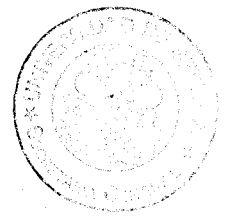


Sevilla, a los 165 días de esta Tesis Doctoral
al libro número 8 del libro
Sevilla, a los ...
El cede del Inventario de Tesis.

Edeffette



UNIVERSIDAD DE SEVILLA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
BIBLIOTECA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

ESTUDIO DE UN MODELO MATEMÁTICO DE TURBULENCIA OBTENIDO MEDIANTE TÉCNICAS DE HOMOGENIZACIÓN

Autorizo la consulta de esta tesis

Fdo. Fco. Ortegon Gallego

Francisco Ortegon Gallego

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Depositado en Secret del Depto de Analisis Matematico
de la Facultad de Matematicas
de la Universidad desde el día
F. de ... 22 de Junio de 1988

Sevilla 27 de Junio de 1988

EL DIRECTOR DE

Juan Arias de Rey M.

R 11198
+

043
229

LBS 602089

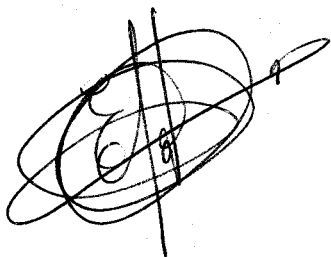
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMATICAS

DEPARTAMENTO DE ANALISIS MATEMATICO

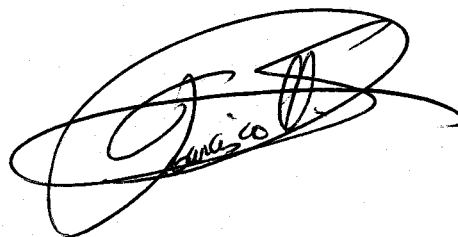
**ESTUDIO DE UN MODELO
MATEMATICO DE TURBULENCIA
OBTENIDO MEDIANTE
TECNICAS DE HOMOGENIZACION**

Vº Bº
del Catedrático Director



Fdo. Enrique Fernández Cara
Catedrático de Análisis Matemático
de la Universidad de Sevilla

Memoria presentada por
Francisco Ortegón Gallego
para optar al grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas
por la Universidad de Sevilla



Sevilla, Junio de 1988

Índice

Notaciones	3
Introducción	6
O.1 Preliminares	6
O.2 Efectos del término no lineal	11
O.3 Resultados experimentales. Turbulencia	13
O.4 Características de la Turbulencia	16
O.5 Modelización de la Turbulencia: descripción de algunos modelos clásicos	19
O.5.1 Filosofía general de los modelos de Turbulencia	19
O.5.2 El problema del cierre de Reynolds	22
O.5.3 Algunos modelos clásicos de Turbulencia	22
O.6 Contenido del presente trabajo	28
1 Un modelo matemático de Turbulencia: el modelo M.P.P.	34
1.1 Descripción del modelo: ecuaciones de Navier-Stokes con condiciones iniciales muy oscilantes	34
1.2 El sistema de ecuaciones promediadas del modelo	40
2 El problema canónico en micro-estructura	44
2.1 Motivación	44
2.2 La dependencia con respecto a C	45
2.3 Multiplicidad de soluciones	47
2.4 Simetrías de las fluctuaciones canónicas. Consecuencias	49
2.4.1 Simetrías de los tensores de cierre	50
2.5 La dependencia respecto a h/q . Consecuencias	52
2.6 Otra expresión de las ecuaciones del modelo	54
3 El modelo M.P.P. para flujos con media unidimensional	56
3.1 La matriz C	57
3.2 Estructura de los términos de cierre R , S , ψ_q y ψ_h	59
3.3 Desarrollos limitados para los términos de cierre	63
3.4 Análisis asintótico para $\alpha \rightarrow +\infty$. Consecuencias	64

4	Invariancia por cambios de sistemas de referencia	72
4.1	Cambio de sistema de referencia en las ecuaciones del modelo	73
4.2	Cálculo de flujos medios bidimensionales	81
4.2.1	Expresión de las ecuaciones del modelo en función del primer invariante $i_1(C)$	84
4.3	Conclusión	87
5	Resolución numérica del problema canónico en micro-estructura: tabulación de los términos de cierre del modelo	89
5.1	Resolución numérica mediante un método de mínimos cuadrados y penalización . .	90
5.1.1	Descripción del Método	90
5.2	Discretización por el Método de los Elementos Finitos	95
5.2.1	Cálculo de $DJ_h(w_h)$	97
5.2.2	Algoritmo de Gradiente Conjugado	99
5.3	Resultados numéricos	105
5.3.1	Aproximación numérica de los términos de cierre	105
5.3.2	Características de los métodos Control Óptimo, Gradiente Conjugado, Elementos Finitos	107
5.3.3	Resultados	109
	Conclusión General	113
	Figures	118
A	Desarrollos asintóticos	133
B	Condiciones de compatibilidad para la ecuación linealizada	137
C	Invariantes de la ecuación de Euler generalizada	141
D	Derivación de las ecuaciones del modelo	143
	Bibliografía	148

Notaciones

Ω : dominio de \mathbb{R}^3

$]0, T[$: intervalo de tiempo de observación, $T > 0$

Y : cubo $] -\pi, \pi[^3$

Z : intervalo $]0, +\infty[$

x : $= (x_1, x_2, x_3)$, variable espacial, $(x \in \Omega)$

t : variable temporal, $(t > 0)$

y : $= (y_1, y_2, y_3)$ variable espacial para las micro-estructuras, $(y \in Y)$

τ : variable temporal para las micro-estructuras, $(\tau > 0)$

$u(x, t)$: campo medio de velocidades en el punto $x \in \Omega$ y en el instante $t \in [0, T[$,

$$u(x, t) = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \\ u_3(x, t) \end{pmatrix}$$

$p(x, t)$: presión media

ε : razón entre las escalas de longitud de las pequeñas y las grandes estructuras,

$$\left(\varepsilon = \frac{l}{L}\right)$$

$a(x, t)$: coordenadas lagrangianas inversas

$$u_{,t} := \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$u_{i,j} := \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, 1 \leq i, j \leq 3$$

$$u_{i,j} := \frac{\partial u_i}{\partial y_j}, 1 \leq i, j \leq 3$$

∇a : matriz de elementos $(\nabla a)_{ij} = a_{j,i}, 1 \leq i, j \leq 3$

$$C := \nabla a^T \nabla a$$

$$\bar{C} := \nabla a \nabla a^T$$

$u \otimes v$: matriz de elementos $u_i v_j, 1 \leq i, j \leq 3$

$tr(B)$: traza de la matriz B, B_{ii}

$\nabla \cdot B$: vector de componentes $B_{j,i}, i = 1, 2, 3$

$w(y, \tau; x, t)$: campo de velocidades turbulentas $(y = \frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \tau = \frac{t}{\varepsilon^{2/3}})$

$\pi(y, \tau; x, t)$: presión turbulenta

$u^{(k)}(y, \tau; x, t)$: campo de velocidades turbulentas de orden k

$p^{(k)}(y, \tau; x, t)$: presión turbulenta de orden k

$(\nabla a \nabla_y) w$: matriz de elementos $[(\nabla a \nabla_y) w]_{i,j} = a_{k,i} w_{j,k}$

$r = (\nabla a \nabla_y) \times w$: vector de componentes $[(\nabla a \nabla_y) \times w]_i = \varepsilon_{ikn} a_{j,k} w_{n,j}$ donde ε_{ikn} es el tensor alternante de tercer orden, i.e.

$$\varepsilon_{ikn} = \begin{cases} 1 & \text{si } ikn \text{ está en el grupo } 12312, \\ -1 & \text{si } ikn \text{ está en el grupo } 13213, \\ 0 & \text{si dos subíndices se encuentran repetidos} \end{cases}$$

$\mathcal{M}_{n \times n}$: espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n

$$O_+^3 := \{Q \in \mathcal{M}_{3 \times 3} / Q^T Q = I, \det(Q) = 1\}$$

$$\mathcal{M}_Y := \{Q \in \mathcal{M}_{3 \times 3} / Q^T Q = I, Qy \in Y, \forall y \in Y\}$$

$A : B$: producto escalar de las matrices A y B , i.e. $tr(B^T A) = A_{ij} B_{ij}$

$\langle w \rangle$: media en Y definida por $\langle w \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Y w dy$

$\ll w \gg$: media en $Y \times Z$ definida por $\ll w \gg = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \langle w \rangle d\tau$

\tilde{w} : $= \nabla a^T w$ fluctuación canónica en micro-estructura

$q(x, t)$: energía cinética turbulenta media

$$q(x, t) = \frac{1}{2} \langle |w|^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \tilde{w} C^{-1} \tilde{w} \rangle$$

$h(x, t)$: helicidad media turbulenta

$$h(x, t) = \langle w \cdot r \rangle = \langle (\nabla a^{-T} \tilde{w}) \cdot (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} \tilde{w}) \rangle$$

$\tilde{w}'(y, \tau; x, t)$: fluctuación canónica normalizada

$$\tilde{w}'(y, \tau; x, t) = q^{-1/2} \tilde{w}(y, q^{-1/2} \tau; x, t)$$

$\pi'(y, \tau; x, t)$: presión turbulenta normalizada

$$\pi'(y, \tau; x, t) = q^{-1} \pi(y, q^{-1/2} \tau; x, t)$$

T_h triangulación de Y para las presiones

$T_{h/2}$ triangulación de Y para las velocidades

$|T|$ medida de un elemento genérico de T_h o $T_{h/2}$

Atención.—El símbolo T se usa en tres casos diferentes:

1. ∇a^T : traspuesta de la matriz ∇a ,
2. $]0, T[$: $T > 0$, T es el tiempo final de observación,
3. $T \in T_h$ ($T_{h/2}$) elemento de la triangulación T_h ($T_{h/2}$)

No obstante, no hay lugar a una posible confusión.

En estas definiciones, estamos usando la convención de sumación para índices repetidos, incluso si uno está en minúsculas y el otro en mayúsculas. A lo largo de este trabajo se hará uso de esta convención.

Introducción

O.1 Preliminares

Las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\mathbf{u}_{,t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \mathbf{p} - \nu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \quad (\text{O.1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \quad (\text{O.2})$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^0(x) \quad \text{en } \Omega \quad (\text{O.3})$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma \quad \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \quad (\text{O.4})$$

rigen el campo de velocidades $\mathbf{u}(x, t)$ y las presiones $\mathbf{p}(x, t)$ de los fluidos newtonianos viscosos incompresibles [32]. En (O.1)-(O.4) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2, 3$ en la práctica) designa el abierto ocupado por el fluido y Γ su frontera; $T > 0$ es el tiempo final de observación; \mathbf{u}^0 es el campo inicial de velocidades en Ω y \mathbf{u}_Γ es la velocidad sobre la frontera.

La ecuación (O.2) se llama ecuación de continuidad y expresa la condición de incompresibilidad del fluido. En consecuencia, la densidad del medio ρ_0 es constante en el tiempo (se supondrá además que el fluido es homogéneo y por tanto ρ_0 tampoco depende de x).

De este modo se obtiene $\mathbf{p}(x, t) = \frac{\mathbf{p}'(x, t)}{\rho_0}$, donde $\mathbf{p}'(x, t)$ representa la presión dinámica del fluido; la presión está ligada a las propiedades termodinámicas locales, exactamente como si el fluido se encontrara en equilibrio.

El segundo miembro de (O.1), $\mathbf{f}(x, t)$, es una densidad volumínica de fuerzas exteriores debidas (eventualmente) a la acción de un campo gravitatorio, magnético, etc...

Finalmente, en (O.1), la constante positiva $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$ es la viscosidad cinemática del fluido (μ representa el primer coeficiente de viscosidad).

El operador $\frac{D}{Dt}$, definido por

$$\frac{Dv}{Dt} = v_{,t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)v$$

se denomina derivada material, total o convectiva, relativa al campo \mathbf{u} . Su aparición en (O.1) está relacionada con el cálculo de la derivada (respecto a t) de la cantidad de movimiento asociada a las partículas del fluido. El término $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ recibe el nombre de término de transporte o convección.

Por otra parte, $-\nu\Delta\mathbf{u}$ es el término de difusión (o de viscosidad). Su aparición se debe a la existencia de fuerzas de rozamiento entre las partículas: a nivel molecular, las partículas interaccionan, produciéndose una disipación de energía.

En términos generales, (O.1) nos dice que el producto $\rho_0(\mathbf{u}_{,t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u})$ de la masa por la aceleración que sufren las partículas (a lo largo de sus trayectorias) por unidad de volumen es igual a la fuerza total que actúa sobre ellas. Ésta se escribe como la suma vectorial de tres:

1. La fuerza de presión $-\nabla p'$ debida a la acción directa (y normal) del resto del medio.
2. La resultante de las fuerzas de viscosidad $\mu\Delta\mathbf{u}$, debida al rozamiento con el resto de las partículas.
3. La fuerza exterior $\rho_0\mathbf{f}$.

Las ecuaciones (O.1)-(O.4) están escritas en sus correspondientes magnitudes, esto es, el campo $\mathbf{u}(x, t)$ posee las dimensiones de velocidad ($[\mathbf{u}] = L/T$); $\mathbf{p}(x, t)$ las de presión por densidad de masa ($[\mathbf{p}] = L^2/T^2$), etc. En la práctica es conveniente adimensionalizarlas lo que conduce a la aparición de un importante y nuevo parámetro, el número de Reynolds (\mathfrak{R}) que mide la razón de los órdenes de magnitud de las fuerzas convectivas $(\mathbf{u}_{,t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u})$ y las fuerzas de viscosidad $(-\nu\Delta\mathbf{u})$.

Sea L una longitud característica del dominio Ω (su diámetro, por ejemplo) y U una velocidad característica (definida, por ejemplo, a partir de \mathbf{u}_r). Con estas cantidades se construye una escala de tiempo $T = L/U$.

Efectuando ahora el cambio de variables

$$\underline{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad \underline{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \underline{t} = \frac{t}{T} \quad (0.5)$$

se tiene que $\underline{\mathbf{u}}$, $\underline{\mathbf{x}}$ y \underline{t} son cantidades adimensionalizadas.

Las ecuaciones (O.1),(O.2) escritas en las nuevas variables adoptan la forma

$$\underline{\mathbf{u}}_{,t} + (\underline{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \underline{\mathbf{u}} + \nabla \underline{\mathbf{p}} - \frac{\nu}{LU} \Delta \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{f}} \quad (0.6)$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{u}} = 0 \quad (0.7)$$

donde $\underline{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{\rho_0 U^2}$ y $\underline{\mathbf{f}} = \frac{\mathbf{f}L}{U^2}$

Las expresiones (O.6),(O.7) constituyen las ecuaciones de Navier-Stokes adimensionalizadas para un fluido viscoso e incompresible. Se define el número de Reynolds \Re como

$$\Re = \frac{LU}{\nu}$$

Nótese que \Re es una cantidad adimensional; se trata, por tanto, de un valor característico para cada problema. En efecto, si Ω_1 y Ω_2 son dos dominios con geometrías semejantes y las respectivas velocidades características U_1 , U_2 y las viscosidades ν_1 , ν_2 son tales que

$$\Re_1 = \Re_2, \quad \text{i.e.} \quad \frac{L_1 U_1}{\nu_1} = \frac{L_2 U_2}{\nu_2},$$

entonces los campos de velocidades adimensionalizados $\underline{\mathbf{u}}_1$ y $\underline{\mathbf{u}}_2$ verifican la misma ecuación en el mismo abierto, y, en consecuencia, $\underline{\mathbf{u}}_1$ puede ser obtenida a partir de $\underline{\mathbf{u}}_2$ mediante un simple cambio de variables (*Principio de Similitud de Reynolds*).

Este hecho es de gran importancia en el diseño de modelos experimentales: será suficiente trabajar con geometrías reducidas (maquetas); piénsese, por ejemplo, en la utilidad de este principio para la determinación o diseño de aviones

En nuestro estudio, estaremos interesados en los casos en que \Re es considerablemente grande. Obsérvese que es incorrecto decir que si ν es pequeño, entonces los efectos viscosos son irrelevantes (dado que no se están considerando las otras

dimensiones del problema). En otras palabras, considerar ν pequeño no posee físicamente significado hasta que L y U hayan sido fijados. Por el contrario, el comportamiento del flujo depende del orden de magnitud de $\frac{1}{\Re}$, como será puesto en evidencia más adelante.

A partir de ahora, supondremos que (O.1)-(O.4) han sido previamente adimensionalizadas (i.e. $L = O(1)$, $U = O(1)$). Consecuentemente, ν representa el inverso del número de Reynolds: $\nu = \frac{1}{\Re}$.

Desde el punto de vista matemático, el sistema (O.1)-(O.4) es un problema bien planteado, en el sentido de que, al menos en dimensión $N = 2$, existe solución única bajo ciertas hipótesis sobre los datos. En dimensión $N = 3$, la situación es más compleja; las hipótesis sobre los datos deben ser más exigentes para garantizar la existencia y unicidad de solución al menos en lo que respecta a soluciones "locales en tiempo".

En efecto, consideremos en primer lugar el problema estacionario de Navier-Stokes, esto es:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega \quad (O.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (O.9)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma \quad \text{sobre } \Gamma \quad (O.10)$$

Se tiene el siguiente resultado ([20,21,38]):

Si la dimensión del espacio es $N \leq 4$, la frontera Γ es lipschitziana y $\mathbf{f} \in [H^{-1}(\Omega)]^N$, entonces existe al menos un par $(\mathbf{u}, p) \in V \times L_0^2(\Omega)$, solución de (O.8)-(O.9), donde

$$V = \left\{ \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^N, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \right\}$$

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ \mathbf{q} \in L^2(\Omega), \quad \int_\Omega \mathbf{q} \, dx = 0 \right\}$$

Si, además, ν y \mathbf{f} son tales que

$$\frac{c(\Omega)}{\nu^2} \|\mathbf{f}\|_{V'} < 1, \quad \|\mathbf{f}\|_{V'} = \sup_{\mathbf{v} \in V} \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{H^{-1}H_0^1}}{|\mathbf{v}|_{1,\Omega}} \quad (O.11)$$

siendo $c(\Omega)$ una constante que solo depende de Ω , entonces el problema (O.8)-(O.10) tiene una única solución.

Obsérvese que (O.11) se verifica para ν *suficientemente grande* o bien *f* *suficientemente pequeña*.

Consideremos ahora el problema no homogéneo, esto es, aquél donde la condición de contorno (O.10) se cambia por

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{sobre } \Gamma \quad (\text{O.10})'$$

Si denotamos Γ_i , $i = 1, \dots, n$, las distintas componentes conexas de Γ , se tiene el siguiente resultado:

Sea $N \leq 3$, Γ *lipschitziana*, $\mathbf{f} \in [H^{-1}(\Omega)]^N$ y $\mathbf{g} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^N$ tal que

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{O.12})$$

entonces existe al menos un par $(\mathbf{u}, p) \in [H^1(\Omega)]^N \times L_0^2(\Omega)$, solución de (O.8), (O.9), (O.10)'.
(O.10)'.
(O.10)'.

Si además $\nu > \nu_0(\Omega, \mathbf{f}, \mathbf{g})$, o bien los datos (\mathbf{f}, \mathbf{g}) son *suficientemente regulares*, la solución (\mathbf{u}, p) es *única*. ([20,38])

Notemos de nuevo cómo la unicidad está relacionada con el hecho de que el inverso del número de Reynolds sea *suficientemente grande*.

Conviene señalar que la unicidad de solución, en general, no está garantizada ([38]).

Se observa también que (O.9), (O.10)' implican para \mathbf{g} la condición de flujo nulo sobre Γ :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma = 0, \quad (\text{O.13})$$

la condición (O.12) es más restrictiva, pues supone que \mathbf{g} es de flujo nulo sobre cada Γ_i .

Veamos ahora algunos resultados conocidos sobre el problema de evolución de Navier-Stokes (O.1)-(O.4). Se supone que, en (O.4), $\mathbf{u}_{\Gamma} = 0$:

Sean $N \leq 4$, $\mathbf{u}^0 \in H$, $\mathbf{f} \in L^2(0, T; V')$ donde

$$H = \left\{ \mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^N, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$V = \left\{ \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^N, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \right\}$$

entonces existen $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, $\mathbf{p} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$, solución de (O.1)-(O.4).

Si $N = 2$, la solución \mathbf{u} es única.

Si $N = 3$, hay unicidad de solución regular.

Si $N = 3$, \mathbf{u}_0 y \mathbf{f} son suficientemente pequeños, también hay unicidad de solución.

Si $N = 3$, $\mathbf{u}_0 \in V$, $\mathbf{f} \in L^\infty(0, T; H)$, entonces existe T^* , $0 < T^* < T$ tal que en $(0, T^*)$ existe una única solución de (O.1)-(O.4) (ver [21,38] para más detalles).

Este resultado nos muestra que, desgraciadamente, sólo en algunos casos se tiene asegurada la unicidad de solución. Nótese como la dimensión del espacio influye notablemente en este aspecto.

O.2 Efectos del término no lineal

El carácter no lineal de la ecuación (O.1) es una dificultad esencial del problema. Desde el punto de vista matemático, ya hemos visto cómo en dimensión $N = 3$ la unicidad no está asegurada; ello se debe a que el tratamiento del término de convección $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ exige propiedades de compacidad entre ciertos espacios funcionales que, siendo válidos en dimensión $N = 1, 2$, dejan de serlo en dimensión $N = 3$ ([38]).

Para ilustrar el papel de este término, consideremos un caso simple unidimensional sin término de viscosidad: la ecuación de Burgers.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (\text{O.14})$$

junto con la condición inicial

$$\mathbf{u}(x, 0) = A \cos(kx) \quad (\text{O.15})$$

Desarrollando en serie de Taylor en $t = 0$, se obtiene

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}(x, 0) + t \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{t=0} + \frac{1}{2} t^2 \left. \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right|_{t=0} + \dots \quad (\text{O.16})$$

Los valores de $\frac{\partial^m \mathbf{u}}{\partial t^m} \Big|_{t=0}$, $m \geq 1$, se pueden calcular a partir de (O.14)-(O.15)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} &= -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} - \mathbf{u} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x \partial t} = \\ &= -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{u} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)^2 + \mathbf{u}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\mathbf{u}(x, t) = A \cos(kx) + \frac{1}{2} t k A^2 \text{sen}(2kx) + \dots$$

es decir aparece un armónico superior al inicial.

Si consideramos un caso bidimensional,

$$\mathbf{u}_{1,t} + \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_{1,1} + \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_{1,2} = 0,$$

$$\mathbf{u}_{2,t} + \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_{2,1} + \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_{2,2} = 0,$$

con las condiciones iniciales

$$\mathbf{u}_1(x, 0) = A_1 \cos(k_1 x_1) \cos(l_1 x_2),$$

$$\mathbf{u}_2(x, 0) = A_2 \cos(k_2 x_1) \cos(l_2 x_2),$$

desarrollando como antes en serie de Taylor obtenemos:

$$\mathbf{u}_1(x, t) = \mathbf{u}_1(x, 0) + t \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} \Big|_{t=0}$$

$$\mathbf{u}_2(x, t) = \mathbf{u}_2(x, 0) + t \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} \Big|_{t=0}$$

Se tendrá pues

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(x, t) &= A_1 \cos(k_1 x_1) \cos(l_1 x_2) + \\ &+ t \left[k_1 A_1^2 \cos(k_1 x_1) \cos^2(l_1 x_2) \text{sen}(k_1 x_1) + l_1 A_1 A_2 \cos(k_1 x_1) \text{sen}(l_1 x_2) \cos(k_2 x_1) \cos(l_2 x_2) \right] + \dots \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_2(x, t) = A_2 \cos(k_2 x_1) \cos(l_2 x_2) +$$

$$+t \left[k_2 A_1 A_2 \cos(k_1 x_1) \cos(l_1 x_2) \sin(k_2 x_1) \cos(l_2 x_2) + l_2 A_2^2 \cos^2(k_2 x_1) \cos(l_2 x_2) \sin(l_2 x_2) \right] + \dots$$

lo que provocará la aparición de términos del tipo

$$\sin(k_1 + k_2)x_1, \quad \sin(l_1 + l_2)x_2, \quad \cos(k_1 - k_2)x_1, \quad \cos(l_1 - l_2)x_2, \dots$$

esto es, armónicos superiores e inferiores al de partida.

En consecuencia, el término de convección provoca la aparición de interacciones entre distintos modos de Fourier, lo cual está relacionado con transferencia de energía entre las “grandes estructuras” (armónicos inferiores) y las “pequeñas estructuras” (armónicos superiores). Desde un punto de vista físico, no será posible, en general, dividir el campo global \mathbf{u} en campos elementales \mathbf{u}_i ($\mathbf{u} = \sum_{i=1}^M \mathbf{u}_i$) sin que estos reaccionen unos sobre otros.

O.3 Resultados experimentales. Turbulencia

Hemos visto anteriormente cómo el parámetro $\nu = \frac{1}{\mathfrak{R}}$ influye en la unicidad o multiplicidad de solución del problema (O.1)-(O.4). Si ν es superior a un cierto valor crítico ν_0 , la unicidad de solución estará garantizada. Desafortunadamente, los casos interesantes que se estudian en la práctica son tales que el número de Reynolds es bastante elevado, de manera que ν permanece inferior a ν_0 .

Este inconveniente tiene graves repercusiones a la hora de la resolución numérica del problema. En efecto, supongamos que (O.1)-(O.4) es discretizado en espacio por un método de elementos finitos (con funciones afines a trozos); en [8] se demuestra que si \mathbf{u}_h es la solución aproximada obtenida por tal método, se verifica la desigualdad:

$$\left(\int_{\Omega \times (0,T)} |\mathbf{u}(x,t) - \mathbf{u}_h(x,t)|^2 dx dt \right)^{1/2} \leq h^2 \frac{C}{\nu} \left(\int_{\Omega \times (0,T)} |(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}|^2 dx dt \right)^{1/2} \quad (\text{O.17})$$

Se puede encontrar una estimación de la integral del segundo miembro mediante un análisis dimensional, obteniéndose

$$\int_{\Omega \times (0,T)} |(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}|^2 dxdt = O(\nu^{-1/2}) \quad (\text{O.18})$$

Esto muestra que $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_0$ es pequeño si el diámetro de la triangulación h es menor que $\nu^{5/8}$ (asintóticamente se debe tener $h = o(\nu^{5/8})$). Tomemos por ejemplo $\Omega = (0,1)^3$; con M nodos en cada dirección se tendrá $h = \frac{1}{M}$, y la triangulación constará de M^3 puntos. Por tanto, el número de incógnitas del problema discretizado será del orden de $4M^3$ que, con la capacidad de los ordenadores actuales permitirá tomar hasta M del orden de 128. Teniendo en cuenta que

$$\Re < M^{8/5},$$

se tiene que la simulación numérica de (O.1)-(O.4) mediante un método de elementos finitos solo será posible para valores de \Re inferiores a 2400.

La conclusión precedente puede ser generalizada a situaciones más generales, independientemente del método numérico utilizado. Es decir, en la actualidad, cualquier simulación numérica de (O.1)-(O.4) de forma directa solo será significativa para números de Reynolds no superiores al millar. ¿Cuál es la explicación física de estos despropósitos? la razón es simple: se sabe que, cuando \Re tiende a infinito (i.e. $\nu \rightarrow 0$), la solución de (O.1)-(O.4) es cada vez más oscilante en tiempo y en espacio, de manera que las oscilaciones más pequeñas de \mathbf{u} se realizan a distancias del orden de $\nu^{3/4}$ ([30]); cualquier intento de simulación numérica de (O.1)-(O.4) exigiría, al menos teóricamente, una discretización de Ω de tamaño $h = O(\nu^{3/4})$; ello permitiría representar al torbellino más pequeño sobre dicha discretización. Usando ahora el mismo argumento que antes, se llega a la conclusión de que el número de Reynolds no podrá rebasar valores del orden de 1000.

Parece pues conveniente admitir que un cálculo completo para flujos con grandes números de Reynolds es imposible en la actualidad.

Para números de Reynolds no demasiados grandes, el fluido se comporta de un modo organizado, regular, sin grandes variaciones (de velocidad, presión, temperatura, etc.) y se encuentra dispuesto en capas que se deslizan unas sobre las otras; se dice entonces que el flujo se halla en *régimen laminar*. El cálculo de un flujo en régimen laminar puede ser efectuado mediante simulación directa, resolviendo las ecuaciones de Navier-Stokes (O.1)-(O.4).

En contraposición con la situación anterior, los flujos con grandes números de Reynolds se comportan de un modo desorganizado, con grandes variaciones de velocidad, etc. en tiempo y espacio, generando pequeños “remolinos” (eddies), que reaccionan entre sí y con las grandes estructuras; se dice entonces que el flujo se halla en *régimen turbulento*. Como hemos señalado anteriormente, el cálculo de flujos turbulentos no puede ser resuelto de modo directo mediante las ecuaciones de Navier-Stokes: un modelo diferente para tales flujos es, por tanto, necesario.

Las primeras investigaciones sistemáticas sobre ambos regímenes fueron realizadas por O. Reynolds ([37]). En estos estudios, Reynolds descubrió la llamada ley de semejanza, conocida también por ley de Reynolds, según la cual el salto del régimen laminar al turbulento siempre ocurre aproximadamente para el mismo número de Reynolds. De acuerdo con (O.18), si el número de Reynolds \mathfrak{R} es inferior a $\mathfrak{R}_{\text{crit}}$, el régimen es laminar, mientras que, cuando $\mathfrak{R} > \mathfrak{R}_{\text{crit}}$, el régimen es turbulento.

Hay que tener en cuenta además que el valor crítico del número de Reynolds depende de las características del dominio y del flujo de entrada en él (cuanto más regular fuera éste, mayor sería el número de Reynolds crítico). Diversas experiencias confirman este hecho para el caso de un dominio Ω en forma tubular ([10,37]): usando corrientes de entrada exentas de perturbación alguna, se consiguió llegar hasta $\mathfrak{R}_{\text{crit}} \simeq 40000$. Hoy todavía no conocemos una cota superior de $\mathfrak{R}_{\text{crit}}$ para flujos tubulares. Sin embargo, se ha demostrado experimentalmente que existe un límite inferior de $\mathfrak{R}_{\text{crit}} (\simeq 2000)$, de manera que para $\mathfrak{R} < \mathfrak{R}_{\text{crit}}$, el flujo permanece laminar por muy grandes que sean las perturbaciones.

Experimentos posteriores demostraron que en un entorno de $\mathfrak{R}_{\text{crit}}$ el flujo tenía un carácter intermitente, en el sentido de que temporalmente su régimen era a veces laminar y a veces turbulento. Se ha demostrado también que la transición laminar-turbulento se inicia normalmente mediante un mecanismo de inestabilidad, que resulta ser muy aproximadamente bidimensional en casos simples. Esta inestabilidad primaria produce movimientos secundarios, los cuales, en general, poseen ya un carácter tridimensional. Una sucesión de este tipo de movimientos genera perturbaciones tridimensionales localizadas que surgen en posiciones y tiempos aleatorios. Estas perturbaciones crecen rápidamente y se combinan unas con otras formando un flujo turbulento totalmente desarrollado. En otros casos,

el flujo turbulento se origina a partir de una inestabilidad que genera *vórtices*, que posteriormente se convierten en inestables.

Como consecuencia de estos resultados, se nos presenta un fenómeno que en Mecánica de Fluidos se conoce con el nombre de *Turbulencia*. Se podría decir que la Turbulencia es el estado desordenado que presenta el campo de velocidades de un flujo como consecuencia de que el número de Reynolds que le caracteriza toma valores suficientemente grandes. Evidentemente, no se trata de una definición muy precisa; muchos autores rehusan darla y prefieren explicitar una serie de propiedades que caractericen los flujos turbulentos ([13,39]).

O.4 Características de la Turbulencia

La naturaleza, la industria o el laboratorio nos proporcionan numerosos ejemplos de flujos turbulentos

- las capas límites atmosféricas,
- las corrientes marinas,
- la fotosfera solar, de las estrellas, nebulosas, etc.,
- el chorro de un reactor,
- las capas límites en las alas de los aviones,
- las estelas de los barcos, coches, submarinos, etc.
- el flujo en el cauce de un río, etc.

En todos los casos, los regímenes asociados poseen propiedades comunes debidas al carácter turbulento; algunas de ellas ya han aparecido y han sido discutidas:

(i) La Turbulencia es un fenómeno de carácter aleatorio en la práctica.

El cálculo completo de un campo turbulento es imposible; ello está relacionado con la no unicidad de solución de las ecuaciones de Navier-Stokes en 3 dimensiones y su extrema sensibilidad a los cambios en las condiciones iniciales o de contorno.

Aunque el término aleatorio implique que una cierta ley de probabilidad existe, ella no se conoce "a priori". En este sentido la experiencia aporta una información interesante.

(ii) La Turbulencia es un fenómeno no lineal (difusividad).

En el apartado (O.2) vimos los efectos que producía la aparición del término de transporte o de convección $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ en la ecuación de Navier-Stokes: interacciones entre los distintos modos de Fourier que provocan la transferencia de energía entre las grandes y las pequeñas estructuras. Estas interacciones generan fluctuaciones de pequeña escala que, gracias a la presencia del término "viscoso" (o de difusión) $-\nu \Delta \mathbf{u}$, no poseerán una escala arbitrariamente pequeña (dicho término "disipará" la energía de las más pequeñas estructuras, convirtiéndola en calor). Esto significa que el parámetro $\nu = \frac{1}{\Re}$ no podrá ser nunca despreciado, por muy pequeño que sea.

Los términos \mathbf{u}_t y $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ son responsables de la gran capacidad de difusión de la turbulencia: un flujo que, teniendo un cierto carácter inicial aleatorio, no sea capaz de propagar las fluctuaciones del campo de velocidades a lo largo de las trayectorias, seguramente no será turbulento.

La difusividad de la Turbulencia es aprovechada en ciertos procesos de mezcla y homogenización de fluidos heterogéneos y de aceleración de reacciones químicas en líquidos y gases.

(iii) La Turbulencia se produce para grandes números de Reynolds.

Los resultados experimentales discutidos en el apartado anterior sirvieron para confirmar esta propiedad. La Turbulencia se genera como inestabilidad de flujos laminares cuando el número de Reynolds es suficientemente grande. Estas inestabilidades están relacionadas con la interacción de los términos viscosos e inerciales (no lineales).

(iv) La Turbulencia es tridimensional.

Se pueden encontrar fluctuaciones de velocidad $\mathbf{u}_1 \neq 0$, $\mathbf{u}_2 \neq 0$, $\mathbf{u}_3 \neq 0$, con velocidades medias ¹ $\bar{\mathbf{u}}_1 \neq 0$, $\bar{\mathbf{u}}_2 = 0$, $\bar{\mathbf{u}}_3 = 0$,

¹el símbolo $\bar{\mathbf{u}}_1$ significa media de \mathbf{u}_1 en el sentido estadístico, el cual queda todavía por precisar.

(v) Los flujos turbulentos son rotacionales.

En Turbulencia aparecen grandes fluctuaciones de la vorticidad ($\nabla \times \mathbf{u}$); éstas no podrían ser mantenidas si las fluctuaciones de velocidad fuesen bi-dimensionales. Así, un campo de velocidades inducido sobre una superficie aleatoria en movimiento (superficie de los océanos, etc.) es irrotacional y no puede ser considerado como un campo turbulento.

(vi) La Turbulencia es un fenómeno disipativo.

La transformación en calor debida a la disipación de la energía cinética es considerable; para un flujo turbulento, es notablemente mayor que para un flujo laminar. La existencia de una gran cantidad de pequeñas estructuras y los efectos viscosos que éstas conllevan influyen en la alta disipación (como consecuencia de este hecho, es importante señalar que la viscosidad del fluido es un parámetro que deber ser conservado en las ecuaciones del movimiento, incluso para grandes números de Reynolds).

La Turbulencia necesita un continuo suministro de energía para contrarrestar estas pérdidas producidas por los efectos viscosos. Si este suministro no existe, el régimen turbulento desaparecería rápidamente. Los campos aleatorios con pérdidas viscosas insignificantes (por ejemplo, las ondas aleatorias del sonido) no son turbulentos; así pues, la diferencia esencial entre ondas aleatorias y Turbulencia es que las primeras son principalmente no disipativas, mientras que la Turbulencia lo es.

(vii) La Turbulencia es un fenómeno que proviene de la Mecánica de Medios Continuos.

Las ecuaciones de Navier-Stokes siguen siendo válidas, puesto que las escalas más pequeñas que se producen en el flujo turbulento son mucho más grandes que cualquier escala longitudinal a nivel molecular([10]).

O.5 Modelización de la Turbulencia: descripción de algunos modelos clásicos

En la práctica, la gran mayoría de los flujos de interés se encuentran en régimen turbulento, poseyendo números de Reynolds por encima de 10^4 . Tal como fue establecido en la Sección O.3, el cálculo completo de tales flujos es imposible. Esto se debe, en primer lugar, a que la capacidad de los actuales ordenadores es insuficiente para almacenar y operar con la gran cantidad de datos que exige una simulación directa aceptable. En segundo lugar, el tiempo de cálculo involucrado resultaría ser totalmente inaceptable.

Afortunadamente, no estamos interesados en conocer todos los detalles del flujo; el interés se centra fundamentalmente en ciertas cantidades de carácter macroscópico. Por ejemplo, en el estudio aerodinámico de vehículos tales como aviones, trenes o coches, basta determinar tan sólo propiedades como la presión media sobre la superficie del vehículo o la descripción de los principales torbellinos próximos a la estela, etc.

Este hecho conduce a la llamada *modelización y simulación de la Turbulencia*: se trata, "grosso modo" de encontrar ecuaciones que deberán regir estas cantidades "medias". Consecuentemente, en primera instancia, el problema deja de ser numérico para pasar a ser teórico.

O.5.1 Filosofía general de los modelos de Turbulencia

En la actualidad, se han estudiado muchos modelos de Turbulencia, y existe una extensa literatura sobre ellos (Launder y Spalding describen una colección de modelos matemáticos de Turbulencia en [22]; Monin y Yaglom hacen un estudio estadístico de la Turbulencia en [30], etc.)

Todos los modelos existentes comparten la misma idea inicial: la descomposición del campo de velocidades en dos partes; la primera, llamada normalmente campo de velocidades medio, es la que nos va a interesar conocer, y describe las grandes estructuras (portadoras de la energía cinética del campo); la segunda, llamada campo fluctuante, describe las pequeñas estructuras (los remolinos más pequeños, que no quedan registrados en una simulación numérica directa). Esta

descomposición se generaliza a todas las demás variables (presión, temperatura, densidad, etc.)

Matemáticamente escribiremos

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \\ \mathbf{p} &= \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{p}' \end{aligned} \right\} \quad (O.19)$$

donde $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{p}})$ es el campo medio de velocidades y la presión media y $(\mathbf{u}', \mathbf{p}')$ la parte fluctuante o perturbación turbulenta.

La media puede ser definida de varias formas ([34]); en cada caso se deberá tomar la definición que mejor se adapte al problema.

Por ejemplo, para flujos medios estacionarios es habitual tomar

$$\bar{\mathbf{u}}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}(x, t) dt$$

(siempre que este límite exista).

Sin embargo, si el campo es homogéneo, la media aproximada viene dada por

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^3} \int_0^L \int_0^L \int_0^L \mathbf{u}(x, t) dx$$

Otros autores definen la media como

$$\bar{\mathbf{u}}(x, t) \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i(x, t), \quad N \text{ suficientemente grande}$$

donde \mathbf{u}_i representa el resultado de la i -ésima realización de un "experimento" turbulento.

Existen dos métodos generales que surgen en Física e Ingeniería para la modelización de la Turbulencia según la descomposición (O.19):

1. Simulación en gran escala:

La idea de base es la localización de las grandes estructuras (turbulencia de gran escala), logrando la eliminación de las pequeñas escalas.

En 1974, Leonard ([24]) dio la primera contribución, para este tipo de modelos, en la que esclareció la necesidad de un filtrado espacial, es decir, regularización mediante convolución. Así, para una función $f(x, t)$, la “media” viene dada por

$$\bar{f}(x, t) = \int_{\Omega} G(x - x') f(x', t) dx',$$

donde G es el núcleo de regularización (filtro). En [35] se ha tomado en particular

$$G(x) = \left[\sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{1}{\Delta} \right]^3 \exp \left(-6 \left(\frac{x}{\Delta} \right)^2 \right), \quad \Delta : \text{escala media,}$$

debido a las ventajas que supone en relación con la transformada de Fourier.

Si se desea también regularizar en tiempo, se puede tomar la media de $f(x, t)$ en la forma

$$\bar{f}(x, t) = (G * f)(x, t) = \int_{\Omega \times (0, T)} G(x - x', t - t') f(x', t') dx' dt',$$

Desde el punto de vista espectral, la media puede ser definida a partir de la transformada de Fourier inversa en espacio y truncada en los armónicos inferiores a un valor dado K ([27]).

2. Promedio de ecuaciones:

Las expresiones que verifica el flujo medio \bar{u} se obtienen promediando las ecuaciones de Navier-Stokes (O.1)-(O.4). Desafortunadamente, se llega a una situación en la que existen más incógnitas que ecuaciones; es a lo que en Turbulencia se ha denominado el problema del cierre. Para soslayar esta dificultad, se hará uso de leyes y conceptos físicos simples, basados en la experiencia.

Actualmente, existe un grupo de teóricos (Orszag entre otros) que han desarrollado teorías estadísticas de la Turbulencia formales y muy sofisticadas, con la esperanza de encontrar un formalismo que no necesite de hipótesis ulteriores para cerrar el problema (ver Leslie [25]).

O.5.2 El problema del cierre de Reynolds

La expresión (O.19) descompone el flujo turbulento en dos campos: el flujo medio $\bar{\mathbf{u}}$, y el campo fluctuante \mathbf{u}' . Tomando medias en (O.1)-(O.4), y teniendo en cuenta que

$$\overline{\bar{\mathbf{h}}} = \bar{\mathbf{h}}, \quad \overline{\lambda \mathbf{h}} = \lambda \bar{\mathbf{h}}, \quad \overline{\mathbf{h}_{,t}} = \bar{\mathbf{h}}_{,t}, \quad \overline{\mathbf{h}_{,i}} = \bar{\mathbf{h}}_{,i}$$

se deducen unas expresiones para $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})$

$$\bar{\mathbf{u}}_{,t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{p} - \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} = -\nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}) \quad (\text{O.20})$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (\text{O.21})$$

+ condición inicial + condiciones de contorno.

Las expresiones (O.20)-(O.21) constituyen un sistema de ecuaciones promediadas llamadas ecuaciones de Reynolds; el problema que ahora se presenta, conocido como el problema de cierre, consiste en relacionar el tensor de Reynolds $\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$ con el flujo medio $\bar{\mathbf{u}}$. El lector se convencerá fácilmente de que este problema es de difícil solución, quizás imposible. Sin embargo, existen numerosas aproximaciones que cada modelo de Turbulencia trata de explicitar; estas aproximaciones están basadas en diversas hipótesis físicas y resultados experimentales. En todos los casos, la aproximación que se haga del tensor de Reynolds dependerá del problema que se esté considerando.

O.5.3 Algunos modelos clásicos de Turbulencia

El primer autor en atacar el problema del cierre fue Boussinesq que, en 1877, introdujo el concepto de viscosidad turbulenta (i.e. viscosidad debida a la presencia de estructuras turbulentas); el modelo obtenido se basa en la hipótesis de que el tensor de Reynolds actúa como un tensor de viscosidad y, en consecuencia, debe ser proporcional al gradiente de la velocidad media. El coeficiente de proporcionalidad, representado por ν_{turb} , se denomina *viscosidad turbulenta*. Según Boussinesq, se tiene

$$-\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} = \nu_{\text{turb}}(x, t) (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T) \quad (\text{O.22})$$

Ya hemos visto que la aparición del término $-\nu \Delta \mathbf{u}$ en la ecuación (O.1) se debe a los efectos viscosos producidos por las interacciones de las partículas en el seno

del fluido a nivel molecular. Paralelamente, la ecuación (O.22) expresa la generación de efectos viscosos debida a la interacción entre los pequeños "remolinos" (nótese que el tensor de Reynolds está afectado por el operador de divergencia en la ecuación (O.20)).

A diferencia del coeficiente de viscosidad cinemática ν , que es un parámetro característico del fluido considerado, el coeficiente ν_{turb} no lo es, y su valor varía en espacio y tiempo. En consecuencia, el problema no ha quedado cerrado todavía será necesario obtener una expresión para la viscosidad turbulenta $\nu_{\text{turb}}(x, t)$. Por esta razón, el modelo de Boussinesq no constituye en sí mismo un modelo de Turbulencia; no obstante, la ecuación (O.22) proporciona una idea de partida para la construcción de modelos de Turbulencia.

En 1925, Prandtl propuso una fórmula algebraica para ν_{turb} , conocida con el nombre de *hipótesis de longitud de mezcla*:

$$\nu_{\text{turb}} = l_m^2(x, t) \left| \nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T \right| \quad (\text{O.23})$$

Aquí, l_m es la llamada longitud de mezcla. En [10], pueden verse algunos fundamentos de (O.23); notemos que las dimensiones de ν_{turb} son

$$\text{longitud} \times \text{velocidad} = (\text{longitud})^2 \times \frac{\text{velocidad}}{\text{longitud}}$$

que es congruente con (O.23).

La longitud de mezcla es una función dependiente de (x, t) y de nuevo desconocida; en consecuencia, el problema no ha sido cerrado aún. Existen, sin embargo, situaciones especiales en las que la función $l_m(x, t)$ puede ser aproximada algebraicamente (presencia de capas límites, flujos cerca de una pared). En este sentido, cabe destacar la contribución de Von Kármán (1930), en la que $l_m(x, t)$ está dada por la relación entre las derivadas espaciales primeras y segundas de la velocidad media ([22])

$$l_m(x, t) = \frac{\left| \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial y} \right|}{\left| \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{u}}}{\partial y^2} \right|} \quad (\text{O.24})$$

para flujos con una pared plana.

