Universidad de Sevilla
Facultad de Matemáticas
Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

ATRACTORES Y COMPORTAMIENTO FINITO-DIMENSIONAL EN SISTEMAS DINÁMICOS ALEATORIOS

Memoria presentada por
D. José Antonio Langa Rosado
para optar al grado de Doctor
en Matemáticas.

Vº Bº Director

T. Caraball

D. TOMÁS CARABALLO GARRIDO.
Prof. Titular Un. Sevilla.

JOSÉ ANTONIO LANGA ROSADO.

Sevilla, abril de 1998

A Rosario,
con quien quiero compartir la vida

Agradecimientos

El trabajo para la presente Memoria daba sus primeros frutos cuando Vicky, amiga y maestra, nos abandonaba. A ella, presente en estos años, el recuerdo alegre y mi agradecimiento.

A Tomás Caraballo, mi más sincero agradecimiento. El trabajo de dirección que ha realizado me ha animado a adentrarme en campos diversos de los sistemas dinámicos y las ecuaciones en derivadas parciales estocásticas; siempre me ha abierto perspectivas. Su disponibilidad ha sido permanete y cordial. Con su ánimo, formación y apoyo constante ha sido posible llevar a término la Memoria que ahora presentamos. Del trabajo junto a él ha nacido la amistad que ahora mantenemos, la cual también quiero agradecer.

La colaboración de James Robinson en todos estos años bien merece unas palabras. Desde su condición de investigador en la Universidad de Cambridge, su cuidada formación científica y su excelente labor investigadora han sido ofrecidas, como un regalo, para que esta Memoria fuera posible. Los encuentros con él han resultado especialmente intensos en aprendizaje y apertura de nuevos problemas, ideas y horizontes. Una cordial amistad ha nacido entre nosotros. Sin duda esta Memoria no sería la que se presenta sin su apoyo permanente.

A los Profesores Enrique Fernández Cara y José Real Anguas quiero mostrar mi sincero agradecimiento por el trabajo generoso que han realizado leyendo y corrigiendo esta Memoria, mejorada tras sus necesarias aportaciones y acertados consejos. Al primero quiero agradecer que, como Director del Departamento y Responsable del Grupo de Investigación desde el que he trabajado, me haya animado siempre a tomar contacto con otros profesores y universidades europeas. La estancia en la Universidad de Pisa con el Profesor Franco Flandoli abrió la parte final de este trabajo y posibilitó comprender con mayor profundidad la teoría de los sistemas dinámicos y atractores aleatorios. Agradezco el interés que desde entonces ha manifestado en el seguimiento de este trabajo.

A Antonio Suárez, compañero constante, le agradezco profundamente la permanente disposición gratuita del amigo cercano.

Mi agradecimiento también a todos los miembros del Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, que me han acompañado en este proceso de educación en la investigación que he realizado. Siempre he encontrado en ellos disponibilidad y solicitud para atender, escuchar o aconsejar. Gracias a aquéllos de quienes recibí los Cursos de Doctorado, por la excelente base que me proporcionaron para los estudios que siguieron.

A Víctor y Ana, y en ellos a todas aquellas familias y personas que han hecho posible la constancia y el entusiasmo desde los que he avanzado a lo largo de estos años.

A mis padres, sin duda a los que más les debo, pues su educación y delicada responsabilidad forjaron el apoyo firme que me ha mantenido.

Y a Rosario, compañía preciosa, con quien camino.

A todos, muchas gracias.

Índice

Introducción

0.1 Motivación y síntesis de resultados

Atractores globales

El modelado mediante ecuaciones en derivadas parciales de numerosos fenómenos que aparecen en Física, Química, Biología, etc. puede contribuir de manera decisiva al estudio y comprensión de los mismos. En numerosos casos, en el modelo quedan representadas ciertas características del fenómeno (estados) en función de las variables temporal y espacial, (t, x), con $t \geq 0$ y $x \in E$, un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$. Así, el estudio de la dinámica del sistema considerado a medida que transcurre el tiempo se lleva a cabo analizando una ecuación de evolución de la forma

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = G(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots)(t,x), \tag{0.1}$$

junto con algunas condiciones adicionales de tipo valores iniciales, de contorno, etc.

La acertada elección de un espacio de fases X (en general, un espacio de Banach) donde acontece la evolución de las soluciones para $t \geq 0$ permite escribir, de una forma simple el problema en la forma anterior como

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{du(t)}{dt} & = & F(u(t)), \\ u(0) & = & u_0 \in X, \end{array} \right. \tag{0.2}$$

con $F : X \to X$ cierta aplicación.

Un resultado de existencia y unicidad de solución para el problema de valores iniciales (0.2), denotada $u = u(t; u_0)$, corrobora la acertada representación del fenómeno y hace posible, en gran número de ocasiones, introducir un semigrupo de operadores $\mathcal{S}(t) : X \longrightarrow X$, para $t \geq 0$, definido de la forma siguiente: dado $u_0 \in X$

$$\mathcal{S}(t)u_0 := u(t; u_0), \quad \text{para } t \geq 0.$$

De esta manera, si pretendemos saber cómo evoluciona el sistema con el paso del tiempo, resultará interesante analizar las propiedades asintóticas (es decir, cuando $t \to +\infty$) del semigrupo considerado.

Por otro lado, gran cantidad de fenómenos naturales sufren en su evolución una pérdida de energía debido, por ejemplo, a fricciones, disipación de calor, etc... Desde el punto de vista matemático, esto se manifiesta cuando las soluciones definidas para $t \in [0, +\infty)$ tienen, para tiempos suficientemente grandes, norma uniformemente acotada. En estas ocasiones, se dice que el sistema dinámico $\{\mathcal{S}(t)\}_{t \geq 0}$ es *disipativo* (existe un conjunto B, subconjunto acotado de X, que es absorbente, i.e. cumple la propiedad siguiente: para cada $D \subset X$ acotado, existe t_D tal que, si $t \geq t_D$, entonces $\mathcal{S}(t)D \subseteq B$). El estudio de sistemas dinámicos disipativos es, principalmente, el análisis de su comportamiento en el correspondiente B, ya que la dinámica en el exterior de este conjunto es transitoria. Sin embargo, aún existe un subconjunto de B, en general de "mucho menor tamaño", que proporciona información precisa acerca del comportamiento asintótico de los sistemas dinámicos. Nos referimos al *atractor global* (Hale [55], Temam [101]). Un atractor global para el sistema (0.2) es un conjunto compacto $\mathcal{A} \subset X$, invariante ($\mathcal{S}(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$, para todo $t > 0$) y atrayente, es decir, tal que, para todo $D \subset X$ acotado,

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(\mathcal{S}(t)D, \mathcal{A}) = 0.$$

El estudio asintótico de gran cantidad de ecuaciones diferenciales, ordinarias y en derivadas parciales, se ha visto profundizado, mejorado y ampliado con la introducción de este concepto a principios de los años ochenta (véase, entre otros, Babin y Vishik [7]). Un resultado general sobre existencia de atractores globales afirma que, si existe un conjunto B absorbente y compacto, entonces el correspondiente conjunto límite

$$\mathcal{A} = \Lambda(B) = \bigcap_{n \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq n} \mathcal{S}(t)B}$$

es el único atractor global asociado al sistema.

Un buen conocimiento de la estructura y propiedades del atractor global proporciona información sobre la dinámica asintótica. Una de las propiedades más interesantes de los atractores globales es la finitud de su dimensión de Hausdorff (al menos, en los casos en los que se verifica la anterior condición suficiente). Nótese que la propia definición de atractor global establece una estrecha relación entre la dimensión de éste y el número de grados de libertad de los que depende asintóticamente el sistema. En general, nuestro espacio de fases X es de dimensión infinita, por lo que cualquier herramienta que simplifique el análisis de la dinámica en X será de gran importancia. La descripción con un número finito de variables del comportamiento asintótico de sistemas dinámicos es una de las aportaciones fundamentales de la teoría de atractores globales y la motivación principal de esta Memoria.

Los primeros resultados que ponen de manifiesto el carácter finito del número de grados de libertad del sistema aparecen en Foias y Prodi [44]. Allí, se muestra que, para N adecuado, la evolución de $u(t) - v(t)$, donde $u(t)$ y $v(t)$ son soluciones de las ecuaciones bidimensionales de Navier-Stokes, está determinada por el comportamiento de los N primeros modos de su desarrollo de Fourier, es decir, los N primeros modos son *determinantes*. Con posterioridad, otros autores han profundizado en esta idea (véanse, entre otros, Jones y Titi [62] y Robinson [86], [88]). Incluso se han desarrollado aspectos de la teoría de sistemas dinámicos motivados por este problema. Esto ha ocurrido con la teoría de *atractores exponenciales*, conjuntos compactos $\mathcal{E} \subset X$ positivamente invariantes, i.e. $S(t)\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}$ para todo $t \geq 0$, atrayentes de cualquier solución a velocidad exponencial (Eden et al. [36]). También, con la teoría de *variedades inerciales*, variedades lipschitzianas, finito-dimensionales y positivamente invariantes que atraen de los acotados de X con velocidad exponencial (Foias et al. [48], Constantin et al. [19], Temam [102]).

En todos estos trabajos, se hace especial hincapié en la dinámica del sistema sobre el atractor global o, más generalmente, sobre los conjuntos atrayentes. Más concretamente, en la teoría de variedades inerciales, existen resultados de carácter general relacionados con su *completitud asintótica*. Así, por cada trayectoria $u = u(t; u_0)$ del sistema, existe una trayectoria $v = v(t; v_0)$ sobre la variedad inercial hacia la que tiende $u(t;u_0)$ cuando $t \to +\infty$ (Foias y Titi [51], Robinson [84]). Existen ejemplos de atractores globales que muestran un comportamiento distinto (Robinson [84]). Sin embargo, los primeros resultados originales de esta Memoria prueban que, por cada trayectoria en el espacio de fases, existe una trayectoria a trozos (o pseudo-trayectoria) que está contenida en el atractor global $\mathcal{A}$ y la aproxima con un error que tiende a cero cuando $t \to +\infty$.

De otra parte, la teoría de atractores exponenciales es "intermedia" entre la de atractores globales y la de variedades inerciales, como se deduce de las definiciones de los conceptos asociados. Por consiguiente, nos hemos preguntado bajo qué condiciones sería posible extender la propiedad de completitud asintótica a atractores exponenciales. Hemos obtenido un resultado que generaliza al caso de atractores exponenciales el teorema sobre completitud asintótica de Robinson [84]. Éste confirma el interés que posee encontrar un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias cuya dinámica describa la observada sobre el atractor, cuestión que actualmente está abierta.

Atractores aleatorios

Por otra parte, en numerosos modelos algún o algunos términos quedan mejor descritos admitiendo que poseen cierto grado de aleatoriedad. En efecto, la dinámica de algún coeficiente $g(t)$ de una determinada ecuación diferencial puede no ser completamente conocida, de manera que se tiene, por ejemplo,

$$g(t) = r(t) + \text{“ruido”},$$

donde sólo se conoce la distribución de probabilidad del término "ruido".

La teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas (véanse, entre otros, Arnold [1] y Øksendal [79]) investiga este tipo de situaciones.

El estudio del comportamiento asintótico de ecuaciones diferenciales estocásticas ha sido un tema esencialmente no abordado hasta hace pocos años. La puerta del análisis estocástico a los sistemas dinámicos fue abierta en torno a los años ochenta, cuando se probó que ciertas ecuaciones estocásticas generan un grupo biparamétrico de transformaciones $\varphi_{t,s}(\omega) : X \to X$ que describe la evolución de las soluciones de una ecuación diferencial (véanse Elworthy [37] o Kunita [66]). A partir de ese momento y principalmente en los últimos años, un grupo de investigadores encabezados por L. Arnold ha venido desarrollando con éxito la teoría de los *sistemas dinámicos aleatorios*, que constituye un marco adecuado para el tratamiento de propiedades cualitativas de ciertas ecuaciones estocásticas. El concepto de sistema dinámico aleatorio es aplicable en gran cantidad de situaciones que muestran alguna forma de aleatoriedad en su comportamiento, en particular, ecuaciones diferenciales aleatorias y estocásticas (Arnold [3]).

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, un grupo de transformaciones medibles $\theta_t : \Omega \to \Omega$ $(t \in \mathbb{R})$ que conservan la medida y un espacio medible $\{X, \mathcal{B}\}$, se denomina sistema dinámico aleatorio (en adelante SDA) a toda aplicación medible

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ \times \Omega \times X & \longrightarrow & X \\ (t, \omega, x) & \longmapsto & \varphi(t, \omega, x) = \varphi(t, \omega)x \end{array}$$

que verifica

i) $\varphi(0, \omega) = \mathrm{id}$ (en X).

ii) Para todo $s, t \in \mathbb{R}^+$, $\omega \in \Omega$ y $x \in X$

$$\varphi(t + s, \omega)x = \varphi(t, \theta_s\omega)\varphi(s, \omega)x \qquad \text{(propiedad del cociclo).}$$

El comportamiento asintótico de ciertas ecuaciones diferenciales estocásticas es analizado en varios trabajos de los años 80 y principios de los 90 centrados en el estudio de la existencia de *medidas invariantes* (Ichikawa [61], Maslowski [74]) y *atractores de probabilidad* (Morimoto [78], Schmalfuss [92], [97]). Aunque constituyen una generalización de resultados deterministas, estos trabajos pierden en gran medida de intuición geométrica que acompaña al concepto de atractor global como compacto del espacio de fases al que convergen todas las trayectorias.

Uno de los primeros intentos para definir el atractor de una ecuación estocástica como un subconjunto del espacio de fases aparece en Brzezniak, Capinski y Flandoli [11]. Las condiciones impuestas a la ecuación son demasiado fuertes para aplicar la definición y los resultados a ejemplos interesantes (ecuaciones de Ito en espacios de dimensión infinita). No obstante, en este trabajo se adopta ya el punto de vista de los sistemas dinámicos aleatorios, por lo que puede ser considerado precursor de la teoría de atractores aleatorios.

Las ideas fundamentales sobre *atractores aleatorios* $\mathcal{A}(\omega)$ aparecieron en 1994 (Crauel y Flandoli [22], véase también Schmalfuss [93]). En nuestra opinión, [22] es una adecuada y elegante generalización al campo de las ecuaciones diferenciales estocásticas de los resultados sobre atractores globales propios de la teoría determinista. Sin embargo, pone de manifiesto que existen diferencias esenciales entre los conceptos de atractor global y atractor aleatorio. Así, cuando una ecuación diferencial incluye en algún término un proceso estocástico (por ejemplo un *proceso de Wiener* $W_t : \Omega \to X$, véase Cap. 2), la ecuación se convierte en no autónoma. Existen diversos trabajos que estudian el comportamiento asintótico de sistemas no autónomos (Sell [98], Haraux [55]). Sin embargo, en éstos se imponen ciertas condiciones de acotación y compacidad sobre los términos no autónomos. Esto hace insuficiente el análisis cuando, como en nuestro caso, el sistema aparece afectado por un proceso de Wiener, debido a las fuertes fluctuaciones de W_t y, en especial, al hecho de que, con probabilidad uno, las trayectorias son de variación no acotada.

Desde un punto de vista físico, la presencia de un término no autónomo en la ecuación diferencial supone la aportación, en función del tiempo, de una cantidad adicional de energía. Si esta aportación sufre grandes fluctuaciones, como en el caso de un *ruido blanco* (derivada temporal de un proceso de Wiener), la idea de disipatividad que tenemos para sistemas dinámicos deterministas y autónomos cambia sensiblemente. En efecto, en estos casos, aunque la presencia de un operador disipativo seguirá produciendo el efecto de pérdida de energía, no observaremos un descenso constante de energía que terminará estando por debajo de un cierto nivel (existencia de conjunto absorbente). Al contrario, cuanto $t \to +\infty$ las trayectorias sufrirán fluctuaciones importantes, tomando valores que acaban estando repartidos por todo el espacio de fases.

Todo ello conduce a un concepto diferente de disipación y, como consecuencia, a una definición generalizada de atractor para estas ecuaciones de evolución no autónomas y aleatorias. Dado el SDA $\varphi(t, \omega)$ correspondiente a una ecuación diferencial estocástica, se define el atractor aleatorio como una familia de conjuntos $\{\mathcal{A}(\omega)\}_{\omega \in \Omega}$ que es *invariante* para el sistema dinámico aleatorio, i.e. verifica $\varphi(t, \omega)\mathcal{A}(\omega) \subseteq \mathcal{A}(\theta_t \omega)$, para todo $t \geq 0$ y es *atrayente desde* $-\infty$ de los acotados de X, i.e.

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(\varphi(t, \theta_{-t}\omega)D, \mathcal{A}(\omega)) = 0,$$

P-casi seguramente (en adelante, $P - c.s.$) para cada acotado $D \subset X$.

Obsérvese que, aquí, $\varphi(t, \theta_{-t}\omega)u_0$ puede ser interpretado como la "posición" en el tiempo $t = 0$ de la "partícula" que estaba en u_0 en el tiempo $-t$.

Con posterioridad, han aparecido varios trabajos que amplían y, en algunos casos, generalizan en algún sentido la teoría sobre atractores aleatorios comenzada por Crauel y Flandoli en [22] (véanse Crauel et al. [23], Schmalfuss [94], Schenk-Hoppé [91]).

El resultado principal sobre existencia de atractores aleatorios afirma, en analogía con el caso determinista, que si el SDA $\varphi(t, \omega)$ tiene asociado una familia de conjuntos $B(\omega)$ absorbentes y compactos, entonces existe el atractor aleatorio $\mathcal{A}(\omega)$ y viene dado por

$$\mathcal{A}(\omega) = \overline{\bigcup_{\substack{D \subset X \\ D \text{ acotado}}} \Lambda(D, \omega)},$$

con

$$\Lambda(D, \omega) = \bigcap_{n \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq n} \varphi(t, \theta_{-t}\omega)D}.$$

En su día, nos preguntamos como primera cuestión ante esta definición de atractor para un SDA, si había continuidad respecto del atractor global. Más precisamente, si existía alguna relación entre $\mathcal{A}_\epsilon(\omega)$ y $\mathcal{A}$, siendo $\mathcal{A}_\epsilon(\omega)$ el atractor asociado a una ecuación diferencial estocástica donde el término aleatorio depende de ϵ (un parámetro destinado a tender a cero) y siendo $\mathcal{A}$ el atractor global asociado a la ecuación límite. Diversas simulaciones numéricas del atractor aleatorio $\mathcal{A}(\omega)$ para un sistema de Lorenz estocástico (Schmalfuss [95], Keller [63]) parecen indicar que este conjunto es una perturbación del conocido atractor extraño de Lorenz en el caso determinista. En términos generales, podemos enunciar el resultado siguiente: Supongamos que (0.2) define un sistema dinámico determinista $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ para el que se conoce la existencia de un conjunto absorbente y compacto $K_0 \subset X$ y, por tanto, existe el atractor global $\mathcal{A} = \Lambda(K_0)$. Consideremos una perturbación aleatoria de (0.2)

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} &= F(u(t)) + \epsilon \text{ “ruido”}, \\ u(0) &= u_0 \in X, \end{cases} \tag{0.3}$$

que define el SDA $\varphi_\epsilon : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times X \to X$, con

$$(H1) \qquad \varphi_\epsilon(t, \theta_{-t}\omega)x \to S(t)x \text{ cuando } \epsilon \searrow 0 \quad P - c.s.$$

uniformemente en los acotados de X. Supongamos que existe una familia decreciente de compactos aleatorios y absorbentes (uniformemente en ϵ) $K_\epsilon(\omega)$ tales que

$$(H2) \qquad \lim_{\epsilon \searrow 0} \operatorname{dist}(K_\epsilon(\omega), K_0) = 0 \quad P - c.s.$$

Entonces el SDA φ_ϵ posee un atractor aleatorio $\mathcal{A}_\epsilon(\omega)$ y, además,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \operatorname{dist}(\mathcal{A}_\epsilon(\omega), \mathcal{A}) = 0 \quad \text{con probabilidad uno.}$$

Merece la pena destacar que este resultado es aplicable en varias situaciones importantes en las que ha sido probada la existencia de atractores aleatorios; concretamente, a las ecuaciones bidimensionales de Navier-Stokes y a ciertas ecuaciones de reacción-difusión, ambas con ruido aditivo (Crauel y Flandoli [22], Crauel et al. [23]). Por otra parte, puesto que existen otros conceptos de atractor para ecuaciones aleatorias (Morimoto [78], Schmalfuss [92]), el resultado anterior revela en nuestra opinión que la generalización del concepto de atractor global realizada en [22] es, como mínimo, adecuada.

Comportamiento finito-dimensional en sistemas dinámicos aleatorios

Tras esta fundamentación, una de las primeras cuestiones que se pueden plantear es la del carácter finito-dimensional de la dinámica asintótica en los SDA. Pensemos que lo que se espera del concepto de atractor aleatorio es que nos ayude a comprender el comportamiento asintótico de ciertas ecuaciones diferenciales estocásticas. Por tanto, una respuesta afirmativa a la pregunta sobre la posible dimensión finita de estos conjuntos nos conduciría a plantearnos, como en el caso determinista, la dependencia del sistema de un número finito de grados de libertad cuando $t \to +\infty$.

A este respecto, existen diversos trabajos que generalizan los resultados deterministas. Entre ellos, debemos destacar básicamente dos trabajos de Debussche, [32], [33], donde se demuestra que, bajo ciertas condiciones y con probabilidad uno, $\mathcal{A}(\omega)$ tiene dimensión finita y también que existen cotas uniformes en ω para esta dimensión en función de los exponentes de Lyapunov asociados al sistema dinámico aleatorio.

En consecuencia, parece lógico preguntarse si será posible obtener un resultado sobre *modos determinantes* (Foias y Prodi [44]) en el marco de la teoría de atractores aleatorios y, si así es, bajo qué condiciones. En otras palabras, si es cierto que el comportamiento asintótico de ciertos sistemas dinámicos con atractores aleatorios asociados está determinado a partir de un número finito de componentes de los *desarrollos de Fourier* de sus trayectorias. Obsérvese que la dependencia respecto de ω de estos conjuntos hace que la unión en esta variable de todos los atractores constituya un conjunto en general no acotado, por lo que no resulta evidente que la prueba de que estos compactos tengan dimensión finita implique la dependencia asintótica del sistema dinámico aleatorio de un número finito de variables. Sin embargo, la idea geométrica del atractor aleatorio como un compacto que evoluciona en t y ω al que todas las trayectorias se acercan cuando el tiempo tiende a $+\infty$, anima a investigar si la evolución de las trayectorias está determinada por un número finito de componentes de Fourier.

En Robinson [88], se desarrolla una demostración para el resultado de modos determinantes en las ecuaciones de Navier-Stokes citado anteriormente, que no descansa en el trabajo directo con las ecuaciones, sino en un resultado teórico de carácter general basado en la denominada *propiedad de aplastamiento o compresión* (del inglés *"squeezing" property*). En esta misma línea y tras una generalización de esta propiedad al caso estocástico, hemos probado un resultado sobre modos determinantes para atractores aleatorios que, de nuevo, puede ser aplicado a las ecuaciones de Navier-Stokes y de reacción-difusión con ruido aditivo.

