

2.12.067

T.S. 204

INESTABILIDADES ELECTROHIDRODINÁMICAS INDUCIDAS POR EFECTO CORONA

Memoria presentada por
Francisco Vega Reyes
para optar al grado de
Doctor en Física

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA Y ELECTROMAGNETISMO
FACULTAD DE FÍSICA
UNIVERSIDAD DE SEVILLA



Sevilla, Mayo de 2002

© Francisco Vega Reyes, 2002

INESTABILIDADES ELECTROHIDRODINÁMICAS INDUCIDAS POR EFECTO CORONA

T.S-204

Memoria presentada por
Francisco Vega Reyes
para optar al grado de Doctor en Física

Sevilla, Mayo de 2002

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SECRETARÍA GENERAL

Director del trabajo

Queda registrada esta Tesis Doctoral
al folio 200 número 57 del III
correspondiente.

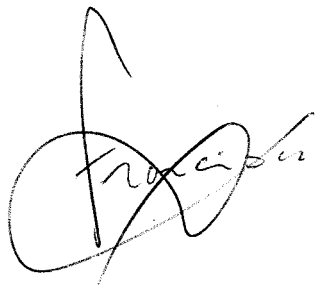


Sevilla, 20 de mayo de 2002

El Jefe del Menor de Tesis



Dr. Alberto T. Pérez Izquierdo
profesor Titular de Electromagnetismo



UNIVERSIDAD DE SEVILLA



600065112

Francisco Vega Reyes
Doctorando

11822875

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA Y ELECTROMAGNETISMO
FACULTAD DE FÍSICA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA



A la memoria de Modesta, Nubia y Tomás



Índice

Agradecimientos	XI
Nomenclatura	XIII
1. Introducción	1
1.1. El marco de la Electrohidrodinámica (EHD)	1
1.2. El problema del Rosetón	4
1.3. Revisión de los estudios teóricos sobre inestabilidades EHD	5
1.4. Inestabilidades EHD inducidas por efecto corona	9
1.5. Otros métodos experimentales de inyección de carga	11
1.6. Inyector autónomo en geometría plana	12
1.6.1. Definición	13
1.6.2. Medio aislante	14
1.6.3. Interfase no-ohmica/no-ohmica	15
2. El efecto corona en el estudio de inestabilidades EHD	19
2.1. Aplicación al problema de la inyección unipolar	19
2.2. Descripción de los montajes experimentales	20
2.2.1. Punta-Plano	20
2.2.2. Triodo	22
2.2.3. Montaje para la medida de la distribución de corriente corona	23
2.2.4. Líquidos utilizados	25
2.3. Configuración punta-plano	27
2.3.1. Medidas de la corriente corona	27
2.3.2. Campo eléctrico en ausencia de densidad de carga espacial	31
2.3.3. Campo eléctrico con inyección unipolar	32
2.3.4. Medidas de la distribución de corriente corona	35
2.3.5. Medida de la movilidad iónica del aire	38



2.3.6.	Medida de la simetría de la distribución de corriente corona	40
2.3.7.	Medidas de la distribución de corriente corona con una punta frente a un electrodo hemisférico . . .	41
2.3.8.	Medidas de la distribución de corriente corona con varias puntas	42
2.4.	Configuración triodo	43
2.4.1.	Medidas de la corriente corona	43
2.4.2.	Campo eléctrico en plano-rejilla-plano	46
2.4.3.	Paso de la corriente corona a través de la rejilla .	50
2.4.4.	Medidas de la distribución de corriente corona . .	53
2.4.5.	Estimación del potencial eléctrico en la superficie del líquido	54
2.5.	Resumen	56
3.	Medidas de las inestabilidades	59
3.1.	Detección de la inestabilidad	59
3.2.	Montaje experimental (electrodos transparentes)	59
3.3.	Resultados Experimentales	60
3.3.1.	Medidas	60
3.3.2.	Inestabilidad de volumen	62
3.3.3.	Inestabilidad Rosetón	63
3.3.4.	Imágenes	67
3.4.	Discusión	73
3.5.	Otros métodos de detección de la inestabilidad Rosetón .	78
3.6.	Resumen	79
4.	Estabilidad lineal de una interfase no-ohmica/ohmica	81
4.1.	Enmarcando el problema	81
4.2.	Definición	83
4.3.	Inyector Autónomo en una interfase no-ohmica/ohmica .	87
4.4.	Inestabilidad lineal	93
4.5.	Interfase aire/líquido	97
4.5.1.	Ecuaciones	97
4.5.2.	Parámetros relevantes	99
4.5.3.	Conductividad adimensional subcrítica ($S < S^{crit}$)	100
4.5.4.	Conductividad adimensional crítica ($S \sim S^{crit}$) . .	102
4.5.5.	Conductividad adimensional supercrítica ($S > S^{crit}$)	103

4.5.6. Las tres ramas de las inestabilidades EHD de superficie	106
4.5.7. Comparación del criterio teórico con las medidas del Rosetón en el triodo	108
4.6. Interfase líquido/líquido	110
4.7. Recapitulación	111
4.8. Transición de régimen en el mecanismo de inestabilidad	113
4.9. Transición de fase en el valor crítico de inestabilidad	115
4.10. Resumen	117
4.11. Apéndice A. Ecuaciones perturbativas lineales	118
4.11.1. Ecuaciones diferenciales	118
4.11.2. Condiciones de contorno	119
4.12. Apéndice B. Relación de dispersión	121
5. Estabilidad no-lineal de una interfase no-ohmica/ohmica	125
5.1. Modelo hidráulico	125
5.2. Ecuaciones para una interfase aire/líquido aislante	126
5.3. Interfase no-ohmica/ohmica. Salto de presión no-lineal.	127
5.3.1. Ecuaciones	128
5.3.2. Límite conductor perfecto	132
5.3.3. Límite no conductor	135
5.3.4. Transición no-lineal de régimen conductor a poco conductor	136
5.3.5. Evolución de una interfase no-ohmica/ohmica	137
5.4. Resumen	139
Conclusiones	141
Bibliografía	145



Agradecimientos

Quiero agradecer a mi director de tesis, Alberto T. Pérez, su inestimable ayuda y paciencia a lo largo del desarrollo de este trabajo. También agradezco a Antonio Castellanos su apoyo. Así como a todos mis compañeros del Depto. de Electrónica y Electromagnetismo y del Grupo de Electrohidrodinámica, por su predisposición a un buen ambiente de trabajo en grupo. Especialmente agradezco a Francisco Pontiga su ayuda en el laboratorio y sus comentarios acerca de la inyección unipolar, a Francisco Javier García su ayuda en el tratamiento de imágenes del Rosetón y a Antonio Ramos sus comentarios durante la redacción de la tesis.

Quiero agradecer al MCyT (y a todas las personas a las que representa y que le dan sentido) por haber financiado este proyecto.

Agradezco a Pierre Atten (LEMD-CNRS, Grenoble, France) todo su apoyo. Su contribución, como maestro, ha sido fundamental en el apartado lineal. Asimismo, las ecuaciones del apartado no-lineal han sido coescritas con él. También agradezco a Bernard Malraison y Dantchi Koulova-Nenova su ayuda durante mis estancias en Grenoble.

Agradezco a toda mi (muy numerosa) familia por estar siempre ahí, incondicionalmente.



Nomenclatura

Símbolo	Significado
a	coeficiente de electrostricción $((\varepsilon/\rho)(d\varepsilon/d\rho)_T)$
\square_a	Valor de la magnitud \square en el aire
A_0	Área del electrodo plano
A_s	Área del agujero-electrodo usado en las medidas de distribución de corriente corona
b	constante de integración en el campo eléctrico en la capa de fluido en contacto con el electrodo inyector
B, B	Campo magnético, constante de integración en el campo eléctrico estacionario en la capa de fluido inferior (no-ohmica)
Bo	Número de Bond $(\langle \rho \rangle gh^2/\gamma)$
c	velocidad de la luz $(1/\sqrt{\varepsilon\mu})$; distancia entre los centros de dos hilos contiguos en la rejilla
\square_c	Valor de la magnitud \square en la capa de fluido óhmico
C	nivel (o parámetro) de inyección (q_0h^2/ε_iV) ; capacidad del condensador rejilla-plano
C_0	Conductividad residual adimensional $(enL^2/\varepsilon V)$
d	Anchura de la capa de fluido inferior
d/dt	Derivada material $(\partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla)$
D	Coefficiente de difusión iónica, tamaño medio de las celdas del Rosetón
e	carga de un electrón
$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$	Vectores unitarios en coordenadas cartesianas
\mathbf{E}, E	Campo eléctrico
\mathbf{f}	Densidad total de fuerzas de volumen
\mathbf{f}_e	Densidad de fuerzas eléctricas de volumen
\mathbf{f}_g	Densidad de volumen de fuerza gravitatoria
\mathbf{f}_v	Densidad de fuerzas viscosas de volumen
$F(x, y, z, t)$	Ecuación de la interfase
\mathbf{g}, g	Aceleración gravitatoria



Símbolo	Significado
$g(z)$	Amplitud de la perturbación lineal del potencial eléctrico
h	Unidad de longitud de referencia, distancia rejilla-plano en el triodo
\square_i	Valor de la magnitud \square en la capa de fluido no-ohmico en contacto con el electrodo inyector
I	Intensidad de corriente eléctrica
I_0	Intensidad de corriente eléctrica en el eje de la punta
I_c	Valor crítico de la corriente en la inestabilidad de volumen o el Rosetón
\mathbf{j}, j	Densidad de volumen de corriente eléctrica
j_0	Densidad de corriente eléctrica en el eje de la punta
\mathbf{k}, k	número de onda
k_c	Valor crítico de k en la inestabilidad lineal
K	Movilidad iónica; movilidad iónica relativa (K_l/K_i)
\mathbf{K}_s	Corriente superficial en la interfase
\square_l	Valor de la magnitud \square en la capa inferior de fluido no-ohmico (en caso de interfase no-ohmica/no-ohmica)
L	Anchura de la capa de fluido superior
M	Número $M = \sqrt{\varepsilon_i / \langle \rho \rangle} / K_i$
\mathbf{n}	Vector unitario normal a la interfase ($\nabla F / F $)
p	Presión, distancia punta-plano
p_e	Presión eléctrica
p_f	Distancia del foco de la punta (hipérbola) al plano
P	número característico en la transición de inestabilidad de superficie a inestabilidad de volumen en una interfase no-ohmica/ohmica ($\varepsilon_i \gamma h / K_i^2 \mu_i^2$)
q	Densidad de volumen de carga eléctrica
q_0	Densidad de volumen de carga eléctrica en el electrodo inyector
r	Radio de los hilos de la rejilla
\square_r	magnitud \square relativa en la interfase ($\square_r = 1$ del lado del fluido no-ohmico y $\square_r = \square_c / \square_i$ del lado del fluido ohmico)
r_0	radio de curvatura de la punta (hipérbola)
\mathbf{s}_j	Vector unitario tangente a la interfase ($j = 1, 2$)
S	Conductividad adimensional ($\sigma_c h^2 / (K_i \varepsilon_i V^2)$)
S_c	Valor de S para el cual ocurre la inestabilidad lineal de superficie en un líquido ohmico de conductividad σ_c
S^{crit}	Conductividad adimensional crítica para la cual $\sigma_s = 0$
t	Tiempo

Símbolo	Significado
T	Autovalor característico en la inestabilidad de volumen: en una interfase aire/líquido no-ohmico: $\varepsilon_l V_l / K_l \mu_l$ y en una interfase no-ohmica/ohmica: $\varepsilon_i V / K_i \mu_i$; temperatura
\square^T	Transposición del tensor \square
T_c	Valor crítico de T
$u(x, y)$	Parte real de una función compleja
$u(z)$	Amplitud de la perturbación lineal de v_z
U	Autovalor característico de la inestabilidad de superficie lineal ($\varepsilon_i V^2 / \langle \rho \rangle g h^3$)
U_c	Valor crítico de U en la inestabilidad lineal
U_{NL}	Autovalor característico de la inestabilidad de superficie no-lineal ($\varepsilon_0 V^2 / \rho g d^3$)
$\mathbf{v}; v$	Velocidad del fluido
$v(x, y)$	Parte imaginaria de una función compleja
V	Potencial eléctrico aplicado en un electrodo inyector plano
V_0	Umbral corona, constante de integración en el método de la transformación conforme (potencial plano-rejilla-plano)
V_p	Potencial eléctrico aplicado en una punta metálica
V_r	Potencial eléctrico aplicado en la rejilla metálica
w	Potencial complejo en el método de la transformación conforme
x	Eje perpendicular a la aceleración gravitatoria; excepto en el capítulo 2: eje de la punta; eje perpendicular a la rejilla
y	2º eje perpendicular a la aceleración gravitatoria; eje perpendicular al eje de la punta
$\square_x; \square_y; \square_z$	Componentes de un vector en coordenadas cartesianas
z	Eje paralelo a la aceleración gravitatoria; excepto en el capítulo 2
\mathcal{I}	Tensor unidad
\mathcal{T}_e	Tensor de tensiones eléctrico
\mathcal{T}_v	Tensor de tensiones viscoso
α	En una interfase no-ohmica/no-ohmica (aire/líquido): $K_l \varepsilon_l / K_a \varepsilon_0$; ángulo acimutal de un punto de la distribución de corriente corona
β	Transparencia eléctrica de la rejilla; función de la amplitud de deformación en el capítulo 5
γ	Tensión capilar en la interfase



Símbolo	Significado
δ	Distancia mínima a la intersección con el eje de a punta a la que pasa el agujero-electrodo en una medida de distribución de corriente corona
$\delta \square$	Perturbación lineal de la magnitud \square
Δ	Operador laplaciano
ΔC	Diferencia entre la capacidad de un condensador rejilla-plano y un condensador plano-plano
Δ_s	Operador $\partial/\partial x^2 + \partial/\partial^2$
Δy_0	Distancia de un punto del electrodo plano a la intersección del mismo con el eje de a punta
ε	Permitividad; permitividad relativa ($\varepsilon_i/\varepsilon_l$ ó $\varepsilon_i/\varepsilon_c$)
ε_0	Permitividad del aire
ζ	Coordenada en geometría hiperbólica ($\zeta = \text{constante}$ define una hipérbola); función (o variable) compleja en la transformación conforme
η	Amplitud de la deformación no-lineal en la interfase; coordenada en geometría hiperbólica ($\eta = \text{constante}$ define una elipse)
$\eta(x, y, t)$	Perfil de la superficie perturbada (lineal)
η_0	Amplitud de la deformación lineal de la interfase
λ	Longitud de onda de la perturbación ($\lambda = 2\pi/k$)
μ	Viscosidad dinámica; viscosidad dinámica relativa (μ_c/μ_i); permeabilidad magnética; constante de integración en el potencial plano-rejilla-plano
ν	Viscosidad cinemática
ξ	Amplitud de deformación no-lineal, adimensionalizada (η/d)
ρ	Densidad de masa del fluido
ϕ	Potencial eléctrico estacionario
Φ	Potencial eléctrico total en la inestabilidad ($\phi + \delta\phi$ en la inestabilidad lineal)
σ	Conductividad óhmica
σ_s	Densidad de carga superficial en la interfase
τ_a	Tiempo característico de conducción no-óhmica en el líquido inferior ($d^2/K_l V_l$)
τ_o	Tiempo característico de conducción óhmica en el líquido inferior (ε/σ)
ω	Derivada parcial respecto al tiempo de la perturbación lineal de la interfase ($\partial\eta/\partial t$)

Símbolo	Significado
\square^*	Magnitud \square adimensionalizada (normalmente se suprime * por comodidad)
\square^+	Magnitud \square en la interfase del lado del fluido inferior
\square^-	Magnitud \square en la interfase del lado del fluido superior
\square_+	Magnitud \square en la interfase, en la zona de anchura $d + \eta$ (en $x = 0$)
\square_-	Magnitud \square en la interfase, en la zona de anchura $d - \eta$ (en $x = \lambda/2$)
$\langle \square \rangle$	Salto de la magnitud \square en la interfase ($\square^+ - \square^-$)
\square'	Derivada respecto a d/dz
$\partial/\partial \square$	Derivada parcial respecto a la variable \square
∇	Operador nabra
∇_s	Proyección tangencial del operador nabra ($\nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)$)



Capítulo 1

Introducción

1.1. El marco de la Electrohidrodinámica (EHD)

El presente trabajo se enmarca en la rama de la mecánica de fluidos llamada electrohidrodinámica. La electrohidrodinámica (EHD) trata del estudio de sistemas fluidos donde la acción de campos magnéticos \mathbf{B} no es significativa comparada con la de los campos eléctricos, siendo éstos irrotacionales ($\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$). En ese caso, las ecuaciones de Maxwell se reducen a las componentes eléctricas. Con esto, en el dominio de la Electrohidrodinámica, las ecuaciones diferenciales que gobiernan el sistema, para fluidos newtonianos incompresibles, son:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = q \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.4)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{f} \quad (1.5)$$

En las ecuaciones (1.1-1.5) ε representa la permitividad eléctrica, q la densidad de carga espacial eléctrica, \mathbf{v} es la velocidad del fluido, p es la presión, \mathbf{f} es la suma de las fuerzas de volumen actuando en el medio



fluido, $\partial/\partial t$ es la derivada parcial respecto al tiempo y $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ es la derivada material. La ecuación (1.2) es la ecuación de Poisson, referente a la divergencia del campo eléctrico. La ecuación (1.3) es la de conservación de la carga eléctrica. La ecuación (1.4) se debe a la incompresibilidad de los fluidos. Y la última es la ecuación de Navier-Stokes, forma que toma la 2ª ley de Newton en mecánica de medios continuos. Suponemos que el sistema está sujeto a la acción de una aceleración gravitatoria constante \mathbf{g} . En ese caso, el vector \mathbf{f} es:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_v + \mathbf{f}_e + \mathbf{f}_g \quad (1.6)$$

siendo el término gravitatorio $\mathbf{f}_g = \rho \mathbf{g}$ (donde ρ es la densidad de masa del fluido), $\mathbf{f}_v = \mu \nabla^2 \mathbf{v}$ el término viscoso, siendo μ la viscosidad dinámica, y el término eléctrico \mathbf{f}_e se escribe (Panofsky y Phillips, 1977):

$$\mathbf{f}_e = q\mathbf{E} - \frac{1}{2}E^2 \nabla \varepsilon + \frac{1}{2} \nabla (\varepsilon a E^2) \quad (1.7)$$

donde $a = (\varepsilon/\rho)(d\varepsilon/d\rho)_T$ es el parámetro de electrostricción (aquí, T indica la temperatura).

Las fuerzas de volumen viscosa y eléctrica pueden expresarse en función de los tensores de esfuerzos viscosos y eléctricos \mathcal{T}_v y \mathcal{T}_e respectivamente, a través de las relaciones: $\mathbf{f}_v = \nabla \cdot \mathcal{T}_v$ y $\mathbf{f}_e = \nabla \cdot \mathcal{T}_e$. Estos tensores tienen las siguientes expresiones (Panofsky y Phillips, 1977; Castellanos, 1998):

$$\mathcal{T}_v = \mu (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \quad (1.8)$$

$$\mathcal{T}_e = \varepsilon \mathbf{E} \mathbf{E} - \frac{1}{2} \varepsilon (1 - a) E^2 \mathcal{I} \quad (1.9)$$

En las relaciones (1.8, 1.9), $\nabla \mathbf{v}$ se refiere a al producto diádico de ∇ y \mathbf{v} (el superíndice T indica aquí transposición del tensor), $\mathbf{E} \mathbf{E}$ al producto diádico del campo eléctrico por sí mismo, y \mathcal{I} al tensor unidad. Las ecuaciones (1.1-1.5) se refieren al volumen de un fluido. En una superficie fluida dada por la ecuación $F(x, y, z, t) = 0$ se cumplen las siguientes condiciones (Castellanos, 1998; Melcher y Taylor, 1969):

$$\mathbf{n} \cdot \langle \varepsilon \mathbf{E} \rangle = \sigma_s \quad \mathbf{n} \times \langle \mathbf{E} \rangle = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial t} + \nabla_s \cdot \mathbf{K}_s + \mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{j} - q\mathbf{v} \rangle = 0 \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_n \mathbf{n} \cdot \nabla F = 0 \quad \mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \mathbf{n} \times \langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{0} \quad (1.12)$$

$$\mathbf{s}_j \cdot \langle \mathcal{T}_v \rangle \cdot \mathbf{n} + \sigma_s \mathbf{s}_j \cdot \mathbf{E} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (1.13)$$

$$\mathbf{n} \cdot \langle \mathcal{T}_v + \mathcal{T}_e \rangle \cdot \mathbf{n} - \langle p \rangle = \gamma \nabla \cdot \mathbf{n} \quad (1.14)$$

En estas ecuaciones $\mathbf{n} = \nabla F / |\nabla F|$ y por tanto se refiere a un vector unitario normal a la interfase. El vector \mathbf{s}_i es un vector unitario tangente a la superficie, y por tanto ortonormal a \mathbf{n} , v_n es la componente normal de \mathbf{v} , σ_s es la densidad de carga superficial, \mathbf{K}_s es la densidad de corriente superficial, ∇_s es la componente tangencial del operador nabla ($\nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)$) y γ es la tensión capilar en la superficie.

En este trabajo, consideraremos dos tipos de leyes constitutivas para la corriente eléctrica: o bien de tipo óhmico $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, siendo σ la conductividad eléctrica, o bien de tipo no-óhmico, en cuyo caso nos referiremos siempre a una ley del tipo $\mathbf{j} = Kq\mathbf{E} - D\nabla q + q\mathbf{v}$, siendo K la movilidad iónica, y D el coeficiente de difusión iónica. En el caso no-óhmico consideraremos que las partículas cargadas son de un único tipo. También consideraremos que el sistema se encuentra en condiciones tales que el término debido a la difusión de carga es pequeño comparado con los otros, lo cual ocurre siempre salvo para potenciales aplicados muy pequeños o gradientes ∇q muy pronunciados (Castellanos, 1998). Con lo que finalmente la ley no-óhmica se reduce a: $\mathbf{j} = q(K\mathbf{E} + \mathbf{v})$. Por último, tampoco tendremos en cuenta el término debido a la electrostricción, ya que para líquidos incompresibles puede incluirse en la presión (Saville, 1997).

Como estamos en el dominio de la EHD, debe cumplirse para los fluidos que la energía eléctrica es mucho mayor que la energía magnética. Esto es:

$$\frac{\varepsilon E^2}{B^2/\mu} \gg 1 \quad (1.15)$$

en esta expresión μ indica la permeabilidad magnética del fluido.

Si en el rotacional del campo magnético domina el término de corriente de conducción entonces $B \sim \mu\sigma hE$ y si domina el término de corriente de desplazamiento entonces $B \sim h\mu\varepsilon E/t_v$, siendo h y t_v una distancia y un tiempo típicos de variación de las magnitudes. En ambos casos, la

condición (1.15) en el caso de un fluido en régimen óhmico de conducción, teniendo en cuenta que el tiempo típico de variación t_v debe ser mayor que el de transmisión de la luz $t_c = h\sqrt{\epsilon\mu}$, lleva a que:

$$\frac{\epsilon}{\sigma} \gg \mu\sigma h^2 \quad (1.16)$$

o sea, el tiempo de relajación óhmica ϵ/σ es mucho mayor que el tiempo de difusión magnética $\mu\sigma h^2$. En el caso de un fluido en régimen no-óhmico de conducción:

$$c \gg K(V/h) \quad (1.17)$$

o sea, que la velocidad de la luz en el medio fluido $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ sea mucho mayor que la velocidad de tránsito KV/h de la carga a lo largo de una distancia típica h . Los fluidos que estudiemos cumplirán por tanto la condición (1.16) en régimen óhmico y la condición (1.17) en régimen no-óhmico.

1.2. El problema del Rosetón

El presente trabajo trata principalmente sobre el estudio de la inestabilidad Rosetón. Esta inestabilidad ha sido observada experimentalmente (Herrick, 1974; Ahmed El-Haddad *et al.*, 1980; Pérez, 1997) cuando una capa delgada (de espesor $\sim 1 \text{ mm}$) en reposo de líquido de baja conductividad es sometida a descarga corona desde una punta metálica a alto potencial eléctrico. Así, el líquido es sometido a inyección de carga. Al aumentar el potencial en la punta, crece la corriente corona que pasa a través del líquido. Cuando se supera un valor umbral en el potencial aplicado, se produce la inestabilidad. Su aspecto, visto verticalmente desde abajo, puede apreciarse en la figura 1.1.

El estudio presente es un análisis experimental y teórico de las condiciones en que dicha inestabilidad se produce. Como veremos, pueden distinguirse dos casos básicos en el Rosetón según el líquido poco conductor se encuentre en régimen óhmico o en régimen no-óhmico.

A lo largo de este trabajo utilizaremos mucho el término *interfase fluida*, que definiremos del siguiente modo:

Interfase fluida: superficie fluida que separa dos capas superpuestas de fluidos inmiscibles.

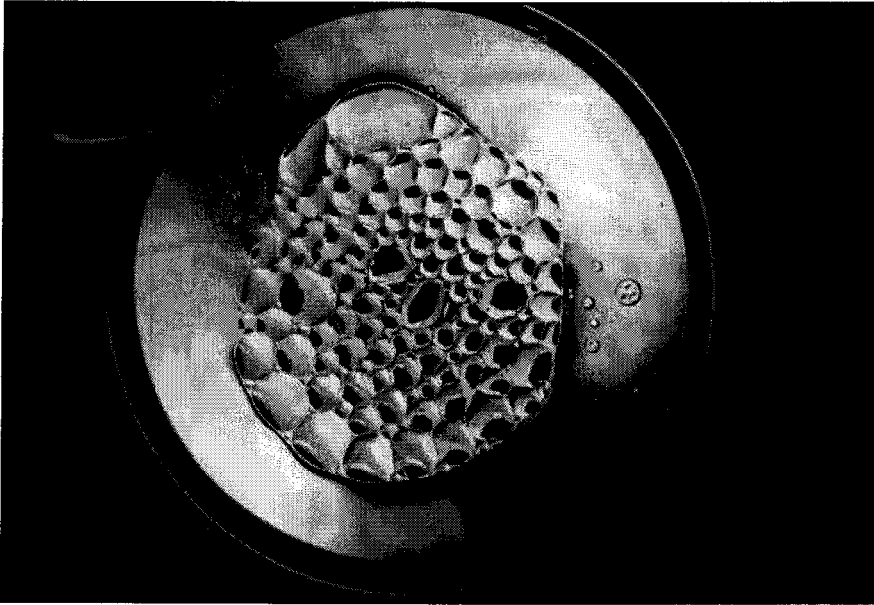


Figura 1.1: El Rosetón en un líquido poco conductor (aceite de ricino). Espesor de la capa de líquido d . Potencial aplicado $V_p = 10 \text{ kV}$ desde una punta metálica a una altura $p = 3,0 \text{ cm}$ respecto al electrodo plano que contiene el líquido.

1.3. Revisión de los estudios teóricos sobre inestabilidades EHD

Un problema clásico de la EHD es el estudio de la estabilidad de una forma fluida estacionaria al aplicar un campo eléctrico: cuando se aplica un campo eléctrico lo bastante intenso, el acoplamiento de los términos eléctricos con las ecuaciones mecánicas del fluido (apartado 1.1) hace que éste pueda eventualmente sufrir una deformación en su forma o estado estacionario inicial. Se dice entonces que se ha producido una inestabilidad. Si el estudio se limita a pequeñas perturbaciones del estado estacionario se dice que es un estudio de inestabilidad lineal. Si se consideran perturbaciones finitas entonces se dice que es un estudio de inestabilidad no-lineal. Del estudio en EHD de la estabilidad de distintas formas fluidas, el problema más simple, y quizá el más estudiado, es el de la estabilidad de una capa o interfase fluida plana en reposo.

Desde el punto de vista teórico, el Rosetón se engloba dentro del problema de la estabilidad de una interfase fluida plana en reposo sometida a la acción de un campo eléctrico perpendicular a la interfase. Dentro de este problema, se pueden considerar dos tipos de inestabilidad: las

que se producen debido a campos con divergencia nula (sin distribución de carga espacial) y las que se producen en sistemas sometidos a campos eléctricos de divergencia no nula (con distribución de carga espacial). Dentro de este último grupo se encuentran las inestabilidades producidas por inyección unipolar de carga. En problemas de inyección unipolar, existe una fuente de carga espacial (del signo del campo aplicado) en un electrodo, que genera una distribución estacionaria de carga de volumen. Aunque otros procesos pueden generar una distribución de carga espacial, en el presente trabajo nos limitaremos al estudio del caso en que esta distribución se deba a la inyección unipolar.

Taylor y McEwan (1965) y Melcher y Smith Jr. (1969) fueron los que abordaron primero el caso sin distribución de carga espacial: ambos estudian la inestabilidad de una interfase entre dos fluidos óhmicos perpendicular al campo eléctrico aplicado. En el trabajo de Melcher y Smith Jr. (1969) se analizan los límites en los que los esfuerzos tangenciales no intervienen en el problema de la inestabilidad. Uno de ellos, es el caso de un fluido poco conductor sobre un fluido muy conductor (Taylor y McEwan, 1965).

Analicemos a modo ilustrativo este caso. En el estudio de la inestabilidad lineal se demuestra que los valores críticos del campo obedecen la relación: $-\langle \rho \rangle g + \varepsilon E_0^2 k \coth(kL) - \gamma k^2 = 0$, donde ε es la permitividad, E_0 es el campo eléctrico aplicado, $\langle \rho \rangle g$ el salto de la fuerza gravitatoria de volumen, L el espesor de la capa no conductora y k el número de onda asociado a la perturbación (en el estudio de la inestabilidad lineal suele suponerse una perturbación de forma sinusoidal en la superficie, siendo $\lambda = 2\pi/k$ la longitud de onda asociada a la perturbación). Así, el criterio de inestabilidad viene dado por el número adimensional $W = \varepsilon E_0^2 / \langle \rho \rangle g L$.

En el límite de longitud de onda larga $k = 0$ el criterio se hace independiente de la tensión capilar en la interfase γ y $W = 1$, poniendo de manifiesto que la inestabilidad en $k = 0$ es únicamente resultado de la competición entre la presión eléctrica y la gravitatoria. Al producirse una perturbación en la interfase inicialmente plana, la inestabilidad es posible porque en las zonas más anchas de la capa del líquido conductor la presión eléctrica, que tira de la interfase hacia arriba, se hace mayor y así la perturbación inicial se ve reforzada.

Para $k \neq 0$ se pone de manifiesto que los efectos de curvatura de la superficie tienden a aumentar el campo eléctrico en las zonas deformadas, facilitando así la inestabilidad. La magnitud que controla el número de onda k característico de la inestabilidad es la tensión capilar γ . Si

ésta es lo bastante baja, la inestabilidad ocurre en $k \neq 0$. En el capítulo 4, discutiremos el mecanismo de inestabilidad según la relación entre las conductividades de las dos capas de líquido. Un estudio completo de todos los casos posibles puede encontrarse en el trabajo de Melcher y Smith Jr. (1969).

Posteriormente, se hicieron estudios de los efectos no-lineales y de la influencia de la geometría de las condiciones de contorno (Néron de Surgy *et al.*, 1993; González *et al.*, 1994; Néron de Surgy, 1995; El-Dib, 1999). Particularmente, se vio que la introducción de geometrías finitas no variaba en órdenes de magnitud los valores críticos de la inestabilidad en una superficie conductora, y que el estudio no-lineal predecía que en cualquier caso la evolución de la inestabilidad en una interfase conductora es abrupta. También hay confirmaciones experimentales, por ejemplo, en los trabajos de Taylor y McEwan (1965); Melcher y Smith Jr. (1969); Néron de Surgy (1995), de los valores críticos obtenidos en la teoría así como de la evolución predicha de la inestabilidad EHD de una interfase bajo campo perpendicular, pues la concordancia entre teoría y experimento es bastante satisfactoria.

Por otra parte, se realizaron estudios sobre la inestabilidad debida a campos tangenciales a interfases fluidas (Melcher y Schwarz Jr., 1968) que ponen de manifiesto en qué situaciones son especialmente relevantes los esfuerzos tangenciales. Por ejemplo, en el trabajo de (Melcher y Taylor, 1969) se analiza el problema clásico de la convección que se produce en una capa de líquido por la acción de un campo eléctrico aplicado desde un electrodo plano inclinado.

Durante los años 70 se hicieron los primeros trabajos sobre el problema de la inestabilidad EHD en campo perpendicular pero con inyección unipolar. Primero se estudió el problema de una única capa de líquido aislante. La inestabilidad lineal fue estudiada por Schneider y Watson (1970); Atten y Moreau (1972). En el segundo de estos trabajos se consideran todas las condiciones de contorno posibles para la velocidad en los electrodos. La inestabilidad no-lineal fue estudiada por Atten y Lacroix (1979). En todos estos trabajos el sistema estudiado es simplemente una capa de fluido aislante, sometida a un campo eléctrico estacionario de gradiente no nulo.

Esta vez, el criterio de inestabilidad viene dado por el número adimensional $T = \varepsilon V / K \mu \sim 100$ siendo V la caída de potencial en la capa de líquido aislante. La longitud de onda característica de esta inestabilidad es del orden de la anchura de la capa del líquido. El mecanismo de inestabilidad es debido a que la distribución de carga que genera la

inyección es potencialmente inestable. Esto se debe a que la concentración de carga de volumen es mayor cerca del electrodo inyector, lo que hace que una partícula cargada que se desplace hacia abajo, al verse más cargada que sus vecinas, sienta una fuerza neta tendente a amplificar la perturbación. A este mecanismo se oponen otros dos mecanismos: de un lado los efectos de viscosidad del líquido, que amortiguan la perturbación; de otro lado, la movilidad iónica que tiende a liberar de carga, por repulsión coulombiana, a la partícula desplazada. Por otra parte, las moléculas del líquido tienden a apantallar a los iones, reduciendo la intensidad de la repulsión entre ellos. Este efecto viene determinado por la permitividad eléctrica del líquido. Con esto, todos los mecanismos quedan reflejados en la expresión de T .

Existe un buen acuerdo entre los valores críticos de la inestabilidad de volumen en la teoría y los experimentos de Watson *et al.* (1970). En los experimentos de Atten y Lacroix (1979); Lacroix *et al.* (1975) se detecta que los valores críticos experimentales tienden a ser algo mayores que los teóricos. Más adelante describiremos cómo eran los montajes experimentales en los que se reprodujo la inestabilidad de volumen. En el libro de electrohidrodinámica de Castellanos (1998) pueden verse una revisión así como múltiples referencias sobre la inyección unipolar.

El problema de la inyección unipolar fue posteriormente extendido al caso de dos capas de fluido: aislante/aislante en los trabajos de Koulova-Nenova y Atten (1997); Atten *et al.* (1998) (la superior, el aire; la inferior un líquido) y líquido aislante/líquido conductor perfecto en los trabajos de Koulova-Nenova (1997); Koulova-Nenova y Atten (1998); Atten y Koulova-Nenova (1999). Los trabajos referidos al caso de la interfase aire/líquido aislante concluyen en resultados similares a los trabajos originales (Schneider y Watson, 1970; Atten y Moreau, 1972), mostrando que la presencia de la capa de aire sólo tiene una influencia apreciable en el caso de una capa de líquido muy delgada o de una tensión capilar muy pequeña en la interfase, debido a la pequeña influencia que tiene el número $P = \varepsilon\gamma d/K^2\mu^2$ en el criterio, (siendo d la anchura de la capa de líquido).

Es de resaltar el resultado de los trabajos sobre la interfase aislante/conductor perfecto, donde por primera vez se predice teóricamente en un problema con inyección unipolar una inestabilidad EHD similar a la del problema análogo, sin inyección, de la estabilidad de una interfase conductora. Las simplificaciones que conlleva el considerar una superficie perfectamente conductora hacen posible la obtención de una expresión analítica exacta en el caso del límite de longitud de onda larga

(Atten y Koulova-Nenova, 1999). El valor crítico obtenido es exactamente $2/3$ del correspondiente al problema sin inyección, en condiciones de fuerte inyección de carga y con $k = 0$. Este trabajo además, reproduce los resultados correspondientes a una superficie conductora en los modelos óhmicos clásicos de Melcher (1963); Taylor y McEwan (1965); Melcher y Smith Jr. (1969); Chu *et al.* (1989); Néron de Surgy (1995), en el caso $C = 0$ (sin inyección).

Por otra parte, también ha habido algún estudio de la dinámica de una superficie fluida (helio cargado negativamente), en los trabajos de Mima *et al.* (1976b) y Mima *et al.* (1976a) pero en ellos no se considera la influencia de una carga espacial ni en el líquido ni en el vapor.

Con ello, hasta el momento no existían trabajos sobre la estabilidad lineal de una interfase fluida no-óhmica/óhmica sometida a inyección unipolar, siendo la capa óhmica de conductividad arbitraria. Como veremos, el Rosetón en un líquido en régimen óhmico es justo este problema. Por ello, en el presente trabajo se aborda el estudio de las ecuaciones de una interfase no-óhmica/óhmica bajo inyección unipolar (el capítulo 4), y se resuelve en el límite de longitud de onda larga.

1.4. Inestabilidades EHD inducidas por efecto corona

El efecto corona es un fenómeno muy conocido (Goldman y Goldman, 1978), que consiste en una descarga iónica debida a la pérdida de la neutralidad eléctrica de un medio dieléctrico gaseoso, que resulta de la acción de un campo eléctrico inhomogéneo muy intenso. Dicho campo inhomogéneo puede conseguirse con un sistema de electrodos altamente asimétrico, como una fina punta metálica enfrentada a un plano. Si la punta metálica se conecta a una fuente de tensión eléctrica la descarga ocurre cuando se sobrepasa un cierto valor característico del sistema, llamado umbral corona. La descarga corona es una técnica experimental muy usada para cargar materiales (Goldman y Goldman, 1978; Giacometti y Oliveira, 1992) en contacto con un medio gaseoso (comúnmente la atmósfera), lo cual tiene numerosas aplicaciones técnico-industriales.

Cuando la descarga corona se produce, y si es sostenida en el tiempo, el volumen del medio dieléctrico gaseoso permanece cargado, con lo cual se produce en dicho medio un campo eléctrico con distribución espacial de carga. En este sentido, podemos decir que la punta es un *electrodo inyector* pues actúa como una fuente de carga espacial.

La condición de inyección fuerte de iones de igual polaridad hace que las inestabilidades EHD producidas por efecto corona (entre ellas, el Rosetón) se clasifiquen dentro del problema de las inestabilidades en sistemas sometidos a inyección unipolar. No obstante, la inestabilidad Rosetón presenta peculiaridades respecto a la inestabilidad de volumen que aparece en el problema de una capa de líquido aislante sometido a inyección unipolar (Schneider y Watson, 1970; Atten y Moreau, 1972). Como ya se ha dicho, esta última inestabilidad se debe a la acción de fuerzas electrostáticas de volumen, que producen la convección de la carga en el líquido. Por ello, nos referiremos a ella como *inestabilidad de volumen*.

En cuanto a las peculiaridades del Rosetón, por ejemplo, su longitud de onda característica es de 4 a 5 veces mayor que la de la inestabilidad de volumen y, a diferencia de ésta, está presente no sólo en líquidos aislantes sino también en líquidos en régimen óhmico, y en los que por tanto están ausentes las fuerzas electrostáticas de volumen, con lo que no es observable la inestabilidad de volumen. Este hecho y unos estudios preliminares (Pérez, 1997) llevan a pensar que el Rosetón se debe principalmente a la acción de fuerzas eléctricas de superficie. Por ello, nos referiremos al Rosetón también como *inestabilidad de superficie*, en contraposición a la inestabilidad EHD de volumen.

La inyección de carga desde la punta sobre líquidos poco conductores hace que la carga eléctrica del mismo signo que el campo aplicado se acumule en la superficie del líquido por lo que la presión eléctrica empuja al líquido hacia abajo (Pérez, 1996). Por ello, la deformación es mantenida si la presión eléctrica (o la corriente eléctrica) es mayor en las zonas de menor anchura de la capa de líquido (Vega y Pérez, 1999a). Así pues, la presión eléctrica puede producir deformación en el líquido por encima de un cierto valor umbral.

Aunque la descarga corona es una técnica experimental de sobra conocida, no ha sido aplicada extensivamente para el estudio de las inestabilidades electrohidrodinámicas. La inestabilidad de volumen fue efectivamente observada utilizando descarga corona (Herrick, 1974; Malraison y Atten, 1991). El trabajo realizado por Malraison y Atten (1991) mostró que la configuración punta-plano es perfectamente válida para reproducir la inestabilidad de volumen y que también esta configuración está lejos de parecerse al sistema teórico para el cual han sido obtenidos los valores críticos. Pero al menos vemos que en la configuración simple punta-plano son reproducibles las mismas inestabilidades que las descritas en los trabajos teóricos de Atten y Moreau (1972); Lacroix *et al.*

(1975); Atten y Lacroix (1979); Schneider y Watson (1970); Koulova-Nenova y Atten (1997).

Según las observaciones experimentales (Vega y Pérez, 2002a), la coexistencia del Rosetón con la inestabilidad de volumen puede darse o no dependiendo de las propiedades del líquido, pues el Rosetón se presenta aún en líquidos lo bastante conductores, en los que la inestabilidad de volumen está ausente. La aparición del Rosetón evidenciaba un hecho que si bien parece claro que está asociado a la inyección de carga, no podía explicar la teoría de la inyección unipolar desarrollada hasta el momento. Por ello, se hacía necesario un estudio experimental y teórico ampliando las fronteras del problema inicial de la inyección unipolar (Vega y Pérez, 2002b).

1.5. Otros métodos experimentales de inyección de carga

Hay otros métodos experimentales de inyección de carga, que se han usado extensivamente en el estudio de la inestabilidad de volumen. Por ejemplo, en los trabajos de Lacroix *et al.* (1975); Atten y Lacroix (1979) la inestabilidad de volumen se estudia en una configuración experimental en la que los iones son directamente inyectados en una capa de líquido aislante, en contacto con el electrodo inyector. La inyección se consigue con el uso de una membrana electrodiálítica, que recubre un electrodo plano y rígido. La membrana produce carga eléctrica debido a unas reacciones químicas que tienen lugar al aplicarse un potencial eléctrico. Esta técnica fue estudiada por Felici (ver por ejemplo Felici y Tobazeon (1981)) con anterioridad a los primeros trabajos sobre la inestabilidad de volumen. En el trabajo de Watson *et al.* (1970) la inestabilidad se reproduce experimentalmente con el uso de un cañón de electrones que inyecta carga en una capa de líquido aislante en una cámara de vacío. El electrodo inyector en este caso es la misma superficie del líquido. El modelo teórico correspondiente a este trabajo también fue estudiado (Schneider y Watson, 1970). El montaje experimental utilizado para el cañón de electrones se encuentra minuciosamente descrito en el trabajo de Watson y Clancy (1965).

En los experimentos de inyección unipolar pueden aparecer procesos de recombinación y disociación debido a la existencia de una conductividad residual, constituyendo estos procesos una fuente adicional de carga espacial. Este efecto produce inestabilidades de tipo oscilatorio,

según los estudios de Atten (1972); Pontiga *et al.* (1995); Pontiga y Castellanos (2000). Aunque un esfuerzo considerable fue hecho en su momento para eliminar estos efectos residuales en los sistemas experimentales que estudian la inestabilidad de volumen, como en los trabajos de Atten y Lacroix (1979); Lacroix *et al.* (1975), parece que la reproducción exacta en un experimento del problema de la inyección unipolar no es tan sencilla y aún existe una pequeña divergencia entre la teoría y los experimentos (Lacroix *et al.*, 1975).

En todas las medidas realizadas en el presente trabajo, al ser la inyección directamente en el aire, el efecto de los procesos de recombinación y disociación es despreciable pues la conductividad residual del aire es ínfima: como en el aire la densidad iónica es lo bastante baja ($n_0 \sim 400 \text{ cm}^{-3}$), la conductividad residual C_0 es pequeña: $C_0 = en_0 L^2 / (\epsilon_0 V) \sim 5 \cdot 10^{-10} \ll 1$, (siendo L la anchura de la capa de aire y V el potencial eléctrico aplicado, alrededor de $1 - 10 \text{ kV}$ en los experimentos). Cuando esto se cumple, los efectos de las reacciones de recombinación-disociación pueden ser ignorados (Pontiga y Castellanos, 2000).

1.6. Inyector autónomo en geometría plana

En el estudio de una inestabilidad EHD en un sistema sometido a inyección unipolar, se parte de un estado inicial en el que el campo eléctrico se describe con el modelo del inyector autónomo. El modelo del inyector autónomo describe la solución del campo eléctrico en un sistema en el que existe una fuente de carga espacial, lo cual genera un campo con $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$.

Parece lógico pensar que la dinámica en las inestabilidades de sistemas fluidos sometidos a este tipo de campos eléctricos no será en principio igual a la resultante de aplicar tan sólo una tensión eléctrica. Todo esto es muy interesante en el estudio de sistemas en el umbral del equilibrio electrohidrodinámico pues la aplicación de campos con distribución de carga espacial conlleva la aparición de toda una rama de inestabilidades electrohidrodinámicas, que no pueden ser explicadas con un modelo teórico que no tenga en cuenta los términos que aparecen como consecuencia de la presencia de esta carga de volumen. Es de esperar también que los estudios de sistemas aún más alejados del equilibrio, por ejemplo, de sistemas en regímenes de caos y turbulencia, mantengan su originalidad respecto a estudios basados en sistemas sometidos a fuentes de campo eléctrico con divergencia nula ($\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$).

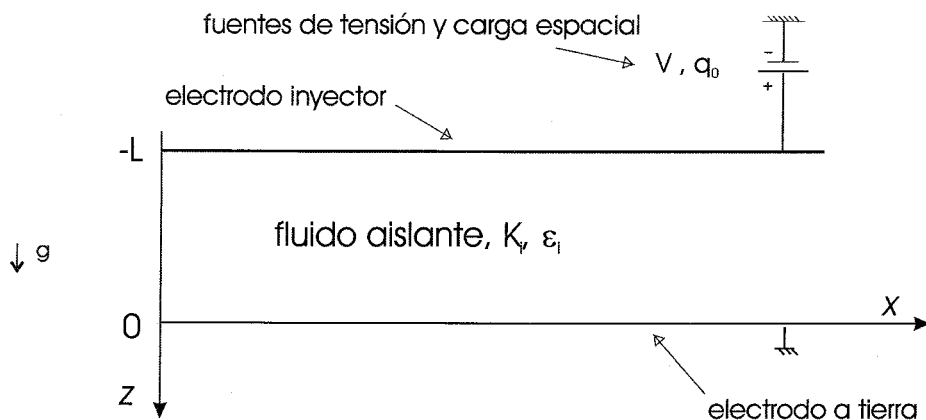


Figura 1.2: El inyector autónomo en el caso de una capa de medio fluido aislante.

1.6.1. Definición

Consideremos un sistema de dos electrodos planos paralelos e infinitos. El electrodo inferior, en el sentido de la aceleración gravitatoria, está conectado a tierra (a potencial fijo cero) mientras que en el electrodo superior, que está en contacto con un fluido dieléctrico aislante de permitividad ϵ_i y movilidad iónica K_i y cuya conductividad eléctrica es despreciable (fig. 1.2). En ese caso el medio es considerado eléctricamente un aislante perfecto y la componente óhmica en la conducción eléctrica puede obviarse. En el electrodo superior tenemos:

- una fuente de voltaje V , que fija el potencial eléctrico en el plano del electrodo.

- una fuente de carga espacial q_0 , que fija la densidad espacial de carga, de forma que la carga eléctrica es inyectada en la vecindad del electrodo, que por esto llamamos *electrodo inyector*.

En el modelo de inyector autónomo se suponen que estas dos fuentes de campo eléctrico son independientes, por lo que cada una de estas magnitudes puede tomar valores independientemente del valor de la otra. Normalmente, en lugar de q_0 suele utilizarse la correspondiente magnitud adimensional C que se conoce como nivel de inyección o parámetro de inyección. El valor de dicha magnitud depende también de la unidad de longitud escogida. Llamemos h a esta unidad de longitud. Entonces:

$$C = \frac{q_0 h^2}{\epsilon_i V} \quad (1.18)$$



1.6.2. Medio aislante

Supongamos ahora que el espacio entre los dos electrodos está totalmente ocupado por el medio aislante que está en contacto con el electrodo inyector. Tomando como unidades para la distancia, el potencial eléctrico, densidad espacial de carga, densidad espacial de corriente eléctrica y la velocidad: h , V , $\varepsilon_i V/h^2$, $K_i \varepsilon_i V^2/h^3$, $K_i V/h$, pueden de la misma forma definirse las magnitudes adimensionales:

$$\begin{aligned} L^* &= \frac{L}{h} & \phi^* &= \frac{\phi}{V} & E^* &= \frac{E}{(V/h)} \\ q^* &= \frac{qh^2}{\varepsilon_i V} & v^* &= \frac{v}{(K_i V/h)} & j^* &= \frac{j}{(K_i \varepsilon_i V^2/h^3)} \end{aligned} \quad (1.19)$$

siendo L la anchura de la capa de material aislante.

