene que seguir para minimizar la máxima distancia esperada a un incidente aleatorio (el cual ocurre en los puntos de demanda con una probabilidad dada por una función de distribución G_A , desconocida).

De esta forma el modelo es

$$\min_{X \in \mathcal{F}} \max_{A \in \mathcal{G}(\mu)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x-a) dF_X(x) dG_A(a) \quad (2.24)$$

donde $\gamma(x-a)$ es una determinada medida de la distancia entre x y a .

2.4.1 El caso de la función distancia rectangular

En este apartado estudiamos el Problema (2.24) en el caso de que $\gamma(\cdot)$ sea la norma l_1 . Antes de considerar el caso general, analizamos el caso unidimensional. Una vez visto este caso extenderemos los resultados obtenidos al problema n -dimensional. Sean $\mathcal{F}_1(\lambda)$ y $\mathcal{G}_1(\mu)$ respectivamente las familias de variables aleatorias $\mathcal{F}(\lambda)$ y $\mathcal{G}(\mu)$ en el caso unidimensional. En este modelo y para una mejor comprensión distinguimos las dos situaciones siguientes. En primer lugar, cuando al servidor no se le permite moverse, es decir, viene dado por una variable aleatoria degenerada y en segundo lugar, cuando el servidor puede moverse, lo que significa que éste es una variable aleatoria que pertenece a \mathcal{F}_1 . Para el primer caso el problema es:

$$\min_{x \in [0,1]} \max_{A \in \mathcal{G}_1(\mu)} \int_{-\infty}^{\infty} |x-a| dG_A(a). \quad (2.25)$$

Teorema 2.4.1 *La política óptima de posicionamiento bajo las hipótesis del Problema (2.25) es*

$$x^* = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \mu < 0.5 \\ [0, 1] & \text{si } \mu = 0.5 \\ \{1\} & \text{si } \mu > 0.5. \end{cases} \quad (2.26)$$

Demostración:

En efecto, para cualquier $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |x-a| dG_A(a) &= \int_{-\varepsilon}^x (x-a) dG_A(a) + \int_x^1 (a-x) dG_A(a) \\ &= x(2G_A(x) - 1) - \int_{-\varepsilon}^x a dG_A(a) + \mu - \int_{-\varepsilon}^x a dG_A(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\left(xG_A(x) - \int_{-\varepsilon}^x a dG_A(a)\right) + \mu - x \\
&= 2\left(xG_A(x) - \int_{-\varepsilon}^x a dG_A(a)\right) + \mu - x.
\end{aligned}$$

Aplicando la ecuación

$$\int_{-\varepsilon}^x G_A(a) da = xG_A(x) - \int_{-\varepsilon}^x a dG_A(a)$$

y observando que

$$\int_0^x G_A(a) da = \int_{-\varepsilon}^x G_A(a) da, \quad (2.27)$$

se tiene que

$$\min_{x \in [0,1]} \max_{A \in \mathcal{G}_1(\mu)} \int_{-\infty}^{\infty} |x - a| dG_A(a) = \min_{x \in [0,1]} \max_{A \in \mathcal{G}_1(\mu)} 2 \int_0^x G_A(a) da - x + \mu. \quad (2.28)$$

Veamos que el máximo de la última expresión se alcanza en la variable aleatoria A^* cuya función de distribución viene dada por la siguiente expresión;

$$G_{A^*}(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 0 \\ 1 - \mu & \text{si } 0 \leq a < 1 \\ 1 & \text{si } a \geq 1. \end{cases}$$

En efecto, puesto que x y μ son constantes para el máximo del segundo miembro de la igualdad (2.28), tenemos que demostrar que

$$\int_0^x G_A(a) da - (1 - \mu)x \leq 0 \quad \forall x \in (0,1) \quad \forall A \in \mathcal{G}_1(\mu). \quad (2.29)$$

Sea $t_o \in (0,1)$ tal que $t_o = \inf \{t : G_A(t) \geq 1 - \mu\}$;

1. Si $x < t_o$ se tiene que $G_A(a) < 1 - \mu \quad \forall a \leq x$. De esta forma

$$\int_0^x G_A(a) da - (1 - \mu)x < 0.$$

2. Si $x \geq t_o$

$$\int_0^x G_A(a) da - (1 - \mu)x = \int_0^x G_A(a) da + \int_x^1 G_A(a) da - \int_x^1 G_A(a) da - (1 - \mu)x$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - \mu) - \int_x^1 G_A(a) da - (1 - \mu)x \\
&= (1 - \mu)(1 - x) - \int_x^1 G_A(a) da \\
&\leq (1 - \mu)(1 - x) - G_A(x)(1 - x) \\
&= (1 - x)\left((1 - \mu) - G_A(x)\right) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, el problema de minimización (2.25) puede ser reducido al siguiente problema:

$$\min_{x \in [0,1]} x(1 - 2\mu) + \mu. \quad (2.30)$$

De donde, dependiendo del valor relativo de μ obtenemos que el posicionamiento óptimo x^* verifica:

1. Si $\mu < 0.5$ entonces $x^* = 0$.
2. Si $\mu = 0.5$ entonces $x^* \in [0, 1]$.
3. Si $\mu > 0.5$ entonces $x^* = 1$.

□

Este resultado establece que la localización óptima para una unidad de servicio, cuando sólo se conoce la media μ de la distribución de la demanda, está sobre los extremos del intervalo de demanda dependiendo del valor de μ . Nótese que en el caso $\mu = 0.5$ una localización óptima del servicio puede ser cualquier punto del intervalo.

El caso más general, consiste en que se permita patrullar a la unidad de servicio; primero, permitimos que la unidad de servicio se distribuya a lo largo del intervalo según una variable aleatoria con la única condición de que su valor medio sea una constante igual a λ ; para después resolver el caso cuando λ no es fija. En el primer caso, el problema viene dado por la siguiente expresión;

$$\min_{X \in \mathcal{F}_1(\lambda)} \max_{A \in \mathcal{G}_1(\mu)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x - a| dG_A(a) dF_X(x). \quad (2.31)$$

Teorema 2.4.2 *Una política óptima para la unidad de servicio en el modelo dado en el Problema (2.31) viene dado por la variable aleatoria X^* cuya función de distribución es*

$$F_{X^*}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \lambda & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Demostración:

En primer lugar, obtenemos una expresión más apropiada para

$$I(X, A) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |x - a| dG_A(a) dF_X(x).$$

$$\begin{aligned} I(X, A) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |x - a| dG_A(a) dF_X(x) \\ &= \int_{-\varepsilon}^1 \int_{-\varepsilon}^x x dG_A(a) dF_X(x) - \int_{-\varepsilon}^1 \int_{-\varepsilon}^x a dG_A(a) dF_X(x) + \\ &\quad + \int_{-\varepsilon}^1 \int_x^1 a dG_A(a) dF_X(x) - \int_{-\varepsilon}^1 \int_x^1 x dG_A(a) dF_X(x) \\ &= \int_{-\varepsilon}^1 xG_A(x) dF_X(x) - \int_{-\varepsilon}^1 \int_{-\varepsilon}^x a dG_A(a) dF_X(x) + \\ &\quad + \int_{-\varepsilon}^1 \int_x^1 a dG_A(a) dF_X(x) - \int_{-\varepsilon}^1 x(1 - G_A(x)) dF_X(x) \\ &= 2 \int_{-\varepsilon}^1 xG_A(x) dF_X(x) - \lambda - \int_{-\varepsilon}^1 \int_{-\varepsilon}^x a dG_A(a) dF_X(x) + \\ &\quad + \int_{-\varepsilon}^1 \left(\mu - \int_{-\varepsilon}^x a dG_A(a) \right) dF_X(x) \\ &= 2 \int_{-\varepsilon}^1 xG_A(x) dF_X(x) - 2 \int_{-\varepsilon}^1 \int_{-\varepsilon}^x a dG_A(a) dF_X(x) - \lambda + \mu \\ &= 2 \int_{-\varepsilon}^1 xG_A(x) dF_X(x) - 2 \int_{-\varepsilon}^1 a \int_a^1 dF_X(x) dG_A(a) - \lambda + \mu \\ &= 2 \int_{-\varepsilon}^1 xG_A(x) dF_X(x) - 2\mu + 2 \int_{-\varepsilon}^1 aF_X(a) dG_A(a) - \lambda + \mu \\ &= 2 \left(\int_{-\varepsilon}^1 yG_A(y) dF_X(y) + \int_{-\varepsilon}^1 yF_X(y) dG_A(y) \right) - \lambda - \mu. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ahora bien, si usamos la siguiente relación:

$$d\left(yF_X(y)G_A(y)\right) = G_A(y)F_X(y) + ydG_A(y)F_X(y) + yG_A(y)dF_X(y)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} (2.32) &= 2 \left[yG_A(y)F_X(y) \Big|_{-\varepsilon}^1 - \int_{-\varepsilon}^1 G_A(y)F_X(y) dy \right] - \lambda - \mu \\ &= 2 \left(1 - \int_{-\varepsilon}^1 G_A(y)F_X(y) dy \right) - \lambda - \mu. \end{aligned} \quad (2.33)$$

De esta forma, usando que λ y μ son fijos y siguiendo un razonamiento similar al usado para probar (2.27), podemos resolver el Problema (2.31) resolviendo el problema equivalente

$$\max_{X \in \mathcal{F}_1(\lambda)} \min_{A \in \mathcal{G}_1(\mu)} \int_0^1 G_A(y)F_X(y) dy.$$

Para ello, sabemos que $G_A(y) \leq 1$ para cualquier $y \in \mathbb{R}$. Entonces se tiene que

$$\int_0^1 G_A(y) \left(F_X(y) - (1 - \lambda) \right) dy \leq \int_0^1 \left(F_X(y) - (1 - \lambda) \right) dy = 0 \quad \forall A \in \mathcal{G}_1(\mu).$$

De donde se obtiene que

$$\min_{A \in \mathcal{G}_1(\mu)} \int_0^1 F_X(y)G_A(y) dy \leq (1 - \lambda)(1 - \mu) \quad \forall X \in \mathcal{F}_1(\lambda) \quad \forall A \in \mathcal{G}_1(\mu). \quad (2.34)$$

Por tanto,

$$\max_{X \in \mathcal{F}_1(\lambda)} \min_{A \in \mathcal{G}_1(\mu)} \int_0^1 F_X(y)G_A(y) dy \leq (1 - \lambda)(1 - \mu).$$

Ahora bien, para

$$F_{X^*}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \lambda & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

obtenemos que la desigualdad (2.34) llega a ser igualdad y esta igualdad no depende de A , de donde se obtiene el resultado. \square

Este teorema prueba que cuando al servidor se le permita patrullar, su política óptima es distribuir el tiempo de patrulla entre los puntos extremos del intervalo de

demanda. Además, una cuidadosa lectura de la demostración muestra que la solución óptima es independiente de $A \in \mathcal{G}_1(\mu)$. Este hecho nos permite resolver el problema cuando el valor de la media λ varía.

Consideremos a continuación que no hay ninguna suposición sobre el valor, λ , de la media de la variable aleatoria X de la unidad de servicio. En este caso, el problema es

$$\min_{X \in \mathcal{F}_1} \max_{A \in \mathcal{G}_1(\mu)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x - a| dG_A(a) dF_X(x) \quad (2.35)$$

Corolario 2.4.1 *La política de posicionamiento óptima del Problema (2.35) viene dada por la variable aleatoria X^* tal que $P[X^* = x^*] = 1$ donde x^* fue definido en (2.26).*

Demostración:

Observemos que

$$\min_{X \in \mathcal{F}_1} \max_{A \in \mathcal{G}_1(\mu)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |x - a| dG_A(a) dF_X(x) = \min_{\lambda \in [0,1]} \min_{X \in \mathcal{F}_1(\lambda)} \max_{A \in \mathcal{G}_1(\mu)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |x - a| dG_A(a) dF_X(x).$$

Denotemos por $H(\lambda) = \min_{X \in \mathcal{F}_1(\lambda)} \max_{A \in \mathcal{G}_1(\mu)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |x - a| dG_A(a) dF_X(x)$.

Para cada $\lambda \in [0, 1]$, el Teorema 2.4.2 prueba que el mínimo en la definición de $H(\lambda)$ es alcanzado en la variable aleatoria $X^*(\lambda)$ con la función de distribución, $F_{X^*(\lambda)}(x)$ dada por

$$F_{X^*(\lambda)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \lambda & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Entonces, si buscamos el mínimo en λ obtenemos que

$$\min_{\lambda \in [0,1]} H(\lambda) = \min_{\lambda \in [0,1]} (1 - \lambda)(1 - \mu).$$

De aquí,

$$\arg \min_{\lambda \in [0,1]} H(\lambda) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \mu < 0.5 \\ [0, 1] & \text{si } \mu = 0.5 \\ \{1\} & \text{si } \mu > 0.5 \end{cases}$$

y se deduce el resultado. \square

Este corolario muestra que es óptimo aparcar la unidad de servicio cuando no se hace ninguna hipótesis sobre la distribución de la misma y el valor de la media de la demanda es conocida. Entonces, aunque patrullar puede ser bueno por otras razones tales como la prevención de crímenes, etc.; no es necesario para minimizar la máxima distancia esperada a un incidente aleatorio.

Finalmente, también estudiaremos el problema n -dimensional. En efecto, consideremos el problema:

$$\min_{X \in \mathcal{F}} \max_{A \in \mathcal{G}(\mu)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n |x_i - a_i| dG_A(a) dF_X(x) \quad (2.36)$$

donde $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$.

La función objetivo de este problema puede ser acotada de la siguiente forma:

$$\min_{X \in \mathcal{F}} \max_{A \in \mathcal{G}(\mu)} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |x_i - a_i| dG_A(a) dF_X(x) \leq \quad (2.37)$$

$$\min_{X \in \mathcal{F}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \max_{A_i \in \mathcal{G}_1(\mu_i)} \int_{-\infty}^{\infty} |x_i - a_i| dG_{A_i}(a_i) \right] dF_X(x) \quad (2.38)$$

donde A_i son variables aleatorias unidimensionales en $\mathcal{G}_1(\mu_i)$.

Sean A_1^*, \dots, A_n^* las variables aleatorias unidimensionales que alcanzan los máximos y $G_{A_1}^*, \dots, G_{A_n}^*$ sus correspondientes funciones de distribución. Consideremos $dG_A^* = dG_{A_1}^* \times \dots \times dG_{A_n}^*$ la medida producto generada por las medidas $dG_{A_1}^*, \dots, dG_{A_n}^*$ y sea A^* una variable aleatoria n -dimensional con función de distribución G_A^* . Puesto que A^* es factible para el máximo en (2.37) tenemos que (2.37)=(2.38). De esta forma,

$$\min_{X \in \mathcal{F}} \max_{A \in \mathcal{G}(\mu)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n |x_i - a_i| dG_A(a) dF_X(x) = \quad (2.39)$$

$$\min_{X \in \mathcal{F}} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left[\max_{A_i \in \mathcal{G}_1(\mu_i)} \int_{-\infty}^{\infty} |x_i - a_i| dG_{A_i}(a_i) \right] dF_X(x)$$

Denotemos por $I_i(x_i) := \max_{A_i \in \mathcal{G}_1(\mu_i)} \int_{-\infty}^{\infty} |x_i - a_i| dG_{A_i}(a_i)$ entonces

$$(2.39) = \min_{X \in \mathcal{F}} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n I_i(x_i) dF_X(x)$$

$$= \min_{X \in \mathcal{F}} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} I_i(x_i) dF_{X_i}(x_i)$$

donde F_{X_i} son las distribuciones marginales de F_X . Usando un razonamiento similar al usado para probar que (2.37) = (2.38), obtenemos que

$$\min_{X \in \mathcal{F}} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} I_i(x_i) dF_{X_i}(x_i) = \sum_{i=1}^n \min_{X_i \in \mathcal{F}_1} \int_{-\infty}^{\infty} I_i(x_i) dF_{X_i}(x_i). \quad (2.40)$$

Con lo cual, el problema n -dimensional puede ser resuelto a través de la resolución de n problemas unidimensionales diferentes. De aquí, por el Teorema 2.4.2 y el Corolario 2.4.1, el Problema (2.36) queda resuelto.

Los resultados de esta sección muestran que si se usa la norma l_1 , la política óptima es localizar la unidad de servicio sobre ciertos vértices de la región donde pueda producirse el incidente aleatorio.

2.4.2 El caso de la función de medida de la distancia euclídea al cuadrado

De una forma similar a como hemos estudiado el Problema (2.24) usando la norma l_1 es también posible el considerar otras medidas para la distancia. En esta sección vamos a considerar este problema cuando utilicemos para medir las distancias la medida l_2^2 . Para ello seguimos un esquema de razonamiento similar al planteado en el apartado anterior. Primero consideraremos el problema unidimensional para a continuación mostrar como resolver el caso general n -dimensional a través de la resolución de n problemas unidimensionales diferentes.

Si nos restringimos al caso de una variable aleatoria degenerada en un punto, es decir, si consideramos que al servicio no se le permite patrullar, el problema considerado es

$$\min_{x \in [0,1]} \max_{A \in \mathcal{G}_1(\mu)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 dG_A(a). \quad (2.41)$$

Probaremos que en este caso la política óptima es aparcar el servicio en el valor de la media de la familia $\mathcal{G}_1(\mu)$, μ .

Teorema 2.4.3 *La política óptima de posicionamiento para el Problema (2.41) es $x^* = \mu$.*

Demostración:

Primero, es fácil comprobar que

$$\max_{A \in \mathcal{G}_1(\mu)} \int_0^1 (x - a)^2 dG_A(a) = \max_{A \in \mathcal{G}_1(\mu)} \text{Var}(A) + (\mu - x)^2$$

donde $\text{Var}(A)$ es la varianza de la variable aleatoria A . De esta forma, el mínimo en $[0, 1]$ se alcanza en $x^* = \mu$. \square

En el caso siguiente, a la unidad de servicio se le permite patrullar, aunque el valor de su media es fijo. De esta forma, el problema viene formulado por:

$$\min_{X \in \mathcal{F}_1(\lambda)} \max_{A \in \mathcal{G}_1(\mu)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 dG_A(a) dF_X(x). \quad (2.42)$$

Teorema 2.4.4 *Una política óptima de posicionamiento del Problema (2.42) es dado por la variable aleatoria X^* cuya función de distribución es:*

$$F_{X^*}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \lambda \\ 1 & \text{si } x \geq \lambda. \end{cases}$$

Obsérvese que X^* es una variable aleatoria degenerada concentrada en el valor común de la media λ de la familia $\mathcal{F}_1(\lambda)$.

Demostración:

En efecto;

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (x - a)^2 dG_A(a) dF_X(x) &= \int_0^1 \int_0^1 (a^2 + x^2 - 2ax) dG_A(a) dF_X(x) \\ &= \int_0^1 a^2 dG_A(a) + \int_0^1 x^2 dF_X(x) - 2\lambda\mu \end{aligned} \quad (2.43)$$

De esta forma, el Problema (2.42) puede volverse a escribir como:

$$\begin{aligned} (2.42) &= \min_{X \in \mathcal{F}_1(\lambda)} \max_{A \in \mathcal{G}_1(\mu)} E(A^2) + E(X^2) - 2\lambda\mu \\ &= \min_{X \in \mathcal{F}_1(\lambda)} \max_{A \in \mathcal{G}_1(\mu)} \text{Var}(X) + \text{Var}(A) + (\mu - \lambda)^2 \end{aligned}$$

De aquí, puesto que $\mu - \lambda$ es un término constante el mínimo se alcanza en la variable aleatoria X , tal que $P[X = \lambda] = 1$ para cualquier variable aleatoria A . \square

En el caso anterior, a la unidad de servicio se le permite patrullar pero el valor de su media permanecía constante, sin embargo, es mucho más real el suponer que no se hace ninguna suposición sobre el valor λ (ninguna además de que $\lambda \in [0, 1]$). Con lo cual, el nuevo problema es de la siguiente forma:

$$\min_{X \in \mathcal{F}_1} \max_{A \in \mathcal{G}_1(\mu)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 dF_X(x) dG_A(a). \quad (2.44)$$

Corolario 2.4.2 *La política óptima de posicionamiento del Problema (2.44) es la variable aleatoria X^* tal que $P[X^* = \mu] = 1$.*

Demostración:

Notemos que

$$\min_{X \in \mathcal{F}_1} \max_{A \in \mathcal{G}_1(\mu)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (x - a)^2 dG_A(a) dF_X(x) = \min_{\lambda \in [0,1]} H(\lambda)$$

donde $H(\lambda) = \min_{X \in \mathcal{F}_1(\lambda)} \max_{A \in \mathcal{G}_1(\mu)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (x - a)^2 dG_A(a) dF_X(x)$.

Para cada $\lambda \in [0, 1]$, el Teorema 2.4.4 prueba que el mínimo en la definición de $H(\lambda)$ se alcanza en la variable aleatoria $X^*(\lambda)$ donde $P[X^*(\lambda) = \lambda] = 1$. Por tanto, si buscamos el mínimo en λ obtenemos que

$$\min_{\lambda \in [0,1]} H(\lambda) = \min_{\lambda \in [0,1]} \max_{A \in \mathcal{G}_1(\mu)} \text{Var}(A) + (\mu - \lambda)^2.$$

De aquí, $\{\mu\} = \arg \min_{\lambda \in [0,1]} F(\lambda)$ y se sigue el resultado. \square

Este resultado prueba que con la medida de las distancias a través de l_2^2 también es óptimo aparcar la unidad de servicio, incluso en el caso en el que se le permita el patrullar. En este caso, una posición óptima coincide con el valor de la media de la distribución de la demanda.

Finalmente, resolvemos el problema n -dimensional. De nuevo los mismos argumentos empleados para probar (2.40) puede ser usados para probar que

$$\begin{aligned} \min_{X \in \mathcal{F}} \max_{A \in \mathcal{G}(\mu)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 dG_A(a) dF_X(x) &= \\ \sum_{i=1}^n \min_{X_i \in \mathcal{F}_1} \max_{A_i \in \mathcal{G}_1(\mu_i)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (x_i - a_i)^2 dG_{A_i}(a_i) dF_{X_i}(x_i). \end{aligned}$$

De esta forma, también podemos resolver el problema n -dimensional a través de la resolución de n problemas unidimensionales diferentes.

Los resultados en esta sección son fácilmente interpretables. Éstos muestran que si las distancias son medidas con la función l_2^2 la política óptima de la unidad de servicio que minimiza la máxima distancia esperada a una variable aleatoria es aparcarla en el valor común de la media μ de la familia $\mathcal{G}(\mu)$.

2.5 Notas finales

En las dos primeras secciones de este capítulo hemos considerado dos extensiones diferentes del problema de Weber, considerándose en la primera extensión como función objetivo la suma ponderada de las distancias y, en la segunda, una función objetivo mucho más genérica. Dichos problemas pueden ser considerados como la extensión natural del problema de localización estático clásico al caso dinámico.

Una de las principales dificultades que conllevan estas extensiones es que al considerar problemas de optimización sobre espacios infinito dimensionales $L^p(I, \mathbb{R}^m)$, determinados resultados clásicos de espacios finito dimensionales no se cumplen, lo que nos obliga a hacer uso de otras herramientas para su resolución.

En relación a la primera extensión, el problema dinámico de Weber, hemos desarrollado una adaptación del algoritmo clásico de Weiszfeld, para el cual se ha probado su convergencia bajo la condición de que la sucesión generada por dicho algoritmo sea regular.

La segunda extensión la hemos realizado para conseguir dos objetivos principalmente. Primero, desarrollar una función objetivo que cubra o que modele un mayor número de situaciones reales y segundo, el desarrollar un método de resolución que nos permita resolver el primer modelo cuando la sucesión no sea regular. Para alcanzar esos objetivos hemos presentado una nueva función objetivo y hemos resuelto dicho problema a través de problemas aproximados, donde la función objetivo era continuamente diferenciable para toda función del espacio $L^p(I, \mathbb{R}^m)$. Obteniendo de esta forma una sucesión donde cada uno de sus puntos de acumulación es una solución óptima del problema considerado.

Para ambas extensiones mostramos unos ejemplos ilustrativos de la metodología desarrollada, demostrando que ambas extensiones no son triviales, es decir, la solución de dichos problemas no es la obtenida al resolver dicho problema para cada instante de tiempo a través de los algoritmos clásicos de localización estáticos.

Los resultados obtenidos en la cuarta sección son una extensión de los resultados obtenidos en Carrizosa et al. (1998) para un problema diferente. La principal diferencia en nuestra aproximación es que no hay ninguna suposición sobre la distribución de la demanda aparte del conocimiento del valor de su media, mientras que en ese trabajo se conoce exactamente dicha distribución. Bajo estas hipótesis sabemos que: 1) para la distancia l_1 es óptimo aparcar la unidad de servicio en los puntos extremos del intervalo de demanda dependiendo del valor de la media μ ; 2) para la medida de las distancias l_2^2 la política óptima es aparcar la unidad de servicio en el valor de la media de la demanda, μ .

Estos resultados son diferentes de los obtenidos previamente para la minimización de la distancia esperada de las distancias, habiéndose demostrado en Carrizosa et al. (1998), que es óptimo aparcar la unidad de servicio en la mediana de la distribución de la demanda. Estos resultados muestran que, dependiendo del grado de conocimiento sobre la distribución de demanda, se deben decidir diferentes políticas para cubrir dicha demanda. En particular, los resultados de esta sección pueden ser usados cuando la

única información de la distribución de la demanda es su media.

Apéndice

En esta sección introducimos algunas notas matemáticas necesarias a lo largo del capítulo. Comenzamos definiendo los denominados espacios de Sobolev $W^{1,p}$ que son espacios de los espacios de funciones L^p .

Definición 2.5.1 *El espacio de Sobolev $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$ es el conjunto*

$$\{x \in X_p : \exists g \in X_p \text{ tal que } \int_I x(t)\phi'(t) dt = - \int_I g(t)\phi(t) dt \quad \forall \phi \in C_c^1(I, \mathbb{R}^m)\}$$

donde $C_c^1(I, \mathbb{R}^m)$ es el espacio de funciones continuamente diferenciable con soporte compacto. Denotamos $g = x'$, porque si x es diferenciable y su derivada pertenece a X_p entonces la función g es su derivada.

El espacio $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$ es un espacio de Banach con la siguiente norma

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|u'\|_p.$$

Para un mejor entendimiento de este capítulo incluimos sin demostración varias propiedades de estos espacios que suelen emplearse para probar resultados de convergencia fuerte. Las demostraciones de estas propiedades y otros resultados pueden encontrarse en el libro de Brezis (1983).

Lema 2.5.1 *Se verifican los siguientes enunciados;*

- i) *Sea $u, v \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$ entonces $uv \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$.*
- ii) *Existe una inyección compacta desde $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$ a X_p .*

El apartado ii) del lema anterior tiene una gran importancia ya que la existencia de inyección compacta implica que si una sucesión converge en la topología débil de $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$ también lo hace en la topología fuerte de X_p .

Finalmente, recordamos algunos conceptos referentes a los diferentes modos de convergencia en un espacio normado que serán usados a lo largo del capítulo. Se denota por X_p^* el espacio dual de X_p , de forma que la aplicación de la función $z \in X_p^*$ sobre $x \in X_p$ viene denotada por $\langle z, x \rangle$. Se sabe que $X_p^* = X_q$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $p > 1$.

Definición 2.5.2 Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ se dice fuertemente convergente a $\bar{x} \in X$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \bar{x}\| = 0.$$

En el mismo sentido, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se dice débilmente convergente a $\bar{x} \in X$ si para todo $z \in X^*$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle z, x_n - \bar{x} \rangle = 0.$$

Se sabe que la convergencia fuerte implica la débil pero que de forma general no siempre se obtiene el inverso.

Otro tipo de convergencia es la llamada epi-convergencia, concepto que tiene gran importancia porque establece la relación entre la convergencia de funciones y la convergencia de la sucesiones de sus mínimos. Para un estudio más completo de este concepto ver la Definición 1.9 en el libro de Attouch (1984).

Definición 2.5.3 Sea $\{f; f_n \ n = 1, 2, \dots\}$ una sucesión de funciones. Decimos que f_n epi-converge a g , si para todo x

$$\begin{aligned} \inf_{x_n \rightarrow x} \liminf_{n \rightarrow \infty} g^n(x^n) &\geq g(x) \\ \inf_{x_n \rightarrow x} \limsup_{n \rightarrow \infty} g^n(x^n) &\leq g(x) \end{aligned}$$

donde el ínfimo se toma con respecto a todas las sucesiones que convergen a x .

Capítulo 3

El problema ordenado de Weber

Supongamos un conjunto de puntos de demanda $A := \{a_1, a_2, \dots, a_M\}$ y dos conjuntos de escalares no negativos $W = \{w_1, \dots, w_M\}$ y $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_M\}$; tales que el elemento w_i de W representa la importancia del punto de demanda a_i y los elementos de Λ diseñan la función objetivo.

Dada una permutación σ del conjunto $\{1, \dots, M\}$ verificando

$$\omega_{\sigma_1} \gamma(x - a_{\sigma_1}) \leq \omega_{\sigma_2} \gamma(x - a_{\sigma_2}) \leq \dots \leq \omega_{\sigma_M} \gamma(x - a_{\sigma_M})$$

denotamos

$$\gamma(x - A)_{(i)} = w_{\sigma_i} \gamma(x - a_{\sigma_i}). \quad (3.1)$$

El problema ordenado de Weber introducido por Puerto y Fernández (1995), viene dado por la siguiente expresión:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) = \sum_{i=1}^M \lambda_i \gamma(x - A)_{(i)}. \quad (3.2)$$

donde $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_M$.

Hemos de hacer notar que esta función objetivo nos permite modelar situaciones reales en las cuales se pretenda ubicar un servicio que no esté muy lejos de un determinado punto de demanda, ya que las mayores distancias, ponderadas por los elementos de W , son las penalizadas en mayor medida.

Por otro lado, observamos que esta función objetivo puede tener diferentes expresiones dependiendo del punto evaluado, es decir, su forma funcional está definida puntualmente. Con lo cual, su manejo va a tener la dificultad añadida de no poseer una expresión común en todo el espacio. Por otro lado, dicha dificultad se ve compensada, en cierto modo, por la gran cantidad de modelos que se pueden considerar como casos particulares del problema ordenado de Weber; como podemos ver en el siguiente resultado.

Teorema 3.0.1

- i) *El problema de Weber es un problema ordenado de Weber donde $\lambda_1 = \dots = \lambda_M = 1$.*
- ii) *El problema centdian es un problema ordenado de Weber donde $\lambda_1 = \dots = \lambda_{M-1} = \lambda$ y $\lambda_M = 1 - \lambda$.*
- iii) *El problema minimax es un problema ordenado de Weber donde $\lambda_1 = \dots = \lambda_{M-1} = 0$ y $\lambda_M = 1$.*

Por tanto, debido a que bajo la formulación del problema ordenado de Weber podemos englobar modelos clásicos de localización, a través del estudio de este problema podemos:

- a) Caracterizar el conjunto de soluciones de varios modelos simultáneamente.
- b) Desarrollar un algoritmo eficiente único que resuelva esos problemas.

En este capítulo, nos vamos a centrar principalmente en el caso en el que las distancias vengan medidas a través de calibradores poliédricos, aunque también estudiaremos el caso general a través de un método de aproximación. De esta forma, en primer lugar vamos a estudiar las propiedades geométricas de este problema. A continuación, desarrollaremos un algoritmo, acompañado del análisis de su complejidad, que resuelve el problema considerado. Finalmente, consideraremos la extensión de este problema al caso en el cual los pesos no sean todos positivos, desarrollando un algoritmo y estudiando la complejidad del mismo.

3.1 Problema ordenado de Weber con calibradores poliédricos

En primer lugar, vamos a estudiar las propiedades geométricas del problema ordenado de Weber con calibradores poliédricos. Para ello, comenzaremos definiendo formalmente el concepto de calibrador, que es la función utilizada para medir las distancias.