El resultado dice lo siguiente: Supongamos dado un SDA φ lipschitziano $P-c.s.$ en la variable $x \in X$ uniformemente en $t \in [0,1]$, es decir tal que

$$|\varphi(t,\omega)u_0 - \varphi(t,\omega)v_0| \leq L(\omega)|u_0 - v_0|.$$

Supongamos que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log L(\theta_m\omega) = 0 \quad P-c.s., \tag{0.4}$$

y que φ satisface la propiedad de aplastamiento aleatoria (Cap. 4, Definición 19) y que existe $k \in \mathbb{R}^+$ que verifica

$$\lim_{t\to+\infty} e^{kt}|P_m(\varphi(t,\omega)u_0 - \varphi(t,\omega)v_0)| = 0 \quad P-c.s.,$$

donde P_m es el proyector ortogonal sobre el espacio finito-dimensional generado a partir de los m primeros modos del desarrollo de Fourier de las trayectorias en el espacio X. Entonces

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\hat{k}t}|\varphi(t,\omega)u_0 - \varphi(t,\omega)v_0| = 0 \quad P-c.s.$$

para $\hat{k}$ suficientemente pequeño y $u_0, v_0 \in \mathcal{A}(\omega)$.

Para poder obtener este resultado sobre modos determinantes, es necesario imponer, como se ve, una hipótesis de convergencia exponencial de los m primeros modos. En principio, puede parecer algo muy restrictivo. No sería así si fuéramos capaces de asegurar que la velocidad de convergencia hacia el atractor aleatorio es exponencial. Ello motiva el siguiente de los problemas abordados en esta Memoria.

Atractores exponenciales aleatorios

Por una parte, en los trabajos sobre atractores aleatorios que conocemos, no existen resultados acerca de la velocidad de convergencia de las trayectorias hacia el atractor. No obstante, existen algunos trabajos (Bensoussan y Flandoli [9], Da Prato y Debussche [31], Chuesov y Girya [28]) en los que se prueba la existencia de *variedades inerciales estocásticas*, que atraen las trayectorias con velocidad exponencial cuando $t \to +\infty$. Recordemos que, para definir los atractores aleatorios, hemos tenido que centrarnos en el comportamiento asintótico desde $-\infty$ Esto implica la convergencia en probabilidad cuando $t \to +\infty$. Sin embargo, para una variedad inercial estocástica, se obtiene convergencia $P - c.s.$ cuando $t \to +\infty$. Así, parece existir una correspondencia entre la velocidad de atracción del conjunto atrayente y la convergencia en probabilidad ó $P - c.s.$ En este sentido, presentamos un resultado que muestra equivalencia entre la convergencia $P - c.s.$ hacia el atractor aleatorio cuando $t \to +\infty$ y la convergencia exponencial desde $-\infty$.

Por otra parte, dado que en el campo determinista se conoce la existencia de atractores exponenciales (Eden et al.[36]) para numerosos e importantes ejemplos, parece natural plantear la construcción de un conjunto análogo en el caso estocástico. Así, bajo hipótesis de existencia de un conjunto aleatorio $B(\omega)$ compacto, absorbente e invariante para el SDA φ, se construye un compacto aleatorio $\mathcal{E}(\omega)$, denominado atractor exponencial aleatorio, que, $P - c.s.$, satisface lo que sigue:

i) $\varphi(t,\omega)\mathcal{E}(\omega) \subseteq \mathcal{E}(\theta_t\omega)$ para todo $t \geq 0$ (es decir, es positivamente invariante) y

ii) $\mathrm{dist}(\varphi(t,\theta_{-t}\omega)B, \mathcal{E}(\omega)) \to 0$ cuando $t \to +\infty$, con velocidad exponencial para todo $B \subset X$ acotado (atracción exponencial desde "$-\infty$").

La condición impuesta (existencia de $B(\omega)$) se verifica en interesantes ejemplos de la literatura (Arnold y Schmalfuss [5], Schmalfuss [94], [97], Schenk-Hoppé [91])

Además del interés que por sí mismo tiene la generalización al campo estocástico del concepto de atractor exponencial, merece la pena señalar dos importantes consecuencias.

En primer lugar, la convergencia $P - c.s.$ cuando $t \to +\infty$ de las trayectorias, lo cual da una idea geométrica del comportamiento asintótico de estos sistemas. En segundo lugar, la condición de convergencia exponencial impuesta en el resultado sobre modos determinantes que antes expusimos resulta mucho más natural si se conoce la existencia de atractores exponenciales aleatorios.

Propiedades de seguimiento

Por último, este resultado sobre modos determinantes hace especialmente interesante el estudio de la dinámica del sistema sobre conjuntos atrayentes aleatorios, pues se trata de conjuntos finito-dimensionales que determinan el comportamiento asintótico de todo el sistema. Motivados por los resultados sobre seguimiento de trayectorias obtenidos en el Cap. 1 de esta Memoria, abordamos esta cuestión en el marco estocástico. Aunque en esta ocasión el atractor aleatorio es un compacto que evoluciona en el tiempo, la dinámica que en él se desarrolla va a ser, con probabilidad muy alta, equivalente a la del sistema dinámico. Sin embargo, que la convergencia hacia el atractor aleatorio cuando $t \to +\infty$ sea en probabilidad y no $P - c.s.$ conduce a un resultado de seguimiento de trayectorias no totalmente satisfactorio (bajo la hipótesis de que el atractor aleatorio atrae a velocidad exponencial, el resultado determinista de seguimiento de trayectorias del sistema por trayectorias a trozos sobre el atractor puede ser generalizado a esta situación con probabilidad uno).

El concepto de completitud asintótica para variedades inerciales es el que mejor describe geométricamente la dinámica del sistema en relación con la que acontece sobre la variedad. Por ello, en la línea de lo anteriormente expuesto, en el resultado final de esta Memoria probamos que, en condiciones análogas a las del caso determinista, es posible obtener la propiedad de completitud asintótica para variedades inerciales estocásticas asociadas a ciertas ecuaciones diferenciales estocásticas.

Para finalizar, describiremos brevemente la forma en que hemos estructurado este trabajo.

En el Capítulo 1, presentamos una síntesis de los resultados básicos sobre atractores globales que pueden encontrarse en la literatura sobre este tema. Una de las propiedades más interesantes de estos compactos es la finitud de su dimensión, por la relación existente entre ésta y el número de grados de libertad en el comportamiento asintótico del sistema. Ello motiva los resultados que probamos a continuación sobre seguimiento de trayectorias del sistema a partir de la dinámica en conjuntos atrayentes (Langa y Robinson [69]).

Antes de presentar el resto de resultados que componen esta Memoria, ha sido necesario exponer de manera resumida los conceptos y herramientas fundamentales usados en el análisis de ecuaciones diferenciales estocásticas y sistemas dinámicos aleatorios. Ello aparece en el Capítulo 2, en el que especial atención hemos puesto en el desarrollo de este último concepto y en la aportación que supone a la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas.

En la primera sección del Capítulo 3, se presenta la teoría de atractores aleatorios tal y como ha sido desarrollada por Crauel y Flandoli en [22]. Debido a la novedad de este concepto, hemos motivado su presentación relacionándolo con otros resultados aparecidos con anterioridad. A continuación, se prueba un resultado de semicontinuidad superior cuando $\epsilon \to 0$ de atractores aleatorios $\mathcal{A}_\epsilon(\omega)$, asociados a una perturbación aleatoria de una ecuación diferencial (Caraballo, Langa y Robinson [14]).

El hecho de que, con carácter general, se espera que el atractor aleatorio $\mathcal{A}(\omega)$ tenga dimensión finita motiva el estudio sobre modos determinantes que realizamos en el Capítulo 4. De esta forma, mostramos que el comportamiento asintótico de ciertos sistemas dinámicos aleatorios depende de un número finito de grados de libertad (Flandoli y Langa [43]).

El Capítulo 5 presenta la construcción general de un atractor exponencial aleatorio a partir de un atractor aleatorio, generalizando de esta manera la teoría sobre atractores exponenciales del caso determinista. Importantes consecuencias se obtienen de este nuevo concepto, en especial que, con probabilidad uno, el atractor exponencial aleatorio atraiga cuando $t \to +\infty$ a las trayectorias que comienzan en conjuntos acotados (Caraballo y Langa [15]).

Finalmente, el Capítulo 6 generaliza al campo estocástico los resultados sobre seguimiento de trayectorias que fueron probados en el Capítulo 1. Mostramos cómo la dinámica en conjuntos aleatorios atrayentes está estrechamente relacionada con la que desarrolla el SDA cuando $t \to +\infty$ (Caraballo y Langa [16]). Esto conduce al que, en nuestra opinión, es uno de los problemas abiertos más interesantes en la teoría de atractores (aleatorios y deterministas), presentado en el Apéndice. En pocas palabras, se trata de saber si es posible encontrar un sistema diferencial ordinario capaz de describir la dinámica sobre el atractor y, por tanto, la dinámica asintótica de las trayectorias de un sistema dinámico de dimensión infinita.

Capítulo 1

Atractores en sistemas dinámicos

Presentamos en este capítulo una síntesis de los resultados principales sobre la teoría de atractores globales. En la Sección 1.1, desarrollamos una de las propiedades más interesantes en relación con los atractores globales: la finitud de su dimensión. Ello está ligado con el número de grados de libertad del sistema cuando $t \to +\infty$. Motivados por esta idea, probamos algunos resultados sobre seguimiento de trayectorias del sistema a partir de la dinámica existente sobre el atractor global. Justificamos a continuación la necesidad de introducir otros conjuntos atrayentes (variedades inerciales y atractores exponenciales), en los cuales también analizamos propiedades de seguimiento.

1.1 Teoría general de atractores globales

Las ecuaciones en derivadas parciales permiten modelar numerosos fenómenos en disciplinas científicas diversas. La dependencia de la incógnita respecto de dos o más variables complica e impide, salvo en un número muy limitado de situaciones, la resolución exacta. Por consiguiente, son muy interesantes todos aquellos conceptos y herramientas que ayuden a comprender la dinámica de este tipo de ecuaciones. La teoría de atractores globales constituye una de estas herramientas.

A lo largo de esta Memoria, consideraremos problemas de valores iniciales con la estructura siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) + f(u) &= 0, \\ u(0) &= u_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Aquí, se suponen dados un espacio de Hilbert X, de norma $|\cdot|$ y producto escalar $(\cdot,\cdot)$ (la distancia inducida por esta norma será denotada $d(\cdot,\cdot)$), un operador lineal no acotado $A : D(A) \subset X \to X$ de dominio denso y autoadjunto que posee inverso A^{-1} compacto y un dato inicial $u_0 \in X$. Se supone además que $f : X \mapsto X$ es una función que verifica

$$f : D(A^\alpha) \to D(A^\beta), \quad 0 \leq \alpha - \beta < 1, \quad \text{es localmente lipschitziana} \tag{1.2}$$

para $0 \leq \alpha - \beta < 1$. En (1.2), $D(A^\alpha)$ y $D(A^\beta)$ son espacios de Hilbert definidos a partir de A como sigue

$$D(A^\gamma) = \{u \in X\,;\ |A^\gamma u| < +\infty\}$$

(por definición

$$A^\gamma u = A^\gamma \sum_{n\geq 1}(u, e_n)e_n = \sum_{n\geq 1}(u, e_n)\lambda_n^\gamma e_n;$$

en las condiciones precedentes, los valores propios de A, $0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots$ forman una sucesión que crece hacia $+\infty$, y existe una base ortonormal de X formada por vectores propios; cada $D(A^\gamma)$ está dotado del producto escalar "natural"

$$(u, v)_{D(A^\gamma)} = (A^\gamma u, A^\gamma v),$$

que hace de él un espacio de Hilbert; cf. Renardy y Rogers [81].

Por definición, una solución débil de (1.1) en $[0, +\infty)$ es una función $u \in C^0([0, +\infty); X)$ que verifica

$$u(t) = e^{-At}u_0 - \int_0^t e^{-A(t-s)} f(u(s))\, ds \quad \forall t \in [0, +\infty),$$

donde e^{-tA} es el semigrupo generado por A en X.

Podemos enunciar el siguiente resultado sobre existencia y unicidad de solución (Henry [60]):

Teorema 1 *En las condiciones precedentes, existe una única solución débil $u \in C^0([0, +\infty); X)$ del problema (1.1) en $[0, +\infty)$.*

Nuestro interés principal está en analizar el comportamiento de las soluciones de (1.1) cuando el espacio de fases X es de dimensión infinita. Esto corresponde al caso de una ecuación en derivadas parciales (X es un espacio de funciones en las variables "espaciales" $x_1, \ldots, x_n$). Las elecciones más frecuentes serán aquéllas en las que X es un subespacio de

$$L^2(D) = \{u : \int_D |u(x)|^2\, dx < +\infty\}$$

donde $D \subset \mathbb{R}^n$ es el abierto donde toman valores las variables x_i. Recuérdese que $L^2(D)$ puede ser observado como el completado de $C_0^\infty(D)$ para la norma asociada al producto escalar:

$$(u, v) = \int_D u(x)v(x)\, dx,$$

esto es

$$|u| = (u, u)^{1/2} = (\int_D |u(x)|^2\, dx)^{1/2}.$$

Si $D \subset \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ es un multíndice, denotaremos $D^\alpha u$ la derivada de orden α de u, es decir

$$D^\alpha u = D_{x_1}^{\alpha_1} \cdots D_{x_n}^{\alpha_n} u,$$

siendo $D_{x_i} u$ la derivada en el sentido de las distribuciones de u respecto de x_i.

Esto permite definir los espacios de Sobolev:

$$H^m(D) = \{u : D^\alpha u \in L^2(D),\ |\alpha| \leq m\},$$

donde m es un entero mayor o igual que uno. Dotado del producto escalar

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

y la norma

$$|u|_{H^m} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v) \right)^{1/2},$$

el espacio vectorial $H^m(D)$ se convierte en un espacio de Hilbert separable. Éste, junto con $H_0^m(D)$, la clausura de $C_0^\infty(D)$ en $H^m(D)$, será el espacio que con más frecuencia utilizaremos en esta Memoria.

Desde nuestro punto de vista, la interpretación de (1.1) es más clara si el modelo es observado como un sistema que evoluciona en el tiempo. Para cada t, se puede definir la aplicación (no lineal en general)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t): X &\longrightarrow X \\ u_0 &\mapsto \mathcal{S}(t)u_0 \end{aligned}$$

donde $\mathcal{S}(t)u_0 = u(t; u_0)$ es el valor de la solución débil de (1.1) en el tiempo t. La *semi-trayectoria positiva* $\gamma^+(u_0) = \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{S}(t)u_0$ describe la dinámica del sistema en el espacio de fases X cuando el dato inicial es u_0. Se llama *trayectoria completa* pasando por u_0 a toda función $u(t, \cdot)$, definida para $t \in \mathbb{R}$, que verifique $u(t; u_0) = \mathcal{S}(t)u_0$ y $\mathcal{S}(t)u(s; u_0) = u(t + s; u_0)$ para $t \geq 0$ y $s \in \mathbb{R}$ (caso de que exista).

El par $(\{\mathcal{S}(t)\}_{t \geq 0}, X)$ se denomina *sistema dinámico* asociado a la ecuación (1.1). Es claro que $\{\mathcal{S}(t)\}$ satisface las propiedades de un semigrupo de operadores sobre X de clase C^0, es decir

i) $\mathcal{S}(0) = \mathrm{Id}$.

ii) $\mathcal{S}(t + s)u_0 = \mathcal{S}(t)\mathcal{S}(s)u_0 \quad \forall u_0 \in X$,

iii) $t \mapsto \mathcal{S}(t)u_0$ es continua en $[0, +\infty)$, $\forall u_0 \in X$.

En numerosos modelos observamos una pérdida de energía debido, por ejemplo, a fricción, calor desprendido, etc., que provoca el confinamiento de la dinámica del sistema en una determinada región del espacio de fases. Desde el punto de vista matemático, la disipación se define a partir de la *absorción*

Definición 1 *Se dice que un sistema dinámico $(\{\mathcal{S}(t)\}_{t \geq 0}, X)$ es disipativo si existe un conjunto absorbente B, esto es, un acotado de X tal que, para cada $D \subset X$ acotado, existe t_D con la propiedad siguiente:*

$$\text{Si } t \geq t_D, \text{ entonces } \quad \mathcal{S}(t)D \subseteq B.$$

Aquí, hemos usado la notación $\mathcal{S}(t)D = \bigcup_{u_0 \in D} \mathcal{S}(t)u_0$.

Las trayectorias de un sistema dinámico disipativo que comienzan en un acotado están a partir de cierto instante en el conjunto absorbente B. Luego la dinámica del sistema ocurrirá principalmente en este conjunto, existiendo sólo un comportamiento transitorio en el exterior de B. No obstante, existe aún un conjunto más pequeño en el que acontece la dinámica asintótica (i.e. cuando $t \to +\infty$) del sistema, al que denominaremos *atractor global.*

Definición 2 *Un atractor global para el sistema dinámico* $(\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}, X)$ *es un conjunto compacto* $\mathcal{A} \subset X$ *que verifica*

i) $\mathcal{S}(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ *para todo* $t \geq 0$ *(invariante),*

ii) $\mathcal{A}$ *atrae a los acotados de* X*, es decir*

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(\mathcal{S}(t)D, \mathcal{A}) = 0 \quad \textit{para todo } D \subset X \textit{ acotado.}$$

En la definición anterior, dist(.,.) denota la semidistancia de Hausdorff

$$\operatorname{dist}(A, B) = \sup_{a\in A} d(a, B), \quad \text{con} \quad d(a, B) = \inf_{b\in B} d(a, b),$$

sobre el espacio métrico (X, d). La métrica de Hausdorff se define como sigue:

$$\delta(A, B) = \sup\{\operatorname{dist}(A, B), \operatorname{dist}(B, A)\}.$$

Evidentemente, si existe un atractor global para el sistema dinámico, es único. La existencia de un conjunto absorbente es condición suficiente para la existencia de atractor global en el contexto de los sistemas diferenciales ordinarios (Hale [55]). En estos casos, el espacio de fases es $\mathbb{R}^n$ y existe, por tanto, una estrecha relación entre compacidad y acotación. Sin embargo, si el espacio es de dimensión infinita, un conjunto cerrado y acotado no es necesariamente compacto, por lo que el resultado general sobre existencia de atractor global necesita una hipótesis de compacidad adicional (Babin y Vishik [8], Ladyzhenskaya [68], Constantin et al. [18], Hale [55], Temam [101]):

Teorema 2 *Supongamos que* $(\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}, X)$ *es disipativo, que* B *es absorbente y que existe* $t_0 \geq 0$ *tal que*

$$\overline{\gamma^+_{t_0}(B)} := \overline{\bigcup_{t\geq t_0} \mathcal{S}(t)B}$$

es compacto. Entonces el conjunto

$$\mathcal{A} = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq T} S(t)B}$$

es el atractor global asociado a (1.1).

El siguiente resultado resume algunas de las propiedades del atractor global (Hale [55], Temam [101]):

Teorema 3 *En las condiciones del teorema anterior, el atractor global $\mathcal{A}$ verifica:*

a) $\mathcal{A} = \bigcup_{D \in \mathcal{G}} \Lambda(D)$, *donde $\mathcal{G}$ denota la familia de los acotados de X y, para cada D, $\Lambda(D)$ denota el conjunto ω-límite de D, i.e.*

$$\begin{aligned} \Lambda(D) &= \bigcap_{T \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq T} S(t)D} \\ &= \{y \in X : \exists t_n \nearrow +\infty,\ x_n \in D \quad \text{con} \quad \lim_{n\to\infty} S(t_n)x_n = y\}. \end{aligned}$$

b) $\mathcal{A} = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} \Lambda(K)$, *donde $\mathcal{K}$ es la familia de los compactos de X.*

c) $\mathcal{A}$ es la unión de todas las trayectorias completas.

d) $\mathcal{A}$ es el menor conjunto compacto que atrae los acotados de X.

e) $\mathcal{A}$ es el mayor conjunto acotado e invariante para el semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

f) Si X es conexo, $\mathcal{A}$ también lo es.

En el resto de este capítulo, supondremos dado un sistema dinámico en las condiciones del teorema 3. Esto permitirá asegurar en cada momento que existe el atractor global $\mathcal{A}$. En la actualidad, la teoría de atractores es una disciplina que ha ido dando lugar a diversas ramificaciones, ampliaciones y generalizaciones, contribuyendo de manera decisiva al estudio del comportamiento asintótico de numerosos sistemas dinámicos.

Sabemos que existe relación entre compacidad y "dimensión" finita. Por tanto, es natural esperar que un atractor compacto pueda tener "dimensión" finita. Aclaremos qué conceptos de dimensión usaremos en esta Memoria.

La *dimensión de Hausdorff* se define a partir de la *medida de Hausdorff*. Aunque desde un punto de vista computacional es a veces difícil de manejar, tiene la ventaja de estar definida para conjuntos de máxima generalidad de X.

Dados un conjunto $D \subset X$ y $\epsilon > 0$, pondremos

$$\mu(D; d, \epsilon) = \inf\{\sum_{i \in \mathcal{I}} r_i^d;\ D \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}} B(x_i; r_i),\ r_i \leq \epsilon\}. \tag{1.3}$$

Evidentemente, $\mu(D; d, \cdot)$ es decreciente en ϵ. A partir de este número, se define la medida de Hausdorff d-dimensional de D

$$\mu(D; d) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \mu(D; d, \epsilon) = \sup_{\epsilon > 0} \mu(D; d, \epsilon).$$

Finalmente, la dimensión de Hausdorff viene dada por

$$\dim_H(D) = \inf\{d;\ \mu(D; d) = 0\}.$$

Obsérvese que, si $D \subset X$ es no vacío y $0 < \dim_H(D) < +\infty$, entonces $\mu(D; d) = 0$ para $d > dim_H(D)$ y $\mu(D; d) = +\infty$ para $d < dim_H(D)$. La medida de Hausdorff permite definir la dimensión de los subconjuntos de X de manera que coincida con la dimensión topológica para los conjuntos regulares, es decir, la dimensión de un punto es cero, la de una curva regular es 1, la de una superficie regular es 2, etc. (Wallman y Hurewicz [103]).

La *dimensión fractal* para conjuntos compactos de X puede definirse de manera análoga a la dimensión de Hausdorff, considerando en (1.3) recubrimientos con bolas de radio exactamente igual a ϵ. No obstante, la siguiente definición de dimensión fractal de un conjunto D, $\dim_f(D)$, es equivalente:

$$\dim_f(D) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{\log \mathcal{N}_\epsilon(D)}{\log(1/\epsilon)},$$

donde $\mathcal{N}_\epsilon(D)$ denota el menor número de bolas de radio ϵ necesarias para recubrir D.

En general, $\dim_H(D) \leq \dim_f(D)$, existiendo ejemplos donde la desigualdad es estricta, pudiendo incluso darse el caso de ser $\dim_H(D) = 0$ y $\dim_f(D) = +\infty$ (Eden et al. [36]).

En Mallet-Paret [72] aparece el siguiente resultado sobre la dimensión finita de un conjunto compacto K:

Teorema 4 *Sea $K \subset X$ un conjunto compacto y $T : X \to X$ una aplicación cuya derivada DT es la suma de una aplicación compacta y una contracción. Entonces, si K es negativamente invariante para T, es decir $K \subseteq TK$, la dimensión de Hausdorff de K es finita.*

Una consecuencia es el siguiente resultado:

Teorema 5 *Supongamos que $(\{S(t)\}_{t \geq 0}, X)$ posee un conjunto B absorbente y compacto. Entonces la dimensión de Hausdorff del atractor global $\mathcal{A}$ es finita.*

En las aplicaciones, la idea básica para probar la compacidad del conjunto absorbente reside en demostrar que el sistema dinámico es disipativo en un espacio V que se inyecta de forma compacta en X (Temam [101]). De esta manera, el conjunto acotado y absorbente en V constituirá un compacto absorbente de X.