Debido a la alta simetría del sistema, el campo es perpendicular a los dos electrodos. Entonces, aún es posible la solución hidrostática $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, con lo que las ecuaciones eléctricas estáticas del sistema quedan de la siguiente forma:

$$j^* = q^* E^* \quad \frac{dE^*}{dz^*} = q^* \quad (1.20)$$

El valor de la densidad de corriente podemos controlarlo variando el parámetro de inyección C . Es lógico pensar que j^* será creciente con C , con lo que siempre se podría aumentar la corriente en el sistema incrementando la inyección de carga espacial. Sin embargo, veremos que el valor de j^* llega pronto a un valor máximo pues se produce una saturación debida al campo asociado a las propias cargas inyectadas que impide una mayor tasa de inyección de corriente en el sistema. Este es el conocido régimen de corriente limitada por la carga espacial (*CLCE*) usualmente referido en la bibliografía (Castellanos, 1998) por las siglas inglesas *SCLC* (*space charge limited current regime*). Las condiciones de contorno en los electrodos son:

$$\phi^*(0) = 0 \quad (1.21)$$

$$\phi^*(-L^*) = 1 \quad (1.22)$$

$$q^*(-L) = C \quad (1.23)$$

a partir de (1.20):

$$E^* = \sqrt{2j(z^* + b^*)} \quad (1.24)$$

y de la ecuación (1.23) se tiene que:

$$b^* = \frac{j^*}{2C^2} + L^* \quad (1.25)$$

y también se cumple, integrando el campo eléctrico y usando (1.21, 1.22) y (1.25):

$$1 = \sqrt{\frac{8}{9}j^*} \left[\left(\frac{j^*}{2C^2} + L^* \right)^{3/2} - \left(\frac{j^*}{2C^2} \right)^{3/2} \right] \quad (1.26)$$

De esta expresión se ve que el valor límite para el régimen *CLCE*, que viene dado por $C \rightarrow \infty$ es $j^* = (9/8)/L^{*3}$. Con esto, si la unidad de longitud escogida es la dimensión total del sistema: $h = L$, tendremos simplemente que:

$$j^* = \frac{9}{8} \quad (1.27)$$

o lo que es lo mismo, la densidad de corriente física es cuadrática con el potencial:

$$j = \frac{9}{8} K_i \varepsilon_i \frac{V^2}{L^3} \quad (1.28)$$

1.6.3. Interfase no-ohmica/no-ohmica

Consideremos dos capas de fluidos aislantes superpuestas. La capa del medio aislante superior la denotamos con el subíndice i y la del medio inferior con l . El electrodo superior en $z = -L$ y el inferior en $z = d$. Un sistema de dos electrodos infinitamente planos con una interfase fluida paralela es compatible con la solución hidrostática $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ aun cuando se aplica un campo eléctrico, si éste es perpendicular: entonces, la interfase es plana. La situamos en $z = 0$. Adimensionalizando de manera análoga al apartado anterior (con K_i y ε_i como referencia para ello), las ecuaciones eléctricas adimensionales de la solución hidrostática son (suprimiendo ahora el asterisco por comodidad):

$$j_i = q_i E_i \quad \frac{dE_i}{dz} = q_i \quad (1.29)$$

$$j_l = K_{ql} E_l \quad \frac{dE_l}{dz} = \frac{q_l}{\varepsilon} \quad (1.30)$$

siendo $K = K_l/K_i$ y $\varepsilon = \varepsilon_l/\varepsilon_i$. Las condiciones de contorno que deben cumplirse son:

$$\phi_i(0) = \phi_l(0) \quad (1.31)$$

$$j_i(0) = j_l(0) = j \quad (1.32)$$

$$\frac{d\phi_i(0)}{dz} = \varepsilon \frac{d\phi_l(0)}{dz} \quad (1.33)$$

$$q_i(-L) = C \quad (1.34)$$

$$\phi_i(-L) = 1 \quad (1.35)$$

$$\phi_l(d) = 0 \quad (1.36)$$

Entonces la solución estacionaria del campo es:

$$E_i(z) = \sqrt{2j(z+b)} \quad z < 0 \quad (1.37)$$

$$E_l(z) = \sqrt{\frac{2j(z+B)}{\varepsilon K}} \quad z > 0 \quad (1.38)$$

Para que la solución quede definida hay que determinar la densidad de corriente eléctrica j , b y B . Estos valores de j y de b están relacionados con las magnitudes V y C a través de las ecuaciones para el potencial eléctrico y la carga espacial (1.35, 1.34). De esta forma, usando la condición de la fuente de carga espacial en el electrodo (1.34):

$$b = \frac{j}{2C^2} + L \quad (1.39)$$

mientras que B está directamente relacionado con b a través de la condición de contorno 1.33:

$$B = \varepsilon K b \quad (1.40)$$

Integrando las ecs. (1.37, 1.38) desde $z = -L$ a $z = d$ tenemos:

$$1 = \sqrt{\frac{8}{9}j} \left[\left(\frac{j}{2C^2} + L \right)^{3/2} - \left(\frac{j}{2C^2} \right)^{3/2} \right] + \quad (1.41)$$

$$\sqrt{\frac{8}{9} \frac{j}{\varepsilon K}} \left[\left(d + (\varepsilon K)^2 \left(\frac{j}{2C^2} + L \right) \right)^{3/2} - \left((\varepsilon K)^2 \left(\frac{j}{2C^2} + L \right) \right)^{3/2} \right]$$

En definitiva, de las expresiones para una capa fluida aislante (1.26) o dos capas fluidas aislantes superpuestas (1.41) se obtiene la dependencia de la densidad de corriente j con el nivel de inyección. Estas funciones son bien conocidas (Atten y Moreau, 1972; Atten y Koulova-Nenova, 1996; Castellanos, 1998) y en ellas se ve el límite *CLCE*. Este mismo límite también es observable en el inyector autónomo en el caso de una interfase no-ohmica/ohmica, que se estudiará en el capítulo 4.

Todas estas expresiones del inyector autónomo son el punto de partida para el análisis de las inestabilidades EHD en interfaces sometidas a inyección.

Capítulo 2

El efecto corona en el estudio de inestabilidades EHD

2.1. Aplicación al problema de la inyección unipolar

Con el uso de la descarga corona se tiene la ventaja de que se puede lograr una visualización del problema de forma muy directa y en un montaje experimental mucho más sencillo que los utilizados anteriormente para la inyección de carga: como los experimentos que usan un cañón de electrones, donde el líquido está encerrado en una cámara de vacío, y los experimentos que usan una membrana electrodiálítica, donde el líquido está encerrado entre dos electrodos rígidos.

A pesar de la ventaja que supone lo directo de la visualización al usar un montaje en el que el líquido está al aire, en contacto con la atmósfera, la inhomogeneidad de campo eléctrico requerida para la generación de la descarga corona hace muy difícil una convergencia real con el problema teórico de inyección unipolar en geometría plana. Por ello, las condiciones experimentales en las que se obtenía la inestabilidad Rosetón diferían mucho de los modelos teóricos. Efectivamente, el modelo del inyector autónomo en geometría plana, que describe la inyección de carga en un sistema de dos electrodos paralelos infinitos y planos, y que admite la solución hidrostática inicial (Castellanos, 1998), dista bastante de la configuración experimental punta-plano necesaria para la descarga corona.

Los resultados teóricos disponibles sobre la inestabilidad de una superficie sometida a inyección se refieren todos a una geometría plano-plano (Koulova-Nenova y Atten, 1998; Atten y Koulova-Nenova, 1999;

Vega y Pérez, 2002b). Por ello, sólo cabe esperar un acuerdo cualitativo entre los experimentos realizados en configuración punta-plano y la teoría. Además, aunque una vez superado el umbral corona la corriente corona se aproxima al límite *CLCE*, la existencia del umbral corona dificulta la medida del umbral de la inestabilidad (que puede estar por debajo) y aleja más teoría y experimento.

Estos básicamente son los motivos por los que se ha usado en el desarrollo de las pruebas experimentales el montaje triodo (Vega y Pérez, 1999b, 2001), que consiste en un sistema de tres electrodos: punta-rejilla-plano. La rejilla es interpuesta a la punta y el plano de forma que si existen unas diferencias de potencial entre la punta y la rejilla y entre la rejilla y el plano lo bastante altas (estando la punta por encima del umbral corona) es posible el paso de los iones generados por efecto corona a través de la rejilla y su llegada al electrodo plano, en el que se coloca el líquido para su estudio. Así pues tenemos un sistema que controla independientemente la corriente corona que llega al líquido (a través de la diferencia de potencial punta-rejilla) y el campo eléctrico sobre el mismo (a través de la diferencia de potencial rejilla-plano) y además consigue una mayor perpendicularidad en el campo eléctrico aplicado pues como veremos el campo eléctrico en un sistema rejilla-plano, en el caso sin inyección, es prácticamente constante salvo en la cercanía de la rejilla. Quedaría un último asunto pendiente y es el de la homogeneización de la distribución radial de la corriente corona cuando se aplica la descarga desde la punta. Dicha distribución es más fuerte en el centro del electrodo plano (justo debajo de la punta), atribución una vez más de la geometría altamente inhomogénea intrínseca a la descarga corona. Más adelante veremos en qué condiciones puede haber una cierta corrección a esta situación cuando se usa el relativamente simple montaje triodo.

2.2. Descripción de los montajes experimentales

2.2.1. Punta-Plano

En el montaje básico punta-plano (fig. 2.1) se opone una punta metálica de wolframio muy fina, con un radio de curvatura del orden de $10 \mu m$, a un electrodo plano de 6 cm de diámetro rodeado por un anillo de plexiglas (material aislante) de 5 cm de diámetro interior y unos

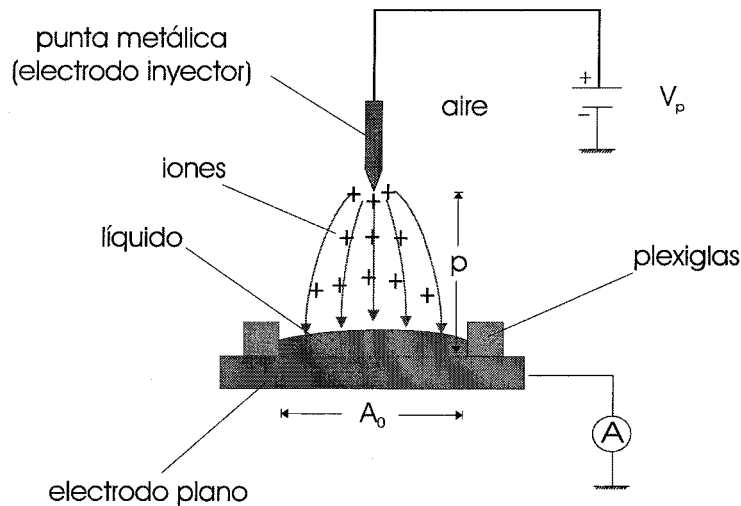


Figura 2.1: Configuración experimental punta-plano.

3 mm de altura. El electrodo está dividido en dos partes eléctricamente aisladas: una interior de 5 cm de diámetro, que se conecta un electrómetro; y otra exterior, que se conecta a tierra a modo de anillo de guarda. El electrómetro (*Keithley modelo 6512*) permite medir la corriente tanto alterna como continua que llega al electrodo y, en su caso, que pasa a través del líquido en él colocado. El electrodo está atornillado a una mesa antivibratoria (*Melles Griot*) a través de una barra de forma que el plano sobre el que se sitúa el líquido queda a 13 cm del nivel de la mesa. La punta se conecta a una fuente de alta tensión (*Spellmann modelo RHR40PN 120/OVFG*) que permite aplicar un voltaje DC máximo de 40 kV, aunque en los trabajos experimentales de este trabajo el rango máximo en el que se ha trabajado es de 16 kV. Teniendo en cuenta que la distancia promedio punta-plano con la que trabajamos es de unos 3 cm, el campo eléctrico medio en el sistema es de unos 3 – 4 kV/cm. Tanto la fuente de tensión como el electrómetro están convenientemente conectados a tierra. Para todas las medidas de la corriente corona el proceso está automatizado con un programa *Test Point* y una tarjeta de adquisición de datos (*Keithley-Metrabyte DAS-16*) que permite el tratamiento y almacenamiento digital de todas las magnitudes involucradas en el experimento, así como un tratamiento instantáneo del error de medida.

Cuando el potencial aplicado a la punta supera el umbral Corona, que en nuestro sistema está en torno a los 4 kV, se produce la descarga iónica en el aire que rodea a la punta. Así, si la polaridad del potencial es por ejemplo positiva, los iones positivos existentes en la cercanía de la

punta son acelerados y dan lugar, por colisión, a la ionización de especies neutras. Los iones positivos así creados son repelidos por el campo eléctrico hasta llegar al electrodo plano que está debajo a potencial cero. A lo largo del presente trabajo, la polaridad de la descarga corona vendrá siempre indicada por el signo del potencial aplicado en la punta V_p . La corriente generada por la descarga corona, llamada corriente corona, es del orden del microamperio para un sistema con las dimensiones de nuestro montaje experimental.

Debido al alto grado de asimetría del campo eléctrico asociado a la configuración punta-plano, el cual puede aproximarse con un sistema de coordenadas de geometría parabólica, hiperbólica (Coelho y Debeau, 1971) o esferoidal (Wintle, 1987), la distribución de corriente que llega al electrodo no será uniforme (Giacometti, 1987; Atten, 1996) así como tampoco las equipotenciales serán planos paralelos al electrodo que contiene el líquido, por lo que la superficie del líquido colocado en el electrodo no es una equipotencial.

2.2.2. Triodo

El montaje triodo (fig. 2.2) trata de corregir la falta de homogeneidad del campo eléctrico aplicado y además permite un control separado de la tensión eléctrica y la corriente corona que llega al líquido. Consiste sencillamente en poner entre la punta y el plano una rejilla metálica de manera que queda paralela al electrodo plano y perpendicular al eje de la punta. La rejilla utilizada en nuestro montaje es una red cuadrada de hilos de cobre de $0,25 \text{ mm}$ de diámetro separados de centro a centro por una distancia de $1,25 \text{ mm}$. Esta rejilla, colocada de forma que abarca toda el área del electrodo colector, se conecta a una fuente de alta tensión (*Trek* modelo *610C*). En unas series de medidas adicionales la rejilla se conectó a un generador de señales *AC* y *DC* (*Hameg* modelo *HM8480-2*) y el plano a un amplificador sintonizado (*Stanford Research Systems* modelo *SR530*), que permite medir corrientes *AC* de una determinada frecuencia. En el montaje triodo se ha utilizado el mismo sistema automatizado de realización de medidas.

A la rejilla se le aplica una tensión eléctrica a la vez que a la punta metálica de forma que los iones de la corriente corona provenientes de la punta puedan pasar a través de la rejilla y llegar al electrodo plano (o a la superficie del líquido en su caso). Así pues, se trabaja con un potencial de rejilla V_r más bajo que el de la punta de forma que los iones no sean repelidos por la rejilla. Adicionalmente, se recubrió con

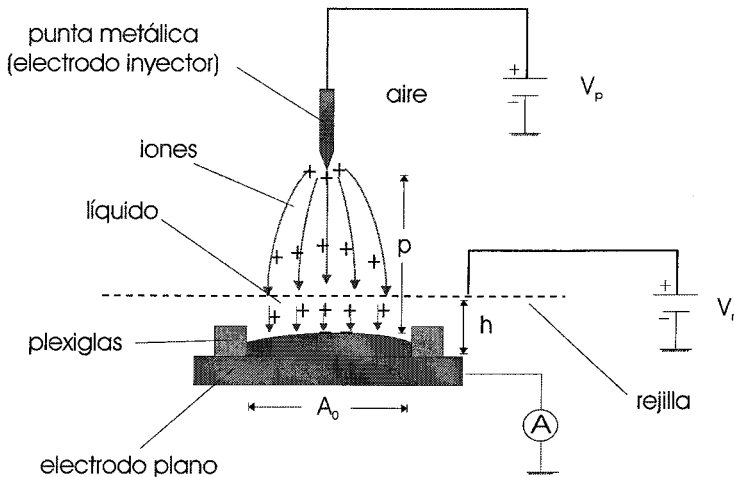


Figura 2.2: Configuración experimental triodo.

una capa de pintura aislante la cara inferior de la rejilla de forma que no hubiera un efecto corona adicional (que en todo caso sería pequeño comparado con el de la punta) desde la rejilla, pues ésta también está en contacto con el aire. De esta forma nos aseguramos de que toda la corriente que medimos en el electrodo es la que proviene de la punta debida al efecto corona.

Finalmente, en algunas de las series de medidas (para aquellas en las que se requería una mayor precisión en la medida de la corriente) se usó una jaula de Faraday para aislar eléctricamente el sistema y evitar interferencias.

2.2.3. Montaje para la medida de la distribución de corriente corona

Para las medidas de la distribución espacial de la corriente corona se ha usado un montaje experimental alternativo, que fue diseñado en el *LEMD* del *CNRS* de Grenoble, que además financió dicho montaje y fue donde se hicieron todas las medidas de este apartado, en colaboración el Dr. Pierre Atten y con la ayuda técnica del Dr. Bernard Malraison y Lucien Saragossie. El montaje consiste en una tabla aislante sobre la que está sujeta una placa metálica cuadrada de 20 cm de lado. En el centro de la placa se hizo un pequeño agujero de 0,5 mm de diámetro. Por este pequeño agujero se mete un hilo de cobre barnizado con una fina capa aislante, de forma que sólo la sección transversal está libre de dicho barniz, y es por tanto conductora. Un soporte aislante sostiene una o varias puntas metálicas, de las mismas características que las de



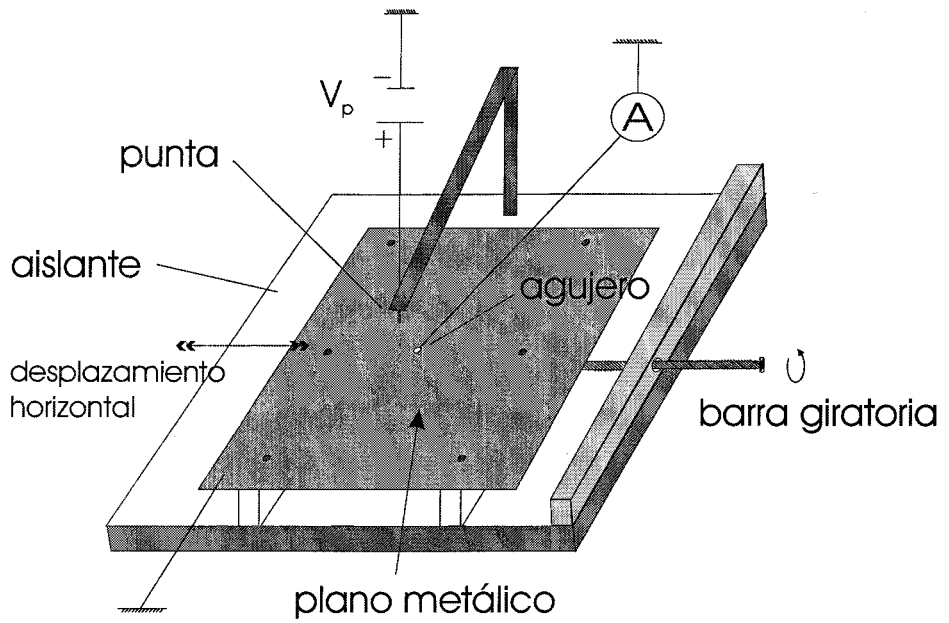


Figura 2.3: Montaje para las medidas de distribución de corriente corona, vista en perspectiva.

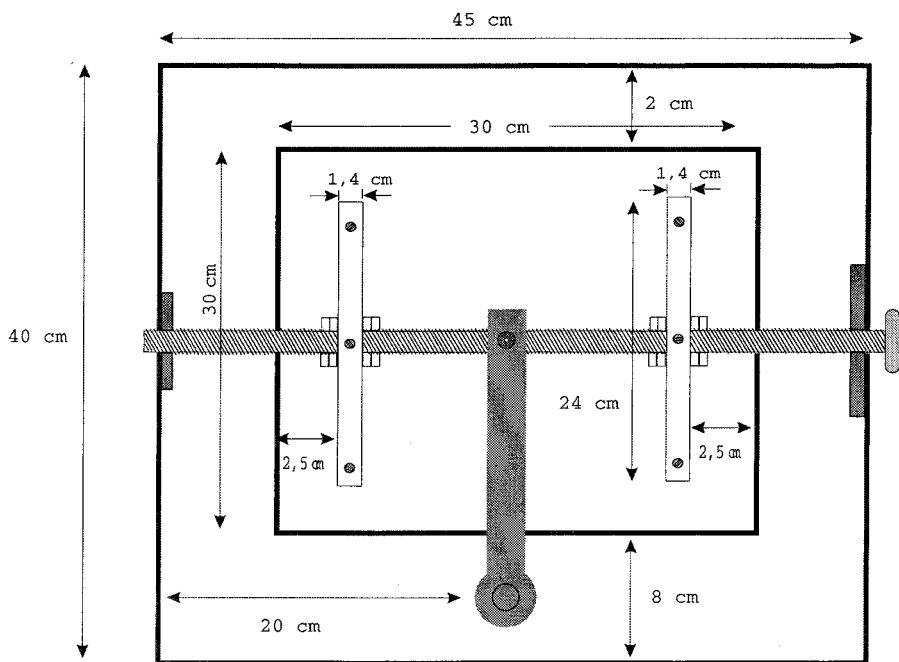


Figura 2.4: Dimensiones del montaje para las medidas de distribución de corriente corona, (vista desde arriba).

<i>Accite</i>	ε	$\rho(kg/m^3)$	$\nu(m^2/s)$	$K(m^2/Vs)$	$\sigma(\Omega^{-1}m^{-1})$
<i>Silicona</i>	2,73	960	$50 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-10}$	$6 \cdot 10^{-13}$
<i>Ricino</i>	4,69	958	$600 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-11}$	$7 \cdot 10^{-11}$
<i>Maíz</i>	3,1	990	$55 \cdot 10^{-6}$	$4,5 \cdot 10^{-10}$	$1,9 \cdot 10^{-11}$

Cuadro 2.1: Propiedades físicas de los líquidos usados en los experimentos. La magnitud denotada como ε es la permitividad dieléctrica relativa a la del vacío y ν es la viscosidad cinemática.

los apartados 2.2.1 y 2.2.2. Las puntas producen descarga corona al ser conectadas a una fuente de tensión como las de los apartados anteriores. La o las puntas se colocan de manera que el agujero-electrodo pasa por todos los ejes de simetría de la punta (en el caso de una punta, el punto que coincide con el eje de simetría es $\Delta y_0 = 0$). A una altura variable respecto a las puntas está la placa metálica, que se conecta a tierra. La placa además se puede desplazar horizontalmente a través de una barra giratoria, de manera que la placa avanza un milímetro por cada vuelta completa que se le da a la barra. Así la sección conductora del hilo, que queda en la superficie de la placa, va desplazándose respecto al eje de la punta por lo que es posible medir la corriente que llega en un área de $2,5 \times 10^{-2} mm^2$ situada a una cierta distancia Δy_0 del eje de la punta metálica. Para ello se conecta el hilo a un electrómetro de sensibilidad $1 nA$. En el caso de las medidas con varias puntas metálicas, las cuales se colocan equidistantes, Δy_0 se mide respecto al punto medio del conjunto de las mismas. En las figuras 2.3 y 2.4 puede verse el esquema de este montaje experimental.

2.2.4. Líquidos utilizados

Para la obtención de las curvas de corriente se dispuso el electrodo plano conectado al electrómetro, sin líquido y también con los tres líquidos usados extensivamente: aceite de silicona, aceite de ricino y aceite de maíz. El primero de ellos tiene una conductividad unos dos órdenes de magnitud inferior a la de los otros dos y se halla en el régimen no-ohmico de conducción eléctrica dentro del rango de las magnitudes que manejamos. Los otros dos, más conductores, se hallan en el rango óhmico. En la tabla 2.1 pueden verse las distintas propiedades físicas de estos fluidos. Estas propiedades, excepto la movilidad, fueron medidas en nuestro laboratorio. En concreto, las conductividades fueron tomadas con un conductímetro *IRLAB* modelo *LDRTP-2*.

Dado que la capa de líquido está sometida a una inyección de carga,

la superficie del mismo puede considerarse como una fuente de carga espacial. De esta forma, como es sabido, cuando hay una fuente de carga ésta relaja, a lo largo de una línea de campo, de la forma $q(t) = q(0)e^{-t/\tau_o}$ donde τ_o es un tiempo característico ε/σ . Así pues, durante un tiempo menor al de relajación de la carga, existe una cierta distribución espacial de carga en el cuerpo del líquido y puede haber un mecanismo de conducción no óhmica de la forma $j_l = K_l q_l E_l$, donde el subíndice l se refiere al líquido. La magnitud $\tau_a = d^2/K_l V_l$ indica el tiempo medio de tránsito de los iones a través del volumen de líquido, siendo V_l la caída de potencial a través de la capa de líquido. De esta forma, si la conducción no-óhmica es demasiado lenta (si el tiempo τ_a es demasiado grande), esta carga habrá relajado antes de cruzar toda la capa de líquido y por tanto la conducción será esencialmente óhmica. Así pues si el parámetro $C_0 = \tau_a/\tau_c \ll 1$ la conducción será no-óhmica y si por el contrario $C_0 = \tau_a/\tau_o \gg 1$ la conducción será óhmica.

Podemos hacer la siguiente estimación: para una capa de aceite de silicona de 1 mm de un espesor, donde se ha supuesto una $V_l \sim 10^2 V$, el tiempo característico de conducción no-óhmica sería $\tau_a = d^2/K_l V_l \sim 10^{-6}/(5 \cdot 10^{-10} \cdot 10^2) \sim 10 s$. Mientras que el tiempo de relajación de carga en este líquido es: $\varepsilon/\sigma = 2,73 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}/(6 \cdot 10^{-13}) = 40 s$ y entonces $C_0 = 0,25 < 1$, con lo cual existe siempre una carga espacial neta en el volumen del líquido y la conducción es *no óhmica*. En el caso del aceite de ricino, que es más viscoso y mejor conductor, el tiempo característico de conducción no óhmica es: $\tau_a \sim 10 \cdot 10^{-6}/(4 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^2) \sim 100 s$ mientras que el tiempo de relajación óhmico es: $\tau_o = \varepsilon/\sigma = 4,69 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}/(7 \cdot 10^{-11}) \sim 0,6 s$ y por tanto $C_0 = 167 \gg 1$, con lo que claramente una capa de aceite de ricino del orden de 1 mm de espesor y sometida a inyección de carga se encuentra en un régimen óhmico de conducción eléctrica.

Es importante hacer énfasis en que el régimen en que se halla un líquido depende de la anchura de la capa así como de la caída de potencial eléctrico a través de ella, por lo que incluso dentro de un mismo experimento podemos encontrar diferente régimen de conducción en un mismo líquido, dependiendo de las condiciones. Ahora bien, en el rango de las magnitudes con que nos manejamos en los experimentos, el aceite de silicona se halla en régimen no-óhmico (porque el potencial eléctrico aplicado es lo bastante grande y la capa de líquido lo bastante delgada) y el aceite de maíz y de ricino se hallan en régimen óhmico.

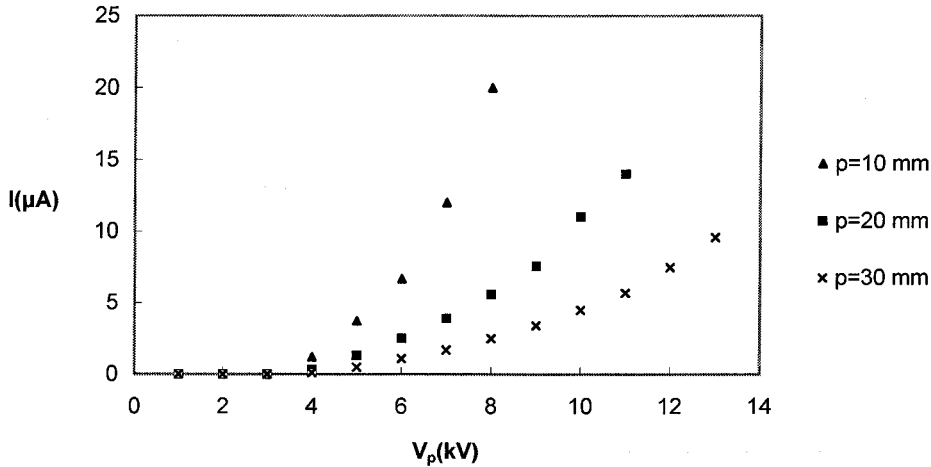


Figura 2.5: Medida de la corriente corona en una configuración punta-plano, en función del potencial en la punta V_p y para varias distancias punta-plano p . Sin líquido. En todas las medidas de este apartado, el área del electrodo plano es: $A_0 = 1,96 \times 10^{-3} \text{ m}^2$.

2.3. Configuración punta-plano

2.3.1. Medidas de la corriente corona

Parece claro que para el estudio de la dinámica de un líquido sometido a un campo con inyección de carga es importante tener bien caracterizada la corriente eléctrica pues, de las ecs. (1.14) y (1.37, 1.38), el valor de la misma proporciona información sobre el salto de presión y el campo eléctrico en la superficie. De ahí que se hicieran medidas de la corriente corona en ambos montajes, punta-plano y triodo, con y sin líquidos.

En la figura 2.5 se muestra una serie de medidas en la configuración punta-plano y sin líquido de la corriente corona en función del potencial aplicado en la punta V_p . Como puede verse, la corriente es nula al principio y a partir del umbral corona empieza a crecer con V_p . Este mismo comportamiento es observable también si se dispone cierta cantidad de líquido sobre el electrodo plano, como se aprecia en las figuras 2.6 y 2.7. Una tendencia visible es que la corriente disminuye con el valor medio del campo V_p/h siendo $h = L + d$ (la distancia punta-líquido L más la anchura de la capa de líquido d). Además puede verse en las figuras 2.8 y 2.9 que en ambos tipos de régimen, tanto óhmico como no óhmico, el comportamiento es *aislante* pues la presencia de líquido disminuye en todos los casos la corriente total medida. Esto es apreciable pues la corriente es menor para mayor volumen de líquido.

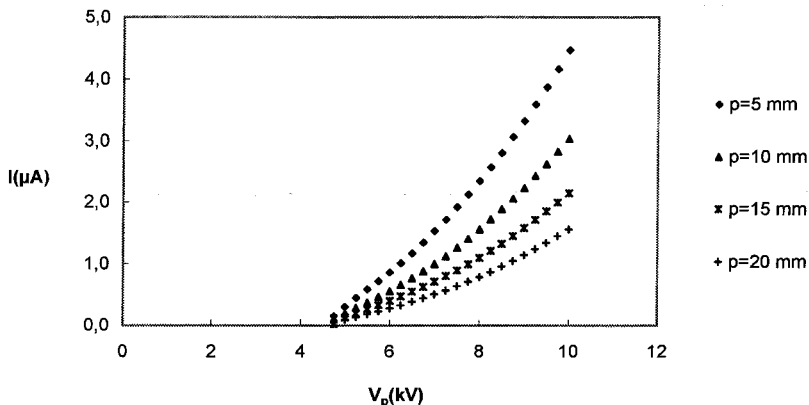


Figura 2.6: Medida de la corriente corona en una configuración punta-plano para distintas alturas de la punta p . Líquido: Aceite de silicona (no-ohmico). Volumen de líquido: $1,0 \text{ ml}$. Puede observarse en esta curva cómo la corriente es prácticamente nula hasta que el potencial aplicado supera el umbral corona.

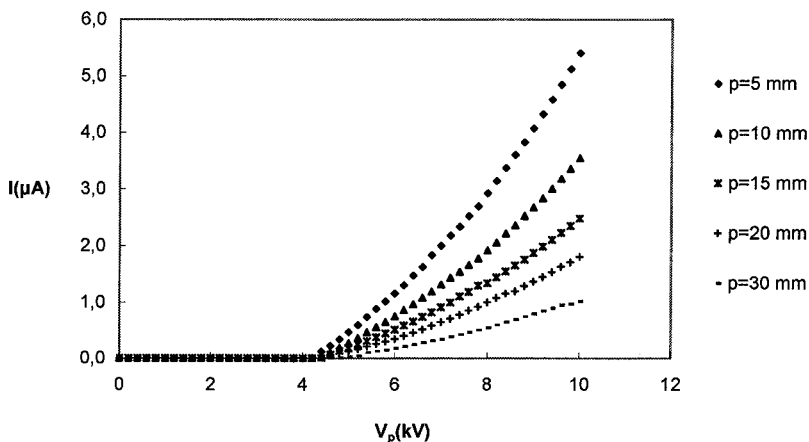


Figura 2.7: Medida de la corriente corona en una configuración punta-plano. Para distintas alturas de la punta. Líquido: Aceite de maíz (ohmico). Volumen de líquido: $1,0 \text{ ml}$.

Tanto en el caso óhmico como en el no óhmico las curvas se ajustan bien a la forma polinómica de segundo grado (Vega y Pérez, 1999a): $I = a(V_p - V_0)^2 + b(V_p - V_0) + c$, con la condición $V_p > V_0$, siendo V_0 una constante que, si coincide con el umbral corona, inmediatamente se tiene que $c = 0$. Sea pues V_0 el umbral corona, entonces tenemos: $I = a(V_p - V_0)^2 + b(V_p - V_0)$. En las figuras 2.10 y 2.11 se muestran los coeficientes obtenidos para el aceite de silicona (no-ohmico) y el aceite de maíz (ohmico).

El coeficiente a , cuadrático con el potencial, es prácticamente independiente de la anchura de la capa de líquido en ambos tipos de

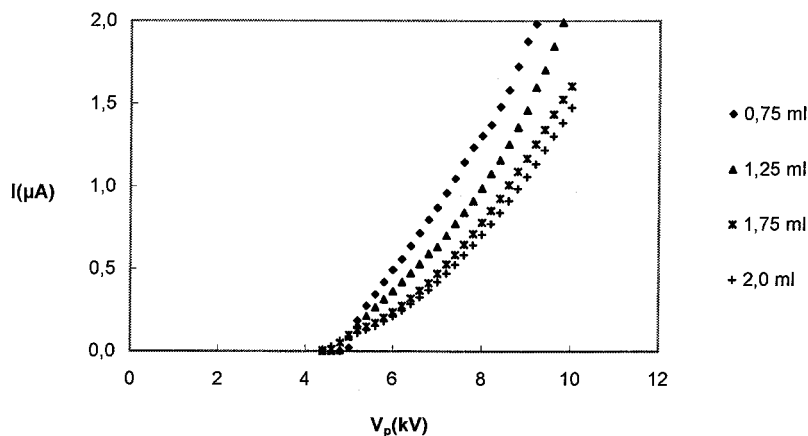


Figura 2.8: Medida de la corriente corona en una configuración punta-plano, en función del potencial en la punta V_p . Líquido: Aceite de silicona (no-ohmico). Distancia punta-plano: $p = 20 \text{ mm}$.

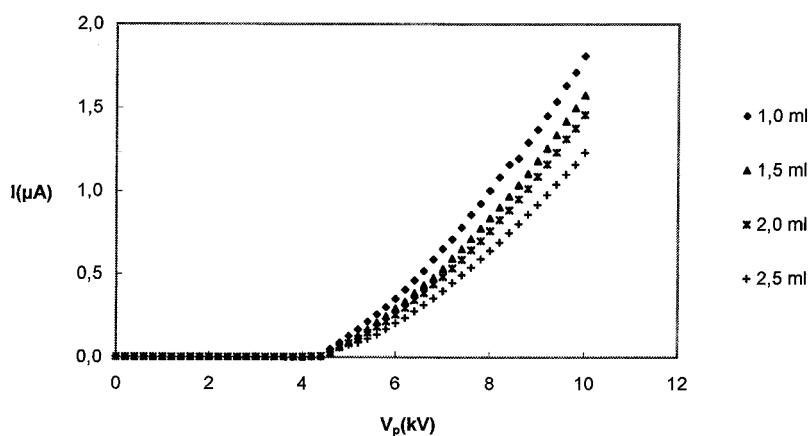


Figura 2.9: Medida de la corriente corona en una configuración punta-plano. Líquido: Aceite de maíz (ohmico). Distancia punta-plano: $p = 20 \text{ mm}$.

conducción y por lo tanto parece lógico pensar que es el mismo coeficiente que cuando no hay líquido. El coeficiente b , que es lineal con el potencial eléctrico y pudiera identificarse con una componente óhmica en la conducción, es menos variable en el caso óhmico que en el caso no-óhmico. Por otra parte, se observa que este coeficiente se hace mucho mayor que el cuadrático para volúmenes pequeños de líquido, especialmente en el caso no-óhmico, siendo esta tendencia menos pronunciada para mayores alturas de la punta (fig. 2.12). En resumen, a pesar de las diferencias entre los líquidos usados, las curvas $I(V_p)$ no permiten, en principio, determinar qué tipo de régimen de conducción se presenta en cada caso. El ajuste realizado de la curva de corriente permite también

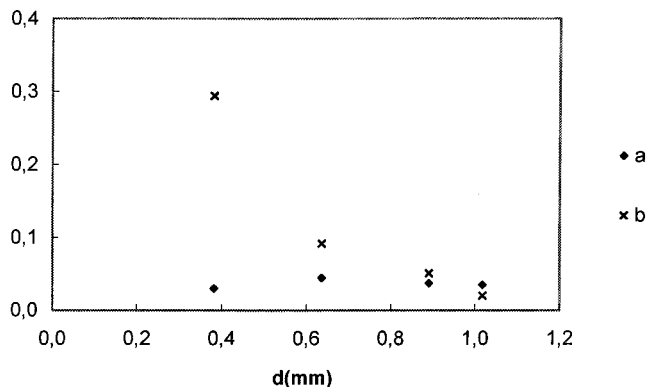


Figura 2.10: Coeficientes de la curva experimental $I = a(V_p - V_0)^2 + b(V_p - V_0)$ en función de la anchura de la capa de líquido d . Líquido: Aceite de silicona (no-óhmico). Distancia punta-plano: $p = 20 \text{ mm}$. Los coeficientes se corresponden para las siguientes unidades de medida: μA para intensidad de corriente y kV para potencial eléctrico.

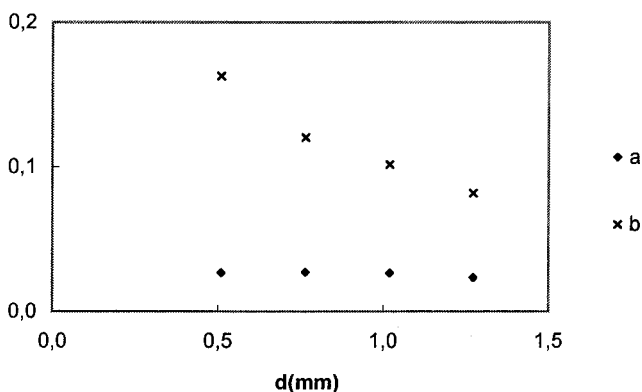


Figura 2.11: Coeficientes de la curva experimental $I = a(V_p - V_0)^2 + b(V_p - V_0)$. Líquido: Aceite de maíz (óhmico). Distancia punta-plano: $p = 20 \text{ mm}$. Los coeficientes se corresponden para las siguientes unidades de medida: μA para intensidad de corriente y kV para potencial eléctrico.

	$d(mm)$	0,51	0,76	1,02	1,27
$p = 2 \text{ cm}$	$V_0(kV)$	4,26	4,25	4,24	4,26
$p = 2,5 \text{ cm}$	$V_0(kV)$	4,32	4,29	4,30	4,28

Cuadro 2.2: Valores del potencial umbral V_0 en la descarga corona. Con una capa de aceite de maíz de anchura d .

realizar una estimación del umbral corona V_0 (ver la tabla 2.2).

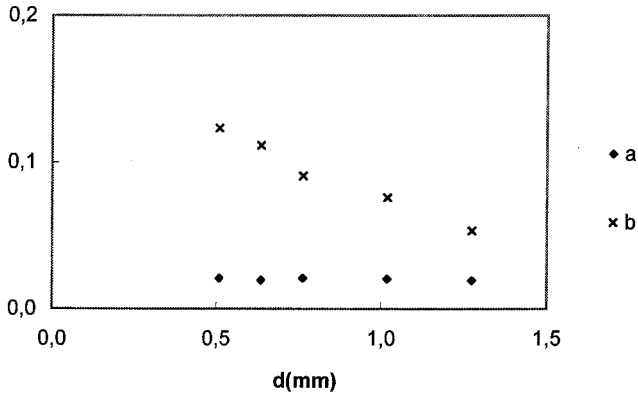


Figura 2.12: Coeficientes de la curva experimental $I = a(V_p - V_0)^2 + b(V_p - V_0)$. Líquido: Aceite de maíz (óhmico). Distancia punta-plano: $p = 25 \text{ mm}$.

2.3.2. Campo eléctrico en ausencia de densidad de carga espacial

La solución analítica del problema del campo eléctrico en una configuración punta-plano puede no ser tan directa. Siguiendo el trabajo de Durand (1966) y Coelho y Debeau (1971), y el campo eléctrico en una configuración punta-plano de electrodos, con una punta de radio pequeño, puede describirse adecuadamente con una geometría hiperbólica: la superficie de la punta metálica es una equipotencial de forma hiperbólica con un eje de revolución (eje X). De forma que las coordenadas adecuadas para este sistema serían:

$$\begin{aligned} x &= p_f \operatorname{sen} \zeta \cosh \eta \\ y &= p_f \cos \zeta \sinh \eta \end{aligned} \quad (2.1)$$

Las ecuaciones $\eta = cte$ y $\zeta = cte$ definen dos conjuntos ortogonales de elipses e hipérbolas, respectivamente, siendo p_f la distancia focal al origen. Un cierto valor ζ_p define la hipérbola correspondiente a la superficie de la punta en contacto con el aire. Fijado el potencial en dos de las hipérbolas, se puede demostrar que todas las hipérbolas $\zeta = cte$ son también equipotenciales, de manera que si el origen de potencial es tomado en el plano $x = 0$ ($\zeta = 0$) el potencial y la componente ζ del campo eléctrico quedan definidos así:

$$V(\zeta) = \mathcal{C} \ln \tan \left(\frac{\zeta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (2.2)$$

$$E(\zeta, \eta) = \frac{C}{p_f \cos \zeta (\cosh^2 \eta - \operatorname{sen}^2 \zeta)^{1/2}} \quad (2.3)$$

siendo C una constante de integración que depende del potencial aplicado en la hipérbola correspondiente a la punta metálica. Con esto, tenemos la siguiente solución para el campo eléctrico en el eje de la punta ($\eta = 0$):

$$E = \frac{C}{p_f \cos^2 \zeta} = \frac{V_p}{\ln \left(\frac{4p_f}{r_0} \right)^{1/2}} \frac{p_f}{p_f^2 - x^2} \quad (2.4)$$

lo que lleva a las expresión, en $x = 0$ (el electrodo plano):

$$E = \frac{1}{\ln \left(\frac{4p_f}{r_0} \right)^{1/2}} \frac{V_p}{p_f} \quad (2.5)$$

y para $x = p = p_f - r_0$ (en el vértice de la punta):

$$E = \frac{V_p}{\ln \left(\frac{4p_f}{r_0} \right)^{1/2}} \frac{1}{r_0} \quad (2.6)$$

Con estas expresiones del campo se puede ver que el campo en la punta no depende prácticamente de la distancia punta-plano, si el radio de curvatura r_0 es suficientemente pequeño. Al escalar E con V_p/r_0 y como el umbral corona depende del valor del campo en la punta, el valor de la tensión en el umbral corona varía muy poco con p y por ello puede considerarse como una propiedad de la punta. El campo en el plano $x = 0$ es proporcional a V_p/p por lo que para alturas elevadas de la punta el campo en el electrodo plano es pequeño. En la figura 2.13 puede apreciarse la geometría del campo eléctrico en esta configuración: las líneas de campo son las elipses perpendiculares a las hipérbolas equipotenciales. Como esta solución corresponde al caso sin inyección de carga ($\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$), sólo es aplicable mientras el potencial aplicado en la punta sea inferior el umbral corona ($V_p < V_0$).

2.3.3. Campo eléctrico con inyección unipolar

Una vez que se producen los iones en la punta éstos seguirán aproximadamente las líneas de las elipses y así la distribución de corriente que llega al electrodo no será homogénea, sino que lógicamente será más elevada en la región cercana al eje de la punta y más débil lejos de éste.

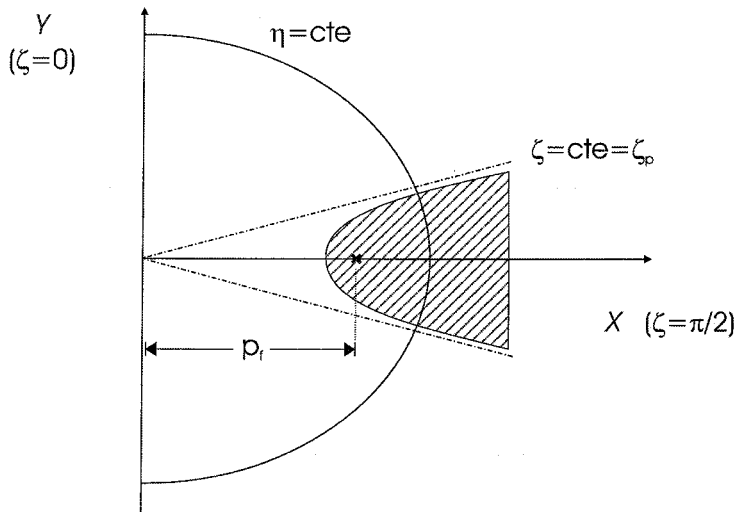


Figura 2.13: Geometría hiperbólica de las equipotenciales en una configuración punta-plano, donde la punta es descrita como una hipérbola ($\zeta = cte$). El lugar geométrico de las curvas ortogonales a estas hipérbolas es un conjunto de elipses ($\eta = cte$) que coinciden con las líneas de campo.

Desde el momento en que se supera el umbral corona, la divergencia del campo eléctrico ya no es nula. Por otra parte, cuando hay carga espacial en una geometría hiperbólica el movimiento existe necesariamente en el estado estacionario. En efecto, puede verse que no es nulo el rotacional:

$$\nabla \times (q\mathbf{E}) = \nabla q \times \mathbf{E} \quad (2.7)$$

con lo cual no es posible la solución hidrostática (Castellanos, 1998). Por ello, en la configuración punta-plano bajo inyección de carga, la expresión de la densidad de corriente es $\mathbf{j} = q(\mathbf{v} + K_a\mathbf{E})$. No obstante la ecuación $\mathbf{j} = Kq\mathbf{E}$ es válida con buena aproximación en nuestro montaje experimental punta-plano. Esto es debido a la elevada movilidad iónica del aire, lo que hace que el término de velocidad en la ecuación de la densidad de corriente eléctrica se haga despreciable frente al término proporcional al campo: la velocidad del fluido es del orden de $\sqrt{\varepsilon/\rho E}$ (Robinson, 1961). Así, en el aire se tiene que:

$$v/K_a E = \frac{\sqrt{\varepsilon_0/\rho_a}}{K_a} \quad (2.8)$$

siendo ρ_a la densidad de masa del aire y K_a su movilidad iónica. Este cociente es muy pequeño en los gases ($\sim 10^{-2}$ en el air)) pero no para los líquidos ($\sim 10^2$ en aceite de silicona). Por ello, en el aire bajo descarga

corona son válidas las expresiones $\mathbf{j} = K_a q \mathbf{E}$ y $\nabla \cdot \mathbf{E} = q/\varepsilon_0$. Esto lleva a la ecuación diferencial para el campo eléctrico:

$$(\nabla \cdot \mathbf{E})^2 + \mathbf{E} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0 \quad (2.9)$$

La solución analítica en coordenadas hiperbólicas a la ecuación (2.9) proporcionaría la expresión exacta del campo eléctrico en la configuración punta-plano). Sin embargo, la resolución del problema en geometría hiperbólica es bastante complicada. También es complicada la solución en geometría parabólica, problema que fue resuelto numéricamente por Wintle (1987). La solución exacta del problema hiperbólico en el eje de la punta ($\eta = 0$) es bastante más sencilla y fue estudiada por Coelho y Debeau (1971). Dicha solución, dado que en el eje X ($\eta = 0$) se cumple que $E_\eta = 0$, es de la forma $E = E_\zeta$:

$$E_\zeta = \frac{1}{p_f \cos^2 \zeta} \left[\mathcal{A} \left(\sin \zeta - \frac{\sin^3 \zeta}{3} \right) + \mathcal{B} \right]^{1/2} \quad (2.10)$$

que difiere de la expresión (2.4) por la función en el numerador: $\mathcal{A} \sin \zeta (1 - \sin^2 \zeta/3)$.

Como hemos visto en el apartado 1.6.1, en el modelo del inyector autónomo (Atten y Moreau, 1972) la inyección unipolar de carga espacial q_0 (o su equivalente en variables adimensionales, el parámetro de inyección C) se supone independiente del potencial eléctrico aplicado. Si aplicamos esto a la geometría hiperbólica característica de la configuración punta-plano tendremos que las constantes de integración \mathcal{A} y \mathcal{B} vienen dadas por el potencial aplicado V_p y el nivel de inyección q_0 que a su vez proporcionan el valor de la corriente eléctrica total que atraviesa el sistema, como se vio en el apartado del inyector autónomo, 1.6. En este sentido, la constante \mathcal{A} , para fuerte inyección de carga (*CLCE*), que es cuando el campo en el vértice de la punta es nulo, vendría dada por la relación:

$$\frac{V_p}{p} = 0,624(-\mathcal{A})^{1/2} \quad (2.11)$$

donde p es la distancia de la punta al plano $x = 0$ y en el caso de una punta fina se cumple $p \sim p_f$. De la expresión (2.11), y siempre en el régimen de *CLCE*, se obtiene una relación para la densidad de corriente eléctrica:

$$j_0 = 1,28 K_a \varepsilon_0 \frac{V_p^2}{p^3} \quad (2.12)$$

expresión que es exacta en el eje de la punta y es casi idéntica a la ec. (1.28), donde aparece el factor $9/8 = 1,12$ en lugar de $1,28$. Y, si se supone que la corriente es uniforme en toda un área circular, de radio p con centro en el eje $y = 0$, entonces la corriente total tiene una expresión cuadrática con el potencial aplicado: $I = (\pi/0,78)K_a\varepsilon_0(V_p^2/p)$. Sin embargo, como veremos en la siguiente sección, la distribución de corriente corona está lejos de ser uniforme en un área de radio p , igual a la altura punta-plano.

2.3.4. Medidas de la distribución de corriente corona

En este apartado se presentan unas series de medias de la distribución de corriente corona, siempre sin líquido. El montaje es el correspondiente al caso punta-plano descrito en el apartado 2.2.3. Estas series de medidas básicamente siguen la línea de las medidas realizadas por Giacometti (1987) y Atten (1996). El primero de estos trabajos difiere no obstante en que la descarga corona se aplica para cargar una muestra de dieléctrico sólido y además la punta esta rodeada por un cilindro de material dieléctrico que interfiere en la distribución corona. Se añade aquí un estudio de la variación del valor de la distribución en función de distintas distancias punta-plano, además de una medida de la simetría axial de la corriente corona. En la figura 2.14 pueden observarse las curvas de distribución de corriente corona en función de la distancia Δy_0 respecto al punto del electrodo plano que está en el eje de la punta. Evidentemente, para mayores potenciales de la punta, la corriente corona será mayor. Por otra parte, en estas curvas de distribución la corriente se concentra principalmente en una región centrada en $x = 0$, $y = 0$ (bajo el eje de la punta) de forma que para una distancia respecto del eje de la punta $\Delta y_0 > p$ la corriente es pequeña.