Sea $B \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto convexo, cerrado y acotado en cuyo interior está el origen. El calibrador asociado a la bola unidad B viene dado por

$$\gamma(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda B\}$$

y donde $\gamma(x)$ nos mide la distancia entre x y el origen. Es decir, la distancia entre x e y viene dada por $\gamma(y - x)$ (ver Durier y Michelot (1985), Puerto y Fernández (1995) y Rodríguez-Chía et al. (1997) para ver diferentes usos de los calibradores en problemas de localización). En particular si B es simétrica γ es una norma.

Como hemos dicho en la introducción, a lo largo de este capítulo consideraremos el caso en el que las distancias estén medidas a través de calibradores poliédricos y posteriormente, haremos una extensión al caso general a través de aproximaciones poliédricas.

Debido a que estamos interesados principalmente en el caso de calibradores poliédricos supondremos en el resto de la sección que B es un polítopo acotado en cuyo interior está el cero y tal que el conjunto de puntos extremos de B es el conjunto $Ext(B) = \{e_g : g = 1, \dots, G\}$. En este caso definimos las direcciones fundamentales L^1, \dots, L^G como las semirrectas definidas por 0 y e_1, \dots, e_G . Además, definimos $cone(L^g, L^{g+1})$ como el cono convexo generado por L^g y L^{g+1} (direcciones fundamentales de B) donde $L^{G+1} := L^1$.

El conjunto polar B° de B viene dado por

$$B^\circ = \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, p \rangle \leq 1 \quad \forall p \in B\}$$

En el caso poliédrico, B° es también un politopo, cuyos puntos extremos son $\{b_g^\circ : g = 1, 2, \dots, G\}$, en \mathbb{R}^2 , ver Ward y Wendel (1985) y Durier y Michelot (1985).

El cono normal a B en x es dado por

$$N(B, x) := \{p \in \mathbb{R}^n : \langle p, y - x \rangle \leq 0 \quad \forall y \in B\} \quad (3.3)$$

y la frontera de B se denota por $\text{bd}(B)$.

A continuación recordamos el concepto de convexo elemental, que fue introducido en Durier y Michelot (1985).

Definición 3.1.1 Sea $\pi = (p_i)_{i \in \mathcal{M}}$ una familia de elementos de \mathbb{R}^n tal que $p_i \in B^\circ$ para cada $i \in \mathcal{M}$ y sea

$$C_\pi = \bigcap_{i \in \mathcal{M}} (a_i + N(B^\circ, p_i)).$$

Un conjunto convexo no vacío C se le llama convexo elemental si existe una familia π tal que $C_\pi = C$.

Hemos de resaltar la importancia que tienen estos conjuntos en la resolución del problema de Weber, ya que el comportamiento de la función objetivo en dichos conjuntos es lineal. Además, reseñamos que en el caso de que los calibradores sean poliédricos pueden ser fácilmente calculables, ya que son los conjuntos resultantes de la intersección de los conos generados por las direcciones fundamentales de estas bolas en cada punto de demanda. Con lo cual, cada convexo elemental es un poliedro cuyos vértices se denominan puntos de intersección. Finalmente, en el caso de \mathbb{R}^2 existe una cota superior del número de convexos elementales que es $O((MG)^2)$. Para más detalles ver Durier y Michelot (1985) o Puerto y Fernández (1995).

En primer lugar, hemos de hacer notar que a pesar de que la función objetivo del Problema (3.2) es similar a la del problema de Weber, dicho problema no tiene una representación unificada en todo el espacio como una función aditiva de las distancias.

A partir de la definición de la función objetivo se deduce que la representación puede cambiar cada vez que $\omega_i \gamma(x - a_i) - \omega_j \gamma(x - a_j)$ se hace 0. En este apartado,

desarrollaremos una descripción geométrica de los conjuntos donde la representación como función aditiva de las distancias permanece invariante.

Definición 3.1.2 Al conjunto $B_\gamma(a_i, a_j)$, formado por los puntos $\{x : \omega_j \gamma(x - a_j) = \omega_i \gamma(x - a_i), i \neq j\}$, se le llama mediatriz de a_i y a_j con respecto a γ .

Como ilustración de la Definición 3.1.2 se puede ver en la Figura 3.1 la mediatriz para los puntos $a_1 = (1, 4)$ y $a_2 = (5, 1)$ con la norma l_1 y pesos $\omega_1 = \omega_2 = 1$.

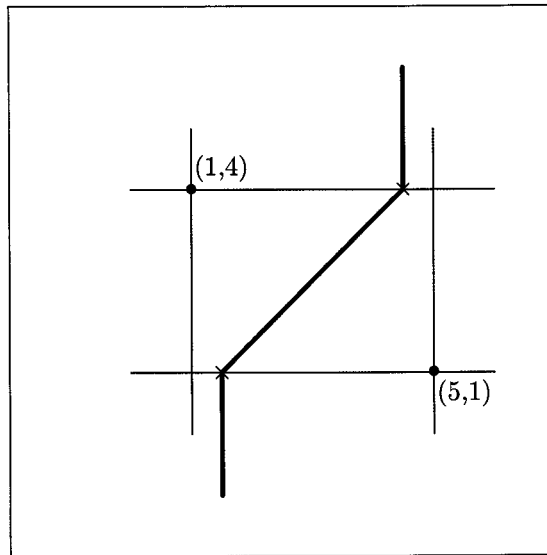


Figura 3.1: Mediatriz

Una vez que hemos introducido el concepto de convexo elemental y de mediatriz, vamos a estudiar el comportamiento de la función objetivo del problema ordenado de Weber. Para ello, usaremos el comportamiento lineal de los calibradores en cada convexo elemental.

Proposición 3.1.1 La mediatriz de a_i y a_j es un conjunto de puntos verificando unas ecuaciones lineales dentro de cada convexo elemental.

Demostración:

En un convexo elemental $\gamma(x - a_i)$ y $\gamma(x - a_j)$ pueden ser escritos como $l_i(x - a_i)$ y $l_j(x - a_j)$ respectivamente, donde $l_i(\cdot)$ y $l_j(\cdot)$ son funciones lineales. De esta forma, $\omega_i\gamma(x - a_i) = \omega_j\gamma(x - a_j)$ es equivalente a $\omega_i l_i(x - a_i) = \omega_j l_j(x - a_j)$ de donde se sigue el resultado. \square

A continuación damos una descripción más exacta de las mediatrices cuando nos restringimos a \mathbb{R}^2 .

Proposición 3.1.2 *La mediatriz de a_i y a_j con respecto a un calibrador poliédrico $\gamma(\cdot)$ con G puntos extremos tiene a lo más $O(G)$ subconjuntos diferentes definidos por ecuaciones lineales.*

Demostración:

Por la Proposición 3.1.1, las mediatrices son conjuntos de puntos determinadas por ecuaciones lineales dentro de cada convexo elemental, con lo cual, los únicos cambios de comportamiento pueden ocurrir sobre las direcciones fundamentales en a_i y a_j , es decir, $L_{a_i}^g$ y $L_{a_j}^g$ para cualquier $g = 1, \dots, G$.

Consideremos cualquier dirección fundamental $L_{a_i}^g$, en a_i . Sobre estas semirrectas la función $\gamma(x - a_i)$ es lineal con pendiente $+1$ y $\gamma(x - a_j)$ es lineal a trozos y convexa. Por tanto, el máximo número de ceros de $\omega_i\gamma(x - a_i) - \omega_j\gamma(x - a_j)$ cuando $x \in L_{a_i}^g$ es dos. De aquí, se obtiene que hay a lo más dos puntos de corte entre la mediatriz de a_i y a_j sobre $L_{a_i}^g$.

Repitiendo este razonamiento para cualquier dirección fundamental obtenemos que una cota superior para el número de puntos de cortes es $4G$. \square

Este resultado implica que el número de expresiones lineales que definen cualquier mediatriz es también lineal en G (el número de direcciones fundamentales). Observamos que en algunas ocasiones la mediatriz no tiene porque tener interior no vacío, ver por ejemplo la Figura 3.2, donde mostramos la mediatriz definida por los puntos $(0,0)$ y $(4,0)$ con la norma de Tchebychev.

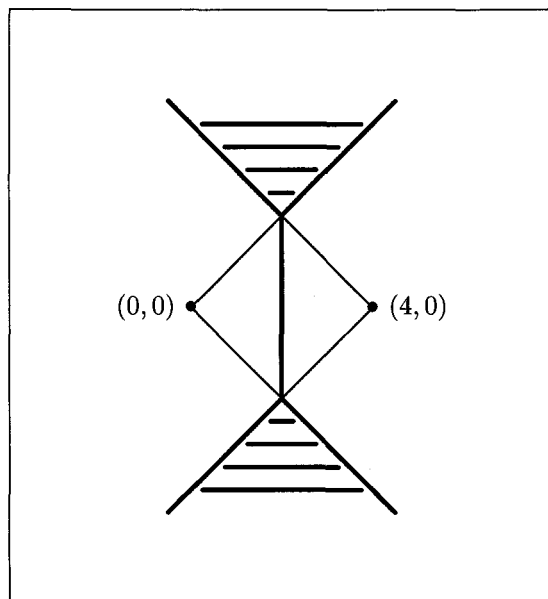


Figura 3.2: Mediatriz

Hemos de observar que cuando el orden de la secuencia ordenada de distancias no varía, la expresión de la función objetivo del problema ordenado de Weber no cambia. Con el objetivo de describir esas regiones donde la expresión de la función objetivo es invariante damos la siguiente definición.

Definición 3.1.3 Dada una permutación σ del conjunto $\{1, 2, \dots, M\}$ la región ordenada O_σ viene definida del siguiente modo

$$O_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : \omega_{\sigma_1} \gamma(x - a_{\sigma_1}) \leq \dots \leq \omega_{\sigma_M} \gamma(x - a_{\sigma_M})\}$$

Observación 3.1.1 Nótese que estas regiones no son necesariamente convexas, ver Figura 3.3.

La importancia de las regiones ordenadas radica en que el problema ordenado de Weber dentro de cada región se reduce a un problema de Weber clásico. Con esto podemos aprovechar los resultados sobre el comportamiento lineal del problema de Weber para aplicárselos al problema ordenado de Weber en cada región. De esta forma, damos las siguientes definiciones.

Definición 3.1.4 *Un convexo elemental generalizado es cualquier conjunto resultante de la intersección de un convexo elemental y una región ordenada.*

Observación 3.1.2 Hemos de hacer notar que estos conjuntos son convexos, ya que las mediatrices tienen un comportamiento lineal en cada convexo elemental. Por tanto, los convexos elementales generalizados son el resultado de aplicar restricciones lineales a un conjunto convexo.

Definición 3.1.5 *Los puntos de intersección generalizados son los vértices de los convexos elementales generalizados. El conjunto de puntos de intersección generalizados se denota por \mathcal{GIP} .*

Resaltamos la importancia de los convexos elementales generalizados, ya que en dichos conjuntos el comportamiento de la función objetivo es lineal; ello se debe a que resultan de la intersección de una región ordenada, región donde el comportamiento del problema ordenado de Weber es igual al de un problema de Weber, y un convexo elemental, conjunto donde el comportamiento del problema de Weber es lineal.

Para concluir con la descripción de las regiones ordenadas, se puede observar que dichas regiones están definidas a lo más por $M - 1$ mediatrices.

Sin embargo, la principal desventaja de tratar con estas regiones es su complejidad. Un análisis a primera vista, podría conducirnos a concluir que el número de regiones ordenadas es $M!$, lo que haría que el problema fuera intratable. Afortunadamente, podemos obtener una cota polinomial del número de regiones ordenadas que nos permita desarrollar un algoritmo eficiente para resolver el problema.

Teorema 3.1.1 *Una cota superior sobre el número de regiones ordenadas es $O(M^4 G^2)$.*

Demostración:

Dadas dos mediatrices con $O(G)$ tramos lineales el máximo número de intersecciones es $O(G^2)$. El número completo de mediatrices de M puntos es $\binom{M}{2}$, entonces, el

máximo número de intersecciones entre ellos es $O(G^2 \binom{M}{2})$. Puesto que el número de intersecciones tiene la misma complejidad que el número de regiones, una cota superior para el número de regiones ordenadas es $O(M^4 G^2)$. \square

Un análisis detallado de este teorema muestra que esta cota no es demasiada elevada. Aunque es del orden $M^4 k^2$, observamos que el número de mediatrices entre los puntos de A es $\binom{M}{2}$ el cual es del orden M^2 . Por tanto, incluso en el caso más favorable de que las mediatrices sean líneas rectas, el número de regiones en el análisis del peor caso es del orden $O(\binom{M}{2}^2)$, es decir, del orden $O(M^4)$. Debido a que estamos considerando conjuntos con G tramos, esta cota es bastante ajustada.

Ejemplo 3.1.1 *La Figura 3.3 muestra las regiones ordenadas entre los puntos $a_1 = (0, 11)$, $a_2 = (3, 0)$ y $a_3 = (16, 8)$ con la norma hexagonal $(\gamma(\cdot))$, cuyo conjunto de puntos extremos es $Ext(B) = \{(2, 0), (1, 2), (-1, 2), (-2, 0), (-1, -2), (1, -2)\}$ y con pesos $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$. Por ejemplo, la región $O_{(3,2,1)}$ es el conjunto de puntos*

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \gamma(x - a_3) \leq \gamma(x - a_2) \leq \gamma(x - a_1)\}.$$

3.1.1 Modelo unifacilidad

Una vez que han sido introducidas las principales propiedades geométricas de este nuevo modelo, vamos a desarrollar un procedimiento algorítmico que nos permita resolver el problema ordenado de Weber.

Hemos de hacer notar que se han desarrollado varias aproximaciones algorítmicas para el problema de Weber con normas poliédricas, ver Carrizosa y Puerto (1995), Puerto (1996) o Ward y Wendell (1985).

En primer lugar, a pesar de que no existe una única representación global de la función objetivo vamos a probar que ésta es convexa, lo que hará posible, usando las herramientas del análisis convexo junto con las descripciones geométricas introducidas anteriormente, desarrollar un algoritmo eficiente para resolver el problema.

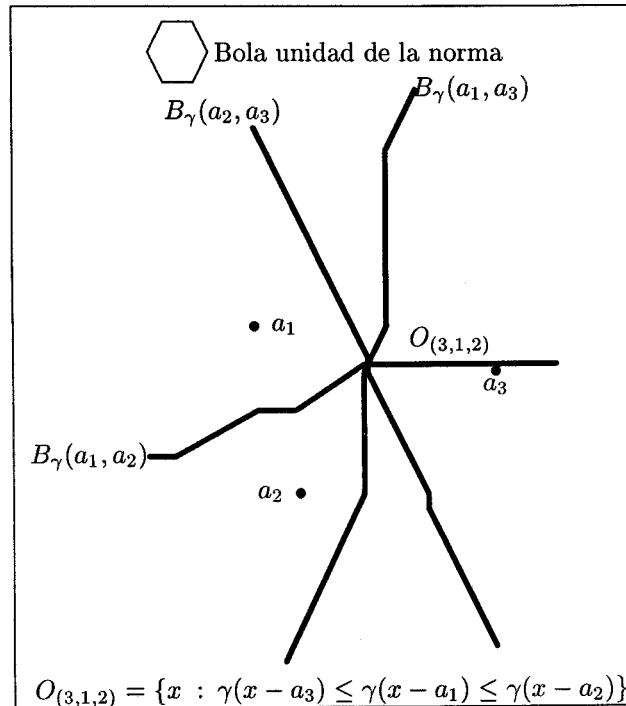


Figura 3.3: Regiones ordenadas

Lema 3.1.1

$$F(x) = \sum_{i=1}^M \lambda_i \gamma(x - A)_{(i)} = \max_{\sigma \in P(M)} \sum_{i=1}^M \lambda_i \omega_{\sigma_i} \gamma(x - a_{\sigma_i})$$

siendo $P(M)$ el conjunto de permutaciones de $\{1, \dots, M\}$.

Demostración:

La demostración de este resultado es una consecuencia del Teorema 386 de Hardy et al. (1952). □

Observación 3.1.3 Esta formulación puede ser interpretada como un modelo que minimiza la máxima pérdida.

Lema 3.1.2 F es una función convexa.

Demostración:

Por el lema previo, $F(x)$ es el máximo de funciones convexas con lo cual es convexa.

□

Observación 3.1.4 Notemos que la función objetivo 3.2 es convexa si y solo si los pesos están ordenados en orden creciente, ver Crouseix y Kebbour (1996).

A continuación mostramos un ejemplo en el que la función objetivo del problema ordenado de Weber sin pesos ordenados no es convexa. En este ejemplo, obtenemos que el conjunto de soluciones óptimas es un conjunto no convexo, lo que muestra que bajo estas condiciones generales la función objetivo (3.2) no es convexa.

Ejemplo 3.1.2 Consideremos el conjunto $A := \{a_1 = (3, 0), a_2 = (16, 8)\}$ y la norma hexagonal definida en el Ejemplo 3.1.1. La función

$$G(x) = 2\gamma(x - A)_{(1)} + \gamma(x - A)_{(2)}$$

no es una función convexa porque en la región ordenada $O_{(1,2)}$,

$$G(x) = 2\gamma(x - (3, 0)) + \gamma(x - (16, 8))$$

y en $O_{(2,1)}$

$$G(x) = 2\gamma(x - (16, 8)) + \gamma(x - (3, 0))$$

Por tanto, usando el teorema de la mayoría obtenemos que las soluciones óptimas de este problema son $(3, 0)$ y $(16, 8)$. Es decir, el conjunto de soluciones óptimas no es convexo, por eso $G(x)$ no es convexa. En la Figura 3.4 se da una representación gráfica de este ejemplo.

Hemos de hacer notar que en Puerto y Fernández (1995) se prueba que el conjunto de soluciones óptimas del Problema (3.2) coincide con los convexos elementales generalizados. Sin embargo, la existencia de un gran número de convexos elementales generalizados requiere algún procedimiento de enumeración a partir del cual podamos deducir un algoritmo que nos permita la resolución de dicho problema.

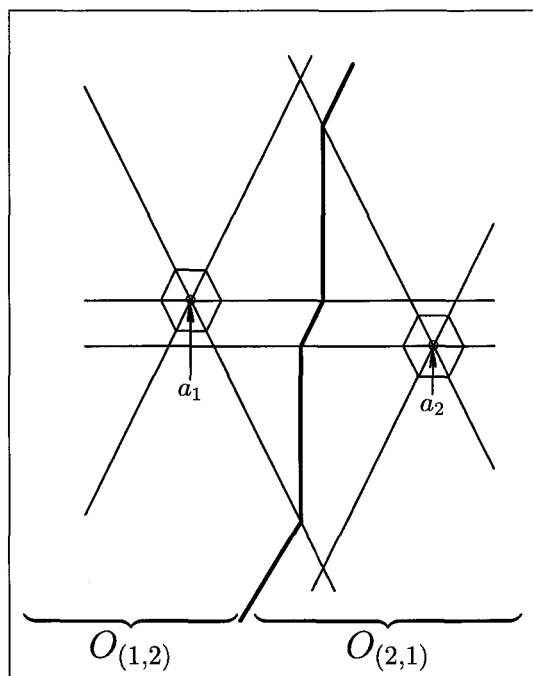


Figura 3.4: No convexidad de la función objetivo.

Debido a que nos hemos restringido al caso de normas poliédricas podemos dar un procedimiento alternativo. Dentro de cada región ordenada, O_σ , consideramos el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i=1}^M \lambda_i \omega_{\sigma_i} z_{\sigma_i} \\
 \text{s.a.} \quad & \omega_i \langle b_g^o, x - a_i \rangle \leq z_i \quad b_g^o \in B^o, i = 1, 2, \dots, M \\
 & z_{\sigma_i} \leq z_{\sigma_{i+1}} \quad i = 1, 2, \dots, M - 1
 \end{aligned} \tag{P_\sigma}$$

donde b_g^o son las direcciones fundamentales de B^o .

Lema 3.1.3 *Si una solución óptima x^* de (P_σ) está en O_σ entonces x^* es también una solución óptima de los problemas ordenados de Weber restringido a O_σ .*

Demostración:

En el punto x^* de O_σ se tiene que

$$\omega_i \langle b_{g_i}^o, x - a_i \rangle = z_i \quad , \text{ para algún } g_i = 1, \dots, G \text{ y para todo } i = 1, 2, \dots, M$$

lo que significa que $z_i = \omega_i \gamma(x - a_i)$ para todo $i = 1, 2, \dots, M$, de donde se obtiene el resultado. \square

Lema 3.1.4 *Si una solución óptima x^* de P_σ está en $O_{\sigma'} \neq O_\sigma$ entonces la solución óptima del problema ordenado de Weber restringido a $O_{\sigma'}$ es mejor que la solución óptima del problema ordenado de Weber restringido a O_σ .*

Demostración:

En un punto óptimo x^* de $O_{\sigma'}$ se tiene que

$$\omega_i \langle b_{g_i}^o, x - a_i \rangle < z_i \quad \text{para todo } g_i = 1, \dots, G$$

para al menos un i . Esto significa que la función objetivo del problema (P_σ) en x^* es menor que el valor objetivo de x^* en $P_{\sigma'}$. \square

A continuación, basándonos en el Lema 3.1.4 y en el hecho de que la función objetivo es globalmente convexa desarrollaremos un algoritmo que resuelve el problema ordenado de Weber. Para cada región ordenada resolveremos el problema como un problema de programación lineal, lo que supone geoméricamente que dentro de cada región ordenada encontramos la mejor solución localmente. Pudiendo ocurrir dos casos: si la solución está en el interior de la región considerada (en \mathbb{R}^n) por convexidad se tiene que esta solución es el óptimo global, mientras que si la solución está sobre la frontera tenemos que hacer una nueva búsqueda local en la región vecina a la que pertenece este punto.

ALGORITMO 3.1.1

PASO 0 ELEGIR x^o como punto de arranque.

INICIALIZAR $\mathcal{L} := \emptyset$, $y^ = x^o$.*

PASO 1 DETERMINAR la región ordenada, O_{σ^o} , a la cual pertenece y^ , donde σ^o determina el orden.*

PASO 2 RESOLVER el problema de programación lineal P_{σ^o} . Sea Ω^o el conjunto de soluciones óptimas y $\pi(\Omega^o) = \{(x_1, x_2) : (x_1, x_2, z_\sigma) \in \Omega^o\}$.

PASO 3 ELEGIR $y^o \in \pi(\Omega^o)$.

- SI $y^o \notin O_{\sigma^o}$ ENTONCES $y^ = y^o$ e IR AL PASO 1.*

- SI $y^o \in \text{int}(O_{\sigma^o})$ ENTONCES $y^ = y^o$ e IR AL PASO 7.*

- SI $F(y^o) \neq F(y^)$ ENTONCES $\mathcal{L} := \{\sigma^o\}$.*

PASO 4 SI existe i y j verificando

$$\gamma(y^o - a_{\sigma_i^o}) = \gamma(y^o - a_{\sigma_j^o}) \quad i < j \quad \text{tal que} \quad (\sigma_1^o, \dots, \sigma_j^o, \dots, \sigma_i^o, \dots, \sigma_n^o) \notin \mathcal{L}$$

ENTONCES

a) $y^ := y^o$, $\sigma^o := (\sigma_1^o, \sigma_2^o, \dots, \sigma_j^o, \dots, \sigma_i^o, \dots, \sigma_M^o)$.*

b) $\mathcal{L} := \mathcal{L} \cup \{\sigma^o\}$.

c) IR A PASO 2.

*PASO 5 SALIDA y^**

El algoritmo anterior es eficiente en el sentido de que está polinomialmente acotado. Una vez que hayamos fijado la dimensión del problema, su complejidad está dominada por la complejidad de resolver un problema en cada región ordenada, ya que el número de regiones ordenadas está polinomialmente acotado y la resolución de un problema de

programación lineal se puede hacer en tiempo lineal para una dimensión fija, utilizando el algoritmo de Megiddo (1984). Por tanto, el Algoritmo 3.1.1 es lineal en el número de celdas.

Ejemplo 3.1.3 Consideremos el problema con $\omega_i = 1 \ i = 1, \dots, M$,

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \gamma(x - A)_{(1)} + 2\gamma(x - A)_{(2)} + 3\gamma(x - A)_{(3)}$$

donde $A = \{(3, 0), (0, 11), (16, 8)\}$ y $\gamma_B(\cdot)$ es la norma hexagonal definida en el Ejemplo 3.1.1.

La Figura 3.5 muestra los convexos elementales generalizados para este problema. Notemos que las líneas gruesas representan las mediatrices entre los puntos de A , mientras las líneas finas son las direcciones fundamentales de la norma sobre cada punto de demanda. Resolvemos el problema usando el Algoritmo 3.1.1. Comenzando con el punto $x^0 = (0, 11)$ obtenemos la solución óptima en dos iteraciones. En la primera, obtenemos el punto $x^1 = (6.5, 8)$ con valor objetivo 26.25. En la segunda iteración, obtenemos $x^2 = (7, 8)$ con valor objetivo 26. Este punto no puede ser mejorado en su entorno, con lo cual es la solución óptima del problema.

Las iteraciones del algoritmo para este ejemplo se muestran en la Figura 3.6.

3.1.2 Extensión al caso multifacilidad

Una vez estudiado el caso unifacilidad pasamos a tratar la extensión N -facilidad que consiste en la localización de N nuevos servicios. El modelo multifacilidad que vamos a considerar pretende ubicar N nuevos servicios de tal forma que cada uno sirva a todos los puntos de demanda. Hemos de hacer notar que el estudio del modelo multifacilidad del problema ordenado de Weber es más complejo que el de los modelos multifacilidad clásicos, ya que en estos no se utilizan las distancias ordenadas. Por tanto, debido a que no se conocen resultados sobre la complejidad para el problema multifacilidad ordinario tampoco se tienen resultados acerca de la complejidad del problema multifacilidad del problema ordenado de Weber.

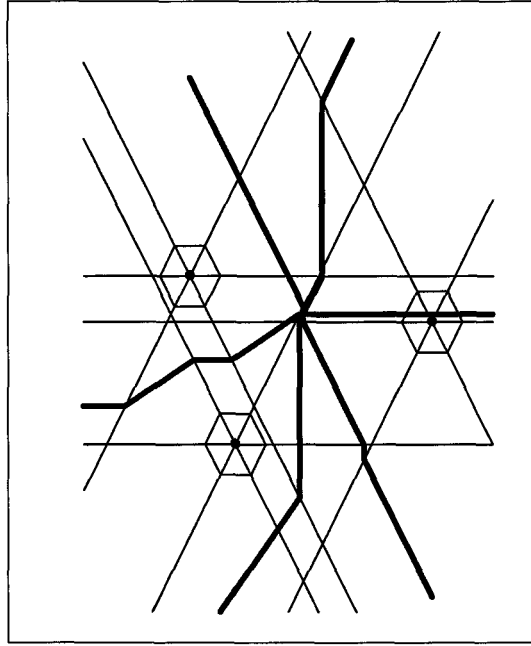


Figura 3.5: Convexos elementales generalizados

Antes de pasar a la formulación del problema, distinguiremos dos modelos diferentes según dos concepciones diferentes de los nuevos servicios a localizar. En el primer modelo, se parte de la idea de que existen diferencias con respecto a la importancia de los nuevos servicios a ubicar, con lo cual los servicios no son intercambiables. En el segundo, se acepta el principio de que todos los servicios tienen la misma importancia con respecto a los puntos de demanda, con lo cual se considera que los servicios son intercambiables.

3.1.3 El modelo multifacilidad no intercambiable

En esta versión del modelo multifacilidad a partir de un conjunto de puntos de demanda $A = \{a_1, a_2, \dots, a_M\}$ se pretende localizar N nuevos servicios x_1, x_2, \dots, x_N que minimicen la siguiente expresión:

$$F_I(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \lambda_{ij} \gamma(x_i - A)_{(j)} + \sum_{k=1}^N \sum_{l>k}^N \mu_{kl} \gamma(x_k - x_l) \quad (3.4)$$

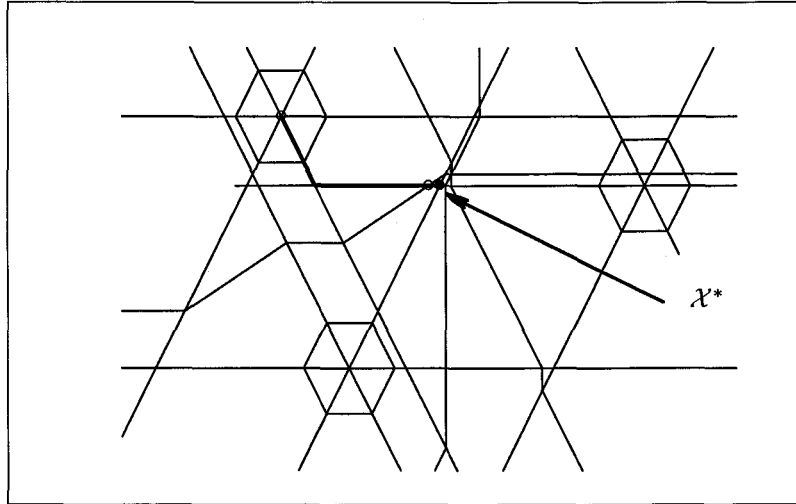


Figura 3.6: Solución óptima

donde

$$\lambda_{11} \leq \lambda_{12} \leq \dots \leq \lambda_{1M} \leq \lambda_{21} \leq \lambda_{22} \leq \dots \leq \lambda_{2M} \leq \dots \leq \lambda_{N1} \leq \lambda_{N2} \leq \dots \leq \lambda_{NM};$$

$\mu_{kl} \geq 0$ para cualquier $k = 1, \dots, N$, $k < l \leq N$ y $\gamma(x_i - A)_{(j)}$ es la expresión, que aparece en la j -ésima posición en la lista ordenada

$$\mathcal{M}_i = \{\omega_p^i \gamma(x_i - a_p), \text{ con } p = 1, 2, \dots, M\} \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.5)$$

Observación 3.1.5 Nótese que en esta formulación asignamos la importancia de los servicios en orden creciente de los índices, es decir, x_j se considera más importante que x_i si $i < j$. Por esta razón decimos que este modelo tiene servicios no intercambiables.

Para ilustrar este nuevo modelo mostraremos un ejemplo que sirve como motivación. Consideramos un conjunto de pequeños pueblos (los puntos de demanda) y queremos localizar un hospital y dos servicios de emergencia (traumatología y cardiología). Nuestro objetivo es localizar el hospital y los servicios de urgencia de tal forma que las distancias desde cada pueblo al hospital, las distancias desde cada centro

de emergencia a cualquier pueblo y las distancias desde cada centro de emergencia al hospital no sean demasiado grandes. Con estas hipótesis tenemos que usar el modelo multifacilidad con tres servicios, donde el hospital tiene los pesos mayores porque es el servicio más importante y donde los servicios de emergencia se pueden considerar que tienen igual importancia.

Como en el caso unifacilidad vamos a probar en el siguiente resultado que la función objetivo (3.4) es convexa, lo que facilita el análisis del problema y el desarrollo de un algoritmo eficiente.

Proposición 3.1.3 *La función objetivo F_I es convexa.*

Demostración:

Sabemos que

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \lambda_{ij} \gamma(x_i - A)_{(j)} = \sum_{i=1}^N \max_{\sigma^i} \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \omega_{\sigma_j^i} \gamma(x_i - a_{\sigma_j^i})$$

donde σ^i es una permutación del conjunto $\{1, 2, \dots, M\}$. De esta forma, la primera parte de la función objetivo es una suma de funciones convexas, por tanto, es convexa. Por otro lado, el segundo término de la función objetivo F_I es convexa. Con lo cual, F_I es una función convexa ya que es suma de funciones convexas. \square

El problema multifacilidad no intercambiable puede ser transformado en un problema de programación lineal dentro de cada región ordenada de la misma forma que el modelo unifacilidad. Hemos de hacer notar que en \mathbb{R}^n la división inducida por las regiones ordenadas de este problema viene dada por la unión de N subdivisiones. Cada una de estas N subdivisiones determina la región ordenada de cada nueva facilidad.