El teorema anterior se podía haber completado dando una cota superior de la dimensión del atractor. Existen numerosos trabajos que proporcionan información sobre esta cuestión (Babin y Vishik [7], Constantin y Foias [18], Ladyzhenskaya [68], Temam [101]).

La importancia de que el atractor sea un conjunto de dimensión finita reside en la relación existente entre esta dimensión y el número de grados de libertad de los que, a largo plazo, depende el sistema. La dependencia asintótica del sistema de un número finito de variables es uno de los objetivos perseguidos por la teoría de sistemas dinámicos asociados a ecuaciones en derivadas parciales y constituye la motivación principal de esta Memoria. No obstante, el primer resultado sobre comportamiento asintótico finito-dimensional apareció en 1967 en un trabajo de Foias y Prodi [44] y es anterior al desarrollo de la teoría de atractores. Allí se analiza la evolución de dos trayectorias para las ecuaciones bidimensionales de Navier-Stokes y su dependencia respecto de los N primeros términos de sus desarrollos de Fourier. Por su importancia, enunciamos aquí el resultado principal conseguido:

Teorema 6 *(Foias y Prodi, 1967)*
Sean $u(t)$, $v(t)$ dos soluciones de las ecuaciones bidimensionales de Navier-Stokes.

Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si

$$|P_N(u(t) - v(t))| \to 0 \quad \textit{cuando} \quad t \to +\infty,$$

entonces

$$|u(t) - v(t)| \to 0 \quad \textit{cuando} \quad t \to +\infty.$$

Aquí, $P_N : H \to P_N H$ es el proyector ortogonal asociado a los N primeros modos del desarrollo de Fourier [1].

1.2 Comportamiento finito-dimensional en sistemas dinámicos.

1.2.1 Otros conjuntos atrayentes: variedades inerciales y atractores exponenciales

El teorema 6 da una idea del comportamiento asintótico finito-dimensional que puede tener una ecuación en derivadas parciales disipativa. Podemos esperar que la dinámica en el atractor proporcione información sobre el comportamiento del sistema dinámico cuando $t \to +\infty$. Además, por ser el atractor un conjunto invariante de dimensión finita, también podemos esperar que la evolución de las trayectorias en este compacto dependa sólo de un número finito de grados de libertad. Llegados a este punto, la pregunta que podemos hacernos (que hoy continúa esencialmente abierta) es: Bajo qué condiciones es posible encontrar un sistema diferencial ordinario que represente la dinámica en el atractor? Pretendemos que el comportamiento asintótico de las soluciones de nuestra ecuación en derivadas parciales pueda ser descrito a partir de las trayectorias generadas por dicho sistema diferencial ordinario.

Los mejores resultados en este sentido se pueden encontrar en la teoría de *variedades inerciales*.

Definición 3 *Una variedad inercial $\mathcal{M}$ para el sistema dinámico $(\{S(t)\}_{t\geq 0}, X)$ es una variedad lipschitziana, finito-dimensional y positivamente invariante (es decir*

[1] Ver Capítulo 3 para la definición de H y la formulación precisa del problema.

$\mathcal{S}(t)\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}, \forall t \geq 0$) *que atrae todas las órbitas con velocidad exponencial, uniformemente sobre acotados, i.e. verifica: Para cada* $D \in \mathcal{G}$, *existen constantes positivas* $k > 0$ *y* $C(D)$ *tales que*

$$\mathrm{dist}(\mathcal{S}(t)u_0, \mathcal{M}) \leq C(D)e^{-kt} \quad \forall t \geq 0, \forall u_0 \in D.$$

El concepto de variedad inercial fue introducido por Foias, Sell y Temam [48], [49] en un intento de describir con detalle el comportamiento asintótico de las ecuaciones de Navier-Stokes. La razón es que, aunque el atractor es un compacto *relativamente pequeño* que proporciona información sobre la situación del sistema a largo plazo, su topología y estructura es poco conocida. Esto hace complicado un estudio de la dinámica sobre el mismo. En algunos casos, como en el atractor de Lorenz (Lorenz [71]), se ha podido probar que posee estructura cantoriana (Guckenheimer y Holmes [54]), excesivamente compleja para nuestros propósitos.

La idea de Foias et al. en [48] fue incluir el atractor en una variedad regular invariante, de manera que las trayectorias de las soluciones de la ecuación diferencial pudieran ser proyectadas sobre la misma. Al contener al atractor, evidentemente esta variedad también es un conjunto atrayente. En todos los trabajos sobre variedades inerciales, se supone que éstas son de la forma:

$$\mathcal{M} = \mathcal{G}[\phi] = \{p + \phi(p) : p \in P_m X\},$$

donde $\phi : P_m X \longrightarrow (I - P_m)X$ es una función lipschitziana y P_m es el operador de proyección sobre un subespacio de dimensión finita. Si ponemos $u = P_m u + (I - P_m)u = p + q$, para cada $u \in X$, resulta que sobre la variedad inercial esta relación se convierte en $u = p + \phi(p)$, dando así la idea de que los primeros m modos *capturan* y describen la evolución de los restantes. En el contexto de las variedades inerciales, los resultados sobre modos determinantes son casi inmediatos. En efecto:

Lema 1 *Supongamos que* $\mathcal{M}$ *es una variedad inercial, dada por el grafo de una determinada función lipschitziana* $\phi : P_m X \to (I - P_m)X$, *con constante de Lipschitz* L. *Entonces, si* $u_0, v_0 \in X$ *y*

$$|P_m u(t; u_0) - P_m u(t; v_0)| \longrightarrow 0 \quad \textit{cuando} \quad t \to +\infty$$

también se tiene que

$$|u(t;u_0) - u(t;v_0)| \longrightarrow 0 \quad \textit{cuando} \quad t \to +\infty.$$

Idea de la demostración: Robinson probó en [89] el siguiente resultado de equivalencia para la atracción sobre la variedad inercial: En las condiciones del lema,

$$\operatorname{dist}(u(t;u_0), \mathcal{M}) \leq C(u_0)e^{-kt} \Leftrightarrow \operatorname{dist}(q(t), \phi(p(t))) \leq D(u_0)e^{-kt}, \tag{1.4}$$

donde hemos puesto $p(t) = P_m u(t;u_0)$, $q(t) = Q_m u(t;u_0) = (I - P_m)u(t;u_0)$.

Sean ahora u_0 y v_0 como en el lema y pongamos $u(t;u_0) = p(t) + q(t)$ y $u(t;v_0) = \tilde{p}(t) + \tilde{q}(t)$. Entonces

$$|p(t) - \tilde{p}(t)| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \to +\infty.$$

Pero esto implica, por ser ϕ lipschitziana, que

$$|\phi(p(t)) - \phi(\tilde{p}(t))| \leq L|p(t) - \tilde{p}(t)| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \to +\infty \tag{1.5}$$

y, por tanto,

$$|q(t) - \tilde{q}(t)| \leq |q(t) - \phi(p(t))| + |\phi(p(t)) - \phi(\tilde{p}(t))| + |\phi(\tilde{p}(t)) - \tilde{q}(t)|$$

y tiende a cero, por (1.4) y (1.5).

□

En la teoría de variedades inerciales, los resultados de existencia utilizan como hipótesis fundamental una propiedad sobre el espectro del operador lineal A conocida como *condición espectral de salto* (Foias et al. [49]): la diferencia de dos autovalores consecutivos del operador A debe mantenerse acotada inferiormente como sigue

$$\lambda_{m+1} - \lambda_m > 2C(\lambda_{m+1}^{\alpha-\beta} + \lambda_m^{\alpha-\beta}),$$

donde C es la constante de Lipschitz de la función f. Obsérvese que $\lambda_m \to +\infty$ cuando $m \to \infty$. La condición es excesivamente fuerte. Prueba de ello es que aún no se ha podido probar que, por ejemplo, para las ecuaciones bidimensionales de Navier-Stokes exista variedad inercial. Así, ha sido necesario introducir nuevos conceptos para el análisis asintótico correspondiente, entre ellos los de *variedad inercial aproximada*

(Foias et al. [50]) y *atractor exponencial* (Eden et al. [34]). No obstante, la teoría de variedades inerciales ha sido desarrollada con éxito para una gran cantidad de ecuaciones en derivadas parciales motivadas por problemas de diferentes disciplinas (cf. Constantin et al. [19], Mallet-Paret y Sell [73], Robinson [89] Chow et al. [27]).

Supongamos que $\mathcal{M}$ es una variedad inercial, dada por el grafo de una determinada función ϕ. Si se proyecta con P_m la ecuación diferencial

$$\frac{du}{dt} + Au + f(u) = 0 \tag{1.6}$$

sobre la variedad inercial, se obtiene la siguiente ecuación sobre P_mX

$$\frac{dp}{dt} + Ap + P_m f(p + \phi(p)) = 0. \tag{1.7}$$

Dado que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, podemos afirmar que hay una estrecha relación entre la dinámica del sistema cuando $t \to +\infty$ y la que se da sobre la variedad inercial. Desde un punto de vista geométrico, esta idea se expresaría con mucha más exactitud si fuéramos capaces de probar que cada trayectoria en X tiende asintóticamente a una trayectoria que se mueve sobre la variedad inercial (ver Foias et al. [51], Robinson [84]) y que, por tanto, está descrita por una solución de la ecuación (1.7). Todo ello justifica la siguiente

Definición 4 *Se dice que la variedad inercial $\mathcal{M}$ es asintóticamente completa si, para cada condición inicial $u_0 \in X$, existe un dato inicial $v_0 \in \mathcal{M}$ tal que*

$$|\mathcal{S}(t)u_0 - \mathcal{S}(t)v_0| \longrightarrow 0 \quad \textit{cuando} \quad t \to +\infty.$$

Una condición suficiente para que una variedad inercial sea asintóticamente completa puede encontrarse en Robinson [84].

Como hemos indicado anteriormente, resulta conveniente introducir conceptos distintos al de variedad inercial en algunos contextos, por ejemplo en el de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Definición 5 *Un atractor exponencial $\mathcal{E}$ para el sistema dinámico $(\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}, X)$ es un conjunto positivamente invariante ($\mathcal{S}(t)\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$, $\forall t \geq 0$) que contiene al atractor global $\mathcal{A}$ y atrae todas las órbitas con velocidad exponencial.*

Los resultados que siguen a continuación persiguen como objetivo analizar propiedades de seguimiento en atractores globales y en atractores exponenciales.

1.2.2 Propiedad de seguimiento de trayectorias en atractores globales

En este apartado, demostramos un resultado que relaciona la dinámica en el atractor global con la que se da en el espacio de fases. Se trata de una propiedad más débil que la de completitud asintótica, mencionada más arriba. Garantiza que toda trayectoria tiende hacia una *trayectoria a trozos* o *pseudo-trayectoria* contenida en el atractor. Dicho de otra forma, la dinámica en el atractor *sigue* de manera aproximada la observada asintóticamente en el espacio de fases. Esto quedará expresado como corolario de la siguiente

Proposición 1 *Dados una solución u de (1.6), $\epsilon > 0$ y $T > 0$, existe un tiempo $\tau = \tau(\epsilon, T) > 0$ y existe $v_0 \in \mathcal{A}$ tales que*

$$|u(\tau + t) - S(t)v_0|_\alpha \leq \epsilon \quad \textit{para todo } 0 \leq t \leq T. \tag{1.8}$$

Demostración. El resultado es consecuencia del que sigue sobre dependencia continua de soluciones respecto de datos iniciales (cf. Henry [60]):

"*Sea B un conjunto absorbente y sean u_1, u_2 dos soluciones de (1.6) correspondientes a los datos iniciales $u_1(0)$, $u_2(0) \in B$. Entonces existe $k > 0$ (que depende de α, β y la constante de Lipschitz de f en B) tal que*

$$|u_1(t) - u_2(t)|_\alpha \leq |u_1(0) - u_2(0)|_\alpha \, e^{kt^{1-(\alpha-\beta)}} \quad \textit{para todo} \;\; t \geq 0.\text{"} \tag{1.9}$$

Para demostrar (1.9),

$$u_i(t) = e^{-At}u_i(0) + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(u_i(s))\, ds, \;\; \forall t \in [0, +\infty), \;\; i = 1, 2.$$

Poniendo $\delta(t) = u_1(t) - u_2(t)$, se tiene

$$\delta(t) = e^{-At}\delta(0) + \int_0^t e^{-A(t-s)}(f(u_1(s)) - f(u_2(s)))\, ds.$$

Queremos ver cómo se separan en $D(A^\alpha)$ las trayectorias de u_1 y u_2. Tomando normas en $D(A^\alpha)$, resulta

$$\begin{aligned} |A^\alpha \delta(t)| &\leq |A^\alpha e^{-At}\delta(0)| + \textstyle\int_0^t |A^\alpha e^{-A(t-s)}(f(u_1) - f(u_2))|\, ds \\ &\leq \|e^{-At}\|_{op}|A^\alpha \delta(0)| + \textstyle\int_0^t \|A^{\alpha-\beta} e^{-A(t-s)}\|\, |A^\beta (f(u_1) - f(u_2))|\, ds \end{aligned}$$

y, por el lema 3.1 de Foias et al.[49],

$$|A^\alpha \delta(t)| \leq |\delta(0)|_\alpha + C(\alpha-\beta) \int_0^t (t-s)^{-(\alpha-\beta)} |u_1(s) - u_2(s)|_\alpha\, ds.$$

Así, gracias al lema de Gronwall, resulta que

$$|\delta(t)|_\alpha \leq |\delta(0)|_\alpha e^{kt^\theta},$$

donde $k = \frac{1}{\theta}C(\alpha-\beta)$ y $\theta = 1-(\alpha-\beta)$.

A partir de este resultado, no es difícil deducir la proposición. En efecto, como $\mathcal{A}$ es el atractor global, la trayectoria $u = u(t)$ tiende hacia $\mathcal{A}$. Así, dado $\epsilon > 0$ y $T > 0$, y usando la compacidad de $\mathcal{A}$, existe un tiempo τ y un punto $v_0 \in \mathcal{A}$ tales que

$$\operatorname{dist}(u(\tau), \mathcal{A}) = |u(\tau) - v_0|_\alpha \leq \epsilon e^{-kT^\theta}. \tag{1.10}$$

Consideremos ahora la trayectoria $v = v(t)$ en $\mathcal{A}$ con dato inicial $v(0) = v_0$. Entonces las trayectorias $u(t)$ (observada como una trayectoria que comienza en $u(\tau)$) y $v(t) = S(t)v_0$ verifican,

$$\begin{aligned} |u(\tau+t) - v(t)|_\alpha &\leq |u(\tau) - v_0)|_\alpha e^{kt^\theta}, \text{ para todo } t \geq 0 \\ &\leq |u(\tau) - v_0|_\alpha e^{kT^\theta} \text{ para } 0 \leq t \leq T \qquad (1.11) \\ &\leq \epsilon, \end{aligned}$$

gracias a (1.9)-(1.10). □

La demostración precedente proporciona algo más de información pues es claro que, dados ϵ_1 y $T > 0$, existe un tiempo τ_1 tal que, para todo $t \geq \tau_1$,

$$\operatorname{dist}(u(t), \mathcal{A}) \leq \epsilon_1 e^{-kT^\theta}.$$

Así, se puede seguir la trayectoria $u(t)$ con error $\leq \epsilon_1$ durante un tiempo T comenzando en cualquier tiempo $t \geq \tau_1$. Podemos reemplazar T por $2T$ y aplicar el mismo argumento para $\epsilon_2 < \epsilon_1$. Esto es, existe un tiempo τ_2 tal que, para todo $t \geq \tau_2$

$$\operatorname{dist}(u(t), \mathcal{A}) \leq \epsilon_2 e^{-k(2T)^\theta},$$

y, por tanto, u puede ser seguida durante un tiempo $2T$ con error $\leq \epsilon_2$ comenzando en cualquier tiempo $t \geq \tau_2$.

Obsérvese que $u(t)$ puede ser seguida desde τ_1 a τ_2 a distancia $\leq \epsilon_1$ mediante un número finito de trajectorias sobre $\mathcal{A}$, cada una de ellas durante un tiempo T. Cuando alcanzamos τ_2, podemos de nuevo seguir $u(t)$ a una distancia $\leq \epsilon_2$ con trayectorias sobre $\mathcal{A}$, cada una de ellas durante un tiempo $2T$, hasta alcanzar el correspondiente τ_3, etc. Además, observemos que para dos de estas trayectorias consecutivas sobre $\mathcal{A}$, los *saltos* están acotados por $\epsilon_k + \epsilon_{k+1}$, pues,

$$\begin{aligned}
&|v_{k+1} - S(t_{k+1} - t_k)v_k|_\alpha \\
&\leq |v_{k+1} - u(t_{k+1})|_\alpha + |u(t_k + (t_{k+1} - t_k)) - S(t_{k+1} - t_k)v_k|_\alpha \\
&\leq \epsilon_{k+1} + \epsilon_k.
\end{aligned}$$

Aplicando de forma inductiva este proceso, se obtiene el siguiente:

Corolario 1 *Dada una solución $u = u(t)$ de (1.6), existen $\{\epsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\epsilon_m > 0$, $\epsilon_m \searrow 0$, una sucesión de tiempos $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ y una sucesión de puntos $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$, con $v_m \in \mathcal{A}$, tales que*

$$t_{m+1} > t_m, \ \forall m \in N, \quad t_{m+1} - t_m \to +\infty \ \textit{cuando} \ m \to \infty,$$

y

$$|u(t) - S(t - t_m)v_m|_\alpha \leq \epsilon_m \quad \textit{para todo} \ \ t_m \leq t \leq t_{m+1}.$$

Además, los saltos $|v_{m+1} - S(t_{m+1} - t_m)v_m|_\alpha$ decrecen a cero.

Notemos que nuestra sucesión de tiempos $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ verifica $t_{m+1} - t_m \to +\infty$, por lo que la trayectoria $u(t)$ es seguida cada vez más de cerca durante períodos de tiempo cada vez mayores a medida que m tiende a $+\infty$.

Este resultado muestra cómo la dinámica en $\mathcal{A}$ aproxima el comportamiento asintótico que observamos en X. La construcción de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias cuya dinámica sea la que se da en $\mathcal{A}$ (cuya "dimensión" es finita), podría ser, en consecuencia, una buena vía para el estudio del comportamiento a largo plazo de (1.6).

En Eden et al. [35, Cap. 10], la dinámica en $\mathcal{A}$ es proyectada ortogonalmente sobre $\mathbb{R}^D$, lo cual conduce a un sistema diferencial ordinario D-dimensional

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(\nu(x) - x) + T(\nu(x)). \tag{1*}$$

Aquí, $\alpha > 0$, $\nu(x)$ es un punto de $P\mathcal{A}$ tal que $\text{dist}(x, P\mathcal{A}) = |x - \nu(x)|$ y $T(v) = PF(P^{-1}v)$, donde $F(u) = -Au + f(u)$ ($P : X \mapsto \mathbb{R}^D$ es el operador de proyección que permite enviar $\mathcal{A}$ en una parte de $\mathbb{R}^D$). La existencia de P, inyectivo en $\mathcal{A}$, está asegurada por el lema 1.1 de Mañé [76], con tal de que se tenga $D > 2\dim_f(\mathcal{A}) + 1$. Además, el conjunto proyectado $P\mathcal{A}$ es un atractor exponencial para (1*). Sería muy interesante aplicar el corolario 1 a este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, pues ello implicaría que (1*) también responde a la dinámica en $\mathcal{A}$. Sin embargo, los términos no regulares en (1*) hacen que las trayectorias de este sistema no dependan necesariamente de forma continua de los datos iniciales, por lo que no es posible razonar como en la proposición 1. Así, sería muy interesante mejorar el sistema (1*) para conseguir un sistema con más regularidad.

Nota. Observemos que, en estos resultados, podemos cambiar el atractor $\mathcal{A}$ por cualquier conjunto compacto e invariante que atraiga los acotados de X.

Existen ejemplos (Robinson [84]) que muestran que, en general, el atractor global no tiene la propiedad de completitud asintótica. Luego, en cierto sentido, el corolario 1 es el mejor resulado que uno puede esperar.

1.2.3 Completitud asintótica en atractores exponenciales

Supongamos ahora dado un atractor exponencial $\mathcal{E}$ para $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Recordemos que $\mathcal{E}$ es un compacto positivamente invariante que contiene al atractor global $\mathcal{A}$ y atrae con velocidad exponencial cualquier solución con dato inicial en X (el concepto de atractor exponencial juega un papel "intermedio" entre el de atractor global y el de variedad inercial). En esta sección, generalizaremos resultados de completitud asintótica para variedades inerciales al caso de un atractor exponencial. Más precisamente, probaremos un resultado que afirma que un atractor exponencial $\mathcal{E}$ estrictamente invariante ($\mathcal{S}(t)\mathcal{E} = \mathcal{E}$, $\forall t \geq 0$) es asintóticamente completo siempre que verifique la condición de *flujo normal-hiperbólico*:

Definición 6 *Se dice que un atractor exponencial estrictamente invariante $\mathcal{E}$ es de flujo normal hiperbólico si existen $\nu, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\nu > \gamma$,*

$$\operatorname{dist}(u(t), \mathcal{E}) \leq Ce^{-\nu t} \quad \forall t \geq 0,$$

para cualquier solución u de (1.6) y

$$|v_1(t) - v_2(t)|_\alpha \leq De^{-\gamma t}|v_1(0) - v_2(0)|_\alpha \quad \forall t \leq 0,$$

para dos soluciones cualesquiera v_1 y v_2 sobre $\mathcal{E}$.

Este concepto es una generalización de *hiperbolicidad normal linealizada*, la cual se basa en una linealización del flujo en torno a la variedad y muestra la robustez respecto a pequeñas variaciones de variedades invariantes (véanse Kurzweil [67], Wiggings [104], Rosa y Temam [89]). En Robinson [84], se prueba que toda variedad inercial que posee flujo normal hiperbólico (esto es, cumple la propiedad enunciada en la definición precedente) es asintóticamente completa.

Teorema 7 *Si un atractor exponencial estrictamente invariante $\mathcal{E}$ es de flujo normal hiperbólico, entonces es asintóticamente completo. Además, con el mismo orden de atracción que posee $\mathcal{E}$ como atractor exponencial.*

Demostración. Como $\mathcal{E}$ es un atractor exponencial, se tiene que, para cada $u_0 \in X$, existe $C(u_0)$ tal que

$$\operatorname{dist}(u(t; u_0), \mathcal{E}) \leq C(u_0)e^{-\nu t}\, \forall t \geq 0.$$

En consecuencia, para cada $t \geq 0$, existe $v_t \in \mathcal{E}$ tal que

$$|u(t) - v_t|_\alpha \leq ce^{-\nu t}, \tag{1.12}$$

donde, por simplicidad, denotamos $u(t) = u(t; u_0)$ y tomamos $c = 2C(u_0)$. Definimos

$$v_\infty(t) = \lim_{T\to+\infty} v(t; T, v_T), \tag{1.13}$$

donde $v(t;T,v_T)$ denota la solución de (1.6) que verifica $v(T;T,v_T) = v_T \in \mathcal{E}$. Obsérvese que $|u(T) - v_T|_\alpha \leq ce^{-\nu T}$, para todo $T \geq 0$.