Si se normalizan todas las curvas con el factor V_p^2/p^3 según la ecuación (2.12) debería obtenerse una constante, por lo que todas las curvas solaparían si se representan en función de $\Delta y_0/p$. Pero aún debe tenerse en cuenta que en la descarga corona punta-plano la densidad de carga inyectada q_0 y el potencial aplicado en la punta no son exactamente independientes. Por ejemplo, hasta que no se sobrepasa el umbral corona la corriente es nula, hecho que no tiene en cuenta la ec. (2.12). Si se tuviera en cuenta la dependencia de la carga inyectada con el potencial aplicado $q_0(V_p)$ esta aparente contradicción no aparecería. Para ello, puede suponerse en buena aproximación que una vez superado el umbral

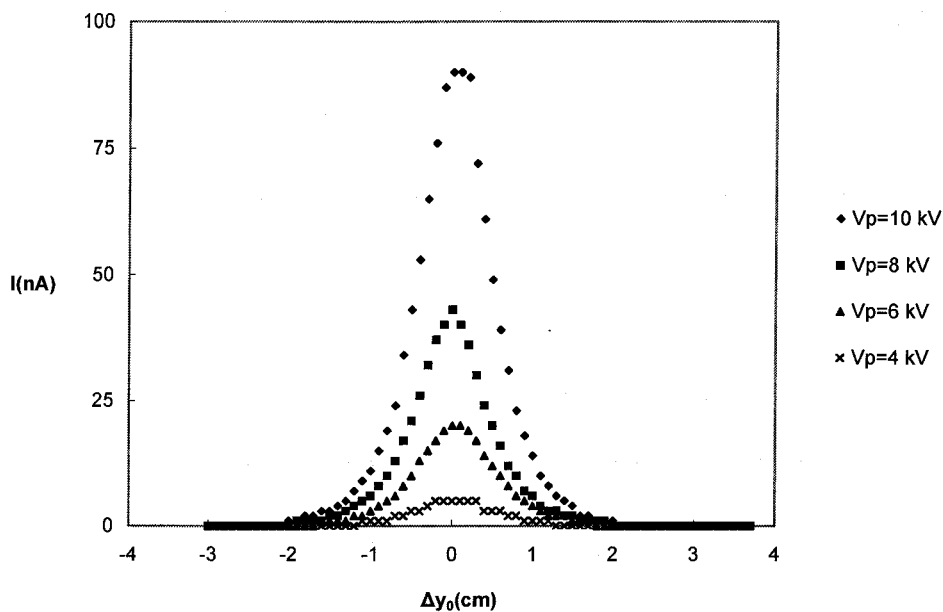


Figura 2.14: Medidas de la distribución de corriente corona en punta-plano en función de la distancia al eje Δy_0 para distintos valores del potencial aplicado en la punta V_p , de polaridad positiva. La distancia punta-plano es $p = 1$ cm.

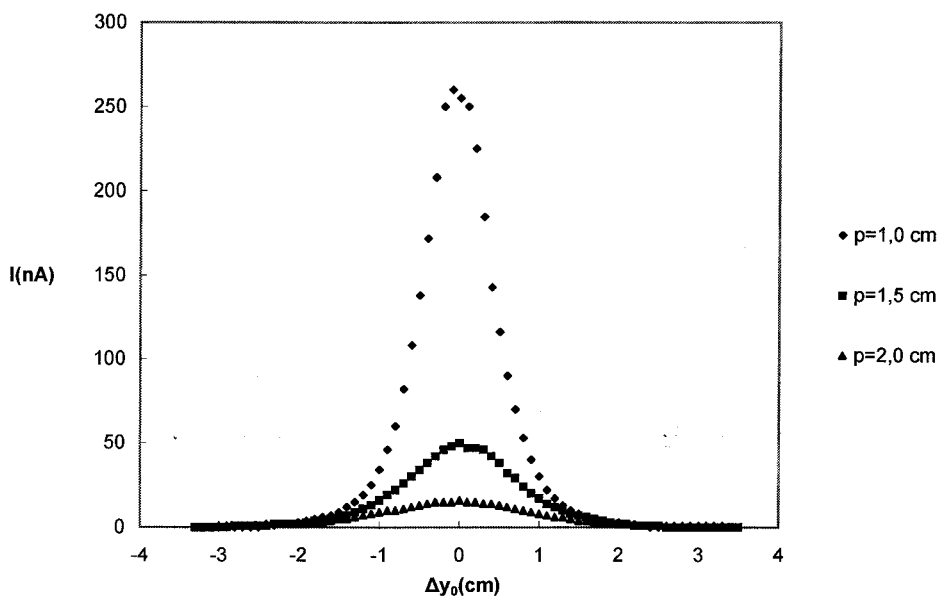


Figura 2.15: Medidas de la distribución de corriente corona, de polaridad positiva, en punta-plano en función de la distancia al eje Δy_0 para distintos valores de la distancia punta-plano p . El potencial aplicado en la punta es $V_p = 14$ kV.

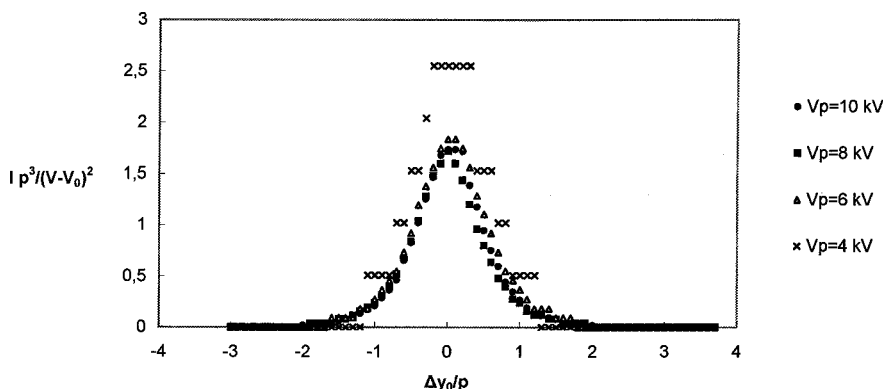


Figura 2.16: Las curvas de distribución de corriente adimensional se solapan para distintos valores del potencial ($p = 1,0 \text{ cm}$)

corona ya se está en régimen de inyección fuerte, dadas las características de la descarga corona. En este caso las curvas de la corriente corona son polinomios de segundo orden en $V_p - V_0$ (lo que coincide con las medidas del apartado 2.3.1), por lo que la distribución de corriente es de la forma $f(\Delta y_0)(V_p - V_0)^2/p^3$ siendo V_0 el umbral corona y $f(\Delta y_0)$ una función que da cuenta de la distribución de la corriente corona. Por ello, para que las curvas de distribución de corriente coincidan deben normalizarse con la función $(V_p - V_0)^2/p^3$ en lugar de V_p^2/p^3 . Las curvas así normalizadas obtenidas son como las de las figuras 2.16 y 2.17. El umbral corona es una función decreciente de la distancia punta-plano (Atten, 1996), lo que concuerda con nuestras observaciones según las medidas aquí realizadas de la distribución de corriente corona. Como puede verse en la figura 2.16, para medidas cercanas al umbral corona (aquí en torno a un valor de 4 kV) la curva normalizada es sensiblemente más elevada que el resto, que sí coinciden bastante bien.

Aunque como es previsto las curvas solapan aunque puede notarse una mayor dispersión en las curvas tomadas variando la distancia punta-plano debido a una mayor imprecisión en la medida de referencia de la altura respecto al plano y también debido a pequeñas oscilaciones en altura que el plano sufría al ser desplazado horizontalmente. En cuanto a la función espacial $f(\Delta y_0)$, Warburg (1899, 1927) comprobó que tenía la forma $I(\theta)/I_0 = \cos^m \theta$ siendo $\cos \theta = p/\sqrt{p^2 + (\Delta y)^2}$. Para coronas tanto positivas como negativas Warburg (1899, 1927) comprobó que $m \sim 5$ (sobre la distribución de Warburg también se puede ver por ejemplo, la referencia más reciente de Sigmond (1982)). En la figura 2.18 se ve que la función detectada en nuestras medidas se ajusta bien a la forma $\cos^m \theta$ con m algo superior al de la distribución de Warburg,

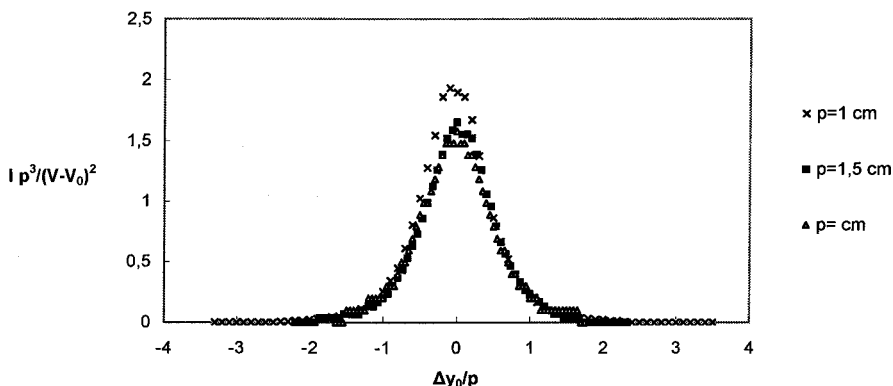


Figura 2.17: Curvas de distribución normalizadas para distintos valores de la altura de la punta (con $V_p = 14 \text{ kV}$).

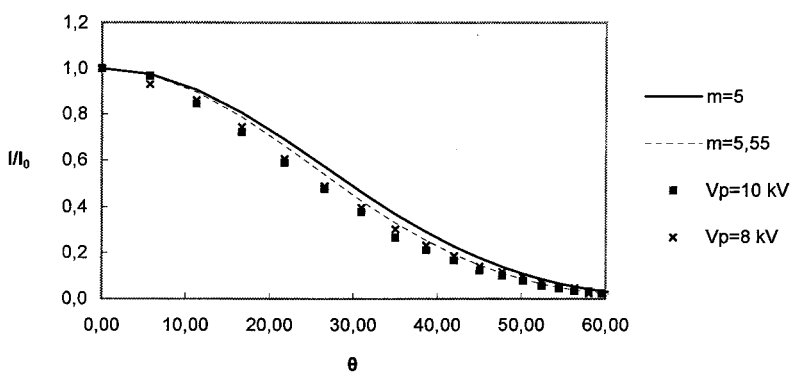


Figura 2.18: Comparación de las curvas I/I_0 con la distribución de Warburg (con $p = 1 \text{ cm}$).

observación que concuerda con los resultados de Sigmond (1982).

Queda claro pues, que aún dentro del límite de fluidos de elevada movilidad iónica, para hacer una analogía directa entre la teoría (Coelho y Debeau, 1971; Wintle, 1987) y la configuración experimental de la descarga corona en punta-plano, habría que tener en cuenta que el modelo de inyector autónomo no es aplicable pues no se cumple estrictamente la independencia de las fuentes de carga y potencial cerca del umbral corona.

2.3.5. Medida de la movilidad iónica del aire

Sin embargo, teniendo en cuenta las observaciones anteriores, aún podemos hacer una buena estimación experimental de la movilidad del aire usando la expresión exacta de la densidad de corriente eléctrica en geometría hiperbólica (2.12) con las medidas hechas de la distribución

de corriente corona si se toma la corriente medida en $\Delta y_0 = 0$, que llamamos I_0 . Suponemos que la distribución de corriente es uniforme en la sección del hilo utilizado como electrodo de medida, lo cual es razonable habida cuenta el pequeño diámetro del mismo ($2r = 0,5 \text{ mm}$), con lo que puede hacerse el siguiente cálculo:

$$\frac{I_0 p^3}{(V_p - V_0)^2} = \frac{j_0 A_s p^3}{(V_p - V_0)^2} = 1,28 A_s K_a \varepsilon_0 \quad (2.13)$$

siendo K_a y ε_0 la movilidad iónica y la constante dieléctrica del aire, respectivamente y A_s el área de la sección transversal del hilo barnizado usado como electrodo. Usando el valor experimental obtenido de la magnitud $I_0 d^3 / (V_p - V_0)^2$ tenemos que:

$$K_a = \frac{[I_0 p^3 / (V_p - V_0)^2]_{exp}}{1,28 A_s \varepsilon_0} \quad (2.14)$$

de modo que el valor obtenido para descarga corona de polaridad positiva es de $K_a^+ = (5,41 \pm 1,6) \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$ mientras que para polaridad negativa se obtiene $K_a^- = (6,74 \pm 2,0) \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$. Estos valores están sujetos obviamente a los errores de medida en la corriente, el umbral corona y sobre todo la distancia punta-plano, $\Delta(p) = \pm 1 \text{ mm}$. A pesar de ello parece claro que la movilidad iónica del aire esté en un orden de magnitud de $10^{-4} \text{ m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$, que coincide con el orden de magnitud de otros valores de referencia de tablas experimentales. Lógicamente, la movilidad es diferente para cada especie iónica y varía con la temperatura, la presión o el grado de humedad. Así que la estimación aquí realizada ha de considerarse como un valor medio de la movilidad de las especies implicadas, y en todo caso está sujeto a la variación de las condiciones ambientales. Por otra parte, quizá no es de esperar una coincidencia exacta pues el factor numérico en la expresión de la densidad de corriente eléctrica (2.12) como se expone en el trabajo de Coelho y Debeau (1971) depende de la geometría escogida; por ejemplo, si en lugar de un hiperboloide la punta se modela como una esfera el factor es 5.7 veces menor. Es posible por tanto que, teniendo previamente una buena medida de la movilidad iónica sirviese para estimar el factor f_g asociado a la forma real de la punta que se está utilizando en el laboratorio y que da la relación entre el potencial aplicado en la punta y la corriente medida bajo el eje de la misma:

$$I_0 = f_g \frac{(V_p - V_0)^2}{p^3} A_s K_a \varepsilon_0 \quad (2.15)$$

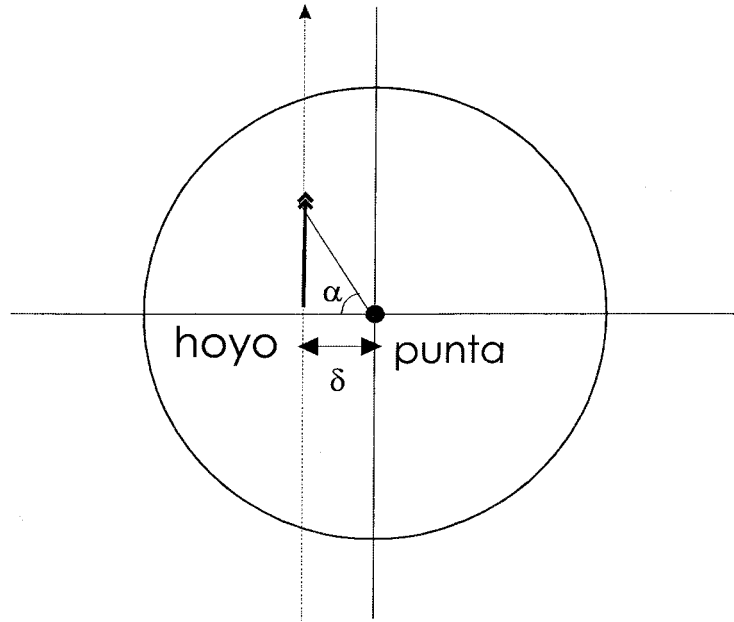


Figura 2.19: El eje de la punta se hace pasar a una distancia δ del agujero-electrodo de forma que los puntos en que se toman las medidas forman un ángulo α variable respecto a el eje de la punta.

2.3.6. Medida de la simetría de la distribución de corriente corona

Las puntas metálicas inyectoras consideradas en las expresiones teóricas del campo eléctrico tienen un eje de revolución. Naturalmente, la existencia de un eje de simetría debe reflejarse en la distribución de corriente corona. Ahora bien, es posible que las puntas utilizadas en los experimentos tengan pequeñas irregularidades, por lo que una manera sencilla de comprobar que efectivamente en los experimentos se cumple esta simetría es estudiando la distribución para distintos ángulos α en el plano perpendicular al eje (ver figura 2.19). En la práctica, lo que se hizo en el laboratorio fue fijar la punta (y por tanto su eje central) de forma que al desplazarla respecto del agujero-electrodo la distancia mínima a la que llega a pasar el agujero respecto al eje es $\delta \neq 0$.

El resultado es la obtención de una distribución de corriente corona en puntos con ángulo α variable, de forma que los puntos medidos ahora tienen distinta orientación a los correspondientes a las medidas del apartado 2.3.4. Comparadas con estas últimas, si las distribuciones coinciden para puntos sobre la placa metálica situados a igual distancia del eje de la punta quedaría patente la simetría axial en el montaje ex-

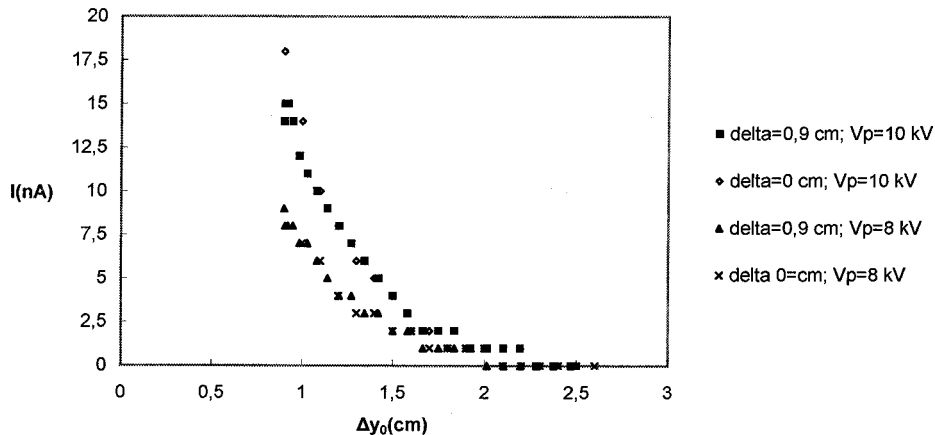


Figura 2.20: Medida de la simetría de la distribución de corriente corona en punta-plano. $p = 1,0$ cm. $V_p = 20$ kV

perimental de la distribución de la corriente corona y a su vez del campo eléctrico generado por la punta. Esto es lo que muestra la figura 2.20, en la cual se comparan ambas distribuciones para dos potenciales en la punta distintos (recuérdese que Δy_0 es la distancia al eje de la punta. A la vista de los resultados puede afirmarse que si hay irregularidades en el perfil de las puntas utilizadas, éstas no influyen significativamente en la simetría del campo eléctrico y distribuciones de corriente.

2.3.7. Medidas de la distribución de corriente corona con una punta frente a un electrodo hemisférico

Si en lugar de tener una punta metálica enfrentada a un plano a tierra tenemos un electrodo con cualquier otra forma geométrica, con lo cual estamos modificando las líneas de campo eléctrico, la distribución de corriente corona se verá alterada respecto a la configuración original de punta-plano. En este sentido, en la figura 2.21 se presentan los resultados de la medida de la distribución de corriente corona en una configuración punta-semiesfera, usando una rejilla metálica semiesférica fijada a la punta y centrada en el eje de la misma. Se coloca encima de la placa metálica y en contacto con ella (y por tanto también a tierra) pero de forma que la placa desliza al ser desplazada. También tiene un hueco en el centro de modo que el agujero queda libre para recibir la corriente (fig. 2.22). La intención era observar una mayor regularidad en la distribución corona, siempre buscando la convergencia con el modelo del inyector en geometría plana. Sin embargo, comparada con la

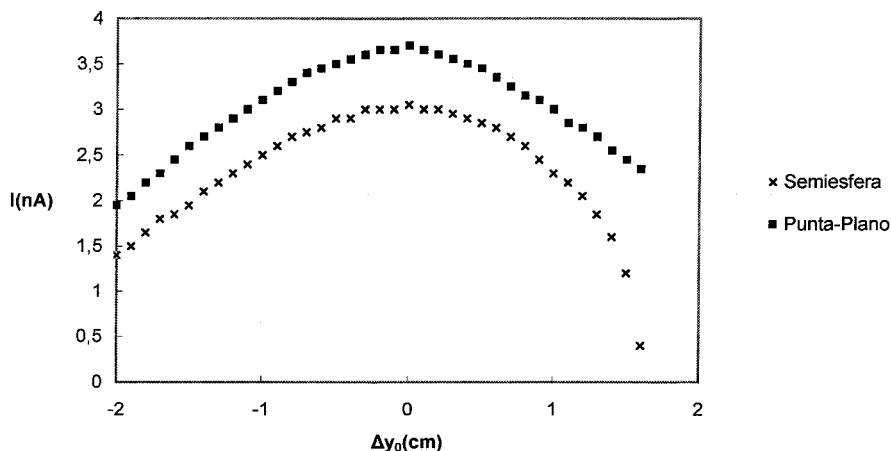


Figura 2.21: Medida de la distribución de corriente corona, de polaridad positiva, con una punta metálica enfrentada a un electrodo semiesférico, comparada con la correspondiente al caso sin la esfera. $p = 3,6 \text{ cm}$. $V_p = 20 \text{ kV}$

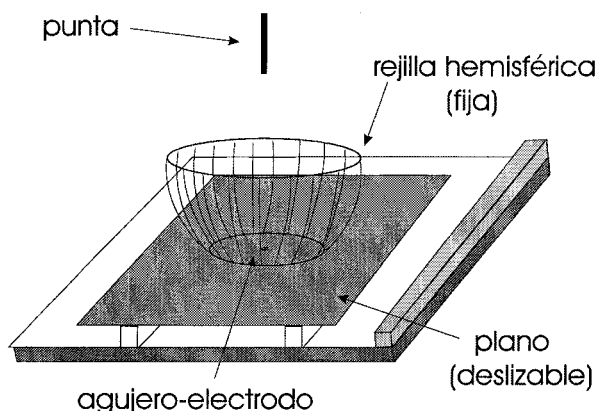


Figura 2.22: En la figura vemos cómo es colocada la rejilla hemisférica sobre el plano deslizable.

distribución obtenida para el caso punta-plano la corrección obtenida es poco apreciable, aunque es algo más aplanada en el centro.

2.3.8. Medidas de la distribución de corriente corona con varias puntas

En una configuración análoga a la del apartado 2.3.4 se hicieron algunas series de medidas con cuatro puntas inyectoras en lugar de una, separadas una distancia c . Esta configuración puede tener interés en el caso de que se necesite una mayor área de barrido de la corriente corona y con una distribución más homogénea. Los resultados pueden

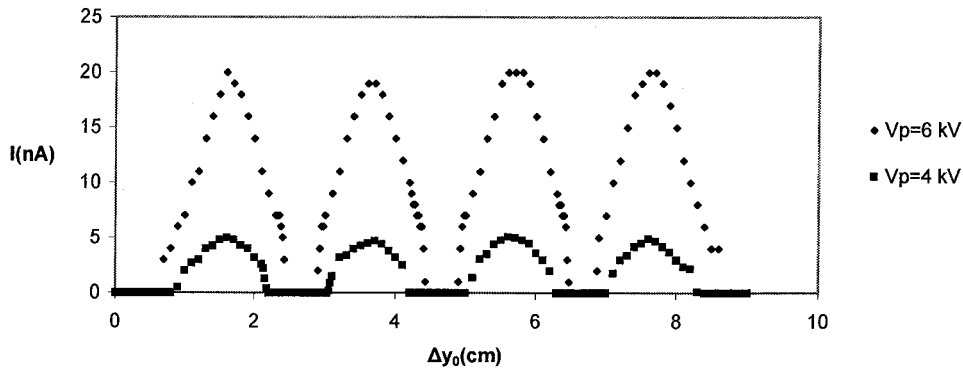


Figura 2.23: Medidas de la distribución de corriente corona, de polaridad positiva, con varias puntas enfrentadas a un plano. La zona libre de inyección es más ancha para menores potenciales en las puntas inyectoras.

apreciarse en la figura 2.23, donde se nota una estrecha zona en la que la corriente corona está ausente. El centro de cada una de estas estrechas bandas coincide con el punto medio entre dos puntas inyectoras. Su existencia se debe a la repulsión electrostática mutua entre las nubes de carga provenientes de cada punta (fig. 2.24). Este efecto es proporcionalmente mayor para menores voltajes aplicados en la punta, tendencia que puede apreciarse en la mayor anchura de la banda sin corriente corona en la figura 2.23. Una interesante aplicación de esta configuración de varias puntas enfrentadas a un plano es que el área de la placa metálica que recibe la corriente corona es mayor a la vez que dicha región tiene en promedio una distribución más regular que en el caso de una sola punta. Esto es visible pues la anchura de la distribución a la mitad del máximo de la distribución es mayor con varias puntas que en el caso de una sola punta. Esta regularidad se hace mayor a medida que la relación c/p se hace menor. Sería lógico pues pensar que una distribución regular de muchas puntas muy juntas tiende a tener una distribución corona más homogénea, respecto a la configuración simple punta-plano, aunque hay que tener en cuenta que el umbral corona aumenta al disminuir c (Atten, 1996).

2.4. Configuración triodo

2.4.1. Medidas de la corriente corona

La configuración triodo presenta una serie de ventajas respecto al montaje punta-plano pues el uso de la rejilla permite fijar el potencial en un plano paralelo (el de la rejilla) al electrodo colector y controlar

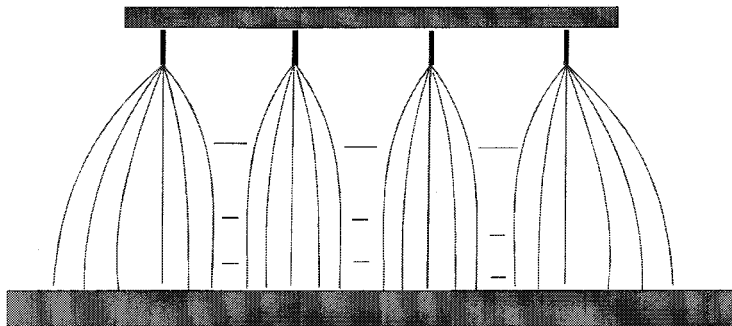


Figura 2.24: La zona libre de inyección es consecuencia de la interrepulsión de las nubes iónicas de cada punta inyectora.

separadamente la corriente corona y el campo eléctrico aplicado. Esto puede apreciarse en las curvas de corriente corona típicas de esta configuración para valores constantes del potencial de la punta y variando el potencial de la rejilla V_r (fig. 2.25). A potencial de rejilla cero $V_r = 0$ la corriente corona desde la punta no llega al electrodo plano, también conectado a tierra, pues en la región entre la rejilla y el plano el campo eléctrico es nulo. En realidad una pequeña fracción de corriente puede pasar, debido al efecto del viento corona, como está recogido en los trabajos de Giacometti y Carvalho (1990) y Oliveira y Leal (1985), quienes midieron este efecto. En sus experimentos comprobaron que para tener efectivamente una corriente nula era necesario aplicar un pequeño potencial negativo V_{ro} (si la polaridad del potencial aplicado en la punta, y por tanto de la descarga corona, es positiva) en la rejilla, suficiente para eliminar esta corriente residual. Las medidas realizadas en nuestro laboratorio confirmaron este punto, estando el valor V_{ro} en torno a los 10-50 V, para corrientes corona generadas en la punta del orden de $5 \mu A$.

En el trabajo de Oliveira y Leal (1985) se comprobó también que en el montaje triodo, independientemente de la polaridad de la descarga corona, existe un rango en el que se cumplen las condiciones del régimen de inyección fuerte *CLCE*, pues la dependencia de la corriente medida con la distancia rejilla-plano, a potencial de rejilla constante, es de la forma $I \propto h^{-3}$ (siendo h la distancia rejilla-plano) y la de la corriente con el voltaje aplicado a la rejilla es de la forma $I \propto V_r^2$. No obstante se observa una desviación de este comportamiento para valores del potencial de la rejilla lo bastante elevados aunque dicho comportamiento siempre puede retrasarse a valores cada vez más elevados de V_r simplemente aumentando la inyección de carga, o sea, el potencial en la punta V_p . Todo esto es observable en la figura 2.25 donde el comportamiento

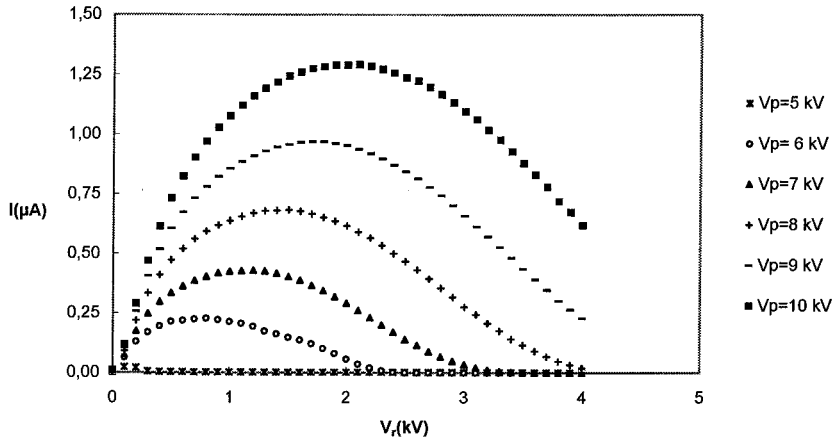


Figura 2.25: Medidas de la corriente corona, de polaridad positiva, en una configuración triodo para distintos potenciales fijos de la punta. Distancia punta-rejilla: $p - h = 3,0 \text{ cm}$, distancia rejilla-plano $h = 0,5 \text{ cm}$. En todas las medidas de este apartado, el área del electrodo plano es: $A_e = 1,96 \times 10^{-3} \text{ m}^2$.

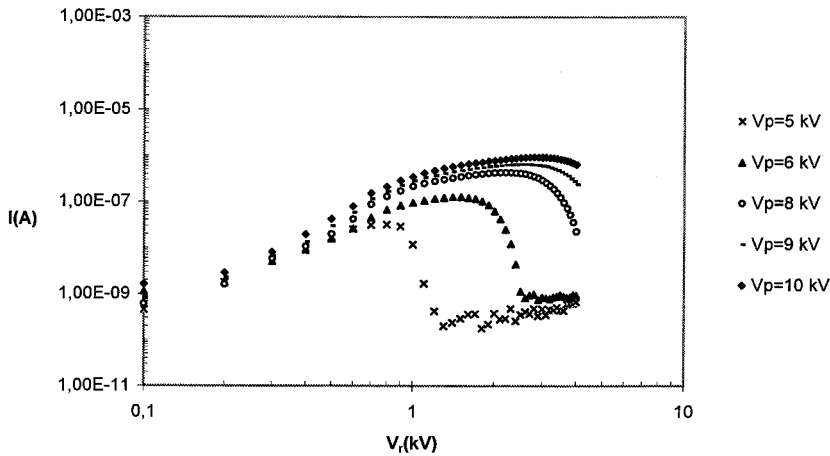


Figura 2.26: Medidas de la corriente corona, de polaridad positiva frente al potencial de la rejilla, en escala logarítmica, para distintos potenciales fijos de la punta y en presencia de una capa de aceite de $2,25 \text{ ml}$ de volumen (lo que equivale en este caso a una anchura $d = 1,15 \text{ mm}$). Distancia punta-rejilla: $p - h = 3,0 \text{ cm}$, distancia rejilla-plano $h = 0,5 \text{ cm}$.

$I(V_r)$ es creciente en un rango de V_r cada vez mayor pues a mayor V_p más alto es el valor de V_r para el cual la corriente es máxima. Este efecto puede verse también, quizá más claramente, en las medidas presentadas en escala logarítmica en la figura 2.26, donde el comportamiento de I frente a V_r es una recta, de pendiente aproximadamente 2, para valores cada vez más altos de V_r si se incrementa el potencial en la punta V_p .

Otro factor que favorece el régimen de inyección fuerte es la presen-

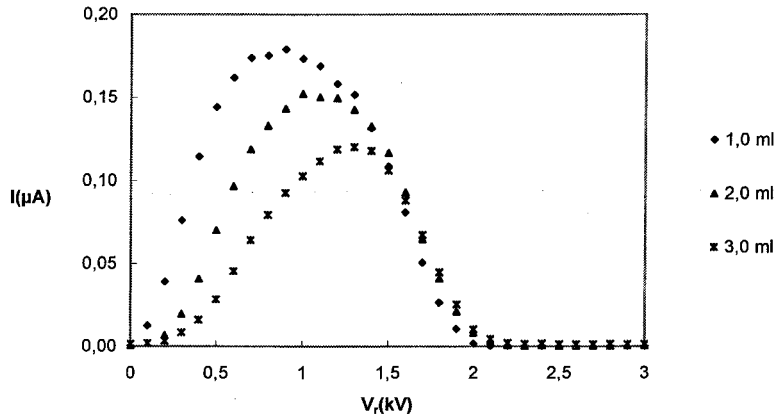


Figura 2.27: Medidas de la corriente corona, de polaridad positiva, en una configuración triodo para distintos volúmenes de aceite de silicona. Potencial en la punta: $V_p = 6,0 \text{ kV}$, distancia punta-rejilla: $p - h = 3,0 \text{ cm}$, distancia rejilla-plano $h = 0,5 \text{ cm}$.

cia de los líquidos poco conductores usados, lo cual es lógico visto el comportamiento aislante que tienen. En efecto, el máximo de corriente se alcanza para tensiones de rejilla más altas cuanto mayor es el volumen de líquido, como puede apreciarse en la figura 2.27 donde se representa la corriente corona medida para distintos volúmenes de aceite de silicona. También puede apreciarse que, al igual que en la configuración punta-plano, el líquido disminuye la corriente. Esto está en concordancia con el modelo del inyector autónomo. Respecto a este punto debe tenerse en cuenta que la presencia de las inestabilidades electrohidrodinámicas en líquidos poco conductores hace que las expresiones estáticas de la conducción en sistemas sometidos a inyección no sean válidas a partir del umbral de las inestabilidades. Pero de lo comentado anteriormente puede concluirse que el sistema triodo se encuentra en régimen de *CLCE* si la tensión de la punta es lo bastante elevada (Giacometti y Carvalho, 1990), siendo la longitud característica de la inyección fuerte la distancia rejilla-plano h .

2.4.2. Campo eléctrico en plano-rejilla-plano

Aunque el triodo se usa como configuración experimental en parte porque el campo eléctrico generado por un sistema de electrodos paralelos rejilla-plano es aproximadamente unidimensional (esto es, perpendicular a ambos electrodos), esto no es rigurosamente cierto, sobre todo cerca de la rejilla. En este sentido, una solución mucho más aproximada del campo eléctrico sin distribución de carga espacial puede ser aborda-

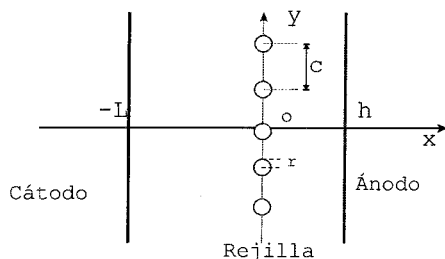


Figura 2.28: Sistema plano-rejilla-plano. La rejilla es una red de hilos paralelos.

da de una manera relativamente sencilla, en el caso de una rejilla de hilos paralelos, mediante el método de transformación conforme. Este método usa una función compleja ζ de la variable compleja $z = x + iy$. Las partes real $u(x, y)$ e imaginaria $v(x, y)$ son tales que las curvas $u = cte$ y $v = cte$ describen dos conjuntos de líneas ortogonales entre sí y además ambas funciones u y v satisfacen la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$, pues cumplen las relaciones de Cauchy-Riemann. Así pues, con la transformación conforme, si la parte real describe el potencial, automáticamente la parte imaginaria proporciona el campo eléctrico. El modelo utilizado es desarrollado a partir del sugerido en el libro de Durand (1966) (260-263). La transformación conforme se hace a partir de la correspondiente a un semiplano complejo infinito en una banda infinita en la dirección X (eje real) de anchura a (la mitad de la distancia c entre dos hilos) en la dirección Y (eje imaginario), que es de la forma $\zeta/r = \exp(2\pi z/c)$, siendo r y c constantes. En esta geometría las líneas ortogonales a una línea (un hilo) de radio r vienen dadas por el potencial complejo $w = \lg(\zeta - r) = u + iv$ siendo ζ la variable distancia al centro del hilo y ahora u y v se refieren a las partes real e imaginaria de w . De esta forma, al separar las partes real e imaginaria (u, v) de esta transformación tenemos las líneas de potencial (parte real) y de campo (parte imaginaria) generadas por una línea (hilo) equipotencial:

$$u(x, y) = \log \left[\left(\exp \frac{4\pi x}{c} \right) - 2 \left(\exp \frac{2\pi x}{c} \right) \left(\cos \frac{2\pi y}{c} \right) + 1 \right] \quad (2.16)$$

$$v(x, y) = 2 \arctan \left[\frac{\text{sen} \left(2\pi \frac{y}{c} \right) \exp \left(\frac{2\pi x}{c} \right)}{\cos \left(2\pi \frac{y}{c} \right) \exp \left(\frac{2\pi x}{c} \right) - 1} \right] \quad (2.17)$$

* Nota: en la expresión (2.17) del libro de Durand (1966) falta el factor 2, que aquí sí se ha puesto.

Esta transformación es aplicable a una configuración de tres electrodos planos siendo el intermedio una rejilla de hilos paralelos (ver figura 2.28), de manera que el potencial eléctrico en este sistema es de la forma:

$$\phi(x, y) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}u(x, y) + \frac{\mu}{\epsilon_0}x + V_0 \quad (2.18)$$

donde las constantes λ , μ , V_0 vienen dadas por los potenciales eléctricos aplicados en los tres electrodos:

$$V_r = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi r}{c} \right) \right] + V_0 \quad x = 0, y = \pm r \quad (2.19)$$

$$0 = -\frac{\lambda h}{c\epsilon_0} + V_0 + \frac{\mu}{\epsilon_0}h \quad x = h \quad (2.20)$$

$$V_p = -\frac{\mu L}{\epsilon_0} \quad x = -L \quad (2.21)$$

de esta forma, el potencial eléctrico es la siguiente función:

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & -\Lambda (4\pi h(V_r - V_p)x + c(LV_r + h(V_r - V_p))u(x, y)) \\ & + \Lambda \left(cV_p(h - x) \log \left[4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{p\pi}{c} \right) \right] - 4\pi hV_rL \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

siendo $\Lambda = -4\pi L + c(h + L) \log(4 \operatorname{sen}^2(r\pi/c))$.

Por la forma en que se ha construido el potencial, la expresión sólo es exacta si la distancia rejilla-plano es lo suficientemente grande frente a la semidistancia entre hilos ($h \gg c/2$): esto es lógico si se piensa que el semiplano infinito es transformado en una banda infinita, equipotencial en planos $x = cte \gg a$. La figura 2.29 representa las líneas equipotenciales obtenidas con esta función. El gráfico está centrado en el plano de la rejilla $x = 0$ y en él pueden apreciarse los hilos de la rejilla como fuentes de potencial, y cómo estas líneas de potencial rápidamente tienden a ser planos $x = cte$, por lo que el campo generado por esta configuración es prácticamente perpendicular a los electrodos, salvo muy cerca de la rejilla. El campo es además constante entre la rejilla y el plano, dado el equiespaciado de las líneas de potencial en la región $x > 0$.

Construido el potencial podemos estudiar cómo afecta a la capacidad del condensador que forma la rejilla frente al plano a tierra, teniendo en cuenta que la densidad superficial de carga es $|\sigma_s| = -\epsilon_0(\partial V/\partial x)_{x=h}$,

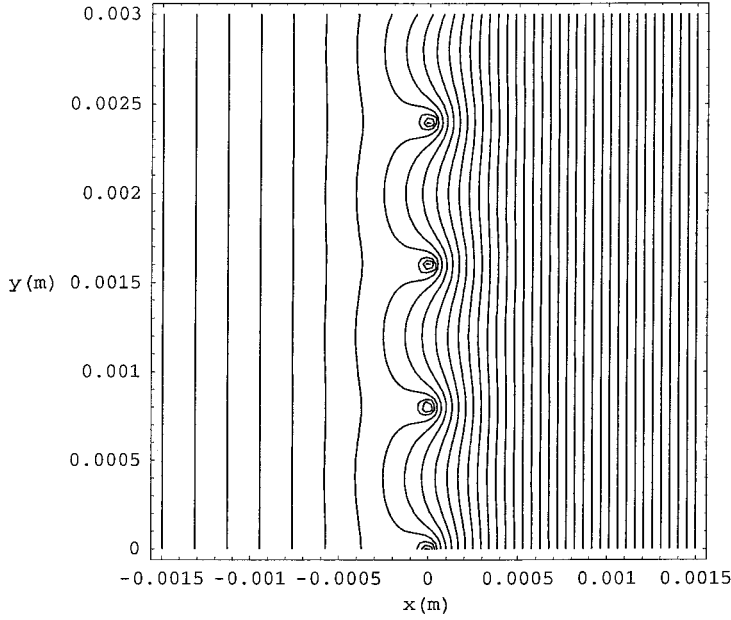


Figura 2.29: Curvas equipotenciales en el sistema plano-rejilla-plano en una sección perpendicular a la rejilla de hilos paralelos. El medio dieléctrico es el aire. $r = 0,02 \text{ mm}$, $c = 0,8 \text{ mm}$, $L = 3,0 \text{ cm}$, $h = 0,5 \text{ cm}$. Potencial aplicado en el plano $y = -L$: $V_p = 10,0 \text{ kV}$. Potencial aplicado a la rejilla: $V_r = 4,0 \text{ kV}$.

la variación de la capacidad del condensador ΔC respecto a la correspondiente a un condensador plano C sería:

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{1}{\frac{4\pi h}{c \log[2(1 - \cos \frac{2\pi r}{c})]} - 1} = \frac{1}{\mathcal{K} - 1} \quad (2.23)$$

De esta relación se deduce que la relación óptima radio/espaciado de hilos de la rejilla para que la capacidad no se vea afectada respecto al condensador plano es $r/c = 1/6$ pues en ese caso $\mathcal{K} = -\infty$ y por tanto $\Delta C/C = 0$. El caso opuesto $\Delta C/C = \infty$ se daría en el supuesto $\mathcal{K} = 1$, que sólo se daría si $\log[2(1 - \cos(2\pi r/c))] = 4\pi h/c \gg 1$ lo cual no es posible pues el valor máximo de $\log[2(1 - \cos(2\pi r/c))]$ es $\log 4 \sim 1,4$. ΔC es positivo cuando $r/c > 1/6$, es decir, para hilos lo bastante gruesos respecto al espacio que los separa. De esta forma, si aumentamos la relación r/c (hilos cada vez más gruesos) ΔC aumenta hasta llegar a un máximo del orden de $(3\pi h/c)^{-1}$, que puede estar en torno a $1/100$. Sin embargo, si el hilo es lo bastante fino, de manera que $r/c < 1/6$ entonces $\Delta C < 0$ y su valor absoluto aumenta hasta alcanzar un máximo igual a la capacidad del condensador $|\Delta C| = C$, de forma que la capacidad del triodo $C_t = 0$ para $r = 0$. No obstante,

la tendencia hacia este punto es logarítmica y por tanto muy lenta de manera que ΔC se mantiene razonablemente pequeño por ejemplo para $r/c \sim 1/40$, que da un valor de $|\Delta C| \sim c/(\pi h) \sim 1/30$. De todo esto se concluye que la capacidad presenta un valor similar al caso del condensador plano si la relación h/c es lo bastante grande a menos que los hilos sean muy finos ($r/c \ll 2\pi$). En concreto, en nuestro montaje en el laboratorio tenemos que $r/c \sim 1/5$ y $c/h \sim 1/10$, por lo que la capacidad de nuestro condensador rejilla-plano puede considerarse igual a la del caso plano-plano.

Hay que recalcar que estos resultados son aplicables al caso de una rejilla formada por hilos paralelos, mientras que en el montaje experimental la rejilla utilizada tiene una malla cuadrada.

2.4.3. Paso de la corriente corona a través de la rejilla

El modelo de la rejilla no es aplicable al caso en que exista un inyección de carga pues la transformación conforme sólo es aplicable al caso en que se cumpla la ecuación de Laplace. No obstante puede aproximarse por un modelo de tres electrodos planos suponiendo que la corriente que pasa a través de la rejilla es proporcional a un factor llamado transparencia eléctrica, el cual depende de las propiedades de la rejilla (relación entre el grosor de los hilos y la separación entre ellos) y de la tensión aplicada en ella. Un primer modelo aproximado que tenga en cuenta la inyección en un sistema triodo puede hacerse con un modelo similar al estudiado en 1.6.2 pero en el que tenemos tres electrodos planos, en $z = -L$, $z = 0$ y $z = d$ siendo el intermedio la rejilla (sistema plano-rejilla-plano).

Las ecuaciones eléctricas para el estado estacionario, en variables adimensionales (adimensionalización análoga a la del apartado 1.6.2 y con V_p como potencial de referencia), son :

$$\frac{dE_i}{dz} = q_i = \frac{j_i}{E_i} \quad i = 1, 2 \quad (2.24)$$

donde 1 representa la región por encima de la rejilla y 2 la región por debajo de ella. Tenemos las condiciones de contorno:

$$q(-L) = C \quad \phi_1(-L) = 1 \quad \phi_{1,2}(0) = V_r \quad \phi_2(d) = 0 \quad (2.25)$$

Si tenemos en cuenta que sólo una fracción de la corriente pasa a través de la rejilla tenemos además la siguiente condición:

$$j_2(0) = \beta(V_r)j_1(0) \quad (2.26)$$

donde $\beta(V_r)$ es la transparencia eléctrica de la rejilla, que depende de la forma de la rejilla así como del potencial aplicado a la misma. Con lo cual la ecuación para la corriente por encima de la rejilla es:

$$1 - V_r = \sqrt{\frac{8}{9}j} \left[\left(\frac{j_1}{2C^2} + L \right)^{3/2} - \left(\frac{j_1}{2C^2} \right)^{3/2} \right] \quad (2.27)$$

Por lo que en el caso de inyección fuerte tendremos:

$$j_1 = \frac{9(1 - V_r)^2}{8L^3} \quad (2.28)$$

$$j_2 = \beta(V_r) \frac{9(1 - V_r)^2}{8L^3} \quad (2.29)$$

La función $\beta(V_r)$ es la que proporciona la corriente que llega al plano $z = h$. Si se ignora la carga espacial en la región cercana a la rejilla dicha función podría obtenerse calculando la relación entre el flujo eléctrico por debajo de la rejilla y por encima de ella, a partir de la expresión del potencial de la ec. (2.22). Sin embargo, este método es algo dudoso pues si de hecho el triodo se halla en régimen de inyección fuerte es porque la densidad de carga espacial en el plano de la rejilla, como hemos visto en las medidas de la corriente corona en el triodo, es significativa. Las curvas teóricas que se obtienen usando este método presentan unos picos (consecuencia de una discontinuidad en la derivada de la solución del campo).

No obstante, puede obtenerse una descripción cualitativa de las curvas de corriente corona en el triodo, que es útil a la hora de interpretar resultados experimentales. Las curvas del tipo de la figura 2.25 pueden explicarse analizando las líneas de flujo del modelo de la rejilla de hilos paralelos del apartado anterior. Si mantenemos constante el potencial de la punta (el electrodo en $x = -L$ en el modelo teórico) y vamos aumentando el potencial en la rejilla tendremos una primera región en la que parte del flujo eléctrico proveniente de la punta es absorbido por la rejilla y no llega al electrodo a tierra en $x = d$ (fig. 2.30).

Si se sigue aumentando el potencial V_r de la rejilla la fracción de flujo que consigue atravesar la rejilla va aumentando hasta que para un valor determinado V_r^m todo el flujo desde el electrodo en $x = -L$ llega al plano $x = d$ (fig. 2.31). Este punto se correspondería con el máximo de las curvas de corriente del triodo 2.25, con lo que queda descrita

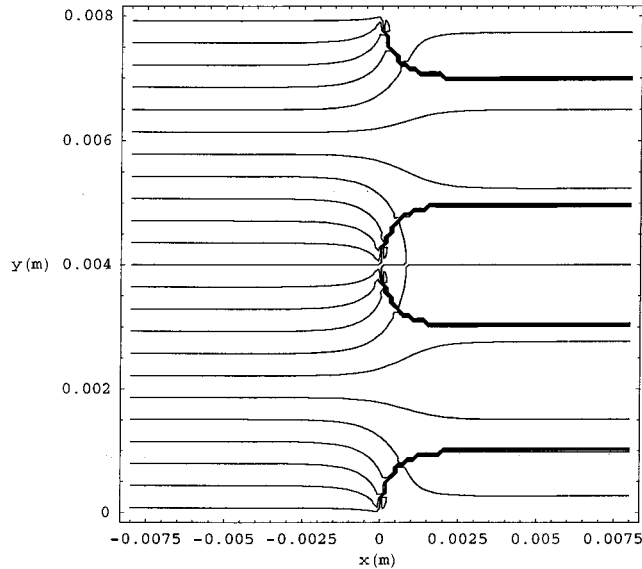


Figura 2.30: Líneas de flujo en el sistema plano-rejilla-plano en una sección perpendicular a la rejilla de hilos paralelos. $r = 1 \text{ mm}$, $c = 4 \text{ mm}$, $L = 3,0 \text{ cm}$, $h = 0,5 \text{ cm}$. Potencial aplicado en el plano $y = -L$: $V_p = 10,0 \text{ kV}$. Potencial aplicado a la rejilla: $V_r = 0,5 \text{ kV}$.

cualitativamente la primera parte de dicha curva (que es creciente con V_r). Aunque según el modelo si seguimos aumentando V_r el flujo no disminuye, la parte decreciente de la curva de corriente del triodo se explica porque la diferencia de potencial entre la punta y la rejilla al decrecer hace que la corriente corona producida en el electrodo inyector sea cada vez menor. De hecho, de la ec. (2.28), la densidad de corriente j_1 es proporcional a $(1 - V_r)^2$.

Puede verse en la figura 2.31 además que la sección de las líneas de campo que atraviesan la rejilla es más delgada en el caso de potencial de rejilla alto, estando concentradas todas estas líneas justo en el punto medio entre hilos. Por lo que la corriente corona que llega al líquido, cuando de él se dispone, está concentrada exclusivamente en el centro de los cuadrados de la rejilla. Este caso se corresponde con la parte decreciente de la curva de la figura 2.25. Por contra, para potenciales de rejilla más bajos las líneas que pasan la rejilla se reparten en una sección más ancha, siendo así más uniforme su concentración con lo que es de esperar que en la parte creciente de I frente a V_r , en una curva del tipo de la figura 2.25, la distribución de corriente corona sea más uniforme.

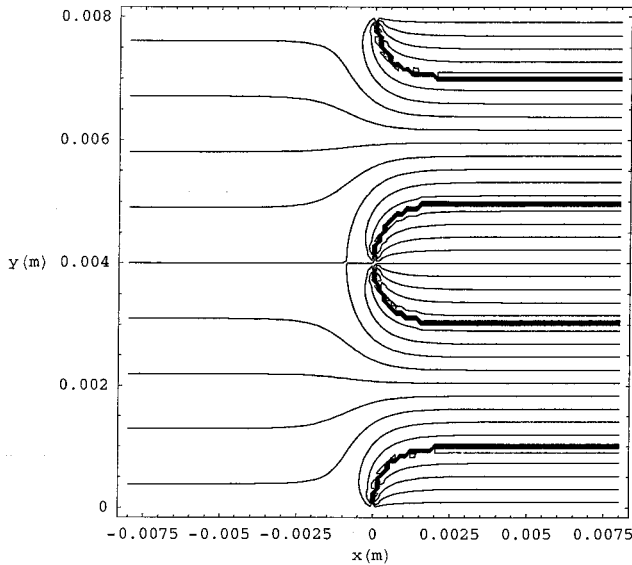


Figura 2.31: Líneas de flujo en el sistema plano-rejilla-plano en una sección perpendicular a la rejilla de hilos paralelos. $r = 1 \text{ mm}$, $c = 4 \text{ mm}$, $L = 3,0 \text{ cm}$, $h = 0,5 \text{ cm}$. Potencial aplicado en el plano $y = -L$: $V_p = 10,0 \text{ kV}$. Potencial aplicado a la rejilla: $V_r = 4,0 \text{ kV}$.