El modelo de Von Kármán no ha sido ampliamente utilizado debido a su falta de generalidad; mediciones experimentales mostraron que (O.24) sólo era verificado cerca de una pared.

Hasta ahora, todas las expresiones para el tensor de Reynolds que hemos introducido han sido fórmulas algebraicas. De esta manera el problema de Reynolds se reduce solamente a las ecuaciones para las velocidades medias (O.20)-(O.21). Los modelos de Turbulencia que expresan el tensor de Reynolds mediante fórmulas algebraicas pueden ser considerados como modelos con cero ecuaciones ([35]), pues no añaden nuevas ecuaciones en derivadas parciales a (O.20)-(O.21).

Los modelos con cero ecuaciones han sido utilizados preferentemente para el cálculo de flujos en presencia de una pared plana, siendo (O.24) un ejemplo de ello.

Debido a la existencia de la pared, el comportamiento del fluido delimita dos zonas claramente diferenciadas: la región viscosa, donde los efectos viscosos son importantes, y la zona exterior a ésta.

Un modelo alternativo de (O.24) define la viscosidad turbulenta ν_{turb} como

$$\nu_{\text{turb}} = \begin{cases} Ku_*y & \text{fuera de la región viscosa} \\ Ku_*y[1 - \exp(-y^+/A^+)]^2 & \text{en la región viscosa} \end{cases}$$

donde K es la constante de Kármán (aproximadamente 0.4), u_* es la velocidad de fricción, $y = x_2$ es la distancia a la pared, $y^+ = \frac{yu_*}{\nu}$ y A^+ es una constante empírica.

Modelos más avanzados incorporan una ecuación diferencial para la energía cinética turbulenta (modelos con una ecuación). Fueron desarrollados originalmente con el fin de dar una cierta generalidad a los modelos anteriores, y al mismo tiempo, reducir el excesivo empirismo que les rodea.

Kolmogorov (1942) y Prandtl (1945) propusieron la siguiente expresión para la viscosidad turbulenta

$$\nu_{\text{turb}} = l_m \sqrt{q} \quad (\text{O.25})$$

siendo q el promedio de la energía cinética turbulenta:

$$q = \frac{1}{2} \overline{u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2} \quad (\text{O.26})$$

A partir de (O.1), se puede deducir la ecuación de tipo transporte verificada por q :

$$\begin{aligned}
 q_{,t} + \bar{\mathbf{u}} \nabla q &= -\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} : \nabla \bar{\mathbf{u}} - \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{q \mathbf{u}'_k} + \overline{\mathbf{p} \mathbf{u}'_k}) \right] + \\
 &+ \nu \sum_{i,k} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left(\frac{1}{2} \overline{\mathbf{u}'_i^2} \right) + \frac{\partial^2 (\overline{\mathbf{u}'_i \mathbf{u}'_k})}{\partial x_i \partial x_k} \right] - \\
 &- \frac{1}{2} \nu \sum_{i,k} \overline{\left(\frac{\partial \mathbf{u}'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathbf{u}'_k}{\partial x_i} \right)^2}
 \end{aligned} \tag{O.27}$$

es decir,

variación de la energía siguiendo el campo medio = Producción +
 + Transferencias (convección e interacción presión-velocidades) -
 - Disipación.

La expresión (O.27) constituye la ecuación exacta para q ; pero ésta no podrá ser utilizada "a priori" pues las correlaciones turbulentas que aparecen en el segundo miembro son desconocidas. Será necesario, por tanto, "modelizar" esta ecuación. Por otro lado, hará falta una expresión para l_m en (O.25). En [22],[35] se describen algunos modelos basados en (O.25)-(O.27), y se discute la aplicabilidad de éstos.

A un nivel más elaborado, se encuentran los modelos de Turbulencia con dos ecuaciones; estos modelos surgen al sustituir la expresión algebraica para la longitud de mezcla por una nueva ecuación diferencial.

La expresión (O.25) para la viscosidad turbulenta sigue siendo válida, pero ahora, tanto q como l_m son soluciones de sendas ecuaciones de transporte. En situaciones diversas, se ha podido poner en evidencia la necesidad de determinar la longitud de mezcla a partir de una ecuación de transporte; por ejemplo, en flujos gobernados por ecuaciones elípticas, la convección es importante; en otros casos, la propia geometría del dominio (extremadamente compleja) exige la utilización de una ecuación diferencial para l_m . En [22], se describe una técnica para deducir una ecuación para l_m . Algunos modelos con dos ecuaciones de acuerdo con (O.25) quedan descritos en [35].

Por otro lado, existen otros modelos de Turbulencia con dos ecuaciones, aunque esta vez no sea la longitud de mezcla una de las incógnitas. El más familiar y

estudiado entre estos modelos es el conocido modelo $k - \varepsilon$, debido a Launder y Jones (1972). Partiendo de (O.22), este modelo expresa la viscosidad turbulenta en función de dos magnitudes escalares: la energía cinética turbulenta k , y la *tasa de disipación viscosa turbulenta* ε , dadas por

$$k = \frac{1}{2} \overline{|\mathbf{u}'|^2}, \quad \varepsilon = \frac{\nu}{2} \overline{|\nabla \mathbf{u}' + \nabla \mathbf{u}'^T|^2} \quad (\text{O.28})$$

Mediante un análisis dimensional, se obtiene

$$\nu_{\text{turb}} = \mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{O.29})$$

donde μ es una constante característica del fluido, cuyo valor se obtiene experimentalmente.

Las magnitudes k y ε verifican ecuaciones de transporte relativas al campo medio $\bar{\mathbf{u}}$, que pueden ser deducidas de manera exacta a partir de (O.1). La ecuación para k está escrita en (O.27). Evidentemente, el problema no quedará cerrado, puesto que estas ecuaciones contienen a su vez términos de cierre. Las ecuaciones para k y ε pueden ser modelizadas como sigue ([13,18,22,26]):

$$k_{,t} + \bar{\mathbf{u}} \nabla k = R : \nabla \bar{\mathbf{u}} - \varepsilon + \nabla \cdot \left[\left(c_1 \frac{k^2}{\varepsilon} + \nu \right) \nabla k \right] \quad (\text{O.30})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{,t} + \bar{\mathbf{u}} \nabla \varepsilon = & \frac{1}{2} c_2 k (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T) : (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T) - \\ & - c_3 \frac{\varepsilon^2}{k} + \nabla \cdot \left[\left(c_4 \frac{k^2}{\varepsilon} + \nu \right) \nabla \varepsilon \right] \end{aligned} \quad (\text{O.31})$$

Aquí, c_1, c_2, c_3, c_4 , son constantes del modelo que pueden ser obtenidas a partir de consideraciones matemáticas o experimentales ([12]). Por sus aplicaciones industriales, el modelo $k - \varepsilon$ ha sido y es objeto de muchos estudios.

La modelización $k - \varepsilon$ dada en (O.30),(O.31) no es la única que existe; otros modelos $k - \varepsilon$ han sido introducidos con el fin de adaptarlos mejor a las más diversas situaciones (presencia o no de paredes sólidas, turbulencia con números de Reynolds pequeños, etc.)

Los modelos de Turbulencia presentados hasta ahora han estado basados en la expresión *isótropa* del tensor de Reynolds dada por (O.22), obtenida a partir

de la hipótesis de Boussinesq (que a su vez introducía el concepto de viscosidad turbulenta). Aunque la eficiencia de estos modelos ha sido demostrada en las más diversas situaciones, existen varias razones que están en desacuerdo con (O.22): las direcciones principales del tensor de Reynolds son diferentes, en general, de aquéllas del tensor de deformaciones; los elementos diagonales del tensor $-\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$, según (O.22), son:

$$-\overline{\mathbf{u}'_1^2} = 2\nu_{\text{turb}} \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_1}{\partial x_1}, \quad -\overline{\mathbf{u}'_2^2} = 2\nu_{\text{turb}} \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_2}{\partial x_2}, \quad -\overline{\mathbf{u}'_3^2} = 2\nu_{\text{turb}} \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_3}{\partial x_3}$$

y, en consecuencia, se llega a la contradicción siguiente

$$\overline{\mathbf{u}'_1^2} + \overline{\mathbf{u}'_2^2} + \overline{\mathbf{u}'_3^2} = 0$$

En los últimos años, se han desarrollado modelos de Turbulencia más sofisticados que no están basados en (O.22). Los modelos de transporte del tensor de Reynolds pertenecen a este grupo. En estos modelos, el tensor de Reynolds es obtenido mediante un sistema de ecuaciones de transporte para los términos $\overline{\mathbf{u}'_i \mathbf{u}'_j}$. Estas ecuaciones pueden ser obtenidas a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes (O.1) de forma exacta ([13]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\mathbf{u}'_i \mathbf{u}'_j}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \overline{\mathbf{u}'_i \mathbf{u}'_j} = & - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \overline{\mathbf{u}'_i \mathbf{u}'_j \mathbf{u}'_k}}{\partial x_k} - \left(\overline{\mathbf{u}_j \mathbf{u}_k} \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_i}{\partial x_k} + \overline{\mathbf{u}_i \mathbf{u}_k} \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_j}{\partial x_k} \right) - \\ & - \left(\overline{\mathbf{u}'_j \frac{\partial \mathbf{p}'}{\partial x_i}} + \overline{\mathbf{u}'_i \frac{\partial \mathbf{p}'}{\partial x_j}} \right) + \nu \sum_{k=1}^3 \left(\overline{\mathbf{u}'_j \frac{\partial^2 \mathbf{u}'_i}{\partial x_k^2}} + \overline{\mathbf{u}'_i \frac{\partial^2 \mathbf{u}'_j}{\partial x_k^2}} \right) \end{aligned} \quad (\text{O.32})$$

Como en situaciones anteriores, una modelización de estas ecuaciones será necesaria debida a la aparición de correlaciones de las velocidades fluctuantes de orden 3. Las ecuaciones de transporte para las correlaciones de tercer orden contienen a su vez correlaciones de cuarto orden, y así sucesivamente. Consecuentemente, una hipótesis de cierre será necesaria a un cierto nivel.

Se puede pensar que cuantas más ecuaciones sean utilizadas, más información y mejores resultados se obtendrán; esto sería cierto si nuestro pragmatismo no nos

hubiera obligado a pensar también que cuantas más ecuaciones manejemos, mayor será el tiempo de cálculo asociado a la resolución numérica y más difícil será la elección de las constantes que aparezcan.

Algunos modelos de transporte del tensor de Reynolds se discuten en [22] y en [35]; actualmente, este tipo de modelos se encuentra en un intenso desarrollo; su uso es esencial para tratar los flujos más complicados.

O.6 Contenido del presente trabajo

El presente trabajo trata sobre el estudio de un modelo matemático de Turbulencia: el modelo M.P.P.

Este modelo fue propuesto por McLaughlin, Papanicolaou y Pironneau ([27]) en un intento de demostrar la hipótesis de Reynolds (dependencia del tensor de Reynolds con respecto a $\nabla \bar{u}$, debido a que las zonas de turbulencia se encuentran, normalmente, en las regiones de grandes valores del gradiente; se deduce, en 2-D, que R es necesariamente de la forma (O.22)).

El modelo M.P.P. de Turbulencia surge al aplicar las técnicas de los desarrollos asintóticos de la teoría de la Homogenización ([19,7]) a la ecuación de Euler para fluidos ideales incompresibles (1979). Este modelo está basado en la hipótesis de separación de escalas del flujo medio (L) y de la fluctuación turbulenta (l); asimismo, el modelo supone que la turbulencia ya ha sido generada, lo que se traduce en unas condiciones iniciales "muy oscilantes".

Su descripción es como sigue:

Si denotamos por $\varepsilon = \frac{l}{L}$, el problema puede ser expresado de la siguiente forma

$$u_{,t}^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon - \mu \varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon = 0, \quad \nabla \cdot u^\varepsilon = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, T[\quad (\text{O.1})$$

$$u^\varepsilon(x, 0) = u^0(x) + \varepsilon^{1/3} w^0\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right) \quad \text{en } \Omega \quad (\text{O.2})$$

donde μ es una constante, u^0 es el campo medio inicial y $\varepsilon^{1/3} w^0$ el campo fluctuante inicial. Se supone que $w^0(y, x)$ es periódica en $y \in Y =]-\pi, \pi[$ y de media nula, i.e.

$$\langle w^0 \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y w^0(y, x) dy = 0, \quad \forall x \in \Omega$$

Nuestro interés se centra en conocer el comportamiento de $u^\varepsilon(x, t)$ para ε pequeño (nótese que el número de Reynolds es $\mathfrak{R} = \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon^{-2}$, y por tanto, una simulación directa de (O.33)-(O.34) es imposible en la práctica).

Para resolver (O.33)-(O.34), el modelo M.P.P. sugiere los siguientes desarrollos asintóticos para $u^\varepsilon(x, t)$ y $p^\varepsilon(x, t)$

$$u^\varepsilon(x, t) \sim u_\varepsilon(x, t) + \varepsilon^{1/3} w\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \varepsilon^{2/3} u^{(1)}\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \varepsilon u^{(2)}\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \dots \quad (\text{O.3})$$

$$p^\varepsilon(x, t) \sim p_\varepsilon(x, t) + \varepsilon^{2/3} \pi\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \varepsilon p^{(1)}\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \varepsilon^{4/3} p^{(2)}\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \dots \quad (\text{O.4})$$

donde, a su vez

$$u_\varepsilon(x, t) \sim \bar{u}(x, t) + \varepsilon^{1/3} \bar{w}(x, t) + \varepsilon^{2/3} \bar{u}^{(1)}(x, t) + \varepsilon \bar{u}^{(2)}(x, t) + \dots \quad (\text{O.5})$$

$$p_\varepsilon(x, t) \sim \bar{p}(x, t) + \varepsilon^{2/3} \bar{\pi}(x, t) + \varepsilon \bar{p}^{(1)}(x, t) + \varepsilon^{4/3} \bar{p}^{(2)}(x, t) + \dots \quad (\text{O.6})$$

En (O.35)-(O.38), las funciones $w, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, \pi, p^{(1)}, p^{(2)}, \dots$, se suponen definidas en $Y \times]0, +\infty[\times \Omega \times]0, T[$ (por ejemplo $w = w(y, \tau; x, t)$) y son periódicas en la variable y . La elección de $\bar{u}, \bar{w}, \bar{u}^{(1)}, \dots, \bar{\pi}, \bar{p}^{(1)}, \dots$ está determinada por condiciones de media nula en las variables (y, τ) para $w, u^{(1)}, \dots, \pi, p^{(1)}, \dots$, i.e. por las igualdades

$$\begin{aligned} \ll w \gg &\equiv \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \langle w(\cdot, \tau; x, t) \rangle d\tau \equiv \\ &\equiv \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3 \theta} \int_0^\theta \int_Y w(y, \tau; x, t) dy d\tau = 0 \end{aligned} \quad (\text{O.7})$$

$$\begin{aligned} \ll u^{(k)} \gg &\equiv \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \langle u^{(k)}(\cdot, \tau; x, t) \rangle d\tau \equiv \\ &\equiv \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3 \theta} \int_0^\theta \int_Y u^{(k)}(y, \tau; x, t) dy d\tau = 0, \quad k \geq 1 \end{aligned} \quad (\text{O.8})$$

El campo $a(x, t)$ representa las coordenadas lagrangianas inversas relativas al campo $\bar{u}(x, t)$, i.e.

$$a_{,t} + (\bar{u} \cdot \nabla) a = 0, \quad a(x, 0) = x \quad (\text{O.9})$$

De hecho, (O.41) se obtiene como consecuencia de (O.35)-(O.38) y justifica la aparición de $a(x, t)$ en los argumentos de los campos fluctuantes $w, u^{(1)}, \dots$, y las presiones $\pi, p^{(1)}, \dots$: w^0 será transportado por el campo medio (hipótesis de Taylor).

Implementando los desarrollos (O.35)-(O.38) en las ecuaciones de Navier-Stokes, se deducen una sucesión de problemas ("cascada" de ecuaciones) para las fluctuaciones canónicas $\tilde{w} = \nabla a^{-T}(w + \bar{w}), \tilde{u}^{(k)} = \nabla a^{-T}(u^{(k)} + \bar{u}^{(k)})$, $k \geq 1$ que toma la forma

$$\tilde{w}_{,\tau} + (\tilde{w} \cdot \nabla_y) \tilde{w} + C \nabla_y \pi = 0, \quad \nabla_y \cdot \tilde{w} = 0 \quad \text{en } Y \times Z \quad (\text{O.10})$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_{,\tau}^{(k)} + (\tilde{u}^{(k)} \cdot \nabla_y) \tilde{w} + (\tilde{w} \cdot \nabla_y) \tilde{u}^{(k)} + C \nabla_y p^{(k)} &= -f^{(k)} \\ \nabla_y \cdot \tilde{u}^{(k)} &= -g^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad \text{en } Y \times Z, \quad k \geq 1 \quad (\text{O.11})$$

donde $Y \times Z =]-\pi, \pi[\times]0, +\infty[$, $C = \nabla a^T \nabla a$ y

$$f^{(1)} = -\nabla a^T [\bar{u}_{,t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} + \nabla \bar{p}] \quad (\text{O.12})$$

$$f^{(2)} = -\nabla a^T [w_{,t} + \bar{w}_{,t} + (\bar{u} \cdot \nabla)(w + \bar{w}) + [(w + \bar{w}) \cdot \nabla] \bar{u} + (\tilde{u}^{(1)} \cdot \nabla_y) u^{(1)} - \mu (\nabla a \nabla_y) \cdot ((\nabla a \nabla_y) w)] \quad (\text{O.13})$$

⋮

$$g^{(1)} = 0 \quad (\text{O.14})$$

$$g^{(2)} = -\nabla \cdot \bar{u} \quad (\text{O.15})$$

⋮

Se ha demostrado que un sistema del tipo (O.42)-(O.43) no puede ser resuelto simultáneamente, a menos que los segundos miembros verifiquen las siguientes condiciones de compatibilidad

$$\ll f^{(k)} + \tilde{w} g^{(k)} \gg = 0, \quad \langle g^{(k)} \rangle = 0 \quad (\text{O.16})$$

$$\ll \tilde{w} C^{-1} f^{(k)} + \left(\frac{1}{2} |w|^2 + \pi\right) g^{(k)} \gg = 0 \quad (\text{O.17})$$

$$\ll (\nabla a \nabla_y) \times w \cdot f^{(k)} \gg = 0 \quad (\text{O.18})$$

El número de condiciones de compatibilidad de este tipo está estrechamente relacionado con el número de invariantes temporales de la ecuación (O.42), de los que conocemos tres:

- la velocidad media

$$\langle \tilde{w} \rangle = 0 \quad (O.19)$$

- la energía cinética media

$$q = \frac{1}{2} \langle \tilde{w} C^{-1} \tilde{w} \rangle = \frac{1}{2} \langle |w|^2 \rangle \quad (O.20)$$

- la helicidad media

$$h = \langle (\nabla a^{-T} \tilde{w}) \cdot (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} \tilde{w}) \rangle = \langle w \cdot (\nabla a \nabla_y) \times w \rangle \quad (O.21)$$

Para obtener las ecuaciones promediadas del modelo M.P.P. basta sustituir las expresiones de $\{f^{(k)}, g^{(k)}\}$ en las ecuaciones (O.48)-(O.50). Se deduce entonces un sistema de ecuaciones de transporte acopladas para las velocidades medias, u , la energía cinética turbulenta, q , la helicidad turbulenta, h , y las coordenadas lagrangianas inversas, dado por

$$u_{,t} + u \nabla u + \nabla p + \varepsilon^{2/3} \nabla \cdot R = 0, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, T[\quad (O.22)$$

$$q_{,t} + u \nabla q + R : \nabla u + \mu \psi_q = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, T[\quad (O.23)$$

$$h_{,t} + u \nabla h + S : \nabla u + \mu \psi_h = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, T[\quad (O.24)$$

$$a_{,t} + u \nabla a = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, T[\quad (O.25)$$

donde

$$R = \ll w \otimes w \gg \quad S = \ll w \otimes r + r \otimes w \gg = 2 \ll r \otimes w \gg \quad (O.26)$$

$$\psi_q = \ll (\nabla a \nabla_y) w : (\nabla a \nabla_y) w \gg \quad \psi_h = 2 \ll (\nabla a \nabla_y) w : (\nabla a \nabla_y) r \gg \quad (O.27)$$

$$r = (\nabla a \nabla_y) \times w, \quad w = \nabla a^{-T} \tilde{w} \quad (O.28)$$

y \tilde{w} , junto con π , verifican el llamado problema canónico en micro-estructura

$$\tilde{w}_{,r} + (\tilde{w} \cdot \nabla_y) \tilde{w} + C \nabla_y \pi = 0, \quad \nabla_y \cdot \tilde{w} = 0 \quad \text{en } Y \times Z \quad (O.29)$$

$$(\tilde{w}, \pi) \quad Y - \text{periódica}, \quad \tilde{w}(y, 0) = w_0(y) \quad (O.30)$$

$$\langle \tilde{w} \rangle = 0, \quad \langle \pi \rangle = 0 \quad (O.31)$$

$$\frac{1}{2} \langle \tilde{w} C^{-1} \tilde{w} \rangle = q \quad (O.32)$$

$$\langle (\nabla a^{-T} \tilde{w}) \cdot (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} \tilde{w}) \rangle = h \quad (O.33)$$

La principal característica del modelo M.P.P, como puede observarse, consiste en que éste es un modelo cerrado, en el sentido de que todos los términos que aparecen en las ecuaciones promediadas son, en última instancia, funciones de (u, q, h, a) a través de (O.57), del problema canónico en micro-estructura (O.61)-(O.65) y de las relaciones (O.58)-(O.60).

El presente estudio puede ser estructurado en tres partes:

1. Derivación de las ecuaciones del modelo.
2. Obtención de propiedades estructurales para R, S, ψ_q y ψ_h .
3. Cálculo numérico de los términos de cierre.

La primera parte, a la que está dedicada el Capítulo 1, ha sido presentada a lo largo de este apartado. Se observa, además, que, aunque el sistema de ecuaciones promediadas constituya un sistema cerrado, el conocimiento de los términos de cierre R, S, ψ_q y ψ_h exige la evaluación de la fluctuación canónica \tilde{w} para todos los valores de sus parámetros $(\nabla a, q, h)$.

Ante la imposibilidad de calcular explícitamente $\tilde{w}(\nabla a, q, h)$, la segunda parte desarrollada en los Capítulos 2,3 y 4, está dedicada a la obtención de ciertas propiedades estructurales para los términos de cierre, con el fin de simplificar y reducir el número de parámetros a tabular. Esto se ha conseguido, en primer lugar, estudiando el problema en micro-estructura directamente: se ha obtenido que \tilde{w} depende de ∇a sólo a través de $\nabla a^T \nabla a$, lo que permite una gran reducción de cálculo; por otro lado, reducimos nuestro campo de acción a las fluctuaciones \tilde{w} que verifiquen ciertas propiedades de simetría (relacionadas con la matriz $C = \nabla a^T \nabla a$), y ciertas propiedades homotéticas (relacionadas con el cociente $\frac{h}{q}$), que conducen a calcular \tilde{w} en función solamente de C y $\frac{h}{q}$ (problema canónico normalizado, Sección 2.5); en segundo lugar, estudiando el sistema de ecuaciones del modelo: al suponer que el sistema (O.54)-(O.56) es invariante por cambios de sistemas de referencia, obtenemos, a partir del Teorema de Rivlin-Ericksen, una estructura simple para los términos de cierre en función de la matriz $\bar{C} = \nabla a \nabla a^T$ (Teoremas 4.1 y 4.2). Estas propiedades nos muestran que, al menos para flujos con dos

escalas, la hipótesis de Reynolds es parcialmente correcta: el tensor de Reynolds no sólo depende de $\nabla u + \nabla u^T$ sino que también depende de $\nabla a \nabla a^T$.

El estudio de flujos medios unidimensionales y bidimensionales es presentado y desarrollado íntegramente; se ha podido demostrar que la simulación de flujos medios 2-D puede ser realizada a partir de la tabulación de los términos de cierre del caso 1-D; este hecho conduce a una gran simplificación de cálculo (Capítulo 3 y Sección 4.2).

Haciendo uso solamente de las propiedades obtenidas anteriormente, llegamos una importante conclusión: la helicidad no puede crearse si inicialmente ésta no existía. Esta propiedad justifica los diversos estudios realizados sobre el modelo reducido M.P.P.([27,3,14,15]).

Una vez reducido el número de parámetros a tabular, la resolución numérica del problema en micro-estructura normalizado se hace necesaria para la aproximación numérica de los términos de cierre; el Capítulo 5 está dedicado a este fin. Los distintos métodos numéricos utilizados son descritos detalladamente, pudiéndose demostrar que las propiedades obtenidas para las fluctuaciones \tilde{w} siguen siendo ciertas para las soluciones aproximadas w_h .

Los resultados numéricos obtenidos han sido ilustrados en las Figuras 1-17, y muestran éstos, en general, buen acuerdo con los resultados teóricos.

En la Conclusión General de este trabajo, se dan expresiones finales de los tensores de cierre. Tal y como allí se indica la siguiente tarea a efectuar consistirá en resolver el sistema de ecuaciones promediadas e investigar el efecto de la helicidad ($h \neq 0$) sobre las demás variables.

Para concluir, hay que hacer notar que el modelo M.P.P. es, en la actualidad, el único que propone una ecuación para la helicidad.

Actualmente, los métodos asintóticos aplicados en Mecánica de Fluidos se encuentran en una fase de intenso desarrollo; diversas extensiones para flujos compresibles están siendo estudiadas, de las que una ha sido propuesta por un grupo de investigadores del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Sevilla que, en la actualidad, colabora con el proyecto aerospacial HERMES.

Capítulo 1

Un modelo matemático de Turbulencia: el modelo M.P.P.

Los desarrollos asintóticos introducidos por la Teoría de la Homogenización (periódica) ([7,23]) han sido asiduamente aplicados en la resolución de diversos problemas de la Mecánica, Física, Química e Ingeniería. En éstos, el dominio de “de trabajo” está ocupado habitualmente por materiales, en algún sentido, heterogéneos, con una estructura periódica interna. En general, el período típico de la microestructura es muy pequeño en comparación con el tamaño del dominio.

El modelo M.P.P. de Turbulencia surgió al aplicar las técnicas de desarrollos asintóticos a la ecuación de Euler para fluidos ideales incompresibles, con condiciones iniciales muy oscilantes. Este modelo fue desarrollado y estudiado por McLaughlin, Papanicolaou y Pironneau ([27,28]), y más tarde adaptado a otras situaciones: fluidos incompresibles débilmente viscosos ([2,3,14,17,31]), fluidos incompresibles con acoplamiento de temperatura ([33]), etc; en la actualidad, el modelo está siendo desarrollado en el caso de un fluido compresible en presencia de capas límites ([16]).

1.1 Descripción del modelo: ecuaciones de Navier-Stokes con condiciones iniciales muy oscilantes

“A grosso modo”, digamos que el modelo supone que la turbulencia ya ha sido generada, lo que se traduce en unas condiciones iniciales “oscilantes”. La hipótesis

principal de este modelo consiste en suponer que la gran escala desarrollada por el campo medio y la pequeña escala, relacionada con el campo fluctuante, se encuentran netamente separadas; si denotamos por ε la razón entre la pequeña y la gran escala, entonces el problema se puede expresar de la siguiente forma

$$u_{,t}^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla)u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon - \mu \varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon = 0, \quad \nabla \cdot u^\varepsilon = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, T[\quad (1.1)$$

$$u^\varepsilon(x, 0) = u^0(x) + \varepsilon^{1/3} w^0\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right) \quad \text{en } \Omega \quad (1.2)$$

Aquí, μ es una constante ($\mu = O(1)$), u^0 es el campo medio inicial y w^0 el campo fluctuante inicial. La función $w^0(y, x)$ está definida en $Y \times \Omega$ ($Y =]-\pi, \pi[^3$), es suficientemente regular, periódica y de media nula en la variable y , i.e.

$$w^0(y, x) \equiv w^0(y^*, x) \quad \text{para } y, y^* \in Y, y_i = \pi, y_i^* = -\pi, y_j = y_j^*, \forall j \neq i$$

$$\langle w^0 \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y w^0(y, x) dy = 0, \quad \forall x \in \Omega$$

Además, supondremos que $\text{Soporte}_x(w^0(y, x)) \subset \Omega$ (no se contemplarán las interacciones debidas a la aparición de capas límites).

Estamos interesados en conocer el comportamiento de la solución $u^\varepsilon(x, t)$ de (1.1)-(1.2) para ε pequeño (nótese que, en este caso, el número de Reynolds viene dado por $\mathfrak{R} = \frac{1}{\mu} \varepsilon^{-2}$, y por tanto, una simulación directa de (1.1)-(1.2) es imposible en la práctica).

La hipótesis de Taylor, que asegura que es el campo medio de velocidades quien transporta las micro-estructuras, junto con el Análisis Dimensional de Kolmogorov ([30]), sugieren los siguientes desarrollos formales para $u^\varepsilon(x, t)$ y $p^\varepsilon(x, t)$:

$$u^\varepsilon(x, t) \sim u_\varepsilon(x, t) + \varepsilon^{1/3} w\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \varepsilon^{2/3} u^{(1)}\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \varepsilon u^{(2)}\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \dots \quad (1.3)$$

$$p^\varepsilon(x, t) \sim p_\varepsilon(x, t) + \varepsilon^{2/3} \pi\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \varepsilon p^{(1)}\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \varepsilon^{4/3} p^{(2)}\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \dots \quad (1.4)$$

donde, a su vez

$$u_\varepsilon(x, t) \sim \bar{u}(x, t) + \varepsilon^{1/3}\bar{w}(x, t) + \varepsilon^{2/3}\bar{u}^{(1)}(x, t) + \varepsilon\bar{u}^{(2)}(x, t) + \dots \quad (1.5)$$

$$p_\varepsilon(x, t) \sim \bar{p}(x, t) + \varepsilon^{2/3}\bar{\pi}(x, t) + \varepsilon\bar{p}^{(1)}(x, t) + \varepsilon^{4/3}\bar{p}^{(2)}(x, t) + \dots \quad (1.6)$$

En (1.3)-(1.4), las funciones $w, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, \pi, p^{(1)}, p^{(2)}, \dots$, se suponen definidas en $Y \times]0, +\infty[\times \Omega \times]0, T[$ (por ejemplo $w = w(y, \tau; x, t)$) y son periódicas en la variable y . La elección de $\bar{u}, \bar{w}, \bar{u}^{(1)}, \dots, \bar{\pi}, \bar{p}^{(1)}, \dots$ está determinada por condiciones de media nula en las variables (y, τ) para $w, u^{(1)}, \dots, \pi, p^{(1)}, \dots$, i.e. por las igualdades

$$\begin{aligned} \langle\langle w \rangle\rangle &\equiv \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \langle w(\cdot, \tau; x, t) \rangle d\tau \equiv \\ &\equiv \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3 \theta} \int_0^\theta \int_Y w(y, \tau; x, t) dy d\tau = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \langle\langle u^{(k)} \rangle\rangle &\equiv \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \langle u^{(k)}(\cdot, \tau; x, t) \rangle d\tau \equiv \\ &\equiv \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3 \theta} \int_0^\theta \int_Y u^{(k)}(y, \tau; x, t) dy d\tau = 0, \quad k \geq 1 \end{aligned} \quad (1.8)$$

(estas condiciones quedan satisfechas si, por ejemplo las funciones $w, u^{(1)}, \dots, \pi, p^{(1)}, \dots$ son de crecimiento sublineal en la variable τ).

Desde el punto de vista de la Teoría de la Homogenización Periódica, el significado de (por ejemplo) (1.3) es el siguiente:

Existen funciones $\bar{u}, \bar{w}, \bar{u}^{(1)}, \dots, w, u^{(1)}, \dots$ (de las características precedentes) y existe una función $a = a(x, t)$ tales que, para $m \geq 1$ se tiene

$$\begin{aligned} \left\| u^\varepsilon(x, t) - \left\{ \bar{u}(x, t) + \varepsilon^{1/3}\bar{w}(x, t) + \varepsilon^{1/3} \sum_{k=1}^m \varepsilon^{k/3}\bar{u}^{(k)}(x, t) + \varepsilon^{1/3} w\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \varepsilon^{1/3} \sum_{k=1}^m \varepsilon^{k/3} u^{(k)}\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) \right\} \right\|_X \leq c_m \varepsilon^{(m+2)/3} \end{aligned} \quad (1.9)$$

donde c_m es independiente de ε .

Aquí, X es un subespacio de $C^0(\bar{\Omega} \times [0, T]; \mathbb{R}^3)$ y $\|\cdot\|_X$ es una norma en X convenientemente elegidos (véase [19,7]).

Nota 1.1.— Habitualmente, las elecciones de X y $\|\cdot\|_X$ dependen de la naturaleza del problema considerado y de su solución. Para aplicar la técnica a la resolución del problema, hay que:

1. Inicializar el procedimiento con una hipótesis de desarrollo asintótico (tal como la precedente).
2. Realizar cálculos formales que proporcionen "condiciones necesarias de desarrollo asintótico", i.e. que nos digan qué tienen que verificar los "coeficientes" (en nuestro caso las funciones $a, \bar{u}, \bar{w}, \bar{u}^{(1)}, \dots, w, u^{(1)}, \dots$). Estas condiciones necesarias se escriben en términos de e.d.p, condiciones iniciales y/o condiciones de contorno para los "coeficientes".
3. Comprobar que, si los "coeficientes" vienen dados por las soluciones de estos problemas iniciales-de contorno, entonces los desarrollos asintóticos son "válidos", i.e. se verifican propiedades tales como (1.9).

■

Mediante cálculo formal (sustituyendo los desarrollos (1.3)-(1.6) en (1.1), e identificando los coeficientes de las distintas potencias de ε , se obtiene (cf. Apéndice A):

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-2/3} w (a_{,t} + (\bar{u} \cdot \nabla) a) + \varepsilon^{-1/3} T(\tilde{w}, \pi, C) + \\ & + f^{(1)} + L(\tilde{u}^{(1)}, \tilde{w}, p^{(1)}, C) + \varepsilon^{1/3} [f^{(2)} + L(\tilde{u}^{(2)}, \tilde{w}, p^{(2)}, C)] + \\ & + \varepsilon^{2/3} [f^{(3)} + L(\tilde{u}^{(3)}, \tilde{w}, p^{(3)}, C)] + \dots = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-2/3} \nabla_y \cdot \tilde{w} + \varepsilon^{-1/3} (\nabla_y \cdot \tilde{u}^{(1)} + g^{(1)}) + \varepsilon^0 (\nabla_y \cdot \tilde{u}^{(2)} + g^{(2)}) + \\ & \varepsilon^{1/3} (\nabla_y \cdot \tilde{u}^{(3)} + g^{(3)}) + \varepsilon^{2/3} (\nabla_y \cdot \tilde{u}^{(4)} + g^{(4)}) + \dots = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

donde $T(\tilde{w}, \pi, C)$ es el operador de Euler generalizado y $L(\tilde{u}, \tilde{w}, p, C)$ es su linealizado, dados por

$$T(\tilde{w}, \pi, C) = \tilde{w}_{,t} + (\tilde{w} \cdot \nabla_y) \tilde{w} + C \nabla_y \pi \quad (1.12)$$

$$L(\tilde{u}, \tilde{w}, p, C) = \tilde{u}_{,t} + (\tilde{u} \cdot \nabla_y) \tilde{w} + (\tilde{w} \cdot \nabla_y) \tilde{u} + C \nabla_y p \quad (1.13)$$

$$\tilde{w} = \nabla a^T (w + \bar{w}), \quad \tilde{u}^{(k)} = \nabla a^T (u^{(k)} + \bar{u}^{(k)}), \quad k \geq 1, \quad C = \nabla a^T \nabla a \quad (1.14)$$

$$f^{(1)} = -\nabla a^T [\bar{u}_{,t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} + \nabla \bar{p}] \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} f^{(2)} = & -\nabla a^T [w_{,t} + \bar{w}_{,t} + (\bar{u} \cdot \nabla)(w + \bar{w}) + [(w + \bar{w}) \cdot \nabla] \bar{u} + \\ & + (\tilde{u}^{(1)} \cdot \nabla_y) u^{(1)} - \mu (\nabla a \nabla_y) \cdot ((\nabla a \nabla_y) w)] \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned}
f^{(3)} = & -\nabla a^T [u^{(1)} + \bar{u}_t^{(1)} + (\bar{u} \cdot \nabla)(u^{(1)} + \bar{u}^{(1)}) + [(u^{(1)} + \bar{u}^{(1)}) \cdot \nabla] \bar{u} + \\
& + (\tilde{u}^{(1)} \cdot \nabla_y) u^{(2)} + (\tilde{u}^{(2)} \cdot \nabla_y) u^{(1)} + [(w + \bar{w}) \cdot \nabla] (w + \bar{w}) + \\
& + \nabla \pi + \nabla \bar{\pi} - \mu (\nabla a \nabla_y) \cdot ((\nabla a \nabla_y) u^{(1)})]
\end{aligned} \tag{1.17}$$

⋮

y

$$g^{(1)} = 0 \tag{1.18}$$

$$g^{(2)} = -\nabla \cdot \bar{u} \tag{1.19}$$

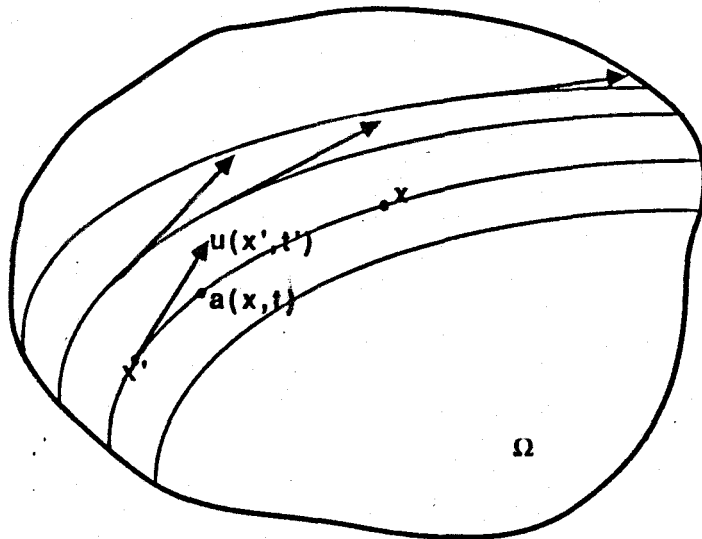
$$g^{(3)} = -\nabla \cdot (\bar{w} + w) \tag{1.20}$$

⋮

De (1.10) se deduce, en primer lugar, que el campo $a(x, t)$ debe verificar

$$a_{,t} + (\bar{u} \cdot \nabla) a = 0, \quad a(x, 0) = x \tag{1.21}$$

en consecuencia, las componentes de $a(x, t)$ son las coordenadas lagrangianas inversas relativas al campo medio \bar{u} (es decir, $a(x, t)$ es la posición de la partícula que, al transcurrir un tiempo t , se encontrará en la posición x siguiendo las trayectorias definidas por \bar{u})



De algún modo, (1.21) justifica la complejidad de los argumentos tomados en los desarrollos (1.3)-(1.4): el primer efecto de u^0 sobre w^0 que normalmente se

espera es convectivo, es decir, la perturbación turbulenta w^0 será transportada por el campo medio.

Anulando los coeficientes de las potencias de $\varepsilon^{1/3}$ en los desarrollos (1.10)-(1.11), se deduce una "cascada" de ecuaciones para las fluctuaciones canónicas \tilde{w} , $\tilde{u}^{(k)}$, $k \geq 1$, que toma la forma

$$\tilde{w}_{,\tau} + (\tilde{w} \cdot \nabla_y) \tilde{w} + C \nabla_y \pi = 0, \quad \nabla_y \cdot \tilde{w} = 0 \quad \text{en } Y \times Z \quad (1.22)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_{,\tau}^{(k)} + (\tilde{u}^{(k)} \cdot \nabla_y) \tilde{w} + (\tilde{w} \cdot \nabla_y) \tilde{u}^{(k)} + C \nabla_y p^{(k)} &= -f^{(k)} \\ \nabla_y \cdot \tilde{u}^{(k)} &= -g^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad \text{en } Y \times Z, \quad k \geq 1 \quad (1.23)$$

Un sistema del tipo (1.22)-(1.23) no puede ser resuelto simultáneamente, a menos que los segundos miembros $\{f^{(k)}, g^{(k)}\}$ verifiquen las siguientes condiciones de compatibilidad (cf. Apéndice B)

$$\ll f^{(k)} + \tilde{w} g^{(k)} \gg = 0, \quad \langle g^{(k)} \rangle = 0 \quad (1.24)$$

$$\ll \tilde{w} C^{-1} f^{(k)} + \left(\frac{1}{2} |w|^2 + \pi\right) g^{(k)} \gg = 0 \quad (1.25)$$

$$\ll (\nabla_a \nabla_y) \times w \cdot f^{(k)} \gg = 0 \quad (1.26)$$

El número de condiciones de compatibilidad del tipo (1.24)-(1.26) está estrechamente relacionado con el número de invariantes de la ecuación (1.22), de los que conocemos tres (cf. Apéndice C):

- la velocidad media

$$\langle \tilde{w} \rangle = 0 \quad (1.27)$$

- la energía cinética media

$$q = \frac{1}{2} \langle \tilde{w} C^{-1} \tilde{w} \rangle = \frac{1}{2} \langle |w|^2 \rangle \quad (1.28)$$

- la helicidad media

$$h = \langle (\nabla_a^{-T} \tilde{w}) \cdot (\nabla_a \nabla_y) \times (\nabla_a^{-T} \tilde{w}) \rangle = \langle w \cdot (\nabla_a \nabla_y) \times w \rangle \quad (1.29)$$

Nota 1.2.— Recordemos que el símbolo $\langle . \rangle$ representa la media en Y , i.e. $\langle \tilde{w} \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \tilde{w} dy$. Los estadísticos dados en (1.27)-(1.29) no dependen de τ (puesto que son invariantes temporales); en consecuencia, para estos momentos se tiene $\langle . \rangle = \ll . \gg$

■

1.2 El sistema de ecuaciones promediadas del modelo

Al sustituir las expresiones de $\{f^{(k)}, g^{(k)}\}$, dadas por (1.15)-(1.20), en las ecuaciones (1.24)-(1.26), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de tipo Reynolds (cf. Apéndice D):

$$u_{,t} + u \nabla u + \nabla p + \varepsilon^{2/3} \nabla \cdot R = 0, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, T[\quad (1.30)$$

$$q_{,t} + u \nabla q + R : \nabla u + \mu \psi_q = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, T[\quad (1.31)$$

$$h_{,t} + u \nabla h + S : \nabla u + \mu \psi_h = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, T[\quad (1.32)$$

Aquí, $u = \bar{u} + \varepsilon^{2/3} \bar{u}^{(1)}$ (previamente se deduce que $\bar{w} \equiv 0$), q está dada por (1.28) y h por (1.29). El sistema (1.30)-(1.32) debe naturalmente ser completado con ciertas condiciones iniciales y de contorno. Los tensores R , S y las funciones ψ_q y ψ_h están definidas por

$$R = \ll w \otimes w \gg \quad S = \ll w \otimes r + r \otimes w \gg = 2 \ll r \otimes w \gg \quad (1.33)$$

$$\psi_q = \ll \tilde{\nabla}_y w : \tilde{\nabla}_y w \gg \quad \psi_h = 2 \ll \tilde{\nabla}_y r : \tilde{\nabla}_y w \gg \quad (1.34)$$

donde se ha introducido la notación

$$\tilde{\nabla}_y = \nabla a \nabla_y, \quad r = \tilde{\nabla}_y \times w = \nabla a^{-T} \tilde{r}, \quad w = \nabla a^{-T} \tilde{w}, \quad (1.35)$$

Por su parte, las funciones \tilde{w} y π verifican el llamado *problema canónico en microestructura*

$$\tilde{w}_{,r} + (\tilde{w} \cdot \nabla_y) \tilde{w} + C \nabla_y \pi = 0, \quad \nabla_y \cdot \tilde{w} = 0 \quad \text{en } Y \times Z \quad (1.36)$$

$$(\tilde{w}, \pi) \quad Y - \text{periódica} \quad (1.37)$$

$$\tilde{w}(y, 0) = \sqrt{\frac{q}{\frac{1}{2} \langle \tilde{w}^0 C^{-1} \tilde{w}^0 \rangle}} w^0(y) \quad (1.38)$$

$$\langle \tilde{w} \rangle = 0, \quad \langle \pi \rangle = 0 \quad (1.39)$$

$$\frac{1}{2} \langle \tilde{w} C^{-1} \tilde{w} \rangle = q \quad (1.40)$$

$$\langle (\nabla a^{-T} \tilde{w}) \cdot (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} \tilde{w}) \rangle = h \quad (1.41)$$

y $a(x, t)$ es solución de

$$a_{,t} + (u \cdot \nabla) a = 0, \quad a(x, 0) = x \quad (1.42)$$

Las relaciones (1.30)-(1.32),(1.42) constituyen las *ecuaciones promediadas del modelo*. A diferencia de otros, este modelo queda descrito por un sistema *cerrado*, en el sentido de que todos los términos que aparecen en las ecuaciones promediadas son, en última instancia, funciones de u , q y h (a través de la ecuación de transporte (1.42), del problema en microestructura (1.36)-(1.41) y de las relaciones (1.33)-(1.35)).

Ésta es la característica más importante del modelo M.P.P. Se observa que la dependencia de R , S , ψ_q y ψ_h respecto de u se da a través de la fluctuación turbulenta w y de las coordenadas lagrangianas. Esto significa que el conocimiento de R , S , ψ_q y ψ_h exige la evaluación de $\tilde{w}(q, h, \nabla a)$ para todos los valores de q , h , ∇a ; evidentemente, se trata de una labor muy complicada (si no imposible). En consecuencia, será conveniente establecer con anterioridad algunas propiedades de \tilde{w} que nos lleven a simplificar los cálculos; también parece adecuado pensar en ciertos casos especiales (fluctuación canónica estacionaria, $\tilde{w}_{,\tau} = 0$; flujos medios unidimensionales, etc.) para los que se pueden describir de forma más completa los términos de los tensores de cierre (a este fin están dedicados los próximos Capítulos).

