

2.15777

Universidad de Sevilla
Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE CIENCIAS
BIBLIOTECA

DOS PROBLEMAS RELACIONADOS CON E.D.P. DE EVOLUCIÓN NO LINEALES:

A : Sobre la Controlabilidad Aproximada de las Ecuaciones
de Navier-Stokes con Control Frontera


B : Una Nueva Demostración de la Existencia de Solución de Leyes
de Conservación Escalares en Varias Variables Espaciales

AUTORIZO LA CONSULTA DE
LA PRESENTE MEMORIA



Fdo.: MANUEL GONZÁLEZ BURGOS


Vº.Bº: EL DIRECTOR DEL
TRABAJO



Fdo. Enrique Fernández Cara.
Catedrático de Análisis
Matemático de la Universidad
de Sevilla.

Memoria presentada por
Manuel González Burgos,
para optar al grado de Doctor
en Matemáticas.

Sevilla, Julio 1993



Fdo. Manuel González Burgos

Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico
 número 95 número 203 del 2000
 correspondiente a 12 III 93
 Sevilla, El Jefe del Negociado de Física.

Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico
 de la Universidad desde el día 14/7/93
 hasta el día 19/7/93 (ambos inclusive)
 Sevilla 10 de septiembre de 1993
 EL DIRECTOR DEL Departamento

Fleuadoffillo

Mi agradecimiento

Al Profesor Dr. D. Enrique Fernández Cara por su valiosa y acertada dirección.

A todos los miembros del Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico de la Universidad de Sevilla por su ayuda y colaboración en la realización de este trabajo y en especial:

A los Profesores Drs. D. José D. Martín Gómez y D. José Real Anguas por sus indicaciones bibliográficas.

A los Profesores Dr. D. Francisco Ortegón Gallego y D. Daniel Franco Coronil por haber resuelto cuántos problemas de tipo informático les he planteado.

Y a mis compañeros Juan Antonio Bello Jiménez, Blanca Climent Ezquerro, Francisco Guillén González y Rosario Pérez García por haber atendido con gran interés a mis exposiciones sobre este trabajo.

Sevilla, Julio de 1993.

A mis Padres,
a Nagore y Alberto

INDICE DE MATERIAS

NOTACIONES	i
0 INTRODUCCION	1
0.1 Sobre la Primera Parte	1
0.2 Sobre la Segunda Parte	5
1 Resultados Previos	9
1.1 Algunos Espacios de Funciones	10
1.1.1 Espacios de Sobolev. Inyecciones Continuas y Compactas. Teorema de Extensión	10
1.1.2 Regularidad de Dominios. Espacios de Trazas	12
1.1.3 Algunos Espacios Relacionados con el Operador Divergencia	16
1.2 Las Ecuaciones de Navier-Stokes con Condiciones de Dirichlet no Homogéneas	21
1.2.1 Levantamiento del Dato de Contorno	21
1.2.2 Existencia de Solución	28
1.3 El Problema de Stokes con Condiciones Mixtas	39
1.3.1 El Marco de la Formulación Variacional Mixta de Problemas Elípticos	39
1.3.2 Existencia de Solución. Unicidad	40
1.3.3 Regularidad L^2 de la Solución del Problema de Stokes	45
1.4 El Operador de Stokes	60
2 Planteamiento del Problema. Resultados Principales	64
2.1 Planteamiento del Problema	65
2.2 Problemas Abiertos Formulados. Algunos Resultados Parciales Previos	67
2.2.1 Controlabilidad Aproximada de las Ecuaciones de Stokes con Control Distribuido	67
2.2.2 Controlabilidad Aproximada de las Ecuaciones de Navier-Stokes con Control Distribuido. Un Resultado Parcial	69
2.3 Los Resultados Principales	71
2.3.1 El Enunciado de los Resultados Principales	71
2.3.2 El Método de Demostración (un Esquema)	72
2.4 Demostración de los Resultados Principales	74

2.4.1 Algunos Resultados Previos de Carácter Técnico	74
2.4.2 Existencia de Solución Débil para un Problema no Lineal Acoplado	77
2.4.3 Demostración del Teorema 2.6	85
2.5 Algunas Cuestiones Relacionadas con el Problema Acoplado	88
2.5.1 Las Ecuaciones de Navier-Stokes con Condiciones de Contorno de Distinto Tipo	88
2.5.2 Un Resultado de Regularidad para el Problema de Evolución de Stokes	89
2.5.3 Regularidad del Problema (2.26)–(2.29)	92
3 Algunos Resultados Complementarios	95
3.1 Controlabilidad del Problema de Stokes: Control Frontera	96
3.1.1 Primera Demostración del Teorema 3.2	97
3.1.2 Segunda Demostración del Teorema 3.2	98
3.2 Aplicación al Problema Controlado por las Ecuaciones de Navier-Stokes	104
3.3 Otros Resultados sobre la Controlabilidad Débil de las Ecuaciones de Navier-Stokes	107
3.3.1 Control Distribuido: El Caso de una Componente Nula	107
3.3.2 Control sobre la Condición Inicial	110
4 Leyes Escalares de Conservación en una Variable Espacial	112
4.1 Introducción. Definición del Esquema	112
4.2 Algunos Lemas Previos	117
4.3 Convergencia: Paso al Límite en la Ecuación	127
5 Leyes Escalares de Conservación en Varias Variables Espaciales	134
5.1 Introducción. Definición del Esquema	134
5.2 Algunos Resultados de Carácter Técnico	140
5.3 Convergencia: Paso al Límite en la Ecuación	147
BIBLIOGRAFIA	155

Notaciones

\mathbb{R}^N : espacio euclídeo N -dimensional.

$\alpha \in \mathbf{N}^N$: multi-índice de longitud $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N$.

$\mathbb{R}_+^N = \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+$.

\cdot : producto escalar euclídeo.

$|\cdot|$: norma euclídea.

$\subset\subset$: inclusión estricta de conjuntos; $\Omega' \subset\subset \Omega$ equivale a $\bar{\Omega}' \subset \Omega$.

Ω : abierto de \mathbb{R}^N .

$\partial\Omega$: frontera del abierto Ω .

$\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$: vector normal unitario en el punto $x \in \partial\Omega$ orientado hacia el exterior de Ω .

γ : abierto relativo de $\partial\Omega$; en general, una componente conexa de $\partial\Omega$.

$\bar{\Omega}$: adherencia de Ω .

$(0, T)$, $T > 0$: intervalo temporal de observación.

$Q_T = \Omega \times (0, T)$.

$\Sigma_T = \partial\Omega \times (0, T)$.

$\Lambda_T = \gamma \times (0, T)$.

$S_T = (\partial\Omega \setminus \gamma) \times (0, T)$.

χ_A : función característica en el conjunto A .

f : función definida en un abierto Ω con valores en \mathbb{R} .

f : función definida en un abierto Ω con valores en \mathbb{R}^N .

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{i=1}^N : \text{vector (fila) gradiente de } u.$$

$$\nabla \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right)_{i,j=1}^N : \text{matriz gradiente de } \mathbf{u}.$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} : \text{Laplaciano de } u \text{ (} \in \mathbb{R} \text{)}.$$

$$\Delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i^2} : \text{Laplaciano de } \mathbf{u} \text{ (} \in \mathbb{R}^N \text{)}.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u^i}{\partial x_i} : \text{divergencia de } \mathbf{u}.$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \sum_{i,j=1}^N u^i \frac{\partial u^j}{\partial x_i}.$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} : \text{derivada en la dirección normal } \mathbf{n}.$$

dx : elemento diferencial de volumen.

dS : elemento diferencial de superficie.

$C^m(\Omega)$: espacio de funciones reales tales que, cuando $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha f$ es continua en Ω .

$C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ ($0 < \lambda \leq 1$) : espacio de funciones reales tales que $D^\alpha f$ es λ -Hölderiana en $\bar{\Omega}$.

$\mathcal{D}(\Omega)$: espacio vectorial de las funciones “test” habituales, de clase $C^\infty(\Omega)$ y de soporte compacto contenido en Ω .

$\mathcal{D}'(\Omega)$: espacio de las distribuciones sobre Ω , es decir aplicaciones lineales y continuas de $\mathcal{D}(\Omega)$ en \mathbb{R} (para la topología límite inductivo habitual en $\mathcal{D}(\Omega)$).

$L^p(\Omega)$: espacio de Banach de las (clases de) funciones de Ω en \mathbb{R} , medibles y p -sumables.

$L^p_{loc}(\Omega)$: espacio de Fréchet de las (clases de) funciones p -sumables en cada subconjunto propio, abierto y acotado de Ω .

$VA(\Omega)$: funciones de variación acotada en Ω .

$W^{m,p}(\Omega)$ (m natural) : espacio de Banach de las (clases de) funciones de $L^p(\Omega)$, cuyas derivadas en $\mathcal{D}'(\Omega)$ de orden $\leq m$ son también de $L^p(\Omega)$.

$W_0^{m,p}(\Omega)$: cierre de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$.

$W^{-m,p'}(\Omega)$: dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$, para $1 \leq p < +\infty$.

$W^{s,p}(\Omega)$: espacios de Sobolev de exponente real.

$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$ y $H^{-m}(\Omega) = W^{-m,2}(\Omega)$.

Sea B un espacio de Banach y B' su dual.

$L^p(0, T; B)$: espacio de Banach de las (clases de) funciones $f : [0, T] \mapsto B$ medibles y tales que la función $t \in [0, T] \mapsto \|f(t)\|_B$ (definida c.p.d.) es p -sumable.

$L_{loc}^p(0, T; B) = \{f; f \in L^p(a, b; B), \forall a, b : 0 < a < b < T\}$ (un espacio de Fréchet).

$C^m([0, T]; B)$: espacio de Banach de las funciones $f : [0, T] \mapsto B$ m veces diferenciables con continuidad (con respecto a la topología fuerte de B).

$\mathcal{D}(0, T; B)$: espacio vectorial de las funciones $f : [0, T] \mapsto B$ de clase C^∞ y de soporte compacto contenido en $(0, T)$.

$\mathcal{D}'(0, T; B) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0, T); B)$: espacio de las distribuciones con valores en B (aplicaciones lineales "continuas" de $\mathcal{D}(0, T)$ en B , para la topología límite inductivo habitual en $\mathcal{D}(0, T)$ y la topología fuerte en B).

$\|\cdot\|_{s,p;\Omega}$: norma de $W^{s,p}(\Omega)$

$\|\cdot\|_{s;\Omega}$: norma en $H^s(\Omega)$.

$\|\cdot\|_{s,p;\gamma}$: norma de $W^{s,p}(\gamma)$

$\|\cdot\|_{s;\gamma}$: norma en $H^s(\gamma)$.

$(\cdot, \cdot)_{s,\Omega}$: producto escalar en $H^s(\Omega)$.

$(\cdot, \cdot)_{s,\gamma}$: producto escalar en $H^s(\gamma)$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: producto de dualidad entre un espacio de Banach y su dual.

\hookrightarrow : inyección algebraica y topológica (inyección continua).

\mapsto : inyección compacta.

Introducción

En esta Memoria, estudiamos cuestiones relacionadas con dos problemas en derivadas parciales de evolución no lineales. En primer lugar, presentaremos resultados relacionados con la controlabilidad aproximada de las ecuaciones incompresibles de Stokes y Navier-Stokes, cuando el control se ejerce sobre un trozo de la frontera. En segundo lugar, presentamos Demostraciones constructivas de la existencia de solución débil de leyes de conservación escalares en una y varias variables espaciales. La Memoria queda dividida en dos Partes independientes, correspondiendo cada una de ellas a cada uno de los problemas considerados.

0.1 Sobre la Primera Parte

0.1.1 Planteamiento del Problema, Antecedentes y Objetivos

En general, la controlabilidad aproximada (también llamada controlabilidad débil) puede ser descrita como sigue. Consideremos un problema diferencial de evolución (sistema ó ecuación de estado), que debe cumplirse durante un intervalo de tiempo $(0, T)$. Actuamos sobre el sistema de estado mediante una función v (el control) perteneciente a un conjunto U_{ad} (el conjunto de los controles admisibles), obteniendo soluciones $y_v = y_v(t)$ (los estados). Sea W un espacio de Hilbert. Diremos que el sistema es aproximadamente (débilmente) controlable en W para el instante T si el conjunto

$$\{y_v(T); v \in U_{ad}\} \cap W$$

es denso en W . En otras palabras, si, cualesquiera que sean $z_d \in W$ (un estado deseado) y $\varepsilon > 0$, existe un control $v \in U_{ad}$ tal que

$$\|y_v(T) - z_d\|_W < \varepsilon.$$

En contraposición a la controlabilidad débil, diremos que el sistema es exactamente controlable en W para el instante T si para cada $z_d \in W$ existe un control $v \in U_{ad}$ tal que $y_v(T) = z_d$ (cf. [35]).

En esta primera parte de la Memoria, nos centraremos principalmente sobre la controlabilidad aproximada de las ecuaciones incompresibles y homogéneas de Navier-Stokes cuando el control se ejerce a través de una condición de Dirichlet sobre una parte de la frontera. También trabajaremos con el sistema de Stokes (caso lineal simplificado del anterior) y con otro tipo de controles (control distribuido, i.e. ejercido sobre el segundo miembro de la ecuación de movimiento y control ejercido sobre la condición inicial).

Desde el punto de vista de la controlabilidad aproximada, las ecuaciones de Navier-Stokes han sido estudiadas por diversos autores, considerando distintos tipos de control. Destacamos entre ellos al Profesor J.L. Lions que, en 1990 (cf. [37]), formuló dos conjeturas relacionadas con la controlabilidad del sistema de Navier-Stokes con control distribuido. Las principales técnicas que, aplicadas en el caso lineal, sirven para demostrar el resultado de controlabilidad débil están en este trabajo (cf. [34]). Hay que destacar también los trabajos de E. Fernández Cara y J. Real (cf. [15,14]), también relacionados con la controlabilidad débil de las ecuaciones de Navier-Stokes, donde se demuestra que el subespacio generado por los estados finales es denso en H . Aquí, admitiendo que los sistemas de Navier-Stokes considerados gobiernan el comportamiento de un fluido que ocupa un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ durante el intervalo de tiempo $(0, T)$, H denota el espacio de (clases de) funciones de $L^2(\Omega)^N$ con divergencia nula en Ω y traza normal nula sobre $\partial\Omega$. Las técnicas utilizadas por estos dos autores constituyen una generalización al caso no lineal de las propuestas en [37]. Por último, destacamos también el trabajo de C. Bardos y L. Tartar (cf. [3]) donde, con una técnica diferente, se demuestra un resultado análogo a los de [15] y [14] cuando $N = 2$ y el control se ejerce a través de la condición inicial.

El principal objetivo en esta parte de la Memoria fue, en principio, probar la controlabilidad débil de los sistemas incompresibles de Stokes y Navier-Stokes cuando el control se ejerce a través de una condición de Dirichlet sobre una parte de la frontera, denotada γ . Como segundo objetivo, nos propusimos generalizar el resultado de Bardos y Tartar al caso tridimensional. Las técnicas que deben ser utilizadas para alcanzar el primero de los objetivos propuestos, conducen a la necesidad de realizar un estudio del sistema de Stokes cuando se imponen condiciones de contorno de distinto tipo en distintas partes de la frontera. En este sentido, nos planteamos un tercer objetivo: Estudiar la existencia, unicidad y regularidad de solución del problema de Stokes con condiciones de contorno de esta naturaleza.

0.1.2 Principales Aportaciones Originales

En primer lugar, mencionaremos un resultado de existencia y unicidad de solución débil para el problema de Stokes

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{y} = g \quad \text{en } \Omega, \\ (-\pi \text{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{b} \quad \text{sobre } \gamma, \\ \mathbf{y} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \setminus \gamma, \end{array} \right. \quad (0.1)$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado, $\Omega \in W^{1,\infty}$ (cf. Definición 1.4), γ es una componente conexa de $\partial\Omega$, $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^N$, $g \in L^2(\Omega)$ y $\mathbf{b} \in H^{-1/2}(\gamma)^N$ (Teorema 1.37). En segundo lugar, obtenemos un resultado de regularidad L^2 de la solución de (0.1) cuando se imponen sobre los datos del problema y el abierto Ω hipótesis de regularidad más fuertes. En concreto, probamos que si $m \geq 0$ es un entero, $\Omega \in W^{m+2,\infty}$, $\mathbf{f} \in H^m(\Omega)^N$, $\mathbf{b} \in H^{m+1/2}(\gamma)^N$ y $g \in H^{m+1}(\Omega)$, entonces la solución de (0.1) verifica

$$(\mathbf{y}, \pi) \in H^{m+2}(\Omega)^N \times H^{m+1}(\Omega).$$

Por supuesto, este resultado viene acompañado de las correspondientes estimaciones (cf. Teorema 1.38).

En tercer lugar, probamos resultados relacionados con la controlabilidad débil del sistema de Navier-Stokes con control frontera (Teoremas 2.4 y 2.5). En este sentido, lo conseguido es el análogo de lo que se obtiene en [15], [14] con control distribuido y en [3] con $N = 2$ y control sobre el dato inicial: El subespacio generado por los estados finales es denso en \widetilde{H} (\widetilde{H} es el espacio de funciones de $L^2(\Omega)^N$ con divergencia nula en Ω y traza normal nula sobre $\partial\Omega \setminus \gamma$). Para probar este resultado, planteamos un sistema no lineal acoplado, al que añadimos condiciones de contorno “naturales” no lineales sobre $\gamma \times (0, T)$ y condiciones de Dirichlet homogéneas sobre $(\partial\Omega \setminus \gamma) \times (0, T)$. En el Teorema 2.11, se prueba la existencia de solución débil de este problema.

En cuarto lugar, probamos que el sistema de Stokes es aproximadamente controlable en \widetilde{H} (en el instante $T > 0$) cuando el control se ejerce sobre γ . También presentamos un algoritmo que permite construir una sucesión de controles cuyos estados finales asociados convergen a un estado deseado \mathbf{z}_d , fijado pero arbitrario en \widetilde{H} (cf. Sección 3.1). La Demostración de este resultado utiliza técnicas desarrolladas en [37] para otros problemas lineales.

Por último, se prueba en el Teorema 3.8 un nuevo resultado, relacionado con la controlabilidad de las ecuaciones de Navier-Stokes, cuando el control se ejerce sobre

la condición inicial. Este resultado es análogo al que Bardos y Tartar prueban en [3] aunque, en nuestro caso, N puede ser también 3.

0.1.3 Resumen de la Primera Parte de la Memoria

Esta primera Parte consta de tres Capítulos. Haremos a continuación una breve descripción de cada uno de ellos.

Comenzamos el Capítulo 1 con una Sección donde se recuerdan las definiciones y ciertas propiedades de algunos espacios de funciones que no son “standard”. Destacamos entre ellos tres nuevos espacios relacionados con el operador divergencia, \widetilde{V} , \widetilde{H} y \widetilde{V} , que juegan un papel fundamental en lo que sigue. Seguidamente, pasamos a estudiar el problema incompresible de Navier-Stokes con condiciones de contorno no homogéneas. En particular, hallamos condiciones sobre el dato de contorno que aseguran la existencia de solución débil. Dedicamos la tercera Sección del Capítulo a la existencia, unicidad y regularidad de la solución de (0.1). Para analizar la regularidad L^2 , se siguen estrategias análogas a las desarrolladas en [4] para el problema de Stokes con condiciones de Dirichlet. Terminamos este Capítulo con un estudio del espectro del operador de Stokes asociado a condiciones de contorno de distinto tipo sobre distintas partes de la frontera.

Dedicamos el Capítulo 2 a la principal cuestión planteada en esta parte de la Memoria: Controlabilidad aproximada del sistema de Navier-Stokes con control frontera. Como se ha dicho, los resultados principales afirman que el subespacio generado por los estados finales es denso en \widetilde{H} . La Demostración se basa en un resultado de existencia de solución débil para un cierto problema acoplado no lineal. Finalizamos este Capítulo con el análisis de algunas cuestiones relacionadas con este problema.

En el Capítulo 3, probamos que el sistema de Stokes es aproximadamente controlable en \widetilde{H} utilizando control frontera. En la segunda Sección, analizamos las dificultades que surgen, al aplicar el mismo razonamiento que en el caso lineal, para probar la controlabilidad débil del sistema de Navier-Stokes. Terminamos el Capítulo probando un resultado parcial de controlabilidad del sistema de Navier-Stokes cuando el control se ejerce sobre la condición inicial.

0.1.4 Resultados que Quedan Pendientes. Comentarios

Independientemente de las aportaciones que hace esta Memoria, mencionaremos algo de lo que aún queda por hacer:

- Averiguar si realmente hay ó no controlabilidad aproximada del sistema incompresible de Navier-Stokes en cualquiera de sus variantes (control distribuido, control frontera, control sobre la condición inicial, etc.).
- Formular y analizar algoritmos que construyan sucesiones de controles cuyos estados finales asociados converjan a un estado deseado (ver [11], donde se formula un algoritmo convergente para la ecuación del calor semilineal).
- Estudiar la existencia y/ó unicidad de solución fuerte para el sistema incompresible de Navier-Stokes con condiciones de distinto tipo sobre distintas partes de la frontera.

Por último, comentaremos que las hipótesis impuestas sobre el abierto Ω y el trozo de frontera γ (Ω es un abierto acotado múltiplemente conexo, $\Omega \in W^{2,\infty}$ y γ es una componente conexa de $\partial\Omega$) pueden ser cambiadas y debilitadas en el siguiente sentido: $\Omega \in W^{1,\infty}$ y γ es un abierto relativo de $\partial\Omega$.

Los resultados que aparecen en el Capítulo 2 constituyen la base de la referencia [12], de próxima aparición.

0.2 Sobre la Segunda Parte

0.2.1 Los Problemas Considerados. Antecedentes y Objetivos

El principal objetivo de la segunda parte de la Memoria es presentar una nueva Demostración de existencia de solución débil para leyes de conservación escalares en varias variables espaciales. En concreto, estamos interesados en un resultado de existencia de solución débil para el problema de Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(u) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times (0, T), \quad (0.2)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N, \quad (0.3)$$

donde u_0 es una función dada y las f_i son derivables en \mathbb{R} y verifican $f_i(0) = 0$. Problemas tales como (0.2) surgen en el estudio de fenómenos de ondas no lineales cuando los efectos de disipación pueden ser despreciados.

Es bien conocido que, si u_0 es suficientemente regular, se puede construir una única solución clásica local en tiempo mediante el método de las características. La imposibilidad de construir una solución clásica global en tiempo, se debe a los efectos de las

no linealidades que aparecen en (0.2) y no a la técnica particular usada para construir dicha solución (cf. [46]). También es conocido que, en general, la solución de (0.2)–(0.3) desarrolla discontinuidades (ondas de choque) cuando t crece hacia un cierto $t_0 > 0$. Por tanto, hay que entender este problema diferencial en un sentido generalizado (solución débil):

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+), \\ \iint_{t>0} \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^N f_i(u) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) dx dt + \int_{t=0} u_0 \Phi dx = 0 \quad \forall \Phi \in C^1_0(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+). \end{array} \right.$$

El estudio riguroso de las leyes de conservación fue iniciado por E. Hopf ([24]) en los años 50. Este estudio fue continuado por O.A. Oleinik y P.D. Lax en numerosos trabajos. Destacamos, en particular, [42], donde la autora demuestra la existencia de solución débil de (0.2)–(0.3) para $N = 1$ bajo hipótesis de convexidad sobre la función f , introduciendo para ello un esquema en diferencias finitas. También en [42], se prueba un resultado de unicidad de solución dentro de la clase de funciones que verifican la llamada condición E :

$$\frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} < \frac{E}{t} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad \forall a > 0,$$

donde $E > 0$ es una constante independiente de x , t y a .

Para varias variables espaciales, destacamos las aportaciones de Conway y Smoller [7], donde se generalizan los resultados de existencia obtenidos en [42]. Un resultado de existencia de solución de (0.2)–(0.3) fue probado por Vol'pert en [50], utilizando el método de viscosidad. Este resultado fue extendido por Kružkov en [27], donde también se demuestra la unicidad de solución en la clase de funciones que verifican una condición adicional: la condición de entropía (cf. [32]). Por último, hay que señalar que existen resultados de existencia de solución para sistemas de leyes de conservación en una variable espacial. Destacamos el trabajo de Glimm [19], donde se prueba la existencia de solución global para datos pequeños utilizando el mismo esquema en diferencias finitas introducido en [42].

0.2.2 Principales Aportaciones Originales

La originalidad del trabajo que presentamos radica en el esquema que se propone para aproximar las soluciones débiles de (0.2)–(0.3). Éste reposa sobre una semidiscretización de la ecuación que permite eliminar la derivada respecto de t y la introducción de un término “viscoso”, llevada a cabo con ayuda de un parámetro ε (destinado a tender a

cero). Como es habitual, los órdenes de magnitud de ε y del parámetro h que determina la semidiscretización en tiempo no son independientes. La gran virtud de nuestro esquema consiste en que proporciona una expresión explícita de la solución en la etapa de tiempo $k + 1$ a partir de la solución en la etapa k . Se prueban estimaciones “a priori” adecuadas para las soluciones aproximadas; posteriormente, tras extraer una subsucesión convergente, un conveniente procedimiento de paso al límite nos conduce a la existencia de solución de (0.2)–(0.3).

Cuando $N = 1$ (Capítulo 4), demostramos que, si f es estrictamente convexa, la solución construida verifica la condición E de Oleñik. En este caso, la solución construida mediante el método que proponemos es la única solución físicamente admisible.

0.2.3 Resumen de la Segunda Parte de la Memoria

La segunda parte de la Memoria está integrada por dos Capítulos (Capítulos 4 y 5). Dedicamos el Capítulo 4 al estudio del caso particular en que $N = 1$ y f es estrictamente convexa. En el Capítulo 5, tratamos el caso general en que $N \geq 2$.

Comenzamos el Capítulo 4 definiendo el esquema que utilizamos para construir las soluciones aproximadas. Para ello, introducimos dos parámetros positivos (h y ε), a los que posteriormente se exigen propiedades adecuadas. En la segunda Sección del Capítulo, probamos ciertas estimaciones “a priori” de las soluciones aproximadas. En concreto, obtenemos estimaciones en norma L^∞ , estimaciones sobre la variación total de la solución aproximada y estimaciones en norma L^1 de la derivada respecto de t . También en esta Sección, probamos que las soluciones aproximadas verifican la condición E mencionada anteriormente. Para obtener estas estimaciones, debemos imponer ciertas condiciones a los parámetros h y ε . Terminamos el Capítulo probando que las soluciones aproximadas convergen, en un cierto sentido, hacia una solución débil de (0.2)–(0.3) (Lemas 4.10 y 4.13).

A diferencia de lo que se hace en el Capítulo 4, en el Capítulo 5 no imponemos ninguna hipótesis de convexidad sobre las f_i . La estructura de este Capítulo es análoga a la del anterior. En la primera Sección, presentamos el esquema que se utiliza para construir las soluciones aproximadas. En la segunda Sección, obtenemos estimaciones “a priori”; en la tercera, utilizamos éstas para probar que las soluciones aproximadas convergen hacia una solución débil de (0.2)–(0.3). De nuevo, lo que se acota uniformemente es la norma L^∞ , la variación total y la norma L^1 de la derivada de la solución aproximada. En este caso, también es necesario imponer ciertas condiciones a los parámetros h y ε .

0.2.4 Resultados que Quedan Pendientes

A nuestro entender, quedan pendientes las siguientes cuestiones:

- Demostrar que la solución construida en el caso de varias variables espaciales verifica la condición de entropía de Lax que, como es bien sabido, implica la unicidad de solución. Si fuera posible probar esto, estaría demostrado que la solución conseguida en el Capítulo 5 es la única físicamente aceptable.
- Adaptar el esquema propuesto a sistemas de leyes de conservación en una variable espacial. En este contexto, hay que comentar que existen pocos resultados de existencia de solución débil global en tiempo (cf. [2], [9], [10]).

Por último, mencionemos que la mayoría de los resultados que se exponen en esta parte, están recogidos en [13].

Capítulo 1

Resultados Previos

Comenzaremos este Capítulo (y también la primera parte de la Memoria) con algunos resultados previos que serán necesarios para su desarrollo posterior. Empezamos recordando la definición de algunos espacios “standard” como los espacios $L^p(\Omega)$, $W^{k,p}(\Omega)$, espacios de trazas, espacios relacionados con el operador divergencia,... y exponiendo ciertos resultados relativos a los mismos. Seguiremos probando un resultado de existencia de solución para el problema incompresible de Navier-Stokes con condiciones de contorno de tipo Dirichlet no homogéneas. Acabaremos este Capítulo inicial con el estudio de la existencia y regularidad L^2 del problema de Stokes con condiciones de contorno de distinto tipo en distintas partes de la frontera.

1.1 Algunos Espacios de Funciones

En lo que sigue, Ω será un conjunto abierto de \mathbb{R}^N , con frontera $\partial\Omega$.

1.1.1 Espacios de Sobolev. Inyecciones Continuas y Compactas. Teorema de Extensión

De manera usual, definiremos $\mathcal{D}(\Omega)$ como el espacio vectorial de las funciones indefinidamente derivables, con soporte compacto contenido en Ω ; $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ es el espacio de las restricciones de las funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ a Ω ; de forma equivalente, si \mathcal{O} es un abierto tal que $\bar{\Omega} \subset \mathcal{O}$, entonces

$$\mathcal{D}(\bar{\Omega}) = \{\phi|_{\Omega}; \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})\}.$$

En lo que sigue, supondremos que $\mathcal{D}(\Omega)$ está dotado de la topología límite inductivo habitual. Designaremos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ el correspondiente espacio dual (el espacio de las distribuciones) y por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto de dualidad entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ y $\mathcal{D}(\Omega)$.

Dado $p \in [1, \infty]$, llamaremos $L^p(\Omega)$ al espacio de (las clases de) funciones medibles u , definidas en Ω , para las que

$$\|u\|_{0,p;\Omega} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \quad \text{para } p \in [1, \infty),$$

y

$$\|u\|_{0,\infty;\Omega} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty \quad \text{si } p = \infty.$$

Más generalmente, si $k \geq 0$ es un entero y $p \in [1, \infty]$, introducimos el espacio de Sobolev

$$W^{k,p}(\Omega) = \{v; v \in L^p(\Omega), \quad D^\alpha v \in L^p(\Omega), \quad \forall |\alpha| \leq k\},$$

donde las derivadas $D^\alpha v$ deben entenderse en el sentido de las distribuciones. Es bien sabido que $W^{k,p}(\Omega)$ posee estructura de espacio de Banach para la norma $\|\cdot\|_{k,p;\Omega}$, dada por:

$$\|u\|_{k,p;\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad \text{para } p \in [1, \infty),$$

$$\|u\|_{k,\infty;\Omega} = \max_{|\alpha| \leq k} \left(\sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)| \right) \quad \text{si } p = \infty.$$

Los espacios $L^p(\Omega)$, $W^{k,p}(\Omega)$ son separables si $1 \leq p < \infty$ y son reflexivos para $1 < p < \infty$. Si $p = 2$, el espacio $W^{k,2}(\Omega)$ es usualmente denotado por $H^k(\Omega)$; se trata de un espacio de Hilbert para el producto escalar

$$(u, v)_{k;\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx.$$

Denotaremos simplemente $\|\cdot\|_{k,\Omega}$ la norma que procede del anterior producto escalar.

Definimos $W_0^{k,p}(\Omega)$ como la adherencia de $\mathcal{D}(\Omega)$ para la norma $\|\cdot\|_{k,p;\Omega}$. Si $k \geq 1$ y Ω es un subconjunto propio de \mathbb{R}^N , entonces $W_0^{k,p}(\Omega)$ es generalmente distinto de $W^{k,p}(\Omega)$.

Las distintas propiedades de $W^{k,p}(\Omega)$ nos conducen a las llamadas inyecciones de Sobolev (cf. [1,28]):

Lema 1.1 Sean Ω un conjunto abierto de \mathbb{R}^N y $p \in [1, \infty]$.

i) **Inyecciones Continuas de Sobolev.** Se tienen las siguientes inyecciones continuas

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \text{para } q \in [p, p_*]; \quad (1.1)$$

aquí, p_* está definido a partir de las relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_*} &= \frac{1}{p} - \frac{1}{N} && \text{si } p < N, \\ p \leq p_* < \infty & \text{ es arbitrario} && \text{si } p = N, \\ p_* &= \infty && \text{si } p > N. \end{aligned} \quad (1.2)$$

ii) **Inyecciones continuas de Morrey.** Para $p > N$, se tienen las siguientes inyecciones continuas:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\bar{\Omega}), \quad \text{para } 0 < \beta \leq \alpha = 1 - \frac{N}{p}. \quad (1.3)$$

iii) **Inyecciones compactas de Rellich-Kondrachov.** Cuando Ω es acotado, las inyecciones (1.1) y (1.3) son compactas si $1 \leq q < p_*$ y $0 < \beta < \alpha$, respectivamente. ■

Las inyecciones precedentes también son ciertas cambiando $W_0^{1,p}(\Omega)$ por $W^{1,p}(\Omega)$; para ello, basta añadir ciertas propiedades de regularidad a la frontera. Concretando algo más, para que se siga verificando (1.1), basta que $\partial\Omega$ tenga la “propiedad del cono” (cf. [1] para la definición y el resultado) y, para que se verifique (1.3), basta que $\partial\Omega$ tenga la propiedad “Lipschitz local fuerte” (cf. [1]). Razonando por inducción, es posible generalizar las anteriores inyecciones continuas y compactas a los espacios de Sobolev con orden de derivabilidad mayor que uno.

Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^N con frontera de clase $C^{0,1}$ (véase la Definición 1.4 de la Sección 1.1.2). En estas condiciones, se tiene el siguiente resultado de extensión (cf. [1]):

Lema 1.2 Para cada $p \in [1, \infty)$, existe una aplicación $\mathcal{E} \in \mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), W^{1,p}(\mathbb{R}^N))$ tal que :

1. $\mathcal{E}u(x) = u(x)$ para x c.p.d. en Ω ,
2. $\|\mathcal{E}u\|_{1,p;\mathbb{R}^N} \leq C \|u\|_{1,p;\Omega}$ y $\|\mathcal{E}u\|_{0,p;\mathbb{R}^N} \leq C \|u\|_{0,p;\Omega}$ para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

■

Si Ω_0 es un dominio tal que $\bar{\Omega} \subset \Omega_0$, en las condiciones del Lema 1.2 es fácil probar que existe una aplicación lineal y continua, $\mathcal{E}_{\Omega_0} : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega_0)$, tal que:

1. $\mathcal{E}_{\Omega_0}u(x) = u(x)$ para x c.p.d. en Ω ,
2. $\|\mathcal{E}_{\Omega_0}u\|_{1,p;\Omega_0} \leq C(\Omega, \Omega_0) \|u\|_{1,p;\Omega}$ y $\|\mathcal{E}_{\Omega_0}u\|_{0,p;\Omega_0} \leq C(\Omega, \Omega_0) \|u\|_{0,p;\Omega}$ para cada u en $W^{1,p}(\Omega)$.

Es posible generalizar el concepto de espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ para valores de k que sean no enteros:

Definición 1.3 Sean $s \in \mathbb{R}_+$, $s \notin \mathbb{N}$, y $p \geq 1$. Denotamos $W^{s,p}(\Omega)$ el subespacio de $W^{[s],p}(\Omega)$ constituido por las funciones u que verifican^a:

$$I_\alpha(u) \equiv \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x - y|^{N+p(s-[s])}} dx dy < \infty \quad \forall \alpha : |\alpha| = [s].$$

$W^{s,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach para la norma $\|\cdot\|_{s,p;\Omega}$, dada por:

$$\|u\|_{s,p;\Omega} = \left(\|u\|_{[s],p;\Omega}^p + \sum_{|\alpha| \leq [s]} I_\alpha(u) \right)^{1/p}.$$

■

Para $p = \infty$ hay que realizar el oportuno cambio en la Definición. $W^{s,p}(\Omega)$ es separable si $p < \infty$ y reflexivo si $1 < p < \infty$ (cf. [28]). También cuando $s \in \mathbb{R}_+$ utilizaremos la notación $W_0^{s,p}(\Omega)$ para designar el cierre de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $W^{s,p}(\Omega)$. Finalmente, para $s \in \mathbb{R}_+$, $p \in [1, \infty)$ y p' tal que $1/p + 1/p' = 1$, $W^{-s,p'}(\Omega)$ denotará el espacio dual de $W_0^{s,p}(\Omega)$.

1.1.2 Regularidad de Dominios. Espacios de Trazas

En lo que sigue, analizaremos el concepto de traza de una función de $W^{1,p}(\Omega)$. Para ello, en primer lugar recordaremos cómo puede ser descrita la frontera $\partial\Omega$ de un dominio Ω de \mathbb{R}^N . La siguiente definición es debida a Nečas (cf. [41]; véase también [40]).

Definición 1.4 Sea $k \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in (0, 1]$. Se dice que un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es de clase $C^{k,\lambda}$ si existen:

^a[s] representa la parte entera de s .

1. m sistemas de coordenadas cartesianas X_r ($m \in \mathbf{N}$, $1 \leq r \leq m$)

$$X_r = (x_{r,1}, x_{r,2}, \dots, x_{r,N-1}, x_{r,N}) = (x'_r, x_{r,N})$$

2. Un número $\alpha > 0$ y m funciones

$$a_r \in C^{k,\lambda}(\bar{\Delta}_r), \quad 1 \leq r \leq m,$$

donde $\Delta_r = \{x'_r; x'_r \in \mathbb{R}^{N-1}, |x_{r,i}| < \alpha \quad \forall i: 1 \leq i \leq m\}$.

3. Un número $\beta > 0$ tal que

(a) los conjuntos

$$\Lambda_r = A_r^{-1}(\{(x'_r, x_{r,N}); x'_r \in \Delta_r, x_{r,N} = a_r(x'_r)\})$$

son subconjuntos de $\partial\Omega$ (para $1 \leq r \leq m$) y $\partial\Omega = \bigcup_{r=1}^m \Lambda_r$; (aquí las $A_r : X \rightarrow X_r$, son las transformaciones de coordenadas),

(b) para cada $1 \leq r \leq m$ el correspondiente

$$U_r^+ = A_r^{-1}(\{(x'_r, x_{r,N}); x'_r \in \Delta_r, a_r(x'_r) < x_{r,N} < a_r(x'_r) + \beta\})$$

está contenido en Ω ,

(c) para cada $r = 1, \dots, m$, el correspondiente

$$U_r^- = A_r^{-1}(\{(x'_r, x_{r,N}); x'_r \in \Delta_r, a_r(x'_r) - \beta < x_{r,N} < a_r(x'_r)\})$$

está contenido en $\bar{\Omega}^c$.

En tal caso, escribiremos $\Omega \in C^{k,\lambda}$.

■

Hay que hacer notar que $U_r = U_r^+ \cup \Lambda_r \cup U_r^-$ es un abierto de \mathbb{R}^N . Es fácil probar que existe un abierto U_0 tal que $U_0 \subset \bar{U}_0 \subset \Omega$ y $\{U_r\}_{r=0}^m$ es un recubrimiento abierto de $\bar{\Omega}$, mientras que $\{U_r\}_{r=1}^m$ lo es de $\partial\Omega$. Aplicando el Teorema de la Partición de la Unidad (cf. [1], pág. 51), se tiene que, si Ω es de clase $C^{k,\lambda}$, existen funciones $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ con las propiedades siguientes:

1. $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ y $\text{Sop } \varphi_j \subset U_j \quad \forall j: 1 \leq j \leq m$,

2. $0 \leq \varphi_j \leq 1$ en \mathbb{R}^N , $\forall j: 1 \leq j \leq m$,

3. $\sum_{j=0}^m \varphi_j(x) = 1$ en Ω ,

$$4. \sum_{j=1}^m \varphi_j(x) = 1 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Observación: A partir de este momento, si no se especifica lo contrario, supondremos que los abiertos Ω considerados son de clase $C^{0,1}$ lo que abreviadamente se indicará escribiendo que $\Omega \in C^{0,1}$. Bajo esta hipótesis, se verifica el Lema 1.1 con $W^{1,p}(\Omega)$ cambiado por $W_0^{1,p}(\Omega)$, el Lema 1.2, etc. ■

Definición 1.5 Para $1 \leq r \leq m$, pondremos

$$Q_r(x'_r, \xi) = (x'_r, a_r(x'_r) + \xi) \quad \forall (x'_r, \xi) \in \bar{\Delta}_r \times [-\beta, \beta].$$

Está claro que $A_r^{-1} \circ Q_r$ aplica de forma biyectiva $\Delta_r \times (-\beta, \beta)$ sobre U_r , $\Delta_r \times (0, \beta)$ sobre U_r^+ , $\Delta_r \times [0, \beta)$ sobre $\Lambda_r \cup U_r^+$ y $\Delta_r \times \{0\}$ sobre Λ_r . Además, en las condiciones de regularidad de $\partial\Omega$, se tiene que $A_r^{-1} \circ Q_r$ y $Q_r^{-1} \circ A_r$ son funciones Lipschitzianas en $\Delta_r \times (-\beta, \beta)$ y U_r respectivamente (cf. [28] pág. 309).

Sea u una función definida sobre $M \subset U_r$. Denotamos u_r la función definida en $Q_r^{-1} \circ A_r(M)$ como sigue

$$u_r = u \circ A_r^{-1} \circ Q_r \quad (1.4)$$

Definición 1.6 Sea $p \in [1, \infty)$. Decimos que u pertenece a $L^p(\partial\Omega)$ si las (clases de) funciones u_r están $L^p(\Delta_r)$ para $r = 1, 2, \dots, m$, i.e., si

$$\int_{\Delta_r} |u_r(x'_r, 0)|^p dx'_r < \infty \quad \forall r = 1, 2, \dots, m.$$

Como es habitual, identificaremos en $L^p(\Delta_r)$ dos funciones u_r y v_r si coinciden c.p.d. para la medida inducida por las A_r , i.e. si

$$\int_{\Delta_r} |u_r(x'_r, 0) - v_r(x'_r, 0)|^p dx'_r = 0.$$

Así, $L^p(\partial\Omega)$ es un espacio vectorial de “clases de funciones” definidas (c.p.d.) sobre $\partial\Omega$. El espacio vectorial $L^p(\partial\Omega)$, dotado de la norma

$$\|u\|_{0,p;\partial\Omega} = \sum_{r=1}^m \left(\int_{\Delta_r} |u_r(x'_r, 0)|^p dx'_r \right)^{1/p},$$

se convierte en un espacio de Banach separable. Para el caso $p = \infty$ hay que hacer en la Definición los cambios usuales. En todo caso, obsérvese que la Definición de $L^p(\partial\Omega)$ no depende de la descripción particular de $\partial\Omega$ utilizada (cf. [41,28]).

Sea $u \in L^1(\partial\Omega)$ y consideremos una partición de la unidad $\{\varphi_r\}_{r=0}^m$ subordinada al recubrimiento $\{U_r\}_{r=0}^m$ de $\bar{\Omega}$. Utilizando esta partición de la unidad, podemos definir la integral de u sobre $\partial\Omega$:

$$\int_{\partial\Omega} u(x) dS = \sum_{r=1}^m \int_{\Delta_r} (u\varphi_r)_r(x'_r, 0) \left[1 + \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{\partial a_r(x'_r)}{\partial x_{r,i}} \right)^2 \right]^{1/2} dx'_r \quad (1.5)$$

La expresión (1.5) es independiente de la elección particular de la partición de la unidad y de la descripción de $\partial\Omega$ utilizada (cf. [41]). Además, si $p \in [1, \infty)$, y $u \in L^p(\Omega)$,

$$\left(\int_{\partial\Omega} |u(x)|^p dS \right)^{1/p}$$

define una norma en $L^p(\partial\Omega)$ que es equivalente a $\|\cdot\|_{0,p;\partial\Omega}$.

Definición 1.7 Sean Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^N , $q \geq 1$, $s \geq 0$ y supongamos que $\Omega \in C^{[s],1}$. Denotamos $W^{s,q}(\partial\Omega)$ el subespacio de funciones de $L^q(\partial\Omega)$ que verifican $w_r \in W^{s,q}(\Delta_r)$ para $1 \leq r \leq m$. Dotado de la norma

$$\|w\|_{s,q;\partial\Omega} = \left(\sum_{r=1}^m \|w_r\|_{s,q;\Delta_r}^q \right)^{1/q}, \quad (1.6)$$

$W^{s,q}(\partial\Omega)$ es un espacio de Banach. ■

De nuevo, se puede probar que la definición de $W^{s,q}(\partial\Omega)$ es independiente de la descripción particular de $\partial\Omega$ utilizada. Los $W^{s,q}(\partial\Omega)$ son denominados, con carácter general, espacios de trazas. Ello se debe principalmente al resultado que sigue:

Teorema 1.8 Sean $p > 1$ y $\Omega \in C^{0,1}$. Entonces existe una aplicación lineal y continua $\gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ tal que $\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$ para $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. ■

En este marco, también se tiene el Teorema inverso:

Teorema 1.9 Sean $p > 1$ y $\Omega \in C^{0,1}$. Entonces existe una aplicación lineal y continua $\mathcal{T} : W^{1-1/p,p}(\partial\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\Omega)$ tal que, si $v = \mathcal{T}u$, entonces $\gamma_0 v = u$. ■

Para la Demostración de estos resultados se pueden consultar [41] y [28].

1.1.3 Algunos Espacios Relacionados con el Operador Divergencia.

El análisis de la existencia de solución de las ecuaciones de Stokes y Navier-Stokes hace conveniente el estudio de ciertos espacios relacionados con el operador divergencia. De forma general, supondremos que Ω cumple las propiedades siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega \subset \mathbb{R}^N (N = 2 \text{ ó } 3) \text{ es un abierto conexo y acotado;} \\ \Omega \in C^{0,1}, \\ \text{ó bien } \Omega \text{ es simplemente conexo con frontera } \partial\Omega, \\ \text{ó bien es múltiplemente conexo; en tal caso las} \\ \text{componentes conexas de la frontera son} \\ \Gamma_0 \text{ (la frontera exterior) y las fronteras interiores } \Gamma_i \text{ (} 1 \leq i \leq p \text{).} \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Consideremos el espacio^b

$$H(\operatorname{div}; \Omega) = \{\mathbf{u}; \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^N, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^N\}.$$

Dotado del producto escalar

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H(\operatorname{div}; \Omega)} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0; \Omega} + (\nabla \cdot \mathbf{u}, \nabla \cdot \mathbf{v})_{0; \Omega}$$

$H(\operatorname{div}; \Omega)$ posee estructura de espacio de Hilbert. Pondremos

$$H_0(\operatorname{div}; \Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)^N}^{H(\operatorname{div}; \Omega)} \equiv \text{adherencia de } \mathcal{D}(\Omega)^N \text{ en } H(\operatorname{div}; \Omega)$$

(un nuevo espacio de Hilbert para el mismo producto escalar). Se tiene que $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^N$ es denso en $H(\operatorname{div}; \Omega)$ y ello permite generalizar la fórmula de Gauss en el siguiente sentido^c (cf. [17]):

Teorema 1.10 *La aplicación $\gamma_n : \mathbf{v} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^N \longrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}$ puede ser extendida de forma única a una aplicación lineal y continua, también denotada γ_n y llamada "traza normal", de $H(\operatorname{div}; \Omega)$ en $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Además,*

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \phi \, dx = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \phi \, dx + \langle \gamma_n \mathbf{v}, \phi \rangle_{-1/2; \partial\Omega} \quad (1.8)$$

cualesquiera que sean $\mathbf{v} \in H(\operatorname{div}; \Omega)$ y $\phi \in H^1(\Omega)$. ■

^bEl operador divergencia está definido como sigue: Si $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_N)$, entonces $\nabla \cdot \mathbf{z} = \sum_{i=1}^N D_i z_i$
^c \mathbf{n} denotada el vector unitario normal a $\partial\Omega$ y exterior a Ω .

Consideramos a continuación los espacios de divergencia nula habituales (cf. [29], [36], [47], [48], [17],...):

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^N, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ en } \Omega\},$$

$$H(\Omega) = \overline{\mathcal{V}}^{L^2(\Omega)^N}, \quad V(\Omega) = \overline{\mathcal{V}}^{H^1(\Omega)^N}.$$

$V(\Omega)$ es un espacio de Hilbert para la seminorma $|\cdot|_{1,\Omega}$ (equivalente a la norma usual $\|\cdot\|_{1,\Omega}$), gracias a la desigualdad de Poincaré. $H(\Omega)$ es también un espacio de Hilbert para la norma de $L^2(\Omega)^N$ y, asimismo, un subespacio propio de $H_0(\text{div}; \Omega)$ (en virtud del Teorema 1.8 podemos hablar de “trazas normales” de funciones de $H(\Omega)$). Para dar una caracterización de estos espacios, necesitamos una versión simplificada del Teorema de De Rham:

Teorema 1.11 Si $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^N$ y

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

entonces, existe $p \in L^2(\Omega)$ tal que $\mathbf{f} = \nabla p$. Además, si Ω es conexo, p es única salvo constantes aditivas.

■

Una demostración del resultado anterior, así como algunas consecuencias, puede verse en [17], [47], [45], [48]. Denotemos $L_0^2(\Omega)$ el subespacio de $L^2(\Omega)$ siguiente:

$$L_0^2(\Omega) = \{p; p \in L^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} p \, dx = 0\}.$$

También, introducimos el “ortogonal” de $V(\Omega)$

$$V(\Omega)^\perp = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N, \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w})_{1;\Omega} = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in V(\Omega)\}$$

y el “polar” de $V(\Omega)$

$$V(\Omega)^0 = \{\mathbf{v}'; \mathbf{v}' \in H^{-1}(\Omega)^N, \quad \langle \mathbf{v}', \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega)\}$$

(evidentemente se trata de nuevos espacios de Hilbert, subespacios cerrados de $H_0^1(\Omega)^N$ y $H^{-1}(\Omega)^N$ respectivamente). Del Teorema 1.11, se deduce el siguiente resultado:

Teorema 1.12 Se tiene:

1. El operador gradiente ∇ es un isomorfismo de $L_0^2(\Omega)$ sobre $V^0(\Omega)$.
2. El operador divergencia $\nabla \cdot$ es un isomorfismo de $V^\perp(\Omega)$ sobre $L_0^2(\Omega)$.

■

Gracias al Teorema 1.12, podemos caracterizar $H(\Omega)$ y $V(\Omega)$ de la siguiente forma:

$$V(\Omega) = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ en } \Omega\},$$

$$H(\Omega) = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^N, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ en } \Omega, \quad \gamma_n \mathbf{v} = 0\}.$$

Exponemos a continuación un resultado relativo al levantamiento de trazas que será utilizado más adelante, al tratar condiciones de contorno no homogéneas.