2.4.4. Medidas de la distribución de corriente corona

Otro factor que no se tiene en cuenta en el modelo teórico de la rejilla es que, en realidad, el inyector en nuestro montaje experimental no es un plano sino una delgada punta metálica, de lo que inmediatamente se sigue que la distribución de corriente que llegará a la rejilla no es uniforme, como vimos en el apartado 2.3.4 correspondiente a las medidas de la distribución corona en punta-plano. En consecuencia, tampoco es de esperar que la corriente sea uniforme bajo la rejilla, aunque puede haber una corrección a dicha no uniformidad en ciertas condiciones, para pequeños potenciales de la rejilla (Giacometti, 1987) y también si la relación entre las distancias punta-rejilla y rejilla-plano es la adecuada, como veremos en los resultados de las siguientes series de medidas de distribución de corriente corona en triodo. Las colas de las curvas de distribución que se obtienen con el triodo son menos extendidas y a su vez la distribución es más plana por el centro. Una de las series de medidas tomadas puede verse en la figura 2.32. El que las colas de la distribución estén menos extendidas es interpretable porque las líneas de campo que salen de la rejilla hacen que los iones no continúen desviándose cuando van acercándose a la misma. La distribución de

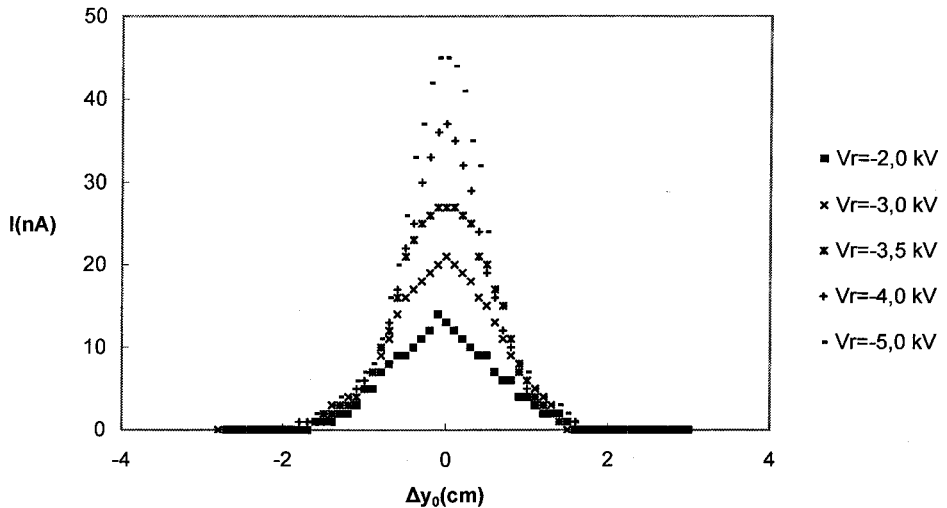


Figura 2.32: Curvas de distribución de corriente corona en una configuración triodo. Distancia rejilla-plano: $h = 0,5 \text{ cm}$, distancia punta-plano: $p = 1,5 \text{ cm}$. $V_p - V_r = 10 \text{ kV}$.

corriente corona en un triodo es algo más uniforme pues la anchura de la distribución a la mitad del valor máximo de la misma es mayor (el valor máximo es la corriente medida bajo el eje de la punta, I_0). Este efecto homogeneizador de la rejilla es mayor cuanto mayor es la distancia rejilla-plano frente a la distancia punta-rejilla (fig. 2.33) y cuanto menor es el potencial (fig. 2.32). Aparte, el área cubierta por la distribución es mayor en comparación con el caso punta-plano si se considera como electrodo de referencia la rejilla. Que la anchura de la distribución en $I = I_0/2$ incremente con la distancia rejilla-plano es también lógico teniendo en cuenta que la trayectoria de un ión bajo el campo regular impuesto por la rejilla se hace mayor. En definitiva, de estas medidas puede concluirse que hay una mayor homogeneidad para la distribución corona en un triodo y que dicha homogeneidad puede mejorarse con una configuración adecuada de las distancias punta-plano-rejilla y de los potenciales aplicados en la punta y la rejilla, de forma que puede llegar a obtenerse una región de cierta anchura, bajo la rejilla, en la que la distribución es bastante homogénea.

2.4.5. Estimación del potencial eléctrico en la superficie del líquido

Como hemos visto, en una configuración triodo la corriente eléctrica que llega al electrodo plano y atraviesa la capa de líquido viene deter-

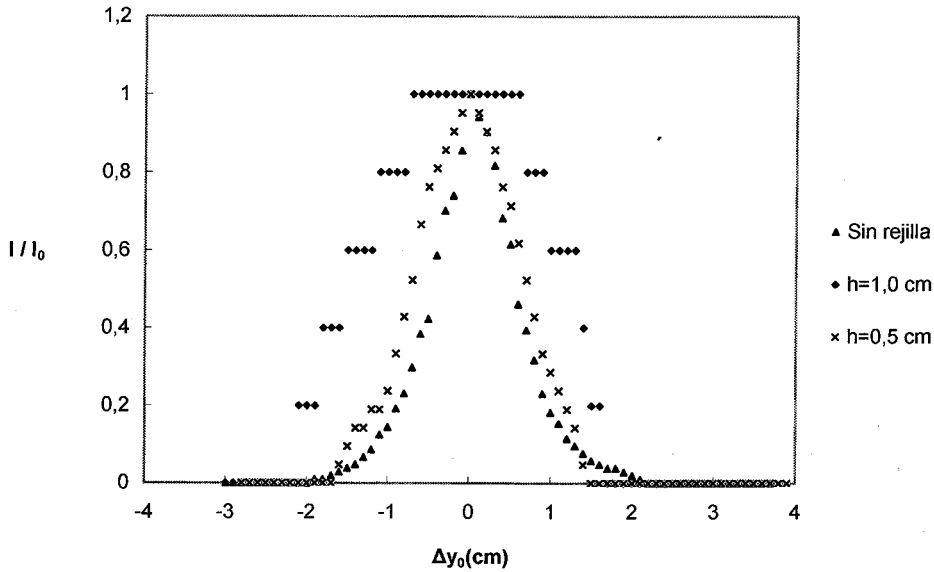


Figura 2.33: Curvas de distribución de corriente en un triodo ($p-h = 1,0$ cm, $V_p - V_r = 10$ kV, $V_r = -3$ kV), comparadas con la del caso punta-plano ($p = 1,0$ cm, $V_p = -10$ kV). Las curvas están normalizadas con el valor máximo correspondiente a cada una de ellas. La anchura en $I = I_0/2$ es un indicador del nivel de regularidad de la distribución.

minada por el potencial eléctrico aplicado en la rejilla y la densidad de carga suministrada desde la punta metálica, o lo que es lo mismo, por la corriente corona que llega desde la punta a la rejilla. Esta corriente corona puede suponerse constante si en la configuración triodo se mantiene constante la diferencia de potencial $V_p - V_r$. En ese caso, la corriente que llega al líquido se controla mediante la diferencia de potencial aplicada en la región rejilla-plano, lo cual sirve para estimar el potencial eléctrico en la superficie del líquido. En este apartado se presentan dichas medidas, que se han hecho de la siguiente forma: en la configuración triodo se sube el potencial de la rejilla V_r al mismo tiempo que el potencial en la punta V_p de manera que $V_p - V_r$ se mantiene constante.

Se toma una serie de medidas de la corriente que llega al electrodo plano sin el líquido y luego con el líquido de forma que la superficie del mismo queda a la misma distancia que el plano en la serie de medidas anterior. Esta nivelación se consigue poniendo en el caso sin líquido una capa de agua de igual anchura a la correspondiente en el caso con líquido. Al agua se le añade una gota de jabón para evitar efectos de capilaridad y que la superficie quede así perfectamente plana. Por otra parte, la elevada conductividad del agua asegura que no aparezcan inestabilidades en la misma dentro del rango de potenciales usado (de esto hablaremos

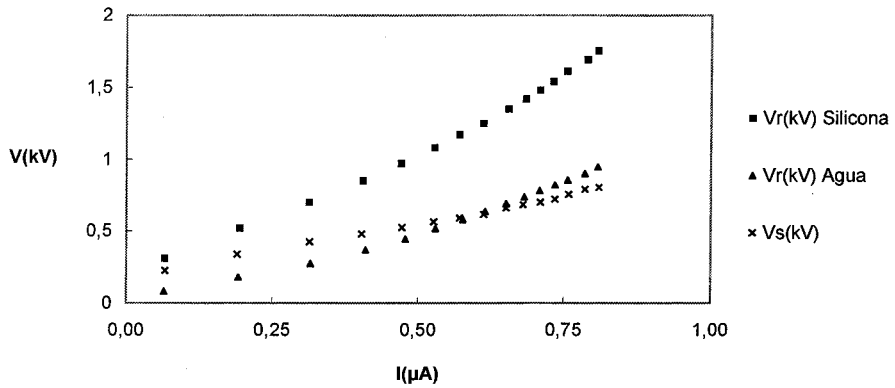


Figura 2.34: Medida del potencial en la superficie de una capa de aceite de silicona de x mm de espesor. Distancia rejilla-plano $h = 0,5$, $p=2,0$ cm, volumen de silicona: $1,25$ ml, $V_p - V_r = 8,0$ kV

más en detalle en los siguientes capítulos) y que el subsistema capa de agua-electrodo se comporte como un solo electrodo plano. De esta forma, en los puntos de igual corriente medida en ambas series se cumple que $V_{r1} = V_{r2} - V_s$, donde V_{r1} es el potencial aplicado en la rejilla en la serie de medidas sin líquido, V_{r2} es el potencial aplicado en la rejilla en la serie de medidas con líquido y V_s es el potencial en la superficie del líquido. En la figura 2.34 puede verse el resultado correspondiente al caso del aceite de silicona. Según estas medidas la caída de potencial a través de la capa del líquido es significativa frente al potencial aplicado en la rejilla, por lo que en el problema de la estabilidad de la superficie habría que tenerla en cuenta, confirmándose así el carácter aislante de los líquidos utilizados. En el trabajo de Giacometti y Carvalho (1990) se realizaron medidas del potencial en la superficie de un dieléctrico sólido en un triodo, aunque en ese trabajo las medidas son más rigurosas al mantenerse de forma precisa la corriente corona constante (lo cual aquí se ha simplificado manteniendo $V_p - V_r$ constante).

2.5. Resumen

En este capítulo se ha explicado cómo la descarga corona es aplicable como método experimental para inducir inyección fuerte de carga espacial unipolar sobre el sistema experimental. Se han descrito los montajes básicos: punta-plano y triodo, además de las modificaciones a éstos para poder medir las distribuciones de corriente. Las curvas de corriente no muestran diferencias significativas en los dos tipos de régimen de conducción. Las medidas de distribución de corriente corona muestran

claramente la no homogeneidad del campo y la descarga generados por la punta, siendo ésta menor en una configuración triodo adecuada. Por otra parte, un sistema de varias puntas inyectoras permite cubrir una amplia área con una distribución corona más homogénea que con una sola punta. En el caso sin inyección, también se ha visto con las expresiones del campo eléctrico que éste es mucho más homogéneo en el triodo. Las medidas de corriente corona y del potencial en la superficie del líquido muestran a su vez el carácter aislante de los líquidos utilizados, tanto en régimen no-ohmico como en régimen ohmico. Como hemos visto, en el rango creciente de las curvas de corriente del triodo, el sistema se encuentra en régimen de inyección fuerte, si el potencial aplicado en la punta es lo bastante alto, siendo sus magnitudes características el potencial aplicado en la rejilla V_r y la distancia rejilla-plano h .

Capítulo 3

Medidas de las inestabilidades

3.1. Detección de la inestabilidad

En este capítulo se presentan una serie de medidas de los valores críticos en los que aparece la inestabilidad de superficie con la intención de responder a las cuestiones inmediatas que reflejan claramente la originalidad del Rosetón frente a las otras inestabilidades EHD del problema de un campo perpendicular. Veremos, además de cuándo aparece, cuáles son sus características y qué condiciones experimentales son necesarias para que aparezca. Enseguida veremos que la primera de estas condiciones es la existencia de una inyección fuerte de carga, producida con la descarga corona.

Analizamos los dos casos básicos del Rosetón según éste coexista o no con la inestabilidad de volumen:

- líquidos en régimen no-ohmico, en los que la densidad de carga espacial inyectada en el aire penetra induciendo fuerzas electrostáticas de volumen, causantes de la inestabilidad de volumen;
- y líquidos en régimen óhmico, en los que las fuerzas electrostáticas de volumen en el líquido están ausentes y por tanto también la inestabilidad de volumen.

3.2. Montaje experimental (electrodos transparentes)

El montaje experimental para las medidas de los valores umbrales de las inestabilidades se basa en los descritos en el capítulo anterior, con algunas modificaciones que han sido introducidas para obtener una

buena, y directa, visualización de la inestabilidad. En los montajes básicos descritos en el capítulo 2 no era posible ver perpendicularmente la superficie del líquido pues la presencia de la punta lo impedía. La visualización en el caso del triodo era aún peor pues la rejilla tapa el líquido por arriba. Este inconveniente es salvable con la siguiente modificación: se ha cambiado la pieza del electrodo colector por otra totalmente transparente, de plexiglas, en la que el electrodo plano metálico se ha sustituido por un electrodo de la misma forma pero transparente. Dicho electrodo transparente consiste en un cristal recubierto de una fina capa conductora de TiO_2 . La transparencia del electrodo permite visualizar el líquido desde debajo, pues los líquidos utilizados son transparentes también, con lo que se pueden tener muy buenas imágenes de la inestabilidad. Para ello se usa una cámara fotográfica o de video con un objetivo que permite aumentar la imagen. Dicha imagen es llevada hacia la lente mediante un espejo, cuando se usa la cámara fotográfica. Cuando se usa la cámara de video, la imagen se toma perpendicularmente desde abajo y no es necesario el uso del espejo. Las imágenes de video son tratadas digitalmente con un programa de que permite detectar los bordes de las celdas tomando previamente una imagen de referencia de la superficie líquida sin deformar. El líquido es iluminado desde arriba con luz difusa conseguida con una fuente de luz colocada sobre una hoja de papel blanco, por encima de la punta. El resto del material (fuentes de tensión, electrómetro,...) es el mismo que en las medidas del capítulo 2. El montaje completo puede verse en las figuras 3.1 y 3.2.

3.3. Resultados Experimentales

3.3.1. Medidas

Los puntos críticos fueron obtenidos tomando el voltaje en la primera deformación incipiente de la superficie del líquido. En el caso del montaje punta-plano la tensión en la punta V_p es la que sirve de referencia para este valor crítico. En este montaje se ha notado que el efecto del movimiento del aire sometido a descarga corona, el viento corona, puede perturbar la superficie del líquido produciendo ondas en su superficie por la interacción mecánica entre las partículas de aire en movimiento y la superficie del líquido. La única manera de limitar este efecto en el montaje punta-plano, es el uso de líquidos lo bastante viscosos, de forma que el esfuerzo tangencial del aire en movimiento no sea transmitido a la superficie del líquido: en efecto, se observó durante las

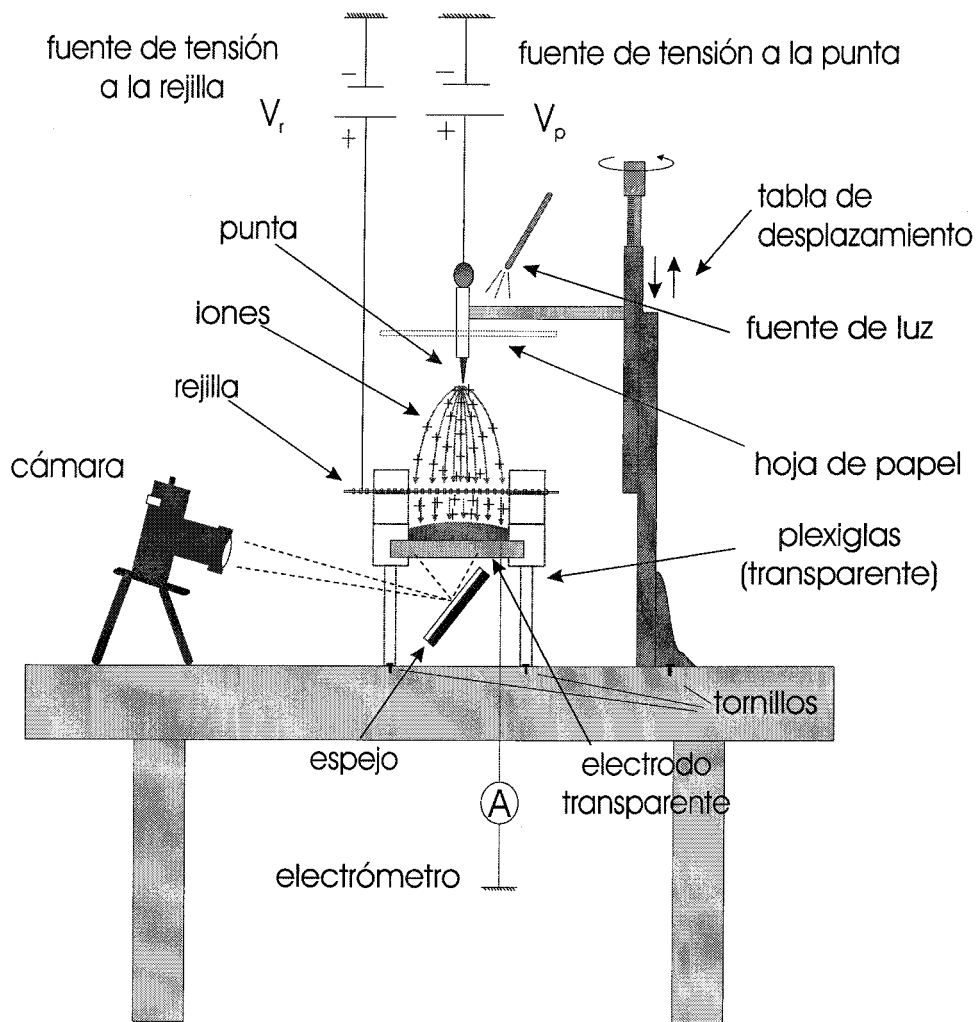


Figura 3.1: Configuración experimental triodo con electrodos transparentes, para la visualización de las inestabilidades.

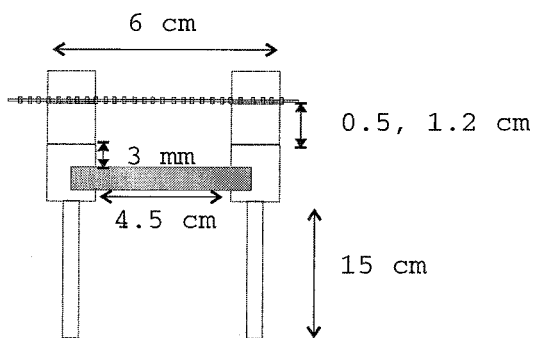


Figura 3.2: Dimensiones del triodo "transparente".

Cuadro 3.1: Valores críticos de la corriente para la inestabilidad de volumen en aceite de silicona (en régimen no-ohmico) en función del volumen de líquido (o d , el espesor de la capa de líquido). Configuración triodo. Distancia punta-rejilla: $p - h = 3,5 \text{ cm}$, distancia rejilla-plano: 0.8 cm .

$vol(ml)$	$I_c(\mu A)$	$I_c(A)d^3(m^3)$
0,3	0,262	$6,45 \cdot 10^{-19}$
0,4	0,108	$6,31 \cdot 10^{-19}$
0,5	0,058	$6,61 \cdot 10^{-19}$
0,6	0,033	$6,50 \cdot 10^{-19}$
0,7	0,020	$6,25 \cdot 10^{-19}$
0,8	0,013	$6,07 \cdot 10^{-19}$
0,9	0,010	$6,31 \cdot 10^{-19}$
1,0	0,007	$6,31 \cdot 10^{-19}$

medidas que la perturbación debida al viento corona es mucho mayor en líquidos poco viscosos como el agua o el alcohol metílico, por ejemplo, que en los aceites utilizados para la mayoría de los experimentos. En el caso de la configuración triodo, el viento corona es reducido en su mayor parte por la acción retentiva de la rejilla a un potencial V_r . Para tomar los valores críticos en el triodo (Vega y Pérez, 1999b) hemos dejado un potencial fijo en la punta y a continuación se ha subido la tensión aplicada en la rejilla hasta que se produce la inestabilidad, lo cual, dentro del rango de magnitudes que se han usado, ocurre siempre en la parte creciente de las curvas características de la corriente en el triodo, por lo que el régimen es aproximadamente el correspondiente a la inyección fuerte, siendo el potencial en la rejilla V_r y la distancia rejilla-cristal h el potencial y la distancia característicos correspondientes.

3.3.2. Inestabilidad de volumen

En el caso de un líquido en régimen no-ohmico existen dos valores críticos correspondientes a las dos inestabilidades posibles: la inestabilidad de volumen y el Rosetón. En una estimación preliminar vimos que en nuestros experimentos el único de los tres líquidos extensivamente utilizados que iba a manifestar un comportamiento no-ohmico era el aceite de silicona. Este hecho se ve confirmado porque la inestabilidad de volumen, predicha en la teoría sólo en medios aislantes (Atten y Moreau, 1972), ha sido observada únicamente en el aceite de silicona, estando ausente en los otros dos líquidos, más conductores que el prime-

ro. En la tabla 3.1 podemos ver el comportamiento de la inestabilidad de volumen en el líquido no-ohmico. La magnitud $I \cdot d^3$ (d es el espesor de la capa de líquido) es aproximadamente constante, lo que puede explicarse si tenemos en cuenta que el líquido está sometido al régimen de *CLCE*, con lo que la caída de potencial V_l a través de la capa de líquido es $V_l = \sqrt{8jd^3/9K_l\epsilon_l}$. Entonces, si la magnitud $I \cdot d^3$ tiende a ser constante para los valores críticos, también lo es V_l y por tanto tenemos así un valor del parámetro característico de esta inestabilidad, que es $T = \epsilon_l V_l / K_l \mu_l$ (Atten y Moreau, 1972; Koulova-Nenova y Atten, 1997), siendo μ_l la viscosidad dinámica del líquido. Con esto, el valor medio de T_c extraído de la tabla 3.1 es $T_c = 250$. Así pues los resultados y valores obtenidos en la tabla 3.1 son similares a los resultados para las medidas con el mismo líquido en la configuración punta-plano de Malraison y Atten (1991). No obstante, no es esperable una coincidencia con los valores predichos por la teoría, en torno a $T_c \sim 100$, según las condiciones de contorno (Atten y Moreau, 1972), pues en los experimentos con descarga corona es inevitable que la anchura de la capa de líquido se vea alterada (disminuida) por la presión eléctrica sobre su superficie, por lo que es lógico que los valores experimentales de T_c sean mayores, si la anchura efectiva de la capa de líquido es menor que la supuesta.

Por otra parte, la inestabilidad se detecta visualmente, lo cual es delicado teniendo en cuenta la pequeña longitud de onda de la inestabilidad, por lo que las medidas no son más que un límite superior para los valores críticos reales. El cambio en el comportamiento de las curvas de corriente, método utilizado en otros trabajos (Lacroix *et al.*, 1975; Watson *et al.*, 1970) para detectar experimentalmente la inestabilidad de volumen, no es utilizable para la interfase aire-líquido en nuestro montaje experimental, pues no tenemos una referencia del potencial en la superficie del líquido. Otro factor decisivo en la no concordancia con el criterio teórico es el hecho de que en la teoría la superficie del líquido es una equipotencial, lo cual no es cierto en la configuración experimental. Una discusión sobre este último punto puede encontrarse en el trabajo de Malraison y Atten (1991).

3.3.3. Inestabilidad Rosetón

Los valores críticos de V_c para la inestabilidad Rosetón se muestran para los tres aceites en las figuras 3.3, 3.4 y 3.5 para una serie de valores del potencial aplicado en la punta V_p y el volumen de líquido (o anchura d de la capa).

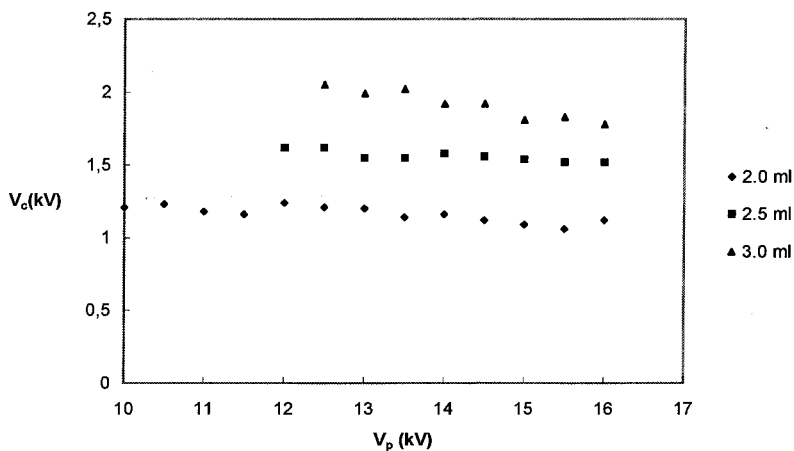


Figura 3.3: Valores críticos de la inestabilidad Rosetón an aceite de ricino (óhmico) para distintas anchuras de la capa de líquido. Configuración triodo. Los valores críticos son los correspondientes al voltaje en la rejilla, en función del voltaje en la punta V_p . $p - h = 2,5 \text{ cm}$, $h = 1,5 \text{ cm}$. En todas las medidas el área del electrodo $A_e = 1,59 \times 10^{-3} \text{ m}^2$.

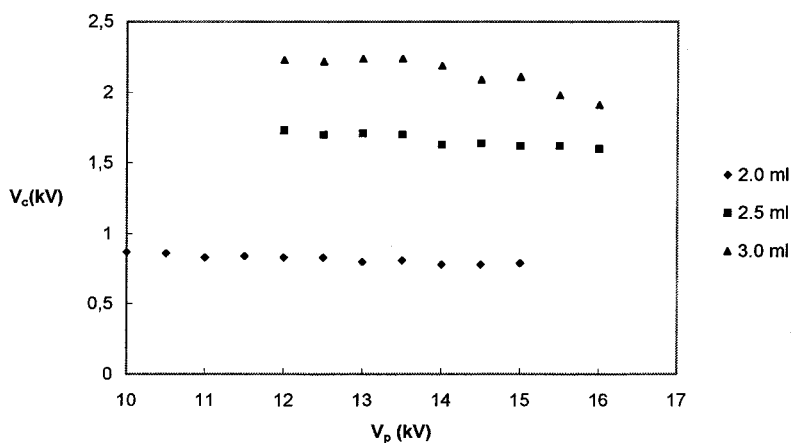


Figura 3.4: Valores críticos de la inestabilidad Rosetón an aceite de maíz (óhmico) para distintas anchuras de la capa de líquido. Configuración triodo. Los valores críticos son los correspondientes al voltaje en la rejilla, en función del voltaje en la punta V_p . $p - h = 2,5 \text{ cm}$, $h = 1,5 \text{ cm}$.

Los valores críticos muestran una tendencia a crecer al aumentar el volumen de líquido. Como puede observarse también existe una pequeña tendencia a la baja del potencial crítico V_c al aumentar el voltaje en la punta V_p , siendo esto último consecuencia del hecho de que la corriente aumente con el potencial de la punta. Dicha tendencia es pequeña para valores lo bastante altos del potencial en la punta V_p , como podía verse en la figura 2.26, de ahí la pequeña tendencia de V_c frente a V_p en las

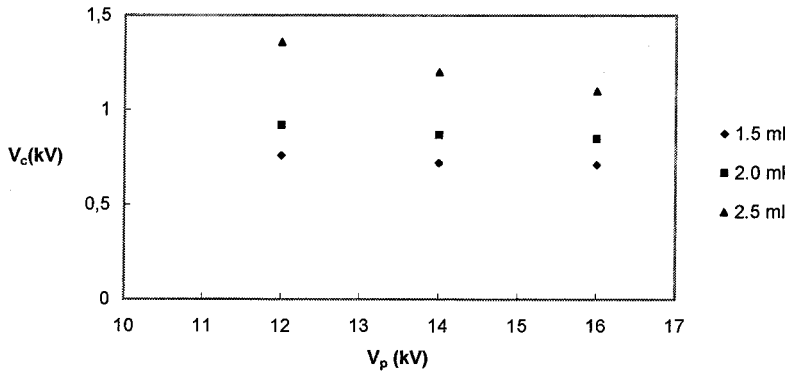


Figura 3.5: Valores críticos de la inestabilidad Rosetón an aceite de silicona (no-óhmico) para distintas anchuras de la capa de líquido. Configuración triodo. Los valores críticos son los correspondientes al voltaje en la rejilla, en función del voltaje en la punta V_p . $p - h = 2,5 \text{ cm}$, $h = 1,5 \text{ cm}$.

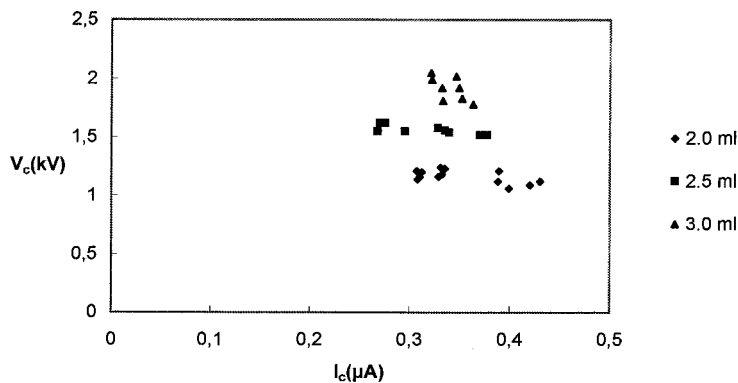


Figura 3.6: Los valores críticos, para el Rosetón, del potencial en la rejilla en función de la corriente eléctrica crítica. Líquido: aceite de ricino. $p - h = 2,5 \text{ cm}$, $h = 0,8 \text{ cm}$.

figuras 3.3-3.5.

Esta interpretación concuerda con la tendencia de los valores críticos correspondientes a los valores medidos de la corriente corona para los potenciales críticos. Como se muestra en las figuras 3.6 y 3.7, donde se representan los valores críticos del potencial en la rejilla V_c frente a los de la intensidad de corriente I_c . Además en estas últimas figuras se observa que los valores críticos de la corriente tienden a aumentar con el volumen de líquido, tendencia que es quizás más clara en el líquido en régimen no-óhmico. Las medidas de la corriente crítica tienen a mayor dispersión que las del potencial crítico debido a que la corriente eléctrica es muy sensible a una pequeña variación en el potencial crítico.

En las gráficas de valores críticos mostradas hasta ahora se observa

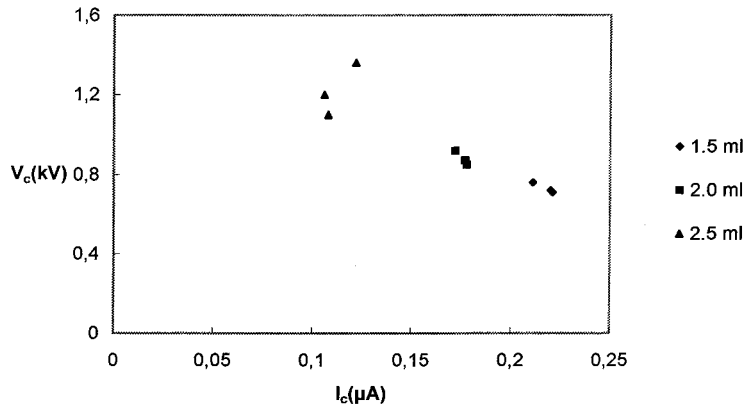


Figura 3.7: Los valores críticos, para el Rosetón, del potencial en la rejilla en función de la corriente eléctrica crítica. Líquido: aceite de silicona. $p - h = 2,5 \text{ cm}$, $h = 1,5 \text{ cm}$.

una analogía en el comportamiento del Rosetón en líquidos óhmicos y líquidos no-óhmicos. Dada la diferencia esencial que existe en el mecanismo de conducción quizá sería esperable al menos alguna peculiaridad de un caso respecto al otro. Esto no sólo ocurre así sino que además se produce una divergencia entre ambos casos si encontramos la configuración adecuada: una capa de líquido lo bastante delgada. Efectivamente, según la teoría existente sobre el mecanismo de inestabilidad de superficie en líquidos aislantes, dentro de las aproximaciones de los análisis hechos en (Atten y Koulova-Nenova, 1996; Atten *et al.*, 1998), el valor crítico para el Rosetón tiende a un valor infinito para valores pequeños de la anchura de la capa de líquido. Este comportamiento ha sido observado para el caso del aceite de silicona pero no en los otros dos aceites, poniendo en evidencia una vez más las diferencias en el mecanismo de conducción entre el aceite de silicona, donde es observable la inestabilidad de volumen, y los otros dos, donde no lo es. En el caso de los aceites de ricino y de maíz los valores críticos tienden cada vez a ser menores al reducir el volumen de líquido, por lo que el comportamiento es opuesto. Todo ello queda reflejado en la figura 3.8, donde se muestran los valores críticos de la inestabilidad Rosetón esta vez en la configuración punta-plano. En dicha figura puede verse la comentada divergencia entre el régimen óhmico y el no-óhmico de los valores críticos para capas delgadas de líquido. También es de notar que estos valores críticos, siendo en la configuración punta-plano, son necesariamente mayores que el umbral corona (alrededor de 4 kV), pues en esta configuración no existe corriente por debajo de este valor.

Por último, en las tablas 3.2 y 3.3 se presenta el valor del tamaño

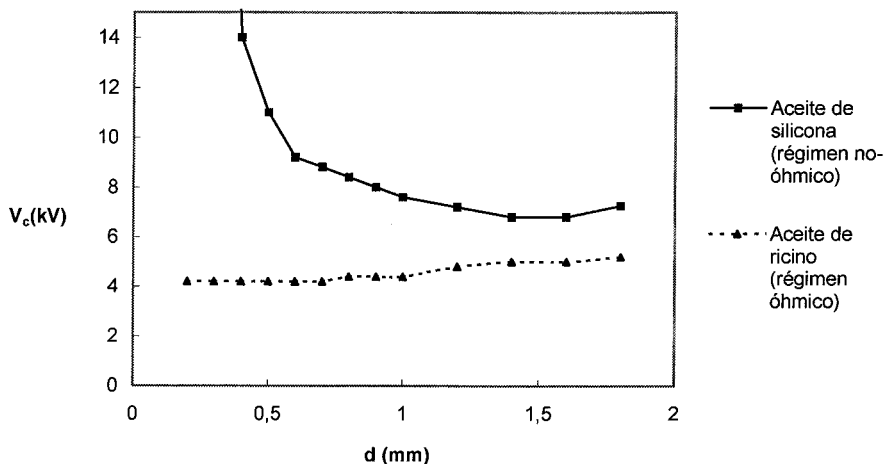


Figura 3.8: Valores críticos de la inestabilidad Rosetón en una configuración punta-plano para capas delgadas de líquido. Distancia punta-plano $p = 3,0 \text{ cm}$.

	$V_p \text{ (kV)}$	6,5	7,0	8,0	9,0	10,0
$d = 0,6 \text{ mm}$	$D \text{ (cm)}$	0,34	0,34	0,30	0,25	0,20
$d = 1,2 \text{ mm}$	$D \text{ (cm)}$	0,61	0,52	0,41	0,27	0,24

Cuadro 3.2: Tamaño medio D de las celdas del Rosetón en aceite de silicona en función de V_p , para distintas anchuras de la capa de líquido. Configuración punta-plano. $p = 2,5 \text{ cm}$.

	$V_p \text{ (kV)}$	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
$d = 0,6 \text{ mm}$	$D \text{ (cm)}$	1,12	0,74	0,40	0,22	0,21
$d = 1,2 \text{ mm}$	$D \text{ (cm)}$	1,15	0,54	0,57	0,44	0,36

Cuadro 3.3: Tamaño medio D de las celdas del Rosetón en aceite de ricino en función de V_p , para distintas anchuras de la capa de líquido. Configuración punta-plano. $p = 3,5 \text{ cm}$.

medio D de las celdas del Rosetón en función de V_p en la configuración punta-plano. Como puede verse, en ambos tipo de líquido (no-ohmico y ohmico) el tamaño medio disminuye al aumentar el valor del campo eléctrico aplicado y aumenta con el espesor de la capa de líquido d . Ambas tendencias (con el campo y con el espesor d) son más pronunciadas en el caso del aceite de ricino (ohmico).

3.3.4. Imágenes

Las imágenes presentadas en este apartado fueron obtenidas con una cámara fotográfica provista de un objetivo de forma que dichas

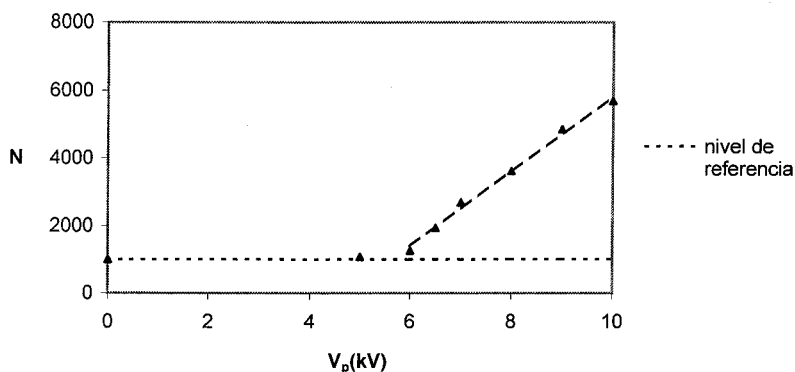


Figura 3.9: Número de píxeles N en los bordes en función de V_p en la configuración punta-plano. Aceite de silicona. Distancia punta-plano: $p = 2,5 \text{ cm}$. Espesor de la capa de líquido: $d = 0,6 \text{ mm}$.

imágenes, enfocadas justo en la interfase líquido-aire, eran aumentadas aproximadamente $1/2$. La visualización desde abajo, posible gracias a la transparencia tanto del cristal conductor usado como electrodo como de los líquidos sujetos a experimentos, permite obtener con cierta fiabilidad los valores críticos de la inestabilidad Rosetón directamente a ojo. Esto es posible debido a que esta inestabilidad tiene una longitud de onda característica inicial bastante grande (del orden del centímetro en los experimentos) siendo además la amplitud de deformación similar en magnitud a la anchura de la capa de líquido, lo que facilita aún más la visualización.

No obstante, como mejora a la detección visual, en algunas series de medidas se ha utilizado un sistema de tratamiento digital de imágenes (en este caso, tomadas con la cámara de video) que permite detectar el número de píxeles de la imagen en los bordes de las celdas del Rosetón, cuantificando así la evolución de la inestabilidad. En la figura 3.9 se puede ver el número de píxeles N en los bordes en función de la tensión aplicada V_p para el aceite de silicona. El umbral de inestabilidad vendría dado por el punto en que $N > N_0$, siendo N_0 el número de píxeles de borde en la imagen de referencia de la superficie sin deformar. Cuanto mayor es N , mayor es el grado de desarrollo de la inestabilidad Rosetón. En la figura 3.10 puede verse una imagen típica obtenida con el método de búsqueda de bordes. El método de búsqueda de bordes utilizado es el *SUSAN* (*Smallest Univalve Segment Assimilating Nucleus*), el cual hace un barrido de la imagen asignando a cada punto de la misma un área de cierto tamaño. El método detecta bordes en aquellas áreas en las que el número de puntos de intensidad luminosa muy distinta a la del punto central de ese área es máximo (Smith y Brady, 1997). Con

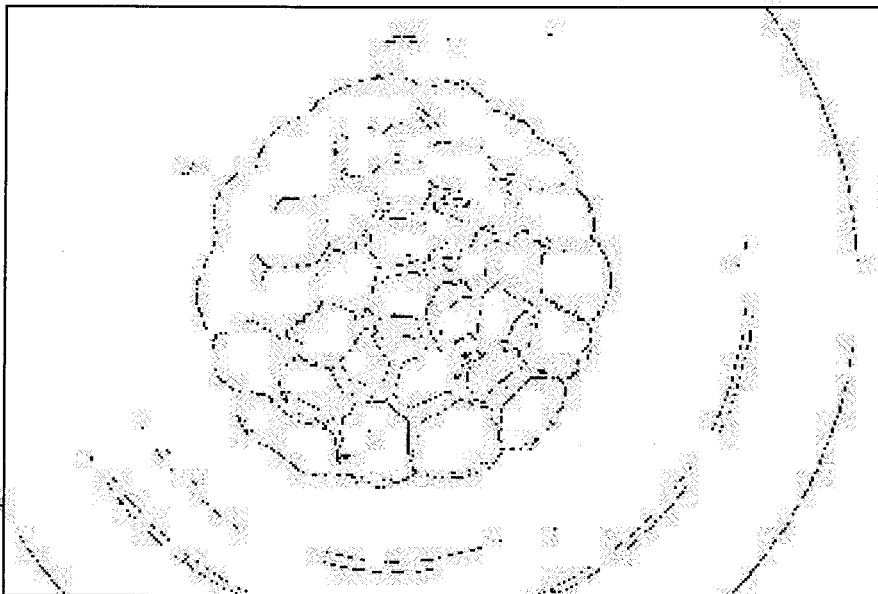


Figura 3.10: Imagen de vídeo tratada con el método *SUSAN* de detección de bordes. Aceite de Silicona. Configuración punta-plano. $V_p = 8,0 \text{ kV}$, $p = 2,5 \text{ cm}$, $d = 0,6 \text{ mm}$

la resolución que por ahora se ha conseguido en las imágenes tomadas, el método no se ha mostrado efectivo para localizar los bordes de las celdas mucho más pequeñas de la inestabilidad de volumen.

Sin embargo, la inestabilidad de volumen aún puede detectarse visualmente, como se muestra en la fotografía de la figura 3.11, donde se ve una perturbación en la superficie del líquido de pequeña longitud de onda. El líquido es el aceite de silicona, el menos conductor y el único que muestra dicha inestabilidad. Poco después de la aparición de la inestabilidad de volumen, al aumentar el potencial aplicado empieza a ser visible un segundo patrón con una longitud de onda característica mucho mayor. Se trata del Rosetón, como se muestra en las figuras 3.12 (configuración punta-plano) y 3.13 (configuración triodo), donde puede notarse claramente la coexistencia de la inestabilidad de volumen con la inestabilidad Rosetón. También es observable el mayor tamaño de las celdas del Rosetón en el triodo, debido quizás a que el campo eléctrico medio es menor en esta configuración. Otra observación es que en el caso punta-plano el tamaño de las celdas denota la irregularidad del campo eléctrico, siendo más pequeñas en el centro, donde el campo eléctrico es más intenso, como se ve claramente en la figura 3.14, donde se muestra el Rosetón lejos ya del punto de incipencia de la inestabilidad. Es de notar la tendencia a la forma hexagonal de las celdas del Rosetón. Esta

tendencia se rompe debido a la inhomogeneidad en el tamaño de las celdas, lo que obliga a la presencia de muchos defectos, notablemente en forma de celdas pentagonales. Dichos defectos tienen lugar análogamente en la inestabilidad de Rayleigh-Bénard, (Koschmieder y Pallas, 1974). Como puede verse por la serie de imágenes, el desarrollo del Rosetón es gradual, presentando distintos aspectos la superficie del líquido según el campo eléctrico aplicado.

En los otros dos líquidos, el aceite de ricino y el aceite de maíz, la inestabilidad de volumen no llega a ser nunca observable, siendo sólo una perturbación de longitud de onda larga visible y que identificamos como la misma que en el caso del aceite de silicona. La ausencia de la inestabilidad de volumen en estos dos últimos líquidos evidencia la inexistencia de fuerzas electrostáticas de volumen en ellos, por lo que se confirma que el régimen de conducción que manifiestan es óhmico. Al mismo tiempo se pone de manifiesto que el mecanismo de la inestabilidad Rosetón no es debido a la acción de las fuerzas electrostáticas en el volumen del líquido sino en su superficie. El Rosetón presenta un aspecto similar en los líquidos en régimen óhmico, aunque la forma de la celdas en el caso punta-plano es algo más irregular para el aceite de ricino (fig. 3.16). El mayor grado de simetría de las celdas en líquidos en régimen no-óhmico puede deberse a un efecto del movimiento convectivo del líquido de la inestabilidad de volumen, que tiene lugar previamente. Entre las figuras 3.15 y 3.17 se ve, en aceite de ricino, la diferencia en el tamaño de las celdas debido a que en la segunda el campo aplicado es mayor, lo que confirma que aumentando el campo eléctrico las celdas se van haciendo más compactas y menores, presentando un tamaño máximo justo en el umbral de la inestabilidad. La figura 3.18 muestra la inestabilidad Rosetón en aceite de maíz, con un aspecto similar al de los otros dos líquidos.

En el caso de la configuración triodo la corriente corona en la parte decreciente de las curvas del triodo a V_p constante (fig. 2.25) pasa sólo por el punto medio entre los hilos de la rejilla (fig. 2.31), con lo que toda la presión eléctrica sobre el líquido debida a la inyección corona se concentra sobre el centro de cada cuadrado de la rejilla si V_r es lo bastante alto. Esto hace que en la superficie del líquido se origine un patrón de deformación, compuesto por formas características similares a pequeños vórtices. Cada una de estas deformaciones está situada justo bajo estos centros rompiendo el patrón de la inestabilidad Rosetón y dando lugar a una red cuadrada de múltiples vórtices. Esto, que era previsible vistas las gráficas de líneas de flujo en la región rejilla-plano

(fig. 2.31), se ve confirmado en nuestras observaciones, como se ve en la figura 3.19. Este efecto, debido a la concentración de la inyección en unos puntos determinados, también es observable en la configuración punta-plano, con un único y mayor vórtice en la intersección de la superficie con el eje de la punta inyectora, que va haciéndose más virulento al aumentar el potencial en la punta. Este efecto es mayor en líquidos con una viscosidad baja, lo cual se ha confirmado con unas experiencias de inyección corona sobre agua que fueron realizadas en en LEMD del CNRS de Grenoble con P. Atten (aunque el objetivo de la experiencia era otro).

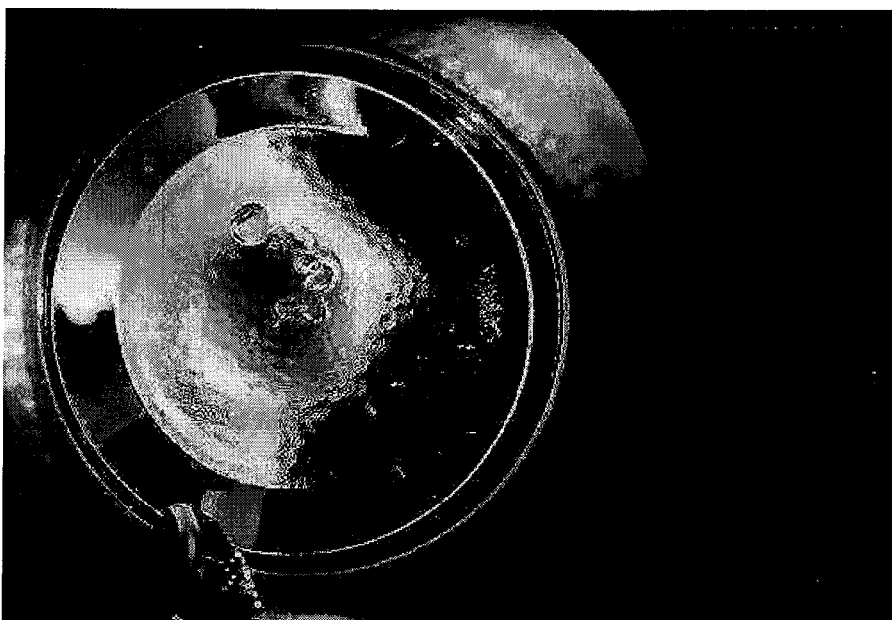


Figura 3.11: Inestabilidad de volumen vista desde abajo. Líquido: aceite de silicona. $V_p = 13,2 \text{ kV}$, $p = 3,0 \text{ cm}$, $d = 1,2 \text{ mm}$.

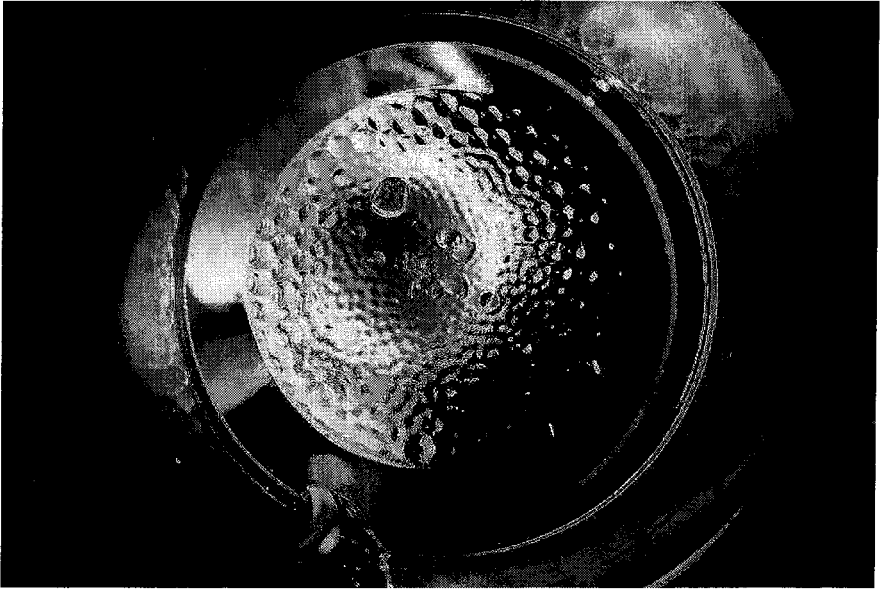


Figura 3.12: Coexistencia de la inestabilidad Rosetón con la inestabilidad de volumen en un líquido en régimen no-ohmico (aceite de silicona). Montaje punta-plano. $V_p = 13,2 \text{ kV}$, $p = 3,0 \text{ cm}$, $d = 1,2 \text{ mm}$.

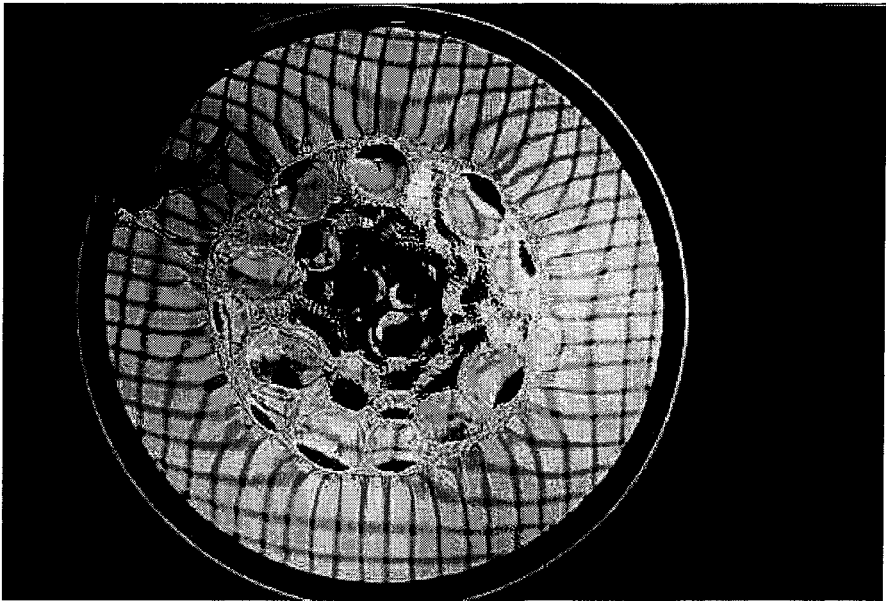


Figura 3.13: Coexistencia de la inestabilidad Rosetón con la inestabilidad de volumen en un líquido en régimen no-ohmico (aceite de silicona). Montaje triodo. $V_p = 12 \text{ kV}$, $V_r = 3,0 \text{ kV}$, $I = 1,0 \text{ } \mu\text{A}$, $p = 3,0 \text{ cm}$, $d = 1,2 \text{ mm}$, $h = 1,5 \text{ cm}$.