Las expresiones (1.30) constituyen un sistema de ecuaciones de Reynolds. En esta ocasión, el tensor de Reynolds viene dado por

$$\varepsilon^{2/3} R = \varepsilon^{2/3} \ll w \otimes w \gg,$$

como era de esperar, dado que el desarrollo asintótico de partida fue (1.4).

Un análisis preliminar realizado en [28] ha revelado que $\nabla \cdot \ll w \otimes w \gg$ *no* es un término de difusión (en contra de lo que ha sido dicho en la Introducción para otros modelos). No obstante, diferentes términos de difusión pueden encontrarse en los siguientes términos del desarrollo asintótico (1.4). En efecto, poniendo

$$u = \bar{u} + \varepsilon^{2/3} \bar{u}^{(1)} + \varepsilon \bar{u}^{(2)},$$

se obtiene (véase [33]) la siguiente ecuación para u

$$u_{,t} + (u \cdot \nabla)u + \nabla p + \varepsilon^{2/3} \nabla \cdot \ll w \otimes w \gg + \varepsilon \nabla \cdot \ll w \otimes u^{(1)} + u^{(1)} \otimes w \gg + \\ + \varepsilon^{4/3} \nabla \cdot \ll w \otimes u^{(2)} + u^{(2)} \otimes w + u^{(1)} \otimes u^{(1)} \gg = 0$$

En este caso el tensor de Reynolds viene dado por

$$\varepsilon^{2/3} \ll w \otimes w \gg + \varepsilon \ll w \otimes u^{(1)} + u^{(1)} \otimes w \gg + \varepsilon^{4/3} \ll w \otimes u^{(2)} + u^{(2)} \otimes w + u^{(1)} \otimes u^{(1)} \gg$$

donde $u^{(1)} = \nabla a^{-T} (\tilde{u}^{(1)} - \ll \tilde{u}^{(1)} \gg)$, $u^{(2)} = \nabla a^{-T} (\tilde{u}^{(2)} - \ll \tilde{u}^{(2)} \gg)$, y $\tilde{u}^{(1)}$, $\tilde{u}^{(2)}$ son soluciones de sendos problemas canónicos en micro-estructura linealizados relativos al operador L definido por (1.13):

$$L(\tilde{u}^{(1)}, \tilde{w}, p^{(1)}, C) = -f^{(1)}, \quad \nabla_y \cdot \tilde{u}^{(1)} = -g^{(1)}$$

$$\langle u^{(1)} \cdot w \rangle = q^{(1)}, \quad \langle u^{(1)} \cdot (\nabla a \nabla_y) \times w \rangle = r^{(1)}$$

$$L(\tilde{u}^{(2)}, \tilde{w}, p^{(2)}, C) = -f^{(2)}, \quad \nabla_y \cdot \tilde{u}^{(2)} = -g^{(2)}$$

$$\langle u^{(2)} \cdot w \rangle = q^{(2)}, \quad \langle u^{(2)} \cdot (\nabla a \nabla_y) \times w \rangle = r^{(2)}$$

Aquí, $f^{(1)}$, $g^{(1)}$, $f^{(2)}$ y $g^{(2)}$ están dados por (1.15), (1.16), (1.18) y (1.19) respectivamente.

Del mismo modo, en las ecuaciones de la energía cinética y la helicidad aparecen nuevos términos dependientes de w , $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ (véanse [15,33] para más detalles).

En [14,15], el modelo ha sido estudiado y validado en un caso simplificado (modelo *sin* helicidad) y en una versión bidimensional. Las simulaciones numéricas directa (Navier-Stokes) y del modelo M.P.P. presentan resultados cualitativamente idénticos.

Es interesante observar la analogía existente entre el sistema (1.30)-(1.32) y el modelo $k - \varepsilon$, dado por (0.30)-(0.31) ([17]). En aquél, la ecuación para k (0.30) ha sido sustituida por la de la energía cinética q (1.31), y la ecuación para ε (0.31) ha sido sustituida por una ecuación para la helicidad h (1.32).

Sin embargo, estos modelos difieren en dos puntos fundamentales:

1. En el modelo $k - \varepsilon$, los términos de cierre poseen un claro carácter disipativo (lo cual no ocurre, como ya hemos indicado, en el caso del modelo M.P.P.)
2. Cuando el flujo turbulento está en estado estacionario, los resultados numéricos obtenidos mediante la resolución del modelo $k - \varepsilon$ son adecuados. Así, este modelo está bien adaptado a esta situación. Por el contrario, un flujo estacionario no puede ser descrito por el modelo M.P.P. (recordemos que una hipótesis de partida era que el comportamiento turbulento del fluido ya había sido generado y evolucionaba en el tiempo).

Otro aspecto importante que no contempla el modelo M.P.P. es el que se refiere a la existencia y/o generación de capas límites; en este sentido cabe señalar los recientes avances de [16], en donde las técnicas de homogenización han sido aplicadas a la obtención de modelos M.P.P. generalizados que tienen en cuenta por separado el flujo en la capa límite y en la región exterior no viscosa.

La problemática que gira en torno a (1.30)-(1.32) se encuentra aún, desde el punto de vista matemático, abierta. Más precisamente, queda todavía por justificar que los desarrollos asintóticos (1.3)-(1.6), donde los coeficientes de las distintas potencias de $\varepsilon^{1/3}$ están dados por una solución de cada uno de los respectivos problemas precedentes (1.22)-(1.23), son "correctos" desde el punto de vista de la Teoría de la Homogenización. Desgraciadamente, esta tarea no parece fácil en absoluto.

Capítulo 2

El problema canónico en micro-estructura

2.1 Motivación

La resolución del sistema (1.30)-(1.32), que constituyen las ecuaciones del modelo, exige el conocimiento de los tensores R , S y de las funciones ψ_q y ψ_h dadas por

$$\left. \begin{aligned} R &= \nabla a^{-T} \ll \tilde{w} \otimes \tilde{w} \gg \nabla a^{-1} \\ S &= 2 \nabla a^{-T} \ll \tilde{w} \otimes \tilde{r} \gg \nabla a^{-1} \\ \psi_q &= \ll (\nabla a \nabla_y)(\nabla a^{-T} \tilde{w}) : (\nabla a \nabla_y)(\nabla a^{-T} \tilde{w}) \gg \\ \psi_h &= 2 \ll (\nabla a \nabla_y)(\nabla a^{-T} \tilde{w}) : (\nabla a \nabla_y)(\nabla a^{-T} \tilde{r}) \gg \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

siendo $\tilde{r} = \nabla a^T (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} \tilde{w})$.

En consecuencia, dada la forma de estas funciones, será necesario conocer la fluctuación canónica turbulenta para todos los valores de sus argumentos, esto es $\tilde{w}(y, \tau, \nabla a, q, h)$, siendo \tilde{w} solución del problema canónico en microestructura

$$\left. \begin{aligned} \tilde{w}_{,\tau} + (\tilde{w} \cdot \nabla_y) \tilde{w} + C \nabla_y \pi &= 0, & \nabla_y \cdot \tilde{w} &= 0 & \text{en } Y \times Z \\ (\tilde{w}, \pi) & \text{ Y - periódica} & \tilde{w}(y, 0) &= w_0(y) & \text{en } Y \\ \langle \tilde{w} \rangle &= 0, \quad \langle \pi \rangle = 0 \\ \frac{1}{2} \langle \tilde{w} C^{-1} \tilde{w} \rangle &= q \\ \langle (\nabla a^{-T} \tilde{w}) \cdot (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} \tilde{w}) \rangle &= h \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Evidentemente, la evaluación de $\tilde{w}(y, \tau, \nabla a, q, h)$ como función de $(\nabla a, q, h)$ es un problema de gran complejidad, y que en la práctica será imposible de realizar. Por

esta razón, es importante hacer un estudio previo de (2.2), que nos lleve a simplificar en gran medida el cálculo de $\tilde{w}(\nabla a, q, h)$. Establecer algunas propiedades relativas al problema (2.2) es el objetivo del presente Capítulo.

2.2 La dependencia con respecto a C

Una de las propiedades más interesantes que se pueden deducir a partir de (2.2) es la dependencia con respecto a la matriz C de la fluctuación canónica, es decir \tilde{w} no solo es función de ∇a sino que de hecho lo es de $\nabla a^T \nabla a$. Esto conlleva, entre otras cosas, una gran reducción de cálculo.

Para demostrar esta propiedad, será suficiente expresar la fórmula de la helicidad $\langle (\nabla a^{-T} \tilde{w}) \cdot (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} \tilde{w}) \rangle$ en función de $\nabla a^T \nabla a$, ya que en la ecuación (2.2a) y en la expresión de la energía cinética (2.2d) solo se hace referencia a $\nabla a^T \nabla a$.

A tal objeto, usaremos el

Lema 2.1 .- Sea $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ una matriz tal que $\det(A) = 1$. Entonces se verifica la siguiente fórmula

$$A^T (A \nabla_y) \times (A^{-T} \tilde{w}) = \nabla_y \times [(A^T A)^{-1} \tilde{w}] \quad (2.3)$$

La demostración de este Lema es puramente algebraica, y por ello no será expuesta aquí.

■

Para poder aplicar el Lema precedente cuando $A = \nabla a$ necesitaremos un nuevo resultado:

Lema 2.2 Sea $u(x, t)$ un campo definido y continuamente diferenciable en $\Omega \times]0, T[$ tal que

$$\nabla \cdot u = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, T[\quad (2.4)$$

y $a(x, t)$ solución del problema de transporte asociado

$$a_{,t} + (u \cdot \nabla) a = 0, \quad a(x, 0) = x \quad (2.5)$$

Entonces se verifica

$$\det(\nabla a) = 1, \quad \text{en } \Omega \times]0, T[\quad (2.6)$$

Recíprocamente, si $u(x, t)$ y $a(x, t)$ son campos definidos y continuamente diferenciables en $\Omega \times]0, T[$, tales que se verifican (2.5) y (2.6), entonces u es tal que se tiene (2.4).

Demostración.— Sea $J(x, t) = \det(\nabla a(x, t))$. Gracias a la teoría clásica de e.d.p. de primer orden aplicada a (2.5), se deduce que J es continuamente diferenciable y verifica:

$$\left. \begin{aligned} J_{,t} + u \nabla J + (\nabla \cdot u) J &= 0 \\ J(x, 0) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Si se tiene (2.4), entonces (2.7) se escribe también

$$\frac{DJ}{Dt} = 0, \quad J(x, 0) = 1$$

luego $J \equiv 1$.

Recíprocamente, si $J \equiv 1$, (2.7) se transforma directamente en (2.4)

■

Este último resultado permite sustituir A por ∇a en la fórmula (2.3), de donde

$$\nabla a^T (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} \tilde{w}) = \nabla_y \times [C^{-1} \tilde{w}] \quad (2.8)$$

Multiplicando escalarmente (2.8) por $C^{-1} \tilde{w} = \nabla a^{-1} \nabla a^{-T} \tilde{w}$, se tiene

$$(\nabla a^{-T} \tilde{w}) \cdot (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} \tilde{w}) = C^{-1} \tilde{w} \cdot \nabla_y \times [C^{-1} \tilde{w}] \quad (2.9)$$

La fórmula (2.9) permite re-escribir el problema canónico en función de C en la siguiente forma

$$\left. \begin{aligned} \tilde{w}_{,\tau} + (\tilde{w} \cdot \nabla_y) \tilde{w} + C \nabla_y \pi &= 0, & \nabla_y \cdot \tilde{w} &= 0 & \text{en } Y \times Z \\ (\tilde{w}, \pi) & \text{ Y - periódica} & \tilde{w}(y, 0) &= w_0(y) & \text{en } Y \\ \langle \tilde{w} \rangle &= 0, & \langle \pi \rangle &= 0 \\ \frac{1}{2} \langle \tilde{w} C^{-1} \tilde{w} \rangle &= q \\ \langle \tilde{w} C^{-1} \tilde{r} \rangle &= h \end{aligned} \right\}$$

donde $\tilde{r} = \nabla_y \times [C^{-1} \tilde{w}]$.

Por tanto $\tilde{w} = \tilde{w}(y, \tau; C, q, h)$, con C simétrica definida positiva y $\det(C) = 1$.

2.3 Multiplicidad de soluciones

Una de las dificultades que plantea el problema canónico es la multiplicidad de soluciones. Para evidenciar esta propiedad, consideremos la fluctuación canónica turbulenta \tilde{w} , dada por

$$\tilde{w} = \text{Re}(\hat{w}.e^{ik.y}) \quad (2.10)$$

donde

$$\hat{w} = c + id, \quad c, d \in \mathbb{R}^3, \quad k \in \mathbb{Z}^3, \quad k \neq 0 \quad (2.11)$$

Se trata de comprobar que \tilde{w} verifica el problema canónico estacionario eligiendo convenientemente c , d y k .

La ecuación $\nabla_y.\tilde{w} = 0$ implica

$$k.c = k.d = 0 \quad (2.12)$$

En consecuencia

$$(\tilde{w}.\nabla_y)\tilde{w} = \text{Re}(i(\tilde{w}.k)\hat{w}.e^{ik.y}) = 0, \quad (2.13)$$

lo que nos dice que la ecuación diferencial se satisface con $\pi \equiv \text{cte}$.

Veamos los valores que alcanzan los invariantes asociados:

$$\langle \tilde{w} \rangle = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{1}{2} \langle \tilde{w}C^{-1}\tilde{w} \rangle = \frac{1}{4} [(c, C^{-1}c) + (d, C^{-1}d)] = q \quad (2.15)$$

$$\langle C^{-1}\tilde{w}.\nabla_y \times (C^{-1}\tilde{w}) \rangle = C^{-1}d.k \times (C^{-1}c) = h \quad (2.16)$$

Definiendo $c = \gamma\bar{c}$, $d = \delta\bar{d}$, con \bar{c} , \bar{d} tales que

$$(\bar{c}, C^{-1}\bar{c}) = (\bar{d}, C^{-1}\bar{d}) = 1 \quad (2.17)$$

las expresiones (2.15), (2.16) se escriben también en la forma

$$\gamma^2 + \delta^2 = 4q \quad (2.18)$$

$$\gamma\delta = \frac{h}{H(k)} \quad (2.19)$$

donde $H(k) = C^{-1}\bar{d}.k \times (C^{-1}\bar{c})$.

Nota 2.1.— Si los vectores c y d son linealmente independientes y se verifica (2.12), entonces se tiene

$$H(k) = (C^{-1}\bar{d}) \cdot k \times (C^{-1}\bar{c}) \neq 0$$

y por tanto (2.19) tiene sentido.

■

Las soluciones de (2.18)-(2.19) vienen dadas por

$$\gamma = \pm \sqrt{2q \pm \sqrt{(2q)^2 - \left(\frac{h}{H}\right)^2}}, \quad \delta = \pm \sqrt{2q \mp \sqrt{(2q)^2 - \left(\frac{h}{H}\right)^2}} \quad (2.20)$$

de donde $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ si y solo si

$$2q \geq \left| \frac{h}{H(k)} \right| \quad (2.21)$$

Como $|H(k)| \rightarrow +\infty$ cuando $|k| \rightarrow +\infty$, se tiene que (2.21) se verifica para $|k|$ suficientemente grande.

De esta manera, para cada $k \in \mathbb{Z}^3$ tal que se verifique (2.21), se obtienen 4 soluciones de la forma

$$\tilde{w} = q^{1/2} \gamma\left(\frac{h}{q}, C, k\right) \frac{c}{(c, C^{-1}c)^{1/2}} \cos(k \cdot y) - q^{1/2} \delta\left(\frac{h}{q}, C, k\right) \frac{d}{(d, C^{-1}d)^{1/2}} \sin(k \cdot y) \quad (2.22)$$

con

$$\gamma(s, C, k) = \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{4 - \left(\frac{s}{H(C, k)}\right)^2}}, \quad \delta(s, C, k) = \pm \sqrt{2 \mp \sqrt{4 - \left(\frac{s}{H(C, k)}\right)^2}} \quad (2.23)$$

$$k \cdot c = k \cdot d = 0 \quad (2.24)$$

$$H(C, k) = \frac{(C^{-1}d) \cdot k \times (C^{-1}c)}{(c, C^{-1}c)^{1/2} \cdot (d, C^{-1}d)^{1/2}} \quad (2.25)$$

Se observa, además, que las soluciones dadas por (2.22) no son aisladas, ya que la condición (2.17) no determina unívocamente los vectores c y d . Esta situación aparece también en el caso de los flujos de Beltrami (flujos paralelos a su rotacional [6,29]) que, siendo soluciones explícitas de la ecuación de Euler, también son planos.

No obstante, el conjunto de soluciones \tilde{w} del problema canónico puede ser restringido cuando se consideren sólo aquellas fluctuaciones que verifiquen

1. ciertas propiedades de simetría, relacionadas con la dependencia respecto de C , que serán estudiadas en la Sección 2.4, y
2. ciertas propiedades de tipo "homotético", relacionadas con la dependencia respecto de q y de h , estudiadas en la Sección 2.5.

2.4 Simétrías de las fluctuaciones canónicas. Consecuencias

Otra característica del problema canónico consiste en la posibilidad de relacionar $\tilde{w}(y, \tau; C, q, h)$ con $\tilde{w}(y, \tau; Q^T C Q, q, h)$ donde Q pertenece a cierta clase de matrices ortogonales. Nos basaremos en esta propiedad para restringir el conjunto de soluciones del problema canónico en micro-estructura.

Sea $\tilde{w}(y, \tau; C, q, h)$, $\pi(y, \tau; C, q, h)$ una solución del sistema (2.2) y consideremos el subconjunto de las matrices ortogonales \mathcal{M}_Y , definido por

$$\mathcal{M}_Y = \{Q \in \mathcal{M}_{3 \times 3} / QQ^T = I, Qy \in Y, \forall y \in Y\}$$

La clase \mathcal{M}_Y está formada por las matrices ortogonales que mantienen invariante el cubo Y ($QY = Y$, se demuestra fácilmente que $\text{Card}(\mathcal{M}_Y) = 48$).

Para $Q \in \mathcal{M}_Y$, se construyen a partir de \tilde{w}, π , la fluctuación \tilde{W} y la presión P

$$\tilde{W}(y, \tau) = Q^T \tilde{w}(Qy, \tau), \quad P(y, \tau) = \pi(Qy, \tau) \quad (2.26)$$

Si la fluctuación turbulenta inicial $w_0(y)$ es tal que

$$Q^T w_0(Qy, 0) = w_0(y) \quad (2.27)$$

entonces (\tilde{W}, P) verifica el siguiente problema

$$\left. \begin{aligned} \tilde{W}_{,\tau} + (\tilde{W} \cdot \nabla_y) \tilde{W} + (Q^T C Q) \nabla_y P &= 0, & \nabla_y \cdot \tilde{W} &= 0 & \text{en } Y \times Z \\ (\tilde{W}, P) & \text{ Y - periódicas,} & \tilde{W}(y, 0) &= w_0(y) & \text{en } Y \\ \langle \tilde{W} \rangle &= 0, & \langle P \rangle &= 0 \\ \frac{1}{2} \langle \tilde{W} (Q^T C Q)^{-1} \tilde{W} \rangle &= q \\ \det(Q) \langle \tilde{W} \cdot (Q^T C Q \nabla_y) \times \tilde{W} \rangle &= h \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

En consecuencia, (\bar{W}, P) es solución del problema canónico con matriz $Q^T C Q$; en un cierto sentido, puede escribirse:

$$\tilde{w}(y, \tau; Q^T C Q, q, h) = Q^T \tilde{w}(Qy, \tau; C, q, h), \quad \forall Q \in \mathcal{M}_Y, \quad \det(Q) = 1 \quad (2.29)$$

$$\tilde{w}(y, \tau; Q^T C Q, q, -h) = Q^T \tilde{w}(Qy, \tau; C, q, h), \quad \forall Q \in \mathcal{M}_Y, \quad \det(Q) = -1 \quad (2.30)$$

Las relaciones (2.29)-(2.30) conducen a una restricción en el conjunto de soluciones del problema (2.2). En efecto, si Q es tal que $Q^T C Q = C$ y $\det(Q) = 1$, las soluciones deseables son aquéllas para las que se tenga

$$\tilde{w}(y, \tau) = Q^T \tilde{w}(Qy, \tau), \quad \forall (y, \tau) \in Y \times Z \quad (2.31)$$

Dicho en otras palabras, estamos interesados en encontrar sólo fluctuaciones \tilde{w} que verifiquen este tipo de simetrías (obsérvese que (2.31) no tiene por qué verificarse a priori para una fluctuación \tilde{w} , puesto que en (2.2) no hay unicidad de solución).

2.4.1 Simetrías de los tensores de cierre

Como $\tilde{r} = \nabla_y \times (C^{-1} \tilde{w})$ se pueden comprobar fácilmente las relaciones

$$\tilde{r}(y, \tau; Q^T C Q, q, h) = Q^T \tilde{r}(Qy, \tau; C, q, h), \quad \forall Q \in \mathcal{M}_Y, \quad \det(Q) = 1 \quad (2.32)$$

$$\tilde{r}(y, \tau; Q^T C Q, q, -h) = -Q^T \tilde{r}(Qy, \tau; C, q, h), \quad \forall Q \in \mathcal{M}_Y, \quad \det(Q) = -1 \quad (2.33)$$

A partir de las relaciones (2.29)-(2.33) se pueden deducir las propiedades de simetría que verifican los tensores canónicos \tilde{R}, \tilde{S} , definidos por

$$\tilde{R} = \ll \tilde{w} \otimes \tilde{w} \gg, \quad \tilde{S} = 2 \ll \tilde{w} \otimes \tilde{r} \gg \quad (2.34)$$

(es decir, $R = \nabla a^{-T} \tilde{R} \nabla a^{-1}$, $S = \nabla a^{-T} \tilde{S} \nabla a^{-1}$, y por lo visto en la Sección 2.2, \tilde{R} y \tilde{S} dependen de ∇a sólo a través de $C = \nabla a^T \nabla a$).

Se tiene que

$$\tilde{R}(C, q, h) = Q^T \tilde{R}(Q C Q^T, q, h) Q, \quad \forall Q \in \mathcal{M}_Y, \quad \det(Q) = 1 \quad (2.35)$$

$$\tilde{S}(C, q, h) = Q^T \tilde{S}(Q C Q^T, q, h) Q, \quad \forall Q \in \mathcal{M}_Y, \quad \det(Q) = 1 \quad (2.36)$$

En particular, si \tilde{w} verifica las propiedades de simetría descritas por (2.31), se tendrá

$$\tilde{R} = Q^T \tilde{R} Q, \quad \forall Q \in \mathcal{M}_Y, \quad \det(Q) = 1, \quad Q C Q^T = C \quad (2.37)$$

$$\tilde{S} = Q^T \tilde{S} Q, \quad \forall Q \in M_Y, \quad \det(Q) = 1, \quad Q C Q^T = C \quad (2.38)$$

Estas últimas expresiones son de gran utilidad; a partir de ellas se pueden deducir los valores de $R(I)$ y de $S(I)$. En efecto, si $C = I$ (lo que es cierto al menos para $t = 0$) se tiene que $Q C Q^T = C$ para toda matriz Q ortogonal y, en consecuencia, de (2.37)-(2.38) se deduce que $\tilde{R}(I) = \lambda_1 I$, $\tilde{S}(I) = \lambda_2 I$. Como, por otra parte, en este caso es $\text{tr}(R) = \text{tr}(\tilde{R}) = 2q$ y $\text{tr}(S) = \text{tr}(\tilde{S}) = 2h$, se tiene finalmente

$$R(I) = \frac{2}{3} q I, \quad S(I) = \frac{2}{3} h I \quad (2.39)$$

Las relaciones (2.35)-(2.36) aparecen como un caso particular de las que serán deducidas en el Capítulo 4; allí se verá que estas igualdades continúan siendo ciertas para todas las matrices ortogonales Q con $\det(Q) = 1$ (i.e. sin la restricción $QY = Y$), supuesto que las ecuaciones promediadas no dependen del sistema de referencia considerado.

Nota 2.2.— Se puede demostrar a partir de (2.35), (2.36) que \tilde{R} y \tilde{S} son de la forma

$$\tilde{R}(C) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(C) & \rho_{12}(C) & \rho_{12}(\overline{Q}^T C \overline{Q}) \\ \rho_{12}(C) & \rho_{11}(\overline{Q} C \overline{Q}^T) & \rho_{12}(\overline{Q} C \overline{Q}^T) \\ \rho_{12}(\overline{Q}^T C \overline{Q}) & \rho_{12}(\overline{Q} C \overline{Q}^T) & \rho_{11}(\overline{Q}^T C \overline{Q}) \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

$$\rho_{11}(C) + \rho_{11}(\overline{Q} C \overline{Q}^T) + \rho_{11}(\overline{Q}^T C \overline{Q}) = 2$$

$$\tilde{S}(C) = 2 \begin{pmatrix} \sigma_{11}(C) & \sigma_{12}(C) & \sigma_{12}(\overline{Q}^T C \overline{Q}) \\ \sigma_{12}(C) & \sigma_{11}(\overline{Q} C \overline{Q}^T) & \sigma_{12}(\overline{Q} C \overline{Q}^T) \\ \sigma_{12}(\overline{Q}^T C \overline{Q}) & \sigma_{12}(\overline{Q} C \overline{Q}^T) & \sigma_{11}(\overline{Q}^T C \overline{Q}) \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

$$\sigma_{11}(C) + \sigma_{11}(\overline{Q} C \overline{Q}^T) + \sigma_{11}(\overline{Q}^T C \overline{Q}) = 2 \frac{h}{q}$$

donde

$$\overline{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto nos dice que la dependencia de \tilde{R} (resp. \tilde{S}) respecto de C se reduce a la dependencia de sólo dos funciones ρ_{11} , ρ_{12} (resp. σ_{11} , σ_{12}) y no de seis como sería de esperar en principio.

■

Además, sin más que tomar $Q = -I$ en (2.30) y en (2.38), se obtiene

$$\tilde{R}(C, q, h) = \tilde{R}(C, q, -h) \quad (2.42)$$

$$\tilde{S}(C, q, h) = -\tilde{S}(C, q, -h) \quad (2.43)$$

luego $\tilde{S}(C, q, 0) = 0$, $\forall C, q, y$, por tanto,

$$S(\nabla a, q, 0) = 0, \quad \forall \nabla a, q \quad (2.44)$$

Nota 2.3.—Se deduce igualmente que las funciones ψ_q y ψ_h verifican

$$\psi_q(Q^T C Q, q, h) = \psi_q(C, q, h) = \psi_q(C, q, -h) \quad (2.45)$$

$$\psi_h(Q^T C Q, q, h) = \psi_h(C, q, h) = -\psi_h(C, q, -h) \quad (2.46)$$

Por tanto

$$\psi_h(C, q, 0) = 0, \quad \forall C, q \quad (2.47)$$

■

2.5 La dependencia respecto a h/q . Consecuencias

Veamos a continuación que no es necesario tampoco calcular $\tilde{w}(C, q, h)$ para todos los valores de q y de h . En efecto, sea $(\tilde{w}(y, \tau; C, q_1, h_1), \pi(y, \tau; C, q_1, h_1))$ una solución del problema en micro-estructura y supongamos

$$\frac{h_1}{q_1} = \frac{h_2}{q_2} \quad (2.48)$$

Para $\lambda > 0$, y w^* , π^* definidas por

$$w^*(y, \tau) = \lambda \tilde{w}(y, \lambda \tau; C, q_1, h_1), \quad \pi^*(y, \tau) = \lambda^2 \pi(y, \lambda \tau; C, q_1, h_1)$$

se observa que

$$\left. \begin{aligned} w^*_{,\tau} + (w^* \nabla_y) w^* + C \nabla_y \pi^* &= 0, \quad \nabla_y \cdot w^* = 0 \\ (w^*, \pi^*) & \text{ Y - periódica} \\ \langle w^* \rangle &= 0 \quad \langle \pi^* \rangle = 0 \\ \frac{1}{2} \langle w^* C^{-1} w^* \rangle &= \lambda^2 q_1 \\ \langle (\nabla a^{-T} w^*) \cdot (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} w^*) \rangle &= \lambda^2 h_1 \end{aligned} \right\}$$

Luego (w^*, π^*) es una solución del problema análogo, obtenido cambiando q_1 por $\lambda^2 q_1$ y h_1 por $\lambda^2 h_1$. En consecuencia, para $\lambda = \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$, tiene sentido escribir

$$w^* = \tilde{w}(y, \tau; C, q_2, h_2), \quad \pi^* = \pi(y, \tau; C, q_2, h_2)$$

Este argumento sugiere que restrinjamos nuestro campo de acción a las soluciones del problema en micro-estructura que verifiquen las propiedades (homotéticas):

$$\tilde{w}(y, \tau; C, \lambda^2 q, \lambda^2 h) = \lambda \tilde{w}(y, \lambda \tau; C, q, h)$$

$$\pi(y, \tau; C, \lambda^2 q, \lambda^2 h) = \lambda^2 \pi(y, \lambda \tau; C, q, h)$$

De este modo, será suficiente evaluar \tilde{w} en función de C y de h/q .

Así, definiendo la fluctuación canónica *normalizada* \tilde{w}' como solución del problema canónico en micro-estructura *normalizado*, dado por

$$\left. \begin{aligned} \tilde{w}'_{,\tau} + (\tilde{w}' \cdot \nabla_y) \tilde{w}' + C \nabla_y \pi' &= 0, \quad \nabla_y \cdot \tilde{w}' = 0 \quad \text{en } Y \times Z \\ (\tilde{w}', \pi') & \text{ Y - periódica, } \tilde{w}'(y, 0) = w'_0(y; x) \quad \text{en } Y \\ \langle \tilde{w}' \rangle &= 0 \quad \langle \pi' \rangle = 0 \\ \frac{1}{2} \langle \tilde{w}' C^{-1} \tilde{w}' \rangle &= 1 \\ \langle \tilde{w}' \cdot (C \nabla_y) \times \tilde{w}' \rangle &= \frac{h}{q} \end{aligned} \right\}$$

se tendrá

$$w(y, \tau; C, q, h) = \sqrt{q} \nabla a^{-T} \tilde{w}'(y, \sqrt{q} \tau; C, h/q)$$

Puesto que $\tilde{w}' = \tilde{w}'(y, \tau; C, h/q)$, las simetrías obtenidas en la Sección anterior para los tensores $\tilde{R}(C, q, h), \tilde{S}(C, q, h)$ se pueden generalizar de forma inmediata para los tensores $\tilde{R}'(C, h/q), \tilde{S}'(C, h/q)$ dados por

$$\tilde{R}' = \ll \tilde{w}' \otimes \tilde{w}' \gg \quad \tilde{S}' = 2 \ll \tilde{w}' \otimes \tilde{r}' \gg$$

Se tiene entonces

$$\tilde{R}'(C, h/q) = Q^T \tilde{R}'(QCQ^T, h/q)Q, \quad \forall Q \in \mathcal{M}_Y \quad (2.49)$$

$$\tilde{R}'(C, h/q) = Q^T \tilde{R}'(QCQ^T, -h/q)Q, \quad \forall Q \in \mathcal{M}_Y \quad (2.50)$$

$$\tilde{S}'(C, h/q) = Q^T \tilde{S}'(QCQ^T, h/q)Q, \quad \forall Q \in \mathcal{M}_Y, \quad \det(Q) = 1 \quad (2.51)$$

$$\tilde{S}'(C, h/q) = Q^T \tilde{S}'(QCQ^T, -h/q)Q, \quad \forall Q \in \mathcal{M}_Y, \quad \det(Q) = -1 \quad (2.52)$$

En cuanto a las funciones ψ_q y ψ_h , se tiene

$$\psi_q(C, q, h) = q\psi'_q(C, h/q), \quad \psi_h(C, q, h) = q\psi'_h(C, h/q) \quad (2.53)$$

y ahora ψ'_q y ψ'_h son tales que

$$\psi'_q(C, h/q) = \psi'_q(QCQ^T, h/q) = \psi'_q(QCQ^T, -h/q), \quad \forall Q \in \mathcal{M}_Y \quad (2.54)$$

$$\psi'_h(C, h/q) = \psi'_h(QCQ^T, h/q) = -\psi'_h(QCQ^T, -h/q), \quad \forall Q \in \mathcal{M}_Y \quad \det(Q) = 1 \quad (2.55)$$

2.6 Otra expresión de las ecuaciones del modelo

De acuerdo con los argumentos de la Sección precedente, las ecuaciones promediadas del modelo M.P.P. pueden escribirse en la siguiente forma:

$$u_{,t} + (u \cdot \nabla)u + \nabla p + \varepsilon^{2/3} \nabla \cdot (qR') = 0, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, T[$$

$$q_{,t} + u \nabla q + qR' : \nabla u + \mu q \psi'_q = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, T[$$

$$h_{,t} + u \nabla h + qS' : \nabla u + \mu q \psi'_h = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, T[$$

$$a_{,t} + (u \cdot \nabla)a = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, T[$$

$$u(x, 0) = u^0(x) \quad \text{en } \Omega$$

$$q(x, 0) = \frac{1}{2} \langle |w^0|^2 \rangle \quad \text{en } \Omega$$

$$h(x, 0) = \langle w^0 \cdot \nabla \times w^0 \rangle \quad \text{en } \Omega$$

$$a(x, 0) = x \quad \text{en } \Omega$$

donde

$$\begin{aligned} R' &= \langle\langle w' \otimes w' \rangle\rangle & S' &= 2 \langle\langle \tilde{\nabla}_v (\tilde{\nabla}_v \times w') \otimes \tilde{\nabla}_v w' \rangle\rangle \\ \psi'_q &= \langle\langle \tilde{\nabla}_v w' : \tilde{\nabla}_v w' \rangle\rangle & \psi'_h &= 2 \langle\langle \tilde{\nabla}_v (\tilde{\nabla}_v \times w') : \tilde{\nabla}_v w' \rangle\rangle \\ w' &= \nabla a^{-T} \tilde{w}' \end{aligned}$$

y la fluctuación canónica normalizada \tilde{w}' verifica

$$\tilde{w}'_{,\tau} + (\tilde{w}' \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \tilde{w}' + C \nabla_{\mathbf{y}} \pi' = 0, \quad \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \tilde{w}' = 0 \quad \text{en } Y \times Z$$

$$(\tilde{w}', \pi') \quad Y - \text{periódica}, \quad \tilde{w}'(\mathbf{y}, 0) = w'_0(\mathbf{y}) \quad \text{en } Y$$

$$\langle \tilde{w}' \rangle = 0 \quad \langle \pi' \rangle = 0$$

$$\frac{1}{2} \langle \tilde{w}' C^{-1} \tilde{w}' \rangle = 1$$

$$\langle \tilde{w}' \cdot (C \nabla_{\mathbf{y}}) \times \tilde{w}' \rangle = \frac{h}{q}$$

Capítulo 3

El modelo M.P.P. para flujos con media unidimensional

El objetivo de este Capítulo es el estudio detallado del modelo M.P.P. de turbulencia para una cierta clase de flujos: aquéllos que poseen un campo medio de velocidades unidimensional de la forma

$$u(x_1, x_2, x_3; t) = \begin{pmatrix} u_1(x_2, t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Varias razones justifican el estudio particular de este tipo de flujos. En primer lugar, la hipótesis (3.1) lleva consigo gran simplicación en la formulación del correspondiente problema de Reynolds y en los cálculos de los términos de cierre. Más precisamente, la técnica M.P.P. conduce a tensores R , S y a funciones ψ_q , ψ_h que pueden ser tabulados en función de sólo dos parámetros.

Por otra parte, el estudio teórico y los cálculos necesarios para la descripción asintótica de la turbulencia en este caso particular pueden ser generalizados y utilizados en la situación más compleja de flujos con campo medio de velocidades bidimensional:

$$u(x_1, x_2, x_3; t) = \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2, t) \\ u_2(x_1, x_2, t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto será puesto en evidencia en el siguiente Capítulo.

Por último, señalemos que un análisis detallado de la situación correspondiente a (3.1) resulta ilustrativo. Incluso en estas condiciones simples es posible, gracias a

la existencia de numerosos resultados experimentales, determinar hasta qué punto las tabulaciones de los términos de cierre son correctas.

A partir de ahora, se supondrá que el campo fluctuante \tilde{w}' no depende de τ ($\tilde{w}'_{,\tau} = 0$), en otras palabras, admitiremos que en los desarrollos asintóticos no aparece $\tau = \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}$ como argumento de las fluctuaciones turbulentas.

3.1 La matriz C

Si el campo de velocidades medio es de la forma (3.1), podemos expresar explícitamente las coordenadas lagrangianas inversas $a(x, t)$ en función de $u_1(x_2, t)$.

En efecto, el problema de transporte que define $a(x, t)$ es

$$a_{,t} + (u \cdot \nabla)a = 0, \quad a(x, 0) = x$$

que en este caso, por componentes, se escribe

$$a_{i,t} + u_1 a_{i,1} = 0, \quad a_i(x, 0) = x_i, \quad i = 1, 2, 3$$

La solución de este problema viene dada por

$$\begin{aligned} a_1(x, t) &= x_1 - \int_0^t u_1(x_2, s) ds \\ a_2(x, t) &= x_2 \\ a_3(x, t) &= x_3 \end{aligned}$$

En consecuencia, tenemos

$$\nabla a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \nabla a^T \nabla a = \begin{pmatrix} 1 + \alpha^2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$\alpha = \alpha(x, t) = - \int_0^t u_{1,2}(x_2, s) ds \quad (3.3)$$

En la situación típica del flujo en un canal, como función de x_2 , el parámetro α puede ser interpretado como una medida del recíproco de la "proximidad" a la pared superior. En efecto, para x_2 cerca de 0 y $t > 0$ dados, $u_{1,2}(x_2, t)$ es proporcional al esfuerzo de rozamiento en la dirección normal a la pared (Figura 3.1, [10,37]). Cuanto mayor es éste, más cerca nos encontramos de la pared.

Así, cuando hablemos de grandes valores de α (con $t > 0$ fijo), implícitamente nos estaremos refiriendo a partículas sometidas a esfuerzos "viscosos" importantes. En particular, parece lógico esperar que las componentes extradiagonales del tensor de Reynolds R tiendan a 0 cuando $\alpha \rightarrow +\infty$.

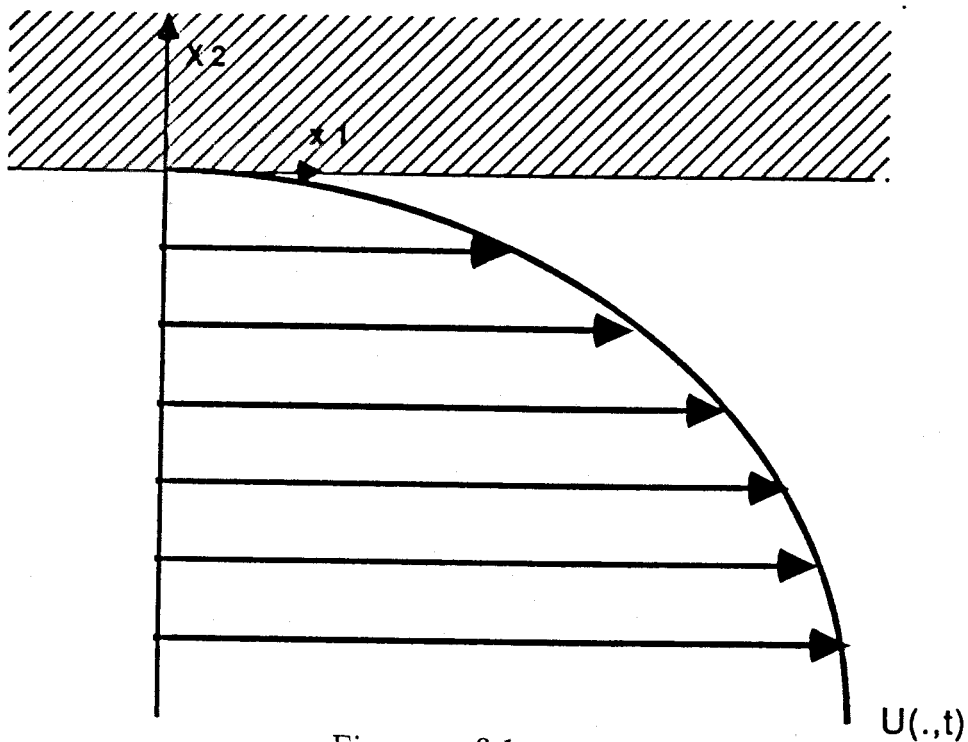


Figura 3.1

Con la notación precedente, el problema canónico normalizado escrito por componentes es el siguiente:

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{w}'_1 \tilde{w}'_{1,1} + \tilde{w}'_2 \tilde{w}'_{1,2} + \tilde{w}'_3 \tilde{w}'_{1,3} + (1 + \alpha^2) \pi'_{,1} + \alpha \pi'_{,2} &= 0 \\
 \tilde{w}'_1 \tilde{w}'_{2,1} + \tilde{w}'_2 \tilde{w}'_{2,2} + \tilde{w}'_3 \tilde{w}'_{2,3} + \alpha \pi'_{,1} + \pi'_{,2} &= 0 \\
 \tilde{w}'_1 \tilde{w}'_{3,1} + \tilde{w}'_2 \tilde{w}'_{3,2} + \tilde{w}'_3 \tilde{w}'_{3,3} + \pi'_{,3} &= 0 \\
 \tilde{w}'_{1,1} + \tilde{w}'_{2,2} + \tilde{w}'_{3,3} &= 0 \\
 \langle (\tilde{w}'_1 - \alpha \tilde{w}'_2)^2 + (\tilde{w}'_2)^2 + (\tilde{w}'_3)^2 \rangle &= 2 \\
 \langle (\tilde{w}'_1 - \alpha \tilde{w}'_2) \cdot (\alpha \tilde{w}'_{3,1} + \tilde{w}'_{3,2} - \tilde{w}'_{2,3}) + \tilde{w}'_2 \cdot (\tilde{w}'_{1,3} - \tilde{w}'_{3,1} - \alpha \tilde{w}'_{2,3}) + \\
 \tilde{w}'_3 \cdot (\tilde{w}'_{2,1} - \alpha \tilde{w}'_{1,1} + \alpha^2 \tilde{w}'_{2,1} - \tilde{w}'_{1,2} + \alpha \tilde{w}'_{2,2}) \rangle &= \frac{h}{q}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

3.2 Estructura de los términos de cierre R , S , ψ_q y ψ_h

La primera consecuencia inmediata de (3.2) es que la solución general del problema canónico normalizado \tilde{w}' puede ser escrita como una función (periódica) de la variable y , dependiente de sólo dos parámetros: $\tilde{w}' = \tilde{w}'(y; \alpha, \beta)$. El parámetro α está definido en (3.3) y β es el cociente $\frac{h}{q}$ (helicidad/energía cinética).

La estructura particular de la matriz C dada por (3.2) nos permitirá además deducir expresiones relativamente sencillas para los términos de cierre.

Proposición 3.1 .-El tensor de Reynolds $R = \langle w \otimes w \rangle$ es de la forma

$$R = q \begin{pmatrix} \rho'_{11} & \rho'_{12} & 0 \\ \rho'_{12} & \rho'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \rho'_{33} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

donde las ρ'_{11} , ρ'_{12} , ρ'_{22} , ρ'_{33} , son funciones que dependen solamente de los parámetros α y β y además verifican:

$$\rho'_{ii}(\alpha, \beta) = \rho'_{ii}(-\alpha, \beta), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.6)$$

$$\rho'_{ii}(\alpha, \beta) = \rho'_{ii}(\alpha, -\beta), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.7)$$

$$\rho'_{12}(\alpha, \beta) = -\rho'_{12}(-\alpha, \beta) \quad (3.8)$$

$$\rho'_{12}(\alpha, \beta) = \rho'_{12}(\alpha, -\beta) \quad (3.9)$$

$$\rho'_{11} + \rho'_{22} + \rho'_{33} = 2 \quad (3.10)$$

Demostración.—Sea $\tilde{R}' = \langle \tilde{w}' \otimes \tilde{w}' \rangle$, donde \tilde{w}' es la fluctuación canónica normalizada, de manera que se tiene

$$w = \sqrt{q} \nabla a^{-T} \tilde{w}', \quad R = q \nabla a^{-T} \tilde{R}' \nabla a^{-1} \quad (3.11)$$

El valor de \tilde{R}' sólo depende de α y β .

Si $C = C(\alpha)$ viene dada por (3.2), entonces

$$Q_i^T C(\alpha) Q_i = C(\alpha), \quad i = 1, 2; \quad Q_3^T C(\alpha) Q_3 = C(-\alpha) \quad (3.12)$$

para Q_1, Q_2, Q_3 las matrices

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Q_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Como $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathcal{M}_Y = \{Q \in \mathcal{M}_{3 \times 3} / QQ^T = I, Qy \in Y, \forall y \in Y\}$, $\det(Q_1) = \det(Q_3) = 1$, $\det(Q_2) = -1$, de las igualdades (2.51), (2.52) se obtiene que

$$\tilde{R}'(\alpha, \beta) = Q_1^T \tilde{R}'(\alpha, \beta) Q_1 \quad (3.14)$$

$$\tilde{R}'(\alpha, \beta) = Q_2^T \tilde{R}'(\alpha, -\beta) Q_2 \quad (3.15)$$

$$\tilde{R}'(\alpha, \beta) = Q_3^T \tilde{R}'(-\alpha, \beta) Q_3 \quad (3.16)$$

A partir de (3.14), se deduce que \tilde{R}' es de la forma

$$\tilde{R}' = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}'_{11} & \tilde{\rho}'_{12} & 0 \\ \tilde{\rho}'_{12} & \tilde{\rho}'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\rho}'_{33} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Utilizando (3.15), se obtiene que

$$\tilde{\rho}'_{ij}(\alpha, \beta) = \tilde{\rho}'_{ij}(\alpha, -\beta), \quad 1 \leq i, j \leq 3 \quad (3.18)$$

De (3.16) se deduce que

$$\tilde{\rho}'_{ii}(\alpha, \beta) = \tilde{\rho}'_{ii}(-\alpha, \beta), \quad 1 \leq i, j \leq 3 \quad (3.19)$$

$$\tilde{\rho}'_{12}(\alpha, \beta) = -\tilde{\rho}'_{12}(-\alpha, \beta), \quad (3.20)$$

De (3.4) y (3.17), se obtiene la igualdad (3.5)

$$q \begin{pmatrix} \rho'_{11} & \rho'_{12} & 0 \\ \rho'_{12} & \rho'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \rho'_{33} \end{pmatrix} = q \nabla a^{-T} \begin{pmatrix} \tilde{\rho}'_{11} & \tilde{\rho}'_{12} & 0 \\ \tilde{\rho}'_{12} & \tilde{\rho}'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\rho}'_{33} \end{pmatrix} \nabla a^{-1}$$

Por tanto

$$\rho'_{11} = \tilde{\rho}'_{11} + \alpha^2 \tilde{\rho}'_{22} - 2\alpha \tilde{\rho}'_{12} \quad (3.21)$$

$$\rho'_{22} = \tilde{\rho}'_{22} \quad (3.22)$$

$$\rho'_{33} = \tilde{\rho}'_{33} \quad (3.23)$$

$$\rho'_{12} = \tilde{\rho}'_{12} - \alpha \tilde{\rho}'_{22} \quad (3.24)$$

Por último, (3.18)-(3.24) lleva directamente a (3.6)-(3.9), mientras que (3.10) se obtiene a partir de (3.4), teniendo en cuenta que $\text{tr}(R) = 2q$.