Al ser $\mathcal{E}$ estrictamente invariante, $v(t;T,v_T)$ tiene sentido, para todos los valores de $t, T \geq 0$; además, la trayectoria $v = v(t;T,v_T)$ está contenida en $\mathcal{E}$. Definir $v_\infty(t)$ en la forma que hemos hecho es natural (ver Marlin y Struble [77] y Robinson [84] para una construcción similar), pues lo que buscamos es una trayectoria que sea "igual a $u(t)$ cuando $T = \infty$". Vamos a probar que $v_\infty = v_\infty(t)$ está bien definida, es solución de (1.6), y tiene la propiedad de seguimiento para u, es decir, $\lim_{t\to+infty} |u(t) - v_\infty(t)| = 0$.

En primer lugar, evaluemos

$$|v(t;s+h,v_{s+h}) - v(t;s,v_s)|_\alpha = |v(t-s;0,v(s;s+h,v_{s+h})) - v(t-s;0,v_s)|_\alpha,$$

donde h se elige más abajo. Usando que $\mathcal{E}$ es de flujo normal hiperbólico, obtenemos:

$$\begin{aligned} |v(t;s+h,v_{s+h}) - v(t;s,v_s)|_\alpha &\leq De^{-\gamma(t-s)}|v(s;s+h,v_{s+h}) - v_s|_\alpha \\ &= De^{-\gamma(t-s)}|v(s;s+h,v_{s+h}) - v(s;s+h,S(h)v_s)|_\alpha, \end{aligned}$$

y, de nuevo por la condición de flujo normal hiperbólico,

$$|v(t;s+h,v_{s+h}) - v(t;s,v_s)|_\alpha \leq De^{-\gamma(t-s)}De^{\gamma h}|v_{s+h} - S(h)v_s|_\alpha. \tag{1.14}$$

Evaluemos esta última expresión; teniendo en cuenta la definición de v_{s+h} y (1.9), resulta que

$$\begin{aligned} |v_{s+h} - S(h)v_s|_\alpha &\leq |v_{s+h} - u(s+h)|_\alpha + |u(s+h) - S(h)v_s|_\alpha \\ &\leq ce^{-\nu(s+h)} + Ee^{kh^\theta}|u(s) - v_s|_\alpha \\ &\leq ce^{-\nu(s+h)} + Ee^{kh^\theta}ce^{-\nu s}. \end{aligned}$$

Así, volviendo a (1.14), obtenemos

$$\begin{aligned} |v(t;s+h,v_{s+h}) - v(t;s,v_s)|_\alpha \leq &\ cD^2e^{-\gamma(t-s)}e^{\gamma h}[e^{-\nu(s+h)} + Ee^{kh^\theta}e^{-\nu s}] \\ \leq &\ Ke^{-\gamma(t-s)}e^{-\nu s}, \end{aligned}$$

para $0 < h < h^*$, elegido $h^* > 0$ y con K dependiendo sólo de u_0 y h^*.

Usando esto, es claro que el límite en (1.13) existe. De hecho, $v(t;T,v_T)$ converge uniformemente respecto de T en intervalos acotados de $[0,+\infty)$; en efecto, para todo

$\tau > T$, se tiene

$$\begin{aligned} |v(t;T,v_T) - v(t;\tau,v_\tau)|_\alpha &\leq K\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\gamma t} e^{-(\nu-\gamma)(T+nh)} \\ &\leq K e^{-\gamma t} e^{-(\nu-\gamma)T}[1 - e^{-(\nu-\gamma)h}]^{-1} \\ &\leq K e^{-(\nu-\gamma)T}, \end{aligned}$$

lo cual tiende a cero uniformemente en $(0, t_0]$, para todo $t_0 > 0$, cuando $T \to \infty$. Por lo tanto, el límite en (1.13) existe y verifica la ecuación en (1.6), pues es el límite uniforme de soluciones de (1.6).

Comprobar que $v = v_\infty(t)$ es la trayectoria de seguimiento para $u = u(t)$ es ahora casi directo, pues

$$\begin{aligned} |v_\infty(t) - u(t)|_\alpha &\leq |v_\infty(t) - v_t|_\alpha + |v_t - u(t)|_\alpha \\ &\leq K\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\gamma t} e^{-(\nu-\gamma)(t+nh)} + ce^{-\nu t} \\ &\leq K e^{-\gamma t} e^{-(\nu-\gamma)t}[1 - e^{-(\nu-\gamma)h}]^{-1} + ce^{-\nu t} \\ &\leq K' e^{-\nu t}. \end{aligned}$$

Notemos que ν es también el orden de atracción exponencial entre las trayectorias.

□

Existen algunos casos interesantes donde se pueden encontrar atractores exponenciales invariantes. Así, en Robinson [85], se estudia el comportamiento en el límite de una familia de problemas del tipo

$$\frac{du}{dt} + Au + f_N(u) = 0, \tag{1.15}$$

con $f_N \to f$ uniformemente en X. Se supone que, para cada una de las ecuaciones (1.15), existe una variedad inercial $\mathcal{M}_N$; se prueba que las variedades inerciales $\mathcal{M}_N$ convergen a un atractor exponencial invariante de dimensión finita $\mathcal{M}_\infty$ el cual, en general, no está asociado a un grafo. Se prueba que, si las variedades inerciales $\mathcal{M}_N$ poseen flujos normales hiperbólicos, lo mismo es cierto para $\mathcal{M}_\infty$ y, gracias al teorema 7, $\mathcal{M}_\infty$ es asintóticamente completo.

Capítulo 2

Sistemas dinámicos aleatorios

En este capítulo, presentamos algunos de los conceptos y resultados generales sobre ecuaciones diferenciales estocásticas y sistemas dinámicos aleatorios que utilizaremos a lo largo de esta Memoria. La definición de sistema dinámico aleatorio es relativamente reciente (Arnold y Crauel [2]). Hemos tratado de resaltar en especial la aportación que supone este nuevo concepto a la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas.

2.1 Introducción a las ecuaciones diferenciales estocásticas

En esta sección, vamos a introducir conceptos y herramientas básicas que permiten modelar fenómenos donde las variables gozan de cierto grado de libertad como consecuencia del efecto de ruidos.

El modelo matemático para una cantidad aleatoria es el de *variable aleatoria.*

Definición 7 *Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y X un espacio de Banach. Una variable aleatoria $\psi : \Omega \to X$ es una función $\mathcal{F}$- $\mathcal{B}(X)$ medible, donde $\mathcal{B}(X)$ es la σ-álgebra de los conjuntos borelianos de X.*

De ahora en adelante, supondremos que el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es completo y X separable.

Toda variable aleatoria ψ induce una medida de probabilidad en X, definida por

$$\nu_\psi(B) = P(\psi^{-1}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}(X),$$

que se denomina *distribución* de ψ sobre X.

Si $\int_\Omega |\psi(\omega)|\, dP(\omega) < +\infty$, se define la *esperanza* de ψ como

$$E(\psi) = \int_\Omega \psi(\omega)\, dP(\omega).$$

Con frecuencia, omitiremos la variable ω en la escritura de integrales en Ω.

Dos subconjuntos $A, B \in \mathcal{F}$ se dicen independientes si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Una colección $\{\mathcal{H}_i;\ i \in \mathcal{I}\}$ de familias $\mathcal{H}_i \subset \mathcal{F}$ es independiente si

$$P(H_{i_1} \cap \ldots \cap H_{i_k}) = P(H_{i_1}) \cdots P(H_{i_k})$$

cualesquiera que sean $H_{i_1}, \ldots, H_{i_k}$, con $H_{i_j} \in \mathcal{H}_{i_j}$ y con los índices $i_j \in \mathcal{I}$.

La σ-álgebra inducida por una variable aleatoria ψ es, por definición,

$$\mathcal{H}_\psi = \{\psi^{-1}(B);\ B \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Se dice que una colección de variables aleatorias $\{\psi_i;\ i \in \mathcal{I}\}$ es *independiente* si la correspondiente colección de $\sigma-$álgebras $\mathcal{H}_{\psi_i}$ es independiente.

Definición 8 *Un proceso estocástico con valores en X es una colección parametrizada de variables aleatorias $\{\psi_t\}_{t\in\mathcal{T}}$, con $\psi_t : \Omega \to X$ para cada $t \in \mathcal{T}$.*

El conjunto $\mathcal{T}$ es generalmente $[0, +\infty)$, pudiendo ser también $\mathbb{R}$, un intervalo $[a, b]$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, etc. Por ejemplo, cuando $\mathcal{T} = [0, +\infty)$, identificaremos el proceso $\{\psi_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ con la función $\psi : [0, +\infty) \times \Omega \to X$.

Para cada $t \in \mathcal{T}$ se tiene una variable aleatoria

$$\begin{aligned} \psi_t : \Omega &\to X \\ \omega &\mapsto \psi_t(\omega). \end{aligned}$$

Y para cada $\omega \in \Omega$, una aplicación

$$\begin{aligned} \omega : \mathcal{T} &\rightarrow X \\ t &\mapsto \psi_t(\omega). \end{aligned}$$

A esta aplicación se la denomina *trayectoria* de ω. Si pensamos en t como el tiempo y en ω como un suceso elemental, $\psi_t(\omega)$ representa el resultado en el tiempo t del experimento ω. Observemos que podemos identificar cada suceso ω con la función de su trayectoria. De esta forma, podemos pensar en Ω como una parte del espacio $X^{\mathcal{T}}$ de todas las funciones de $\mathcal{T}$ en X. Entonces la $\sigma-$álgebra $\mathcal{F}$ contendrá a la $\sigma-$álgebra $\mathcal{C}$ generada por los conjuntos de la forma

$$\{\omega : \omega(t_1) \in F_1, \cdots, \omega(t_k) \in F_k\} \quad F_i \text{ borelianos},$$

donde $\omega(t_i) = \psi_{t_i}(\omega)$.

Así, también podemos adoptar el punto de vista que define a un proceso estocástico como una medida de probabilidad P sobre el espacio medible $(X^{\mathcal{T}}, \mathcal{C})$.

Un proceso estocástico $\{\psi_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ se dice estacionario si tiene las mismas distribuciones que $\{\psi_{t+h}\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ para todo $h > 0$.

Sean $\{\psi_t\}_{t\in\mathcal{T}}$, $\{\phi_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ dos procesos estocásticos. Se dice que $\{\psi_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ es una versión de $\{\phi_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ si, para todo $t \in \mathcal{T}$,

$$P(\{\omega : \psi_t(\omega) = \phi_t(\omega)\}) = 1.$$

2.1.1 El movimiento browniano. Procesos de Wiener

A principios del siglo XIX, el botánico Robert Brown analizó el movimiento continuo de los granos de polen en una gota de agua atrapada, durante siglos, en un trozo de cuarzo. Este movimiento ya había sido observado con anterioridad y hasta ese momento, había sido atribuido a causas biológicas; la aportación de Brown fue indicar causas físicas de este fenómeno, en particular el bombardeo continuo de las moléculas del fluido sobre las partículas de polen (nada menos que unas 10^{21} colisiones por segundo). Este movimiento, conocido desde entonces como *movimiento browniano*, es un claro ejemplo de proceso aleatorio, debido a la imprevisibilidad del efecto causado en razón de las fluctuaciones arbitrarias de las moléculas del entorno. Además, el fenómeno observado depende en gran medida de la precisión del microscopio, de manera que si aumentáramos la precisión de éste, por ejemplo, en un factor de 100 ó 1000, de nuevo observaríamos el efecto del bombardeo por grupos menores de moléculas (véase figura 2.1). De esta forma, a escalas menores observamos una nueva creación de movimiento aleatorio, inobservable a otras escalas. La trayectoria de una partícula en movimiento browniano fue uno de los primeros fenómenos naturales estudiados que expresaba la autosemejanza por escalas, propio de las estructuras fractales (Mandelbrot [75]). Evidentemente, tratar de estudiar un sistema de granos de polen "partícula a partícula" no es una buena idea.

El modelo matemático del movimiento browniano viene dado por un proceso estocástico, denominado *proceso de Wiener*:

Definición 9 *Un proceso de Wiener $\{W_t\}_{t\geq 0}$ con valores en $\mathbb{R}$ es un proceso estocástico sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que verifica $P-c.s.$*

i) $W_0 = 0$,

ii) Las trayectorias $t \mapsto W_t(\omega)$ son continuas,

iii) $\{W_t\}_{t\geq 0}$ tiene incrementos independientes, es decir: Si $t_0 < t_1 < \cdots < t_k$ y $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, entonces

$$P(W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \in B_i,\, i = 1, \ldots, k) = \prod_{i=1}^{k} P(W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \in B_i).$$

iv) $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es estacionario.

v) Para $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s \in N(0, t-s)$, esto es, $W_t - W_s$ es una variable aleatoria gaussiana de media 0 y varianza $t-s$. Naturalmente, esto significa que la distribución de $W_t - W_s$ viene dada por

$$P(W_t - W_s \in B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_B e^{\frac{-x^2}{2(t-s)}}\, dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Un proceso de Wiener con valores en $\mathbb{R}^n$ es un proceso estocástico $W_t = (W_t^1, \ldots, W_t^n)$ donde los W_t^i son procesos de Wiener reales independientes para $i \in \{1, \ldots, n\}$. El proceso de Wiener es el modelo de ruido más utilizado en la teoría de ecuaciones

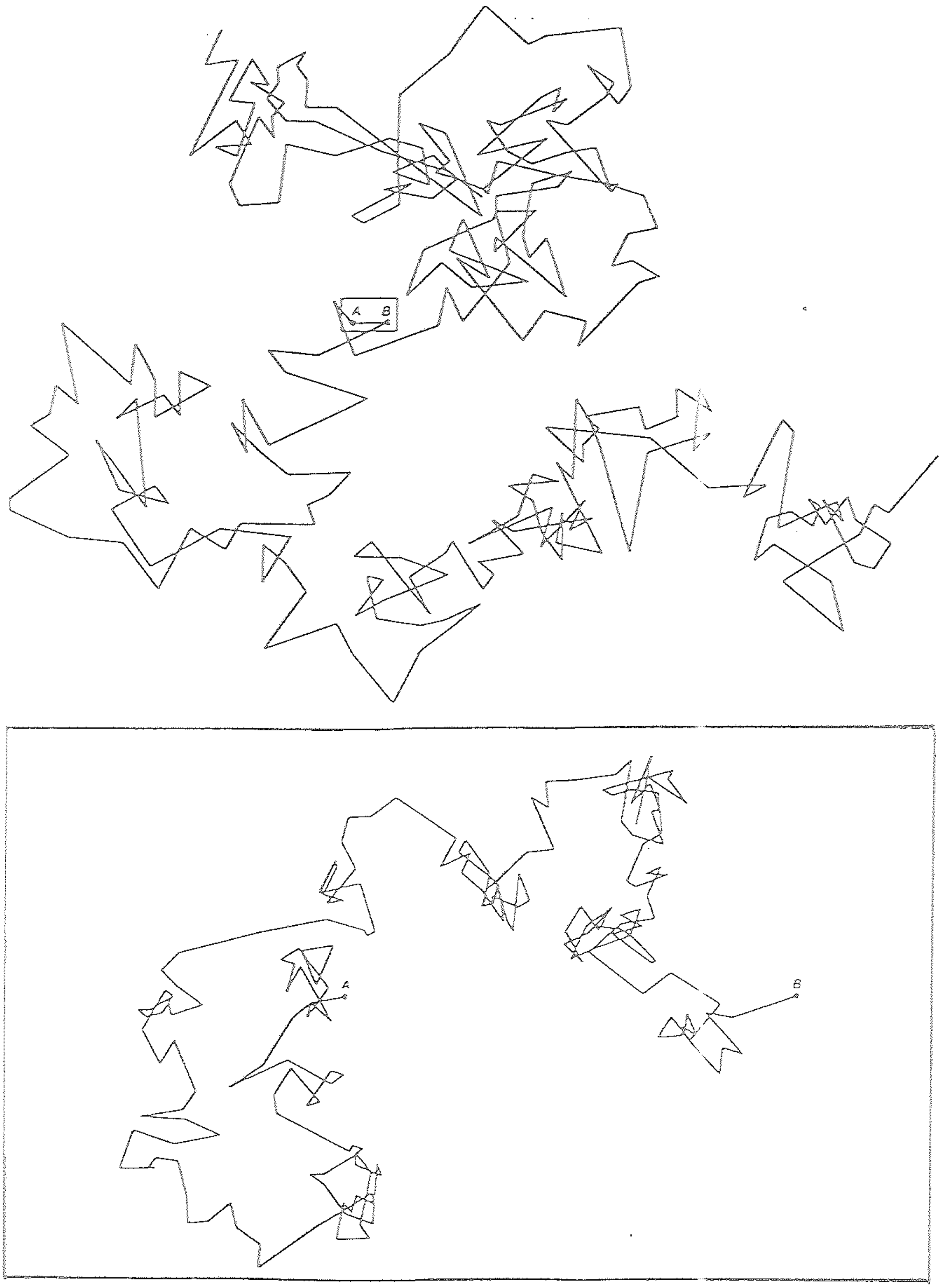

Figura 2.1: Simulación del movimiento aleatorio browniano de una partícula suspendida en agua. La línea recta de la figura superior aparece quebrada en numerosas ocasiones si aumentamos la precisión de la simulación 100 veces (Lavenda [70]).

estocásticas y será el que aparecerá a lo largo de esta Memoria. El siguiente resultado resume algunas de las propiedades de los procesos de Wiener en dimensión uno (véase Arnold [1]).

Proposición 2 *Sea $\{W_t\}_{t\geq 0}$ un proceso de Wiener con valores reales. Entonces*

i) $-W_t$ y $\frac{1}{c}W_{c^2t}$ son procesos de Wiener ($c > 0$ es arbitrario)

ii) Si $\widetilde{W_t} = tW_{1/t}$ para $t > 0$ y $\widetilde{W_0} = 0$, entonces $\{\widetilde{W_t}\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Wiener.

iii) Se tiene la ley fuerte de los grandes números:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{W_t(\omega)}{t} = 0 \quad P - c.s.$$

iv) Se tiene la ley del logaritmo iterado: $P - c.s.$

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{W_t(\omega)}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1 \quad y$$

$$\underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{W_t(\omega)}{\sqrt{2t\log\log t}} = -1$$

De acuerdo con la última propiedad, para todo $\epsilon > 0$ y $P - c.s.$, existe $t_0(\omega)$ tal que, para $t \geq t_0(\omega)$

$$-(1+\epsilon)\sqrt{2t\log\log t} \leq W_t(\omega) \leq (1+\epsilon)\sqrt{2t\log\log t}.$$

Si aplicamos la ley del logaritmo iterado a $tW_{1/t}$, obtenemos también que

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{W_t(\omega)}{\sqrt{2t\log\log(1/t)}} = 1,$$

$$\underline{\lim_{t\to 0}} \frac{W_t(\omega)}{\sqrt{2t\log\log(1/t)}} = -1.$$

Como consecuencia, W_t tiene, en cada intervalo $(0,\epsilon)$, infinitos ceros. Como, para $s > 0$, $W_{t+s} - W_s$ es también un proceso de Wiener, este comportamiento se da en todos los puntos $s > 0$. Por consiguiente, tenemos que, $P - c.s.$,

$$\frac{W_{t+h} - W_t}{h} \geq (1-\epsilon)\sqrt{\frac{2}{h}\log\log\frac{1}{h}} \quad \text{infinitas veces y, simultáneamente}$$

$$\frac{W_{t+h} - W_t}{h} \leq (-1 + \epsilon)\sqrt{\frac{2}{h} \log \log \frac{1}{h}} \quad \text{infinitas veces.}$$

Como, cuando $h \searrow 0$, las expresiones anteriores tienden a $+\infty$ y $-\infty$ respectivamente, tenemos que

$$\frac{W_{t+h} - W_t}{h}$$

tiene, con probabilidad uno y para todo t fijo, toda la recta real $\mathbb{R}$ como conjunto de puntos de acumulación. Ello revela las enormes fluctuaciones locales de W_t, y ello también provoca que cada porción de W_t sea de variación no acotada (las trayectorias tienen longitud infinita, como indicábamos en la figura 2.1 sobre el movimiento browniano). Las trayectorias de un proceso de Wiener son un ejemplo de función continua no diferenciable.

2.1.2 La integral respecto de un proceso de Wiener

El hecho de que, aunque las trayectorias de un proceso de Wiener sean continuas, no sean de variación acotada, conduce a una nueva generalización del concepto de integral.

De momento sin precisar, supongamos que tenemos dada la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)) + g(t, x(t))\dot{W}_t, \quad \text{con} \quad \dot{W}_t = \frac{dW_t}{dt}.$$

Expresada en forma integral, se escribe

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds + \int_0^t g(s, x(s))\dot{W}_s ds.$$

Si ponemos $\dot{W}_s ds = dW_s$ y recordamos el comportamiento de las trayectorias de un proceso de Wiener, es claro que la segunda integral en la expresión anterior no puede ser definida en el sentido de Stieltjes. A continuación, esquematizamos el proceso que conduce a la definición de una integral de este tipo. A partir de ahora, la expresión $\dot{W}_t$ será denominada *ruido blanco.*

Dado el proceso de Wiener $\{W_t\}_{t \geq 0}$, se define $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s,\ 0 \leq s \leq t)$ para cada $t \geq 0$ como la menor σ- álgebra que hace medible a W_s, para todo $s \leq t$ (la σ-álgebra generada por los W_s con $0 \leq s \leq t$). Supondremos que $\mathcal{F}_0$ contiene a todos los subconjuntos de Ω de medida nula. Claramente, $\mathcal{F}_t$ es una familia creciente de sub-σ-álgebras. Diremos que un proceso estocástico ψ_t es *$\mathcal{F}_t$-adaptado* si es $\mathcal{F}_t$-medible para todo $t \geq 0$.

Para la definición de integral respecto de un proceso de Wiener es razonable comenzar con una definición para una clase simple de funciones y aplicar luego un argumento de aproximación.

Supongamos, por tanto, que $\phi : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ tiene forma escalonada. Por ejemplo, supongamos que

$$\phi(t,\omega) = \sum_{j\geq 0} e_j(\omega)\mathcal{X}_{(\frac{j}{2^n},\frac{j+1}{2^n}]},$$

con las e_j variables aleatorias acotadas y $\mathcal{F}_{j/2^n}$-medibles. Esto, en particular, implica que ϕ es un proceso $\mathcal{F}_t$-adaptado.

Para estas funciones, definimos

$$\left(\int_S^T \phi(t)dW_t\right)(\omega) = \sum_{j\geq 0} e_j(\omega)[W_{t_{j+1}} - W_{t_j}](\omega), \tag{2.1}$$

donde la suma está extendida al menor conjunto de enteros $j \geq 0$ que hace que el correspondiente conjunto de los $j/2^n$ contenga al intervalo $[S,T]$. Aquí, hemos tomado

$$t_j = t_j^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{j}{2^n} & \text{si} \quad S \leq \frac{j}{2^n} \leq T, \\ S & \text{si} \quad \frac{j}{2^n} < S, \\ T & \text{si} \quad \frac{j}{2^n} > T. \end{cases}$$

El número real definido en (2.1) se denomina *integral estocástica* de ϕ en $[S,T]$ respecto del proceso de Wiener W_t.

En el caso general, dado un proceso $\mathcal{F}_t$-adaptado $\phi : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$, acabaremos definiendo la integral estocástica de ϕ por un procedimiento de aproximación. Más precisamente, dada una partición $t_0 < t_1 \ldots < t_n$ de $[S,T]$, asignaremos a ϕ la aproximación ϕ^*, con

$$\phi^*(t,\omega) = \sum_{j=0}^{m-1} \phi(t^*,\omega)\left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\right)(\omega) \quad \forall (t,\omega) \in [S,T]\times\Omega. \tag{2.2}$$

Cuando sea posible, diremos que la integral de ϕ es el límite de las integrales

$$\int_S^T \phi^*(t)\, dW_t = \sum_0^{m-1} \phi(t_j^*,\cdot)(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}), \tag{2.3}$$

obtenido al aumentar el número de puntos de la partición. En (2.2) y (2.3) los t_j^* han sido elegidos en los respectivos intervalos $[t_j, t_{j+1}]$.