Lema 1.13 *Dadas $g \in L^2(\Omega)$ e $\mathbf{y}_\Gamma \in H^{1/2}(\partial\Omega)^N$ tales que*

$$\int_{\Omega} g \, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{y}_\Gamma \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

existe una función $\mathbf{y} \in H^1(\Omega)^N$, única salvo una función aditiva de $V(\Omega)$, tal que

$$\nabla \cdot \mathbf{y} = g \text{ en } \Omega, \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}_\Gamma \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Además, existe una constante C positiva e independiente de \mathbf{y} e \mathbf{y}_Γ , tal que

$$\inf_{\mathbf{z} \in V(\Omega)} \|\mathbf{y} + \mathbf{z}\|_{1;\Omega} \leq C (\|\mathbf{y}_\Gamma\|_{1/2;\partial\Omega} + \|g\|_{0;\Omega}).$$

■

Para finalizar esta Sección, introduciremos nuevos espacios de divergencia nula que serán fundamentales para el tratamiento de las ecuaciones de Stokes y Navier-Stokes cuando imponamos condiciones de contorno “naturales” sobre un trozo de frontera. Sea γ en general un abierto relativo de $\partial\Omega$ (i.e. $\gamma = \partial\Omega \cap \mathcal{O}$ con \mathcal{O} un abierto de \mathbb{R}^N) conexo. Pongamos

$$\begin{aligned} \widetilde{V}(\Omega) &= \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^N, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \text{Sop } \mathbf{v} \subset \Omega \cup \gamma\}, \\ \widetilde{V}(\Omega) &= \overline{\widetilde{V}(\Omega)}^{H^1(\Omega)^N} \quad \text{y} \quad \widetilde{H}(\Omega) = \overline{\widetilde{V}(\Omega)}^{L^2(\Omega)^N}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Se comprueba fácilmente que $\widetilde{V}(\Omega)$ y $\widetilde{H}(\Omega)$ son espacios de Hilbert para los productos habituales de $H^1(\Omega)^N$ y $L^2(\Omega)^N$, respectivamente; además, en el caso de $\widetilde{V}(\Omega)$, si $\partial\Omega \setminus \gamma$ tiene medida superficial estrictamente positiva, la seminorma $|\cdot|_{1;\Omega}$ es una norma en $\widetilde{V}(\Omega)$ equivalente a la usual (cf. [41]).

En las condiciones de regularidad para Ω fijadas por (1.7), se tiene la siguiente caracterización de $\widetilde{V}(\Omega)$ y $\widetilde{H}(\Omega)$:

Teorema 1.14 *Se tiene:*

$$\widetilde{H}(\Omega) = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^N, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad \gamma_n \mathbf{v} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \setminus \gamma\} \quad (1.10)$$

y

$$\widetilde{V}(\Omega) = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad \mathbf{v} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \setminus \gamma\}. \quad (1.11)$$

Demostración: Sea ω un abierto acotado, conexo y regular (de clase $C^{0,1}$) verificando que $\bar{\omega} \cap \bar{\Omega} = \bar{\gamma}$. Probaremos en primer lugar la igualdad (1.10).

Para probar (1.10), veamos que dado $\varepsilon > 0$ y $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^N$ verificando $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ en Ω y $\gamma_n \mathbf{v} = 0$ en el sentido de $H^{-1/2}(\partial\Omega \setminus \gamma)$, existe $\varphi \in \widetilde{V}(\Omega)$ tal que $\|\mathbf{v} - \varphi\|_{0,\Omega} < \varepsilon$. Para ello, consideraremos el problema:

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{en } \omega, \\ \frac{\partial w}{\partial n} = \gamma_n \mathbf{v} & \text{sobre } \gamma, \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial\omega \setminus \gamma, \end{cases} \quad (1.12)$$

donde \mathbf{n} es ahora el vector normal interior a ω . Puesto que \mathbf{v} posee divergencia nula en Ω , se tiene (Teorema 1.10) que

$$\langle \gamma_n \mathbf{v}, 1 \rangle_{-1/2;\gamma} = 0,$$

lo que nos lleva a la existencia y unicidad de solución de (1.12) en $H^1(\omega)/\mathbb{R}$, i.e. salvo constantes aditivas. Sea $\mathcal{O} = \Omega \cup \omega \cup \gamma$, y pongamos

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{en } \Omega, \\ \nabla w & \text{en } \mathcal{O} \setminus \omega. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que $\tilde{\mathbf{v}} \in H(\mathcal{O})$; por tanto, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar ψ en $\mathcal{V}(\mathcal{O})$ con $\|\tilde{\mathbf{v}} - \psi\|_{0,\mathcal{O}} < \varepsilon$. La igualdad (1.10) queda probada tomando $\varphi = \psi|_{\Omega} \in \widetilde{V}(\Omega)$.

Para demostrar (1.11), se sigue un razonamiento parecido. En este caso cambiaremos (1.12) por el siguiente problema de Stokes:

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{w} + \nabla \pi = 0 & \text{en } \omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 & \text{en } \omega, \\ \mathbf{w} = \mathbf{v} & \text{sobre } \gamma, \\ \mathbf{w} = 0 & \text{sobre } \partial\omega \setminus \gamma \end{cases}$$

y definiremos $\tilde{\mathbf{v}}$ como sigue:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{w} & \text{en } \omega. \end{cases}$$

Por construcción, $\tilde{\mathbf{v}} \in V(\mathcal{O})$ y se llega a la igualdad (1.11) razonando de la misma forma que en el caso anterior.

■

1.2 Las Ecuaciones de Navier-Stokes con Condiciones de Dirichlet no Homogéneas

En esta Sección consideraremos un problema relativo a las ecuaciones de Navier-Stokes con condiciones de contorno de tipo Dirichlet no homogéneas. Comenzaremos exponiendo algunos resultados técnicos que serán necesarios más adelante.

1.2.1 Levantamiento del Dato de Contorno

Suponemos que Ω es un abierto de \mathbb{R}^N , donde $N = 2$ ó 3 . Para $N = 2$, definimos el operador rotacional para distribuciones $\phi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\mathbf{v} \in \mathcal{D}'(\Omega)^2$ como sigue:

$$\text{rot } \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right),$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}.$$

Si $N = 3$, definimos el operador rotacional para distribuciones \mathbf{v} de $\mathcal{D}'(\Omega)^3$, poniendo

$$\text{rot } \mathbf{v} \equiv \nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right).$$

Supondremos en lo que sigue que Ω está en las condiciones (1.7), denotando $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1/2, \Gamma_i}$ la dualidad entre $H^{-1/2}(\Gamma_i)$ y $H^{1/2}(\Gamma_i)$. Entonces, se tiene el siguiente Lema (cf. [17]):

Lema 1.15 *Sea $N = 2$ y sea $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2$. Entonces*

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \langle \gamma_n \mathbf{v}, 1 \rangle_{-1/2, \Gamma_i} = 0 \quad \forall i : 0 \leq i \leq p$$

si y sólo si existe una función $\phi \in H^1(\Omega)$, única salvo constantes aditivas, tal que

$$\mathbf{v} = \text{rot } \phi.$$

Además, ϕ depende lineal y continuamente de \mathbf{v} . En otras palabras, existe una constante positiva C (independiente de \mathbf{v}) tal que

$$\inf_{k \in \mathbb{R}} \|\phi + k\|_{1, \Omega} \leq C \|\mathbf{v}\|_{0, \Omega}$$

■

De la Demostración de este Lema que se da en [17], se deduce el siguiente

Corolario 1.16 Sea $N = 2$. Si $\mathbf{v} \in L^s(\Omega)^2$ con $s \geq 2$ (respectivamente $\mathbf{v} \in H^m(\Omega)^2$) y satisface $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, $\langle \gamma_n \mathbf{v}, 1 \rangle_{-1/2, \Gamma_i} = 0$ para $0 \leq i \leq p$, entonces

$$\mathbf{v} = \text{rot } \phi, \text{ con } \phi \in W^{1,s}(\Omega) \text{ (respectivamente } \phi \in H^{m+1}(\Omega)).$$

■

En el caso tridimensional, se llega a conclusiones análogas:

Lema 1.17 Sean $N = 3$ y $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3$. Entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \langle \gamma_n \mathbf{v}, 1 \rangle_{-1/2, \Gamma_i} = 0 \quad \forall i : 0 \leq i \leq p,$$

si y sólo si existe una función $\varphi \in H^1(\Omega)^3$ tal que

$$\mathbf{v} = \nabla \times \varphi.$$

Además, φ puede ser elegida verificando $\nabla \cdot \varphi = 0$.

■

Este resultado está probado en [17]. Rehaciendo su demostración, obtenemos el

Corolario 1.18 En las condiciones del Lema 1.17, si $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3$, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ y $\langle \gamma_n \mathbf{v}, 1 \rangle_{-1/2, \Gamma_i} = 0$, $0 \leq i \leq p$, entonces existe $\varphi \in H^2(\Omega)^3$ tal que $\nabla \cdot \varphi = 0$ y $\mathbf{v} = \nabla \times \varphi$. Además, podemos elegir φ dependiendo de forma lineal y continua de \mathbf{v} .

Demostración: Ésta sigue los pasos de la Demostración del Teorema 3.4 (pág. 45) de [17]. Sea \mathcal{O} un abierto acotado de clase $C^{0,1}$, simplemente conexo y tal que $\bar{\Omega} \subset \mathcal{O}$. Sean los Ω_i ($1 \leq i \leq p$) las componentes conexas de $\bar{\Omega} \setminus \mathcal{O}$ con fronteras Γ_i y sea Ω_0 la componente con frontera $\Gamma_0 \cup \partial\mathcal{O}$. Planteamos los $p + 1$ problemas de Stokes:

Hallar $(\mathbf{w}_i, p_i) \in H^1(\Omega_i)^3 \times L^2(\Omega_i)/\mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{w}_i + \nabla p_i = 0 & \text{en } \Omega_i \\ \nabla \cdot \mathbf{w}_i = 0 & \text{en } \Omega_i \\ \mathbf{w}_i = \mathbf{v} & \text{sobre } \Gamma_i \end{cases}$$

para $1 \leq i \leq p$ y

Hallar $(\mathbf{w}_0, p_0) \in H^1(\Omega_0)^3 \times L^2(\Omega_0)/\mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{w}_0 + \nabla p_0 = 0 & \text{en } \Omega_0 \\ \nabla \cdot \mathbf{w}_0 = 0 & \text{en } \Omega_0 \\ \mathbf{w}_0 = \mathbf{v} & \text{sobre } \Gamma_0 \\ \mathbf{w}_0 = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{O}. \end{cases}$$

Los problemas están bien planteados, pues se verifican las condiciones de compatibilidad

$$\langle \gamma_n, \mathbf{v} \rangle_{-1/2; \Gamma_i} = \int_{\Gamma_i} \gamma_n \mathbf{v} \, dS = 0 \quad 0 \leq i \leq p,$$

lo que nos permite hacer un levantamiento del dato de contorno manteniendo divergencia nula (Lema 1.13). Definimos $\tilde{\mathbf{v}}$ como sigue:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{cases} \mathbf{w}_i & \text{en } \Omega_i \text{ para } 0 \leq i \leq p, \\ \mathbf{v} & \text{en } \Omega, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Por construcción $\tilde{\mathbf{v}} \in H^1(\mathbb{R}^3)^3$, coincide con \mathbf{v} en Ω , tiene soporte compacto, divergencia nula, depende linealmente de \mathbf{v} y verifica:

$$\|\tilde{\mathbf{v}}\|_{1; \mathbb{R}^3} \leq C(\Omega) \|\mathbf{v}\|_{1; \Omega}$$

A continuación, construiremos φ utilizando la transformada de Fourier \mathcal{F} (cf. [49]). En términos de \mathcal{F} , las igualdades $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0$ y $\nabla \times \varphi = \tilde{\mathbf{v}}$ se escriben:

$$\sum_{i=1}^3 \mu_i \mathcal{F} \tilde{v}_i = 0 \tag{1.13}$$

y

$$\mathcal{F} \tilde{\mathbf{v}} = 2\pi i (\mu_2 \mathcal{F} \varphi_3 - \mu_3 \mathcal{F} \varphi_2, \mu_3 \mathcal{F} \varphi_1 - \mu_1 \mathcal{F} \varphi_3, \mu_1 \mathcal{F} \varphi_2 - \mu_2 \mathcal{F} \varphi_1). \tag{1.14}$$

Las condiciones (1.13) y (1.14), junto con

$$\sum_{i=1}^3 \mu_i \mathcal{F} \varphi_i = 0,$$

determinan $\mathcal{F} \varphi$ unívocamente:

$$\mathcal{F} \varphi = \frac{1}{2\pi i |\mu|^2} (\mu_3 \mathcal{F} \tilde{v}_2 - \mu_2 \mathcal{F} \tilde{v}_3, \mu_1 \mathcal{F} \tilde{v}_3 - \mu_3 \mathcal{F} \tilde{v}_1, \mu_2 \mathcal{F} \tilde{v}_1 - \mu_1 \mathcal{F} \tilde{v}_2). \tag{1.15}$$

La función φ buscada no es más que la restricción a Ω de la transformada inversa de $\mathcal{F} \varphi$. Para acabar la Demostración hay que comprobar que $\varphi \in H^2(\Omega)^3$ y que

$$\|\varphi\|_{2; \Omega} \leq C(\Omega) \|\mathbf{v}\|_{1; \Omega} \tag{1.16}$$

Para probar (1.16), vamos a acotar sucesivamente las $\mu_j \mathcal{F} \varphi_i$, las $\mathcal{F} \varphi_i$ y las $\mu_k \mu_j \mathcal{F} \varphi_i$ en $L^2(\mathbb{R}^3)$. Observando (1.15) y recordando la fórmula de Plancherel, se obtiene sin dificultad que

$$\|\mu_j \mathcal{F} \varphi\|_{0; \mathbb{R}^3} \leq C \|\mathcal{F} \tilde{\mathbf{v}}\|_{0; \mathbb{R}^3} = C \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{0; \mathcal{O}}.$$

De nuevo, a partir de (1.15),

$$|\mathcal{F}\varphi_i| \leq \frac{1}{2\pi|\mu|} (|\mathcal{F}\tilde{v}_j| + |\mathcal{F}\tilde{v}_k|)$$

y así,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}\varphi_i\|_{0;\mathbb{R}^3}^2 &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(|\mathcal{F}\tilde{v}_j| + |\mathcal{F}\tilde{v}_k|)^2}{|\mu|^2} d\mu \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}(0,1)} (|\mathcal{F}\tilde{v}_j| + |\mathcal{F}\tilde{v}_k|)^2 d\mu + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\bar{B}(0,1)} \frac{(|\mathcal{F}\tilde{v}_j| + |\mathcal{F}\tilde{v}_k|)^2}{|\mu|^2} d\mu, \end{aligned}$$

donde $\bar{B}(0,1)$ es la bola unidad cerrada de \mathbb{R}^3 . Veamos cómo se puede acotar la última integral. Sabemos por una parte que

$$|\mathcal{F}\tilde{v}_j(\mu)| \leq \int_{\mathcal{O}} |\tilde{v}_j(x)| dx \leq C(\mathcal{O}) \|\tilde{v}_j\|_{0;\mathcal{O}}, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^3$$

(gracias a que $\tilde{\mathbf{v}}$ tiene soporte compacto). Luego

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{\bar{B}(0,1)} \frac{(|\mathcal{F}\tilde{v}_j| + |\mathcal{F}\tilde{v}_k|)^2}{|\mu|^2} d\mu \leq C(\mathcal{O}) \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{0;\mathcal{O}}$$

y, gracias de nuevo a la fórmula de Plancherel, se llega a que

$$\|\mathcal{F}\varphi\|_{0;\mathbb{R}^3} \leq C(\mathcal{O}) \|\mathcal{F}\tilde{\mathbf{v}}\|_{0;\mathbb{R}^3} = C(\mathcal{O}) \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{0;\mathcal{O}}$$

Por último, observamos que

$$\|\mu_i \mu_j \mathcal{F}\varphi_1\|_{0;\mathbb{R}^3} \leq C \|\mu|\mathcal{F}\tilde{\mathbf{v}}\|_{0;\mathbb{R}^3} \leq C \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{1;\mathcal{O}}$$

Agrupando las desigualdades anteriores, resulta que

$$\|\varphi\|_{2;\mathbb{R}^3} \leq C(\Omega) \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{1;\mathcal{O}} \leq C(\Omega) \|\mathbf{v}\|_{1;\Omega}.$$

Esto demuestra que φ depende de manera lineal y continua de \mathbf{v} ; con ello finaliza la Demostración. ■

Denotemos \hat{V} el subespacio de $H^1(\Omega)^N$ definido por

$$\hat{V} = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ en } \Omega, \text{ y } \int_{\Gamma_i} \gamma_n \mathbf{v} dS = 0, \quad \forall i: 1 \leq i \leq p\}.$$

De nuevo, \hat{V} posee estructura de espacio de Hilbert para la norma de $H^1(\Omega)^N$. Recurriendo a los Corolarios 1.16 y 1.18, podemos asegurar:

1. Cuando $N = 2$, existe un operador lineal y continuo

$$\mathcal{R} : \hat{V} \longrightarrow H^2(\Omega)/\mathbb{R}, \quad (1.17)$$

tal que si $\phi = \mathcal{R}\mathbf{v}$, entonces $\text{rot } \phi = \mathbf{v}$.

2. Cuando $N = 3$, existe un operador lineal y continuo

$$\mathcal{R} : \hat{V} \longrightarrow H^2(\Omega)^3/\mathbb{R} \quad (1.18)$$

tal que si $\varphi = \mathcal{R}\mathbf{v}$, entonces

$$\nabla \times \varphi = \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \varphi = 0.$$

Seguidamente, definimos el levantamiento en Ω de una función definida sobre la frontera $\partial\Omega$ con valores en \mathbb{R}^N y traza normal de integral nula:

Lema 1.19 *Existe un operador lineal y continuo \mathcal{P} , definido del subespacio cerrado de $H^{1/2}(\partial\Omega)^N$*

$$\{\mathbf{b}; \mathbf{b} \in H^{1/2}(\partial\Omega)^N, \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} dS = 0\}$$

en $H^1(\Omega)^N$, tal que, para cada \mathbf{b} ,

$$\gamma_0(\mathcal{P}\mathbf{b}) = \mathbf{b} \text{ sobre } \partial\Omega \text{ y } \nabla \cdot (\mathcal{P}\mathbf{b}) = 0 \text{ en } \Omega. \quad (1.19)$$

Demostración: Sea $\mathbf{b} \in H^{1/2}(\partial\Omega)^N$ tal que

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Definimos $\mathcal{P}\mathbf{b}$ a partir de la solución del problema de Stokes

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{b} & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.20)$$

Por las hipótesis hechas sobre Ω y teniendo en cuenta el Lema 1.13, es claro que con (1.20) queda definido un único par (\mathbf{u}, p) en $H^1(\Omega)^N \times (L^2(\Omega)/\mathbb{R})$. Además, \mathbf{u} queda caracterizada como la única solución de

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} dx = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{B} + V(\Omega),$$

donde \mathbf{B} es un levantamiento a Ω de \mathbf{b} . Si hacemos $\mathcal{P}\mathbf{b} = \mathbf{u}$, es claro que \mathcal{P} es un operador lineal y continuo de $H^{1/2}(\partial\Omega)^N$ en $H^1(\Omega)^N$ que además cumple (1.19). ■

Teniendo en cuenta los resultados de regularidad L^2 del problema (1.20) (cf. [4]), se tiene:

Corolario 1.20 *Supongamos que Ω , además de (1.7), verifica $\Omega \in W^{m+1,\infty}$ con $m \geq 0$ (i.e. lo que se especifica en la Definición 1.4 con las $a_r \in W^{m+1,\infty}(\Delta_r)$). Entonces, \mathcal{P} aplica $H^{m+1/2}(\partial\Omega)^N$ en $H^{m+1}(\Omega)^N$ y, además,*

$$\mathcal{P}|_{H^{m+1/2}(\partial\Omega)^N} \in \mathcal{L}(H^{m+1/2}(\partial\Omega)^N; H^{m+1}(\Omega)^N).$$

■

Proposición 1.21 *Sea Ω un abierto en las condiciones de (1.7) y de clase $W^{\alpha+1,\infty}$, con $\alpha = \max(m, 1)$ y $m \geq 0$. Supongamos que*

$$\mathbf{b} \in L^2(0, T; H^{m+1/2}(\partial\Omega)^N), \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{m-1/2}(\partial\Omega)^N)$$

y

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{b}(t) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad \text{para } t \in (0, T) \text{ c.p.d.} \quad (1.21)$$

Entonces existe $\mathbf{G} \in L^2(0, T; H^{m+1}(\Omega)^N)$ tal que $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} \in L^2(0, T; H^m(\Omega)^N)$, $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$ en $\Omega \times (0, T)$ y $\gamma_0(\mathbf{G}(t)) = \mathbf{b}(t)$ para casi todo t de $(0, T)$.

Demostración: Comenzaremos considerando el caso $m = 0$. Tenemos $\Omega \in W^{2,\infty}$, $\mathbf{b} \in L^2(0, T; H^{1/2}(\partial\Omega)^N)$, $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\partial\Omega)^N)$ y (1.21). Definimos

$$\mathbf{G}(t) = \mathcal{P}\mathbf{b}(t) \quad \text{para } t \in (0, T) \text{ c.d.p.,}$$

con \mathcal{P} dado por el Lema 1.19. Por las propiedades del operador \mathcal{P} , se tiene que \mathbf{G} está en $L^2(0, T; H^1(\Omega)^N)$, $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$ en $\Omega \times (0, T)$ y $\gamma_0(\mathbf{G}(t)) = \mathbf{b}(t)$ para casi todo t en $(0, T)$. Sólo resta comprobar que $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^N)$. Para ello, pongamos

$$\mathcal{N}\mathbf{v} = (-\nabla \mathbf{z} + q \mathbf{Id}) \cdot \mathbf{n} \quad \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^N,$$

donde (\mathbf{z}, q) es la única solución en $V(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ de

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{z} + \nabla q = \mathbf{v} & \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{z} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{z} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

El operador \mathcal{N} está bien definido de $L^2(\Omega)^N$ en $H^{-1/2}(\partial\Omega)^N$, puesto que por componentes, $-\nabla z_i + q \mathbf{e}_i$ está en $L^2(\Omega)$ (\mathbf{e}_i es el i -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^N) y tiene divergencia en $L^2(\Omega)$: $\nabla \cdot (-\nabla z_i + q \mathbf{e}_i) = v_i$. El Teorema 1.10 nos permite dar un sentido a $\gamma_n(-\nabla z_i + q \mathbf{e}_i)$ en $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Obviamente, estamos llamando

$(-\nabla \mathbf{z} + \mathbf{q} \text{Id}) \cdot \mathbf{n}$ al vector cuya i -ésima componente es precisamente $\gamma_n(-\nabla z_i + q e_i)$. Así pues, $\mathcal{N} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega)^N; H^{-1/2}(\partial\Omega)^N)$ y es fácil comprobar la igualdad,

$$(\mathbf{v}, \mathcal{P}\mathbf{b})_{0;\Omega} = \langle \mathcal{N}\mathbf{v}, \mathbf{b} \rangle_{-1/2;\partial\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^N, \quad \forall \mathbf{b} \in H^{1/2}(\partial\Omega)^N.$$

Al ser Ω un abierto de clase $W^{2,\infty}$, aplicando los resultados de regularidad L^2 del problema de Stokes (cf. [4]) al operador \mathcal{N} , obtenemos que

$$\mathcal{N} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega)^N; H^{1/2}(\partial\Omega)^N)$$

y podemos escribir,

$$(\mathbf{v}, \mathcal{P}\mathbf{b})_{0;\Omega} = \int_{\partial\Omega} \mathcal{N}\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \, dS \quad \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^N, \quad \forall \mathbf{b} \in H^{1/2}(\partial\Omega)^N.$$

Veamos que $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}$ está en $L^2(0, T; L^2(\Omega)^N)$. Dado que $\mathbf{G} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^N)$, se tiene que $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} \in \mathcal{D}'(0, T; H^1(\Omega)^N)$ con

$$\langle \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}, \phi \rangle = - \int_0^T \mathbf{G}(t) \phi'(t) \, dt \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(0, T)$$

(igualdad en $H^1(\Omega)^N$). En particular, si $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^N$, resulta que

$$\langle \langle \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}, \phi \rangle, \mathbf{v} \rangle_{0;\Omega} = - \langle \int_0^T \mathbf{G}(t) \phi'(t) \, dt, \mathbf{v} \rangle_{0;\Omega}$$

y, teniendo en cuenta la definición de \mathbf{G} ,

$$\begin{aligned} \langle \langle \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}, \phi \rangle, \mathbf{v} \rangle_{0;\Omega} &= - \langle \mathcal{P}(\int_0^T \mathbf{b}(t) \phi'(t) \, dt), \mathbf{v} \rangle_{0;\Omega} \\ &= \langle - \int_0^T \mathbf{b}(t) \phi'(t) \, dt, \mathcal{N}\mathbf{v} \rangle_{0;\partial\Omega} \\ &= \langle - \int_0^T \mathbf{b}(t) \phi'(t) \, dt, \mathcal{N}\mathbf{v} \rangle_{-1/2;\partial\Omega} \end{aligned}$$

Pero sabemos que $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}$ está en $L^2(0, T; H^{-1/2}(\partial\Omega)^N)$; luego finalmente

$$\langle \langle \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}, \phi \rangle, \mathbf{v} \rangle_{0;\Omega} = \langle \int_0^T \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}(t) \phi(t) \, dt, \mathcal{N}\mathbf{v} \rangle_{-1/2;\partial\Omega}$$

como pretendíamos probar.

En el caso general, si $\Omega \in W^{m+1;\infty}$ con $m \geq 1$, por el Corolario 1.20 obtenemos que

$$\mathbf{G} = \mathcal{P}\mathbf{b} \in L^2(0, T; H^{m+1}(\Omega)^N)$$

y, además,

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}(t) = \mathcal{P}(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}(t)) \in L^2(0, T; H^m(\Omega)^N).$$

Esto demuestra la Proposición. ■

1.2.2 Existencia de Solución

En este apartado, supondremos que el abierto Ω , además de (1.7), verifica $\Omega \in W^{2,\infty}$. Para $T > 0$ dado, consideramos las ecuaciones de Navier-Stokes con condiciones de contorno Dirichlet no homogéneas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{y} - \nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = \mathbf{f} \text{ en } Q_T = \Omega \times (0, T), \\ \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 \text{ en } Q_T, \\ \mathbf{y} = \mathbf{b} \text{ sobre } \Sigma_T = \partial\Omega \times (0, T), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \end{array} \right. \quad (1.22)$$

Aquí $\nu > 0$ es el coeficiente de viscosidad cinemática, $\mathbf{f} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^N)$,

$$\mathbf{b} = \text{rot } \zeta,$$

donde^d

$$\begin{aligned} \zeta &\in L^2(0, T; H^2(\Omega)^M), & \frac{\partial \zeta}{\partial t} &\in L^2(0, T; H^1(\Omega)^M), \\ \zeta &\in L^\infty(0, T; W^{1,p}(\Omega)^3) & \text{con } p > 3 \text{ si } N = 3, \\ \zeta &\in L^\infty(0, T; W^{1,p}(\Omega)) & \text{con } p > 2 \text{ si } N = 2 \end{aligned} \quad (1.23)$$

y finalmente $\mathbf{y}_0 \in L^2(\Omega)^N$,

$$\nabla \cdot \mathbf{y}_0 = 0 \text{ en } \Omega, \quad \gamma_n(\mathbf{y}_0 - \mathbf{b}(0)) = 0 \text{ en } H^{-1/2}(\partial\Omega)^N. \quad (1.24)$$

Hay que hacer notar que, bajo las hipótesis impuestas sobre ζ , necesariamente

$$\mathbf{b} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^N), \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^N),$$

de lo cual, en particular, se deduce que

$$\mathbf{b} \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)^N) \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \text{ en } Q_T.$$

En consecuencia, (1.24) tiene perfecto sentido.

Pretendemos demostrar un resultado de existencia de solución débil para el sistema (1.22). Para obtener este resultado, seguimos una técnica paralela a la utilizada en el marco estacionario (cf. [29,36,48]).

Como es usual, denotaremos $b(\cdot, \cdot, \cdot)$ la forma trilineal y continua sobre $H^1(\Omega)^N$ definida como sigue

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx.$$

Es fácil demostrar el siguiente resultado:

^d M es un entero positivo, $M = 1$ si $N = 2$ y $M = 3$ si $N = 3$.

Proposición 1.22 Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H^1(\Omega)^N$ tales que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ en Ω y, ó bien $\gamma_n \mathbf{u} = 0$, ó bien $\gamma_0 \mathbf{v} = 0$, ó bien $\gamma_0 \mathbf{w} = 0$. Entonces,

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v});$$

en consecuencia, $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$. ■

A partir de la forma trilineal b , definimos la aplicación bilineal

$$B : H^1(\Omega)^N \times H^1(\Omega)^N \longrightarrow H^{-1}(\Omega)^N,$$

dada como sigue

$$\langle B(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N, \quad \forall \mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^N.$$

Veremos a continuación algunas propiedades de B . Para ello, será útil el resultado siguiente:

Lema 1.23 Sea $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$; entonces:

1. Cuando $N = 2$,

$$\|\mathbf{u}\|_{0,4;\Omega} \leq C(\Omega) \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}^{1/2} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^{1/2}$$

2. Cuando $N = 3$,

$$\|\mathbf{u}\|_{0,4;\Omega} \leq C(\Omega) \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}^{1/4} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^{3/4}$$

Demostración: Se deduce de desigualdades análogas, válidas para funciones de $H_0^1(\Omega)$ (cf. [36,48,47] para una demostración de éstas). Para obtener las desigualdades en el caso de $H^1(\Omega)$, basta tener en cuenta la regularidad de Ω y el Lema 1.2. ■

Proposición 1.24 Sean

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^N) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^N),$$

con $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ en $\Omega \times (0, T)$. Entonces

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in L^\sigma(0, T; H^{-1}(\Omega)^N),$$

donde $\sigma = 2$ si $N = 2$ y $\sigma = 4/3$ si $N = 3$. Por otra parte si, en las condiciones precedentes, además se tiene que $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^\infty(0, T; L^N(\Omega)^N)$, entonces

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^N).$$

Demostración: Supongamos que $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^N) \cap L^\infty(0, T; L^N(\Omega)^N)$ con $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ en $\Omega \times (0, T)$ y veamos que $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^N)$ (la prueba de la otra afirmación es análoga). Si $\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^N$, entonces

$$\langle B(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)), \mathbf{w} \rangle = b(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t), \mathbf{w}) = -b(\mathbf{u}(t), \mathbf{w}, \mathbf{v}(t)) \text{ para } t \in (0, T) \text{ c.p.d.}$$

De la definición de la forma trilineal b , obtenemos fácilmente que

$$|\langle B(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)), \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{u}(t)\|_{0,4;\Omega} \|\mathbf{w}\|_{1;\Omega} \|\mathbf{v}(t)\|_{0,4;\Omega}$$

y, como \mathbf{w} es arbitraria en $H_0^1(\Omega)^N$, resulta que

$$\|B(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))\|_{-1;\Omega} \leq \|\mathbf{u}(t)\|_{0,4;\Omega} \|\mathbf{v}(t)\|_{0,4;\Omega}$$

Supongamos en primer lugar que $N = 2$; entonces, gracias al Lema 1.23, resulta que

$$\|B(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))\|_{-1;\Omega} \leq C(\Omega) \|\mathbf{u}(t)\|_{0;\Omega}^{1/2} \|\mathbf{v}(t)\|_{0;\Omega}^{1/2} \|\mathbf{u}(t)\|_{1;\Omega}^{1/2} \|\mathbf{v}(t)\|_{1;\Omega}^{1/2}$$

y, de las hipótesis, se deduce que

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^2).$$

Por otra parte, si $N = 3$, aplicando el Lema 1.23, obtenemos que

$$\|B(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))\|_{-1;\Omega} \leq C(\Omega) \|\mathbf{u}(t)\|_{0;\Omega}^{1/4} \|\mathbf{v}(t)\|_{0;\Omega}^{1/4} \|\mathbf{u}(t)\|_{1;\Omega}^{3/4} \|\mathbf{v}(t)\|_{1;\Omega}^{3/4}$$

y, por tanto,

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^3).$$

■

A continuación, definimos el concepto de solución débil del problema (1.22). Supongamos dadas \mathbf{b} , \mathbf{f} e \mathbf{y}_0 , verificando:

$$\mathbf{b} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^N) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^N) \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \text{ en } Q_T,$$

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^N).$$

Definición 1.25 Se dice que \mathbf{y} es solución débil de (1.22) si

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y} \in \mathbf{b} + L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \\ \langle \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}(t), \mathbf{v} \rangle + \langle B(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t)), \mathbf{v} \rangle + \nu \langle \nabla \mathbf{y}(t), \nabla \mathbf{v} \rangle_{0;\Omega} = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle \\ \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad t \in (0, T) \text{ c.p.d.}, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \end{array} \right. \quad (1.25)$$

■

Al igual que en el caso homogéneo, es fácil probar un resultado de unicidad de solución débil cuando $N = 2$:

Teorema 1.26 *Sea $N = 2$. El problema (1.25) admite a lo más una solución débil.*

Demostración: Es una simple aplicación del Lema de Gronwall. Si y_1 e y_2 son dos soluciones débiles, la diferencia $y = y_1 - y_2$ verifica:

$$y \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H),$$

Además, de la formulación débil (1.25) y de la Proposición 1.24, se tiene que

$$\frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^N).$$

Razonando como en el caso homogéneo (cf. [36]), se llega fácilmente a que $y = 0$. ■

En el caso tridimensional ($N = 3$), no se obtiene la unicidad de solución débil al aplicar el mismo razonamiento que cuando $N = 2$, puesto que las desigualdades obtenidas en el Lema 1.23 son menos favorables. Por contra, razonando como en [36], sí se consigue un resultado de unicidad en la clase de las funciones y que verifican:

$$y \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^3) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3), \quad \nabla \cdot y = 0 \quad \text{en } Q_T,$$

$$y \in L^s(0, T; L^r(\Omega)^3) \quad \text{con} \quad \frac{2}{s} + \frac{3}{r} \leq 1, \quad r > 3.$$

Teorema 1.27 *Supongamos dadas y_0 , f y $b = \text{rot } \zeta$, verificando (1.23) y (1.24). Entonces existe al menos una solución débil y de (1.22), que además verifica^e*

$$\frac{\partial y}{\partial t} \in L^\sigma(0, T; H^{-1}(\Omega)^N), \quad \text{con } \sigma = 2 \text{ si } N = 2 \text{ y } \sigma = 4/3 \text{ si } N = 3,$$

$$y \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)^N) \text{ si } N = 2,$$

$$y \in C_w^0([0, T]; L^2(\Omega)^N) \text{ si } N = 3.$$

Demostración: Aplicaremos un argumento clásico de compacidad para una aproximación de Galerkin del problema homogeneizado. Para ello, necesitaremos previamente

^e $C_w^0([0, T]; L^2(\Omega)^N)$ es el espacio constituido por las funciones débilmente continuas de $[0, T]$ en $L^2(\Omega)^N$, i.e., las funciones v para las cuales, cualquiera que sea $w \in L^2(\Omega)^N$, $t \rightarrow (v(t), w)_{0, \Omega}$ es continua en $[0, T]$.

estimaciones “a priori” de tipo desigualdad de energía (cf. [25]) para las soluciones aproximadas. A continuación, un proceso de paso al límite, nos permitirá encontrar una solución débil del problema.

Sea ψ verificando

$$\begin{aligned} \psi &\in L^2(0, T; H^1(\Omega)^N) \cap L^\infty(0, T; L^N(\Omega)^N), \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &\in L^2(0, T; L^2(\Omega)^N), \quad \nabla \cdot \psi = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ \gamma_0(\psi(t)) &= \mathbf{b}(t) \quad \text{para } t \in (0, T) \quad \text{c.p.d.} \end{aligned} \quad (1.26)$$

La existencia de una tal ψ quedará justificada más adelante (cf. el Lema 1.28). Buscaremos una solución débil \mathbf{y} de (1.22) de la forma

$$\mathbf{y} = \psi + \mathbf{u}$$

con $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$. Este cambio de variable, permite re-escribir (1.22) como sigue:

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in L^2(0, T; V), \\ \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t), \mathbf{v} \right\rangle + b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}(t), \psi(t), \mathbf{v}) + b(\psi(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) \\ \quad + \nu(\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \mathbf{v})_{0;\Omega} = \langle \tilde{\mathbf{f}}(t), \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad t \in (0, T) \text{ c.p.d.}, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \end{cases} \quad (1.27)$$

Aquí, $\tilde{\mathbf{f}}$ y \mathbf{u}_0 vienen dados por

$$\langle \tilde{\mathbf{f}}(t), \mathbf{v} \rangle \equiv \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle - \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t}(t), \mathbf{v} \right\rangle - \nu(\nabla \psi(t), \nabla \mathbf{v})_{0;\Omega} - b(\psi(t), \psi(t), \mathbf{v}),$$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0 - \psi(0).$$

De (1.26) se deduce que

$$\psi \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)^N)$$

y que, además,

$$\psi(0) \in H(\text{div}; \Omega).$$

De la caracterización del espacio de Hilbert H dada en la Sección 1.1.3 y de (1.24), obtenemos

$$\mathbf{u}_0 \in H.$$

Por otro lado, (1.26) y la Proposición 1.24, implican

$$\tilde{\mathbf{f}} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^N).$$

Consideramos a continuación la base ortogonal del espacio V (ortonormal en H) dada por las autofunciones \mathbf{w}_j del problema de Stokes con condiciones Dirichlet homogéneas:

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{w}_j + \nabla q_j = \lambda_j \mathbf{w}_j & \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{w}_j = 0 & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{w}_j = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \\ \|\mathbf{w}_j\|_{0;\Omega} = 1, \end{cases}$$

donde los $\lambda_j > 0$, $\lambda_j \nearrow \infty$. De la regularidad de Ω y la regularidad L^2 del problema de Stokes, se deduce fácilmente que las

$$\mathbf{w}_j \in C^\infty(\Omega)^N \cap H^2(\Omega)^N \cap V, \quad q_j \in C^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega).$$

Denotemos V_m el subespacio de V generado por $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ y por \mathbf{u}_{0m} a la proyección ortogonal de \mathbf{u}_0 en V_m (naturalmente para la norma de H):

$$\mathbf{u}_{0m} = \sum_{j=1}^m (\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_j)_{0;\Omega} \mathbf{w}_j.$$

Para cada $m \geq 1$, tratamos de hallar

$$\mathbf{u}_m = \sum_{j=1}^m u_m^j(t) \mathbf{w}_j$$

solución del problema de valores iniciales en dimensión finita

$$\begin{cases} (\mathbf{u}_m'(t), \mathbf{w}_j)_{0;\Omega} + b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j) + b(\mathbf{u}_m(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{w}_j) \\ \quad + b(\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j) + \nu(\nabla \mathbf{u}_m(t), \nabla \mathbf{w}_j)_{0;\Omega} = \langle \tilde{\mathbf{f}}(t), \mathbf{w}_j \rangle \quad 1 \leq j \leq m, \\ \mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{0m}. \end{cases}$$

Este problema admite una única solución local (en tiempo) \mathbf{u}_m , definida al menos en un intervalo $[0, t_m)$. Si multiplicamos por $u_m^j(t)$, sumamos en j y aplicamos las propiedades de b (Proposición 1.22), llegamos a que

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{0;\Omega}^2 + \nu \|\nabla \mathbf{u}_m(t)\|_{0;\Omega}^2 + b(\mathbf{u}_m(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}_m(t)) = \langle \tilde{\mathbf{f}}(t), \mathbf{u}_m(t) \rangle, \\ \mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{0m}. \end{cases} \quad (1.28)$$

Admitamos por el momento el siguiente Lema de carácter técnico, que será demostrado con posterioridad:

Lema 1.28 *Supongamos que $\mathbf{b} = \text{rot } \boldsymbol{\zeta}$ con $\boldsymbol{\zeta}$ verificando (1.23). Entonces, dado $\eta > 0$, existe $\boldsymbol{\psi} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^N)$ que verifica (1.26) y las desigualdades*

$$|b(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{v})| \leq \eta \|\mathbf{v}\|_{1;\Omega}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

■

Tras aplicar el Lema 1.28 con $\eta = \nu/2$, obtenemos una función $\psi \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^N)$. Admitiendo que el cambio de variable que nos permitió pasar de \mathbf{y} a \mathbf{u} ha sido llevado a cabo con esta ψ , las identidades (1.28) nos permitirán deducir que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{0;\Omega}^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla \mathbf{u}_m(t)\|_{0;\Omega}^2 + b(\mathbf{u}_m(t), \psi(t), \mathbf{u}_m(t)) \leq \langle \tilde{\mathbf{f}}(t), \mathbf{u}_m(t) \rangle \quad \forall t \in (0, t_m).$$

Ahora, tomando $t \leq t_m$ e integrando en el intervalo $(0, t)$, llegamos a que

$$\|\mathbf{u}_m(t)\|_{0;\Omega}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}_m(s)\|_{0;\Omega}^2 ds \leq \|\mathbf{u}_{0m}\|_{0;\Omega}^2 + \int_0^t \langle \tilde{\mathbf{f}}(s), \mathbf{u}_m(s) \rangle ds$$

y, de aquí, conseguimos la desigualdad de energía para \mathbf{u}_m :

$$\|\mathbf{u}_m(t)\|_{0;\Omega}^2 + \frac{\nu}{2} \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}_m(s)\|_{0;\Omega}^2 ds \leq \|\mathbf{u}_{0m}\|_{0;\Omega}^2 + C(\nu) \int_0^t \|\tilde{\mathbf{f}}(s)\|_{-1;\Omega}^2 ds.$$

Es inmediato deducir a partir de esta desigualdad que la solución aproximada \mathbf{u}_m está definida en todo el intervalo $[0, T]$; además,

$$\max_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{0;\Omega}^2 + \frac{\nu}{2} \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}_m(s)\|_{0;\Omega}^2 ds \leq \|\mathbf{u}_0\|_{0;\Omega}^2 + C(\nu) \int_0^T \|\tilde{\mathbf{f}}(s)\|_{-1;\Omega}^2 ds.$$

En consecuencia,

$$\mathbf{u}_m \in \text{acotado de } L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H).$$

Ahora, razonando como en la Proposición 1.24, no es difícil probar que

$$B(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m), B(\mathbf{u}_m, \psi), B(\psi, \mathbf{u}_m) \in \text{acotado de } L^\sigma(0, T; V')$$

(por supuesto, con $\sigma = 2$ si $N = 2$ y $\sigma = 4/3$ si $N = 3$). Por otra parte, gracias a la elección especial que se ha hecho de la base $\{\mathbf{w}_j\}$, también se tiene (cf. [36,47]):

$$\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t} \in \text{acotado de } L^\sigma(0, T; V').$$

El resto de la Demostración es “standard”: Las acotaciones precedentes permiten extraer una subsucesión convergente; tras un procedimiento de paso al límite, se deduce la existencia de una solución \mathbf{u} de (1.27). Para más detalles, se puede consultar – entre otras – las referencias [8,36].

■

Antes de probar el Lema 1.28, enunciaremos dos resultados cuyas demostraciones pueden hallarse en [48].

Lema 1.29 Sea ρ la función "distancia a $\partial\Omega$ ", i.e., $\rho(x) \equiv d(x, \partial\Omega)$. Para cada $\epsilon > 0$, existe una función $\theta_\epsilon \in W^{2,\infty}(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \theta_\epsilon &= 1 && \text{en un entorno de } \partial\Omega \text{ (que depende de } \epsilon), \\ \theta_\epsilon &= 0 && \text{si } \rho(x) \geq 2\delta(\epsilon), \text{ con } \delta(\epsilon) = \exp(-1/\epsilon), \\ |D_k \theta_\epsilon(x)| &\leq \frac{\epsilon}{\rho(x)} && \text{si } \rho(x) \leq 2\delta(\epsilon), \text{ con } 1 \leq k \leq N. \end{aligned}$$

■

Lema 1.30 Existe una constante positiva C que sólo depende de Ω tal que

$$\| \frac{v}{\rho} \|_{0;\Omega} \leq C \|v\|_{1;\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

■

Demostración del Lema 1.28. Veamos que podemos elegir ϵ de tal forma que la función

$$\psi = \text{rot}(\theta_\epsilon \zeta)$$

verifica la tesis del Lema. De las propiedades de θ_ϵ y de (1.23) se deduce sin dificultad (1.26). Por otra parte,

$$\psi(x, t) = 0 \quad \text{si } \rho(x) > 2\delta(\epsilon)$$

y

$$|\psi_j(x, t)| \leq C \left(\frac{\epsilon}{\rho(x)} |\zeta(x, t)| + |\nabla \zeta(x, t)| \right) \quad \text{si } \rho(x) \leq 2\delta(\epsilon).$$

Por hipótesis, $\zeta \in L^\infty(0, T; W^{1,p}\Omega)^3$ con $p > 3$ si $N = 3$ y $\zeta \in L^\infty(0, T; W^{1,p}(\Omega))$ con $p > 2$ si $N = 2$. Utilizando las inyecciones continuas de Sobolev, se tiene que

$$\zeta \in L^\infty(Q_T)^3 \text{ si } N = 3 \text{ y } \zeta \in L^\infty(Q_T) \text{ si } N = 2$$

y podemos escribir que

$$|\psi_j(x, t)| \leq C \left(\frac{\epsilon}{\rho(x)} + |\nabla \zeta(x, t)| \right) \quad \text{cuando } \rho(x) \leq 2\delta(\epsilon).$$

Sea $v \in H_0^1(\Omega)^N$. Se tiene que

$$\|v_i \psi_j\|_{0;\Omega} \leq C \left\{ \epsilon \| \frac{v}{\rho} \|_{0;\Omega} + \left(\int_{\Omega_\epsilon} v_i^2 |\nabla \zeta(x, t)|^2 dx \right)^{1/2} \right\}, \quad (1.29)$$

donde

$$\Omega_\epsilon = \{x; x \in \Omega, \quad d(x, \partial\Omega) \leq 2\delta(\epsilon)\}.$$

Al objeto de acotar la integral en Ω_ϵ que aparece en (1.29), distinguimos los casos $N = 2$ y $N = 3$. Si $N = 2$, entonces $\zeta \in L^\infty(0, T; W^{1,p}(\Omega))$; sean $p' \in (2, p)$ y $\alpha < \infty$ tal que

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{p'} = 1.$$

Para esta elección de α , obtenemos que

$$\int_{\Omega_\epsilon} v_i^2 |\nabla \zeta(x, t)|^2 dx \leq \|v_i\|_{0,2\alpha;\Omega}^2 \|\nabla \zeta(t)\|_{0,p';\Omega_\epsilon}^2$$

Si sustituimos la desigualdad precedente en (1.29) y tenemos en cuenta el Lema 1.30, obtendremos que

$$\begin{aligned} \|v_i \psi_j\|_{0;\Omega} &\leq C(\epsilon \|\mathbf{v}\|_{1;\Omega} + \|\nabla \zeta(t)\|_{0,p';\Omega_\epsilon} \|\mathbf{v}\|_{0,2\alpha;\Omega}) \\ &\leq C(\epsilon \|\mathbf{v}\|_{1;\Omega} + \|\zeta(t)\|_{1,p';\Omega_\epsilon} \|\mathbf{v}\|_{1;\Omega}). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Cuando $N = 3$, sabemos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ (inyección continua). Por tanto, teniendo en cuenta (1.29) y que

$$\int_{\Omega_\epsilon} v_i^2 |\nabla \zeta(x, t)|^2 dx \leq \|v_i\|_{0,6;\Omega}^2 \|\nabla \zeta(t)\|_{0,3;\Omega_\epsilon}^2$$

llegamos fácilmente a que

$$\|v_i \psi_j\|_{0;\Omega} \leq C(\epsilon \|\mathbf{v}\|_{1;\Omega} + \|\zeta(t)\|_{1,3;\Omega_\epsilon} \|\mathbf{v}\|_{1;\Omega}). \quad (1.31)$$

Si denotamos por $\mu(\epsilon)$ a la cantidad:

$$\mu(\epsilon) = \begin{cases} \sup \text{es } \|\zeta(t)\|_{1,p';\Omega_\epsilon} & \text{si } N = 2, \\ \sup \text{es } \|\zeta(t)\|_{1,3;\Omega_\epsilon} & \text{si } N = 3, \end{cases}$$

entonces, (1.30) y (1.31) se pueden escribir como sigue:

$$\|v_i \psi_j\|_{0;\Omega} \leq C(\epsilon + \mu(\epsilon)) \|\mathbf{v}\|_{1;\Omega} \text{ con } \mu(\epsilon) \rightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0. \quad (1.32)$$

Finalmente, si $\mathbf{v} \in V$

$$|b(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{v})| = |b(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}(t))| \leq \|\mathbf{v}\|_{1;\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^N \|v_i \psi_j\|_{0;\Omega} \right),$$

lo cual, junto con (1.32), conduce a que

$$|b(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{v})| \leq C(\epsilon + \mu(\epsilon)) \|\mathbf{v}\|_{1;\Omega}^2$$

Basta ahora elegir ϵ suficientemente pequeño para que sea

$$C(\epsilon + \mu(\epsilon)) \leq \eta.$$

El Teorema 1.27 proporciona un resultado de existencia de solución débil global en tiempo bajo ciertas hipótesis de los datos. Si se aumenta la regularidad de éstos, es posible obtener resultados de existencia (y unicidad) de solución fuerte local en tiempo. Alternativamente, cuando los datos son regulares y suficientemente pequeños, es posible deducir resultados de existencia y unicidad de solución fuerte global en tiempo. Para ello, hay que recurrir a otro tipo de estimaciones de las \mathbf{u}_m , distintas de las que preceden. Básicamente, pueden utilizarse dos técnicas distintas, inspiradas en las que aparecen en los trabajos de Prodi ([43]) y Kiselev y Ladyzhenskaya ([26,29]). Las estimaciones de Prodi están basadas principalmente en la regularidad L^2 del problema estacionario y homogéneo de Stokes; para llegar al resultado de existencia, es imprescindible en la aproximación de Galerkin utilizar la base constituida por las autofunciones del operador de Stokes (cf. [8]). Las estimaciones de Kiselev y Ladyzhenskaya se obtienen derivando el problema aproximado respecto de t y utilizando como funciones "test" las $\mathbf{u}_m(t)$ y las $\mathbf{u}'_m(t)$. Combinando ambos procedimientos es posible (bajo hipótesis de regularidad C^∞ sobre los datos) llegar a un resultado de existencia (y unicidad) local de solución C^∞ (cf. [22] [23]). Más adelante, recurriremos a la técnica de Prodi para deducir un resultado de regularidad de solución para un problema similar pero distinto de (1.22).

Para finalizar esta Sección, veamos algunas condiciones sobre el dato de contorno \mathbf{b} que son suficientes para obtener una función ζ , tal que

$$\mathbf{b} = \gamma_0(\text{rot } \zeta)$$

y, al mismo tiempo, se tenga (1.23). Utilizaremos los resultados sobre el levantamiento de datos de contorno que fueron enunciados en el Apartado 1.2.1. Comenzaremos considerando el caso $N = 2$:

Teorema 1.31 *Sea $N = 2$ y sea \mathbf{b} tal que*

$$\mathbf{b} \in L^\infty(0, T; H^{1/2}(\partial\Omega)^2), \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\partial\Omega)^2)$$

y

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{b}(t) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad \forall i : 0 \leq i \leq p. \tag{1.33}$$

Entonces existe $\zeta \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$ tal que $\mathbf{b} = \text{rot } \zeta$ y, además, se verifica (1.23).