■

Por otra parte, la estructura particular que adopta el tensor S queda descrita por la

Proposición 3.2 .-El tensor $S = 2 \langle w \otimes r \rangle$ es de la forma

$$S = 2q \begin{pmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & 0 \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{33} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

donde las σ'_{11} , σ'_{12} , σ'_{22} , σ'_{33} , son funciones que dependen solamente de los parámetros α y β y además verifican:

$$\sigma'_{ii}(\alpha, \beta) = \sigma'_{ii}(-\alpha, \beta), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.26)$$

$$\sigma'_{12}(\alpha, \beta) = -\sigma'_{12}(-\alpha, \beta) \quad (3.27)$$

$$\sigma'_{ij}(\alpha, \beta) = -\sigma'_{ij}(\alpha, -\beta), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.28)$$

$$\sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33} = \beta \quad (3.29)$$

Demostración.—Sean $\tilde{S}' = 2 \langle \tilde{w}' \otimes \tilde{r}' \rangle$, $\tilde{r}' = (\nabla a \nabla_v) \times (\nabla a^{-T} \tilde{w}')$. Como ya se vio en el Capítulo 2, se tiene que

$$S = q \nabla a^{-T} \tilde{S}' \nabla a^{-1}$$

con \tilde{S}' sólo dependiente de α y β .

Considerando de nuevo las matrices Q_1, Q_2, Q_3 usadas en la Proposición anterior, y recurriendo a (2.53)-(2.54), se obtiene:

$$\tilde{S}'(\alpha, \beta) = Q_1^T \tilde{S}'(\alpha, \beta) Q_1 \quad (3.30)$$

$$\tilde{S}'(\alpha, \beta) = -Q_2^T \tilde{S}'(\alpha, -\beta) Q_2 \quad (3.31)$$

$$\tilde{S}'(\alpha, \beta) = Q_3^T \tilde{S}'(-\alpha, \beta) Q_3 \quad (3.32)$$

Ahora podemos razonar como en la Proposición 3.1 para deducir (3.25)-(3.28). Asimismo, la ecuación (3.29) se deduce a partir de (3.25) teniendo en cuenta que

$$\text{tr}(S) = 2h.$$

■

Consecuentemente, el cálculo del tensor R (resp. S) exigirá la tabulación de 3 funciones $\rho'_{11}, \rho'_{12}, \rho'_{22}$ (resp. $\sigma'_{11}, \sigma'_{12}, \sigma'_{22}$) con respecto a 2 parámetros: α (dado en (3.3)), y $\beta = \frac{h}{q}$.

Las propiedades de paridad-imparidad de estas funciones prueban que sus respectivas tabulaciones serán suficientes para $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$. Además, para algunos valores muy particulares de α y de β , los tensores R y S son conocidos:

- si $\alpha = 0$, entonces $C = I, R(0, \beta) = \frac{2}{3}qI$ y $S(0, \beta) = \frac{2}{3}\beta I$;
- si $\beta = 0$, entonces $S(\alpha, 0) = 0 \quad \forall \alpha$.

Por otra parte, la tabulación de $R(\alpha, 0)$ fue ya realizada por T. Chacón en [15]. En efecto, en esta referencia la situación considerada (más sencilla) parte de la hipótesis $h \equiv 0$ y corresponde al denominado modelo M.P.P. reducido. Así, el trabajo que queda por realizar consiste en evaluar los tensores R y S para un buen número de valores positivos de los parámetros α y β .

En relación con las funciones ψ_q y ψ_h , tenemos

Proposición 3.3 .-Las funciones $\psi_q = \langle (\nabla_a \nabla_y)w : (\nabla_a \nabla_y)w \rangle$ y $\psi_h = \langle (\nabla_a \nabla_y)w : (\nabla_a \nabla_y)r \rangle$ son de la forma

$$\psi_q = q\psi'_q = q \langle (\nabla_a \nabla_y)(\nabla_a^{-T} \tilde{w}') : (\nabla_a \nabla_y)(\nabla_a^{-T} \tilde{w}') \rangle \quad (3.33)$$

$$\psi_h = q\psi'_h = q \langle (\nabla_a \nabla_y)(\nabla_a^{-T} \tilde{w}') : (\nabla_a \nabla_y)(\nabla_a^{-T} \tilde{r}') \rangle \quad (3.34)$$

donde ψ'_q y ψ'_h sólo dependen de los parámetros α y β y verifican:

$$\psi'_q(\alpha, \beta) = \psi'_q(-\alpha, \beta) \quad (3.35)$$

$$\psi'_q(\alpha, \beta) = \psi'_q(\alpha, -\beta) \quad (3.36)$$

$$\psi'_h(\alpha, \beta) = \psi'_h(-\alpha, \beta) \quad (3.37)$$

$$\psi'_h(\alpha, \beta) = -\psi'_h(\alpha, -\beta) \quad (3.38)$$

Demostración.—Se sigue de (2.54),(2.55) al sustituir Q por Q_1, Q_2, Q_3 .

El carácter impar del tensor S' y de la función ψ'_h con respecto a β tiene consecuencias de gran relevancia. Tal y como se observó en el Capítulo precedente para S y ψ_h , se tiene

$$S'(C, 0) = 0, \quad \forall C \quad (3.39)$$

$$\psi'_h(C, 0) = 0, \quad \forall C \quad (3.40)$$

Por otro lado, el problema de transporte para la helicidad venía dado por

$$h_{,t} + u \nabla h + q S' : \nabla u + \mu q \psi'_h = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, T[\quad (3.41)$$

$$h(x, 0) = \langle w^0 \cdot \nabla \times w^0 \rangle \quad \text{en } \Omega \quad (3.42)$$

Pero, si $h(x, 0) = 0$ en Ω , entonces $h \equiv 0$ verifica trivialmente la ecuación (3.41). La interpretación física de este hecho es que la helicidad no puede crearse si ésta no existe inicialmente. Esta propiedad de la helicidad constituye uno de los resultados más importantes del presente trabajo; por sí sola justifica la validez de los cálculos realizados en [15] para la resolución del modelo reducido M.P.P.

3.3 Desarrollos limitados para los términos de cierre

Una consecuencia del carácter par-impar con respecto a (α, β) de las funciones ρ'_{ij} , σ'_{ij} , ψ_q y ψ'_h de la Sección anterior, es la obtención de desarrollos limitados para estas funciones. Estos desarrollos quedan descritos en el siguiente

Corolario 3.1 .—*Supongamos que R' , S' , ψ'_q , y ψ'_h son suficientemente regulares en un entorno de la forma $E_\delta(0, 0) = \{(\alpha, \beta) / |\alpha| + |\beta| < \delta\}$.*

Entonces se tienen las igualdades siguientes en $E_\delta(0, 0)$:

$$\langle w_1 w_1 \rangle = \frac{2}{3} q + b_{11}^{(1)} \alpha^2 q + b_{11}^{(2)} \frac{h^2}{q} + O(\delta^2) \quad (3.43)$$

$$\langle w_2 w_2 \rangle = \frac{2}{3} q + b_{22}^{(1)} \alpha^2 q + b_{22}^{(2)} \frac{h^2}{q} + O(\delta^2) \quad (3.44)$$

$$\langle w_3 w_3 \rangle = \frac{2}{3} q + b_{33}^{(1)} \alpha^2 q + b_{33}^{(2)} \frac{h^2}{q} + O(\delta^2) \quad (3.45)$$

$$\langle w_1 w_2 \rangle = b_{12}^{(1)} \alpha q + b_{12}^{(2)} \alpha \frac{h^2}{q} + O(\delta^2) \quad (3.46)$$

$$\langle r_1 w_1 \rangle = \frac{1}{3} h + c_{11} h \alpha^2 + O(\delta^2) \quad (3.47)$$

$$\langle r_2 w_2 \rangle = \frac{1}{3} h + c_{22} h \alpha^2 + O(\delta^2) \quad (3.48)$$

$$\langle r_3 w_3 \rangle = \frac{1}{3} h + c_{33} h \alpha^2 + O(\delta^2) \quad (3.49)$$

$$\langle r_1 w_2 \rangle = c_{12}^{(1)} \alpha h + c_{12}^{(2)} \alpha^3 h + c_{12}^{(3)} \alpha \frac{h^3}{q^2} + O(\delta^3) \quad (3.50)$$

$$\langle (\nabla a \nabla_y) w : (\nabla a \nabla_y) w \rangle = f^{(0)} q + f^{(1)} \alpha^2 + f^{(2)} \frac{h^2}{q} + O(\delta^2) \quad (3.51)$$

$$\langle (\nabla a \nabla_y) w : (\nabla a \nabla_y) r \rangle = g^{(0)} h + g^{(1)} \alpha^2 + g^{(2)} h + O(\delta^2) \quad (3.52)$$

■

Ahora el problema se reduce a calcular los coeficientes $b_{ij}^{(k)}$, c_{jj} , $c_{12}^{(i)}$, $f^{(i)}$ y $g^{(i)}$ que aparecen en los desarrollos (3.43)-(3.52). Estos coeficientes pueden ser calculados a partir de la resolución numérica del problema canónico ([31])

Las fórmulas (3.43)-(3.52) proporcionan primeras aproximaciones de los tensores de cierre. Desafortunadamente, en la práctica, estas fórmulas no son de gran utilidad. En primer lugar, la regularidad de R' , S' , ψ'_q y ψ'_h con respecto a (α, β) no está asegurada en general. En segundo lugar, aún cuando esto fuera cierto, sólo serían válidas para valores pequeños de α y β . No obstante, en el Capítulo siguiente se obtendrán expresiones para R y S válidas en un marco más general.

3.4 Análisis asintótico para $\alpha \rightarrow +\infty$. Consecuencias

En la práctica, interesa conocer el comportamiento de $\tilde{w}'(y; \alpha, \beta)$ para α suficientemente grande; aunque, en realidad, nuestro interés se centrará más bien en el comportamiento de los "estadísticos" de \tilde{w}' que determinan R , S , ψ_q y ψ_h cuando $\alpha \rightarrow +\infty$.

Este estudio está motivado por razones esencialmente técnicas: los algoritmos utilizados en la resolución numérica de (3.4) divergen para valores grandes de α

(incluso para valores no demasiado grandes); un análisis teórico resulta, por tanto, imprescindible.

Sea $w' = \nabla a^{-T} \tilde{w}'$, o por componentes,

$$\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{w}'_1 - \alpha \tilde{w}'_2 \\ \tilde{w}'_2 \\ \tilde{w}'_3 \end{pmatrix}$$

Con $\gamma = \frac{1}{\alpha}$, el sistema (3.3), en términos de w' se escribe:

$$(w'_1 w'_{1,1} + w'_2 w'_{1,2} + w'_3 w'_{1,3} + \pi'_{1,1}) \gamma + w'_2 w'_{1,1} = 0 \quad (3.53)$$

$$(w'_1 w'_{2,1} + w'_2 w'_{2,2} + w'_3 w'_{2,3} + \pi'_{2,2}) \gamma + w'_2 w'_{2,1} + \pi'_{1,1} = 0 \quad (3.54)$$

$$(w'_1 w'_{3,1} + w'_2 w'_{3,2} + w'_3 w'_{3,3} + \pi'_{3,3}) \gamma + w'_2 w'_{3,1} = 0 \quad (3.55)$$

$$(w'_{1,1} + w'_{2,2} + w'_{3,3}) \gamma + w'_{2,1} = 0 \quad (3.56)$$

$$\langle (w'_1)^2 + (w'_2)^2 + (w'_3)^2 \rangle = 2 \quad (3.57)$$

$$\langle w'_1 w'_{3,1} - w'_3 w'_{1,1} + \gamma [w'_1 (w'_{3,2} - w'_{2,3}) + w'_2 (w'_{1,3} - w'_{3,1}) + w'_3 (w'_{2,1} - w'_{1,2})] \rangle = \beta \gamma \quad (3.58)$$

Sea $w'(y, \gamma, \beta)$ la solución general de este sistema, estamos interesados entonces en conocer el límite

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} w'(y, \gamma, \beta), \quad \beta \in \mathbb{R} \text{ fijo} \quad (3.59)$$

Para ello supondremos que w' y π' poseen dependencia analítica con respecto a γ . En términos de desarrollos asintóticos, escribiremos las expresiones formales

$$w'_i \sim w'_i{}^{(0)} + \gamma w'_i{}^{(1)} + \frac{1}{2} \gamma^2 w'_i{}^{(2)} + \frac{1}{6} \gamma^3 w'_i{}^{(3)} + \dots \quad (3.60)$$

$$\pi' \sim \pi'^{(0)} + \gamma \pi'^{(1)} + \frac{1}{2} \gamma^2 \pi'^{(2)} + \frac{1}{6} \gamma^3 \pi'^{(3)} + \dots \quad (3.61)$$

donde

$$w'_i{}^{(j)} = \left. \frac{d^j w'_i}{d\gamma^j} \right|_{\gamma=0}, \quad \pi'^{(j)} = \left. \frac{d^j \pi'}{d\gamma^j} \right|_{\gamma=0} \quad (3.62)$$

En lo que sigue, nos limitaremos a realizar un estudio exhaustivo de las diferentes posibilidades que pueden darse de acuerdo con el cálculo formal (identificación de las distintas potencias de γ en (3.53)-(3.58)).

Haciendo $\gamma \rightarrow 0$ en (3.53), se obtiene

$$w_2^{(0)} w_{1,1}^{(0)} = 0 \quad (3.63)$$

$$w_2^{(0)} w_{2,1}^{(0)} + \pi_{,1}^{(0)} = 0 \quad (3.64)$$

$$w_2^{(0)} w_{3,1}^{(0)} = 0 \quad (3.65)$$

$$w_{2,1}^{(0)} = 0 \quad (3.66)$$

$$\langle (w_1^{(0)})^2 + (w_2^{(0)})^2 + (w_3^{(0)})^2 \rangle = 2 \quad (3.67)$$

$$\langle w_1^{(0)} w_{3,1}^{(0)} - w_3^{(0)} w_{1,1}^{(0)} \rangle = 0 \quad (3.68)$$

Podemos distinguir 2 casos:

(i) $w_2^{(0)} \neq 0$

(ii) $w_2^{(0)} \equiv 0$

(i) $w_2^{(0)} \neq 0$

De las ecuaciones (3.63)-(3.66) se tiene

$$w_i^{(0)} = w_i^{(0)}(y_2, y_3), \quad \pi^{(0)} = \pi^{(0)}(y_2, y_3) \quad (3.69)$$

es decir, $(w^{(0)}, \pi^{(0)})$ no depende de y_1 . Veamos que esto también es cierto para $(w^{(k)}, \pi^{(k)})$, $k \geq 1$.

En efecto, la n -ésima ecuación se obtiene derivando (3.53)-(3.58) con respecto a γ n veces y haciendo $\gamma \rightarrow 0$, resultando

$$n \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (w_1^{(n-k-1)} w_{1,1}^{(k)} + w_2^{(n-k-1)} w_{1,2}^{(k)} + w_3^{(n-k-1)} w_{1,3}^{(k)}) + \pi_{,1}^{(n-1)} \right] + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w_2^{(n-k)} w_{1,1}^{(k)} = 0 \quad (3.70)$$

$$n \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (w_1^{(n-k-1)} w_{2,1}^{(k)} + w_2^{(n-k-1)} w_{2,2}^{(k)} + w_3^{(n-k-1)} w_{2,3}^{(k)}) + \pi_{,2}^{(n-1)} \right] + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w_2^{(n-k)} w_{2,1}^{(k)} + \pi_{,1}^{(n)} = 0 \quad (3.71)$$

$$n \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (w_1'^{(n-k-1)} w_{3,1}^{(k)} + w_2'^{(n-k-1)} w_{3,2}^{(k)} + w_3'^{(n-k-1)} w_{3,3}^{(k)}) + \pi_{3,3}'^{(n-1)} \right] + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w_2'^{(n-k)} w_{3,1}^{(k)} = 0 \quad (3.72)$$

$$n [w_{1,1}'^{(n-1)} + w_{2,2}'^{(n-1)} + w_{3,3}'^{(n-1)}] + w_{2,1}'^{(n)} = 0 \quad (3.73)$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle w_1'^{(k)} w_1'^{(n-k)} + w_2'^{(k)} w_2'^{(n-k)} + w_3'^{(k)} w_3'^{(n-k)} \rangle = 0 \quad (3.74)$$

$$\langle \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (w_1'^{(k)} w_{3,1}'^{(n-k)} - w_3'^{(n-k)} w_{1,1}'^{(k)}) + n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} [w_1'^{(n-k-1)} (w_{3,2}'^{(k)} - w_{2,3}'^{(k)}) + w_2'^{(n-k-1)} (w_{1,3}'^{(k)} - w_{3,1}'^{(k)}) + w_3'^{(n-k-1)} (w_{2,1}'^{(k)} - w_{1,2}'^{(k)})] \rangle = 0 \quad (3.75)$$

Supuesto que $(w'^{(k)}, \pi'^{(k)})$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ no dependen de y_1 , se deduce, a partir de (3.70)-(3.73) que $(w'^{(n)}, \pi'^{(n)})$ tampoco depende de la variable y_1 . Pero esto significa que (w', π') no depende de y_1 , y por tanto, el problema inicial (3.53)-(3.58) adquiere la forma

$$w_2' w_{1,2}' + w_3' w_{1,3}' = 0 \quad (3.76)$$

$$w_2' w_{2,2}' + w_3' w_{2,3}' + \pi_{2,2}' = 0 \quad (3.77)$$

$$w_2' w_{3,2}' + w_3' w_{3,3}' + \pi_{3,3}' = 0 \quad (3.78)$$

$$w_{2,2}' + w_{3,3}' = 0 \quad (3.79)$$

$$\langle (w_1')^2 + (w_2')^2 + (w_3')^2 \rangle = 2 \quad (3.80)$$

$$\langle w_1' (w_{3,2}' - w_{2,3}') + w_2' w_{1,3}' - w_3' w_{1,2}' \rangle = \beta \quad (3.81)$$

En consecuencia, (w', π') es independiente de γ . Las expresiones (3.77)-(3.79) son las ecuaciones de Euler incompresible en el plano (y_2, y_3) para $(w_2', w_3'), \pi'$. La ecuación (3.76) dice que w_1' es transportada por (w_2', w_3') ; así, si las líneas de corriente del campo (w_2', w_3') son densas en el cuadrado $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ (carácter ergódico de la fluctuación) entonces w_1' es constante; pero esta constante debe ser cero puesto que $\langle w_1' \rangle = 0$; luego $w_1' \equiv 0$.

Por otro lado, $w_1' \equiv 0$ implica $\beta = 0$, i.e. helicidad nula, siendo $\beta \neq 0$ en general. Este argumento conduce por tanto a una contradicción: la ergodicidad de (w_2', w_3') y la condición $\beta \neq 0$ no son compatibles con $w_2'^{(0)} \neq 0$.

En el caso de ser $\beta = 0$, se puede tener $w' = (0, w'_2, w'_3)^T$ siendo $(w'_2, w'_3), \pi'$ solución del problema de Euler periódico e incompresible en (y_2, y_3) . En esta situación, los tensores R, S, ψ_q y ψ_h toman la forma

$$R = q \langle w' \otimes w' \rangle = q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \rho'_{33} \end{pmatrix}, \quad \rho'_{22} + \rho'_{33} = 2$$

$$S \equiv 0$$

$$\psi_q = q \langle \nabla_y w' : \nabla_y w' \rangle$$

$$\psi_h \equiv 0$$

(ii) $w_2^{(0)} \equiv 0$

En este caso, también se pueden encontrar fluctuaciones independientes de γ . En efecto, supongamos que (w', π') verifica $w'_2 \equiv 0, \pi'_{,1} \equiv 0$. Las ecuaciones (3.53)-(3.58) se escriben entonces

$$\pi'_{,1} = 0, \quad \pi'_{,2} = 0 \quad (3.82)$$

$$w'_1 w'_{1,1} + w'_3 w'_{1,3} = 0 \quad (3.83)$$

$$w'_1 w'_{3,1} + w'_3 w'_{3,3} + \pi'_{,3} = 0 \quad (3.84)$$

$$w'_{1,1} + w'_{3,3} = 0 \quad (3.85)$$

$$\langle (w'_1)^2 + (w'_3)^2 \rangle = 2 \quad (3.86)$$

$$\langle w'_1 w'_{3,2} - w'_3 w'_{1,2} \rangle = \beta \quad (3.87)$$

Para resolver este sistema, observemos primero que

$$(3.83), (3.85) \Rightarrow \left(\frac{w'_3}{w'_1} \right)_{,3} = 0 \quad (\text{o bien } \left(\frac{w'_1}{w'_3} \right)_{,3} = 0)$$

es decir

$$w'_3 = \phi(y_1, y_2) w'_1 \quad (\text{o bien } w'_1 = \psi(y_1, y_2) w'_3) \quad (3.88)$$

Por otro lado, de (3.84), (3.85) se deduce que

$$\left(\frac{w'_3}{w'_1} \right)_{,1} (w'_1)^2 = \pi'_{,3}$$

y al integrar en $y_3 \in [-\pi, \pi]$, teniendo en cuenta la periodicidad de π' y (3.88), se obtiene

$$\left(\frac{w'_3}{w'_1}\right)_{,1} = 0 \quad \pi' \equiv 0$$

En consecuencia,

$$w'_3 = \phi(y_2)w'_1 \quad (\text{o bien } w'_1 = \psi(y_2)w'_3) \quad (3.89)$$

Las ecuaciones (3.83)-(3.85) se escriben ahora:

$$w'_{1,1} + \phi(y_2)w'_{1,3} = 0 \quad (\text{o bien } w'_{3,3} + \psi(y_2)w'_{3,1} = 0) \quad (3.90)$$

La solución general de (3.90) viene dada por

$$w'_1(y_1, y_2, y_3) = \chi(y_3 - \phi(y_2)y_1, y_2) \quad (3.91)$$

$$w'_3(y_1, y_2, y_3) = \phi(y_2)\chi(y_3 - \phi(y_2)y_1, y_2) \quad (3.92)$$

donde $\chi(., y_2) \in C^1(\mathbf{R})$, $\forall y_2 \in]-\pi, \pi[$

Ahora bien, las condiciones de periodicidad verificadas por w'_1 y w'_3 obligan a la igualdad $\chi(s_1, s_2) = \chi_0(s_2)$, con lo cual, (3.91),(3.92) toma la forma

$$w'_1 = \psi(y_2) \quad (3.93)$$

$$w'_3 = \phi(y_2) \quad (3.94)$$

Aquí, ψ y ϕ son funciones periódicas en $[-\pi, \pi]$ sujetas solamente a las condiciones

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\phi^2 + \psi^2) = 2 \quad (3.95)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi \phi' = \frac{\beta}{2} \quad (3.96)$$

que expresan las restricciones (3.86),(3.87).

Consecuentemente, para $w' = (w'_1(y_2), 0, w'_3(y_2))^T$ se tiene

$$R = q \langle w' \otimes w' \rangle = q \begin{pmatrix} \rho'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho'_{33} \end{pmatrix}, \quad \rho'_{11} + \rho'_{33} = 2$$

$$S = 2q \langle w' \otimes r' \rangle = q \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

por otro lado, las funciones ψ_q y ψ_h verifican

$$\psi_q = q \langle (\nabla a \nabla_{\mathbf{y}}) w' : (\nabla a \nabla_{\mathbf{y}}) w' \rangle = O(1)$$

$$\psi_h = q \langle (\nabla a \nabla_{\mathbf{y}}) w' : (\nabla a \nabla_{\mathbf{y}}) r' \rangle = O(1)$$

Nota 3.1.—Las funciones ψ y ϕ son arbitrarias con tal que se tenga (3.95), (3.96); esto significa que ρ_{11} y ρ_{33} sólo están sujetos a las restricciones

$$\rho'_{11} + \rho'_{33} = 2, \quad \rho'_{11}, \rho'_{33} > 0, \quad \text{si } \beta \neq 0,$$

$$\rho'_{11} + \rho'_{33} = 2, \quad \text{si } \beta = 0$$

■

Consideremos ahora el caso general en que $w'_2 \neq 0$, $w_2^{(0)} \equiv 0$. El desarrollo (3.60), escrito por componentes se convierte en

$$w'_1 \sim w_1^{(0)} + \gamma w_1^{(1)} + \frac{1}{2} \gamma^2 w_1^{(2)} + \dots$$

$$w'_2 \sim \gamma w_2^{(1)} + \frac{1}{2} \gamma^2 w_2^{(2)} + \dots$$

$$w'_3 \sim w_3^{(0)} + \gamma w_3^{(1)} + \frac{1}{2} \gamma^2 w_3^{(2)} + \dots$$

Por tanto, obtenemos

$$\langle w'_1 w'_1 \rangle = \langle w_1^{(0)} w_1^{(0)} \rangle + O(\gamma^2)$$

$$\langle w'_2 w'_2 \rangle = O(\gamma^2)$$

$$\langle w'_3 w'_3 \rangle = \langle w_3^{(0)} w_3^{(0)} \rangle + O(\gamma^2)$$

$$\langle w'_1 w'_2 \rangle = O(\gamma)$$

$$\langle w'_1 r'_1 \rangle = \langle w_1^{(0)} w_{3,1}^{(1)} \rangle + \langle w_1^{(1)} w_{3,1}^{(0)} \rangle + \langle w_1^{(0)} w_{3,2}^{(0)} \rangle + O(\gamma)$$

$$\langle w'_2 r'_2 \rangle = O(\gamma)$$

$$\langle w'_3 r'_3 \rangle = - \langle w_3^{(0)} w_{1,1}^{(1)} \rangle - \langle w_3^{(1)} w_{1,1}^{(0)} \rangle - \langle w_3^{(0)} w_{1,2}^{(0)} \rangle + O(\gamma)$$

$$\langle w'_1 r'_2 \rangle = O(\gamma)$$

$$\psi_q = O(\gamma^{-2})$$

$$\psi_h = O(\gamma^{-3})$$

de donde

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} R(\gamma) = q \begin{pmatrix} \langle w_1^{(0)} w_1^{(0)} \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle w_3^{(0)} w_3^{(0)} \rangle \end{pmatrix}, \quad \langle w_1^{(0)} w_1^{(0)} \rangle + \langle w_3^{(0)} w_3^{(0)} \rangle = 2$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} S(\gamma) = q \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Obsérvese de nuevo que los límites de los estadísticos $\langle w_1' w_1' \rangle$, $\langle w_3' w_3' \rangle$ cuando $\gamma \rightarrow 0$ no están determinados unívocamente. En efecto, toda función $w' = (w_1'(y_2), 0, w_3'(y_2))^T$, dada por (3.93)-(3.94), conduce a un posible límite $w^{(0)} = w'$.

Por el contrario, los límites de $\langle w_1 r_1 \rangle$, $\langle w_3 r_3 \rangle$ están perfectamente determinados y su valor es $\beta = \frac{h}{q}$. En cualquier caso se tiene

$$\langle w_1 w_2 \rangle = O(\gamma)$$

$$\langle w_1 r_2 \rangle = O(\gamma)$$

Capítulo 4

Invariancia por cambios de sistemas de referencia

En el Capítulo 2 quedaron introducidas expresiones que relacionaban los términos de cierre $\tilde{R}(C)$, $\tilde{S}(C)$, $\psi_q(C)$, $\psi_h(C)$ con $\tilde{R}(Q^T C Q)$, $\tilde{S}(Q^T C Q)$, $\psi_q(Q^T C Q)$ y $\psi_h(Q^T C Q)$ respectivamente. En aquellas relaciones, la matriz Q recorría una familia de matrices ortogonales muy particulares: aquéllas que mantienen invariante el cubo $Y =] - \pi, \pi[^3$ (tan solo 48 matrices verifican esta restricción).

El objetivo de este Capítulo consiste en generalizar los resultados anteriores permitiendo que la matriz Q recorra un conjunto más amplio: el de las matrices ortogonales con el determinante positivo (i.e. $\det(Q) = 1$); en tal caso, el Teorema de Representación de Rivlin-Ericksen ([11]) podrá ser aplicado y, en consecuencia, los términos de cierre poseerán una estructura muy simple en función de C . Como se verá, este hecho repercute directamente sobre el modo de tabulación de los tensores de cierre. Los cálculos quedarán reducidos sistemáticamente a la evaluación de determinadas funciones escalares. Por otra parte, estos resultados justifican que, en el Capítulo precedente, se hayan analizado flujos con campo de velocidades unidimensional, pues, como comprobaremos, sus propiedades pueden ser generalizadas de forma inmediata a la situación bidimensional análoga.

4.1 Cambio de sistema de referencia en las ecuaciones del modelo

Consideremos el sistema de ecuaciones promediadas del modelo M.P.P.

$$u_{,t} + u \nabla u + \nabla p + \varepsilon^{2/3} \nabla \cdot R = 0, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, T[\quad (4.1)$$

$$q_{,t} + u \nabla q + R : \nabla u + \mu \psi_q = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, T[\quad (4.2)$$

$$h_{,t} + u \nabla h + S : \nabla u + \mu \psi_h = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, T[\quad (4.3)$$

$$a_{,t} + u \nabla a = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, T[\quad (4.4)$$

A partir de (4.1)-(4.4) podemos deducir propiedades estructurales para R' , S' , ψ'_q y ψ'_h si admitimos la hipótesis inicial de que las tres primeras ecuaciones son invariantes bajo cambios de sistemas de referencia. Esta suposición no es muy exigente: las magnitudes que describen un fenómeno físico regido por unas ecuaciones diferenciales deben ser independientes del punto en que se sitúa y del sistema cartesiano que adopta el observador de dicho fenómeno.

Definamos el conjunto $O_+^3 = \{Q \in \mathcal{M}_{3 \times 3} / QQ^T = I, \det(Q) = 1\}$. Un cambio de sistema de referencia viene dado por

$$X = Qx, \quad Q \in O_+^3 \quad (4.5)$$

de forma que las "nuevas" magnitudes (U, E, H) vienen dadas por

$$U(X, t) = Qu(x, t) \quad (4.6)$$

$$E(X, t) = q(x, t) \quad (4.7)$$

$$H(X, t) = h(x, t) \quad (4.8)$$

Expresemos el sistema (4.1)-(4.3) en términos de las nuevas variables X, U, E, H . Si denotamos por $A(X, t)$ las coordenadas Lagrangianas inversas relativas a $U(X, t)$, i.e.

$$A_{,t} + (U \cdot \nabla_X) A = 0, \quad A(X, 0) = X \quad (4.9)$$

entonces $A(X, t)$ y $a(x, t)$ están relacionadas mediante la igualdad

$$A(X, t) = Qa(x, t) \quad (4.10)$$

De (4.10) se obtiene

$$(\nabla_x a)(x, t) = Q^T \nabla_X A(X, t) Q \quad (4.11)$$

Por otra parte, también se verifica

$$u \nabla_x q(x, t) = U \nabla_X E(X, t) \quad (4.12)$$

En principio, vamos a considerar sólo la ecuación para la energía cinética (4.2), obteniendo, a partir de su invarianza respecto de cambios de sistemas de referencia, determinadas propiedades para R' y ψ'_q . Actuando del mismo modo con la ecuación para la helicidad (4.3), se deducirán las mismas propiedades para S' y ψ'_h . Para abreviar la escritura, no se explicitará la dependencia respecto de $\frac{h}{g}$.

La ecuación (4.2), escrita en términos de las nuevas variables X, U, A, E y H se reduce a:

$$E_{,t} + U \nabla_X E + ER'(Q^T \nabla_X A Q) : Q^T \nabla_X U Q + \mu E \psi'_q(Q^T \nabla_X A^T \nabla_X A Q) = 0 \quad (4.13)$$

Por otro lado, la invarianza de la ecuación (4.2) con respecto a cambios de referencia implica

$$E_{,t} + U \nabla_X E + ER'(\nabla_X A) : \nabla_X U + \mu E \psi'_q(\nabla_X A^T \nabla_X A) = 0 \quad (4.14)$$

de donde

$$\begin{aligned} R'(Q^T \nabla_X A Q) : Q^T \nabla_X U Q + \mu \psi'_q(Q^T \nabla_X A^T \nabla_X A Q) \\ = R'(\nabla_X A) : \nabla_X U + \mu E \psi'_q(\nabla_X A^T \nabla_X A) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Por hipótesis, esta última igualdad debe verificarse cualquiera que sea μ ; si, en particular, tomamos $\mu \rightarrow 0$, se deduce

$$R'(Q^T \nabla_X A Q) : Q^T \nabla_X U Q = R'(\nabla_X A) : \nabla_X U \quad (4.16)$$

$$\psi'_q(Q^T \nabla_X A^T \nabla_X A Q) = \psi'_q(\nabla_X A^T \nabla_X A) \quad (4.17)$$

siendo (4.16)-(4.17) válida para toda $Q \in O_+^3$ por la hipótesis de partida.

Puesto que, cualesquiera que sean $M_1, M_2, M_3, M_4 \in \mathcal{M}_{n \times n}$,

$$M_1 : M_2 M_3 M_4 = \text{tr}(M_4^T M_3^T M_2^T M_1) = \text{tr}(M_3^T M_2^T M_1 M_4^T) = M_2^T M_1 M_4^T : M_3,$$

podemos re-escribir (4.16)-(4.17) en la forma

$$QR'(Q^T \nabla_X A Q)Q^T : \nabla_X U = R'(\nabla_X A) : \nabla_X U \quad (4.18)$$

$$\psi'_q(Q^T \nabla_X A^T \nabla_X A Q) = \psi'_q(\nabla_X A^T \nabla_X A) \quad (4.19)$$

Fijémonos en la relación (4.18), en la que estamos interesados en hacer desaparecer el "factor" $\nabla_X U$. Esto sería posible si (4.18) se verificase para toda matriz $\nabla_X U$, con $\nabla_X A$ fija (puesto que $M_1 : M_2$ es un producto escalar en $\mathcal{M}_{n \times n}$). En principio, esto no es cierto por dos razones:

1. las matrices $M_0 = \nabla_X U(x_0, t_0)$, $x_0 \in \Omega$, $t_0 \geq 0$ son tales que $\text{tr}(M_0) = 0$ y, por tanto, $\nabla_X U(x_0, t_0)$ no recorre todo $\mathcal{M}_{3 \times 3}$
2. los campos A y U están ligados por la ecuación

$$A_{,t} + (U \cdot \nabla_X) A = 0$$

de manera que $\nabla_X A$ y $\nabla_X U$ también deben estarlo.

Con objeto de superar estas dificultades, recurriremos al siguiente

Lema 4.1 .—Sean $x_0 \in \Omega$, $t_0 \in]0, T[$, $M_0, M_1 \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ tales que

$$\text{tr}(M_0) = 0, \quad \det(M_1) = 1$$

Supongamos que M_1 no es semejante a una matriz del tipo

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0 \quad (4.20)$$

Entonces, existen dos campos $u(x, t)$, $a(x, t)$ verificando las condiciones siguientes

$$\nabla \cdot u(x, t) = 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, T] \quad (4.21)$$

$$a_{,t}(x, t) + (u(x, t) \cdot \nabla) a(x, t) = 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, T] \quad (4.22)$$

$$a(x, 0) = x \quad \text{en } \Omega \quad (4.23)$$

y además

$$\nabla u(x_0, t_0) = M_0 \quad (4.24)$$

$$\nabla a(x_0, t_0) = M_1 \quad (4.25)$$

Demostración.—Sea $B : t \in]0, T[\rightarrow B(t) \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ una función regular tal que

$$B(0) = \Theta, \quad \text{tr}(B(t)) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.26)$$

A partir de $B(t)$ se definen

$$a(x, t) = \exp(B^T(t)) x \quad (4.27)$$

$$u(x, t) = -\nabla a^{-T} a_{,t} \quad (4.28)$$

de forma que se verifican inmediatamente (4.22) y (4.23).

Por otro lado

$$\nabla a = \exp(B(t)) \quad (4.29)$$

En consecuencia

$$\det(\nabla a) = \exp(\text{tr}(B(t))) = 1 \quad (4.30)$$

Utilizando el Lema 2.2, se obtiene fácilmente que u verifica (4.21).

Sólo falta probar (4.24) y (4.25). La expresión de $a_{,t}(x, t)$ se deduce a partir de (4.27)

$$a_{,t}(x, t) = [\mathcal{L}(B^T(t)) B^T(t)] x \quad (4.31)$$

donde $\mathcal{L}(B)H$ es el valor de la diferencial de la función $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3} \rightarrow \exp(B) \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ aplicada a la matriz H , i.e.

$$\mathcal{L}(B)H = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \frac{D^{n-k} H D^k}{(n+1)!} \quad (4.32)$$

En consecuencia el campo u está dado por

$$u(x, t) = -[\exp(-B(t)^T) \mathcal{L}(B^T(t)) B^T(t)] x \quad (4.33)$$

de donde

$$\nabla u(x, t) = -[\mathcal{L}(B(t)) B'(t)] \exp(-B(t)) \quad (4.34)$$

Se trata, por tanto, de comprobar que, para una cierta elección de la función $B(t)$, se tiene

$$\exp(B_0) = M_1 \quad (4.35)$$

$$[\mathcal{L}(B_0)(-H_0)] \exp(-B_0) = M_0 \quad (4.36)$$

siendo $B_0 = B(t_0)$, $H_0 = B'(t_0)$. Nótese que B_0 y H_0 son independientes entre sí, y solo están sujetas a la restricción $\text{tr}(B_0) = \text{tr}(H_0) = 0$.

La matriz B_0 es elegida de forma que se verifique (4.35) (obsérvese que B_0 no está unívocamente determinada).

Sólo queda probar que H_0 puede ser elegida de manera que se tenga (4.36), es decir

$$\mathcal{L}(B_0)(H_0) = -M_0 \exp(B_0) \quad (4.37)$$

Pero esto será cierto se probamos que $\mathcal{L}(B_0)$ es un isomorfismo de $\mathcal{M}_{3 \times 3}$. Ahora bien, una condición suficiente para que $\mathcal{L}(B_0)$ sea biyectivo es ([36], pág. 265)

$$\lambda_1 - \lambda_2 \neq 2k\pi i, \quad k \neq 0, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \text{ autovalores de } B_0 \quad (4.38)$$

Como $B_0 \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$, lo contrario de (4.38) sólo sería posible si se tuviera

$$\lambda_1 = d + k\pi i, \quad \lambda_2 = d - k\pi i, \quad \lambda_3 = -2d, \quad d \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_* \quad (4.39)$$

en este caso B_0 es semejante a J_0 , con

$$J_0 = \begin{pmatrix} d & -k\pi & 0 \\ k\pi & d & 0 \\ 0 & 0 & -2d \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

y, por tanto, M_1 sería semejante a $\exp(J_0)$ (por la periodicidad de la función exponencial, se puede suponer $k = 1$). Pero

$$\exp(J_0) = \begin{pmatrix} -e^d & 0 & 0 \\ 0 & -e^d & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2d} \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

en contra de la hipótesis (4.20). En consecuencia $\mathcal{L}(B_0)$ es biyectivo.

■

También haremos uso del siguiente resultado, cuya demostración es trivial:

Lema 4.2 .- Sea $M \in \mathcal{M}_{n \times n}$ una matriz tal que

$$M : G = 0 \quad \forall G \in \mathcal{M}_{n \times n} \text{ con } \text{tr}(G) = 0$$

Entonces, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$M = \lambda I$$

■

Volvamos a considerar las expresiones (4.18),(4.19). Dado que, para $t = 0$, ∇a coincide con la matriz unidad, por continuidad, existe todo un intervalo $]0, t^*[$ tal que, si $t \in]0, t^*[$, entonces $\nabla a(x, t)$ no es semejante a una matriz del tipo (4.20). En tal caso, el Lema 4.1 puede ser aplicado a (4.18), obteniéndose

$$[QR'(Q^T \nabla a Q)Q^T - R'(\nabla a)] : G = 0, \quad \forall G \in \mathcal{M}_{3 \times 3}, \quad \text{tr}(G) = 0 \quad (4.42)$$

Gracias al Lema 4.2, existe $\lambda = \lambda(\nabla a, Q) \in \mathbb{R}$ tal que

$$QR'(Q^T \nabla a Q)Q^T = R'(\nabla a) + \lambda(\nabla a, Q)I \quad (4.43)$$

tomando trazas en ambos miembros, se sigue

$$\lambda(\nabla a, Q) \equiv 0$$

Finalmente

$$QR'(Q^T \nabla a Q)Q^T = R'(\nabla a), \quad \forall Q \in O_+^3 \quad (4.44)$$

Por otra parte, sabíamos ya que

$$R'(\nabla a) = \nabla a^{-T} \tilde{R}'(C) \nabla a^{-1}, \quad C = \nabla a^T \nabla a \quad (4.45)$$

Consecuentemente, de (4.44)-(4.45), se deduce la igualdad

$$\tilde{R}'(C) = Q \tilde{R}'(Q^T C Q) Q^T, \quad \forall Q \in O_+^3 \quad (4.46)$$

La misma expresión se hubiera obtenido para el tensor $\tilde{S}'(C)$ si hubiéramos razonado con la ecuación de la helicidad. Estos resultados pueden agruparse en el

Teorema 4.1 .- *Supongamos que el sistema (4.1)-(4.4) es invariante mediante cambios de sistemas de referencia. Entonces ψ'_q y ψ'_h definidos por (3.33),(3.34) verifican*

$$\psi'_q(C) = \psi'_q(Q^T C Q), \quad \forall Q \in O_+^3 \quad (4.47)$$

$$\psi'_h(C) = \psi'_h(Q^T C Q), \quad \forall Q \in O_+^3 \quad (4.48)$$

Además, si ∇a no es semejante a una matriz de la forma (4.20), entonces los tensores \tilde{R}' y \tilde{S}' verifican

$$\tilde{R}'(C) = Q \tilde{R}'(Q^T C Q) Q^T, \quad \forall Q \in O_+^3 \quad (4.49)$$

$$\tilde{S}'(C) = Q \tilde{S}'(Q^T C Q) Q^T, \quad \forall Q \in O_+^3 \quad (4.50)$$

■
Corolario 4.1 .-Las funciones ψ'_q y ψ'_h dependen solamente de $\frac{h}{q}$ y de los invariantes de C :

$$\psi'_q = \psi'_q \left(i_1(C), i_2(C), \frac{h}{q} \right) \quad (4.51)$$

$$\psi'_h = \psi'_h \left(i_1(C), i_2(C), \frac{h}{q} \right) \quad (4.52)$$

donde

$$i_1(C) = \text{tr}(C), \quad i_2(C) = \text{tr}(\text{Adj}(C)) \quad (4.53)$$

■
Nota 4.1.-El tercer invariante de C no aparece explícitamente en este Corolario, puesto que, en cualquier caso, se ha de tener

$$i_3(C) = \det(C) = 1$$

■
Las igualdades (4.49),(4.50) muestran que $\tilde{R}'(C)$ y $\tilde{S}'(C)$ satisfacen las hipótesis del Teorema de Rivlin-Ericksen ([11]). En consecuencia tenemos el

Corolario 4.2 .-Supongamos que se mantienen las hipótesis del Teorema 4.1. Entonces los tensores \tilde{R}' y \tilde{S}' son de la forma

$$\tilde{R}' \left(C, \frac{h}{q} \right) = \tilde{\rho}_0 \left(i_1, i_2, \frac{h}{q} \right) I + \tilde{\rho}_1 \left(i_1, i_2, \frac{h}{q} \right) C + \tilde{\rho}_2 \left(i_1, i_2, \frac{h}{q} \right) C^2 \quad (4.54)$$

$$\tilde{S}' \left(C, \frac{h}{q} \right) = \tilde{\sigma}_0 \left(i_1, i_2, \frac{h}{q} \right) I + \tilde{\sigma}_1 \left(i_1, i_2, \frac{h}{q} \right) C + \tilde{\sigma}_2 \left(i_1, i_2, \frac{h}{q} \right) C^2 \quad (4.55)$$

donde las $\rho_i, \sigma_i, i = 0, 1, 2$ son funciones escalares.

■
En realidad, nos interesa la estructura de los tensores R' y S' ; de (4.49),(4.50) y el Corolario 4.2, se sigue el

Corolario 4.3 .-En las condiciones del Teorema 4.1 los tensores R' y S' son de la forma

$$R' \left(\bar{C}, \frac{h}{q} \right) = \rho'_0 \left(i_1, i_2, \frac{h}{q} \right) I + \rho'_1 \left(i_1, i_2, \frac{h}{q} \right) \bar{C} + \rho'_2 \left(i_1, i_2, \frac{h}{q} \right) \bar{C}^2 \quad (4.56)$$

$$S' \left(\bar{C}, \frac{h}{q} \right) = \sigma'_0 \left(i_1, i_2, \frac{h}{q} \right) I + \sigma'_1 \left(i_1, i_2, \frac{h}{q} \right) \bar{C} + \sigma'_2 \left(i_1, i_2, \frac{h}{q} \right) \bar{C}^2 \quad (4.57)$$

donde

$$\bar{C} = \nabla a \nabla a^T \quad (4.58)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho'_0 &= \tilde{\rho}_1 + i_2 \tilde{\rho}_0 & \sigma'_0 &= \tilde{\sigma}_1 + i_2 \tilde{\sigma}_0 \\ \rho'_1 &= \tilde{\rho}_2 - i_1 \tilde{\rho}_0 & \sigma'_1 &= \tilde{\sigma}_2 - i_1 \tilde{\sigma}_0 \\ \rho'_2 &= \tilde{\rho}_0 & \sigma'_2 &= \tilde{\sigma}_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.59)$$

■

Nota 4.2.—El Corolario 4.3 prueba que la dependencia de R' y S' respecto de ∇a es a través de $\bar{C} = \nabla a \nabla a^T$ hecho que no era evidente “a priori”.