Sin embargo, la elección de los puntos t_j^* es de gran importancia, como puede verse en ejemplos simples (Øksendal [79], Ejemplo 3.1). De hecho, la elección de t_j^* da lugar a distintas interpretaciones de la integral respecto de W_t:

a) La elección $t_j^* = t_j$ conduce a la *integral estocástica en el sentido de Ito*, que denotaremos

$$\int_S^T \phi(t)dW_t.$$

b) La elección $t_j^* = \dfrac{t_j + t_{j+1}}{2}$ da lugar a la *integral en el sentido de Stratonovich*, que indicaremos mediante la notación

$$\int_S^T \phi(t) \circ dW_t.$$

No obstante, para poder definir con rigurosidad la integral estocástica, debemos restringirnos a una familia concreta de funciones ϕ:

Denotaremos por $I^2(S,T)$ la clase de funciones $\phi : [S,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ que verifican

i) $(t,\omega) \mapsto \phi(t,\omega)$ es $\mathcal{B}([S,T]) \otimes \mathcal{F}$ medible.

ii) ϕ es $\mathcal{F}_t$-adaptada.

iii) ϕ es un proceso de cuadrado integrable, es decir

$$E(\int_S^T \phi(t,\omega)^2\, dt) < +\infty.$$

A cada $\phi \in I^2(S,T)$, podemos asignarle la correspondiente integral estocástica respecto de W_t en el sentido de Ito. Para ello, daremos los pasos siguientes:

Paso 1.

Si $\psi \in I^2(S,T)$ es elemental, es decir,

$$\psi(t,\omega) = \sum_{j=0}^{m-1} e_j(\omega)\mathcal{X}_{(t_j,t_{j+1}]}, \tag{2.4}$$

para algunas $e_j : \Omega \to \mathbb{R}$ que son $\mathcal{F}_{t_j}$ medibles y algunos $t_0 = S < t_1 < \cdots < t_m = T$, ponemos

$$\left(\int_S^T \psi(t)dW_t\right)(\omega) = \sum_{j=0}^{m-1} e_j(\omega)\left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\right)(\omega) \quad \forall\omega \in \Omega. \tag{2.5}$$

Observemos que $\int_S^T \psi(t)dW_t \in L^2(\Omega, P; \mathbb{R})$.

Paso 2.

Si $f \in I^2(S,T)$ y $f(\cdot,\omega)$ es continua y acotada para todo $\omega \in \Omega$, entonces existe una sucesión de funciones elementales ψ_n tales que

$$E(\int_S^T (f - \psi_n)^2 dt) \to 0 \quad \text{cuando } n \to +\infty.$$

Se puede entonces probar sin mucha dificultad que existe el límite de las correspondientes integrales estocásticas. Por definición, ponemos

$$\int_S^T f(t)\, dW_t = \lim_{n\to+\infty} \int_S^T \psi_n(t)\, dW_t. \tag{2.6}$$

La definición precedente no depende de la elección de la sucesión $\{\psi_n\}$.

Paso 3.

Sea $g \in I^2(S,T)$ acotada. Entonces existe una sucesión de funciones $\{f_n\}$ que están en $I^2(S,T)$, continuas y acotadas en t para todo $\omega \in \Omega$ y que verifican

$$E(\int_S^T (g - f_n)^2 dt) \to 0 \quad \text{cuando } n \to +\infty.$$

De nuevo se puede probar que existe el límite de las integrales estocásticas correspondientes en el espacio $L^2(\Omega, P; \mathbb{R})$ y que éste es independiente de la sucesión elegida. Por definición, ponemos

$$\int_S^T g(t)\, dW_t = \lim_{n\to+\infty} \int_S^T f_n(t)\, dW_t. \tag{2.7}$$

Paso 4.

Finalmente, sea $\phi \in I^2(S,T)$. Entonces existe una sucesión $\{g_n\}$ de funciones de $I^2(S,T)$, acotadas, que verifican

$$E(\int_S^T (\phi - g_n)^2 dt) \to 0 \quad \text{cuando } n \to +\infty.$$

De nuevo se puede definir la integral estocástica como límite de una sucesión de $L^2(\Omega, P; \mathbb{R})$. Más precisamente, ponemos

$$\int_S^T \phi(t) dW_t = \lim_{n \to +\infty} \int_S^T g_n(t) dW_t.$$

Conviene llamar la atención de que, de acuerdo con lo que precede, la integral estocástica de un proceso de $I^2(S,T)$ es una variable aleatoria de $L^2(\Omega, P; \mathbb{R})$. Se puede integrar respecto de un proceso de Wiener sólo "globalmente" en ω; en otras palabras, tiene sentido hablar de

$$\left(\int_S^T \phi(t)\, dW_t \right)(\omega),$$

pero no de

$$\int_S^T \phi(t, \omega)\, dW_t(\omega).$$

El resultado siguiente resume algunas de las propiedades de la integral de Ito

Proposición 3 *Sean $f, g \in I^2(S,T)$, $0 \leq S < R < T$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces se tiene $P-c.s.$ lo que sigue:*

i) $\displaystyle\int_S^T f dW_t = \int_S^R f dW_t + \int_R^T f dW_t$

ii) $\displaystyle\int_S^T (cf + g) dW_t = c \int_S^T f dW_t + \int_S^T g dW_t$

iii) $\displaystyle E\left(\int_S^T f dW_t\right) = 0$

Observemos que, dados un proceso estocástico $\phi \in I^2(0,T)$ y el proceso de Wiener, al integrar ϕ respecto de W_t generamos un nuevo proceso estocástico:

$$\Phi(t) = \int_0^t \phi(s)\, dW_s \quad \forall t \in [0,T].$$

Una de las propiedades fundamentales de la integral de Ito afirma es que se trata de una *martingala:*

Definición 10 *Se dice que un proceso estocástico $M : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ es una $\mathcal{F}_t$-martingala (o simplemente martingala) si verifica lo siguiente:*

i) $M_t : \Omega \to \mathbb{R}$ *es $\mathcal{F}_t-$medible e integrable para todo* $t \in [0,T]$, *ii) Para cada $t \in [0,T]$, se tiene que $E(M_t/\mathcal{F}_s) = M_s \; \forall s \leq t$. Aquí, $E(M_t/\mathcal{F}_s)$ denota la esperanza condicionada de M_t respecto de $\mathcal{F}_s$, esto es, la única (clase de) variable aleatoria $\mathcal{F}_s$-medible e integrable que verifica*

$$\int_G M_t \, dP = \int_G E(M_t/\mathcal{F}_s) \, dP \quad \forall G \in \mathcal{F}_s.$$

Observemos que, de las propias definiciónes de W_t y de la familia $\{\mathcal{F}_t\}$, se sigue que W_t es una $\mathcal{F}_t-$martingala. Podemos ahora enunciar el siguiente resultado (Øksendal [79]):

Teorema 8 *Sea $\phi \in I^2(0,T)$. Entonces existe una versión continua en t de*

$$\int_0^t \phi \, dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Es decir, existe un proceso estocástico continuo $M : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ tal que, $P-c.s.$ y para todo $t \in [0,T]$ se tiene

$$M_t = \int_0^t g \, dW_s.$$

Además, M_t es una $\mathcal{F}_t$-martingala de cuadrado integrable y se verifica (desigualdad de Doob)

$$P(\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t| > \alpha) \leq \frac{1}{\alpha^2} E(M_T^2), \;\; \forall \alpha > 0.$$

Hemos indicado ya anteriormente que la elección de las funciones elementales ϕ_n que "aproximan" a ϕ proporciona diferentes definiciones de la integral estocástica. Conviene decir aquí que, entre la integral de Ito y la de Stratonovich, existen importantes diferencias. Por consiguiente, una cuestión interesante es decidir qué interpretación es la más adecuada para cada modelo. No obstante, en condiciones de existencia de la integral de Stratonovich (Stratonovich [100]), en general más fuertes que para la integral de Ito, existe una relación explícita entre las dos integrales.

En general, para integrar en el sentido de Stratonovich una función compuesta, podemos usar la *regla de la cadena*, con lo que las técnicas de integración son las habituales. Sin embargo, la integral de Stratonovich no es una martingala, como ocurre con la integral de Ito. En relación con ésta última, sin embargo, la regla de integración de una función compuesta difiere esencialmente del caso determinista, lo que nos obliga a usar la denominada *fórmula de Ito* que, en el caso de un Wiener unidimensional, es como sigue (véase, entre otros Øksendal [79]):

Teorema 9 *Sea $x : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ un proceso estocástico dado por*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s)\, ds + \int_0^t g(s)\, dW_s,$$

donde $g \in I^2(0,T)$ y $f : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}$ es un proceso integrable $P-$c.s. y $\mathcal{F}_t$-adaptado. Sea y $Y \in C^2([0,T]\times\mathbb{R})$. Entonces, $y(t) = Y(t, x(t))$ es una nueva integral estocástica de la forma

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \int_0^t \frac{\partial Y}{\partial t}(s, x(s))\, ds + \int_0^t \frac{\partial Y}{\partial x}(s, x(s)) f(s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial Y}{\partial x}(s, x(s)) g(s)\, dW_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(s, x(s)) g(s)^2\, ds. \end{aligned}$$

Notas:

a) La integral estocástica respecto de un proceso de Wiener puede ser extendida al caso de una martingala cualquiera (véase Caraballo [13] para un esquema de esta construcción).

b) Para versiones de la fórmula de Ito en espacios de Hilbert, véase Pardoux [80].

2.2 Sistemas dinámicos aleatorios (SDA)

La teoría de sistemas dinámicos aleatorios (SDA) (véase Arnold [3], [6], Arnold y Crauel [2]) pretende unificar las ideas y resultados de dos ramas distintas de las matemáticas, a saber, el cálculo de probabilidades, especialmente en lo referente a sistemas diferenciales aleatorios y la teoría de sistemas dinámicos. Un sistema dinámico aleatorio. En la definición de SDA aparecen dos aspectos importantes:

a) La medibilidad respecto de un determinado espacio de probabilidad y

b) La relación con una ecuación diferencial.

Desde un punto de vista probabilístico, esta teoría ofrece una nueva visión de las ecuaciones diferenciales estocásticas, al poder ser analizadas, como en el caso de las ecuaciones deterministas, desde el punto de vista de los sistemas dinámicos. En este sentido, los SDA guardan una estrecha relación con la teoría de flujos estocásticos, tal y como aparece en Elworthy [37], Kunita [66] o Flandoli [42].

El concepto de sistema dinámico aleatorio

Recordemos del capítulo anterior que un sistema dinámico es una aplicación (adaptando la notación a la que vamos a utilizar a partir de ahora)

$$\varphi : \mathbb{R}^+ \times X \to X$$
$$\varphi(t,x) = \varphi(t)x, \quad x \in X,$$

que verifica la propiedad de semigrupo $\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$. En el caso en que $X = \Omega$, un espacio de probabilidad, hablaremos de sistemas dinámicos métricos:

Definición 11 *Sea $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ una familia de aplicaciones sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con las propiedades siguientes:*

i) $(t,\omega) \longmapsto \theta_t\omega$ es $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}$ medible.

ii) Para cada $t \in \mathbb{R}$, $\theta_t : \Omega \to \Omega$ conserva la medida, es decir,

$$P(\theta_t^{-1}B) = P(B), \quad \forall B \in \mathcal{F}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

iii) $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ posee estructura de grupo de aplicaciones sobre Ω, es decir:

$$\theta_0 = id \quad en \quad \Omega,$$
$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Se dice entonces que $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ es un sistema dinámico métrico.

Ejemplo

Proceso de Wiener. Sea $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ un proceso de Wiener con valores en $\mathbb{R}^m$. Estamos, por tanto, ante un proceso estocástico con incrementos independientes estacionarios y trayectorias continuas. Sean $\Omega = \{\omega \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m);\ \omega(0) = 0\}$, $\mathcal{F}$ la $\sigma-$álgebra de Borel de Ω y P la medida en $\mathcal{F}$ generada por el proceso de Wiener. Claramente, $W_t(\omega) = \omega(t)$. Pongamos $\theta_t\omega(\cdot) = \omega(t+\cdot) - \omega(t)$ $\forall\omega \in \Omega$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Entonces $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ es un sistema dinámico métrico.

Definición 12 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\theta_t)_{t\in\mathbb{R}})$ un sistema dinámico métrico y X un espacio de Banach. Se denomina sistema dinámico aleatorio (SDA) a toda aplicación medible*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times X &\longrightarrow X \\ (t,\omega,x) &\longmapsto \varphi(t,\omega,x) = \varphi(t,\omega)x, \end{aligned}$$

con las siguientes propiedades:

i) $\varphi(0,\omega) = \mathrm{id.}$ *(en X)* $\quad \forall \omega \in \Omega$.

ii) Se cumple la propiedad del cociclo:

$$\varphi(t+s,\omega)x = \varphi(t,\theta_s\omega)\varphi(s,\omega)x \qquad \forall t,s \in \mathbb{R}^+, \forall \omega \in \Omega, \forall x \in X. \tag{2.8}$$

Nota: Se pueden dar definiciones análogas para aplicaciones $\varphi : \mathcal{T} \times \Omega \times X \to X$, con $\mathcal{T} = \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ ó $\mathbb{N}$. Observemos que, cuando $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{Z}$, por la propiedad del cociclo, $\varphi(t,\omega)$ es invertible. Más precisamente, $\varphi(t,\omega)^{-1} = \varphi(-t,\theta_t\omega)$, para todo $t \in \mathcal{T}$.

Dado un SDA $\varphi : \mathcal{T} \times \Omega \times X \to X$ tal que la aplicación $x \longmapsto \varphi(t,\omega)x$ es continua (resp. diferenciable) para todo $t \geq 0$ y $P-c.s.$, se dirá que el SDA es continuo (resp. diferenciable).

El concepto de SDA está muy relacionado con el de *producto cruzado* que aparece en Sacker y Sell [90]. En efecto, dado un SDA, podemos definir el siguiente flujo sobre $\Omega \times X$:

$$\Theta_t(\omega,x) = (\theta_t\omega, \varphi(t,\omega)x) \quad \forall(\omega,x) \in \Omega \times X.$$

De esta forma, mediante Θ_t podremos pensar en φ como en una aplicación que actúa sobre $\Omega \times X$, moviendo el haz $\{\omega\} \times X$ al haz $\{\theta_t\omega\} \times X$.

La diferencia fundamental de los sistemas dinámicos aleatorios con los sistemas dinámicos deterministas, considerados en el capítulo anterior, radica en que la propiedad de semigrupo ha sido sustituida por la denominada propiedad del cociclo. F. Flandoli (en comunicación personal) propone una interpretación geométrica de esta propiedad. Así, supongamos que Ω es una variedad diferenciable; en cada punto $\omega \in \Omega$, consideramos el correspondiente espacio tangente, que suponemos constante y siempre igual a X (véase figura 2.2). Así, θ_t es el conjunto de transformaciones sobre

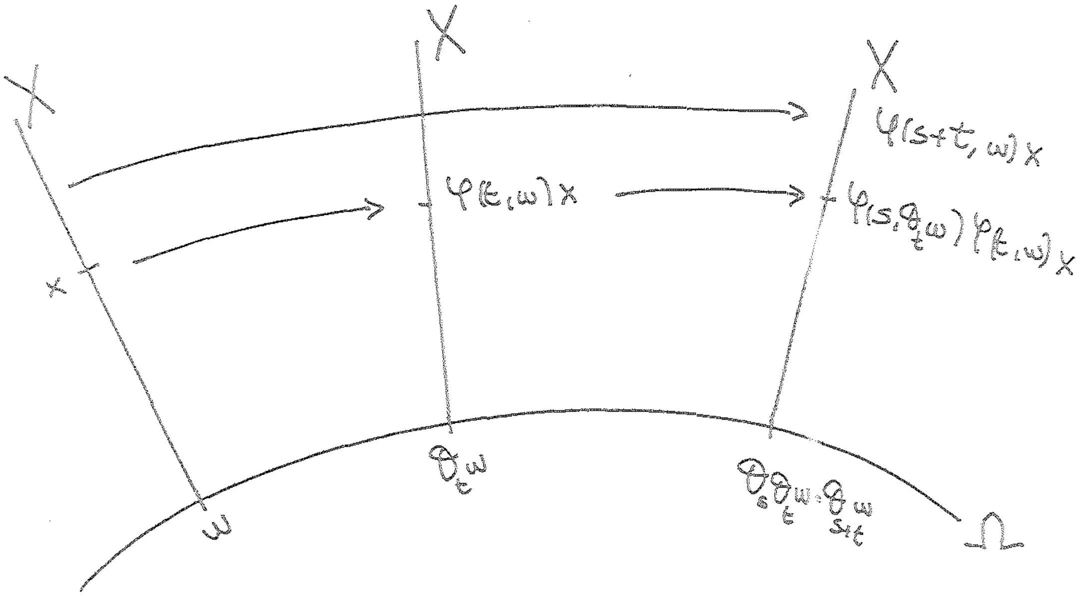

Figura 2.2: Interpretación geométrica de la propiedad del cociclo.

Ω, mientras que $x \mapsto \varphi(t, \omega)x$ representa una transformación del espacio tangente en ω al espacio tangente en $\theta_t\omega$. Claramente, la composición de las aplicaciones sobre los espacios tangentes en ω y $\theta_t\omega$ nos produce la propiedad del cociclo en (2.8).

Generación de sistemas dinámicos aleatorios a partir de ecuaciones diferenciales

Recordemos que los sistemas dinámicos considerados en el capítulo precedente están generados por una ecuación diferencial. De igual manera, consideraremos sistemas dinámicos aleatorios generados por ecuaciones diferenciales. En la literatura, se pueden distinguir sistemas dinámicos aleatorios de dos tipos

a) Aquéllos para los cuales las funciones $t \longmapsto \varphi(t, \omega)x$ son de variación acotada. Son generados por ecuaciones diferenciales aleatorias del tipo

$$\frac{dx}{dt} = f(\theta_t\omega, x).$$

La aplicación φ está caracterizada por verificar

$$\varphi(t, \omega)x = x + \int_0^t f(\theta_s\omega, \varphi(s, \omega)x)\, ds, \quad \forall (t, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega, \forall x \in X.$$

En estos casos, la ecuación está parametrizada por la variable ω y es posible aplicar gran parte de los argumentos de la teoría determinista.

b) Aquéllos generados a partir de ecuaciones diferenciales estocásticas. Estos serán realmente los sistemas con los que trabajaremos en esta Memoria.

Gran cantidad de ecuaciones diferenciales estocásticas van a generar sistemas dinámicos aleatorios donde las funciones $t \longmapsto \varphi(t,\omega)x$ son de variación no acotada. Por ejemplo, consideremos la ecuación estocástica en $\mathbb{R}^d$ en el sentido Stratonovich

$$dx = f_0(x)dt + \sum_{j=1}^{m} f_j(x) \circ dW_t^j,$$

donde las $f_0, \ldots, f_m$ son suficientemente regulares y los W_t^j son procesos de Wiener en $\mathbb{R}^d$. Supongamos que, cualesquiera que sean $s,t \in \mathbb{R}^+$, con $s \leq t$ y $x \in \mathbb{R}^d$, se tiene

$$\varphi_{s,t}(\omega)x = x + \int_s^t f_0(\varphi_{s,r}(\omega)x)\, dr + \sum_{j=1}^{m} \left(\int_s^t f_j(\varphi_{s,r}(\cdot)x \circ dW_r^j \right)(\omega).$$

Pongamos

$$\varphi(t,\omega)x = \varphi_{0,t}(\omega)x \quad \forall (t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega, \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Entonces, $\varphi : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es un SDA (Arnold y Scheutzow [4]) y, de manera general, tenemos la equivalencia

$$\varphi_{s,t}(\omega)x = \varphi(t-s, \theta_s\omega)x.$$

Obsérvese que $\varphi(t,\theta_s\omega)x$ puede ser interpretado como la posición en el tiempo $t+s$ de la partícula que, para el suceso elemental ω, estaba en x en el tiempo s. Notemos que, fijado ω, t no indica el tiempo en el instante final, sino el intervalo de tiempo recorrido. Otra posible interpretación de $\varphi(t,\theta_s\omega)x$ es verla como

$$\varphi(t,\theta_s\omega)x = \varphi_{0,t}(\theta_s\omega),$$

es decir, la posición en el tiempo t de la partícula que, atendiendo al suceso elemental $\theta_s\omega$, estaba en x en el tiempo $t = 0$.

Capítulo 3

Atractores aleatorios

En la primera sección de este capítulo introducimos el concepto de atractor aleatorio y escribimos algunos de los resultados principales en relación con éste. Hacemos especial hincapié en el desarrollo y motivación que conduce a este concepto.

A continuación probamos un resultado de semicontinuidad superior, cuando ϵ tiende a cero, de los atractores aleatorios $\mathcal{A}_\epsilon(\omega)$ asociados a perturbaciones aleatorias de una ecuación diferencial. Más precisamente, probaremos que, bajo ciertas condiciones, $\lim_{\epsilon\to 0} \operatorname{dist}(\mathcal{A}_\epsilon(\omega), \mathcal{A}) = 0$ con probabilidad uno, siendo $\mathcal{A}$ el atractor global del sistema no perturbado.

3.1 Teoría general de atractores aleatorios

En el capítulo 1 hemos mostrado gran parte de las ideas y resultados fundamentales que aparecen en el estudio del comportamiento asintótico de los sistemas dinámicos disipativos. Observemos que el modelo general se escribe como una ecuación de evolución del tipo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(u(t)),$$

donde, en general, A es un operador no lineal y autónomo. En los casos considerados, el semigrupo asociado posee un conjunto absorbente y acotado, es decir, todas las soluciones del sistema dinámico están acotadas cuando $t \to +\infty$.

Existen varios trabajos que estudian problemas análogos con términos o coeficientes dependientes de t en la ecuación diferencial. De manera general, esto corresponde a ecuaciones de evolución que tienen la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(u(t), t).$$

En este contexto, fueron pioneros los resultados de Sell [98], que proporcionan existencia y unicidad de solución y describen el comportamiento asintótico. Con posterioridad, Haraux ha completado y ampliado los estudios de [98] (cf. [58], [59]). En ambos casos, sin embargo, se imponen ciertas hipótesis de compacidad sobre los términos no autónomos de la ecuación diferencial que son esenciales. Como consecuencia, todo el análisis en estos trabajos se muestra insuficiente cuando, por ejemplo, al sistema le añadimos un ruido blanco. De hecho, debido a las grandes fluctuaciones que sufren las trayectorias de un proceso de Wiener, no se espera que exista un acotado en el que tenga lugar el comportamiento asintótico del sistema. Más bien, cabe esperar que un ruido blanco aditivo expulse, con probabilidad uno, cualquier trayectoria de todo conjunto acotado.