Demostración: Definimos en primer lugar $\mathbf{z} = \mathcal{P}\mathbf{b}$, donde \mathcal{P} es el operador introducido en el Lema 1.19. Este mismo resultado nos dice que

$$\mathbf{z} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)^2), \quad \nabla \cdot \mathbf{z} = 0 \text{ en } Q_T, \quad \gamma_0(\mathbf{z}) = \mathbf{b} \text{ sobre } \Sigma_T.$$

Además, la Proposición 1.21 lleva a que

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^2).$$

De (1.33), se deduce que $\mathbf{z}(t) \in \hat{V}$ para t c.p.d. Pongamos

$$\zeta(t) = \mathcal{R}\mathbf{z}(t),$$

siendo \mathcal{R} el operador dado por (1.17). Así definido, se tiene que

$$\zeta \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)), \quad \mathbf{b} = \gamma_0(\text{rot } \zeta)$$

y es fácil deducir que $\frac{\partial \zeta}{\partial t}(t) = \mathcal{R} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t}(t)$ y que, por tanto,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Esto finaliza la Demostración. ■

En el caso tridimensional, se obtiene algo similar:

Teorema 1.32 *Sea $N = 3$ y sea \mathbf{b} tal que*

$$\mathbf{b} \in L^\infty(0, T; H^{1/2}(\partial\Omega)^3), \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{1/2}(\partial\Omega)^3)$$

y

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{b}(t) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad \forall i : 0 \leq i \leq p. \quad (1.34)$$

Entonces existe $\zeta \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^3)$ tal que $\mathbf{b} = \nabla \times \zeta$ y, además, se verifica (1.23).

Demostración: Es análoga a la del Teorema 1.31. Construimos ζ a partir de los operadores \mathcal{P} y \mathcal{R} :

$$\zeta(t) = \mathcal{R}(\mathcal{P}\mathbf{b}(t)) \quad \text{para } t \in (0, T) \text{ c.p.d.}$$

Es fácil comprobar que ζ verifica

$$\zeta \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)^3), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^3)$$

y (1.23). ■

1.3 El Problema de Stokes con Condiciones Mixtas

En esta Sección trataremos el problema constituido por las ecuaciones de Stokes junto con condiciones de contorno que son de distinto tipo en distintas partes de la frontera.

1.3.1 El marco de la formulación variacional mixta de problemas elípticos

Comenzamos este apartado recordando un marco funcional abstracto que se adapta bien a la resolución de problemas de contorno para sistemas de tipo elíptico con una restricción lineal. Los resultados que se presentan aquí han sido tomados de [17].

Sean X y M dos espacios de Hilbert reales, cuyas normas denotamos respectivamente $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_M$ y sean X' y M' sus correspondientes espacios duales, con normas $\|\cdot\|_{X'}$ y $\|\cdot\|_{M'}$. Denotaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ los productos de dualidad entre X' y X o M' y M .

Supongamos dadas dos formas bilineales y continuas

$$a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \beta : X \times M \longrightarrow \mathbb{R},$$

con normas

$$\|a\| = \sup_{u,v \in X \setminus \{0\}} \frac{a(u,v)}{\|u\|_X \|v\|_X}, \quad \|\beta\| = \sup_{\substack{u \in X \setminus \{0\} \\ p \in M \setminus \{0\}}} \frac{\beta(u,p)}{\|u\|_X \|p\|_M}$$

Dadas $l \in X'$ y $\chi \in M'$, consideramos el problema variacional (mixto) siguiente:

Hallar $(y, \pi) \in X \times M$ tal que

$$(Q) \quad \begin{cases} a(y, v) + \beta(v, \pi) = \langle l, v \rangle & \forall v \in X, \\ \beta(y, p) = \langle \chi, p \rangle & \forall p \in M. \end{cases}$$

Sea V el subespacio cerrado de X siguiente:

$$V = \{v; v \in X, \beta(v, p) = 0 \quad \forall p \in M\}.$$

Definición 1.33 Se dice que la forma bilineal $\beta(\cdot, \cdot)$ verifica la condición "inf-sup" si existe una constante $\beta_0 > 0$ tal que

$$\inf_{p \in M \setminus \{0\}} \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{\beta(v, p)}{\|v\|_X \|p\|_M} \geq \beta_0.$$

En este marco, es bien conocido el resultado (cf. por ejemplo [17]):

Teorema 1.34 *Supongamos que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es V -elíptica, i.e. existe una constante positiva a_0 tal que*

$$a(v, v) \geq a_0 \|v\|_X^2 \quad \forall v \in V.$$

Entonces el problema (Q) posee una única solución $(y, \pi) \in X \times M$ (para cada par $(l, \chi) \in X' \times M'$) si y sólo si la forma bilineal $\beta(\cdot, \cdot)$ satisface la condición "inf-sup". Además, cuando esto ocurre, la aplicación

$$(l, \chi) \in X' \times M' \longrightarrow (y, \pi) \in X \times M$$

es un isomorfismo de $X' \times M'$ sobre $X \times M$.

■

1.3.2 Existencia de solución. Unicidad

Sea Ω un abierto como en (1.7) y $\gamma \subset \partial\Omega$ un abierto relativo de $\partial\Omega$ conexo y tal que $\partial\Omega \setminus \gamma$ tiene medida superficial estrictamente positiva. Para $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^N$ y $\mathbf{b} \in H^{-1/2}(\gamma)^N$ dadas, consideramos el problema^f,

$$-\nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (1.35)$$

$$(-\pi \text{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{b} \quad \text{sobre } \gamma, \quad (1.36)$$

$$\mathbf{y} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \setminus \gamma. \quad (1.37)$$

Teorema 1.35 *Dadas $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^N$ y $\mathbf{b} \in H^{-1/2}(\gamma)^N$, existe un único par (\mathbf{y}, π) en $\widetilde{V}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ solución de (1.35)–(1.37), de tal forma que (1.35) se verifica en el sentido de $L^2(\Omega)^N$, (por tanto c.d.p.), (1.36) en el sentido de $H^{-1/2}(\gamma)^N$ y (1.37) en el sentido de las trazas sobre $\partial\Omega \setminus \gamma$. Además, existe una constante $C > 0$, que sólo depende de Ω y γ , tal que*

$$\|\mathbf{y}\|_{1;\Omega} + \|\pi\|_{0;\Omega} \leq C (\|\mathbf{f}\|_{0;\Omega} + \|\mathbf{b}\|_{-1/2;\gamma}). \quad (1.38)$$

Demostración: Haremos la Demostración de dos formas diferentes, ya que ciertas variantes de la misma nos servirán para probar la regularidad L^2 de la solución.

Primer Método de Demostración. Consideraremos el espacio $\widetilde{V}(\Omega)$ definido por (1.9); como ya se vio (cf. Teorema 1.14),

$$\widetilde{V} = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ en } \Omega, \mathbf{v} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \setminus \gamma\}.$$

^f Id representa la matriz unidad de orden N .

Gracias a las condiciones impuestas a γ , es claro que $\widetilde{V}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert para la norma $|\cdot|_{1;\Omega}$. Por otro lado, introduzcamos la forma bilineal sobre $\widetilde{V}(\Omega)$ $a(\cdot, \cdot)$, definida como sigue

$$a(\mathbf{y}, \mathbf{v}) = \nu(\nabla \mathbf{y}, \nabla \mathbf{v})_{0;\Omega} = \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{y} : \nabla \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{y}, \mathbf{v} \in \widetilde{V}(\Omega).$$

Obviamente, $a(\cdot, \cdot)$ es continua y $\widetilde{V}(\Omega)$ -elíptica. Consideremos también la forma lineal y continua L , dada por

$$\langle L, \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{0;\Omega} + \langle \mathbf{b}, \gamma_0 \mathbf{v} \rangle_{-1/2;\gamma} \quad \forall \mathbf{v} \in \widetilde{V}(\Omega),$$

donde γ_0 es la aplicación traza introducida en el Teorema 1.8. Gracias al Teorema de Lax-Milgran, el problema

$$a(\mathbf{y}, \mathbf{v}) = \langle L, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \widetilde{V}(\Omega), \quad \mathbf{y} \in \widetilde{V}(\Omega), \quad (1.39)$$

posee solución única. Además, existe $C > 0$, independiente de \mathbf{f} y \mathbf{b} , tal que

$$|\mathbf{y}|_{1;\Omega} \leq C (\|\mathbf{f}\|_{0;\Omega} + \|\mathbf{b}\|_{-1/2;\gamma}). \quad (1.40)$$

Como $\mathbf{y} \in H^1(\Omega)^N$, se tiene que $-\nu \Delta \mathbf{y} - \mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^N$. A partir de la formulación (1.39), es fácil comprobar que $-\nu \Delta \mathbf{y} - \mathbf{f}$ se anula sobre \mathcal{V} ; luego, aplicando el Lema de De Rham (Teorema 1.11), se deduce que existe $\pi^* \in L^2(\Omega)$ tal que

$$-\nu \Delta \mathbf{y} - \mathbf{f} = -\nabla \pi^* \text{ en } H^{-1}(\Omega)^N.$$

La función π^* es única salvo constantes aditivas. Además, imponiendo la restricción

$$\int_{\Omega} \pi^*(x) \, dx = 0,$$

existen nuevas constantes $C > 0$ tales que

$$\|\pi^*\|_{0;\Omega} \leq C \|-\nu \Delta \mathbf{y} - \mathbf{f}\|_{-1;\Omega} \leq C (\|\mathbf{f}\|_{0;\Omega} + \|\mathbf{b}\|_{-1/2;\gamma}). \quad (1.41)$$

Puesto que $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^N$, tenemos que (1.35) se verifica en $L^2(\Omega)^N$ y, por tanto, c.p.d. en Ω . Para cada $1 \leq i \leq N$ fijo, consideremos la función $-\nu \nabla y_i + \pi^* \mathbf{e}_i \in L^2(\Omega)^N$, donde de nuevo \mathbf{e}_i es el i -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^N . De (1.35) se deduce que

$$\nabla \cdot (-\nu \nabla y_i + \pi^* \mathbf{e}_i) = f_i \in L^2(\Omega).$$

De esta forma, $-\nu \nabla y_i + \pi^* \mathbf{e}_i$ está en $H(\text{div}; \Omega)$ y, gracias al Teorema 1.10, tiene sentido su traza normal como elemento de $H^{-1/2}(\gamma)$. Tenemos así definida

$$(-\pi^* \text{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}$$

en $H^{-1/2}(\gamma)^N$. Aplicando la fórmula de integración por partes (1.8) a φ_i , con $\varphi \in \widetilde{V}(\Omega)$ arbitraria, obtenemos la igualdad

$$\int_{\Omega} -\nu \nabla y_i \cdot \nabla \varphi_i dx + \int_{\Omega} \pi^* \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} f_i \varphi_i dx + \langle (-\nu \nabla y_i + \pi^* \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{n}, \gamma_0 \varphi_i \rangle_{-1/2;\gamma}$$

Si sumamos en i , resulta que

$$\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{y} : \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \varphi dx + \langle (-\pi^* \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}, \gamma_0 \varphi \rangle_{-1/2;\gamma}$$

y, observando (1.39), deducimos que

$$\langle (-\pi^* \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}, \gamma_0 \varphi \rangle_{-1/2;\gamma} = \langle \mathbf{b}, \gamma_0 \varphi \rangle_{-1/2;\gamma} \quad \forall \varphi \in \widetilde{V}(\Omega). \quad (1.42)$$

Veamos a continuación que podemos elegir $\pi = \pi^* + Cte.$ de tal forma que (aparte de (1.35) y (1.37)) se tenga (1.36). Para ello, supongamos dada $\mathbf{v}_0 \in H^1(\Omega)^N$ con $\mathbf{v}_0 = 0$ sobre $\partial\Omega \setminus \gamma$ y tal que

$$\int_{\gamma} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} dS = 1.$$

La elección de \mathbf{v}_0 depende exclusivamente de Ω y γ y es independiente de \mathbf{f} y \mathbf{b} . Sea $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N$ tal que $\mathbf{v} = 0$ sobre $\partial\Omega \setminus \gamma$. Podemos escribir $\mathbf{v} = \mathbf{w}_0 + c\mathbf{v}_0$, con

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{v} - \left(\int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \right) \mathbf{v}_0, \quad c = \int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Es fácil comprobar que \mathbf{w}_0 está en $H^1(\Omega)^N$, $\mathbf{w}_0 = 0$ sobre $\partial\Omega \setminus \gamma$ y

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Aplicando el Lema 1.13 a \mathbf{w}_0 con $g = 0$, $\mathbf{y}_{\Gamma} = \gamma_0(\mathbf{w}_0)$, obtenemos $\widehat{\mathbf{w}}_0 \in H^1(\Omega)^N$ tal que $\gamma_0(\widehat{\mathbf{w}}_0) = \gamma_0(\mathbf{w}_0)$ y $\nabla \cdot \widehat{\mathbf{w}}_0 = 0$; de forma equivalente, podemos decir que $\widehat{\mathbf{w}}_0 \in \widetilde{V}(\Omega)$ y $\gamma_0(\widehat{\mathbf{w}}_0) = \gamma_0(\mathbf{w}_0)$. Podemos escribir que

$$\langle (-\pi^* \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{b}, \gamma_0 \mathbf{v} \rangle_{-1/2;\gamma} = \langle (-\pi^* \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{b}, \gamma_0 \mathbf{w}_0 \rangle_{-1/2;\gamma} + c_0 \int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS,$$

donde

$$c_0 = \langle (-\pi^* \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{b}, \gamma_0 \mathbf{v}_0 \rangle_{-1/2;\gamma}$$

es una constante. De todo lo anterior y, en particular, de (1.42), deducimos que

$$\langle (-\pi^* + c_0) \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{b}, \gamma_0 \mathbf{v} \rangle_{-1/2;\gamma} = \langle (-\pi^* \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{b}, \gamma_0 \widehat{\mathbf{w}}_0 \rangle_{-1/2;\gamma} = 0.$$

Es inmediato comprobar que el par $(\mathbf{y}, \pi^* + c_0)$ verifica (1.35)–(1.37). Veamos finalmente que se verifica la acotación (1.38). Se tiene que

$$|c_0| \leq \|\mathbf{v}_0\|_{1/2;\gamma} (\|(-\pi \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}\|_{-1/2;\gamma} + \|\mathbf{b}\|_{-1/2;\gamma}),$$

donde \mathbf{v}_0 sólo depende de γ y Ω . Por el Teorema 1.10,

$$|c_0| \leq C \|\mathbf{v}_0\|_{1/2;\gamma} (\|\mathbf{f}\|_{0;\Omega} + \|-\pi \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}\|_{0;\Omega} + \|\mathbf{b}\|_{-1/2;\gamma}).$$

Sin más que tener en cuenta (1.40) y (1.41), obtenemos por tanto que

$$|c_0| \leq C (\|\mathbf{f}\|_{0;\Omega} + \|\mathbf{b}\|_{-1/2;\gamma}),$$

lo que proporciona (1.38). Es un sencillo ejercicio comprobar que la solución construida es única. ■

Segundo Método de Demostración: La segunda prueba será realizada dentro del marco funcional descrito en la Sección 1.3.1. Consideramos los espacios

$$X = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N, \mathbf{v} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \setminus \gamma\}$$

y

$$M = L^2(\Omega).$$

Con las hipótesis hechas sobre γ , X posee estructura de espacio de Hilbert para la seminorma $|\cdot|_{1;\Omega}$. Consideramos las formas bilineales $a(\cdot, \cdot)$ y $\beta(\cdot, \cdot)$ definidas como sigue:

$$a(\mathbf{y}, \mathbf{v}) = \nu(\nabla \mathbf{y}, \nabla \mathbf{v})_{0;\Omega} \equiv \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{y} : \nabla \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{y}, \mathbf{v} \in X,$$

$$\beta(\mathbf{y}, p) = -(p, \nabla \cdot \mathbf{y})_{0;\Omega} \equiv - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \mathbf{y}) \, dx \quad \forall \mathbf{y} \in X, \forall p \in L^2(\Omega).$$

Por otro lado, introducimos la siguiente forma lineal sobre X :

$$\langle L, \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{0;\Omega} + \langle \mathbf{b}, \gamma_0 \mathbf{v} \rangle_{-1/2;\gamma} \equiv \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx + \langle \mathbf{b}, \gamma_0 \mathbf{v} \rangle_{-1/2;\gamma} \quad \forall \mathbf{v} \in X.$$

Las formas precedentes son continuas y, además, $a(\cdot, \cdot)$ es elíptica en el correspondiente espacio

$$V = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \in X, b(\mathbf{v}, p) = 0 \quad \forall p \in L^2(\Omega)\},$$

que, obviamente, coincide con $\widetilde{V}(\Omega)$ (de hecho, $a(\cdot, \cdot)$ es elíptica en todo X).

Planteamos el problema mixto:

$$\text{Hallar } (\mathbf{y}, \pi) \in X \times L^2(\Omega) \text{ tal que}$$

$$\begin{cases} a(\mathbf{y}, \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{v}, \pi) = \langle L, \mathbf{v} \rangle & \forall \mathbf{v} \in X, \\ \beta(\mathbf{y}, p) = 0 & \forall p \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (1.43)$$

Para demostrar la existencia y unicidad de solución de la (1.43), bastará comprobar las hipótesis del Teorema 1.34. Veamos pues que la forma bilineal $\beta(\cdot, \cdot)$ verifica la condición “inf-sup” en el espacio $X \times L^2(\Omega)$.

Admitamos por el momento el siguiente Lema, cuya Demostración será presentada más adelante:

Lema 1.36 *En las condiciones precedentes, existe $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega); X)$ tal que, si $\mathbf{v} = \mathcal{A}p$, entonces $\nabla \cdot \mathbf{v} = p$ en Ω .*

■

Utilizando este resultado, es ya muy fácil probar que $\beta(\cdot, \cdot)$ está en las condiciones del Teorema 1.34. En efecto, sea $p \in L^2(\Omega) \setminus \{0\}$ y sea $\mathbf{z} = -\mathcal{A}p$. Por el Lema 1.36, se tiene que

$$\mathbf{z} \in X, \quad \nabla \cdot \mathbf{z} = p, \quad \|\mathbf{z}\|_{1;\Omega} \leq C \|p\|_{0;\Omega}$$

(donde C sólo depende de Ω). Para esta elección de \mathbf{z} , observamos que

$$\frac{\beta(\mathbf{z}, p)}{\|\mathbf{z}\|_{1;\Omega} \|p\|_{0;\Omega}} \geq \frac{1}{C}$$

y, de aquí, obtenemos la condición “inf-sup” con $\beta_0 = 1/C$. En consecuencia, existe un único par (\mathbf{y}, π) en $X \times L^2(\Omega)$ solución de (1.43).

■

Demostración del Lema 1.36. Sea $\mathbf{v}_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)^N$ tal que $\mathbf{v}_0 = 0$ sobre $\partial\Omega \setminus \gamma$

y

$$\int_{\gamma} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} \, dS = |\Omega|.$$

La elección de \mathbf{v}_0 sólo depende de $\partial\Omega$ y γ . Aplicando el Lema 1.13 con $g \equiv 1$ e $\mathbf{y}_{\Gamma} = \mathbf{v}_0$, obtenemos una función $\mathbf{w}_0 \in H^1(\Omega)^N$ tal que

$$\nabla \cdot \mathbf{w}_0 = 1 \text{ en } \Omega, \quad \gamma_0(\mathbf{w}_0) = \mathbf{v}_0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

En particular, $\mathbf{w}_0 \in X$. Sea p una función arbitraria de $L^2(\Omega)$. Podemos descomponer p como sigue

$$p = q + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} p \, dx;$$

en tal caso, $q \in L^2(\Omega)$ y

$$\int_{\Omega} q \, dx = 0.$$

Gracias al Teorema 1.12, existe una única función $\mathbf{z} \in V^1$ tal que

$$\nabla \cdot \mathbf{z} = q \quad \text{en } \Omega.$$

Además, sabemos que $\|\mathbf{z}\|_{1;\Omega} \leq C \|q\|_{0;\Omega} \leq C \|p\|_{0;\Omega}$ para algunas constantes $C > 0$ independientes de p . Pongamos

$$\mathcal{A}p = \mathbf{z} + \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} p \, dx \right) \mathbf{w}_0$$

Así definido, es obvio que $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega); X)$:

$$\|\mathcal{A}p\|_{1;\Omega} \leq \|\mathbf{z}\|_{1;\Omega} + C \|p\|_{0;\Omega} \leq C \|p\|_{0;\Omega}$$

Finalmente, se observa que, cuando $\mathbf{v} = \mathcal{A}p$, necesariamente $\nabla \cdot \mathbf{v} = p$. ■

Siguiendo los pasos de la segunda Demostración del Teorema 1.35, podemos deducir la siguiente variante:

Teorema 1.37 *Dadas $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^N$, $g \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{b} \in H^{-1/2}(\gamma)^N$, existe un único par (\mathbf{y}, π) de $\widetilde{V} \times L^2(\Omega)$ tal que*

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = \mathbf{f} & \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{y} = g & \text{en } \Omega, \\ (-\pi \text{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{b} & \text{sobre } \gamma, \\ \mathbf{y} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \setminus \gamma. \end{cases}$$

Además, existe una constante $C > 0$, que sólo depende de Ω y γ , tal que

$$\|\mathbf{y}\|_{1;\Omega} + \|\pi\|_{0;\Omega} \leq C (\|\mathbf{f}\|_{0;\Omega} + \|g\|_{0;\Omega} + \|\mathbf{b}\|_{-1/2;\gamma}). \quad (1.44)$$
■

1.3.3 Regularidad L^2 de la Solución del Problema de Stokes

En este Apartado, seguimos considerando un abierto Ω en las condiciones (1.7). Sea γ una ó la unión de varias componentes conexas de la frontera de Ω y supongamos que $\partial\Omega \setminus \gamma$ tiene medida superficial estrictamente positiva. Probaremos que si la regularidad de los datos del problema (1.35)–(1.37) aumenta, también aumenta la regularidad de la solución. Más precisamente, probaremos el

Teorema 1.38 *Sea $m \geq 0$ un entero. Si Ω es de clase $W^{m+2,\infty}$, $\mathbf{f} \in H^m(\Omega)^N$, $g \in H^{m+1}(\Omega)$ y $\mathbf{b} \in H^{m+1/2}(\gamma)^N$, entonces existe un único par*

$$(\mathbf{y}, \pi) \in H^{m+2}(\Omega)^N \times H^{m+1}(\Omega)$$

solución de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = \mathbf{f} & \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{y} = g & \text{en } \Omega, \\ (-\pi \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{b} & \text{sobre } \gamma, \\ \mathbf{y} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \setminus \gamma. \end{array} \right.$$

Además, existe una constante $C > 0$, que únicamente depende de Ω , γ y m , tal que

$$\|\mathbf{y}\|_{m+2;\Omega} + \|\pi\|_{m+1;\Omega} \leq C (\|\mathbf{f}\|_{m;\Omega} + \|g\|_{m+1;\Omega} + \|\mathbf{b}\|_{m+1/2;\gamma}).$$

■

Para probar el resultado precedente, seguiremos los pasos del análisis de regularidad L^2 de la solución del problema de Stokes con condiciones de Dirichlet que se desarrolla en [4] (cf. también las referencias allí citadas). Comenzaremos enunciando algunos resultados previos que nos serán necesarios.

Definición 1.39 *Sea φ una función definida en un dominio Ω de \mathbb{R}^N . Dados $h > 0$ y $x \in \Omega$, tales que $x + he_i \in \Omega$, se define el cociente de diferencias $\delta_i^h \varphi$ como sigue:*

$$\delta_i^h \varphi(x) = \frac{\varphi(x + he_i) - \varphi(x)}{h}.$$

■

Se tienen los siguientes resultados (cf. [16])

Lema 1.40 *Sea $\varphi \in W^{1,r}(\Omega)$, $1 \leq r \leq \infty$ y sea $\Omega' \subset \Omega$ un abierto tal que existe $h_0 > 0$ verificando $\Omega' + h_0 e_i \subset \Omega$. Entonces, para cada $h < h_0$ se tiene que*

$$\delta_i^h \varphi \in L^r(\Omega') \quad \text{y} \quad \|\delta_i^h \varphi\|_{0,r;\Omega'} \leq \|D_i \varphi\|_{0,r;\Omega}.$$

■

Lema 1.41 *Sea $\varphi \in L^r(\Omega)$ ($1 < r < \infty$) y supongamos que existe una constante $R > 0$ tal que $\delta_i^h \varphi \in L^r(\Omega')$ y $\|\delta_i^h \varphi\|_{0,r;\Omega'} \leq R$ para cada $h < h_0$ y cada Ω' tal que $\Omega' + he_i \subset \Omega$. Entonces*

$$D_i \varphi \in L^r(\Omega) \quad \text{y} \quad \|D_i \varphi\|_{0,r;\Omega} \leq R.$$

■

Se comprueban de forma inmediata las siguientes propiedades de los coeficientes en diferencias

1. Si denotamos por

$$\tau_i^h \varphi(x) = \varphi(x + h e_i),$$

se verifica

$$\delta_i^h(\eta\varphi) = (\tau_i^h \eta) \delta_i^h \varphi + \varphi \delta_i^h \eta.$$

2. Sean $\eta, \varphi \in L^2(\Omega)$; supongamos que algunas de estas dos funciones tiene soporte compacto $K \subset \Omega$ y que existe $h_0 > 0$ tal que $K + h_0 e_i \subset \bar{\Omega}$. Entonces, para cada $h < h_0$, se verifica la igualdad

$$\int_{\Omega} \eta \delta_i^h \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \varphi \delta_i^{-h} \eta \, dx.$$

Pasamos seguidamente a estudiar los cocientes incrementales $\delta_i^h \varphi$, correspondientes a una función $\varphi \in H^{1/2}(\Delta)$, donde Δ es un abierto acotado de \mathbb{R}^N con frontera $C^{0,1}$. Consideraremos la función ρ_{Δ} , dada por

$$\rho_{\Delta}(x) = d(x, \partial\Delta).$$

La regularidad de Δ implica $\rho_{\Delta} \in W^{1,\infty}(\Delta)$. Utilizando la función ρ_{Δ} , introducimos el espacio (cf. [38])

$$H_{00}^{1/2}(\Delta) = \{u; u \in H^{1/2}(\Delta), \rho_{\Delta}^{-1/2} u \in L^2(\Omega)\},$$

que posee estructura de espacio de Hilbert para la norma

$$\|u\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta)} = (\|u\|_{1/2;\Delta}^2 + \|\rho_{\Delta}^{-1/2} u\|_{0;\Delta}^2)^{1/2}.$$

El espacio $H_{00}^{1/2}(\Delta)$ está estrictamente contenido en $H^{1/2}(\Delta)$; además, $\mathcal{D}(\Delta)$ es denso en $H_{00}^{1/2}(\Delta)$ y se tiene la siguiente caracterización de $H_{00}^{1/2}(\Delta)'$ (cf. [38]):

$$H_{00}^{1/2}(\Delta)' = \{f; f = f_0 + \rho^{-1/2} f_1, f_0 \in H^{-1/2}(\Delta), f_1 \in L^2(\Delta)\}. \quad (1.45)$$

La importancia de $H_{00}^{1/2}(\Delta)$ y, sobre todo, de la igualdad (1.45), queda patente una vez que se tiene en cuenta el resultado que sigue:

Proposición 1.42 *El operador diferencial $\frac{\partial}{\partial x_i}$ actúa como sigue:*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{L}(H^s(\Delta); H^{s-1}(\Delta)) \quad \text{para } s \geq 0, \quad s \neq 1/2,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Delta); H_{00}^{1/2}(\Delta)').$$

■

Las propiedades de $H_{00}^{1/2}(\Delta)$ que preceden nos permiten generalizar el Lema 1.40 al caso en que se consideran funciones de $H^{1/2}(\Delta)$:

Lema 1.43 *Sea $\varphi \in H^{1/2}(\Delta)$ y sea $\Delta' \subset \Delta$ un abierto tal que existe $h_0 > 0$ verificando $\Delta' + h_0 \mathbf{e}_i \subset \Delta$. Entonces, para cada $h < h_0$, se tiene que*

$$\delta_i^h \varphi \in H_{00}^{1/2}(\Delta')' \quad \text{y} \quad \|\delta_i^h \varphi\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta')'} \leq \|D_i \varphi\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta)'}$$

Demostración: Razonemos en primer lugar para una función φ de $\mathcal{D}(\Delta)$. Podemos escribir que

$$\delta_i^h \varphi(x) = \frac{\varphi(x + h\mathbf{e}_i) - \varphi(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h D_i \varphi(x + \sigma \mathbf{e}_i) d\sigma.$$

Sea $\psi \in \mathcal{D}(\Delta')$. Prolongando ψ por cero fuera de Δ' , resulta que⁹

$$\begin{aligned} \langle \delta_i^h \varphi, \psi \rangle &= \frac{1}{h} \int_{\Delta'} \left(\int_0^h D_i \varphi(x + \sigma \mathbf{e}_i) d\sigma \right) \psi(x) dx \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h \int_{\Delta'} D_i \varphi(x + \sigma \mathbf{e}_i) \psi(x) dx d\sigma \end{aligned}$$

e, introduciendo la nueva variable $\xi = x + \sigma \mathbf{e}_i$ en la integral precedente,

$$\begin{aligned} \langle \delta_i^h \varphi, \psi \rangle &= \frac{1}{h} \int_0^h \int_{\Delta} D_i \varphi(\xi) \tau_i^{-\sigma} \psi(\xi) d\xi d\sigma \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h \langle D_i \varphi, \tau_i^{-\sigma} \psi \rangle d\sigma. \end{aligned}$$

Si tomamos valores absolutos, podemos acotar el producto de dualidad como sigue:

$$|\langle \delta_i^h \varphi, \psi \rangle| \leq \frac{1}{h} \int_0^h \|D_i \varphi\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta)'} \|\tau_i^{-\sigma} \psi\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta)} d\sigma. \quad (1.46)$$

Veamos a continuación qué ocurre con la norma de $\tau_i^{-\sigma} \psi$ en $H_{00}^{1/2}(\Delta)$. Por definición,

$$\|\tau_i^{-\sigma} \psi\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta)} = (\|\tau_i^{-\sigma} \psi\|_{1/2;\Delta}^2 + \|\rho_{\Delta}^{-1/2} \tau_i^{-\sigma} \psi\|_{0;\Delta}^2)^{1/2}.$$

Realizando el cambio de variable $x = \xi - \sigma \mathbf{e}_i$, obtenemos:

$$\|\tau_i^{-\sigma} \psi\|_{1/2;\Delta} = \|\psi\|_{1/2;\Delta'} \quad (1.47)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \|\rho_{\Delta}^{-1/2} \tau_i^{-\sigma} \psi\|_{0;\Delta}^2 &= \int_{\Delta} \frac{|\psi(\xi - \sigma \mathbf{e}_i)|^2}{\rho_{\Delta}(x)} dx = \int_{\Delta'} \frac{|\psi(x)|^2}{d(x + \sigma \mathbf{e}_i, \partial\Delta)} dx \\ &= \int_{\Delta'} \frac{|\psi(x)|^2}{d(x, \partial\Delta')} \frac{d(x + \sigma \mathbf{e}_i, \partial\Delta' + \sigma \mathbf{e}_i)}{d(x + \sigma \mathbf{e}_i, \partial\Delta)} dx. \end{aligned}$$

⁹Los productos de dualidad que aparecen en esta Demostración corresponden a $H_{00}^{1/2}(\Delta')'$ y $H_{00}^{1/2}(\Delta')$.

Por hipótesis, $\Delta' + \sigma e_i \subset \Delta$ para $0 < \sigma < h < h_0$. Luego

$$\frac{d(x + \sigma e_i, \partial\Delta' + \sigma e_i)}{d(x + \sigma e_i, \partial\Delta)} \leq 1$$

y esta acotación, junto con (1.47), nos dice que

$$\|\tau_i^{-\sigma} \psi\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta)} \leq \|\psi\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta')}$$

Volviendo a (1.46), deducimos ahora que

$$|\langle \delta_i^h \varphi, \psi \rangle| \leq \|D_i \varphi\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta)}, \|\psi\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta')}$$

de donde

$$\|\delta_i^h \varphi\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta)'} \leq \|D_i \varphi\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta)'}$$

Dado que φ es arbitraria en $\mathcal{D}(\Delta)$, $\mathcal{D}(\Delta)$ es denso en $H^{1/2}(\Delta)$ y

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Delta); H_{00}^{1/2}(\Delta)'),$$

el argumento precedente prueba el Lema. ■

Seguidamente analizamos la regularidad L^2 de la solución del problema (1.35)–(1.37). Recordemos en primer lugar el resultado siguiente, relativo a la regularidad en el interior (cf. [29])

Teorema 1.44 *Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^N y sea*

$$(\mathbf{y}, \pi) \in H^1(\Omega)^N \times L^2(\Omega)$$

solución de

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi &= \mathbf{f} && \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{y} &= g && \text{en } \Omega. \end{aligned}$$

Si $\mathbf{f} \in H^m(\Omega)^N$ y $g \in H^{m+1}(\Omega)$ con $m \geq 0$, entonces

$$(\mathbf{y}, \pi) \in H_{\text{loc}}^{m+2}(\Omega)^N \times H_{\text{loc}}^m(\Omega).$$

Además, cualquiera que sea el abierto $\Omega' \subset\subset \Omega$, existe $C > 0$, que sólo depende de Ω , Ω' y m , tal que

$$\|\mathbf{y}\|_{m+2;\Omega'} + \|\pi\|_{m+1;\Omega'} \leq C (\|\mathbf{f}\|_{m;\Omega} + \|g\|_{m+1;\Omega}).$$
■

En relación con este resultado, es interesante resaltar:

1. Las estimaciones son interiores y se verifican independientemente de la regularidad del abierto Ω y del comportamiento de (\mathbf{y}, π) sobre $\partial\Omega$.
2. Si \mathbf{f} y g verifican las condiciones de regularidad sólo en un subdominio ω contenido en Ω , entonces se llega a la misma conclusión cambiando Ω por ω y Ω' por cualquier abierto $\omega' \subset\subset \omega$.

Pasaremos a continuación a estudiar la regularidad L^2 hasta la frontera. Probaremos el siguiente

Teorema 1.45 *Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^N que, además de (1.7), verifica $\Omega \in W^{2,\infty}$. Sea γ una ó la unión de varias componentes conexas de $\partial\Omega$. Sea*

$$(\mathbf{y}, \pi) \in H^1(\Omega)^N \times L^2(\Omega)$$

solución de

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{y} + \nabla\pi &= \mathbf{f} && \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{y} &= g && \text{en } \Omega, \\ (-\pi \text{Id} + \nu\nabla\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{b} && \text{sobre } \gamma, \\ \mathbf{y} &= 0 && \text{en } \partial\Omega \setminus \gamma. \end{aligned}$$

Si $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^N$, $g \in H^1(\Omega)$ y $\mathbf{b} \in H^{1/2}(\gamma)^N$, entonces para cada x_0 de $\partial\Omega$ existe un entorno U de x_0 de forma que

$$(\mathbf{y}, \pi) \in H^2(U^* \cap \Omega)^N \times H^1(U^* \cap \Omega),$$

cualquiera que sea el abierto $U^* \subset\subset U$. Además, existe $C > 0$, que sólo depende de Ω , U y U^* , tal que

$$\|\mathbf{y}\|_{2;U^* \cap \Omega} + \|\pi\|_{1;U^* \cap \Omega} \leq C (\|\mathbf{f}\|_{0;\Omega} + \|g\|_{1;\Omega} + \|\mathbf{b}\|_{1/2;\gamma}).$$

Demostración: Nos centraremos en el caso en que el punto $x_0 \in \gamma$, puesto que el caso $x_0 \in \partial\Omega \setminus \gamma$ (i.e. condiciones de contorno de tipo Dirichlet) ha sido estudiado por J.A. Bello en [4]. Fijado x_0 , consideremos el entorno $U = U_{r_0}$ de x_0 dado por la Definición 1.4 (donde naturalmente las $a_r \in W^{2,\infty}(\Delta_r)$; cf. Sección 1.1.2); consideremos también la aplicación

$$\psi = A_{r_0}^{-1} \circ Q_{r_0}$$

(cf. Definición 1.5), que es un difeomorfismo de

$$C = \Delta_{r_0} \times (-\beta, \beta) = \{(\xi', \xi_N); \xi' \in \mathbb{R}^{N-1}, |\xi_i| < \alpha \forall i: 1 \leq i \leq N-1, |\xi_N| < \beta\}$$

en U . Por supuesto, ψ es un difeomorfismo de clase $W^{2,\infty}$, al igual que ψ^{-1} . Haremos la Demostración en varias etapas.

Etapla 1.- Fijado $U^* \subset\subset U$, elegimos $\alpha' < \alpha$ y $\beta' < \beta$ de tal forma que el conjunto

$$C' = \{\xi; \xi \in \mathbb{R}^N, |\xi_i| < \alpha' \forall i: 1 \leq i \leq N-1, |\xi_N| < \beta'\}$$

verifique $\psi^{-1}(U^*) \subset C'$. Sea $U' = \psi(C')$ y sea $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ en U y $\varphi \equiv 1$ en U' . Definimos las funciones $\mathbf{z} = \varphi \mathbf{y}$ y $q = \varphi \pi$. Se tiene entonces que

$$(\mathbf{z}, q) \in H^1(U \cap \Omega)^N \times L^2(U \cap \Omega),$$

$$\text{Sop } \mathbf{z}, \text{ Sop } q \subset U \cap \bar{\Omega}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{y}, \quad q = \pi \text{ en } U',$$

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{z} + \nabla q = \mathbf{f}^*, & \nabla \cdot \mathbf{z} = g^* & \text{en } U \cap \Omega, \\ (-q \text{Id} + \nu \nabla \mathbf{z}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{b}^* & & \text{sobre } U \cap \gamma, \\ \mathbf{z} = 0 & & \text{sobre } \partial U \cap \Omega, \end{cases} \quad (1.48)$$

donde

$$\mathbf{f}^* = \varphi \mathbf{f} - 2\nu \nabla \varphi \nabla \mathbf{y} + \pi \nabla \varphi - \nu \Delta \varphi \mathbf{y} \in L^2(\Omega)^N,$$

$$g^* = \varphi g + \nabla \varphi \cdot \mathbf{y} \in H^1(\Omega)^N$$

y

$$\mathbf{b}^* = \varphi \mathbf{b} + \nu (\nabla \varphi \otimes \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} \in H^{1/2}(\gamma)^N.$$

Etapla 2.- Introduciendo el nuevo espacio de Hilbert,

$$X = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \in H^1(U \cap \Omega)^N, \mathbf{v} = 0 \text{ sobre } \partial U \cap \Omega\},$$

el problema (1.48) se puede escribir de forma equivalente como sigue

$$\begin{cases} \nu \int_{U \cap \Omega} \nabla \mathbf{z} : \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{U \cap \Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{U \cap \Omega} \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{U \cap \gamma} \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{v} \, dS \quad \forall \mathbf{v} \in X, \\ \nabla \cdot \mathbf{z} = g^* \text{ cpd. en } U \cap \Omega, \\ (\mathbf{z}, q) \in X \times L^2(U \cap \Omega). \end{cases}$$

Una vez que se introduce el cambio de variable $x = \psi(\xi)$, para $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z} \circ \psi$, $\tilde{q} = q \circ \psi$, resulta lo siguiente (cf. [51]):

$$(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{q}) \in H^1(C^+)^N \times L^2(C^+), \quad \text{Sop } \tilde{\mathbf{z}}, \text{ Sop } \tilde{q} \subset C \cap \bar{\mathbb{R}}_+^N$$

Aquí, $C^+ = \Delta_{r_0} \times (0, \beta)$. El cambio de variable precedente hace que las ecuaciones queden transformadas como sigue:

$$\begin{aligned} & \nu \sum_{i,j=1}^N \int_{C^+} a_{ij} D_i \tilde{z} \cdot D_j \tilde{v} \, d\xi - \sum_{i,j=1}^N \int_{C^+} \tilde{q} e_{ij} D_j \tilde{v}_i \, d\xi \\ &= \sum_{i,j=1}^N \int_{C^+} \tilde{\mathbf{f}}^* \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, d\xi + \int_{\Delta_{r_0}} \tilde{\mathbf{b}}^*(\xi', 0) \cdot \tilde{\mathbf{v}}(\xi', 0) \, d\xi', \quad \forall \tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{X}, \\ & \sum_{i,j=1}^N e_{ij} D_j \tilde{z}_i = \tilde{g}^* \quad \text{en } C^+. \end{aligned}$$

Ahora

1. $\tilde{\mathbf{f}}^* \equiv \mathbf{f}^* \circ \psi \in L^2(C^+)^N$, $\tilde{g}^* \equiv g^* \circ \psi \in H^1(C^+)$ y

$$\tilde{\mathbf{b}}^* = \mathbf{b}^* \circ \psi(\xi', 0) \left[1 + \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{\partial a_{r_0}}{\partial \xi_i} \right)^2 \right]^{1/2}$$

es una función de $H^{1/2}(\Delta_{r_0})^N$,

2. El espacio \tilde{X} es siguiente:

$$\tilde{X} = \{ \tilde{\mathbf{v}}; \tilde{\mathbf{v}} \in H^1(C^+)^N, \tilde{\mathbf{v}} = 0 \text{ sobre } \partial C^+ \cap \mathbb{R}_+^N \},$$

3. Los coeficientes a_{ij} y e_{ij} vienen dados por las fórmulas

$$a_{ij}(\xi) = \sum_{k=1}^N e_{ki}(\xi) e_{kj}(\xi)$$

y

$$e_{ij}(\xi) = ((D_i \psi_j^{-1}) \circ \psi)(\xi)$$

para $1 \leq i, j \leq N$.

Introduciendo las matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$, $E = (e_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ y $E' = (e'_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$, donde

$$e'_{ij}(\xi) = (D_i \psi_j)(\xi),$$

se observa que

1. $A = E^T E$ y $EE' = \text{Id}$.
2. Las componentes de A , E y E' están en $W^{1,\infty}(C)$. En lo que sigue, K es una cota superior de las normas en $W^{1,\infty}(C)$ de todas ellas.

3. La matriz A es simétrica y uniformemente definida positiva: Existen dos constantes $\lambda, \Lambda > 0$ tales que el espectro de $A(\xi)$ está contenido en el intervalo $[\lambda, \Lambda]$, cualquiera que sea $\xi \in C$.
4. Las constantes K, λ y Λ dependen de ψ y, por tanto, de Ω .

Etapas 3. Sean $\alpha_2 \in (\alpha', \alpha)$ y $\beta_2 \in (\beta', \beta)$ tales que el correspondiente

$$C_2 = \{\xi; \xi \in \mathbb{R}^N, |\xi_i| < \alpha_2 \quad \forall i : 1 \leq i \leq N-1, |\xi_N| < \beta_2\}$$

verifica $\text{Sop } \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{q} \subset C_2 \cap \bar{\mathbb{R}}_+^N$. Sea $d = \min(\alpha - \alpha_2, \beta - \beta_2)$ y sean

$$\alpha_3 = \frac{\alpha + \alpha_2}{2}, \quad \alpha_4 = \frac{\alpha + \alpha_3}{2}, \quad \beta_3 = \frac{\beta + \beta_2}{2}, \quad \beta_4 = \frac{\beta + \beta_3}{2}$$

Consideramos los conjuntos C_3 y C_4 definidos como C_2 cambiando (α_2, β_2) por (α_3, β_3) y (α_4, β_4) , respectivamente. Entonces

$$C' \subset\subset C_2 \subset\subset C_3 \subset\subset C_4.$$

Sean $C_3^+ = C_3 \cap \mathbb{R}_+^N$, $\tilde{\mathbf{v}} \in H^1(C_3^+)^N$ tal que $\tilde{\mathbf{v}} = 0$ sobre $\partial C_3 \cap \mathbb{R}_+^N$ y h tal que $|h| < d/4$. Por la forma de elegir los conjuntos C_2, C_3 y C_4 , se tiene que $\delta_k^{-h} \tilde{\mathbf{v}}$ está en $H^1(C_4)^N$, $\delta_k^{-h} \tilde{\mathbf{v}} = 0$ sobre $\partial C_4 \cap \mathbb{R}_+^N$ cuando $1 \leq k \leq N-1$ y^h

$$\begin{aligned} & \nu \sum_{i,j=1}^N \int_{C^+} a_{ij} D_i \tilde{\mathbf{z}} \cdot D_j (\delta_k^{-h} \tilde{\mathbf{v}}) d\xi - \sum_{i,j=1}^N \int_{C^+} \tilde{q} e_{ij} D_j (\delta_k^{-h} \tilde{v}_i) d\xi \\ &= \int_{C^+} \tilde{\mathbf{f}}^* \cdot \delta_k^{-h} \tilde{\mathbf{v}} d\xi + \int_{\Delta_{r_0}} \tilde{\mathbf{b}}^*(\xi', 0) \cdot \delta_k^{-h} \tilde{\mathbf{v}}(\xi', 0) d\xi'. \end{aligned}$$

Veamos cómo se transforman las integrales precedentes cuando los cocientes en diferencias dejan de actuar sobre $\tilde{\mathbf{v}}$. La primera de ellas se convierte en

$$-\nu \sum_{i,j=1}^N \int_{C^+} \delta_k^h (a_{ij} D_i \tilde{\mathbf{z}}) \cdot D_j \tilde{\mathbf{v}} d\xi$$

que, a su vez, puede escribirse en la forma

$$-\nu \sum_{i,j=1}^N \int_{C^+} a_{ij} D_i (\delta_k^h \tilde{\mathbf{z}}) \cdot D_j \tilde{\mathbf{v}} d\xi + T_1(\tilde{\mathbf{v}}),$$

donde

$$T_1(\tilde{\mathbf{v}}) = -\nu \sum_{i,j=1}^N \int_{C^+} \delta_k^h a_{ij} \tau_k^h (D_i \tilde{\mathbf{z}}) \cdot D_j \tilde{\mathbf{v}} d\xi.$$

^hNaturalmente, el caso $k = N$ necesita ser tratado aparte.

Por otra parte, la segunda integral se transforma en

$$\sum_{i,j=1}^N \int_{C^+} e_{ij} \delta_k^h \tilde{q} D_j \tilde{v}_i d\xi + T_2(\tilde{\mathbf{v}}),$$

donde

$$T_2(\tilde{\mathbf{v}}) = \sum_{i,j=1}^N \int_{C^+} \delta_k^h e_{ij} \tau_k^h \tilde{q} D_j \tilde{v}_i d\xi.$$

La tercera se convierte en

$$T_3(\tilde{\mathbf{v}}) = - \int_{C^+} \delta_k^h \tilde{\mathbf{f}}^* \cdot \tilde{\mathbf{v}} d\xi$$

y la última se escribe así:

$$T_4(\tilde{\mathbf{v}}) = \int_{\Delta_{\tau_0}} \delta_k^h \tilde{\mathbf{b}}^* \cdot \tilde{\mathbf{v}}(\xi', 0) d\xi'.$$

Denotemos \tilde{X}_3 el espacio

$$\tilde{X}_3 = \{\tilde{\mathbf{v}}; \tilde{\mathbf{v}} \in H^1(C_3^+)^N, \tilde{\mathbf{v}} = 0 \text{ sobre } \partial C_3^+ \cap \mathbf{R}_+^N\}.$$

De las afirmaciones anteriores, se deduce que

$$(\delta_k^h \tilde{\mathbf{z}}, \delta_k^h \tilde{q}) \in \tilde{X}_3 \times L^2(C_3^+)$$

y verifica

$$\begin{aligned} & \nu \sum_{i,j=1}^N \int_{C_3^+} a_{ij} D_i(\delta_k^h \tilde{\mathbf{z}}) \cdot D_j \tilde{\mathbf{v}} d\xi - \sum_{i,j=1}^N \int_{C_3^+} e_{ij} \delta_k^h \tilde{q} D_j \tilde{v}_i d\xi \\ & = T_1(\tilde{\mathbf{v}}) + T_2(\tilde{\mathbf{v}}) + T_3(\tilde{\mathbf{v}}) + T_4(\tilde{\mathbf{v}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{X}_3. \end{aligned}$$

Por otro lado, dado $\tilde{\mu} \in L^2(C_3^+)$, se tiene:

$$\begin{aligned} & - \sum_{i,j=1}^N \int_{C_3^+} e_{ij} \tilde{\mu} D_j(\delta_k^h \tilde{z}_i) d\xi \\ & = - \sum_{i,j=1}^N \int_{C_3^+} \tilde{\mu} (\delta_k^h (e_{ij} D_j \tilde{z}_i) - \delta_k^h e_{ij} \tau_k^h (D_j \tilde{z}_i)) d\xi \\ & = \int_{C_3^+} e_{ij} \tilde{\mu} \delta_k^h (\tilde{g}^*) d\xi + \sum_{i,j=1}^N \int_{C_3^+} e_{ij} \tilde{\mu} \delta_k^h e_{ij} \tau_k^h (D_j \tilde{z}_i) d\xi \\ & \equiv T_5(\tilde{\mu}) \end{aligned}$$

Consideramos las formas bilineales $\tilde{\alpha}(\cdot, \cdot)$ y $\tilde{\beta}(\cdot, \cdot)$, definidas como sigue:

$$\tilde{\alpha}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) = \nu \sum_{i,j=1}^N \int_{C_3^+} a_{ij} D_i \tilde{\mathbf{u}} \cdot D_j \tilde{\mathbf{v}} d\xi \quad \forall \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{X}_3$$

$$\tilde{\beta}(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mu}) = - \sum_{i,j=1}^N \int_{C_3^+} \tilde{\mu} e_{ij} D_j \tilde{v}_i d\xi \quad \forall (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mu}) \in \tilde{X}_3 \times L^2(C_3^+).$$

Entonces, es obvio que $(\delta_k^h \tilde{\mathbf{z}}, \delta_k^h \tilde{q}) \in \widetilde{X}_3 \times L^2(C_3^+)$ y, además,

$$\begin{cases} \tilde{a}(\delta_k^h \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{v}}) + \tilde{\beta}(\tilde{\mathbf{v}}, \delta_k^h \tilde{q}) = T_1(\tilde{\mathbf{v}}) + T_2(\tilde{\mathbf{v}}) + T_3(\tilde{\mathbf{v}}) + T_4(\tilde{\mathbf{v}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{v}} \in \widetilde{X}_3, \\ \tilde{\beta}(\delta_k^h \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mu}) = T_5(\tilde{\mu}) \quad \forall \tilde{\mu} \in L^2(C_3^+). \end{cases} \quad (1.49)$$

Etapa 4.- Veamos seguidamente que (1.49) es una particularización del problema (Q) considerado en el apartado 1.3.1. Comenzamos probando que T_1, T_2, T_3 y T_4 son formas lineales y continuas sobre \widetilde{X}_3 , mientras que T_5 lo es sobre $L^2(C_3^+)$.