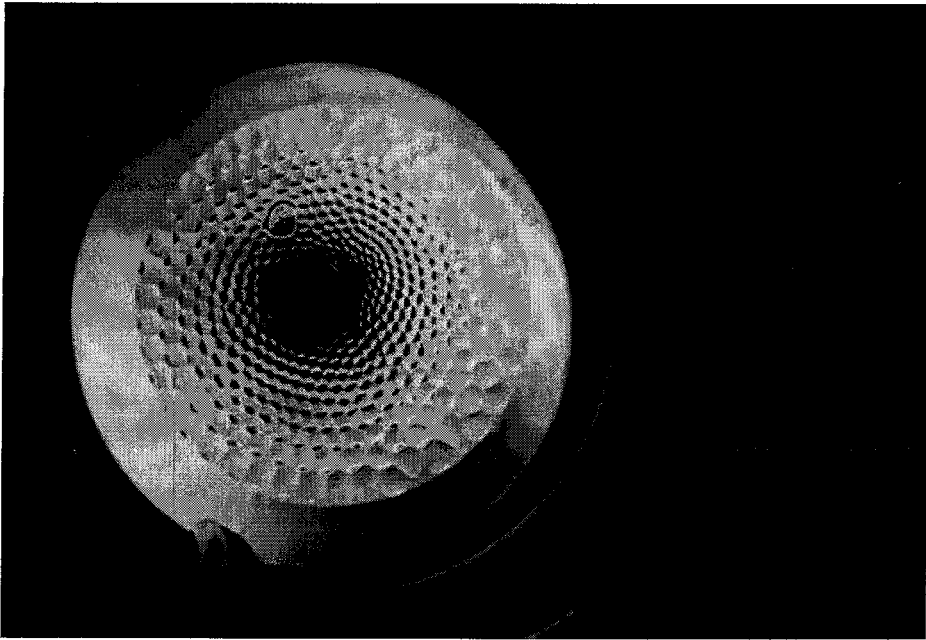


Figura 3.14: El tamaño de las celdas del Rosetón varía según su posición respecto a la punta. Aceite de silicona en el montaje punta-plano. $V_p = 8,8 \text{ kV}$, $I = 0,63 \text{ } \mu\text{A}$, $p = 3,0 \text{ cm}$, $d = 1,2 \text{ mm}$.

3.4. Discusión

Hemos visto en los resultados de las medidas realizadas que la inestabilidad Rosetón se presenta para sistemas con las dimensiones descritas en el apartado 2.2 en valores críticos del potencial eléctrico aplicado, bajo condiciones de inyección fuerte, en torno a 1 kV en la configuración triodo mientras que en la configuración punta-plano tienen la cota inferior impuesta por el valor umbral de la descarga corona, en torno a 4 kV en nuestro sistema experimental. Recordamos que los órdenes de magnitud de nuestro sistema experimental son: $K_a \sim 10^{-4} \text{ m}^2/(\text{Vs})$, $h \sim 10^{-2} \text{ m}$, $\langle \rho \rangle \sim 10^3 \text{ kg/m}^3$.

También hemos visto que la inestabilidad Rosetón, que en régimen no-ohmico coexiste con la inestabilidad de volumen en el aceite de silicona, está presente también en sistemas en los que las fuerzas electrostáticas están ausentes en el volumen del líquido, y que no experimentan la inestabilidad de volumen. Estos líquidos son el aceite de ricino y el aceite de maíz. Sin embargo, para líquidos aún más conductores (como el agua o el alcohol metílico) la inestabilidad Rosetón está ausente, al menos por debajo de $V_p = 20 \text{ kV}$ en el montaje punta-plano y por debajo de $V_r = 10 \text{ kV}$ en el montaje triodo. La ausencia del Rosetón se

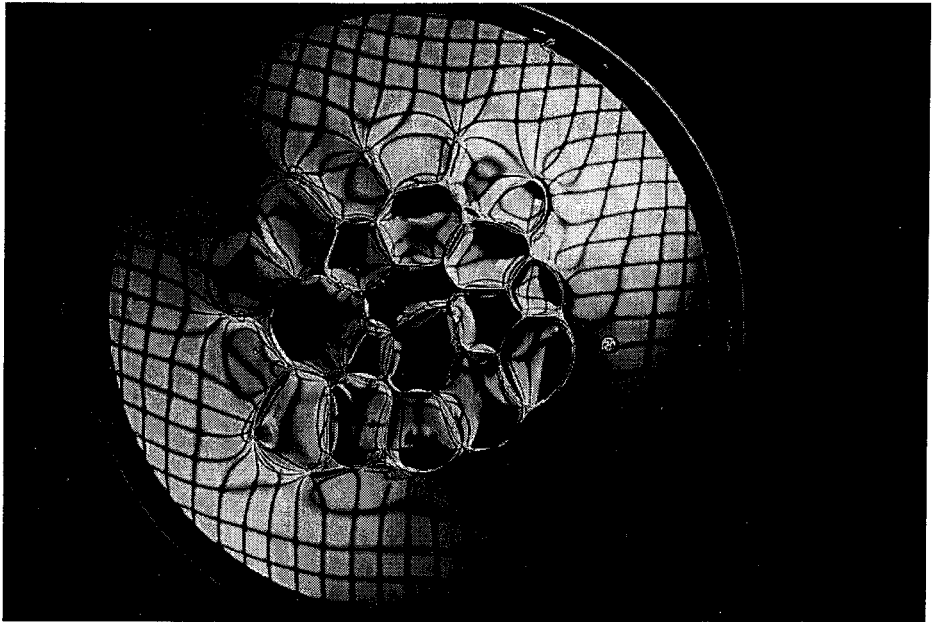


Figura 3.15: Inestabilidad Rosetón en un líquido en régimen óhmico (aceite de ricino). Montaje Triodo. $V_p = 8,8 \text{ kV}$, $V_r = 2,0 \text{ kV}$, $I = 0,63 \mu\text{A}$, $p = 3,0 \text{ cm}$, $d = 1,2 \text{ mm}$, $h = 1,5 \text{ cm}$.

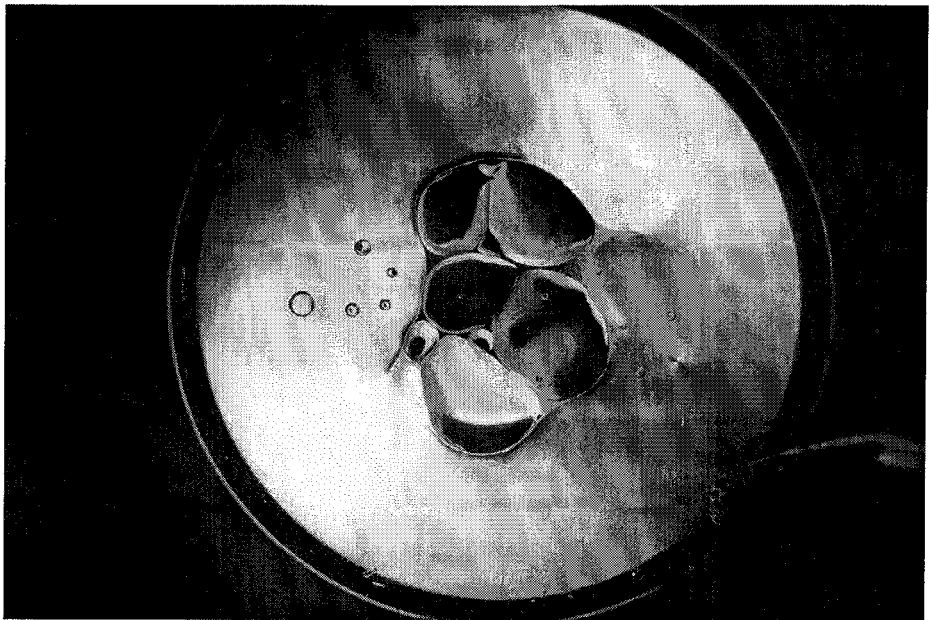


Figura 3.16: Primeras celdas de la inestabilidad Rosetón en aceite de ricino. Montaje punta-plano. $V_p = 6,8 \text{ kV}$, $I = 0,404 \mu\text{A}$, $p = 3,0 \text{ cm}$, $d = 1,2 \text{ mm}$.

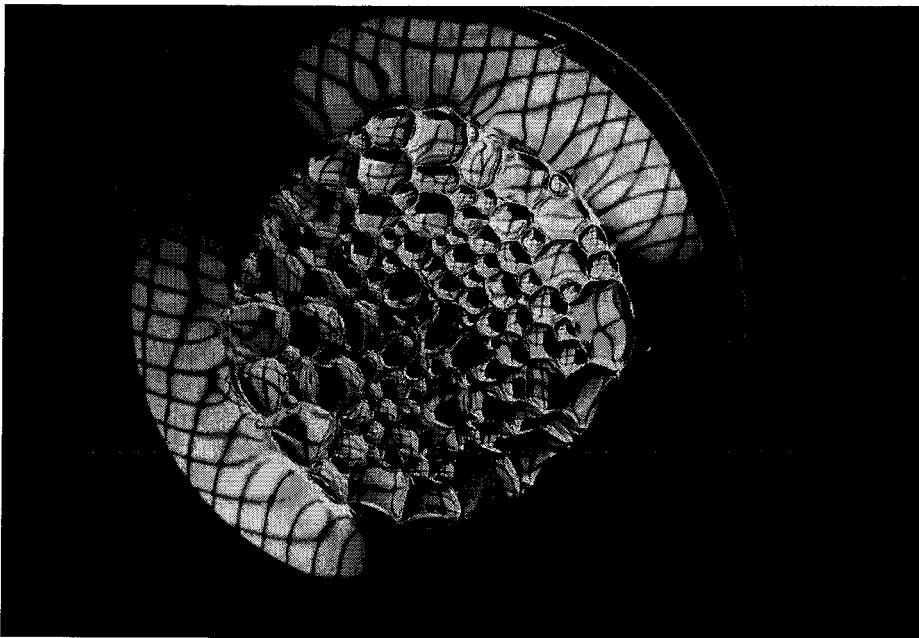


Figura 3.17: Las celdas de la inestabilidad Rosetón con un campo aplicado superior al valor umbral de la inestabilidad. Aceite de ricino. Montaje Triodo. $V_p = 12,0 \text{ kV}$, $V_r = 3,25 \text{ kV}$, $I = 1,55 \text{ } \mu\text{A}$, $p = 3,0 \text{ cm}$, $h = 1,5 \text{ cm}$, $d = 1,2 \text{ mm}$.

da en todos los líquidos si no se aplica la descarga corona, con lo que se confirma que es necesaria la inyección de carga. Dada la evolución temporal gradual de la inestabilidad Rosetón, mostrada en el apartado 3.3.4, parece confirmarse que el campo eléctrico aplicado empuja el líquido hacia abajo en lugar de tirar de él, como pasa en una superficie conductora en el caso sin inyección, que evoluciona bruscamente hacia arriba tocando el electrodo fuente de tensión.

También se observa una fuerte divergencia del comportamiento del Rosetón entre los casos de régimen no-ohmico y ohmico: para capas delgadas la inestabilidad tiende a valores críticos muy altos en el caso no-ohmico y a valores pequeños en el caso ohmico. Como fue predicho por Atten y Koulova-Nenova (1996) el comportamiento no-ohmico es explicable simplemente porque por debajo de cierto valor crítico de la anchura de la capa de líquido ($d < d^{crit}$) el mecanismo de inestabilidad superficial no es posible pues la presión eléctrica tiene una tendencia creciente con la anchura de la capa de líquido. Por ello, si suponemos que la inestabilidad es debida a fuerzas de superficie, una deformación inicialmente producida en una capa delgada no puede ser sostenida. Este valor crítico de la anchura de líquido no-ohmico depende de la mo-

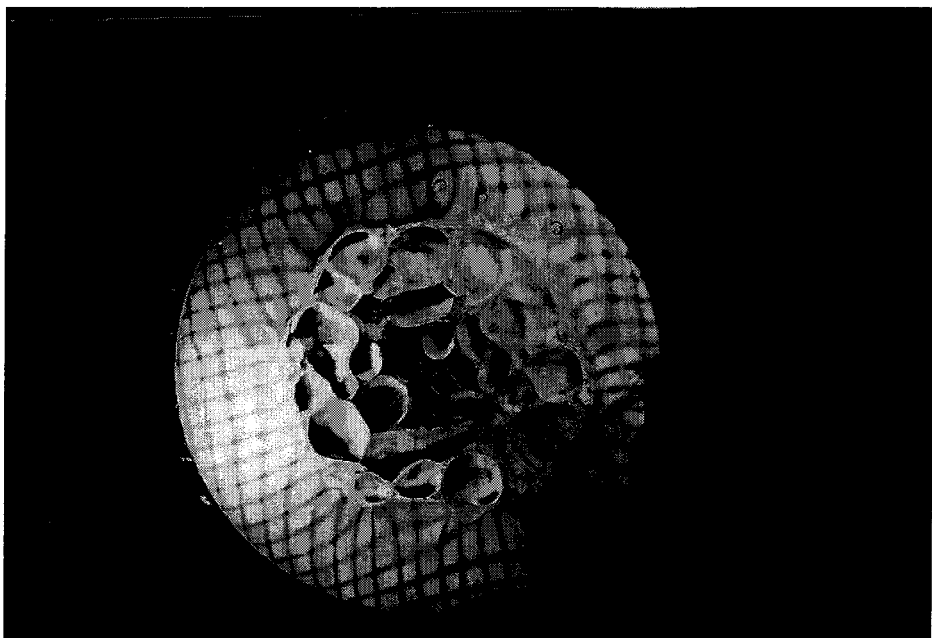


Figura 3.18: Inestabilidad Rosetón en aceite de maíz. Montaje Triodo. $V_p = 9,0 \text{ kV}$, $V_r = 2,8 \text{ kV}$, $I = 0,612 \text{ } \mu\text{A}$, $p = 3,0 \text{ cm}$, $h = 1,5 \text{ cm}$, $d = 1,2 \text{ mm}$.

vilidad iónica del mismo, según el trabajo de Atten y Koulova-Nenova (1996) y en nuestro caso se ha observado para el aceite de silicona en un valor $d^{crit} \sim 0,011(h - d)$, bastante cercano al valor predicho para este líquido $d^{crit} = 0,015(h - d)$. La observación experimental de esta divergencia, por primera vez mostrada en el presente trabajo, viene a reforzar la hipótesis de que el mecanismo de inestabilidad es de superficie. No obstante, el análisis teórico de la inestabilidad Rosetón en el caso puramente aislante (no-ohmico) no tiene aún en cuenta hechos como el que la inestabilidad Rosetón según nuestras observaciones casi siempre se desarrolla como una inestabilidad secundaria después de la inestabilidad de volumen, por lo que un análisis más riguroso debería tener en cuenta el movimiento convectivo del sistema (aparte de otros efectos como la tensión capilar). Este punto puede ser una de las causas de que la divergencia hacia infinito de los valores críticos en (Atten *et al.*, 1998) sea más rápida que la observada experimentalmente (ver figura 3.8).

Comparados los valores críticos del Rosetón con los de la inestabilidad EHD de superficie en el problema de un líquido conductor sin distribución espacial de carga, resulta que son más de un orden de magnitud menores que estos últimos, que están en torno a $50 - 100 \text{ kV}$ en sistemas experimentales análogos (ver por ejemplo el trabajo de Néron

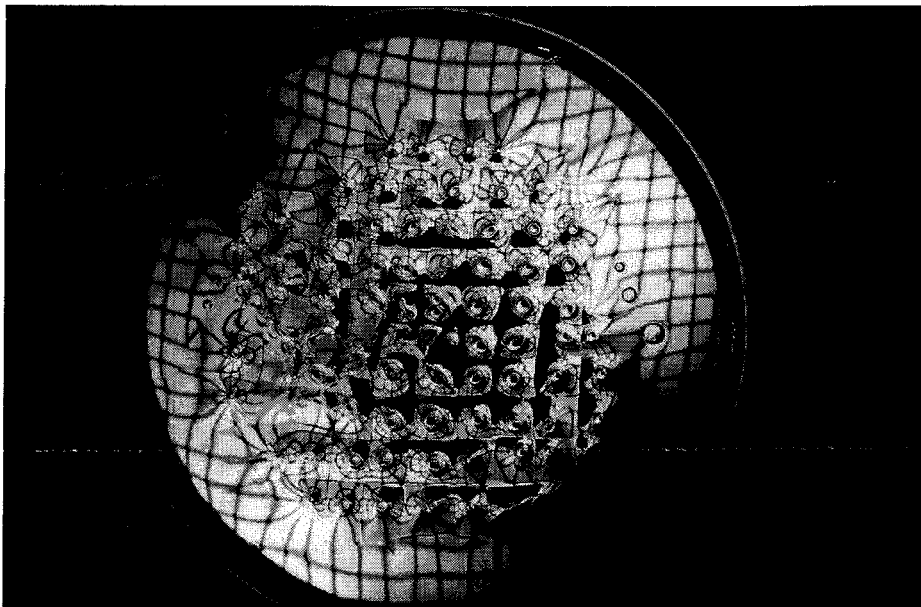


Figura 3.19: La red cuadrada que se forma debido a los vórtices bajo cada punto medio entre los hilos de la rejilla para valores altos de V_r . Líquido: aceite de ricino. $V_p = 10,0 \text{ kV}$, $V_r = 5,0 \text{ kV}$, $I = 0,713 \text{ } \mu\text{A}$, $p = 3,0 \text{ cm}$, $h = 1,5 \text{ cm}$, $d = 1,2 \text{ mm}$.

de Surgy (1995)). Si se sigue admitiendo que la naturaleza del mecanismo de inestabilidad es la misma en ambos casos, debería analizarse cuáles son las peculiaridades dentro de la analogía existente, causantes de tal diferencia en el orden de magnitud de los valores críticos. En principio lo más evidente es pensar que la diferencia radica en la baja conductividad de los líquidos usados, lo cual podemos decir, de momento, que es cierto pero sólo en parte. Las observaciones por una parte parecen confirmar que la conductividad de los líquidos usados es lo bastante baja como para que la carga superficial acumulada en la interfase aire-líquido sea del mismo signo que el campo eléctrico aplicado, con lo que la presión eléctrica empuja el líquido hacia abajo en lugar de tirar de él. Sin embargo, las teorías electrohidrodinámicas sin inyección no predicen en ningún caso (presión eléctrica en la superficie negativa o positiva) inestabilidades EHD dentro del rango en que es encontrado el Rosetón. Así pues parece que la presencia de la carga espacial inducida por efecto corona en nuestros experimentos, es al menos una de las causas fundamentales de la originalidad del Rosetón como inestabilidad EHD de superficie respecto a las inestabilidades clásicas en campos perpendiculares a interfaces fluidas en reposo (Melcher, 1963). Como ya hemos visto, otra condición necesaria es una conductividad lo bastante

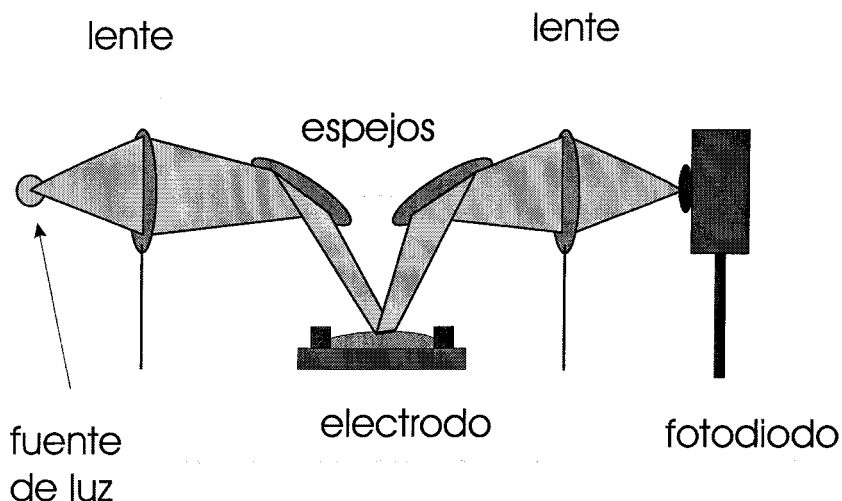


Figura 3.20: Montaje óptico para la detección experimental del Rosetón.

baja, pero ni siquiera es la única condición adicional. Efectivamente, la dimensión del sistema (o equivalentemente, a una tensión aplicada, el campo eléctrico medio) juega un papel tan fundamental o más que la magnitud de la conductividad del líquido: en el trabajo de Malraison y Atten (1991) el Rosetón no llegó a observarse, en aceite de silicona, por utilizar alturas punta-plano demasiado grandes. Parece pues que muchos parámetros son los que intervienen en la inestabilidad de un líquido sometido a descarga corona, y que además estos parámetros se influyen entre sí.

3.5. Otros métodos de detección de la inestabilidad Rosetón

En el primer método experimental desarrollado (Pérez, 1997) para la detección del Rosetón se usaba un conjunto de lentes y espejos. Un haz producido por una fuente de luz es llevado con el sistema óptico hacia la superficie del líquido y luego reflejado hacia un fotodiodo (figura 3.20). La disminución en la intensidad luminosa inicial que recibe inicialmente el fotodiodo, cuando la superficie del líquido es plana, es consecuencia de la aparición de la inestabilidad Rosetón (el método no es sensible a inestabilidades de pequeña longitud de onda como la inestabilidad de volumen).

Aunque las medidas tomadas usando este método son fiables, presenta en cambio el inconveniente de que no puede utilizarse si se usa la

rejilla.

Para poder tomar medidas de los valores críticos en la configuración triodo, se pensó usar un amplificador sintonizado. Este dispositivo selecciona y mide sólo una frecuencia determinada (por una señal de referencia) de la corriente que le llega. Fijando la amplitud de una señal de tensión AC en la rejilla, la intensidad AC que atraviesa el electrodo es constante. La componente AC se ajusta de forma que nos situamos dentro del rango de utilización del amplificador. Si, mateniendo fija la tensión AC en la rejilla, se aumenta la tensión DC , se produce el Rosetón a partir del valor umbral. Se esperaba detectar este umbral mediante un cambio significativo en la medida de la corriente AC pues si la deformación de la superficie debida al Rosetón induce cambios en la capacidad del triodo, esto se reflejaría en la medida (ya que $I_{AC} \propto C$). Sin embargo, en las pruebas que se hicieron no llegó a obtenerse una variación significativa debida a la deformación. Por el contrario sí que se detectaba una variación de la corriente AC al subir el potencial DC en la rejilla pero ésta era debida a las componentes AC en la corriente corona proveniente de la punta (figura 3.21). Efectivamente, la descarga corona tiene componentes AC en rangos de frecuencia que dependen del potencial aplicado en el electrodo inyector (Goldman y Goldman, 1978). Por ello, este montaje podría servir como dispositivo de medida de la distribución de frecuencias de la corriente corona.

3.6. Resumen

En este capítulo hemos visto que el comportamiento de la inestabilidad de volumen, en aceite de silicona bajo descarga corona, presenta un comportamiento similar al descrito en la teoría (Atten y Moreau, 1972), lo cual coincide con las observaciones experimentales precedentes (Malraison y Atten, 1991). En líquidos algo más conductores, como el aceite de ricino o el aceite de maíz, la inestabilidad de volumen (aun siendo sometidos a inyección fuerte) está ausente, lo cual constituye una evidencia experimental de que en estos líquidos no están presentes las fuerzas electrostáticas de volumen y manifiestan una conducción eléctrica de tipo óhmico.

El Rosetón está presente en líquidos en régimen óhmico y no-óhmico (en este caso, en coexistencia con la inestabilidad de volumen). En capas muy delgadas de líquido, el comportamiento del Rosetón es opuesto para ambos tipos de régimen. Mientras que los valores críticos tienden a infinito en régimen no-óhmico, en régimen óhmico tienden a valores

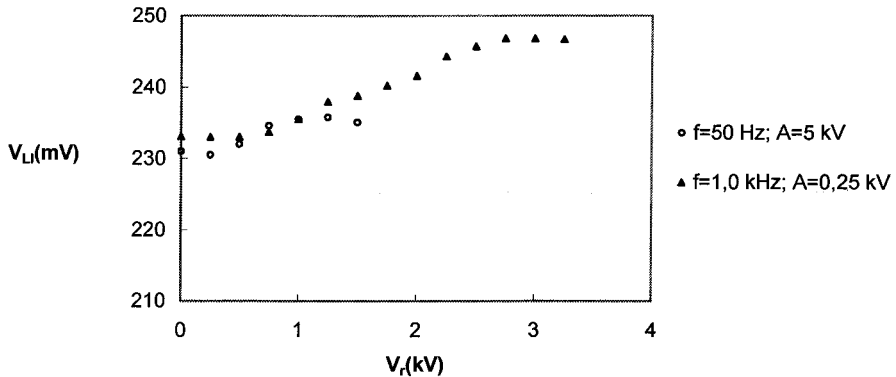


Figura 3.21: Medida de la variación de la componente AC en la corriente corona, para distintas frecuencias en triodo, con una capa de aceite de ricino de $1,5\text{ mm}$. V_{LI} es la lectura del amplificador sintonizado, que es proporcional a la corriente AC medida. A es la amplitud de la tensión AC aplicada en la rejilla y f la frecuencia de la señal. $V_p = 12\text{ kV}$, $p = 4,0\text{ cm}$, $h = 1,5\text{ cm}$.

pequeños, que en el caso de configuración punta-plano no pueden bajar del potencial umbral para la descarga corona.

En definitiva, el Rosetón no es posible sin inyección de carga y no parece estar relacionado con las fuerzas electrostáticas de volumen, sino de superficie. En las medidas tomadas en la configuración triodo, los valores críticos medidos del Rosetón se encuentran siempre en la parte creciente de las curvas de corriente a potencial V_p constante (figs. 2.25, 2.26). Entonces, de las consideraciones hechas en el capítulo 2 (apartado 2.4.1), estos valores críticos en el triodo se encuentran con buena aproximación en el rango de inyección fuerte, lo cual servirá de referencia a la hora de comparar los resultados experimentales con la teoría de los capítulos 4 y 5.

En cuanto a la detección de la inestabilidad, se ha mostrado que la inestabilidad Rosetón puede detectarse con fiabilidad mediante el método *SUSAN* de detección de bordes. Este método permite, al detectar el número de píxeles de la imagen en los bordes de la celda, cuantificar la evolución de la inestabilidad. Como se ha visto, el Rosetón presenta una evolución gradual, y el tamaño medio de las celdas, que inicialmente es del orden de 1 cm , mucho mayor que el espesor de la capa de líquido, tiende a disminuir con el valor del campo eléctrico aplicado.

Capítulo 4

Estabilidad lineal de una interfase no-ohmica/ohmica

4.1. Enmarcando el problema

En el presente capítulo establecemos las ecuaciones para la inestabilidad electrohidrodinámica (EHD) lineal de una interfase no-ohmica/ohmica perpendicular al campo eléctrico aplicado. La capa ohmica tiene una conductividad arbitraria. Siendo una de las partes del sistema no-ohmica, es posible la existencia de cierta distribución de carga espacial. Se describe el nuevo mecanismo de inestabilidad de superficie que aparece como consecuencia de la existencia de esta carga espacial. Este nuevo mecanismo, como veremos más adelante, puede explicar el fenómeno experimental del Rosetón dentro de ciertos límites.

Es evidente que debido a la introducción de una conductividad arbitraria estamos añadiendo una complejidad adicional al caso aislante/conductor perfecto con inyección unipolar, pues ahora los esfuerzos tangenciales no son necesariamente siempre nulos. Así, la complejidad del problema diferencial asociado a las ecuaciones perturbativas lineales de (Koulova-Nenova, 1997) se ve incrementado. No obstante, el problema puede resolverse analíticamente dentro de ciertos límites que, como analizaremos, aproximan bien ciertas situaciones, entre las cuales puede incluirse razonablemente el Rosetón producido en el caso de una doble capa aire/líquido ohmico. Otro de los límites que hemos resuelto analíticamente es el de una doble capa líquido aislante/líquido ohmico en el límite de longitud de onda larga. Aunque sólo estos dos límites han sido resueltos, hemos creído conveniente escribir las ecuaciones completas del sistema y sólo a partir de ahí mostrar la validez de los límites resueltos.

Esto además creemos que tiene un valor didáctico pues permitirá una discusión de los trabajos anteriores relacionados con nuestro problema, los cuales pueden clasificarse como casos particulares de un problema más general, que es aquí definido (si bien no resuelto de modo completo) llamado simplemente *Inestabilidad de una interfase fluida en reposo bajo un campo eléctrico perpendicular de divergencia no necesariamente nula*. Previamente al análisis perturbativo estudiamos las ecuaciones eléctricas de un sistema fluido no-ohmico/ohmico sometido a un campo perpendicular con inyección de carga. Estas ecuaciones son las análogas al modelo del inyector autónomo en el caso puramente aislante, vistas en el capítulo 1. Por primera vez, las ecuaciones del inyector autónomo son resueltas y estudiadas en una interfase material (porque de hecho estas ecuaciones son válidas para todas las fases, no sólo las fluidas) no-ohmica/ohmica. Los resultados que proporciona el modelo del inyector autónomo en nuestro sistema vislumbran ya no sólo la posibilidad de un nuevo mecanismo de inestabilidad superficial en el caso de medios fluidos, sino algunas de las características más importantes de la inestabilidad que se desarrollaría como consecuencia de ese mecanismo.

El análisis teórico de la inestabilidad es realizado de una manera estándar. A la solución estacionaria correspondiente al estado inicial se le añade una perturbación en forma de modos de Fourier, a partir de la cual se obtiene el correspondiente conjunto de ecuaciones diferenciales lineales de las perturbaciones así como las condiciones de contorno asociadas. El determinante correspondiente a los coeficientes del sistema que forman las condiciones de contorno debe anularse para que se cumpla la condición de compatibilidad del sistema. La ecuación resultante de imponer determinante nulo proporciona una relación de dispersión $U(k)$ donde U es el autovalor característico del sistema y k es el número de onda. El mínimo de esta función define un valor U_c que es el valor crítico asociado a la inestabilidad. Dicho valor dependerá además de los otros parámetros del sistema.

En la sección 4.2 se expone la formulación del problema de una interfase fluida no-ohmica/ohmica sometida a inyección de carga. En la sección 4.3 se estudia el modelo del inyector autónomo para una interfase material no-ohmica/ohmica y se sacan las primeras conclusiones acerca de los posibles mecanismos de inestabilidad superficial. La sección 4.4 está dedicada a la formulación del análisis de la inestabilidad lineal, si bien el problema general no es resuelto. La estructura de las ecuaciones obtenidas en este apartado servirá como referencia para clasificar bien el problema y englobar dentro de un mismo conjunto de ecuaciones todos

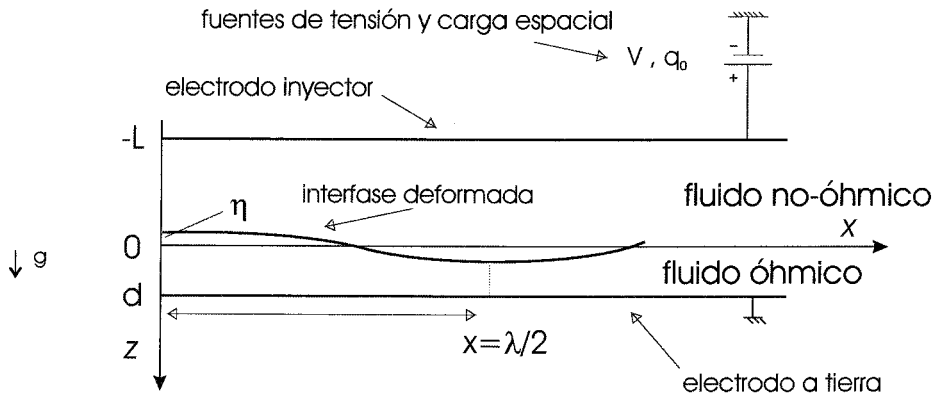


Figura 4.1: Configuración geométrica del sistema. El electrodo inyector está en $z = -L$ y el electrodo colector en $z = d$. la interfase está entre ambos electrodos en $z = 0$.

los casos posibles de inestabilidades EHD de volumen y superficie en campos perpendiculares hasta ahora estudiados. En el caso particular de una interfase aire/líquido pueden hacerse unas aproximaciones que permiten encontrar una inestabilidad hidrostática lineal original hasta el momento. Esta parte del problema, que se ha resuelto de forma analítica, se estudia en la sección 4.5. En la sección 4.6 se analiza la aplicabilidad de las simplificaciones hechas en la sección anterior al caso de una interfase líquido/líquido al tiempo que se realiza una discusión referida a trabajos anteriores relacionados (sobre interfases líquido/líquido sometidas inyección unipolar). Finalmente, en la sección se expone un resumen de los resultados.

4.2. Definición

Sean dos electrodos planos infinitos y paralelos entre sí con una interfase fluida no-ohmica/ohmica (esto es, una capa fluida no-ohmica en contacto con otra ohmica). Los dos electrodos y la interfase son paralelos entre sí. Los electrodos son placas perfectamente rígidas y perfectamente conductoras. El fluido no-ohmico, que suponemos tiene una densidad de masa menor, está sobre el otro fluido, que es ohmico. Los dos fluidos, inicialmente en reposo y en estado de equilibrio, son inmiscibles e incompresibles. La interfase está situada en un plano $z = 0$, quedando situada por tanto la capa no-ohmica en valores $z < 0$ y la capa ohmica en valores $z > 0$. La anchura de la capa no-ohmica es L mientras que la anchura de la capa ohmica es $z = d$. En la figura 4.1 se muestra la geometría del sistema, siendo $h = L + d$ la longitud total

del sistema. En el electrodo situado en $z = -L$ se aplica una tensión eléctrica V y opcionalmente una inyección de carga unipolar, con lo que se genera en el plano del electrodo una densidad de carga espacial q_0 (Atten y Moreau, 1972). Por ello, a este electrodo se le llama *electrodo inyector*. La carga espacial es así inyectada hacia el electrodo en $z = d$, que es llamado *electrodo colector*. Tomando h , V , $\varepsilon_i V/h^2$, $K_i \varepsilon_i V^2/h^3$, $K_i V/h$ y $\varepsilon_i V^2/h^2$ como las unidades de referencia para la distancia, el potencial eléctrico, la carga espacial, la densidad de corriente eléctrica, la velocidad y la presión, el conjunto de ecuaciones diferenciales en forma adimensional para la capa de fluido no-ohmico es:

$$\mathbf{E}_i = -\nabla\phi_i \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_i = q_i \quad (4.2)$$

$$\mathbf{j}_i = q_i(\mathbf{E}_i + \mathbf{v}_i) \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_i = 0 \quad (4.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_i = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\rho_{ri}}{M^2} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i \right) - \frac{1}{T} \nabla^2 \mathbf{v}_i = \frac{\rho_{ri}}{U} \mathbf{e}_z - \nabla p_i + q_i \mathbf{E}_i \quad (4.6)$$

Suponemos que el fluido en contacto con el electrodo colector se encuentra siempre en régimen óhmico y que el tiempo de relajación de carga es lo bastante bajo como para que no exista en ningún momento carga eléctrica en el cuerpo del fluido. Entonces, las ecuaciones que gobiernan la física de este fluido en nuestro sistema son:

$$\mathbf{E}_c = -\nabla\phi_c \quad (4.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_c = 0 \quad (4.8)$$

$$\mathbf{j}_c = S\mathbf{E}_c \quad (4.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_c = 0 \quad (4.10)$$

$$\frac{\rho_{rc}}{M^2} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_c}{\partial t} + (\mathbf{v}_c \cdot \nabla) \mathbf{v}_c \right) - \frac{\mu}{T} \nabla^2 \mathbf{v}_c = \frac{\rho_{rc}}{U} \mathbf{e}_z - \nabla p_c \quad (4.11)$$

Los subíndices i y c se utilizan para distinguir las magnitudes del fluido no-ohmico y las del fluido ohmico (i de *insulating* en inglés). El campo eléctrico es \mathbf{E} , ϕ es el potencial eléctrico, K es la movilidad iónica y \mathbf{v} es la velocidad del fluido. Las condiciones de contorno impuestas en los electrodos son:

$$\phi_i(-L) = 1 \quad q_i(-L) = C \quad \mathbf{v}_i(-L) = \mathbf{0} \quad (4.12)$$

$$\phi_c(d) = 0 \quad \mathbf{v}_c(d) = \mathbf{0} \quad (4.13)$$

La forma adimensional de las condiciones de contorno electro-mecánicas en la interfase $F(x, y, z, t)$, ya escritas en el apartado 1.1, son:

$$\mathbf{n} \cdot \langle \varepsilon_r \mathbf{E} \rangle = \sigma_s \quad \mathbf{n} \times \langle \mathbf{E} \rangle = \mathbf{0} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial t} + \nabla_s \cdot \mathbf{K}_s + \mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{j} - q\mathbf{v} \rangle = 0 \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_n \mathbf{n} \cdot \nabla F = 0 \quad \mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \mathbf{n} \times \langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{0} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{s}_j \cdot \left\langle \frac{\mu_r}{T} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \right\rangle \cdot \mathbf{n} + \sigma_s \mathbf{s}_j \cdot \mathbf{E} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (4.17)$$

$$\mathbf{n} \cdot \left\langle \frac{\mu_r}{T} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \right\rangle \cdot \mathbf{n} - \langle p \rangle - \left\langle \frac{1}{2} \varepsilon_r E^2 \right\rangle + \left\langle \varepsilon_r (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})^2 \right\rangle = \frac{1}{UB_0} \nabla \cdot \mathbf{n} \quad (4.18)$$

Las ecuaciones (4.17, 4.18) son las condiciones correspondientes al balance de las tensiones tangencial y normal en la interfase, respectivamente. Los parámetros adimensionales que aparecen en las ecuaciones (4.6- 4.18) son los siguientes:

$$T = \frac{\varepsilon_i V}{K_i \mu_i} \quad M = \frac{\sqrt{\varepsilon_i / \langle \rho \rangle}}{K_i} \quad U = \frac{\varepsilon_i V^2}{\langle \rho \rangle g h^3} \quad (4.19)$$

$$Bo = \frac{\langle \rho \rangle gh^2}{\gamma} \quad C = \frac{q_0 h^2}{\varepsilon_i V} \quad S = \frac{\sigma_c h^2}{K_i \varepsilon_i V} \quad (4.20)$$

Para posteriores discusiones, será útil definir también el número P :

$$P = \frac{\varepsilon_i \gamma h}{K_i^2 \mu_i^2} \quad (4.21)$$

en (4.6, 4.11) aparecen los siguientes parámetros:

$$\rho_{rc} = \frac{\rho_c}{\langle \rho \rangle} \quad \rho_{ri} = \frac{\rho_i}{\langle \rho \rangle} \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_i} \quad \mu = \frac{\mu_c}{\mu_i} \quad (4.22)$$

y por último, en las condiciones de contorno (4.14, 4.17, 4.18) aparecen:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_i} \quad \mu_r = \frac{\mu_l}{\mu_i} \quad (4.23)$$

donde $l = i, c$ para la capa no-ohmica y la capa ohmica respectivamente.

En las ecuaciones, definimos el vector normal a la interfase \mathbf{n} en el sentido positivo del eje Z , o sea, hacia dentro del fluido inferior; y $\langle A \rangle = A^+ - A^-$ indica el salto de la magnitud A en la interfase, de manera que A^+ indica el valor de magnitud en la superficie de separación del lado del fluido inferior y A^- indica el valor de la magnitud A en la superficie y del lado del fluido superior. El parámetro T es la relación entre las fuerzas viscosas y eléctricas en la capa no-ohmica y es el parámetro de control en la estabilidad de una capa de líquido aislante sujeto a inyección unipolar (Atten y Moreau, 1972). El parámetro U es una relación entre las fuerzas eléctricas y gravitatorias en la interfase y es el parámetro que controla la inestabilidad superficial. El número de Bond Bo es la relación entre las fuerzas gravitatorias y las capilares. La conductividad adimensional S juega un papel esencial en nuestro estudio. Es una relación entre la densidad de corriente ohmica $\sigma_c V/h$ que correspondería a un sistema sólo con la capa de fluido ohmico y la densidad de corriente no-ohmica $K_i \varepsilon_i V^2/h^3$ que correspondería a un sistema con sólo la capa de fluido no-ohmico. Como veremos en el estudio del inyector autónomo, podremos distinguir según los valores de este parámetro: por ejemplo, si las capas ohmica y no-ohmica son de igual grosor, tenemos que si $S \ll 1$ la caída de potencial en el fluido ohmico es apreciable, mientras que si $S \gg 1$ el fluido ohmico se comporta como un electrodo deformable. El parámetro S también puede considerarse como una relación entre los tiempos de conducción característicos de cada fluido: ε_i/σ_c para el fluido ohmico y $h^2/K_i V$ para el fluido no-ohmico.

Finalmente, la condición de contorno para la densidad de carga espacial $q(-L) = C$ es extremadamente importante en problemas de inyección unipolar e indica que se tiene una fuente de carga espacial en $z = -L$. La inyección está caracterizada por el parámetro $C = q_0 h^2 / (\varepsilon_i V)$, nivel de inyección. Supondremos que se puede variar el potencial eléctrico y la densidad de carga espacial de forma independiente (modelo del inyector autónomo de Atten y Moreau (1972)) con lo que las condiciones de contorno $\phi_i(-L) = 1$ y $q(-L) = C$ son independientes.

4.3. Inyector Autónomo en una interfase no-ohmica/ohmica

Inicialmente ambos fluidos se encuentran en reposo ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$). De este modo, la interfase en equilibrio hidrostático en este sistema es perpendicular al vector aceleración de la gravedad ($\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$), y también es perpendicular al campo eléctrico ($\mathbf{E} = E\mathbf{e}_z$). Tomando en cuenta estos dos hechos las ecuaciones (4.1-4.18) se reducen para el estado inicial a un sistema de ecuaciones análogo al correspondiente al modelo del inyector autónomo, estudiado en la sección 1.6, y es el siguiente:

$$j_i = q_i E_i \quad \frac{dE_i}{dz} = q_i \quad (4.24)$$

$$j_c = S E_c \quad \frac{dE_c}{dz} = 0 \quad (4.25)$$

con las condiciones de contorno, que vienen de las ecuaciones (4.12-4.15):

$$\phi_i(-L) = 1 \quad (4.26)$$

$$q_i(-L) = C \quad (4.27)$$

$$\phi_c(d) = 0 \quad (4.28)$$

$$\phi_c(0) = \phi_i(0) \quad (4.29)$$

$$j_c(0) = j_i(0) = j \quad (4.30)$$

Entonces la solución para el campo eléctrico estacionario es:

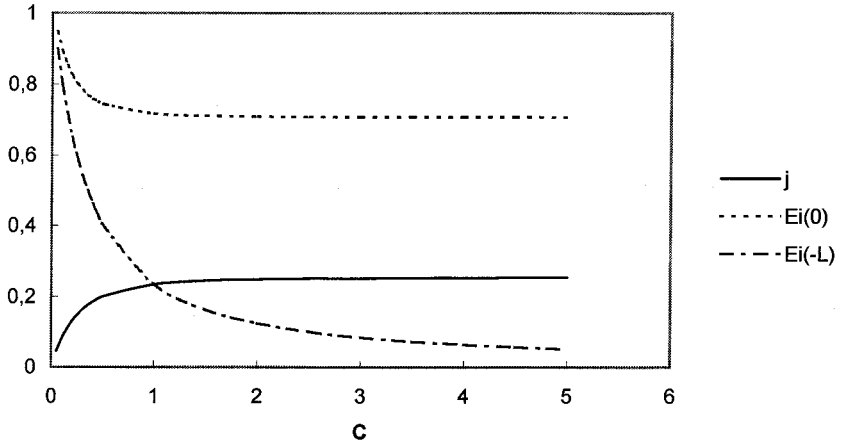


Figura 4.2: Densidad de corriente j , campo eléctrico en el inyector $E_i(-L)$, y campo eléctrico en la interfase del lado del medio no-ohmico $E_i(0)$ en régimen de S baja, $S = 9,5 \cdot 10^{-3} \ll 1$, en función del parámetro de inyección C . En todas las figuras del capítulo todas las variables son adimensionales, según la definición en 4.2, excepto donde se indica.

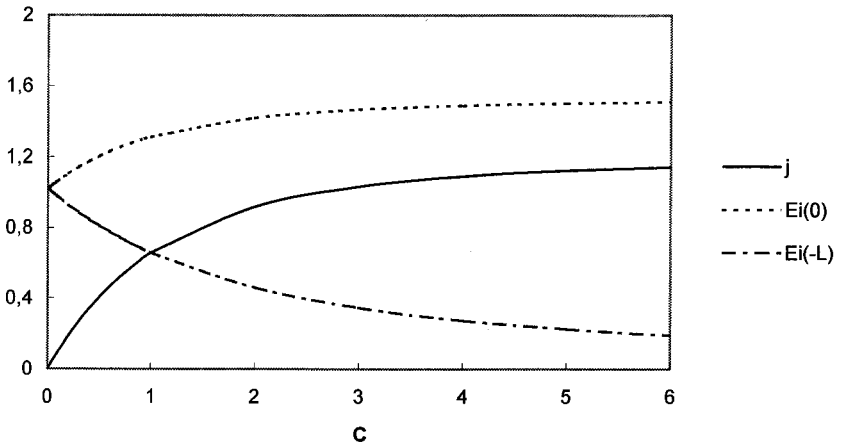


Figura 4.3: Densidad de corriente j , campo eléctrico en el inyector $E_i(-L)$, y campo eléctrico en la interfase del lado del medio no-ohmico $E_i(0)$ en régimen de S alta, $S \gg 1$, en función del parámetro de inyección C .

$$E_i(z) = \sqrt{2j(z+b)} \quad z < 0 \quad (4.31)$$

$$E_c(z) = \frac{j}{S} \quad z > 0 \quad (4.32)$$

Al igual que en la sección 1.6, para que la solución quede completamente definida es necesario determinar las magnitudes j , que es la densidad de corriente eléctrica, y b , que proporciona $E_i(0)$. Se puede

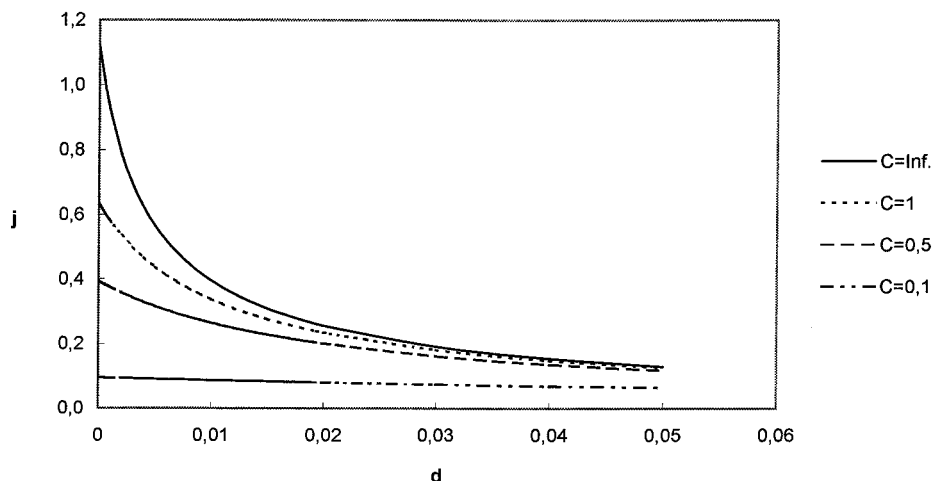


Figura 4.4: Densidad de corriente j para $S = 9,5 \cdot 10^{-3}$ en función de la anchura de la capa del medio óhmico d para diferentes valores del nivel de inyección C . La caída de j para valores más altos de d es más rápida si la inyección es fuerte.

estudiar la relaciones entre j y b a través de las ecuaciones (4.26, 4.27). De la ec. (4.27):

$$b = \frac{j}{2C^2} + L \quad (4.33)$$

Integrando las ecuaciones (4.31, 4.32) desde $z = -L$ a $z = d$ (ecuación del potencial eléctrico) se tiene:

$$1 = \sqrt{\frac{8}{9}} j \left[\left(\frac{j}{2C^2} + L \right)^{3/2} - \left(\frac{j}{2C^2} \right)^{3/2} \right] + \frac{j}{S} d \quad (4.34)$$

Con la ecuación (4.34) puede verse cómo es la dependencia de la densidad de corriente con el nivel de inyección C . La expresión para la densidad de carga superficial total (incluyendo la carga de polarización) en la interfase es:

$$\sigma_s = \frac{j}{S} - \sqrt{2jb} \quad (4.35)$$

Si el parámetro S es lo suficientemente pequeño, tenderá a acumularse en la interfase una carga superficial positiva (de igual signo al campo eléctrico aplicado). Para un cierto valor S^{crit} la carga superficial se hace cero. Este valor crítico de la conductividad adimensional depende del valor de d , la anchura de la capa de fluido no-ohmico L y del nivel de inyección, alcanzando un valor máximo respecto a C en el régimen de

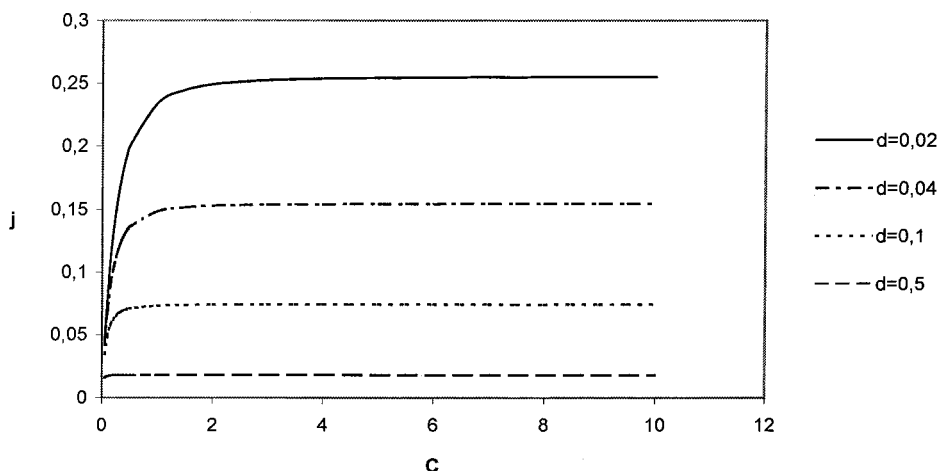


Figura 4.5: La densidad de corriente j para $S = 9,5 \cdot 10^{-3}$ en función del parámetro de inyección C para diferentes valores de la anchura de la capa del medio óhmico d . El régimen *CLCE* se alcanza más rápidamente en capas óhmicas más gruesas.

inyección fuerte *CLCE*. Si se continúa disminuyendo S , la carga superficial se hace negativa y la presión eléctrica tira del medio hacia el electrodo inyector en lugar de empujarlo hacia el electrodo colector. La figura 4.2 muestra la densidad de corriente y el campo eléctrico en el inyector e inmediatamente encima de la interfase ($z = 0^-$) en función del parámetro de inyección para $S \ll S^{crit}$. La figura 4.3 es la gráfica correspondiente al caso $S \gg S^{crit}$. En ambas gráficas se pueden ver dos regiones bien definidas, según el rango de valores de C : una primera región para valores pequeños del nivel de inyección donde la densidad de corriente j y $E_i(-L)$ son respectivamente funciones crecientes y decrecientes de C , y $E_i(0)$ que es decreciente si $S < S^{crit}$ pero creciente si $S > S^{crit}$. Rápidamente se llega a una segunda región. En esta región todas las magnitudes se saturan haciéndose constantes respecto a C . Esta región es la correspondiente al régimen *CLCE*. En las figuras 4.4 y 4.5 se representan la densidad de corriente j en el caso de baja conductividad adimensional, en función de d y C para diferentes valores de C y d respectivamente. En este caso, bajo inyección fuerte, la densidad de corriente es menor para capas de medio óhmico más anchas. Este comportamiento aislante se corresponde con el comportamiento de las curvas de corriente experimentales para los líquidos que se han utilizado en el presente trabajo (ver capítulo 2) y tiende a desaparecer si se desactiva la fuente de carga espacial ($C = 0$).