Sea $\sigma^k = (\sigma_1^k, \dots, \sigma_M^k)$ $k = 1, \dots, N$ la permutación que nos da el orden de la lista

\mathcal{M}_k introducida en (3.5). Consideremos el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M \lambda_{kl} z_{k\sigma_l^k} + \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \mu_{ij} y_{ij} \\
\text{s.a.} \quad & \omega_i^k \langle b_g^o, x_k - a_l \rangle \leq z_{kl} \quad b_g^o \in B^o \quad k = 1, 2, \dots, N \quad l = 1, 2, \dots, M \\
& \langle b_g^o, x_i - x_j \rangle \leq y_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad j = i + 1, \dots, N \\
& z_{k\sigma_l^k} \leq z_{k\sigma_{l+1}^k} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad l = 1, 2, \dots, M - 1 \\
& z_{kM} \leq z_{k+1,1} \quad k = 1, 2, \dots, M - 1
\end{aligned} \tag{P_\sigma^I}$$

Entonces, el Algoritmo 3.1.1 puede ser adaptado fácilmente al caso multifacilidad. Notemos que a diferencia del algoritmo anterior donde buscábamos un punto en \mathbb{R}^n , ahora buscamos N puntos en \mathbb{R}^n , o equivalentemente, un punto en \mathbb{R}^{nN} . Para hacer eso sólo tenemos que modificar el Paso 1 para la elección de N puntos de arranque en vez de uno. Además, también tenemos que considerar que las regiones ordenadas están definidas por diferentes permutaciones, una de cada lista \mathcal{M}_i . De esta forma, tenemos que reemplazar el problema de programación lineal P_σ por P_σ^I y adaptar su conjunto de soluciones óptimas.

Puesto que el algoritmo es esencialmente el mismo que el que hemos propuesto para el modelo unifacilidad, podemos concluir que está también acotado polinomialmente.

Ejemplo 3.1.4 Consideremos un problema con dos servicios

$$\begin{aligned}
\min_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2} \quad & 2.5\gamma_B(x_1 - A)_{(4)} + 2\gamma_B(x_1 - A)_{(3)} + 1.5\gamma_B(x_1 - A)_{(2)} + \gamma_B(x_1 - A)_{(1)} + \\
& + 0.75\gamma_B(x_2 - A)_{(4)} + 0.1\gamma_B(x_2 - A)_{(3)} + 0.1\gamma_B(x_2 - A)_{(2)} + 0.1\gamma_B(x_2 - A)_{(1)} + \\
& + 0.5\gamma_B(x_1 - x_2)
\end{aligned}$$

donde $A = \{(3, 0), (0, 11), (16, 8), (-4, -7)\}$, y $\gamma_B(\cdot)$ es la norma hexagonal que hemos usado en el Ejemplo 3.1.1.

Obtenemos la solución óptima en la segunda iteración, con el punto de arranque $x_1^o = (0, 11)$ y $x_2^o = (16, 8)$. La solución óptima es $(2.75, 5.5)$ y $(3.125, 5.875)$. Los convexos elementales y la solución óptima pueden verse en la Figura 3.7.

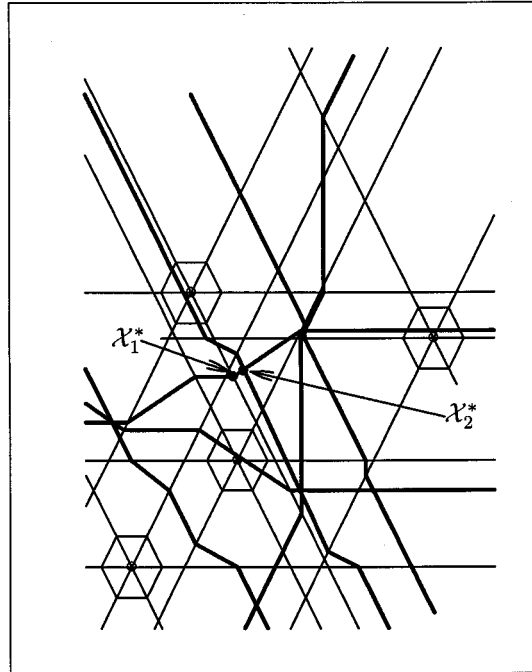


Figura 3.7: Dos-facilidad

3.1.4 El modelo multifacilidad intercambiable

El modelo multifacilidad que vamos a considerar difiere del anterior en el sentido de que las nuevas ubicaciones son similares desde el punto de vista de los usuarios. Con lo cual, los nuevos servicios no tienen diferente importancia con respecto a los puntos de demanda. De esta forma, los pesos asignados a cada punto de demanda sólo dependen del tamaño relativo de las distancias.

Usando la notación empleada en el caso anterior, el modelo intercambiable viene dado por la siguiente expresión:

$$F_{II}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{j=1}^{NM} \lambda_j \gamma(x - A)_{(j)} + \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \mu_{ij} \gamma(x_i - x_j)$$

donde

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{NM}$$

y $\gamma(x - A)_{(j)}$ es la expresión que aparece en la j -ésima posición en la siguiente lista

ordenada

$$\mathcal{M}_{II} = \{\omega_p^k \gamma(x_k - a_p), \text{ con } k = 1, 2, \dots, N \quad l = 1, 2, \dots, M\}.$$

Para la motivación de este modelo podemos proponer la siguiente situación real: Consideremos una universidad con 10 departamentos en la cual se quiere localizar tres servicios de asistencia para el profesorado, como pueden ser una sala de informática, una biblioteca y una sala de lecturas. Cualquier departamento necesita tener acceso a estos tres servicios. Además, se supone que existe una comunicación entre los tres servicios. Por tanto, queremos ubicar estos tres servicios de forma que, se minimicen la suma de las distancias entre servicios y además que se penalicen en mayor medida las grandes distancias entre los servicios y los departamentos. Bajo estas hipótesis esta situación puede ser formulada como un modelo intercambiable donde queremos localizar tres servicios.

Proposición 3.1.4 *La función objetivo F_{II} es convexa.*

Demostración:

La demostración es análoga a la dada para la Proposición 3.1.3. □

Usando de nuevo la misma estrategia que hemos empleado en el caso multifacilidad no intercambiable, el problema intercambiable puede ser resuelto usando una adaptación del Algoritmo 3.1.1.

Sea σ una permutación de $\{1, \dots, MN\}$ donde $\sigma_{(k-1)M+l}$ da la posición de $\omega_j \gamma(x_k - a_j)$ en \mathcal{M}_{II} .

Consideremos el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M \lambda_{\sigma_{kl}} z_{\sigma_{(k-1)M+l}} + \sum_{p=1}^N \sum_{q>p}^N \mu_{pq} y_{pq} \\ \text{s.a.} \quad & \omega_l^k \langle b_g, x_k - a_l \rangle \leq z_{(k-1)M+l} \quad b_g \in B^o \quad k = 1, 2, \dots, N \quad l = 1, 2, \dots, M \\ & \langle b_g, x_p - x_q \rangle \leq y_{pq} \quad p = 1, 2, \dots, N \quad q = p + 1, \dots, M \\ & z_{\sigma_{(k-1)M+l}} \leq z_{\sigma_{(k-1)M+l+1}} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad l = 1, 2, \dots, M - 1 \end{aligned} \quad (P_{\sigma}^{II})$$

Una vez que reemplazamos P_σ^I por P_σ^{II} podemos fácilmente adaptar el procedimiento mostrado para el modelo anterior en la Subsección 3.1.3. Por tanto, las mismas conclusiones que obtuvimos para el problema multifacilidad no intercambiable son aplicables al modelo multifacilidad intercambiable.

3.1.5 Caso restringido

En los últimos años un área, dentro de la Teoría de la Localización, que ha alcanzado una considerable atención ha sido la de los problemas de localización restringidos, ver por ejemplo Brady and Rosenthal (1983), Drezner (1983), Karkazis (1988), Aneja y Palar (1994), Francis et al. (1992), Hamacher y Nickel (1994) y Nickel (1995).

En esta sección vamos a estudiar el problema ordenado de Weber en el plano en el caso que tengamos una región prohibida, es decir, una región donde no se puede ubicar la solución óptima. El modelo que vamos a considerar tiene la formulación siguiente:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^M \lambda_i \gamma(x - A)_{(i)} \\ \text{s.a.} \quad & x \notin \mathcal{R} \end{aligned} \quad (P_{\mathcal{R}})$$

donde \mathcal{R} es una región convexa, $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_M$ y $\gamma(x - A)_{(i)}$ fue definido en (3.1).

Suponemos que la región prohibida \mathcal{R} contiene todas las soluciones del problema irrestringido. Esta hipótesis es necesaria, ya que en caso contrario, obtendríamos una solución óptima resolviendo el problema sin considerar la región prohibida. Además, si el número de regiones prohibidas es mayor que uno, para resolver el problema restringido sólo tenemos que considerar aquella región que contiene una solución óptima del problema irrestringido.

En primer lugar, extenderemos estos resultados al caso donde la región prohibida es un convexo general. Para localizar el nuevo servicio, usaremos el siguiente resultado:

Teorema 3.1.2 *El Problema $(P_{\mathcal{R}})$ con calibradores poliédricos tiene una solución óptima sobre las intersecciones de dimensión 0 entre la frontera de \mathcal{R} y una dirección fundamental o una mediatriz.*

Demostración:

Usando el mismo tipo de razonamiento que en el Teorema 2.4.5 en Nickel (1995), se sigue que las soluciones óptimas del problema ordenado restringido están en la frontera de la región prohibida. Además la función objetivo es lineal en cada convexo elemental generalizado, ver el Lema 3.1.4 y la demostración es análoga a Nickel (1995). \square

Como una consecuencia inmediata del Teorema 3.1.2 establecemos el siguiente algoritmo para resolver el problema unifacilidad con una región prohibida, \mathcal{R} .

ALGORITMO 3.1.2

PASO 1 CALCULAR el grafo plano generado por las direcciones fundamentales y las mediatrices entre los puntos de demanda.

PASO 2 DETERMINAR $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ los puntos que resultan de la intersección entre las direcciones fundamentales o las mediatrices y la frontera de la región prohibida, \mathcal{R} .

PASO 3 $x_{\mathcal{R}}^ \in \operatorname{argmin}\{f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_k)\}$ es una solución óptima al problema de localización restringido.*

PASO 4 El conjunto de soluciones óptimas es $\{x : f(x) = f(x_{\mathcal{R}}^)\} \cap \partial\mathcal{R}$.*

Para el caso particular de que la región prohibida sea una región poliédrica podemos obtener mejores resultados. Sea \mathcal{R} la región prohibida poliédrica, $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ el conjunto de caras de \mathcal{R} y $A = \{a_1, \dots, a_M\}$ el conjunto de puntos de demanda.

ALGORITMO 3.1.3

PASO 0 INICIALIZAR

- $p := 1$.

- $\mathcal{L} := \emptyset$.

- y^* un punto factible arbitrario.
- \mathcal{T}_p la recta definida por la cara s_p de \mathcal{R} , $p = 1, \dots, k$.
- \mathcal{T}_p^{\leq} el semiplano definido por \mathcal{T}_p que no contiene \mathcal{R} , $p = 1, \dots, k$.

PASO 1 ELEGIR x^o que pertenezca al interior relativo de s_p .

PASO 2 DETERMINAR la región ordenada a la que pertenece x^o , y la permutación σ^o que determina esta región.

PASO 3 RESOLVER el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i=1}^M \lambda_i z_{\sigma_i^o} \\
 \text{s.a.} \quad & \omega_i \langle b_g, x - a_i \rangle \leq z_i \quad b_g \in B^o, i = 1, 2, \dots, N \\
 & z_{\sigma_i^o} \leq z_{\sigma_{i+1}^o} \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \\
 & x \in \mathcal{T}_p^{\leq}
 \end{aligned} \tag{P_{\mathcal{T}_p^{\leq}}}$$

PASO 4 CONSIDERAR $\pi(\Lambda^o) = \{x : (x, z_\sigma) \in \Lambda^o\}$, donde Λ^o es el conjunto de soluciones óptimas de $P_{\mathcal{T}_p^{\leq}}$.

PASO 5 ELEGIR $y^o \in \pi(\Lambda^o)$.

- SI $y^o \notin O_{\sigma^o}$ HACER $x^o = y^o$ e IR AL PASO 2.
- SI $y^o \in \text{int}(O_{\sigma^o})$ ENTONCES $x^o = y^o$ IR AL PASO 7.
- SI $F(y^o) \neq F(x^o)$ ENTONCES $\mathcal{L} := \emptyset$

PASO 6 SI existe i y j verificando

$$\gamma(x^o - a_{\sigma_j^o}) = \gamma(x^o - a_{\sigma_i^o}) \quad i < j \quad \text{tal que} \quad (\sigma_1^o, \dots, \sigma_j^o, \dots, \sigma_i^o, \dots, \sigma_n^o) \notin \mathcal{L}$$

ENTONCES

- a) $x^o := y^o$, $\sigma^o := (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_n)$
- b) $\mathcal{L} := \mathcal{L} \cup \{\sigma^o\}$

c) IR AL PASO 3.

PASO 7 HACER

a) SI $F(x^o) < F(y^)$ ENTONCES $y^* := x^o$*

b) $p := p + 1$.

d) SI $p < k$ IR AL PASO 1.

PASO 8 SALIDA y^ .*

Observamos que este algoritmo puede ser usado para resolver problemas con regiones prohibidas convexas y no necesariamente poliédricas. Para hacerlo sólo tenemos que aproximar dichas regiones por otras poliédricas, aproximaciones con una precisión arbitraria pueden realizarse por ejemplo mediante la aproximación sandwich de Burkand et al. (1991). Con esta técnica el algoritmo nos daría una buena aproximación a la solución del problema original.

3.1.6 Caso no poliédrico

En los apartados anteriores hemos desarrollado una metodología para resolver el problema ordenado de Weber en el caso de que los calibradores sean poliédricos. Ahora en esta sección, nos planteamos el resolver el problema en el caso de que tengamos un calibrador general, no necesariamente poliédrico. Para ello, vamos a probar que las soluciones óptimas de estos problemas puede ser arbitrariamente aproximadas por una sucesión de soluciones óptimas de problemas con calibradores poliédricos convergiendo bajo la métrica de Hausdorff al caso no poliédrico considerado.

Aunque en esta sección sólo vamos a considerar la función objetivo del caso unifacilidad, $F(x)$, todos los resultados obtenidos pueden ser fácilmente extendidos al caso multifacilidad.

Sea B la bola unidad del calibrador $\gamma_B(\cdot)$, $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente de polígonos incluidos en B y $\{B^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de polígonos que incluyen

en B ,

$$B_n \subset B_{n+1} \subset B \subset B^{n+1} \subset B^n$$

Sean $\gamma_{B_n}(\cdot)$ y $\gamma_{B^n}(\cdot)$ los calibradores cuya bola unidad son B_n y B^n respectivamente.

Proposición 3.1.5 *Si $B_n \subset B \subset B^n$ tenemos que*

$$\gamma_{B_n}(x - y) \geq \gamma_B(x - y) \geq \gamma_{B^n}(x - y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

La demostración se sigue directamente de la definición de calibrador.

Recordemos que dados dos conjuntos compactos A, B la distancia de Hausdorff entre A y B es

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \max_{x \in A} d_2(x, B), \max_{y \in B} d_2(A, y) \right\}$$

donde $d_2(x, B) = \min_{y \in B} d_2(x, y)$ siendo d_2 la distancia euclídea.

Proposición 3.1.6 *Sea K un conjunto compacto. Si B_n converge a B y B^n converge a B con la métrica de Hausdorff, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$*

$$\begin{aligned} \max_{x \in K} |F_n(x) - F(x)| &< \varepsilon \\ \max_{x \in K} |F^n(x) - F(x)| &< \varepsilon \end{aligned}$$

siendo $F_n(x) := \sum_{i=1}^M \lambda_i \gamma_{B_n}(x - A)_{(i)}$ y $F^n(x) := \sum_{i=1}^M \lambda_i \gamma_{B^n}(x - A)_{(i)}$.

Demostración:

Sólo tenemos que probar la primera desigualdad. La segunda se sigue de forma análoga.

Puesto que B_n converge a B con la métrica de Hausdorff verificando que $B_n \subset B_{n+1}$ para todo n , y K es un conjunto compacto, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe n_a para todo $a \in A$ tal que si $n > n_A := \max_{a \in A} n_a$ entonces $\left| \gamma_B(x - a) - \gamma_{B_n}(x - a) \right| < \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^M \omega_i \sum_{i=1}^n \lambda_i} \quad \forall x \in K$.

Por continuidad se tiene que para cualquier i, j y cualquier $x \in K$ verificando que $\omega_i \gamma_B(x - a_i) < \omega_j \gamma_B(x - a_j)$ existe $n_o > n_A$ tal que

$$\omega_i \gamma_{B_n}(x - a_i) < \omega_j \gamma_{B_n}(x - a_j).$$

y tal que, para cualquier i, j y $x \in K$ con $\omega_i \gamma_B(x - a_i) = \omega_j \gamma_B(x - a_j)$ tenemos que $\gamma_B(x - A)_{(i)} = \omega_{\sigma_i^n} \gamma_B(x - a_{\sigma_i^n})$, donde $\omega_{\sigma_i^n} \gamma_{B_n}(x - a_{\sigma_i^n}) = \gamma_{B_n}(x - A)_{(i)} \forall n > n_o$. De aquí, tenemos que para cualquier $x \in K$ y $n > n_o$ que

$$|F_n(x) - F(x)| = \sum_{i=1}^M \lambda_i |\gamma_B(x - A)_{(i)} - \gamma_{B_n}(x - A)_{(i)}| = \sum_{i=1}^M \lambda_i \omega_{\sigma_i^n} |\gamma_B(x - a_{\sigma_i^n}) - \gamma_{B_n}(x - a_{\sigma_i^n})| < \varepsilon$$

□

Corolario 3.1.1

- i) Si B_n converge a B con la métrica de Hausdorff, entonces $F_n(x)$ converge a $F_B(x)$, además la sucesión $\{F_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente.
- ii) Si B^n converge a B con la métrica de Hausdorff, entonces $F^n(x)$ converge a $F_B(x)$, además la sucesión $\{F^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente.

A continuación, usaremos otro tipo de convergencia llamada epi-convergencia (ver la Definición 1.9 en el libro de Attouch (1984) y Apéndice del capítulo anterior). La epi-convergencia es un concepto de gran importancia porque establece una relación entre la convergencia de funciones y la convergencia de la sucesión de sus mínimos.

Teorema 3.1.3

- i) Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que $x_n \in \arg \min F_n(x)$, entonces cualquier punto de acumulación de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pertenece a $\arg \min F_B$.
- ii) Sea $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que $x^n \in \arg \min F^n(x)$, entonces cualquier punto de acumulación de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pertenece a $\arg \min F_B$.

Demostración:

Sólo probaremos la primera parte porque la segunda es análoga.

En primer lugar, debido a que la sucesión $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente podemos aplicar el Teorema 2.46 en Attouch (1984), obteniendo que la sucesión $\{F_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es epi-convergente.

Además obtenemos por la Proposición 2.4.8. en Attouch (1984) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{x \in \mathbb{R}^2} F_n(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} F_B(x) \quad (3.6)$$

Puesto que \mathbb{R}^n es un espacio primero numerable y $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es epi-convergente, obtenemos por el Teorema 2.12 de Attouch (1984) que cualquier punto de acumulación de la sucesión $\{x_n\}$ es una solución óptima de F_B . \square

3.2 El problema ordenado de Weber con atracción y repulsión

Como comentábamos en la introducción, la teoría de la localización ha tenido un gran auge en los últimos años, entre los modelos considerados encontramos el de localizar un centro seminocivo o no deseado. La formulación más simple de dicho modelo viene dada del siguiente modo

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^M \omega_i \gamma(x - a_i) \quad (3.7)$$

donde ω_i $i = 1, 2, \dots, M$ son constantes, $\gamma(\cdot)$ es un calibrador y a_i , $i = 1, 2, \dots, M$ son puntos de demanda.

Es decir, en este modelo se pretende localizar un servicio que sea atractivo para algunos puntos de demanda y repulsivo para otros. Siendo atractivo para aquellos que tienen asignado peso positivo y repulsivo para los que lo tengan negativo (ver Conde (1996), Drezner y Wesolowsky (1990), Tellier (1985), Tellier y Polanski (1989),

Puerto et al. (1997)). Este tipo de formulaciones permite modelizar una gran cantidad de situaciones reales, donde se pretende localizar por ejemplo, centrales químicas, basureros, . . . Estos centros se pueden considerar simultáneamente atractivos y repulsivos, pues incrementan la mano de obra a la vez que pueden resultar nocivos para las poblaciones cercanas.

Debido a que la función objetivo (3.7) no es convexa se han utilizado diferentes técnicas de optimización global para poder resolver dicho problema. Entre ellas, podemos destacar la programación *d.c.*, es decir, diferencia de convexas. En la programación *d.c.*, aprovechando que la función objetivo se puede expresar como diferencia de convexas, se transforma el problema considerado en uno equivalente en el cual se pretende optimizar una función cóncava restringida a una región convexa.

En esta sección, nuestro objetivo va a ser el de extender el modelo presentado en la sección anterior, el problema ordenado de Weber, al caso en el que los pesos no estén ordenados y no sean necesariamente positivos. Hemos de hacer notar que, que al no tener una de las dos condiciones anteriores tenemos que la función no es convexa y al tener los pesos ordenados de forma creciente tampoco tenemos que la función objetivo es *d.c.*. Por tanto, no podemos usar las herramientas clásicas para resolver este tipo de problemas. Por ello, daremos una condición necesaria de existencia de soluciones y utilizaremos las propiedades geométricas particulares de este problema para desarrollar dos algoritmos que nos permitan obtener la solución en un número finito de pasos. Finalmente también estudiaremos la complejidad de dichos algoritmos.

3.2.1 El modelo

El problema que vamos a tratar en esta sección es una generalización del denominado problema ordenado de Weber, para el que se consideran simultáneamente pesos positivos y negativos. Es decir, queremos localizar un servicio que es atractivo para algunos puntos de demanda y repulsivo para el resto, pero el carácter de atraktividad y repulsividad de un determinado punto no es una propiedad intrínseca, sino que depende del

orden que ocupa en la secuencia de distancias entre el servicio a ubicar y los puntos de demanda. En el resto de la sección consideraremos el problema en \mathbb{R}^2 , aunque se puedan considerar las extensiones directamente a \mathbb{R}^n en la mayor parte de casos.

Sean λ_i $i = 1, 2, \dots, M$ el conjunto de pesos asociados a los puntos de demanda. El modelo que vamos a considerar viene dado por la siguiente expresión:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} G(x) := \sum_{i=1}^M \lambda_i \gamma(x - A)_{(i)}$$

o equivalentemente

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} G(x) = \sum_{i=1}^M \lambda_i^+ \gamma(x - A)_{(i)} + \sum_{i=1}^M \lambda_i^- \gamma(x - A)_{(i)} \quad (3.8)$$

donde γ es una norma poliédrica,

$$\lambda_i^+ = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } \lambda_i > 0 \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

$$\lambda_i^- = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } \lambda_i < 0 \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

y donde $\gamma(x - A)_{(i)}$ $i = 1, 2, \dots, M$ fue definido en (3.1). Observamos que no se ha hecho ninguna suposición sobre el orden de los pesos.

Los modelos son bastante generales y permiten la formulación de diferentes situaciones. Por ejemplo, si consideramos que el valor absoluto de los pesos negativo es menor que el de los positivos, estamos considerando un modelo de una localización nociva (planta nuclear, basurero, etcétera) que es peligrosa o molesta para los centros cercanos pero que por razones económicas, tales como el precio del transporte, no conviene situarlas demasiado lejos, ya que se penalizan las grandes distancias.

Cuando los pesos son negativos puede ocurrir que la función objetivo G no esté acotada inferiormente, es decir, que tienda a $-\infty$ cuando las distancias crecen. Para evitar este problema probamos una propiedad que nos asegure la existencia de una solución óptima para el problema (3.8).

Para simplificar la notación del siguiente lema, definimos $W' = \min_{\sigma \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} \sum_{k=1}^M \lambda_k \omega_{\sigma_k}$ y $W'' = \max_{\sigma \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} \sum_{k=1}^M \lambda_k \omega_{\sigma_k}$ donde $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ es el conjunto de todas las permutaciones de $\{1, 2, \dots, M\}$.

Teorema 3.2.1 (Condición necesaria) *Si $W' > 0$ entonces cualquier localización óptima es finita. Si $W'' < 0$ entonces cualquier localización óptima está en el infinito.*

Demostración:

Sea $x \in \mathbb{R}^2$, con $x \in O_{\sigma}$. Por la desigualdad triangular, se tiene que para cualquier $k = 1, 2, \dots, M$

$$\gamma(x) - \gamma(a_{\sigma_k}) \leq \gamma(x - a_{\sigma_k}) \leq \gamma(x) + \gamma(a_{\sigma_k}) \quad k = 1, 2, \dots, M$$

Debido a que $\lambda_k^+ \geq 0$ y $\lambda_k^- \leq 0$ para todo $k = 1, 2, \dots, M$, se verifica que

$$\lambda_k^+ \omega_{\sigma_k} (\gamma(x) - \gamma(a_{\sigma_k})) \leq \lambda_k^+ \omega_{\sigma_k} \gamma(x - a_{\sigma_k}) \leq \lambda_k^+ \omega_{\sigma_k} (\gamma(x) + \gamma(a_{\sigma_k})) \quad k = 1, \dots, M$$

$$\lambda_k^- \omega_{\sigma_k} (\gamma(x) + \gamma(a_{\sigma_k})) \leq \lambda_k^- \omega_{\sigma_k} \gamma(x - a_{\sigma_k}) \leq \lambda_k^- \omega_{\sigma_k} (\gamma(x) - \gamma(a_{\sigma_k})) \quad k = 1, \dots, M$$

De donde, siendo $\lambda_k = \lambda_k^+ + \lambda_k^-$,

$$\lambda_k \omega_{\sigma_k} \gamma(x) - |\lambda_k| \omega_{\sigma_k} \gamma(a_{\sigma_k}) \leq \lambda_k \omega_{\sigma_k} \gamma(x - a_{\sigma_k}) \leq \lambda_k \omega_{\sigma_k} \gamma(x) + |\lambda_k| \omega_{\sigma_k} \gamma(a_{\sigma_k}) \quad k = 1, \dots, M$$

De esta forma, tomando el sumatorio en k se obtiene que

$$\sum_{k=1}^M \lambda_k \omega_{\sigma_k} \gamma(x) - U \leq G(x) \leq \sum_{k=1}^M \lambda_k \omega_{\sigma_k} \gamma(x) + U \quad (3.9)$$

donde $U = \max_{\sigma \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} \sum_{k=1}^M \lambda_k^+ \omega_{\sigma_k} \gamma(a_{\sigma_k}) - \sum_{k=1}^M \lambda_k^- \omega_{\sigma_k} \gamma(a_{\sigma_k})$.

Por tanto, sabiendo que

$$\begin{aligned} \min_{\sigma \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} \sum_{k=1}^M \lambda_k \omega_{\sigma_k} &= \sum_{k=1}^M \lambda_k \omega_{\sigma'_k} \text{ donde } \omega_{\sigma'_1} \geq \dots \geq \omega_{\sigma'_M} \\ \max_{\sigma \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} \sum_{k=1}^M \lambda_k \omega_{\sigma_k} &= \sum_{k=1}^M \lambda_k \omega_{\sigma''_k} \text{ donde } \omega_{\sigma''_1} \leq \dots \leq \omega_{\sigma''_M} \end{aligned}$$

se tiene que

1. Si $\sum_{k=1}^M \lambda_k \omega_{\sigma'_i} > 0$ y $\gamma(x) \rightarrow \infty$ entonces $G(x) \rightarrow \infty$. Esto implica que debe existir una solución mejor.
2. Si $\sum_{k=1}^M \lambda_k \omega_{\sigma''_i} < 0$ y $\gamma(x) \rightarrow \infty$ entonces $G(x) \rightarrow -\infty$. Esto implica que la solución óptima está en el infinito.

□

Corolario 3.2.1 *En el caso $\omega_1 = \dots = \omega_M$ se tiene que si $\sum_{k=1}^M \lambda_k > 0$ entonces cualquier localización óptima es finita. Si $\sum_{k=1}^M \lambda_k < 0$ entonces cualquier localización está en el infinito.*

Teorema 3.2.2 *Si $W' > 0$ el Problema (3.8) tiene siempre una solución óptima sobre un punto de intersección generalizado.*

Demostración:

Usando que la función objetivo del problema ordenado de Weber es lineal en cada convexo elemental generalizado se tiene que debe de alcanzar sus mínimos en algún punto de intersección generalizado. □

3.2.2 Formulaciones equivalentes

En primer lugar, antes de proceder con las formulaciones equivalentes del Problema (3.8), vamos a mostrar que la función objetivo del problema ordenado de Weber con pesos positivos y negativos no es ni convexa ni *d.c.*. Lo que supone que no podemos aplicar las técnicas usuales de análisis convexo o las técnicas habituales de la programación *d.c.* para resolver dicho problema. Observamos que el modelo original no hace ninguna suposición sobre que los pesos estén ordenados en orden creciente. Por tanto, ni la suma positiva de las distancias con pesos positivos, ni la suma de las distancias con peso negativo son funciones convexas. Esto implica que la función no puede ser

descompuesta como una diferencia de dos funciones convexas, es decir, este problema no es *d.c.*.

En efecto, dada la función objetivo a través de la siguiente expresión

$$G(x) = \sum_{i=1}^M \lambda_i^+ \gamma(x - A)_{(i)} - \sum_{i=1}^M |\lambda_i^-| \gamma(x - A)_{(i)}$$

podemos observar que las funciones $\sum_{i=1}^M \lambda_i^+ \gamma(x - A)_{(i)}$ y $\sum_{i=1}^M |\lambda_i^-| \gamma(x - A)_{(i)}$ son funciones convexas si y solo si la sucesión de pesos no negativos están en orden creciente (ver Crouseux y Kebbour (1996) y Ejemplo 3.1.2), es decir,

$$\lambda_i \leq \lambda_{i+1} \quad \forall i \in I^+$$

y

$$|\lambda_j| \leq |\lambda_{j+1}| \quad \forall j \in I^-$$

Lo anteriormente expuesto implica que de forma general no se tendrá una función objetivo del tipo *d.c.*.

Sin embargo, a pesar del hecho que la función objetivo no es *d.c.*, este problema tiene algunas propiedades especiales que permiten resolverlo usando formulaciones equivalentes.

Lema 3.2.1 *Una solución óptima del Problema (3.8) se puede obtener resolviendo el siguiente problema:*

$$\begin{aligned} \min_{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} \quad & g(x, t) := t + \sum_{j=1}^M \lambda_j^- \gamma(x - A)_{(j)} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^M \lambda_i^+ \gamma(x - A)_{(i)} \leq t \end{aligned} \quad (3.10)$$

Demostración:

Consideramos el conjunto $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : \sum_{j=1}^M \lambda_j^- \gamma(x - A)_{(j)} \leq t\}$, entonces

$$G(x) \leq g(x, t) \quad \forall (x, t) \in D \quad (3.11)$$

y

$$G(x) = g(x, \sum_{j=1}^M \lambda_j^+ \gamma(x - A)_{(j)}). \quad (3.12)$$

Por eso, si $g(y^*, t^*) = \min_{(y,t) \in D} g(y, t)$, obtenemos

$$t^* = \sum_{j=1}^M \lambda_j^+ \gamma(y^* - A)_{(j)}$$

porque $g(x, t) \geq g(x, \sum_{j=1}^M \lambda_j^+ \gamma(x - A)_{(j)}) \quad \forall x \in D$. De esta forma, obtenemos que y^* es una solución óptima del Problema (3.8).