Para acotar $T_1(\tilde{\mathbf{v}})$, debemos tener en cuenta las propiedades de los coeficientes a_{ij} expuestas anteriormente, las expresiones que relacionan $\tilde{\mathbf{z}}$ con \mathbf{z} y, también, la acotación (1.44). De esta forma, si $\tilde{\mathbf{v}} \in \widetilde{X}_3$, resulta:

$$\begin{aligned} |T_1(\tilde{\mathbf{v}})| &\leq \nu \sum_{i,j=1}^N \|\delta_k^h a_{ij}\|_{0,\infty;C_3^+} \|\tau_k^h(D_i \tilde{\mathbf{z}})\|_{0;C_3^+} \|D_j \tilde{\mathbf{v}}\|_{0;C_3^+} \\ &\leq C(K) |\mathbf{z}|_{1;U\cap\Omega} |\tilde{\mathbf{v}}|_{1;C_3^+} \\ &\leq C(K) (\|\mathbf{f}^*\|_{0;U\cap\Omega} + \|g^*\|_{0;U\cap\Omega} + \|\mathbf{b}^*\|_{-1/2;U\cap\gamma}) |\tilde{\mathbf{v}}|_{1;C_3^+}. \end{aligned}$$

Utilizando el mismo razonamiento, acotamos T_2 como sigue:

$$|T_2(\tilde{\mathbf{v}})| \leq C(K) (\|\mathbf{f}^*\|_{0;U\cap\Omega} + \|g^*\|_{0;U\cap\Omega} + \|\mathbf{b}^*\|_{-1/2;U\cap\gamma}) |\tilde{\mathbf{v}}|_{1;C_3^+}$$

Por otra parte,

$$|T_3(\tilde{\mathbf{v}})| \leq \|\mathbf{f}^*\|_{0;U\cap\Omega} |\tilde{\mathbf{v}}|_{1;C_3^+}$$

Veamos ahora cómo puede ser acotado el término $T_4(\tilde{\mathbf{v}})$. Para ello, utilizaremos el Lema 1.43:

$$\begin{aligned} |T_4(\tilde{\mathbf{v}})| &\leq \|\delta_k^h \tilde{\mathbf{b}}^*\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta_{r_0})} \|\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, 0)\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta_{r_0})} \leq C \|\tilde{\mathbf{b}}^*\|_{1/2;\Delta_{r_0}} \|\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, 0)\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta_{r_0})} \\ &\leq C(K) \|\mathbf{b}^*\|_{1/2;U\cap\gamma} \|\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, 0)\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta_{r_0})} \end{aligned}$$

Si $\tilde{\mathbf{v}} \in \widetilde{X}_3$, no es difícil comprobar que

$$\|\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, 0)\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta_{r_0})} \leq C(U') \|\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, 0)\|_{1/2;\Delta_{r_0}} \leq C(U') |\tilde{\mathbf{v}}|_{1;C_3}$$

Por tanto,

$$|T_4(\tilde{\mathbf{v}})| \leq C(K, U') \|\mathbf{b}^*\|_{1/2;U\cap\gamma} |\tilde{\mathbf{v}}|_{1;C_3}$$

y podemos escribir que

$$T_1(\tilde{\mathbf{v}}) + T_2(\tilde{\mathbf{v}}) + T_3(\tilde{\mathbf{v}}) + T_4(\tilde{\mathbf{v}}) = \langle T, \tilde{\mathbf{v}} \rangle \quad \forall \tilde{\mathbf{v}} \in \widetilde{X}_3,$$

donde $T \in \widetilde{X}'_3$ y

$$\|T\|_{\widetilde{X}'_3} \leq C(K, U') (\|\mathbf{f}^*\|_{0;U\cap\Omega} + \|g^*\|_{0;U\cap\Omega} + \|\mathbf{b}^*\|_{1/2;U\cap\Gamma}).$$

En cuanto a T_5 , se tiene que

$$|T_5(\tilde{\mu})| \leq C(K) (\|\mathbf{f}^*\|_{0;U\cap\Omega} + \|g^*\|_{1;U\cap\Omega} + \|\mathbf{b}^*\|_{-1/2;U\cap\Gamma}) \|\tilde{\mu}\|_{0;C_3^+}$$

de donde podemos escribir que

$$T_5(\tilde{\mu}) = \int_{C_3^+} \chi \tilde{\mu} d\xi \quad \forall \tilde{\mu} \in L^2(C_3^+)$$

para alguna función $\chi \in L^2(C_3^+)$ ' tal que

$$\|\chi\|_{0;C_3^+} \leq C(K) (\|\mathbf{f}^*\|_{0;U\cap\Omega} + \|g^*\|_{1;U\cap\Omega} + \|\mathbf{b}^*\|_{-1/2;U\cap\Gamma}).$$

Admitamos por un momento el resultado siguiente, cuya demostración será presentada más adelante:

Lema 1.46 *En las condiciones precedentes, se tiene:*

- a) *La forma bilineal $\tilde{\alpha}(\cdot, \cdot)$ es continua y elíptica en \widetilde{X}_3 .*
- b) *La forma bilineal $\tilde{\beta}(\cdot, \cdot)$ es continua y verifica la condición "inf-sup" en*

$$\widetilde{X}_3 \times L^2(C_3^+).$$

■

Gracias a este Lema, estamos en condiciones de aplicar el Teorema 1.34 a la formulación (1.49). Se deduce que el par

$$(\delta_k^h \tilde{\mathbf{z}}, \delta_k^h \tilde{q}) \in \widetilde{X}_3 \times L^2(C_3^+)$$

es la única solución de

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}(\delta_k^h \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{v}}) + \tilde{\beta}(\tilde{\mathbf{v}}, \delta_k^h \tilde{q}) = \langle T, \tilde{\mathbf{v}} \rangle, \quad \forall \tilde{\mathbf{v}} \in \widetilde{X}_3, \\ \tilde{\beta}(\delta_k^h \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mu}) = \langle \chi, \tilde{\mu} \rangle, \quad \forall \tilde{\mu} \in L^2(C_3^+), \end{cases}$$

y que, además,

$$\|\delta_k^h \tilde{\mathbf{z}}\|_{1;C_3^+} + \|\delta_k^h \tilde{q}\|_{0;C_3^+} \leq C (\|T\|_{\widetilde{X}'_3} + \|\chi\|_{0;C_3^+}).$$

Debido a las acotaciones que preceden, obtenemos finalmente que

$$\|\delta_k^h \tilde{\mathbf{z}}\|_{1;C_3^+} + \|\delta_k^h \tilde{q}\|_{0;C_3^+} \leq C (\|\mathbf{f}^*\|_{0;U\cap\Omega} + \|g^*\|_{1;U\cap\Omega} + \|\mathbf{b}^*\|_{1/2;U\cap\Gamma}),$$

donde la constante C depende de K , U y U^* .

Etapla 5.- Sea $\delta = d(U', \partial U)$. Podemos elegir $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ como en la Etapa 1 de la Demostración (i.e. $0 \leq \varphi \leq 1$ y $\varphi \equiv 1$ en U'), tal que se anule fuera de

$$\{x; x \in U, \quad d(x, \partial U) \geq \delta/2\}$$

y verificando

$$|D_i \varphi| \leq \frac{C}{\delta}, \quad |D_{ij} \varphi| \leq \frac{C}{\delta^2} \quad \forall i, j,$$

con C una constante. Utilizando las expresiones de \mathbf{f}^* , g^* y \mathbf{b}^* , tenemos que

$$\|\mathbf{f}^*\|_{0;U \cap \Omega} + \|g^*\|_{1;U \cap \Omega} + \|\mathbf{b}^*\|_{1/2;U \cap \Gamma} \leq C(\delta) (\|\mathbf{f}\|_{0;U \cap \Omega} + \|g\|_{1;U \cap \Omega} + \|\mathbf{b}\|_{1/2;U \cap \Gamma}).$$

Por tanto, cualquiera que sea el abierto $C'' \subset\subset C'$, podemos escribir que

$$\|\delta_k^h \tilde{\mathbf{z}}\|_{1,C_+''} + \|\delta_k^h \tilde{q}\|_{0,C_+''} \leq C(K, U, U') (\|\mathbf{f}\|_{0;U \cap \Omega} + \|g\|_{1;U \cap \Omega} + \|\mathbf{b}\|_{1/2;U \cap \Gamma}),$$

donde $C_+'' = C'' \cap \mathbb{R}_+^N$. De la desigualdad anterior y del Lema 1.41, podemos concluir que

$$(D_k \tilde{\mathbf{z}}, D_k \tilde{q}) \in H^1(C_+')^N \times L^2(C_+')$$

y, además

$$\|D_k \tilde{\mathbf{z}}\|_{1,C_+''} + \|D_k \tilde{q}\|_{0,C_+''} \leq C(K, U, U') (\|\mathbf{f}\|_{0;U \cap \Omega} + \|g\|_{1;U \cap \Omega} + \|\mathbf{b}\|_{1/2;U \cap \Gamma}).$$

Hemos obtenido así que $\tilde{\mathbf{z}} \in H^1(C_+')$, $\tilde{q} \in L^2(C_+')$ y

$$\begin{aligned} D_{ij} \tilde{\mathbf{z}} &\in L^2(C_+')^N \quad \forall (i, j) \neq (N, N), \\ D_i \tilde{q} &\in L^2(C_+') \quad \forall i \neq N. \end{aligned}$$

Derivando respecto a ξ_N las ecuaciones que verifican $\tilde{\mathbf{z}}$ y \tilde{q} , es fácil ver también que

$$D_{NN} \tilde{\mathbf{z}} \in L^2(C_+')^N \quad \text{y} \quad D_N \tilde{q} \in L^2(C_+'),$$

y verifican la misma acotación (cf. por ejemplo [4]). Por tanto,

$$(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{q}) \in H^2(C_+')^N \times H^1(C_+').$$

Basta ahora deshacer el cambio de variable que se introdujo al comienzo de la Etapa 2 para terminar la Demostración. ■

Demostración del Lema 1.46: De las propiedades de las matrices A y E , es fácil deducir la continuidad de las formas $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ y $\tilde{\beta}(\cdot, \cdot)$ y, además, el carácter elíptico de

$\tilde{a}(\cdot, \cdot)$. Para probar la condición “inf-sup”, basta hallar una constante $\tilde{\beta}_0 > 0$ tal que se tenga

$$\sup_{\tilde{v} \in \tilde{X}_3 \setminus \{0\}} \left(\sum_{i,j=1}^N \int_{C_3^+} \tilde{\mu} e_{ij} D_j \tilde{v}_i d\xi \right) / \|\tilde{v}\|_{1;C_3^+} \geq \tilde{\beta}_0 \|\tilde{\mu}\|_{0;C_3^+} \quad \forall \tilde{\mu} \in L^2(C_3^+).$$

Sea U_3^+ la imagen de C_3^+ mediante el difeomorfismo ψ . Deshaciendo el cambio de variable $x = \psi(\xi)$, obtenemos que

$$\int_{C_3^+} \tilde{\mu} e_{ij} D_j \tilde{v}_i d\xi = \int_{U_3^+} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) dx,$$

mientras que

$$\|\tilde{v}\|_{1;C_3^+} \leq C(K) \|\mathbf{v}\|_{1;U_3^+}$$

Aplicando el Lema 1.36 y razonando como en la segunda Demostración del Teorema 1.35, se llega fácilmente a la existencia de $\tilde{\beta}_0$. ■

Enunciamos seguidamente un resultado de regularidad L^2 en todo el abierto Ω :

Teorema 1.47 Sean Ω y γ como en el Teorema 1.45. Sea

$$(\mathbf{y}, \pi) \in H^1(\Omega)^N \times L^2(\Omega)$$

solución de

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi &= \mathbf{f} && \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{y} &= g && \text{en } \Omega, \\ (-\pi \text{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{b} && \text{sobre } \gamma, \\ \mathbf{y} &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega \setminus \gamma. \end{aligned}$$

Si $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^N$, $g \in H^1(\Omega)$ y $\mathbf{b} \in H^{1/2}(\gamma)^N$, entonces

$$(\mathbf{y}, \pi) \in H^2(\Omega)^N \times H^1(\Omega)$$

y, además, existe una constante $C > 0$, que sólo depende de Ω , tal que

$$\|\mathbf{y}\|_{2;\Omega} + \|\pi\|_{1;\Omega} \leq C (\|\mathbf{f}\|_{0;\Omega} + \|g\|_{1;\Omega} + \|\mathbf{b}\|_{1/2;\gamma}).$$

Demostración: Seleccionamos en primer lugar un recubrimiento finito $\{U_j\}_{j=1}^N$ de $\partial\Omega$ de manera que cada U_j cumpla las propiedades satisfechas por el entorno U que proporciona el Teorema 1.45. Sea U_{M+1} un abierto tal que $U_{M+1} \subset\subset \Omega$ y $\bar{\Omega} \subset \bigcup_{j=1}^{M+1} U_j$. Considerando una partición de la unidad en $\bar{\Omega}$ asociada a este recubrimiento y aplicando

los Teoremas 1.44 y 1.45, se obtiene sin dificultad la Demostración del Teorema. ■

Recordemos que el principal objetivo de este apartado es probar el Teorema 1.38. Obviamente cuando $m = 0$, éste se reduce al Teorema 1.47. Para otros valores de m , basta razonar por inducción como en [4], [16].

1.4 El Operador de Stokes

Estudiamos en esta Sección el operador asociado al sistema de ecuaciones de Stokes con condiciones de contorno de distinto tipo sobre distintas partes de la frontera. Más precisamente, estamos interesados en el análisis espectral de este operador de este operador, puesto que sus autovalores y autofunciones jugarán un papel primordial en la Demostración de existencia de solución débil de un problema no lineal acoplado que plantearemos en Capítulos sucesivos. En lo que sigue, supondremos de nuevo que Ω es un abierto de clase $W^{2,\infty}$ que cumple (1.7) y que γ es una componente de $\partial\Omega$ tal que $\partial\Omega \setminus \gamma$ tiene medida superficial estrictamente positiva. En estas condiciones, se verifican el Teorema 1.14 (caracterización de los espacios \widetilde{V} y \widetilde{H}), el Teorema 1.35 (existencia de solución débil del problema de Stokes) y el Teorema 1.47 (regularidad L^2 de la solución).

Consideramos los espacios $\widetilde{V}(\Omega)$ y $\widetilde{H}(\Omega)$ (cf. (1.9)), introducidos en la Sección 1.1. Por las condiciones de regularidad exigidas a Ω , teniendo en cuenta el Lema 1.1 se tiene que

$$\widetilde{V}(\Omega) \hookrightarrow \widetilde{H}(\Omega),$$

con inyección densa y compacta. Identificando $\widetilde{H}(\Omega)$ con su dual, se tiene que

$$\widetilde{V}(\Omega) \hookrightarrow \widetilde{H}(\Omega) \equiv \widetilde{H}(\Omega)' \hookrightarrow \widetilde{V}(\Omega)',$$

donde ambas inyecciones son densas y compactas.

Por simplicidad, en lo sucesivo escribiremos \widetilde{V} en lugar de $\widetilde{V}(\Omega)$ y \widetilde{H} en lugar de $\widetilde{H}(\Omega)$.

Definición 1.48 *El operador de Stokes con condiciones de contorno de distinto tipo*

$$\tilde{A} : \widetilde{V} \longrightarrow \widetilde{V}'$$

está definido por las igualdades

$$\langle \tilde{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \widetilde{V}.$$

■

Se comprueba fácilmente que \tilde{A} es un isomorfismo de \widetilde{V} sobre \widetilde{V}' y que, además, \tilde{A} es autoadjunto. Si $\tilde{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ con $\mathbf{f} \in \widetilde{H}$, entonces \mathbf{u} se caracteriza por ser la única solución del siguiente problema de Stokes:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega, \\ (-p \mathbf{Id} + \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \gamma, \\ \mathbf{u} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \setminus \gamma. \end{array} \right.$$

Teorema 1.49 Existe una sucesión $\{\lambda_j\}_{j \geq 1}$ de autovalores de \tilde{A} ,

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \lambda_{j+1} \leq \dots, \quad \lambda_j \nearrow \infty,$$

y una base ortonormal de \tilde{H} , $\{\mathbf{w}_j\}_{j \geq 1}$, formada por autofunciones asociadas. Más precisamente,

$$\mathbf{w}_j \in C^\infty(\Omega)^N \cap H^2(\Omega)^N \cap \tilde{V}$$

y

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{w}_j : \nabla \mathbf{v} \, dx = \lambda_j \int_{\Omega} \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{v} \, dx, \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{V}$$

para cada j . Además, \mathbf{w}_j se caracteriza por ser, junto con alguna $q_j \in C^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$, la única solución del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \mathbf{w}_j + \nabla q_j = \lambda_j \mathbf{w}_j, \quad \nabla \cdot \mathbf{w}_j = 0 \text{ en } \Omega, \\ (-q_j \mathbf{Id} + \nabla \mathbf{w}_j) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \gamma, \\ \mathbf{w}_j = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \setminus \gamma, \\ \|\mathbf{w}_j\|_{0,\Omega} = 1. \end{array} \right.$$

Demostración: Consideramos el operador $T : \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}$, que a cada $\mathbf{f} \in \tilde{H}$ asocia la solución $\mathbf{u} \in \tilde{V}$ de la ecuación

$$\tilde{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

Debido a que la inyección de \tilde{V} en \tilde{H} es compacta, se tiene que T es un operador compacto. Es fácil comprobar que también es autoadjunto e inyectivo. Aplicando resultados bien conocidos, deducimos que existe una base ortonormal de \tilde{H} formada por autofunciones y una sucesión no creciente $\{\mu_j\}$ verificando:

$$\mu_j > 0, \quad \mu_j \searrow 0, \quad T\mathbf{w}_j = \mu_j \mathbf{w}_j \quad \forall j \geq 1.$$

Basta tomar $\lambda_j = 1/\mu_j$ para obtener el Teorema. Razonando como en el Teorema 1.35, es fácil comprobar que cada \mathbf{w}_j está caracterizada por ser, junto con alguna q_j , solución de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \mathbf{w}_j + \nabla q_j = \lambda_j \mathbf{w}_j, \quad \nabla \cdot \mathbf{w}_j = 0 \text{ en } \Omega, \\ (-q_j \mathbf{Id} + \nabla \mathbf{w}_j) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \gamma, \\ \mathbf{w}_j = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \setminus \gamma. \end{array} \right.$$

A partir de los resultados de regularidad obtenidos en la Sección 1.3 (Teoremas 1.44, 1.47) es un simple ejercicio comprobar que

$$\mathbf{w}_j \in C^\infty(\Omega)^N \cap H^2(\Omega)^N \cap \tilde{V} \quad \text{y} \quad q_j \in C^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega).$$

■

Consideramos el operador no acotado

$$\hat{A} : \mathcal{D}(\hat{A}) \subset \widetilde{H} \longrightarrow \widetilde{H},$$

también llamado operador de Stokes (con condiciones de contorno de distinto tipo) definido como sigue:

$$\hat{A}\mathbf{v} = \sum_{j \geq 1} \lambda_j v_j \mathbf{w}_j \quad \text{si} \quad \mathbf{v} = \sum_{j \geq 1} v_j \mathbf{w}_j \in \mathcal{D}(\hat{A})$$

y

$$\mathcal{D}(\hat{A}) = \left\{ \mathbf{v}; \mathbf{v} \in \widetilde{H}, \quad \mathbf{v} = \sum_{j \geq 1} v_j \mathbf{w}_j, \quad \sum_{j \geq 1} \lambda_j^2 |v_j|^2 < \infty \right\}.$$

El espacio vectorial $\mathcal{D}(\hat{A})$ puede ser dotado de un producto escalar natural, que hace de él un espacio de Hilbert:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{D}(\hat{A})} = \sum_{j \geq 1} \lambda_j u_j v_j \quad \text{si} \quad \mathbf{u} = \sum_{j \geq 1} u_j \mathbf{w}_j, \quad \mathbf{v} = \sum_{j \geq 1} v_j \mathbf{w}_j.$$

En este espacio de Hilbert, las funciones $\lambda_j^{-1} \mathbf{w}_j$ constituyen una base ortonormal.

Evidentemente, si $\mathbf{v} \in \widetilde{H}$, entonces $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\hat{A})$ si y sólo si $\hat{A}\mathbf{v} \in \widetilde{H}$ y, en tal caso, $\hat{A}\mathbf{v} = \tilde{A}\mathbf{v}$.

Teorema 1.50 *Se tiene:*

$$\mathcal{D}(\hat{A}) = \left\{ \mathbf{v}; \mathbf{v} \in H^2(\Omega)^N \cap \widetilde{V}, \quad \exists q \in H^1(\Omega) \text{ con } \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = q\mathbf{n} \text{ sobre } \gamma \right\}. \quad (1.50)$$

Además, existe una constante $C > 0$, que depende de Ω y de γ , tal que

$$\|\mathbf{u}\|_{2;\Omega} \leq C \|\hat{A}\mathbf{u}\|_{0,\Omega}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{D}(\hat{A}). \quad (1.51)$$

Demostración: Sea Y el espacio que aparece a la derecha en la igualdad (1.50). Veamos sucesivamente que $\mathcal{D}(\hat{A}) \subset Y$ y que $Y \subset \mathcal{D}(\hat{A})$. Sea en primer lugar $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\hat{A})$; se tiene que $\hat{A}\mathbf{u} = \mathbf{f} \in \widetilde{H}$. En particular, $\hat{A}\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^N$ y existe $p \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega, \\ (-p \mathbf{Id} + \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sobre } \gamma, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \setminus \gamma. \end{cases}$$

De los resultados de regularidad de la Sección precedente, deducimos que $\mathbf{u} \in Y$. Además, por el Teorema 1.47, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|\mathbf{u}\|_{2;\Omega} \leq C \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} = C \|\hat{A}\mathbf{u}\|_{0,\Omega}$$

Recíprocamente, sea $\mathbf{v} \in Y$; si tomamos

$$\mathbf{f} = -\Delta \mathbf{v} + \nabla q$$

donde q es la función de $H^1(\Omega)$ que proporciona (1.50), resulta que $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^N$ y que $\tilde{A}\mathbf{u} = \tilde{P}\mathbf{f}$, donde \tilde{P} es el operador de proyección ortogonal sobre \tilde{H} :

$$\tilde{P} : L^2(\Omega)^N \longrightarrow \tilde{H}.$$

Por tanto, $\tilde{A}\mathbf{u} \in \tilde{H}$, i.e. $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\hat{A})$.

■

En lo sucesivo, con \tilde{A} designaremos tanto el operador de la Definición 1.48 como el operador de Stokes no acotado \hat{A} .

Capítulo 2

Planteamiento del Problema.

Resultados Principales

2.1 Planteamiento del Problema

En este Capítulo, supondremos que Ω es un abierto acotado de \mathbb{R}^N ($N = 2$ ó 3), de clase $W^{2,\infty}$ y múltiplemente conexo. Denotaremos γ una de las componentes conexas de $\partial\Omega$, de tal forma que $\partial\Omega \setminus \gamma$ tenga medida superficial positiva. Consideraremos el espacio vectorial (cf. la Sección 1.1)

$$\widetilde{V} = \widetilde{V}(\Omega) = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^N, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \text{Sop } \mathbf{v} \subset \Omega \cup \gamma\},$$

y los espacios de Hilbert asociados $\widetilde{V} = \widetilde{V}(\Omega)$ y $\widetilde{H} = \widetilde{H}(\Omega)$. Dada $\mathbf{v} \in L^2(0, T; H^{1/2}(\gamma)^N)$, planteamos el siguiente problema de Navier-Stokes con condiciones de contorno de tipo Dirichlet no homogéneas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{y} - \nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \text{en } Q_T = \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{y} = \mathbf{v} \quad \text{sobre } \Lambda_T = \gamma \times (0, T), \\ \mathbf{y} = 0 \quad \text{sobre } S_T = (\partial\Omega \setminus \gamma) \times (0, T), \\ \mathbf{y}(0) = 0. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Aquí, $T > 0$ es un instante final de tiempo y $\nu > 0$ es el coeficiente de viscosidad cinemática. Para cada \mathbf{v} de $L^2(0, T; H^{1/2}(\gamma)^N)$, pondremos:

$$\widetilde{Y}_{\mathbf{v}}(T) = \{\mathbf{y}_{\mathbf{v}}(T); \mathbf{y}_{\mathbf{v}} \text{ es, junto con alguna } \pi_{\mathbf{v}}, \text{ solución débil de (2.1)}\}.$$

Con esta notación, planteamos el siguiente

Problema 1: *Probar que el conjunto*

$$\left(\bigcup_{\mathbf{v}} \widetilde{Y}_{\mathbf{v}}(T) \right) \cap \widetilde{H}$$

es denso en \widetilde{H} .

Se trata naturalmente de un problema de controlabilidad aproximada ó débil en el sentido de [35], donde el control se ejerce sobre parte del contorno (control frontera). Esta cuestión está relacionada con una Conjetura, planteada por el Profesor Jacques Louis Lions en [37], referente a la controlabilidad aproximada de las ecuaciones de Navier-Stokes con control distribuido, i.e. con condiciones de Dirichlet homogéneas pero segundo miembro no nulo en la ecuación de movimiento (para algunos resultados parciales, cf. [15], [14]).

El Problema 1 se puede interpretar desde el punto de vista físico de la siguiente forma: Supongamos por simplicidad que $\Omega = \mathcal{O} \setminus \bar{\Delta}$ donde \mathcal{O} y Δ son dos abiertos acotados,

simplemente conexos y de clase $W^{2,\infty}$ que verifican $\bar{\Delta} \subset \mathcal{O}$. Pensemos en \mathcal{O} como un “gran” abierto y en Δ como en una “pequeña” porción de éste. Si fuéramos capaces de resolver el Problema 1, estaría probado lo siguiente: Un fluido viscoso e incompresible que ocupa $\mathcal{O} \setminus \bar{\Delta}$ durante el intervalo de tiempo $[0, T]$ y que inicialmente se encuentra en reposo puede ser conducido a un estado mecánico arbitrariamente próximo a un estado deseado actuando exclusivamente sobre $\partial\Delta$. Aquí, “actuar exclusivamente sobre $\partial\Delta$ ” significa dejar entrar y salir fluido a través de $\partial\Delta$ con velocidad adecuada y no hacer nada más.

En este Capítulo daremos una respuesta parcial al problema planteado. En concreto, probaremos el siguiente

Teorema 2.1 *Sea \tilde{Y} el subespacio de \tilde{H} generado por el conjunto*

$$\left(\bigcup_{\mathbf{v}} \tilde{Y}_{\mathbf{v}}(T) \right) \cap \tilde{H}.$$

Entonces \tilde{Y} es denso en \tilde{H} .

■

Es de resaltar que este resultado es análogo a los obtenidos por Bardos y Tartar en [3] cuando el control se hace sobre la condición inicial y a los que obtienen Fernández Cara y Real en [15] y [14] cuando el control se hace sobre el segundo miembro.

2.2 Problemas Abiertos Formulados. Algunos Resultados Parciales Previos

Seguidamente, recordamos algunos resultados relacionados con la controlabilidad aproximada de las ecuaciones de Navier-Stokes y de Stokes cuando el control se ejerce sobre el segundo miembro de la ecuación de movimiento.

2.2.1 Controlabilidad Aproximada de las Ecuaciones de Stokes con Control Distribuido

Sean Ω y ω dos abiertos acotados no vacíos de \mathbb{R}^N ($N = 2$ ó 3) con Ω de clase $W^{2,\infty}$ y $\omega \subset\subset \Omega$. Sean T y ν dos constantes positivas. Consideramos los espacios de Hilbert

$$H = H(\Omega), \quad V = V(\Omega)$$

introducidos en el Capítulo 1. Dado $\mathbf{v} \in L^2(\omega \times (0, T))^N$, consideramos el correspondiente problema de Stokes

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = \mathbf{v} \chi_\omega, & \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 & \text{en } Q_T, \\ \mathbf{y} = 0 & \text{sobre } \Sigma_T = \partial\Omega \times (0, T), \\ \mathbf{y}(0) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (2.2)$$

donde χ_ω es la función característica de ω . Como \mathbf{v} está en $L^2(\omega \times (0, T))^N$, teniendo en cuenta la regularidad de Ω , no es difícil probar que el sistema (2.2) tiene una única solución fuerte $(\mathbf{y}_\mathbf{v}, \pi_\mathbf{v})$, que verifica:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_\mathbf{v} &\in L^2(0, T; H^2(\Omega)^N \cap V) \cap L^\infty(0, T; V), \\ \pi_\mathbf{v} &\in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ \frac{\partial \mathbf{y}_\mathbf{v}}{\partial t} &\in L^2(\Omega \times (0, T))^N. \end{aligned}$$

Sea Y la parte de H definida como sigue:

$$Y = \{\mathbf{y}_\mathbf{v}; \mathbf{v} \in L^2(\omega \times (0, T))^N\}.$$

Obviamente la linealidad de las ecuaciones hace que, en este caso, Y sea un subespacio vectorial de H . Se tiene el resultado siguiente (cf. [34]):

Teorema 2.2 Y es denso en H .

■

El Teorema 2.2 se puede enunciar equivalentemente diciendo que el sistema (2.2) es aproximadamente controlable en H para el instante final de tiempo T .

Una Demostración del Teorema 2.2 puede conseguirse recurriendo a una consecuencia directa del Teorema de Hahn-Banach (cf. por ejemplo [5], [6]); en virtud de esta, probar el Teorema 2.2 es equivalente a probar que si $\mathbf{w} \in H$ y, además,

$$(\mathbf{y}_{\mathbf{v}}(T), \mathbf{w})_{0;\Omega} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in L^2(\omega \times (0, T))^N,$$

entonces $\mathbf{w} = 0$. A su vez, la demostración de que $\mathbf{w} = 0$, reposa sobre un resultado de continuación única (cf. [39]) para el sistema de Stokes.

En [34], [37] se presenta otra Demostración, ésta de carácter constructivo. Más precisamente, fijado un estado deseado $\mathbf{z}_d \in H$, se construye una sucesión de controles \mathbf{v}_k tales que las correspondientes $\mathbf{y}_{\mathbf{v}_k}(T)$ convergen hacia \mathbf{z}_d en H . El argumento es como sigue. Para cada $k \geq 1$, se considera el problema de control

$$\min_{\mathbf{v} \in L^2(\omega \times (0, T))^N} J_k(\mathbf{v}), \quad (2.3)$$

donde,

$$J_k(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|_{0;\omega \times (0, T)}^2 + \frac{k}{2} \|\mathbf{y}_{\mathbf{v}}(T) - \mathbf{z}_d\|_{0;\Omega}^2$$

e $\mathbf{y}_{\mathbf{v}}$ es, junto con $\pi_{\mathbf{v}}$, la solución fuerte de (2.2). El problema de control (2.3) admite solución única $\mathbf{v}_k \in L^2(\omega \times (0, T))^N$; si $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_{\mathbf{v}_k}$ para cada $k \geq 1$, entonces

$$\mathbf{y}_k(T) \rightarrow \mathbf{z}_d \quad \text{en } H \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

Otra forma equivalente de razonar es como sigue. Para cada $k \geq 1$, consideramos el problema acoplado

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = -k \mathbf{q} \chi_{\omega}, & \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 \text{ en } Q_T, \\ -\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{q} + \nabla Q = 0, & \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \text{ en } Q_T, \\ \mathbf{y} = \mathbf{q} = 0, & \text{sobre } \Sigma_T, \\ \mathbf{y}(0) = 0, & \mathbf{q}(T) = \mathbf{y}(T) - \mathbf{z}_d, \end{array} \right. \quad (2.4)$$

que no es más que el sistema de optimalidad asociado a (2.3). Éste admite una única solución $(\mathbf{y}_k, \pi_k, \mathbf{q}_k, Q_k)$; si hacemos $\mathbf{v}_k = -k \mathbf{q}_k \chi_{\omega}$, entonces

$$\mathbf{y}_{\mathbf{v}_k} = \mathbf{y}_k$$

y de nuevo

$$\mathbf{y}_k(T) \rightarrow \mathbf{z}_d \quad \text{en } H \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

La ventaja que tiene este último argumento es que puede ser generalizado al caso de las ecuaciones de Navier-Stokes sin tener que hacer referencia a un problema de control concreto. Desafortunadamente, en el caso de Navier-Stokes, no se sabe demostrar la convergencia de $y_k(T)$ hacia z_d en H (cf. [37]).

2.2.2 Controlabilidad Aproximada de las Ecuaciones de Navier-Stokes con Control Distribuido. Un Resultado Parcial

Sean Ω , ω , T y ν como anteriormente. Para $\mathbf{v} \in L^2(\omega \times (0, T))^N$, consideramos el correspondiente problema de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{y} - \nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = \chi_\omega \mathbf{v}, & \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 & \text{en } Q_T, \\ \mathbf{y} = 0 & & \text{sobre } \Sigma_T, \\ \mathbf{y}(0) = 0, & & \end{cases} \quad (2.5)$$

donde, de nuevo, χ_ω es la función característica de ω . Denotaremos $(\mathbf{y}_\mathbf{v}, \pi_\mathbf{v})$ una solución débil de (2.5). Sea ahora

$$Y_\mathbf{v}(T) = \{\mathbf{y}_\mathbf{v}(T); \mathbf{y}_\mathbf{v} \text{ es, junto con alguna } \pi_\mathbf{v}, \text{ solución débil de (2.5)}\}.$$

Entonces se tiene el resultado siguiente (cf. [15,14]):

Teorema 2.3 *Sea Y el subespacio de H generado por*

$$\left(\bigcup_{\mathbf{v}} Y_\mathbf{v}(T) \right) \cap H.$$

Entonces Y es denso en H .

■

El Teorema 2.3 da una respuesta parcial al problema de la controlabilidad aproximada de las ecuaciones de Navier-Stokes con control segundo miembro (control distribuido en $\omega \times (0, T)$) y, por tanto, a la Conjetura planteada en [37]. Hay que hacer notar que la controlabilidad aproximada para estas ecuaciones es una cuestión abierta.

Recordemos el esquema de la Demostración. Al igual que en el caso lineal descrito anteriormente, probar el Teorema 2.3 equivale a probar que si $\mathbf{w} \in H$ y, además,

$$(\mathbf{y}_\mathbf{v}(T), \mathbf{w})_{0;\Omega} = 0 \quad \forall \mathbf{y}_\mathbf{v} \in \left(\bigcup_{\mathbf{v}} Y_\mathbf{v}(T) \right) \cap H,$$

entonces $\mathbf{w} = 0$.

Para demostrar la afirmación anterior, se recurre a un argumento de dualidad inspirado en la teoría lineal ([35,33]), formulando un problema adjunto asociado a (2.5) y un problema acoplado no lineal, construido a partir del mismo. Más precisamente, dado \mathbf{w} en las condiciones precedentes, se considera el problema siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{y} - \nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = \chi_{\omega} \mathbf{q}, \quad \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ -\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{q} - \nu \Delta \mathbf{q} + \nabla Q = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ \mathbf{y} = \mathbf{q} = 0, \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\ \mathbf{y}(0) = 0, \quad \mathbf{q}(T) = \mathbf{w}. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Admitiendo que (2.6) posee solución $(\mathbf{y}^*, \pi^*, \mathbf{q}^*, Q^*)$ suficientemente regular, necesariamente ésta verifica:

$$\mathbf{q}^* = 0 \quad \text{en } \omega \times (0, T), \quad \mathbf{y}^* = 0 \quad \text{en } Q_T.$$

Si fuéramos capaces de deducir a partir de aquí que $\mathbf{q}^* \equiv 0$, se tendría también que $\mathbf{w} = 0$, lo que se deseaba demostrar. En consecuencia, la Demostración del Teorema 2.3 reposa sobre un resultado de existencia y regularidad de solución para (2.6) y una propiedad de continuación única ([39], [44]) para las ecuaciones de Stokes. Omitimos los detalles, que pueden encontrarse en [15,14].

2.3 Los Resultados Principales

En esta Sección, Ω y γ serán como en la Sección 2.1, i.e., Ω es un abierto acotado de \mathbb{R}^N ($N = 2$ ó 3), de clase $W^{2,\infty}$ y múltiplemente conexo, mientras que γ es una componente conexa de $\partial\Omega$, de tal forma que $\partial\Omega \setminus \gamma$ tiene medida superficial positiva.

2.3.1 El Enunciado de los Resultados Principales

Sean T y ν dos números reales positivos. Para cada $\mathbf{v} \in L^2(0, T; H^{1/2}(\gamma)^N)$, planteamos el correspondiente problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{y} - \nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \text{en } Q_T = \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{y} = \mathbf{v} \quad \text{sobre } \Lambda_T = \gamma \times (0, T), \\ \mathbf{y} = 0 \quad \text{sobre } S_T = (\partial\Omega \setminus \gamma) \times (0, T), \\ \mathbf{y}(0) = 0 \quad \text{en } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Según sabemos, (cf. Capítulo 1), cuando

$$\mathbf{v} \in L^\infty(0, T; H^{1/2}(\gamma)^N), \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{1/2}(\gamma)^N)$$

$$\int_\gamma \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad \text{para } t \in (0, T) \text{ c.p.d.},$$

$$\gamma_n(\mathbf{v}(0)) = 0 \quad \text{en } H^{-1/2}(\gamma)^N,$$

el problema (2.7) admite al menos una solución débil $(\mathbf{y}_\mathbf{v}, \pi_\mathbf{v})$, con

$$\mathbf{y}_\mathbf{v} \in L^2(0, T; \widetilde{V}) \cap L^\infty(0, T; \widetilde{H}),$$

$$\pi_\mathbf{v} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Además, si $N = 2$, se tiene unicidad en el espacio $L^2(0, T; \widetilde{V}) \cap L^\infty(0, T; \widetilde{H})$ para $\mathbf{y}_\mathbf{v}$ y unicidad salvo constantes aditivas para $\pi_\mathbf{v}$ en $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Denotaremos U_{ad} la familia de los controles admisibles:

$$U_{ad} = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \in L^2(0, T; H^{1/2}(\gamma)), (2.7) \text{ admite solución débil } (\mathbf{y}_\mathbf{v}, \pi_\mathbf{v})\}.$$

Probaremos a lo largo del presente Capítulo los siguientes resultados:

Teorema 2.4 *Supongamos que $N = 2$ y sea \widetilde{Y} el subespacio de \widetilde{H} generado por el conjunto*

$$\{\mathbf{y}_\mathbf{v}(T); \mathbf{v} \in U_{ad}\}.$$

Entonces \widetilde{Y} es denso en \widetilde{H} .

■

Teorema 2.5 *Supongamos que $N = 3$. Si denotamos \tilde{Z} el subespacio de \tilde{H} generado por el conjunto*

$$\left(\bigcup_{\mathbf{v} \in U_{ad}} \tilde{Y}_{\mathbf{v}}(T) \right) \cap \tilde{H},$$

donde

$$\tilde{Y}_{\mathbf{v}}(T) = \{\mathbf{y}_{\mathbf{v}}(T); \mathbf{y}_{\mathbf{v}} \text{ es, junto con alguna } \pi_{\mathbf{v}}, \text{ solución débil de (2.7)}\},$$

entonces \tilde{Z} es denso en \tilde{H} . ■

Como se afirmaba en la Sección 2.1, los Teoremas 2.4 y 2.5 dan una respuesta parcial al problema de la controlabilidad aproximada de las ecuaciones de Navier-Stokes con control frontera. Veremos en el Capítulo 3 que el caso lineal (sistema de Stokes) es débilmente controlable en \tilde{H} .

2.3.2 El Método de Demostración (un Esquema)

Para demostrar los Teoremas 2.4 y 2.5, utilizamos de nuevo una consecuencia del Teorema de Hahn-Banach, en virtud de la cual, todo se reduce a probar el siguiente

Teorema 2.6 *Sea $\mathbf{w} \in \tilde{H}$ verificando*

$$\begin{aligned} (\mathbf{y}_{\mathbf{v}}(T), \mathbf{w})_{0;\Omega} &= 0 \quad \forall \mathbf{v} \in U_{ad} \quad \text{si } N = 2, \\ (\mathbf{y}_{\mathbf{v}}(T), \mathbf{w})_{0;\Omega} &= 0 \quad \forall \mathbf{y}_{\mathbf{v}} \in \left(\bigcup_{\mathbf{v} \in U_{ad}} \tilde{Y}_{\mathbf{v}}(T) \right) \cap \tilde{H} \quad \text{si } N = 3. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Entonces $\mathbf{w} = 0$.

Para probar este resultado, formularemos en primer lugar un problema adjunto: Sea $\mathbf{w} \in \tilde{H}$ verificando (2.8) y sea $\mathbf{y}_{\mathbf{v}}$, con $\mathbf{v} \in U_{ad}$ dada, una solución débil de (2.7); consideramos el problema lineal:

$$\begin{cases} -\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - (\mathbf{y}_{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{q} - \nu \Delta \mathbf{q} + \nabla Q = 0, & \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ (-q \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} (\mathbf{y}_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{q} = 0 & \text{sobre } \Lambda_T, \\ \mathbf{q} = 0 \quad \text{sobre } S_T, \quad \mathbf{q}(T) = \mathbf{w} & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (2.9)$$

Denotamos $(\mathbf{q}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}, Q_{\mathbf{v},\mathbf{w}})$ una solución débil de (2.9). La elección de este problema adjunto se debe a que se verifica al menos formalmente la identidad

$$(\mathbf{y}_{\mathbf{v}}(T), \mathbf{w})_{0;\Omega} = \iint_{\Lambda_T} [(-\pi \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}_{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{2} (\mathbf{y}_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{y}_{\mathbf{v}}] \cdot \mathbf{q}_{\mathbf{v},\mathbf{w}} dS dt. \quad (2.10)$$

Intentaremos construir una función \mathbf{v} de U_{ad} de tal forma que se tenga

$$\mathbf{q}_{\mathbf{v},\mathbf{w}} = (-\pi \text{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}_{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{2}(\mathbf{y}_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{y}_{\mathbf{v}} \quad \text{sobre } \Lambda_T, \quad (2.11)$$

donde $\mathbf{y}_{\mathbf{v}}$ es solución débil de la correspondiente ecuación de estado (2.7). Si esto fuera posible, de la condición (2.8) y de la fórmula (2.10) se tendría:

$$\mathbf{q}_{\mathbf{v},\mathbf{w}} = 0 \quad \text{sobre } \Lambda_T.$$

Así, habríamos construido una solución $(\mathbf{q}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}, Q_{\mathbf{v},\mathbf{w}})$ del problema lineal (2.9) que cumple una condición homogénea suplementaria sobre Λ_T . La demostración del Teorema 2.6 quedaría entonces reducida a probar que, en las condiciones precedentes, necesariamente $\mathbf{q}_{\mathbf{v},\mathbf{w}} = 0$ en Q_T . En consecuencia, obtendríamos que $\mathbf{w} \equiv 0$.

Para encontrar una función \mathbf{v} en U_{ad} que verifique (2.11), planteamos el siguiente problema acoplado no lineal:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{y} - \nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ -\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - (\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{q} - \nu \Delta \mathbf{q} + \nabla Q = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ (-\pi \text{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{2}(\mathbf{y} \cdot \mathbf{n})\mathbf{y} = \mathbf{q} \quad \text{sobre } \Lambda_T, \\ (-Q \text{Id} + \nu \nabla \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2}(\mathbf{y} \cdot \mathbf{n})\mathbf{q} = 0 \quad \text{sobre } \Lambda_T, \\ \mathbf{y} = \mathbf{q} = 0 \quad \text{sobre } S_T, \\ \mathbf{y}(0) = 0, \quad \mathbf{q}(T) = \mathbf{w} \quad \text{en } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Veremos que éste admite al menos una solución débil $(\mathbf{y}, \pi, \mathbf{q}, Q)$. Si tomamos

$$\mathbf{v} = \mathbf{y}|_{\gamma} \in U_{ad},$$

obtenemos que $(\mathbf{y}_{\mathbf{v}}, \mathbf{q}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}) = (\mathbf{y}, \mathbf{q})$ y, al mismo tiempo, el par (\mathbf{y}, \mathbf{q}) verifica (2.11).

Para probar que (2.12) admite solución, aplicaremos un argumento de compacidad sobre una aproximación de Galerkin. Más precisamente, introducimos una sucesión de problemas aproximados para los que probaremos la existencia de solución aplicando adecuadamente el Teorema de Schauder del Punto Fijo. Las estimaciones "a priori" de las soluciones aproximadas nos permitirán posteriormente pasar al límite para obtener una solución débil del sistema.

Para demostrar que $\mathbf{q}_{\mathbf{v},\mathbf{w}} = 0$ en $\Omega \times (0, T)$, utilizaremos un resultado de continuación única para las soluciones de (2.9). Para ello, fijado un punto de γ , prolongaremos $\mathbf{q}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ por cero a un "pequeño" entorno ω de dicho punto y comprobaremos que la solución prolongada sigue verificando cierto sistema diferencial.

2.4 Demostración de los Resultados Principales

Seguimos manteniendo para Ω y γ las hipótesis enunciadas en la Sección 2.1.

2.4.1 Algunos Resultados Previos de Carácter Técnico

Antes de presentar la Demostración de los Teoremas 2.4 y 2.5, veamos algunos resultados previos que nos serán de utilidad.

Definición 2.7 Definimos la forma trilineal $\tilde{b}(\cdot, \cdot, \cdot)$

$$\tilde{b} : H^1(\Omega)^N \times H^1(\Omega)^N \times H^1(\Omega)^N \longrightarrow \mathbb{R},$$

por^a

$$\tilde{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}(b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) - b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})).$$

■

Es fácil comprobar que \tilde{b} es una forma trilineal y continua sobre $H^1(\Omega)^N$. Además se verifica la siguiente propiedad:

Proposición 2.8 Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ en $H^1(\Omega)^N$ tales que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ en Ω . Entonces

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, dS$$

y

$$\tilde{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, dS.$$

Además,

$$\tilde{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N.$$

■

La Demostración de la Proposición es sencilla; basta integrar por partes adecuadamente y tener en cuenta la condición de divergencia nula.

El término no lineal \tilde{b} jugará un importante papel en el estudio de la existencia de solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes cuando impongamos condiciones de contorno de tipo Neumann en sobre un trozo de la frontera.

^aRecordemos que la forma trilineal b está definida (cf. Capítulo 1) como sigue:

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \, dx \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H^1(\Omega)^N.$$

Definición 2.9 Definimos el operador \tilde{B} ,

$$\tilde{B} : \tilde{V} \times \tilde{V} \longrightarrow \tilde{V}',$$

por

$$\langle \tilde{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \tilde{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \tilde{V}.$$

■

Se tiene:

Proposición 2.10 Sean \mathbf{u} y \mathbf{v} dos funciones de $L^2(0, T; \tilde{V}) \cap L^\infty(0, T; \tilde{H})$. Entonces,

$$\tilde{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in L^\sigma(0, T; \tilde{V}'),$$

donde $\sigma = 2 - \varepsilon$ con $\varepsilon \in (0, 1)$ arbitrario si $N = 2$ y $\sigma = 4/3$ si $N = 3$.

Demostración: Comenzaremos probando la Proposición cuando $N = 2$. Sea ε un número real positivo, y sea $\mathbf{w} \in \tilde{V}$; entonces

$$\langle \tilde{B}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)), \mathbf{w} \rangle = \tilde{b}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t), \mathbf{w}) = \frac{1}{2}(b(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t), \mathbf{w}) - b(\mathbf{u}(t), \mathbf{w}, \mathbf{v}(t))). \quad (2.13)$$

Acotemos en primer lugar el último sumando. Para ello, aplicamos la desigualdad de Hölder con exponentes 4, 2 y 4, obteniendo de este modo que

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{u}(t), \mathbf{w}, \mathbf{v}(t))| &\leq \|\mathbf{u}(t)\|_{0,4;\Omega} \|\mathbf{w}\|_{1;\Omega} \|\mathbf{v}(t)\|_{0,4;\Omega} \\ &\leq C(\Omega) \|\mathbf{u}(t)\|_{0;\Omega}^{1/2} \|\mathbf{u}(t)\|_{1;\Omega}^{1/2} \|\mathbf{v}(t)\|_{0;\Omega}^{1/2} \|\mathbf{v}(t)\|_{1;\Omega}^{1/2} \|\mathbf{w}\|_{1;\Omega}. \end{aligned}$$

De las hipótesis de la Proposición, se concluye que

$$|b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})| \in L^2(0, T). \quad (2.14)$$

Para acotar el otro sumando, volvemos a aplicar la desigualdad de Hölder con exponentes

$$p = 2 + \frac{2\varepsilon}{4 - 3\varepsilon}, \quad 2, \quad r = \frac{\delta}{\varepsilon} - 4,$$

obteniendo la acotación

$$|b(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t), \mathbf{w})| \leq \|\mathbf{u}(t)\|_{0,p;\Omega} \|\mathbf{v}(t)\|_{1;\Omega} \|\mathbf{w}\|_{0,r;\Omega}.$$

De las inyecciones continuas de Sobolev para $N = 2$, se sigue que $\mathbf{w} \in L^r(\Omega)^N$ para cada $r < \infty$ y, además,

$$\|\mathbf{w}\|_{0,r;\Omega} \leq C(\Omega, r) \|\mathbf{w}\|_{1;\Omega}.$$

Volviendo a la desigualdad inicial, obtenemos ahora que

$$|b(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t), \mathbf{w})| \leq C(\Omega, \varepsilon) \|\mathbf{u}(t)\|_{0,p;\Omega} \|\mathbf{v}(t)\|_{1;\Omega} \|\mathbf{w}\|_{1;\Omega}. \quad (2.15)$$

Para acotar $\|\mathbf{u}(t)\|_{0,p;\Omega}$ utilizamos una desigualdad de interpolación. Por la elección que se ha hecho del exponente p , se tiene

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \in (0, 1);$$

por tanto,

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{0,p;\Omega} \leq \|\mathbf{u}(t)\|_{0;\Omega}^{1-\alpha} \|\mathbf{u}(t)\|_{0,4;\Omega}^{\alpha}$$

lo cual permite que (2.15) se transforme en lo siguiente:

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t), \mathbf{w})| &\leq C(\Omega, \varepsilon) \|\mathbf{u}(t)\|_{0;\Omega}^{1-\alpha} \|\mathbf{u}(t)\|_{0,4;\Omega}^{\alpha} \|\mathbf{v}(t)\|_{1;\Omega} \|\mathbf{w}\|_{1;\Omega} \\ &\leq C(\Omega, \varepsilon) \|\mathbf{u}(t)\|_{0;\Omega}^{1-\alpha} \|\mathbf{u}(t)\|_{1;\Omega}^{\alpha} \|\mathbf{v}(t)\|_{1;\Omega} \|\mathbf{w}\|_{1;\Omega}. \end{aligned}$$

Dada la elección particular de p , α , y r , obtenemos que

$$|b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \in L^q(0, T) \quad \text{con} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2-\varepsilon}$$

y esto, junto con (2.14), nos da el resultado deseado.