Los valores críticos S^{crit} se pueden ver en la figura 4.6 para dos valo-

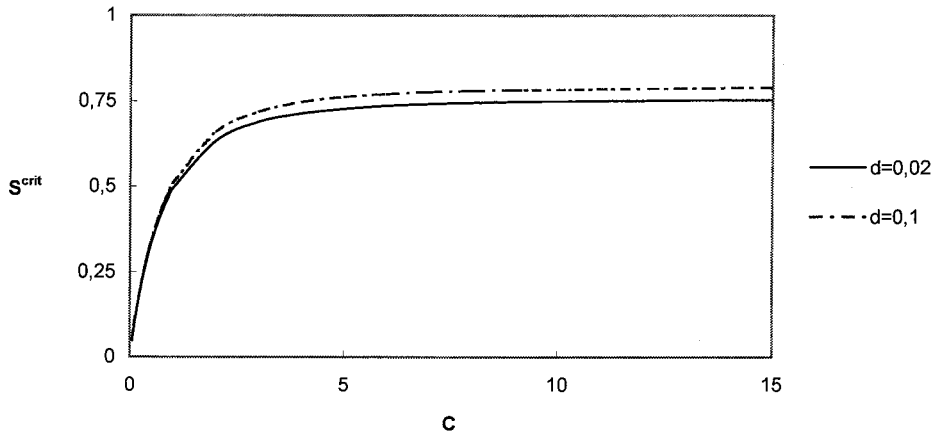


Figura 4.6: Valores críticos de la conductividad adimensional S^{crit} (para los cuales $\sigma_s = 0$) en función del nivel de inyección C para $d = 0,02$ y $d = 0,1$. $C = 10^3$.

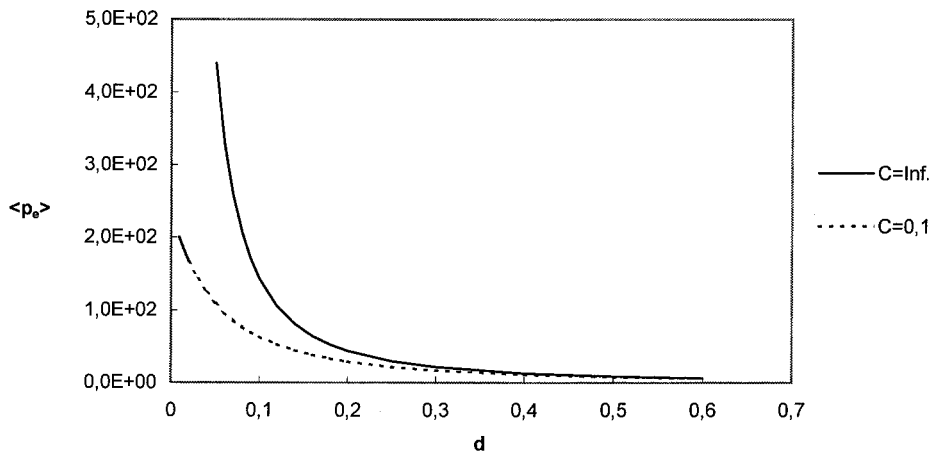


Figura 4.7: Salto de la presión eléctrica $\langle (1/2)\epsilon_r E^2 \rangle$, para $S = 9,5 \cdot 10^{-3}$, en función de la anchura de capa óhmica d para diferentes niveles de inyección C .

res distintos de d . Analizando el salto de la presión $\langle p_e \rangle = \langle \epsilon_r E^2 / 2 \rangle$ se consigue cierta información cualitativa sobre el mecanismo de inestabilidad de superficie para regímenes de baja y alta S . El salto de la presión se representa en función de la anchura de la capa del medio óhmico para $S < S^{crit}$ y como puede verse es siempre una función decreciente de la anchura (Fig. 4.7). Como ya se ha comentado esta situación es potencialmente inestable pues si se produce una perturbación de la superficie inicialmente plana habrá una mayor presión eléctrica en las áreas más delgadas y, como la presión para $S < S^{crit}$ es del mismo signo que el campo aplicado, la perturbación se verá reforzada. Al

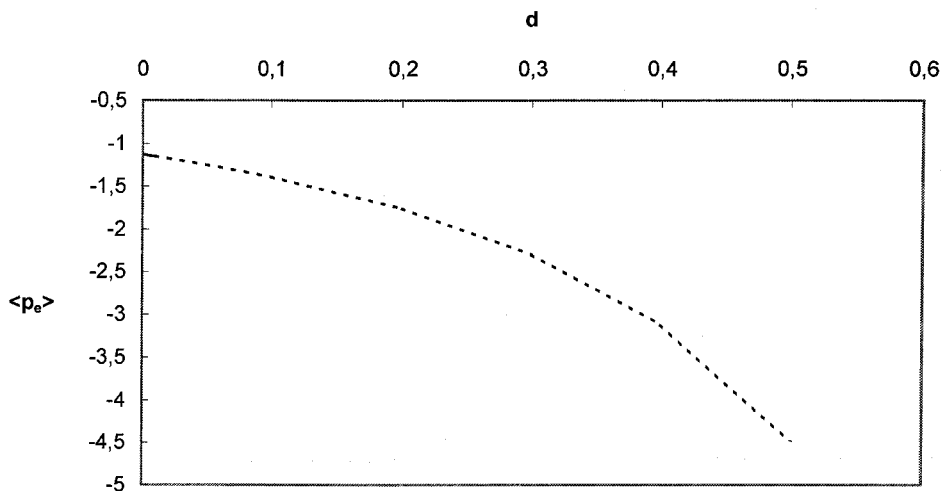


Figura 4.8: Salto de la presión eléctrica en el caso de régimen de elevada S representado en función de d . $C = 10^4$.

contrario de lo que ocurre en el caso puramente aislante, analizado por Koulova-Nenova y Atten (1997); Atten *et al.* (1998), esta tendencia de la presión se mantiene para todo el rango de valores de d . Por ello, en principio no debiera haber una anchura crítica del fluido óhmico para la cual no es posible el mecanismo de inestabilidad superficial, lo cual parece que concuerda con las observaciones experimentales mostradas en el apartado 3.3.1.

El salto de presión para $S > S^{crit}$ se representa en la figura 4.8, donde se ve que su valor absoluto es una función creciente de la anchura de la capa óhmica. Esta es de nuevo una situación potencialmente inestable pues para $S > S^{crit}$ la presión eléctrica en la superficie tiene signo contrario al del campo aplicado (dirigida hacia el electrodo inyector). Aún podemos sacar otra conclusión: ya que, según se deduce de las gráficas presentadas, bajo inyección fuerte los valores bajos de S permiten una acumulación de carga mucho mayor que en el caso de valores altos de S , la inestabilidad de superficie debería ocurrir para valores del potencial aplicado más bajos en el primer caso. Esto se ve quizá más claramente en la figura 4.9, donde la presión eléctrica sobre la superficie se representa en función de la conductividad adimensional S . No sólo el signo de la presión cambia a partir del valor S^{crit} sino que también su magnitud es significativamente mayor para $S < S^{crit}$, lo cual parece estar en concordancia con el hecho de que la inestabilidad Rosetón, según los resultados de 3.3 se presenta en valores críticos bastante menores que los correspondientes a la inestabilidad de una superficie conductora sin inyección de carga. En cualquier caso un análisis perturbativo lineal,

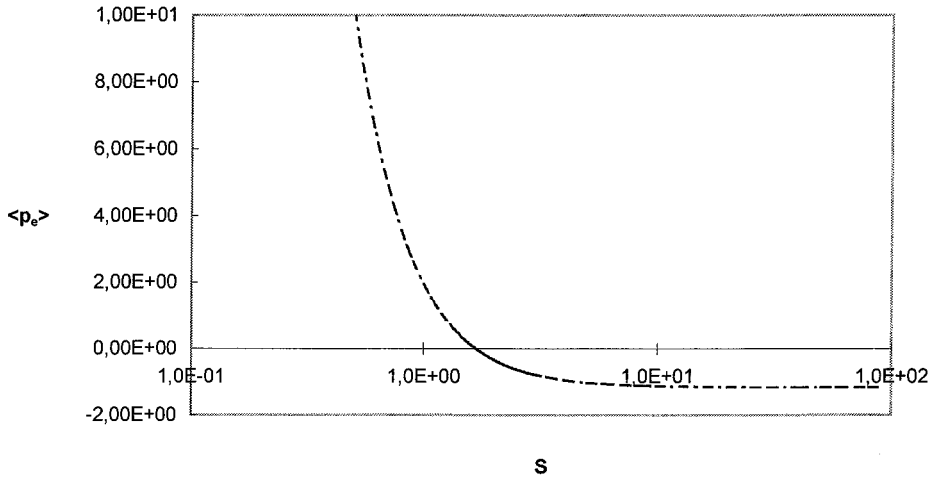


Figura 4.9: Salto de presión eléctrica frente a S (en escala logarítmica). $d = 0,02$. $\varepsilon = 4,69$. $C = 10^4$.

más preciso, permitiría calcular los valores críticos de la inestabilidad en ambos casos, con y sin ($C = 0$) inyección, como iremos viendo en las secciones siguientes.

4.4. Inestabilidad lineal

Estudiemos ahora la evolución de una pequeña perturbación introducida en la solución estática. Si el perfil de la superficie inicialmente plana se vuelve irregular se producirá una desviación de los valores iniciales del campo y la densidad de corriente eléctricos. Supongamos que estas perturbaciones son lo suficientemente pequeñas para hacer posible un tratamiento lineal. También supondremos que todas estas perturbaciones se mantienen finitas. Como en las ecuaciones de la solución estática, todas las magnitudes introducidas aquí son adimensionales, siendo las magnitudes de referencia las mismas que en la sección 4.2. El perfil de la superficie perturbada ($z_s = \eta(x, y, t)$) puede expresarse de la forma:

$$\eta(x, y, t) = \eta_0 e^{\omega t + i(k_x x + k_y y)} \quad (4.36)$$

Donde ω es un número complejo, k_x y k_y son reales y η_0 es la amplitud de deformación de la interfase. Las perturbaciones de todas las magnitudes eléctricas pueden expresarse a través de la perturbación del potencial eléctrico $\delta\phi$ que es de la forma:

$$\delta\phi(x, y, z, t) = g(z) e^{\omega t + i(k_x x + k_y y)} \quad (4.37)$$

Como consecuencia de la deformación de la superficie, aparece un término de la perturbación de la velocidad. Sólo usaremos la componente z puesto que las componentes tangenciales de la velocidad están relacionadas con ella a través de la ecuación $\nabla \cdot \delta \mathbf{v} = 0$:

$$\delta v_z(x, y, z, t) = u(z)e^{\omega t + i(k_x x + k_y y)} \quad (4.38)$$

siendo la perturbación de la componente normal (en primer orden) de la velocidad:

$$u(0) = \omega \eta_0 \quad (4.39)$$

Usando las ecuaciones (4.1-4.11) se deduce un conjunto de ecuaciones diferenciales (ver apéndice 4.11):

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \left[\frac{T \rho_{ri}}{M^2} \omega - \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \right] u_i = T k^2 \frac{\sqrt{2j}}{4} (z+b)^{-3/2} \left[g_i + 4(z+b)^2 \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) g_i \right] \quad (4.40)$$

$$\frac{dg_i}{dz} - u_i - 4(z+b) \frac{d}{dz} \left[(z+b) \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) g_i \right] = \frac{4}{\sqrt{2j}} (z+b)^{3/2} \omega \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) g_i \quad (4.41)$$

$$\frac{d^2 g_c}{dz^2} - k^2 g_c = 0 \quad (4.42)$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \left[\frac{T \rho_{rc}}{M^2} \omega - \mu \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \right] u_c = 0 \quad (4.43)$$

De nuevo, los subíndices i y c se refieren a los fluidos no-ohmico y ohmico respectivamente. La solución general del conjunto de ecuaciones diferenciales proporciona las perturbaciones del potencial eléctrico, la velocidad y el perfil de la superficie en función del número de onda asociado a la perturbación, entre otros parámetros. La solución a este sistema de ecuaciones da lugar a trece constantes de integración desconocidas. Las condiciones de contorno que se siguen de introducir una perturbación lineal en (4.12-4.18) son:

$$g_i(-L) = 0 \quad (4.44)$$

$$g_i''(-L) = 0 \quad (4.45)$$

$$g_c(d) = 0 \quad (4.46)$$

$$g_i(0) - g_c(0) = \left(\sqrt{2jb} - j/S \right) \eta_0 \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{2j} \left[b^{-1/2} g_i'(0) + 2(g_i''(0) - k^2 g_i(0)) b^{1/2} \right] = \\ & 2S g_c'(0) + 2\sigma_s u_i'(0) - 2\omega(g_i'(0) - \varepsilon g_c'(0)) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Estas son las condiciones de contorno eléctricas. Las condiciones de contorno (4.47,4.48) vienen de la continuidad del potencial eléctrico y la conservación de carga respectivamente. A partir de ahora, las primas se usarán para indicar la derivada normal en primer orden (d/dz). Las condiciones de contorno para la velocidad son:

$$u_i(-L) = u_i'(-L) = 0 \quad (4.49)$$

$$u_c(d) = u_c'(d) = 0 \quad (4.50)$$

$$u_i(0) = u_c(0) = \omega \eta_0 \quad (4.51)$$

$$u_i'(0) = u_c'(0) \quad (4.52)$$

Las condiciones (4.49, 4.50) son consecuencia de la rigidez de los dos electrodos y las condiciones (4.51, 4.52) vienen de la imiscibilidad de los dos fluidos. Las condiciones de balance de esfuerzos en las direcciones tangencial y normal a la interfase son respectivamente (ver apéndice 4.11):

$$\frac{\mu}{T} u_c''(0) - \frac{1}{T} u_i''(0) + k^2 \sigma_s (E_c(0) \eta_0 - g_c(0)) = 0 \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{M^2} \omega (\rho_{ri} u_i'(0) - \rho_{rc} u_c'(0)) + \frac{\mu}{T} (u_c'''(0) - 3k^2 u_c'(0)) - \\ & \frac{1}{T} (u_i'''(0) - 3k^2 u_i'(0)) + k^2 \sqrt{\frac{j}{2b}} g_i(0) - k^2 \left(\sqrt{2jb} g_i'(0) - \frac{\varepsilon j}{S} g_c'(0) \right) + \\ & k^2 \frac{1}{U} \left(\frac{k^2}{Bo} + 1 \right) \eta_0 = 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

Las ecuaciones (4.44-4.54) forman un sistema homogéneo de ecuaciones para las constantes de integración resultantes de las ecuaciones diferenciales (4.40-4.43) y la amplitud de deformación η_0 . El determinante de los coeficientes en este sistema homogéneo debe ser cero para que exista una solución no trivial de las perturbaciones. El determinante cero resulta en una relación de dispersión $\omega(k)$, que también es una función de los otros parámetros adimensionales que intervienen en el problema. La resolución de este problema proporcionaría una descripción completa del comportamiento de la inestabilidad lineal en una interfase no-ohmica/ohmica sometida a inyección unipolar.

Si suponemos que se cumple el principio de intercambio de inestabilidades (para ver una definición de este principio consultar el libro de Chandrasekhar (1961)), y por consiguiente $\omega = 0$ marca el punto de inestabilidad incipiente. Esta hipótesis puede justificarse en ciertos límites en los que las ecuaciones del sistema son puramente hidrostáticas. En el caso $\omega = 0$ las ecuaciones se reducen:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right)^2 u_i = -Tk^2 \frac{\sqrt{2j}}{4} (z+b)^{-3/2} \left[g_i + 4(z+b)^2 \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right) g_i \right] \quad (4.55)$$

$$4(z+b) \frac{d}{dz} \left[(z+b) \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right) g_i \right] = \frac{dg_i}{dz} - u_i \quad (4.56)$$

$$\frac{d^2 g_c}{dz^2} - k^2 g_c = 0 \quad (4.57)$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right)^2 u_c = 0 \quad (4.58)$$

Para $\omega = 0$ todas las condiciones de contorno (4.44-4.53) se mantienen sin cambios excepto (4.48, 4.51, 4.54). La condición (4.48) toma la forma:

$$\sqrt{2j} \left[b^{-1/2} g'_i(0) + 2(g''_i(0) - k^2 g_i(0)) b^{1/2} \right] = 2Sg'_c(0) + 2\sigma_s u'_i(0) \quad (4.59)$$

la ec.(4.51) queda:

$$u_i(0) = u_c(0) = 0 \quad (4.60)$$

y la ecuación (4.54):

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{T}(u_c'''(0) - 3k^2 u_c'(0)) - \frac{1}{T}(u_i'''(0) - 3k^2 u_i'(0)) + \\ & k^2 \sqrt{\frac{j}{2b}} g_i(0) - k^2 \left(\sqrt{2jb} g_i'(0) - \frac{\varepsilon j}{S} g_c'(0) \right) + k^2 \frac{1}{U} \left(\frac{k^2}{Bo} + 1 \right) \eta_0 = 0 \end{aligned} \quad (4.61)$$

4.5. Interfase aire/líquido

4.5.1. Ecuaciones

Consideremos el caso de una interfase aire-líquido. Como la movilidad iónica en el aire es alta se puede ignorar en la densidad de corriente eléctrica el efecto del movimiento fluido en esta capa comparado con el transporte iónico a causa del campo eléctrico aplicado (en magnitudes adimensionales esto implica que $E_i \gg v_i$, ver por ejemplo Koulova-Nenova y Atten (1997)). Entonces la parte eléctrica del problema está desacoplada de las ecuaciones diferenciales para la perturbación de la velocidad. La ecuación (4.56), correspondiente a la perturbación lineal de la densidad de corriente, queda por tanto:

$$4(z+b) \frac{d}{dz} \left[(z+b) \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) g_i \right] = \frac{dg_i}{dz} \quad (4.62)$$

Debido al desacople entre las ecuaciones (4.55, 4.56) en la capa de aire sometida a inyección de carga, y al desacople intrínseco que existe entre las ecuaciones (4.57,4.58) de la capa de líquido óhmico podemos resolver todas las ecuaciones diferenciales perturbativas de la parte eléctrica separadamente a las correspondientes a la velocidad de los fluidos. Además, debido a que el coeficiente μ se hace infinito en el caso de una interfase aire/líquido, y a que buscamos una solución con $k \ll 1$ (larga longitud de onda), en las componentes tangencial y normal de la tensión en la superficie los términos de velocidad y eléctricos están desacoplados (ver ecs. 4.53,4.61). De todo ello se sigue inmediatamente que el modo estacionario de la inestabilidad, en una interfase aire/líquido es fundamentalmente superficial, siendo puramente hidrostático en el límite $k \rightarrow 0$, por lo que el problema convectivo está ausente, al menos en la primera inestabilidad incipiente. Así, debido a que el mecanismo es de superficie (o hidrostático) está justificado que el estudio de la parte eléctrica de las ecuaciones da el criterio de inestabilidad. Las ecuaciones lineales de las perturbaciones de la parte eléctrica son:

$$(z+b)^2 g_i'''(z) + (z+b)g_i''(z) - \left[k^2(z+b)^2 + \frac{1}{4} \right] g_i'(z) - k^2(z+b)g_i(z) = 0 \quad (4.63)$$

$$k^2 g_c(z) - g_c''(z) = 0 \quad (4.64)$$

La solución a las ecuaciones (4.63, 4.64) son respectivamente:

$$g_i(Z) = A_i F_{1,2} \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \frac{3}{4}; \frac{1}{4} k^2 Z^2 \right] + \quad (4.65)$$

$$B_i Z^{1/2} F_{1,2} \left[\frac{3}{4}; \frac{1}{2}, \frac{5}{4}; \frac{1}{4} k^2 Z^2 \right] + C_i Z^{3/2} F_{1,2} \left[\frac{5}{4}; \frac{3}{2}, \frac{7}{4}; \frac{1}{4} k^2 Z^2 \right]$$

$$g_c(z) = A_c e^{kz} + B_c e^{-kz} \quad (4.66)$$

siendo $Z = z + b$

El conjunto de ecuaciones de contorno se reduce ahora a las eléctricas (4.44-4.48) junto con la condición mecánica en la dirección normal, que toma la forma simplificada:

$$\sqrt{\frac{j}{2b}} g_i(0) - \left(\sqrt{2jb} g_i'(0) - \frac{\varepsilon j}{S} g_c'(0) \right) + \frac{1}{U} \left(\frac{k^2}{Bo} + 1 \right) \eta_0 = 0 \quad (4.67)$$

Las funciones F en la ec. (4.66) se llaman *funciones hipergeométricas* (Abramowitz y Stegun, 1965). En nuestro problema son de orden (1, 2). Las soluciones de la ecuación diferencial (4.63) son combinaciones lineales de estas funciones $F_{1,2}$, que se pueden expresar en series de potencias de la forma:

$$F_{1,2}(a; b, c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k (c)_k} \frac{z^k}{k!} = 1 + \frac{a}{bc} z + \frac{a(a+1)}{b(b+1)c(c+1)} \frac{z^2}{2} + \dots \quad (4.68)$$

En definitiva, para interfases aire/líquido, otros mecanismos distintos al de la inestabilidad superficial no están presentes o no influyen en la primera evolución del sistema. Las inestabilidades EHD debidas a las fuerzas electrostáticas de volumen no están presentes en el líquido óhmico por ser $q_c = 0$. Por otra parte, la convección en la capa de aire no induce convección en el líquido debido a la enorme diferencia

que existe entre los coeficientes de viscosidad del gas (aire) y el líquido, con lo que los esfuerzos tangenciales no se transmiten de una capa a otra. Con esto, no es esperable que una inestabilidad de tipo convectivo, asociada al problema de la inyección unipolar (Atten y Moreau, 1972) aparezca antes que la inestabilidad superficial, en el caso de una interfase aire/líquido. Generalmente ambos mecanismos, superficial y convectivo, están presentes y se influyen entre sí pero de lo dicho en este apartado puede concluirse que en una doble capa aire/líquido la inestabilidad está gobernada por la acción de la presión eléctrica sobre la interfase.

4.5.2. Parámetros relevantes

Ya que de las ecs. (4.34,4.33) se ve que la densidad de corriente j y b son funciones de C , queda claro a la vista de las ecs. (4.66-4.67) que los únicos números adimensionales de (4.20-4.21) que quedan en el problema son:

$$U = \frac{T^2}{PBo} = \frac{\varepsilon_0 V^2}{\langle \rho \rangle gh^3} \quad Bo = \frac{\langle \rho \rangle gh^2}{\gamma} \quad (4.69)$$

y

$$C = \frac{q_0 h^2}{\varepsilon_i V} \quad S = \frac{\sigma_c h^2}{K_i \varepsilon_i V} \quad (4.70)$$

Resolviendo el determinante (apéndice 4.12) que resulta de las condiciones de contorno (4.44-4.48,4.67) se obtiene la relación de dispersión para una interfase aire/líquido óhmico en $\omega = 0$. Esta relación de dispersión proporciona la función:

$$U = U(k, Bo, C, S, \varepsilon, d) \quad (4.71)$$

La función $U(k)$ tiene un mínimo para un cierto valor crítico k_c del número de onda. El valor mínimo, U_c , de la U para la cual existe solución del problema lineal proporciona un valor crítico del voltaje eléctrico aplicado en el electrodo inyector necesario para que ocurra la inestabilidad de superficie. El número de Bond es el parámetro que controla el número de onda crítico pues la longitud de onda característica de la inestabilidad superficial vendrá dada por la relación entre las fuerzas gravitacionales y capilares en la interfase. Para valores pequeños del número de Bond Bo esta longitud de onda característica tiende a ser infinita (o lo que es lo mismo, el número de onda $k_c \rightarrow 0$) y el U_c se hace

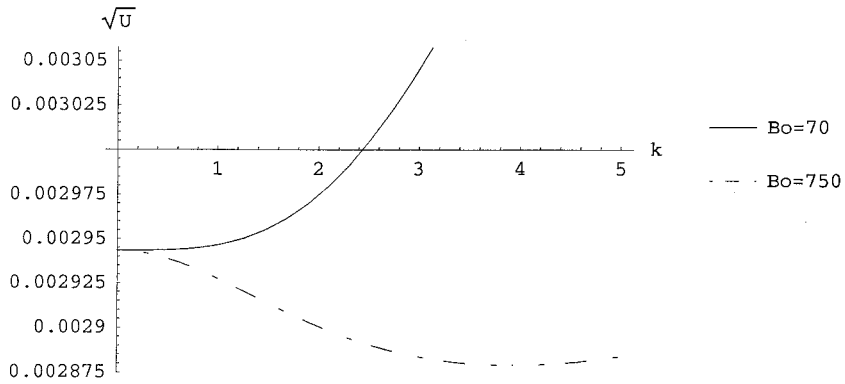


Figura 4.10: Relación de dispersión $U(k)$ con $S = 9,5 \cdot 10^{-3}$, $d = 0,02$, $C = 10^3$. En esta figura se observa la pequeña influencia del número de Bond en la magnitud de U_c incluso para dos valores muy diferentes de Bo .

independiente de Bo . Asimismo, cuanto más baja es la tensión superficial (valores altos de Bo) menor es la longitud de onda característica y mayor es la influencia de Bo en el valor crítico del voltaje V_c . En cualquier caso, incluso para valores críticos $k_c > 0$ la influencia de la tensión superficial en la región de onda larga es de segundo orden comparada con la influencia de los términos de la presión electrostática, siendo el orden de magnitud de $U_c(k_c > 0)$ similar al de $U_c(k_c = 0)$. En las siguientes secciones se muestran los resultados obtenidos para los valores críticos de la inestabilidad de superficie separados según los diferentes rangos de comportamiento que hemos encontrado según el valor de la conductividad adimensional S .

4.5.3. Conductividad adimensional subcrítica ($S < S^{crit}$)

Para valores bajos de la conductividad adimensional, la interfase se carga con el mismo signo que el electrodo inyector. La presión eléctrica en este caso empuja hacia abajo (en dirección positiva del eje Z) la capa de líquido. En este sentido, la figura 4.10 representa la relación de dispersión $U(k)$ para un valor de S más pequeño que aquél para el cual la carga superficial en la interfase cambia de signo y dos valores diferentes del número de Bond Bo . Por encima de la curva $U(k)$ la interfase plana es inestable mientras que por debajo es estable. La influencia del número de Bond es la esperada en una inestabilidad de superficie: dependiendo del valor de Bo el mínimo está en $k = 0$ o en un valor finito $k > 0$. No obstante, por debajo de un cierto valor Bo el mínimo siempre se

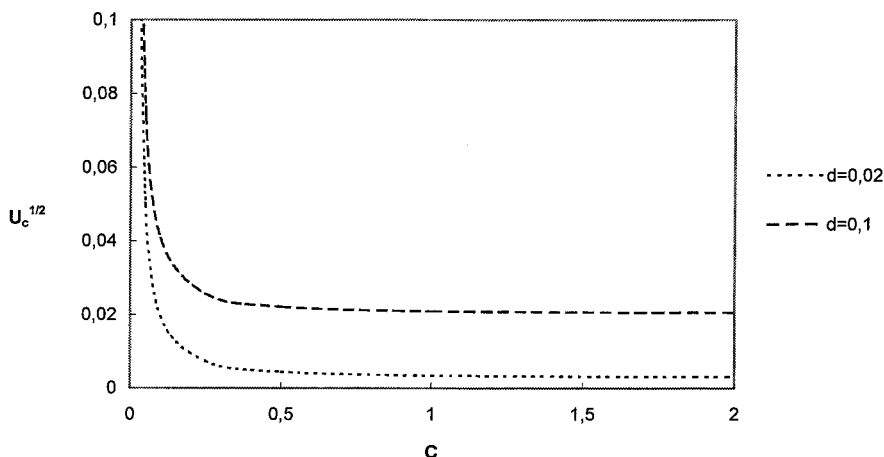


Figura 4.11: Comparación de los valores típicos de los mínimos de U en la región de inyección débil $C \ll 1$ y la región de inyección fuerte $C \gg 1$. $S = 9,5 \cdot 10^{-3}$, $Bo = 0,1$.

encuentra en el límite de onda larga, $k = 0$ y la influencia del número de Bond en la región de onda larga tiende a ser pequeña.

La figura 4.11 muestra la fuerte influencia que tiene el parámetro de inyección C en la zona de inyección débil: para C pequeños los valores U_c crecen haciendo necesario tener potenciales muy elevados en el electrodo inyector para que se produzca la inestabilidad. Tan pronto como se llega a la zona de inyección fuerte U_c se hace una función constante respecto a C , como era de esperar pues todas las magnitudes se saturan en este límite, como ya hemos visto anteriormente en el apartado 4.3. Dada la clara variación de los valores críticos según el nivel de inyección puede afirmarse que el problema de la inestabilidad superficial sin inyección Taylor y McEwan (1965); Melcher y Smith Jr. (1969) es muy diferente.

En la figura 4.12 puede verse la variación de U en función de la anchura de la capa de líquido óhmico en el régimen de inyección fuerte. Está claro a la vista de la gráfica que es posible tener U_c muy bajos reduciendo d . Esto significa que capas delgadas de líquido óhmico se harían inestables a potenciales eléctricos muy bajos, en condiciones de inyección fuerte. Este comportamiento refleja claramente el carácter aislante del líquido. En concreto, en el límite $S \rightarrow 0$ la densidad de corriente bajo inyección fuerte es $j = S/d$ y la relación de dispersión (4.71) da $U_c = d^3/\varepsilon$ si $Bo \rightarrow 0$.

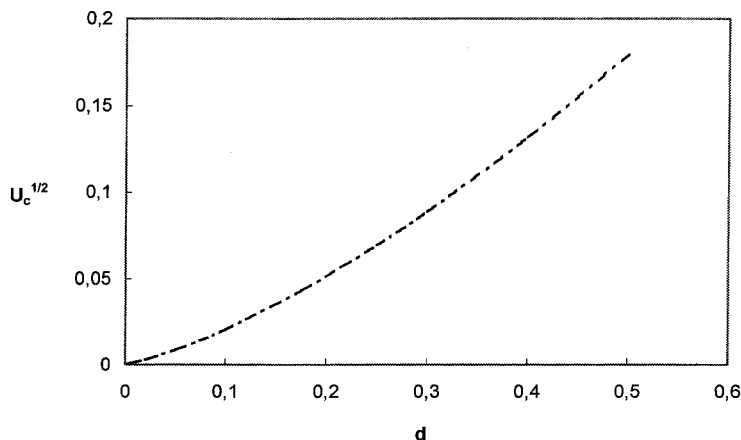


Figura 4.12: Variación de los mínimos de U en función de d , con $S = 9,5 \cdot 10^{-3}$, $C = 10^3$, $Bo = 0,1$.

4.5.4. Conductividad adimensional crítica ($S \sim S^{crit}$)

La figura 4.13 muestra U_c en función de la conductividad adimensional en el límite de inyección fuerte. Como se ve, existen tres regiones bien diferenciadas, existiendo una región (de transición) en la que U_c toma valores negativos, lo cual es signo sin duda de que el sistema es estable, pues la región inestable no existe (V_c son imaginarios puros). Esta región coincide con el rango de S para el cual la densidad de carga superficial en la interfase cambia de signo (ver 4.3) y establece una separación clara entre los regímenes aislante y conductor que puede manifestar en principio el líquido óhmico, y que ya anticipamos en la sección 4.3. A la izquierda de la región intermedia tenemos el mecanismo para valores $S < S^{crit}$, que en principio corresponde al mecanismo del Rosetón detectado experimentalmente. A la derecha de la región de transición tenemos el mecanismo correspondiente a valores $S > S^{crit}$ que se correspondería en principio con el mecanismo de la inestabilidad EHD de superficie de una capa de líquido conductor. Como vemos, la inyección de carga permite tener inestabilidades en valores críticos mucho más bajos para regímenes de S pequeño que para regímenes de S grande. Si no se aplicara una inyección de carga esta situación no sería posible.

Los valores de transición S^{crit} dependen del nivel de inyección C como se ve en las figuras 4.14, 4.15. Cuando C tiende a cero sólo queda la región $S > S^{crit}$, con lo que queda claro que ahora existen valores críticos (los de la región $S < S^{crit}$) que los trabajos anteriores sin inyección de carga son sólo un caso particular no podían predecir (Taylor y McEwan,

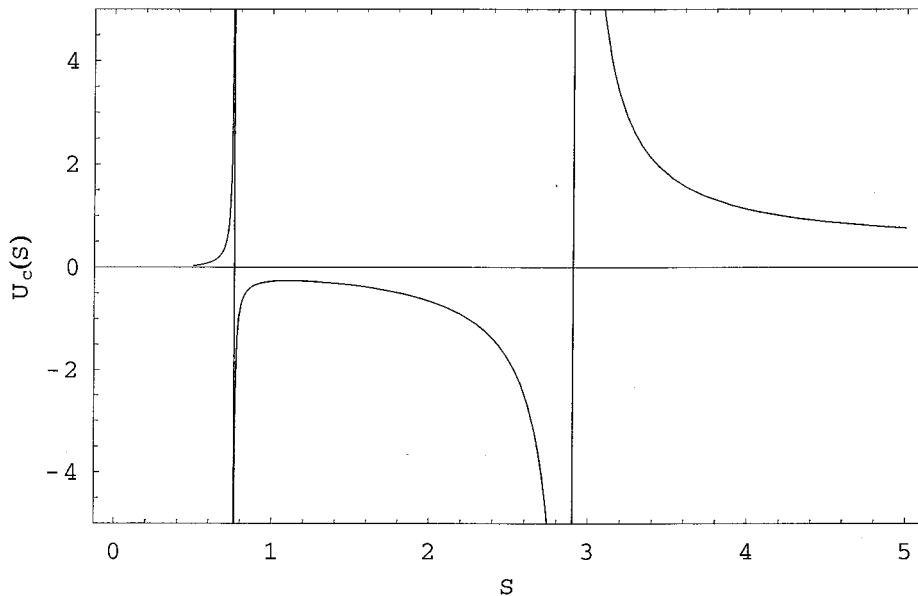


Figura 4.13: Valor crítico U_c en función de S bajo inyección fuerte ($C = 10^4$) y con anchura de capa óhmica $d = 0,02$. Es de notar la diferencia en el orden de magnitud de los valores críticos entre la región poco conductora y la región conductora, siendo mucho más altos en este segundo caso. La inestabilidad está ausente ($U < 0$) en la región intermedia, donde la densidad de carga en la interfase es cercana a cero.

1965; Melcher y Smith Jr. , 1969). Si por el contrario incrementamos el nivel de inyección, la región $S < S^{crit}$ se desplaza hacia valores más altos de S hasta llegar a un valor límite que viene dado por el límite de inyección fuerte y que también depende de los otros parámetros del problema (por ejemplo, de d : figura 4.6).

4.5.5. Conductividad adimensional supercrítica ($S > S^{crit}$)

Excepto para valores de S cercanos a la segunda asíntota, que marca la separación con la región de transición estudiada en el apartado anterior, en la región $S > S^{crit}$ la variación de los autovalores con C no es tan dramática como en el caso del régimen de pequeña conductividad adimensional, siendo U_c del mismo orden de magnitud que en los casos de inyección débil o ausencia de inyección (ver figura 4.16). Esto era de esperar pues la inestabilidad del tipo $S > S^{crit}$ es posible incluso en ausencia de inyección. Claramente, el límite $S \rightarrow \infty$ corresponde a líquidos conductores perfectos. En la figura 4.17 presentamos las típicas

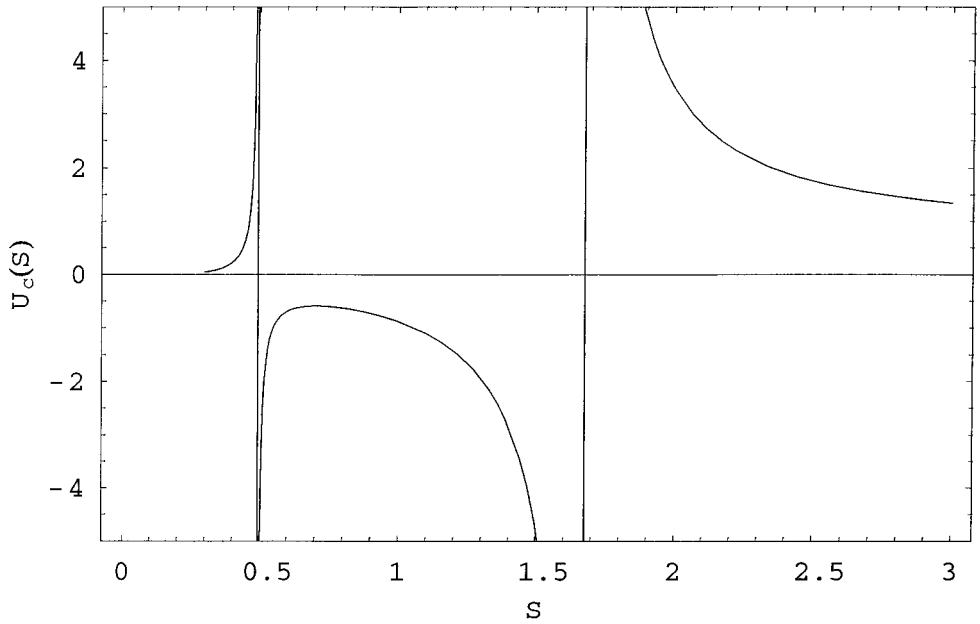


Figura 4.14: La región de transición entre los dos regímenes posibles según S con un nivel de inyección $C = 1$, siendo $d = 0,02$, $Bo = 0,1$.

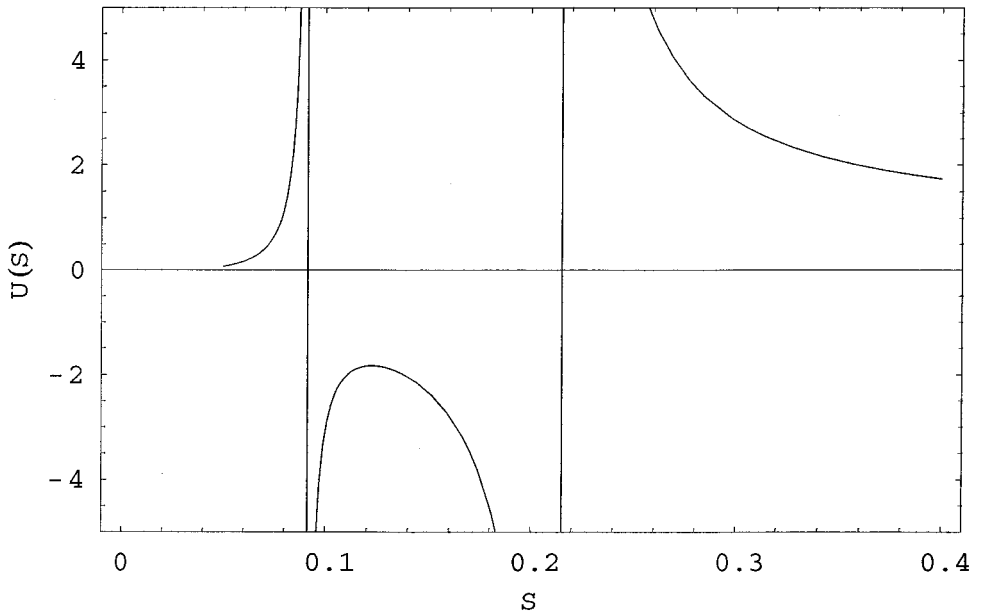


Figura 4.15: La región de transición entre los dos regímenes posibles según S con un nivel de inyección $C = 0,1$, siendo $d = 0,02$, $Bo = 0,1$. En el límite de ausencia de inyección $C = 0$ el mecanismo de $S > S^{crit}$ ocupa todo el rango de conductividades adimensionales. $d = 0,02$, $Bo = 0,1$.

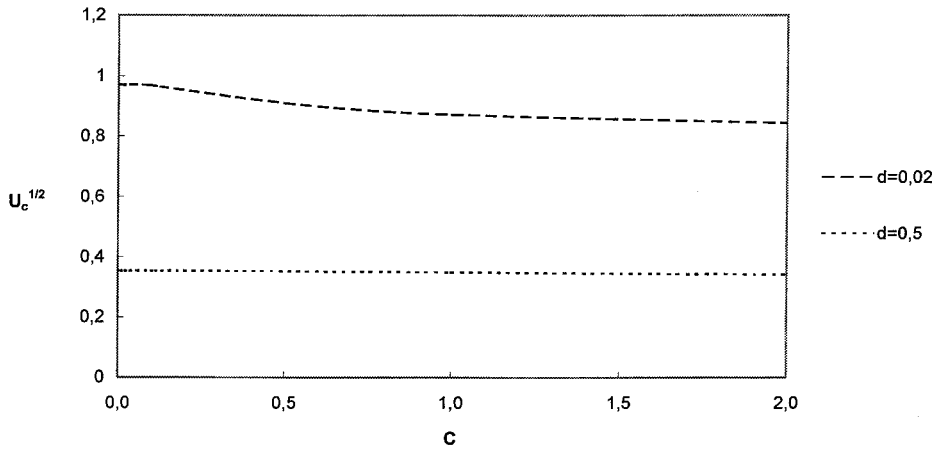


Figura 4.16: Variación con el parámetro de inyección C del valor crítico U_c para un líquido conductor perfecto. Anchuras $d = 0,02, 0,5$. Si comparamos estas dos curvas vemos que el comportamiento de U_c con d es el opuesto al que tiene para régimen de $S < S^{crit}$. $Bo = 0,1$.

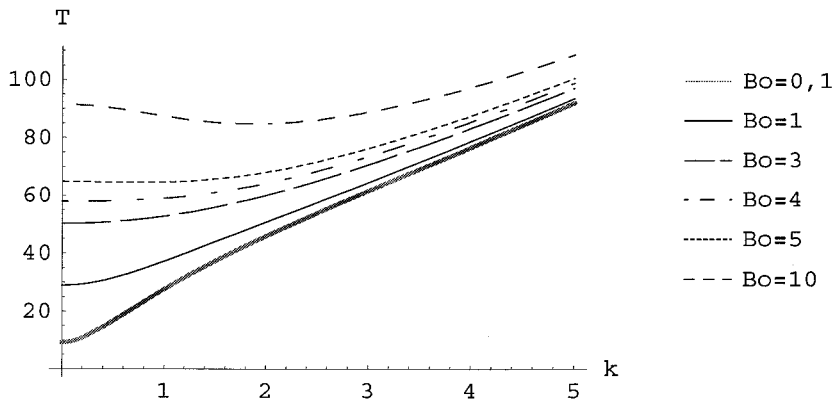


Figura 4.17: Típicas curvas de dispersión para líquidos conductores. La forma de las curvas con inyección fuerte es similar a las del caso sin inyección. $P = 2 \cdot 10^3$, $d = 0,02$, $C = 10^4$.

curvas de dispersión las inestabilidades de superficie en líquidos conductores perfectos (Taylor y McEwan, 1965; Koulova-Nenova y Atten, 1998) que se han obtenido para diferentes valores de Bo y $d = 0,02$. Incluso en el caso de inyección fuerte, estas curvas correspondientes al límite $S \rightarrow \infty$ son similares a las obtenidas al caso sin inyección (Taylor y McEwan, 1965). Esto confirma que el mecanismo en líquidos conductores perfectos, para d pequeñas, es el mismo con y sin inyección.

La bien conocida inestabilidad de una capa de líquido conductor perfecto sin inyección está regida por la relación, en magnitudes dimen-

sionales, (Taylor y McEwan, 1965; Melcher, 1963):

$$- \langle \rho \rangle g - \gamma k^2 + \varepsilon_0 k E^2 \coth(kL) = 0 \quad (4.72)$$

Para $\gamma = 0, k = 0$ el criterio de inestabilidad es

$$\varepsilon_0 E^2 = \langle \rho \rangle g L \quad (4.73)$$

que se corresponde con $U = L^3$ en nuestras magnitudes adimensionales. Esta relación la hemos obtenido también correctamente de nuestra relación de dispersión (4.71) para $C = 0$. El límite correspondiente a $C \rightarrow \infty, Bo \rightarrow 0$ da $U_c^{1/2} = (2/3)L^{3/2}$ y reproduce el resultado de Atten y Koulova-Nenova (1999). Con esto, es evidente que si bien en el límite de conductor perfecto el mecanismo es el mismo en los casos $C = 0$ y $C \rightarrow \infty$ los valores críticos en ningún caso son los mismos, siendo la relación entre ambos, para $k_c = 0$ exactamente $U_c(C \rightarrow \infty)/U_c(C = 0) = 2/3$. No obstante, si bien el mecanismo conductor es análogo con y sin inyección, la existencia de la asíntota introduce particularidades fundamentales como veremos en el siguiente apartado.

4.5.6. Las tres ramas de las inestabilidades EHD de superficie

Como hemos comentado en el apartado anterior el mecanismo de inestabilidad en el caso conductor es en principio semejante tanto si hay inyección como si no. Sin embargo, si pasamos la gráfica de transición en magnitudes adimensionales de la figura 4.13 (a) a magnitudes dimensionales (figura 4.18) vemos que tan pronto como la conductividad deja de ser infinita pueden aparecer en la región conductora múltiples valores críticos de inestabilidad superficial *para un mismo líquido*, situación que es completamente *irreproducible* sin inyección de carga (Taylor y McEwan, 1965; Melcher, 1963). En efecto, como puede verse en la citada gráfica en magnitudes dimensionales, puede haber tres valores críticos posibles para cada conductividad (o sea, para un mismo líquido) en el límite de larga longitud de onda $k = 0$. Los valores de la gráfica han sido obtenidos buscando para cada valor de la conductividad física del líquido σ_c los pares de valores $U_c(S_c)$ y S_c que cumplen la relación:

$$\sigma_c = K_a \left(\frac{\varepsilon_0 \rho g}{h} \right)^{1/2} S_c U_c^{1/2} \quad (4.74)$$

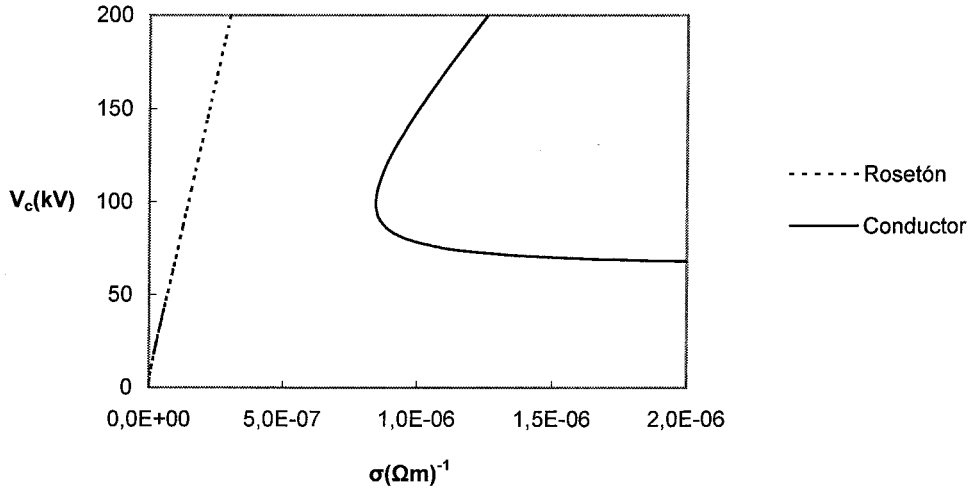


Figura 4.18: Las ramas de las inestabilidades de superficie. La curva de la izquierda corresponde al mecanismo poco conductor (Rosetón) y la curva de la derecha corresponde al mecanismo conductor. Magnitudes adimensionales: $Bo = 0,1$, $d = 0,02$, $\varepsilon = 4,69$, $C = 10^3$. Magnitudes dimensionales: $h \sim 10^{-2} m$, $K_i \sim 10^{-4} m^2/(Vs)$, $\varepsilon_i \sim 10^{-11} C^2 N^{-1} m^{-2}$, $\langle \rho \rangle g \sim 10^4 Nm^{-3}$.

donde K_a es la movilidad del aire, ρ es la densidad de masa del líquido y ε es la constante dieléctrica del aire.

En la rama de la izquierda pueden verse los valores críticos correspondientes a la región de líquidos muy poco conductores, en los que la presión eléctrica bajo inyección está dirigida hacia abajo (hacia el electrodo colector). El área delimitada por esta curva y el eje $\sigma_c = 0$ es la zona inestable de la región poco conductora. Tiene en principio valores para todo el rango de conductividades, sólo que es muy rápidamente creciente con el valor de la conductividad física.

Sin embargo, para conductividades suficientemente elevadas existe otra curva de inestabilidad con dos valores para cada conductividad. Esta segunda curva (la de la derecha) se corresponde con el mecanismo de inestabilidad superficial para líquidos de conductividad alta. La bifurcación más baja de esta segunda curva tiende rápidamente al valor $U_c^{1/2} = (2/3)L^{3/2}$ correspondiente a un líquido conductor perfecto bajo inyección fuerte, mientras que la bifurcación más alta es siempre creciente, haciéndose infinita para $\sigma_c = \infty$, motivo por el cual no es observada en los trabajos de Koulova-Nenova (1997); Koulova-Nenova y Atten (1998); Atten y Koulova-Nenova (1999). La zona intermedia entre las dos curvas críticas es la zona estable proveniente de la región de transición de la figura 4.13 (a). Resumiendo, todas las conductividades tienen al menos un valor crítico posible o tres, si la conductividad es

superior a un valor crítico.