Observamos que si x^* es una solución óptima del Problema (3.8), aplicando la desigualdad (3.11), entonces $(x^*, \sum_{j=1}^M \lambda_j^+ \gamma(x^* - A)_{(j)})$ es también una solución óptima del Problema (3.10).

□

Hemos de hacer notar que si restringimos el Problema (3.10) a cualquier dominio convexo donde el orden de las distancias sea fijo se tiene que la función objetivo de este problema es una función cóncava. Sin embargo, la dificultad especial que presenta el Problema (3.10) es que está restringido a una región no necesariamente convexa.

No obstante, puesto que estamos interesados en resolver el problema en el plano, es posible transformar el Problema (3.10) en un problema de programación lineal dentro de cada convexo elemental generalizado. De este modo, volvemos a establecer una formulación del Problema (3.10) que es más adecuada para el desarrollo de un algoritmo.

Consideremos una región ordenada O_σ y sea $C = \bigcap_{j=1}^M (a_{\sigma_j} + N(B^o, b_{a_{\sigma_j}}^o))$ un convexo elemental. Una solución óptima del Problema (3.8) puede ser obtenida al resolver el Problema (3.13) en cada convexo elemental generalizado

$$\begin{aligned} \min \quad & t + \sum_{j \in I^-} \lambda_j \omega_{\sigma_j} z_{\sigma_j} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i \in I^+} \lambda_i z_{\sigma_i} \leq t \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\omega_{\sigma_j} \langle b_{a_{\sigma_j}}^o, x - a_{\sigma_j} \rangle = z_{\sigma_j} \quad j = 1, \dots, M \quad (3.14)$$

$$x - a_{\sigma_j} \in N(B^o, b_{a_{\sigma_j}}^o) \quad j = 1, \dots, M \quad (3.15)$$

$$z_{\sigma_k} \leq z_{\sigma_{k+1}} \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

En efecto, $x - a_{\sigma_j} \in N(B^o, b_{a_{\sigma_j}}^o)$ es equivalente a $\gamma(x - a_{\sigma_j}) = \langle b_{a_{\sigma_j}}^o, x - a_{\sigma_j} \rangle$. Por tanto, $z_{\sigma_j} = \omega_{\sigma_j} \gamma(x - a_{\sigma_j})$ para cualquier $x \in C$.

Definimos los conjuntos

$$D = \{(x, t) \in (C \cap O_\sigma) \times \mathbb{R} : \sum_{i=1}^M \lambda_i^+ \omega_{\sigma_i} \gamma(x - a_{\sigma_i}) \leq t\}$$

$$D' = \{(x, t, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M : \sum_{j=1}^M \lambda_j^+ z_{\sigma_j} \leq t, \omega_{\sigma_j} \langle b_{a_{\sigma_j}}^o, x - a_{\sigma_j} \rangle = z_{\sigma_j}, \\ x \in a_{\sigma_j} + N(B^o, b_{a_{\sigma_j}}^o) \quad j = 1, \dots, M, z_{\sigma_k} \leq z_{\sigma_{k+1}}, k = 1, 2, \dots, M - 1\}.$$

La proyección de las primeras $n + 1$ componentes de estos conjuntos coinciden. Además, D' es el conjunto factible de (3.13); con lo cual, combinando ambos resultados y usando el resultado de que la familia de convexos elementales generalizados genera una partición en el plano, obtenemos que si existe una solución óptima del Problema (3.10) en la región ordenada $O_\sigma \cap C$, ésta se puede obtener resolviendo el Problema (3.13).

3.2.3 El algoritmo

El problema anterior puede ser resuelto, por un lado, a través de la aplicación directa del Teorema 3.2.2. Esto implica que debemos llevar a cabo una búsqueda en el conjunto de puntos de intersección generalizado (\mathcal{GIP}). El segundo procedimiento consiste en resolver el problema en cada convexo elemental generalizado donde tenemos la formulación equivalente (3.13), que es un problema de programación lineal.

El primer procedimiento es muy simple pero implica el cálculo del conjunto completo de puntos de intersección. El segundo procedimiento usa la formulación equivalente

presentada en el apartado anterior, utilizando la ventaja del comportamiento lineal de la función objetivo considerada dentro de cada convexo elemental generalizado que nos evita la enumeración completa del conjunto de puntos de intersección. Sin embargo, como el problema considerado no es ni convexo ni *d.c.*, tenemos que resolver un problema de programación lineal en cada convexo elemental generalizado. Básicamente el segundo procedimiento es un método de barrido en la familia de convexos elementales generalizados.

ALGORITMO 3.2.1

PASO 0 CALCULAR el grafo plano generado por todas las direcciones fundamentales y las mediatrices entre cada par de puntos de demanda.

PASO 1 CALCULAR la función objetivo en cada punto de intersección generalizado.

PASO 2 SALIDA $x^ = \operatorname{argmin}_{x \in \text{GITP}} G(x)$ y $G(x^*)$.*

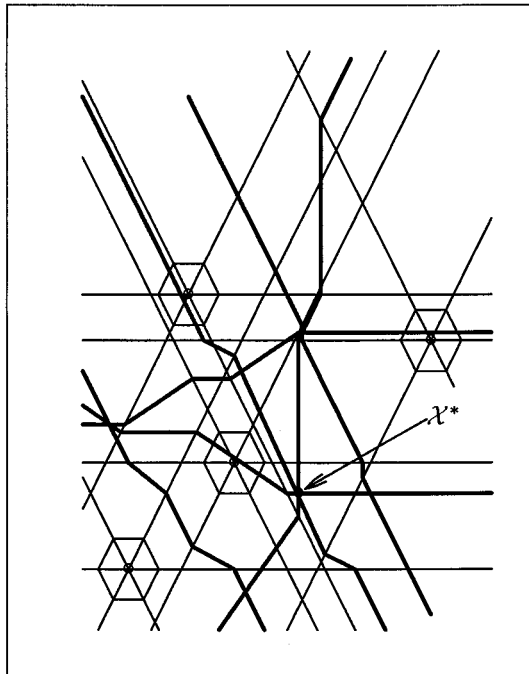


Figura 3.8: Ejemplo de atracción y repulsión.

ALGORITMO 3.2.2

PASO 0 (Inicialización). Sea $v^* = +\infty$, $\mathcal{L}_R = \mathcal{L}_A = \emptyset$.

PASO 1 - ELEGIR C_0 , un convexo elemental generalizado.

- CALCULAR $A(C_0)$, el conjunto de convexos elementales generalizados adyacentes a C_0 .

- HACER $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_A \cup A(C_0)$.

PASO 2 HASTA ($\mathcal{L}_A = \emptyset$)

- ELEGIR C_1 en \mathcal{L}_A .

- RESOLVER el Problema (3.13) en C_1 .

- Sea $V(C_1)$ el valor objetivo óptimo de la función objetivo del Problema (3.13).

- Analizar las soluciones:

$$SI V(C_1) < V^* ENTONCES V^* = V(C_1) \text{ y } X^* = \arg \min V^*$$

- HACER:

$$\mathcal{L}_A = (\mathcal{L}_A \setminus C_1) \cup (A(C_1) \setminus \mathcal{L}_R)$$

$$\mathcal{L}_R = \mathcal{L}_R \cup C_1$$

Los dos algoritmos anteriores son finitos porque podemos encontrar en ambos casos la solución óptima del problema original en tiempo polinomial. Sea G el número de direcciones fundamentales del calibrador $\gamma(\cdot)$. En el primer algoritmo, calculamos el grafo plano en tiempo polinomial, $O((M^4G^2)\log(MG))$, (Bentley y Ottmann (1979)). Entonces, tenemos que evaluar la función objetivo en cada punto de intersección, la cual necesita $O(M\log(Mk))$. Debido a que el número de \mathcal{GIP} es $O(M^4G^2)$, la complejidad completa es del orden $O(M^4G^2\log(MG) + M^5G^2\log(MG))$.

En el segundo caso, la complejidad del algoritmo está dominada por la complejidad de resolver un problema de programación lineal en cada convexo elemental generalizado. El grafo plano está generado en $O(M^4G^2\log(MG))$ y el número de convexos elementales generalizados es $O(M^4G^2)$. El algoritmo de Megiddo (1984), resuelve el Problema (3.13) en tiempo lineal $O(M)$. De esta forma, la complejidad total de este caso es de $O(M^5G^2 + M^4G^2\log(MG))$. En conclusión, el Algoritmo 3.2.1 y 3.2.2 puede encontrar una solución óptima al Problema (3.8) en tiempo polinomial.

Ejemplo 3.2.1 Consideramos el siguiente problema de localización con cuatro puntos de demanda,

$$\min_{x \in \mathbb{R}} -\gamma_B(x - A)_{(1)} - 1.25\gamma_B(x - A)_{(2)} + 1.5\gamma_B(x - A)_{(3)} + 1.75\gamma_B(x - A)_{(4)}$$

donde $A = \{(3, 0), (0, 11), (16, 8), (-4, -7)\}$, y $\gamma_B(\cdot)$ es la norma hexagonal del Ejemplo 3.1.1.

Se obtiene que el punto óptimo es el punto $\mathcal{X}^* = (7.25, -2)$ con valor objetivo 11.125. Ver la Figura 3.8. La Tabla 3.1 muestra el valor objetivo óptimo y las coordenadas de la solución del Problema (3.13) dentro de cada convexo elemental de este ejemplo.

It.	$x = (x_1, x_2)$	Objetivo	It.	$x = (x_1, x_2)$	Objetivo
1	(-7.50,0.00)	23.75	16	(6.50,8.00)	13.87
2	(-6.50,-2.00)	24.70	17	(7.00,8.00)	13.62
3	(-5.25,2.50)	17.43	18	(7.25,-3.50)	12.44
4	(-4.00,-7.00)	31.00	19	(7.25,-2.00)	11.12
5	(-1.25,8.50)	20.37	20	(7.25,0.00)	12.37
6	(0.00,-0.50)	20.06	21	(7.25,8.00)	13.12
7	(0.50,2.00)	15.56	22	(7.25,25.5)	29.37
8	(0.50,5.50)	22.12	23	(8.75,11.5)	17.7
9	(2.50,6.00)	16.19	24	(8.75,18.5)	22.12
10	(3.00,0.00)	16.56	25	(9.12,-5.75)	12.53
11	(3.50,0.00)	15.56	26	(9.12,4.50)	12.53
12	(3.50, 8.00)	15.00	27	(12.0,-2.00)	18.82
13	(4.25,-9.50)	22.62	28	(14.5,-7.00)	17.56
14	(4.25,2.50)	15.87	29	(16.0,8.00)	26.56
15	(5.75,12.5)	15.37	30	(16.2,8.5)	26.43

Tabla 3.1: Evaluaciones dadas por el Algoritmo 4.2

Observación 3.2.1 El caso de normas generales no necesariamente poliédricas puede ser resuelto a través de un procedimiento basado en aproximaciones por calibradores poliédricos. Para ello razonamos de forma análoga a lo hecho en el Teorema 3.1.3, donde $F^n(x) = \sum_{i=1}^M \lambda_i^+ \gamma_{B_n}(x-A)_{(i)} - \sum_{i=1}^M \lambda_i^- \gamma_{B_n}(x-A)_{(i)}$ y $F_n(x) = \sum_{i=1}^M \lambda_i^+ \gamma_{B_n}(x-A)_{(i)} - \sum_{i=1}^M \lambda_i^- \gamma_{B_n}(x-A)_{(i)}$.

Finalmente, hemos de hacer notar que este modelo puede ser extendido al caso en el que consideremos regiones prohibidas. Para ello, sólo tenemos que adaptar el Algoritmo 3.1.2 al caso considerado.

3.3 Notas finales

En este capítulo hemos estudiado el problema ordenado de Weber, introducido por Puerto y Fernández (1995). En particular, hemos considerado el caso de que los calibradores sean poliédricos. En dicho caso, hemos caracterizado el comportamiento de la función objetivo a partir de la definición de región ordenada, a partir de la cual hemos desarrollado algoritmos que nos permiten calcular soluciones en tiempo polinomial.

A continuación hemos estudiado una extensión del problema ordenado de Weber, en el sentido de que se consideran simultáneamente pesos positivos y negativos. Es decir, un nuevo problema de localización con centros atractivos y repulsivos. En este nuevo problema dicho carácter depende del orden de las distancias del nuevo centro a ubicar y de los puntos de demanda considerados. Ello permite modelizar una gran cantidad de situaciones reales, incluyendo el modelo tradicional como caso particular. Al igual que en el caso anterior, para el caso de normas poliédricas hemos desarrollado dos procedimientos basados en el conjunto de puntos de intersección generalizado y la partición del espacio que genera el conjunto de convexos elementales generalizados que permiten resolver el problema en un número finito de pasos.

Capítulo 4

Problemas de localización multiobjetivo

En la literatura podemos encontrar un gran número de modelos de localización, donde se pretende ubicar un servicio a partir de un conjunto de puntos de demanda. La principal diferencia entre estos modelos radica en el criterio empleado para ubicar dicho servicio: minisum, minimax, centdian, etcétera. Sin embargo, cuando la elección del criterio no sea clara, estaremos ante la necesidad de encontrar una solución, que sea aceptable frente a un gran número de estos criterios en vez de que lo sea para uno sólo. Surgen de este modo los modelos multicriterio o multiobjetivo. Ahora bien, debido a que en este tipo de problema no siempre existe el punto ideal que sea óptimo simultáneamente para todos los criterios, aparece el concepto de eficiencia, que tiene la propiedad de que cualquier punto de los que se selecciona no está dominado por otro punto en todos los criterios considerados.

En un estado intermedio de complejidad entre los problemas de localización uniobjetivo y los problemas multiobjetivo podemos encuadrar los problemas punto-objetivo; en los cuales se intenta determinar un servicio para el cual no exista otra ubicación más próxima a todos los puntos de demanda. El problema punto-objetivo puede ser

formulado como:

$$\min \left(\gamma(a - x) \right)_{a \in A}$$

donde A es el conjunto de puntos de demanda y $\gamma(\cdot)$ es un calibrador.

Al igual que en el caso multicriterio, la no existencia en todos los casos de un punto ideal para dicho problema nos lleva a considerar el concepto de eficiencia. Además, en el caso de que consideremos un problema unicriterio en el que la función objetivo sea creciente en la distancia a cada uno de los puntos de demanda, la solución de dicho problema se encontrará dentro del conjunto de puntos eficientes del problema punto-objetivo.

Comenzaremos este capítulo tratando un problema punto-objetivo en el cual cada punto de demanda puede tener asociado un calibrador diferente, es decir, la distancia desde un punto cualquiera a un punto de demanda va a estar medida con el calibrador asociado a ese punto de demanda. Debido a que no siempre existe una solución para dicho problema, damos diferentes conceptos de eficiencia en función de los diferentes niveles de exigencia en cuanto a proximidad a cada uno de los elementos de la familia de demanda.

Continuaremos el capítulo con la extensión del problema punto-objetivo al problema multicriterio o multiobjetivo, donde cada uno de los criterios será una función ordenada de Weber, en la que los puntos de demanda han sido sustituidos por conjuntos, y que, como estudiamos en el capítulo anterior, incluye diferentes criterios clásicos de localización de un servicio frente a un conjunto de puntos de demanda.

4.1 El problema de localización generalizado Punto-Objetivo

Como hemos mencionado al comienzo del capítulo, a partir de un conjunto de puntos de demanda A y un calibrador $\gamma(\cdot)$ el problema punto-objetivo clásico consiste en determinar aquellos puntos tales que no existe otro más próximo a todos los puntos de

demanda. Entre los trabajos dedicados a estudiar el modelo clásico podemos destacar Carrizosa et al. (1993), Carrizosa et al. (1995), Carrizosa y Plastria (1996), Durier (1990), Durier y Michelot (1986), Ndiaye y Michelot (1998), Pelegrín y Fernández (1988), Plastria (1983), Wendell y Hurter (1973), Wendell et al. (1977). En esta sección, a diferencia de los modelos clásicos, vamos a considerar que los puntos de demanda pueden tener asociado calibradores diferentes. Por tanto, pueden existir dos puntos de demanda tales que la distancia desde un punto cualquiera a esos dos puntos de demanda estén medidas con calibradores diferentes.

En esta primera sección dependiendo de los requerimientos exigidos al concepto de solución vamos a estudiar tres versiones de problema punto-objetivo. En primer lugar, estudiaremos el problema punto-objetivo con calibradores mixtos, en segundo lugar, el problema punto-objetivo reforzado con calibradores mixtos y para finalizar, el problema punto-objetivo con inf-distancias. En cada una de estas versiones estudiaremos y caracterizaremos los diferentes conjuntos de soluciones.

Antes de estudiar dichos problemas denotamos por X a un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , por A con $A \subseteq X$ el conjunto de puntos de demanda y por \mathcal{A} a la familia de conjuntos $\{A_1, \dots, A_k\}$ donde $A_i \subseteq A \forall i = 1, \dots, k$ y $\cup_{i=1}^k A_i = A$; de forma que a cada uno de los conjuntos A_i se le ha asociado un calibrador $\gamma_i(\cdot)$, tal que la distancia desde cualquier punto de X a un punto del conjunto A_i está medida con el calibrador $\gamma_i(\cdot)$.

4.1.1 Problema Punto-Objetivo con calibradores mixtos

El modelo de problema punto-objetivo que vamos a estudiar en esta sección es una extensión del modelo clásico en dos sentidos, en primer lugar, como decíamos anteriormente, vamos a considerar que los puntos de demanda pueden tener asociados diferentes calibradores y en segundo lugar, vamos a restringir la búsqueda de la solución a un subconjunto del espacio X . De esta manera para un conjunto $Y \subseteq X$ cerrado y convexo

el problema viene formulado del siguiente modo;

$$\min_{y \in Y} \left(\gamma_i(a_i - y) \right)_{a_i \in A_i \ i=1, \dots, k}$$

Una vez formulado el problema podríamos plantearnos el encontrar una solución al mismo que minimizase todas las distancia simultáneamente, lo que denominamos punto ideal. Sin embargo, debido a que esta solución no siempre existe nos planteamos el considerar soluciones Pareto-óptimas que dan lugar a los conjuntos de soluciones débilmente eficientes, eficientes y estrictamente eficientes restringidos al conjunto Y y que introducimos en la siguiente definición.

Definición 4.1.1 *En las condiciones anteriores, denominamos*

1. *Conjunto de puntos estrictamente eficientes (con respecto a \mathcal{A}) restringido a Y ,*
a

$$SE(\mathcal{A}, Y) := \{y \in Y : \forall z (\neq y) \in Y : \exists a_i \in A_i \text{ para algún } i = 1, \dots, k \\ \text{con } \gamma_i(a_i - y) < \gamma_i(a_i - z)\}.$$

2. *Conjunto de puntos eficientes (con respecto a \mathcal{A}) restringido a Y , a*

$$E(\mathcal{A}, Y) := \{y \in Y : \forall z (\neq y) \in Y : \exists a_i \in A_i \text{ para algún } i = 1, \dots, k \text{ con} \\ \gamma_i(a_i - y) < \gamma_i(a_i - z) \text{ ó } \forall a_i \in A_i \forall i \in \{1, \dots, k\} \gamma_i(a_i - y) \leq \gamma_i(a_i - z)\}.$$

3. *Conjunto de puntos débilmente eficientes (con respecto a \mathcal{A}) restringido a Y , a*

$$WE(\mathcal{A}, Y) := \{y \in Y : \forall z (\neq y) \in Y : \exists a_i \in A_i \text{ para algún } i = 1, \dots, k \\ \text{con } \gamma_i(a_i - y) \leq \gamma_i(a_i - z)\}.$$

Nótese que si $Y = X$, los diferentes conjuntos definidos anteriormente pueden ser denotados por $WE(\mathcal{A})$, $E(\mathcal{A})$ y $SE(\mathcal{A})$. En lo que sigue $B_i(a_i, \rho_i)$ denotará la bola del calibrador $\gamma_i(\cdot)$ centrada en a_i y radio ρ_i , es decir,

$$B_i(a_i, \rho_i) := \{x \in X : \gamma_i(a_i - x) \leq \rho_i\}.$$

Proposición 4.1.1 *Se verifican los siguientes enunciados:*

$$1. y \in SE(\mathcal{A}, Y) \iff \bigcap_{i=1}^k \bigcap_{a_i \in A_i} B_i(a_i, \gamma_i(a_i - y)) \cap Y = \{y\}.$$

$$2. y \in E(\mathcal{A}, Y) \iff \bigcap_{i=1}^k \bigcap_{a_i \in A_i} B_i(a_i, \gamma_i(a_i - y)) \cap \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{a_i \in A_i} \text{int}(B_i(a_i, \gamma_i(a_i - y))) \cap Y = \emptyset.$$

$$3. y \in WE(\mathcal{A}, Y) \iff \bigcap_{i=1}^k \bigcap_{a_i \in A_i} \text{int}(B_i(a_i, \gamma_i(a_i - y))) \cap Y = \emptyset.$$

Demostración:

Sólo probamos el apartado 2 puesto que los restantes apartados se demuestran de igual forma. Si $y \notin E(\mathcal{A}, Y)$, existe $z \in Y$ verificando las siguientes dos condiciones:

1. Para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ y para todo $a_i \in A_i$ se tiene que $\gamma_i(a_i - z) \leq \gamma_i(a_i - y)$, con lo cual

$$z \in \bigcap_{i=1}^k \bigcap_{a_i \in A_i} B_i(a_i, \gamma_i(a_i - y)).$$

2. Existe $a_i \in A_i$ para algún $i = 1, 2, \dots, k$ tal que $\gamma_i(a_i - z) < \gamma_i(a_i - y)$, con lo cual

$$z \in \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{a_i \in A_i} \text{int}(B_i(a_i, \gamma_i(a_i - y))).$$

Por tanto, se deduce de estas dos condiciones que existe $z \in Y$ tal que

$$z \in \bigcap_{i=1}^k \bigcap_{a_i \in A_i} B_i(a_i, \gamma_i(a_i - y)) \cap \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{a_i \in A_i} \text{int}(B_i(a_i, \gamma_i(a_i - y)));$$

lo que implica que z domina a y , hecho que está en contradicción con que $y \in E(\mathcal{A}, Y)$, obteniéndose de esta forma el resultado. \square

En la siguiente proposición vamos a estudiar diferentes resultados que establecen relaciones entre los conjuntos definidos anteriormente $WE(\mathcal{A}, Y)$, $E(\mathcal{A}, Y)$ y $SE(\mathcal{A}, Y)$ y la relación de éstos con los conjuntos débilmente eficientes, eficientes y estrictamente eficientes de cada conjunto A_i usando la definición clásica, es decir, con un único

calibrador, denotados por $WE(A_i, Y)$, $E(A_i, Y)$ y $SE(A_i, Y)$ respectivamente, con $i = 1, \dots, k$. En lo que sigue, dada la familia de conjuntos, \mathcal{A} , definida anteriormente denotamos por $\bar{\mathcal{A}}$ a la familia de conjuntos cuyos elementos son $\{\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_k\}$ donde \bar{A}_i es el conjunto clausura de A_i . Diremos que la familia \mathcal{A} está acotada cuando cada uno de sus elementos A_i lo esté con respecto a $\gamma_i(\cdot)$. Además si \mathcal{B} es otra familia de conjuntos cuyos elementos son $\{B_1, \dots, B_k\}$ con $B_i \subseteq X \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$, entonces escribimos $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ si $A_i \subseteq B_i \quad \forall i = 1, \dots, k$.

Proposición 4.1.2 *Se verifican las siguientes propiedades;*

1. $SE(\mathcal{A}, Y) \subseteq E(\mathcal{A}, Y) \subseteq WE(\mathcal{A}, Y) \subseteq Y$.
2. $\bigcup_{i=1}^k SE(A_i, Y) \subseteq SE(\mathcal{A}, Y)$ y $\bigcup_{i=1}^k WE(A_i, Y) \subseteq WE(\mathcal{A}, Y)$.
3. Si A_i es un conjunto acotado con respecto a $\gamma_i(\cdot)$ para cada $i = 1, \dots, k$ entonces $SE(\mathcal{A}, Y)$, $E(\mathcal{A}, Y)$ y $WE(\mathcal{A}, Y)$ son conjuntos acotados.
4. Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ entonces $SE(\mathcal{A}, Y) \subseteq SE(\mathcal{B}, Y)$ y $WE(\mathcal{A}, Y) \subseteq WE(\mathcal{B}, Y)$.
5. $SE(\mathcal{A}, Y) = SE(\bar{\mathcal{A}}, Y)$ y $E(\mathcal{A}, Y) = E(\bar{\mathcal{A}}, Y)$.

Demostración:

1. Es una consecuencia directa de la definición.
2. Si $y \in \bigcup_{i=1}^k SE(A_i, Y)$ existe $i_o \in \{1, \dots, k\}$ tal que para todo $z (\neq y) \in Y$ existe $a_{i_o} \in A_{i_o}$ verificando que $\gamma_{i_o}(a_{i_o} - y) < \gamma_{i_o}(a_{i_o} - z)$ de lo que se deduce que $y \in SE(\mathcal{A}, Y)$. El segundo enunciado de este apartado se demuestra de forma análoga.
3. Si A_i está acotado para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, existe $\rho_i \in \mathbb{R}^+$ tal que $\bigcup_{i=1}^k A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_i(0, \rho_i)$, por tanto $WE(\mathcal{A}, Y) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_i(0, 2\rho_i)$ ya que todo punto que no pertenezca a $\bigcup_{i=1}^k B_i(0, 2\rho_i)$ está dominado por el 0.

4. Si $A_i \subseteq B_i$ para todo i , las inclusiones $SE(\mathcal{A}, Y) \subseteq SE(\mathcal{B}, Y)$ y $WE(\mathcal{A}, Y) \subseteq WE(\mathcal{B}, Y)$ se deducen de la definición.
5. Sea $x \notin E(\mathcal{A}, Y)$ entonces existe $y \neq x$ tal que $\gamma_i(a_i - x) \geq \gamma_i(a_i - y)$ para cada $a_i \in A_i$ y existe $i_o \in \{1, \dots, k\}$ y $a_{i_o} \in A_{i_o}$ tal que $\gamma_{i_o}(a_{i_o} - x) > \gamma_{i_o}(a_{i_o} - y)$. De esta forma se obtiene, primero, por continuidad que $\forall a_i \in \bar{A}_i \gamma_i(a_i - x) \geq \gamma_i(a_i - y)$ y segundo que $a_{i_o} \in \bar{A}_{i_o}$ con lo cual $E(\bar{\mathcal{A}}, Y) \subseteq E(\mathcal{A}, Y)$. De forma análoga se demuestra la implicación contraria.

La prueba de que $SE(\mathcal{A}, Y) = SE(\bar{\mathcal{A}}, Y)$ se obtiene con los mismos argumentos.

□

A través de los siguientes ejemplos vamos a comprobar que las igualdades e inclusiones que no aparecen en la proposición anterior no se tienen de forma general.

Ejemplo 4.1.1 Consideramos $X = \mathbb{R}^2$ e $Y = X$.

1. Sea $\mathcal{A} = \{A\} = \{(0, 0), (6, 0)\}$. Con la norma l_∞ , se tiene que $WE(\mathcal{A}, Y)$ es el cuadrado cerrado de vértices $(0, 0), (3, 3), (3, -3), (6, 0)$, $E(\mathcal{A}, Y) = WE(\mathcal{A}, Y)$ y $SE(\mathcal{A}, Y) = \{(0, 0), (6, 0)\}$.
2. Sea $\mathcal{A} = \{A_1 := \{(0, 0), (6, 0)\}, A_2 := \{(3, 0)\}\}$ y sea $\gamma_1(\cdot)$ la norma l_∞ y $\gamma_2(\cdot)$ la norma l_1 . Obteniéndose que $E(\mathcal{A}, Y)$ es el segmento que une $(0, 0)$ y $(6, 0)$.
3. Sea $\mathcal{A} = \{A\}$ donde A es el conjunto abierto acotado por el cuadrado de vértices $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ y consideramos la norma l_∞ . Se tiene que el punto $(2, 0) \notin WE(\mathcal{A}, Y)$ y $(2, 0) \in WE(\bar{\mathcal{A}}, Y)$.

A través de estos ejemplos hemos podido comprobar que las igualdades e inclusiones que no aparecían en la proposición anterior no se verifican en general.

Proposición 4.1.3 Se verifican los siguientes resultados

1. Si X es estrictamente convexo con respecto a cada uno de los calibradores, entonces $SE(\mathcal{A}, Y) = E(\mathcal{A}, Y) = WE(\mathcal{A}, Y) = WE(\bar{\mathcal{A}}, Y)$.
2. Si el par $(X, \gamma_i(\cdot))$ es un espacio de Hilbert para cada i , entonces $\bigcup_{i=1}^n \bar{co}(A_i) \subset SE(\mathcal{A}) = E(\mathcal{A}) = WE(\mathcal{A})$, donde $\bar{co}(A_i)$ es el cierre convexo de A_i .

Demostración:

1. Sea $x \in WE(\mathcal{A}, Y)$ y sea $y \neq x$ con $z = \frac{x+y}{2}$. Consideremos $a_i \in A_i$ tal que $\gamma_i(a_i - x) \leq \gamma_i(a_i - z)$. Si $a_i - x$ y $a_i - y$ son vectores colineales entonces tenemos que $\gamma_i(a_i - x) < \gamma_i(a_i - z) < \gamma_i(a_i - y)$. Si no son colineales entonces la convexidad estricta de la función $t \mapsto \gamma_i(a_i - (1-t)x - ty)$ en $[0, 1]$, implica que $\gamma_i(a_i - \frac{1}{2}(x+y)) < \frac{1}{2}\gamma_i(a_i - x) + \frac{1}{2}\gamma_i(a_i - y)$. Como $\gamma_i(a_i - x) \leq \gamma_i(a_i - z)$ entonces $\gamma_i(a_i - x) < \gamma_i(a_i - y)$, es decir, $x \in SE(\mathcal{A}, Y)$.
2. Por un lado, para el caso de un único calibrador tenemos que $WE(A_i) = E(A_i) = SE(A_i) = \bar{co}(A_i)$ para cada i y por otro que $\bigcup_{i=1}^n WE(A_i) \subseteq SE(\mathcal{A})$ con lo cual se tiene que

$$\bigcup_{i=1}^n SE(A_i) = \bigcup_{i=1}^n E(A_i) = \bigcup_{i=1}^n WE(A_i) = \bigcup_{i=1}^n \bar{co}(A_i) \subseteq SE(\mathcal{A}).$$

□

Además vemos en el siguiente ejemplo que sobre un mismo espacio y diferentes productos escalares no se tiene de forma general que $WE(\mathcal{A}) \subseteq \bar{co}(A_1 \cup \dots \cup A_n)$. Con lo cual observamos que no se extiende el correspondiente resultado de Durier y Michelot (1986) válido en un espacio de Hilbert.

Ejemplo 4.1.2 Sea $\mathcal{A} := \{A_1 := \{(0, 0)\}, A_2 := \{(2, 2)\}\}$, $\gamma_1(\cdot)$ la norma que procede del producto escalar definido por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

es decir, la norma cuya bola unidad es la elipse cuyos ejes son paralelos a los ejes de coordenadas y de forma que el eje X tiene longitud 1 y el eje Y longitud 2 y $\gamma_2(\cdot)$ la norma que procede del producto escalar definido por la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es decir, la norma cuya bola unidad es una elipse cuyos ejes son paralelos a los ejes de coordenadas tal que el eje X tiene longitud 2 y el eje Y longitud 1.