■

Veamos ahora cómo la supuesta restricción sobre la matriz ∇a puede ser eliminada (hasta ahora ∇a no puede ser semejante a una matriz de la forma (4.20)).

Teorema 4.2. —Supongamos que el sistema (4.1)-(4.9) es invariante mediante cambios de sistema de referencia. Entonces los tensores R' y S' son de la forma

$$R' \left(\bar{C}, \frac{h}{q} \right) = \rho'_0 \left(i_1, i_2, \frac{h}{q} \right) I + \rho'_1 \left(i_1, i_2, \frac{h}{q} \right) \bar{C} + \rho'_2 \left(i_1, i_2, \frac{h}{q} \right) \bar{C}^2 \quad (4.60)$$

$$S' \left(\bar{C}, \frac{h}{q} \right) = \sigma'_0 \left(i_1, i_2, \frac{h}{q} \right) I + \sigma'_1 \left(i_1, i_2, \frac{h}{q} \right) \bar{C} + \sigma'_2 \left(i_1, i_2, \frac{h}{q} \right) \bar{C}^2 \quad (4.61)$$

para $\bar{C} = \nabla a \nabla a^T$, $\det(\nabla a) = 1$.

Demostración.—Basta probar estas igualdades en el caso en que ∇a sea semejante a una matriz de la forma (4.20).

Sea $\phi(B) = \tilde{R}'(B^T B)$, $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$, $\det(B) = 1$ de forma que

$$\phi(B) = \phi(D) \quad \text{si } B^T B = D^T D \quad (4.62)$$

De (4.45), tenemos

$$R'(B) = B^{-T} \phi(B) B^{-1} = B^{-T} \phi(D) B^{-1} \quad (4.63)$$

Esta última expresión nos permite relacionar $R'(B)$ con $R'(D)$ mediante la igualdad

$$R'(B) = B^{-T} D^T R'(D) D B^{-1}, \quad \text{si } B^T B = D^T D \quad (4.64)$$

Elijamos, en particular, como B y D las matrices

$$B = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

se trata de comprobar que (4.60) es válida para $\nabla a = B$.

Como $B^T B = D^T D$ y $R'(D)$ puede calcularse mediante (4.60), tenemos

$$\begin{aligned} R'(B) &= B^{-T} D^T \left[\rho'_0(i_1, i_2) I + \rho'_1(i_1, i_2) D D^T + \rho'_2(i_1, i_2) (D D^T)^2 \right] D B^{-1} \\ &= B^{-T} \left[\rho'_0(i_1, i_2) D^T D + \rho'_1(i_1, i_2) (D^T D)^2 + \rho'_2(i_1, i_2) (D^T D)^3 \right] B^{-1} \\ &= B^{-T} \left[\rho'_0(i_1, i_2) B^T B + \rho'_1(i_1, i_2) (B^T B)^2 + \rho'_2(i_1, i_2) (B^T B)^3 \right] B^{-1} \\ &= \rho'_0(i_1, i_2) I + \rho'_1(i_1, i_2) B B^T + \rho'_2(i_1, i_2) (B B^T)^2 \end{aligned}$$

lo que nos dice que (4.60) también se verifica (nótese que $i_1(B B^T) = i_1(D D^T)$, $i_2(B B^T) = i_2(D D^T)$).

De igual modo se razonaría para deducir (4.61).

■

4.2 Cálculo de flujos medios bidimensionales

En esta Sección vamos a estudiar el modelo M.P.P. en el caso de un campo medio de velocidades de la forma

$$u(x, t) = \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2, t) \\ u_2(x_1, x_2, t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

Las coordenadas Lagrangianas, según (4.66), vienen dadas por

$$a(x, t) = \begin{pmatrix} a_1(x_1, x_2, t) \\ a_2(x_1, x_2, t) \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

y, por tanto, la matriz $C = \nabla a^T \nabla a$ es de la forma

$$C = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

donde b, c y d son funciones de x_1, x_2 y t que verifican

$$bd - c^2 = 1, \quad b > 0, \quad d > 0 \text{ en } \Omega \times]0, T[\quad (4.69)$$

La primera consecuencia que se deduce de (4.67), (4.68) es que C sólo posee un invariante (independiente y no constante):

$$i_1 = b + d + 1 \quad (i_1 = i_2, \quad i_3 = 1) \quad (4.70)$$

Esta propiedad es fundamental: nos permite utilizar las propiedades relativas a flujos de campos medios unidimensionales, estudiadas en el Capítulo 3, en el cálculo de flujos bidimensionales de la forma (4.66).

Sean

$$\nabla a = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & & 0 \\ \hline - & - & - & + \\ 0 & & 0 & | \\ & & & 1 \end{array} \right), \quad M_2^T M_2 = \begin{pmatrix} b & c \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

de manera que

$$(M_2 M_2^T)^2 = (i_1 - 1) M_2 M_2^T - I \quad (4.72)$$

Como $\bar{C} = \nabla a \nabla a^T$, se tiene

$$\bar{C}^2 = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & (M_2^T M_2)^2 & & \\ & & & 0 \\ \hline - & - & - & + \\ 0 & & 0 & | \\ & & & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & (i_1 - 1) M_2 M_2^T - I & & \\ & & & 0 \\ \hline - & - & - & + \\ 0 & & 0 & | \\ & & & 1 \end{array} \right) \quad (4.73)$$

El Teorema 4.2, junto con (4.72), nos permite escribir R' en la forma

$$R' = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & (\rho'_0 - \rho'_2)I + (\rho'_1 + \rho'_2(i_1 - 1)) M_2 M_2^T & & \\ & & & 0 \\ \hline - & - & - & + \\ 0 & & 0 & | \\ & & & 1 \end{array} \right)$$

o bien

$$R' = -r'_0 \nabla a \nabla a^T + (\rho'_0 - \rho'_2)I + M' \quad (4.74)$$

donde

$$r'_0 = \tilde{\rho}_0 - \tilde{\rho}_2, \quad M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (3 - i_1)\rho'_2 \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

Finalmente, tendremos

$$\nabla \cdot (qR') = -\nabla \cdot (qr'_0 \nabla a \nabla a^T) + \nabla(\rho'_0 - \rho'_2) \quad (4.76)$$

$$qR' : \nabla u = -qr'_0 \nabla a \nabla a^T : \nabla u \quad (4.77)$$

Estas expresiones demuestran que los cálculos necesarios para el conocimiento del tensor R' se reducen a la tabulación de una sola función: $r'_0 \left(i_1, \frac{h}{q} \right)$ (el término $\nabla(\rho'_0 - \rho'_2)$ queda absorbido por ∇p).

Las funciones $\tilde{\rho}_0$ y $\tilde{\rho}_2$, que definen r'_0 en (4.75), se obtienen a partir de \tilde{R}' , mediante el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} 2\tilde{\rho}_0 + (i_1 - 1)\tilde{\rho}_1 + [(i_1 - 1)^2 - 2]\tilde{\rho}_2 &= \mu_1 & (= \tilde{R}'_{11} + \tilde{R}'_{22}) \\ \tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2 &= \mu_2 & (= \tilde{R}'_{33}) \\ i_1\tilde{\rho}_0 + 3\tilde{\rho}_1 + i_1\tilde{\rho}_2 &= 2 & (= \langle \tilde{w}' C^{-1} \tilde{w}' \rangle) \end{aligned} \right\} \quad (4.78)$$

cuyo determinante $\Delta = -(3 - i_1)^2(1 + i_1)$ se anula para $C = I$.

Si $C \neq I$, se tiene

$$\tilde{\rho}_0 = \frac{2i_1 - \mu_1 - (2i_1 + 1)\mu_2}{(i_1 - 3)(i_1 + 1)} \quad \tilde{\rho}_2 = \frac{2 + \mu_1 - (i_1 + 2)\mu_2}{(i_1 - 3)(i_1 + 1)}$$

de donde

$$r'_0 = \frac{2i_1 - 2 - 2\mu_1 + (1 - i_1)\mu_2}{(i_1 - 3)(i_1 + 1)} \quad (4.79)$$

Evidentemente, los mismos argumentos pueden ser utilizados con S' para deducir una expresión del término $qS' : \nabla u$:

$$qS' : \nabla u = -qs'_0 \nabla a \nabla a^T : \nabla u \quad (4.80)$$

donde

$$s'_0 = \frac{2(i_1 - 1)h/q - 2\zeta_1 + (1 - i_1)\zeta_2}{(i_1 - 3)(i_1 + 1)} \quad (4.81)$$

siendo ahora

$$\zeta_1 = \tilde{S}'_{11} + \tilde{S}'_{22}, \quad \zeta_2 = \tilde{S}'_{33} \quad (4.82)$$

Las fórmulas (4.78) y (4.80) ponen de manifiesto que los cálculos quedan reducidos a la tabulación de las cuatro funciones $\mu_1\left(i_1, \frac{h}{q}\right)$, $\mu_2\left(i_1, \frac{h}{q}\right)$, $\zeta_1\left(i_1, \frac{h}{q}\right)$, $\zeta_2\left(i_1, \frac{h}{q}\right)$; dicha tabulación puede ser efectuada en el caso de flujos unidimensionales, donde la matriz C también poseía un solo invariante no trivial. Será suficiente poner $i_1 = 3 + \alpha^2$ y tabular en función de un solo parámetro: α .

Podemos ver en las Figuras 9-12, 14-15 el comportamiento numérico de μ_1, μ_2, ζ_1 y ζ_2 como funciones de $\frac{h}{q}$ y α . En las Figuras 13, 16 se visualizan las funciones r'_0 y s'_0 respectivamente.

4.2.1 Expresión de las ecuaciones del modelo en función del primer invariante $i_1(C)$

Las relaciones (4.77) y (4.80) constituyen unas expresiones de los términos de cierre $qR' : \nabla u$ y $qS' : \nabla u$ que aparecen en las ecuaciones de la energía cinética y de la helicidad respectivamente. Se observa que el factor $\nabla a \nabla a^T : \nabla u$ es común a las dos expresiones. Este término puede ser expresado en función del primer invariante $i_1(C)$ únicamente. En efecto, sea $\mathbf{i}(x, t) = i_1(C) = \text{tr}(C)$, es decir

$$\mathbf{i}(x, t) = \sum_{1 \leq k, j \leq 3} a_{k,j}^2(x, t), \quad \mathbf{i}(x, 0) = 3 \quad (4.83)$$

por tanto

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} &= 2 \sum_{1 \leq k, j \leq 3} a_{k,j,t} a_{k,j} \\ \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x_l} &= 2 \sum_{1 \leq k, j \leq 3} a_{k,j,l} a_{k,j} \end{aligned} \right\} \quad (4.84)$$

derivando al ecuación verificada por $a(x, t)$, es decir

$$a_{k,t} + \sum_{l=1}^3 u_l a_{k,l} = 0, \quad k = 1, 2, 3$$

se tiene

$$a_{k,j,t} + \sum_{l=1}^3 u_l a_{k,l,j} + \sum_{l=1}^3 u_{l,j} a_{k,l} = 0, \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.85)$$

Multiplicando (4.85) por $a_{k,j}$, y sumando en k,j se obtiene, teniendo en cuenta (4.84), que

$$\mathbf{i}_{,t} + u \nabla \mathbf{i} = -2 \nabla a \nabla a^T : \nabla u \quad (4.86)$$

que es la expresión que buscábamos. Sustituyendo (4.86) en (4.77) y (4.80) se tiene que

$$\left. \begin{aligned} qR' : \nabla u &= \frac{1}{2} q r'_0 \frac{D\mathbf{i}}{Dt} \\ qS' : \nabla u &= \frac{1}{2} q s'_0 \frac{D\mathbf{i}}{Dt} \end{aligned} \right\} \quad (4.87)$$

donde r'_0 y s'_0 están definidos por

$$r'_0 = \frac{2(\mathbf{i} - 1) - 2\mu_1 + (1 - \mathbf{i})\mu_2}{(\mathbf{i} - 3)(\mathbf{i} + 1)} \quad (4.88)$$

$$s'_0 = \frac{2(\mathbf{i} - 1)h/q - 2\zeta_1 + (1 - \mathbf{i})\zeta_2}{(\mathbf{i} - 3)(\mathbf{i} + 1)} \quad (4.89)$$

Las tabulaciones de las funciones μ_1, μ_2, ζ_1 y ζ_2 representadas en las Figuras 9-12,14-15 muestran que éstas poseen, al menos numéricamente, un comportamiento asintótico regular para β suficientemente grande, obteniéndose

$$\mu_1 \simeq \frac{4}{3}, \quad \mu_2 \simeq \frac{2}{3}, \quad \zeta_1 \simeq \frac{4}{3}\beta, \quad \zeta_2 \simeq \frac{2}{3}\beta, \quad (4.90)$$

Al sustituir estas aproximaciones en (5.88)-(4.89), las funciones r'_0 y s'_0 pueden ser modelizadas mediante

$$r'_0 = \frac{4}{3} \frac{1}{1 + \mathbf{i}}, \quad s'_0 = \frac{4}{3} \frac{\beta}{1 + \mathbf{i}} \quad (4.91)$$

Finalmente (4.87) puede escribirse como

$$\left. \begin{aligned} qR' : \nabla u &= \frac{2}{3} \frac{q}{1 + \mathbf{i}} \frac{D\mathbf{i}}{Dt} \\ qS' : \nabla u &= \frac{2}{3} \frac{h}{1 + \mathbf{i}} \frac{D\mathbf{i}}{Dt} \end{aligned} \right\} \quad (4.92)$$

Nota 4.3.—Aunque numéricamente hemos encontrado que (4.92) es válida para grandes valores de β , podemos considerar a (4.92) como una modelización de los términos $qR' : \nabla u$ y $qS' : \nabla u$ válida para todo (α, β) ; esto significa que, teniendo

en cuenta el efecto R' y S' en las ecuaciones, estos tensores están relacionados mediante la ecuación algebraica

$$S = \frac{h}{q} R' \quad (4.93)$$

que ya conociamos para $t = 0$; además, si tomamos trazas en (4.93), se obtiene una identidad cierta para todo $(x, t) \in \Omega \times]0, T[$. Por otro lado, la ecuación (4.93) concuerda con las propiedades deducidas en el Capítulo anterior para los tensores R' y S' . Sin embargo, hasta ahora esta ecuación no ha podido ser demostrada teóricamente.

■

Con (4.92), las ecuaciones de modelo toman la forma

$$\frac{Du}{Dt} + \nabla p + \varepsilon^{2/3} \nabla \cdot (qR') = 0, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad (4.94)$$

$$\frac{Dq}{Dt} + \frac{2}{3} \frac{q}{1+i} \frac{Di}{Dt} + \mu q \psi'_q = 0 \quad (4.95)$$

$$\frac{Dh}{Dt} + \frac{2}{3} \frac{h}{1+i} \frac{Di}{Dt} + \mu q \psi'_h = 0 \quad (4.96)$$

Es interesante observar que de (4.95) se puede deducir una acotación para q . En efecto, como $\psi'_q \geq 0$, se tiene que

$$\frac{1}{q} \frac{Dq}{Dt} + \frac{2}{3} \frac{1}{1+i} \frac{Di}{Dt} \leq 0 \quad (4.97)$$

o bien $\frac{D\mathcal{E}}{Dt} \leq 0$, $\mathcal{E} = \ln [q(1+i)^{2/3}]$, de donde

$$\mathcal{E}(x, t) \leq \mathcal{E}(a(x, t), 0), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times]0, T[$$

finalmente

$$q(x, t) \leq \frac{\sqrt[3]{16q(a(x, t), 0)}}{[1+i(x, t)]^{2/3}}, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times]0, T[\quad (4.98)$$

Nota 4.4.—No podemos deducir lo mismo para $h(x, t)$ puesto que, a priori, no conocemos el signo de ψ'_h .

■

La expresión (4.98) tiene consecuencias muy relevantes; así, con la modelización (4.92), la energía $q(x, t)$ no es un término inestable. Por otro lado,

si $\mu = 0$, las ecuaciones (4.95)-(4.96) pueden ser integradas exactamente, convirtiéndose (4.98) en una igualdad; en tal caso las ecuaciones del modelo se transforman en

$$\begin{aligned}\frac{Du}{Dt} + \nabla p + \varepsilon^{2/3} \nabla \cdot \left(\frac{4}{3} \frac{q}{1+i} \nabla a \nabla a^T \right) &= 0 \\ \nabla \cdot u &= 0 \\ a_{,t} + u \nabla a &= 0\end{aligned}$$

con

$$q(x, t) = \frac{\sqrt[3]{16} q(a(x, t), 0)}{[1 + i(x, t)]^{2/3}}, \quad h(x, t) = \frac{\sqrt[3]{16} h(a(x, t), 0)}{[1 + i(x, t)]^{2/3}}$$

que es la expresión más simple válida para flujos medios bidimensionales de la forma (4.66).

4.3 Conclusión

El número de parámetros en el cálculo de R' , S' , ψ'_q y ψ'_h puede ser reducido sustancialmente al admitir que el sistema de ecuaciones promediadas (4.1)-(4.3) permanece invariante bajo cambios de sistemas de referencia. Estos parámetros son funciones de $i_1 = \text{tr}(C)$ e $i_2 = \text{tr}(\text{Adj}(C))$.

En el caso de flujos medios 1-D, se tiene $i_1 = i_2$ (i.e. un solo invariante).

Para flujos 2-D de la forma (4.66) también se verifica $i_1 = i_2$; esta propiedad nos permite relacionar los cálculos efectuados en 1-D a la simulación 2-D.

Los términos donde aparecen los tensores de Reynolds en las ecuaciones promediadas adoptan una forma compacta:

$$\begin{aligned}\nabla p + \varepsilon^{2/3} \nabla \cdot (qR') &= \nabla p' - \varepsilon^{2/3} \nabla \cdot (qr'_0 \nabla a \nabla a^T) \\ qR' : \nabla u &= -qr'_0 \nabla a \nabla a^T : \nabla u \\ qS' : \nabla u &= -qs'_0 \nabla a \nabla a^T : \nabla u\end{aligned}$$

Aquí, hemos utilizado la notación

$$\begin{aligned}p' &= p + (\rho'_0 - \rho'_2) \varepsilon^{2/3} \\ r'_0 &= \frac{2i_1 - 2 - 2\mu_1 + (1 - i_1)\mu_2}{(i_1 - 3)(i_1 + 1)}\end{aligned}$$

$$s'_0 = \frac{2(i_1 - 1)h/q - 2\zeta_1 + (1 - i_1)\zeta_2}{(i_1 - 3)(i_1 + 1)}$$

A su vez, μ_1, μ_2, ζ_1 y ζ_2 son funciones de α y $\frac{h}{q}$ previamente tabuladas.

Estas relaciones muestran como la hipótesis de cierre de Reynolds (0.22) es parcialmente correcta, ya que hemos encontrado una dependencia explícita con respecto a $\nabla a \nabla a^T$.

Las expresiones de los tensores R' y S' , en función del primer invariante de $\nabla a \nabla a^T$ (i) conducen a expresiones simples del modelo, pudiéndose integrar las ecuaciones de q y h en algunos casos (Sección 4.2.1).

Capítulo 5

Resolución numérica del problema canónico en micro-estructura: tabulación de los términos de cierre del modelo

En este último Capítulo, presentamos la resolución numérica del problema en micro-estructura estacionario (3.4); ésta es necesaria para la tabulación de los tensores R' , S' y las funciones ψ'_q y ψ'_h .

Naturalmente, los cálculos se realizan en función de los parámetros α (definido en (3.3)) y $\beta = \frac{h}{q}$, i.e. consideraremos matrices C de la forma (3.2).

El método para la resolución numérica de (3.1) es una generalización del utilizado en [2,15]. En éstos, se partía de una hipótesis de independencia de la solución respecto de la helicidad, i.e. se suponía $\beta = 0$. Las técnicas utilizadas son algunas de las más utilizadas en Análisis Numérico para la resolución de problemas no lineales: formulación mínimos cuadrados, control óptimo, penalización de las restricciones, discretización mediante el Método de los Elementos Finitos, minimización por algoritmos de Gradiente Conjugado, resolución de los sistemas lineales mediante Transformada Rápida de Fourier, etc.

En el Capítulo 2 vimos que el problema en micro-estructura poseía una infinidad de soluciones. Estábamos interesados en encontrar sólo aquellas que verificasen determinadas simetrías, descritas en la Sección 2.4. La aproximación

numérica de la fluctuación canónica normalizada \tilde{w}' , construida mediante nuestro método de resolución, verifica tales simetrías (Teorema 5.3). Esta propiedad ha quedado también demostrada numéricamente como prueban las diferentes tabulaciones de R' , S' , ψ'_q y ψ'_h .

5.1 Resolución numérica mediante un método de mínimos cuadrados y penalización

Con objeto de abreviar la escritura, notaremos en lo que sigue w por \tilde{w}' y π por π' .

Recordemos que el problema en micro-estructura estacionario viene dado por

$$\left. \begin{aligned} (w \cdot \nabla_v) w + C \nabla_v \pi &= 0, \quad \nabla_v \cdot w = 0 \quad \text{en } Y =] - \pi, \pi[^3 \\ \langle w \rangle &= 0, \quad \langle \pi \rangle = 0, \quad (w, \pi) \text{ } Y \text{ - periódicas} \\ \frac{1}{2} \langle w C^{-1} w \rangle &= 1 \\ \langle (\nabla a^{-T} w) \cdot (\nabla a \nabla_v) \times (\nabla a^{-T} w) \rangle &= \beta \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

donde

$$\nabla a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \nabla a^T \nabla a = \begin{pmatrix} 1 + \alpha^2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se trata de hallar una aproximación de w , solución de (5.1), para algunos valores de los parámetros α y β .

El método numérico utilizado en la resolución de (5.1) combina la técnica Mínimos Cuadrados funcionales, para tratar la ecuación diferencial (5.1a), con las técnicas de Penalización, para la restricción asociada a la helicidad (5.1d).

5.1.1 Descripción del Método

Si la fluctuación canónica normalizada w , solución de (5.1), es suficientemente regular, entonces w puede ser caracterizada como solución de un problema de optimización. En efecto, consideremos el problema de control óptimo

$$\min_{w \in W \setminus \{0\}} J(w) = J_0(w) + J_1(w) \quad (5.2)$$

donde

$$J_1(w) = K \left| \frac{\langle (\nabla a^{-T} w) \cdot (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} w) \rangle}{\langle w C^{-1} w \rangle} - \frac{\beta}{2} \right|^2, \quad K > 0 \quad (5.3)$$

$$J_0(w) = E \left(\frac{w}{\sqrt{\langle w C^{-1} w \rangle}} \right) \quad (5.4)$$

$$E(w) = \int_Y \nabla_y \epsilon(w) : \nabla_y \epsilon(w) dy \quad (5.5)$$

Aquí, $\epsilon(w)$ es la solución de

$$\begin{cases} -\Delta_y \epsilon = \nabla_y \cdot (w \otimes w) + C \nabla_y \pi(w) & \text{en } Y \\ \epsilon \text{ } Y\text{-periódica, } \frac{\partial \epsilon}{\partial n} \Big|_{\Gamma^+} + \frac{\partial \epsilon}{\partial n} \Big|_{\Gamma^-} = 0, \quad \langle \epsilon \rangle = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

y, a su vez, $\pi = \pi(w)$ es la solución de

$$\begin{cases} -\nabla_y \cdot (C \nabla_y \pi) = \nabla_y \cdot [(w \cdot \nabla_y) w] & \text{en } Y \\ \pi \text{ } Y\text{-periódica, } \frac{\partial \pi}{\partial n} \Big|_{\Gamma^+} + \frac{\partial \pi}{\partial n} \Big|_{\Gamma^-} = 0, \quad \langle \pi \rangle = 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

En (5.6) y (5.7) Γ^+ y Γ^- son caras opuestas de Y .

El espacio W está definido por

$$W = \{w \in H^2(Y), w, \nabla_y w \text{ periódicas, } \langle w \rangle = 0\} \quad (5.8)$$

Nota 5.1.—Los problemas (5.6) y (5.7) cuyas soluciones son respectivamente ϵ y π , son del tipo

$$-\nabla_y \cdot (A(y) \nabla_y u(y)) = f(y) \quad \text{en } Y =]-\pi, \pi[^N$$

$$u \text{ periódica, } \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma^+} + \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma^-} = 0$$

$$\langle u \rangle = 0$$

donde $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{N \times N}$, es simétrica definida positiva.

Este problema tiene solución única en el espacio (véase [7])

$$H_{p,0}^1(Y) = \{u \in H^1(Y), \quad u \text{ periódica en } Y, \quad \langle u \rangle = 0\}$$

siempre y cuando el segundo miembro $f \in L^2(Y)$ satisfaga la condición de compatibilidad

$$\int_Y f(y) dy = 0$$

En nuestro caso, esta condición se satisface debido a la supuesta regularidad de w . En efecto, si $w \in W$, entonces $(w \cdot \nabla_y) w \in H^1(Y)$ (pues $Y \subset \mathbb{R}^3$ implica $H^2(Y) \subset C^0(\bar{Y})$); por la periodicidad de $(w \cdot \nabla_y) w$ se tiene

$$\int_Y \nabla_y \cdot [(w \cdot \nabla_y) w] dy = \int_{\partial Y} (w \cdot \nabla_y) w \cdot n d\Gamma = 0$$

Del mismo modo

$$\int_Y [\nabla_y \cdot (w \otimes w) + \nabla_y \pi] = 0$$

■

La equivalencia entre los problemas (5.1) y (5.2) queda establecida por el

Teorema 5.1 .-Sea (w, π) una solución de (5.1) tal que $w \in W$.

Entonces

$$J(w) = 0$$

(i.e. w es un mínimo absoluto de J).

Recíprocamente, si $w \in W \setminus \{0\}$ es tal que $J(w) = 0$ y π es la solución de (5.7), entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(\lambda w, \lambda^2 \pi)$ verifica (5.1).

Demostración.-(\Rightarrow) Supongamos que (w, π) verifica (5.1). De (5.1c), (5.1d) se sigue inmediatamente que $w \neq 0$, y $J_1(w) = 0$.

Por otro lado, si $w \in H^2(Y)$ y $\nabla_y w$ es periódica, entonces tomando divergencias en (5.1a) se tiene (5.7) y como $\nabla_y \cdot w = 0$ se deduce que

$$\nabla_y \cdot (w \otimes w) = (w \cdot \nabla_y) w \tag{5.9}$$

luego $\epsilon = 0$ y $J_0(w) = 0$.

(\Leftarrow) Supongamos ahora que $w \in W \setminus \{0\}$ y $J(w) = 0$, es decir

$$J_0(w) = 0, \quad J_1(w) = 0 \tag{5.10}$$

Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\bar{w} \in W \setminus \{0\}$ dados por

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \langle w C^{-1} w \rangle}}, \quad \bar{w} = \lambda w \quad (5.11)$$

de manera que

$$\frac{1}{2} \langle \bar{w} C^{-1} \bar{w} \rangle = 1 \quad (5.12)$$

Como J_0 y J_1 son homogéneos de grado cero, i.e.

$$J_0(\mu w) = J_0(w), \quad J_1(\mu w) = J_1(w) \quad \forall \mu \in \mathbb{R}_+, w \in W \setminus \{0\} \quad (5.13)$$

se tiene que

$$J_0(\bar{w}), \quad J_1(\bar{w}) = 0 \quad (5.14)$$

De (5.14b) y (5.12) se sigue que

$$\langle (\nabla a^{-T} \bar{w}) \cdot (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} \bar{w}) \rangle = \beta \quad (5.15)$$

que es la condición (5.1d).

Solo queda probar que la ecuación diferencial (5.1a) es satisfecha por $(\bar{w}, \bar{\pi})$ donde $\bar{\pi}$ la solución de (5.7).

Como $J_0(\bar{w}) = 0$, necesariamente es $\epsilon = 0$ y, consecuentemente $(\bar{w}, \bar{\pi})$ verifica

$$\nabla_y \cdot (\bar{w} \otimes \bar{w}) + C \nabla_y \bar{\pi} = 0 \quad \text{en } Y \quad (5.16)$$

$$- \nabla_y \cdot (C \nabla_y \bar{\pi}) = \nabla_y \cdot [(\bar{w} \cdot \nabla_y) \bar{w}] \quad \text{en } Y \quad (5.17)$$

Introduciendo el cambio de variables

$$z = \nabla a^{-T} y, \quad w' = \nabla a^{-T} \bar{w}$$

la ecuación (5.16) se escribe

$$\nabla_z \cdot (w' \otimes w') + \nabla_z \bar{\pi} = 0 \quad \text{en } \nabla a^{-T} Y \quad (5.18)$$

mientras que (5.17) adopta la forma

$$- \Delta_z \bar{\pi} = \nabla_z \cdot [(w' \cdot \nabla_z) w'] \quad \text{en } \nabla a^{-T} Y \quad (5.19)$$

Tomando divergencias en (5.18) y comparando con (5.19) se deduce

$$(\nabla_z \cdot w')^2 + w' \nabla_z (\nabla_z \cdot w') = 0$$

Esta última ecuación puede integrarse a lo largo de las líneas características, obteniéndose

$$\nabla_z \cdot w' = 0 \iff \nabla_y \cdot \bar{w} = 0 \quad (5.20)$$

■

Nota 5.2.—Para deducir (5.20) es necesario suponer que w' es ergódica ([1]), esto es, existe una línea característica que rellena densamente el cubo Y .

■

El problema queda transformado, por tanto, en el cálculo de un mínimo absoluto del funcional $J(w)$. Sin embargo, la presencia del “término de normalización” $\langle w C^{-1} w \rangle$ en las definiciones de J_0 y J_1 conduce a una inestabilidad numérica en la resolución del problema. Por esta razón, en la práctica resulta conveniente redefinir las funciones J_0 y J_1 tomando como nuevo término de normalización la norma de w ($\|w\|_{2,Y} = \int_Y |w|^2 dy$). Esto conduce a las expresiones

$$J_0(w) = E \left(\frac{w}{\|w\|_{2,Y}} \right) \quad (5.21)$$

$$J_1(w) = K \left| \frac{\langle (\nabla a^{-T} w) \cdot (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} w) \rangle}{\frac{1}{(2\pi)^3} \|w\|_{2,Y}} - \frac{\beta}{2} \right|^2 \quad (5.22)$$

Ahora, el problema a resolver es:

$$\min_{w \in W \setminus \{0\}} J(w) = J_0(w) + J_1(w) \quad (5.23)$$

Nota 5.3.—Los problemas (5.1) y (5.23) no son equivalentes en el sentido del Teorema 5.1: si $w \in W \setminus \{0\}$ es tal que

$$J(w) = 0, \quad \frac{1}{2} \langle w C^{-1} w \rangle = 1 \quad (5.24)$$

entonces w verifica (5.1a)-(5.1c), pero

$$\langle (\nabla a^{-T} w) \cdot (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} w) \rangle = \frac{\beta}{2} \langle |w|^2 \rangle$$

con lo cual, solo en ciertos casos particulares (por ejemplo $C = I$) los problemas (5.1) y (5.23) son equivalentes.

No obstante, obtendremos una aproximación de la fluctuación $w(\alpha, \beta')$ con $\beta' = \frac{\beta}{2} \langle |w|^2 \rangle$.

Nótese además que para valores pequeños de α es $C \simeq I$ y, en consecuencia, $\beta' \simeq \beta$.

Los resultados numéricos obtenidos dan validez a estas afirmaciones.

■

5.2 Discretización por el Método de los Elementos Finitos

El problema de optimización (5.23) ha sido discretizado mediante el Método de los Elementos Finitos.

Por analogía con la técnica habitual de resolución del problema de Stokes (aproximación por elementos finitos mixtos) utilizaremos dos triangulaciones en el cubo Y : la primera asociada a las velocidades w_i , y la segunda a la presión π .

La triangulación para las velocidades deberá ser más fina que la de la presión. Esto se debe a la necesidad de que se verifique la condición "inf-sup" y de la estimación del error entre la solución exacta y la solución aproximada ([5]).

Sean T_h y $T_{h/2}$ las respectivas triangulaciones para la presión y las velocidades construidas con ayuda de tetraedros. Las coordenadas de los nodos de T_h son de la forma

$$\frac{\pi}{2^p}(i, j, k), \quad i, j, k = 0, 1, \dots, \pm 2^p$$

La triangulación $T_{h/2}$ se contruye a partir de T_h al dividir cada elemento de T_h en 8 tetraedros, cuyos vértices son de la forma

$$\frac{\pi}{2^{p+1}}(i, j, k), \quad i, j, k = 0, 1, \dots, \pm 2^{p+1}$$

Se consideran los espacios de dimensión finita W_h y Q_h definidos por

$$W_h = \left\{ w_h \in (C^0(Y))^3, w_h|_T \in (P^1(T))^3, \forall T \in T_{h/2}, w_h \text{ periódica}, \langle w_h \rangle = 0 \right\} \quad (5.25)$$

$$Q_h = \left\{ q_h \in C^0(Y), q_h|_T \in P^1(T), \forall T \in T_h, q_h \text{ periódica}, \langle q_h \rangle = 0 \right\} \quad (5.26)$$

Aquí, $P^1(T)$ es el espacio de las funciones afines en las variables y_1, y_2, y_3 definidas en T .

Nota 5.4.—En la práctica, las triangulaciones T_h y $T_{h/2}$ han sido construidas de forma que se verifique la siguiente propiedad: “si $w \in (H_{p,0}^1(Y))^3$ es tal que $w(y) = Q^T w(Qy)$, $\forall y \in Y, Q \in \mathcal{M}_Y$, entonces la función $w_h \in W_h$ que interpola a w (i.e. aquella definida por $w_h(a) = w(a)$, $\forall a$ vértice de un elemento de $T_{h/2}$) verifica también $w_h(y) = Q^T w_h(Qy)$, $\forall y \in Y, Q \in \mathcal{M}_Y$ ”. Esto se consigue utilizando triangulaciones simétricas ([15]).

■

Así, W_h y Q_h son subespacios de dimensión finita de $(H_{p,0}^1(Y))^3$ y $H_{p,0}^1(Y)$ respectivamente.

El problema (5.23) puede ser aproximado por

$$\min_{w_h \in W_h \setminus \{0\}} J_h(w_h) = J_{0h}(w_h) + J_1(w_h) \quad (5.27)$$

donde $J_1(w_h)$ está definido por (5.22) y

$$J_{0h}(w_h) = E_h \left(\frac{w_h}{\|w_h\|_{2,Y}} \right)$$

$$E_h(w_h) = \int_Y \nabla_y \epsilon_h(w_h) : \nabla_y \epsilon_h(w_h) dy$$

$$\begin{cases} \int_Y \nabla_y \epsilon_h(w_h) : \nabla_y v_h dy = - \int_Y w_h \otimes w_h : \nabla_y v_h dy + \int_Y C \nabla_y \pi_h v_h dy & \forall v_h \in W_h \\ \epsilon_h(w_h) \in W_h \end{cases} \quad (5.28)$$

$$\begin{cases} \int_Y C \nabla_y \pi_h \nabla_y q_h dy = - \int_Y (w_h \cdot \nabla_y) w_h \nabla_y q_h dy & \forall q_h \in Q_h \\ \pi_h(w_h) \in Q_h \end{cases} \quad (5.29)$$

Nota 5.5.—La minimización (5.27) se realiza en W_h que, como ya hemos indicado, es un subespacio de $(H_{p,0}^1(Y))^3$. Sin embargo, $W_h \not\subset (H_{p,0}^2(Y))^3$.

Esta circunstancia repercute en el cálculo del gradiente de $J_h(w_h)$ que, en este caso, se simplifica; en efecto, “a grosso modo” puede decirse que $\mathcal{D}J_h(w_h)$ es la solución de un problema aproximado asociado al operador

- Δ^2 en $H^2(Y)$,
- Δ en $H^1(Y)$.

5.2.1 Cálculo de $\mathcal{D}J_h(w_h)$

El problema discreto (5.27) ha sido resuelto mediante un algoritmo de Gradiente Conjugado, descrito en la Sección siguiente; ésto hace necesario calcular el gradiente del funcional $J_h(w_h)$ notado, en lo que sigue, por $\mathcal{D}J_h(w_h)$. A continuación, describiremos dicho cálculo. Como se verá, éste se fundamenta en la correcta aplicación de la regla de la cadena y en las técnicas propias de la teoría de control óptimo (introducción del estado adjunto, etc.).

Evidentemente, se tiene

$$\mathcal{D}J_h(w_h) = \mathcal{D}J_{0h}(w_h) + \mathcal{D}J_1(w_h) \quad (5.30)$$

Sean $w_h, v_h \in W_h$. Supongamos $\|w_h\|_{2,Y} = 1$ y sea $H(w_h, v_h)$ la forma bilineal definida por

$$H(w_h, v_h) = \int_Y (\nabla a^{-T} w_h) \cdot (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} v_h) dy, \quad \forall w_h, v_h \in W_h \quad (5.31)$$

El valor de $\mathcal{D}J_1(w_h) v_h$ puede ser entonces expresado en función de $H(.,.)$ mediante la igualdad

$$\begin{aligned} \mathcal{D}J_1(w_h) v_h = & K [2H(w_h, w_h) - \beta] \cdot [H(w_h, v_h) - 2 \left(\int_Y w_h \cdot v_h dy \right) H(w_h, w_h) \\ & + H(v_h, w_h)], \quad \forall w_h, v_h \in W_h, \quad \|w_h\|_{2,Y} = 1 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Por otro lado, el gradiente de $\mathcal{D}J_{0h}(w_h)$ adopta la forma

$$\mathcal{D}J_{0h}(w_h) v_h = \mathcal{D}E_h(w_h) v_h - 4 \left(\int_Y w_h \cdot v_h dy \right) E_h(w_h), \quad \forall w_h, v_h \in W_h, \quad \|w_h\|_{2,Y} = 1 \quad (5.33)$$

Para deducir (5.33), se ha aplicado la fórmula de Euler al funcional $E_h(w_h)$:

$$E_h(\lambda w_h) = \lambda^4 E_h(w_h) \Rightarrow \mathcal{D}E_h(w_h) w_h = 4E_h(w_h)$$

Queda tan solo por conocer la expresión de $\mathcal{D}E_h(w_h) v_h$. Diferenciando las expresiones (5.28) y (5.29), que intervienen en la definición de $E_h(w_h)$, obtenemos:

$$\mathcal{D}E_h(w_h) v_h = 2 \int_Y \nabla_y \epsilon_h(w_h) : \nabla_y \mathcal{D}\epsilon_h(w_h) v_h dy \quad (5.34)$$

donde, a su vez, $\mathcal{D}\epsilon_h(w_h) v_h \in W_h$ está caracterizado por ser la solución de

$$\int_Y \nabla_y \mathcal{D}\epsilon(w_h) v_h : \nabla_y u_h dy = - \int_Y (v_h \otimes w_h + w_h \otimes v_h) : \nabla_y u_h dy$$

$$+ \int_Y C \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{D}\pi_h(w_h) v_h \cdot u_h dy, \quad \forall u_h \in W_h \quad (5.35)$$

y $\mathcal{D}\pi_h(w_h) v_h \in Q_h$ es la solución de

$$\int_Y C \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{D}\pi_h(w_h) v_h \cdot \nabla_{\mathbf{y}} q_h dy = - \int_Y [(w_h \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) v_h + (v_h \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) w_h] \nabla_{\mathbf{y}} q_h dy, \quad \forall q_h \in Q_h \quad (5.36)$$

Podemos hacer desaparecer $\mathcal{D}\pi_h(w_h)$ introduciendo el estado adjunto $\Phi_h \in Q_h$, solución del problema

$$\int_Y C \nabla_{\mathbf{y}} \Phi_h \cdot \nabla_{\mathbf{y}} q_h dy = - \int_Y C \nabla_{\mathbf{y}} q_h \cdot \epsilon_h(w_h) dy, \quad \forall q_h \in Q_h \quad (5.37)$$

En efecto, al sustituir en (5.36) q_h por Φ_h y en (5.37) q_h por $\mathcal{D}\pi_h(w_h) v_h$, obtenemos:

$$\int_Y C \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{D}\pi_h(w_h) v_h \cdot \epsilon_h(w_h) dy = \int_Y [(w_h \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) v_h + (v_h \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) w_h] \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \Phi_h dy \quad (5.38)$$

Finalmente, las expresiones (5.34), (5.35) y (5.38) conducen a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}E_h(w_h) v_h &= \\ &= 2 \left\{ - \int_Y (v_h \otimes w_h + w_h \otimes v_h) : \nabla_{\mathbf{y}} \epsilon_h(w_h) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_Y [(w_h \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) v_h + (v_h \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) w_h] \nabla_{\mathbf{y}} \Phi_h dy \right\}, \quad \forall w_h, v_h \in W_h \quad (5.39) \end{aligned}$$

donde $\epsilon_h(w_h)$ viene dado por (5.28) y Φ_h por (5.37).

Llamemos $G_h(w_h) \in W_h$ al gradiente $\mathcal{D}J_h(w_h)$ (en $H^1(Y)$), es decir:

$$\int_Y \nabla_{\mathbf{y}} G_h : \nabla_{\mathbf{y}} v_h dy = \mathcal{D}J_h(w_h) v_h, \quad \forall v_h \in W_h$$

Obtenemos, a partir de (5.32), (5.33) y (5.39) que $G_h(w_h) \in W_h$ es la solución de

$$\begin{aligned} \int_Y \nabla_{\mathbf{y}} G_h : \nabla_{\mathbf{y}} v_h dy &= K [2H(w_h, w_h) - \beta] \cdot [H(w_h, v_h) - 2 \left(\int_Y w_h \cdot v_h dy \right) H(w_h, w_h) \\ &\quad + H(v_h, w_h)] + 2 \int_Y [(w_h \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) v_h + (v_h \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) w_h] \nabla_{\mathbf{y}} \Phi_h \\ &\quad - \int_Y (v_h \otimes w_h + w_h \otimes v_h) : \nabla_{\mathbf{y}} \epsilon_h(w_h) dy \\ &\quad - 4 \left(\int_Y w_h \cdot v_h dy \right) E_h(w_h), \quad \forall w_h, v_h \in W_h, \quad \|w_h\|_{2,Y} = 1 \quad (5.40) \end{aligned}$$

donde $H(.,.)$, Φ_h y ϵ_h están definidos, respectivamente, por (5.31), (5.37) y (5.28).

Nota 5.6.—Para el cálculo de $E_h(w_h)$ es preciso resolver 4 sistemas de ecuaciones lineales obtenidos a partir de dos problemas con condiciones periódicas: los que verifican las 3 componentes de $\epsilon_h(w_h)$ y la presión $\pi_h(w_h)$; para calcular $G_h(w_h)$ se necesita, además, resolver 4 sistemas: el relativo al estado adjunto Φ_h y los asociados a las 3 componentes de G_h . Por tanto, para cada w_h , tenemos que resolver 8 sistemas lineales para $G_h(w_h)$; debido al carácter periódico de las incógnitas, estos sistemas pueden ser resueltos mediante la Transformada Rápida de Fourier discreta; pero esto solo es posible si las dos triangulaciones de Y son regulares. Por otra parte, necesitamos trabajar con dos triangulaciones simétricas, con el fin de reproducir las simetrías descritas en la Sección 2.4 en la aproximación (w_h, π_h) . Esto nos lleva a hacer uso de dos tipos de triangulaciones de Y : triangulaciones regulares, que permiten resolver los sistemas lineales por el algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier, y triangulaciones simétricas, que conducen a “buenas” propiedades para (w_h, π_h) .

Todos estos aspectos ya fueron discutidos en [15], donde quedan analizados con mayor detalle.

■

5.2.2 Algoritmo de Gradiente Conjugado

La sucesión minimizante $\{w_h^{(n)}\}_{n \geq 1} \subset W_h$ para la resolución de (5.27) ha sido generada mediante un algoritmo de Gradiente Conjugado del tipo Fletcher-Reeves, con proyección en cada etapa sobre la bola unidad de $L^2(Y)$.

Su descripción es como sigue:

Etapas(0) : Inicialización

Elegir $w_h^{(0)} \in W_h$, $\|w_h\|_{2,Y} = 1$, $M \in \mathbf{N}$ (número de iteraciones), $\delta \in \mathbf{R}^+$ (precisión deseada en el test de parada).

Tomar $\gamma^{(-1)} = 1$, $P_h^{(-1)} = 0$

Para $m = 0, 1, \dots, M$

Etapas(1) : Calcular

$$\begin{aligned} \pi_h^{(m)}, & \text{ solución de (5.29) con } w_h = w_h^{(m)}, \\ \epsilon_h^{(m)}, & \text{ solución de (5.28) con } \pi_h = \pi_h^{(m)}, \end{aligned}$$

$$\Phi_h^{(m)}, \text{ solución de (5.37) con } \epsilon_h = \epsilon_h^{(m)},$$

$$G_h^{(m)}, \text{ solución de (5.40) con } w_h = w_h^{(m)}, \Phi_h = \Phi_h^{(m)}, \epsilon_h = \epsilon_h^{(m)}.$$

Etapa(2) : Cálculo de la nueva dirección de descenso.

Evaluar $\gamma^{(m)} = |G_h^{(m)}|^2$ y definir la nueva dirección de descenso $P_h^{(m)}$ como

$$P_h^{(m)} = -G_h^{(m)} + \frac{\gamma^{(m)}}{\gamma^{(m-1)}} P_h^{(m-1)}$$

Etapa(3) : Cálculo del paso óptimo.

- Si $\gamma^{(m)} \leq \delta$, parada, $w_h^{(m)}$ es una aproximación a la solución.
- Si $\gamma^{(m)} > \delta$, calcular $\rho^{(m)}$ solución del problema de optimización unidimensional

$$\min_{\rho > 0} J_h(w_h^{(m)} + \rho P_h^{(m)})$$

Etapa(4) : Nueva iteración.