4.5.7. Comparación del criterio teórico con las medidas del Rosetón en el triodo

Con los valores de las magnitudes dimensionales que tenemos en el montaje experimental del capítulo 3 ($K_a \sim 10^{-4} \text{ m}^2/(\text{Vs})$, $h \sim 10^{-2} \text{ m}$, $\rho \sim 10^3 \text{ kg/m}^3$) la conductividad de los líquidos usados se encuentra en la zona de inestabilidad superficial con mecanismo poco conductor, con lo que parece confirmarse que el Rosetón es debido a una presión eléctrica del mismo signo que el campo aplicado. No obstante debemos tener en cuenta que, en condiciones de inyección fuerte, el que estas conductividades estén en la zona poco conductora depende además del valor de las demás variables del sistema (Vega y Pérez, 2002b). El caso es que para anchuras de la capa de aire del orden de 1 cm y del orden de 1 mm para la capa de líquido ohmico, en el caso de un líquido conductor sin inyección, los valores críticos del potencial para la inestabilidad de superficie son del orden de $50\text{--}100 \text{ kV}$, claramente distintos a los valores críticos obtenidos para el triodo con inyección de carga, del orden de 1 kV . Con esto, insistimos una vez más que la inestabilidad superficial descrita por Taylor y McEwan (1965); Melcher (1963); Néron de Surgy (1995) no es la misma que el Rosetón.

Como vimos, el Rosetón no es observable en los experimentos a menos que se efectúe una inyección de carga, lo cual puede explicarse viendo la tendencia de la figura 4.11. En la gráfica 4.18 se observa que los valores críticos para conductividades del orden de la de los líquidos usados en los experimentos son del orden de 1 kV , como en los valores experimentales. Efectivamente, en las figuras 4.19 y 4.20 puede verse que el ajuste de los valores críticos del Rosetón obtenidos en la teoría y en los experimentos del triodo para aceite de ricino y de maíz, es bastante satisfactorio, cualitativamente. Los valores teóricos fueron obtenidos despreciando el efecto de la capilaridad y en el límite de inyección fuerte. Igualmente, los valores críticos de la corriente eléctrica I_c (en la figura 3.6) se encuentran dentro del rango predicho por la teoría (del orden de 0.1 a $1 \mu\text{A}$). Otro punto importante es el hecho de que en teoría la presión eléctrica para la inestabilidad Rosetón sería hacia abajo, lo cual concuerda con el comportamiento aislante observado experimentalmente en las curvas de corriente así como con la evolución de la inestabilidad observada. Si la presión fuera dirigida hacia arriba podría llegar a observarse un cortocircuito al chocar el líquido con el electrodo conectado a la

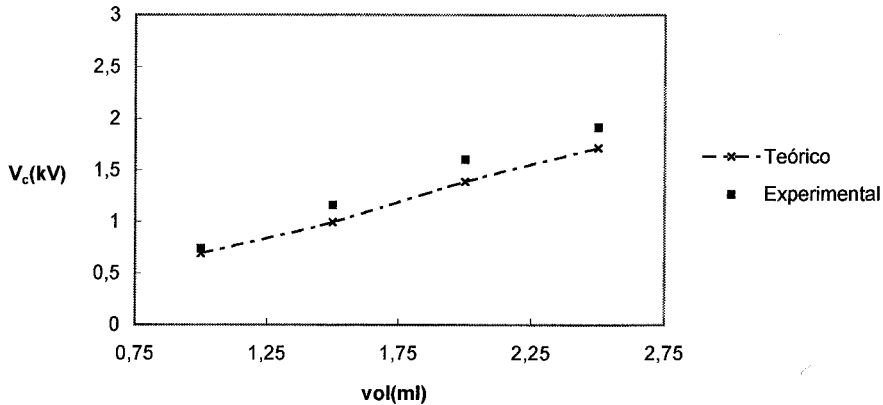


Figura 4.19: Inestabilidad Rosetón en aceite de ricino (ver tabla 2.2.4 para propiedades del líquido). Comparación entre los valores teóricos y experimentales. El voltaje crítico se representa en función de la anchura de la capa de líquido. La serie experimental corresponde a las medidas en para el triodo.

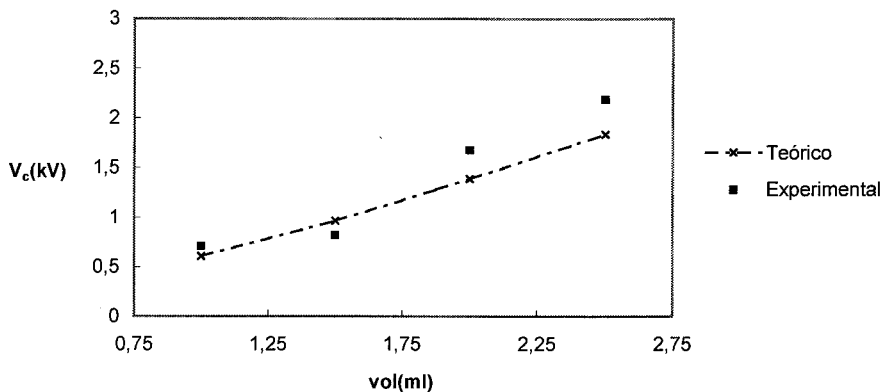


Figura 4.20: Inestabilidad Rosetón en aceite de maíz (ver tabla 2.2.4 para propiedades del líquido). Comparación entre los valores teóricos y experimentales. El voltaje crítico se representa en función de la anchura de la capa de líquido. La serie experimental corresponde a las medidas en para el triodo.

fuente de tensión, como pasa con líquidos conductores (ver por ejemplo el trabajo de Néron de Surgy (1995)).

En cualquier caso, hay que aclarar que la comparación es aún semicuantitativa pues hay efectos que no se han tenido en cuenta como el aplanamiento de la superficie de líquido, lo cual disminuye la anchura efectiva de la capa de líquido en los experimentos, la influencia de las condiciones de contorno en los experimentos, así como una medida exacta de la movilidad del aire, etc. No obstante, todo parece indicar que el mecanismo de inestabilidad del Rosetón es el correspondiente a la región $S < S^{crit}$ en la teoría.

4.6. Interfase líquido/líquido

En estudios de inestabilidades electrohidrodinámicas limitadas al problema de Laplace, por ejemplo (Melcher, 1963), la dinámica de esfuerzo tangencial nulo aparece en dos casos límites: conductor perfecto (campo eléctrico tangencial en la interfase nulo) y aislantes perfectos (densidad superficial de carga libre en la interfase cero). Estos dos casos límite son válidos también en los problemas de Poisson análogos. En cualquiera de los dos tipos de problema (de Laplace o de Poisson), en la región de onda larga $k \rightarrow 0$ el esfuerzo tangencial, si el campo aplicado es perpendicular a la interfase (4.53), será cero cualesquiera que sean las propiedades de los dos fluidos de nuestro problema. En este caso, todas las condiciones de contorno para las perturbaciones lineales son homogéneas si $\omega = 0$. Si además las ecuaciones diferenciales de las perturbaciones lineales de la velocidad y el potencial eléctrico están desacopladas, el mecanismo de inestabilidad superficial será puramente estático y entonces la solución de la parte eléctrica por sí sola proporciona el criterio correcto en $\omega = 0$.

Pero, ¿cuándo están desacopladas las ecuaciones diferenciales de la velocidad y el potencial eléctrico? Sin duda, si $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ (Melcher y Smith Jr. , 1969). Y también en el problema de la inyección unipolar ($\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$) si la movilidad iónica del fluido no-ohmico es elevada (el caso del aire en contacto con un líquido ohmico, por ejemplo). No obstante, para una interfase líquido no-ohmico/líquido ohmico existe un fuerte acoplamiento entre los términos eléctricos y viscosos y como consecuencia de ello pueden aparecer primero inestabilidades de volumen. Koulova-Nenova (1997); Koulova-Nenova y Atten (1998); Atten y Koulova-Nenova (1999) han estudiado la transición entre la inestabilidad de superficie a la de volumen en una interfase líquido/líquido con estas características pero limitado al caso en que el líquido ohmico es conductor perfecto. En estos trabajos se demuestra que si el número $P = T^2/(UBo)$ es lo bastante bajo la inestabilidad de superficie ocurrirá antes que la inestabilidad de volumen incluso en régimen de inyección fuerte, siendo el criterio para la inestabilidad de superficie un factor 2/3 menor que en el caso sin inyección $C = 0$.

Estos trabajos a su vez recogen todos los resultados de Taylor y McEwan (1965) como el caso particular $C = 0$ mostrando la riqueza y complejidad añadida que se puede tener gracias al parámetro adicional C , o sea, con inyección de carga. Es de esperar que los criterios de inestabilidad que hemos obtenido sean aplicables en el caso de una interfase

con conductividad σ_c arbitraria en la región de onda larga (bajo Bo) incluso para el caso de dos líquidos siempre y cuando P sea lo bastante bajo. (No obstante, para una analogía más precisa debería tenerse en cuenta que la unidad de distancia en estos trabajos de Koulova-Nenova y Atten no es h sino la anchura de la capa de líquido aislante L). De hecho puede verse fácilmente que las ecuaciones (4.55,4.58) en el límite $k \rightarrow 0$ quedan reducidas a:

$$\frac{d^4 u_i}{dz^2} = 0 \quad (4.75)$$

$$\frac{d^4 u_c}{dz^2} = 0 \quad (4.76)$$

Por tanto en el límite de $k = 0$ las ecuaciones perturbativas lineales para la velocidad y el potencial eléctrico no están acopladas, lo que junto con las condiciones de contorno para $\omega = 0$ lleva a la solución trivial:

$$u_i(z) = u_c(z) = 0 \quad (4.77)$$

Por ello, queda justificado que la solución de la parte eléctrica de las perturbaciones lineales es lo único que se necesita para estudiar la inestabilidad de mecanismo puramente superficial (en $k = 0$), aunque es obvio que dentro de este límite no es posible reproducir las inestabilidades de volumen (Koulova-Nenova y Atten, 1998).

Si el número de Bond Bo no es lo bastante bajo como para que estemos en el límite de onda larga, los valores obtenidos para $k = 0$ son al menos una cota superior para el criterio de inestabilidad de superficie pues en cualquier caso los puntos $k = 0$ de la curva de dispersión han sido calculados de manera exacta y, si no es ese el mínimo, entonces es obvio que el verdadero mínimo será menor que en el punto $k = 0$.

4.7. Recapitulación

A lo largo de los capítulos 1 y 4 hemos visto que la inyección de carga en una geometría plana resulta en una modificación de la solución del campo eléctrico en el estado hidrostático. Como consecuencia de ello, aparecen nuevos criterios de inestabilidad electrohidrodinámica al introducir una perturbación lineal en el sistema. Quizá lo más relevante de la solución del campo eléctrico en el modelo del inyector autónomo es que el comportamiento del líquido frente al campo eléctrico depende ya

no sólo de sus propiedades físicas intrínsecas sino del resto de parámetros del sistema.

Repasemos primero todas las situaciones posibles que se pueden dar en una interfase fluida en reposo y sometida a inyección de carga desde el electrodo superior. Para que haya una distribución espacial de carga al menos el medio fluido en contacto con el electrodo inyector debe ser no-ohmico.

- En el caso de una sola capa de fluido aislante se obtienen los resultados del inyector autónomo de Atten y Moreau (1972)

- Si se tiene una interfase no-ohmica/no-ohmica entonces se obtienen los resultados del inyector autónomo de Atten y Koulova-Nenova (1996).

- En el caso de una interfase no-ohmica/ohmica se tienen los resultados del inyector autónomo del apartado 4.3 y de Koulova-Nenova y Atten (1998) en el límite de conductor perfecto.

- Para el caso límite de $L \rightarrow 0$ se tiene una capa de líquido ohmico sometido a inyección de carga desde el vacío.

En el caso de una interfase no-ohmica-ohmica, hemos visto que si $S \gg S^{crit}$ se reobtenían los valores críticos de inestabilidad de una superficie conductora sometida a inyección (Koulova-Nenova y Atten, 1998) y también sin inyección (Taylor y McEwan, 1965; Melcher y Smith Jr. , 1969). En muchos casos la comparación de datos experimentales con la teoría de inestabilidad sin inyección en una interfase líquida no-conductora/conductora no es del todo apropiada, pues el rango de campos eléctricos críticos suele ser de algunos kV/cm , y en torno a estos valores en muchos de los líquidos ya se detecta experimentalmente una inyección de carga apreciable desde el electrodo conectado a la fuente de tensión. Si esto ocurre, en lugar de utilizar la solución estática de campo eléctrico constante en cada medio, quizás es más adecuado partir de una solución estática de los campos eléctricos en la que se considere la inyección de carga. Dichas expresiones son las ecuaciones (4.31-4.34). En este sentido, la solución completa del problema de la estabilidad de una interfase conductora es la que se muestra en los trabajos de Koulova-Nenova (1997); Koulova-Nenova y Atten (1998); Atten y Koulova-Nenova (1999), si bien, una solución exacta puede obtenerse a partir del problema mucho más sencillo del límite de onda larga (el determinante del apéndice B), si sabemos a priori que la inestabilidad ocurre en $k = 0$. Si se produce la inyección, es importante considerarla por dos razones:

- El criterio lineal de inestabilidad de una superficie conductora bajo inyección es distinto (más bajo) que en el caso análogo con inyección.

El parámetro C permite ajustar los valores teóricos a los experimentales, según haya más o menos inyección en el líquido superior, menos conductor. Esto dependerá de las propiedades físico-químicas de dicho líquido (Koulova-Nenova *et al.*, 1996).

- El comportamiento de una superficie conductora en función de la amplitud de deformación y la evolución temporal podría diferir al del caso sin inyección (fig. 4.18).

Este último punto se debe a que el comportamiento conductor o no de una superficie líquida sometida a inyección unipolar depende del parámetro S y no de su conductividad física.

Clásicamente, cuando se trata con campos eléctricos de divergencia nula, el comportamiento de un líquido es conductor, debido a una alta conductividad. Esto se refleja cuando al aumentar la capa de dicho fluido frente a la del fluido menos conductor aumenta la corriente eléctrica que atraviesa el sistema, a igual voltaje aplicado. Con el modelo del inyector autónomo del capítulo 4 se tienen los dos tipos de comportamiento incluso para un mismo líquido. Esto se debe a que la transición de un régimen a otro depende del parámetro S , la conductividad adimensional, que viene determinada no sólo por la conductividad eléctrica del medio óhmico sino también por la movilidad y permitividad del medio no-óhmico y por el potencial aplicado en el electrodo inyector. Pero no sólo son estos los parámetros que intervienen pues la transición de un régimen a otro según el valor de S también depende de la anchura relativa de la capa de líquido óhmico (la d adimensional del capítulo 4). Según el valor de todas estas magnitudes puede ocurrir que haya configuraciones del sistema en las que el líquido óhmico tenga una elevada conductividad eléctrica y a pesar de ello muestre un comportamiento aislante: la caída de potencial a través de la capa es mayor que en el fluido superior y la densidad de corriente eléctrica en el sistema disminuye si se aumenta la anchura de líquido.

4.8. Transición de régimen en el mecanismo de inestabilidad

El mecanismo de inestabilidad de superficie, debido a la acción desestabilizante de la presión eléctrica, hace posible la inestabilidad si dicha presión eléctrica tiende a amplificar la perturbación. Si, por el contrario, la presión tiende a reducir la perturbación, la inestabilidad de superficie no es posible. Cuando la interfase de dos fluidos está sometida a un cam-



po eléctrico sin inyección de carga ($C = 0$), y si suponemos que los dos fluidos tienen un régimen óhmico de conducción eléctrica, el signo de la carga en la superficie viene determinado exclusivamente por la relación entre las conductividades y permitividades de los dos fluidos (Melcher, 1963; Melcher y Smith Jr. , 1969). La expresión adimensional sería:

$$\sigma_s = \left(\frac{\sigma_u/\sigma_l}{\epsilon_u/\epsilon_l} - 1 \right) E_u \quad (4.78)$$

donde l se refiere al fluido inferior y u al fluido superior.

Supongamos ahora que el fluido inferior es más conductor que el superior ($\sigma_l > \sigma_u$). En este caso se tiene que la densidad de carga superficial, y por tanto la presión eléctrica en la interfase, es de signo opuesto al campo eléctrico. En esta configuración puede desarrollarse la inestabilidad EHD de superficie típica en líquidos conductores. Al igual que en el caso sin inyección, se puede pasar a una presión dirigida en el sentido del campo aplicado. Esto es posible ahora bajando la conductividad del fluido inferior, de manera que el cambio de signo tiene lugar en el punto:

$$\sigma_s = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_u/\sigma_l}{\epsilon_u/\epsilon_l} = 1 \quad (4.79)$$

En dicho punto la presión eléctrica crítica alcanza un máximo definido por Melcher y Smith Jr. (1969). Como se ve, la transición de una presión hacia arriba o hacia abajo depende sólo de las propiedades físicas de los líquidos y en ningún caso del valor del campo eléctrico aplicado. En el caso con inyección, recordamos que la expresión adimensional de la densidad de carga superficial en la interfase es:

$$\sigma_s = \frac{j}{S} - \sqrt{2jb} \quad (4.80)$$

es obvio que ahora el signo depende de la densidad de corriente adimensional j y de b , que proporciona el valor del campo en $z = 0^+$, y de la conductividad adimensional (4.20), que depende al mismo tiempo de la conductividad σ_c y del potencial eléctrico V aplicado en el electrodo inyector. Todo esto hace que a priori, para una conductividad σ_c sea posible encontrar situaciones en las que la presión sobre la superficie cambie de signo. En particular, en el régimen *CLCE* se cumple que $b = L$, y si hacemos el límite de una capa no-ohmica infinitamente delgada ($L \rightarrow 0$), los únicos valores no nulos posibles de σ_c son positivos, por lo que el mecanismo de una eventual inestabilidad de superficie se

debe necesariamente a una presión positiva en la interfase, cualquiera que sea el valor de la conductividad de la capa óhmica. Es decir, que podemos tener en un líquido conductor una inestabilidad de superficie con mecanismo de presión hacia arriba. Esta situación es completamente irreproducible si no existe una inyección de carga, pues en ese caso la presión siempre es hacia abajo. Además, el que la densidad superficial de carga pueda tomar distinto signo para una misma conductividad σ_c hace que se puedan encontrar distintos valores críticos para una misma conductividad σ_c , tal y como se ve en la figura 4.18.

Por otra parte, la dependencia del signo de la densidad de carga σ_s en la geometría del problema, a través de d , podría hacer que el signo de la misma cambiase conforme la superficie deformada evoluciona. Con esto, la inyección de carga puede jugar un papel estabilizador en la evolución de la inestabilidad de superficie, lo cual podría estar en concordancia con los resultados de la figura 4.18. El valor de S^{crit} para inyección fuerte se representa en función de d en la figura 4.21. En ella la curva $S^{crit}(d)$ divide el plano en dos. La región por encima de la curva corresponde a los valores de S para los cuales el líquido óhmico presenta un comportamiento conductor, y la inferior a los valores de S para los cuales el líquido óhmico presenta un comportamiento no conductor (susceptible de desarrollar el Rosetón).

4.9. Transición de fase en el valor crítico de inestabilidad

Si bien el problema de la inestabilidad hasta ahora sólo se ha resuelto en el caso límite de una longitud de onda larga $k = 0$, con la simplificación que ello supone, de la discusión del apartado anterior parece claro que los estados estáticos iniciales de una interfase fluida sometida a inyección de carga pueden llegar a ser muy diferentes a los correspondientes al caso sin inyección. El hecho de que se parta de estados iniciales distintos debe bastar para poner en evidencia que la evolución será diferente al caso $C = 0$. En realidad, todo es consecuencia de la dependencia no-lineal de la densidad de corriente j con el campo eléctrico E en el medio no-óhmico, lo cual hace que no existan soluciones $\sigma_s = 0$ ó $\langle p_e \rangle = 0$ independientes del valor del campo aplicado. La consecuencia es que el comportamiento de un mismo líquido puede ser conductor o no conductor dependiendo del rango de valores del campo, del nivel de inyección y del resto de magnitudes del sistema, incluyendo



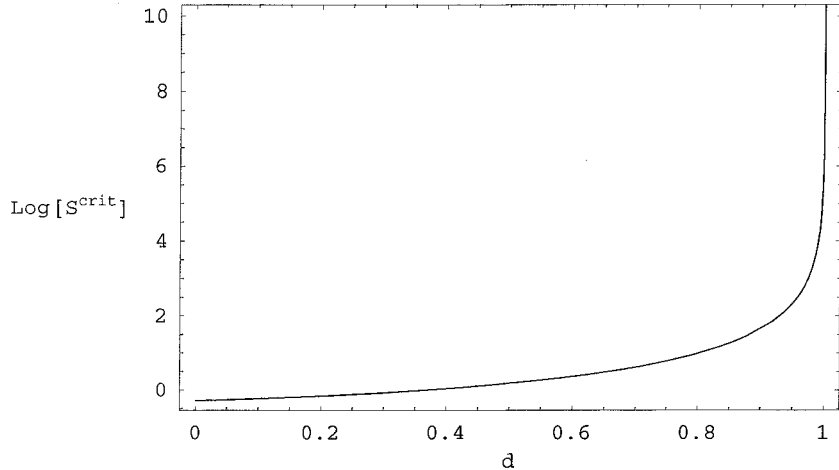


Figura 4.21: Los valores S^{crit} representados en función de la anchura de capa óhmica d en régimen de inyección fuerte.

la geometría del mismo (su tamaño total h y la anchura relativa de las capas óhmica y no-óhmica).

Esto tiene como consecuencia que exista una discontinuidad en el valor crítico de la inestabilidad de superficie (o sea, con $k_c = 0$) en función de la conductividad σ_c , tal y como se ve en la figura 4.18. Esta discontinuidad de $V_c(\sigma_c)$ puede considerarse con una transición de fase de primer orden en el mecanismo de inestabilidad, pues el pasar de una inestabilidad debida a una presión hacia abajo (rama izquierda) a una presión hacia arriba (derecha) se produce un salto finito en el valor crítico del potencial. Esta transición viene dada por el valor de S^{crit} . De la expresión de $S = \sigma_c h^2 / (K_i \varepsilon_i V)$ puede verse que la transición de fase puede ocurrir en σ_c más o menos elevadas variando las magnitudes K_i , h , y ε_i . También S^{crit} depende de los valores de las demás magnitudes.

Por ejemplo, si representamos S^{crit} en función de la anchura relativa d se tiene una línea que separa las inestabilidades de superficie de régimen poco conductor (por debajo de la línea) y conductor (por encima). Dada la discontinuidad del valor crítico al variar σ_c , es posible que puedan observarse bruscos cambios de comportamiento respecto a la inestabilidad si al trabajar con un líquido con conductividad cercana a la de transición varían, por ejemplo, las condiciones ambientales, que pueden modificar dicha conductividad.

4.10. Resumen

El objetivo inicial del presente capítulo era describir teóricamente la observación experimental de la inestabilidad Rosetón, de longitud de onda larga, observada en líquidos poco conductores y aislantes (ver capítulo 3). Sin embargo, los cálculos realizados pueden dar cuenta teóricamente de inestabilidades de superficies en principio análogas al Rosetón (los valores y comportamiento obtenidos en el caso $S < S^{crit}$) y además detectar otros comportamientos de una interfase aire/líquido óhmico como regiones de transición completamente estables al tiempo que reproduce los valores críticos para el caso de conductor perfecto sin inyección (Taylor y McEwan, 1965; Melcher, 1963) y con inyección (Koulova-Nenova y Atten, 1998; Atten y Koulova-Nenova, 1999). Hay que recordar no obstante, que todos los cálculos están limitados a la región de onda larga.

En conclusión, en este capítulo hemos llevado a cabo un análisis lineal de la inestabilidad de una interfase fluida no-óhmica/óhmica perpendicular a un campo eléctrico DC con inyección unipolar. Este análisis ha consistido en: estudiar las propiedades del inyector autónomo en una interfase no-óhmica/óhmica y hallar las ecuaciones completas del problema perturbativo lineal.

Las ecuaciones han sido resueltas analíticamente en el límite de onda larga, que como hemos visto puede aplicarse al cálculo del criterio de la inestabilidad de superficie que se da en el caso de una interfase aire/líquido, siendo la aproximación exacta en el punto $k = 0$. La estructura de las ecuaciones diferenciales completas (4.40-4.41) muestra que en general el sistema también es susceptible de desarrollar inestabilidades de tipo convectivo, haciéndose una discusión de este punto para el caso de una interfase líquido/líquido, que es donde se pueden dar ambos tipos de inestabilidades (superficial o de volumen) según el valor del número P (Koulova-Nenova y Atten, 1998).

Como hemos visto, el parámetro relevante en la inestabilidad de superficie es la relación entre la presión eléctrica y la gravitatoria $U = \varepsilon_i V^2 / (\langle \rho \rangle gh^3)$ (autovalor característico). El número de Bond Bo es el parámetro que controla el cambio del número de onda crítico k_c de manera que para valores lo suficientemente bajos de Bo siempre se obtiene la inestabilidad en $k_c = 0$. En este límite hemos obtenido el criterio para una superficie líquida perfectamente conductora, en concordancia con trabajos anteriores sin inyección de carga.

Con el análisis de la solución estática hemos visto las peculiarida-



des del mecanismo de inestabilidad superficial respecto al del caso sin inyección, peculiaridades que son las responsables de la aparición de inestabilidades de superficie en líquidos poco conductores en voltajes críticos mucho menores que en el caso sin inyección en líquidos más conductores, en los que además la inyección no tiene una influencia tan fuerte en la condición inicial de inestabilidad.

Los valores críticos de la teoría están en el mismo orden de magnitud que los encontrados en los experimentos, si bien es necesario aún un refinamiento en los experimentos y también un estudio riguroso de las ecuaciones completas del sistema, lo que permitiría analizar la evolución temporal.

4.11. Apéndice A. Ecuaciones perturbativas lineales

4.11.1. Ecuaciones diferenciales

La ecuación diferencial (4.40) se deduce aplicando dos veces el rotacional en la componente z de la ecuación correspondiente a la perturbación lineal en (4.6):

$$-\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right) \left[\frac{T}{M^2} \omega - \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right) \right] u_i = Tk^2 \left[\phi''' g_i - \phi' \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right) g_i \right] \quad (4.81)$$

La segunda ecuación diferencial para el líquido no-óhmico (4.41) viene de la ecuación de la conservación de carga. La ecuación para la perturbación lineal es la siguiente:

$$\omega \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right) g_i + \phi''' u_i = \phi''' g'_i + 2\phi'' \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right) g_i + \phi' \frac{d}{dz} \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right) g_i \quad (4.82)$$

En ambas ecuaciones (4.81, 4.82) $-\phi'$ representa el valor del campo eléctrico en el estado estacionario, cuyo valor viene dado por (4.31, 4.32). Sabiendo que:

$$\frac{\phi''}{\phi'''} = -2(z+b) \quad \frac{\phi'}{\phi'''} = -4(z+b)^2 \quad (4.83)$$

obtenemos las ecuaciones en (4.40) and (4.41). Las ecuaciones correspondientes al líquido óhmico (4.42,4.43) se deducen fácilmente de las

ecuaciones de conservación de la carga y el momento considerando que $q_c, \delta q_c = 0$.

4.11.2. Condiciones de contorno

La ecuación de continuidad del potencial eléctrico en la interfase da:

$$\Phi_c(\eta) = \Phi_i(\eta) \quad (4.84)$$

donde Φ representa la solución del potencial eléctrico para el sistema perturbado:

$$\Phi = \phi + \delta\phi \quad (4.85)$$

siendo $\delta\phi = g(z)e^{i(k_x x + k_y y)}$ la perturbación del potencial eléctrico. Si consideramos sólo pequeñas perturbaciones podemos hacer un desarrollo lineal de las mismas:

$$\phi_c(0) + \frac{d\phi_c(0)}{dz}\eta + \delta\phi_c(0) = \phi_i(0) + \frac{d\phi_i(0)}{dz}\eta + \delta\phi_i(0) \quad (4.86)$$

lo cual, junto con la continuidad del potencial estático en $z = 0$ da:

$$\delta\phi_i - \delta\phi_c - (E_i(0) - E_c(0))\eta = 0 \quad (4.87)$$

y con $E_c(0) = j/S$ y $E_i(0) = \sqrt{2jb}$ se tiene:

$$g_i(0) - g_c(0) = \left(\sqrt{2jb} - \frac{j}{S} \right) \eta_0 \quad (4.88)$$

que es la ecuación (4.47). De manera similar podemos obtener la condición de continuidad de la densidad corriente normal a la interfase:

$$\mathbf{j}_c(\eta) \cdot (\mathbf{e}_z + \delta\mathbf{n}) = \mathbf{j}_i(\eta) \cdot (\mathbf{e}_z + \delta\mathbf{n}) \quad (4.89)$$

En primer orden $\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{n} = 0$, entonces:

$$E_{i,z}(0)\delta q(0) + q(0)\delta E_{i,z}(0) = S\delta E_{c,z}(0) \quad (4.90)$$

esto conduce a la ecuación (4.48). De forma similar se deducen el resto de las condiciones de contorno. Mostramos con un poco de atención a las condiciones de balance de esfuerzos en la interfase, en las direcciones tangencial y normal (4.17, 4.18). Sabiendo que:

$$\delta \mathbf{n} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y \right) \eta \quad \delta \mathbf{s}_1 = \frac{\partial \eta}{\partial x} \mathbf{e}_z \quad \delta \mathbf{s}_2 = \frac{\partial \eta}{\partial y} \mathbf{e}_z \quad (4.91)$$

las dos componentes de la perturbación lineal de la condición de balance del esfuerzo tangencial son:

$$\left\langle \frac{\mu_r}{T} \left(\frac{\partial \delta v_x}{\partial z} + \frac{\partial \delta v_z}{\partial x} \right) \right\rangle + \sigma_s \left(E_c(0) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \delta \phi_c(0)}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.92)$$

$$\left\langle \frac{\mu_r}{T} \left(\frac{\partial \delta v_y}{\partial z} + \frac{\partial \delta v_z}{\partial y} \right) \right\rangle + \sigma_s \left(E_c(0) \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \delta \phi_c(0)}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.93)$$

aplicando $\partial/\partial x$ y $\partial/\partial y$ respectivamente y añadiendo estas dos componentes:

$$\left\langle \frac{\mu_r}{T} \left(\Delta_s \delta v_z - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right\rangle + \sigma_s (E_c(0) \Delta_s \eta - \Delta_s \delta \phi_c(0)) = 0 \quad (4.94)$$

El operador $\Delta_s = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ aplicado a la perturbación lineal es $-k^2$. En consecuencia, la condición da:

$$-\frac{1}{T} \left\langle \mu_r \left(k^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right\rangle - k^2 \sigma_s (E_c(0) \eta_0 - g_c(0)) = 0 \quad (4.95)$$

Y como $\langle u \rangle = 0$, la ecuación toma entonces la forma que tiene en (4.53). La perturbación lineal de la condición mecánica en la dirección normal es:

$$2 \left\langle \frac{\mu_r}{T} \left(\frac{\partial \delta v_z}{\partial z} \right) \right\rangle - \frac{1}{U} \eta - \langle \delta p \rangle + \langle \varepsilon E \delta \phi' \rangle = \frac{1}{UB_0} \nabla \cdot \mathbf{n} \quad (4.96)$$

siendo $\langle \delta p \rangle$ la perturbación lineal del salto de presión total $\langle p^t \rangle = \langle p \rangle + \langle \delta p \rangle$. Se puede eliminar $\langle \delta p \rangle$ con las componentes x e y de las ecuaciones de Navier-Stokes. Estas ecuaciones, para la capa no-ohmica, son:

$$\frac{\rho_{ri}}{M^2} \frac{\partial \delta v_{ix}}{\partial t} = - \frac{\partial \delta p}{\partial x} + \frac{1}{T} \nabla^2 \delta v_{ix} - q \frac{\partial \delta \phi_i}{\partial x} \quad (4.97)$$

$$\frac{\rho_{ri}}{M^2} \frac{\partial \delta v_{iy}}{\partial t} = -\frac{\partial \delta p}{\partial y} + \frac{1}{T} \nabla^2 \delta v_{iy} - q \frac{\partial \delta \phi_i}{\partial y} \quad (4.98)$$

Aplicando $\partial/\partial x$ y $\partial/\partial y$ a (4.97, 4.98) respectivamente y sumando ambas se tiene:

$$\frac{\rho_{ri}}{M^2} \frac{\partial \delta v_{iz}}{\partial z \partial t} - \Delta_s \delta p - \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \nabla^2 \delta v_{iz}}{\partial z} + q \Delta_s \delta \phi_i \right) = 0 \quad (4.99)$$

ya que $\nabla \cdot \delta \mathbf{v} = 0$. Con esto, y $\nabla \mathbf{n} = -\Delta_s \eta$, la condición de balance en la dirección perpendicular a la interfase toma la forma (4.54).

4.12. Apéndice B. Relación de dispersión

Con las soluciones $g_i(z)$ y $g_c(z)$ las seis condiciones de contorno que permanecen en el estado $\omega = 0$ (4.44 - 4.48, 4.67) tienen la siguiente estructura:

$$a_3 A_i + a_4 B_i + a_5 C_i = 0 \quad (4.100)$$

$$c_3 A_i + c_4 B_i + c_5 C_i = 0 \quad (4.101)$$

$$d_1 A_c + d_2 B_c = 0 \quad (4.102)$$

$$e_1 A_c + e_2 B_c + e_3 A_i + e_4 B_i + e_5 C_i - R \eta_0 = 0 \quad (4.103)$$

$$f_1 A_c + f_2 B_c + f_3 A_i + f_4 B_i + f_5 C_i = 0 \quad (4.104)$$

$$h_1 A_c + h_2 B_c + h_3 A_i + h_4 B_i + h_5 C_i - \lambda \eta_0 = 0 \quad (4.105)$$

El factor que multiplica los coeficientes incógnitos A_c , B_c , A_i , B_i , C_i , η_0 son funciones de k, j, b, d, S y ε . Con estas seis ecuaciones de seis incógnitas se construye el determinante que debe anularse para que se cumpla la condición de compatibilidad. En este determinante (ver más abajo) las filas corresponden a las condiciones de contorno (4.100-4.104, 4.105) respectivamente, y las columnas a las constantes de integración A_c , B_c , A_i , B_i , C_i , y la amplitud de deformación η_0 . Los elementos son los coeficientes que aparecen multiplicando cada constante

de integración (y la amplitud de deformación) en las columnas de cada condición de contorno (cada fila):

$$\left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & a_3(k, b, d) & a_4(k, b, d) & a_5(k, b, d) & 0 \\ 0 & 0 & c_3(k, b, d) & c_4(k, b, d) & c_5(k, b, d) & 0 \\ d_2(k, d) & d_2(k, d) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_1(k) & e_2(k) & e_3(k, b) & e_4(k, b) & e_5(k, b) & -R(j, b, S) \\ f_1(k, S) & f_2(k, S) & f_3(k, j, b) & f_4(k, j, b) & f_5(k, j, b) & 0 \\ h_1(k, j, S, \varepsilon) & h_2(k, j, S, \varepsilon) & h_3(k, j, b) & h_4(k, j, b) & h_5(k, j, b) & -\lambda \end{array} \right]$$

Donde los coeficientes son:

$$a_3(k, b, d) = F_{1,2} \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{4}(b-1+d)^2 k^2 \right) \quad (4.106)$$

$$a_4(k, b, d) = \sqrt{b-1+d} F_{1,2} \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}, \frac{5}{4}; \frac{1}{4}(b-1+d)^2 k^2 \right) \quad (4.107)$$

$$a_5(k, b, d) = (b-1+d)^{3/2} F_{1,2} \left(\frac{5}{4}; \frac{3}{2}, \frac{7}{4}; \frac{1}{4}(b-1+d)^2 k^2 \right) \quad (4.108)$$

$$c_3(k, b, d) = \frac{4}{3} k^2 F_{1,2} \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{4}, \frac{7}{4}; \frac{1}{4}(b-1+d)^2 k^2 \right) + \frac{16}{35} k^4 (b-1+d)^2 F_{1,2} \left(\frac{5}{2}; \frac{9}{4}, \frac{11}{4}; \frac{1}{4}(b-1+d)^2 k^2 \right) \quad (4.109)$$

$$c_4(k, b, d) = -\frac{1}{4(b-1+d)^{3/2}} F_{1,2} \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}, \frac{5}{4}; \frac{1}{4}(b-1+d)^2 k^2 \right) + \frac{6}{5} k^2 \sqrt{b-1+d} F_{1,2} \left(\frac{7}{4}; \frac{3}{2}, \frac{9}{4}; \frac{1}{4}(b-1+d)^2 k^2 \right) + \frac{7}{45} k^4 (b-1+d)^{5/2} F_{1,2} \left(\frac{11}{4}; \frac{5}{2}, \frac{13}{4}; \frac{1}{4}(b-1+d)^2 k^2 \right) \quad (4.110)$$

$$c_5(k, b, d) = \frac{3}{4\sqrt{b-1+d}} F_{1,2} \left(\frac{5}{4}; \frac{3}{2}, \frac{7}{4}; \frac{1}{4}(b-1+d)^2 k^2 \right) + \frac{20}{21} k^2 (b-1+d)^{3/2} F_{1,2} \left(\frac{9}{4}; \frac{5}{2}, \frac{11}{4}; \frac{1}{4}(b-1+d)^2 k^2 \right) + \frac{3}{77} k^4 (b-1+d)^{7/2} F_{1,2} \left(\frac{13}{4}; \frac{7}{2}, \frac{15}{4}; \frac{1}{4}(b-1+d)^2 k^2 \right) \quad (4.111)$$

$$d_1(k, d) = e^{-kd} \quad (4.112)$$

$$d_2(k, d) = e^{kd} \quad (4.113)$$

$$e_1(k) = e_2(k) = -1 \quad R(j, b, S) = \sqrt{2bj} - \frac{j}{S} \quad (4.114)$$

$$e_3(k, b) = F_{1,2} \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{4} b^2 k^2 \right) \quad (4.115)$$

$$e_4(k, b) = b^{1/2} F_{1,2} \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}, \frac{5}{4}; \frac{1}{4} b^2 k^2 \right) \quad (4.116)$$

$$e_5(k, b) = b^{3/2} F_{1,2} \left(\frac{5}{4}; \frac{3}{2}, \frac{7}{4}; \frac{1}{4} b^2 k^2 \right) \quad (4.117)$$

$$f_1(k, S) = -f_2(k, S) = 2kS \quad (4.118)$$

$$f_3(k, j, b) = \sqrt{2bj} k^2 \left(\frac{32}{35} b^2 k^2 F_{1,2} \left[\frac{5}{2}; \frac{9}{4}, \frac{11}{4}; \frac{1}{4} b^2 k^2 \right] \right) + \quad (4.119)$$

$$\sqrt{2bj} k^2 \left(-2F_{1,2} \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{4} b^2 k^2 \right] + 4F_{1,2} \left[\frac{3}{2}; \frac{5}{4}, \frac{7}{4}; \frac{1}{4} b^2 k^2 \right] \right)$$

$$f_4(k, j, b) = \sqrt{2jb} k^2 \left(\frac{14}{45} b^2 k^2 F_{1,2} \left[\frac{11}{4}; \frac{5}{2}, \frac{13}{4}; \frac{1}{4} b^2 k^2 \right] \right) + \quad (4.120)$$

$$\sqrt{2jb} k^2 \left(-2F_{1,2} \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}, \frac{5}{4}; \frac{1}{4} b^2 k^2 \right) + 3F_{1,2} \left[\frac{7}{4}; \frac{3}{2}, \frac{9}{4}; \frac{1}{4} b^2 k^2 \right] \right)$$

$$f_5(k, j, b) = \frac{\sqrt{2j}}{77} 6b^4 k^4 F_{1,2} \left(\frac{13}{4}; \frac{7}{2}, \frac{15}{4}; \frac{1}{4} b^2 k^2 \right) +$$

$$-\sqrt{2j} (-3 + 2b^2 k^2) F_{1,2} \left(\frac{5}{4}; \frac{3}{2}, \frac{7}{4}; \frac{1}{4} b^2 k^2 \right) +$$

$$\sqrt{2j} \frac{165}{77} b^2 k^2 F_{1,2} \left(\frac{9}{4}; \frac{5}{2}, \frac{11}{4}; \frac{1}{4} b^2 k^2 \right) \quad (4.121)$$

$$h_1(j, k, S, \varepsilon) = \varepsilon j k / S \quad (4.122)$$

$$h_2(j, k, S, \varepsilon) = -\varepsilon j k / S \quad (4.123)$$



$$h_3(k, j, b) = \sqrt{\frac{j}{2b}} \left(-F_{1,2} \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{4}b^2k^2 \right] + \frac{8}{3}b^2k^2 F_{1,2} \left[\frac{3}{2}; \frac{5}{4}, \frac{7}{4}; \frac{1}{4}b^2k^2 \right] \right) \quad (4.124)$$

$$h_4(k, j, b) = \frac{3k^2\sqrt{2j}b^4}{5} F_{1,2} \left[\frac{7}{4}; \frac{3}{2}, \frac{9}{4}; \frac{1}{4}b^2k^2 \right] \quad (4.125)$$

$$h_5(k, j, b) = \sqrt{2jb} \left(F_{1,2} \left[\frac{5}{4}; \frac{3}{2}, \frac{7}{4}; \frac{1}{4}b^2k^2 \right] + \frac{5}{21}b^2k^2 F_{1,2} \left[\frac{9}{4}; \frac{5}{2}, \frac{11}{4}; \frac{1}{4}b^2k^2 \right] \right) \quad (4.126)$$

$$\lambda = \frac{1}{U} \left(1 + \frac{1}{Bo}k^2 \right) \quad (4.127)$$

El criterio de inestabilidad puede obtenerse calculando el determinante, con cualquier programa matemático, poniendo el conjunto de elementos dado aquí. La mayor parte de los cálculos fueron hechos con Mathematica (Wolfram, 1999) donde las $F_{1,2}$ que aparecen en el conjunto de funciones son referidas como *HypergeometricPFQ*. Se ha procurado hacer un esfuerzo por que cualquiera que lea el trabajo y esté interesado pueda hacer cálculos y desarrollos a partir de este determinante, que pone de manifiesto por primera vez la existencia de dos nuevas ramas lineales de las inestabilidades EHD de superficie de manera analítica y exacta en el límite $k = 0$.

Capítulo 5

Estabilidad no-lineal de una interfase no-ohmica/ohmica

5.1. Modelo hidráulico

En este capítulo se estudia un modelo hidrostático, basado en el modelo hidráulico de Felici, al que se le introduce una perturbación no-lineal. Los desarrollos utilizados para los cálculos en esta parte están basados en los resultados obtenidos previamente por Atten *et al.* (1998,?), donde se analiza la presión electrostática al introducir una perturbación lineal y no-lineal en una interfase no-ohmica/no-ohmica.

Tenemos inicialmente un sistema de dos capas fluidas entre dos electrodos rígidos, con una geometría como la de la figura 4.1. En principio los dos fluidos pueden tener unas propiedades eléctricas cualesquiera. Se introduce en el sistema una deformación en la interfase de longitud de onda infinita. Consideremos la ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}_e + \rho \mathbf{g} \quad (5.1)$$

Si se supone una perturbación de longitud de onda infinita ($k = 0$), la ecuación (5.1) se reduce a la componente en z y es posible la solución hidrostática $\mathbf{v} = 0$. Al ser el tensor tangencial cero, los efectos del movimiento convectivo de la interfase se anulan. En estas condiciones, la diferencia del salto de presión entre dos puntos de la interfase separados por media longitud de onda nos da la información sobre la posibilidad o no de la inestabilidad. Con esto, al integrar la ecuación (5.1) en cada medio se tiene:

$$\int \frac{\partial p}{\partial z} dz = p - \Pi = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \rho g z \quad (5.2)$$

siendo Π una constante de integración. El salto de presión en la interfase queda:

$$\langle p - \Pi \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \right\rangle + \langle \rho \rangle g z_s \quad (5.3)$$

donde $z_s(x)$ marca la posición de la interfase.

Si la presión en el punto de mínima elevación de la superficie es mayor que en el punto de máxima elevación, la perturbación tiende a amplificarse y si por el contrario es menor tiende a amortiguarse. Por ello, la condición de inestabilidad es: $\langle p - \Pi \rangle (\lambda/2) - \langle p - \Pi \rangle (0) = 0$. A esta diferencia la llamamos $\Delta p = \Delta p_e + \Delta p_g$, donde Δp_e representa al término eléctrico y Δp_g al gravitatorio.

Por último, como se supone una deformación con longitud de onda infinita, las expresiones para los términos eléctricos y gravitatorio en los puntos $x = 0$ y $x = \lambda/2$, que están infinitamente separados, se aproximan a las correspondientes al caso plano sin deformación. Supongamos que la amplitud de deformación es η ; entonces, el término gravitatorio es $\Delta p_g = -2 \langle \rho \rangle g \eta$.

5.2. Ecuaciones para una interfase aire/líquido aislante

En el caso de una interfase no-ohmica/no-ohmica sometida a inyección fuerte, según definida en el apartado 1.6.3, la expresión obtenida para la diferencia de presión, incluyendo el término gravitatorio, $\Delta p = \Delta p_g + \Delta p_e$, (Atten *et al.*, 1998) es:

$$\Delta p = -\rho g \eta + \frac{9}{16} K_l \varepsilon_l \frac{V^2}{d^2} \left(\frac{d}{D} \right)^3 \left[\frac{1 - \eta/d}{G_1} - \frac{1 + \eta/d}{G_2} \right] \quad (5.4)$$

donde G_1 y G_2 vienen dados por las expresiones:

$$\begin{aligned} G_1 &= \alpha^{1/2} \left(1 + \frac{\eta}{L} \right)^{3/2} + \left(\frac{d}{L} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{\eta}{d} \right)^{3/2} \\ G_2 &= \alpha^{1/2} \left(1 - \frac{\eta}{L} \right)^{3/2} + \left(\frac{d}{L} \right)^{3/2} \left(1 + \frac{\eta}{d} \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (5.5)$$

siendo $\alpha = K_l \varepsilon_l / K_a \varepsilon_0$. El subíndice l se refiere al líquido y a al aire, y ρ a la densidad de masa del líquido.

En la ecuación 5.4 se han tomado las expresiones de j para la inyección fuerte en geometría plana, por ejemplo, en $x = 0$:

$$j_a = \frac{9}{8} K_a \varepsilon_0 \frac{V_a^2}{(L - \eta)^3} \quad j_l = \frac{9}{8} K_l \varepsilon_l \frac{V_l^2}{(d + \eta)^3} \quad (5.6)$$

En la expresión (5.4) también se ha despreciado el término que proviene de la fuerza de volumen en el aire, ya que debido a la diferencia entre las movilidad iónica en el líquido y en el aire se cumple que:

$$\frac{F_a}{F_l} = \frac{K_l}{K_a} \ll 1 \quad (5.7)$$

En definitiva, los resultados de Atten *et al.* (1998) muestran que en la expresión no-lineal (5.4) existen bifurcaciones subcríticas que implican un estado estacionario de la inestabilidad con una marcada amplitud de deformación de la superficie. Esto concuerda con la observación experimental de la inestabilidad Rosetón en un líquido no-ohmico.

5.3. Interfase no-ohmica/ohmica. Salto de presión no-lineal.

En esta sección se muestra un análisis estático del salto de presión en la inestabilidad no-lineal de una interfase no-ohmica/ohmica, introduciendo una perturbación de amplitud de deformación finita en el salto de presión. Dadas las fuertes simplificaciones que conlleva el modelo hidráulico, no es de esperar que el cálculo presente proporcione un criterio de estabilidad no-lineal riguroso.

No obstante, se puede obtener, al igual que en el caso de inestabilidad incipiente (lineal), información de la evolución del sistema al introducir una perturbación de longitud de onda infinita analizando el comportamiento no-lineal del mecanismo puramente estático. En nuestro caso, lo que aparta al modelo hidráulico utilizado de obtener un criterio exacto en el límite $k = 0$ de onda larga es que al utilizar las expresiones de los campos correspondientes a la solución estática en geometría plana no podemos tomar en cuenta la variación de presión eléctrica en la dirección tangencial, que en general no se anula ni siquiera en $k = 0$. Efectivamente, supongamos una deformación de longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$, la componente x de la ec. (5.1):

$$\frac{\partial p}{\partial x} + q \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left(\mu \nabla^2 - \rho \frac{d}{dt} \right) v_x \quad (5.8)$$

siendo Φ la solución del potencial eléctrico con la interfase deformada.

En el límite de onda larga, si $\partial/\partial x = k$, se tiene que $v_x = 0$ y $p = q\Phi$, pero para llegar a este punto ha sido necesario derivar en x la solución Φ de la interfase deformada. En nuestro caso esta derivada no está definida pues sustituimos Φ por la solución correspondiente al caso sin deformación, que no depende de x .

Sin embargo, nuestra aproximación es correcta en los límites de líquido óhmico conductor perfecto $\sigma_c = \infty$ y no conductor $\sigma_c = 0$: para $\sigma_c = \infty$ se tiene que $\Phi = 0$ en la interfase deformada, y en el caso $\sigma_c = 0$ se tiene que $q\partial\Phi/\partial x = j_x/K_i = 0$. Por lo tanto al no existir el término $q\partial\Phi/\partial x$ en ambos límites, será todavía posible en estos dos puntos reobtener el criterio exacto para $k = 0$, como veremos más adelante. En la zona intermedia, en cualquier caso podremos analizar la evolución con la amplitud de deformación del salto de presión eléctrica en la interfase.

5.3.1. Ecuaciones

En el apartado 4.3 se analiza el salto de presión de una interfase no-ohmica/ohmica en geometría plana. Como vimos, puede obtenerse información sobre la posibilidad de la inestabilidad de superficie y su posterior evolución analizando la variación del salto de presión eléctrica de la interfase plana en función de las otras variables que intervienen en el problema. En concreto vimos que el comportamiento de la presión con la anchura de la capa óhmica hacía pensar en la posibilidad de que se pudiera mantener una pequeña deformación. Recordamos los casos posibles según el régimen de conducción, dado por el parámetro S , eran

- o bien una presión eléctrica hacia abajo (con nuestras coordenadas, en el sentido positivo de las z), en cuyo caso la presión es decreciente con la anchura del fluido inferior d y por tanto inestabilidad de superficie es posible.

- o una presión eléctrica dirigida hacia arriba (sentido negativo de las Z), en cuyo caso la presión es creciente con d y por tanto la inestabilidad de superficie es posible.

Sin embargo, el mecanismo estático de inestabilidad de superficie no tiene en principio por qué ser posible para amplitudes de deformación no nulas o no infinitesimales. Por ello ampliamos aquí el análisis del mecanismo a partir de un estado inicial deformado utilizando para

ello el modelo hidráulico con una perturbación no-lineal. Así, podremos analizar para qué valores del campo aplicado es posible la inestabilidad de superficie.