El punto $y := (1, 1)$ que pertenece a la envolvente convexa de A_1 y A_2 está dominado por $x := (0, 2)$, ya que $d_1(x, A_1) = d_2(x, A_2) = 1$ y $d_1(y, A_1) = d_2(y, A_2) < 1$.

Hasta ahora en esta sección hemos caracterizado los conjuntos de puntos $WE(\mathcal{A}, Y)$, $E(\mathcal{A}, Y)$ y $SE(\mathcal{A}, Y)$ a través de las bolas de los distintos calibradores sobre X , así como la relaciones existentes entre ellos. Ahora caracterizaremos dichos conjuntos usando los conjuntos P_δ y Q_δ donde δ es un vector distinto de 0, previamente utilizados por Ndiaye y Michelot (1998). En este caso, debido a la utilización de diferentes normas definimos los conjuntos complementarios P_δ^i y Q_δ^i con $i = 1, \dots, k$ y δ un vector distinto de 0; de la siguiente forma:

$$Q_\delta^i = \{x \in X : \forall \lambda > 0; \gamma_i(x - \lambda\delta) > \gamma_i(x)\}$$

$$P_\delta^i = \{x \in X : \exists \lambda > 0; \gamma_i(x - \lambda\delta) \leq \gamma_i(x)\}$$

Para obtener las caracterizaciones mencionadas anteriormente consideramos los conjuntos:

$$F_Y(y) = \{\delta \in X : \delta \neq 0 \exists \lambda > 0 \quad y + \lambda\delta \in Y\}$$

y

$$T_Y(y) = \{\delta \in X : \delta \neq 0, \exists \delta_n > 0 \text{ tal que } x + \lambda_n \delta_n \in Y, \delta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n\}$$

usualmente denominamos respectivamente como de direcciones factibles y como de direcciones tangentes.

Por otro lado, decimos que el espacio X posee la propiedad B_δ^i si para cada $x \in X$ con $\gamma_i(x - \lambda\delta) \leq \gamma_i(x)$ existe α y un entorno de x , $V_i(x)$ tal que $\gamma_i(y - \alpha\delta) \leq \gamma_i(y)$ para todo $y \in V_i(x)$. Hemos de hacer notar, que el exigirle a un espacio asociado a una determinada norma $\gamma_i(\cdot)$ la propiedad B_δ^i no supone una exigencia extrema ya que si $\gamma_i(\cdot)$ es una norma estrictamente convexa o poliédrica en el caso de que el espacio X sea dos dimensional se tiene que dicho espacio con la norma γ_i posee la propiedad B_δ^i (veáse Durier y Michelot (1986) para una descripción más detallada de esta propiedad).

El resultado que a continuación enunciamos es una extensión al caso con diferentes normas del resultado equivalente para un único calibrador obtenido por Ndiaye y Michelot (1998), incluimos la demostración por motivos de completitud.

Teorema 4.1.1 *Si X tiene la propiedad B_δ^i para cada $\delta \neq 0$ y todo $i \in \{1, \dots, k\}$, cada elemento de la familia \mathcal{A} es un conjunto compacto e Y es un conjunto no vacío, cerrado y convexo entonces*

1. $y \in SE(\mathcal{A}, Y)$ si y solo si $\forall \delta \in F_Y(y), \exists i(\delta)$ tal que $A_{i(\delta)} \cap (y + Q_\delta^{i(\delta)}) \neq \emptyset$.
2. $y \in E(\mathcal{A}, Y)$ si y solo si $\forall \delta \in F_Y(y), \exists i(\delta)$ tal que $A_{i(\delta)} \cap (y + Q_\delta^{i(\delta)}) \neq \emptyset$
 $y \bigcup_{i=1}^k A_i \cap (y + \text{int}(Q_{-\delta}^i)) = \emptyset$.
3. $y \in WE(\mathcal{A}, Y)$ si y solo si $\forall \delta \in T_Y(y), \exists i(\delta)$ tal que $A_{i(\delta)} \cap (y + \overline{P}_\delta^{i(\delta)}) \neq \emptyset$.

Demostración:

Sólo vamos a demostrar el apartado 2., los restantes apartados se demuestran de forma análoga.

Si tomamos un punto $y \notin E(\mathcal{A}, Y)$, existe un punto $z \in Y$, verificando las dos propiedades siguientes:

1. $\gamma_i(a_i - z) \leq \gamma_i(a_i - y) \quad \forall a_i \in A_i \forall i \in \{1, \dots, k\}$.

$$2. \exists i(z) \in \{1, \dots, k\} \exists a_{i(z)} \in A_{i(z)} \text{ tal que } \gamma_{i(z)}(a_{i(z)} - z) < \gamma_{i(z)}(a_{i(z)} - y).$$

Sea $\delta = z - y$, con lo cual $\delta \in F_Y(y)$ y sea $\lambda = 1$. Entonces existe z verificando las dos propiedades:

$$1. \gamma_i(a_i - y - \lambda\delta) \leq \gamma_i(a_i - y) \quad \forall a_i \in A_i \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

$$2. \exists i(\delta) \in \{1, \dots, k\} \exists a_{i(\delta)} \in A_{i(\delta)} \text{ tal que } \gamma_{i(\delta)}(a_{i(\delta)} - y - \lambda\delta) < \gamma_{i(\delta)}(a_{i(\delta)} - y),$$

de donde obtenemos que $A_i \cap (x + Q_\delta^i) = \emptyset \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$ y $\exists i(\delta) \in \{1, \dots, k\}$ $A_{i(\delta)} \cap (y + \text{int}(Q_{-\delta}^{i(\delta)})) \neq \emptyset$.

Veamos ahora la implicación contraria. Suponemos que existe $\delta \in F_Y(y)$ tal que $A_i \cap (y + Q_\delta^i) = \emptyset \quad \forall i$ y $\exists i(\delta) A_{i(\delta)} \cap (y + \text{int}(Q_{-\delta}^{i(\delta)})) \neq \emptyset$. De lo cual podemos deducir que

$$1. \forall a_i \in A_i \forall i \in \{1, \dots, k\} \quad \exists \lambda_{a_i} \text{ tal que } \gamma_i(a_i - y - \lambda_{a_i}\delta) \leq \gamma_i(a_i - y).$$

$$2. \exists i(\delta) \in \{1, \dots, k\} \exists a_{i(\delta)} \in A_{i(\delta)} \exists \lambda_{a_{i(\delta)}} \text{ tal que } \gamma_{i(\delta)}(a_{i(\delta)} - y - \lambda_{a_{i(\delta)}}\delta) < \gamma_{i(\delta)}(a_{i(\delta)} - y).$$

Como hemos supuesto que cada norma en el espacio X cumple la propiedad B_δ , existe un entorno, $V(a_i)$ de a_i tal que

$$\exists \mu_{a_i} \forall a'_i \in V(a_i) \quad \gamma_i(a'_i - y - \mu_{a_i}\lambda_{a_i}\delta) \leq \gamma_i(a'_i - y).$$

Tomando $\mu'_{a_i} = \mu_{a_i}\lambda_{a_i}$ y usando la convexidad de $\gamma_i(\cdot)$ se deduce

$$1. \forall \lambda \in [0, \mu'_{a_i}] \forall a'_i \in V(a_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \quad \text{tal que } \gamma_i(a'_i - y - \lambda\delta) \leq \gamma_i(a'_i - y).$$

$$2. \exists i(\delta) \in \{1, \dots, k\} \forall \lambda \in [0, \lambda_{a_{i(\delta)}}] \quad \text{tal que } \gamma_{i(\delta)}(a_{i(\delta)} - y - \lambda\delta) < \gamma_{i(\delta)}(a_{i(\delta)} - y).$$

Los conjuntos A_i son compactos para todo i , entonces existe un conjunto finito de puntos $A'_i \subset A_i$ para todo i tal que A_i es cubierto por $\cup_{a'_i \in A'_i} V(a'_i)$. Eligiendo cualquier λ tal que $0 < \lambda < \min\{\min_{a'_i \in \cup_{i=1}^k A'_i} \{\mu'_{a'_i}\}, \lambda_{a_{i(\delta)}}, \lambda_\delta\}$,

$$1. \forall i \in \{1, \dots, k\} \text{ y } \forall a_i \in A_i \quad \gamma_i(a_i - y - \lambda\delta) \leq \gamma_i(a_i - y).$$

$$2. \exists i(\delta) \in \{1, \dots, k\} \exists a_{i(\delta)} \in A_{i(\delta)} \gamma_{i(\delta)}(a_{i(\delta)} - x - \lambda\delta) < \gamma_{i(\delta)}(a_{i(\delta)} - x).$$

Por construcción $z = x + \lambda\delta \in Y$, de donde se deduce que $y \notin E(\mathcal{A}, Y)$ lo que completa la demostración. \square

4.1.2 Problema Punto-Objetivo reforzado con calibradores mixtos

En esta sección, también consideramos el problema punto-objetivo restringido a un conjunto cerrado y convexo, que como vimos consiste en;

$$\min_{y \in Y} \left(\gamma_i(a_i - y) \right)_{a_i \in A_i \ i=1, \dots, k}$$

Para este problema, vamos a definir un concepto más exigente de eficiencia que va a dar origen a los conjuntos de puntos fuertemente débilmente eficientes, fuertemente eficientes y fuertemente estrictamente eficientes. Estos conjuntos derivados del concepto de eficiencia fuerte van a estar incluidos respectivamente en los conjuntos de puntos débilmente eficientes, eficientes y estrictamente eficientes definidos anteriormente. Por tanto, el concepto de eficiencia fuerte es un concepto intermedio entre el punto ideal y el concepto de eficiencia y está íntimamente ligado al de solución perfecta (véase White (1982)).

Definición 4.1.2 *En las condiciones anteriores, llamamos*

1. *Conjunto de puntos fuertemente estrictamente eficientes (con respecto a \mathcal{A}) restringido a Y , a*

$$\begin{aligned} stSE(\mathcal{A}, Y) &:= \{y \in Y : \forall z(\neq y) \in Y : \exists a_i \in A_i \forall i \in \{1, \dots, k\} \\ &\quad \text{tal que } \gamma_i(a_i - y) < \gamma_i(a_i - z)\}. \end{aligned}$$

2. *Conjunto de puntos fuertemente eficientes (con respecto a \mathcal{A}) restringido a Y , a*

$$\begin{aligned} stE(\mathcal{A}, Y) &:= \{y \in Y : \forall z(\neq y) \in Y : \exists a_i \in A_i \forall i \in \{1, \dots, k\} \text{ tal que} \\ &\quad \gamma_i(a_i - y) < \gamma_i(a_i - z) \text{ ó } \forall i \in \{1, \dots, k\} \forall a_i \in A_i \gamma_i(a_i - y) \leq \gamma_i(a_i - z)\}. \end{aligned}$$

3. Conjunto de puntos fuertemente débilmente eficientes (con respecto a \mathcal{A}) restringido a Y , a

$$stWE(\mathcal{A}, Y) := \{y \in Y : \forall z(\neq y) \in Y : \exists a_i \in A_i \forall i = 1, \dots, k \\ \text{con } \gamma_i(a_i - y) \leq \gamma_i(a_i - z)\}.$$

Proposición 4.1.4 *Se verifican los siguientes enunciados:*

$$1. y \in stSE(\mathcal{A}, Y) \iff \bigcup_{i=1}^k \bigcap_{a_i \in A_i} B_i(a_i, \gamma_i(a_i - y)) \cap Y = \{y\}.$$

$$2. y \in stE(\mathcal{A}, Y) \iff \bigcup_{i=1}^k \bigcap_{a_i \in A_i} B_i(a_i, \gamma_i(a_i - y)) \cap \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{a_i \in A_i} \text{int}(B_i(a_i, \gamma_i(a_i - y))) \cap Y = \emptyset.$$

$$3. y \in stWE(\mathcal{A}, Y) \iff \bigcup_{i=1}^k \bigcap_{a_i \in A_i} \text{int}(B_i(a_i, \gamma_i(a_i - y))) \cap Y = \emptyset.$$

Demostración:

Sólo probamos el apartado 2, los restantes apartados se demuestran de igual forma.

Si $y \notin stE(\mathcal{A}, Y)$ existe $z \in Y$ verificando

1. Existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que para cada $a_i \in A_i$ $\gamma_i(a_i - z) \leq \gamma_i(a_i - y)$, con lo cual

$$z \in \bigcup_{i=1}^k \bigcap_{a_i \in A_i} B_i(a_i, \gamma_i(a_i - y)).$$

2. Existe $a_i \in A_i$ para algún $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $\gamma_i(a_i - z) < \gamma_i(a_i - y)$ con lo cual

$$z \in \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{a_i \in A_i} \text{int}(B_i(a_i, \gamma_i(a_i - y))).$$

De donde se deduce el resultado. □

Hemos de hacer notar que los conjuntos $stWE(\mathcal{A}, Y)$, $stE(\mathcal{A}, Y)$ y $stSE(\mathcal{A}, Y)$ definidos anteriormente pueden ser vacíos, por esto, a continuación vamos a estudiar condiciones de existencia de los mismos.

Proposición 4.1.5 *Se verifica la siguiente propiedad*

$$\bigcap_{i=1}^k SE(A_i, Y) = stSE(\mathcal{A}, Y) \subseteq \bigcap_{i=1}^k E(A_i, Y) = stE(\mathcal{A}, Y) \subseteq \bigcap_{i=1}^k SE(A_i, Y) = stWE(\mathcal{A}, Y).$$

Demostración:

Sólo probamos la igualdad $stE(\mathcal{A}, Y) = \bigcap_{i=1}^k E(A_i, Y)$ ya que el resto de igualdades o inclusiones se demuestran de manera similar o son consecuencia directa de la definición.

Consideremos $y \in \bigcap_{i=1}^k E(A_i, Y)$. Entonces se tiene que para todo $i = 1, \dots, k$ y para todo $z (\neq y) \in Y$ existe un $a_i \in A_i$ tal que $\gamma_i(a_i - y) < \gamma_i(a_i - z)$ o bien para todo $i = 1, \dots, k$ y para todo $a_i \in A_i$, $\gamma_i(a_i - y) \leq \gamma_i(a_i - z)$ lo que implica que $y \in stE(\mathcal{A}, Y)$, con lo cual $\bigcap_{i=1}^k E(A_i, Y) \subset stE(\mathcal{A}, Y)$. La inclusión contraria se obtiene de modo similar. \square

Corolario 4.1.1

1. Si \mathcal{A} está acotado entonces $stSE(\mathcal{A}, Y)$, $stE(\mathcal{A}, Y)$ y $stWE(\mathcal{A}, Y)$ están acotados.
2. Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ entonces $stSE(\mathcal{A}, Y) \subseteq stSE(\mathcal{B}, Y)$ y $stWE(\mathcal{A}, Y) \subseteq stWE(\mathcal{B}, Y)$ pero no necesariamente $stE(\mathcal{A}, Y) \subseteq stE(\mathcal{B}, Y)$.
3. $stSE(\mathcal{A}, Y) = stSE(\bar{\mathcal{A}}, Y)$ y $stE(\mathcal{A}, Y) = stE(\bar{\mathcal{A}}, Y)$.

Ejemplo 4.1.3 *Consideramos $X = \mathbb{R}^2$ e $Y = X$.*

1. Sea $\mathcal{A} = \{A\} = \{(0, 0), (6, 0)\}$, con la norma l_∞ , se tiene que $stWE(\mathcal{A}, Y)$ es el conjunto cerrado acotado por el cuadrado de vértices $(0, 0), (3, 3), (3, -3), (6, 0)$, $E(\mathcal{A}, Y) = WE(\mathcal{A}, Y)$ y $SE(\mathcal{A}, Y) = \{(0, 0), (6, 0)\}$.
2. Sea $\mathcal{A} = \{A_1 := \{(0, 0), (6, 0)\}, A_2 := \{(3, 0)\}\}$ y sea $\gamma_1(\cdot)$ la norma l_∞ y $\gamma_2(\cdot)$ la norma l_1 . Obteniéndose que $E(\mathcal{A}, Y)$ es el vacío.

3. Sea $\mathcal{A} = \{A\}$ donde A es el conjunto abierto acotado por el cuadrado de vértices $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ y consideramos la norma l_∞ . Se tiene que el punto $(2, 0) \notin stWE(\mathcal{A}, Y)$ y $(2, 0) \in stWE(\overline{\mathcal{A}}, Y)$.

Corolario 4.1.2

1. $stSE(\mathcal{A}, Y) \subseteq SE(\mathcal{A}, Y)$.
2. $stE(\mathcal{A}, Y) \subseteq E(\mathcal{A}, Y)$.
3. $stWE(\mathcal{A}, Y) \subseteq WE(\mathcal{A}, Y)$.

Corolario 4.1.3 Si los elementos de la familia \mathcal{A} son unitarios entonces $stWE(\mathcal{A}, Y) = \emptyset$.

Al igual que en la sección anterior desarrollamos una caracterización de los conjuntos $stSE(\mathcal{A}, Y)$, $stE(\mathcal{A}, Y)$ y $stWE(\mathcal{A}, Y)$ donde \mathcal{A} es una familia cuyos elementos son conjuntos compactos, haciendo uso de los conjuntos Q_δ^i y P_δ^i .

Teorema 4.1.2 Sea \mathcal{A} una familia finita de conjuntos cuyos elementos son conjuntos compactos e Y un conjunto convexo, cerrado y no vacío. Si X tiene la propiedad B_δ^i para cada $\delta \neq 0$ y cualquier i , entonces:

1. $y \in stSE(\mathcal{A}, Y)$ si y solo si $\forall \delta (\neq 0) \in F_Y(y) \quad A_i \cap (y + Q_\delta^i) \neq \emptyset \quad \forall i$.
2. $y \in stE(\mathcal{A}, Y)$ si y solo si $\forall \delta (\neq 0) \in F_Y(y) \quad A_i \cap (y + Q_\delta^i) \neq \emptyset \quad \forall i$ o $A_i \cap (y + \text{int}(Q_{-\delta}^i)) = \emptyset \quad \forall i$.
3. $y \in stWE(\mathcal{A}, Y)$ si y solo si $\forall \delta (\neq 0) \in T_Y(y) \quad A_i \cap (y + \overline{P}_\delta^i) \neq \emptyset \quad \forall i$.

La demostración de este teorema es análoga a la obtenida en el Teorema 4.1.1. Comparando este teorema con el equivalente cuando sólo se utiliza un calibrador, podemos observar que el concepto de eficiencia fuerte es la extensión del concepto clásico de

eficiencia ya que en la eficiencia fuerte las condiciones a cada uno de los elementos de \mathcal{A} son las mismas que en la eficiencia clásica con respecto a los elementos de A .

En el caso que $A_i = A$ para cada i , de forma que a cada copia A se le ha asociado una norma diferente, se obtiene el siguiente resultado;

Corolario 4.1.4 *En las condiciones del teorema anterior, si $A = A_i$ para todo i , se verifica*

$$1. y \in stSE(\mathcal{A}, Y) \text{ si y solo si } \forall \delta (\neq 0) \in F_Y(y) \quad A \cap (y + \bigcap_{i=1}^k Q_\delta^i) \neq \emptyset.$$

$$2. y \in stE(\mathcal{A}, Y) \text{ si y solo si } \forall \delta (\neq 0) \in F_Y(y) \quad A \cap (y + \bigcap_{i=1}^k Q_\delta^i) \neq \emptyset \text{ o } A \cap \left(y + \text{int}\left(\bigcap_{i=1}^k Q_{-\delta}^i\right) \right) = \emptyset.$$

$$3. y \in stWE(\mathcal{A}, Y) \text{ si y solo si } \forall \delta (\neq 0) \in T_Y(y) \quad A_i \cap (y + \bigcap_{i=1}^k \bar{P}_\delta^i) \neq \emptyset.$$

4.1.3 Problema Punto-Objetivo con inf-distancias mixtas

En esta sección tratamos una variante del problema estudiado anteriormente, de forma que en vez considerar las distancia desde un punto cualquiera de X a todos los elementos de A_i , consideramos la distancia de x al elemento más cercano de A_i , donde A_i es un conjunto convexo y cerrado. De esta forma, en las condiciones anteriormente consideradas el problema que vamos a estudiar viene formulado como:

$$\min_{y \in Y} \left(\inf_{a_i \in A_i} \gamma_i(y - a_i) \right)_{i=1, \dots, k}.$$

Para este problema, se usará el concepto de inf-distancia. Por ello, definimos:

$$B_i(A_i, \rho) := \{x : d_i(x, A_i) \leq \rho\}$$

donde

$$d_i(x, A_i) := \inf_{a_i \in A_i} \gamma_i(a_i - x).$$

Una vez introducido este concepto pasamos a dar las diferentes definiciones de eficiencia asociadas a la inf-distancias.

Definición 4.1.3 *Denominamos*

1. *Conjunto de puntos estrictamente eficientes con respecto a la inf-distancia a los elementos de \mathcal{A} y restringido a Y , a*

$$\text{infSE}(\mathcal{A}, Y) := \{y \in Y : \forall z (\neq y) \in Y : \exists A_i \text{ para alg\u00fan } i = 1, \dots, k \\ \text{con } d_i(y, A_i) < d_i(z, A_i)\}.$$

2. *Conjunto de puntos eficientes con respecto a la inf-distancia a los elementos de \mathcal{A} y restringido a Y , a*

$$\text{infE}(\mathcal{A}, Y) := \{y \in Y : \forall z (\neq y) \in Y : \exists A_i \text{ para alg\u00fan } i = 1, \dots, k \text{ con} \\ d_i(y, A_i) < d_i(z, A_i) \text{ \u00f3 } \forall A_i \text{ } i = 1, \dots, k \text{ } d_i(y, A_i) \leq d_i(z, A_i)\}.$$

3. *Conjunto de puntos d\u00e9bilmente eficientes con respecto a la inf-distancia a los elementos de \mathcal{A} y restringido a Y , a*

$$\text{infWE}(\mathcal{A}, Y) := \{y \in Y : \forall z (\neq y) \in Y : \exists A_i \text{ para alg\u00fan } i = 1, \dots, k \\ \text{con } d_i(y, A_i) \leq d_i(z, A_i)\}$$

Observaci\u00f3n 4.1.1 La eficiencia con respecto a los calibradores mixtos y con respecto a la inf-distancia coinciden en el caso que los elementos de la familia \mathcal{A} sean unitarios.

Proposici\u00f3n 4.1.6 *Se verifican los siguientes apartados:*

1. $y \in \text{infSE}(\mathcal{A}, Y) \iff \bigcap_{i=1}^k B_i(A_i, d_i(y, A_i)) \cap Y = \{y\}.$

2. $y \in \text{infE}(\mathcal{A}, Y) \iff \bigcap_{i=1}^k B_i(A_i, d_i(y, A_i)) \cap \bigcap_{i=1}^k \text{int}(B_i(A_i, d_i(y, A_i))) \cap Y = \emptyset.$

$$3. y \in \inf WE(\mathcal{A}, Y) \iff \bigcap_{i=1}^k \text{int}\left(B_i(A_i, d_i(y, A_i))\right) \cap Y = \emptyset.$$

Demostración:

Demostraremos el apartado 2.; pudiéndose demostrar el resto de los apartados de forma análoga.

Si $y \notin \inf E(\mathcal{A}, Y)$, existe $z \in Y$ verificando las dos condiciones siguientes:

1. Para cada $i = 1, \dots, k$, $d_i(z, A_i) \leq d_i(y, A_i)$, es decir,

$$z \in \bigcap_{i=1}^k B_i(A_i, d_i(y, A_i)).$$

2. Existe $i_o \in \{1, \dots, k\}$ tal que $d_{i_o}(z, A_{i_o}) < d_{i_o}(y, A_{i_o})$, con lo cual

$$z \in \bigcup_{i=1}^k \text{int}\left(B_i(A_i, d_i(y, A_i))\right).$$

De lo que podemos deducir que

$$\bigcap_{i=1}^k B_i(A_i, d_i(y, A_i)) \cap \bigcup_{i=1}^k \text{int}\left(B_i(A_i, d_i(y, A_i))\right) \neq \emptyset.$$

□

4.2 Caracterizaciones geométricas en \mathbb{R}^2 . El caso con inf-distancias mixtas

En esta sección aprovechando las propiedades geométricas del plano vamos a dar una caracterización de los conjuntos de puntos débilmente eficientes, eficientes y estrictamente eficientes, tanto en el caso irrestringido como en el restringido en espacios bidimensionales. Para ello, consideramos el conjunto Y convexo y cerrado y la familias de conjuntos $\mathcal{A}_{ij} := \{A_i, A_j\}$, $\mathcal{A}_{ijk} := \{A_i, A_j, A_k\}$ y $\mathcal{A}_{1\dots k} := \{A_1, \dots, A_k\}$, donde los elementos de cada una de estas familias son conjuntos convexos y cerrados.

Lema 4.2.1 Sean A_1, A_2 y A_3 tres conjuntos convexos cerrados con calibradores asociados $\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot)$ y $\gamma_3(\cdot)$ y ρ_1, ρ_2 y ρ_3 en \mathbb{R}^+ , tales que (ver Figura 4.1):

a)

$$\bigcap_{i=1}^3 B_i(A_i, \rho_i) = \{x\}.$$

b) $\text{int}(B_i(A_i, \rho_i)) \cap \text{int}(B_j(A_j, \rho_j)) \neq \emptyset$, con $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Se verifica que existen tres rectas $r_i, i = 1, 2, 3$ que definen los semiplanos $H_{ij}, j = 1, 2$ tales que

i) $B_i(A_i, \rho_i) \cap B_j(A_j, \rho_j) \subseteq H_{i1} \cap H_{j1} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$.

ii) $H_{11} \cap H_{21} \cap H_{31} = \{x\}$.

iii) $\text{infWE}(A_{ij}) \cap \text{int}(H_{i2} \cap H_{j2}) = \emptyset$.

Demostración:

Debido a que ninguna de las bolas verifica que $\text{int}(B_i(A_i, \rho_i)) \cap \text{int}(B_j(A_j, \rho_j)) \neq \emptyset$ con $i, j \in \{1, 2, 3\}$, consideramos r_1, r_2 y r_3 tres rectas soporte a dichas bolas en el punto x . Cada recta r_i define dos semiplanos, H_{i1} tal que

$$B_i(A_i, \rho_i) \subseteq H_{i1} \quad i = 1, 2, 3;$$

y H_{i2} el otro.

Con lo cual

$$B_i(A_i, \rho_i) \cap B_j(A_j, \rho_j) \subseteq H_{i1} \cap H_{j1} \quad i, j \in \{1, 2, 3\};$$

de donde obtenemos i).

Para demostrar el apartado ii), razonamos por reducción al absurdo. Suponemos que los hiperplanos H_{i1} con $i = 1, 2, 3$ verifican que

$$\bigcap_{i=1}^3 H_{i1} \neq \{x\};$$

con lo cual podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\bigcap_{i=1}^3 H_{i1} = H_{11} \cap H_{21}$$

ya que se puede hacer un cambio de nombre a los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 para obtener dicho resultado. Por tanto se obtiene que $H_{11} \cap H_{21} \subseteq H_{31}$, $H_{11} \cap H_{31} \subseteq H_{31}$ y $H_{21} \cap H_{31} \subseteq H_{31}$, es decir, la intersección dos a dos de los semiplanos que contienen las bolas $B_i(A_i, \rho_i)$ con $i = 1, 2, 3$ están contenidos en el semiplano H_{31} . Entonces, si trazamos una recta r'_3 paralela a r_3 , en H_{31} , suficientemente próxima a ella cortará a $B_i(A_i, \rho_i) \cap B_j(A_j, \rho_j) \quad \forall i < j, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}$. Sean de esta forma c_1 , c_2 y c_3 tales que $c_1 \in r'_3 \cap B_1(A_1, \rho_1) \cap B_2(A_2, \rho_2)$, $c_2 \in r'_3 \cap B_1(A_1, \rho_1) \cap B_3(A_3, \rho_3)$ y $c_3 \in r'_3 \cap B_2(A_2, \rho_2) \cap B_3(A_3, \rho_3)$.

Por convexidad el segmento $\overline{c_1 c_2} \subseteq B_1(A_1, \rho_1)$ ya que $c_1 \in B_1(A_1, \rho_1)$ y $c_2 \in B_1(A_1, \rho_1)$, de igual forma se obtiene que $\overline{c_1 c_3} \subseteq B_2(A_2, \rho_2)$ y $\overline{c_2 c_3} \subseteq B_3(A_3, \rho_3)$ de donde se deduce que

$$\{c_1, c_2, c_3\} \cap \bigcap_{i=1}^3 B_i(A_i, \rho_i) \neq \emptyset$$

lo cual está en contradicción con las hipótesis iniciales del lema.

Finalmente para demostrar el apartado iii), supongamos que existe

$$y \in \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij}) \cap \text{int}(H_{i2} \cap H_{j2}).$$

Puesto que $\text{int}(B_i(A_i, \rho_i)) \cap \text{int}(B_j(A_j, \rho_j)) \neq \emptyset$ existe $z \in \text{int}(B_i(A_i, \rho_i)) \cap \text{int}(B_j(A_j, \rho_j))$ tal que $d_i(z, A_i) < \rho_i$ y $d_j(z, A_j) < \rho_j$, lo que supone que z domina a y , hecho que contradice la suposición de que $y \in \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij})$.

□

Lema 4.2.2 Sean A_1, A_2 y A_3 tres conjuntos convexos cerrados con calibradores asociados $\gamma_1(\cdot)$, $\gamma_2(\cdot)$ y $\gamma_3(\cdot)$ y ρ_1, ρ_2 y ρ_3 en \mathbb{R}^+ , tales que (ver Figura 4.2):

a)

$$\bigcap_{i=1}^3 \text{int}(B_i(A_i, \rho_i)) \neq \emptyset \quad y \quad x \in \text{Fr}\left(\bigcap_{i=1}^3 B_i(A_i, \rho_i)\right).$$

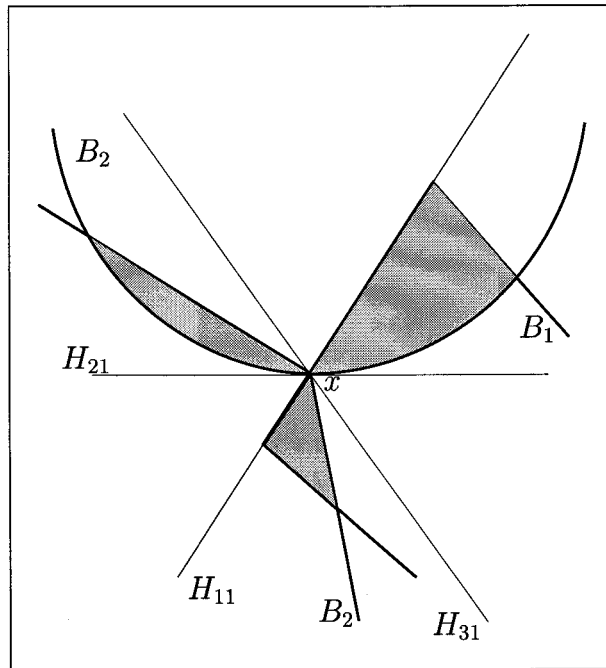


Figura 4.1: Correspondiente al Lema 4.2.1.

b) $\text{int}(B_i(A_i, \rho_i)) \cap \text{int}(B_j(A_j, \rho_j)) \neq \emptyset$, con $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Se verifica que existen tres rectas r_i , $i = 1, 2, 3$ que definen los semiplanos H_{ij} , $j = 1, 2$ tales que

i) $B_i(A_i, \rho_i) \cap B_j(A_j, \rho_j) \subseteq H_{i1} \cap H_{j1} \quad \forall i, j \in 1, 2, 3.$

ii) $\text{int}(H_{12} \cap H_{22} \cap H_{32}) \neq \emptyset$.