Para $N = 3$ razonamos de forma análoga. En este caso, se tiene que $H^1(\Omega)$ se inyecta de forma continua en $L^6(\Omega)$ y

$$\|w\|_{0,6;\Omega} \leq C(\Omega) \|w\|_{1;\Omega} \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

Comenzamos acotando el último sumando de (2.13):

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{u}(t), \mathbf{w}, \mathbf{v}(t))| &\leq \|\mathbf{u}(t)\|_{0,4;\Omega} \|\mathbf{w}\|_{1;\Omega} \|\mathbf{v}(t)\|_{0,4;\Omega} \\ &\leq C(\Omega) \|\mathbf{u}(t)\|_{0;\Omega}^{1/4} \|\mathbf{u}(t)\|_{1;\Omega}^{3/4} \|\mathbf{v}(t)\|_{0;\Omega}^{1/4} \|\mathbf{v}(t)\|_{1;\Omega}^{3/4} \|\mathbf{w}\|_{1;\Omega}. \end{aligned}$$

Obtenemos así que

$$|b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})| \in L^{4/3}(0, T).$$

Para el primer sumando, aplicamos de nuevo la desigualdad de Hölder con exponentes 3, 2 y 6. De esta manera:

$$|b(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t), \mathbf{w})| \leq \|\mathbf{u}(t)\|_{0,3;\Omega} \|\mathbf{v}(t)\|_{1;\Omega} \|\mathbf{w}\|_{0,6;\Omega}.$$

De la identidad

$$\frac{1}{3} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{6} \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

se deduce la desigualdad de interpolación,

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{0,3;\Omega} \leq \|\mathbf{u}(t)\|_{0;\Omega}^{1/2} \|\mathbf{u}(t)\|_{0,6;\Omega}^{1/2}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{u}(t), \mathbf{w}, \mathbf{v}(t))| &\leq \|\mathbf{u}(t)\|_{0;\Omega}^{1/2} \|\mathbf{u}(t)\|_{0,6;\Omega}^{1/2} \|\mathbf{v}(t)\|_{1;\Omega} \|\mathbf{w}\|_{0,6;\Omega} \\ &\leq C(\Omega) \|\mathbf{u}(t)\|_{0;\Omega}^{1/2} \|\mathbf{u}(t)\|_{1;\Omega}^{1/2} \|\mathbf{v}(t)\|_{1;\Omega} \|\mathbf{w}\|_{1;\Omega}. \end{aligned}$$

Esta acotación conduce al resultado deseado. ■

2.4.2 Existencia de Solución Débil para un Problema no Lineal Acoplado

Para $\mathbf{w} \in \widetilde{H}$ dado, consideramos el problema no lineal

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{y} - \nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ -\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{q} - \nu \Delta \mathbf{q} + \nabla Q = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ (-\pi \text{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{2} (\mathbf{y} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{y} = \mathbf{q} \quad \text{sobre } \Lambda_T, \\ (-Q \text{Id} + \nu \nabla \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} (\mathbf{y} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{q} = 0 \quad \text{sobre } \Lambda_T, \\ \mathbf{y} = \mathbf{q} = 0 \quad \text{sobre } S_T, \\ \mathbf{y}(0) = 0, \quad \mathbf{q}(T) = \mathbf{w} \quad \text{en } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Teorema 2.11 *Dada $\mathbf{w} \in \widetilde{H}$, existe una solución débil $(\mathbf{y}, \pi, \mathbf{q}, Q)$ del correspondiente problema (2.12) que además verifica*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}, \mathbf{q} \in L^2(0, T; \widetilde{V}) \cap L^\infty(0, T; \widetilde{H}), \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \in L^\sigma(0, T; \widetilde{V}') \text{ con } \sigma = 2 - \varepsilon \text{ si } N = 2 \text{ y } \sigma = \frac{4}{3} \text{ si } N = 3, \\ \mathbf{y}, \mathbf{q} \in C^0([0, T]; \widetilde{V}') \cap C_w^0([0, T]; \widetilde{H}), \\ \pi, Q \in L^2(Q_T). \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Además, \mathbf{y} verifica la desigualdad de energía

$$\|\mathbf{y}(t)\|_{0;\Omega}^2 + 2\nu \int_0^t \|\mathbf{y}(s)\|_{1;\Omega}^2 ds \leq 2 \int_0^t \langle \mathbf{q}(s), \mathbf{y}(s) \rangle_{-1/2;\gamma} ds \quad (2.17)$$

y se cumple la fórmula

$$(\mathbf{y}(T), \mathbf{w})_{0;\Omega} = \iint_{\Lambda_T} |\mathbf{q}|^2 dS dt. \quad (2.18)$$

Demostración: Probaremos en primer lugar que existe un par

$$\mathbf{y}, \mathbf{q} \in L^2(0, T; \widetilde{V}) \cap L^\infty(0, T; \widetilde{H}),$$

solución de la formulación débil

$$\begin{cases} \langle \mathbf{y}'(t), \mathbf{v} \rangle + \tilde{b}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{y}(t), \nabla \mathbf{v})_{0;\Omega} = \int_\gamma \mathbf{q}(t) \cdot \mathbf{v} \, dS & \forall \mathbf{v} \in \widetilde{V}, \\ -\langle \mathbf{q}'(t), \mathbf{v} \rangle - \tilde{b}(\mathbf{y}(t), \mathbf{q}(t), \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{q}(t), \nabla \mathbf{v})_{0;\Omega} = 0 & \forall \mathbf{v} \in \widetilde{V}, \\ \mathbf{y}(0) = 0, \quad \mathbf{q}(T) = \mathbf{w}. \end{cases} \quad (2.19)$$

Por claridad en la exposición, haremos la Demostración del Teorema por etapas.

Etapa 1.- Construcción de soluciones aproximadas.

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \dots$ los autovalores del problema de Stokes en Ω que proporciona el Teorema 1.49. Denotaremos $\{\mathbf{w}_j\}$ la correspondiente base ortonormal en \widetilde{H} (ortogonal en \widetilde{V}). Sabemos que

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{w}_j + \nabla q_j = \lambda_j \mathbf{w}_j, & \nabla \cdot \mathbf{w}_j = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ (-q_j \mathbf{Id} + \nabla \mathbf{w}_j) \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{sobre } \gamma, \\ \mathbf{w}_j = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \setminus \gamma, \\ \|\mathbf{w}_j\|_{0;\Omega} = 1. \end{cases}$$

y, también,

$$\mathbf{w}_j \in C^\infty(\Omega)^N \cap H^2(\Omega)^N \cap \widetilde{V}, \quad q_j \in C^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega) \quad \forall j \geq 1.$$

Denotaremos \widetilde{V}_m el subespacio de \widetilde{V} generado por $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m$ y llamaremos \mathbf{w}_{0m} a la proyección ortogonal de \mathbf{w} sobre \widetilde{V}_m :

$$\mathbf{w}_{0m} = \sum_{j=1}^m (\mathbf{w}, \mathbf{w}_j)_{0;\Omega} \mathbf{w}_j$$

Gracias a que $\{\mathbf{w}_j\}$ forma una base ortonormal en \widetilde{H} , se tiene que

$$\|\mathbf{w}_{0m}\|_{0;\Omega} \leq \|\mathbf{w}\|_{0;\Omega} \quad \text{y} \quad \mathbf{w}_{0m} \rightarrow \mathbf{w} \quad \text{en } \widetilde{H}.$$

Para cada $m \geq 1$, buscaremos funciones

$$\mathbf{y}_m, \mathbf{q}_m \in C^0([0, T]; \widetilde{V}_m)$$

tales que

$$\begin{cases} (\mathbf{y}'_m, \mathbf{w}_j)_{0;\Omega} + \tilde{b}(\mathbf{y}_m, \mathbf{y}_m, \mathbf{w}_j) + \nu(\nabla \mathbf{y}_m, \nabla \mathbf{w}_j)_{0;\Omega} = \int_\gamma \mathbf{q}_m \cdot \mathbf{w}_j \, dS \\ 1 \leq j \leq m, \quad \mathbf{y}_m(0) = 0, \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\begin{cases} -(\mathbf{q}'_m, \mathbf{w}_j)_{0;\Omega} + \tilde{b}(\mathbf{y}_m, \mathbf{q}_m, \mathbf{w}_j) + \nu(\nabla \mathbf{q}_m, \nabla \mathbf{w}_j)_{0;\Omega} = 0, \\ 1 \leq j \leq m, \quad \mathbf{q}_m(T) = \mathbf{w}_{0m}. \end{cases} \quad (2.21)$$

Para demostrar que el problema aproximado (2.20)–(2.21) admite solución, construiremos un operador al que aplicaremos el Teorema de Schauder del Punto Fijo. Razonamos de la siguiente forma: Para $\mathbf{p}_m \in C^0([0, T]; \widetilde{V}_m)$ dada, sea $\mathbf{y}_m = \mathbf{y}_m(\mathbf{p}_m)$ la única solución del sistema diferencial ordinario

$$\begin{cases} (\mathbf{y}'_m, \mathbf{w}_j)_{0;\Omega} + \tilde{b}(\mathbf{y}_m, \mathbf{y}_m, \mathbf{w}_j) + \nu(\nabla \mathbf{y}_m, \nabla \mathbf{w}_j)_{0;\Omega} = \int_{\gamma} \mathbf{p}_m \cdot \mathbf{w}_j dS, \\ 1 \leq j \leq m, \quad \mathbf{y}_m(0) = 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

El problema (2.22) admite una única solución maximal definida al menos en un intervalo de la forma $[0, \tau_m)$, verificando

$$\mathbf{y}_m \in C^1([0, \tau_m); \widetilde{V}_m).$$

Sea $t < \tau_m$. De (2.22) y de las propiedades de la forma \tilde{b} , se sigue que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{y}_m(t)\|_{0;\Omega}^2 + \nu \|\nabla \mathbf{y}_m(t)\|_{0;\Omega}^2 = \langle \mathbf{p}_m(t), \mathbf{y}_m(t) \rangle_{-1/2;\gamma}.$$

En consecuencia,

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{y}_m(t)\|_{0;\Omega}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{y}_m(s)\|_{0;\Omega}^2 ds \leq C(\Omega, \nu) \int_0^T \|\mathbf{p}_m(s)\|_{-1/2;\gamma}^2 ds$$

y de esta desigualdad deducimos, en particular, que \mathbf{y}_m está definida en todo el intervalo $[0, T]$:

$$\mathbf{y}_m \in C^1([0, T]; \widetilde{V}_m).$$

A partir de \mathbf{y}_m , construimos $\mathbf{q}_m = \mathbf{q}_m(\mathbf{y}_m)$, solución del problema diferencial ordinario (2.21). Este sistema posee una única solución maximal definida al menos en un intervalo de la forma $(\tau_m, T]$. Tomando ahora $t \in (\tau_m, T]$, se deduce sin dificultad, que

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{q}_m(t)\|_{0;\Omega}^2 + \nu \|\nabla \mathbf{q}_m(t)\|_{0;\Omega}^2 = 0$$

y, de aquí, la estimación

$$\|\mathbf{q}_m(t)\|_{0;\Omega}^2 + 2\nu \int_t^T \|\nabla \mathbf{q}_m(s)\|_{0;\Omega}^2 ds = \|\mathbf{w}_{0m}\|_{0;\Omega}^2 \leq \|\mathbf{w}\|_{0;\Omega}^2.$$

La desigualdad anterior nos permite asegurar que \mathbf{q}_m también está definida en todo el intervalo $[0, T]$. También prueba que \mathbf{q}_m está acotada en $C^0([0, T]; \widetilde{V}_m)$, independientemente de \mathbf{y}_m .

Sea W la bola cerrada de centro 0 y radio $\|\mathbf{w}\|_{0;\Omega}$ en el espacio de Banach $C^0([0, T]; \widetilde{V}_m)$:

$$W = \overline{B}(0; \|\mathbf{w}\|_{0;\Omega}) \subset C^0([0, T]; \widetilde{V}_m),$$

y sea Φ la aplicación definida como sigue:

$$\Phi(\mathbf{p}_m) = \mathbf{q}_m(\mathbf{y}_m(\mathbf{p}_m)) \quad \forall \mathbf{p}_m \in W.$$

De las propiedades de dependencia continua de los sistemas diferenciales respecto de los datos, deducimos que $\Phi : W \rightarrow W$ es una aplicación continua. Se tiene además que $\Phi(W)$ está contenido en $C^1([0, T]; \widetilde{V}_m)$; por tanto, $\Phi : W \rightarrow W$ es también compacta. Estamos pues en condiciones de aplicar el Teorema de Schauder a la aplicación Φ y al conjunto W (un convexo, cerrado y acotado de $C^0([0, T]; \widetilde{V}_m)$) para obtener (al menos) un punto fijo \mathbf{q}_m de Φ . Las funciones \mathbf{q}_m e $\mathbf{y}_m = \mathbf{y}_m(\mathbf{q}_m)$ proporcionan una solución del sistema aproximado acoplado (2.20)–(2.21).

Etapa 2.- Estimaciones “a priori” de las soluciones aproximadas.

De (2.20)–(2.21), se deducen las estimaciones

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{y}_m(t)\|_{0;\Omega}^2 + \nu \int_0^T \|\nabla \mathbf{y}_m(t)\|_{0;\Omega}^2 dt \leq C(\Omega, \nu) \int_0^T \|\mathbf{q}_m(t)\|_{-1/2;\gamma}^2 dt$$

y

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{q}_m(t)\|_{0;\Omega}^2 + 2\nu \int_0^T \|\nabla \mathbf{q}_m(t)\|_{0;\Omega}^2 dt = \|\mathbf{w}_{0m}\|_{0;\Omega}^2 \leq \|\mathbf{w}\|_{0;\Omega}^2.$$

De estas desigualdades, obtenemos que

$$\mathbf{y}_m, \mathbf{q}_m \in \text{acotado de } L^2(0, T; \widetilde{V}) \cap L^\infty(0, T; \widetilde{H}) \quad (E1)$$

y, usando la Proposición 2.10, resulta que

$$\widetilde{B}(\mathbf{y}_m, \mathbf{y}_m), \widetilde{B}(\mathbf{y}_m, \mathbf{q}_m) \in \text{acotado de } L^\sigma(0, T; \widetilde{V}'),$$

donde de nuevo

$$\sigma = \begin{cases} 2 - \varepsilon \text{ con } \varepsilon \in (0, 1) \text{ arbitrario} & \text{si } N = 2, \\ \frac{4}{3} & \text{si } N = 3. \end{cases} \quad (2.23)$$

Consideremos a continuación los operadores $F \in \mathcal{L}(\widetilde{V}; \widetilde{V}')$ y $\tilde{P}_m \in \mathcal{L}(\widetilde{V}'; \widetilde{V}')$, definidos como sigue:

$$\langle F\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_\gamma \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dS \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \widetilde{V},$$

$$\tilde{P}_m \mathbf{g} = \sum_{j=1}^m \langle \mathbf{g}, \mathbf{w}_j \rangle \mathbf{w}_j, \quad \forall \mathbf{g} \in \tilde{V}'.$$

Gracias a la elección de la base $\{\mathbf{w}_j\}$, es sencillo comprobar que

$$\|\tilde{P}_m\|_{\mathcal{L}(\tilde{V}', \tilde{V})} = 1.$$

Utilizando el operador de proyección \tilde{P}_m , podemos reescribir (2.20) y (2.21) en la forma^b:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'_m(t) &= \tilde{P}_m [F \mathbf{q}_m(t) - \nu \tilde{A} \mathbf{y}_m(t) - \tilde{B}(\mathbf{y}_m(t), \mathbf{y}_m(t))], \\ -\mathbf{q}'_m(t) &= \tilde{P}_m [-\nu \tilde{A} \mathbf{q}_m(t) + \tilde{B}(\mathbf{y}_m(t), \mathbf{q}_m(t))]. \end{aligned}$$

De estas igualdades deducimos que

$$\mathbf{y}'_m, \mathbf{q}'_m \in \text{acotado de } L^\sigma(0, T; \tilde{V}'), \quad (E2)$$

con σ dado por (2.23). Por otra parte, de (2.20) y (2.21) también se obtiene que

$$(\mathbf{y}'_m(t), \mathbf{q}_m(t))_{0;\Omega} + \tilde{b}(\mathbf{y}_m(t), \mathbf{y}_m(t), \mathbf{q}_m(t)) + \nu(\nabla \mathbf{y}_m(t), \nabla \mathbf{q}_m(t))_{0;\Omega} = \|\mathbf{q}_m(t)\|_{0;\gamma}^2$$

y

$$-(\mathbf{q}'_m(t), \mathbf{y}_m(t))_{0;\Omega} - \tilde{b}(\mathbf{y}_m(t), \mathbf{q}_m(t), \mathbf{y}_m(t)) + \nu(\nabla \mathbf{q}_m(t), \nabla \mathbf{y}_m(t))_{0;\Omega} = 0.$$

Si restamos estas igualdades e integramos en $[0, T]$, obtenemos la fórmula

$$(\mathbf{y}_m(T), \mathbf{w}_{0m})_{0;\Omega} = \iint_{\gamma \times (0, T)} |\mathbf{q}_m(t)|^2 dS dt, \quad (2.24)$$

que, más adelante, tras el paso al límite, se convertirá en (2.18).

Etapa 3.- Paso al límite y obtención de (2.19).

En esta tercera etapa veremos que las soluciones aproximadas $(\mathbf{y}_m, \mathbf{q}_m)$ convergen (en un sentido que precisaremos) hacia una solución (\mathbf{y}, \mathbf{q}) de (2.19).

De manera general, dados dos espacios de Banach B_0 y B_1 con $B_0 \hookrightarrow B_1$ (inyección continua) y dados $p_0, p_1 \in [1, \infty]$, pondremos

$$W^{p_0, p_1}(0, T; B_0, B_1) = \left\{ v; v \in L^{p_0}(0, T; B_0), \frac{\partial v}{\partial t} \in L^{p_1}(0, T; B_1) \right\}$$

(donde la derivada $\frac{\partial}{\partial t}$ debe entenderse en el sentido de $\mathcal{D}'(0, T; B_1)$). El espacio vectorial $W^{p_0, p_1}(0, T; B_0, B_1)$ posee estructura de espacio de Banach para la norma "natural"

$$\|v\|_{W^{p_0, p_1}(0, T; B_0, B_1)} = \|v\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)}.$$

Necesitaremos el siguiente resultado de compacidad, que es bien conocido y cuya Demostración puede encontrarse en [36,47]:

^b \tilde{A} es el operador de Stokes con condiciones de contorno de distinto tipo que fue introducido en el Capítulo 1.

Lema 2.12 Sean B_0 , B y B_1 tres espacios de Banach tales que

$$\begin{cases} B_0 \subset B \subset B_1 \text{ con } B_0 \text{ y } B_1 \text{ reflexivos,} \\ B_0 \hookrightarrow B \text{ (inyección compacta) y } B \hookrightarrow B_1 \text{ (inyección continua).} \end{cases}$$

Sean $1 < p_0 \leq \infty$, $1 < p_1 \leq \infty$ y sea $W = W^{p_0, p_1}(0, T; B_0, B_1)$. Entonces W se inyecta de forma compacta en $L^{p_0}(0, T; B)$. ■

Aplicaremos este Lema con las elecciones siguientes de B_0 , B , B_1 , p_0 y p_1 :

$$\begin{cases} B_0 = \widetilde{V}, \\ B = \widetilde{V}_s = \widetilde{V}^{\overline{H^s(\Omega)^N}} \text{ con } \frac{1}{2} < s < 1, \\ B_1 = \widetilde{V}', \\ W = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \in L^2(0, T; \widetilde{V}), \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \in L^\sigma(0, T; \widetilde{V}')\}. \end{cases}$$

De las estimaciones (E1) y (E2) obtenidas en la etapa anterior y del Lema 2.12^c, se deduce la existencia de funciones \mathbf{y} , \mathbf{q} , con

$$\mathbf{y}, \mathbf{q} \in L^2(0, T; \widetilde{V}) \cap L^\infty(0, T; \widetilde{H}) \cap C^0([0, T]; \widetilde{V}'),$$

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \in L^\sigma(0, T; \widetilde{V}')$$

y la existencia de subsucesiones (que seguimos denotando de la misma manera) de $\{\mathbf{y}_m\}$ y $\{\mathbf{q}_m\}$ tales que

$$\begin{cases} \mathbf{y}_m \text{ (resp. } \mathbf{q}_m) \rightharpoonup \mathbf{y} \text{ (resp. } \mathbf{q}) \text{ en } L^2(0, T; \widetilde{V})\text{-débil,} \\ \mathbf{y}_m \text{ (resp. } \mathbf{q}_m) \rightharpoonup \mathbf{y} \text{ (resp. } \mathbf{q}) \text{ en } L^\infty(0, T; \widetilde{H})\text{-débil*}, \\ \mathbf{y}_m \text{ (resp. } \mathbf{q}_m) \rightarrow \mathbf{y} \text{ (resp. } \mathbf{q}) \text{ en } L^2(0, T; \widetilde{V}_s)\text{-fuerte (y cpd. en } Q_T), \\ \frac{\partial \mathbf{y}_m}{\partial t} \text{ (resp. } \frac{\partial \mathbf{q}_m}{\partial t}) \rightharpoonup \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} \text{ (resp. } \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}) \text{ en } L^\sigma(0, T; \widetilde{V}')\text{-débil.} \end{cases} \quad (2.25)$$

Veamos seguidamente que el par (\mathbf{y}, \mathbf{q}) es una solución del problema (2.19). Para ello, pasaremos al límite en cada uno de los términos del problema aproximado (2.20)–(2.21).

^cSi $s < 1$, $H^1(\Omega)^N$ se inyecta de forma compacta en $H^s(\Omega)^N$ (cf. [38]). Como consecuencia, se deduce que la inyección de \widetilde{V} en \widetilde{V}_s es compacta. Por otra parte, es interesante hacer notar que las hipótesis de reflexividad para B_0 y B_1 en el Lema 2.12 pueden ser suprimidas (cf. [21]).

1. Comenzamos comprobando que se verifica la condición inicial para \mathbf{y} y la condición final para \mathbf{q} . De la continuidad de la inyección de W en $C^0([0, T]; \widetilde{V}')$ (cf. por ejemplo [48]), se deduce que, para cada $t \in [0, T]$, $\mathbf{v}(t)$ está definida sin ambigüedad y, además,

$$\mathbf{v} \in W \longrightarrow \mathbf{v}(t) \in \widetilde{V}'$$

es lineal y continua. Gracias a (2.25), obtenemos que

$$\mathbf{y}_m(t) \text{ (resp. } \mathbf{q}_m(t)) \rightharpoonup \mathbf{y}(t) \text{ (resp. } \mathbf{q}(t)) \text{ en } \widetilde{V}'\text{-débil } \forall t \in [0, T] \quad (L0)$$

y, en particular, \mathbf{y} satisface la condición inicial requerida en (2.19) y \mathbf{q} satisface la correspondiente condición final:

$$\mathbf{y}(0) = 0, \quad \mathbf{q}(T) = \mathbf{w} \text{ en } \widetilde{H}.$$

2. Dada $\mathbf{v} \in \widetilde{V}$, se tiene

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{y}_m}{\partial t}, \mathbf{v} \right\rangle \text{ (resp. } \left\langle \frac{\partial \mathbf{q}_m}{\partial t}, \mathbf{v} \right\rangle) \rightharpoonup \left\langle \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}, \mathbf{v} \right\rangle \text{ (resp. } \left\langle \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}, \mathbf{v} \right\rangle) \text{ en } L^\sigma(0, T)\text{-débil,} \quad (L1)$$

$$\left\langle \widetilde{A} \mathbf{y}_m, \mathbf{v} \right\rangle \text{ (resp. } \left\langle \widetilde{A} \mathbf{q}_m, \mathbf{v} \right\rangle) \rightharpoonup \left\langle \widetilde{A} \mathbf{y}, \mathbf{v} \right\rangle \text{ (resp. } \left\langle \widetilde{A} \mathbf{q}, \mathbf{v} \right\rangle) \text{ en } L^2(0, T)\text{-débil,} \quad (L2)$$

$$\left\langle F \mathbf{q}_m, \mathbf{v} \right\rangle \rightharpoonup \left\langle F \mathbf{q}, \mathbf{v} \right\rangle \text{ en } L^2(0, T)\text{-débil.} \quad (L3)$$

3. Por último, veamos qué ocurre con los términos $\widetilde{B}(\mathbf{y}_m, \mathbf{y}_m)$ y $-\widetilde{B}(\mathbf{y}_m, \mathbf{q}_m)$. En la etapa anterior se obtuvo que ambos términos estaban acotados en $L^\sigma(0, T; \widetilde{V}')$, con σ dado por (2.23). Podemos extraer nuevas subsucesiones (que seguiremos denotando igual) de tal forma que:

$$\widetilde{B}(\mathbf{y}_m, \mathbf{y}_m) \text{ (resp. } \widetilde{B}(\mathbf{y}_m, \mathbf{q}_m)) \rightharpoonup \mathbf{h} \text{ (resp. } \mathbf{g}) \text{ en } L^\sigma(0, T; \widetilde{V}')\text{-débil.}$$

En particular, si $\mathbf{v} \in \widetilde{V}$

$$\widetilde{b}(\mathbf{y}_m, \mathbf{y}_m, \mathbf{v}) \text{ (resp. } \widetilde{b}(\mathbf{y}_m, \mathbf{q}_m, \mathbf{v})) \rightharpoonup \langle \mathbf{h}, \mathbf{v} \rangle \text{ (resp. } \langle \mathbf{g}, \mathbf{v} \rangle) \text{ en } L^\sigma(0, T)\text{-débil.}$$

Por otro lado, de (2.25) obtenemos también que

$$y_{m_i} \frac{\partial y_{m_j}}{\partial x_i} \text{ (resp. } y_{m_i} \frac{\partial q_{m_j}}{\partial x_i}) \rightharpoonup y_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \text{ (resp. } y_i \frac{\partial q_j}{\partial x_i}) \text{ en } L^1(0, T; L^1(\Omega))\text{-débil}$$

(al menos) y que

$$y_{m_i} y_{m_j} \text{ (resp. } y_{m_i} q_{m_j}) \rightharpoonup y_i y_j \text{ (resp. } y_i q_j) \text{ en } L^1(0, T; L^{3/2}(\Omega))\text{-débil}$$

(cuando $N = 2$, se puede conseguir esto último en un espacio más pequeño). Como vimos anteriormente, cada \mathbf{w}_j está en $H^2(\Omega)^N \cap \widetilde{V}$; por tanto, en $L^\infty(\Omega)^N$ y con derivadas $\frac{\partial \mathbf{w}_j}{\partial x_k}$ en $L^6(\Omega)^N$. Luego

$$b(\mathbf{y}_m, \mathbf{y}_m, \mathbf{w}_j) \rightharpoonup b(\mathbf{y}, \mathbf{y}, \mathbf{w}_j) \text{ en } L^1(0, T)\text{-débil,}$$

$$b(\mathbf{y}_m, \mathbf{w}_j, \mathbf{y}_m) \rightharpoonup b(\mathbf{y}, \mathbf{w}_j, \mathbf{y}) \text{ en } L^1(0, T)\text{-débil,}$$

y, por otra parte,

$$b(\mathbf{y}_m, \mathbf{q}_m, \mathbf{w}_j) \rightharpoonup b(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \mathbf{w}_j) \text{ en } L^1(0, T)\text{-débil,}$$

$$b(\mathbf{y}_m, \mathbf{w}_j, \mathbf{q}_m) \rightharpoonup b(\mathbf{y}, \mathbf{w}_j, \mathbf{q}) \text{ en } L^1(0, T)\text{-débil.}$$

Podemos escribir, en consecuencia, las siguientes igualdades para cada j

$$\langle \mathbf{h}, \mathbf{w}_j \rangle = \tilde{b}(\mathbf{y}, \mathbf{y}, \mathbf{w}_j), \quad \langle \mathbf{g}, \mathbf{w}_j \rangle = \tilde{b}(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \mathbf{w}_j);$$

dado que $\{\mathbf{w}_j\}$ es una base de \widetilde{V} , se tiene finalmente que

$$\tilde{B}(\mathbf{y}_m, \mathbf{y}_m) \text{ (resp. } \tilde{B}(\mathbf{y}_m, \mathbf{q}_m)) \rightharpoonup \tilde{B}(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \text{ (resp. } \tilde{B}(\mathbf{y}, \mathbf{q})) \text{ en } L^\sigma(0, T; \widetilde{V}')\text{-débil.} \quad (L4)$$

Las propiedades (L1)–(L4) nos permiten tomar límites en el problema aproximado (2.20)–(2.21) y obtener las igualdades

$$\begin{cases} \langle \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}, \mathbf{w}_j \rangle + \tilde{b}(\mathbf{y}, \mathbf{y}, \mathbf{w}_j) + \nu(\nabla \mathbf{y}, \nabla \mathbf{w}_j)_{0;\Omega} = \int_\gamma \mathbf{q}(t) \cdot \mathbf{w}_j & \forall j \geq 1, t \in (0, T) \text{ c.p.d.,} \\ -\langle \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}, \mathbf{w}_j \rangle - \tilde{b}(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \mathbf{w}_j) + \nu(\nabla \mathbf{q}, \nabla \mathbf{w}_j)_{0;\Omega} = 0 & \forall j \geq 1, t \in (0, T) \text{ c.p.d.,} \\ \mathbf{y}(0) = 0, \quad \mathbf{q}(T) = \mathbf{w} & \text{en } \widetilde{H}. \end{cases}$$

Razonando por densidad, se obtiene finalmente que el par (\mathbf{y}, \mathbf{q}) verifica (2.19).

Etapas 4.- Obtención de (2.17) y (2.18).

Para finalizar la Demostración del Teorema, veamos que se verifican las fórmulas (2.17) y (2.18). Comencemos con la identidad (2.18). Teniendo en cuenta (L0) y el hecho de que $\{\mathbf{y}_m(t)\}$ es una sucesión acotada en \widetilde{H} (uniformemente en t), es inmediato que

$$\mathbf{y}_m(t) \rightharpoonup \mathbf{y}(t) \text{ en } \widetilde{H}\text{-débil } \forall t \in [0, T].$$

De aquí, se deduce que

$$(\mathbf{y}_m(T), \mathbf{w}_{0m})_{0;\Omega} \rightarrow (\mathbf{y}(T), \mathbf{w})_{0;\Omega} \text{ cuando } m \rightarrow \infty.$$

Por otro lado, (2.25) implica en particular que

$$\int \int_{\Lambda_T} |\mathbf{q}_m - \mathbf{q}|^2 dS dt \rightarrow 0 \quad m \rightarrow \infty$$

(en efecto, la convergencia fuerte en $L^2(0, T; \widetilde{V}_s)$ para $s \in (1/2, 1)$ implica, entre otras cosas, la convergencia fuerte de la traza sobre γ en un espacio aún más pequeño que $L^2(0, T; L^2(\gamma)^N)$). En particular, tenemos que

$$\int \int_{\Lambda_T} |\mathbf{q}_m|^2 dS dt \rightarrow \int \int_{\Lambda_T} |\mathbf{q}|^2 dS dt.$$

Tomando límites en (2.24) se obtiene (2.18).

Por otra parte, obsérvese que, a partir de (2.20), es fácil deducir que \mathbf{y}_m verifica lo siguiente:

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{y}_m(t)\|_{0;\Omega}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{y}_m(s)\|_{0;\Omega}^2 ds = \int_0^t (\mathbf{q}_m(s), \mathbf{y}_m(s))_{0;\gamma} ds.$$

Dado que, para cada $t \in [0, T]$, tenemos que

$$\mathbf{y}_m(t) \rightharpoonup \mathbf{y}(t) \text{ en } \widetilde{H}\text{-débil,}$$

$$\mathbf{y}_m \rightharpoonup \mathbf{y} \text{ en } L^2(0, t; \widetilde{V})\text{-débil}$$

y

$$\mathbf{q}_m \rightarrow \mathbf{q} \text{ en } L^2(0, t; L^2(\gamma)^N) \text{ fuerte,}$$

deducimos la desigualdad

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{y}(t)\|_{0;\Omega}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{y}(s)\|_{0;\Omega}^2 ds \leq \int_0^t (\mathbf{q}(s), \mathbf{y}(s))_{0;\gamma} ds$$

que equivale a (2.17). Esto finaliza la Demostración del Teorema. ■

2.4.3 Demostración del Teorema 2.6

Como ya se ha indicado, gracias a una consecuencia del Teorema de Hahn-Banach, probar los Teoremas 2.4 y 2.5 equivale a probar el Teorema 2.6. Para probar este resultado, supongamos que $\mathbf{w} \in \widetilde{H}$ satisface (2.8). Sea $(\mathbf{y}^*, \pi^*, \mathbf{q}^*, Q^*)$ una solución débil del correspondiente problema acoplado (2.12). De acuerdo con el Teorema 2.11, podemos suponer que $(\mathbf{y}^*, \pi^*, \mathbf{q}^*, Q^*)$ satisface (2.16)–(2.18).

Sea \mathbf{v} la restricción a γ de la traza $\gamma_0 \mathbf{y}^*$ de \mathbf{y}^* . Evidentemente, $\mathbf{v} \in U_{ad}$; además, \mathbf{y}^* es, junto con π^* , un estado asociado a \mathbf{v} , i.e. una solución del correspondiente problema (2.7). En consecuencia, teniendo en cuenta (2.8) y (2.18),

$$\mathbf{q}^* = 0 \quad \text{sobre } \Lambda_T = \gamma \times (0, T).$$

Recordando (2.17), también obtenemos que

$$\mathbf{y}^* = 0 \quad \text{en } Q_T = \Omega \times (0, T).$$

Hemos obtenido una función \mathbf{q}^* que es, junto con Q^* , solución del problema de valores finales

$$-\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{q} + \nabla Q = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \text{en } Q_T, \quad (2.26)$$

$$(-Q \text{Id} + \nu \nabla \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Lambda_T, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{q} = 0 \quad \text{sobre } S_T, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{q}(T) = \mathbf{w} \quad \text{en } \Omega \quad (2.29)$$

y que, además, verifica

$$\mathbf{q}^* = 0 \quad \text{sobre } \Lambda_T = \gamma \times (0, T). \quad (2.30)$$

Es fácil comprobar que el sistema (2.26)–(2.29) admite una única solución, que por fuerza debe coincidir con (\mathbf{q}^*, Q^*) ; entre otras cosas, esto implica que \mathbf{q}^* y Q^* son funciones analíticas en el abierto Q_T (cf. [29]). El Teorema 2.6 se deduce del siguiente resultado:

Proposición 2.13 *Supongamos que*

$$\mathbf{q}^* \in L^2_{loc}(0, T; \widetilde{V}) \cap L^\infty_{loc}(0, T; \widetilde{H}), \quad \frac{\partial \mathbf{q}^*}{\partial t} \in L^2_{loc}(0, T; \widetilde{V}'),$$

$$Q^* \in L^2_{loc}(Q_T)$$

y que el par (\mathbf{q}^*, Q^*) satisface (2.26)–(2.28) y (2.30). Entonces $\mathbf{q}^* = 0$.

Demostración: Razonaremos localmente. Sea $x_0 \in \gamma$ y sea $r > 0$ tal que

$$B(x_0; r) \cap \partial\Omega \subset \gamma.$$

consideramos los abiertos $\omega = B(x_0; r)$ y $\widetilde{\Omega} = \Omega \cup \omega$. Definimos $(\widetilde{\mathbf{q}}, \widetilde{Q})$ como la prolongación de (\mathbf{q}^*, Q^*) por cero a todo $\widetilde{\Omega}$. De (2.30), se deduce que^d

$$\widetilde{\mathbf{q}} \in L^2_{loc}(0, T; V(\widetilde{\Omega})) \cap L^\infty_{loc}(0, T; H(\widetilde{\Omega})).$$

^dRecuérdese que $V(\widetilde{\Omega})$ es el subespacio de funciones de $H^1_0(\widetilde{\Omega})^N$ con divergencia nula en $\widetilde{\Omega}$, mientras que $H(\widetilde{\Omega})$ es el subespacio de $L^2(\widetilde{\Omega})^N$ formado por funciones con divergencia y traza normal nula (cf. Capítulo 1).

Por otra parte, $\tilde{Q} \in L^2_{loc}(\tilde{\Omega} \times (0, T))$. Veamos que

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} \in L^2_{loc}(0, T; V(\tilde{\Omega})')$$

y que

$$\begin{cases} -\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} - \nu \Delta \tilde{q} + \nabla \tilde{Q} = 0, & \nabla \cdot \tilde{q} = 0 \quad \text{en } \tilde{\Omega} \times (0, T), \\ \tilde{q} = 0 & \text{sobre } \partial \tilde{\Omega} \times (0, T) \end{cases}$$

ó, de forma equivalente, que

$$-\left\langle \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t}, \mathbf{z} \right\rangle + \nu (\nabla \tilde{q}, \nabla \mathbf{z})_{0; \tilde{\Omega}} = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in V(\tilde{\Omega}), \quad t \in (0, T) \text{ c.p.d.}$$

Sea $\mathbf{z} \in V(\tilde{\Omega})$; de la caracterización que conocemos del espacio $\tilde{V}(\Omega)$ (Teorema 1.14), se deduce que la función $\mathbf{v} = \mathbf{z}|_{\Omega}$ está en $\tilde{V}(\Omega)$. También es fácil deducir que:

$$-\left\langle \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t}, \mathbf{z} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}, \mathbf{v} \right\rangle$$

y que

$$(\nabla \tilde{q}, \nabla \mathbf{z})_{0; \tilde{\Omega}} = (\nabla \mathbf{q}, \nabla \mathbf{v})_{0; \Omega}.$$

Se tiene por tanto, que $\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} \in L^2_{loc}(0, T; V(\tilde{\Omega})')$ y que (\tilde{q}, \tilde{Q}) es una solución del sistema retrógrado de Stokes en $\tilde{\Omega} \times (0, T)$:

$$-\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} - \nu \Delta \tilde{q} + \nabla \tilde{Q} = 0, \quad \nabla \cdot \tilde{q} = 0 \quad \text{en } \tilde{\Omega} \times (0, T);$$

de nuevo, esto implica la analiticidad de \tilde{q} y de \tilde{Q} , esta vez en el abierto $\tilde{\Omega} \times (0, T)$. Pero $\tilde{q} = 0$ en $\omega \times (0, T)$, luego necesariamente $\tilde{q} \equiv 0$.

■

2.5 Algunas Cuestiones Relacionadas con el Problema Acoplado

2.5.1 Las Ecuaciones de Navier-Stokes con Condiciones de Contorno de Distinto Tipo

El problema (2.12) está relacionado con el problema de evolución de Navier-Stokes cuando en un trozo de frontera se imponen condiciones de contorno no lineales de tipo Neumann:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{y} - \nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \text{en } Q_T, \quad (2.31)$$

$$(-\pi \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{2}(\mathbf{y} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{y} = \mathbf{b} \quad \text{sobre } \Lambda_T, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{y} = 0 \quad \text{sobre } S_T, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \quad \text{en } \Omega, \quad (2.33)$$

donde

$$\mathbf{f} \in L^2(\Omega \times (0, T))^N, \quad \mathbf{b} \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\gamma)^N),$$

$$\mathbf{y}_0 \in \widetilde{H}.$$

Se tiene que \mathbf{y} es solución débil de (2.31)–(2.33) si

$$\mathbf{y} \in L^2(0, T; \widetilde{V})$$

y, además,

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}, \mathbf{v} \rangle + \widetilde{b}(\mathbf{y}, \mathbf{y}, \mathbf{v}) + \nu (\nabla \mathbf{y}, \nabla \mathbf{v})_{0; \Omega} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{0; \Omega} + \langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle_{-1/2; \gamma} \\ \forall \mathbf{v} \in \widetilde{V}, \quad t \in (0, T) \text{ c.p.d.}, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \end{array} \right. \quad (2.34)$$

Un argumento similar al utilizado en la Demostración del Teorema 2.11, permite demostrar un resultado de existencia de solución débil para (2.31)–(2.33):

Teorema 2.14 *En las condiciones precedentes, existe (\mathbf{y}, π) solución débil de (2.31)–(2.33), con*

$$\mathbf{y} \in L^2(0, T; \widetilde{V}) \cap L^\infty(0, T; \widetilde{H}),$$

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} \in L^\sigma(0, T; \widetilde{V}'), \quad \pi \in L^2(Q_T),$$

$$\mathbf{y} \in C^0([0, T]; \widetilde{V}') \cap C_w^0([0, T]; \widetilde{H}),$$

donde σ está dado por (2.23). Además,

$$(2.31) \text{ se verifica como igualdad en } L^2(\Omega \times (0, T))^N,$$

$$(2.32) \text{ se verifica como igualdad en } L^2(0, T; H^{-1/2}(\gamma)^N)$$

y la condición inicial se satisface en el sentido siguiente: Dado $\mathbf{w} \in \widetilde{H}$,

$$(\mathbf{y}(t), \mathbf{w})_{0;\Omega} \rightarrow (\mathbf{y}_0, \mathbf{w}) \text{ cuando } t \searrow 0.$$

■

2.5.2 Un Resultado de Regularidad para el Problema de Evolución de Stokes

Al igual que en el caso no lineal, es fácil establecer un resultado de existencia (y unicidad) de solución débil para el problema lineal

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = \mathbf{f}, & \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 & \text{en } Q_T, \\ (-\pi \text{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{b} & \text{sobre } \Lambda_T, \\ \mathbf{y} = 0 & \text{sobre } S_T, & \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (2.35)$$

donde

$$\mathbf{f} \in L^2(\Omega \times (0, T))^N, \quad \mathbf{b} \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\gamma)^N), \quad \mathbf{y}_0 \in \widetilde{H}.$$

Si la regularidad de los datos aumenta, también es posible demostrar la regularidad de la solución (\mathbf{y}, Q) de (2.35):

Teorema 2.15 *Supongamos que*

$$\mathbf{f} \in L^2(\Omega \times (0, T))^N, \quad \mathbf{y}_0 \in \widetilde{V},$$

$$\mathbf{b} \in L^2(0, T; H^{1/2}(\gamma)^N), \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\gamma)^N).$$

Entonces la solución de (2.35) verifica lo siguiente

$$\mathbf{y} \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^N) \cap L^\infty(0, T; \widetilde{V}),$$

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} \in L^2(Q_T)^N, \quad \pi \in L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Demostración: En primer lugar, introducimos el operador $B : H^{-1/2}(\gamma)^N \rightarrow \widetilde{V}$, definido como sigue: Si $\mathbf{a} \in H^{-1/2}(\gamma)^N$, $\mathbf{w} = B\mathbf{a}$ es, junto con q , la solución de

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{w} + \nabla q = 0, & \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 & \text{en } \Omega, \\ (-q \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a} & \text{sobre } \gamma, \\ \mathbf{w} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \setminus \gamma. \end{cases} \quad (2.36)$$

En otras palabras, \mathbf{w} es la única solución del problema

$$\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} : \nabla \mathbf{z} \, dx = \langle \mathbf{a}, \mathbf{z} \rangle_{-1/2; \gamma} \quad \forall \mathbf{z} \in \widetilde{V}, \quad \mathbf{w} \in \widetilde{V}.$$

De los resultados de regularidad L^2 para el problema (2.36), se sigue que si \mathbf{a} está en $H^{1/2}(\gamma)^N$, entonces

$$\mathbf{w} \in H^2(\Omega)^N \cap \widetilde{V}$$

y se verifica la acotación

$$\|\mathbf{w}\|_{2; \Omega} \leq C(\Omega) \|\mathbf{a}\|_{1/2; \gamma}.$$

Sea \mathbf{b} como en el enunciado del Teorema. Pongamos

$$\mathbf{u}(t) = B\mathbf{b}(t) \quad \text{para } t \in (0, T) \text{ c.p.d.}$$

Se tiene que

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^N \cap \widetilde{V});$$

además,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = B \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}(t) \quad \text{para } t \in (0, T) \text{ c.p.d.}$$

y, por tanto,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2(0, T; \widetilde{V}) \quad \text{y} \quad \mathbf{u} \in C^0([0, T]; \widetilde{V}).$$

Escribamos la solución \mathbf{y} de (2.35) en la forma

$$\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

con \mathbf{v} , junto con Q , solución de

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{v} + \nabla Q = \tilde{\mathbf{f}}, & \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{en } Q_T, \\ (-Q \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sobre } \Lambda_T, \\ \mathbf{v} = 0 & \text{sobre } S_T, & \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (2.37)$$

y

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nu \Delta \mathbf{u} \in L^2(\Omega \times (0, T))^N,$$

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{y}_0 - \mathbf{u}(0) \in \widetilde{V}.$$

La Demostración de que (2.37) posee solución puede ser obtenida introduciendo una apropiada aproximación de Galerkin. Esta aproximación también conduce a resultados de regularidad. En efecto, consideremos el operador \tilde{A} (el operador de Stokes asociado a condiciones de contorno de distinto tipo que fue introducido en el Capítulo 1) y la base de autofunciones ortonormales en \widetilde{H} , $\{\mathbf{w}_j\}_{j \geq 1}$. Recordemos que \tilde{A} es un operador no acotado definido en

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \in H^2(\Omega)^N \cap \widetilde{V}, \exists q \in H^1(\Omega) \text{ con } \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = q\mathbf{n} \text{ sobre } \gamma\}.$$

Para probar el Teorema 2.15 veremos que si (\mathbf{v}, Q) es la solución de (2.37), entonces

$$\mathbf{v} \in L^2(0, T; \mathcal{D}(\tilde{A})) \cap L^\infty(0, T; \widetilde{V}).$$

Dado que $\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, esto implicará directamente que \mathbf{y} es tan regular como en la tesis del Teorema. Por otra parte, en virtud de una conocida consecuencia del Lema de De Rham (cf. [45]), la regularidad de \mathbf{y} conducirá a la de π y tendremos también que $\pi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

Como en la Demostración del Teorema 2.11, denotamos de nuevo \widetilde{V}_m el subespacio de \widetilde{V} generado por $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$. Es fácil ver que la solución \mathbf{v} de (2.37) se construye como límite de funciones \mathbf{v}_m , definidas de $[0, T]$ en \widetilde{V}_m , soluciones de los correspondientes problemas diferenciales ordinarios

$$\begin{cases} (\mathbf{v}'_m(t), \mathbf{w}_j)_{0;\Omega} + \nu(\nabla \mathbf{v}_m(t), \nabla \mathbf{w}_j)_{0;\Omega} = (\tilde{\mathbf{f}}(t), \mathbf{w}_j)_{0;\Omega}, & 1 \leq j \leq m, \\ \mathbf{v}_m(0) = \mathbf{v}_{0m}. \end{cases} \quad (2.38)$$

Aquí,

$$\mathbf{v}_{0m} = \sum_{j=1}^m (\mathbf{v}_0, \mathbf{w}_j)_{0;\Omega} \mathbf{w}_j.$$

Gracias a la elección de la base, se tiene que

$$\mathbf{v}_{0m} \rightarrow \mathbf{v}_0 \text{ en } \widetilde{V} \text{ y } \|\nabla \mathbf{v}_{0m}\|_{0;\Omega} \leq \|\nabla \mathbf{v}_0\|_{0;\Omega}.$$

Si en (2.38) tomamos como función "test"

$$\tilde{A}\mathbf{v}_m(t) \in \widetilde{V}_m$$

para cada $t \in [0, T]$ obtenemos fácilmente que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{v}_m(t)\|_{0;\Omega}^2 + \nu \|\tilde{A}\mathbf{v}_m(t)\|_{0;\Omega}^2 = (\tilde{\mathbf{f}}(t), \tilde{A}\mathbf{v}_m(t))_{0;\Omega} \quad \forall t \in (0, T)$$

y, de aquí, la estimación

$$\|\nabla \mathbf{v}_m(t)\|_{0;\Omega}^2 + \nu \int_0^T \|\tilde{A}\mathbf{v}_m(t)\|_{0;\Omega}^2 dt \leq C(\nu) \int_0^T \|\tilde{\mathbf{f}}(t)\|_{0;\Omega}^2 dt + \|\nabla \mathbf{v}_{0m}(t)\|_{0;\Omega}^2.$$

Es inmediato, gracias a esta estimación, que el límite \mathbf{v} verifica

$$\mathbf{v} \in L^2(0, T; \mathcal{D}(\tilde{A})) \cap L^\infty(0, T; \tilde{V}).$$

■

2.5.3 Regularidad del Problema (2.26)–(2.29)

Veremos en este apartado que la solución del sistema (2.26)–(2.29) es más regular en todo intervalo de la forma $[0, T - \delta)$, donde $\delta > 0$. Como vimos con anterioridad, el problema (2.26)–(2.29) posee una única solución (\mathbf{q}, Q) que verifica:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &\in L^2(0, T; \tilde{V}) \cap C^0([0, T]; \tilde{H}), \\ \mathbf{q}' &\in L^2(0, T; \tilde{V}'), \quad Q \in L^2(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

La función \mathbf{q} se obtiene (como viene siendo habitual) a partir de una aproximación de Galerkin para la formulación variacional. En particular,

$$\begin{cases} -\langle \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}(t), \mathbf{v} \rangle + \nu (\nabla \mathbf{q}, \nabla \mathbf{v})_{0;\Omega} = 0 & \forall \mathbf{v} \in \tilde{V}, \quad t \in (0, T) \text{ c.p.d.}, \\ \mathbf{q}(T) = \mathbf{w}. \end{cases}$$

Teorema 2.16 *Sea $\delta > 0$. Entonces la solución (\mathbf{q}, Q) de (2.26)–(2.29) verifica:*

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &\in L^2(0, T - \delta; H^2(\Omega)^N) \cap L^\infty(0, T - \delta; \tilde{V}) \cap L^2(0, T; \tilde{V}) \cap C^0([0, T]; \tilde{H}), \\ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} &\in L^2(0, T - \delta; H^1(\Omega)^N) \cap L^\infty(0, T - \delta; L^2(\Omega)^N) \cap L^2(0, T; \tilde{V}'), \\ Q &\in L^2(0, T - \delta; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T - \delta; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Demostración: Sea $\delta > 0$ y sea $\theta = \theta_\delta$ una función con las propiedades siguientes:

$$\theta \in C^\infty([0, \infty)), \quad \theta \equiv 1 \text{ en } [0, T - \delta), \quad \theta \equiv 0 \text{ en } [T - \frac{\delta}{2}, \infty).$$

A partir de θ , introducimos

$$\hat{\mathbf{q}} = \theta \mathbf{q}, \quad \hat{Q} = \theta Q.$$

Entonces, $\hat{\mathbf{q}} \in L^2(0, T; \widetilde{V}) \cap L^\infty(0, T; \widetilde{H})$ y

$$\begin{cases} -\langle \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial t}(t), \mathbf{v} \rangle + \nu(\nabla \hat{\mathbf{q}}(t), \nabla \mathbf{v})_{0;\Omega} = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{0;\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in \widetilde{V}, \quad t \in (0, T) \text{ c.p.d.}, \\ \hat{\mathbf{q}}(T) = 0, \end{cases} \quad (2.39)$$

donde

$$\mathbf{f} = -\theta' \mathbf{q} \in L^2(0, T; \widetilde{V}) \cap L^\infty(0, T; \widetilde{H}), \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \in L^2(0, T; \widetilde{V}').$$

Al igual que en el apartado anterior, la regularidad de la solución de (2.39) puede ser probada utilizando una aproximación de Galerkin con la base de autofunciones $\{\mathbf{w}_j\}_{j \geq 1}$ del operador de Stokes \tilde{A} . La solución $\hat{\mathbf{q}}$ viene dada como límite de soluciones aproximadas $\hat{\mathbf{q}}_m$:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_m(t) = \sum_{j=1}^m \hat{q}_m^j(t) \mathbf{w}_j, \\ \begin{cases} -(\hat{\mathbf{q}}_m'(t), \mathbf{w}_j)_{0;\Omega} + \nu(\nabla \hat{\mathbf{q}}_m(t), \nabla \mathbf{w}_j)_{0;\Omega} = (\mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j)_{0;\Omega} \quad \forall t \in (0, T), \\ 1 \leq j \leq m, \quad \hat{\mathbf{q}}_m(T) = 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2.40)$$

Derivando la expresión anterior respecto de t (lo cual es lícito dada la regularidad de \mathbf{f}), obtenemos que

$$-(\hat{\mathbf{q}}_m''(t), \mathbf{w}_j)_{0;\Omega} + \nu(\nabla \hat{\mathbf{q}}_m'(t), \nabla \mathbf{w}_j)_{0;\Omega} = (\mathbf{f}', \mathbf{w}_j). \quad (2.41)$$

Multiplicando (2.40) por $\lambda_j \hat{q}_m^j(t)$ (λ_j es el j -ésimo autovalor del operador \tilde{A}), sumando en j e integrando en el intervalo $[t, T]$ llegamos fácilmente a que

$$\|\nabla \hat{\mathbf{q}}_m(t)\|_{0;\Omega}^2 + \nu \int_t^T \|\tilde{A} \hat{\mathbf{q}}_m(s)\|_{0;\Omega}^2 ds \leq C(\nu) \int_0^T \|\mathbf{f}(t)\|_{0;\Omega}^2 dt,$$

de donde se sigue que el límite $\hat{\mathbf{q}}$ verifica

$$\hat{\mathbf{q}} \in L^2(0, T; \mathcal{D}(\tilde{A})) \cap L^\infty(0, T; \widetilde{V}).$$

Por otra parte, multiplicando (2.41) por $(\hat{q}_m^j)'(t)$ y sumando en j , obtenemos que

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\hat{\mathbf{q}}_m'(t)\|_{0;\Omega}^2 + \nu \|\nabla \hat{\mathbf{q}}_m'(t)\|_{0;\Omega}^2 = -(\mathbf{f}'(t), \hat{\mathbf{q}}_m'(t)) \quad \forall t \in [0, T].$$

Al integrar en el intervalo $[t, T]$, llegamos a la estimación,

$$\|\hat{\mathbf{q}}_m'(t)\|_{0;\Omega}^2 + \nu \int_t^T \|\nabla \hat{\mathbf{q}}_m'(s)\|_{0;\Omega}^2 ds \leq C(\nu) \int_0^T \|\mathbf{f}'(t)\|_{\widetilde{V}'}^2 dt,$$

de donde se sigue que

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial t} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^N) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^N).$$

Esto prueba el Teorema. ■

Observación: Razonando como en [23] es posible probar un resultado de regularidad C^∞ para la solución de (2.26)–(2.29). Para ello, basta ir derivando sucesivamente (2.39) y tomando como funciones “test” las derivadas sucesivas de $\hat{q}_m(t)$ y las derivadas de $\tilde{A}\hat{q}_m(t)$. De esta forma, se tiene que:

$$\mathbf{q} \in C^\infty(\Omega \times (0, T))^N \quad \text{y} \quad Q \in C^\infty(\Omega \times (0, T)).$$
■

Capítulo 3

Algunos Resultados Complementarios

En este Capítulo seguiremos manteniendo las hipótesis habituales para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $\gamma \subset \partial\Omega$, i.e. Ω es un abierto acotado, eventualmente múltiplemente conexo, de clase $W^{2,\infty}$, mientras que γ es una componente conexa de $\partial\Omega$ de tal forma que $\partial\Omega \setminus \gamma$ tiene medida superficial positiva.