Supondremos que el medio no-ohmico es un gas y el ohmico es un líquido, pues en ese caso, la perturbación de onda larga $k = 0$ aproxima bien la situación real, como vimos en el capítulo 4.

Las ecuaciones dimensionales para el salto de presión en la interfase plana no-ohmica/ohmica son:

$$\left\langle \frac{1}{2} \varepsilon_r E^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_c E_c(0)^2 - \frac{1}{2} E_i(0)^2 \quad (5.9)$$

Si el sistema se encuentra bajo inyección fuerte (o sea, $E(-L) \rightarrow 0$), las expresiones para el campo eléctrico en la interfase son las siguientes:

$$E_i(0) = \sqrt{\frac{2j}{K_i \varepsilon_i}} L^{1/2} \quad E_c(0) = \frac{V_c}{d} \quad (5.10)$$

siendo V_c la caída de potencial a través de la capa ohmica. Teniendo en cuenta la condición $j_c(0) = j_i(0)$ y $j_c(0) = \sigma_c V_c/d$, se tiene que:

$$E_i^2(0) = 2 \frac{V_c \sigma_c L}{K_i \varepsilon_i d} \quad (5.11)$$

con lo que el salto de presión en función de V_c queda de la forma:

$$\left\langle \frac{1}{2} \varepsilon_r E^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_c \frac{V_c^2}{d^2} - 2 \frac{V_c \sigma_c L}{K_i \varepsilon_i d} \right) \quad (5.12)$$

Las ecuaciones para el salto de presión eléctrica en la interfase, con una deformación no-lineal de amplitud η , son:

- En $x = 0$ (anchura $d + \eta$):

$$\left\langle \frac{1}{2} \varepsilon_r E^2 \right\rangle_+ = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_c \frac{V_{c+}^2}{(d + \eta)^2} - 2 \frac{V_{c+} \sigma_c}{K_i} \left(\frac{L - \eta}{d + \eta} \right) \right] \quad (5.13)$$

- En $x = \lambda/2$ (anchura $d - \eta$):

$$\left\langle \frac{1}{2} \varepsilon_r E^2 \right\rangle_- = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_c \frac{V_{c-}^2}{(d - \eta)^2} - 2 \frac{V_{c-} \sigma_c}{K_i} \left(\frac{L + \eta}{d - \eta} \right) \right] \quad (5.14)$$

donde V_{c+} denota la caída de potencial a través de la capa ohmica en la zona de anchura $d + \eta$ y V_{c-} es la caída de potencial en la zona de anchura $d - \eta$. Ambas expresiones pueden dejarse en función del potencial V aplicado en el electrodo inyector teniendo en cuenta la bien

conocida expresión de la densidad de corriente eléctrica en una capa no-óhmica bajo inyección fuerte (ver apartado 1.6.2):

$$j_i = \frac{9}{8} K_i \varepsilon_i \frac{V_i^2}{L^3} \quad (5.15)$$

siendo V_i la caída de potencial a través de la capa no-óhmica. Aparte, para el potencial aplicado V y la densidad de corriente se cumplen las relaciones:

$$j_i = j_c \quad V = V_i + V_c \quad (5.16)$$

por lo que para la interfase deformada en $x = 0$ tenemos:

$$j_i = \frac{9}{8} K_i \varepsilon_i \frac{V_i^2}{(L - \eta)^3} \quad j_{i+} = j_{c+} = \sigma_c \frac{V_{c+}}{d + \eta} \quad V = V_{i+} + V_{c+} \quad (5.17)$$

lo cual lleva a:

$$\frac{9}{8} K_i \varepsilon_i \frac{(V - V_{c+})^2}{(L - \eta)^3} = \sigma_c \frac{V_{c+}}{d + \eta} \quad (V - V_{c+})^2 = \beta_+ V_{c+} \quad (5.18)$$

En $x = \lambda/2$, relaciones análogas a (5.17) llevan a una solución similar para V_{c-} :

$$\frac{9}{8} K_i \varepsilon_i \frac{(V - V_{c-})^2}{(L + \eta)^3} = \sigma_c \frac{V_{c-}}{d - \eta} \quad \Rightarrow \quad (V - V_{c-})^2 = \beta_- V_{c-} \quad (5.19)$$

siendo los coeficientes β_+ y β_- funciones de la amplitud de deformación η :

$$\beta_+ = \frac{8}{9} \frac{\sigma_c}{K_i \varepsilon_i} \frac{(L - \eta)^3}{d + \eta} \quad \Rightarrow \quad \beta_- = \frac{8}{9} \frac{\sigma_c}{K_i \varepsilon_i} \frac{(L + \eta)^3}{d - \eta} \quad (5.20)$$

en consecuencia, tanto en $x = 0$ como en $x = \lambda/2$ se tiene una ecuación de la forma:

$$V_c^2 - (2V + \beta)V_c + V^2 = 0 \quad (5.21)$$

que lleva a la solución:

$$V_c = \frac{1}{2} \left(2V + \beta - \sqrt{\beta^2 + 4\beta V} \right) \quad (5.22)$$

estas expresiones son válidas para $d + \eta$ y $d - \eta$. La otra raíz de la ecuación de segundo grado (5.21), la correspondiente al signo + ante la raíz, no es posible debido a que proporciona una solución para V_c tal que $V_c > V$. Efectivamente, como $\sqrt{\beta^2 + 4\beta V} > \beta$ tenemos:

$$V_c = \frac{2V + \beta + \sqrt{\beta^2 + 4\beta V}}{2} > \frac{2V + \beta}{2} > V \quad (5.23)$$

Para que la inestabilidad de inestabilidad de superficie debido a la acción de la presión eléctrica sea posible es necesario que la diferencia entre el salto de p_e en $d + \eta$ y $d - \eta$ equilibre a la diferencia de presión gravitatoria entre estos dos puntos. Suponiendo que el medio no-ohmico es el aire, su densidad de masa será despreciable frente a la del líquido ohmico, con lo que la diferencia de presión gravitatoria entre estos dos puntos en la superficie es $p_{g+} - p_{g-} = 2\rho g\eta$, siendo ρ la densidad de masa del líquido ohmico. O sea, que la inestabilidad de superficie es posible si se cumple la condición :

$$\left\langle \frac{1}{2}\varepsilon_r E^2 \right\rangle_- - \left\langle \frac{1}{2}\varepsilon_r E^2 \right\rangle_+ > 2\rho g\eta \quad (5.24)$$

Como V_{c+} y V_{c-} vienen determinadas por V , de la ec. (5.22), cuando se cumple la igualdad en la inecuación se tiene la condición de mínimo potencial aplicado V para el cual es posible el mecanismo de inestabilidad. Multiplicamos (5.24) por $2(d - \eta)^2(d + \eta)^2$ y la adimensionalizamos con d , $\rho g d$, $\sqrt{\rho g d^3/\varepsilon_0}$, $K_a \sqrt{d/\varepsilon_0 \rho g}$ como unidades de distancia, presión, potencial eléctrico y conductividad eléctrica, siendo K_a y ε_0 la movilidad iónica y la permitividad del aire respectivamente. Así, se tiene la ecuación en magnitudes adimensionales:

$$\begin{aligned} & (\varepsilon V_{c-}^2 (1 + \xi)^2 - 2\sigma_c V_{c-} (L + \xi)(1 - \xi)(1 + \xi)^2) - \\ & (\varepsilon V_{c+}^2 (1 - \xi)^2 - 2\sigma_c V_{c+} (L - \xi)(1 + \xi)(1 - \xi)^2) = 4\xi(1 - \xi^2)^2 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Por comodidad se mantienen los mismos símbolos que para las magnitudes dimensionales excepto para la amplitud de deformación adimensional, llamada $\xi = \eta/d$ y la constante dieléctrica relativa $\varepsilon = \varepsilon_c/\varepsilon_0$. Dados los valores de las magnitudes adimensionales L , σ_c y ε tenemos V como función implícita de la amplitud de deformación ξ . Definimos el parámetro adimensional U_{NL} :

$$U_{NL} = \frac{\varepsilon_0 V^2}{\rho g d^3} \quad (5.26)$$

5.3.2. Límite conductor perfecto

Supongamos que el líquido óhmico es un conductor perfecto. Entonces $\sigma_c \rightarrow \infty$ y por tanto $V_c \rightarrow 0$ y el límite para el salto de presión adimensional es:

$$\left\langle \frac{1}{2} \varepsilon_r E^2 \right\rangle \rightarrow \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_i^2(0) \propto \sigma_c V_c \quad (5.27)$$

Analizamos el límite de $\sigma_c V_c$. De la ecuación (5.22) se tiene:

$$\sigma_c V_c = \frac{\sigma_c}{2} \left(2U_{NL}^{1/2} + a\sigma_c - a\sigma_c \sqrt{1 + \frac{4U_{NL}}{a\sigma_c}} \right) \quad (5.28)$$

donde a viene definida por la relación: $\beta = a\sigma_c$. Desarrollando la raíz en series de potencias de $1/\sigma_c \ll 1$ se tiene:

$$\sigma_c V_c = \frac{\sigma_c}{2} \left[2U_{NL}^{1/2} + a\sigma_c - a\sigma_c \left(1 + \frac{1}{2} \frac{4U_{NL}^{1/2}}{a\sigma_c} - \frac{1}{8} \frac{16U_{NL}}{a^2\sigma_c^2} + \mathcal{O}[1/\sigma_c^3] \right) \right] \quad (5.29)$$

por lo que simplificando se tiene finalmente:

$$\sigma_c V_c = \frac{U_{NL}}{a} \quad (5.30)$$

donde el factor a toma valores, en $x = 0$ (anchura $1 + \xi$) y $x = \lambda/2$ (anchura $1 - \xi$):

$$a_+ = \frac{8(L - \xi)^3}{9(1 + \xi)} \quad a_- = \frac{8(L + \xi)^3}{9(1 - \xi)} \quad (5.31)$$

con lo que la expresión (5.25) se reduce a:

$$\frac{9}{4} U_{NL} \left[\frac{1}{(L - \xi)^2} - \frac{1}{(L + \xi)^2} \right] = 4\xi \quad (5.32)$$

o lo que es lo mismo:

$$U_{NL} = \frac{4}{9} \mathcal{F}(\xi) \quad (5.33)$$

siendo $\mathcal{F}(\xi)$:

$$\mathcal{F}(\xi) = \frac{4\xi(L^2 - \xi^2)^2}{(L + \xi)^2 - (L - \xi)^2} = \frac{1}{L} (L^2 - \xi^2)^2 \quad (5.34)$$

La función $\mathcal{F}(\xi)$ proporciona la variación del criterio no-lineal para $k = 0$ en función de la amplitud de deformación ξ . Comparemos ahora con el caso sin inyección. En ausencia de inyección el salto de presión en la interfase en $d + \xi$, si el fluido inferior es conductor perfecto, es:

$$\left\langle \frac{1}{2} \varepsilon_r E^2 \right\rangle_+ = -\frac{1}{2} E_i^2(0) = -\frac{1}{2} \frac{U_{NL}}{(L - \xi)^2} \quad (5.35)$$

ya que para $C \rightarrow 0$ el campo eléctrico $E_i \rightarrow V_i/(L - \xi)$ en $d + \xi$, que es la solución de campo constante en geometría plana (se corresponde con el límite $E_i \rightarrow 1$ para $C \rightarrow 0$ de las figuras 4.2 y 4.3 y con la adimensionalización del capítulo 4). Escribiendo la expresión análoga para $d - \xi$ tenemos que:

$$\left\langle \frac{1}{2} \varepsilon_r E^2 \right\rangle_- - \left\langle \frac{1}{2} \varepsilon_r E^2 \right\rangle_+ = \frac{1}{2} \frac{U_{NL}}{(L - \xi)^2} - \frac{1}{2} \frac{U_{NL}}{(L + \xi)^2} = 2\xi \quad (5.36)$$

que lleva a la expresión:

$$U_{NL} = \frac{4\xi(L^2 - \xi^2)^2}{(L + \xi)^2 - (L - \xi)^2} = \frac{1}{L} (L^2 - \xi^2)^2 = \mathcal{F}(\xi) \quad (5.37)$$

que es exactamente la misma que para el caso de inyección fuerte (5.33) salvo el factor 4/9 que ahora no aparece. Como se ve, la dependencia con la amplitud de deformación ξ es la misma y viene dada por la función $\mathcal{F}(\xi)$. El comportamiento de esta función respecto a la amplitud de deformación puede verse en la figura 5.1: el potencial aplicado U_{NL} a partir del cual es posible la inestabilidad es una función siempre decreciente de ξ . En el caso de que la anchura de la capa no-ohmica sea menor que la de la capa ohmica ($L < 1$) la función $\mathcal{F}(\xi)$ es decreciente sólo hasta el valor $\xi = L$, pero en este caso no tiene sentido considerar $\xi > L$ pues en $\xi = L$ el líquido ya ha tocado el electrodo superior y no puede seguir deformándose.

Al ser la presión hacia arriba (hacia el electrodo inyector) esto significa que una vez que empieza la inestabilidad ésta tiende bruscamente hacia los estados con $U_{NL} = 0$, que es el que corresponde al valor máximo de la amplitud de deformación $\xi = 1$. Este resultado concuerda con el comportamiento encontrado en el estudio no-lineal sin inyección de Néron de Surgy (1995) sobre la inestabilidad en un líquido conductor perfecto en contacto con un dieléctrico. En el laboratorio, esto equivale a que la inestabilidad evoluciona bruscamente hacia el electrodo superior, llegando eventualmente a contactar con el mismo y provocando así

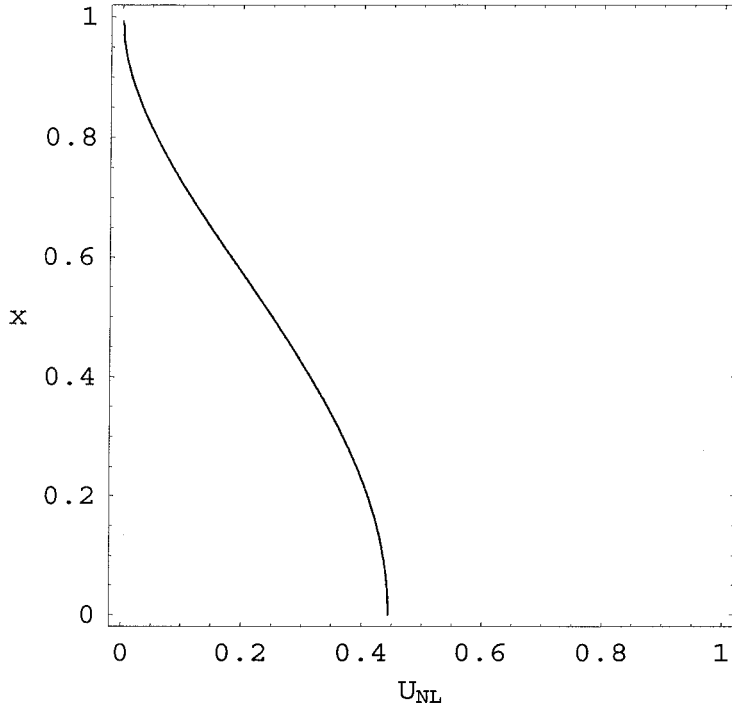


Figura 5.1: El criterio no-lineal en el límite de onda larga de una interfase no-ohmica/conductora perfecta sometida a inyección fuerte. $L = 1$.

un cortocircuito. Dicho comportamiento ha sido observado tanto en el caso sin inyección, que es el caso de la inestabilidad de superficie clásica, (Néron de Surgy, 1995) como con inyección (Koulova-Nenova *et al.*, 1995, 1996).

En resumen, nuestro primer análisis del caso con inyección fuerte para el límite de onda larga parece indicar que el comportamiento será análogo al del caso sin inyección, lo cual corrobora resultados experimentales precedentes.

Por último, el límite de amplitud de deformación nula recupera los resultados del criterio lineal del capítulo 4, pues $\lim_{\xi \rightarrow 0} \mathcal{F}(\xi) = L^3$, resultando así para el caso sin inyección que $U_{NL}^{1/2} = L^{3/2}$ y para inyección fuerte que $U_{NL}^{1/2} = (2/3)L^{3/2}$ si $\xi \rightarrow 0$, lo que lleva a las mismas expresiones que en la teoría lineal, teniendo en cuenta que se ha usado una dimensionalización distinta. En magnitudes dimensionales la expresión que se tiene para inyección fuerte es:

$$V = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{L^3 \rho g}{\varepsilon_0}} \quad (5.38)$$

y sin inyección es la misma pero sin el 2/3:

$$V = \sqrt{\frac{L^3 \rho g}{\varepsilon_0}} \quad (5.39)$$

lo que recupera el resultado de la inestabilidad EHD clásica de superficie, o de Rayleigh-Taylor (Taylor y McEwan, 1965) en el límite $k = 0$.

5.3.3. Límite no conductor

Análogamente se puede tomar el límite no conductor $\sigma_c \rightarrow 0$ en la expresión (5.25). Teniendo en cuenta que para $\sigma_c = 0$ se cumple que $\beta = 0$, se obtiene de la ec. (5.22) que $V_c = V$. Con ello, el salto de presión toma la forma en $d + \xi$:

$$\left\langle \frac{1}{2} \varepsilon_r E^2 \right\rangle_+ = \frac{1}{2} \varepsilon E_c^2(0) = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{U_{NL}}{(1 + \xi)^2} \quad (5.40)$$

Y la expresión (5.25) se reduce a:

$$\varepsilon U_{NL}^2 [(1 + \xi)^2 - (1 - \xi)^2] = 4\xi(1 - \xi^2)^2 \quad (5.41)$$

lo que equivale a una dependencia con la amplitud de deformación idéntica a la del caso del líquido conductor perfecto:

$$U_{NL}^2 = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{\xi(1 - \xi^2)^2}{(1 + \xi)^2 - (1 - \xi)^2} = \frac{1}{4} (1 - x^2)^2 = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{H}(\xi) \quad (5.42)$$

ahora aparece un factor $1/\varepsilon$ en lugar del $4/9$ que aparece en el límite conductor perfecto. Si se compara la función $\mathcal{H}(\xi)$ con $\mathcal{F}(\xi)$ se ve que la dependencia con ξ es la misma, salvo por el hecho de que en $\mathcal{F}(\xi)$ aparece L . Lo importante es que el comportamiento de $\mathcal{H}(\xi)$ es el mismo que se observa en la figura 5.1, siendo $U_{NL} = 0$ para el valor máximo de la amplitud de deformación (que ahora es siempre 1). Teniendo en cuenta que ahora la presión eléctrica está dirigida hacia abajo, empujando al líquido, la inestabilidad en líquidos poco conductores evoluciona con una marcada amplitud de deformación, del orden de la anchura de la capa de líquido, sin llegar a tocar el electrodo superior, a menos que $L < 1$, pues para $\xi > 1$ la función $\mathcal{H}(\xi)$ es creciente. Las observaciones experimentales de la inestabilidad Rosetón en líquidos óhmicos, que este límite puede aproximar, confirman que la amplitud de la deformación del líquido es elevada (del orden del espesor de la capa de líquido) en cuanto aparece la inestabilidad.

Para amplitud de deformación nula también aquí se recupera el resultado de la teoría lineal en el límite $k = 0$: ya que $\lim_{\xi \rightarrow 0} \mathcal{H}(\xi) = 1$, de lo que resulta $U_{NL} = \frac{1}{\varepsilon}$, que coincide con el resultado del criterio lineal, presentado en el apartado 4.5.3. En magnitudes dimensionales equivale a un potencial crítico:

$$V = \sqrt{\frac{\rho g d^3}{\varepsilon_c}} \quad (5.43)$$

5.3.4. Transición no-lineal de régimen conductor a poco conductor

De lo visto en los dos apartados anteriores, tanto en el límite conductor perfecto como en el límite no conductor el criterio no-lineal es mínimo para la máxima amplitud de deformación. En consecuencia, la inestabilidad de superficie en líquidos conductores perfectos evoluciona hacia arriba hasta tocar el electrodo superior, independientemente de si hay inyección o no. Y en el límite no-conductor la inestabilidad evoluciona hacia abajo hasta alcanzar una amplitud de deformación máxima. Parece claro que entre la dinámica del líquido conductor perfecto y la del límite no conductor podrían existir comportamientos intermedios, con líquidos que evolucionan hacia arriba y luego hacia abajo, al bajar la conductividad, pero sin llegar a la máxima amplitud de deformación. Estos comportamientos podrían reflejarse ya en el salto de presión no-lineal de inestabilidad. Para ello, estudiamos la variación del comportamiento de la función implícita (5.25) con la conductividad. En la teoría lineal vimos que para buenos conductores existían dos soluciones de la inestabilidad lineal para cada conductividad. Si la conductividad es lo bastante baja estas dos soluciones están próximas, lo que puede interpretarse como que la inyección fuerte puede estabilizar la evolución de la inestabilidad, pues por encima de la segunda solución se vuelve a entrar en la zona estable (ver fig. 4.18).

Si representamos la función (5.25) para un líquido con una conductividad alta pero finita se obtiene un comportamiento asintótico cerca de la máxima amplitud de deformación, esto hace que para la deformación estática sea inalcanzable el electrodo inyector. Este comportamiento, que se muestra en la figura 5.2, sólo aparece si se ejerce una inyección sobre el sistema.

Si se continúa bajando la conductividad, aparecen en $\xi = 0$ otras soluciones, que como hemos visto, en los límites de σ_c se corresponden con el criterio de inestabilidad lineal. En la figura 5.3 se ven tres soluciones

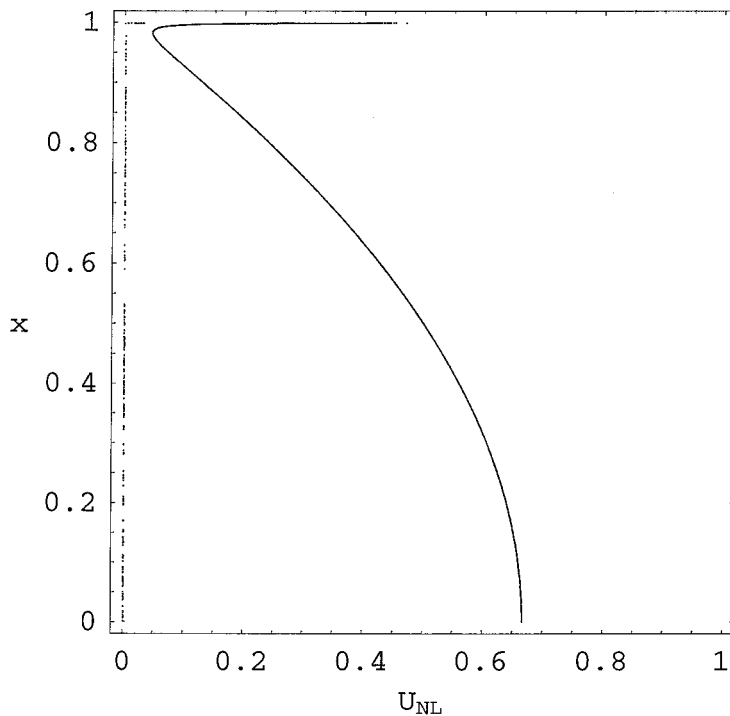


Figura 5.2: El criterio no-lineal para una conductividad adimensional finita: $\sigma_c = 10^4$.

en $\xi = 0$. Por analogía con las tres ramas de la figura 4.18, la de U_{NL} más alto es la que corresponde a la rama del régimen poco conductor. Las dos primeras soluciones encierran una zona inestable y corresponden al régimen conductor. Estas dos soluciones se van acercando a medida que se baja la conductividad, como se ve en la figura 5.4. Finalmente, para conductividades pequeñas se obtiene una solución única en $\xi = 0$, correspondiente al régimen de $S < S^{crit}$, recuperándose el comportamiento del límite no-conductor de la expresión 5.42, representado en la figura 5.5.

5.3.5. Evolución de una interfase no-ohmica/ohmica

Aunque la teoría aquí desarrollada no permite evaluar de una manera rigurosa la dinámica de una interfase no-ohmica/ohmica sometida a inyección unipolar sí puede decirse al menos que el mecanismo no-lineal de inestabilidad de superficie presenta peculiaridades que son consecuencia de la inyección de carga. En el caso de líquidos altamente conductores ya hay algunas evidencias experimentales de que el criterio de inestabilidad EHD se reduce en aproximadamente un 30 % con respecto al caso

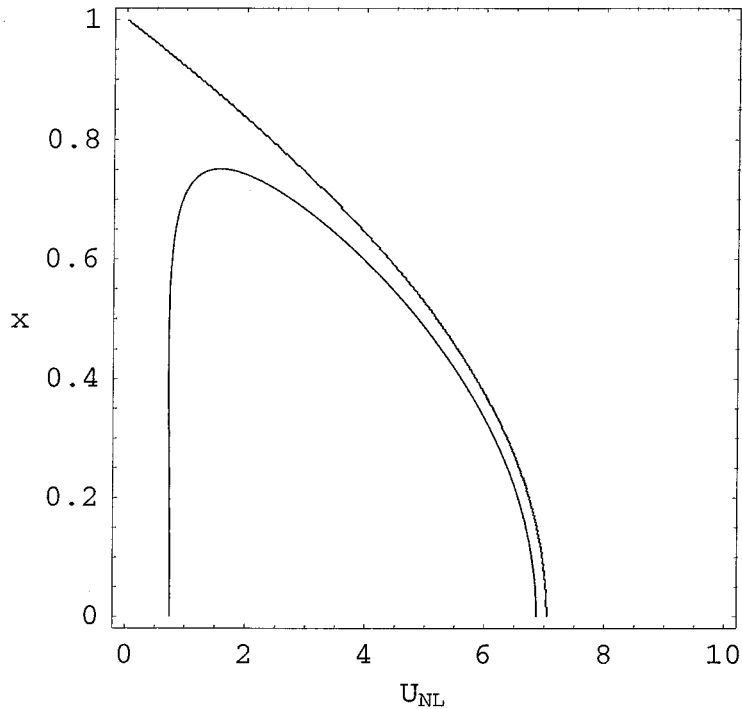


Figura 5.3: El criterio no-lineal para una conductividad adimensional finita: $\sigma_c = 20$.

sin inyección, como se muestra en el trabajo experimental de (Koulova-Nenova *et al.*, 1996). Si bien en esos experimentos no había un régimen de inyección fuerte, sí que fue detectada claramente una variación sub-ohmica de la corriente debida a la acción de una inyección moderada en líquido compuesto de ciclohexano con añadido de sal *TiAP* (para referencias sobre inyección en este líquido, ver por ejemplo el trabajo de Denat (1982)). Esta reducción del criterio clásico de Taylor y McEwan (1965) confirma en principio los resultados de Koulova-Nenova y Atten (1998) y del apartado 4.5.5. La posterior evolución de la superficie conductora es similar al caso sin inyección, es decir, se generan unas puntas líquidas que llegan a chocar con el electrodo inyector (Koulova-Nenova *et al.*, 1996). Sin embargo Néron de Surgy (1995) encontró, estudiando la inestabilidad electrocapilar clásica en mercurio líquido, algunas evidencias experimentales de puntas líquidas estables aun siendo éstas altamente conductoras. Ante los resultados preliminares aquí mostrados, en la fig. 5.2 y la fig. 4.18 es posible que las evidencias experimentales encontradas por Néron de Surgy y que su supusieron consecuencia de "impurezas" en el mercurio se deban en realidad a una inyección fuerte entre la punta líquida y el electrodo plano superior.

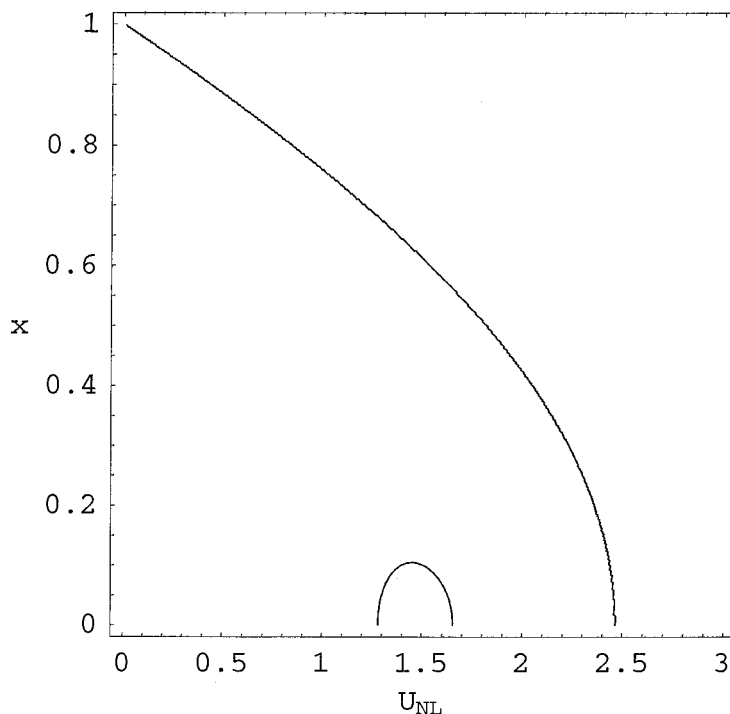


Figura 5.4: El criterio no-lineal para una conductividad adimensional finita: $\sigma_c = 7$.

Clásicamente, la inestabilidad de superficie en líquidos conductores evoluciona abruptamente. Sin embargo, dados los citados indicios experimentales y dada la existencia de una inestabilidad EHD de superficie con dinámica opuesta, como es el Rosetón (que tiene solución lineal para todas las conductividades, como se vio en el capítulo 4), es posible que la inyección de carga sobre superficies líquidas conductoras produzca en determinadas condiciones inestabilidades con una evolución temporal amortiguada, lo que podría facilitar el control de la forma de superficies líquidas mediante la aplicación de campos eléctricos.

5.4. Resumen

En definitiva, con las expresiones del salto de presión eléctrica y gravitatoria se ha visto que una perturbación de longitud de onda infinita ($k = 0$) tiende a una amplitud de deformación máxima en los casos límite de líquido óhmico conductor perfecto ($\sigma_c \rightarrow \infty$) y no conductor ($\sigma_c \rightarrow 0$). Así pues, tenemos dos situaciones límite: una superficie conductora perfecta, de la que, tanto con inyección fuerte como sin in-

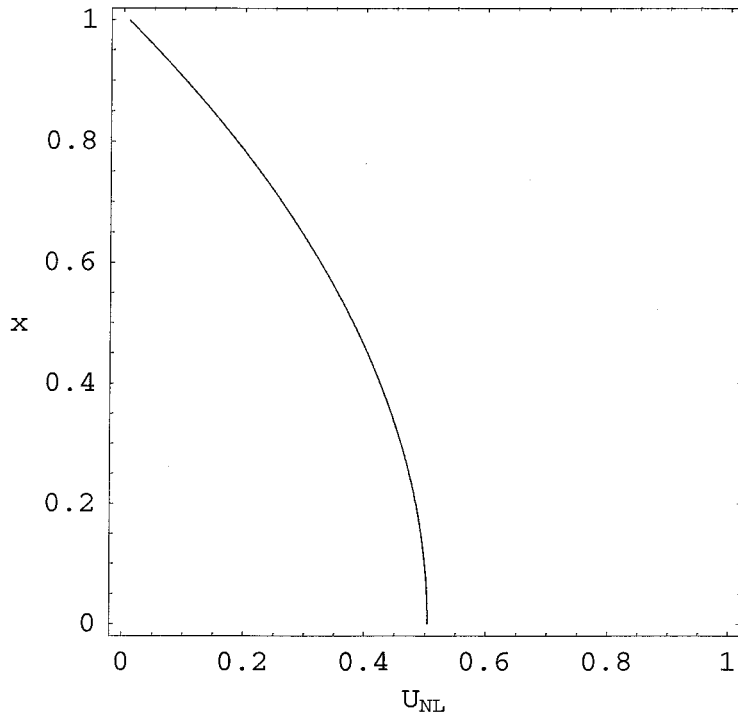


Figura 5.5: El criterio no-lineal para una conductividad adimensional finita: $\sigma_c = 10^{-5}$.

yección, el campo eléctrico tira hacia arriba (ya que $\sigma_s < 0$) y que por tanto evoluciona hacia arriba hasta alcanzar una amplitud de deformación máxima; y una superficie no conductora, en que la presión eléctrica empuja hacia abajo (con inyección fuerte) y por tanto evoluciona hacia abajo, hasta alcanzar una amplitud de deformación máxima.

En ambos límites, se recupera el resultado del criterio lineal si la deformación tiende a cero ($\xi \rightarrow 0$). Debido a que el modelo hidráulico utilizado no tiene en cuenta términos en la presión que aparecen en conductividades intermedias, no se encuentra una coincidencia con la teoría lineal fuera de los dos límites de conductividad. Sin embargo, sí que puede describirse la transición en el comportamiento no-lineal entre las dos situaciones límite antes descritas. En la región de transición, la inyección de carga hace posible que la inestabilidad de longitud de onda larga no presente amplitudes de deformación máxima, lo cual puede llevar a situaciones experimentales en las que líquidos con conductividades elevadas no manifesten inestabilidades de superficie de evolución temporal abrupta, como sucede clásicamente en el caso sin inyección.

Conclusiones

Respecto al estudio de la corriente corona:

- En punta-plano: aparece por encima del umbral corona V_0 ($I \propto (V - V_0)^2$). Las medidas de distribución de corriente se ajustan bien a la ley de Warburg y permiten estimar la movilidad iónica en el aire.

- En el triodo: se puede controlar la corriente y el campo eléctrico en el plano de manera independiente. El triodo proporciona una distribución de corriente más homogénea.

- En las dos configuraciones experimentales estudiadas, punta-plano y triodo, el sistema puede alcanzar el régimen de inyección fuerte. En cualquier caso, no puede afirmarse que haya un comportamiento exactamente igual que el correspondiente al del inyector autónomo en geometría plana.

- En las dos configuraciones, al depositar una capa de líquido poco conductor sobre el electrodo la corriente se reduce. No es posible distinguir, a partir de la forma de las curvas de corriente, entre líquidos poco conductores en régimen óhmico y líquidos en régimen no-óhmico.

Respecto al estudio experimental de las inestabilidades:

- Se han detectado dos tipos de inestabilidad en líquidos poco conductores sometidos a descarga corona: la inestabilidad de volumen y el Rosetón.

- La inestabilidad de volumen sólo se ha detectado en el aceite de silicona (régimen no-óhmico). Se caracteriza por presentar celdas de convección del tamaño de la anchura de la capa de líquido. Esta inestabilidad aparece cuando la corriente alcanza un valor umbral. El valor del parámetro T que se deduce es superior al teórico.

- La inestabilidad Rosetón se observa en líquidos un poco más con-

ductores que el aceite de silicona, en régimen óhmico (aceite de maíz y aceite de ricino). Y coexiste con la inestabilidad de volumen en el caso del aceite de silicona. Se caracteriza por un tamaño inicial de las celdas muy superior a la anchura de la capa de líquido. Este tamaño es aún mayor en el caso de líquidos en régimen óhmico. En ambos casos, el tamaño disminuye sensiblemente al aumentar el campo aplicado. El umbral de la inestabilidad depende a su vez del campo eléctrico y de la corriente aplicados.

- El comportamiento del Rosetón en capas muy delgadas de líquido es completamente diferente en los casos óhmico y no-óhmico: en el primer caso, al disminuir d los valores críticos del Rosetón disminuyen hacia un valor finito (que en el caso punta-plano no puede ser menor que el umbral corona); y en el segundo caso, al disminuir d los valores críticos del Rosetón tienden hacia valores cada vez más altos.

- Junto a la visualización directa, se ha demostrado que la detección de bordes mediante el procesado de imágenes es una técnica viable para la determinación del umbral de inestabilidad.

Respecto al estudio teórico de las inestabilidades:

- El estudio teórico se ha centrado en el problema de una interfase fluida no-óhmica/óhmica; o sea, una capa de fluido no-óhmico (p.e. el aire) sobre una óhmica (p.e. aceite de ricino).

- El estudio de las ecuaciones del inyector autónomo en una interfase plana no-óhmica/óhmica permite detectar una transición en el comportamiento de la misma al aumentar el parámetro S : de poco conductora a muy conductora. Esta transición tiene lugar en un valor crítico S^{crit} para el cual la densidad de carga en la interfase se anula. Así, por debajo y por encima de S^{crit} la densidad de carga superficial en la interfase cambia de signo y, como se ha visto, tiene diferentes órdenes de magnitud. El valor S^{crit} depende a su vez del nivel de inyección C y de la anchura d de la capa óhmica.

- La inestabilidad EHD lineal de una interfase no-óhmica/óhmica sometida a la acción de un campo perpendicular y a inyección unipolar ha sido formulada de forma completa, mostrándose todas las ecuaciones que intervienen en el problema. Estas ecuaciones han sido resueltas de forma analítica en el límite de onda larga $k = 0$. En este límite de onda larga, las ecuaciones quedan reducidas a la parte eléctrica. Esta

situación aproxima bien el caso de una interfase aire/líquido.

- El estudio lineal de la inestabilidad en $k = 0$ confirma la existencia de la transición de régimen poco conductor a conductor, en función de S . Dicha transición se refleja en la existencia de una banda estable, centrada en S^{crit} , que separa dos regiones inestables: una región con $S < S^{crit}$, en la que los valores críticos coinciden en orden de magnitud con los del Rosetón, y una región $S > S^{crit}$ en la que los valores críticos corresponden a los del caso de una superficie conductora.

- En el caso límite $S \rightarrow \infty$ y sin inyección, $C = 0$, se recupera el resultado clásico del criterio de una superficie conductora perfecta. En el límite $S \rightarrow \infty$ con inyección fuerte, $C \rightarrow \infty$, se tiene que el valor crítico de la inestabilidad en $k = 0$ es $2/3$ del valor crítico sin inyección.

- El paso de las curvas de $U_c(S)$ (valores críticos del voltaje adimensional frente a la conductividad adimensional) a la representación dimensional $V_c(\sigma_c)$ revela la existencia de tres valores críticos lineales para cada conductividad en la región conductora. El mayor de estos tres valores es el que corresponde a la rama del Rosetón. El intermedio es una segunda solución de la inestabilidad en una interfase conductora, que sólo aparece con inyección. Y el más bajo es el correspondiente a la inestabilidad clásica en una interfase conductora (y es por ser el más bajo de los tres valores, el que se manifiesta). En la región poco conductora hay un único valor crítico para cada conductividad, correspondiente al Rosetón. En definitiva, de una rama de inestabilidad lineal en $k = 0$ en el caso sin inyección hemos pasado a tres ramas en el caso con inyección. Dos de ellas no habían sido encontradas anteriormente.

- Un primer análisis no-lineal indica que el comportamiento de la interfase en función de la amplitud de deformación es análogo en los dos límites $\sigma_c \rightarrow \infty$ y $\sigma_c \rightarrow 0$: en ambos casos la inestabilidad de onda larga tiende a una amplitud de deformación máxima. En valores intermedios de la conductividad pueden tenerse inestabilidades que no llegan al máximo de amplitud de deformación. Es decir hay inestabilidades en líquidos con conductividades altas, pero finitas, cuya evolución temporal es de esperar que sea diferente a la del caso sin inyección.

Bibliografía

- M. ABRAMOWITZ Y I. STEGUN, 1965. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, Inc.
- A.T. AHMED EL-HADDAD, J. FORNAZÉRO Y G. MESNARD, 1980. Mécanismes de base de la déformation cellulaire d'une couche mince isolante liquide soumise à un flux de charges. *Phys. Chem Liq.*, **9**, 201–218.
- P. ATTEN, 1972. Stabilité des liquides de faible conductivité. *Journal de Mécanique*, **14** (3), 461–495.
- P. ATTEN, 1996. On the use of an ionic pump in a convector heater. *IEEE Transactions on Industry Applications*, **32** (1), 80–89.
- P. ATTEN Y D. KOULOVA-NENOVA, 1996. EHD instability of insulating liquids due to charge injection from the free surface. En *Conference Record of the 12th International Conference on Dielectric Liquids*, págs. 476–479. ICDL '96, Rome, Italy.
- P. ATTEN Y D. KOULOVA-NENOVA, 1999. On the instability between two layers of conducting and insulating liquids subjected to a dc field. En *Proceedings of 13th International Conference on Dielectric Liquids*, págs. 277–280. ICDL '99.
- P. ATTEN Y J.C. LACROIX, 1979. Non-linear hydrodynamic stability of liquids subjected to unipolar injection. *Journal de Mécanique*, **18** (3), 469–510.
- P. ATTEN Y R. MOREAU, 1972. Stabilité électrohydrodynamique des liquides isolants soumis à une injection unipolaire. *Journal de Mécanique*, **11**, 471–520.
- P. ATTEN, D. KOULOVA-NENOVA Y A.T. PÉREZ, 1998. On the EHD instability of a layer of insulating liquid subjected to a unipolar charge

injection due to corona discharge in air. En *Proceedings International Workshop on Electrical Conduction, Convection and Breakdown in Fluids*, págs. 47–51. Universidad de Sevilla.

A. CASTELLANOS, 1998. *Electrohydrodynamics*. Springer-Wien New-York.

S. CHANDRASEKHAR, 1961. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Clarendon Press.

X.L. CHU, M.G. VELARDE Y A. CASTELLANOS, 1989. Dissipative Hydrodynamic Oscillators. III.- Electrohydrodynamic Interfacial Waves. *Il Nuovo Cimento*, **11**, D5, 727–737.

R. COELHO Y J. DEBEAU, 1971. Properties of the tip-plane configuration. *Journal of Physics D: Applied Physics*, **4**, 1266–1280.

G. NÉRON DE SURGY, 1995. *Étude des instabilités électrocapillaires. Application aux sources d'ions et d'électrons. Thèse de doctorat*. Université de Paris 6.

A. DENAT, 1982. *Thèse de doctorat*. Université de Paris 6.

E. DURAND, 1966. *Électrostatique*, tomo II. Masson, Paris.

Y. EL-DIB, 1999. Nonlinear stability of an electrified interface supporting surface charges between two viscous fluids. *Journal of Colloid and Interface Science*, **210**, 103–117.

N. FELICI Y R. TOBAZEON, 1981. Charge carrier elimination and production by electrodyalitic polymers in contact with dielectric liquids. *Journal of Electrostatics*, **11** (2), 135–161.

J.A. GIACOMETTI, 1987. Radial current-density distributions and sample charge uniformity in a corona triode. *Journal of Physics D: Applied Physics*, **20**, 675–683.

J.A. GIACOMETTI Y J.S. CARVALHO CAMPOS, 1990. Constant current corona triode with grid voltage control. application to polymer foil charging. *Review of Scientific Instruments*, **91** (3), 1143–1150.

J.A. GIACOMETTI Y O.N. OLIVEIRA, 1992. Corona charging of polymers. *IEEE Transactions on Electrical Insulation*, **27** (5), 924–943.

- M. GOLDMAN Y M. GOLDMAN, 1978. *Gaseous Electronics*. Academic Press, New York.
- H. GONZÁLEZ, G. NÉRON DE SURGY Y J. CHABRERIE, 1994. Influence of bounded geometry on electrocapillary instability. *Physical Review B*, **50** (4), 2520–2528.
- C.S. HERRICK, 1974. Electroconvection cells in dielectric liquids interfaced with conducting fluids. *Proc R Soc Lond A* :, **336**, 487–494.
- E. KOSCHMIEDER Y S. PALLAS, 1974. Heat transfer through a shallow, horizontal convecting fluid layer. *Int. J. Heat Mass Transfer.*, **17**, 991–1002.
- D. KOULOVA-NENOVA, 1997. EHD instability of two liquid layer system with deformable interface. *Journal Of Electrostatics*, **40 & 41**, 185–190.
- D. KOULOVA-NENOVA Y P. ATTEN, 1997. EHD instability of air/liquid two layer system under unipolar charge injection. *Journal Of Electrostatics*, **40 & 41**, 179–184.
- D. KOULOVA-NENOVA Y P. ATTEN, 1998. EHD convective and interfacial instabilities of conducting/insulating two liquid layer system with deformable interface. En *Proceedings International Workshop on Electrical Conduction, Convection and Breakdown in Fluids*, págs. 65–69. Universidad de Sevilla.
- D. KOULOVA-NENOVA, P. ATTEN Y B. MALRAISON, 1995. En *Inst. Phys. Conf. Ser. No 143*, págs. 279–282.
- D. KOULOVA-NENOVA, B. MALRAISON Y P. ATTEN, 1996. Interfacial EHD instability of two superposed liquids. En *Conference Record of the 12th International Conference on Dielectric Liquids*, págs. 472–476. ICDL '96, Rome, Italy.
- J.C. LACROIX, P. ATTEN Y E.J. HOPFINGER, 1975. Electroconvection in a dielectric liquid layer subjected to unipolar injection. *Journal of Fluid Mechanics*, **69**, 539–563.
- B. MALRAISON Y P. ATTEN, 1991. Instabilité électrohydrodynamique due à l'injection d'ions à la surface libre d'un liquid isolant. *Journal de Physique III France*, **1**, 1243–1249.

- J.R. MELCHER, 1963. *Field-Coupled Surface Waves*. The MIT Press.
- J.R. MELCHER Y W. SCHWARZ JR., 1968. Interfacial relaxation overstability in a tangential electric field. *Physics of Fluids*, **11**, 2604–2616.
- J.R. MELCHER Y C.V. SMITH JR., 1969. Electrohydrodynamic charge relaxation and interfacial perpendicular-field instability. *Physics of Fluids*, **12**, 778–790.
- J.R. MELCHER Y G.I. TAYLOR, 1969. Electrohydrodynamics: a review of the role of interfacial shear stresses. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **1**, 111–146.
- K. MIMA, H. IKEZI Y A. HASEGAWA, 1976a. Nonlinear deformation of the electron-charged surface of liquid ^4He . *Physical Review Letters*, **47** (12), 849–852.
- K. MIMA, H. IKEZI Y A. HASEGAWA, 1976b. Parametric excitation of collective modes in an electron layer on a liquid surface. *Physical Review B*, **14** (9), 3953–3960.
- G. NÉRON DE SURGY, J. CHABRERIE, O. DENOUX Y J. WESFREID, 1993. Linear growth of instabilities on a liquid metal under normal electric field. *Journal de Physique II France*, **3**, 1201–1225.
- O. OLIVEIRA Y G.F. LEAL FERREIRA, 1985. Grid-to-plate current-voltage characteristics of a corona triode. *Review of Scientific Instruments*, **56** (10), 1957–1961.
- W.K.H. PANOFSKY Y M. PHILLIPS, 1977. *Classical Electricity and Magnetism*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- A.T. PÉREZ, 1996. EHD instabilities induced by corona discharge. En *Proceedings of 12th International Conference on Dielectric Liquids*, págs. 126–129. ICDL '96.
- A.T. PÉREZ, 1997. Rose-window instability in low conducting liquids. *Journal Electrostatics*, **40 & 41**, 141–146.
- F. PONTIGA Y A. CASTELLANOS, 2000. Oscillatory instability in a plane of nonpolar liquid subjected to an electric field. En *2000 Annual Report Conference on Electrical Insulation and Dielectric Phenomena (CEIDP)*, págs. 97–100. IEEE Dielectrics and Insulation Society.

- F. PONTIGA, A. CASTELLANOS Y B. MALRAISON, 1995. Some considerations on the instabilities of nonpolar liquids subjected to charge injection. *Physics of Fluids*, **7** (6), 1348–1356.
- M. ROBINSON, 1961. Movement of air in the electric wind if the corona discharge. *Trans. Am. Inst. Electr. Eng.*, **80**, 143–150.
- D.A. SAVILLE, 1997. Electrohydrodynamics: The Taylor-Melcher Leaky Dielectric Model. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **29**, 27–64.
- J.M. SCHNEIDER Y P.K. WATSON, 1970. Electrohydrodynamic stability of space-charge-limited currents in dielectric liquids. i. theoretical study. *Physics of Fluids*, **13**, 1948–1954.
- R. SIGMOND, 1982. Simple approximate treatment of unipolar space-charged-dominated coronas: The warburg law and the saturation current. *Journal of Applied Physics*, **53**, 891–898.
- S. SMITH Y J. BRADY, 1997. SUSAN- a new approach to low level image processing. *Int. Journal of Computer Vision*, **23**, 45–78.
- G.I. TAYLOR Y A.D. MCEWAN, 1965. The stability of a horizontal fluid interface in a vertical electric field. *Journal of Fluid Mechanics*, **22**, 1–15.
- F. VEGA Y A.T. PÉREZ, 1999a. Measurements of electric current through a liquid-air interface in corona discharge. En *1999 Annual Report Conference on Electrical Insulation and Dielectric Phenomena (CEIDP)*, págs. 818–821. IEEE.
- F. VEGA Y A.T. PÉREZ, 1999b. EHD instabilities induced by corona discharge using a triode configuration. En *Proceedings of the S.F.E., Poitiers*, págs. 224–228.
- F. VEGA Y A.T. PÉREZ, 2001. Inestabilidad electrohidrodinámica de superficie. En *Reunión Bienal de la Real Sociedad Española de Física y 11 Encuentro para la Enseñanza de la Física*, págs. 65–66. Universidad de Sevilla.
- F. VEGA Y A.T. PÉREZ, 2002a. Corona-induced electrohydrodynamic instabilities in low conducting liquids. *Enviado a Experiments in Fluids para su publicación.*

F. VEGA Y A.T. PÉREZ, 2002b. Instability in a non-ohmic/ohmic interface under a perpendicular electric field and unipolar injection. *The Physics of Fluids*, **aceptado, a publicar en el número de Agosto**.

E. WARBURG, 1899. *Wied. Ann.*, **67**, 69. (Citado en Sigmond (1982)).

E. WARBURG, 1927. *Handbuch der Physik*, tomo 14. Springer, Berlin. (Citado en Sigmond (1982)).

P.K. WATSON Y T. CLANCY, 1965. Electron injection technique for investigating processes in insulating liquids and solids. *Review of Scientific Instruments*, **36** (2), 217-222.

P.K. WATSON, J.M. SCHNEIDER Y H.R. TILL, 1970. Electrohydrodynamic stability of space-charge-limited currents in dielectric liquids. ii. experimental study. *Physics of Fluids*, **13**, 1955-1961.

H.J. WINTLE, 1987. Space charge limited current in the needle-plane geometry. *Journal Electrostatics*, **19**, 257-274.

S. WOLFRAM, 1999. *The Mathematica Book, 4th Edition*. Wolfram Media, Inc. Cambridge University Press.



UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. FRANCISCO VEGA MORA

titulada INESTABILIDADES HIDRODINÁMICAS INDUCIDAS POR EFECTOS CORONA

acordó otorgarle la calificación de SOBRESALIENTE CUM LAUDE por unanimidad

Sevilla, 12 de Julio 2002

El Vocal

El Vocal

El Vocal

[Signature]

[Signature: Rafael García Romero]

[Signature: Antonio Ramos]

El Presidente, B. MALVARÁN El Secretario,

El Doctorado,

[Signature: A. Castellano]
A. Castellano

[Signature: Miguel Pérez-Saborido]

MIGUEL PÉREZ-SABORIDO

[Signature]