Demostración:

El apartado i) se demuestra de forma análoga al lema anterior. Veamos pues, el apartado ii). Debido a que $\bigcap_{i=1}^3 \text{int}(B_i(A_i, \rho_i)) \neq \emptyset$ y que $\bigcap_{i=1}^3 \text{int}(B_i(A_i, \rho_i)) \subseteq \bigcap_{i=1}^3 \text{int}(H_{i1})$, se tiene que $\bigcap_{i=1}^3 \text{int}(H_{i1}) \neq \emptyset$. Por tanto, $\mathbb{R}^2 \neq \bigcup_{i=1}^3 H_{i1}$, es decir, su complementario no es vacío, o lo que es lo mismo, $\bigcap_{i=2}^3 \text{int}(H_{i2}) \neq \emptyset$. \square

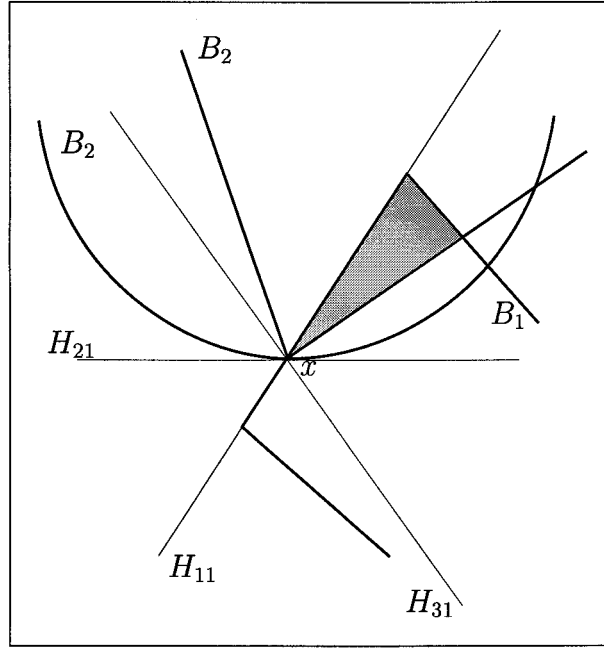


Figura 4.2: Correspondiente al Lema 4.2.2.

Lema 4.2.3 Si A_1 y A_2 son conjuntos convexos cerrados con calibradores asociados $\gamma_1(\cdot)$ y $\gamma_2(\cdot)$ se verifica que

$$B_1(A_1, \rho_1) \cap B_2(A_2, \rho_2) \cap \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \neq \emptyset$$

para todo ρ_1 y ρ_2 tal que $B_1(A_1, \rho_1) \cap B_2(A_2, \rho_2) \neq \emptyset$.

Demostración:

El conjunto $B_1(A_1, \rho_1) \cap B_2(A_2, \rho_2)$ es el conjunto de puntos que tienen menor o igual distancia de ρ_1 a A_1 y de ρ_2 a A_2 . Es decir, el conjunto intersección está formado por los puntos que dominan a los puntos que distan más de ρ_1 a A_1 y más de ρ_2 a A_2 . Por tanto, debe existir un punto de esa intersección que pertenezca a $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12})$. \square

Proposición 4.2.1 Sean $A_1, A_2, A_3 \subseteq X$ conjuntos convexos cerrados, a los que se les han asociado los calibradores $\gamma_1(\cdot)$, $\gamma_2(\cdot)$ y $\gamma_3(\cdot)$ respectivamente. Se tiene que

$$\text{infWE}(\mathcal{A}_{123}) = \bigcup_{i < j} \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij}) \cup \text{encl} \left(\bigcup_{i < j} \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij}) \right)$$

donde $\text{encl}\left(\bigcup_{i<j} \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij})\right)$ es la región del plano delimitada por $\bigcup_{i<j} \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij})$.

Observación 4.2.1 Antes de proceder con la demostración, hemos de hacer notar, en primer lugar, que la región $\text{encl}\left(\bigcup_{i<j} \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij})\right)$ está bien definida ya que el conjunto $\bigcup_{i<j} \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij})$ es conexo. Y en segundo lugar, que dicha región puede ser descrita como el conjunto de puntos tal que si $x \in \text{encl}\left(\bigcup_{i<j} \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij})\right)$ no existe una curva continua $x(t)$ $t \in [0, \infty)$ con $x(0) = x$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty$, verificando que $x(t) \notin \bigcup_{i<j} \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij}) \quad \forall t \in [0, \infty)$.

Demostración:

En primer lugar, sabemos que $\text{infWE}(\mathcal{A}_{ij}) \subseteq \text{infWE}(\mathcal{A}_{123}) \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$. Para probar que $\text{encl}\left(\bigcup_{i<j} \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij})\right) \subseteq \text{infWE}(\mathcal{A}_{123})$ tomamos un punto x que verifica que $x \in \text{encl}\left(\bigcup_{i<j} \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij})\right) \setminus \left(\bigcup_{i<j} \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij})\right)$ y suponemos que $x \notin \text{infWE}(\mathcal{A}_{123})$.

Debido a que $x \notin \text{infWE}(\mathcal{A}_{123})$ se tiene que $x \in \bigcap_{i=1}^3 \text{Fr}(B_i(A_i, d_i(x, A_i)))$ y que $\bigcap_{i=1}^3 \text{int}(B_i(A_i, d_i(x, A_i))) \neq \emptyset$, además se tiene que $x \notin \bigcup_{i<j} \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij})$ con lo cual estamos en las condiciones del Lema 4.2.2. Por tanto, se tiene que existen tres rectas r'_i con $i = 1, 2, 3$ que definen los planos H'_{ij} con $j = 1, 2$ tales que $B_i(A_i, d_i(x, A_i)) \subseteq H'_{i1}$ verificando que $\bigcap_{i=1}^3 \text{int}(H'_{i2}) \neq \emptyset$, entonces debido a que $x \in \text{encl}\left(\bigcup_{i<j} \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij})\right)$ se tiene que $\bigcap_{i=1}^3 \text{int}(H'_{i2}) \cap \bigcup_{i<j} \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij}) \neq \emptyset$, hecho que provoca una contradicción ya que los elementos de esa intersección estarían dominados por x , con lo cual existirían puntos que son débilmente eficientes para dos conjuntos y no lo son para tres.

Por tanto

$$\bigcup_{i<j} \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij}) \cup \text{encl}\left(\bigcup_{i<j} \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij})\right) \subseteq \text{infWE}(\mathcal{A}_{123}).$$

Veamos la inclusión contraria, es decir, si $x \in \text{infWE}(\mathcal{A}_{123})$ entonces $x \in \bigcup_{i<j} \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij}) \cup \text{encl}\left(\bigcup_{i<j} \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij})\right)$. Se sabe, por la Proposición 4.1.6, que

$$x \in \text{infWE}(\mathcal{A}_{123}) \iff \bigcap_{i=1}^3 \text{int}\left(B_i(x, d_i(x, A_i))\right) = \emptyset.$$

Si existen i, j tal que $\text{int}(B_i(x, d_i(x, A_i))) \cap \text{int}(B_j(x, d_j(x, A_j))) = \emptyset$ entonces $x \in \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij})$, con lo cual, $x \in \bigcup_{i < j} \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij})$.

En el caso de que para todo $i < j$ se tenga que $x \notin \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij})$, se verifica que $\bigcap_{i=1}^3 \text{int}(B_i(x, d_i(x, A_i))) = \emptyset$ e $\text{int}(B_i(x, d_i(x, A_i))) \cap \text{int}(B_j(x, d_j(x, A_j))) \neq \emptyset$, es decir, estamos en las condiciones del Lema 4.2.1, por tanto, existen tres rectas r_i con $i = 1, 2, 3$, que definen los semiplanos H_{ij} con $j = 1, 2$, verificando que $B_i(A_i, d(x, A_i)) \subseteq H_{i1}$ y que $\text{infWE}(\mathcal{A}_{ij}) \cap \text{int}(H_{i2} \cap H_{j2}) = \emptyset$.

Definimos

$$C_{ij} := \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij}) \cap B_i(x, d_i(x, A_i)) \cap B_j(x, d_j(x, A_j)).$$

Nuestro objetivo va a ser el demostrar que el punto x está rodeado por los puntos débilmente eficientes de dos conjuntos, para ello, razonamos por reducción al absurdo. Suponemos que existe una curva continua $z(t)$ $t \in [0, \infty)$ que separa C_{12} y C_{13} en H_{11} , es decir, no existe ningún conexo $C \subseteq H_{11}$, tal que $C_{12} \cup C_{13} \subseteq C$ y $C \cap \{z(t) : t \in [0, \infty)\} = \emptyset$.

Se tiene que $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12})$ es un conjunto conexo que contiene a C_{12} , que $\text{infWE}(\mathcal{A}_{13})$ es un conjunto conexo que contiene a C_{13} y que $A_1 \subseteq \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap \text{infWE}(\mathcal{A}_{13})$ entonces $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cup \text{infWE}(\mathcal{A}_{13})$ es un conjunto conexo que contiene a C_{12} y C_{13} . Además, por la suposición de que existe una curva continua que separa C_{12} y C_{13} en H_{11} se tiene que $(\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cup \text{infWE}(\mathcal{A}_{13})) \cap (H_{12} \cap H_{32}) \neq \emptyset$.

Por otro lado, siempre se tiene que $A_1 \subseteq \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap \text{infWE}(\mathcal{A}_{13})$ y por el Lema 4.2.1, apartado iii) sabemos que $\text{infWE}(\mathcal{A}_{13}) \cap \text{int}(H_{12} \cap H_{32}) = \emptyset$ y $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap \text{int}(H_{12} \cap H_{22}) = \emptyset$, por tanto, $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap \text{infWE}(\mathcal{A}_{13}) \subseteq H_{21} \cap H_{31}$. De donde se deduce que $A_1 \subseteq H_{21} \cap H_{31} \subseteq H_{12}$, lo cual es imposible, ya que $A_1 \subseteq H_{11}$.

Razonando de forma análoga con C_{12} y C_{23} y con C_{13} y C_{23} se obtiene que el punto x está en la región delimitada por el conjunto de puntos débilmente eficientes dos a dos. \square

Observación 4.2.2 Hemos de hacer notar que a partir del resultado anterior podemos caracterizar el conjunto de puntos débilmente eficientes para una familia de conjuntos con más de tres elementos, ya que, por el teorema de Helly (ver Rockafellar (1970)) se tiene que

$$\inf WE(\mathcal{A}_{1\dots k}) = \bigcup_{i < j < l} \inf WE(\mathcal{A}_{ijl})$$

y el conjunto $\inf WE(\mathcal{A}_{ijl}) \quad \forall i, j, l \in \{1, \dots, k\}$ queda caracterizado a través de la proposición anterior.

En lo que sigue denotamos por $\text{proj}_Y^i(A_i) := \arg \min_{y \in Y} d_i(y, A_i)$.

Proposición 4.2.2 Sean A_1 y A_2 dos conjuntos convexos cerrados asociados a los calibradores $\gamma_1(\cdot)$ y $\gamma_2(\cdot)$ respectivamente e $Y \subseteq X$ un conjunto convexo cerrado tal que $\inf WE(\mathcal{A}_{12}) \cap Y = \emptyset$. Si se verifica una de las dos condiciones siguientes:

- i) $\gamma_1(\cdot)$ y $\gamma_2(\cdot)$ son calibradores estrictamente convexos, A_1 y A_2 son conjuntos estrictamente convexos.
- ii) Y es estrictamente convexo.

Se tiene que

$$\inf WE(\mathcal{A}_{12}, Y) = \inf E(\mathcal{A}_{12}, Y) = \inf SE(\mathcal{A}_{12}, Y) = \text{bd}(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$$

donde $\bar{a}_1 := \text{proj}_Y^1(A_1)$, $\bar{a}_2 := \text{proj}_Y^2(A_2)$ y $\text{bd}(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ es el tramo de frontera de Y que une \bar{a}_1 y \bar{a}_2 y que tiene intersección no vacía con $\text{int}(B_1(A_1, d_1(\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2}, A_1))) \cap \text{int}(B_2(A_2, d_2(\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2}, A_2)))$ si dicha intersección no es vacía o, en caso contrario, el tramo de frontera que contiene a $\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2}$.

Observación 4.2.3 Veamos que la definición de $\text{bd}(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ dada en el enunciado de la proposición es coherente, es decir, $\text{int}(B_1(A_1, d_1(\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2}, A_1))) \cap \text{int}(B_2(A_2, d_2(\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2}, A_2)))$ tiene intersección no vacía con sólo uno de los tramos de frontera que une \bar{a}_1 y \bar{a}_2 , cuando dicha intersección no es vacía.

En efecto, suponemos que existe $x \in \text{bd}(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ e $y \in \text{Fr}(Y) \setminus \text{bd}(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$, tal que $x, y \in \text{int}(B_1(A_1, d_1(\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2}, A_1))) \cap \text{int}(B_2(A_2, d_2(\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2}, A_2)))$. Considero z como la intersección del segmento que une x e y con el segmento que une \bar{a}_1 y \bar{a}_2 . Por convexidad se tiene que $z \in \text{int}(B_1(A_1, d_1(\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2}, A_1))) \cap \text{int}(B_2(A_2, d_2(\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2}, A_2)))$ y de aquí, que $z \neq \frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2}$.

Debido a la convexidad de las funciones $d_1(\cdot, A_1)$ y $d_2(\cdot, A_2)$ sobre la recta que contiene a \bar{a}_1 y \bar{a}_2 , se verifica una de las afirmaciones siguientes:

- $d_1(z, A_1) > d_1(\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2}, A_1)$
- $d_2(z, A_2) > d_2(\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2}, A_2)$,

que contradicen a que $z \in \text{int}(B_1(A_1, d_1(\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2}, A_1))) \cap \text{int}(B_2(A_2, d_2(\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2}, A_2)))$.

En el caso que $\text{int}(B_1(A_1, d_1(\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2}, A_1))) \cap \text{int}(B_2(A_2, d_2(\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2}, A_2))) = \emptyset$ se tiene que $\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2} \in \text{Fr}(Y)$ y que $\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2} \in \text{infWE}(\mathcal{A}, Y)$.

Demostración:

Si se verifica una de las condiciones i) ó ii) se tiene que las proyecciones de A_1 y de A_2 sobre Y son únicas. De esta forma, denominamos

$$\bar{a}_1 = \text{proj}_Y^1(A_1) \quad \text{y} \quad \bar{a}_2 = \text{proj}_Y^2(A_2).$$

Por la Proposición 4.1.6 sabemos que si $x \in \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y)$ entonces

$$\bigcap_{i=1}^2 \text{int}(B_i(x, d_i(x, A_i))) \cap Y = \emptyset,$$

de donde se obtiene por las condiciones i) ó ii) que

$$\bigcap_{i=1}^2 B_i(x, d_i(x, A_i)) \cap Y = \{x\},$$

lo que supone que $x \in \text{infSE}(\mathcal{A}_{12}, Y)$. Por tanto, podemos decir que;

$$\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y) = \text{infE}(\mathcal{A}_{12}, Y) = \text{infSE}(\mathcal{A}_{12}, Y).$$

De esta forma, nos resta por probar que;

$$\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y) = \text{bd}(\bar{a}_1, \bar{a}_2).$$

Primero veamos que $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y) \subseteq \text{Fr}(Y)$. Para ello, suponemos que se tiene que $y \in \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y) \cap \text{int}(Y)$. Debido a que $y \notin \text{infWE}(\mathcal{A}_{12})$ ya que hemos supuesto que $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap Y = \emptyset$, se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^2 \text{int}\left(B_i(A_i, d_i(y, A_i))\right) \neq \emptyset$$

de donde, por razones de convexidad, ya que $y \in \text{int}(Y)$ se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^2 \text{int}\left(B_i(A_i, d_i(y, A_i))\right) \cap Y \neq \emptyset$$

lo cual está en contradicción con la suposición de que $y \in \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y)$. Por tanto, se tiene que $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y) \subseteq \text{Fr}(Y)$. Además, por la Observación 4.2 también se verifica que $\text{int}(B_1(A_1, d_1(\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2}, A_1))) \cap \text{int}(B_2(A_2, d_2(\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2}, A_2))) \cap \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y) \subseteq \text{bd}(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$, o bien, que $\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2} \in \text{bd}(\bar{a}_1, \bar{a}_2) \cap \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y)$.

Una vez comprobado que $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y) \subseteq \text{Fr}(Y)$, distinguimos a continuación el caso en el que $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$, donde se tiene que $\{\bar{a}_1\} = \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y)$, puesto que cualquier punto de Y está más lejos de A_1 y A_2 que \bar{a}_1 . Por tanto en este caso la proposición queda demostrada ya que $\text{bd}(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = \{\bar{a}_1\} = \{\bar{a}_2\}$.

Consideremos ahora el caso más general, es decir, $\bar{a}_1 \neq \bar{a}_2$. Sabemos que \bar{a}_1 y \bar{a}_2 pertenecen a $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y)$ ya que no existe otro punto de Y más próximo a A_1 y A_2 respectivamente. Además por lo demostrado anteriormente tenemos que $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y) \subseteq \text{Fr}(Y)$, con lo cual debido a la conexión de $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y)$ se tiene que un tramo de frontera que une \bar{a}_1 y \bar{a}_2 está incluido en $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y)$. Para obtener dicho tramo de frontera examinamos el entorno de \bar{a}_1 y \bar{a}_2 en la frontera de Y , de esta forma estudiamos en primer lugar el entorno de \bar{a}_2 .

Nuestro objetivo va a ser el demostrar que los puntos en un entorno de \bar{a}_2 que estén a un lado de \bar{a}_2 en la frontera de Y dominan a lo que están en el otro lado. Para obtener dicho resultado consideramos los diferentes casos que pueden suceder:

1. $B_1(A_1, d_1(\bar{a}_2, A_1)) \cap V(\bar{a}_2) \cap \text{Fr}(Y) = \{\bar{a}_2\}$ (donde $V(\bar{a}_2)$ es un entorno de \bar{a}_2).

Debido a que $\bar{a}_2 \neq \bar{a}_1$, se obtiene que $B_1(A_1, d_1(\bar{a}_2, A_1))$ no puede ser tangente a Y , por tanto,

$$B_1(A_1, d_1(\bar{a}_2, A_1)) \cap V(\bar{a}_2) \subseteq Y,$$

Con lo cual, para un ε suficientemente pequeño obtenemos que

$$B_1(A_1, d_1(\bar{a}_2, A_1)) \cap B_2(A_2, d_2(\bar{a}_2, A_2) + \varepsilon) \subseteq Y.$$

Además por el Lema 4.2.3, se sabe que

$$B_1(A_1, d_1(\bar{a}_2, A_1)) \cap B_2(A_2, d_2(\bar{a}_2, A_2) + \varepsilon) \cap \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \neq \emptyset,$$

lo que implica que $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap Y \neq \emptyset$, hecho que está en contradicción con las hipótesis iniciales. Por tanto, podemos concluir que este primer caso no es posible.

2. $B_1(A_1, d_1(\bar{a}_2, A_1)) \cap V(\bar{a}_2) \cap \text{Fr}(Y) \neq \{\bar{a}_2\}$.

Considero $\omega_1(\varepsilon)$ y $\omega_2(\varepsilon)$ definidos de la siguiente forma:

$$\text{Fr}\left(B_2(A_2, d_2(\bar{a}_2, A_2) + \varepsilon)\right) \cap \text{Fr}(Y) = \{\omega_1(\varepsilon), \omega_2(\varepsilon)\}$$

Si existe un ε tal que $d_1(\omega_1(\varepsilon), A_1) = d_1(\omega_2(\varepsilon), A_1)$ se tiene que $B_1(A_1, d_1(\omega_1(\varepsilon), A_1)) \cap B_2(A_2, d_2(\bar{a}_2, A_2) + \varepsilon) \subseteq Y$, que nos conduce, a que $\text{infWE}(\mathcal{A}, Y) \cap Y = \emptyset$ lo cual es imposible.

Por tanto, podemos suponer que existe un δ tal que para todo ε menor que delta se tiene una de las siguientes afirmaciones

- $d_1(\omega_1(\varepsilon), A_1) < d_1(\omega_2(\varepsilon), A_1)$
- $d_1(\omega_1(\varepsilon), A_1) > d_1(\omega_2(\varepsilon), A_1)$

lo que significa que $\omega_1(\varepsilon)$ domina a $\omega_2(\varepsilon)$ o viceversa. Por tanto, en un entorno de \bar{a}_2 los puntos en la frontera de Y a un lado de \bar{a}_2 dominan a los del otro lado.

Razonando de igual forma en un entorno de \bar{a}_1 , a partir de $\omega'_1(\varepsilon)$ y $\omega'_2(\varepsilon)$, tales que,

$$\omega'_1(\varepsilon), \omega'_2(\varepsilon) \in \text{Fr}(B_1(\bar{a}_1, d_1(\bar{a}_1, A_1) + \varepsilon) \cap \text{Fr}(Y))$$

donde $\omega'_1(\varepsilon) \in \text{bd}(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ y $\omega'_2(\varepsilon) \in \text{Fr}(Y) \setminus \text{bd}(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$, se tiene que $\omega'_1(\varepsilon)$ domina a $\omega'_2(\varepsilon)$ o viceversa.

De este modo, tenemos que se verifica que $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \text{infWE}(\mathcal{A}, Y)$, $B_1(A_1, d_1(\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2}, A_1)) \cap B_2(A_2, d_2(\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2}, A_2)) \cap \text{infWE}(\mathcal{A}, Y) \cap \text{bd}(\bar{a}_1, \bar{a}_2) \neq \emptyset$, o bien, $\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2} \in \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y) \cap \text{bd}(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ y que en un entorno de \bar{a}_1 y \bar{a}_2 existen puntos que no pertenecen al conjunto $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12})$. Por tanto, aplicando la conexión del conjunto de puntos débilmente eficientes se tiene que tener que $\omega_1(\varepsilon)$ y $\omega'_1(\varepsilon)$ dominan a $\omega_2(\varepsilon)$ y $\omega'_2(\varepsilon)$ respectivamente, para ε suficientemente pequeños.

□

A continuación enunciamos tres proposiciones cuya demostración es análoga a la demostración de la proposición anterior.

Proposición 4.2.3 *Si las hipótesis i) y ii) de la proposición anterior no se cumplen y $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap Y = \emptyset$, se tiene que:*

$$\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y) = \text{bd}\left(\text{proj}_Y^1(A_1), \text{proj}_Y^2(A_2)\right)$$

donde $\text{bd}\left(\text{proj}_Y^1(A_1), \text{proj}_Y^2(A_2)\right)$ es el tramo de frontera que une $\text{proj}_Y^1(A_1)$ y $\text{proj}_Y^2(A_2)$ y que tiene intersección no vacía con $\text{int}(B_1(m, d_1(m, A_1))) \cap \text{int}(B_2(m, d_2(m, A_2)))$, si dicha intersección no es vacía, o en caso contrario el tramo de frontera que contiene a m donde $m = \frac{c_1 + c_2}{2}$ con $c_1 \in \arg \min_{x \in \text{proj}_Y^1(A_1)} d_2(x, A_2)$ y $c_2 \in \arg \min_{x \in \text{proj}_Y^2(A_2)} d_1(x, A_1)$.

Corolario 4.2.1 *Si $k > 2$ y $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12\dots k}) \cap Y = \emptyset$ se verifica que*

$$\text{infWE}(\mathcal{A}_{12\dots k}, Y) = \bigcup_{i < j} \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij}, Y)$$

Demostración:

Aplicando el Teorema de Helly (ver Rockafellar (1970)), la demostración se reduce a estudiar el caso de tres conjuntos y el caso de tres conjuntos, usando la Proposición 4.2.1, se puede reducir al estudio de dos conjuntos. Observando que bajo estas hipótesis el conjunto de puntos débilmente eficientes restringido a Y está sobre su frontera se obtiene el resultado. □

Proposición 4.2.4 *Si las hipótesis i) y ii) de la proposición anterior no se cumplen, $\text{proj}_Y^1(A_1) \cap \text{proj}_Y^2(A_2) \neq \emptyset$ y $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap Y = \emptyset$, se tiene que*

$$\text{infE}(\mathcal{A}_{12}, Y) = \text{proj}_Y^1(A_1) \cap \text{proj}_Y^2(A_2)$$

y que

$$\text{infSE}(\mathcal{A}_{12}, Y) = \emptyset.$$

Proposición 4.2.5 *Si las hipótesis i) y ii) de la proposición anterior no se cumplen, $\text{proj}_Y^1(A_1) \cap \text{proj}_Y^2(A_2) = \emptyset$ y $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap Y = \emptyset$, se tiene que*

$$\text{infE}(\mathcal{A}_{12}, Y) = \text{infSE}(\mathcal{A}_{12}, Y) = \text{bd}(c_1, c_2)$$

donde $c_1 \in \arg \min_{x \in \text{proj}_Y^1(A_1)} d_2(x, A_2)$, $c_2 \in \arg \min_{x \in \text{proj}_Y^2(A_2)} d_1(x, A_1)$ y $\text{bd}(c_1, c_2)$ el tramo de frontera de Y que une c_1 y c_2 , que tiene intersección no vacía con el conjunto $\text{int}(B_1(A_1, d_1(\frac{c_1+c_2}{2}, A_1))) \cap \text{int}(B_2(A_2, d_2(\frac{c_1+c_2}{2}, A_2)))$, si dicha intersección no es vacía, o en caso contrario, el tramo de frontera que contiene a $\frac{c_1+c_2}{2}$.

A continuación pasamos a estudiar el conjunto de puntos $\text{infWE}(\mathcal{A}, Y)$, en el caso que $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y) \neq \emptyset$. En particular, vamos a estudiar el caso en el que el conjunto de puntos F definido como

$$F := \{f \in \text{Fr}(Y) \cap \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) : V(f) \cap \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap (\text{int}(Y) \cap Y^c) \neq \emptyset\}$$

donde $V(f)$ es un entorno del punto f , tenga un número finito de elementos y por extensión se puede considerar el caso de un número numerables de elementos.

Proposición 4.2.6 *Sea A_1 y A_2 conjuntos convexos cerrados, donde A_1 y A_2 tienen asociados los calibradores $\gamma_1(\cdot)$ y $\gamma_2(\cdot)$ respectivamente, tales que $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap Y \neq \emptyset$. Si se verifica una de las siguientes condiciones:*

- i) $\gamma_1(\cdot)$ y $\gamma_2(\cdot)$ son calibradores estrictamente convexos, A_1 y A_2 son conjuntos estrictamente convexos.
- ii) Y es estrictamente convexo.

Entonces se tiene que:

$$\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y) = (\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap Y) \cup \text{bd}(\bar{a}_1, f_1) \cup \text{bd}(\bar{a}_2, f_n) \cup \bigcup_{i=1}^n \text{bd}(f_i, f_{i+1})$$

donde

1. $\bar{a}_1 = \text{proj}_Y^1(A_1)$ y $\bar{a}_2 = \text{proj}_Y^2(A_2)$.
 2. $F = \{f_1, \dots, f_n\}$, enumeradas en orden creciente de las distancias a A_1 .
 3. $\text{bd}(\bar{a}_1, f_1)$ es el tramo de frontera de Y que une \bar{a}_1 y f_1 , y que tiene intersección no vacía con $\text{int}(B_1, d_1(\frac{\bar{a}_1+f_1}{2}, A_1)) \cap \text{int}(B_2(A_2, d_2(\frac{\bar{a}_2+f_1}{2}, A_2)))$ si dicha intersección no es vacía, o en caso contrario, el tramo de frontera que contiene a $\frac{\bar{a}_2+f_1}{2}$ (de igual forma se define $\text{bd}(\bar{a}_2, f_n)$).
- $\text{bd}(f_i, f_{i+1})$ es f_i si $V(f_i) \cap B_1^c(A_1, d_1(f_1, A_1)) \cap \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap \text{int}(Y) = \emptyset$, o bien, en caso contrario, el tramo de frontera que une f_i y f_{i+1} encerrado por el conjunto de puntos débilmente eficientes comprendidos entre f_i y f_{i+1} .

Demostración:

Para comenzar, estudiamos los puntos del interior de Y , obteniéndose en primer lugar, de forma directa, que $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap Y \subseteq \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y)$. Además, vamos a probar que el resto de puntos del interior no pertenecen a $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y)$. Para ello, veamos que si $y \in \text{int}(Y) \setminus (\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap Y)$ entonces $y \notin \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y)$, distinguiendo los siguientes casos:

$$\text{a) } \text{int}\left(B_1(A_1, d_1(y, A_1))\right) \cap \text{int}\left(B_2(A_2, d_2(y, A_2))\right) \cap \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap Y \neq \emptyset$$

$$\text{b) } \text{int}\left(B_1(A_1, d_1(y, A_1))\right) \cap \text{int}\left(B_2(A_2, d_2(y, A_2))\right) \cap \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap Y = \emptyset.$$

En el primer caso existe z verificando que

$$z \in \text{int}\left(B_1(A_1, d_1(y, A_1))\right) \cap \text{int}\left(B_2(A_2, d_2(y, A_2))\right) \cap \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap Y$$

por lo que se tiene que z domina a y , lo que supone que $y \notin \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y)$.

En el segundo caso se obtiene que

$$\text{int}\left(B_1(A_1, d_1(y, A_1))\right) \cap \text{int}\left(B_2(A_2, d_2(y, A_2))\right) \cap \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap Y^c \neq \emptyset$$

donde Y^c es el conjunto complementario de Y . Debido a que $y \in \text{int}(Y)$ y que $y \notin \text{infWE}(\mathcal{A}_{12})$ se deduce que $\text{int}\left(B_1(A_1, d_1(y, A_1))\right) \cap \text{int}\left(B_2(A_2, d_2(y, A_2))\right) \cap \text{int}(Y) \neq \emptyset$; de donde por convexidad se obtiene que

$$\text{int}\left(B_1(A_1, d_1(y, A_1))\right) \cap \text{int}\left(B_2(A_2, d_2(y, A_2))\right) \cap \text{Fr}(Y) \neq \emptyset.$$

Por tanto existe z' tal que $z' \in \text{int}\left(B_1(A_1, d_1(y, A_1))\right) \cap \text{int}\left(B_2(A_2, d_2(y, A_2))\right) \cap \text{Fr}(Y)$, lo que implica que z' domina a y , con lo cual $y \notin \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y)$.

De esta forma hemos probado que $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y) \cap \text{int}(Y) = \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap \text{int}(Y)$, lo que supone que sólo resta por estudiar los puntos de la frontera de Y .

Por las condiciones i) y ii) se tiene que $\text{proj}_Y^1(A_1)$ y $\text{proj}_Y^2(A_2)$ es un único punto en cada caso, que denominamos \bar{a}_1 y \bar{a}_2 respectivamente. Además, \bar{a}_1 y $\bar{a}_2 \in \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y)$ ya que son los puntos de Y más próximos a A_1 y A_2 respectivamente.

En el caso que $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$ se tiene que $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y) = \bar{a}_1$ ya que cualquier otro punto de Y está más lejano a A_1 y A_2 que $\bar{a}_1 (= \bar{a}_2)$.

En el caso que $\bar{a}_1 \neq \bar{a}_2$, hemos de hacer notar por lo expuesto anteriormente que $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y) \setminus (\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap Y) \subseteq \text{Fr}(Y)$.

Por tanto nos centramos en examinar los puntos de la frontera de Y . Para ello, tendremos en cuenta la propiedad de conexión del conjunto de puntos débilmente eficientes y que los puntos \bar{a}_1 , \bar{a}_2 , y el conjunto de puntos $\{f_1, \dots, f_n\}$, en dicha frontera, pertenecen al conjunto de puntos débilmente eficientes.

Para ello, primero examinamos los puntos de la frontera en un entorno de \bar{a}_1 , en el caso que $\bar{a}_1 \neq f_1$. Razonando de forma análoga a lo hecho en la Proposición 4.2.2 se tiene que los puntos de la frontera que están a un lado de \bar{a}_1 dominan a los puntos que están en el otro lado.