3.1 Controlabilidad Aproximada del Problema de Stokes: Control Frontera

Dedicaremos este apartado a demostrar que el problema de Stokes es aproximadamente controlable en \widetilde{H} utilizando control frontera. Para $\mathbf{v} \in L^2(0, T; H^{1/2}(\gamma)^N)$ e $\mathbf{y}_0 \in \widetilde{H}$, planteamos el problema de Stokes con condiciones de Dirichlet no homogéneas siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \text{en } Q_T = \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{y} = \mathbf{v} \quad \text{sobre } \Lambda_T = \gamma \times (0, T), \\ \mathbf{y} = 0 \quad \text{sobre } S_T = (\partial\Omega \setminus \gamma) \times (0, T), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \quad \text{en } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

En lo que se refiere a existencia de solución débil de (3.1), tenemos:

Teorema 3.1 *Sea $\mathbf{v} \in L^2(0, T; H^{1/2}(\gamma)^N)$ tal que existe una función ζ verificando*

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^N) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega)^N), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^N), \\ \mathbf{v}(t) = \gamma_0(\zeta(t)), \quad \text{para } t \in (0, T) \text{ c.p.d.}, \quad \nabla \cdot \zeta = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ \gamma_n(\mathbf{y}_0 - \zeta(0)) = 0 \quad \text{sobre } \gamma, \end{array} \right. \quad (3.2)$$

con $\mathbf{y}_0 \in \widetilde{H}$. Entonces existe una única solución (\mathbf{y}, π) de (3.1) (π es única salvo una constante aditiva) tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &\in L^2(0, T; \widetilde{V}) \cap C^0([0, T]; \widetilde{H}), \\ \mathbf{y}' &\in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^N), \quad \pi \in L^2(\Omega \times (0, T)). \end{aligned}$$

■

En vista de este resultado, redefiniremos en este caso la familia de controles admisibles poniendo

$$U_{ad} = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \in L^2(0, T; H^{1/2}(\gamma)^N), \exists \zeta \text{ verificando (3.2)}\}.$$

Obsérvese que, en particular, si $\mathbf{v} \in L^2(0, T; H^{1/2}(\gamma)^N)$,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\gamma)^N) \quad \text{y} \quad \gamma_n \mathbf{v}(0) = \gamma_n \mathbf{y}_0,$$

entonces $\mathbf{v} \in U_{ad}$.

Para cada $\mathbf{v} \in U_{ad}$ llamemos, como es usual, $(\mathbf{y}_{\mathbf{v}}, \pi_{\mathbf{v}})$ a la correspondiente solución de (3.1). Sea

$$Y(T) = \{\mathbf{y}_{\mathbf{v}}(T); \mathbf{v} \in U_{ad}\}$$

el conjunto de los estados finales. Gracias a la linealidad de (3.1), $Y(T)$ es una variedad afín de \widetilde{H} . Probaremos el resultado siguiente:

Teorema 3.2 $Y(T)$ es denso en \widetilde{H} . ■

En el resto de la Sección, supondremos (por comodidad) que $\mathbf{y}_0 = 0$. Presentaremos dos demostraciones del Teorema 3.2. La primera de ellas, no constructiva, de nuevo utiliza una consecuencia del Teorema de Hahn-Banach y es análoga (e incluso más sencilla) a la del Teorema 2.6 del Capítulo precedente. En la segunda, fijado un estado deseado $\mathbf{z}_d \in \widetilde{H}$, construiremos una sucesión de controles $\{\mathbf{v}_k\}$ tales que los correspondientes $\mathbf{y}_{\mathbf{v}_k}(T)$ convergen fuertemente en \widetilde{H} hacia \mathbf{z}_d . En ambas demostraciones, el argumento utilizado constituye una adaptación del que se utiliza en [37].

3.1.1 Primera Demostración del Teorema 3.2

Gracias a una consecuencia del Teorema de Hahn-Banach, probar el Teorema 3.2 equivale a demostrar que si $\mathbf{w} \in \widetilde{H}$ y verifica

$$(\mathbf{y}_{\mathbf{v}}(T), \mathbf{w})_{0;\Omega} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in U_{ad} \quad (3.3)$$

entonces $\mathbf{w} = 0$. Para $\mathbf{w} \in \widetilde{H}$ dado, introducimos el problema “adjunto”

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{q} + \nabla Q = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{q} \quad \text{en } Q_T, \\ (-Q \mathbf{Id} + \nabla \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Lambda_T, \quad \mathbf{q} = 0 \quad \text{sobre } S_T, \\ \mathbf{q}(T) = \mathbf{w} \quad \text{en } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Sabemos ya que (3.4) admite una única solución (\mathbf{q}, Q) que, además, verifica:

$$\mathbf{q} \in C^\infty(\Omega \times (0, T))^N \cap L^2_{loc}(0, T; H^2(\Omega)^N) \cap L^2(0, T; \widetilde{V}),$$

$$Q \in C^\infty(\Omega \times (0, T)) \cap L^2_{loc}(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(\Omega \times (0, T)).$$

Utilizando las formulaciones débiles de los problemas (3.1) y (3.4), se deduce fácilmente que

$$(\mathbf{y}_{\mathbf{v}}(T), \mathbf{w})_{0;\Omega} = \int_0^T \langle (-\pi \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}, \mathbf{q} \rangle_{-1/2;\gamma} dt = 0. \quad (3.5)$$

A partir de la solución \mathbf{q} de (3.4), consideramos el problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ (-\pi \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{q} \quad \text{sobre } \Lambda_T, \\ \mathbf{y} = 0 \quad \text{sobre } S_T, \\ \mathbf{y}(0) = 0 \quad \text{en } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

De nuevo, (3.6) admite una única solución débil (\mathbf{y}, π) . Eligiendo el control

$$\mathbf{v} = \gamma_0(\mathbf{y}) \in U_{ad},$$

resulta que el estado asociado, \mathbf{y}_v , coincide con \mathbf{y} ; además, de (3.5) se sigue que

$$(\mathbf{y}(T), \mathbf{w})_{0;\Omega} = \int_0^T \|\mathbf{q}(t)\|_{0;\gamma}^2 dt.$$

Utilizando (3.3), se deduce ahora que \mathbf{q} es solución de (3.4) y que

$$\mathbf{q} = 0 \quad \text{sobre} \quad \gamma \times (0, T).$$

De la Proposición 2.13 del Capítulo anterior, se obtiene que $\mathbf{q} = 0$ en $\Omega \times (0, T)$ y, por tanto,

$$\mathbf{w} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega.$$

3.1.2 Segunda Demostración del Teorema 3.2

Sea $\mathbf{z}_d \in \widetilde{H}$ dado. Para cada entero positivo k , consideramos el correspondiente sistema acoplado,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ -\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{q} + \nabla Q = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ (-\pi \text{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} = -k \mathbf{q} \quad \text{sobre } \Lambda_T, \\ (-Q \text{Id} + \nu \nabla \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Lambda_T, \\ \mathbf{y} = \mathbf{q} = 0 \quad \text{sobre } S_T, \\ \mathbf{y}(0) = 0, \quad \mathbf{q}(T) = \mathbf{y}(T) - \mathbf{z}_d \quad \text{en } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Seguidamente veremos que (3.7) admite una única solución $(\mathbf{y}_k, \pi_k, \mathbf{q}_k, Q_k)$ y que, si tomamos como control la función

$$\mathbf{v}_k = \gamma_0(\mathbf{y}_k) \in U_{ad}$$

entonces $\mathbf{y}_{v_k} = \mathbf{y}_k$ y, además

$$\mathbf{y}_k(T) \rightarrow \mathbf{z}_d \quad \text{en} \quad \widetilde{H} \quad \text{cuando} \quad k \rightarrow \infty.$$

Más adelante, justificaremos la elección del sistema (3.7) considerando un determinado problema de control óptimo y viendo que (3.7) es el sistema de optimalidad asociado a dicho problema.

Teorema 3.3 *El problema (3.7) posee una única solución $(\mathbf{y}_k, \pi_k, \mathbf{q}_k, Q_k)$, con*

$$\mathbf{y}_k, \mathbf{q}_k \in L^2(0, T; \widetilde{V}) \cap C^0([0, T]; \widetilde{H}),$$

$$\frac{\partial \mathbf{y}_k}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{q}_k}{\partial t} \in L^2(0, T; \widetilde{V}'),$$

$$\pi_k, Q_k \in L^2(\Omega \times (0, T)).$$

Demostración: Razonaremos de la forma siguiente:

1. Dado $\mathbf{u} \in \widetilde{H}$, resolvemos el problema

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{q} + \nabla Q = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ (-Q \text{Id} + \nu \nabla \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Lambda_T, \\ \mathbf{q} = 0 \quad \text{sobre } S_T, \\ \mathbf{q}(T) = \mathbf{u} \quad \text{en } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

2. Seguidamente, dada $\mathbf{q} \in L^2(0, T; \widetilde{V})$, resolvemos el correspondiente problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ (-\pi \text{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} = -k \mathbf{q} \quad \text{sobre } \Lambda_T, \\ \mathbf{y} = 0 \quad \text{sobre } S_T, \\ \mathbf{y}(0) = 0 \quad \text{en } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Esto permite definir dos operadores $S, M \in \mathcal{L}(\widetilde{H}; \widetilde{H})$, que actúan como sigue:

$$S\mathbf{u} = \mathbf{y}(T), \quad M\mathbf{u} = \mathbf{u} - S\mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in \widetilde{H}$$

(tanto S como M están bien definidos, dado que la solución de (3.9) verifica

$$\mathbf{y} \in C^0([0, T]; \widetilde{H});$$

por otra parte, el carácter lineal y continuo de S y M es consecuencia inmediata de propiedades bien conocidas del problema de Stokes).

Claramente, resolver (3.7) equivale a encontrar $\mathbf{u} \in \widetilde{H}$ tal que

$$M\mathbf{u} = -\mathbf{z}_d. \quad (3.10)$$

En tal caso, las correspondientes soluciones de (3.9) y (3.8) constituirían una solución de (3.7). Para resolver la ecuación (3.10), introducimos la forma bilineal continua $a(\cdot, \cdot)$ y la forma lineal continua $L(\cdot)$, dadas por

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (M\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0,\Omega}, \quad L(\mathbf{v}) = -(\mathbf{z}_d, \mathbf{v})_{0,\Omega} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \widetilde{H}.$$

Teniendo en cuenta que

$$(M\mathbf{u}, \mathbf{u})_{0,\Omega} = \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + (S\mathbf{u}, \mathbf{u})_{0,\Omega} = \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + k \iint_{\gamma \times (0,T)} |\mathbf{q}(\mathbf{u})|^2 dS dt,$$

se deduce fácilmente que la forma bilineal a es elíptica en \widetilde{H} . Aplicando el Teorema de Lax-Milgran, obtenemos que existe una única solución \mathbf{u} en \widetilde{H} verificando

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \widetilde{H},$$

y, por tanto, (3.10). ■

Observación: Razonando como en el apartado 2.5.3, es posible demostrar que la solución $(\mathbf{y}, \pi, \mathbf{q}, Q)$ de (3.7) es más regular; más precisamente, tenemos que

$$\mathbf{y}, \mathbf{q} \in C^\infty(\Omega \times (0, T))^N, \quad \pi, Q \in C^\infty(\Omega \times (0, T)).$$
■

Teorema 3.4 *Con la notación precedente, se tiene que*

$$\mathbf{y}_k(T) \rightarrow \mathbf{z}_d \quad \text{en } \widetilde{H} \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

Demostración: De las formulaciones débiles de los problemas satisfechos por \mathbf{y}_k y \mathbf{q}_k , se deduce que

$$(\mathbf{q}_k(T), \mathbf{y}_k(T))_{0,\Omega} = -k \iint_{\gamma \times (0,T)} |\mathbf{q}_k|^2 dS dt.$$

Si en la igualdad anterior sustituimos $\mathbf{y}_k(T)$ por su valor $\mathbf{q}_k(T) + \mathbf{z}_d$, obtenemos

$$\|\mathbf{q}_k(T)\|_{0,\Omega}^2 + k \iint_{\gamma \times (0,T)} |\mathbf{q}_k|^2 dS dt = -(\mathbf{z}_d, \mathbf{q}_k(T))_{0,\Omega} \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{z}_d\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{q}_k(T)\|_{0,\Omega}^2$$

y, de aquí, resulta que

$$\begin{cases} \|\mathbf{q}_k(T)\|_{0,\Omega}^2 \leq \|\mathbf{z}_d\|_{0,\Omega}^2, \\ k \iint_{\gamma \times (0,T)} |\mathbf{q}_k|^2 dS dt \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{q}_k(T)\|_{0,\Omega}^2. \end{cases} \quad (3.11)$$

En consecuencia, $\{\mathbf{q}_k(T)\}_{k \geq 0}$ es una sucesión acotada en \widetilde{H} ; por tanto, existen $\mathbf{w} \in \widetilde{H}$ y una subsucesión (que seguiremos denotando de la misma forma) tal que

$$\mathbf{q}_k(T) \rightharpoonup \mathbf{w} \text{ en } \widetilde{H}\text{-débil.}$$

La Demostración se reduce a probar que $\mathbf{w} = 0$, puesto, que en tal caso, tendremos que

$$\|\mathbf{q}_k(T)\|_{0;\Omega}^2 + k \int \int_{\gamma \times (0,T)} |\mathbf{q}_k|^2 dS dt = -(\mathbf{z}_d, \mathbf{q}_k(T))_{0;\Omega}$$

con el segundo miembro convergiendo a cero.

Veamos que $\mathbf{w} = 0$ en Ω . La solución \mathbf{q}_k de (3.7) verifica obviamente la formulación débil

$$\begin{cases} -(\frac{\partial \mathbf{q}_k}{\partial t}(t), \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{q}_k(t), \nabla \mathbf{v})_{0;\Omega} = 0 & \forall \mathbf{v} \in \widetilde{V}, \quad t \in (0, T) \text{ c.p.d.}, \\ \mathbf{q}_k(T) = \mathbf{y}_k(T) - \mathbf{z}_d. \end{cases}$$

Es fácil deducir la igualdad,

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{q}_k(t)\|_{0;\Omega}^2 + \nu \|\nabla \mathbf{q}_k(t)\|_{0;\Omega}^2 = 0 \quad t \in (0, T) \text{ c.p.d.}$$

y, de aquí, que

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{q}_k(t)\|_{0;\Omega}^2 + \nu \int_t^T \|\nabla \mathbf{q}_k(s)\|_{0;\Omega}^2 ds = \frac{1}{2} \|\mathbf{q}_k(T)\|_{0;\Omega}^2 \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{z}_d\|_{0;\Omega}^2.$$

De esta acotación se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_k &\in \text{acotado de } L^2(0, T; \widetilde{V}) \cap L^\infty(0, T; \widetilde{H}), \\ \frac{\partial \mathbf{q}_k}{\partial t} &\in \text{acotado de } L^2(0, T; \widetilde{V}'), \\ \mathbf{q}_k(T) &\rightharpoonup \mathbf{w} \text{ en } \widetilde{H}\text{-débil.} \end{aligned}$$

Extrayendo subsucesiones convergentes, deducimos que la sucesión $\{\mathbf{q}_k\}$ converge en un sentido apropiado hacia una función \mathbf{q} que es, junto con Q , solución débil de:

$$\begin{cases} -\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{q} + \nabla Q = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{q} & \text{en } Q_T, \\ (-Q \text{ Id} + \nabla \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Lambda_T, \quad \mathbf{q} = 0 & \text{sobre } S_T, \\ \mathbf{q}(T) = \mathbf{w} & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Gracias a (3.11), se tiene que

$$\mathbf{q} = 0 \text{ sobre } \gamma \times (0, T),$$

de donde $\mathbf{q} = 0$ en $\Omega \times (0, T)$ y, en particular, $\mathbf{w} = 0$. ■

La introducción del problema (3.7) puede ser justificada recurriendo a un adecuado problema de control óptimo. Para ello, planteamos el problema de mínimos

$$\inf_{\mathbf{v} \in U_{ad}} J_k(\mathbf{v}), \quad (3.12)$$

donde la función coste J_k viene dada como sigue:

$$J_k(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \|(-\pi_{\mathbf{v}} \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}_{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(0, T; H^{-1/2}(\gamma)^N)}^2 + \frac{k}{2} \|\mathbf{y}_{\mathbf{v}}(T) - \mathbf{z}_d\|_{0; \Omega}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in U_{ad}.$$

Aquí, k es un entero positivo e $(\mathbf{y}_{\mathbf{v}}, \pi_{\mathbf{v}})$ es la solución del correspondiente problema de estado (3.1). Naturalmente, J_k es un funcional cuadrático en U_{ad} .

Admitamos por el momento que el problema de control (3.12) posee solución $\mathbf{v}_k \in U_{ad}$. Sea $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_{\mathbf{v}_k}$ para cada k ; entonces

$$\mathbf{y}_k(T) \rightarrow \mathbf{z}_d \quad \text{en } \widetilde{H} \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

Para demostrar esta afirmación, fijemos $\varepsilon > 0$ y veamos que, para k suficientemente grande, $\|\mathbf{y}_k(T) - \mathbf{z}_d\|_{0; \Omega} \leq \varepsilon$. Sea $\mathbf{w}_0 \in U_{ad}$ tal que

$$\|\mathbf{y}_{\mathbf{w}_0}(T) - \mathbf{z}_d\|_{0; \Omega} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Dado que \mathbf{v}_k es solución del problema de mínimos (3.12),

$$J_k(\mathbf{v}_k) \leq J_k(\mathbf{w}_0)$$

y, de aquí, resulta la desigualdad

$$\|\mathbf{y}_k(T) - \mathbf{z}_d\|_{0; \Omega}^2 \leq \frac{C(\mathbf{w}_0)}{k} + \|\mathbf{y}_{\mathbf{w}_0}(T) - \mathbf{z}_d\|_{0; \Omega}^2.$$

Tomando k suficientemente grande, se tiene que

$$\frac{C(\mathbf{w}_0)}{k} \leq \frac{\varepsilon^2}{2}$$

y, por tanto, $\|\mathbf{y}_k(T) - \mathbf{z}_d\|_{0; \Omega} \leq \varepsilon$.

Dadas las propiedades de J_k , queda claro que resolver (3.12) equivale a resolver la ecuación de Euler

$$\langle J'_k(\mathbf{v}_k), \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in U_{ad},$$

que, a su vez, se escribe como sigue^a:

$$((-\pi_k \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}_k) \cdot \mathbf{n}, (-\pi_v \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}_v) \cdot \mathbf{n})_{L^2(0,T;H^{-1/2}(\gamma)^N)} + k(\mathbf{y}_k(T) - \mathbf{z}_d, \mathbf{y}_v(T))_{0;\Omega} = 0.$$

Consideremos el problema

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{q} + \nabla Q = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ (-Q \mathbf{Id} + \nabla \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Lambda_T, \quad \mathbf{q} = 0 \quad \text{sobre } S_T, \\ \mathbf{q}(T) = \mathbf{y}_k(T) - \mathbf{z}_d \quad \text{en } \Omega. \end{array} \right.$$

Utilizando la solución de éste, la ecuación de Euler se transforma en

$$((-\pi_k \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}_k) \cdot \mathbf{n} + k \mathbf{q}_k, (-\pi_v \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}_v) \cdot \mathbf{n})_{L^2(0,T;H^{-1/2}(\gamma)^N)} = 0,$$

y, de aquí, se obtiene que

$$(-\pi_k \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}_k) \cdot \mathbf{n} + k \mathbf{q}_k = 0 \quad \text{en } L^2(0,T;H^{-1/2}(\gamma)^N).$$

Por tanto, el sistema de optimalidad asociado al problema de control es

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{y}_k}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{y}_k + \nabla \pi_k = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{y}_k = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ -\frac{\partial \mathbf{q}_k}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{q}_k + \nabla Q_k = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{q}_k = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ (-\pi_k \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}_k) \cdot \mathbf{n} = -k \mathbf{q}_k \quad \text{sobre } \Lambda_T, \\ (-Q_k \mathbf{Id} + \nu \nabla \mathbf{q}_k) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Lambda_T, \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{q}_k = 0 \quad \text{sobre } S_T, \\ \mathbf{y}_k(0) = 0, \quad \mathbf{q}_k(T) = \mathbf{y}_k(T) - \mathbf{z}_d \quad \text{en } \Omega; \end{array} \right.$$

si tomamos $\mathbf{v}_k = \gamma_0(\mathbf{y}_k)$, entonces \mathbf{v}_k es solución de (3.12).

^aCon $(\cdot, \cdot)_{L^2(0,T;H^{-1/2}(\gamma)^N)}$ denotamos el producto escalar definido en $L^2(0,T;H^{-1/2}(\gamma)^N)$.

3.2 Aplicación al Problema Controlado por las Ecuaciones de Navier-Stokes

El segundo método utilizado para demostrar la controlabilidad aproximada en \widetilde{H} del problema de Stokes con control frontera proporciona un algoritmo en el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes que puede ser de interés. En este caso, (3.7) debe ser sustituido por el siguiente problema no lineal

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{y} - \nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = 0, & \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 \text{ en } Q_T, \\ -\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{q} - \nu \Delta \mathbf{q} + \nabla Q = 0, & \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \text{ en } Q_T, \\ (-\pi \text{Id} + \nu \nabla \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{2} (\mathbf{y} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{y} = -k \mathbf{q} & \text{sobre } \Lambda_T, \\ (-Q \text{Id} + \nu \nabla \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} (\mathbf{y} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{q} = 0 & \text{sobre } \Lambda_T, \\ \mathbf{y} = \mathbf{q} = 0 & \text{sobre } S_T, \\ \mathbf{y}(0) = 0, \quad \mathbf{q}(T) = \mathbf{y}(T) - \mathbf{z}_d & \text{en } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Al igual que en el caso lineal, sería interesante demostrar que

$$\mathbf{y}_k(T) \rightarrow \mathbf{z}_d \text{ en } \widetilde{H} \text{ cuando } k \rightarrow \infty,$$

cuando \mathbf{z}_d es una función arbitraria de \widetilde{H} e $(\mathbf{y}_k, \pi_k, \mathbf{q}_k, Q_k)$ es una solución débil de (3.13)^b. Desafortunadamente, como veremos a continuación, surgen dificultades cuando se intentan adaptar los argumentos de la Sección 3.1.

Razonando como en el caso lineal, se obtiene que

$$(\mathbf{y}_k(T), \mathbf{q}_k(T))_{0;\Omega} + k \int \int_{\gamma \times (0,T)} |\mathbf{q}_k|^2 dS dt = 0,$$

y, de aquí, se llega a las igualdades:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}_k(T)\|_{0;\Omega}^2 + k \int \int_{\gamma \times (0,T)} |\mathbf{q}_k|^2 dS dt &= (\mathbf{z}_d, \mathbf{y}_k(T))_{0;\Omega}, \\ \|\mathbf{q}_k(T)\|_{0;\Omega}^2 + k \int \int_{\gamma \times (0,T)} |\mathbf{q}_k|^2 dS dt &= -(\mathbf{z}_d, \mathbf{q}_k(T))_{0;\Omega}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

De éstas, se sigue que las sucesiones $\{\mathbf{y}_k(T)\}_{k \geq 0}$ y $\{\mathbf{q}_k(T)\}_{k \geq 0}$ están acotadas en \widetilde{H} y que

$$k \int \int_{\gamma \times (0,T)} |\mathbf{q}_k|^2 dS dt \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{z}_d\|_{0;\Omega}^2.$$

^bDejamos al margen el problema de la existencia de solución del sistema acoplado (3.13). En este sentido, suponemos que (3.13) admite al menos una solución débil con la regularidad suficiente para justificar los cálculos que siguen.

Razonando como en el apartado anterior, se prueba que existe una función $\mathbf{w} \in \widetilde{H}$ y una subsucesión (que seguiremos denotando igual) verificando

$$\mathbf{q}_k(T) \rightharpoonup \mathbf{w} \text{ en } \widetilde{H}\text{-débil cuando } k \rightarrow \infty.$$

La demostración de la convergencia de $\mathbf{y}_k(T)$ hacia \mathbf{z}_d se tendría si fuéramos capaces de probar que $\mathbf{w} = 0$ puesto que, utilizando la segunda igualdad de (3.14), obtendríamos convergencia fuerte de $\mathbf{q}_k(T)$ en \widetilde{H} . Para llegar a este fin, seguimos razonando como en el caso lineal, es decir tomamos límite (si es posible) en las ecuaciones satisfechas por \mathbf{q}_k para construir un sistema (lineal) al que poder aplicar un resultado de continuación única.

De la formulación débil

$$\left\{ \begin{array}{l} -\langle \frac{\partial \mathbf{q}_k}{\partial t}(t), \mathbf{v} \rangle - \tilde{b}(\mathbf{y}_k(t), \mathbf{q}_k(t), \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{q}_k(t), \nabla \mathbf{v})_{0;\Omega} = 0, \\ \forall \mathbf{v} \in \widetilde{V}, \quad t \in (0, T) \text{ c.p.d.}, \\ \mathbf{q}_k(T) = \mathbf{y}_k(T) - \mathbf{z}_d, \end{array} \right. \quad (3.15)$$

se obtiene la desigualdad de energía

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{q}_k(t)\|_{0;\Omega}^2 + \nu \int_t^T \|\nabla \mathbf{q}_k(s)\|_{0;\Omega}^2 ds = \frac{1}{2} \|\mathbf{q}_k(T)\|_{0;\Omega}^2 \leq \|\mathbf{z}_d\|_{0;\Omega}^2.$$

Se tiene por tanto que $\{\mathbf{q}_k\}$ está acotada en $L^2(0, T; \widetilde{V})$ y en $L^\infty(0, T; \widetilde{H})$. No obstante, para poder pasar al límite en (3.15), necesitamos acotar el término no lineal \tilde{b} ; consecuentemente, necesitamos acotar la sucesión $\{\mathbf{y}_k\}$.

Razonando de forma similar sobre la formulación débil de $\{\mathbf{y}_k\}$, se obtiene la desigualdad de energía

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{y}_k(t)\|_{0;\Omega}^2 + \nu \int_0^T \|\nabla \mathbf{y}_k(t)\|_{0;\Omega}^2 dt \leq k \left(\int_0^T \|\mathbf{q}_k(t)\|_{0;\gamma}^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|\mathbf{y}_k(t)\|_{0;\gamma}^2 dt \right)^{1/2}.$$

La dificultad surge al intentar acotar el segundo miembro de la desigualdad anterior. Obsérvese que previamente se ha conseguido una cota para

$$\sqrt{k} \|\mathbf{q}_k\|_{0;\gamma \times (0,T)}$$

pero no para

$$k \|\mathbf{q}_k\|_{0;\gamma \times (0,T)}.$$

En resumen, hemos visto que una subsucesión de la sucesión $\{\mathbf{q}_k\}$ converge (débilmente) hacia una función \mathbf{q} de $L^2(0, T; \widetilde{V}) \cap L^\infty(0, T; \widetilde{H})$ que verifica

$$\iint_{\gamma \times (0,T)} |\mathbf{q}|^2 dS dt = 0,$$

pero, a diferencia de lo que ocurre en el caso lineal, la función \mathbf{q} no es solución, en principio, de un problema diferencial. Por tanto, no está claro que el razonamiento utilizado en la Sección 3.1 sea válido aquí. En el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes con control distribuido (segundo miembro), se puede plantear un problema análogo a (3.13), pero se vuelven a obtener dificultades del mismo orden al tratar de tomar límite en la sucesión $\{\mathbf{q}_k\}$ (cf. [34], [37], [15]).

3.3 Otros Resultados sobre la Controlabilidad Débil de las Ecuaciones de Navier-Stokes

En esta Sección, demostraremos dos nuevos resultados relacionados con la controlabilidad aproximada de las ecuaciones de Navier-Stokes. En primer lugar, consideraremos el caso en el que el control se ejerce en el segundo miembro de la ecuación, pero imponiendo a los controles que posean una componente nula. En segundo lugar, consideraremos el problema de la controlabilidad débil del sistema de Navier-Stokes cuando el control se ejerce sobre la condición inicial.

3.3.1 Control Distribuido: El Caso de una Componente Nula

Sean Ω , ω , T y ν como en la Sección 2.2 del Capítulo 2. Consideramos la familia de controles admisibles dada por

$$U_{ad} = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \in L^2(\omega \times (0, T))^N, \quad v_1 = 0\}$$

y las ecuaciones de estado

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{y} - \nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = \mathbf{v} \chi_\omega, & \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ \mathbf{y} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, & \mathbf{y}(0) = 0 \quad \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (3.16)$$

Como ya es habitual, denotaremos $(\mathbf{y}_\mathbf{v}, \pi_\mathbf{v})$ una solución débil de (3.16). Consideramos el conjunto $Y_\mathbf{v}(T)$ (cf. Sección 2.2, Capítulo 2):

$$Y_\mathbf{v}(T) = \{\mathbf{y}_\mathbf{v}(T); \mathbf{y}_\mathbf{v} \text{ es, junto con alguna } \pi_\mathbf{v}, \text{ solución débil de (3.16)}\}.$$

Demostraremos en esta Sección el siguiente resultado:

Teorema 3.5 *Sea Y el subespacio de H generado por*

$$\left(\bigcup_{\mathbf{v} \in U_{ad}} Y_\mathbf{v}(T) \right) \cap H.$$

Entonces Y es denso en H .

■

Antes de hacer la Demostración, debemos hacer notar que, de nuevo, el Teorema 3.5 proporciona una respuesta parcial a una Conjetura planteada por J.L. Lions en [37]. Las técnicas utilizadas para la Demostración del Teorema 3.5 son análogas a las que se presentan en el Capítulo 2. Mediante una consecuencia del Teorema de Hahn-Banach, probar el Teorema 3.5 equivale a probar el siguiente

Teorema 3.6 Sea $\mathbf{w} \in H$ tal que

$$(\mathbf{y}_{\mathbf{v}}(T), \mathbf{v})_{0;\Omega} = 0 \quad \forall \mathbf{y}_{\mathbf{v}} \in \left(\bigcup_{\mathbf{v} \in U_{ad}} Y_{\mathbf{v}}(T) \right) \cap H. \quad (3.17)$$

Entonces $\mathbf{w} = 0$. ■

Por comodidad, demostraremos el Teorema 3.6 sólo en el caso tridimensional ($N = 3$). Planteamos el problema no lineal:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{y} - \nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = \mathbf{q}^* \chi_{\omega}, \quad \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ -\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{q} - \nu \Delta \mathbf{q} + \nabla Q = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ \mathbf{y} = \mathbf{q} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\ \mathbf{y}(0) = 0, \quad \mathbf{q}(T) = \mathbf{w} \quad \text{en } \Omega, \end{array} \right. \quad (3.18)$$

donde $\mathbf{q}^* = (0, q_2, q_3)$ para $\mathbf{q} \equiv (q_1, q_2, q_3)$. En lo que se refiere a la existencia de solución débil del sistema (3.18), se tiene el siguiente resultado (cf. [14]):

Teorema 3.7 Existe $\varepsilon = \varepsilon(\Omega, T, \nu) > 0$ tal que, si $\|\mathbf{w}\|_{0;\Omega} \leq \varepsilon$, entonces (3.18) posee al menos una solución fuerte $(\mathbf{y}, \pi, \mathbf{q}, Q)$ que verifica^c:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y} \in L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; \mathcal{D}(A)) \cap L^\infty(0, T - \delta; \mathcal{D}(A)), \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} \in L^2(Q_T)^3 \cap L^2(0, T - \delta; V) \cap L^\infty(0, T - \delta; H), \\ \pi \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T - \delta; H^1(\Omega)), \\ \mathbf{q} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T - \delta; V) \cap L^\infty(0, T - \delta; H), \\ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \in L^{5/4}(Q_T)^3 \cap L^2(0, T - \delta; L^2(\Omega)^3), \\ Q \in L^2(Q_T) \cap L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(0, T - \delta; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T - \delta; L^2(\Omega)), \end{array} \right.$$

cualquiera que sea $\delta > 0$. Además,

$$(\mathbf{y}(T), \mathbf{w})_{0;\Omega} = \iint_{\omega \times (0, T)} |\mathbf{q}^*|^2 dx dt. \quad (3.19)$$

■

^cEl conjunto $\mathcal{D}(A)$ es el dominio del operador no acotado de Stokes con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas. Se tiene que $\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega)^3 \cap V$ (cf. por ejemplo [8]).

Observación: Si, en el Teorema 3.7, suprimimos la hipótesis $\|\mathbf{w}\|_{0;\Omega} \leq \varepsilon$, se puede seguir asegurando la existencia de al menos una solución débil $(\mathbf{y}, \pi, \mathbf{q}, Q)$ de (3.18), con

$$\mathbf{y}, \mathbf{q} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \cap C^0([0, T]; V') \cap C_w^0([0, T]; H),$$

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \in L^{4/3}(0, T; V'), \quad \pi, Q \in L^2(Q_T).$$

Además, se puede encontrar $(\mathbf{y}, \pi, \mathbf{q}, Q)$ verificando (3.19). ■

Demostración del Teorema 3.6: Sea $\mathbf{w} \in H$ dada, verificando (3.17). Podemos suponer que $\|\mathbf{w}\|_{0;\Omega} \leq \varepsilon$, con ε dado por el Teorema 3.7. Sea $(\mathbf{y}, \pi, \mathbf{q}, Q)$ una solución fuerte de (3.18). Para $\mathbf{v} = \mathbf{q}^* \chi_\omega \in U_{ad}$, se tiene que $\mathbf{y}_v = \mathbf{y}$ y, de (3.17) y (3.19), se concluye que

$$\mathbf{y} = 0 \quad \text{en } Q_T, \quad \mathbf{q}^* = 0 \quad \text{en } \omega \times (0, T).$$

De esta forma, el par (\mathbf{q}, Q) es solución de

$$\begin{cases} -\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{q} + \nabla Q = 0, & \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ \mathbf{q} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, & \mathbf{q}(T) = \mathbf{w} \quad \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (3.20)$$

y, además, verifica

$$q_2 = q_3 = 0 \quad \text{en } \omega \times (0, T).$$

La solución (\mathbf{q}, Q) del sistema lineal (3.20) es analítica en el abierto Q_T (cf. [29]). En consecuencia, podemos concluir que

$$q_2 = q_3 = 0 \quad \text{en } Q_T = \Omega \times (0, T).$$

De la condición $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$ en $Q_T = \Omega \times (0, T)$ se sigue que q_1 verifica

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1}(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in Q_T,$$

y, por tanto, q_1 es independiente de la variable x_1 . Puesto que Ω es un abierto acotado, para cada $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, existe x_1^* tal que el punto $x^* = (x_1^*, x_2, x_3)$ está sobre $\partial\Omega$. De esta forma,

$$q_1(x, t) = q_1(x^*, t) = 0,$$

de lo que se concluye que $\mathbf{q} = 0$ en Q_T y que $\mathbf{w} = 0$ en Ω . Esto prueba el Teorema 3.6. ■

Para finalizar este apartado, observemos que, para el problema controlado por las ecuaciones de Stokes (caso lineal) es fácil demostrar la controlabilidad aproximada en H con control distribuido manteniendo una componente nula. Además, razonando como en la Sección 3.1, se puede construir una sucesión de controles de tal forma que los estados finales asociados convergen hacia un estado deseado.

3.3.2 Control Sobre la Condición Inicial

Tomemos a continuación $U_{ad} = H$ (la nueva familia de controles admisibles). Para cada $\mathbf{v} \in U_{ad}$, planteamos el correspondiente problema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{y} - \nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = 0, & \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ \mathbf{y} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, & \mathbf{y}(0) = \mathbf{v} \quad \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (3.21)$$

que, como es bien sabido, admite al menos una solución débil $(\mathbf{y}_{\mathbf{v}}, \pi_{\mathbf{v}})$ (para $N = 2$, $\mathbf{y}_{\mathbf{v}}$ es única y $\pi_{\mathbf{v}}$ es única salvo una constante aditiva). Como viene siendo habitual, denotaremos $Y_{\mathbf{v}}(T)$ el conjunto de los estados finales:

$$Y_{\mathbf{v}}(T) = \{\mathbf{y}_{\mathbf{v}}(T); \mathbf{y}_{\mathbf{v}} \text{ es, junto con } \pi_{\mathbf{v}}, \text{ solución débil de (3.21)}\}.$$

Con esta notación, probaremos el siguiente Teorema:

Teorema 3.8 *Sea Y el subespacio de H generado por*

$$\left(\bigcup_{\mathbf{v} \in U_{ad}} Y_{\mathbf{v}}(T) \right) \cap H.$$

Entonces Y es denso en H .

■

Para $N = 2$, $Y_{\mathbf{v}}(T)$ es un conjunto unitario para cada $\mathbf{v} \in U_{ad}$. En este caso, el enunciado del Teorema 3.8 se puede escribir de forma más simple. Para el caso bidimensional el Teorema 3.8 ha sido probado por Bardos y Tartar en [3] con una técnica diferente (y más complicada).

Para demostrar el Teorema 3.8, supongamos dada $\mathbf{w} \in H$, de tal forma que

$$(\mathbf{y}_{\mathbf{v}}(T), \mathbf{w})_{0;\Omega} = 0 \quad \forall \mathbf{y}_{\mathbf{v}} \in \left(\bigcup_{\mathbf{v} \in U_{ad}} Y_{\mathbf{v}}(T) \right) \cap H \quad (3.22)$$

y veamos que $\mathbf{w} = 0$. Para $\mathbf{w} \in H$, consideramos el correspondiente problema no lineal,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{y} - \nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = 0, & \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ -\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{q} - \nu \Delta \mathbf{q} + \nabla Q = 0, & \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ \mathbf{y} = \mathbf{q} = 0 & \text{sobre } \Sigma_T, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{q}(0), \quad \mathbf{q}(T) = \mathbf{w} & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (3.23)$$

Teorema 3.9 Dada $\mathbf{w} \in H$, existe al menos una solución débil $(\mathbf{y}, \pi, \mathbf{q}, Q)$ del correspondiente problema (3.23) que, además, verifica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}, \mathbf{q} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \in L^\sigma(0, T; V') \quad \text{con } \sigma = 2 \text{ si } N = 2 \text{ y } \sigma = \frac{4}{3} \text{ si } N = 3, \\ \mathbf{y}, \mathbf{q} \in C^0([0, T]; H) \quad \text{si } N = 2, \\ \mathbf{y}, \mathbf{q} \in C^0([0, T]; V') \cap C_w^0([0, T]; H) \quad \text{si } N = 3, \\ \pi, Q \in L^2(Q_T). \end{array} \right.$$

Por otra parte, \mathbf{y} verifica la desigualdad de energía (igualdad si $N = 2$),

$$\|\mathbf{y}(t)\|_{0;\Omega}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{y}(s)\|_{0;\Omega}^2 ds \leq \|\mathbf{q}(0)\|_{0;\Omega}^2 \quad \forall t \in (0, T) \quad (3.24)$$

y se verifica la fórmula

$$(\mathbf{y}(T), \mathbf{w})_{0;\Omega} = \|\mathbf{q}(0)\|_{0;\Omega}^2 \quad (3.25)$$

■

La Demostración del Teorema 3.9 es análoga a la del Teorema 2.11. Se aplica un argumento de compacidad sobre una aproximación de Galerkin. De esta forma, se introduce una sucesión de problemas aproximados para los que se prueba la existencia de solución, aplicando el Teorema de Schauder del Punto Fijo. Las estimaciones "a priori" de las soluciones aproximadas permiten pasar al límite para obtener una solución débil del sistema.

Demostración del Teorema 3.8: Supongamos que $\mathbf{w} \in H$ satisface (3.22). Sea $(\mathbf{y}, \pi, \mathbf{q}, Q)$ la solución del problema acoplado (3.23) que proporciona el Teorema 3.9. Sea $\mathbf{v} = \mathbf{q}(0) \in H$; para este control, \mathbf{y} es, junto con π , un estado asociado a \mathbf{v} . De la igualdad (3.22) y (3.25) se sigue que $\mathbf{q}(0) = 0$ en Ω y de (3.24) deducimos que

$$\mathbf{y} = 0 \quad \text{en } Q_T = \Omega \times (0, T).$$

Hemos obtenido una función \mathbf{q} que es, junto con Q , solución del problema de valores finales

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{q} + \nabla Q = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \text{en } Q_T, \\ \mathbf{q} = 0 \quad \text{en } \Sigma_T, \quad \mathbf{q}(T) = \mathbf{w} \quad \text{en } \Omega, \end{array} \right.$$

que además verifica

$$\mathbf{q}(0) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Puesto que la solución del problema lineal precedente es analítica en Q_T , se concluye que $\mathbf{q} = 0$ en Q_T y, por tanto, $\mathbf{w} = 0$. Esto finaliza la Demostración del Teorema.

■

Capítulo 4

Leyes Escalares de Conservación en una Variable Espacial

4.1 Introducción. Definición del Esquema

En este Capítulo, se estudia el problema de existencia de solución de la ley de conservación escalar:

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (4.1)$$

donde u es una función definida en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ con valores reales. Suponemos que f es una función C^2 y estrictamente convexa en un intervalo de \mathbb{R} y que además verifica $f(0) = 0$. Junto a la ecuación (4.1), consideramos también la condición inicial:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

donde u_0 es una función dada.

El problema de la existencia de solución es tratado mediante combinación de dos métodos: por un lado, la técnica diferencias finitas aplicada a la discretización de la derivada respecto de t y, por otro lado, el método de viscosidad (cf. [27], [31], [42], [50], etc.) que permite resolver explícitamente los problemas estacionarios que resultan.

De esta forma, pasamos de la ecuación no lineal de partida a una sucesión de ecuaciones lineales elípticas que dependen de dos parámetros h y ε . Para un h positivo dado, construiremos una función $u_h(x, t)$ y obtendremos estimaciones independientes de h y ε que nos permiten tomar límite cuando h tiende a cero. Estas estimaciones se obtendrán para la norma L^∞ y la variación total de las u_h .

Se pueden dar varias razones que nos han hecho elegir el método que más abajo se expone. Desde el punto de vista del tratamiento teórico, el método seguido no necesita, en comparación con otros métodos, excesivas herramientas técnicas previas. Por otro lado, desde el punto de vista computacional, el método es muy adecuado ya que los problemas elípticos que resultan de la discretización mediante diferencias finitas del término u_t pueden ser numéricamente resueltos de forma sencilla.

El presente Capítulo sólo trata el problema de existencia de solución del sistema (4.1)–(4.2); sin embargo, hay resultados que aseguran la unicidad dentro de la clase de funciones que verifican la condición clásica de entropía de Lax (cf. [32]). Aquí, dicha condición se cambia por una condición de regularidad sobre la función $u(x, t)$ (condición E de Oleĭnik, cf. [42]):

$$\frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} < \frac{E}{t} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad \forall a > 0,$$

(donde E es una constante positiva independiente de x , t y a).

En el estudio teórico de la existencia de solución débil de leyes de conservación escalares juega un papel importante el espacio de funciones de variación acotada $VA(\Omega)$ (cf. [18], [50], [51]). Dados un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y una función $v \in L^1_{loc}(\Omega)$, se define la variación total de v en Ω como sigue:

$$VT_{\Omega}(v) = \sup \left\{ \int_{\Omega} v \nabla \cdot \varphi \, dx ; \varphi \in C^1_0(\Omega)^N, \quad \|\varphi\|_{0, \infty; \Omega} \leq 1 \right\}.$$

A partir de esta definición, ponemos:

$$VA(\Omega) = \{v ; v \in L^1(\Omega), \quad VT_{\Omega}(v) < \infty\}.$$

Claramente, $VA(\Omega)$ es un espacio vectorial para las operaciones habituales y, dotado de la norma

$$\|v\|_{VA(\Omega)} = \|v\|_{0, 1; \Omega} + VT_{\Omega}(v),$$

se convierte en un espacio de Banach. Se tiene (cf. [18]):

Proposición 4.1 *Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^N , $\Omega \in C^{0,1}$. Entonces*

$$VA(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega).$$

■

El capítulo queda dividido en tres Secciones. En la primera, se describe el esquema que seguimos para construir soluciones aproximadas. En la segunda, se presentan algunos Lemmas referentes a acotaciones “a priori” de las soluciones aproximadas. Estos se

utilizarán en la tercera Sección para probar la convergencia, en un cierto sentido, hacia una solución débil de (4.1)–(4.2).

El principal resultado que probaremos es el siguiente:

Teorema 4.2 *Sea $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ y sea $f \in C^2(\mathbb{R})$ con $f'' > 0$ en $\{u : |u| \leq \|u_0\|_{0,\infty;\mathbb{R}}\}$. Entonces existe una solución $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ de (4.1)–(4.2) que verifica las siguientes propiedades*

1. $|u(x, t)| \leq \|u_0\|_{0,\infty;\mathbb{R}} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+.$
2. *Existe una constante $E > 0$ que sólo depende de $\|u_0\|_{0,\infty;\mathbb{R}}$,*

$$\mu = \min_{|u| \leq \|u_0\|_{0,\infty;\mathbb{R}}} f''(u) \quad \text{y} \quad A = \max_{|u| \leq \|u_0\|_{0,\infty;\mathbb{R}}} |f'(u)|,$$

tal que, para todo $a > 0$ y todo $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, se tiene:

$$\frac{u(x + a, t) - u(x, t)}{a} < \frac{E}{t}. \tag{4.3}$$

3. *Si v_0 es una función de $L^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\|v_0\|_{0,\infty;\mathbb{R}} \leq \|u_0\|_{0,\infty;\mathbb{R}}$ y v es la correspondiente solución de (4.1) construida a partir de la condición inicial v_0 , entonces, cualesquiera que sean x_1 y x_2 en \mathbb{R} tales que $x_1 < x_2$ y para todo $t > 0$, se cumple la desigualdad*

$$\int_{x_1}^{x_2} |u(x, t) - v(x, t)| dx \leq \int_{x_1 - At}^{x_2 + At} |u_0(x) - v_0(x)| dx. \tag{4.4}$$

■

Como es bien sabido, (cf. [30]), la solución de (4.1)–(4.2) desarrolla discontinuidades cuando t crece (ondas de choque). Por tanto, cuando se habla de solución de (4.1)–(4.2), se está haciendo referencia al concepto de solución débil de la ley de conservación escalar, es decir una función u localmente acotada y medible que verifica:

$$\int \int_{t>0} (u\Phi_t + f(u)\Phi_x) dx dt + \int_{t=0} u_0\Phi dx = 0 \quad \forall \Phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty)). \tag{4.5}$$

La condición (4.3) puede ser observada como una propiedad de regularidad, pues implica que para cada t positivo, la solución construida $u(\cdot, t)$ tiene variación total localmente acotada.

En efecto, sea $t > 0$ y sea c_1 una constante tal que $c_1 > E/t$. Consideremos la función v , dada por $v(x, t) = u(x, t) - c_1x$. Utilizando la propiedad (4.3), gracias a la elección de

c_1 , se tiene que $v(\cdot, t)$ es decreciente, de donde tiene variación total localmente acotada.

A continuación, introduciremos una familia de funciones que, en cierta forma, aproximan a una solución del problema de partida (4.1)–(4.2).