Definir

$$\bar{w}_h^{(m+1)} = w_h^{(m)} + \rho^{(m)} P_h^{(m)}$$

Normalización:

$$w_h^{(m+1)} = \frac{\bar{w}_h^{(m+1)}}{\|\bar{w}_h^{(m+1)}\|_{2,Y}}$$

Volver a la etapa (1).

La proyección o normalización efectuada en la etapa (4) no es inherente a los algoritmos usuales de descenso. Dado que $J_h(\bar{w}_h^{(m+1)}) = J_h(w_h^{(m+1)})$, la sucesión generada no afecta al carácter minimizante de la misma.

Debido a que el problema inicial (5.1) posee una infinidad de soluciones regulares, el funcional J posee infinitos mínimos. A efectos prácticos, esto significa que la "bondad" de la aproximación obtenida con el algoritmo descrito precedentemente dependerá de la inicialización considerada $w_h^{(0)}$. Ahora bien, busquemos soluciones que verifiquen las simetrías descritas en la Sección 2.4. Veremos a continuación que estas propiedades estarán aseguradas para toda la sucesión $\{w_h^{(m)}\}_{m=1}^M$, a condición de que $w_h^{(0)}$ las verifique.

Teorema 5.2 .-Sean $Q \in \mathcal{M}_Y$, $\det(Q) = 1$, y $w_h^{(0)} \in W_h$, $\|w_h^{(0)}\|_{2,Y} = 1$ tales que

$$QCQ^T = C \quad (5.41)$$

$$w_h^{(0)}(y) = Qw_h^{(0)}(Q^T y) \quad \forall y \in Y \quad (5.42)$$

Entonces la sucesión $\{w_h^{(m)}\}_{m=1}^M \subset W_h$, generada mediante el algoritmo de Gradiente Conjugado con proyección, descrito en las etapas (0)-(4), es tal que

$$w_h^{(m)}(y) = Qw_h^{(m)}(Q^T y) \quad \forall y \in Y, \quad m = 0, 1, \dots, M \quad (5.43)$$

En particular, la aproximación a la solución $w_h^{(M)}$ reproduce las simetrías teóricas de la solución exacta si éstas son satisfechas por la inicialización $w_h^{(0)}$.

Demostración.—Veamos que para $n = 1$ se verifica (5.43).

Por definición

$$w_h^{(1)} = \frac{w_h^{(0)} + \rho^{(0)} P_h^{(0)}}{\|w_h^{(0)} + \rho^{(0)} P_h^{(0)}\|_{2,Y}}$$

con lo que es suficiente probar que $G_h^{(0)} = -P_h^{(0)}$ verifica (5.43). Puesto que $G_h^{(0)} \in W_h$ es la solución de

$$\int_Y \nabla_y G_h^{(0)} : \nabla_y v_h dy = \mathcal{D}J_{0h}(w_h^{(0)}) v_h + \mathcal{D}J_1(w_h^{(0)}) v_h, \quad \forall v_h \in W_h \quad (5.44)$$

bastará comprobar que $\bar{G}_h^{(0)} \in W_h$, definida por

$$\bar{G}_h^{(0)}(y) = QG_h^{(0)}(Q^T y) \quad \forall y \in Y \quad (5.45)$$

también verifica (5.44), de donde, por unicidad de solución, se tendrá

$$\bar{G}_h^{(0)} = G_h^{(0)} \quad (5.46)$$

Sea $\bar{v}_h \in W_h$ definida por $\bar{v}_h(y) = Qv_h(Q^T y)$, $y \in Y$; para $y' = Q^T y$, tenemos las relaciones

$$\nabla_{y'} G_h^{(0)}(y') = Q^T \nabla_y \bar{G}_h^{(0)}(y) Q \quad (5.47)$$

En consecuencia,

$$\int_Y \nabla_{y'} G_h^{(0)} : \nabla_{y'} v_h dy' = \int_Y \nabla_y \bar{G}_h^{(0)} : \nabla_y \bar{v}_h dy, \quad \forall v_h \in W_h \quad (5.48)$$

Luego (5.46) estará probado si comprobamos las relaciones siguientes

$$\mathcal{D}J_{0h}(w_h^{(0)})v_h = \mathcal{D}J_{0h}(w_h^{(0)})\bar{v}_h, \quad \forall v_h \in W_h \quad (5.49)$$

$$\mathcal{D}J_1(w_h^{(0)})v_h = \mathcal{D}J_1(w_h^{(0)})\bar{v}_h, \quad \forall v_h \in W_h \quad (5.50)$$

Etapa (1): Demostración de (5.50)

La expresión de $\mathcal{D}J_1(w_h^{(0)})v_h$ se calcula según la fórmula (5.32). Es trivial que (5.50) estará probado si se comprueba que

$$\begin{aligned} H(w_h^{(0)}, v_h) &= H(w_h^{(0)}, \bar{v}_h) \\ H(v_h, w_h^{(0)}) &= H(\bar{v}_h, w_h^{(0)}) \\ \int_Y w_h^{(0)} \cdot v_h \, dy &= \int_Y w_h^{(0)} \cdot \bar{v}_h \, dy \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} H(w_h, v_h) &= \int_Y (\nabla a^{-T} w_h) \cdot (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} v_h) \\ &= \int_Y w_h \cdot (C \nabla_y) \times v_h \, dy, \quad \forall w_h, v_h \in W_h \end{aligned}$$

Si se definen $\bar{w}_h(y) = Qw_h(Q^T y)$, $\bar{C} = Q C Q^T$ es fácil comprobar que

$$H(w_h, v_h) = \det(Q) \int_Y \bar{w}_h \cdot (\bar{C} \nabla_y) \times \bar{v}_h \, dy \quad (5.51)$$

Sustituyendo en (5.52) w_h por $w_h^{(0)}$ y usando (5.41), (5.42), se obtiene

$$H(w_h^{(0)}, v_h) = H(w_h^{(0)}, \bar{v}_h)$$

Razonando del mismo modo, se deduce

$$H(v_h, w_h^{(0)}) = H(\bar{v}_h, w_h^{(0)})$$

Finalmente

$$\int_Y w_h \cdot v_h \, dy = \int_Y \bar{w}_h \cdot \bar{v}_h \, dy$$

y, en consecuencia

$$\int_Y w_h^{(0)} \cdot v_h \, dy = \int_Y w_h^{(0)} \cdot \bar{v}_h \, dy$$

con lo que (5.50) queda demostrado.

Etapa (2): Demostración de (5.49)

De las expresiones (5.33) y (5.39) se deduce que es suficiente comprobar que

$$\mathcal{D}E(w_h^{(0)})v_h = \mathcal{D}E(w_h^{(0)})\bar{v}_h, \quad \forall w_h \in W_h \quad (5.52)$$

Para ello, veamos que se verifican las relaciones siguientes:

$$\pi_h^{(0)}(y) = \pi_h^{(0)}(Q^T y), \quad \forall y \in Y \quad (5.53)$$

$$\Phi_h^{(0)}(y) = \Phi_h^{(0)}(Q^T y), \quad \forall y \in Y \quad (5.54)$$

$$\epsilon_h^{(0)}(y) = Q\epsilon_h^{(0)}(Q^T y), \quad \forall y \in Y \quad (5.55)$$

Con tal objeto, introducimos las funciones $\bar{\pi}_h^{(0)}, \bar{\Phi}_h^{(0)} \in Q_h$ y $\bar{\epsilon}_h^{(0)} \in W_h$ definidas por

$$\bar{\pi}_h^{(0)}(y) = \pi_h^{(0)}(Q^T y) \quad (5.56)$$

$$\bar{\Phi}_h^{(0)}(y) = \Phi_h^{(0)}(Q^T y) \quad (5.57)$$

$$\bar{\epsilon}_h^{(0)}(y) = Q\epsilon_h^{(0)}(Q^T y) \quad (5.58)$$

Claramente, $\nabla_y \bar{\pi}_h^{(0)}(y) = Q\nabla_{y'} \pi_h^{(0)}(y')$, $y' = Q^T y$, de donde

$$\begin{aligned} \int_Y C\nabla_y \bar{\pi}_h^{(0)} \cdot \nabla_y q_h dy &= \int_Y CQ^T \nabla_{y'} \pi_h^{(0)} \cdot Q^T \nabla_y \bar{q}_h dy \\ &= \int_Y QCQ^T \nabla_{y'} \pi_h^{(0)} \cdot \nabla_{y'} \bar{q}_h dy, \quad \bar{q}_h(y) = q_h(Q^T y) \end{aligned}$$

Si se verifican las hipótesis (5.41)-(5.42), se deduce que

$$\int_Y C\nabla_y \bar{\pi}_h^{(0)} \cdot \nabla_y \bar{q}_h dy = - \int_Y (w_h^{(0)} \cdot \nabla_y) w_h^{(0)} \cdot \nabla_y \bar{q}_h dy, \quad \forall \bar{q}_h \in Q_h \quad (5.59)$$

que conduce directamente a (5.54).

La ecuación para $\epsilon_h^{(0)}$ (5.28) se transforma ahora en

$$\begin{aligned} \int_Y \nabla_y \bar{\epsilon}_h^{(0)} : \nabla_y \bar{v}_h dy &= \\ &- \int_Y [Qw_h^{(0)}(Q^T y)] \otimes [Qw_h^{(0)}(Q^T y)] : Q\nabla_{y'} \bar{v}_h(Q^T y) Q^T dy \\ &+ \int_Y Q^T CQ \nabla_{y'} \pi_h^{(0)} \cdot \bar{v}_h dy \\ &= - \int_Y w_h^{(0)} \otimes w_h^{(0)} : \nabla_y \bar{v}_h dy + \int_Y C\nabla_y \pi_h^{(0)} \cdot \bar{v}_h dy, \quad \forall \bar{v}_h \in W_h \end{aligned}$$

y se obtiene (5.56).

Finalmente, la ecuación para $\Phi_h^{(0)}$ pasa a ser

$$\int_Y C \nabla_y \bar{\Phi}_h^{(0)} \cdot \nabla_y \bar{q}_h \, dy = - \int_Y C \nabla_y \bar{q}_h \cdot \epsilon_h^{(0)} \, dy, \quad \forall \bar{q}_h \in Q_h,$$

de donde se deduce (5.55).

Veamos ahora que la fórmula (5.53) es cierta. En efecto, de la expresión de $\mathcal{D}E(w_h)v_h$, dada por (5.39), y de las relaciones (5.54)-(5.56) se deduce que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}E(w_h^{(0)})v_h &= \\ & -2 \int_Y [Q \bar{v}_h \otimes w_h^{(0)} Q^T + Q w_h^{(0)} \otimes \bar{v}_h Q^T] : Q \nabla_y \epsilon_h^{(0)} Q^T \\ & + 2 \int_Y Q [(\bar{v}_h \cdot \nabla_y) w_h^{(0)} + (w_h^{(0)} \cdot \nabla_y) \bar{v}_h] \cdot Q \nabla_y \Phi_h^{(0)} \\ & = -2 \int_Y [\bar{v}_h \otimes w_h^{(0)} + w_h^{(0)} \otimes \bar{v}_h] : \nabla_y \epsilon_h^{(0)} \\ & + 2 \int_Y [(\bar{v}_h \cdot \nabla_y) w_h^{(0)} + (w_h^{(0)} \cdot \nabla_y) \bar{v}_h] \cdot \nabla_y \Phi_h^{(0)} \\ & = \mathcal{D}E(w_h^{(0)})\bar{v}_h \end{aligned}$$

que es la fórmula (5.53).

Podemos, por tanto, concluir que $w_h^{(1)}$ verifica la tesis del Teorema.

Evidentemente, razonando por inducción, obtenemos (5.43). Obsérvese que ahora $P_h^{(m)} = -G_h^{(m)} + \frac{\gamma^{(m)}}{\gamma^{(m-1)}} P_h^{(m-1)}$ y, como inicialmente se escoge $P_h^{(-1)} = 0$ (que obviamente verifica (5.43)), se tiene que $P_h^{(m)}$ satisface (5.43) si y solo si $G_h^{(m)}$ verifica la misma propiedad.

■

El Teorema 5.3 justifica el método utilizado para calcular una solución aproximada del problema (5.1) ya que, aunque la aproximación $w_h^{(M)}$ dependa de la inicialización tomada, ésta seguirá conservando las simetrías de $w_h^{(0)}$.

En la práctica, la inicialización ha sido tomada de manera que satisfaga (5.42) para toda $Q \in \mathcal{M}_Y$, con $\det(Q) = 1$. En otras palabras, $w_h^{(0)}$ verifica

$$w_h^{(0)}(y) = Q_1 w_h^{(0)}(Q_1^T y) = Q_2 w_h^{(0)}(Q_2^T y) = Q_3 w_h^{(0)}(Q_3^T y), \quad \forall y \in Y \quad (5.60)$$

donde Q_1, Q_2, Q_3 son las matrices

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

generadoras del grupo de las matrices de \mathcal{M}_Y con determinante unidad.

Los resultados numéricos obtenidos concuerdan con la conclusión del Teorema 5.3, en el sentido de que, en la tabulaciones de los tensores de cierre, encontramos las simetrías teóricas deducidas en la Sección 2.4.1.

5.3 Resultados numéricos

5.3.1 Aproximación numérica de los términos de cierre

Sea $w_h = w_h^{(M)} \in W_h$ la aproximación a la fluctuación canónica normalizada obtenida mediante el algoritmo de Gradiente Conjugado de la Sección anterior. Nuestro interés se centra ahora en calcular, a partir de w_h , las cantidades que definen los términos de cierre

$$R' = \nabla a^{-T} \langle w_h \otimes w_h \rangle \nabla a^{-1}$$

$$S' = 2 \nabla a^{-T} \langle w_h \otimes r_h \rangle \nabla a^{-1}$$

$$\psi'_q = \langle (\nabla a \nabla_y) (\nabla a^{-T} w_h) : (\nabla a \nabla_y) (\nabla a^{-T} w_h) \rangle$$

$$\psi'_h = 2 \langle (\nabla a \nabla_y) (\nabla a^{-T} w_h) : (\nabla a \nabla_y) (\nabla a^{-T} r_h) \rangle$$

siendo $r_h = \nabla a^T (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} w_h)$.

Como $w_h \in W_h$, se tiene por definición que $w_h|_T \in (P^1(T))^3$, $\forall T \in T_{h/2}$; en consecuencia,

$$\begin{aligned} \langle w_h \otimes w_h \rangle_{ij} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Y (w_h)_i (w_h)_j dy = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{T \in T_{h/2}} \int_T (w_h)_i (w_h)_j dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{T \in T_{h/2}} \left(\sum_{\substack{1 \leq k, l \leq 4 \\ k \neq l}} (w_h)_i(a_k^T) (w_h)_j(a_l^T) \frac{|T|}{20} + \sum_{k=1}^4 [(w_h)_i(a_k^T)]^2 \frac{|T|}{10} \right) \end{aligned} \quad (5.61)$$

donde los puntos $a_1^T, a_2^T, a_3^T, a_4^T$ son los cuatro vértices del tetraedro T .

Teniendo en cuenta que $r_h|_T \in (P^0(T))^3$, $\forall T \in T_{h/2}$, se deduce que

$$\begin{aligned} \langle w_h \otimes r_h \rangle_{ij} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Y (w_h)_i (r_h)_j dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{T \in T_{h/2}} (r_h)_j|_T \int_T (w_h)_i dy \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{T \in T_{h/2}} (r_h)_j|_T \sum_{k=1}^4 \frac{|T|}{4} (w_h)_i (a_k^T) \quad (5.62)$$

Del mismo modo

$$\begin{aligned} \psi'_q &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Y (\nabla_a \nabla_v) (\nabla_a^{-T} w_h) : (\nabla_a \nabla_v) (\nabla_a^{-T} w_h) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{T \in T_{h/2}} \int_T \sum_{1 \leq i, j \leq 3} [(\nabla_a \nabla_v) (\nabla_a^{-T} w_h)]_{ij}^2 dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{T \in T_{h/2}} \sum_{1 \leq i, j \leq 3} [(\nabla_a \nabla_v) (\nabla_a^{-T} w_h)]_{ij}^2 |T| \end{aligned} \quad (5.63)$$

Ahora bien, el cálculo directo de ψ'_h es imposible, ya que $r_h \notin C^0(Y)$ y $\frac{\partial(r_h)_i}{\partial y_j} \notin L^2(Y)$. Esta dificultad puede ser soslayada construyendo una "pseudo-proyección" de $\frac{\partial(r_h)_i}{\partial y_j}$ sobre el espacio $V_h = \{v_h \in C^0(Y), v_h|_T \in P^1(T), \forall T \in T_{h/2}\}$ como sigue:

Sea $f_h \in L^2(Y)$ tal que $f_h|_T \in P^0(T)$; se construye $\frac{\partial_h f_h}{\partial y_i} \in V_h$ como la solución del problema

$$\int_Y \frac{\partial_h f_h}{\partial y_i} \phi_h dy = - \int_Y f_h \frac{\partial \phi_h}{\partial y_i} dy + \int_{\partial[-\pi, \pi]^3} f_h \phi_h n_i d\Gamma, \quad \forall \phi_h \in V_h \quad (5.64)$$

Sea $\{\phi_h^j\}_{j=1}^L$ la base canónica de V_h . Cada ϕ_h^j está definida por las relaciones:

$$\phi_h^j(a_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq L = \dim(V_h),$$

siendo $\{a_i\}_{i=1}^L$ el conjunto de los vértices de los tetraedros de $T_{h/2}$.

Entonces, la expresión (5.64) también se escribe en la forma

$$\int_Y \frac{\partial_h f_h}{\partial y_i} \phi_h^j dy = - \int_Y f_h \frac{\partial \phi_h^j}{\partial y_i} dy + \int_{\partial[-\pi, \pi]^3} f_h \phi_h^j n_i d\Gamma, \quad j = 1, \dots, L \quad (5.65)$$

La integral del primer miembro puede ser aproximada mediante una fórmula de cuadratura, exacta para polinomios de grado 1 ("mass-lumping"):

$$\int_Y \frac{\partial_h f_h}{\partial y_i} \phi_h dy \cong \sum_{\substack{T \in T_{h/2} \\ a_j \in T}} \frac{|T|}{4} \frac{\partial_h f_h}{\partial y_i}(a_j) \quad (5.66)$$

Así, $\frac{\partial_h f_h}{\partial y_i}$ es la función de V_h cuyo valor en el nodo j -ésimo viene dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial_h f_h}{\partial y_i}(a_j) = & \frac{4}{\sum_{T \ni a_j} |T|} \left[- \sum_{T \ni a_j} |T| (f_h|_T) \left(\frac{\partial \phi_h^j}{\partial y_i} \Big|_T \right) \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{T \ni a_j \\ T \cap \partial[-\pi, \pi]^3 \neq \emptyset}} (f_h|_T) \int_{T \cap \partial[-\pi, \pi]^3} \phi_h^j n_i d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (5.67)$$

De este modo, puede ser construida la matriz $(\nabla_a \nabla_y) (\nabla_a^{-T} r_h)$, cuyas componentes son funciones de V_h . A partir de ella, es posible calcular un valor aproximado de ψ'_h :

$$\begin{aligned} \psi'_h &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Y (\nabla_a \nabla_y) (\nabla_a^{-T} w_h) : (\nabla_a \nabla_y) (\nabla_a^{-T} r_h) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{T \in T_{h/2}} \int_T \sum_{1 \leq i, j \leq 3} [(\nabla_a \nabla_y) (\nabla_a^{-T} w_h)]_{ij} [(\nabla_a \nabla_y) (\nabla_a^{-T} r_h)]_{ij} dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{T \in T_{h/2}} \sum_{1 \leq i, j \leq 3} [(\nabla_a \nabla_y) (\nabla_a^{-T} w_h)]_{ij} \Big|_T \int_T [(\nabla_a \nabla_y) (\nabla_a^{-T} r_h)]_{ij} dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{T \in T_{h/2}} \sum_{1 \leq i, j \leq 3} [(\nabla_a \nabla_y) (\nabla_a^{-T} w_h)]_{ij} \Big|_T \sum_{k=1}^4 \frac{(\nabla_a \nabla_y) (\nabla_a^{-T} r_h)}{4} \Big|_T |T| \end{aligned} \quad (5.68)$$

Las fórmulas (5.61)-(5.63), (5.68) constituyen las respectivas aproximaciones de los términos de cierre del modelo.

5.3.2 Características de los métodos Control Óptimo, Gradiente Conjugado, Elementos Finitos

A lo largo de la descripción de los algoritmos utilizados en la resolución del problema canónico en micro-estructura han aparecido ciertas constantes: $K > 0$ (constante de penalización), $M \in \mathbf{N}$ (número de iteraciones), $\delta \in \mathbf{R}$ (precisión), etc.

En nuestras experiencias, los valores asignados han sido los siguientes:

La constante de penalización ha sido tomada, en todos los casos, $K = 1$. Esta constante puede ser considerada como un valor de ponderación (peso) entre los

funcionales J_0 y J_1 definidos por (5.21),(5.22). En efecto, si el valor de K es grande en relación a $J_0(w_h^{(0)})$, se obtiene una buena aproximación al valor previsto de la helicidad (parte correspondiente a J_1); sin embargo, esta buena aproximación no será representativa, puesto que la fluctuación aproximada $w_h^{(M)}$ verificará la ecuación diferencial (5.1a) con un error de mayor orden que el cometido en la aproximación de la helicidad.

En el algoritmo del Gradiente Conjugado, se ha tomado como número máximo de iteraciones $M = 20$. Una vez alcanzado se logró un error relativo entre 10^{-3} y 10^{-4} , dependiendo de los valores de α y β (veanse las Figuras 1,2 y 3):

$$\frac{J(w_h^{(20)})}{J(w_h^{(0)})} \simeq 10^{-3}, 10^{-4}$$

La misma $w_h^{(0)}$ inicial ha sido tomada para todos los valores (α, β) . Ésta satisface las simetrías expresadas por (5.60) (ya que, para $\alpha = 0$, se tiene $C = I$). Es fácil construir una función w que verifique (5.60). Para ello, se considera primero cualquier función $\phi_0(y)$ periódica y con media nula en Y . Se define la primera componente de w como

$$w_1(y) = \phi_0(y) + \phi_0(Q_1 y) - \phi_0(Q_4 y) - \phi_0(Q_1 Q_4 y) \\ + \phi_0(Q_5 y) + \phi_0(Q_1 Q_5 y) - \phi_0(Q_4 Q_5 y) - \phi_0(Q_1 Q_4 Q_5 y)$$

donde

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Q_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Q_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A partir de w_1 , se construyen las otras componentes de w , tomando

$$w_2(y_1, y_2, y_3) = -w_1(-y_2, y_1, y_3), \quad y_i \in [-\pi, \pi]$$

$$w_3(y_1, y_2, y_3) = w_1(y_3, y_1, y_2), \quad y_i \in [-\pi, \pi]$$

Finalmente, el valor de p en (5.25)-(5.26) es 4. En consecuencia, la triangulación T_h , relativa a las presiones posee $9 \times 9 \times 9$ nodos, mientras que la triangulación de las velocidades $T_{h/2}$ posee $17 \times 17 \times 17$ nodos. Un sistema de ecuaciones obtenido como discretización de un problema del tipo (5.6) (resp. (5.7)) posee 4096 (resp.

512) incógnitas si se resuelve en $T_{h/2}$ (resp. en T_h); además, la matriz de dicho sistema no es una matriz banda.

Obsérvese que sistemas de este tipo deben ser resueltos varias veces a lo largo de cada una de las iteraciones de Gradiente Conjugado; la elección del número de nodos por dimensión de T_h y $T_{h/2}$ en (5.25)-(5.26), así como el carácter periódico de las incógnitas posibilita el uso de la Transformada Rápida de Fourier como método de resolución de los distintos sistemas lineales que aquí aparecen.

5.3.3 Resultados

Con la elección de los valores de las diversas constantes, descritas en el apartado anterior, hemos implementado un código de resolución del problema de optimización mediante el algoritmo de Gradiente Conjugado de la Sección 5.1.4. Este código fue ejecutado sobre un ordenador vectorial CRAY-1 (aproximadamente 60 veces más rápido que un VAX). El tiempo medio de ejecución por iteración de Gradiente Conjugado fue de unos 100 segundos de CPU, un tiempo realmente alto; por esta razón, la tabulación de R' , S' , ψ'_q y ψ'_h ha sido posible solamente para algunos valores de los parámetros α, β , a saber: $\alpha=0'01$, $\alpha=0'1$, $\alpha=1$, $\beta=0'01$, $\beta=0'1$, $\beta=0'4$, $\beta=0'7$, $\beta=3$, $\beta=7$.

Recordemos que, en lo referente al parámetro β , éstos son valores previstos para el cociente entre la helicidad y la energía cinética.

La Tabla 1 muestra los valores alcanzados por la helicidad de $w_h^{(20)}$ para los distintos valores de α y los previstos de β . Nótese cómo para $\alpha=0'01$ y $\alpha=0'1$ se obtienen buenas aproximaciones a la helicidad, no siendo así para $\alpha=1$; esta situación era de esperar tal y como fue discutida en la Nota 5.3 (se recuerda que

$$\beta' = \frac{1}{2} \langle |w_h^{(20)}|^2 \rangle > \beta)$$

$\alpha=0'01$		$\alpha=0'1$		$\alpha=1$	
β	β'	β	β'	β	β'
0'01	0'0086	0'01	0'0109	0'01	0'03
0'1	0'1007	0'1	0'107	0'1	0'15
0'4	0'4009	0'4	0'3995	—	—
0'7	0'701	0'7	0'698	0'7	0'6827
3'0	3'002	3'0	2'98	3'0	2'498
7'0	6'998	7'0	6'86	7'0	4'456

Tabla 1

Para $\alpha=0'01$, $\beta'=0'4$ hemos obtenido

$$R' = \begin{pmatrix} 0'68498 & 0'21924 & 0'99 \times 10^{-8} \\ 0'21924 & 0'68961 & -0'11 \times 10^{-7} \\ 0'99 \times 10^{-8} & -0'11 \times 10^{-7} & 0'62541 \end{pmatrix}$$

$$S' = 2 \begin{pmatrix} 0'13283 & -0'0402 & -0'35 \times 10^{-8} \\ -0'036 & 0'13211 & 0'35 \times 10^{-8} \\ 0'51 \times 10^{-8} & -0'50 \times 10^{-8} & 0'13560 \end{pmatrix}$$

Prescindiendo de los errores de redondeo, encontramos en R' y S' las propiedades que para estos tensores fueron deducidas en las Proposiciones 3.1 y 3.2. El tensor S' es, teóricamente, simétrico; sin embargo, en este caso tenemos $|S'_{12} - S'_{21}| < 0'005$ (que puede considerarse como una buena aproximación); este pequeño error se debe al hecho de que la aproximación $w_h^{(20)}$ no tiene exactamente divergencia nula.

En todos los casos, las tabulaciones de R' y S' verifican las propiedades mencionadas en las Proposiciones 3.1 y 3.2.

Así, por ejemplo, para $\alpha=1$ y $\beta'=4'456$, se obtuvo

$$R' = \begin{pmatrix} 0'8977 & -0'5930 & -0'19 \times 10^{-7} \\ -0'5930 & 0'4610 & -0'1 \times 10^{-7} \\ -0'19 \times 10^{-7} & -0'1 \times 10^{-7} & 0'6413 \end{pmatrix}$$

$$S' = 2 \begin{pmatrix} 1'1575 & -0'9357 & -0'82 \times 10^{-8} \\ -0'9356 & 0'7542 & -0'13 \times 10^{-7} \\ -0'21 \times 10^{-7} & -0'31 \times 10^{-7} & 2'1275 \end{pmatrix}$$

y para $\alpha = 0, \beta = 0$

$$R' = \begin{pmatrix} 0'66667 & 0'19 \times 10^{-8} & 0'19 \times 10^{-8} \\ 0'19 \times 10^{-8} & 0'66667 & 0'19 \times 10^{-8} \\ 0'19 \times 10^{-8} & 0'19 \times 10^{-8} & 0'66667 \end{pmatrix}$$

$$S' = 2 \begin{pmatrix} 0'11 \times 10^{-14} & -0'17 \times 10^{-4} & 0'17 \times 10^{-4} \\ 0'17 \times 10^{-4} & -0'50 \times 10^{-16} & -0'17 \times 10^{-4} \\ -0'17 \times 10^{-4} & 0'17 \times 10^{-4} & -0'70 \times 10^{-16} \end{pmatrix}$$

Es decir, muy aproximadamente, $R' = \frac{2}{3}I$ y $S' = 0$, como ya sabíamos.

Las Tablas 2-4 muestran las respectivas tabulaciones de los tensores para los distintos valores de α y β' .

$\alpha=0'01$									
β'	R'_{11}	R'_{22}	R'_{33}	R'_{12}	S'_{11}	S'_{22}	S'_{33}	S'_{12}	ψ'_q
0'0086	0'6898	0'6957	0'6144	0'3120	0'0020	0'0028	0'0038	0'0374	9'635
0'1007	0'6737	0'6775	0'6487	0'1906	0'0348	0'0345	0'0314	-0'011	9'321
0'4009	0'6850	0'6896	0'6254	0'2192	0'1328	0'1321	0'1360	-0'402	19'182
0'701	0'6607	0'6628	0'6764	0'0856	0'2268	0'2246	0'2493	-0'117	21'07
3'002	0'7101	0'7152	0'5747	0'2232	0'9960	0'9963	1'01	0'0148	23'73
6'998	0'6664	0'6662	0'6667	-0'016	2'3325	2'3316	2'3343	-0'060	59'50

Tabla 2

$\alpha=0'1$									
β'	R'_{11}	R'_{22}	R'_{33}	R'_{12}	S'_{11}	S'_{22}	S'_{33}	S'_{12}	ψ'_q
0'0109	0'7613	0'9291	0'3096	0'7827	-0'005	-0'002	0'0178	0'0179	7'043
0'107	0'7527	0'8761	0'3711	0'6960	0'0873	0'0579	-0'038	-0'134	7'797
0'3995	0'0509	0'0487	1'900	-0'014	0'1174	0'0995	0'0183	-0'098	5'987
0'698	0'0940	0'0888	1'8172	-0'034	0'2034	0'1774	0'3172	-0'155	8'829
2'98	0'5415	0'5373	0'9211	-0'102	0'8828	0'8636	1'2342	-0'187	20'48
6'86	0'6509	0'6234	0'7257	-0'198	2'2368	2'129	2'5	-0'644	54'18

Tabla 3

$\alpha=1$									
β'	R'_{11}	R'_{22}	R'_{33}	R'_{12}	S'_{11}	S'_{22}	S'_{33}	S'_{12}	ψ'_q
0'03	0'6741	1'0963	0'2296	0'7206	0'0115	0'0051	0'0134	-0'025	11'203
0'15	0'4255	0'5830	0'9915	0'2593	0'3968	-0'340	0'0960	-0'020	11'977
0'6827	0'0606	0'0242	1'9153	-0'032	0'2813	-0'056	0'3414	-0'161	5'410
2'498	0'4329	0'2970	1'33	-0'286	0'8146	0'4577	1'2257	-0'518	9'635
4'456	0'8977	0'4610	0'6413	-0'593	1'5746	0'7542	2'1275	-0'936	21'729

Tabla 4

Se observa que la función ψ'_q posee un crecimiento, al menos, cuadrático en β (Figura 17). Esta propiedad puede demostrarse muy fácilmente. En efecto, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene

$$\begin{aligned} \beta^2 &\leq \langle |\nabla a^{-T} w|^2 \rangle \langle |(\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} w)|^2 \rangle \\ &= 2 \langle |(\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} w)|^2 \rangle \leq c' \psi'_q \end{aligned}$$

luego $\psi'_q \geq c\beta^2$ donde c es una constante que solo depende de α .

La función ψ'_h fue tabulada solo en cinco casos; los resultados son mostrados en la Tabla 5

$\alpha=0'01$		$\alpha=0'1$	
β'	ψ'_h	β'	ψ'_h
0'0121	0'0688	0'1028	0'3154
0'0934	0'1534	3'963	3'965
—	—	6'905	11'106

Tabla 5

Conclusión General

En la presentación de este trabajo, se ha puesto de manifiesto como la Modelización de la Turbulencia es una labor difícil y compleja.

El modelo M.P.P. de Turbulencia, basado en los desarrollos asintóticos de la teoría de la homogenización, constituye un primer intento de cierre del problema de Reynolds.

El sistema de ecuaciones efectivas o promediadas del modelo está formado por cuatro ecuaciones de transporte acopladas para las velocidades medias, la energía cinética turbulenta, la helicidad turbulenta y las coordenadas Lagrangianas inversas, a saber

$$\begin{aligned}
 u_{,t} + u \nabla u + \nabla p + \epsilon^{2/3} \nabla \cdot (qR') &= 0, & \nabla \cdot u &= 0 & \text{en } \Omega \times]0, T[\\
 q_{,t} + u \nabla q + qR' : \nabla u + \mu q \psi'_q &= 0 & & & \text{en } \Omega \times]0, T[\\
 h_{,t} + u \nabla h + qS' : \nabla u + \mu q \psi'_h &= 0 & & & \text{en } \Omega \times]0, T[\\
 a_{,t} + u \nabla a &= 0 & & & \text{en } \Omega \times]0, T[
 \end{aligned}$$

junto con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
 u(x, 0) &= u^0(x) & \text{en } \Omega \\
 q(x, 0) &= \frac{1}{2} \langle |w^0|^2 \rangle & \text{en } \Omega \\
 h(x, 0) &= \langle w^0 \cdot \nabla \times w^0 \rangle & \text{en } \Omega \\
 a(x, 0) &= x & \text{en } \Omega
 \end{aligned}$$

Los términos de cierre R' , S' , ψ'_q y ψ'_h están definidas por

$$R' = \ll w' \otimes w' \gg, \quad S' = 2 \ll w' \otimes r' \gg, \quad r' = (\nabla a \nabla_y) \times w'$$

$$\psi'_q = \ll (\nabla a \nabla_y) w' : (\nabla a \nabla_y) w' \gg, \quad \psi'_h = 2 \ll (\nabla a \nabla_y) w' : (\nabla a \nabla_y) r' \gg$$

donde $w' = \nabla a^{-T} \tilde{w}'$ y \tilde{w}' verifica el Problema canónico en micro-estructura normalizado

$$\tilde{w}'_{,\tau} + (\tilde{w}' \cdot \nabla_y) \tilde{w}' + C \nabla_y \pi' = 0, \quad \nabla_y \cdot \tilde{w}' = 0 \quad \text{en } Y \times Z$$

$$(\tilde{w}', \pi') \quad Y - \text{periódica}, \quad \tilde{w}'(y, 0) = w'_0(y) \quad \text{en } Y$$

$$\langle \tilde{w}' \rangle = 0 \quad \langle \pi' \rangle = 0$$

$$\frac{1}{2} \langle \tilde{w}' C^{-1} \tilde{w}' \rangle = 1$$

$$\langle \tilde{w}' C^{-1} \tilde{r}' \rangle = \frac{h}{q}$$

siendo $Y \times Z =] -\pi, \pi[\times] 0, +\infty[$, $\tilde{r}' = \nabla a^{-T} r'$, $C = \nabla a^T \nabla a$.

Para cerrar el problema, es necesario tabular R', S', ψ'_q y ψ'_h en función de C y $\beta = \frac{h}{q}$, resolviendo el problema canónico para todos los valores de C y β . Aunque esto es imposible de realizar, hemos podido deducir numerosas simplificaciones del problema, e incluso obtener propiedades estructurales para los tensores de cierre R', S', ψ'_q y ψ'_h (Corolario 4.1 y Teorema 4.2):

$$R' \left(\bar{C}, \frac{h}{q} \right) = \rho'_0 \left(i_1, i_2, \frac{h}{q} \right) I + \rho'_1 \left(i_1, i_2, \frac{h}{q} \right) \bar{C} + \rho'_2 \left(i_1, i_2, \frac{h}{q} \right) \bar{C}^2$$

$$S' \left(\bar{C}, \frac{h}{q} \right) = \sigma'_0 \left(i_1, i_2, \frac{h}{q} \right) I + \sigma'_1 \left(i_1, i_2, \frac{h}{q} \right) \bar{C} + \sigma'_2 \left(i_1, i_2, \frac{h}{q} \right) \bar{C}^2$$

$$\psi'_q = \psi'_q \left(i_1(C), i_2(C), \frac{h}{q} \right)$$

$$\psi'_h = \psi'_h \left(i_1(C), i_2(C), \frac{h}{q} \right)$$

donde $\bar{C} = \nabla a \nabla a^T$, $i_1(C) = \text{tr}(C)$, $i_2(C) = \text{tr}(\text{Adj}(C))$.

Estas relaciones prueban que al menos para flujos turbulentos con dos escalas, la hipótesis de cierre de Reynolds es sólo parcialmente correcta, ya que los términos de cierre del modelo dependen explícitamente de $\nabla a \nabla a^T$.

Las funciones $\rho'_0, \rho'_1, \rho'_2, \sigma'_0, \sigma'_1, \sigma'_2, \psi'_q, \psi'_h$ pueden ser tabuladas en función de $i_1(C), i_2(C), \beta$ a partir de la resolución numérica del problema canónico en microestructura.

Para flujos medios bidimensionales podemos hacer desaparecer el término \bar{C}^2 en R' y S' . Además se tiene que $i_1(C) = i_2(C)$; esta circunstancia también ocurre en el caso unidimensional, lo que permite relacionar las tabulaciones de los términos de cierre con el caso 2-D. En la práctica, las tabulaciones han sido realizadas en función de dos parámetros: α, β . En este caso la matriz C correspondiente viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha^2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el caso 2-D, hemos obtenido las relaciones

$$\nabla p + \varepsilon^{2/3} \nabla \cdot (qR') = \nabla p' - \varepsilon^{2/3} \nabla \cdot (qr'_0 \nabla a \nabla a^T)$$

$$qR' : \nabla u = -qr'_0 \nabla a \nabla a^T : \nabla u$$

$$qS' : \nabla u = -qs'_0 \nabla a \nabla a^T : \nabla u$$

donde

$$r'_0 = \frac{2(i_1 - 1) - 2\mu_1 + (1 - i_1)\mu_2}{(i_1 - 3)(i_1 + 1)}$$

$$s'_0 = \frac{2(i_1 - 1)h/q - 2\zeta_1 + (1 - i_1)\zeta_2}{(i_1 - 3)(i_1 + 1)}$$

$$\mu_1 = \tilde{R}'_{11} + \tilde{R}'_{22}, \quad \mu_2 = \tilde{R}'_{33}, \quad \zeta_1 = \tilde{S}'_{11} + \tilde{S}'_{22}, \quad \zeta_2 = \tilde{S}'_{33}, \quad i_1(C) = \text{tr}(C)$$

La función $\mathbf{i} = i_1(C)$ permite expresar los términos $R' : \nabla u$ y $S' : \nabla u$ mediante

$$qR' : \nabla u = \frac{1}{2} qr'_0 \frac{D\mathbf{i}}{Dt}$$

$$qS' : \nabla u = \frac{1}{2} qs'_0 \frac{D\mathbf{i}}{Dt}$$

La observación del comportamiento numérico de las funciones μ_1, μ_2, ζ_1 y ζ_2 para valores de β suficientemente grande nos lleva a proponer la siguiente modelización de las funciones r'_0 y s'_0

$$r'_0 = \frac{4}{3} \frac{1}{1 + \mathbf{i}}, \quad s'_0 = \frac{4}{3} \frac{\beta}{1 + \mathbf{i}}$$

lo que conduce a

$$qR' : \nabla u = \frac{2}{3}q \frac{1}{1+i} \frac{Di}{Dt}$$

$$qS' : \nabla u = \frac{2}{3}h \frac{1}{1+i} \frac{Di}{Dt}$$

Estas relaciones permiten re-escribir las ecuaciones del modelo como

$$\frac{Du}{Dt} + \nabla p + \varepsilon^{2/3} \nabla \cdot \left(\frac{4}{3} \frac{q}{1+i} \nabla a \nabla a^T \right) = 0, \quad \nabla \cdot u = 0$$

$$\frac{Dq}{Dt} + \frac{2}{3}q \frac{1}{1+i} \frac{Di}{Dt} + \mu q \psi'_q = 0$$

$$\frac{Dh}{Dt} + \frac{2}{3}h \frac{1}{1+i} \frac{Di}{Dt} + \mu q \psi'_h = 0$$

Si $\mu = 0$, las ecuaciones de q y h pueden ser integradas exactamente a lo largo de las líneas características (Sección 4.2.1). En todos los casos, se puede deducir una acotación superior para la energía cinética

$$0 \leq q(x, t) \leq \frac{\sqrt[3]{16q(a(x, t), 0)}}{[1 + i(x, t)]^{2/3}}, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times]0, T[$$

y en consecuencia $q(x, t)$, no provocará inestabilidades numéricas.

Las tabulaciones numéricas de los tensores de cierre son satisfactorias. La resolución numérica del problema canónico ha sido capaz de reproducir todas las propiedades obtenidas teóricamente para el caso de flujos bidimensionales.

La tabulación de los términos de cierre para el caso 3-D es mucho más complicada y de difícil resolución.

En cualquier caso, las diversas propiedades obtenidas para los tensores de cierre demuestran que la helicidad no puede crearse si inicialmente ésta no existía, es decir

$$h(x, 0) = 0 \quad \text{en } \Omega \Rightarrow h(x, t) = 0, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times]0, T[$$

Esta importante propiedad justifica el estudio del modelo M.P.P. reducido ($h = 0$, [3,15]).

La siguiente tarea a realizar (inmediata) consiste en resolver el sistema de ecuaciones promediadas del modelo para (u, q, h, a) , con objeto de comprobar el efecto de $h \neq 0$ sobre las demás variables. En el caso $h = 0$ se comprobó ([3,14]) la existencia de interacciones entre las grandes y las pequeñas estructuras.

Finalmente, este análisis deja de ser cierto cerca de la frontera, donde no existe separación de escalas. Sin embargo, se pueden encontrar condiciones de contornos para (u, q, h) por acoplamiento del flujo medio con la capa logarítmica ([16]).

Figuras

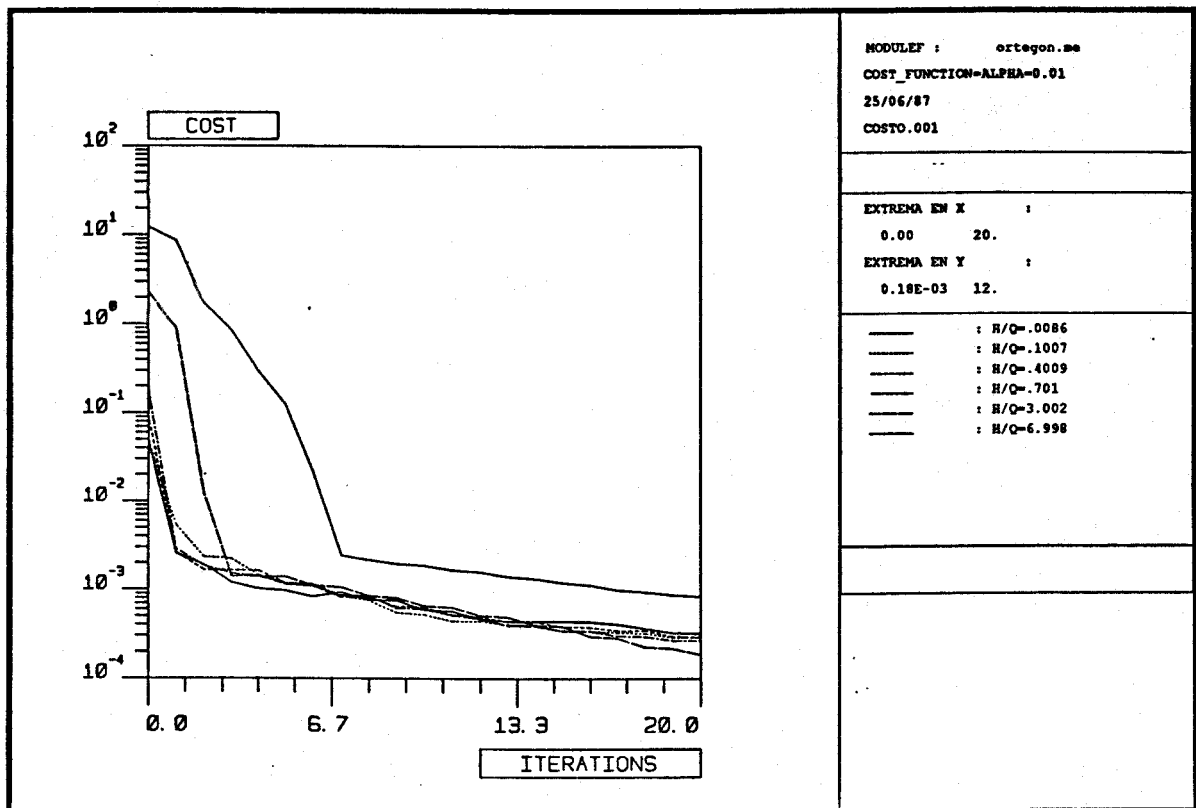


Figura 1.—Descenso de $J_h(w_h)$ para $\alpha = 0.01$. Se han representado las curvas correspondientes a los distintos valores de β penalizados.

Se observa que $J_h(w_h)$ se comporta igual, cualitativamente, en todos los casos. La curva de máximo costo corresponde al máximo valor de β .