Consideremos, por ejemplo, la siguiente ecuación diferencial ordinaria no autónoma

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha x(t) + t, \quad \alpha > 0.$$

En ausencia del término no autónomo, se trataría de una ecuación diferencial con atractor puntual, dado por el conjunto $\{0\}$. En el caso no autónomo, podemos comprobar que la solución al problema de Cauchy con dato inicial $x(0) = x_0$ viene dada por

$$x(t) = (x_0 + \frac{1}{\alpha^2})e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha}t - \frac{1}{\alpha^2}.$$

Por consiguiente, observamos que el valor de esta función cuando $t \to +\infty$ crece como un polinomio de grado uno. No existe en este caso ningún acotado en el que se dé el comportamiento a largo plazo de la ecuación diferencial. Sin embargo, para dos soluciones distintas de este mismo problema tenemos

$$\frac{d(x_1(t) - x_2(t))}{dt} = -\alpha(x_1(t) - x_2(t)),$$

de donde

$$x_1(t) - x_2(t) = e^{-\alpha t}(x_{01} - x_{02}).$$

Es decir, la diferencia de dos soluciones sí se va a acercar a cero, incluso con velocidad exponencial. Este mismo fenómeno es el que vamos a observar en ciertas ecuaciones estocásticas con ruido blanco aditivo o multiplicativo: aunque cada trayectoria en particular sufrirá grandes fluctuaciones, la diferencia entre dos de ellas convergerá hacia un determinado compacto que también evoluciona en el tiempo (véase Kloeden y Stoiner [65]). Es de esta forma como se manifestará en estos casos el carácter disipativo de los sistemas.

Sin embargo, en el caso estocástico, la dificultad aumenta, debido a la dependencia de las soluciones de la variable aleatoria $\omega \in \Omega$. Así, veremos seguidamente que la convergencia asintótica hacia un compacto dependiente de las variables t, ω sólo podrá ser establecida con probabilidad muy alta, pero no $P - c.s.$

El comportamiento asintótico de las ecuaciones diferenciales estocásticas fue estudiado en ciertos trabajos de los años 80 y principios de los 90, donde se analiza la existencia de *medidas invariantes* (Ichikawa [61], Maslowski [74]) y *atractores de probabilidad* (Morimoto [78], Schmalfuss [92], [97]). Si, para cada $t \geq 0$, denotamos ν_t la distribución en $\mathcal{B}(H)$ (H es un espacio de Hilbert separable) de la solución de una ecuación diferencial estocástica en el instante t, se puede definir el operador $T(t)\nu_0 = \nu_t$, $t \geq 0$, sobre el espacio $\mathcal{M}(H)$ de las medidas de probabilidad en $\mathcal{B}(H)$. La familia $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ constituye un semigrupo de operadores en $\mathcal{M}(H)$ y, bajo ciertas hipótesis semejantes a las de la teoría determinista, se puede probar la existencia de un conjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}(H)$, compacto y atrayente de conjuntos acotados.

No obstante, aun suponiendo una generalización de los resultados deterministas, estos trabajos pierden gran parte de la intuición geométrica que acompaña al concepto de atractor global como conjunto compacto del espacio de fases al que convergen todas las trayectorias.

Uno de los primeros intentos para definir el atractor de una ecuación estocástica como un subconjunto del espacio de fases aparece en Brzezniak, Capinski y Flandoli [11]. Aunque las condiciones impuestas a la ecuación aún son demasiado fuertes para aplicar los resultados a ejemplos interesantes (como ecuaciones de Ito en espacios de dimensión infinita), ya se adopta en este trabajo el punto de vista de los sistemas dinámicos aleatorios, que a partir de este momento se convierte en el instrumento básico de la teoría de atractores aleatorios.

Un año antes a la publicación del trabajo anterior, Schmalfuss [93] expuso las ideas básicas de este nuevo concepto en un congreso en Alemania. Sin embargo, el desarrollo preciso de estas ideas y la adecuada notación debe ser atribuida al trabajo publicado en 1994 por Crauel y Flandoli [22]. El marco que se usa es el de la teoría de los sistemas dinámicos aleatorios como generalización de la teoría de semigrupos. La invarianza será sustituida por la propiedad de invarianza respecto del cociclo, y la atracción cuando $t \to +\infty$ deberá ser entendida como propiedad de atracción "desde $-\infty$". Con estas diferencias esenciales, el resultado obtenido constituye una apropiada generalización de la teoría determinista de sistemas dinámicos tal y como aparece, por ejemplo, en Hale [55] o Temam [101].

A continuación, exponemos los conceptos y resultados fundamentales relacionados con la existencia de *atractores aleatorios* (también denominados *atractores estocásticos*, Schmalfuss [94]). Para la demostración de los mismos puede consultarse Crauel y Flandoli [22].

En todo lo que sigue, llamaremos *conjunto aleatorio* $A(\omega), \omega \in \Omega$, a toda familia de conjuntos $\{A(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$, donde, para cada ω, $A(\omega) \subset X$.

Nota: En realidad, deberíamos haber definido como conjunto aleatorio a la aplicación

$$A : \Omega \to \mathcal{P}(X),$$

donde $\mathcal{P}(X)$ denota la familia de subconjuntos de X. No obstante, por simplificación en la notación, hablaremos indistintamente de $A(\omega)$ para referirnos a la familia $\{A(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ o al conjunto $A(\omega) \subset X$. Creemos que el contexto evitará toda posible confusión.

Si, para cada $\omega \in \Omega$, $A(\omega)$ es un conjunto cerrado (resp. compacto), diremos que $A(\omega)$ es un conjunto aleatorio cerrado (resp. compacto).

Definición 13 *Dado un SDA $\varphi : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times X \to X$ sobre θ_t en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, un conjunto aleatorio $K(\omega)$, $\omega \in \Omega$, se dice positivamente invariante (resp. estrictamente invariante) para φ si, $P-c.s.$,*

$$\varphi(t,\omega)K(\omega) \subseteq K(\theta_t\omega) \quad (resp. \quad \varphi(t,\omega)K(\omega) = K(\theta_t\omega)) \quad \forall t > 0.$$

Definición 14 *Dado un conjunto aleatorio $K(\omega)$, el conjunto aleatorio*

$$\Lambda_K(\omega) = \bigcap_{T\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq T} \varphi(t,\theta_{-t}\omega)K(\theta_{-t}\omega)}$$

se denomina conjunto omega-límite (o simplemente límite) de $K(\omega)$.

Nota. Observemos que, por definición, $\Lambda_K(\omega)$ (que también notaremos a veces por $\Lambda(K,\omega)$) es un conjunto aleatorio cerrado. Además, se verifica que

$$\Lambda_K(\omega) = \{y \in X : \exists t_n \nearrow +\infty,\ x_n \in K(\theta_{-t_n}\omega) \text{ tales que } \lim_{n\to+\infty} \varphi(t_n,\theta_{-t_n}\omega)x_n = y\}.$$

De manera similar al caso determinista, se puede probar el siguiente resultado:

Lema 2 *Para cada conjunto aleatorio $K(\omega)$, $\Lambda_K(\omega)$ es invariante.*

Definición 15 *Sean $K(\omega)$ y $B(\omega)$ conjuntos aleatorios. Se dice que $K(\omega)$ absorbe a $B(\omega)$ si existe $t_B(\omega)$ tal que, $P-c.s.$,*

$$\varphi(t,\theta_{-t}\omega)B(\theta_{-t}\omega) \subseteq K(\omega) \quad \forall t \geq t_B(\omega).$$

Diremos que $K(\omega)$ es un conjunto aleatorio absorbente si $K(\omega)$ absorbe a todos los conjuntos $B \subset X$ acotados.

Definición 16 *Se dice que un conjunto aleatorio $\mathcal{A}(\omega)$ atrae a otro conjunto aleatorio $B(\omega)$ si, $P-c.s.$, se tiene*

$$\mathrm{dist}(\varphi(t,\theta_{-t}\omega)B(\theta_{-t}\omega),\mathcal{A}(\omega)) \to 0 \quad \textit{cuando} \quad t \to +\infty.$$

Diremos que $\mathcal{A}(\omega)$ es un conjunto atrayente si $\mathcal{A}(\omega)$ atrae a todos los conjuntos $B \subset X$ acotados.

Recuérdese que $\varphi(t,\theta_{-t}\omega)x$ representa la solución en $t = 0$ de la trayectoria que estaba en x en el tiempo $-t$. Por tanto, la propiedad de atracción de la definición anterior debe ser entendida *desde* $-\infty$. Debido a la invarianza de Ω respecto de θ_t, no es difícil probar el siguiente

Lema 3 *Si $\mathcal{A}(\omega)$ atrae a $B(\omega)$, entonces $\operatorname{dist}(\varphi(t,\omega)B(\omega), \mathcal{A}(\theta_t\omega)) \to 0$ cuando $t \to +\infty$ en probabilidad. Es decir, para todo $\epsilon > 0$*

$$\lim_{t\to+\infty} P(\operatorname{dist}(\varphi(t,\omega)B(\omega), \mathcal{A}(\theta_t\omega)) < \epsilon) = 1. \tag{3.1}$$

De nuevo, análogamente a lo que ocurre en el caso determinista, se verifica el siguiente resultado:

Proposición 4 *Sean $K(\omega), B(\omega)$ conjuntos aleatorios tales que $K(\omega)$ absorbe a $B(\omega)$ y $K(\omega)$ es compacto $P-c.s.$ Entonces, para casi todo $\omega \in \Omega$, se tiene:*

i) $\Lambda_B(\omega)$ es no vacío, $\Lambda_B(\omega) \subset K(\omega)$ y, por tanto, es compacto.

ii) $\Lambda_B(\omega)$ es estrictamente invariante.

iii) $\Lambda_B(\omega)$ atrae a $B(\omega)$.

La siguiente definición generaliza el concepto de atractor global en el marco de las ecuaciones diferenciales estocásticas. Observemos que, en principio, la propiedad de atracción sólo está dada para conjuntos acotados y deterministas de X.

Definición 17 *Dado un conjunto aleatorio $\mathcal{A}(\omega)$, se dice que es un atractor aleatorio asociado al SDA φ si, $P-c.s.$, se tiene:*

i) $\mathcal{A}(\omega)$ es un conjunto compacto,

ii) $\varphi(t,\omega)\mathcal{A}(\omega) = \mathcal{A}(\theta_t\omega)$, $\forall t \geq 0$ (es decir, $\mathcal{A}(\omega)$ es estrictamente invariante) y

iii)

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\varphi(t,\theta_{-t}\omega)B, \mathcal{A}(\omega)) = 0$$

para cada $B \subset X$ acotado.

Si $\mathcal{A}(\omega)$ es un atractor aleatorio, debido al lema anterior, tenemos que

$$\lim_{t\to+\infty} P(\operatorname{dist}(\varphi(t,\omega)B, \mathcal{A}(\theta_t\omega)) < \epsilon) = 1 \tag{3.2}$$

para cada $\epsilon > 0$ y cada $B \subset X$ acotado. Notemos que (3.2) muestra el acercamiento cuando $t \to +\infty$ de las trayectorias que comienzan en B al conjunto compacto, que se mueve en las variables t y ω, $\mathcal{A}(\theta_t\omega)$. Esta es la idea de disipatividad que conservaremos en estos sistemas y que indicamos al principio de esta sección.

El teorema general sobre existencia de atractores aleatorios es el siguiente:

Teorema 10 *Supongamos que existe un conjunto compacto y aleatorio $K(\omega)$, absorbente de los conjuntos acotados (no aleatorios) $D \subset X$. Entonces el conjunto*

$$\mathcal{A}(\omega) = \overline{\bigcup_{\substack{B \subset X \\ B \text{acotado}}} \Lambda_B(\omega)} = \overline{\bigcup_{m \geq 1} \Lambda_{B(0,m)}(\omega)}$$

es un atractor aleatorio para φ, donde $B(0,m)$ es la bola en X de centro 0 y radio m.

Nota: Observemos que el atractor aleatorio no coincide con el conjunto límite del conjunto absorbente $K(\omega)$, pues, en general, no se tiene que $K(\omega)$ se absorba a sí mismo.

Esta definición guarda cierta semejanza con el tratamiento que sobre atractores para sistemas no autónomos del tipo

$$\partial_t u = A(u(t), t) \tag{3.3}$$

hacen Chepyzhov y Vishik [25], [28]. En efecto, para conseguir una propiedad de invarianza sobre el atractor, deben introducir el concepto de *núcleo* $\mathcal{K}$ del proceso biparamétrico $\mathcal{S}(t,s)$ asociado a (3.3) (aquí $\mathcal{S}(t,s)x$ es la posición en el tiempo t de la partícula que se encuentra en x en el tiempo s.) Por definición, $\mathcal{K}$ es la familia de las soluciones de (3.3) que son acotadas y están definidas en todo $\mathbb{R}$. Si $K(s) = \{u(s)/\ u \in \mathcal{K}\}$ es la *sección* del núcleo $\mathcal{K}$ en el tiempo s, se prueba fácilmente que estas secciones satisfacen la propiedad de invarianza

$$\mathcal{S}(t,s)K(s) = K(t) \quad t, s \in \mathbb{R},\ t \geq s.$$

Además, para todo $B \subset X$ acotado y todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\text{dist}(\mathcal{S}(t, t-s)B, K(t)) \to 0 \quad \text{cuando } s \to +\infty.$$

Con posterioridad a estos trabajos han aparecido diversos artículos que muestran la utilidad de los sistemas dinámicos aleatorios en el estudio de los atractores de ecuaciones diferenciales no autónomas (Kloeden y Stoiner [65], Schmalfuss [97]).

El estudio comenzado por Crauel y Flandoli en [22] se amplía, con propiedades y nuevas aplicaciones, en Crauel, Debussche y Flandoli [23]. No obstante, la notación usada en este trabajo difiere de la habitualmente usada para sistemas dinámicos aleatorios, pues se pretende reflejar la generalización que supone el concepto de atractor aleatorio respecto del de atractor para ecuaciones diferenciales no autónomas. En efecto, si representamos por $\{\mathcal{S}(t,s,\omega)\}_{t,s\in\mathbb{R},\, t\geq s,\omega\in\Omega}$ la familia de aplicaciones $\mathcal{S}(t,s,\omega) : X \to X$ asociada a una ecuación diferencial estocástica (y, por tanto, no autónoma), toda la notación anterior puede expresarse a partir de $\mathcal{S}(t,s,\omega)$ sin más que tener en cuenta que, si $\mathcal{S}(t,s,\omega)x$ representa la posición en el tiempo t de la trayectoria que estaba en x en el tiempo s, entonces

$$\varphi(t,\theta_s\omega)x = \mathcal{S}(t+s,s,\omega)x,$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(\varphi(t,\theta_{-t}\omega)B, \mathcal{A}(\omega)) = \lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(\mathcal{S}(0,-t,\omega)B, \mathcal{A}(\omega)).$$

Por otro lado, la aplicación del grupo θ_t sobre Ω se manifestaría como

$$\mathcal{S}(t,s,\omega)x = \mathcal{S}(t-s,0,\theta_s\omega)x = \mathcal{S}(0,-t+s,\theta_t\omega)x.$$

Todo lo que sigue podría escribirse usando la notación de los procesos $\mathcal{S}(t,s,\omega)$, como aparece en [23]. Sin embargo, en nuestra opinión, es la notación de los sistemas dinámicos aleatorios la que permite de manera más natural introducirnos en la teoría de las ecuaciones estocásticas y, por ello, a partir de ahora ésta será la que usaremos.

Nota: Observemos que, si el sistema es autónomo, $\mathcal{S}(t,0)x = \mathcal{S}(t)x = \mathcal{S}(0,-t)x$, por lo que $\lim_{t\to+\infty} \mathcal{S}(0,-t)x = \lim_{t\to+\infty} \mathcal{S}(t)x$, obteniendo así las definiciones usuales de conjunto límite y atractor global.

El siguiente resultado resume alguna de las propiedades de los atractores aleatorios (Crauel et al. [23], teorema 2.2).

Teorema 11 *Sea $\varphi : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times X \to X$ un SDA. Sea $K(\omega)$ un conjunto aleatorio* *compacto y absorbente $P-c.s.$ Entonces el atractor aleatorio*

$$\mathcal{A}(\omega) = \overline{\bigcup_{\substack{B\subset X\\ B \text{acotado}}} \Lambda_B(\omega)}$$

satisface:

a) Es el menor conjunto aleatorio cerrado y atrayente.

b) $\mathcal{A}(\omega)$ es $P-c.s.$ conexo si X es conexo.

c) $\mathcal{A}(\omega)$ es un conjunto aleatorio medible, es decir, para todo $x \in X$, la aplicación $\omega \mapsto \operatorname{dist}(x, \mathcal{A}(\omega))$ es medible (véase Castaing y Valadier [12]).

Si, además, θ_t es ergódico (es decir, $\lim_{T\to+\infty} \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T P(\theta_{-t}A\bigcap B)\,dt = P(A)P(B)$, para todos $A, B \in \mathcal{F}$), entonces:

d) Existe $K \subset X$ acotado tal que, $P-c.s.$,

$$\mathcal{A}(\omega) = \Lambda_K(\omega).$$

e) $\mathcal{A}(\omega)$ es el mayor conjunto aleatorio compacto e invariante para el SDA.

Por último, en el interesante trabajo de Crauel [20] se prueba la unicidad del atractor aleatorio y que, bajo la condición de ergodicidad sobre θ_t, existe un compacto $K \subset X$ tal que

$$P(\mathcal{A}(\omega) = \Lambda_K(\omega)) = 1.$$

A partir del trabajo de Crauel y Flandoli [22], diversas generalizaciones han aparecido del concepto de atractor aleatorio. Cabe destacar entre ellas la usada en la escuela de Bremem (Arnold y Schmalfuss [6], Schmalfuss [94], Keller [63], Schenk-Hoppé [91]), que define al atractor aleatorio como un conjunto compacto aleatorio e invariante que atrae a los conjuntos $B(0, r(\omega))$ que satisfacen cierta condición de crecimiento subexponencial de los radios $r(\omega)$ (véase capítulo 6).

3.2 Semicontinuidad superior de atractores aleatorios

La cuestión principal que estudiamos en esta sección es la relación que existe entre el atractor aleatorio y el determinista cuando una ecuación en derivadas parciales es perturbada por un pequeño término aleatorio. Recientemente, Kloeden y Stoiner [65] han obtenido algunos resultados sobre la relación entre el atractor de una ecuación diferencial ordinaria autónoma y los de sistemas obtenidos de la ecuación anterior por medio de pequeñas perturbaciones no autónomas. Lo que esperamos que ocurra en nuestro caso, y de hecho conseguimos probar bajo ciertas condiciones, es que el atractor aleatorio sea una "modificación aleatoria" del determinista y, por tanto, cuando el parámetro se haga pequeño, se encuentre dentro de cualquier entorno de éste con probabilidad uno (esto quedará puesto de manifiesto en la siguiente sección con un ejemplo muy simple). Concretamente, probaremos un resultado sobre semicontinuidad superior para atractores aleatorios. Grosso modo, si $\mathcal{A}_\epsilon$ es el atractor asociado al sistema dinámico perturbado y $\mathcal{A}_0$ es el correspondiente al no perturbado, se dice que estos atractores poseen la propiedad de semicontinuidad superior si

$$\lim_{\epsilon \to 0} \operatorname{dist}(\mathcal{A}_\epsilon, \mathcal{A}_0) = 0.$$

Observemos que, por la definición de la semidistancia de Hausdorff dada en el Capítulo 1, la expresión anterior significa que, cuando $\epsilon \to 0$, $\mathcal{A}_\epsilon$ queda incluido en $\mathcal{A}_0$. Por otro lado, conviene reseñar que existen resultados de este tipo en el caso determinista (Hale [55], Hale et al. [56], Hale y Raugel [57], Temam [101], entre otros). La mayoría de ellos necesitan algunas propiedades de convergencia uniforme del semigrupo perturbado al no perturbado en conjuntos acotados en tiempo y espacio, además de la existencia de un conjunto absorbente uniforme para todos los semigrupos. En esta sección seguiremos las líneas principales de este argumento y probaremos un resultado similar para las perturbaciones aleatorias del sistemas dinámicos.

3.2.1 Motivación del problema: un ejemplo

Con el objeto de motivar el problema que nos ocupa, observemos el comportamiento de la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\frac{dx_\epsilon(t)}{dt} + \lambda x_\epsilon(t) = \epsilon \frac{dW_t}{dt}, \qquad \lambda > 0, \qquad x_\epsilon(0) = x_0, \tag{3.4}$$

donde $W_t : \Omega \to \mathbb{R}$, $t \geq 0$ es un proceso de Wiener unidimensional sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Es obvio que cuando $\epsilon = 0$, $x(t) = x_0 e^{-\lambda t}$ es la solución de (3.4) y, por tanto, $\{0\}$ es su atractor global.

Ahora bien, para $\epsilon > 0$ el problema (3.4) puede ser reescrito como

$$x_\epsilon(t) = x_0 - \lambda \int_0^t x_\epsilon(s)ds + \epsilon \int_0^t dW_s.$$

Si aplicamos la fórmula de Itô a la función $g(t, x_\epsilon(t)) = e^{\lambda t}|x_\epsilon(t)|^2$ (cf. por ejemplo Øksendal [79]), obtendremos

$$\begin{aligned} e^{\lambda t}|x_\epsilon(t)|^2 - |x_0|^2 &= \lambda \int_0^t e^{\lambda s}|x_\epsilon(s)|^2\, ds + \int_0^t e^{\lambda s}\epsilon^2\, ds \\ &\quad -2\lambda \int_0^t e^{\lambda s}|x_\epsilon(s)|^2\, ds + 2\epsilon \int_0^t e^{\lambda s} x_\epsilon(s) dW_s. \end{aligned}$$

Tomando esperanzas en los dos miembros de la igualdad y teniendo en cuenta las propiedades de la integral estocástica, resulta:

$$e^{\lambda t}\, E|x_\epsilon(t)|^2 \le |x_0|^2 - \lambda\, E(\int_0^t e^{\lambda s}|x_\epsilon(s)|^2\, ds) + E \int_0^t e^{\lambda s}\epsilon^2\, ds.$$

Aplicando ahora el lema de Gronwall, se deduce que

$$e^{\lambda t}\, E|x_\epsilon(t)|^2 \le |x_0|^2 + \epsilon^2(\frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda}),$$

y, consecuentemente,

$$E|x_\epsilon(t)|^2 \le e^{-\lambda t}|x_0|^2 + \frac{\epsilon^2}{\lambda}.$$

De la desigualdad de Tchebychev, se obtiene directamente que, para todo $\delta > 0$,

$$P(|x_\epsilon(t, \omega)| > \delta) \le \frac{1}{\delta^2}(e^{-\lambda t}|x_0|^2 + \frac{\epsilon^2}{\lambda})$$

y de aquí se sigue que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lim_{t \to +\infty} P(x_\epsilon(t, \omega) \in [-\delta, \delta]) = 1 \quad \forall \delta > 0.$$

Esto lo podemos interpretar diciendo que, con probabilidad 1, cuando ϵ tiende a cero, asintóticamente $x_\epsilon(t)$ está en cualquier entorno (arbitrariamente pequeño) del atractor global de la ecuación determinista.

3.2.2 Convergencia de atractores aleatorios. Un resultado de semicontinuidad superior

Supongamos ahora que tenemos un sistema dinámico (determinista) sobre un espacio de Banach separable X, $S(t) : X \to X$, $t \in \mathbb{R}^+$ y que se satisface alguna de las condiciones suficientes que garantizan existencia de atractor global $\mathcal{A}$ (Hale [55], Temam [101]). Para fijar ideas, supondremos que existe un conjunto absorbente y compacto $K_0 \subset X$ tal que $\mathcal{A} = \Lambda(K_0)$, donde $\Lambda(K_0)$ denota el conjunto límite de K_0 respecto del semigrupo $S(t)$. Perturbémoslo ahora con un término aleatorio dependiente de un parámetro $\epsilon \in (0,1]$, de modo que se obtenga un sistema dinámico aleatorio

$$\varphi_\epsilon : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times X \to X$$

tal que $P - c.s.$ y para todo $t \in \mathbb{R}^+$

$$(H1) \qquad \varphi_\epsilon(t, \theta_{-t}\omega)x \to S(t)x \text{ cuando } \epsilon \searrow 0$$

uniformemente en conjuntos acotados de X.