A continuación pasamos a estudiar los puntos $f_i \in F$, es decir, los puntos $f_i \in \text{Fr}(Y) \cap \text{infWE}(\mathcal{A}_{12})$ que verifican para cada uno de sus entornos, $V(f_i)$, la condición siguiente:

$$\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap V(f_i) \cap (\text{int}(Y) \cup Y^c) \neq \emptyset$$

Distinguimos los dos casos siguientes:

1. $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap (V(f_i) \setminus \{f_i\}) \cap (\text{Fr}(Y) \cup Y^c) \neq \emptyset$ y $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap (V(f_i) \setminus \{f_i\}) \cap \text{int}(Y) \neq \emptyset$ (ver Figura 4.3(a) y 4.3(c)).

Consideramos $z (\neq f_i) \in V(f_i) \cap \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap \text{int}(Y)$. Pueden ocurrir uno de los siguientes casos.

- (a) $d_1(z, A_1) \geq d_1(f_i, A_1)$ (ver f_1 en Figura 4.3(a)).
- (b) $d_1(z, A_1) < d_1(f_i, A_1)$ (ver f_2 en Figura 4.3(a)).

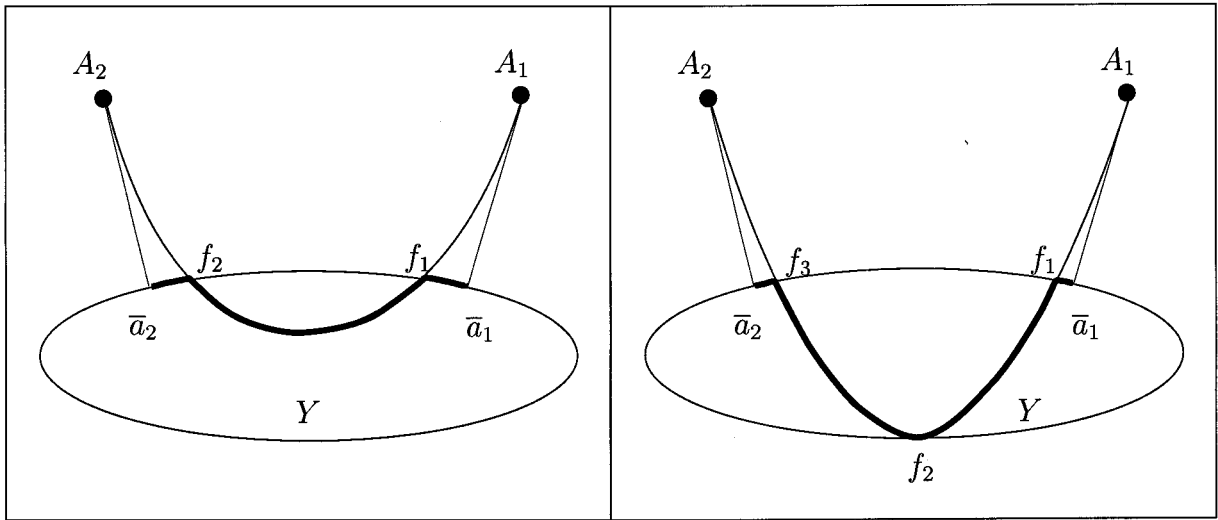
Examinamos el primer caso, estudiando de forma análoga el segundo. Considero $y (\neq f_i) \in V(f_i) \cap \text{Fr}(Y) \cap B_1^c(A_1, d_1(f_i, A_1))$. Puesto que se verifica i) o ii) entonces pueden ocurrir sólo uno de estos dos casos:

- (a) $d_2(y, A_2) > d_2(f_i, A_2)$.
- (b) $d_2(y, A_2) < d_2(f_i, A_2)$.

En el primer caso, se tiene que

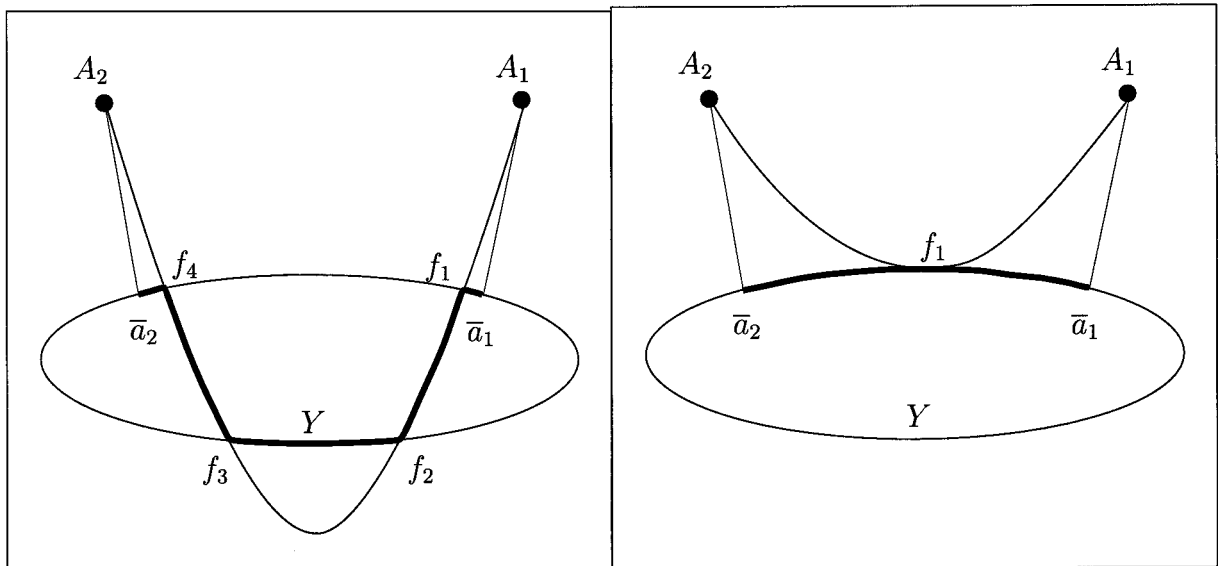
$$f_i \in \text{int}(B_1(A_1, d_1(y, A_1))) \cap \text{int}(B_2(A_2, d_2(y, A_2)))$$

lo que implica que y está dominado por f_i .



(a) CASO 1.

(b) CASO 1.



(c) CASO 2.

(d) CASO 3.

Figura 4.3: Correspondiente a la Proposición 4.2.6

En el segundo caso, se tiene que

$$\text{int}(B_1(A_1, d_1(y, A_1))) \cap \text{int}(B_2(A_2, d_2(f_i, A_2))) \cap \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap Y \neq \emptyset.$$

lo que supone que y está dominado por un punto de ese conjunto.

Por tanto, se tiene que los puntos $y(\neq f_i) \in V(f_i) \cap \text{Fr}(Y) \cap B_1^c(A_1, d_1(f_i, A_1))$ cuando $d_1(z, A_1) > d_1(f_i, A_1)$ y los puntos $y(\neq f_i) \in V(f_i) \cap \text{Fr}(Y) \cap B_2^c(A_2, d_2(f_i, A_2))$ cuando $d_1(z, A_1) < d_1(f_i, A_1)$ están dominados.

2. $(V(f_i) \setminus \{f_i\}) \cap \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \subset \text{int}(Y)$ (ver f_2 en Figura 4.3(b)).

Se tiene que

$$\text{int}(B_1(A_1, d_1(f_i, A_1))) \cap \text{int}(B_2(A_2, d_2(f_i, A_2))) = \emptyset$$

Por la convexidad de las bolas y puesto que f_i pertenece a ambas bolas y a la frontera de Y se tiene, para un ε suficientemente pequeño que

$$\text{int}(B_1(A_1, d_1(f_i, A_1) + \varepsilon)) \cap \text{int}(B_2(A_2, d_2(f_i, A_2))) \cap \text{Fr}(Y) \neq \emptyset.$$

Además, puesto que en un entorno de f_j , $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12})$ está incluido en el interior de Y se tiene que

$$\text{int}(B_1(A_1, d_1(f_i, A_1) + \varepsilon)) \cap \text{int}(B_2(A_2, d_2(f_i, A_2))) \cap \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \cap \text{int}(Y) \neq \emptyset$$

con lo cual, los puntos pertenecientes a $V(f_i) \cap B_1^c(A_1, d_1(f_i, A_1)) \cap \text{Fr}(Y)$ están dominados.

Razonando de igual forma sabiendo que

$$\text{int}(B_1(A_1, d_1(f_i, A_1))) \cap \text{int}(B_2(A_2, d_2(f_i, A_2) + \varepsilon)) \cap \text{Fr}(Y) \neq \emptyset$$

se obtiene que los puntos pertenecientes a $V(f_i) \cap B_2^c(A_2, d_2(f_i, A_2)) \cap \text{Fr}(Y)$ están dominados, con lo cual todos los puntos en un entorno de f_i están dominados.

3. $(V(f_i) \setminus f_i) \cap \text{infWE}(\mathcal{A}_{12}) \subseteq Y^c$ (ver f_1 en Figura 4.3(d)).

Por conexión se tiene que todos los puntos en un entorno de f_i en la frontera de Y pertenecen a $\text{infWE}(\mathcal{A}_{12}, Y)$.

Operando de forma análoga en \bar{a}_2 , a lo hecho en \bar{a}_1 tenemos que existen puntos de la frontera de Y en un entorno de \bar{a}_2 que están dominados.

De los casos anteriores, aplicando la conexión del conjunto de puntos débilmente eficientes se obtiene el resultado. \square

A continuación enunciamos el resultado que nos permite calcular el conjunto de puntos débilmente eficientes para tres conjuntos y cuya demostración es análoga a la de la proposición anterior.

Proposición 4.2.7 *Si $\text{infWE}(\mathcal{A}_{123}) \cap Y \neq \emptyset$ se verifica que*

$$\text{infWE}(\mathcal{A}_{123}, Y) = \bigcup_{i,j \in \{1,2,3\}} \text{infWE}(\mathcal{A}_{ij}, Y) \cup (\text{infWE}(\mathcal{A}_{123}) \cap Y).$$

De esta forma podemos calcular el caso general de k conjuntos con sólo utilizar el teorema de Helly y los resultados de la Proposición 4.2.6.

4.3 Problema multiobjetivo

En el Capítulo 1 y 2 de esta memoria hemos estudiado diferentes problemas de localización donde el objetivo era encontrar la trayectoria o ubicación óptima para la función objetivo de un determinado problema. Por otro lado, en este mismo capítulo hemos estudiado en secciones anteriores el problema punto-objetivo en el cual buscamos las ubicaciones eficientes de un servicio frente a un conjunto de demanda. En esta sección, nos planteamos el estudio de un problema más general, en el sentido de que no vamos a considerar un único criterio sino que van a ser varios simultáneamente y a la vez buscaremos ubicaciones eficientes (Pareto-óptimas) para todos los criterios considerados. Al igual que ocurre en el problema punto-objetivo no siempre existen soluciones

ideales por lo cual recurrimos a debilitaciones del concepto de solución que dan lugar a los conjuntos de soluciones débilmente eficientes, eficientes y estrictamente eficientes (ver Hamacher y Nickel (1996), Hamcher et al. (1996) o Nickel (1997)).

En esta sección vamos a estudiar un problema multicriterio en el que cada uno de los criterios utilizados será un problema ordenado de Weber, y donde los calibradores se sustituirán por funciones inf-distancias. Por tanto, observamos que estamos considerando un problema multicriterio muy general. Esta generalidad se sustenta en dos razones, la primera porque como pudimos comprobar en el capítulo anterior, la función objetivo del problema ordenado de Weber es un criterio que cubre como casos particulares diferentes criterios clásicos de localización como puede ser el criterio minisum, minmax, centdian, etc. y la segunda, porque la función inf-distancia cuando el conjunto se reduce a un punto es un calibrador. De esta forma, a través del estudio de este problema vamos a poder caracterizar simultáneamente el conjunto de soluciones de una amplia gama de problemas multiobjetivos.

En particular, vamos a estudiar el problema ordenado de Weber con inf-distancias en el caso que los conjuntos demanda sean poliedros y los calibradores asociados a ellos sean calibradores poliédricos. Así pues, consideraremos una familia $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$ donde cada uno de los conjuntos A_i es un poliedro, con L_i caras y que tiene asociado un calibrador poliédrico $\gamma_i(\cdot)$, con G_i direcciones fundamentales, de forma que la distancia desde un punto cualquiera al conjunto A_i se mide con el calibrador poliédrico $\gamma_i(\cdot)$. Denotaremos por L_{\max} al número máximo de caras de los elementos de la familia \mathcal{A} y G_{\max} al número máximo de direcciones fundamentales de los calibradores poliédricos asociados a los elementos de la familia \mathcal{A} . Hemos de hacer notar que podemos extender los resultados obtenidos para calibradores poliédricos a cualquier calibrador recurriendo a la aproximación estudiada en la Sección 3.1.6 del capítulo anterior.

En las condiciones anteriormente expuestas el problema que tratamos en esta sección para el caso Q -criterio viene dado por la siguiente expresión;

$$\min_{x \in X} \left(F^q(x) \right)_{q=1, \dots, Q} \quad (4.1)$$

donde

$$F^q(x) := \sum_{i=1}^k \lambda_i^q d_{(i)}^q(x, \mathcal{A})$$

siendo λ_i^q constantes positivas que verifican que

$$\lambda_1^q \leq \dots \leq \lambda_k^q \quad q = 1, \dots, Q;$$

y $d_{(i)}^q(x, \mathcal{A}) = d_{\sigma_i^q}(x, A_i)$ siendo σ^q una permutación del conjunto $\{1, \dots, k\}$ tal que

$$d_{\sigma_1^q}(x, A_{\sigma_1^q}) \leq \dots \leq d_{\sigma_k^q}(x, A_{\sigma_k^q}) \quad q = 1, \dots, Q.$$

Hemos de hacer notar que $F^q(\cdot)$ es una función convexa, ya que al igual que demostrábamos en el capítulo anterior, al ser las funciones inf-distancias funciones convexas y estar los pesos ordenados en orden creciente dicha función puede expresarse como máximo de funciones convexas.

4.3.1 Propiedades geométricas del problema ordenado con inf-distancias

Una vez que ha sido formulado el problema multiobjetivo que vamos a considerar, en esta sección vamos a estudiar el comportamiento de las funciones inf-distancias. Así pues, vamos a extender a las funciones inf-distancias el concepto de convexo elemental introducido para calibradores. A través del estudio de los dominios de linealidad de la función inf-distancia estudiaremos los dominios de linealidad de la función objetivo del problema ordenado de Weber, que nos permitirá el cálculo de los diferentes conjuntos de soluciones.

Carrizosa y Muriel en (1995) dieron una definición del concepto de convexo elemental para una familia de conjuntos \mathcal{A} . Dados $\{u_i\}_{1 \leq i \leq k}$ con $u_i \in B_i^o$ se le llama convexo elemental asociado a $\{u_i\}_{1 \leq i \leq k}$ al conjunto

$$C((u_i)_{1 \leq i \leq k}) = \bigcap_{1 \leq i \leq k} \left(N(B_i^o, u_i) + \partial \delta_{A_i}^*(u_i) \right)$$

donde $\partial\delta_{A_i}^*(u_i)$ es el subdiferencial de la función soporte de A_i en u_i y $N(B_i^o, u_i)$ es el cono normal a B_i^o en u_i . Por otro lado, Nickel et al. en (1997) dieron una definición alternativa del concepto de convexo elemental para las funciones inf-distancia. En esta definición a partir de una cara Y_i , de cualquier dimensión, de un elemento A_i de la familia \mathcal{A} y $p_i \in B_i^o$, se define el conjunto

$$C(Y_i, p_i) := \{x : \text{proj}_{A_i}^i(x) \subseteq Y_i; \text{ y existe } a_i \in \text{proj}_{A_i}^i(x) \text{ tal que } \langle p_i, a_i - x \rangle = d_i(x, A_i)\}$$

Para una familia $\mathcal{Y} := \{Y_1, \dots, Y_L\}$ donde Y_i es una cara del conjunto A_i con $i = 1, \dots, k$ y $p = (p_1, \dots, p_k)$ donde $p_i \in B_i^o$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, se define como

$$C(\mathcal{Y}, p) := \bigcap_{i=1}^k C(Y_i, p_i).$$

En Nickel et al. (1997) se prueba que ambas definiciones son equivalentes, ya que, $C(Y_i, p_i) = N(B_i^o, p_i) + \partial\delta_{A_i}^*(p_i)$ cuando $p_i \in N(A_i, y_i)$ con $y_i \in \text{ri}(Y_i)$ e inversamente para todo $p_i \in B_i^o$ existe Y_i cara de A_i tal que $N(B_i^o, p_i) + \partial\delta_{A_i}^*(p_i) = C(Y_i, p_i)$.

De esta forma, una vez dada la definición de convexo elemental hemos de hacer notar que la importancia de estos conjuntos se debe, al igual que en el caso puntual, a que la función inf-distancia es lineal en ellos. A continuación vamos a caracterizar geoméricamente los convexos elementales en el caso que $X = \mathbb{R}^2$, los elementos de la familia \mathcal{A} sean polígonos y los calibradores asociados a cada uno de estos elementos sean calibradores poliédricos. Para ello, observamos que;

$$d_i(x, A_i) = \gamma_i(\bar{a}_i - x)$$

donde $\bar{a}_i \in \text{proj}_{A_i}^i(x)$.

Teniendo en cuenta la anterior observación vamos a estudiar una serie de resultados que van a caracterizar dichos convexos elementales en el caso plano.

Lema 4.3.1 *Sea H_1 uno de los semiplanos determinado por la recta r . La proyección de un punto que pertenece a H_1 , con un calibrador poliédrico $\gamma(\cdot)$, sobre r puede ser;*

- *única, con lo cual todos los puntos de H_1 proyectan con la misma dirección fundamental sobre r .*
- *no única, con lo cual todos los puntos de H_1 proyectan con dos direcciones fundamentales consecutivas.*

Demostración:

1. Si la proyección es única, es obvio que cada punto proyecta con una única dirección fundamental. De esta forma, debemos probar que todos los puntos de H_1 proyectan con la misma dirección fundamental, para ello, razonamos por reducción al absurdo. Sea $x, y \in H_1$ y d_1, d_2 dos direcciones fundamentales del calibrador considerado, tales que x proyecta con d_1 e y con d_2 , entonces

$$\bar{x} = x + \lambda_1 d_1 \in r;$$

$$z = x + \lambda_2 d_2 \in r;$$

$$\omega = y + \mu_1 d_1 \in r;$$

$$\bar{y} = y + \mu_2 d_2 \in r;$$

donde al ser \bar{x} e \bar{y} las únicas proyecciones de x e y sobre la recta r , se verifica que $\lambda_1 < \lambda_2$ y $\mu_1 > \mu_2$.

Se sabe que los triángulos $x\bar{x}z$ y $y\omega\bar{y}$ son triángulos con ángulos iguales, entonces

$$1 > \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} > 1;$$

que es una contradicción.

2. Si la proyección de un punto de H_1 sobre la recta no es única quiere decir que proyecta con más de una dirección fundamental. Observamos que si proyecta con dos direcciones fundamentales se tiene que una cara del calibrador es paralela a la recta. Además, si proyecta con más de dos direcciones fundamentales quiere decir que una cara de la bola unidad del calibrador queda determinada por más de

dos direcciones fundamentales lo cual es imposible. Finalmente, para probar que todos los puntos de H_1 proyectan con las mismas dos direcciones, solo tenemos que observar que los puntos de H_1 mantienen la misma cara de la bola unidad del calibrador centrado en ese punto paralela a la recta. Por tanto, todos los puntos de H_1 proyectan con las dos direcciones que definen esa cara.

□

Proposición 4.3.1 *Sea H_1 uno de los semiplanos determinado por la recta r . Y sea \overline{AB} un segmento incluido en r . Se tiene que;*

1. *Si $x \in H_1$ proyecta con la dirección d_1 y $\bar{x} = \text{proj}_r(x)$ entonces*

$$\exists p \in B^\circ \quad d(x, r) = \langle p, \bar{x} - x \rangle \quad \forall x \in H_1$$

y si $x \in H_1$ y $\text{proj}_r(x) \in \overline{AB}$ entonces

$$x \in \overline{AB} - \mu d_1 \quad \mu \geq 0$$

2. *Si $x \in H_1$ proyecta con la direcciones d_1 y d_2 entonces*

$$\exists q \in B^\circ \quad d(x, r) = \langle q, \bar{x} - x \rangle \quad \forall x \in H_1 \text{ y algún } \bar{x} \in \text{proj}_r(x)$$

además, si $x \in H_1$ y $\text{proj}_r(x) \subseteq \overline{AB}$ entonces

$$x \in \overline{AB} - \text{cone}(d_1, d_2).$$

donde recordamos que $\text{cone}(d_1, d_2)$ es el cono convexo generado por d_1 y d_2 .

Demostración:

1. Sea $x \in H_1$, usando el lema anterior tenemos que estos dos puntos proyectan sobre r con la misma dirección fundamental, d_1 . Sea $\bar{x} = \text{proj}_r(x)$, se tiene que $\bar{x} - x = \lambda d_1$, entonces

$$d(x, r) = \gamma(\bar{x} - x) = \gamma(\lambda d_1) = \lambda$$

Por tanto, existe $p(d_1) \in B^\circ$ tal que

$$\langle p(d_1), d_1 \rangle = 1$$

con lo cual, para todo y en H_1 como $\bar{y} - y = \lambda_y d_1$ se tiene que

$$d(y, r) = \gamma(\bar{y} - y) = \gamma(\lambda_y d_1) = \langle p(d_1), \lambda_y d_1 \rangle = \lambda_y.$$

Evidentemente el conjunto de puntos incluidos en H_1 cuya proyección pertenece al segmento \overline{AB} están en $\overline{AB} - \mu d_1$, con $\mu \geq 0$, ya que estos puntos proyectan sobre r con la dirección d_1 .

2. Se tiene que todo punto x de H_1 proyecta sobre r con dos direcciones d_1 y d_2 .

Por tanto, existe $p(d_1, d_2) \in B^\circ$ tal que

$$\gamma(d_1) = \langle p(d_1, d_2), d_1 \rangle = 1$$

$$\gamma(d_2) = \langle p(d_1, d_2), d_2 \rangle = 1$$

Con lo cual, si $x \in H_1$ se tiene que

$$d(x, r) = \gamma(\bar{x}_1 - x) = \gamma(\lambda d_1) = \lambda$$

$$d(x, r) = \gamma(\bar{x}_2 - x) = \gamma(\lambda d_2) = \lambda$$

donde \bar{x}_1 y \bar{x}_2 son las proyecciones de x con d_1 y d_2 respectivamente.

Por tanto para todo $\bar{x} \in \text{proj}_r(x)$ se tiene que existe un $\theta \in [0, 1]$ tal que,

$$\bar{x} = \theta(x + \lambda d_1) + (1 - \theta)(x + \lambda d_2)$$

con lo cual, se tiene que

$$d(x, r) = \gamma(\bar{x} - x) = \langle p(d_1, d_2), \theta \lambda d_1 + (1 - \theta) \lambda d_2 \rangle = \lambda.$$

Finalmente, como todos los puntos de H_1 proyectan con las mismas dos direcciones fundamentales d_1 y d_2 . Se tiene que el conjunto de puntos de H_1 cuya proyección tiene intersección no vacía con el segmento \overline{AB} es el conjunto de puntos en $\overline{AB} - \text{cone}(d_1, d_2)$.

□

Teorema 4.3.1 Sean h_1 y h_2 dos semirrectas con el mismo origen O , contenidas en las rectas r_1 y r_2 respectivamente, sean H_1, H_2 dos semiplanos determinados por las rectas r_1 y r_2 respectivamente, tales que, $h_1 \not\subseteq H_2$ y $h_2 \not\subseteq H_1$.

1. Si $x \in H_1$ y $\bar{x} \in \text{proj}_{r_1}(x) \cap (h_1 \setminus \{O\})$ entonces existe $p \in B^\circ$ tal que:

$$\langle p, \bar{x} - x \rangle = d(x, \text{co}(h_1, h_2)).$$

2. Si $x \in H_2$ y $\bar{x} \in \text{proj}_{r_2}(x) \in (h_2 \setminus \{O\})$ entonces existe $q \in B^\circ$ tal que:

$$\langle q, \bar{x} - x \rangle = d(x, \text{co}(h_1, h_2)).$$

3. Si $x \notin \text{co}(h_1, h_2)$ y $\text{proj}_{r_1 \cup r_2}(x) \notin (h_1 \cup h_2) \setminus \{O\}$ entonces $\text{proj}_{\text{co}(h_1, h_2)}(x) = O$ y existe $p_x \in B^\circ$ tal que

$$\langle p_x, O - x \rangle = d(x, \text{co}(h_1, h_2)).$$

donde $\text{co}(h_1, h_2)$ es la envolvente convexa de h_1 y h_2 .

Demostración:

1. y 2. Es una consecuencia directa del lema anterior.

3. Si $x \notin \text{co}(h_1, h_2)$ y $\text{proj}_{r_1 \cup r_2}(x) \notin h_1 \cup h_2$ entonces es evidente que $\text{proj}_{\text{co}(h_1, h_2)}(x) = O$. De esta forma, existe un cono, $\text{cone}(D_O)$, generado por direcciones fundamentales, (posiblemente una), tales que, para todo x que pertenece a $O - \text{cone}(D_O)$ se tiene que $\text{proj}_{\text{co}(h_1, h_2)}(x) = O$. Con lo cual, existe $p_x \in B^\circ$ verificando que

$$d(x, h_1 \cup h_2) = \gamma(O - x) = \langle p_x, O - x \rangle \quad \forall x \in O - \text{cone}(D_O).$$

□

En la condiciones del teorema anterior, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.3.1 *La función $d(x, h_1 \cup h_2)$ es lineal en los siguientes conjuntos:*

1. $h_1 - \text{cone}(D_1)$, donde D_1 es el conjunto formado por una o dos direcciones fundamentales consecutivas con las cuales los puntos de H_1 proyectan sobre r_1 .
2. $h_2 - \text{cone}(D_2)$, donde D_2 es el conjunto formado por una o dos direcciones fundamentales consecutivas con las cuales los puntos de H_2 proyectan sobre r_2 .
3. $O - \text{cone}(d_r, d_{r+1})$ con $d_r, d_{r+1} \in D_O$, donde D_O es el conjunto formado por direcciones fundamentales consecutivas (posiblemente una) comprendidas entre D_1 y D_2 y tal que $O - \text{cone}(D_O) \subseteq H_1 \cup H_2$.

Demostración:

1. y 2. Se deducen directamente de los resultados anteriores.
3. Observamos que el conjunto de puntos de $H_1 \cup H_2$ cuya única proyección es el punto O , es el conjunto de puntos de $H_1 \cup H_2$ menos el conjunto de puntos cuya proyección sobre $(h_1 \cup h_2) \setminus \{O\}$, es decir, es el conjunto P_O que viene definido del siguiente modo

$$P_O = \{x : x \in (H_1 \cup H_2) \setminus (\text{int}(h_1 - \text{cone}(D_1)) \cup \text{int}(h_2 - \text{cone}(D_2)))\}$$

Por tanto, P_O es un cono de vértice O generado por el conjunto de direcciones fundamentales, D_O , comprendidas entre D_1 y D_2 , tales que $O - \text{cone}(D_O) \subseteq H_1 \cup H_2$. Por tanto si d_j y d_{j+1} pertenecen a D_O se tiene que existe $p_j \in B^o$ tal que

$$d(x, O) = \langle p_j, O - x \rangle \quad \forall x \in O - \text{cond}(d_j, d_{j+1}).$$

□

Después de estos resultados, donde hemos caracterizado los dominios de linealidad de la función inf-distancia a un cono formado por un par de semirrectas con igual origen, extendemos este resultado, a través del siguiente corolario, para caracterizar los dominios de linealidad de un polígono.

Corolario 4.3.2 *Sea A un polígono que tiene a Y_1, \dots, Y_L como caras y a O_1, \dots, O_L como vértices. Sea r_j la recta que contiene a la cara Y_j y que define el semiplano H_j , que no contiene a A , con $j = 1, \dots, L$. Sea D_j y D_{O_j} los conjuntos de direcciones fundamentales de un calibrador $\gamma(\cdot)$ con las cuales proyectan respectivamente, los puntos de H_j sobre r_j y los puntos cuya proyección es O_j , para $j = 1, \dots, L$. los puntos de H_j sobre S tiene que existen $p(D_j), p(O_j, s) \in B^\circ$ tales que:*

$$d(x, A) = \begin{cases} \langle p(D_j), \bar{x}_j - x \rangle & \forall x \in Y_j - \text{cone}(D_j) \text{ y } \bar{x}_j \in \text{proj}_A(x) \\ \langle p(O_j, s), O_j - x \rangle & \forall x \in O_j - \text{cone}(d_s, d_{s+1}) \text{ con } d_s, d_{s+1} \in D_{O_j} \end{cases}$$

A continuación, pasamos a desarrollar un algoritmo que nos permita construir los dominios de linealidad de la función inf-distancia a un polígono A , es decir, los convexos elementales maximales.

ALGORITMO 4.3.1

- PASO 0**
- Sean Y_1, \dots, Y_L las caras de A , enumeradas en el sentido de las agujas del reloj, que definen las rectas r_1, \dots, r_L . Y sean H_1, \dots, H_L los semiespacios determinados por las rectas r_1, \dots, r_L tales que A no está incluido en H_j $\forall j = 1, \dots, L$.
 - Sean O_1, \dots, O_L los vértices de A , tales que, el lado Y_j y el lado Y_{j+1} definen el vértice O_j , siendo $Y_{L+1} = Y_1$. Además, sean d_1, \dots, d_G las direcciones fundamentales del calibrador $\gamma(\cdot)$, enumeradas en el sentido de las agujas del reloj.

PASO 1 CALCULAR

D_j $j = 1, \dots, L$, donde D_j es el conjunto de direcciones fundamentales tales que los puntos de H_j proyectan sobre r_j con la direcciones de D_j . Notemos que $\#(D_j) \leq 2$.

PASO 2 (\star Fase de las caras del polígono \star)

CALCULAR para $j = 1, \dots, L$

$$Y_j - \text{cone}(D_j)$$

PASO 3 (\star Fase de los vértices del polígono \star)

CALCULAR para $j = 1, \dots, L$

$$M_j := \max\{r : d_r \in D_j\}$$

$$m_j := \min\{r : d_r \in D_{j+1}\}$$

MIENTRAS $m_j \leq r < M_j$

CALCULAR

$$O_j + \text{cone}(d_r, d_{r+1}).$$

Observación 4.3.1 Hemos de hacer notar que en el desarrollo del algoritmo hemos utilizado que el conjunto de puntos que son proyección de unos determinados puntos con la misma dirección fundamental es conexo. De no ser así, los convexos elementales resultantes tendrían intersección no vacía, lo que implicaría que existen puntos que proyectan sobre A con dos direcciones no consecutivas lo cual es imposible por la convexidad del conjunto A y del calibrador $\gamma(\cdot)$. Por tanto, podemos deducir que si dos vértices consecutivos de A son proyecciones de dos determinados puntos con una misma dirección fundamental entonces los puntos de la arista que los une también son proyecciones de otros determinados puntos con esa misma dirección fundamental.

Tras describir este algoritmo, estudiamos el número de conjuntos donde las funciones inf-distancias tienen comportamiento lineal.

Corolario 4.3.3 *Los convexos elementales en el caso de que los conjuntos de demanda sean polígonos y los calibradores asociados a dichos conjuntos sean poliédricos vienen descritos por desigualdades lineales.*

Proposición 4.3.2 *El número de conjuntos donde la función inf-distancia a un polígono A , con L caras, con respecto a un calibrador poliédrico $\gamma(\cdot)$, con G direcciones fundamentales, es una función lineal es del orden $O(G + L)$.*

Demostración:

Hemos visto anteriormente que cada cara Y_j $j = 1, \dots, L_i$, generan un conjunto $Y_j - \text{cone}(D_j)$, en el cual la función inf-distancia es lineal y donde D_j es conjunto de direcciones fundamentales con las cuales proyectan los puntos cuya proyección pertenece a Y_j .