En primer lugar, introducimos una sucesión $\{kh\}$, donde $k \in \mathbb{N}$ y $h > 0$ está dado. Definimos las funciones u^k como sigue:

1. $u^0 \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ dada.
2. Para $k \geq 0$ y $u^k \in H^1(\mathbb{R})$ dadas, u^{k+1} es la solución del problema elíptico:

$$\begin{cases} u^{k+1} \in H^1(\mathbb{R}), \\ \frac{u^{k+1} - u^k}{h} + f(u^k)_x - \varepsilon u_{xx}^{k+1} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Aquí, ε es un parámetro positivo que más tarde se elegirá. En principio, la elección de u^0 queda libre, aunque más adelante se precisará. Hay que hacer notar que u^0 puede depender de h ; en cualquier caso, exigiremos que su norma en $L^\infty(\mathbb{R})$ esté acotada por $\|u_0\|_{0,\infty;\mathbb{R}}$. Gracias a que u^0 está en $L^2(\mathbb{R})$ y en $L^\infty(\mathbb{R})$, se tiene que (4.6) posee solución única para $k = 0$. En efecto, tenemos $f(0) = 0$ y

$$|f(u^0)| \leq \max_{|\xi| \leq \|u^0\|_{0,\infty;\mathbb{R}}} |f'(\xi)| \|u^0\|,$$

de donde $f(u^0) \in L^2(\mathbb{R})$ y $f(u^0)_x \in H^{-1}(\mathbb{R})$. Dada $u^1 \in H^1(\mathbb{R})$, se tiene que $f(u^1) \in H^1(\mathbb{R})$ gracias a la inyección de Sobolev de $H^1(\mathbb{R})$ en $L^\infty(\mathbb{R})$. Por tanto, $u^2 \in H^2(\mathbb{R})$. Siguiendo este razonamiento, se llega a que

$$u^k \in H^3(\mathbb{R}) \quad \forall k \geq 3.$$

A partir de las soluciones de los problemas (4.6), definimos la siguiente función:

$$\begin{cases} u_h(x, t) = \frac{1}{h} \{[(k+1)h - t]u^k(x) + (t - kh)u^{k+1}(x)\} & \forall x \in \mathbb{R}, \\ t \in [kh, (k+1)h), & k \geq 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Es inmediato comprobar que $u_h \in H^1(0, T; H^1(\mathbb{R}))$ para cada T finito; además, se tiene que:

$$\frac{\partial u_h}{\partial t}(x, t) = \frac{u^{k+1}(x) - u^k(x)}{h}, \quad \text{si } t \in (kh, (k+1)h). \quad (4.8)$$

(En realidad, u_h depende también de ε ; pero, por simplicidad en la notación, suprimiremos el índice ε).

El análisis de existencia de solución débil de (4.1)–(4.2) que presentamos en este primer Capítulo de la segunda parte de la Memoria es paralelo al realizado en [42] (cf. también [46]).

A continuación, demostraremos varios Lemas que, convenientemente encadenados, proporcionarán la prueba del Teorema 4.2.

4.2 Algunos Lemas Previos

Sean

$$M = \|u_0\|_{0,\infty;\mathbb{R}}, \quad (4.9)$$

$$A = \max_{|u| \leq M} |f'(u)|, \quad (4.10)$$

y

$$\mu = \min_{|u| \leq M} f''(u). \quad (4.11)$$

Gracias a las hipótesis del Teorema 4.2, tanto A como μ son estrictamente positivos. En primer lugar, demostraremos un resultado sobre la acotación en norma L^∞ de la función u_h (una versión “discreta” del primer apartado del Teorema 4.2). Recordemos que u^0 está sometida a la condición siguiente:

$$\|u^0\|_{0,\infty;\mathbb{R}} \leq M.$$

Lema 4.3 Sean $h, \varepsilon > 0$ tales que^a:

$$\sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} A \leq 1. \quad (4.12)$$

Entonces, para cada $k \geq 1$, se tiene:

$$\|u^k\|_{0,\infty;\mathbb{R}} \leq M.$$

Demostración: Antes de comenzar ésta, vamos a dar una expresión de la función u^{k+1} en términos de u^k ; es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} u^{k+1}(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^x \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right) \{u^k(s) + u^k(2x-s)\} ds \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^x \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right) \{f(u^k(s)) - f(u^k(2x-s))\} ds. \end{aligned} \quad (4.13)$$

También puede escribirse:

$$\begin{aligned} u^{k+1}(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right) \left[1 + \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f'(\theta^k(s))\right] u^k(s) ds \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right) \left[1 - \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f'(\theta^k(s))\right] u^k(2x-s) ds, \end{aligned}$$

^aLa desigualdad (4.12) se interpreta como una condición C.F.L. (Courant-Friedrichs-Lax); en particular, implica que el dominio de dependencia del esquema contiene al dominio de dependencia de la ecuación (4.1).

donde $\theta^k(s)$ está entre $u^k(s)$ y $u^k(2x - s)$. Razonamos por inducción. Supongamos que $k \geq 0$ y que $|u^k| \leq M$. Entonces $|\theta^k(s)| \leq M$ y, por tanto, se deduce la acotación $|f'(\theta^k(s))| \leq A$. Gracias a (4.12),

$$1 \pm \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f'(\theta^k(s)) \geq 0,$$

de donde

$$\begin{aligned} |u^{k+1}(x)| &\leq \frac{M}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right) \left[1 + \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f'(\theta^k(s))\right] ds \\ &\quad + \frac{M}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right) \left[1 - \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f'(\theta^k(s))\right] ds \\ &= \frac{M}{\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right) ds = M. \end{aligned}$$

Esto demuestra el Lema. ■

Como consecuencia del Lema 4.3, se obtiene una acotación de la función u_h , definida por (4.7):

Corolario 4.4 Sean $h, \varepsilon > 0$ verificando (4.12). Entonces se tiene que

$$\|u_h(\cdot, t)\|_{0,\infty;\mathbb{R}} \leq M \quad \forall t \in [0, +\infty). \tag{4.14}$$

■

En el siguiente resultado, se prueba una versión “discreta” de la condición de entropía (4.3):

Lema 4.5 (Condición de entropía) Sean $c = \min(\mu/2, A/4M)$, $h \in (0, 1)$ y $\varepsilon > 0$ verificando (4.12). Entonces, para cada $k \geq 3$, se tiene que

$$u_x^k(x) \leq \frac{E}{kh} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{donde } E = \frac{2}{c}. \tag{4.15}$$

Demostración: De momento, comencemos por calcular una expresión de u_x^k a partir de la fórmula (4.13). Derivando dicha expresión e integrando por partes, obtenemos:

$$\begin{aligned} u_x^{k+1}(x) &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon h}} u^{k+1}(x) + \frac{1}{\varepsilon} f(u^k(x)) + \frac{1}{\varepsilon h} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right) u^k(2x-s) ds \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right) f(u^k(2x-s)) ds. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Sustituyendo (4.13) en (4.16) resulta:

$$\begin{aligned} u_x^{k+1}(x) &= -\frac{1}{2\varepsilon h} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right)[u^k(s) - u^k(2x-s)] ds \\ &\quad - \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right)[f(u^k(s)) - f(u^k(2x-s))] ds + \frac{1}{\varepsilon} f(u^k(x)). \end{aligned} \quad (4.17)$$

El último término puede ser escrito como una integral más:

$$\frac{1}{\varepsilon} f(u^k(x)) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right) f(u^k(x)) ds.$$

Por tanto, sustituyendo esta expresión en (4.17), se obtiene:

$$\begin{aligned} u_x^{k+1}(x) &= \frac{1}{2\varepsilon h} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right)[u^k(2x-s) - u^k(s)] ds \\ &\quad - \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right)[f(u^k(s)) - f(u^k(x))] ds \\ &\quad - \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right)[f(u^k(2x-s)) - f(u^k(x))] ds \\ &= \frac{1}{2\varepsilon h} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right)[1 - \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f'(u^k(x))][u^k(2x-s) - u^k(x)] ds \\ &\quad + \frac{1}{2\varepsilon h} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right)[1 + \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f'(u^k(x))][u^k(x) - u^k(s)] ds \\ &\quad - \frac{1}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right) f''(\theta_1(s))[u^k(2x-s) - u^k(x)]^2 ds \\ &\quad - \frac{1}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right) f''(\theta_2(s))[u^k(s) - u^k(x)]^2 ds, \end{aligned}$$

donde $\theta_1(s)$ está entre $u^k(2x-s)$ y $u^k(x)$ y $\theta_2(s)$ está entre $u^k(s)$ y $u^k(x)$ (en consecuencia, ambas cantidades están acotadas por M). Como f es estrictamente convexa en el intervalo $(-M, M)$, las dos últimas integrales son positivas y, además, podemos acotar los integrandos correspondientes en términos de μ .

Definimos ahora las cantidades

$$z_1^k(x) = \frac{1}{\varepsilon h} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right)[u^k(x) - u^k(s)] ds,$$

$$z_2^k(x) = \frac{1}{\varepsilon h} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right)[u^k(2x-s) - u^k(x)] ds$$

y

$$z^k(x) = \max(z_1^k(x), z_2^k(x), 0).$$

Si $z_1^k(x)$ y $z_2^k(x)$ son negativas, la condición de entropía se verifica trivialmente en x , pues, en tal caso, $u_x^{k+1}(x)$ sería también negativa. Así pues, podemos suponer que $z^k(x)$ es positiva e igual a $z_1^k(x)$ (en particular, $z_1^k(x) > 0$). De nuevo teniendo en cuenta las condiciones (4.11) y (4.12), podemos escribir:

$$u_x^{k+1}(x) \leq z_1^k(x) - \frac{\mu}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right)[u^k(s) - u^k(x)]^2 ds. \quad (4.18)$$

Consideremos ahora la integral:

$$\int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right)[u^k(x) - u^k(s)] ds.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder para $p = q = 2$, obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right)[u^k(x) - u^k(s)] ds \\ &= \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{2\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right) \exp\left(\frac{-1}{2\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right)[u^k(x) - u^k(s)] ds \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right) ds\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right)[u^k(x) - u^k(s)]^2 ds\right)^{1/2} \\ &= (\varepsilon h)^{1/4} \left(\int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right)[u^k(x) - u^k(s)]^2 ds\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado y cambiando de signo, se llega a que

$$\frac{-\mu}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x-s)\right)[u^k(x) - u^k(s)]^2 ds \leq -\frac{\mu}{4} h [z_1^k(x)]^2.$$

Utilizando ahora (4.18) y la definición de c , resulta que

$$u_x^{k+1}(x) \leq z^k(x) - \frac{c}{2} h [z^k(x)]^2. \quad (4.19)$$

A partir de las desigualdades (4.19) y del Lema 4.3 se llega a (4.15). El razonamiento que hay que seguir se debe a Oleinik (cf. [42,46]) y, para una mejor comprensión del resultado, será expuesto a continuación.

Puesto que $|u^k(x)| \leq M$ (Lema 4.3) y, por hipótesis, se cumple (4.12),

$$z^k(x) \leq \frac{2M}{\sqrt{\varepsilon h}} \leq \frac{2M}{Ah} \leq \frac{1}{2ch}.$$

Evidentemente, estas desigualdades deben cumplirse $\forall x \in \mathbb{R}$. Sea ahora

$$z^k = \sup_x z^k(x)$$

y consideremos la función Φ , definida por $\Phi(y) = y - \frac{c}{2}hy^2$. Φ es creciente para $y \leq 1/ch$.

Como

$$z^k(x) \leq z^k \leq \frac{1}{2ch} < \frac{1}{ch},$$

obtenemos, a partir de (4.19), que

$$u_x^{k+1}(x) \leq z^k - \frac{c}{2}h(z^k)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.20)$$

Para $\dot{u}^{k+1} = \sup_x u_x^{k+1}(x)$, es inmediato que

$$z_1^{k+1}(x) \leq \dot{u}^{k+1}, \quad z_2^{k+1}(x) \leq \dot{u}^{k+1}.$$

Como $z^k - \frac{c}{2}h(z^k)^2 \geq 0$, (4.20) lleva a la desigualdad:

$$z^{k+1} \leq z^k - \frac{c}{2}h(z^k)^2. \quad (4.21)$$

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{c}{2}w^2.$$

La solución de esta ecuación que satisface $w(0) = z^0$ está dada por

$$w(t) = \frac{1}{\frac{c}{2}t + \frac{1}{z^0}}.$$

Admitamos por el momento que

$$z^k \leq w(kh) = \frac{1}{\frac{c}{2}kh + \frac{1}{z^0}} \quad \forall k \geq 0. \quad (4.22)$$

A partir de (4.20), utilizando de nuevo que Φ es creciente cuando $y < \frac{1}{ch}$ y que

$$z^k \leq \frac{2}{ckh} = \frac{E}{kh} \leq \frac{1}{ch}$$

para $k \geq 2$, resulta lo siguiente cuando $h < 1$:

$$u_x^{k+1}(x) \leq \frac{E}{kh} - \frac{c}{2} \frac{E^2}{k^2 h^2} = \frac{E}{kh} - \frac{E}{k^2 h^2} \leq \frac{E}{(k+1)h}.$$

En consecuencia, se tiene (4.15).

Queda por demostrar la desigualdad (4.22). Para ello, utilizaremos un argumento de inducción. El caso $k = 0$ es trivial. Supongamos por tanto que se verifica (4.22) para $k = n$. Para demostrar (4.22) cuando $k = n + 1$, haremos uso del

Lema 4.6 Sea J una constante para la cual se verifica

$$\frac{J - w(nh)}{h} < w'(nh).$$

Entonces $J \leq w[(n + 1)h]$. ■

De (4.21), obtenemos que

$$z^{n+1} \leq z^n - \frac{c}{2}(z^n)^2;$$

también, por la hipótesis de inducción,

$$z^n \leq w(nh) = \frac{1}{\frac{c}{2}nh + 1/z^0} \leq \frac{1}{\frac{c}{2}nh + 2ch} < \frac{1}{ch} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puesto que Φ es creciente sobre ese intervalo, $\Phi(z^n) \leq \Phi(w(nh))$, así que

$$z^{n+1} \leq z^n - ch(z^n)^2 \leq w(nh) - \frac{c}{2}hw(nh)^2$$

y, en consecuencia,

$$\frac{z^{n+1} - w(nh)}{h} \leq -\frac{c}{2}w(nh)^2 = w'(nh).$$

Esto, junto con el Lema 4.6, conduce a que $z^{n+1} \leq w[(n+1)h]$, lo que prueba el Lema 4.5. ■

Demostración del Lema 4.6: Se tiene que $w(t) > 0$ si $t \geq 0$, así como $w'(t) < 0$ y $w''(t) > 0$ para $t \geq 0$. Introduciendo un desarrollo truncado de w para $t = (n + 1)h$, se llega a que

$$\frac{w(nh + h) - w(nh)}{h} = w'(nh) + \frac{h}{2}w''(\theta) > w'(nh) > \frac{J - w(nh)}{h},$$

de donde $w(nh + h) \geq J$. Esto prueba el Lema. ■

Como Corolario al al Lema 4.5, tenemos:

Corolario 4.7 Sean h , ε y c como en el Lema 4.5. Entonces se tiene que

$$\frac{\partial u_h}{\partial x}(x, t) \leq \frac{2E}{t} \quad \forall t > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

donde $E = \frac{2}{c}$.

Demostración: Basta escribir $t = \theta(k+1)h + (1-\theta)kh$, con $\theta \in (0, 1]$ y $k \geq 0$. Entonces

$$\frac{\partial u_h}{\partial x}(x, t) = (1-\theta)u_x^k(x) + \theta u_x^{k+1}(x) < (1-\theta)\frac{E}{kh} + \theta\frac{E}{(k+1)h} \leq \frac{2E}{t};$$

queda pues demostrada la condición de entropía para u_h . ■

En lo que sigue, se admitirá que los parámetros h y ε están ligados por la relación (4.12). En el siguiente Lema, se prueba que la variación total de las funciones $u^k(x)$ está localmente acotada siempre que kh se mantenga $\geq \alpha > 0$. La Demostración es consecuencia de la condición de entropía mencionada más arriba.

Lema 4.8 (Estimaciones en espacio) *Dados $X > 0$ y $\alpha > 0$, existe una constante c_1 que depende de X , α , A , μ y M pero que es independiente de h y ε , tal que*

$$VT_{(-X, X)}(u^k) \leq c_1, \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ tal que } kh \geq \alpha > 0. \quad (4.23)$$

Demostración: Sea c_2 una constante tal que $c_2 > E/\alpha$ y sea $v^k(x) = u^k(x) - c_2x$, con k tal que $kh \geq \alpha$. Si $a > 0$, se tiene que

$$v^k(x+a) - v^k(x) = u^k(x+a) - u^k(x) - c_2a \leq \left(\frac{E}{kh} - c_2\right)a.$$

Como $kh \geq \alpha$, la expresión a la izquierda de la desigualdad es negativa, lo cual indica que v^k es decreciente. Por tanto, tiene sentido hablar de $VT_{(-X, X)}(v^k)$ y de $VT_{(-X, X)}(u^k)$. Además,

$$\begin{aligned} VT_{(-X, X)}(u^k) &\leq VT_{(-X, X)}(v^k) + 2c_2X = v^k(-X) - v^k(X) + 2c_2X \\ &= u^k(-X) - u^k(X) + 4c_2X \leq 2M + 4c_2X; \end{aligned}$$

(de nuevo hay que tener en cuenta el Lema 4.3). En consecuencia, se tiene el Lema con $c_1 = 2M + 4c_2X$. ■

Observación: Como u^k está en $H^1(\mathbb{R})$, podemos escribir la expresión (4.23) en la forma

$$\int_{-X}^X |u_x^k| dx \leq c_1 \quad \forall k \in \mathbb{R} \text{ tal que } kh \geq \alpha > 0. \quad (4.23)'$$

El siguiente resultado es fundamental para demostrar que las u_h convergen hacia una solución de (4.1)–(4.2) en el semiplano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ (y no solamente en cada línea $t = \text{Cte} > 0$).

Lema 4.9 (Estimaciones en tiempo) Sean h, ε en las condiciones del Lema 4.5 y supongamos además que $\varepsilon/h \leq \delta$ donde δ es una constante. Entonces, dados $X > 0$ y $\alpha > 0$, existe una constante $L > 0$, independiente de h y ε , tal que:

$$\int_{-X}^X \left| \frac{\partial u_h}{\partial t}(x, t) \right| dx \leq L \quad \forall t \geq \alpha > 0. \tag{4.24}$$

Demostración: Sea $t = \theta(k + 1)h + (1 - \theta)kh$ donde $\theta \in [0, 1]$ y $k > 0$. Se tiene que

$$\frac{\partial u_h}{\partial t}(x, t) = \frac{u^{k+1}(x) - u^k(x)}{h}$$

y, gracias a (4.13),

$$\begin{aligned} \frac{u^{k+1}(x) - u^k(x)}{h} &= \frac{1}{2h\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x - s)\right) \left[1 + \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f'(\theta^k(s))\right] [u^k(s) - u^k(x)] ds \\ &+ \frac{1}{2h\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x - s)\right) \left[1 - \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f'(\theta^k(s))\right] [u^k(2x - s) - u^k(x)] ds, \end{aligned}$$

donde $\theta^k(s)$ es como en la Demostración del Lema 4.3.

Si tomamos valores absolutos e integramos en el intervalo $[-X, X]$, obtenemos:

$$\int_{-X}^X \left| \frac{u^{k+1}(x) - u^k(x)}{h} \right| dx \leq \frac{1}{h\sqrt{\varepsilon h}} \left(\int_{-X}^X I_1(x) dx + \int_{-X}^X I_2(x) dx \right),$$

donde

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x - s)\right) |u^k(x) - u^k(s)| ds, \\ I_2(x) &= \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x - s)\right) |u^k(2x - s) - u^k(x)| ds. \end{aligned}$$

Intentemos acotar las integrales $I_1(x)$ e $I_2(x)$ por constantes independientes de h y ε . En primer lugar, trabajamos con $I_1(x)$ (un razonamiento análogo es válido para $I_2(x)$). Para la primera integral, tenemos que

$$\int_{-X}^X I_1(x) dx = \int_{-X}^X \left(\int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x - s)\right) |u^k(x) - u^k(s)| ds \right) dx$$

y, haciendo un cambio en las variables de integración, esta expresión se convierte en la que sigue:

$$\begin{aligned} \int_{-X}^X I_1(x) dx &= \int_{-\infty}^{-X} \left(\int_{-X}^X \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x - s)\right) |u^k(x) - u^k(s)| dx \right) ds \\ &+ \int_{-X}^X \left(\int_s^X \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x - s)\right) |u^k(x) - u^k(s)| dx \right) ds = I_{11} + I_{12}. \end{aligned}$$

Procedamos ahora con las integrales I_{11} e I_{12} . Teniendo en cuenta el Lema 4.3, está claro que

$$I_{11} \leq 2M\epsilon h \left(1 - \exp\left(-\frac{2X}{\sqrt{\epsilon h}}\right) \right) < 2M\epsilon h.$$

Para la segunda integral, se tiene que

$$I_{12} \leq \int_{-X}^X \left(\int_s^X \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\epsilon h}}(x-s)\right) \left(\int_s^x |u_x^k(\sigma)| d\sigma \right) dx \right) ds.$$

Haciendo varios cambios en el orden de las variables de integración, este segundo miembro se transforma en

$$\begin{aligned} & \int_{-X}^X \left(\int_s^X |u_x^k(\sigma)| \left(\exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\epsilon h}}(\sigma-s)\right) - \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\epsilon h}}(X-s)\right) \right) d\sigma \right) ds \\ & \leq \sqrt{\epsilon h} \int_{-X}^X |u_x^k(\sigma)| \left(\int_{-X}^{\sigma} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\epsilon h}}(\sigma-s)\right) ds \right) d\sigma \\ & < \epsilon h \int_{-X}^X |u_x^k(\sigma)| d\sigma. \end{aligned}$$

En definitiva, se llega a la acotación:

$$\int_{-X}^X I_1(x) dx < \epsilon h \left(2M + \int_{-X}^X |u_x^k(x)| dx \right).$$

Mediante un razonamiento análogo, obtenemos también:

$$\int_{-X}^X I_2(x) dx < \epsilon h \left(2M + \int_{-X}^X |u_x^k(x)| dx \right).$$

Por tanto,

$$\int_{-X}^X \left| \frac{u^{k+1}(x) - u^k(x)}{h} \right| dx \leq \frac{2\epsilon h}{h\sqrt{\epsilon h}} \left(2M + \int_{-X}^X |u_x^k(x)| dx \right).$$

Teniendo en cuenta las hipótesis hechas sobre los parámetros h y ϵ , utilizando también (4.23)' ($kh \geq \alpha$), se llega finalmente a (4.24), donde L es una constante dependiente de α , X , δ , A y μ pero independiente de h y ϵ .

Observación: La segunda condición impuesta a los parámetros h y ϵ , junto con (4.12), implica que una elección válida del parámetro ϵ (que, en principio, quedaba libre) es $\epsilon = \alpha h$, con $\alpha \geq A^2$. En definitiva, para obtener las acotaciones hechas anteriormente, se han de cumplir las tres desigualdades que siguen:

1. $\sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} A \leq 1,$

2. $0 < h < 1,$

3. $\sqrt{\frac{\varepsilon}{h}} \leq \delta.$

■

4.3 Convergencia: Paso al Límite en la Ecuación

Seguidamente, demostraremos un resultado de convergencia de la sucesión $\{u_h\}$, construida a partir de las diferentes u^k . Para probar la convergencia de la sucesión (en realidad de una subsucesión), utilizaremos las acotaciones obtenidas en la Sección precedente, junto con un argumento de compacidad (se utiliza de forma fundamental la inyección compacta de $L^1 \cap VA$ en L^1 , cf. [18,51]). Una vez obtenida una subsucesión convergente, probaremos que su límite cumple las propiedades enunciadas en el Teorema 4.2.

En lo que sigue, suponemos que los parámetros h y ε están en las condiciones de la Observación que precede, de tal forma que se verifican los Lemas 4.3, 4.5, 4.8 y 4.9.

Lema 4.10 *Existe una subsucesión $\{u_{h_i}\}$ de $\{u_h\}$ que converge hacia una función $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ en el sentido siguiente: Dados $X > 0$, $t > 0$, y $T > 0$, se verifica*

$$\int_{-X}^X |u_{h_i}(x, t) - u(x, t)| dx \rightarrow 0, \quad (4.25)$$

$$\int_0^T \int_{-X}^X |u_{h_i}(x, t) - u(x, t)| dx dt \rightarrow 0, \quad (4.26)$$

cuando $i \rightarrow \infty$ (es decir, cuando $h_i \rightarrow 0$). Además, la función límite u verifica la acotación siguiente:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}, t > 0} |u(x, t)| \leq M.$$

Demostración: Sea $t > 0$. Para cada $X > 0$, de (4.14) y el Corolario 4.7 obtenemos que $\{u_h(\cdot, t)\}$ está acotada en $L^1(-X, X) \cap VA(-X, X)$; por tanto (utilizando que la inyección de $L^1(-X, X) \cap VA(-X, X)$ en $L^1(-X, X)$ es compacta), existe una subsucesión $u_{h'_i}(\cdot, t)$ que converge fuertemente en $L^1(-X, X)$ cuando h'_i converge a 0. En consecuencia, para t fijo, mediante un proceso "standard" de diagonalización, se puede extraer una subsucesión $u_{h''_i}(\cdot, t)$ que converge en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Sea ahora $\{t_m\}$ una sucesión densa y numerable en \mathbb{R}_+ . De nuevo utilizando un proceso de diagonalización, podemos extraer una subsucesión $\{u_{h_i}\}$ de $\{u_h\}$ que converge fuertemente en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ para cualquier t_m , $m = 1, 2, \dots$ cuando $i \rightarrow +\infty$.

Sea $u_i = u_{h_i}$; probaremos que la sucesión $\{u_i(\cdot, t)\}$ converge de hecho para cada t de \mathbb{R}_+ y que, por tanto, el límite u es una función definida en todo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Para probar esto, consideramos, para X y t fijos, las integrales

$$I_{ij}(X, t) = \int_{-X}^X |u_i(x, t) - u_j(x, t)| dx.$$

Demostraremos que $I_{ij}(X, t)$ tiende a cero cuando i, j tienden a ∞ , es decir que $\{u_i(\cdot, t)\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^1(-X, X)$, para cada X y cada $t > 0$.

Sea $\epsilon > 0$. Para cada τ en $\{t_m\}_{m \geq 1}$ se tiene que

$$I_{ij}(X, t) \leq \int_{-X}^X |u_i(x, t) - u_i(x, \tau)| dx + \int_{-X}^X |u_i(x, \tau) - u_j(x, \tau)| dx \\ + \int_{-X}^X |u_j(x, \tau) - u_j(x, t)| dx.$$

Supongamos τ elegido de modo que $|t - \tau| < \min(\epsilon/4L, t/2)$. En virtud del Lema 4.9,

$$\int_{-X}^X |u_i(x, t) - u_i(x, \tau)| dx = \left(\int_{-X}^X \left| \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, t^*) \right| dx \right) |t - \tau| \leq L|t - \tau| \leq \epsilon/4,$$

donde $t^* \in (t, \tau)$ y L depende de t, X, M, δ, A y μ , pero es independiente de i . Por idéntica razón, también se tiene que

$$\int_{-X}^X |u_j(x, \tau) - u_j(x, t)| dx \leq \epsilon/4.$$

Ahora bien, existe i_0 (dependiente de τ , i.e. de ϵ) tal que, si $i, j \geq i_0$, entonces

$$\int_{-X}^X |u_i(x, \tau) - u_j(x, \tau)| dx \leq \epsilon/2.$$

Luego existe i_0 tal que, cuando $i, j \geq i_0$, necesariamente $I_{ij}(X, t) \leq \epsilon$. Dado que lo anterior es cierto cualquiera que sea $\epsilon > 0$, hemos probado, como estaba previsto, que $I_{ij}(X, t) \rightarrow 0$ cuando $i, j \rightarrow \infty$.

Como consecuencia, $u_i(\cdot, t)$ converge fuertemente hacia una cierta función $u(\cdot, t)$ en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ para cualquier t positivo. Esto demuestra (4.25). Se observa además que la convergencia precedente es uniforme sobre los intervalos $[\alpha, +\infty)$, con $\alpha > 0$ (esto es consecuencia de la elección de la constante L en el Lema 4.9).

Usando el hecho de que, para cada $\alpha > 0$, $I_{ij}(X, t) \rightarrow 0$ uniformemente en $[\alpha, +\infty)$ cuando $i, j \rightarrow \infty$, es inmediato deducir que

$$\int_{\tau}^T I_{ij}(X, t) dt \rightarrow 0 \quad \text{si } i, j \rightarrow \infty,$$

cualesquiera que sean τ y T , con $0 < \tau < T < \infty$.

Fijemos a continuación $X > 0$ y $T > 0$ y probemos (4.26). Se observa que

$$\int_0^T \int_{-X}^X |u_i(x, t) - u_j(x, t)| dx dt \\ = \int_0^{\tau} \int_{-X}^X |u_i(x, t) - u_j(x, t)| dx dt + \int_{\tau}^T \int_{-X}^X |u_i(x, t) - u_j(x, t)| dx dt,$$

cualquiera que sea $\tau \in [0, T]$. Dado $\epsilon > 0$, elegimos en primer lugar $\tau < \epsilon/(8MX)$. Por el Corolario 4.4, se tiene entonces que

$$\int_0^\tau \int_{-X}^X |u_i(x, t) - u_j(x, t)| dx dt \leq \epsilon/2.$$

Para este τ , existe i_0 tal que, si $i, j \geq i_0$, entonces

$$\int_\tau^T \int_{-X}^X |u_i(x, t) - u_j(x, t)| dx dt \leq \epsilon/2.$$

Por tanto, fijado $\epsilon > 0$, existe i_0 tal que, cuando $i, j \geq i_0$, necesariamente

$$\int_0^T \int_{-X}^X |u_i(x, t) - u_j(x, t)| dx dt \leq \epsilon.$$

Evidentemente, esto prueba (4.26) y, además, que la función u es medible. Para probar que $\|u\|_{0, \infty; \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} \leq M$, tan sólo hay que recordar que la convergencia en L^1_{loc} implica la convergencia en casi todo de una subsucesión.

■

Como consecuencia del Lema 4.10, podemos enunciar un Corolario que implica convergencia puntual para una subsucesión de $\{u_h\}$:

Corolario 4.11 *Existe una subsucesión $\{u_{h_i}\}$ de $\{u_h\}$ y existe una función u perteneciente a $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ tales que*

1. $u_{h_i}(\cdot, t) \rightarrow u(\cdot, t)$ en $L^1_{loc}(\mathbb{R}) \quad \forall t > 0$,
2. $u_{h_i} \rightarrow u$ en $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$,
3. $u_{h_i}(x, t) \rightarrow u(x, t)$ para $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ c.p.d.

■

En el siguiente Lema, probaremos que u verifica la condición de entropía (4.3) que aparece en el enunciado del Teorema 4.2. Como puede comprobarse, la Demostración resulta sencilla a partir de los Corolarios 4.7 y 4.11:

Lema 4.12 *Sea u la función construida en el Lema 4.10. Entonces, u verifica la desigualdad de entropía*

$$\frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} < \frac{2E}{t} \quad \forall a > 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.27)$$

Demostración: Gracias al Corolario 4.7, se tiene que

$$\frac{u_h(x+a, t) - u_h(x, t)}{a} < \frac{2E}{t} \quad \forall a > 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por el Corolario 4.11, u_{h_i} converge puntualmente en casi todo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Por tanto, tomando límites en la expresión anterior cuando h_i tiende a 0, llegamos a que

$$\frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} < \frac{2E}{t} \quad \forall a > 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

que es lo que afirma el Lema. ■

Por último, probaremos un resultado en el que, imponiendo ciertas condiciones sobre las u_h^0 , se demuestra que u es solución del problema (4.1)–(4.2) (solución débil en el sentido (4.5)).

Lema 4.13 *Supongamos que, cualquiera que sea Φ en $C_0^3(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$, se verifica:*

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |u_{h_i}(x, 0) - u_0(x)| \Phi(x, 0) dx = 0. \tag{4.28}$$

Entonces, u verifica (4.5), es decir u es solución débil de (4.1)–(4.2).

Demostración: A partir de (4.7) obtenemos la siguiente expresión

$$u_h(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{h} \{ [(k+1)h - t]u^k(x) + (t - kh)u^{k+1}(x) \} \chi_{[kh, (k+1)h)}(t).$$

Aquí, $\chi_{[kh, (k+1)h)}$ es la función característica del intervalo $[kh, (k+1)h)$. De acuerdo con lo que vimos en la Sección 4.1, u_h está en $H^1(0, T; H^1(\mathbb{R}))$ para cada T finito y, además, se verifica (4.8):

$$\frac{\partial u_h}{\partial t}(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^{k+1}(x) - u^k(x)}{h} \chi_{[kh, (k+1)h)}(t).$$

Sea $\Phi \in C_0^3(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$. Gracias a (4.6), cuando $t \in [kh, (k+1)h)$ se tiene que

$$\frac{u^{k+1}(x) - u^k(x)}{h} - \varepsilon u_{xx}^{k+1} = -\frac{\partial}{\partial x} f(u^k),$$

igualdad que debe cumplirse en $H^{-1}(\mathbb{R})$. Como $\Phi(\cdot, t)$ está en $H^1(\mathbb{R})$, tenemos también que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{k+1}(x) - u^k(x)}{h} \Phi(x, t) dx - \varepsilon \int_{\mathbb{R}} u^{k+1}(x) \Phi_{xx}(x, t) dx - \int_{\mathbb{R}} f(u^k(x)) \Phi_x(x, t) dx = 0,$$

igualdad que se verifica para cualquier t en \mathbb{R} y cualquier $k \geq 0$. Multiplicando la expresión anterior por $\chi_{[kh, (k+1)h)}(t)$ e integrando en $(0, +\infty)$ respecto de t , resulta:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{k+1}(x) - u^k(x)}{h} \chi_{[kh, (k+1)h)}(t) \Phi(x, t) dx dt \\ & - \varepsilon \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u^{k+1}(x) \chi_{[kh, (k+1)h)}(t) \Phi_{xx}(x, t) dx dt \\ & - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} f(u^k(x)) \chi_{[kh, (k+1)h)}(t) \Phi_x(x, t) dx dt = 0. \end{aligned}$$

Estas desigualdades han de verificarse con Φ arbitrario en $C_0^3(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ y para cualquier $k \geq 1$. Sumando para los distintos valores de k , obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u_h}{\partial t}(x, t) \Phi(x, t) dx dt - \varepsilon \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{k=0}^\infty u^{k+1}(x) \chi_{[kh, (k+1)h)}(t) \right] \Phi_{xx}(x, t) dx dt \\ & - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{k=0}^\infty f(u^k(x)) \chi_{[kh, (k+1)h)}(t) \right] \Phi_x(x, t) dx dt = 0. \end{aligned}$$

Llevando a cabo una integración por partes en el primer término de la igualdad precedente, se llega a que

$$\begin{aligned} & - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u_h(x, t) \Phi_t(x, t) dx dt - \delta_1(h) - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} f(u_h(x, t)) \Phi_x(x, t) dx dt \\ & - \delta_2(h) - \int_{\mathbb{R}} u^0(x) \Phi(x, 0) dx = 0, \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde las cantidades $\delta_1(h)$ y $\delta_2(h)$ están dadas como sigue:

$$\begin{aligned} \delta_1(h) &= \varepsilon \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{k=0}^\infty u^{k+1}(x) \chi_{[kh, (k+1)h)}(t) \right] \Phi_{xx}(x, t) dx dt, \\ \delta_2(h) &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{k=0}^\infty (f(u^k(x)) - f(u_h(x, t))) \chi_{[kh, (k+1)h)}(t) \right] \Phi_x(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

A continuación, vamos a probar que tanto $\delta_1(h)$ como $\delta_2(h)$ tienden a cero cuando h tiende a 0. En lo que se refiere a $\delta_1(h)$, teniendo en cuenta el Corolario 4.4 y la forma de elegir los parámetros ε y h , deducimos que

$$|\delta_1(h)| \leq |\text{Sop}(\Phi)| M \max_{(x,t) \in \text{Sop}(\Phi)} |\Phi_{xx}(x, t)| \varepsilon \leq Ch,$$

donde C es una constante que depende de M , Φ y f pero es independiente de h . Veamos ahora cómo podemos acotar δ_2 . Suponemos que $\text{sop}(\Phi)$ está contenido en el rectángulo $[-X, X] \times [0, T]$, donde X y T son cantidades positivas y también que $[0, T]$ está contenido en el intervalo $[0, (N+1)h]$. Entonces:

$$\delta_2(h) = \int_0^T \int_{-X}^X \left\{ \sum_{k=0}^N [f(u^k) - f(u_h)] \chi_{[kh, (k+1)h)}(t) \right\} \Phi_x(x, t) dx dt,$$

y, de aquí, obtenemos la desigualdad

$$|\delta_2(h)| \leq \int_0^T \int_{-X}^X \left\{ \sum_{k=0}^N |f(u^k) - f(u_h)| \chi_{[kh, (k+1)h)}(t) \right\} |\Phi_x(x, t)| dx dt.$$

Sea $t \in [kh, (k+1)h)$; para cualquier $x \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$|f(u_h(x, t)) - f(u^k(x))| \leq A |u^{k+1}(x) - u^k(x)| = Ah \left| \frac{\partial u_h}{\partial t}(x, t) \right| \chi_{[kh, (k+1)h)}(t),$$

de donde, volviendo a la expresión de δ_2 , obtenemos la acotación

$$\begin{aligned} |\delta_2(h)| &\leq Ah \int_0^T \int_{-X}^X \left| \frac{\partial u_h}{\partial t}(x, t) \right| |\Phi_x(x, t)| dx dt \\ &\leq Ah \max_{\text{Sop}(\Phi)} |\Phi_x(x, t)| \int_\tau^T \int_{-X}^X \left| \frac{\partial u_h}{\partial t}(x, t) \right| dx dt \\ &\quad + Ah \max_{\text{Sop}(\Phi)} |\Phi_x(x, t)| \int_0^\tau \int_{-X}^X \left| \frac{\partial u_h}{\partial t}(x, t) \right| dx dt, \end{aligned}$$

donde $\tau \in [0, T]$ es arbitrario. En virtud de los Lemas 4.3 y 4.9, resulta que

$$|\delta_2(h)| \leq [A \max_{\text{Sop}(\Phi)} |\Phi_x| L_\tau (T - \tau)] h + [4AXM \max_{\text{Sop}(\Phi)} |\Phi_x|] \tau,$$

donde L_τ depende de τ pero es independiente de h . Es claro que estas desigualdades, válidas para cada τ en $[0, T]$, prueban que $\delta_2(h) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.

Volvamos de nuevo a (4.29) y escribamos esta expresión para cada h de $\{h_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u_i(x, t) \Phi_t(x, t) dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} f(u_i(x, t)) \Phi_x(x, t) dx dt \\ + \int_{\mathbb{R}} u^0(x) \Phi(x, 0) dx + \delta_1(h_i) + \delta_2(h_i) = 0 \end{aligned} \tag{4.29}'$$

para cada $\Phi \in C_0^3(\mathbb{R} \times [0, \infty))$. Recordemos que

$$u_i \rightarrow u \quad \text{en } L_{loc}^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty)) \quad \text{y c.p.d. en } \mathbb{R} \times [0, \infty).$$

Por tanto, la primera integral de (4.29)' converge hacia

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u(x, t) \Phi_t(x, t) dx dt.$$

En relación con la segunda integral, podemos aplicar el Teorema de Lebesgue, ya que $f(u_i)$ converge a $f(u)$ en casi todo $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ y, por otra parte, las $f(u_i)$ están acotadas

por una función de $L^1(\text{Sop}(\Phi))$. Por último, para la tercera integral, tenemos en cuenta las hipótesis del Lema. Tomando límites cuando $i \rightarrow +\infty$, obtenemos:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbf{R}} u(x, t) \Phi_t(x, t) dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}} f(u(x, t)) \Phi_x(x, t) dx dt \\ + \int_{\mathbf{R}} u_0(x) \Phi(x, 0) dx = 0 \quad \forall \Phi \in C_0^3(\mathbf{R} \times [0, \infty)).$$

En realidad, la expresión anterior es cierta para cualquier Φ de $C_0^1(\mathbf{R} \times [0, \infty))$, ya que en las integrales sólo aparecen derivadas de primer orden de Φ . Por tanto, u es solución débil de la ley de conservación escalar (4.1)–(4.2). ■

La elección de u^0 está sujeta a tres restricciones: En primer lugar, debe verificar la hipótesis (4.28) del Lema anterior; en segundo lugar, debe pertenecer a $L^2(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R})$; finalmente, debe tenerse $\|u^0\|_{0, \infty; \mathbf{R}} \leq M$. Una posible elección está dada por:

$$u^0(x) = u_0(x) \chi_{(-\frac{1}{h}, \frac{1}{h})}(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Aplicando el Lema 4.9, queda probada la existencia de una solución débil de (4.1)–(4.2) que, además, verifica la condición de entropía (4.3) y también la convergencia en el sentido del Corolario 4.11 de las u_h . Utilizando resultados bien conocidos (cf. e.g. el Teorema 1 de [42]), resulta que u es la única solución débil de (4.1)–(4.2) que cumple (4.3) y, por otra parte, se verifica el apartado c) del Teorema 4.2. Gracias a la unicidad de la solución construida, se tiene que toda la sucesión $\{u_h\}_{h>0}$ converge (en el sentido del Lema 4.10) hacia la solución u de (4.1)–(4.2) y no sólo una subsucesión.

Capítulo 5

Leyes Escalares de Conservación en Varias Variables Espaciales

5.1 Introducción. Definición del Esquema

En este Capítulo estamos interesados en la existencia y unicidad de solución de la ley escalar de conservación

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(u) = 0 \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \quad (5.1)$$

donde N es un entero ≥ 2 , u es una función escalar y las f_i verifican $f_i(0) = 0$ y son derivables en todo \mathbb{R} . Junto con la ecuación anterior, consideramos la condición inicial:

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (5.2)$$

donde u_0 es una función dada. Más tarde, impondremos sobre u_0 adecuadas propiedades de regularidad.

Varios resultados de existencia han sido obtenidos para (5.1)–(5.2) (cf. [27], [50], [7], etc.). Destacamos principalmente el trabajo de Kružkov [27], donde se prueba un resultado de existencia de solución débil para una ley de conservación escalar utilizando el método de viscosidad; también se demuestra la unicidad de solución débil dentro de la clase de funciones que verifican una apropiada condición de entropía.

Aquí presentamos una nueva demostración de la existencia de solución generalizada. Para ello, seguimos un esquema parecido al que se aplicó en el caso unidimensional. De nuevo, se introduce una discretización de tipo diferencias finitas para el tratamiento del término u_t y se usa ésta en combinación con el método de viscosidad. Esto hace que aparezcan dos parámetros positivos, h y ε , destinados a converger a cero. Para

h positivo dado, construimos la correspondiente solución aproximada u_h y deducimos estimaciones “a priori” independientes de h y ε que nos permiten, posteriormente, pasar al límite cuando h tiende a 0.

El resultado que probaremos es el siguiente:

Teorema 5.1 *Supongamos $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap VA(\mathbb{R}^N)$ y $f_i \in C^1(\mathbb{R})$ para $1 \leq i \leq N$. Entonces el problema (5.1)–(5.2) admite al menos una solución débil*

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^N \cap \mathbb{R}_+) \cap C^0([0, T]; L^1(\mathbb{R}^N))$$

para cada $T > 0$. Además, $u(\cdot, t) \in VA(\mathbb{R}^N)$ y se tiene:

$$\|u(\cdot, t)\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N} \leq \|u_0\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N} \quad \forall t > 0, \quad (5.3)$$

$$VT_{\mathbb{R}^N}(u(\cdot, t)) \leq VT_{\mathbb{R}^N}(u_0) \quad \forall t > 0, \quad (5.4)$$

$$\|u(\cdot, t_2) - u(\cdot, t_1)\|_{0,1;\Omega} \leq C VT_{\mathbb{R}^N}(u_0)(t_2 - t_1) \quad \text{si } t_2 > t_1, \quad (5.5)$$

$$\|u(\cdot, t)\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \leq \|u_0\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \quad \forall t > 0, \quad (5.6)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) dx \quad \forall t > 0. \quad (5.7)$$

Por último, si v es la solución asociada a v_0 que proporciona este mismo Teorema y $\|v_0\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N} \leq \|u_0\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N}$, entonces

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \leq \|u_0 - v_0\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \quad \forall t \geq 0. \quad (5.8)$$

■

A partir de (5.8) se deduce que la solución construida mediante el Teorema 5.1 es única, pero cabe la posibilidad de que exista otra solución que no satisfaga el Teorema. Por otra parte, nótese que (5.8) implica dependencia continua (estabilidad) respecto al dato inicial. Para seleccionar la única solución débil físicamente relevante, es necesario un principio adicional: la condición de entropía (cf. [32]).

El Capítulo queda estructurado en tres Secciones. En la primera, describimos y analizamos el esquema que se ha seguido para construir las soluciones aproximadas u_h . En la segunda Sección, obtendremos las estimaciones “a priori” necesarias para poder tomar límites. Finalmente, en la Sección 5.3, terminaremos la Demostración del Teorema 5.1.

Sea $\{\zeta_h\}_{h>0}$ una sucesión regularizante. Para cada $h > 0$, consideramos la sucesión $\{kh\}$, con $k \in \mathbb{N}$. Definimos las funciones $u^{k,i}$ como sigue:

1. $u^{0,0} = u_0 * \zeta_h$.
2. Para $k \geq 0$ y $u^{k,0}$ dadas, $u^{k,i}$ es la solución de

$$\begin{cases} u^{k,i} \in H^1(\mathbb{R}^N), \\ \frac{u^{k,i} - u^{k,i-1}}{h} - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u^{k,i} + \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(u^{k,i-1}) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (5.9)$$

para $1 \leq i \leq N$. A continuación, tomamos $u^{k+1,0} = u^{k,N}$.

Aquí, ε es un parámetro positivo al que más abajo se le exigirá una serie de propiedades. Aunque las funciones $u^{k,i}$, $k \geq 0$, $1 \leq i \leq N$, dependen de h y ε , por simplicidad en la notación, se han suprimido h y ε como subíndices. Naturalmente, (5.9) debe ser observado como un problema diferencial en una sola variable (x_i), con las $N-1$ restantes variables (que denotaremos por x'_i) actuando como parámetros.

En primer lugar, analizaremos si el problema (5.9) está bien planteado y si admite solución. Para ello, utilizaremos los resultados siguientes siguientes:

Lema 5.2 *Sea u_0 una función de $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap VA(\mathbb{R}^N)$. Entonces, para cada $m \geq 1$, se tiene que $u^{0,0} \in H^m(\mathbb{R}^N)$; además,*

$$\|u^{0,0}\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \leq \|u_0\|_{0,1;\mathbb{R}^N}, \quad (5.10)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^{0,0}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) dx, \quad (5.11)$$

$$\|u^{0,0}\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N} \leq \|u_0\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N}, \quad (5.12)$$

$$\|\nabla u^{0,0}\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \leq VT_{\mathbb{R}^N}(u_0). \quad (5.13)$$

■

La Demostración del Lema es “standard” y se basa en propiedades bien conocidas del producto de convolución y, en particular, de las sucesiones regularizantes.

En lo que sigue, utilizaremos la notación

$$M = \|u_0\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N}, \quad (5.14)$$

$$A = \max_{1 \leq i \leq N} \max_{|u| \leq M} |f'_i(u)|. \quad (5.15)$$

Lema 5.3 *Sean $h, \varepsilon > 0$ tales que*

$$\sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} A \leq 1. \quad (5.16)$$

Entonces, cualesquiera que sean k e i , (5.9) es un problema bien planteado, su única solución $u^{k,i}$ pertenece a $L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y, además, se verifica la acotación

$$\|u^{k,i}\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N} \leq M. \quad (5.17)$$

Demostración: Razonaremos por inducción. Por el Lema 5.2, $u^{0,0}$ está en $L^2(\mathbb{R}^N)$; por tanto, $f_1(u^{0,0}(\cdot, x'_1))$ está en $L^2(\mathbb{R})$ y $\frac{\partial}{\partial x_1} f_1(u^{0,0}(\cdot, x'_1))$ está en $H^{-1}(\mathbb{R})$. Se tiene así que el problema (5.9) con $k = 0$ e $i = 1$, tiene una única solución $u^{0,1}(\cdot, x'_1)$, que está en $H^1(\mathbb{R})$; además,

$$\begin{aligned} u^{0,1}(x_1, x'_1) &= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_1-s)} [u^{0,0}(s, x'_1) + u^{0,0}(2x_1 - s, x'_1)] ds \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{x_1} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_1-s)} [f_1(u^{0,0}(s, x'_1)) - f_0(u^{0,0}(2x_1 - s, x'_1))] ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_1-s)} [1 + \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f'_1(\theta_1(s))] u^{0,0}(s, x'_1) ds \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_1-s)} [1 - \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f'_1(\theta_1(s))] u^{0,0}(2x_1 - s, x'_1) ds, \end{aligned}$$

donde $\theta_1(s)$ está entre $u^{0,0}(s, x'_1)$ y $u^{0,0}(2x_1 - s, x'_1)$. Por tanto, $|\theta_1(s)| \leq M$ y podemos asegurar que los corchetes anteriores son positivos sin más que tener en cuenta (5.16). Así, también se cumple que $u^{0,1} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y

$$\begin{aligned} |u^{0,1}(x_1, x'_1)| &\leq \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_1-s)} [1 + \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f'_1(\theta_1(s))] |u^{0,0}(s, x'_1)| ds \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_1-s)} [1 - \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f'_1(\theta_1(s))] |u^{0,0}(2x_1 - s, x'_1)| ds \\ &\leq \frac{M}{\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_1-s)} ds = M. \end{aligned}$$

Problemas a continuación que $u^{0,1} \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Se observa que

$$\begin{aligned} |u^{0,1}(x_1, x'_1)| &\leq \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_1-s)} [1 + \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f'_1(\theta_1(s))] |u^{0,0}(s, x'_1)| ds \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{x_1}^{\infty} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(s-x_1)} [1 - \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f'_1(\theta_1(2x_1 - s))] |u^{0,0}(s, x'_1)| ds. \end{aligned}$$

De nuevo teniendo en cuenta (5.16), obtenemos

$$|u^{0,1}(x_1, x'_1)| \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_1-s)} |u^{0,0}(s, x'_1)| ds$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon h}} \int_{x_1}^{\infty} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(s-x_1)} |u^{0,0}(s, x'_1)| ds \\
& \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon h}} \left(\int_{-\infty}^{x_1} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_1-s)} ds \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{x_1} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_1-s)} |u^{0,0}(s, x'_1)|^2 ds \right)^{1/2} \\
& + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon h}} \left(\int_{x_1}^{\infty} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(s-x_1)} ds \right)^{1/2} \left(\int_{x_1}^{\infty} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(s-x_1)} |u^{0,0}(s, x'_1)|^2 ds \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Si ahora elevamos al cuadrado e integramos respecto de x_1 , se llega a que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u^{0,1}(x_1, x'_1)|^2 dx_1 & \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x_1} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_1-s)} |u^{0,0}(s, x'_1)|^2 ds \right) dx_1 \\
& + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{x_1}^{\infty} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(s-x_1)} |u^{0,0}(s, x'_1)|^2 ds \right) dx_1.
\end{aligned}$$

Intercambiando subíndices e integrando respecto de x_1 , se deduce que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u^{0,1}(x_1, x'_1)|^2 dx_1 \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |u^{0,0}(s, x'_1)|^2 ds,$$

de donde, integrando en el resto de variables, llegamos a que

$$\|u^{0,1}\|_{0;\mathbb{R}^N} \leq \sqrt{2} \|u^{0,0}\|_{0;\mathbb{R}^N}.$$

Esto prueba que $u^{0,1} \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Supongamos ahora que $u^{k,i-1} \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y que se verifica la cota

$$\|u^{k,i-1}\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N} \leq M.$$

Utilizando un razonamiento análogo al precedente, no es difícil probar que (5.9) está bien planteado. Dado que la única solución $u^{k,i}$ verifica la identidad

$$\begin{aligned}
u^{k,i}(x) & = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_i} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_i-s)} [u^{k,i-1}(s, x'_i) + u^{k,i-1}(2x_i - s, x'_i)] ds \\
& + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{x_i} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_i-s)} [f_i(u^{k,i-1}(s, x'_i)) - f_i(u^{k,i-1}(2x_i - s, x'_i))] ds,
\end{aligned} \tag{5.18}$$

resulta que $u^{k,i} \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y, además, se tiene (5.17). ■

Una vez definidos los $u^{k,i}$, vamos a dar la expresión de la correspondiente solución aproximada de (5.1)–(5.2):

$$u_h(x, t) = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \{[(k+1)h - t]u^{k,0}(x) + (t - kh)u^{k+1,0}(x)\} \chi_{[kh, (k+1)h)}(t) \tag{5.19}$$

Es inmediato que $u_h \in H^1(0, T; L^2(\mathbb{R}^N))$ para cualquier T finito; además, se verifica la igualdad

$$\frac{\partial u_h}{\partial t}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{k+1,0}(x) - u^{k,0}(x)}{h} \chi_{[kh, (k+1)h)}(t) \quad \text{para } (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \text{ c.p.d.} \quad (5.20)$$

El procedimiento que seguiremos para probar la existencia de solución de (5.1)–(5.2) es análogo al seguido en el Capítulo anterior: Estableceremos una serie de acotaciones “a priori” de las soluciones aproximadas y, aplicando el método de compacidad, extraeremos una sucesión convergente. Por cuestiones de notación, hemos optado por suprimir el subíndice ε en la definición de u_h .