Entonces se verifica el siguiente resultado:

Teorema 12 *Supongamos que existe una familia decreciente de conjuntos aleatorios compactos y absorbentes (uniformemente en ϵ) $K_\epsilon(\omega)$ tales que $P - c.s.$*

$$(H2) \qquad \lim_{\epsilon \searrow 0} \operatorname{dist}(K_\epsilon(\omega), K_0) = 0.$$

Entonces, $P - c.s.$

i) φ_ϵ posee un atractor aleatorio $\mathcal{A}_\epsilon(\omega)$.

ii) $\mathcal{A}_\epsilon(\omega)$ está uniformemente acotado cuando ϵ tiende a cero. Es decir, existen $B \subset X$ acotado y $\epsilon_0 > 0$ tales que $P - c.s.$ $\mathcal{A}_\epsilon(\omega) \subset B$, para todo $\epsilon < \epsilon_0$.

iii) Es más, se tiene que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \operatorname{dist}(\mathcal{A}_\epsilon(\omega), \mathcal{A}) = 0 \quad \textit{con probabilidad uno.}$$

Nota: (H2) es una condición que aparece como consecuencia de que la perturbación del sistema se anula cuando ϵ tiende a cero y es no singular.

Demostración. La prueba de i) se deduce inmediatamente del teorema 10. Como $K_\epsilon(\omega)$ es uniformemente absorbente, dado el conjunto acotado $B \subset X$, es fácil ver que el conjunto límite de B asociado al SDA φ_ϵ, $\Lambda_\epsilon(B, \omega)$, está incluido en $K_\epsilon(\omega)$ y que entonces, $P - c.s.$,

$$\mathcal{A}_\epsilon(\omega) \subset K_\epsilon(\omega),$$

lo cual, gracias a (H2) implica que $P - c.s.$

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \operatorname{dist}(\mathcal{A}_\epsilon(\omega), K_0) = 0$$

Por lo tanto, tenemos ii).

Para demostrar iii), tomemos $\epsilon_j \searrow 0$ cuando $j \to +\infty$. Sean los $x_j \in \mathcal{A}_{\epsilon_j}(\omega)$ tales que $x_j \to x_0$. El apartado iii) quedará probado si demostramos que $x_0 \in \mathcal{A} = \Lambda(K_0)$. En efecto, si iii) no se verifica, entonces existirán $\epsilon_j \searrow 0$ cuando $j \to +\infty$ y algún $\delta > 0$ tales que

$$\operatorname{dist}(\mathcal{A}_{\epsilon_j}(\omega), \mathcal{A}) \geq \delta \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

por lo que se podrán encontrar algunos $x_j \in \mathcal{A}_{\epsilon_j}(\omega)$ tales que, para todo $x \in \mathcal{A}$

$$d(x_j, x) > \frac{\delta}{2} \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Pero, gracias al lema 4 que aparece más adelante, por fuerza existe una subsucesión de $\{x_j\}$ que converge a algún punto $x_0 \in \mathcal{A}$. Inevitablemente, llegamos a una contradicción.

Probemos, por tanto, que $x_0 \in \mathcal{A} = \Lambda(K_0)$. Como consecuencia de la invarianza del atractor aleatorio, podremos escribir que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$x_j = \varphi_{\epsilon_j}(n, \theta_{-n}\omega) y_j^n,$$

con $y_j^n \in \mathcal{A}_{\epsilon_j}(\theta_{-n}\omega)$. Pero sabemos que

$$\lim_{j \to \infty} \operatorname{dist}(\mathcal{A}_{\epsilon_j}(\theta_{-n}\omega), K_0) = 0$$

y, por tanto,

$$\lim_{j\to\infty} \mathrm{dist}(y_j^n, K_0) = 0.$$

Pongamos $\delta_j = \mathrm{dist}(y_j^n, K_0)$ (entonces $\delta_j \to 0$).

Ahora podemos usar el siguiente lema (Ladyzhenskaya [68]) que es incluso más general que lo que necesitamos en nuestra situación.

Lema 4 *Supongamos dada una familia decreciente de compactos $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de un espacio métrico (X, d), de manera que*

$$\mathrm{dist}(x_n, L_n) \leq \delta_n \quad \forall n \geq 1,$$

donde $\delta_n \to 0$. Entonces existe una subsucesión x_{n_j} convergente a $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_n$.

Usando este resultado se deduce que existe una subsucesión (que volveremos a denotar por y_j^n) que converge a un punto $y_0^n \in K_0$. Por tanto,

$$\lim_{j\to\infty} x_j = x_0 = \lim_{j\to\infty} \varphi_{\epsilon_j}(n, \theta_{-n}\omega) y_j^n.$$

Pero es fácil ver, usando (H1), que $\varphi_{\epsilon_j}(n, \theta_{-n}\omega)y_j^n$ converge $P-c.s.$ hacia $\mathcal{S}(n)y_0^n$. Esto implica la existencia de otra subsucesión (denotada de nuevo como y_j^n) que converge $P-c.s.$, luego podemos asegurar que

$$x_0 = \mathcal{S}(n)y_0^n,$$

con $y_0^n \in K_0$, para todo $n \in N$. Como $\mathcal{A} = \Lambda(K_0)$, se sigue que $x_0 \in \mathcal{A}$, lo que concluye la demostración de iii).

□

En muchas de las aplicaciones podemos observar que, si escribimos, para cada $\omega \in \Omega$, $\mathcal{A}(\omega) \subset B(0, r(\omega)) \subset X$, entonces la esperanza del radio $r(\omega)$ es finita. El siguiente resultado generaliza el que aparece en Crauel et al. [23], teorema 2.2, apartado (6), pues muestra que los atractores aleatorios $\mathcal{A}_\epsilon(\omega)$ vienen dados como el conjuntos límite de un mismo conjunto acotado B, independiente de ϵ.

Proposición 5 *Supongamos que existe una bola aleatoria absorbente $B(0, r_\epsilon(\omega))$ para φ_ϵ tal que P-c.s.*

$$\sup_{\epsilon\in(0,1]} r_\epsilon(\omega) < \infty$$

y que existe $p \geq 1$ con

$$E(\sup_{\epsilon\in(0,1]} |r_\epsilon(\omega)|^p) < +\infty.$$

Entonces, existe una bola (que no depende de ω) $B_R = B(0, R) \subset X$ tal que $P-c.s.$

$$\mathcal{A}_\epsilon(\omega) = \Lambda_\epsilon(B_R) \qquad \forall \epsilon \in (0,1].$$

Demostración. Sabemos que, con probabilidad uno,

$$\mathcal{A}_\epsilon(\omega) \subset B\left(0, r_\epsilon(\omega)\right).$$

Además, existe $p \geq 1$ tal que

$$E(\sup_{\epsilon\in(0,1]} |r_\epsilon(\omega)|^p) = M_p < +\infty.$$

Dado $R > 0$, por la desigualdad de Tchebychev, tenemos que

$$P(\sup_{\epsilon\in(0,1]} |r_\epsilon(\omega)| > R) \leq \frac{M_p}{R^p}$$

de donde se deduce que

$$P(\sup_{\epsilon\in(0,1]} |r_\epsilon(\omega)| \leq R) > 1 - \frac{M_p}{R^p}.$$

Por tanto, eligiendo $R > (M_p)^{1/p}$, y teniendo en cuenta que

$$P(\mathcal{A}_\epsilon(\omega) \subset B(0, \sup_{\epsilon\in(0,1]} r_\epsilon(\omega))) = 1$$

se obtiene

$$P\left(\mathcal{A}_\epsilon(\omega) \subset B(0, R)\right) > 0.$$

Usamos ahora el siguiente resultado, debido a Crauel [20]:

Si el flujo θ_t es ergódico, entonces

$$P\left(\mathcal{A}(\omega) = \Lambda(D, \omega)\right) = 1$$

para todo $D \subset X$ (no aleatorio) tal que $P(\mathcal{A} \subset D) > 0$.

En nuestra situación, tenemos que

$$P\left(\mathcal{A}_\epsilon(\omega) \subset B(0, R)\right) > 0 \quad \forall \epsilon \in (0,1].$$

En consecuencia,

$$P(\mathcal{A}_\epsilon(\omega) = \Lambda_\epsilon(B(0,R))) = 1, \qquad \forall \epsilon \in (0,1].$$

□

3.2.3 Convergencia de atractores en las ecuaciones de Navier-Stokes con ruido aditivo

De entre los ejemplos a los que es posible aplicar la teoría de atractores aleatorios, merece la pena mencionar el de las ecuaciones bidimensionales de Navier-Stokes con ruido aditivo (Crauel y Flandoli [22] y Crauel et al. [23]). Nosotros vamos a comprobar ahora que se satisfacen las hipótesis del teorema 12 y que, consecuentemente, se tiene la semicontinuidad superior de los atractores aleatorios cuando $\epsilon \to 0$.

Formulación del problema

Sea la siguiente ecuación de Navier-Stokes en dimensión 2 con ruido aditivo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = \nu \Delta u + f + \phi \frac{\partial W}{\partial t}$$

$$\text{div } u = 0.$$

$W(t)$ es un proceso de Wiener unidimensional, con $t \in \mathbb{R}$. Un proceso de este tipo se puede construir si unimos dos procesos de Wiener independientes en $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^-$ respectivamente (véase, por ejemplo, Arnold y Scheutzow [4]).

Sean

$$H = \{\varphi \in [L^2(D)]^2 : \text{div } \varphi = 0,\ \varphi \cdot \vec{n} = 0 \text{ sobre } \partial D\}$$

$$V = \{\varphi \in [H^1(D)]^2 : \text{div } \varphi = 0\}$$

con $\vec{n}$ la normal exterior. Denotamos por $|.|$ y $(.,.)$ la norma y producto escalar en H. Identificando H con su dual H', y H' con un subespacio de V' (el dual de V), tenemos $V \subset H \subset V'$ y podemos denotar por $\langle .,. \rangle$ el par dual entre V y V'. Llamamos $D(A) = [H^2(D)]^2 \cap V$ y definimos $A : D(A) \subset H \to H$ como $Au = -P\Delta u$, con P la proyección ortogonal de $[L^2(D)]^2$ sobre H. El operador A es positivo, autoadjunto, con inverso compacto (Temam [101], Cap. III, Sección 2.1); denotamos por $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ los autovalores de A y por $e_1, e_2, \ldots$ el sistema ortogonal de autofunciones, verificando

$$||u||^2 \geq \lambda_1 |u|^2. \tag{3.5}$$

Definimos el operador bilineal $B(u,v) : V \times V \to V'$ como

$$\langle B(u,v), z\rangle = \int_D z(x) \cdot (u(x) \cdot \nabla) v(x)\, dx$$

para todo $z \in V$. Por la condición de incompresibilidad tenemos

$$\langle B(u,v), v\rangle = 0, \quad \langle B(u,v), z\rangle = -\langle B(u,z), v\rangle. \tag{3.6}$$

Además, se puede probar ([101]) que existe c_0 tal que

$$|(B(u,v),z))| \leq c_0 |u|^{1/2} ||u||^{1/2} |v|^{1/2} ||v||^{1/2} ||z|| \tag{3.7}$$

para todos $u, v, z \in V$.

Asumimos

$$f \in H, \quad \phi \in \left[W^{1,\infty}(D)\right]^2.$$

En estas condiciones, se tiene que existe $c_1 > 0$ tal que

$$|(B(u,\phi),u)| \leq c_1 |u|^2, \quad \forall u \in H.$$

Tras estos preliminares, partiendo de las ecuaciones deterministas de Navier-Stokes

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) + B(u(t), u(t)) = f, \tag{3.8}$$

consideramos una perturbación pequeña y aleatoria de estas ecuaciones dada por:

$$du_\epsilon + Au_\epsilon dt + B(u_\epsilon, u_\epsilon)dt = f dt + \epsilon\phi dW(t), \qquad u_\epsilon(0) = u_0. \tag{3.9}$$

Nota: El análisis que vamos a realizar se puede extender al caso en que la perturbación sea de la forma $\epsilon \sum_{i=1}^{d} \phi^i dW_t^i$, pero nos vamos a limitar a trabajar con (3.9) por comodidad en los cálculos y claridad en la exposición.

Es bien conocido (Temam [101]) que para las ecuaciones de Navier-Stokes en dimensión dos existe un atractor global finito-dimensional $\mathcal{A}$, dado por el conjunto límite de un conjunto compacto y absorbente de H. Observemos que, cuando ϵ tiende a cero, (3.9) se convierte en el sistema de Navier-Stokes determinista. Cuestiones relacionadas con la existencia y unicidad de soluciones para (3.9) han sido ya estudiadas y pueden encontrarse en numerosos trabajos (véase, por ejemplo, Bensoussan y Temam [9]). Nosotros estamos interesados en la relación que existe entre los atractores aleatorios $\mathcal{A}_\epsilon(\omega)$ asociados a (3.9) para cada $\epsilon \in (0,1]$ y el atractor global $\mathcal{A}$. Siguiendo las ideas que aparecen en el trabajo de Crauel et al. [23], vamos a probar que existe el atractor aleatorio para el problema (3.9) y que, de hecho, se tiene la propiedad de semicontinuidad superior cuando ϵ tiende a cero.

Existencia de atractores aleatorios

Para el análisis de este problema introducimos el siguiente cambio de variables:

$$v_\epsilon(t,\omega) = u_\epsilon(t,\omega) - \epsilon\phi z(t,\omega)$$

donde $z(t)$ verifica

$$z(t) = \int_{-\infty}^{t} \exp(-\alpha(t-s))\, dW(s),$$

con $\alpha > 0$ un parámetro por determinar.

Es bien conocido (Da Prato y Zabczyk [30]) que $z(t)$ es un proceso estacionario y que sus trayectorias son continuas $P - c.s.$

Es claro que v_ϵ satisface la ecuación

$$\frac{dv_\epsilon}{dt} + Av_\epsilon + B(v_\epsilon + \epsilon\phi z, v_\epsilon + \epsilon\phi z) = f + \alpha\epsilon\phi z - \epsilon A(\phi z). \tag{3.10}$$

Y ahora esta ecuación (3.10) puede ser estudiada para cada $\omega \in \Omega$ En particular, sabemos que existe una única solución de (3.10) (Temam [101]). De esta forma, se puede definir el sistema dinámico aleatorio asociado a (3.9), que vendrá dado por

$$\varphi_\epsilon(t,\omega)u_0 = u_\epsilon(t,\omega) = v_\epsilon(t,\omega) + \epsilon\phi z(t,\omega).$$

De ahora en adelante seguiremos muy de cerca los cálculos que aparecen en Crauel et al. [23] para obtener la existencia de un conjunto aleatorio compacto y absorbente $K_\epsilon(\omega)$ en el tiempo cero para cada $\epsilon \in (0,1]$.

Tomando productos escalares por v_ϵ en (3.10), obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\epsilon|^2 + ||v_\epsilon||^2 - (B(v_\epsilon + \epsilon\phi z, v_\epsilon + \epsilon\phi z), v_\epsilon) = (f, v_\epsilon) + \alpha(\epsilon\phi z, v_\epsilon) - ((\epsilon\phi z, v_\epsilon)).$$

Teniendo en cuenta (??) y (??), se tiene

$$\begin{aligned}
|(B(v_\epsilon + \epsilon\phi z, v_\epsilon + \epsilon\phi z), v_\epsilon)| &= |(B(v_\epsilon + \epsilon\phi z, \epsilon\phi z), v_\epsilon + \epsilon\phi z)| \\
&\leq |\epsilon z(B(v_\epsilon + \epsilon\phi z, \phi), v_\epsilon + \epsilon\phi z)| \\
&\leq \epsilon c_1|z||v_\epsilon + \epsilon\phi z|^2 \leq 2c_1\epsilon|z|(|v_\epsilon|^2 + \epsilon^2|\phi|^2|z|^2),
\end{aligned}$$

y de aquí se sigue

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\epsilon|^2 + ||v_\epsilon||^2 \leq 2c_1\epsilon|z||v_\epsilon|^2 + \frac{\lambda_1}{4}|v_\epsilon|^2 + \frac{1}{2}||v_\epsilon||^2 + g$$

donde

$$g = 2c_1\epsilon|\phi|^2|z|^3 + \frac{2}{\lambda_1}|f|^2 + \frac{2\epsilon\alpha^2}{\lambda_1}|z|^2 + \frac{2\epsilon\alpha^2}{\lambda_1}|\phi|^2|z|^2 + \frac{1}{2}\epsilon|\phi|^2|z|^2.$$

Usando (??), resulta que

$$\frac{d}{dt}|v_\epsilon|^2 + \frac{1}{4}||v_\epsilon||^2 + (\frac{\lambda_1}{4} - 2c_1\epsilon|z|)|v_\epsilon|^2 \leq 2g\,. \tag{3.11}$$

Usando ahora el lema de Gronwall con $t_0 < -1$, $t \in [-1, 0]$, obtenemos

$$\begin{aligned}
|v_\epsilon(t)|^2 &\leq |v_\epsilon(t_0)|^2 \exp(-\int_{t_0}^t (\frac{\lambda_1}{4} - 2\epsilon c_1|z|)\, d\tau) \\
&\quad +2\int_{t_0}^t g(\sigma)\exp(-\int_\sigma^t (\frac{\lambda_1}{4} - 2\epsilon c_1|z|)\, d\tau)\, d\sigma \\
&\leq c_2|v_\epsilon(t_0)|^2 \exp(t_0(\tfrac{\lambda_1}{4} + \tfrac{2\epsilon c_1}{t_0}\int_{t_0}^0 |z|\, d\sigma)) \\
&\quad +2c_2\int_{t_0}^0 g(\sigma)\exp(-\int_\sigma^0 (\frac{\lambda_1}{4} - 2\epsilon c_1|z|)\, d\tau)\, d\sigma,
\end{aligned}$$

con

$$c_2 = \exp(\frac{\lambda_1}{4}).$$

Como z es un proceso estacionario y ergódico, se tiene que

$$-\frac{1}{t_0}\int_{t_0}^0 |z(\sigma)|d\sigma \to E(|z(0)|)$$

cuando $t_0 \to -\infty$. Por lo tanto, existe $t_1(\omega)$ tal que $\forall t \leq t_1(\omega)$

$$-\frac{1}{t}\int_t^0 |z(\sigma)|d\sigma \leq 2E(|z(0)|)$$

y entonces

$$\exp(t_0(\frac{\lambda_1}{4} + 2\frac{\epsilon c_1}{t_0}\int_{t_0}^0 |z|\, d\sigma)) \leq \exp(t_0(\frac{\lambda_1}{4} - 4c_1\epsilon E(|z(0)|))).$$

Como

$$E(|z(0)|) \leq (E(|z(0)|^2)^{1/2} = \frac{1}{(2\alpha)^{1/2}},$$

podemos tomar α suficientemente grande para que se tenga

$$E(|z(0)|) \leq \frac{\lambda_1}{32c_1}.$$

Así, resultará que

$$\exp(t_0(\frac{\lambda_1}{4} + 2\frac{\epsilon c_1}{t_0}\int_{t_0}^0 |z|\, d\sigma)) \to 0 \qquad \text{cuando} \quad t_0 \to -\infty.$$

Además, como $P - c.s.$,

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{|z(t)|}{t} = 0,$$

sabemos que $g(t)$ crece como mucho polinomialmente. Al estar multiplicada por una función que decae exponencialmente, la integral en que aparece esta función converge; de modo que se obtiene

$$\begin{aligned}
|v_\epsilon(t)|^2 &\leq c_2|v_\epsilon(t_0)|^2 \exp(t_0\tfrac{\lambda_1}{8}) \\
&\quad +2c_2\int_{-\infty}^0 g(\sigma)\exp(\sigma(\frac{\lambda_1}{4} + 2\frac{\epsilon c_1}{\sigma}\int_\sigma^0 |z|\, d\tau))\, d\sigma \\
&\leq 2c_2|u_\epsilon(t_0)|^2 \exp(t_0\tfrac{\lambda_1}{8}) + 2c_2\epsilon^2|\phi|^2|z|^2\exp(t_0(\tfrac{\lambda_1}{8}) \\
&\quad +2c_2\int_{t_0}^0 g(\sigma)\exp(-\int_\sigma^0(\frac{\lambda_1}{4} - 2\epsilon c_1|z|)\, d\tau)\, d\sigma.
\end{aligned}$$

Entonces, existirá $t(\omega)$ (independiente de ϵ) tal que para $t_0 < t(\omega)$ y $t \in [-1, 0]$, tenemos

$$|v_\epsilon(t)|^2 \leq r_\epsilon(\omega), \tag{3.12}$$

donde

$$\begin{aligned}
r_\epsilon(\omega) &= 1 + 2c_2\int_{t_0}^0 g(\sigma)\exp(-\int_\sigma^0(\frac{\lambda_1}{4} - 2\epsilon c_1|z|)\, d\tau)\, d\sigma \\
&+ 2c_2\epsilon^2|\phi|^2 \sup_{t_0\in(-\infty,-1]}|z(t_0)|^2\exp(t_0\tfrac{\lambda_1}{8}).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Además, integrando (3.11) en $[-1, 0]$ se obtiene

$$\int_{-1}^0 ||v_\epsilon(\sigma)||^2\, d\sigma \leq \tilde{r}_\epsilon(\omega) = 8c_1\epsilon(\int_{-1}^0 |z(\sigma)|^2\, d\sigma)r_\epsilon(\omega) + 8\int_{-1}^0 g(\sigma)\, d\sigma. \tag{3.14}$$

Para conseguir ahora una estimación en V, tomamos el producto escalar por v_ϵ en V. Se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v_\epsilon||^2 + |Av_\epsilon|^2 &= ((f, v_\epsilon)) + \alpha\epsilon((\phi z, v_\epsilon)) - \epsilon(A\phi z, Av_\epsilon) \\ &\quad -(B(v_\epsilon + \epsilon\phi z, v_\epsilon + \epsilon\phi z), Av_\epsilon).\end{aligned}$$

Como existe c_3 tal que, para todo $u \in D(A)$,

$$|B(u,u)| \leq c_3|u|^{1/2}|Au|^{1/2}||u||,$$

se llega, con cálculos de tipo estándar, a que

$$\frac{d}{dt}||v_\epsilon||^2 \leq C(t) + D(t)||v_\epsilon||^2,$$

con

$$\begin{aligned}C(t) &= 4|f|^2 + 4\alpha^2\epsilon^2|z|^2 + 4\epsilon|A(\phi z)|^2 + 4c_3^2\epsilon|v_\epsilon + \epsilon\phi z||A(\phi z)|||v_\epsilon + \epsilon\phi z||^2 \\ &+ 32c_3^4\epsilon|v_\epsilon + \epsilon\phi z|^2||\phi z||^4\end{aligned}$$

y

$$D(t) = 32c_3^4\epsilon|v_\epsilon + \epsilon\phi z|^2||v_\epsilon||^2.$$

De donde, para todo $t \in [-1, 0]$ se deduce

$$\begin{aligned}||v_\epsilon(0)||^2 &\leq ||v_\epsilon(t)||^2 \exp\int_t^0 D(\sigma)d\sigma + \int_t^0 C(\sigma)\exp\int_\sigma^0 D(\tau)d\tau d\sigma \\ &\leq (||v_\epsilon||^2 + \int_{-1}^0 C(\sigma)d\sigma)\exp\int_{-1}^0 D(\sigma)d\sigma,\end{aligned}$$

y después de efectuar una integración en $[-1, 0]$

$$||v_\epsilon(0)||^2 \leq \left(\int_{-1}^0 ||v_\epsilon(t)||^2\, dt + \int_{-1}^0 C(\sigma)d\sigma\right)\exp\int_{-1}^0 D(\sigma)d\sigma.$$

Entonces, de (3.13) y (3.14), finalmente se llega a que existe $\widehat{r}_\epsilon(\omega)$ tal que si $t_0 < t(\omega)$

$$||v_\epsilon(0)||^2 \leq \widehat{r}_\epsilon^2(\omega).$$

Si denotamos por $K_\epsilon(\omega)$ la bola en V de radio $\widehat{r}_\epsilon(\omega) + \epsilon\phi||z(0)||$, habremos conseguido un conjunto compacto y absorbente (uniformemente en ϵ) en H para φ_ϵ. Más aún, es claro que

$$\exists \lim_{\epsilon \searrow 0} \widehat{r}_\epsilon(\omega) \leq r_d$$

con r_d independiente de $\omega \in \Omega$, y así la hipótesis (H2) del teorema 12 se verifica inmediatamente.