Además sobre cada vértice O_j con $j = 1, \dots, L_i$ se genera los conjuntos $O_j + \text{cone}(d_r, d_{r+1})$ donde d_r y d_{r+1} son direcciones fundamentales con las cuales proyectan los puntos cuya proyección es O_j .

Con lo cual, cada cara genera un conjunto donde la función inf-distancia es lineal. Además el conjunto de vértices genera a lo sumo G conjuntos donde la función inf-distancia es lineal, ya que G es el número de direcciones fundamentales del calibrador considerado (ver Observación 4.3.1. Por tanto, el número de conjuntos donde la función inf-distancia es lineal tiene una complejidad de $O(G + L)$. \square

Al igual que en el capítulo anterior, vamos a estudiar las propiedades geométricas del problema ordenado de Weber con inf-distancias. Hemos de hacer notar que estas propiedades son en cierta forma análogas a las del problema ordenado de Weber estudiado en el capítulo anterior, ya que como hemos visto, el conjunto de convexos elementales en el caso con inf-distancia tiene una estructura similar al caso puntual.

Comenzaremos estudiando el conjunto de puntos que equidistan de dos conjuntos.

Definición 4.3.1 *El conjunto $B(A_i, A_j)$ formado por los puntos $\{x \in X : d_i(x, A_i) = d_j(x, A_j) \quad i \neq j\}$ se denomina mediatriz de A_i y A_j para los calibradores $\gamma_i(\cdot)$ y $\gamma_j(\cdot)$.*

El siguiente resultado prueba que el conjunto mediatriz está formado por una serie de subconjuntos que vienen definidos por desigualdades lineales.

Proposición 4.3.3 *La mediatriz de los conjuntos A_i y A_j con respecto a los calibradores $\gamma_i(\cdot)$ y $\gamma_j(\cdot)$, esta descrito por ecuaciones lineales dentro de cada convexo elemental.*

La demostración de este resultado es similar a la demostración de la Proposición 3.1.1 del capítulo anterior, basándonos en el comportamiento lineal de las funciones inf-distancias dentro de los convexos elementales.

A continuación estudiaremos el número de subconjuntos definidos por desigualdades lineales que forman una mediatriz.

Proposición 4.3.4 *El número de subconjuntos definidos por desigualdades lineales que forman la mediatriz de dos conjuntos, A_i y A_j , es del orden de $O(G_i + G_j + L_i + L_j)$.*

Demostración:

Como hemos visto en el resultado anterior, la mediatriz viene definida por desigualdades lineales dentro de un convexo elemental, por tanto, el cambio de un conjunto definido por desigualdades lineales a otro se produce sobre las direcciones fundamentales con origen en los vértices de A_i y A_j .

Por otro lado, tenemos que sobre los puntos en una dirección fundamental en uno de los vértices de un conjunto, por ejemplo de A_i , la función $d_i(\cdot, A_i)$ es lineal, mientras que la función $d_j(\cdot, A_j)$ es convexa. Con lo cual, a lo sumo la expresión $d_i(x, A_i) - d_j(x, A_j)$ se anula en dos puntos de esa dirección fundamental, lo que significa que a lo sumo existen dos puntos de esa dirección fundamental que pertenece a la mediatriz de ambos conjuntos, de donde se deduce el resultado. \square

A continuación damos una generalización del concepto de región ordenada dada en la Definición 3.1.3 del capítulo anterior al caso de inf-distancias.

Definición 4.3.2 *Dada una permutación σ de $\{1, \dots, k\}$ definimos la región ordenada*

$$O_\sigma = \{x \in X : d_{\sigma_1}(x, \mathcal{A}) \leq \dots \leq d_{\sigma_k}(x, \mathcal{A})\}.$$

El número de regiones ordenadas se estudia en el siguiente resultado cuya demostración es análoga a la del Teorema 3.1.1 del capítulo anterior.

Teorema 4.3.2 *Una cota superior del número de regiones ordenadas es del orden de $O(k^4(G_{\max} + L_{\max})^2)$.*

Los dominios de linealidad del problema ordenado vienen dados por los convexos elementales generalizados. Estos conjuntos resultan de la intersección de los convexos elementales generados por las inf-distancias y las mediatrices entre conjuntos. Los convexos elementales de dimensión completa se denominan celdas y a los extremos de dichas celdas se les llaman puntos de intersección generalizados.

4.3.2 Soluciones del problema multiobjetivo

Una vez estudiadas las propiedades geométricas de las funciones inf-distancias y del problema ordenado de Weber con inf-distancias pasamos a definir los diferentes conjuntos de soluciones débilmente eficientes, eficientes y estrictamente eficientes para el problema multicriterio, así como las caracterizaciones de dichos conjuntos. Para ello, seguimos un esquema similar al desarrollado en el problema punto-objetivo.

Definición 4.3.3 *Denominamos*

1. *Conjunto de puntos estrictamente eficientes con respecto a las funciones F^1, \dots, F^Q*

a

$$SE(F^1, \dots, F^Q) := \{x \in X : \forall z (\neq x) \in X : \exists q \in \{1, \dots, Q\} \text{ tal que } F^q(x) < F^q(z)\}.$$

2. *Conjunto de puntos eficientes con respecto a las funciones F^1, \dots, F^Q* *a*

$$E(F^1, \dots, F^Q) := \{x \in X : \forall z (\neq x) \in X : \exists q \in \{1, \dots, Q\} \text{ tal que } F^q(x) < F^q(z) \text{ o } \forall q \in \{1, \dots, Q\} F^q(x) \leq F^q(z)\}.$$

3. *Conjunto de puntos débilmente eficientes con respecto a las funciones F^1, \dots, F^Q*

a

$$WE(F^1, \dots, F^Q) := \{x \in X : \forall z (\neq x) \in X : \exists q \in \{1, \dots, Q\} \text{ tal que } F^q(x) \leq F^q(z)\}.$$

De igual forma que obteníamos en el problema punto-objetivo una caracterización para los conjuntos débilmente eficientes, eficientes y estrictamente eficientes usando la intersección de las bolas, aquí se obtiene una caracterización similar basada en el uso de los conjuntos y curvas de nivel que vamos a ver en la siguiente definición.

Definición 4.3.4 *Dada una función $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ se define el conjunto de nivel inferior para un valor v , al conjunto;*

$$L_{\leq}(F, v) := \{x \in X : F(x) \leq v\}$$

y curva de nivel para el valor v , al conjunto;

$$L_{=}(F, v) := \{x \in X : F(x) = v\}.$$

A partir de esta definición obtenemos una caracterización de los diferentes conjuntos de soluciones en la siguiente proposición.

Proposición 4.3.5 *En las condiciones anteriores se tiene que:*

1. $x \in SE(F^1, \dots, F^Q) \iff \bigcap_{q=1}^Q L_{\leq}(F^q, F^q(x)) = \{x\}.$
2. $y \in E(F^1, \dots, F^Q) \iff \bigcap_{q=1}^Q L_{\leq}(F^q, F^q(x)) \cap \bigcup_{q=1}^Q \text{int}(L_{\leq}(F^q, F^q(x))) = \emptyset.$
3. $y \in WE(F^1, \dots, F^Q) \iff \bigcap_{q=1}^Q \text{int}(L_{\leq}(F^q, F^q(x))) = \emptyset.$

La demostración de esta proposición se realiza de forma análoga a la Proposición 4.1.1 en el problema punto-objetivo.

Corolario 4.3.4 *El apartado 2 de la proposición anterior tiene la siguiente formulación equivalente;*

$$\bigcap_{q=1}^Q L_{\leq}(F^q, F^q(x)) = \bigcap_{q=1}^Q L_{=}(F^q, F^q(x)).$$

Para estudiar el problema multicriterio donde cada uno de los criterios es una función objetivo de un problema ordenado de Weber con inf-distancia, estudiamos en primer lugar el caso bicriterio, es decir, el caso $Q = 2$, para después extender los resultados al caso general de Q criterios.

El problema que vamos a estudiar en primer lugar viene formulado a través de la siguiente expresión:

$$\min_{x \in X} (F^1(x), F^2(x));$$

donde $F^q(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i^q d_{(i)}^q(x, \mathcal{A})$ $q = 1, 2$, tal que, los pesos verifican $\lambda_1^q \leq \dots \leq \lambda_k^q$ $q = 1, 2$. De esta forma el conjunto de puntos débilmente eficientes queda caracterizado por el siguiente resultado.

Teorema 4.3.3 $WE(F^1, F^2)$ es un conjunto conexo que está formada por celdas, sus caras o sus vértices.

Demostración:

Sabemos que el conjunto $WE(F^1, F^2) \neq \emptyset$, por eso podemos elegir $x \in WE(F^1, F^2)$, de forma que existe una celda C , tal que $x \in C$. De aquí, tres casos pueden ocurrir;

1. $x \in \text{int}(C)$. Puesto que $x \in WE(F^1, F^2)$ se tiene que

$$\bigcap_{q=1}^2 \text{int}(L_{\leq}(F^q, F^q(x))) = \emptyset$$

y por la linealidad del problema ordenado de Weber en cada celda se tiene que

$$\bigcap_{q=1}^2 \text{int}(L_{\leq}(F^q, F^q(y))) = \emptyset \quad \forall y \in C$$

lo que significa que $y \in WE(F^1, F^2) \quad \forall y \in C$, de donde se deduce que $C \subseteq WE(F^1, F^2)$.

2. $x \in \overline{ab} := \text{conv}\{a, b\} \subset \text{bd}(C)$ y $a, b \in \text{Ext}(C)$. Podemos elegir $y \in \text{int}(C)$, de forma que pueden ocurrir dos casos:

- (a) $y \in WE(F^1, F^2)$. Con lo cual podemos aplicar el caso 1.
- (b) $y \notin WE(F^1, F^2)$. Aplicando la linealidad de la función obtenemos en primer lugar que

$$\bigcap_{q=1}^2 \text{int}\left(L_{\leq}(F^q, F^q(z))\right) \neq \emptyset \quad \forall z \in \text{int}(C)$$

y segundo lugar que

$$\bigcap_{q=1}^2 \text{int}\left(L_{\leq}(F^q, F^q(z))\right) = \emptyset \quad \forall z \in \overline{ab}$$

puesto que $x \in WE(F^1, F^2)$. De esta forma obtenemos que $C \not\subseteq WE(F^1, F^2)$ y $\overline{ab} \subseteq WE(F^1, F^2)$.

3. $x \in \text{Ext}(C)$. Podemos elegir $y \in \text{int}(C)$, de forma que pueden suceder los dos casos siguientes:

- (a) Si $y \in WE(F^1, F^2)$, podemos continuar como en el caso 1.
- (b) Si $y \notin WE(F^1, F^2)$, elegimos $z_1, z_2 \in \text{Ext}(C)$ tales que $\overline{xz_1}, \overline{xz_2}$ son caras de C ,
- i. Si z_1 o z_2 pertenecen a $WE(F^1, F^2)$, razonamos de forma análoga al caso 2.
 - ii. Si z_1 y z_2 no pertenecen a $WE(F^1, F^2)$, usando la linealidad de la función de la misma manera que en los casos anteriores obtenemos que $(C \setminus \{x\}) \cap WE(F^1, F^2) = \emptyset$.

De esta forma, a través del resultado anterior hemos probado que el conjunto de puntos débilmente eficientes para dos funciones objetivo ordenadas de Weber con inf-distancias es un conjunto formado por celdas, sus vértices o sus caras. \square

Para calcular el conjunto de puntos débilmente eficientes para dos criterios, vamos a desarrollar un algoritmo que se basa en la linealidad de los conjuntos de nivel en cada celda.

ALGORITMO 4.3.2

PASO 0 - Conjuntos de demanda $A_i \subseteq \mathbb{R}^2$, $i \in \{1, \dots, k\}$.

- Pesos λ_i^q , $i = 1, \dots, k$, $q = 1, 2$ verificando que $0 \leq \lambda_1^q \leq \dots \leq \lambda_k^q$ para $q = 1, 2$.

- Calibradores poliédricos $\gamma_i^q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ $q=1,2$.

PASO 1 CALCULAR el grafo plano generado por las celdas.

PASO 2 CALCULAR el conjunto \mathcal{X}_1^* de soluciones óptimas de F^1 .

PASO 3 Enumerar las aristas del grafo incidente sobre \mathcal{X}_1^* en sentido de las agujas del reloj, $T_1, \dots, T_{M(\star)}$.

PASO 4 a) ESCOGER la arista $T_{j(\star)}$ tal que $T_{j(\star)} \in WE(F^1, F^2)$ y $T_{j(\star)-1} \notin WE(F^1, F^2)$.

b) HACER

- $O := Ext(T_{j(\star)}) \setminus \mathcal{X}_1^*$.

- $L := \{T_{j(\star)}\}$

PASO 5 MIENTRAS $T_{j(O)} \neq T_{j(\star)}$ *HACER*

- Sean $T_1, \dots, T_{M(O)}$ las aristas incidentes en O enumeradas en sentido de las agujas de reloj y sea $T_{j(O)} \in WE(F^1, F^2)$ tal que $T_{j(O)-1} \notin WE(F^1, F^2)$.

- $L := L \cup \{T_{j(O)}\}$.

- $O := Ext(T_{j(O)}) \setminus \{O\}$.

PASO 6 SALIDA $WE(F^1, F^2)$ es el conjunto L junto con la región acotada del plano delimitada por L .

Sabemos (ver Bentley y Ottmann (1979)) que el cálculo del grafo plano generado por n segmentos en el plano, tiene una complejidad de $O((n + s)\log n)$, donde s es el

número de de puntos de intersección de los segmentos. Con lo cual podemos aplicar este resultado usando que el conjunto $WE(F^1, F^2)$ es un conjunto acotado.

Por tanto, el cálculo del grafo plano generado por las direcciones fundamentales y las mediatrices tiene una complejidad del orden de $O((k^2(G_{\max} + L_{\max}) + k^4(G_{\max} + L_{\max})^2) \log(k^2(G_{\max} + L_{\max}))) = O(k^4(G_{\max} + L_{\max})^2 \log(k(G_{\max} + L_{\max})))$.

Además la evaluación de la función ordenada de Weber con inf-distancias es del orden $O(k \log(k(G_{\max} + L_{\max})))$, de donde $O(k^5(G_{\max} + L_{\max})^2 \log(k(G_{\max} + L_{\max})))$ es la complejidad de encontrar el conjunto de soluciones óptimas de F^1 . Además la complejidad de comprobar si una arista del plano es eficiente es $O(k \log(k(G_{\max} + L_{\max})))$, con lo cual, la complejidad de evaluar todas las arista es $O(k^5(G_{\max} + L_{\max})^2 \log(k(G_{\max} + L_{\max})))$. Por tanto, la complejidad total del algoritmo es $O(k^5(G_{\max} + L_{\max})^2 \log(k(G_{\max} + L_{\max})))$.

Teorema 4.3.4 Sean $F^1(\cdot)$, $F^2(\cdot)$ y $F^3(\cdot)$ tres funciones objetivo de problemas de Weber ordenados con inf-distancia, se tiene que

$$WE(F^1, F^2, F^3) = \bigcup_{i < j} WE(F^i, F^j) \cup \text{encl}(\bigcup_{i < j} WE(F^i, F^j))$$

donde $\text{encl}(\bigcup_{i < j} WE(F^i, F^j))$ es el conjunto delimitado por $\bigcup_{i < j} WE(F^i, F^j)$, que fue definido en el Teorema 4.3.3.

El tipo de razonamiento seguido para obtener esta demostración es análogo al llevado a cabo en la Proposición 4.2.1.

Teorema 4.3.5 Sean F^1, \dots, F^Q funciones objetivo de problemas ordenados de Weber con inf-distancia, se tiene que

$$WE(F^1, \dots, F^Q) = \bigcup_{i < j < k} WE(F^i, F^j, F^k).$$

Una vez que hemos caracterizado teóricamente el conjunto de puntos débilmente eficientes para el caso general de Q -criterios, este conjunto puede ser calculado a partir

del algoritmo que hemos desarrollado para dos criterios, o bien, a través de una adaptación de dicho algoritmo en el cual en lugar de buscar la arista $T_{j(O)} \in WE(F^1, F^2)$ tal que $T_{j(O)-1} \notin WE(F^1, F^2)$ buscamos $T_{j(O)} \in \bigcup_{i < j} WE(F^i, F^j)$ tal que $T_{j(O)-1} \notin \bigcup_{i < j} WE(F^i, F^j)$.

4.4 Notas finales

En los capítulos anteriores hemos considerado diferentes modelos de localización donde el objetivo era encontrar aquella ubicación que fuese óptima para un determinado criterio, ahora en este capítulo, buscamos un conjunto de soluciones frente a varios criterios. Dependiendo de si cada criterio es la distancia de un punto a cada punto de demanda o una función de éstas tenemos un problema punto-objetivo o multiobjetivo respectivamente.

Las principales diferencias de los modelos punto objetivo clásicos con respecto a los presentados en este capítulo radica en la utilización de diferentes calibradores asociados a cada punto de demanda, así como la utilización de conjuntos de demanda para los cuales hemos utilizado las funciones inf-distancias. Para la resolución de dichos problemas, tanto en el caso restringido como en el irrestringido, hemos definido diferentes conjuntos de soluciones dependiendo del nivel de exigencia en cuanto a proximidad a los puntos de demanda.

En cuanto al modelo multiobjetivo estudiado en este capítulo, hemos de hacer notar que es una extensión de los modelos clásicos, ya que hemos considerado que cada criterio es una función objetivo de un problema ordenado de Weber donde los puntos de demanda han sido sustituidos por conjuntos. Esto supone que a través del estudio y resolución de este problema estamos resolviendo simultáneamente una amplia gama de problemas.

Referencias

- ABDEL-MALEK L.L. "Optimum positioning of moving service facility". *Computers and Operations Research*, 12, 3 (1985) 437-444.
- ANDERSON L.R. Y FONTENOT R. A. "Optimal positioning of service units along a coordinate line". *Transportation Science*, 26, 4 (1992) 346-351.
- ANEJA Y. P. Y PARLAR M. "Algorithms for Weber facility location in the presence of forbidden regions and/or barriers to travel". *Transportation Science*, 28 (1994) 70-76.
- ATTOUCH H. *Variational convergence for functions and operators*, (Pitman Advanced Publishing Program, 1984).
- BAZARAA M.S. Y SHETTY C.M. *Nonlinear programming: theory and algorithms*, (John Wiley and Sons, 1979).
- BECKENBACH E.F. AND BELLMAN R. *Inequalities*. Second Revised Printing, (Springer-Verlag, Berlin, 1965).
- BENTLEY J.L. Y OTTMANN T. "Algorithms for reporting and counting geometric intersections". *IEEE Trans. on Computers*, C 28 (1979) 643-647.
- BRADY S.D. Y ROSENTHAL R.E. "Interactive computer graphical minimax location

of multiple facilities with general constraints". *AIIE Transactions*, 15 (1983) 242-252.

BREZIS H. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, (Coll. Math. appliquées Masson, 1983).

BRIMBERG J. Y LOVE R.F. "Global convergence of generalized iterative procedure for the minisum location problem with l_p distances". *Operations Research*, 41, 6 (1993) 1153-1163.

BURKAND, R.E., HAMACHER H.W. Y GÜNTER R. "Sandwich approximation of univariate convex functions with an application to separable convex programming". *Naval Research Logistics*, 38 (1991) 911-924.

CARRIZOSA E., FERNÁNDEZ F.R. Y PUERTO J. "An axiomatic approach to location criteria". *Proceeding of Meeting V Euro-Working Group on Locational Analysis. F. Urban y J.P. Rassons (Eds.), 1990*.

CARRIZOSA E., CONDE E., FERNÁNDEZ F.R. Y PUERTO J. "Efficiency in Eucliden constrained location problems". *Operational Research Letters*, 14 (1993) 291-295.

CARRIZOSA E., CONDE E., FERNÁNDEZ F.R. Y PUERTO J. "Efficiency in spatial location problems with non convex constraint". *Journal of Global Optimization*, 6 (1995) 77-86.

CARRIZOSA E., CONDE E., MUÑOZ M. Y PUERTO J. "Simpson points in planar problems with locational constraints. The round norm case". *Mathematics of Operations Research*, 22, 2 (1997) 276-290.

CARRIZOSA E., CONDE E., MUÑOZ M. Y PUERTO J. "Simpson points in planar problems with locational constraints. The polyhedral norm case". *Mathematics of*

Operations Research, 22, 2 (1997) 291-300.

CARRIZOSA E., MUÑOZ-MÁRQUEZ M. Y PUERTO J. "A note on the optimal positioning of service units". *Operations Research*, 6, 1 (1998) 155-156.

CARRIZOSA E. Y PLASTRIA F. "A characterization of efficient points in constrained location with regional demand". *Operations Research Letters*, 19, 3 (1996) 129-134.

CARRIZOSA E. Y PLASTRIA F. "A geometrical characterization of weakly efficient points". *Journal of Optimization Theory and Applications*, 90, 1 (1996) 217-223.

CARRIZOSA E. Y PUERTO J. "A discretizing algorithm for location problems". *European Journal of Operational Research*, 80 (1995) 166-174.

CHANDRASEKARAN R. Y TAMIR A. "Open questions concerning Weiszfeld's algorithm for the Fermat-Weber location problem". *Mathematical Programming*, 44 (1989) 293-295.

CHEN P.C., HANSEN P., JAUMARD B. Y TUY H. "Weber's problem with attraction and repulsion". *Journal of Regional Science*, 32, 4 (1992) 467-486.

CONDE E. "Optimización global en localización". *Lecturas en Teoría de Localización. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla. Justo Puerto Ed., (1996) 47-68.*

CROUSEUX J.P. Y KEBBOUR, R. "On the convexity of some simple functions of ordered samples". *JORBEL*, 36 (1996) 11-25.

DANIEL J.W. *The approximate minimization of functionals*, (Prentice-Hall Series in Automatic Computation. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971).

DREZNER Z. "Constrained location problems in the plane and on a sphere". *AIIIE*

Transactions, 12 (1983) 300-304.

DREZNER Z. Y WESOŁOWSKY G.O. "The Weber problem on the plane with some negative weights". *INFOR*, 29 (1990) 87-99.

DREZNER Z. *Facility location. A survey of applications and methods*, (Springer Series in Operations Research, 1995).

DREZNER Z. AND WESOŁOWSKY G. O. "Facility location when demand is time dependent". *Naval Research Logistics*, 38 (1991) 763-777.

DURIER R. Y MICHELOT C. "Geometrical properties of Fermat-Weber Problem". *European Journal of Operational Research*, 20 (1985) 332-343.

DURIER R. "On pareto optima, the Fermat-Weber problem and polyhedral gauges". *Mathematical Programming*, 47 (1990) 65-79.

DURIER R. Y MICHELOT C. "Geometrical properties of the Fermat-Weber problem". *European Journal of Operational Research*, 20 (1985) 332-342.

DURIER R. Y MICHELOT C. "Set of efficient points in a normed space". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 117 (1986) 506-528.

EKELAND I. Y TEMAN R. *Convex analysis and variational problems*, (North Holland. American Elsevier, 1979).

EYSTER J.W., WHITE J.A. Y WIERWILLE W.W. "On solving multifacility location problems using a hyperbolic approximation procedure". *AIIE Transactions*, 5 (1973) 1-6.

FRANCIS R.L., MCGINNIS L.F. Y WHITE J.A. *Facility layout and location: an*

analytical approach, (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1992).

FRENK J.B.G., MELO M.T. Y ZHANG S. "The Weiszfeld method in single facility location". *Investigação Operacional*, 14, 1 (1994) 35-59.

GALLEGO G. "A minmax distribution free procedure for the (Q, R) inventory model". *Operations Research Letters*, 11 (1992) 55-60.

HAMACHER H. W. Y NICKEL S. "Combinatorial algorithms for some 1-facility median problems in the plane". *European Journal of Operational Research*, 79 (1994) 340-351.

HAMACHER H. W. Y NICKEL S. "Restricted planar location problems and applications". *Naval Research Logistics*, 42 (1995) 967-992.

HAMACHER H. W. Y NICKEL S. "Multicriteria planar location problems". *European Journal of Operational Research*, 94 (1996) 66-86.

HAMACHER H. W., NICKEL S. Y LABBÉ M. "Multicriteria network location problems with sum objectives". *Tech. Report, University of Kaiserslautern, Department of Mathematics*, 15 (1996).

HARDY G.H., LITTLEWOOD J.E. Y POLYA G. . *Inequalities*, (Cambridge University Press, 1952).

HORST R. Y TUY H. *Global optimization: Deterministic Approaches*, (Springer Verlag, 1990).

KARKAZIS J. "The general unweighted problem of locating obnoxious facilities on the plane". *JORBEL*, 28 (1988) 3-49.

LARSON R. Y ODONI A. *Urban operations research*, (Prentice-Hall Englewood Cliffs,

New Jersey. 1981).

LEVINE A. "A patrol problem". *Mathematical Magazine*, 59 (1986) 159-166.

LOVE R.F., MORRIS J.G. Y WESOLOWSKY G.O. *Facilities location: models and methods*, (North Holland, NY, 1988).

MEGIDDO N. "Linear programming in linear time when the dimension is fixed". *Journal of the Association for Computing Machinery*, 31 (1984) 114-127.

MORRIS J.G. Y VERDINI W.A. "Minimum l_p distance location problems solved via a perturbed problem and Weiszfeld's algorithm". *Operations Research*, 27 (1979) 1180-1188.

NDIAYE M. Y MICHELOT C. "Efficiency in constrained continuous location". *European Journal of Operational Research* 104, 2 (1998) 288-287..

NICKEL S. *Discretization of planar location problems*, (Verlag Shaker, 1995).

NICKEL S., PUERTO J., RODRÍGUEZ-CHÍA A.M. Y WEISLER A. "General continuous multicriteria location problems". *Tech. Report, University of Kaiserslautern, Department of Mathematics*, 28 (1997).

NICKEL S., PUERTO J. Y RODRÍGUEZ-CHÍA A.M. "Geometrical properties of generalized single facility location problems". *Manuscrito* (1997).

MURIEL J. Y CARRIZOSA E. "Problema de Weber con calibradores mixtos e inf-distancias". *Prepublicación de la Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla*, 25 (1995).

DE PALMA A., LIU Q. Y THISSE J.F. "Optimal location on a line with random

utilities". *Transportation Science*, 28, 1 (1994) 63-69.

PELEGRÍN R. Y FERNÁNDEZ F.R. "Determination of efficient points in multiple-objective location problems". *Naval Research Logistics*, 35 (1988) 697-705.

PLASTRIA F. "Continuous location problems: research, results and questions". *Facility Location: A Survey of Applications and Methods*, (Z. Drezner, Ed.). Springer-Verlag, (1995) 85-127.

PUERTO J. *Lecturas en Teoría de Localización*, (Universidad de Sevilla. Secretariado de Publicaciones, 1996).

PUERTO J. Y FERNÁNDEZ F.R. "The symmetrical single facility location problem". *Prepublicación de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla*, 34 (1995).

PUERTO J. Y FERNÁNDEZ F. R. "Pareto-optimally in classical inventory problems". *Naval Research Logistic*, 45 (1998) 83-98.

PUERTO J. Y RODRÍGUEZ-CHÍA A.M. "The dynamic Weber problem". *Prepublicaciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla*, 15 (1995).

PUERTO J. Y RODRÍGUEZ-CHÍA A.M. "A convergent algorithm for the generalized dynamic Weber problem". *Prepublicaciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla*, 33 (1995).

PUERTO J., RODRÍGUEZ-CHÍA A.M. Y FERNÁNDEZ-PALACÍN F. "Ordered Weber problems with attraction and repulsion". *Studies in Locational Analysis, Issue 11* (1997) 127-141.

REVELLE C., COHON J.L. Y D. SHOBRY S. "Multiple objective facility location: a review". *Lectures Notes in Economics and Mathematical System*, (M.Beckmann and

A. P. Künzi, eds.) Springer-Verlag, Berlin, 190 (1981) 321-337.

ROCKAFELLAR R.T. *Convex Analysis*, (Princeton University Press. Princeton, 1970).

RODRÍGUEZ-CHÍA A.M. "Problemas de Localización Dinámicos". *Tesina de Licenciatura*, (1995)

RODRÍGUEZ-CHÍA A.M., PUERTO J., NICKEL S. Y FERNÁNDEZ F.R. "A flexible approach to location problems". *Tech. Report, University of Kaiserslautern, Department of Mathematics*, 26 (1997).

SPIVAK M. *Calculus*, (Reverté, 1970).

TELLIER L.N. "Economie spatiale: rationalité économique de l'espace habité". *Chicoutimi, Quebec. Gaétan Morin* (1985).

TELLIER L.N. Y POLANSKI B. "The Weber problem: frequency of different solution types and extension to repulsive forces and dynamic process". *Journal of Regional Science*, 29, (1989) 387-405.

VICKSON R. G., GERCHAK Y. Y ROTEM D. "Optimal positioning of read/write head in mirrored disks". *Location Science*, 3, 2 (1995) 125-132.

WARBURTON A.R. "Quasiconcave vector maximization: Connectedness of the sets of pareto-optimal and weak pareto-optimal alternatives". *Journal of Optimization Theory and Applications*, 40, 4 (1983) 537-557.

WARD J.E. Y WENDELL R.E. "Using block norms for location modelling". *Operations Research*, 33 (1985) 1074-1090.

WENDELL R.E. Y HURTER A.P. "Location theory, dominance and convexity". *Ope-*

rations Research, 21 (1973) 314-321.

WENDELL R.E., HURTER A.P. y LOWE T.J. "Efficient points in location problems". *AIIE Transactions*, 9 (1977) 238-246.

WEBER A. "Über den Standort der Industrien". Tübingen. *Theory of the location of industries*. Chicago: University of Chicago Press, (1909).

WEISZFELD E.V. "Sur le point sur lequel la somme des distances de n points donnés est minimum". *Tôhoku. Mathematical Journal*, 43 (1937) 355-386.

WESOLOWSKY G.O. "Dynamic facility location". *Management Science*, 19, 11 (1973) 1241-1248.

WESOLOWSKY G.O. "The multiperiod location-allocation problem with relocation of facilities". *Management Science*, 22, 1 (1975) 57-65.

WESOLOWSKY G.O. "The Weber problem: history and procedures". *Location Science*, 1, 1 (1993) 5-24.

WHITE D.J. *Optimality and Efficiency*, (Wiley. Nueva York, 1982).

WITZGALL C.J. "Optimal location of a central facility: Mathematical models and concepts". *Technical Report, National Bureau of Standards Report*, 19 (1964) 239-244.

Antonio H. Rodríguez Chela
Avances sobre el problema de localización de un centro
continuo.

APTO - CUM LAUDE (SOBRESALIENTE)

-CUM LAUDE)

20

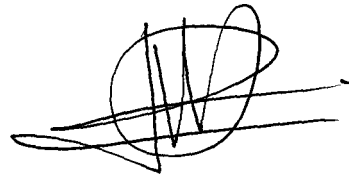
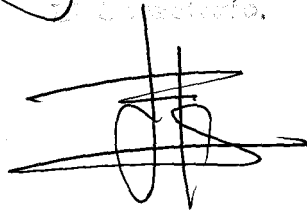
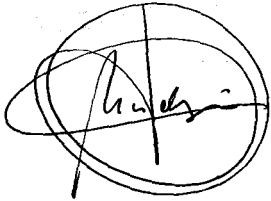
NOVIEMBRE

98

FHS

Juan A. Mesa

El Doctorado,



* 5 0 1 1 4 4 2 7 7 *

FMA C 043/260