5.2 Algunos Resultados de Carácter Técnico

En primer lugar, como consecuencia inmediata del Lema 5.3, obtenemos una acotación uniforme sobre las funciones u_h :

Corolario 5.4 Sean $h, \varepsilon > 0$ tales que se tiene (5.16). Entonces $u_h(\cdot, t)$ está en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ para cualquier $t \geq 0$ y, además,

$$\|u_h(\cdot, t)\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N} \leq M. \quad (5.21)$$

■

Lema 5.5 Sean $h, \varepsilon > 0$ tales que se tiene (5.16) y sea $u^{0,0}$ la función definida en la Sección 5.1. Entonces, para cada $k \geq 0$ y cada i que verifica $1 \leq i \leq N$, la función $u^{k,i} \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ y, además,

$$\|u^{k,i}\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \leq \|u^{k,i-1}\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \quad (5.22)$$

$$\left\| \frac{\partial u^{k,i}}{\partial x_j} \right\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \leq \left\| \frac{\partial u^{k,i-1}}{\partial x_j} \right\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \quad \forall j : 1 \leq j \leq N. \quad (5.23)$$

Por último, si $v_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap VA(\mathbb{R}^N)$ con $\|v_0\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N} \leq \|u_0\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N}$ y las $v^{k,i}$ son las funciones asociadas a v_0 , construidas como en la Sección 5.1, entonces

$$\|u^{k,i} - v^{k,i}\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \leq \|u^{k,i-1} - v^{k,i-1}\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \quad (5.24)$$

Demostración: En primer lugar, veremos que se verifica la acotación (5.23) para $k = 0$ e $i = 1$. Haciendo un sencillo cambio de variables en (5.18), podemos escribir

$$\begin{aligned} u^{0,1}(x_1, x'_1) &= \int_0^\infty e^{-t} [u^{0,0}(x_1 - \sqrt{\varepsilon h} t, x'_1) + u^{0,0}(x_1 + \sqrt{\varepsilon h} t, x'_1)] dt \\ &+ \frac{\sqrt{h}}{2\sqrt{\varepsilon}} \int_0^\infty e^{-t} [f_1(u^{0,0}(x_1 - \sqrt{\varepsilon h} t, x'_1)) - f_1(u^{0,0}(x_1 + \sqrt{\varepsilon h} t, x'_1))] dt. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Gracias al Lema 5.2, se tiene que $u^{0,0}$ está en $C^1(\mathbb{R}^N)$; por tanto, también se tiene que $u^{0,1} \in C^1(\mathbb{R}^N)$ y que, para cada j entre 1 y N ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{0,1}}{\partial x_j}(x) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} \left[\frac{\partial u^{0,0}}{\partial x_j}(x_1 - \sqrt{\varepsilon h} t, x'_1) + \frac{\partial u^{0,0}}{\partial x_j}(x_1 + \sqrt{\varepsilon h} t, x'_1) \right] dt \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} \int_0^\infty e^{-t} \left[f'_1(u^{0,0}) \frac{\partial u^{0,0}}{\partial x_j}(x_1 - \sqrt{\varepsilon h} t, x'_1) - f'_1(u^{0,0}) \frac{\partial u^{0,0}}{\partial x_j}(x_1 + \sqrt{\varepsilon h} t, x'_1) \right] dt \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la hipótesis (5.16), podemos escribir que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u^{0,1}}{\partial x_j}(x) \right| &\leq \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} [1 + \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f_1'(u^{0,0}(x_1 + \sqrt{\varepsilon h} t, x_1))] \left| \frac{\partial u^{0,0}}{\partial x_j}(x_1 - \sqrt{\varepsilon h} t, x_1) \right| dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} [1 - \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f_1'(u^{0,0}(x_1 - \sqrt{\varepsilon h} t, x_1))] \left| \frac{\partial u^{0,0}}{\partial x_j}(x_1 + \sqrt{\varepsilon h} t, x_1) \right| dt. \end{aligned}$$

Si ahora deshacemos el cambio de variables introducido para pasar de (5.18) a (5.25) e integramos con respecto a x_1 , obtenemos una nueva acotación:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} \left| \frac{\partial u^{0,1}}{\partial x_j} \right| dx_1 &\leq \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{-\infty}^{x_1} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_1-s)} [1 + \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f_1'(u^{0,0}(s, x_1))] \left| \frac{\partial u^{0,0}}{\partial x_j}(s, x_1) \right| ds \right) dx_1 \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{x_1}^{\infty} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(s-x_1)} [1 - \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f_1'(u^{0,0}(s, x_1))] \left| \frac{\partial u^{0,0}}{\partial x_j}(s, x_1) \right| ds \right) dx_1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{\mathbf{R}} \left(\int_s^\infty e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_1-s)} dx_1 \right) [1 + \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f_1'(u^{0,0}(s, x_1))] \left| \frac{\partial u^{0,0}}{\partial x_j}(s, x_1) \right| ds \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{-\infty}^s e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(s-x_1)} dx_1 \right) [1 - \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f_1'(u^{0,0}(s, x_1))] \left| \frac{\partial u^{0,0}}{\partial x_j}(s, x_1) \right| ds \\ &= \int_{\mathbf{R}} \left| \frac{\partial u^{0,0}}{\partial x_j}(s, x_1) \right| ds. \end{aligned}$$

Integrando respecto de las otras variables, deducimos la acotación (5.23) para $k = 0$ e $i = 1$. Para el resto de los valores de k e i , un razonamiento análogo — junto con el argumento de inducción habitual — permite probar que (5.23) continúa siendo cierto.

Probemos a continuación (5.24). Sea v_0 en las condiciones del Lema. De la fórmula (5.18) para $k = 0$ e $i = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} u^{0,1}(x_1, x_1') &= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_1-s)} u^{0,0}(s, x_1') ds + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{x_1}^{\infty} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(s-x_1)} u^{0,0}(s, x_1') ds \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{x_1} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_1-s)} f_1(u^{0,0}(s, x_1')) ds - \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x_1}^{\infty} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(s-x_1)} f_1(u^{0,0}(s, x_1')) ds. \end{aligned}$$

Si ponemos $w^{k,i} = u^{k,i} - v^{k,i}$, de la fórmula anterior se sigue que

$$\begin{aligned}
 w^{0,1}(x_1, x'_1) &= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_1-s)} w^{0,0}(s, x'_1) ds \\
 &+ \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{x_1}^{\infty} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(s-x_1)} w^{0,0}(s, x'_1) ds \\
 &+ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{x_1} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_1-s)} f'_1(\theta^0(s, x'_1)) w^{0,0}(s, x'_1) ds \\
 &- \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x_1}^{\infty} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(s-x_1)} f'_1(\theta^0(s, x'_1)) w^{0,0}(s, x'_1) ds. \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_1-s)} \left[1 + \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f'_1(\theta^0(s, x'_1)) \right] w^{0,0}(s, x'_1) ds \\
 &- \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{x_1}^{\infty} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(s-x_1)} \left[1 - \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f'_1(\theta^0(s, x'_1)) \right] w^{0,0}(s, x'_1) ds,
 \end{aligned}$$

donde $\theta^0(s, x'_1)$ está entre $u^{0,0}(s, x'_1)$ y $v^{0,0}(s, x'_1)$ y $|\theta^0(s, x'_1)| \leq M$. Si tomamos valor absoluto e integramos respecto a x_1 , obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{R}} |w^{0,1}| dx_1 &\leq \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{-\infty}^{x_1} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_1-s)} \left[1 + \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f'_1(\theta^0(s, x'_1)) \right] |w^{0,0}(s, x'_1)| ds \right) dx_1 \\
 &+ \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{x_1}^{\infty} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(s-x_1)} \left[1 - \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f'_1(\theta^0(s, x'_1)) \right] |w^{0,0}(s, x'_1)| ds \right) dx_1
 \end{aligned}$$

Si ahora intercambiamos las variables de integración, se llega a la acotación

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{R}} |w^{0,1}| dx_1 &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \left[1 + \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f'_1(\theta^0(s, x'_1)) \right] |w^{0,0}(s, x'_1)| ds \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \left[1 - \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f'_1(\theta^0(s, x'_1)) \right] |w^{0,0}(s, x'_1)| ds \\
 &= \int_{\mathbf{R}} |w^{0,0}| ds.
 \end{aligned}$$

Integrando en el resto de variables se tiene la demostración de (5.24) para $k = 0$ e $i = 1$. Para demostrar el caso general, basta de nuevo razonar por inducción.

La desigualdad (5.22) se obtiene de (5.24) para $v_0 = 0$. Esto termina la Demostración del Lema. ■

Como consecuencia inmediata de este resultado, obtenemos dos estimaciones “a priori” sobre las funciones u_h y una versión “discreta” de la desigualdad (5.8):

Corolario 5.6 Sean $h, \varepsilon, u^{0,0}$ y $v^{0,0}$ como en el Lema 5.5. Entonces $u_h(\cdot, t) \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ para cualquier t positivo y, además,

$$\|u_h(\cdot, t)\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \leq \|u_0\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \quad (5.26)$$

$$\|\nabla u_h(\cdot, t)\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \leq VT_{\mathbb{R}^N}(u_0). \quad (5.27)$$

Si v_h es la función construida como en la Sección 5.1 a partir de v_0 , entonces

$$\|u_h(\cdot, t) - v_h(\cdot, t)\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \leq \|u_0 - v_0\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \quad \forall t > 0. \quad (5.28)$$

■

El resultado que sigue nos permitirá demostrar más adelante que (al menos una subsucesión de) $\{u_h(\cdot, t)\}$, converge hacia una función que es Lipschitziana respecto de la variable t .

Lema 5.7 Sean h, ε y $u^{0,0}$ como en el Lema 5.5 y tales que $\varepsilon/h \leq \delta$, siendo δ una constante. Entonces, cualesquiera que sean $k \geq 0$ e i verificando $1 \leq i \leq N$, se tiene:

$$\left\| \frac{u^{k,i} - u^{k,i-1}}{h} \right\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \leq 2\delta \left\| \frac{\partial u^{k,i-1}}{\partial x_i} \right\|_{0,1;\mathbb{R}^N}. \quad (5.29)$$

Demostración: Para probar (5.29), partimos de la expresión (5.18), obtenida en la Sección anterior. Si restamos $u^{k,i-1}$ de $u^{k,i}$ y dividimos por h , obtenemos la identidad

$$\begin{aligned} & \frac{u^{k,i}(x) - u^{k,i-1}(x)}{h} \\ &= \frac{1}{2h\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_i} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_i-s)} [u^{k,i-1}(s, x'_i) - 2u^{k,i-1}(x_i, x'_i) + u^{k,i-1}(2x_i - s, x'_i)] ds \\ & \quad + \frac{1}{2\varepsilon h} \int_{-\infty}^{x_i} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_i-s)} f'_i(\theta(x_i, s)) [u^{k,i-1}(s, x'_i) + u^{k,i-1}(2x_i - s, x'_i)] ds, \end{aligned}$$

donde $\theta(x_i, s)$ está entre $u^{k,i-1}(s, x'_i)$ y $u^{k,i-1}(2x_i - s, x'_i)$. Si tomamos ahora valores absolutos, se deduce que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{u^{k,i}(x) - u^{k,i-1}(x)}{h} \right| \\ & \leq \frac{1}{2h\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_i} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_i-s)} [1 + \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f'_i(\theta(x_i, s))] |u^{k,i-1}(s, x'_i) - u^{k,i-1}(x_i, x'_i)| ds \\ & \quad + \frac{1}{2h\sqrt{\varepsilon h}} \int_{-\infty}^{x_i} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_i-s)} [1 - \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f'_i(\theta(x_i, s))] |u^{k,i-1}(2x_i - s, x'_i) - u^{k,i-1}(x_i, x'_i)| ds. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (5.16), podemos acotar los corchetes $[1 \pm \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} f'_i(\theta(x_i, s))]$ por 2; por tanto,

$$\left| \frac{u^{k,i}(x) - u^{k,i-1}(x)}{h} \right| \leq \frac{1}{h\sqrt{\varepsilon h}} (I_1(x) + I_2(x)), \quad (5.30)$$

donde

$$I_1(x) = \int_{-\infty}^{x_i} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_i-s)} |u^{k,i-1}(s, x'_i) - u^{k,i-1}(x_i, x'_i)| ds,$$

$$I_2(x) = \int_{-\infty}^{x_i} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_i-s)} |u^{k,i-1}(2x_i - s, x'_i) - u^{k,i-1}(x_i, x'_i)| ds.$$

Veamos cómo podemos acotar I_1 e I_2 . Gracias al Lema 5.5, cualesquiera que sean k e i , se tiene que $u^{k,i} \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$. Luego la diferencia

$$u^{k,i-1}(s, x'_i) - u^{k,i-1}(x_i, x'_i)$$

puede ser escrita como sigue:

$$u^{k,i-1}(s, x'_i) - u^{k,i-1}(x_i, x'_i) = \int_{x_i}^s \frac{\partial u^{k,i-1}}{\partial x_i}(\sigma, x'_i) d\sigma.$$

Llevando esta igualdad a la expresión de I_1 , obtenemos:

$$\begin{aligned} I_1(x) &\leq \int_{-\infty}^{x_i} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_i-s)} \left(\int_s^{x_i} \left| \frac{\partial u^{k,i-1}}{\partial x_i}(\sigma, x'_i) \right| d\sigma \right) ds \\ &= \int_{-\infty}^{x_i} \left(\int_{-\infty}^{\sigma} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_i-s)} ds \right) \left| \frac{\partial u^{k,i-1}}{\partial x_i}(\sigma, x'_i) \right| d\sigma \\ &= \sqrt{\varepsilon h} \int_{-\infty}^{x_i} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_i-\sigma)} \left| \frac{\partial u^{k,i-1}}{\partial x_i}(\sigma, x'_i) \right| d\sigma. \end{aligned}$$

Si integramos en la expresión anterior respecto de la variable x_i y cambiamos el orden de las variables de integración, tendremos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} I_1(x_i, x'_i) d\xi &\leq \sqrt{\varepsilon h} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\sigma}^{\infty} e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_i-\sigma)} dx_i \right) \left| \frac{\partial u^{k,i-1}}{\partial x_i}(\sigma, x'_i) \right| d\sigma \\ &= \varepsilon h \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u^{k,i-1}}{\partial x_i}(\sigma, x'_i) \right| d\sigma. \end{aligned}$$

Integrando en el resto de variables, también es cierto que

$$\int_{\mathbb{R}^N} I_1(x) dx \leq \varepsilon h \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial u^{k,i-1}}{\partial x_i}(x) \right| dx.$$

Una acotación idéntica se obtiene si se repite el mismo razonamiento para $I_2(x)$. Llevando las dos desigualdades a (5.30), resulta que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{u^{k,i}(x) - u^{k,i-1}(x)}{h} \right| dx \leq \frac{2\varepsilon h}{h\sqrt{\varepsilon h}} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial u^{k,i-1}}{\partial x_i}(x) \right| dx,$$

de donde

$$\frac{\|u^{k,i}(x) - u^{k,i-1}(x)\|_{0,1;\mathbb{R}^N}}{h} \leq 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{h}} \left\| \frac{\partial u^{k,i-1}}{\partial x_i} \right\|_{0,1;\mathbb{R}^N},$$

que es justamente lo que buscábamos probar. ■

Como consecuencia del Lema, se obtiene una estimación de $\frac{\partial u_h}{\partial t}$:

Corolario 5.8 Sean h, ε y $u^{0,0}$ en las condiciones precedentes. Entonces, para cualquier t positivo, se tiene que

$$\left\| \frac{\partial u_h}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \leq C VT_{\mathbb{R}^N}(u_0), \quad (5.31)$$

donde C es una constante independiente de h .

Demostración: Si suponemos que t está en el intervalo $(kh, (k+1)h)$, se tiene que

$$\frac{\partial u_h(x, t)}{\partial t} = \frac{u^{k+1,0}(x) - u^{k,0}(x)}{h}$$

y, gracias a los Lemas precedentes,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_h(\cdot, t)}{\partial t} \right\|_{0,1;\mathbb{R}^N} &\leq \sum_{i=1}^N \left\| \frac{u^{k,i} - u^{k,i-1}}{h} \right\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \leq 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{h}} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u^{k,i-1}}{\partial x_i} \right\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \\ &\leq 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{h}} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u^{0,0}}{\partial x_i} \right\|_{0,1;\mathbb{R}^N} = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{h}} \|\nabla u^{0,0}\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \leq 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{h}} VT_{\mathbb{R}^N}(u_0). \end{aligned}$$

Esto demuestra el Corolario. ■

Observación: Combinando las condiciones $\sqrt{h/\varepsilon}A \leq 1$ y $\sqrt{\varepsilon/h} \leq \delta$, que han sido impuestas a los parámetros h y ε , obtenemos que en la práctica ε debe ser proporcional a h , i.e. $\varepsilon = Kh$, siendo $K > 0$ una constante. El Lema 5.7 parece indicar que “la mejor constante” es $K = A^2$. Con esta elección de K , la desigualdad (5.31) puede ser escrita como sigue:

$$\left\| \frac{\partial u_h}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \leq 2A VT_{\mathbb{R}^N}(u_0) \quad \forall t \geq 0. \quad (5.31)'$$

Para terminar esta Sección, probaremos que las integrales respecto de la variable x de la función $u_h(\cdot, t)$ son independientes de t y de h .

Lema 5.9 Sea $u^{0,0}$ en las condiciones precedentes. Entonces, cualesquiera que sean $k \geq 0$ e i verificando $1 \leq i \leq N$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^{k,i}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} u^{k,i-1}(x) dx. \quad (5.32)$$

Demostración: De nuevo partimos de (5.18). Si en esta expresión integramos respecto de x_i y realizamos un cambio de orden en la integración iterada, resulta que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{R}} u^{k,i}(x) dx_i &= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{\mathbf{R}} \left(\int_s^\infty e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_i-s)} dx_i \right) u^{k,i-1}(s, x'_i) ds \\
 &+ \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon h}} \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{-\infty}^s e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(s-x_i)} dx_i \right) u^{k,i-1}(s, x'_i) ds \\
 &+ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\mathbf{R}} \left(\int_s^\infty e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(x_i-s)} dx_i \right) f_i(u^{k,i-1}(s, x'_i)) ds \\
 &- \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{-\infty}^s e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon h}}(s-x_i)} dx_i \right) f_i(u^{k,i-1}(s, x'_i)) ds \\
 &= \int_{\mathbf{R}} u^{k,i-1}(s, x'_i) ds.
 \end{aligned}$$

Integrando respecto de las otras variables, se obtiene (5.32). ■

Corolario 5.10 *Sea $u^{0,0}$ en las condiciones precedentes. Entonces, para cualquier t positivo se tiene que*

$$\int_{\mathbf{R}^N} u_h(x, t) dx = \int_{\mathbf{R}^N} u_0(x) dx. \tag{5.33}$$

■

En la Sección siguiente, veremos que la familia de funciones $\{u_h\}_{h>0}$ converge (en un sentido que deberá ser precisado) a una solución del problema de Cauchy (5.1)–(5.2).

5.3 Convergencia. Paso al Límite en la Ecuación

En esta Sección, probaremos que la familia de funciones $\{u_h\}_{h>0}$, que fue construida a partir de $u^{k,0}$, converge hacia una solución débil de (5.1)–(5.2). Para poder probar esta afirmación, utilizaremos fundamentalmente las estimaciones “a priori” obtenidas en la Sección que precede, junto con un resultado de compacidad (inyección compacta de $L^1(\Omega) \cap VA(\Omega)$ en $L^1(\Omega)$ cuando Ω es un abierto acotado de frontera regular). Una vez que haya sido probada la convergencia de una subsucesión de $\{u_h\}_{h>0}$, comprobaremos que el límite correspondiente es una solución débil de (5.1)–(5.2).

Al objeto de que se verifiquen los Lemas enunciados en el apartado anterior, supondremos que los parámetros h y ε están en las condiciones de la Observación que precede al Lema 5.9, es decir $\varepsilon = A^2h$.

Lema 5.11 *Dada la familia de funciones $\{u_h\}_{h>0}$, existen una subsucesión $\{u_{h_n}\}_{n \geq 1}$ y una función $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+) \cap C^0([0, \infty); L^1(\mathbb{R}^N))$ tales que, cualesquiera que sean el compacto $K \subset \mathbb{R}^N$, el instante $t > 0$ y $T > 0$, se tiene:*

$$\int_K |u_{h_n}(x, t) - u(x, t)| dx \longrightarrow 0, \quad (5.34)$$

$$\int_0^T \int_K |u_{h_n}(x, s) - u(x, s)| dx ds \longrightarrow 0, \quad (5.35)$$

$$u_{h_n} \longrightarrow u \text{ en } C^0(0, T; L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)) \quad (5.36)$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Además, la función límite u verifica:

$$\|u(\cdot, t)\|_{0, \infty; \mathbb{R}^N} \leq M \quad \forall t \geq 0. \quad (5.37)$$

Demostración: Sean $t > 0$ y Ω un abierto acotado de frontera regular contenido en \mathbb{R}^N . Gracias a las acotaciones (5.26) y (5.27) de la Sección anterior, se tiene que la familia $\{u_h(\cdot, t)\}_{h>0}$ está en un acotado de $L^1(\Omega) \cap VA(\Omega)$. Utilizando la inyección compacta de $L^1(\Omega) \cap VA(\Omega)$ en $L^1(\Omega)$, existe una subsucesión $\{u_{h'}(\cdot, t)\}_{h'>0}$ de $\{u_h(\cdot, t)\}_{h>0}$ y existe una función $u(\cdot, t)$ de $L^1(\Omega)$ tal que

$$u_{h'}(\cdot, t) \longrightarrow u(\cdot, t) \text{ en } L^1(\Omega).$$

Esto es cierto cualesquiera que sean $t > 0$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado de frontera regular. Si ahora ponemos $\mathbb{R}^N = \bigcup_{n \geq 0} \Omega_n$, con los Ω_n en estas condiciones y $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ y llevamos a cabo un proceso de diagonalización en la forma habitual, podemos afirmar que, para cada $t > 0$, existe una subsucesión $\{u_{h'_n}(\cdot, t)\}_{n \geq 1}$ de $\{u_h(\cdot, t)\}_{h>0}$ y existe una función $u(\cdot, t)$ de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ tales que,

$$u_{h'_n}(\cdot, t) \longrightarrow u(\cdot, t) \text{ en } L^1_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

Sea $\{t_m\}_{m \geq 1}$ una sucesión densa y numerable de $(0, \infty)$. Aplicando el razonamiento anterior a cada t_m y repitiendo el proceso de diagonalización, se tiene que existe una subsucesión $\{u_{h_n}\}_{n \geq 1}$ de $\{u_h\}_{h > 0}$ y una función u tales que,

$$u_{h_n}(\cdot, t_m) \rightarrow u(\cdot, t_m) \quad \text{en } L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Veamos en primer lugar que se verifica (5.34), es decir que la sucesión construida (la denotamos simplemente $\{u_n\}_{n \geq 1}$) converge en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para cualquier t positivo. Para comprobar esto, consideramos la expresión

$$I_{nm}(t) = \int_{\Omega} |u_n(x, t) - u_m(x, t)| dx,$$

donde $t > 0$ y Ω es de nuevo un abierto acotado. Comprobemos que $I_{nm}(t)$ converge a 0 cuando $n, m \rightarrow \infty$ (es decir que $\{u_n(\cdot, t)\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^1(\Omega)$). Sea τ uno de los t_m ; entonces

$$\begin{aligned} I_{nm}(t) &\leq \int_{\Omega} |u_n(x, t) - u_n(x, \tau)| dx + \int_{\Omega} |u_n(x, \tau) - u_m(x, \tau)| dx \\ &\quad + \int_{\Omega} |u_m(x, \tau) - u_m(x, t)| dx \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Gracias a (5.31), podemos acotar I_1 e I_3 por $C VT_{\mathbb{R}^N}(u_0)|t - \tau|$. Como es habitual, aquí y en lo que sigue, C designa una constante independiente de n y m . Así,

$$I_{nm}(t) \leq 2C |t - \tau| + \int_{\Omega} |u_n(x, \tau) - u_m(x, \tau)| dx.$$

Dado $\epsilon > 0$, elegimos τ en $\{t_m\}$ de tal forma que se tenga $|t - \tau| \leq \epsilon/4C$; elegido τ , como $u_n(\cdot, \tau) \rightarrow u(\cdot, \tau)$ en $L^1(\Omega)$, tomamos n y m tales que $I_2 \leq \epsilon/2$. Para estos valores de n y m , $I_{nm}(t) \leq \epsilon$. Esto prueba (5.34).

Para probar (5.35), basta aplicar el Teorema de Lebesgue a las funciones

$$t \rightarrow \int_{\Omega} |u_n(x, t) - u(x, t)| dx$$

en intervalos acotados $[0, T]$ arbitrarios.

Hemos probado que $u_n \rightarrow u$ en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$. Sin más que extraer una subsucesión que converja en casi todo, tras aplicar el Corolario 5.4, se llega a la acotación uniforme (5.37). Para finalizar la Demostración, veamos que $u \in C^0([0, \infty); L^1(\mathbb{R}^N))$ y también que, extrayendo eventualmente una nueva subsucesión, podemos afirmar que, para cada $T > 0$, u_n converge hacia u en $C^0(0, T; L^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$. Recurriremos para ello al Teorema de Ascoli-Arzelà (cf. por ejemplo [5]):

Teorema 5.12 *Sea X un espacio de Banach. Entonces un conjunto K de $C^0(0, T; X)$ es relativamente compacto si y sólo si:*

1. K es equicontinuo.
2. El conjunto $K(t) = \{u(t); u \in K\}$ es relativamente compacto en X para cada t de $[0, T]$.

■

Sea $T > 0$ y sea de nuevo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado de frontera regular. Aplicaremos el resultado precedente a la sucesión $\{u_n|_\Omega\}_{n \geq 1}$. Observando el Corolario 5.8 y, en particular, la desigualdad (5.31), deducimos para t_1 y t_2 dados en $[0, T]$ que

$$u_n(x, t_2) - u_n(x, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, s) ds;$$

por tanto,

$$\|u_n(\cdot, t_2) - u_n(\cdot, t_1)\|_{0,1;\Omega} \leq \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{\partial u_n}{\partial t}(\cdot, s) \right\|_{0,1;\Omega} ds \leq C VT_{\mathbb{R}^N}(u_0)(t_2 - t_1). \quad (5.38)$$

Esto prueba que la sucesión $\{u_n|_\Omega\}_{n \geq 1}$ constituye una familia equicontinua en el espacio $C^0(0, T; L^1(\Omega))$. Sea ahora $t \in [0, T]$. De acuerdo con el Corolario 5.6, la sucesión $\{u_n(\cdot, t)\}_{n \geq 1}$ está acotada en $W^{1,1}(\Omega)$ y, por tanto, es relativamente compacta en $L^1(\Omega)$ (puesto que la inyección de $W^{1,1}(\Omega)$ en $L^1(\Omega)$ es compacta). Así, hemos probado que el conjunto $\{u_n\}_{n \geq 1}$ es relativamente compacto en $C^0(0, T; L^1(\Omega))$ y podemos extraer una subsucesión (que seguiremos llamando u_n) que converge hacia u en $C^0(0, T; L^1(\Omega))$. Si repetimos el razonamiento para una sucesión adecuada de abiertos acotados y regulares y para una sucesión de instantes finales T_n con $T_n \rightarrow \infty$, un procedimiento "standard" de diagonalización nos lleva a que $\{u_n\}$ ó al menos una nueva subsucesión, denotada igual, converge en $C^0(0, T; L^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$ para cada $T > 0$.

Por último, veamos que $u \in C^0(0, T; L^1(\mathbb{R}^N))$ para cada $T > 0$. De (5.26), resulta que

$$\|u_n(\cdot, t)\|_{0,1;\Omega} \leq \|u_0\|_{0,1;\mathbb{R}^N}$$

para cualquier $t \in [0, T]$ y cualquier $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ acotado. Por tanto, $u(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ para cualquier t de $[0, T]$. Además, gracias a (5.38),

$$\|u_n(\cdot, t_2) - u_n(\cdot, t_1)\|_{0,1;\Omega} \leq C VT_{\mathbb{R}^N}(u_0)(t_2 - t_1) \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T].$$

Si tomamos límites, con $n \rightarrow \infty$, obtenemos que

$$\|u(\cdot, t_2) - u(\cdot, t_1)\|_{0,1;\Omega} \leq C VT_{\mathbb{R}^N}(u_0)(t_2 - t_1).$$

La desigualdad anterior es cierta para cualquier $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado de frontera regular, así que podemos escribir:

$$\|u(\cdot, t_2) - u(\cdot, t_1)\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \leq C VT_{\mathbb{R}^N}(u_0)(t_2 - t_1) \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T].$$

En particular, tenemos que $u \in C^0(0, T; L^1(\mathbb{R}^N))$. ■

Lema 5.13 *Sea u la función que proporciona el Lema 5.11. Entonces, cualquiera que sea $t > 0$, $u(\cdot, t) \in VA(\mathbb{R}^N)$ y, además, se cumple lo siguiente:*

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N} &\leq \|u_0\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N} \quad \forall t > 0, \\ VT_{\mathbb{R}^N}(u(\cdot, t)) &\leq VT_{\mathbb{R}^N}(u_0) \quad \forall t > 0, \\ \|u(\cdot, t_2) - u(\cdot, t_1)\|_{0,1;\mathbb{R}^N} &\leq C VT_{\mathbb{R}^N}(u_0)(t_2 - t_1) \quad \text{si } t_2 > t_1 \geq 0, \\ \|u(\cdot, t)\|_{0,1;\mathbb{R}^N} &\leq \|u_0\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \quad \forall t > 0. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Demostración: Tan sólo probaremos (5.39), pues el resto de desigualdades han ido apareciendo en la Demostración del Lema 5.11. Sea φ una función de $C_0^1(\mathbb{R}^N)^N$. Como u_n está en $W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n(x, t) \nabla \cdot \varphi \, dx = - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n(x, t) \cdot \varphi \, dx \leq VT_{\mathbb{R}^N}(u_0) \|\varphi\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N},$$

sin más que tener en cuenta (5.27). Gracias a (5.36), dado que φ tiene soporte compacto, podemos tomar límite cuando $n \rightarrow \infty$, obteniéndose:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(\cdot, t) \nabla \cdot \varphi \, dx \leq VT_{\mathbb{R}^N}(u_0) \|\varphi\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N}.$$

Esta desigualdad prueba que $u(\cdot, t)$ está en $VA(\mathbb{R}^N)$ y, además, conduce a (5.39). ■

Lema 5.14 *Sean $u_0, v_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap VA(\mathbb{R}^N)$ y sean u y v las correspondientes funciones que proporciona, a partir de u_0 y v_0 , el Lema 5.11. Entonces*

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \leq \|u_0 - v_0\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \quad \forall t > 0. \tag{5.40}$$

Demostración: Aplicando el Lema 5.11 a las sucesiones $\{u_h\}$ y $\{v_h\}$, obtenemos subsucesiones $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ que convergen a u y v (respectivamente), en el sentido (5.34)–(5.36). Por otro lado, en la Sección 5.2 se obtuvo la desigualdad

$$\|u_n(\cdot, t) - v_n(\cdot, t)\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \leq \|u_0 - v_0\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \quad \forall t > 0.$$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado. De esta última desigualdad, deducimos que

$$\|u_n(\cdot, t) - v_n(\cdot, t)\|_{0,1;\Omega} \leq \|u_0 - v_0\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \quad \forall t > 0$$

y, al tomar límite cuando $n \rightarrow \infty$, se obtiene (5.40). ■

Veamos finalmente cómo puede aplicarse lo que precede para probar el Teorema 5.1.

Demostración del Teorema 5.1: Nos limitaremos a demostrar que la función u , construida en el Lema 5.11, es solución débil del problema de Cauchy (5.1)–(5.2) y que, además, verifica (5.7).

Sabemos que $u_h \in H^1(0, T; L^1(\mathbb{R}^N))$ para cada $T > 0$ dado. Gracias a (5.19),

$$\begin{cases} u_h(x, t) = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \{[(k+1)h - t]u^{k,0}(x) + (t - kh)u^{k+1,0}(x)\} \chi_{[kh, (k+1)h)}(t) \\ \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

y, además, debido a (5.20),

$$\frac{\partial u_h}{\partial t}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{k+1,0}(x) - u^{k,0}(x)}{h} \chi_{[kh, (k+1)h)}(t) \quad \text{para } (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \text{ c.p.d.}$$

Sea $t \in [kh, (k+1)h)$ y sea i un entero entre 1 y N . La función $u^{k,i}$ verifica:

$$\frac{u^{k,i} - u^{k,i-1}}{h} - \varepsilon \frac{\partial^2 u^{k,i}}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(u^{k,i-1}) = 0 \quad \text{en } H^{-1}(\mathbb{R}^N).$$

Sea Φ una función de $C_0^3(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty))$; entonces $\Phi(\cdot, t) \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$, de donde

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^{k+1,0}(x) - u^{k,0}(x)}{h} \Phi(x, t) dx - \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} f_i(u^{k,i-1}(x)) \Phi_{x_i}(x, t) dx \\ - \varepsilon \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} (u^{k,i}(x) \Phi_{x_i x_i}(x, t) dx = 0. \end{cases}$$

Multiplicando las igualdades precedentes por $\chi_{[kh, (k+1)h)}(t)$ e integrando en $(0, +\infty)$, resulta:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^{k+1,0} - u^{k,0}}{h} \chi_{[kh, (k+1)h)}(t) \Phi dx dt \\ & - \sum_{i=1}^N \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} f_i(u^{k,i-1}) \chi_{[kh, (k+1)h)}(t) \Phi_{x_i} dx dt \\ & - \varepsilon \sum_{i=1}^N \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u^{k,i} \chi_{[kh, (k+1)h)}(t) \Phi_{x_i x_i} dx dt = 0. \end{aligned}$$

Esto es cierto cualquiera que sea $k \geq 0$ y cualquiera que sea $t \in [kh, (k+1)h)$. Sumando en k todas las igualdades que preceden (hay que tener en cuenta que las sumas anteriores son finitas), obtenemos la identidad

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u_h}{\partial t} \Phi \, dx \, dt - \sum_{i=1}^N \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{k=0}^\infty f_i(u^{k,i-1}) \chi_{[kh, (k+1)h)}(t) \right] \Phi_{x_i} \, dx \, dt \\ - \varepsilon \sum_{i=1}^N \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{k=0}^\infty u^{k,i} \chi_{[kh, (k+1)h)}(t) \right] \Phi_{x_i x_i} \, dx \, dt = 0.$$

Integrando ahora por partes en el primer término, resulta la igualdad

$$- \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u_h(x, t) \Phi_t(x, t) \, dx \, dt - \delta_1(h) - \sum_{i=1}^N \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} f_i(u_h(x, t)) \Phi_{x_i}(x, t) \, dx \, dt \\ \delta_2(h) - \int_{\mathbb{R}^N} u^0(x) \Phi(x, 0) \, dx = 0, \quad (5.41)$$

donde

$$\delta_1(h) = \sum_{i=1}^N \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{k=0}^\infty [f_i(u^{k,i-1}) - f_i(u_h)] \chi_{[kh, (k+1)h)}(t) \right) \Phi_{x_i} \, dx \, dt,$$

y

$$\delta_2(h) = \varepsilon \sum_{i=1}^N \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{k=0}^\infty u^{k,i} \chi_{[kh, (k+1)h)}(t) \right) \Phi_{x_i x_i} \, dx \, dt.$$

Gracias a (5.17),

$$|\delta_2(h)| \leq \left[|\text{Sop}(\Phi)| M \sum_{i=1}^N \max |\Phi_{x_i x_i}(x, t)| \right] \varepsilon = CA^2 h,$$

donde C es una constante que depende de M , Φ y N pero es independiente de h . Si suponemos que $\text{Sop}(\Phi)$ está contenido en el conjunto $K \times [0, T^*]$, donde K es un compacto de \mathbb{R}^N y $T^* > 0$, podemos escribir:

$$\delta_1(h) = \sum_{i=1}^N \int_0^{T^*} \int_K \left(\sum_{k=0}^\infty [f_i(u^{k,i-1}) - f_i(u_h)] \chi_{[kh, (k+1)h)}(t) \right) \Phi_{x_i} \, dx \, dt,$$

de donde

$$|\delta_1(h)| \leq \sum_{i=1}^N \int_0^{T^*} \int_K \left(\sum_{k=0}^\infty |f_i(u^{k,i-1}) - f_i(u_h)| \chi_{[kh, (k+1)h)}(t) \right) |\Phi_{x_i}| \, dx \, dt.$$

Obsérvese que, si $t \in [kh, (k+1)h)$, entonces

$$|f_i(u^{k,i-1}(x)) - f_i(u_h(x, t))| \leq A |u^{k,i-1}(x) - u_h(x, t)|$$

$$\begin{aligned} &\leq A |u^{k,i-1}(x) - u^{k,0}(x)| + A |u^{k,0}(x) - u_h(x, t)| \\ &\leq A \sum_{i=1}^N |u^{k,i}(x) - u^{k,i-1}(x)| + A \left| \frac{\partial u_h}{\partial t}(x, t) \right| h \end{aligned}$$

y, recurriendo al Lema 5.25, aparecen las desigualdades

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |f_i(u^{k,i-1}(x)) - f_i(u_h(x, t))| dx &\leq 2A \delta \|\nabla u^0\|_{0,1;\mathbb{R}^N} h + 2A^2 VT_{\mathbb{R}^N}(u_0) h \\ &\leq C VT_{\mathbb{R}^N}(u_0) h, \end{aligned}$$

donde C es independiente de h . Así, llegamos a la acotación:

$$\begin{aligned} |\delta_1(h)| &\leq \left[\sum_{i=1}^N T^* \max |\Phi_{x_i}(x, t)| \right] C VT_{\mathbb{R}^N}(u_0) h \\ &\leq C^* h, \end{aligned}$$

donde C^* es una nueva constante que depende de Φ , A , M , N y $VT_{\mathbb{R}^N}(u_0)$, pero es (una vez más) independiente de h . Con ello, queda probado que δ_1 y δ_2 convergen a 0 uniformemente cuando $h \rightarrow 0$.

Escribiendo ahora la igualdad (5.41) para $h = h_n$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u_n(x, t) \Phi_t(x, t) dx dt + \delta_1(h_n) + \sum_{i=1}^N \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} f_i(u_n(x, t)) \Phi_{x_i}(x, t) dx dt \\ + \delta_2(h_n) + \int_{\mathbb{R}^N} u^{0,0}(x) \Phi(x, 0) dx = 0, \end{aligned}$$

y esto cualquiera que sea Φ en $C_0^3(\mathbb{R}^N \times [0, \infty))$. Como $u^{0,0} = u_0 * \zeta_{h_n}$, al tomar límites cuando $n \rightarrow \infty$, obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^{0,0}(x) \Phi(x, 0) dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \Phi(x, 0) dx.$$

Aplicando ahora el Teorema de Lebesgue (no hay que olvidar que, gracias al Lema 5.11, la sucesión $\{u_n\}$ converge en casi todo $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$) y teniendo en cuenta que $\delta_1(h_n)$ y $\delta_2(h_n)$ convergen a 0, llegamos a que

$$\begin{aligned} \int \int_{t>0} u(x, t) \Phi_t(x, t) dx dt + \sum_{i=1}^N \int \int_{t>0} f_i(u(x, t)) \Phi_{x_i}(x, t) dx dt \\ + \int_{t=0} u_0(x) \Phi(x, 0) dx = 0 \end{aligned}$$

y esto se verifica cualquiera que sea $\Phi \in C_0^3(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty))$. Como en las integrales anteriores sólo aparecen derivadas de primer orden de Φ , por un procedimiento de

regularización, podemos deducir que estas igualdades son también ciertas cuando $\Phi \in C_0^1(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty))$, lo que demuestra que u es una solución débil de (5.1)–(5.2).

Probemos por último la igualdad (5.7). Obsérvese que, cualquiera que sea $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u_h}{\partial t} \varphi \, dx - \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_i(u^{k,i-1}) \chi_{[kh, (k+1)h)}(t) \right] \varphi_{x_i} \, dx \\ - \varepsilon \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{k=0}^{\infty} u^{k,i} \chi_{[kh, (k+1)h)}(t) \right] \varphi_{x_i x_i} \, dx = 0.$$

Si integramos en el intervalo $(0, t)$ y aplicamos una fórmula de integración por partes, se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_h(x, t) \Phi(x) \, dx - \int_0^t \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_i(u^{k,i-1}) \chi_{[kh, (k+1)h)}(s) \right] \varphi_{x_i} \, dx \, ds \\ - \varepsilon \int_0^t \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{k=0}^{\infty} u^{k,i} \chi_{[kh, (k+1)h)}(s) \right] \varphi_{x_i x_i} \, dx \, ds = \int_{\mathbb{R}^N} u^0 \varphi \, dx.$$

Al tomar límite en esta igualdad, se deduce que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u \varphi \, dx - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^N f_i(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx \, ds = \int_{\mathbb{R}^N} u_0 \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (5.42)$$

Puesto que $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$, $f_i(u) \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$ y $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, razonando por densidad, la igualdad precedente es por fuerza cierta para φ arbitraria en $W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$. En particular esto implica (5.7). En efecto, tomemos

$$\varphi_R(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < R, \\ R + 1 - |x| & \text{si } R < |x| < R + 1, \\ 0 & \text{si } |x| > R + 1, \end{cases}$$

para cada $R > 0$. Usando (5.42) con $\varphi = \varphi_R$ y haciendo tender R hacia ∞ , obtenemos (5.7). ■

Puesto que la solución construida mediante el Teorema 5.1 es única, se tiene que toda la familia $\{u_h\}$ converge (en el sentido del Lema 5.11) hacia la solución u .

Bibliografía

- [1] ADAMS, R.A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York 1975.
- [2] BARDOS, C., *Introduction aux problèmes hyperboliques non linéaires*, in Fluid Dynamics (Varenna 1982), Lecture Notes in Mathematics 1047, Springer-Verlag (1984), 1-74.
- [3] BARDOS, C., TARTAR, L., *Sur l'unicité rétrograde des équations paraboliques et quelques question voisines*, Arch. Rat. Mech. Anal., **50** (1973), 10-25
- [4] BELLO, J.A., Tesis, Universidad de Sevilla, 1992.
- [5] BRÉZIS, H., *Análisis Funcional*, Alianza Editorial, Madrid 1984.
- [6] CÉA, J., *Optimisation. Théorie et Algorithmes*, Dunod, Paris 1971.
- [7] CONWAY, E., SMOLLER, J., *Global solutions of the Cauchy Problem for quasilinear first-order equations in several space variables*, Comm. Pure Appl. Math., **19** (1966), 95-105.
- [8] CONSTANTIN, P., FOIAS, C., *Navier-Stokes Equations*, The University of Chicago Press, 1988.
- [9] DIPERNA, R.J., *Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics*, Comm. in Math. Phys. **91** (1983), 1-30.
- [10] DIPERNA, R.J., *Measure-valued solutions to conservation laws*, Arch. Rational Mech. Anal., **88** (1985), 223-270.
- [11] FABRE C., PUEL J.P., ZUAZUA, E., *Contrôlabilité approchée de l'équation de la chaleur semi-linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 315, Série I (1992), 807-812.
- [12] FERNÁNDEZ CARA, E., GONZÁLEZ BURGOS, M., Aparecerá.
- [13] FERNÁNDEZ CARA, E., GONZÁLEZ BURGOS, M., *Una nueva Demostración de la existencia de solución de leyes de conservación escalares*, en las Actas del XII CEDYA, Oviedo-Gijón (1991), 447-452.
- [14] FERNÁNDEZ CARA, E., REAL ANGUAS, J., *A partial answer to a conjecture due to J.L. Lions* Nonlinear Anal. T.M.A., to appear.

- [15] FERNÁNDEZ CARA, E., REAL ANGUAS, J., *On a conjecture due to J.L. Lions concerning weak controlability for Navier-Stokes Flows*, in "Proceedings of the EQUADIFF'91 Conference", Barcelona 1991 (to appear).
- [16] GILBARG, D., TRUDINGER, N.S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd. Edition, Springer-Verlag, Berlin 1983.
- [17] GIRAULT, V., RAVIART, P.A., *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer-Verlag, Berlin 1986.
- [18] GIUSTI, E., *Minimal Surfaces and Function of Bounded Variation*, Monographs in Mathematics Vol. 80, Birkhäuser, (1984).
- [19] GLIMM, J., *Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations*, Comm. Pure Appl. Math., **18** (1965), 697-715.
- [20] GODLEWSKI, E., RAVIART, P.A., *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, in MaThematiques et Applications no. **3-4**, SMAI, Ellipses, Paris (90/91).
- [21] GUILLÉN, F., Tesis, Universidad de Sevilla, 1992.
- [22] HEYWOOD, J.G., *Classical solutions of the Navier-Stokes equations*, in Approximation Methods for Navier-Stokes Problems, Lectures Notes in Math. No. 771, Springer-Verlag (1980), 235-248.
- [23] HEYWOOD, J.G., *The Navier-Stokes equations: On the existence, regularity and decay of solutions*, Indiana Univ. Math. J., **29** (1980), 639-681.
- [24] HOPF, E., *The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$* . Comm. Pure Appl. Math., **3** (1950), 201-230.
- [25] HOPF, E., *Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen*, Math. Nachr. **4** (1951), 213-231.
- [26] KISELEV, A.A., LADYZHENSKAYA, O.A., *On the existence and uniqueness of the solution of the nonstationary problem for a viscous incompressible fluid*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **21** (1957), 655-680.
- [27] KRUŽKOV, S., *First-order quasilinear equations in several independent variables*, Math. USSR Sb. **10** (1970), 217-273.
- [28] KUFNER A. ET AL., *Function Spaces*, Noordhoof International Publishing, Praga 1977.

- [29] LADYZHENSKAYA, O.A., *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, 2nd. Edition*, Gordon and Breach, New York 1969.
- [30] LAX, P.D., *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*, SIAM Regional Conference in Applied Mathematics **11**.
- [31] LAX, P.D., *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Comm. Pure Appl. Math., **10** (1957), 537-566.
- [32] LAX, P.D., *Shock waves and Entropy*, in Contributions to Nonlinear Functional Analysis, ed. E. A. Zarantonello, Academic-Press (1971), 603-634.
- [33] LIONS, J.L., *Contrôle Optimal de Systèmes Gouvernés par des Equations aux Dérivées Partielles*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris 1968.
- [34] LIONS, J.L., Cours au Collège de France, 1990/91.
- [35] LIONS, J.L., *Exact Controllability, Stabilization and perturbations for distributed systems*, SIAM review Vol. 30, No. 1, March (1988), 1-68.
- [36] LIONS, J.L., *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Gauthiers-Villars, Paris 1969.
- [37] LIONS, J.L., *Remarques sur la contrôlabilité approchée*, en las Actas de las "Jornadas Hispano-Francesas sobre Control de Sistemas Distribuidos", Universidad de Málaga, Octubre 1990.
- [38] LIONS, J.L., MAGENES, E., *Problèmes aux limites Non Homogènes et Applications, Vol. 1*, Dunod, Gauthiers-Villars, Paris 1968.
- [39] MIZOHATA, S., *Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Sér. A **31** (3), (1958), 219-239.
- [40] MURAT, F., SIMON, J., *Sur le contrôle par un domaine géométrique*, Rapport du L.A. 189 no. 76015, Univ. Paris VI (1976).
- [41] NEČAS, J., *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, Masson et Cie., Paris 1967.
- [42] OLEĪNIK, O.A., *Discontinuous solutions of nonlinear differential equations*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **26**, 95-172.

-
- [43] PRODI, G., *Teoremi di tipo locale per il sistema de Navier-Stokes e stabilità delle soluzioni stazionarie*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **32** (1962), 374–397.
- [44] SAUT, J.C., SCHEURER, B., *Unique continuation for some evolution equations*, J. Diff. Equations **66** (1987), 118–139.
- [45] SIMON, J., *Distributions à Valeurs Vectorielles*, à paraître.
- [46] SMOLLER, J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York (1983).
- [47] TARTAR, L., *Topics in Nonlinear Analysis*, Publications Mathématiques d'Orsay, Paris 1978.
- [48] TEMAM, R., *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, North-Holland, Amsterdam 1977.
- [49] VO-KHAC KHOAN, *Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux Dérivées Partielles*, Vuibert, Paris 1972.
- [50] VOL'PERT, A.I., *The spaces BV and quasilinear equations*, Math. USSR Sb., **2** (1967), 225–267.
- [51] ZIEMER, W.P., *Weakly Differentiable Functions*, Springer-Verlag, New York 1989.