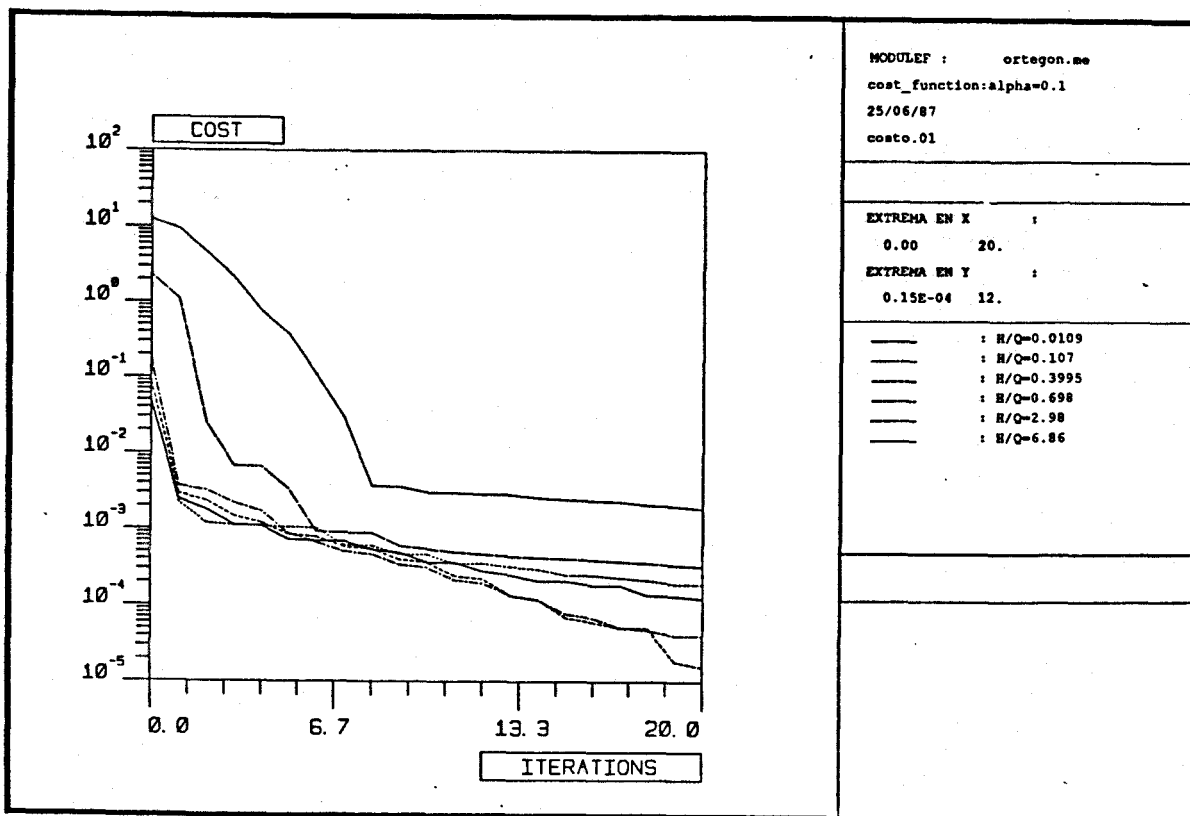


Figura 2.-Idem $\alpha = 0.1$.

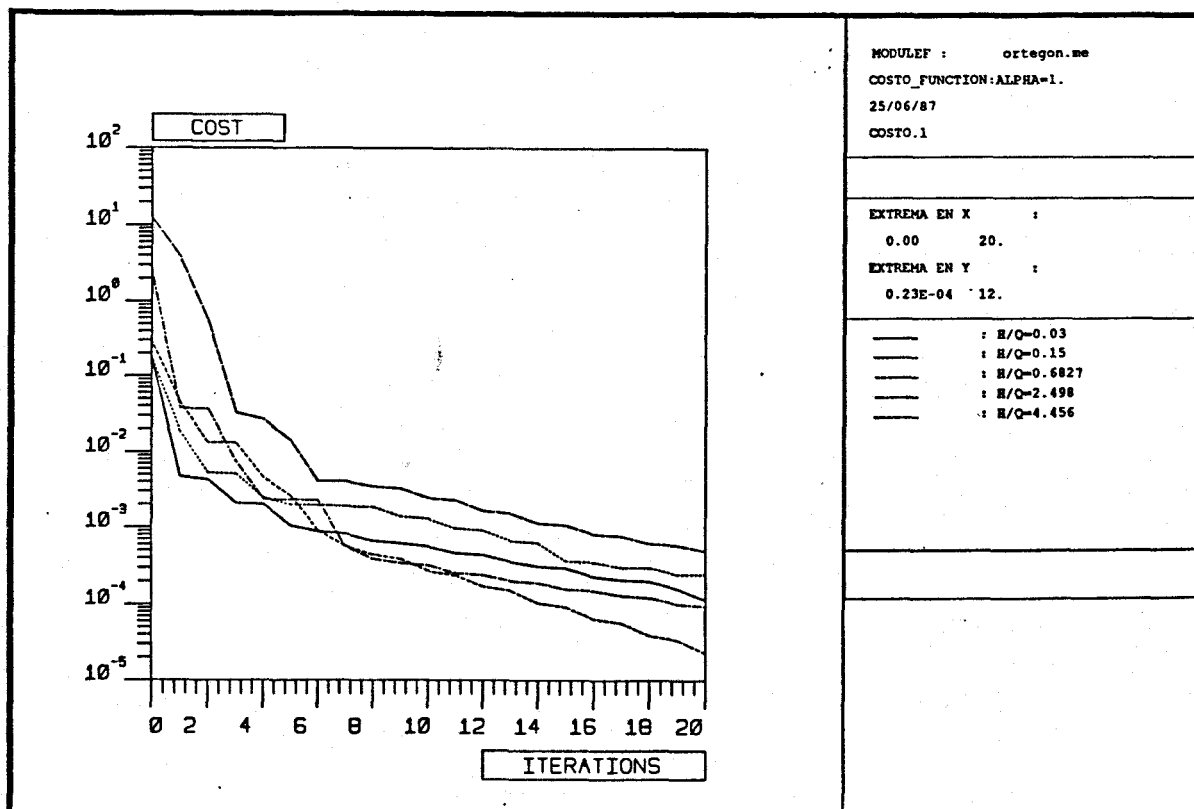


Figura 3.-Idem $\alpha = 1$.

En los tres casos se pone de manifiesto la convergencia a cero de $J_h(w_h^{(m)})$.

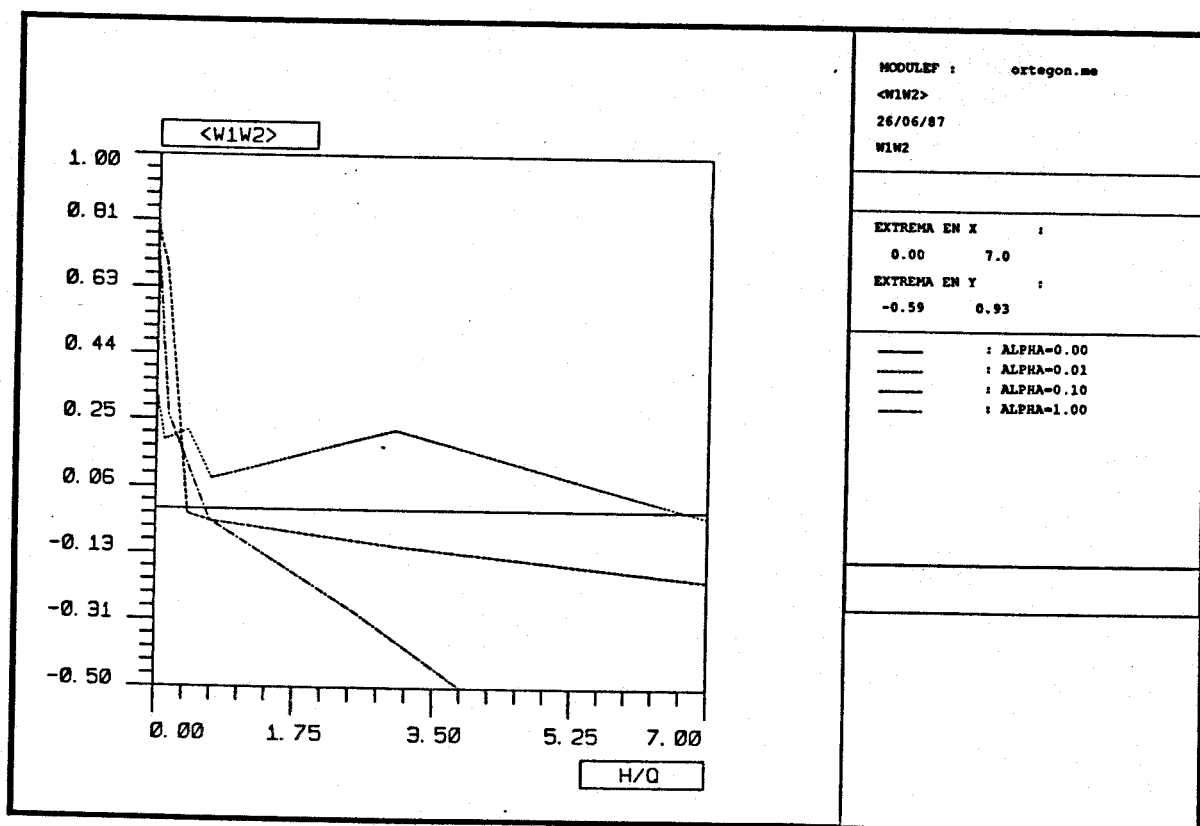
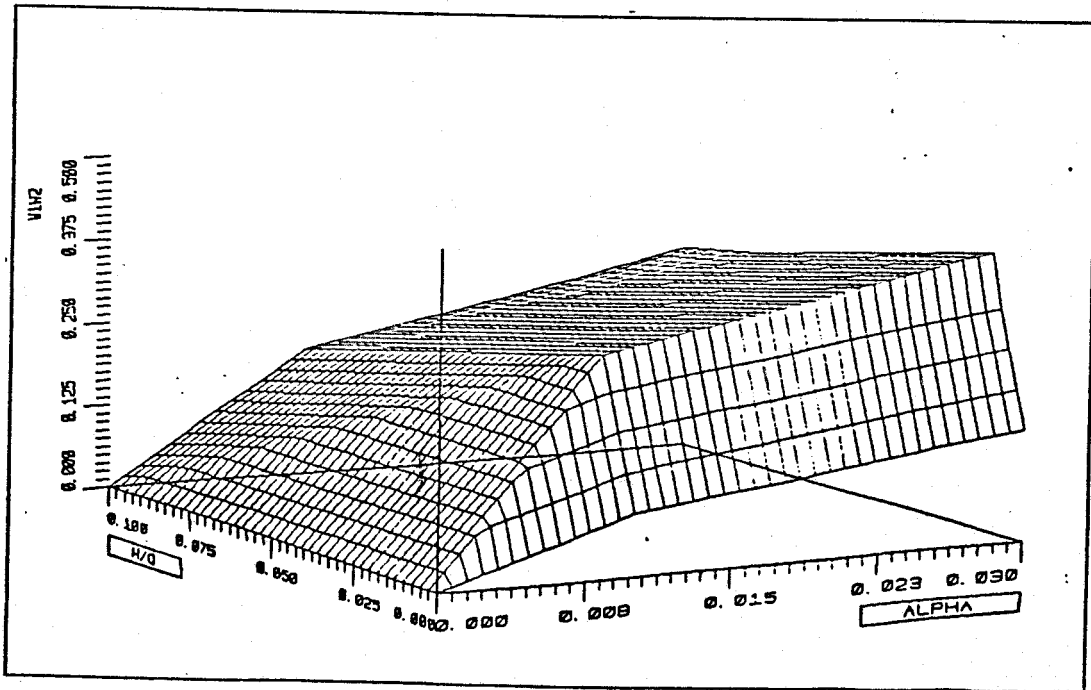
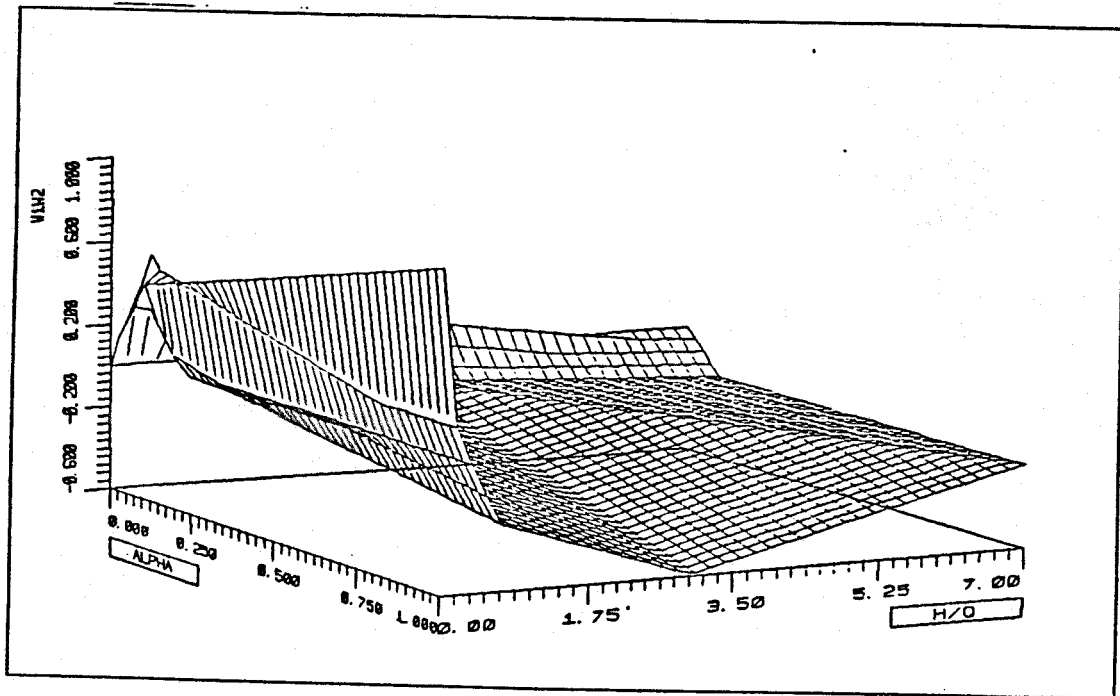


Figura 4.—Representación de las curvas $\beta \rightarrow \langle w_1'w_2' \rangle (\alpha, \beta)$ para $\alpha = 0.01, 0.1, 1$.

La función $\langle w_1'w_2' \rangle$ juega un papel especial en el modelo M.P.P. reducido.

En el modelo M.P.P. completo, esta función es importante, ya que, para flujos medios bidimensionales se tiene, según (4.74), $r_0' = -\frac{1}{\alpha} \langle w_1'w_2' \rangle$, y como demuestra (4.75), 4.77), r_0' es la única función a tabular para conocer R' .

Para $\beta = 0$, se encontró que $\langle w_1'w_2' \rangle (\alpha) > 0$ para $\alpha > 0$; esta característica se repite para valores pequeños de β .



Figuras 5,6.-Perspectivas de $\langle w_1' w_2' \rangle$ en función de (α, β) . Se aprecia que $\langle w_1' w_2' \rangle (\alpha, \beta) > 0$ para $|\alpha| + |\beta|$ suficientemente pequeño.

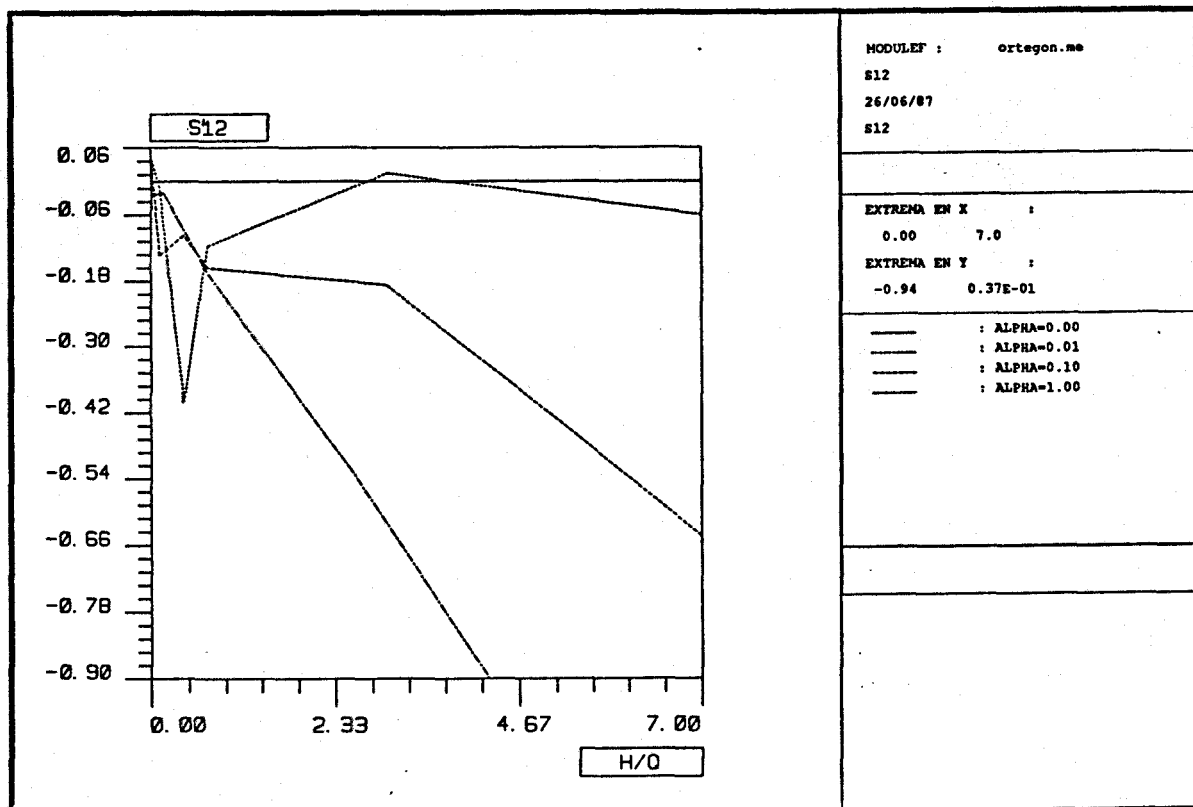


Figura 7.—Representación de las curvas $\beta \rightarrow \langle w'_1 r'_2 \rangle (\alpha, \beta)$ para $\alpha = 0.01, 0.1, 1$.

La función $\langle w'_1 r'_2 \rangle$ juega un papel paralelo a $\langle w'_1 w'_2 \rangle$ en el sentido de que S' está determinada, exclusivamente, a partir de ella en el caso bidimensional, puesto que $s'_0 = -\frac{1}{\alpha} \langle w'_1 r'_2 \rangle$

Aparentemente, el comportamiento de $\langle w'_1 r'_2 \rangle$ es más irregular que el de $\langle w'_1 w'_2 \rangle$; esto puede ser debido a demasiados errores de redondeo en el cálculo.

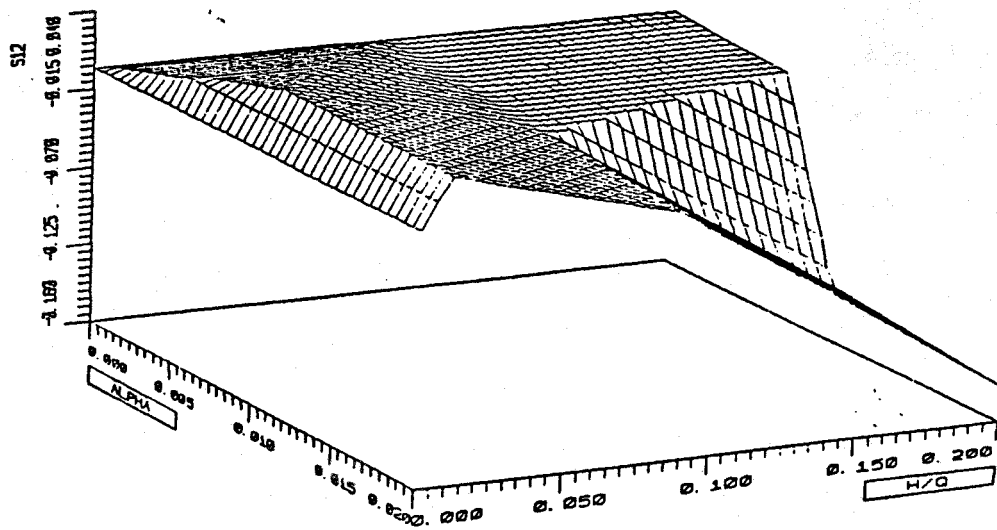


Figura 8.-Visión 3-D de $\langle w_1' r_2' \rangle$ en función de (α, β) .

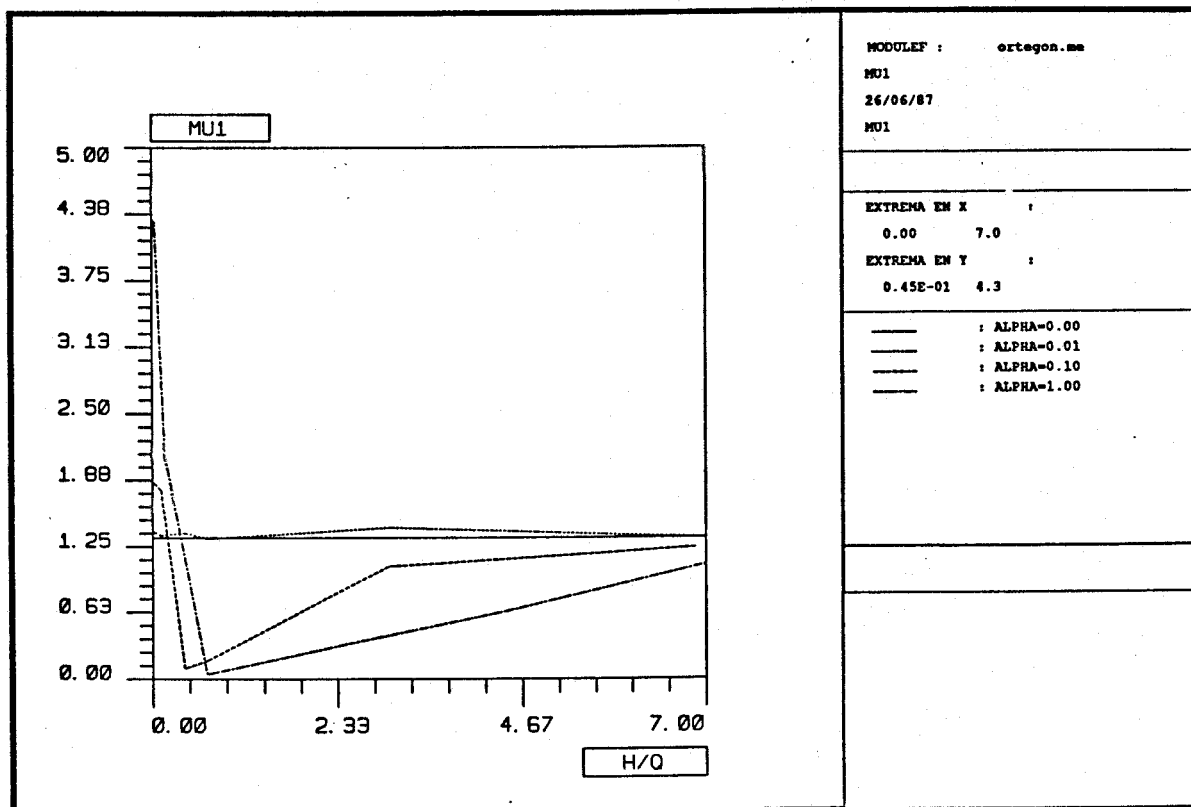


Figura 9.-Función $\mu_1 = \langle \tilde{w}'_1 \tilde{w}'_1 \rangle + \langle \tilde{w}'_2 \tilde{w}'_2 \rangle$.

Para $\alpha = 0$ se tiene $\mu_1(0, \beta) = \frac{4}{3}$ para todo β .

Las tabulaciones realizadas muestran como $\mu_1(\alpha, \beta) \rightarrow \frac{4}{3}$ para β suficientemente grande (teóricamente, esto no ha sido demostrado).

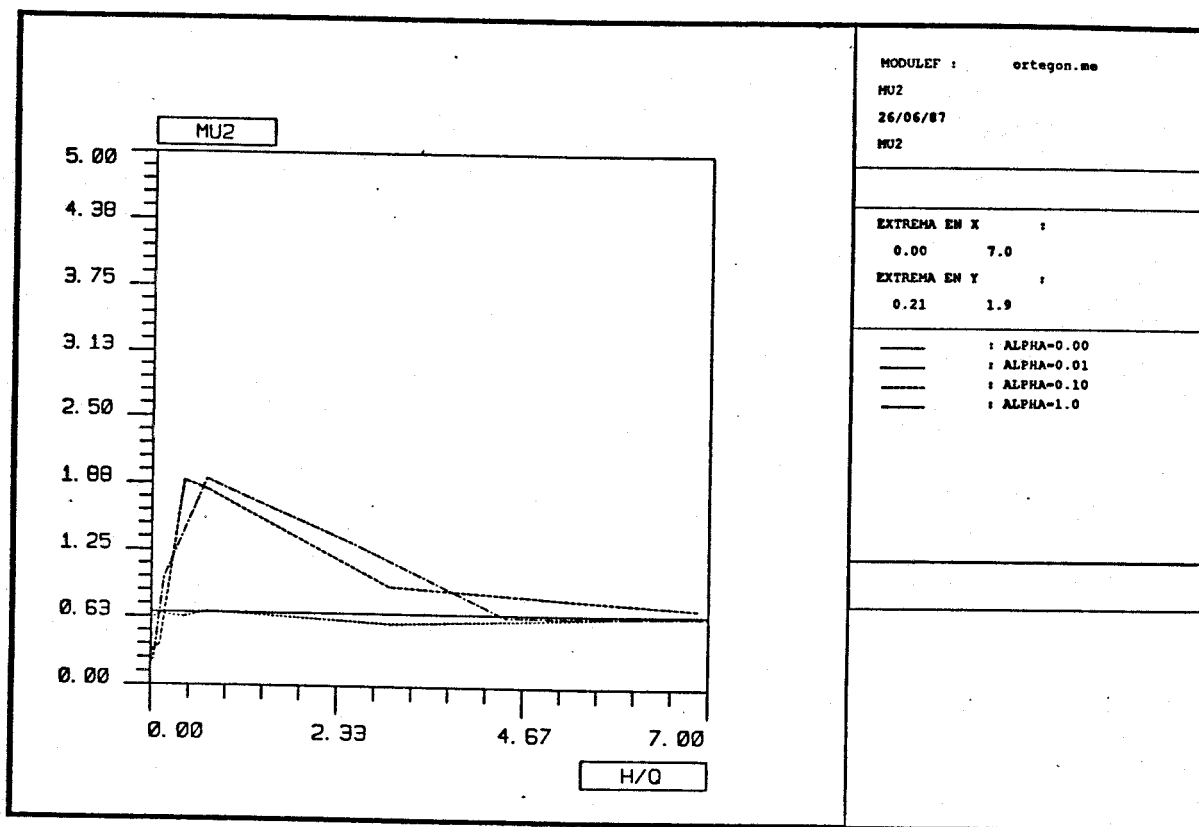
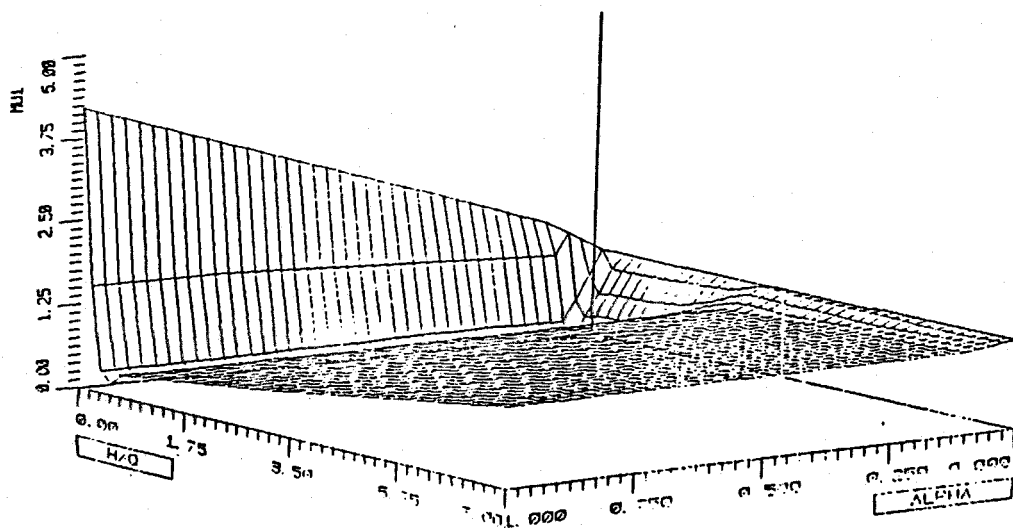
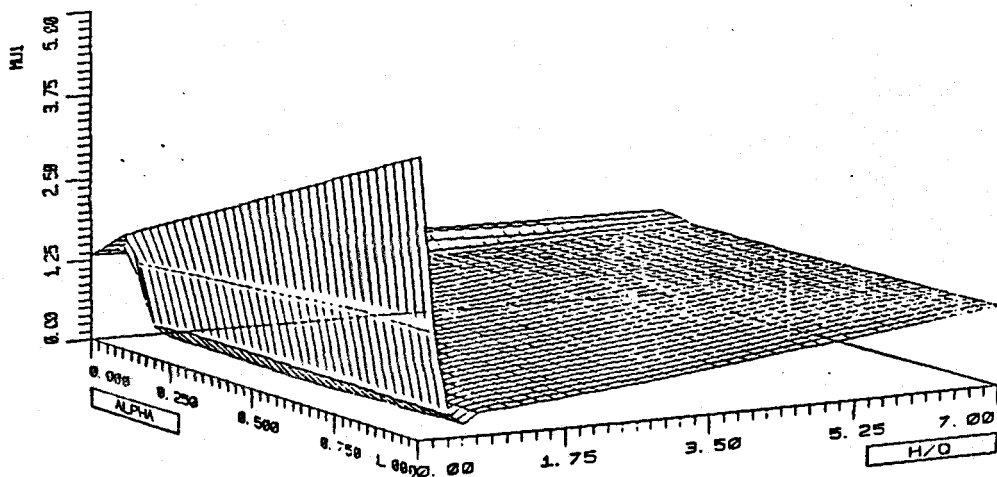


Figura 10.-Función $\mu_2 = \langle \tilde{w}'_3 \tilde{w}'_3 \rangle$.

Para $\alpha = 0$ se tiene $\mu_2(0, \beta) = \frac{2}{3}$ para todo β .

Como en el caso de μ_1 , las tabulaciones muestran como μ_2 converge rápidamente a $\frac{2}{3}$ para β suficientemente grande (del mismo modo, esta propiedad no ha podido ser evidenciada teóricamente)



Figuras 11,12.-Perspectivas de μ_1 en función de (α, β) .

Numéricamente, se trata de una superficie regular; ésto nos hace suponer que \tilde{R}' está bien aproximada por nuestras tabulaciones.

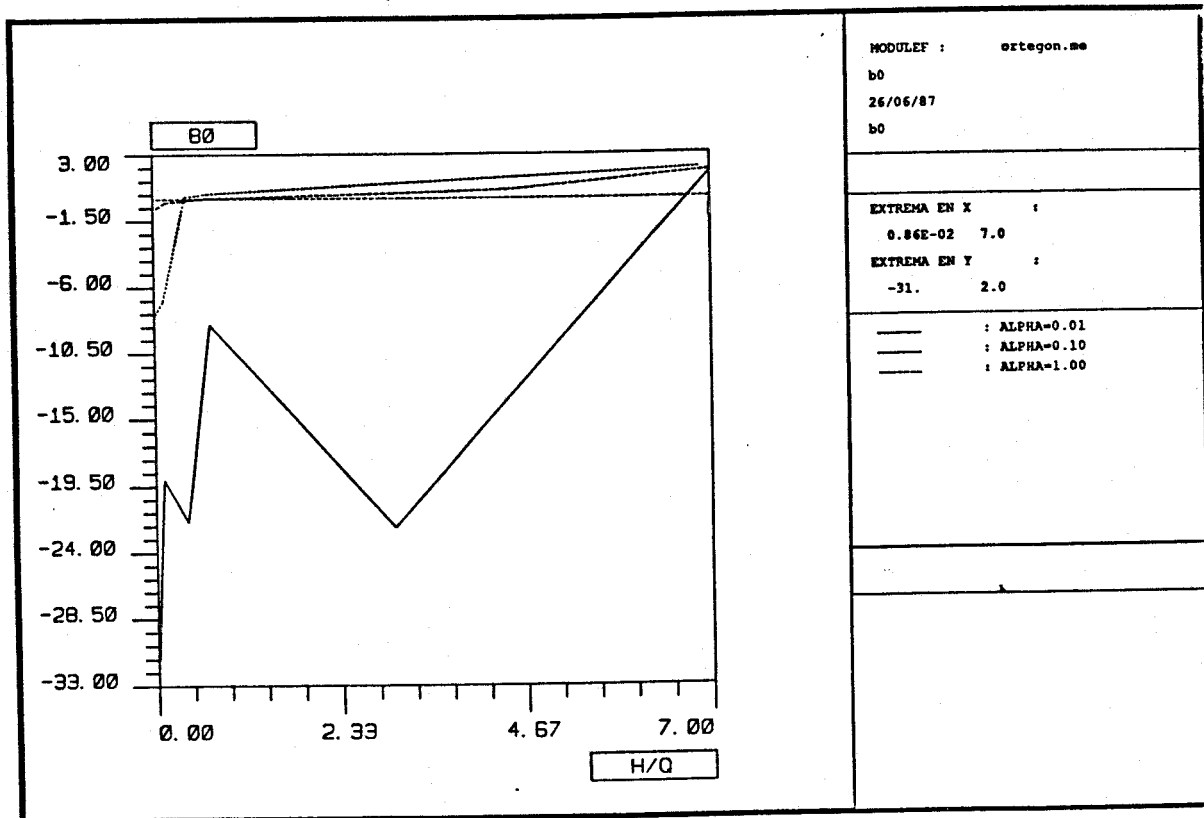


Figura 13.—Curvas correspondientes a la función r'_0 de (4.74) para algunos valores de α .

En el caso de flujos medios unidimensionales, la expresión de r'_0 dada en la Sección 4.3 se escribe

$$r'_0 = \frac{2(\alpha^2 + 2) - 2\mu_1 - (2 + \alpha^2)\mu_2}{\alpha^2(\alpha^2 + 4)}$$

Las propiedades asintóticas de los términos de cierre estudiadas en la Sección 3.4, pueden ser utilizadas para deducir el comportamiento asintótico de r'_0 para valores grandes de α , obteniéndose

$$r'_0 \simeq O(\alpha^{-2})$$

Esta propiedad la encontramos numéricamente como puede observarse en la Figura.

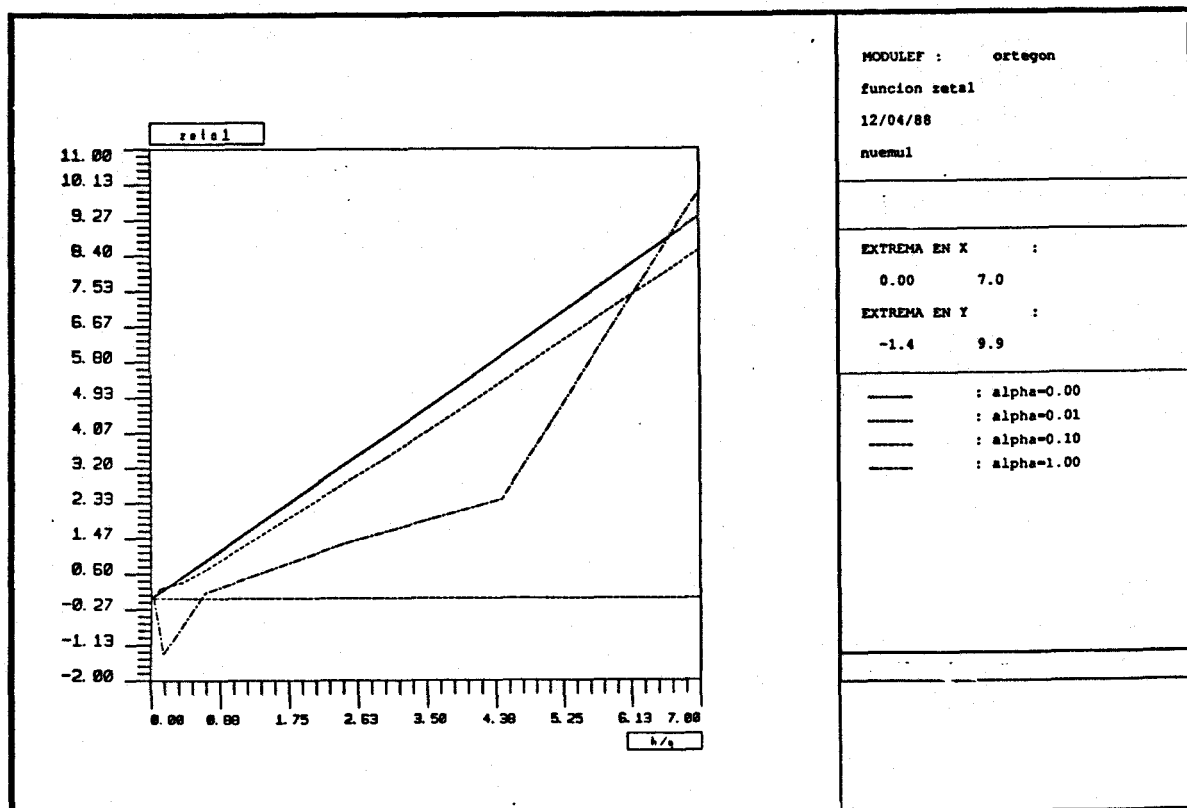


Figura 14.—Curvas correspondientes a la tabulación unidimensional de la función $\zeta_1 = 2 \langle \tilde{w}'_1 \tilde{r}'_1 \rangle + 2 \langle \tilde{w}'_2 \tilde{r}'_2 \rangle$.

Para $\alpha = 0$ se tiene $\zeta_1(0, \beta) = \frac{4}{3}\beta$ para todo β . A este valor parece aproximarse ζ_1 para grandes valores de β , según muestra la Figura, es decir $\zeta_1 \simeq \frac{4}{3}\beta$.

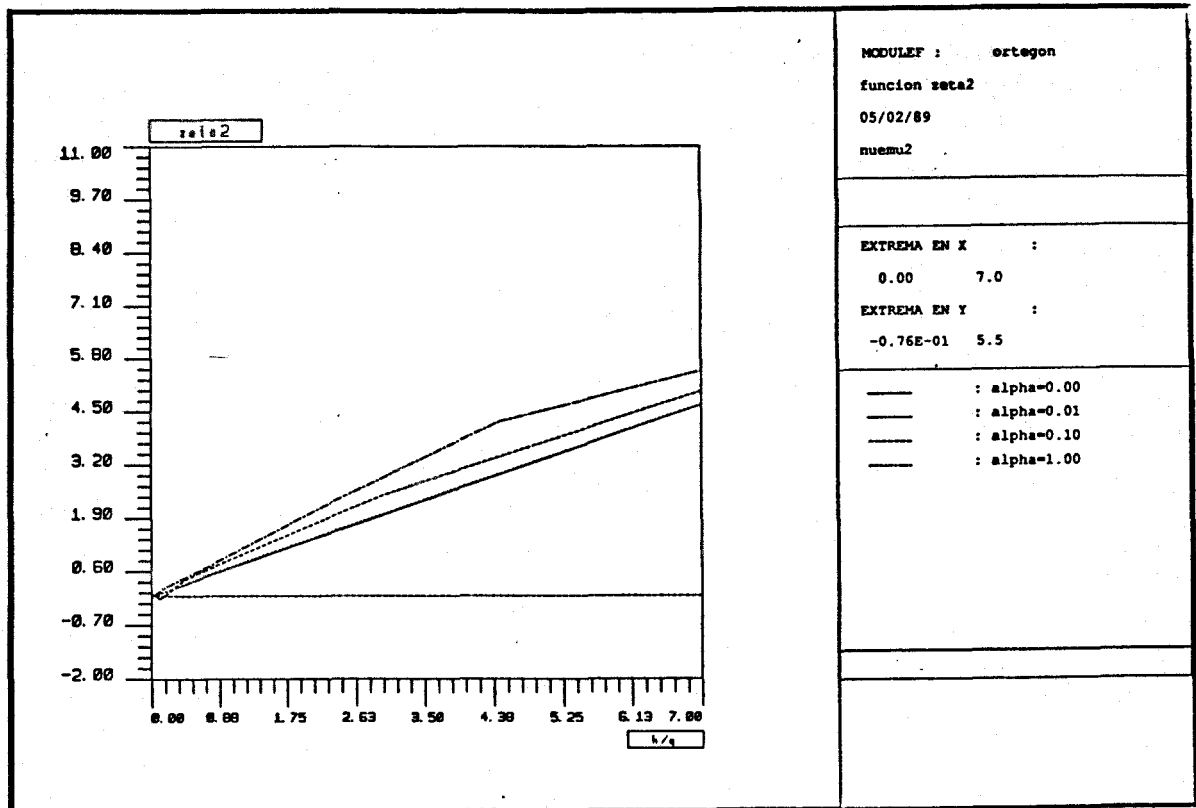


Figura 15.—Representación de las curvas correspondientes a la tabulación, en el caso unidimensional, de la función $\zeta_2 = 2 \langle \tilde{w}'_3 \tilde{r}'_3 \rangle$.

Para $\alpha = 0$ es $\zeta_2(0, \beta) = \frac{2}{3}\beta$ para todo β . La Figura muestra que para valores grandes de β se tiene $\zeta_2 \simeq \frac{2}{3}\beta$.

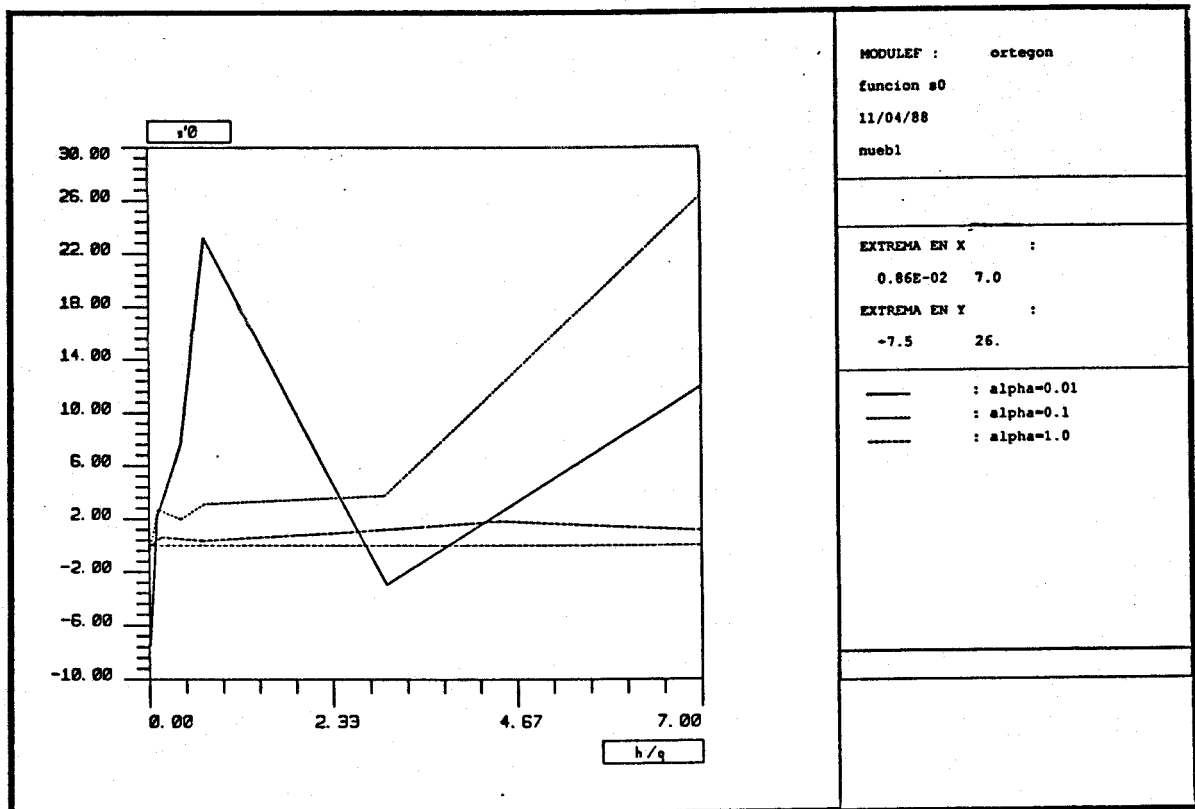


Figura 16.-Curvas correspondientes a la tabulación unidimensional de la función s'_0 definida por

$$s'_0 = \frac{2(\alpha^2 + 2)\beta - 2\zeta_1 - (2 + \alpha^2)\zeta_2}{\alpha^2(\alpha^2 + 4)}$$

Se pueden hacer los mismos comentarios que se hicieron para r'_0 , de manera que

$$s'_0 \simeq O(\alpha^{-2})$$

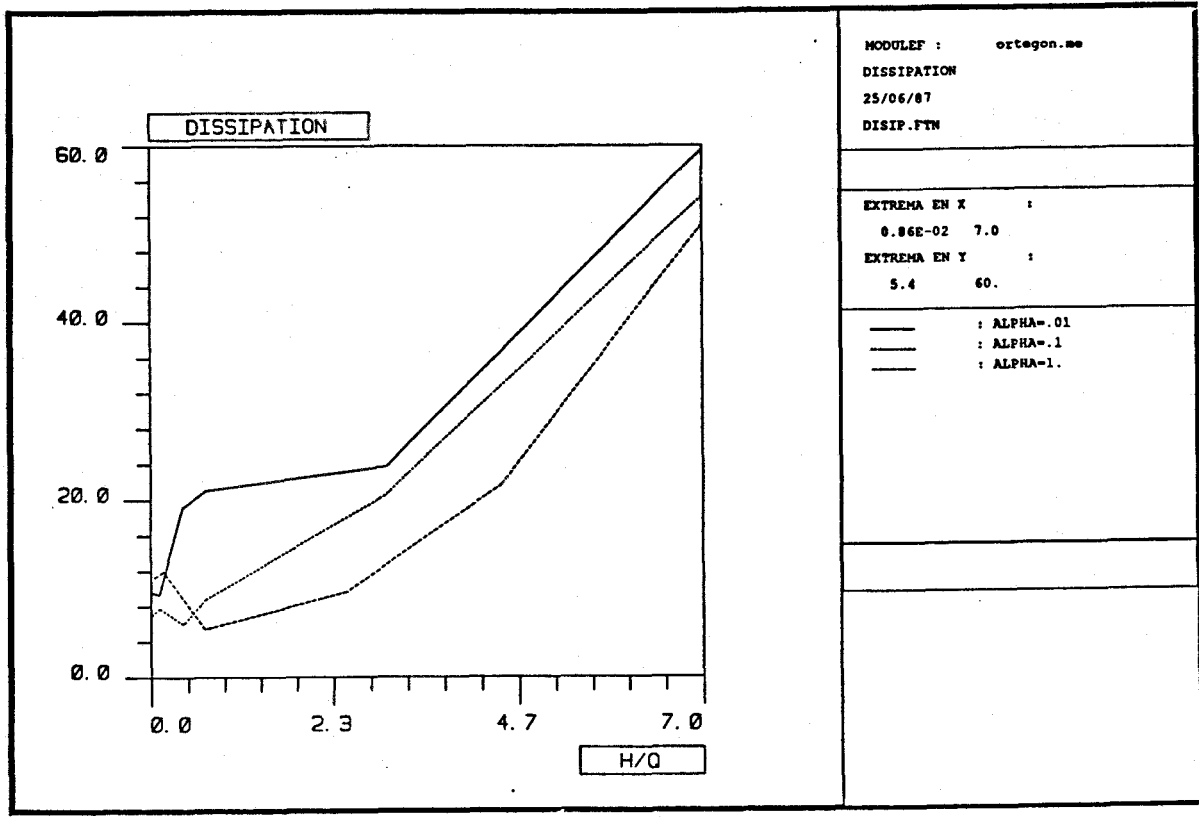


Figura 17.—Representación de las curvas correspondientes a la función disipación ψ'_q .

La tabulación numérica ha reflejado fielmente el carácter cuadrático de ψ'_q con respecto al cociente $\frac{h}{q}$ como se obtuvo teóricamente, lo que nos anima a pensar que las tabulaciones son suficientemente correctas.

Apéndice A

Desarrollos asintóticos

Se considera la ecuación de Navier-Stokes

$$u_{,t}^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla)u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon - \mu \varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon = 0, \quad \nabla \cdot u^\varepsilon = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, T[$$

$$u^\varepsilon(x, 0) = u^o(x) + \varepsilon^{1/3} w^o\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right) \quad \text{en } \Omega$$

Introduzcamos los desarrollos asintóticos

$$u^\varepsilon(x, t) \sim u_\varepsilon(x, t) + \varepsilon^{1/3} w\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \varepsilon^{2/3} u^{(1)}\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \\ + \varepsilon u^{(2)}\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \dots$$

$$p^\varepsilon(x, t) \sim p_\varepsilon(x, t) + \varepsilon^{2/3} \pi\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \varepsilon p^{(1)}\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \\ + \varepsilon^{4/3} p^{(2)}\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \dots$$

donde, a su vez,

$$u_\varepsilon(x, t) \sim \bar{u}(x, t) + \varepsilon^{1/3} \bar{w}(x, t) + \varepsilon^{2/3} \bar{u}^{(1)}(x, t) + \varepsilon \bar{u}^{(2)}(x, t) + \dots$$

$$p_\varepsilon(x, t) \sim \bar{p}(x, t) + \varepsilon^{2/3} \bar{\pi}(x, t) + \varepsilon \bar{p}^{(1)}(x, t) + \varepsilon^{4/3} \bar{p}^{(2)}(x, t) + \dots$$

Para $u_{i,t}^\varepsilon$, $u_{i,j}^\varepsilon$, $u_i^\varepsilon u_{i,j}^\varepsilon$, $u_{i,j,j}^\varepsilon$ y $p_{i,i}^\varepsilon$, los desarrollos precedentes proporcionan las siguientes expresiones formales:

$$\begin{aligned} u_{i,t}^\varepsilon &= \varepsilon^{-2/3} w_{i,K} a_{k,t} + \\ &+ \varepsilon^{-1/3} [w_{i,\tau} + u_{i,K}^{(1)} a_{k,t}] + \\ &+ \varepsilon^0 [\bar{u}_{i,t} + u_{i,\tau}^{(1)} + u_{i,K}^{(2)} a_{k,t}] + \\ &+ \varepsilon^{1/3} [w_{i,t} + \bar{w}_{i,t} + u_{i,\tau}^{(2)} + u_{i,K}^{(3)} a_{k,t}] + \\ &+ \varepsilon^{2/3} [u_{i,t}^{(1)} + \bar{u}_{i,t}^{(1)} + u_{i,\tau}^{(3)} + u_{i,K}^{(4)} a_{k,t}] + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{i,j}^\varepsilon &= \varepsilon^{-2/3} w_{i,K} a_{k,j} + \\ &+ \varepsilon^{-1/3} u_{i,K}^{(1)} a_{k,j} + \\ &+ \varepsilon^0 [u_{i,j} + u_{i,K}^{(2)} a_{k,j}] + \\ &+ \varepsilon^{1/3} [w_{i,j} + \bar{w}_{i,j} + u_{i,K}^{(3)} a_{k,j}] + \\ &+ \varepsilon^{2/3} [u_{i,j}^{(1)} + \bar{u}_{i,j}^{(1)} + u_{i,K}^{(4)} a_{k,j}] + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_j^\varepsilon u_{i,j}^\varepsilon &= \varepsilon^{-2/3} w_{i,K} \bar{u}_j a_{k,j} + \\ &+ \varepsilon^{-1/3} [u_{i,K}^{(1)} \bar{u}_j a_{k,j}] + (w_j + \bar{w}_j) w_{i,K} a_{k,j} + \\ &+ \varepsilon^0 [\bar{u}_j (\bar{u}_{i,j} + u_{i,K}^{(2)} a_{k,j}) + (w_j + \bar{w}_j) u_{i,K}^{(1)} a_{k,j} + (u_j^{(1)} + \bar{u}_j^{(1)}) w_{i,K} a_{k,j}] + \\ &+ \varepsilon^{1/3} [\bar{u}_j (w_{i,j} + \bar{w}_{i,j} + u_{i,K}^{(3)} a_{k,j}) + (w_j + \bar{w}_j) (\bar{u}_{i,j} + u_{i,K}^{(2)} a_{k,j}) + \\ &+ (u_j^{(1)} + \bar{u}_j^{(1)}) (u_{i,K}^{(1)} a_{k,j} + (u_j^{(2)} + \bar{u}_j^{(2)}) w_{i,K} a_{k,j})] + \\ &+ \varepsilon^{2/3} [\bar{u}_j (u_{i,j}^{(1)} + \bar{u}_{i,j}^{(1)} + u_{i,K}^{(4)} a_{k,j}) + (w_j + \bar{w}_j) (w_{i,j} + \bar{w}_{i,j} + u_{i,K}^{(3)} a_{k,j}) + \\ &+ (u_j^{(1)} + \bar{u}_j^{(1)}) (\bar{u}_{i,j} + u_{i,K}^{(2)} a_{k,j}) + \\ &+ (u_j^{(2)} + \bar{u}_j^{(2)}) u_{i,K}^{(1)} a_{k,j} + (u_j^{(3)} + \bar{u}_j^{(3)}) w_{i,K} a_{k,j}] + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{i,j,j}^\varepsilon &= \varepsilon^{-5/3} w_{i,KL} a_{l,j} a_{k,j} + \varepsilon^{-4/3} u_{i,KL}^{(1)} a_{l,j} a_{k,j} + \varepsilon^{-1} u_{i,KL}^{(2)} a_{l,j} a_{k,j} + \\ &+ \varepsilon^{-2/3} [w_{i,K} a_{k,j,j} + w_{i,Kj} a_{k,j} + u_{i,KL}^{(3)} a_{l,j} a_{k,j}] + \\ &+ \varepsilon^{-1/3} [u_{i,K}^{(1)} a_{k,j,j} + u_{i,Kj}^{(1)} a_{k,j} + u_{i,KL}^{(4)} a_{l,j} a_{k,j}] + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{i,i}^\varepsilon &= \varepsilon^{-1/3} \pi_{i,K} a_{k,i} + p_{i,i} + p_{i,K}^{(1)} a_{k,i} + \varepsilon^{1/3} p_{i,K}^{(2)} a_{k,i} + \\ &+ \varepsilon^{2/3} [p_{i,K}^{(3)} a_{k,i} + \pi_{i,i} + \bar{\pi}_{i,i}] + \dots \end{aligned}$$

donde se han utilizado las notaciones

$$w_{i,j} = \frac{\partial w_i}{\partial x_j}, \quad w_{i,j} = \frac{\partial w_i}{\partial y_j}, \quad w_{i,\tau} = \frac{\partial w_i}{\partial \tau}, \quad y = \frac{a(x,t)}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones de Navier-Stokes, se tiene

$$\begin{aligned} u_{,i}^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon - \mu \varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon = & \\ = \varepsilon^{-2/3} [w_{i,K} (a_{k,t} + \bar{u}_j a_{k,j})] + & \\ + \varepsilon^{-1/3} [w_{i,\tau} + u_{i,K}^{(1)} (a_{k,t} + \bar{u}_j a_{k,j}) + w_j w_{i,K} a_{k,j} + \pi_{,K} a_{k,i} + \bar{w}_j w_{i,K} a_{k,j}] + & \\ + \varepsilon^0 [\bar{u}_{i,t} + u_{i,\tau}^{(1)} + u_{i,K}^{(2)} (a_{k,t} + \bar{u}_j a_{k,j}) + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} + & \\ + a_{k,j} ((w_j + \bar{w}_j) u_{i,K}^{(1)} + (u_j^{(1)} + \bar{u}_j^{(1)}) w_{i,K}) + p_{,i} + p_{,K}^{(1)} a_{k,i}] + & \\ + \varepsilon^{1/3} [w_{i,t} + \bar{w}_{i,t} + u_{i,\tau}^{(2)} + u_{i,K}^{(3)} (a_{k,t} + \bar{u}_j a_{k,j}) + \bar{u}_j (w_{i,j} + \bar{w}_{i,j}) + & \\ + (w_j + \bar{w}_j) (\bar{u}_{i,j} + a_{k,j} u_{i,K}^{(2)}) + (u_j^{(1)} + \bar{u}_j^{(1)}) u_{i,K}^{(1)} a_{k,j} + & \\ + (u_j^{(2)} + \bar{u}_j^{(2)}) w_{i,K} a_{k,j} + p_{,K}^{(2)} a_{k,i} - \mu w_{i,KL} a_{l,j} a_{k,j}] + & \\ + \varepsilon^{2/3} [u_{i,t}^{(1)} + \bar{u}_{i,t}^{(1)} + u_{i,\tau}^{(3)} + u_{i,K}^{(4)} (a_{k,t} + \bar{u}_j a_{k,j}) + \bar{u}_j (u_{i,j}^{(1)} + \bar{u}_{i,j}^{(1)}) + & \\ + (w_j + \bar{w}_j) (w_{i,j} + \bar{w}_{i,j} + u_{i,K}^{(3)} a_{k,j}) + (u_j^{(1)} + \bar{u}_j^{(1)}) (\bar{u}_{i,j} + u_{i,K}^{(2)} a_{k,j}) + & \\ + (u_j^{(2)} + \bar{u}_j^{(2)}) u_{i,K}^{(1)} a_{k,j} + (u_j^{(3)} + \bar{u}_j^{(3)}) w_{i,K} a_{k,j} + & \\ + p_{,K}^{(3)} a_{k,i} + \pi_{,i} + \bar{\pi}_{,i} - \mu u_{i,KL}^{(1)} a_{l,j} a_{k,j}] + \dots \end{aligned}$$

Por otro lado, la condición de incompresibilidad $\nabla \cdot u^\varepsilon = 0$ se escribe

$$\begin{aligned} u_{i,i}^\varepsilon = \varepsilon^{-2/3} a_{k,i} w_{i,K} + \varepsilon^{-1/3} a_{k,i} u_{i,K}^{(1)} + \bar{u}_{i,i} + a_{k,i} u_{i,K}^{(2)} + & \\ + \varepsilon^{1/3} [w_{i,i} + a_{k,i} u_{i,K}^{(3)} + \bar{w}_{i,i}] + \varepsilon^{2/3} [u_{i,i}^{(1)} + a_{k,i} u_{i,K}^{(4)} + \bar{u}_{i,i}^{(1)}] + \dots \quad (A.1) \end{aligned}$$

Anulando las respectivas potencias de ε en estas expresiones, se tiene

$$a_{,i} + (\bar{u} \cdot \nabla) a = 0,$$

$$T(\tilde{w}, \pi, C) = 0,$$

$$L(\tilde{u}^{(k)}, \tilde{w}, p^{(k)}, C) = f^{(k)}, \quad k \geq 1,$$

donde

$$T(\tilde{w}, \pi, C) = \tilde{w}_{,\tau} + (\tilde{w} \cdot \nabla_y) \tilde{w} + C \nabla_y \pi$$

$$L(\tilde{u}, \tilde{w}, p, C) = \tilde{u}_{,\tau} + (\tilde{u} \cdot \nabla_y) \tilde{w} + (\tilde{w} \cdot \nabla_y) \tilde{u} + C \nabla_y p$$

$$\tilde{w} = \nabla a^T (w + \bar{w}), \quad \tilde{u}^{(k)} = \nabla a^T (u^{(k)} + \bar{u}^{(k)}), \quad C = \nabla a^T \nabla a$$

$$f^{(1)} = -\nabla a^T [\bar{u}_{,t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} + \nabla \bar{p}]$$

$$f^{(2)} = -\nabla a^T [w_{,t} + \bar{w}_{,t} + (\bar{u} \cdot \nabla)(w + \bar{w}) + [(w + \bar{w}) \cdot \nabla] \bar{u} + (\tilde{u}^{(1)} \cdot \nabla_y) u^{(1)} - \mu (\nabla a \nabla_y) \cdot ((\nabla a \nabla_y) w)]$$

$$f^{(3)} = -\nabla a^T [u^{(1)}_{,t} + \bar{u}^{(1)}_{,t} + (\bar{u} \cdot \nabla)(u^{(1)} + \bar{u}^{(1)}) + [(u^{(1)} + \bar{u}^{(1)}) \cdot \nabla] \bar{u} + (\tilde{u}^{(1)} \cdot \nabla_y) u^{(2)} + (\tilde{u}^{(2)} \cdot \nabla_y) u^{(1)} + [(w + \bar{w}) \cdot \nabla](w + \bar{w}) + \nabla \pi + \nabla \bar{\pi} - \mu (\nabla a \nabla_y) \cdot ((\nabla a \nabla_y) u^{(1)})]$$

⋮

Por otra parte, de (A.1) se obtiene

$$\nabla \cdot \tilde{w} = 0, \quad \nabla \cdot \tilde{u}^k = g^{(k)},$$

donde

$$g^{(1)} = 0$$

$$g^{(2)} = -\nabla \cdot \bar{u}$$

$$g^{(3)} = -\nabla \cdot (\bar{w} + w)$$

$$g^{(4)} = -\nabla \cdot (\bar{u}^{(1)} + u^{(1)})$$

⋮

Apéndice B

Condiciones de compatibilidad para la ecuación linealizada

Sea (\tilde{w}, π) una solución de la ecuación de Euler generalizada

$$\tilde{w}_{,\tau} + (\tilde{w} \cdot \nabla_y) \tilde{w} + C \nabla_y \pi = 0, \quad \nabla_y \cdot \tilde{w} = 0, \quad (\tilde{w}, \pi) \text{ Y-periódica} \quad (\text{B.1})$$

y (\tilde{u}, p) una solución de la ecuación linealizada

$$\tilde{u}_{,\tau} + (\tilde{w} \cdot \nabla_y) \tilde{u} + (\tilde{u} \cdot \nabla_y) \tilde{w} + C \nabla_y p = f, \quad \nabla_y \cdot \tilde{u} = g, \quad (\tilde{u}, p) \text{ Y-periódica} \quad (\text{B.2})$$

Se supone que el campo \tilde{w} está acotado uniformemente en τ , y que tanto \tilde{u} como sus derivadas primeras poseen crecimiento sublineal en τ .

En estas hipótesis, los segundos miembros f, g verifican las condiciones de compatibilidad siguientes:

$$\langle\langle f + \tilde{w}g \rangle\rangle = 0, \quad \langle g \rangle = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\langle\langle \tilde{w}C^{-1}f + (\frac{1}{2}|w|^2 + \pi)g \rangle\rangle = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$\langle\langle (\nabla_a \nabla_y) \times w \cdot f \rangle\rangle = 0 \quad (\text{B.5})$$

Demostración de (B.3):

La ecuación (B.2) se puede expresar tambien como

$$\tilde{u}_{i,\tau} + (\tilde{u}_j \tilde{w}_i + \tilde{w}_j \tilde{u}_i + c_{ij} p)_{,J} = \tilde{w}_i \tilde{u}_{j,J} + f_i \quad (\text{B.6})$$

usando (B.1), y teniendo en cuenta la periodicidad de \tilde{w} , \tilde{u} , y p , se deduce

$$\langle f + \tilde{w}g \rangle = \langle \tilde{u} \rangle_{,\tau}$$

y dado que \tilde{u} es sublineal en la variable τ , se obtiene

$$\ll f + \tilde{w}g \gg = 0$$

Integrando (B.2b) en Y se obtiene directamente

$$\langle g \rangle = 0$$

Demostración de (B.4):

Multiplicando (B.6) por $C^{-T} \tilde{w}$ se tiene

$$C^{-T} \tilde{w}(f + \tilde{w}g) = c_{ki}^{-1} \tilde{w}_k [\tilde{u}_{i,\tau} + (\tilde{u}_j \tilde{w}_i + \tilde{w}_j \tilde{u}_i + c_{ij} p)_{,J}] \quad (\text{B.7})$$

integrando en Y

$$\langle C^{-T} \tilde{w}(f + \tilde{w}g) \rangle = - \langle c_{ki}^{-1} \tilde{w}_k (\tilde{u}_j \tilde{w}_i + \tilde{w}_j \tilde{u}_i + c_{ij} p) - c_{ki}^{-1} \tilde{w}_k \tilde{u}_{i,\tau} \rangle \quad (\text{B.8})$$

Por otro lado

$$\ll \tilde{w}_k \tilde{u}_{i,\tau} \gg = - \ll \tilde{w}_{k,\tau} \tilde{u}_i \gg = \ll \tilde{w}_l \tilde{w}_{k,L} \tilde{u}_i + c_{kl} \pi_{,L} \tilde{u}_i \gg \quad (\text{B.9})$$

la última igualdad se debe a (B.1), y en consecuencia

$$\begin{aligned} \ll c_{ki}^{-1} \tilde{w}_k \tilde{u}_{i,\tau} \gg &= \ll c_{ki}^{-1} \tilde{w}_l \tilde{w}_{k,L} \tilde{u}_i + \pi_{,L} \tilde{u}_l \gg = \\ &= \ll c_{ki}^{-1} \tilde{w}_l \tilde{w}_{k,L} \tilde{u}_i \gg - \ll \pi g \gg \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

y (B.8) se transforma en

$$\ll C^{-T} \tilde{w}(f + \tilde{w}g) \gg = - \ll c_{ki}^{-1} \tilde{w}_{k,J} \tilde{u}_j \tilde{w}_i \gg - \ll \pi g \gg \quad (\text{B.11})$$

pero

$$\ll c_{ki}^{-1} \tilde{w}_{k,J} \tilde{u}_j \tilde{w}_i \gg = - \ll c_{ki}^{-1} \tilde{w}_k \tilde{u}_j \tilde{w}_{i,J} \gg - \ll c_{ki}^{-1} \tilde{w}_k \tilde{u}_{j,J} \tilde{w}_i \gg \quad (\text{B.12})$$

por tanto

$$- \ll c_{ki}^{-1} \tilde{w}_{k,J} \tilde{u}_j \tilde{w}_i \gg = \frac{1}{2} \ll C^{-1} \tilde{w} \cdot \tilde{w} g \gg = \frac{1}{2} \ll g |w|^2 \gg \quad (\text{B.13})$$

que conduce a la segunda condición de compatibilidad dada en (B.4)

Demostración de (B.5):

La tercera condición de compatibilidad exigirá más elaboración.

Sea r el vector definido por

$$r = (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} \tilde{w}) \quad (\text{B.14})$$

o por componentes

$$r_i = \varepsilon_{ikn} a_{j,k} a_{n,l}^{-1} \tilde{w}_{l,J}$$

y sea $\tilde{r} = \nabla a^T r$.

Para un campo \tilde{v} , se tiene la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \int_Y \tilde{v} C^{-1} T(\tilde{w}, \pi, C) dy &= \int_Y v \cdot w_{,\tau} dy - \int_Y v \cdot w \times (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} \tilde{w}) dy - \\ &- \int_Y \nabla_y \cdot \tilde{v} \left(\frac{1}{2} |w|^2 \pi \right) dy \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

siendo $v = \nabla a^{-T} \tilde{v}$. En particular, tomando $\tilde{v} = \tilde{r}$, y teniendo en cuenta que $\nabla_y \cdot \tilde{r} = 0$, (B.15) se transforma en

$$\int_Y \tilde{r} C^{-1} T(\tilde{w}, \pi, C) dy = \int_Y r \cdot w_{,\tau} dy \quad (\text{B.16})$$

Si definimos ahora la función $\phi(\tilde{w}, \pi)$ como

$$\phi(\tilde{w}, \pi) = \int_Y \nabla a^T (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} \tilde{w}) C^{-1} T(\tilde{w}, \pi, C) dy \quad (\text{B.17})$$

de (B.16), tambien se tiene

$$\phi(\tilde{w}, \pi) = \int_Y (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} \tilde{w}) \cdot (\nabla a^{-T} \tilde{w}_{,\tau}) dy \quad (\text{B.18})$$

diferenciando estas expresiones, se obtiene

$$\begin{aligned} & \int_Y \nabla a^T (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} \tilde{h}) C^{-1} T(\tilde{w}, \pi, C) dy + \\ & + \int_Y \nabla a^T (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} \tilde{w}) C^{-1} L(\tilde{h}, \tilde{w}, \pi, C) dy = \\ & = \int_Y (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} \tilde{h}) \cdot (\nabla a^{-T} \tilde{w}_{,\tau}) dy + \\ & + \int_Y (\nabla a \nabla_y) \times (\nabla a^{-T} \tilde{w}) \cdot (\nabla a^{-T} \tilde{h}_{,\tau}) dy \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

y si en particular se eligen (\tilde{w}, π) solución de (B.1), (\tilde{u}, p) solución de (B.2) y $\tilde{h} = \tilde{u}$,

$$\begin{aligned} \int_Y \tilde{r} C^{-1} f dy &= \int_Y [(\nabla a \nabla_y) \times u \cdot w_{,\tau} + (\nabla a \nabla_y) \times w \cdot u_{,\tau}] dy = \\ &= \left(\frac{1}{2} \int_Y (\nabla a \nabla_y) \times u \cdot w + (\nabla a \nabla_y) \times w \cdot u \right)_{,\tau} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

finalmente, por sublinealidad, se obtiene la tercera condición de compatibilidad (B.5)

Apéndice C

Invariantes de la ecuación de Euler generalizada

Consideremos la ecuación de Euler generalizada

$$\tilde{w}_{,\tau} + (\tilde{w} \cdot \nabla_y) \tilde{w} + C \nabla_y \pi = 0 \quad \text{en } Y \times Z \quad (\text{C.1})$$

$$\nabla_y \cdot \tilde{w} = 0 \quad \text{en } Y \times Z \quad (\text{C.2})$$

$$\tilde{w}(y, 0) = \tilde{w}_0(y) \quad \text{en } Y \quad (\text{C.3})$$

$$(\tilde{w}, \pi) \text{ } Y\text{-periódica} \quad (\text{C.4})$$

Se conocen tres estadísticos de \tilde{w} independientes de τ

$$\langle \tilde{w} \rangle \quad \text{media} \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{1}{2} \langle \tilde{w} C^{-1} \tilde{w} \rangle \quad \text{energía cinética} \quad (\text{C.6})$$

$$\langle (\nabla_a \nabla_y) \times (\nabla_a^{-T} \tilde{w}) \cdot (\nabla_a^{-T} \tilde{w}) \rangle \quad \text{helicidad} \quad (\text{C.7})$$

El primero se obtiene directamente al integrar en Y la expresión (C.1), y teniendo en cuenta la periodicidad de \tilde{w} y la condición (C.2)

$$\langle \tilde{w} \rangle_{,\tau} = 0 \quad (\text{C.8})$$

Si se sustituye en (B.15) \tilde{v} por \tilde{w} se obtiene

$$\left(\frac{1}{2} \langle \tilde{w} C^{-1} \tilde{w} \rangle \right)_{,\tau} = 0 \quad (\text{C.9})$$

es decir el segundo invariante.

Para obtener el tercer invariante, se considera la expresión

$$\int_Y r \cdot w_{,\tau} dy = 0 \quad (\text{C.10})$$

pero

$$\begin{aligned} \int_Y r \cdot w_{,\tau} dy &= \int_Y \epsilon_{ikn} a_{j,k} w_{n,j} \cdot w_{i,\tau} dy = - \int_Y \epsilon_{ikn} a_{j,k} w_n \cdot w_{i,j\tau} dy \\ &= \int_Y \epsilon_{nki} a_{j,k} w_{i,\tau j} w_n dy = \int_Y w \cdot r_{,\tau} dy \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\left(\int_Y w \cdot r dy \right)_{,\tau} = 0 \quad (\text{C.11})$$

que es la expresión del tercer invariante.

Apéndice D

Derivación de las ecuaciones del modelo

Las condiciones de compatibilidad para el sistema linealizado nos conducirán a la expresión del sistema de ecuaciones promediadas.

En efecto, al sustituir f por $f^{(k)}$ y g por $g^{(k)}$, $k \geq 1$, en (B.3) se tiene

$$k = 1 : \quad \bar{u}_{,t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} + \nabla \bar{p} = 0,$$

$$k = 2 : \quad \bar{w}_{,t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{w} + (\bar{w} \cdot \nabla) \bar{u} = 0,$$

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0,$$

$$k = 3 : \quad \bar{u}_{,t}^{(1)} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u}^{(1)} + (\bar{u}^{(1)} \cdot \nabla) \bar{u} + \nabla \bar{\pi} + \\ + \ll (w + \bar{w}) \cdot \nabla \cdot (w + \bar{w}) \gg + \ll [(w + \bar{w}) \cdot \nabla] (w + \bar{w}) \gg = 0,$$

$$\nabla \cdot \bar{w} = 0,$$

⋮

es decir

$$\bar{u}_{,t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} + \nabla \bar{p} = 0, \quad \nabla \cdot \bar{u} = 0, \quad (\text{D.1})$$

$$\bar{w}_{,t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{w} + (\bar{w} \cdot \nabla) \bar{u} = 0, \quad \nabla \cdot \bar{w} = 0, \quad (\text{D.2})$$

$$\bar{u}_{,t}^{(1)} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u}^{(1)} + (\bar{u}^{(1)} \cdot \nabla) \bar{u} + \nabla \bar{\pi} + \\ + \nabla \cdot \ll (w + \bar{w}) \otimes (w + \bar{w}) \gg = 0, \quad \nabla \cdot \bar{u}^{(1)} = 0 \quad (\text{D.3})$$

⋮

⋮

Dado que $\bar{w}(x, 0) = 0$, de (D.2) se sigue que $\bar{w} = 0$ (esto es, las condiciones verificadas por $\bar{w} = 0$ permiten que pueda ser elegida nula).

Poniendo

$$u = u_\varepsilon = \bar{u} + \varepsilon^{2/3} \bar{u}^{(1)} + O(\varepsilon)$$

$$p = p_\varepsilon = \bar{p} + \varepsilon^{2/3} \bar{\pi} + O(\varepsilon)$$

se tiene

$$u_{,t} + (u \cdot \nabla)u + \nabla p + \varepsilon^{2/3} \nabla \cdot R = O(\varepsilon) \quad (\text{D.4})$$

donde $R = \ll w \otimes w \gg$.

La expresión (D.4) constituye la ecuación de Reynolds del modelo (nótese que el tensor de Reynolds viene dado por $\varepsilon^{2/3} R$ como era de esperar).

Veamos en qué se transforma (B.4) para (f, g) sustituido por $(f^{(k)}, g^{(k)})$. Para $k = 1$ no se obtiene ninguna información ya que $(f^{(1)}, g^{(1)}) = (0, 0)$; para $k = 2$ se obtiene una ecuación para la energía cinética turbulenta $q = \frac{1}{2} \langle |w|^2 \rangle$:

$$\ll \tilde{w} C^{-1} f^{(2)} + \left(\frac{1}{2} |w|^2 + \pi \right) g^{(2)} \gg = 0$$

$$f^{(2)} = -\nabla a^T [w_{,t} + \bar{w}_{,t} + (\bar{u} \cdot \nabla)(w + \bar{w}) + [(w + \bar{w}) \cdot \nabla] \bar{u} + (\tilde{u}^{(1)} \cdot \nabla_y) u^{(1)} - \mu (\nabla a \nabla_y) \cdot ((\nabla a \nabla_y) w)]$$

$$g^{(2)} = -\nabla \cdot \bar{u} = 0$$

por tanto

$$\begin{aligned} & \ll w_i w_{i,t} \gg + \ll w_i \bar{u}_j w_{i,j} \gg + \ll w_i \bar{u}_{i,j} w_j \gg + \\ & + \ll w \cdot (\tilde{u}^{(1)} \cdot \nabla_y) u^{(1)} \gg - \mu \ll w \cdot (\nabla a \nabla_y) \cdot ((\nabla a \nabla_y) w) \gg = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

o bien

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \langle |w|^2 \rangle \right)_{,t} + \bar{u} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} \langle |w|^2 \rangle \right) + \ll w \otimes w \gg : \nabla \bar{u} + \\ & + \mu \ll (\nabla a \nabla_y) w : (\nabla a \nabla_y) w \gg + \ll w \cdot (\tilde{u}^{(1)} \cdot \nabla_y) u^{(1)} \gg = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Veamos que el último término de esta ecuación es nulo, i.e.

$$\ll w \cdot (\tilde{u}^{(1)} \cdot \nabla_y) u^{(1)} \gg = 0$$

En efecto,

$$\langle w_i \tilde{u}_j^{(1)} u_{i,j}^{(1)} \rangle = - \langle w_{i,j} \tilde{u}_j^{(1)} u_i^{(1)} \rangle$$

usando la ecuación lineal de $\tilde{u}^{(1)}$, se tiene que

$$w_{i,j}\tilde{u}_j^{(1)} = -(\tilde{u}_{i,\tau}^{(1)} + w_j u_{i,j}^{(1)} + a_{j,i} p_{j,i}^{(1)})$$

luego

$$\langle w_i \tilde{u}_j^{(1)} u_{i,j}^{(1)} \rangle = \langle u_{i,\tau}^{(1)} u_i^{(1)} \rangle + \langle w_j u_{i,j}^{(1)} u_i^{(1)} \rangle + \langle a_{j,i} u_i^{(1)} p_{j,i}^{(1)} \rangle$$

y ahora, cada uno de estos sumandos es cero puesto que

$$\langle u_{i,\tau}^{(1)} u_i^{(1)} \rangle = \left(\frac{1}{2} \langle |u^{(1)}|^2 \rangle \right)_{,\tau} \quad (D.7)$$

que se anula al tomar media en la variable τ ;

$$\langle w_j u_{i,j}^{(1)} u_i^{(1)} \rangle = - \langle w_j u_i^{(1)} u_{i,j}^{(1)} \rangle = \lambda \quad (D.8)$$

es decir $\lambda = -\lambda \Rightarrow \lambda = 0$

$$\langle a_{j,i} u_i^{(1)} p_{j,i}^{(1)} \rangle = \langle \tilde{u}_j^{(1)} p_{j,i}^{(1)} \rangle = - \langle \nabla_y \cdot \tilde{u}^{(1)} p^{(1)} \rangle = 0 \quad (D.9)$$

teniendo en cuenta que $u = \bar{u} + \varepsilon^{2/3} u^{(1)} + O(\varepsilon)$, la ecuación para q toma la forma

$$q_{,t} + u \nabla q + R : \nabla u + \mu \psi_q = O(\varepsilon^{2/3}) \quad (D.10)$$

donde $\psi_q = \ll (\nabla a \nabla) w : (\nabla a \nabla) w \gg$

Finalmente, al sustituir f por $f^{(2)}$ en (B.5) se obtiene una ecuación para la helicidad turbulenta h definida por

$$\begin{aligned} h &= \langle w \cdot r \rangle = \langle w \cdot (\nabla a \nabla) \times w \rangle \\ &= \langle r_i w_{i,t} \rangle + \langle r_i \bar{u}_j w_{i,j} \rangle + \langle r_i \bar{u}_{i,j} w_j \rangle + \\ &\quad + \langle r \cdot (\tilde{u}^{(1)} \cdot \nabla_y) u^{(1)} \rangle - \mu \langle r \cdot (\nabla a \nabla_y) \cdot [(\nabla a \nabla_y) w] \rangle = 0 \end{aligned} \quad (D.11)$$

Un cálculo sencillo prueba que

$$\langle w \cdot r_{,t} \rangle = \langle w_{,t} \cdot r \rangle$$

$$\langle w_i r_j \rangle = \langle w_j r_i \rangle$$

lo que permite escribir la ecuación (D.11) bajo la forma

$$\frac{1}{2}(\langle w.r \rangle)_{,t} + \frac{1}{2}\bar{u}\nabla(\langle w.r \rangle) + \ll w \otimes r \gg: \nabla\bar{u} + \mu \ll (\nabla a \nabla_y)w : (\nabla a \nabla_y)r \gg + \ll r.(\tilde{u}^{(1)}. \nabla_y)u^{(1)} \gg = 0 \quad (D.12)$$

Finalmente, veamos que el término $\ll r.(\tilde{u}^{(1)}. \nabla_y)u^{(1)} \gg$ es nulo. Usando las ecuaciones que satisfacen \tilde{w} y $\tilde{u}^{(1)}$ se tiene que $\tilde{W} = \tilde{w} + \tilde{u}^{(1)}$ verifica la ecuación

$$\tilde{W}_{,\tau} + (\tilde{W}. \nabla_y)\tilde{W} + C\nabla_y P = -(\tilde{u}^{(1)}. \nabla_y)\tilde{u}^{(1)}, \quad \nabla_y.\tilde{W} = 0 \quad (D.13)$$

con $P = \pi + p^{(1)}$. Poniendo $W = \nabla a^{-T}\tilde{W}$, se tendrá

$$W_{,\tau} + (\tilde{W}. \nabla_y)W + \nabla a \nabla_y P = -(\tilde{u}^{(1)}. \nabla_y)u^{(1)} \quad (D.14)$$

multiplicando esta ecuación por $R = (\nabla a \nabla) \times W$, y tomando la media en Y , se obtiene

$$\langle R.(\tilde{u}^{(1)}. \nabla_y)u^{(1)} \rangle = -(\langle R.W_{,\tau} \rangle + R.(\tilde{W}. \nabla_y)W + R.\nabla a \nabla_y P) \quad (D.15)$$

Pero $\langle R.W_{,\tau} \rangle = (\frac{1}{2} \langle R.W \rangle)_{,\tau}$, y por tanto $\ll R.W_{,\tau} \gg = 0$

Por otra parte

$$\langle R.\nabla a \nabla_y P \rangle = \langle \nabla a^T R.\nabla_y P \rangle = \langle \nabla_y.(\nabla a^T R).P \rangle = 0 \quad (D.16)$$

pues la fórmula (2.8) prueba que $\nabla_y.(\nabla a^T R) = 0$

Veamos que $\langle R.(\tilde{W}. \nabla_y)W \rangle$, para ello se considera la fórmula siguiente para el término de convección

$$(\tilde{W}. \nabla_y)\tilde{W} = \frac{1}{2}\nabla a^T \nabla a \nabla_y |W|^2 - \nabla a^T W \times R \quad (D.17)$$

o bien

$$(\tilde{W}. \nabla_y)W = \frac{1}{2}\nabla a \nabla_y |W|^2 - W \times R \quad (D.18)$$

multiplicando escalarmente por R , y tomando medias

$$\langle R.(\tilde{W}. \nabla_y)W \rangle = \langle \frac{1}{2}(\nabla a^T R)\nabla_y |W|^2 \rangle = \langle \frac{1}{2}\nabla_y.(\nabla a^T R)|W|^2 \rangle = 0 \quad (D.19)$$

Teniendo en cuenta que $(\nabla a \nabla_y) \times W = (\nabla a \nabla_y) \times w + (\nabla a \nabla_y) \times u^{(1)}$, la expresión (D.15) se transforma en

$$\langle (\nabla a \nabla_y) \times w.(\tilde{u}^{(1)}. \nabla_y)u^{(1)} \rangle = \langle (\nabla a \nabla_y) \times u^{(1)}.(\tilde{u}^{(1)}. \nabla_y)u^{(1)} \rangle \quad (D.20)$$

y como el segundo miembro puede ser tratado como (D.15)-(D.19), se sigue que

$$\langle r.(\tilde{u}^{(1)}. \nabla_y)u^{(1)} \rangle = 0$$

En consecuencia, la ecuación para la helicidad (D.12) puede ser expresada entonces mediante

$$h_{,t} + u \nabla h + S : \nabla u + \mu \psi_h = O(\varepsilon^{2/3}) \quad (\text{D.21})$$

siendo S y ψ_h

$$S = 2 \ll w \otimes r \gg, \quad \psi_h = 2 \ll (\nabla a \nabla_y)w : (\nabla a \nabla_y)r \gg$$

El sistema de ecuaciones promediadas del modelo es el siguiente

$$u_{,t} + u \nabla u + \nabla p + \varepsilon^{2/3} \nabla . R = 0, \quad \nabla . u = 0 \quad (\text{D.22})$$

$$q_{,t} + u \nabla q + R : \nabla u + \mu \psi_q = 0 \quad (\text{D.23})$$

$$h_{,t} + u \nabla h + S : \nabla u + \mu \psi_h = 0 \quad (\text{D.24})$$

$$a_{,t} + u \nabla a = 0 \quad (\text{D.25})$$

Bibliografía

- [1] V.ARNOLD: *Problèmes Ergotiques de la Mécanique Classique*.
Gauthier-Villars, Paris, 1967.
- [2] C.BEGUE, O.PIRONNEAU: *Hyperbolic Systems with Periodic Boundary Conditions: An Example with Euler Equations*.
Comp.&Maths. with Appls. Vol.11 pag. 113-128,1985.
- [3] C.BEGUE, T.CHACON, D.McLAUGHIN, G.PAPANICOLAOU,
O.PIRONNEAU: *Convection of Microstructure (II)*.
(Aparecerá).
- [4] C.BEGUE, T.CHACON, F.ORTEGON, O.PIRONNEAU: *3D Simulation of 2 length scales Turbulent Flows by homogenization*.
Advances in Turbulence, Proceedings of the First European Turbulence Conference, Lyon 1986; pag. 135-142.
- [5] M.BERCOVIER, O.PIRONNEAU: *Error estimates for finite element method solutions of the Stokes problem*.
Numer.Math. 33,211-224,1979.
- [6] BELTRAMI: in V.Arnold *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*.
Editions MIR 1974.
- [7] BENSOUSSAN, LIONS, G.PAPANICOLAOU: *Asymptotic Methods for Periodic Structures*.
North Holland,1978.

- [8] C.BERNARDI, G.RAUGEL: *A conforming FEM for the time dependent Navier-Stokes equations.*
Report 84034, Univ. of Paris 6, Labo.Numer.Anal.
- [9] B.CARDOT, T.CHACON, F.ORTEGON, O.PIRONNEAU, J.H.SAIAC: *Etude d'un modèle de Turbulence obtenu par homogénéisation des Structures de Sous-Mailles.*
Contribution de l'INRIA. Rapport Final de Contrat DRET 86-032.
- [10] T.CEBECI, A.M.O.SMITH: *Analysis of Turbulent boundary layers.*
Academic Press, INC (1974).
- [11] P.G.CIARLET: *Elasticité tridimensionnelle.*
Ed. Masson, Collection Recherches en Mathématiques Appliquées, 1986.
- [12] Y.COEFFE: *Les Modèles de Turbulence $k - \epsilon$ appliqués à l'écoulement de plan.*
EDF Report LNH HE 041/80.04,1980.
- [13] COMTE-BELLOT: *Cours de Turbulence.*
Ecole Centrale de Lyon (1982);
- [14] T.CHACON : *Oscillations due to the transport of Microstructures.*
(Aparecerá).
- [15] T.CHACON : *Etude d'un Modèle pour la Convection des Microstructures.*
Thèse 3^{ème} Cycle Paris 6.
- [16] T.CHACON, J.COUCE, R.ECHEVARRIA, E.FERNANDEZ, J.D.MARTIN: *Mathematical modelling of Turbulence: Validation of the Numerical Simulation of Turbulence by asymptotic techniques. Two-dimensional analysis of the heat transfert in the re-circulating zone of the HERMES aircraft.*
Report 1 of HERMES, contract RDANE 23/87, Grupo de Análisis Numérico de la Universidad de Sevilla, 1987.

- [17] T.CHACON, O.PIRONNEAU: *On the Mathematical Foundations of $k - \epsilon$ Turbulent Model.*
 Vistas in Applied Mathematics. A.V. Balakrishnan, A. Dorodnitsyn, J.L. Lions ed. Springer Verlag, New York, 1986, pag.44-56.
- [18] C.DESCHENES: *Simulation par éléments finis d'un écoulement interne turbulent avec le modèle $k - \epsilon$.*
 Thèse M. Sc. Univ. Laval, Canada (1986).
- [19] W. ECKHAUS: *Asymptotic Analysis of singular perturbations.*
 Studies in Mathematics and its applications, Volume 9 (1979).
- [20] V.GIRAULT, P.A.RAVIART: *Finite Element Methods for the Navier-Stokes Equations (Theory and Algorithms).*
 Springer-Verlag (1986).
- [21] LADYZHENSKAYA: *The mathematical theory of viscous incompressible flows.*
 Golden&Breach, N.Y. (1969).
- [22] B.E.LAUNDER, D.B.SPALDING: *Mathematical Models of Turbulence.*
 Academic Press, INC (1972).
- [23] LECTURE NOTES IN PHYSICS: *Macroscopic Modelling of Turbulent Flows.*
 Proceedings of a Workshop held at INRIA, Sophia-Antipolis (1984).
- [24] LEONARD: *Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows.*
 Adv. Geophys. 18a:237-248 (1974).
- [25] D.C.LESLIE: *Developments in the theory of Turbulence.*
 Clarendon Press (1973).
- [26] J.MATHIEU, D.JEANDEL: *Turbulence et approche spectrale.*
 Proceedings of Ecole d'Eté d'Analyse Numérique-Modélisation de la Turbulence, Clamart, France (1982).

- [27] D.McLAUGHIN, G.PAPANICOLAOU, O.PIRONNEAU: *Simulation Numérique de la Turbulence par Homogénéisation des Structures de Sous-Mailles*.
Rapport INRIA N° 188. Le Chesnay, France, 1983.
- [28] D.McLAUGHIN, G.PAPANICOLAOU, O.PIRONNEAU: *Convection of Microstructures and Related Problems*.
SIAM J. Appl. Math. 45, 1985, pag.780-793.
- [29] McLAUGHIN, O.PIRONNEAU: *Some Notes on Beltrami Fields*.
(aparecerá).
- [30] A.S.MONIN, A.M.YAGLOM : *Statistical Fluid Mechanics of Turbulence*.
Vol. 1 and 2. MIT Press, Cambridge, 1971, 1975.
- [31] F.ORTEGON: *Tabulations of the Closure Tensors for the M.P.P. Model of Turbulence*.
Rapport de Recherche N° 757, INRIA (1987).
- [32] R.L.PANTON: *Incompressible Flow*.
(1984).
- [33] O.PIRONNEAU: *Numerical Modelling of Turbulent flows*.
Université Pierre et Marie Curie and INRIA, 1986.
- [34] W.C.REYNOLDS: *Physical and analytical foundations concepts, and new directions in Turbulence Modelling and Simulation*.
Proceedings of Ecole d'Eté d'Analyse Numérique-Modélisation de la Turbulence, Clamart, France (1982).
- [35] W.C.REYNOLDS: *Computations of turbulent flows*.
Am. Rev. Fluid. Mech. 8 (1975), pag.183-208.
- [36] W.RUDIN: *Análisis Funcional*.
Ed. Reverté, 1979.

- [37] H.SCHLICHTING: *Teoría de la capa límite*.
Ediciones Urno (1972).
- [38] R.TEMAM: *Navier-Stokes Equations*.
Studies in Mathematics and its applications, Volume 2 (1977).
- [39] H.TENNEKES, J.L.LUMLEY: *A first course in Turbulence*.
The Massachusetts Institute of Technology (1972).


UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes
en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de
D. FRANCISCO ORTEGÓN GALLEGO

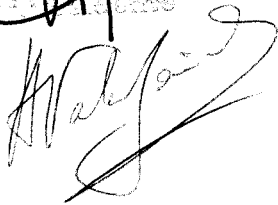
titulada ESTUDIO DE UN MODELO MATEMATICO DE TURBULENCIA
OBTENIDO MEDIANTE TECNICAS DE HOMOGENEIZACION

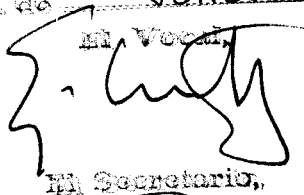
se acordó otorgarle la calificación de Apto Cum Laude

Sevilla, 29 de JUNIO 1988

El Vocal,


El Presidente




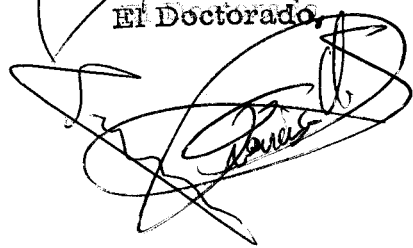
El Vocal,


El Secretario,



El Vocal,

El Doctorado,



* 5 0 0 6 0 2 0 8 9 *

FMA C 043/229