Convergencia de los atractores

La siguiente proposición demuestra que la hipótesis (H1) se verifica en este caso, y que se tiene, en consecuencia, la propiedad de semicontinuidad superior:

Proposición 6 $u_\epsilon(0,\omega;-t_0,u_0)$ *(valor en el tiempo 0 de la solución de (3.9) que estaba en u_0 en $-t_0$) converge en H, $P-c.s.$ cuando $\epsilon \to 0$ a la solución $u(t_0;u_0)$ del problema no perturbado de manera uniforme en conjuntos acotados de condiciones iniciales. Es decir, dados $t_0 \in \mathbb{R}^+$ y $B \subset H$ acotado,*

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} |u_\epsilon(0,\omega;-t_0,u_0) - u(t_0;u_0)| = 0 \quad \forall u_0 \in B.$$

Demostración. Denotemos $v_\epsilon(t,\omega) = u_\epsilon(t,\omega) - u(t)$ la diferencia entre la solución de la ecuación perturbada y la no perturbada con la misma condición inicial u_0 en $-t_0$. Es claro que v_ϵ verifica

$$\begin{aligned} dv_\epsilon + Av_\epsilon dt + B(v_\epsilon + u, v_\epsilon + u) - B(u,u)dt &= \epsilon\phi dW(t) \\ v_\epsilon(-t_0) &= 0 \end{aligned}$$

Como B es bilineal, podemos escribir esta ecuación como

$$dv_\epsilon + Av_\epsilon dt + (B(v_\epsilon,v_\epsilon) + B(v_\epsilon,u) + B(u,v_\epsilon))dt = \epsilon\phi dW(t).$$

Usando el cambio de variables

$$z_\epsilon = v_\epsilon - \epsilon\phi W(t)$$

se obtiene formalmente

$$\begin{aligned} \frac{dz_\epsilon}{dt} &+ Az_\epsilon + \epsilon A(\phi W(t)) + B(z_\epsilon + \epsilon\phi W(t), z_\epsilon + \epsilon\phi W(t)) \\ &+ B(z_\epsilon + \epsilon\phi W(t), u) + B(u, z_\epsilon + \epsilon\phi W(t)) = 0. \end{aligned}$$

Tomando el producto escalar con z_ϵ, y usando la bilinealidad de B y (??),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z_\epsilon|^2 &+ (Az_\epsilon, z_\epsilon) + (\epsilon W(t)A\phi, z_\epsilon) + (B(z_\epsilon, \epsilon\phi W(t)), z_\epsilon) \\ &+ (B(\epsilon\phi W(t), \epsilon\phi W(t)), z_\epsilon) + (B(z_\epsilon, u), z_\epsilon) \\ &+ (B(\epsilon\phi W(t), u), z_\epsilon) + (B(u, \epsilon\phi W(t)), z_\epsilon) = 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Haciendo uso de las propiedades del operador B y la desigualdad de Young, las siguientes estimaciones son directas:

$$(\epsilon W(t)A\phi, z_\epsilon) \leq \epsilon|W(t)|\,|A\phi|\,|z_\epsilon| \leq \frac{\epsilon^2 W(t)^2|A\phi|^2}{2} + \frac{|z_\epsilon|^2}{2},$$

$$(B(z_\epsilon, \epsilon\phi W(t)), z_\epsilon) \leq \epsilon|W(t)|\,|(B(z_\epsilon,\phi), z_\epsilon)| \leq c_1\epsilon|W(t)|\,|z_\epsilon|^2,$$

$$\begin{aligned}(B(\epsilon\phi W(t), \epsilon\phi W(t)), z_\epsilon) &\leq c_3\epsilon^2 W(t)^2|\phi|^{1/2}||\phi||\,|A\phi|^{1/2}|z_\epsilon| \\ &\leq \frac{c_3{}^2}{2}\epsilon^4 W(t)^4|\phi|\,||\phi||^2|A\phi| + \frac{|z_\epsilon|^2}{2},\end{aligned}$$

$$(B(z_\epsilon, u), z_\epsilon) \leq c_4|z_\epsilon|||u||\,||z_\epsilon|| \leq ||z_\epsilon||^2 + c_5||u||^2|z_\epsilon|^2,$$

$$\begin{aligned}(B(\epsilon\phi W(t), u), z_\epsilon) &\leq \epsilon|W(t)|\,|(B(\phi, u), z_\epsilon)| \\ &\leq \epsilon|W(t)|\,|\phi|^{1/2}|A\phi|^{1/2}||u||\,|z_\epsilon| \\ &\leq \tfrac{1}{2}\epsilon^2 W(t)^2|\phi||A\phi|\,||u||^2 + \tfrac{1}{2}|z_\epsilon|^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(B(u, \epsilon\phi W(t)), z_\epsilon) &\leq \epsilon|W(t)|\,|(B(u,\phi), z_\epsilon)| \\ &\leq \epsilon|W(t)|\,|u|^{1/2}||u||^{1/2}||\phi||^{1/2}|A\phi|^{1/2}|z_\epsilon| \\ &\leq \epsilon|W(t)|^2|u|\,||u||\,||\phi||\,|A\phi| + \tfrac{1}{2}|z_\epsilon|^2.\end{aligned}$$

De (3.15) y teniendo en cuenta estas desigualdades, se sigue que

$$\frac{d}{dt}|z_\epsilon|^2 \leq h(t) + k(t)|z_\epsilon|^2,$$

donde

$$\begin{aligned}h(t) &= K\epsilon(W(t)^2|A\phi| + W(t)^4|\phi|\,||\phi||^2|A\phi| \\ &+ W(t)^2|\phi|\,|A\phi|\,||u||^2 + W(t)^2|u|\,||u||\,||\phi||\,|A\phi|)\end{aligned}$$

y

$$k(t) = 2 + c_1\epsilon|W(t)| + c_5||u||^2.$$

Ahora, el lema de Gronwall implicará

$$|z_\epsilon(t)|^2 \leq h(t) + \int_{-t_0}^{t} h(s)k(s)\exp(\int_s^t k(\tau)\,d\tau)\,ds,$$

y por tanto, $|z_\epsilon(t)|^2 \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$ para todo $t \geq -t_0$. Entonces,

$$\lim_{\epsilon\to 0}|v_\epsilon|^2 \leq \lim_{\epsilon\to 0} 2(|z_\epsilon|^2 + \epsilon^2|\phi|^2|W(t)|^2) = 0,$$

lo que concluye la prueba tomando $t = 0$.

□

3.2.4 Una ecuación de reacción difusión

Aplicamos ahora los resultados sobre semicontinuidad superior de atractores a una ecuación de reacción difusión que aparece, entre otros sitios, en el trabajo de Crauel y Flandoli [22]. Las ideas son muy similares a las escritas en la sección anterior, por lo que en este caso seremos más esquemáticos en la exposición de los cálculos.

Formulación del problema

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto acotado con frontera regular y

$$f(u) = \sum_{k=0}^{2p-1} a_k u^k, \qquad a_{2p-1} < 0.$$

Consideramos la siguiente perturbación de una ecuación en derivadas parciales de tipo reacción-difusión en D por un ruido blanco aditivo multiplicado por un pequeño parámetro ϵ:

$$\left\{\begin{array}{rcll} du_\epsilon & = & \Delta u_\epsilon dt + f(u_\epsilon)dt + \epsilon\phi dW_t & \text{en } D \\ u_\epsilon & = & 0 \text{ sobre } \partial D & \\ u_\epsilon(0) & = & u_0 & \end{array}\right. \tag{3.16}$$

donde $W_t : \Omega \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, es un proceso de Wiener en $\mathbb{R}$.

Notas.

a) Algunas propiedades de este tipo de problemas, desde el punto de vista de la teoría de *largas desviaciones*, pueden encontrarse en Freidlin [53].

b) De nuevo el análisis puede extenderse al caso $\epsilon \sum_{i=1}^{d} \phi^i dW_t^i$.

Para expresar este problema en forma variacional introducimos los siguientes espacios: $H = L^2(D)$ (con $(.,.)$, $|.|$ su producto escalar y su norma respectivamente), $V = H_0^1(D)$ $(((.,.)), \|.\|)$, $Z = L^{2p}(D)$ y $Z' = L^{(2p)'}(D)$, con $(2p)' = (2p-1)/2p$. Es conocido (Temam [101]) que (3.16) puede expresarse como un problema de valores iniciales para una ecuación diferencial en H:

$$\left\{\begin{array}{rcll} du_\epsilon & = & Au_\epsilon dt + F(u_\epsilon)dt + \epsilon\phi dW_t & \text{en } H \\ u_\epsilon(0) & = & u_0 & \end{array}\right. \tag{3.17}$$

donde $A : D(A) \subset H \to H$, $Au = \Delta u$, $F : Z \to Z'$ y tomamos $\phi \in D(A)$.
En estas condiciones, condiciones suficientes para la existencia de atractor global $\mathcal{A}$ para el caso determinista son bien conocidas (véase, por ejemplo, Temam [101]).

Estudiamos (3.17) introduciendo el cambio de variable

$$v_\epsilon(t,\omega) = u_\epsilon(t,\omega) - \epsilon\phi W_t.$$

Es fácil ver que v_ϵ satisface

$$dv_\epsilon \;=\; Av_\epsilon dt + F(v_\epsilon + \epsilon\phi W_t)dt + \epsilon A(\phi W_t). \tag{3.18}$$

Así, la ecuación (3.18) puede ser estudiada para cada $\omega \in \Omega$, de manera que, aplicando los resultados de existencia y unicidad de soluciones que aparecen en Temam [101], obtenemos que $P-c.s.$

i) Para todo $t_0 < T$ y cada $v_0 \in H$, existe una única solución de (3.18), con $v_\epsilon(t_0) = v_0$, $v_\epsilon \in C([t_0,T];H) \cap L^2(t_0,T;V) \cap L^{2p}([t_0,T];Z)$.

ii) Si $v_0 \in V$, la solución pertenece a $C([t_0,\infty);V) \cap L^2_{loc}(t_0,\infty;D(A))$.

iii) Si denotamos $v_\epsilon = v_\epsilon(t,\omega;t_0,v_0)$ la solución de (3.18), entonces la aplicación $v_0 \mapsto v_\epsilon(t,\omega;t_0,v_0)$ es continua para cada $t \geq 0$.

A partir de la aplicación $v_0 \mapsto v_\epsilon(t,\omega;t_0,v_0)$ podemos definir un flujo estocástico $\varphi_\epsilon(t,\omega)u_0 = v_\epsilon(t,\omega;0,u_0) + \epsilon\phi W_t$. Este es el sistema dinámico aleatorio asociado a (3.17).
Veamos que las hipótesis del teorema 12 se satisfacen.

Existencia de atractores aleatorios

En esta sección resumimos los resultados de Crauel y Flandoli [22], Sección 5, que conducen a la existencia de atractor aleatorio para cada φ_ϵ (Teorema 5.6 en [22]). La diferencia fundamental con los resultados análogos en [22] se basa en que en nuestro caso efectuamos los cálculos cuidando de que el parámetro ϵ aparezca multiplicando siempre a los términos aleatorios de la ecuación. Teniendo esto en cuenta, los siguientes resultados son consecuencia de los de [22]:

Lema 5 *a) Para todo $u_\epsilon \in D(A) \cap Z$, se tiene que*

$$-(A(u_\epsilon - \epsilon\phi W_t), F(u_\epsilon)) \leq \beta||u_\epsilon||^2 + \gamma||u_\epsilon||_Z^{2p} + \epsilon p_1(t,\omega),$$

donde $\beta, \gamma > 0$ y

$$p_1(t,\omega) = c_4||A\phi||_{Z'}^{2p} + c_3||A\phi||_{Z'}|W_t|, \quad c > 0.$$

b) Para todo $u_\epsilon \in Z$, se tiene que

$$(u_\epsilon - \epsilon\phi W_t, F(u_\epsilon)) \leq -\delta_0||u_\epsilon||_Z^{2p} + c_5|D| + \epsilon p_2(t,\omega),$$

donde δ_0, $c_5 > 0$ y

$$p_2(t,\omega) = c_6||\phi||_{Z'}^{2p}|W_t|^{2p} + c_3||\phi||_{Z'}|W_t|, \quad c_i > 0.$$

Nota. Observemos que las funciones p_i tienen, a lo más, crecimiento polinomial en t.

Proposición 7 *(absorción en H en $t = -1$)*
Existe $r_\epsilon(\omega) > 0$ tal que, para todo $\rho > 0$, existe $t(\rho) \leq -1$ (independiente de ϵ) que verifica lo siguiente: para cada $t_0 \leq t(\rho)$ y $u_0 \in H$ con $|u_0| \leq \rho$, la solución de (3.18) verifica

$$|v_\epsilon(-1,\omega; t_0, u_0 - \epsilon\phi W_{t_0}(\omega))| \leq r_\epsilon(\omega).$$

Lema 6 *Existe $c_1(\epsilon,\omega)$ tal que $\forall\rho > 0$ existe $t(\rho) < -1$ (independiente de ϵ) tal que $\forall t_0 \leq t(\rho)$ y $|u_0| \leq \rho$, tenemos*

a)

$$\int_{-1}^{0} ||v_\epsilon(s,\omega)||^2\, ds \leq 2c_1(\epsilon,\omega),$$

b)

$$\int_{-1}^{0} ||u_\epsilon(s,\omega)||_Z^{2p}\, ds \leq \frac{1}{2\delta_0}c_1(\epsilon,\omega).$$

Proposición 8 *(absorción en V en $t = 0$)*
Existe $\tilde{r}_\epsilon(\omega)$ tal que, para todo $\rho > 0$, existe $\tilde{t}(\rho) \leq -1$ (independiente de ϵ) con la

propiedad siguiente: $\forall t_0 \leq \tilde{t}(\rho)$ *y* $\forall u_0 \in H$ *con* $|u_0| \leq \rho$ *la solución de (3.17) en* $[t_0, +\infty)$ *verifica*

$$||u_\epsilon(0, \omega; t_0, u_0)||^2 \leq \tilde{r}_\epsilon^2(\omega),$$

con

$$\begin{aligned}\tilde{r}_\epsilon(\omega)^2 &= k_2 r_d^2 + \epsilon g_1(|W(t_0)|)\, e^{\frac{\lambda_1}{2}} + \epsilon \int_{-\infty}^{-1} e^{\frac{\lambda_1 s}{2}} g_2(|W(s)|\, ds \\ &\quad + \epsilon \int_{-1}^{0} e^{\frac{\lambda_1 s}{2}} g_3(|W(s)|\, ds.\end{aligned}$$

Los $g_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, *son polinomios cuyos coeficientes dependen de la norma de la función* ϕ *en* $H^2(D)$, *de* f *y del dominio* D, *y* $r_d^2 = 2 + \frac{4|D|c_3}{\lambda_1}$, $k_2 = k_2(\beta, \gamma, \delta_0)$ *(véase [22]).*

Estos resultados conducen al siguiente teorema sobre existencia de atractores aleatorios para φ_ϵ.

Teorema 13 *El SDA* φ_ϵ *asociado a la ecuación de reacción-difusión (3.17) tiene un atractor aleatorio denotado* $\mathcal{A}_\epsilon(\omega)$.

Además, como $\theta_t : \Omega \to \Omega$ *es ergódico, para cada* $\epsilon > 0$ *existe un conjunto compacto* $K_\epsilon \subset H$ *tal que* $P - c.s.$

$$\mathcal{A}_\epsilon(\omega) = \Lambda_\epsilon(K_\epsilon, \omega).$$

De la proposición 8, y teniendo en cuenta el crecimiento polinómico de las funciones g_i, $i = 1, 2, 3$, y el crecimiento en ϵ de $\tilde{r}_\epsilon(\omega)$, la hipótesis (H2) del teorema 12 se verifica de forma casi inmediata. Además, es fácil probar que el radio $\tilde{r}_\epsilon(\omega)$ tiene esperanza finita, para todo $p \geq 1$, (Debussche [32]), de manera que también se satisfacen las hipótesis de la proposición 5, por lo que la última caracterización en el teorema 13 puede mejorarse, asegurando que existe una bola $B_R \subset H$ tal que, para todo $\epsilon \in (0, 1]$

$$\mathcal{A}_\epsilon(\omega) = \Lambda_\epsilon(B_R) \qquad \text{con probabilidad uno.}$$

El siguiente lema proporciona (H1):

Lema 7 *La solución $u_\epsilon(0,\omega;-t_0,u_0)$ de (3.17) converge en H cuando $\epsilon \to 0$ a la solución $u(t_0;u_0)$ del problema no perturbado, uniformemente en conjuntos acotados de condiciones iniciales, es decir, dados $t_0 \in \mathbb{R}^+$ y $B \subset H$ acotado, tenemos que $P-c.s.$*

$$\lim_{\epsilon\searrow 0}|u_\epsilon(0,\omega;-t_0,u_0)-u(t_0;u_0)|=0 \quad \forall u_0\in B.$$

Demostración. Sea $v_\epsilon(t)=u_\epsilon(t)-u(t)$ la diferencia entre las soluciones del problema perturbado y no perturbado, con la misma condición inicial u_0 en $-t_0$. Es claro que v_ϵ satisface

$$dv_\epsilon = Av_\epsilon dt+(F(u_\epsilon)-F(u))dt+\epsilon\phi dW(t), \qquad v_\epsilon(-t_0)=0.$$

Si, de nuevo, usamos el cambio de variables

$$z_\epsilon = v_\epsilon - \epsilon\phi W(t),$$

obtenemos que z_ϵ verifica

$$\frac{d}{dt}z_\epsilon = Az_\epsilon+\epsilon A(\phi W(t))+F(u_\epsilon)-F(u),$$

y así, tomando producto escalar en H con z_ϵ obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|z_\epsilon|^2 &= -||z_\epsilon||^2+(\epsilon W(t)A\phi,z_\epsilon)+(F(u_\epsilon)-F(u)\ u_\epsilon-u-\epsilon\phi W(t))\\
&\leq -||z_\epsilon||^2\frac{\epsilon}{2}|W(t)|^2\,|A\phi|^2+\frac{1}{2}|z_\epsilon|^2+(F(u_\epsilon)-F(u),u_\epsilon-u)\\
&- (F(u_\epsilon)-F(u),\epsilon\phi W(t))\\
&\leq -||z_\epsilon||^2+\frac{\epsilon}{2}|W(t)|^2\,|A\phi|^2+\frac{1}{2}|z_\epsilon|^2+k|u_\epsilon-u|^2\\
&+ \epsilon|\phi|\,|W(t)|\,|F(u_\epsilon)-F(u)|
\end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$(F(x)-F(y))(x-y)\leq k|x-y|^2 \quad \text{para todas } x,y\in\mathbb{R}.$$

De esta forma, finalmente obtenemos

$$\frac{d}{dt}|z_\epsilon|^2\leq h(t)+g|z_\epsilon|^2$$

y, por tanto, como en la sección anterior y tras usar el lema de Gronwall, tenemos que $P - c.s.$

$$\lim_{\epsilon \to 0} |z_\epsilon(t)|^2 = 0, \qquad \forall t \geq -t_0$$

y entonces

$$\lim_{\epsilon \to 0} |v_\epsilon(t)|^2 = \lim_{\epsilon \to 0} |u_\epsilon(t) - u(t)|^2 = 0$$

lo que finaliza la prueba, tomando $t = 0$.

$\square$

Así, puesto que las condiciones del teorema 12 se satisfacen, queda probada la propiedad de semicontinuidad superior para los atractores aleatorios de este problema.

Capítulo 4

Modos determinantes en sistemas dinámicos aleatorios

En este capítulo generalizamos el resultado sobre modos determinantes en Foias y Prodi [44] al caso de sistemas dinámicos aleatorios en los que existe un atractor aleatorio $\mathcal{A}(\omega)$. Ello mostrará la dependencia asintótica de estos sistemas de un número finito de grados de libertad. Aplicamos el resultado a las ecuaciones estocásticas bidimensionales de Navier-Stokes y la ecuación de reacción-difusión del capítulo anterior.

4.1 Dimensión finita de atractores aleatorios

Los resultados sobre atractores aleatorios del capítulo anterior quedarían incompletos si no tenemos alguna información sobre la dimensión de estos conjuntos. No obstante, debido a las fuertes fluctuaciones de las trayectorias, no es esperable que la unión en ω de $\mathcal{A}(\omega)$ sea de dimensión finita, sino que, más bien, que ésta unión sea un conjunto denso en el espacio de fases X. Sin embargo, nos podemos preguntar bajo qué condiciones cada compacto $\mathcal{A}(\omega)$ tiene dimensión finita.

Existen diversos trabajos que generalizan los resultados deterministas al caso de los atractores aleatorios. Entre ellos, debemos destacar básicamente dos artículos de Debussche, [32], [33], donde no sólo se afirma que, bajo ciertas condiciones y con probabilidad uno, $\mathcal{A}(\omega)$ tiene dimensión finita, sino que además existen cotas superiores, uniformes en ω, para esta dimensión. La hipótesis básica en estos trabajos supone que, si $K(\omega)$, conjunto aleatorio compacto y absorbente, está incluido en la bola $B(0, r(\omega))$, entonces

$$E(r(\omega)) < +\infty.$$

En estas condiciones podemos enunciar el siguiente teorema (Debussche [33]):

Teorema 14 *Dado el SDA $\varphi(t,\omega) : X \to X$, supongamos que, $P-c.s.$, $\varphi(1,\omega)$ es Fréchet diferenciable en $\mathcal{A}(\omega)$ y, además, que existen $k(\omega)$ y $\alpha > 0$ tales que, para todo $u \in \mathcal{A}(\omega)$ y $h \in X$ con $u + h \in \mathcal{A}(\omega)$*

$$|\varphi(1,\omega)(u+h) - \varphi(1,\omega)u - D\varphi(1,\omega)u\,.h| \leq k(\omega)|h|^{1+\alpha}.$$

Sean $w_\varphi(D\varphi(1,\omega)) = \alpha_1(D\varphi(1,\omega)) \cdots \alpha_n(D\varphi(1,\omega))$ y
$\overline{w_n}(D\varphi(1,\omega)) = \sup_{u\in\mathcal{A}(\omega)} w_n(D\varphi(1,\omega)u)$, donde

$$\alpha_n(D\varphi(1,\omega)) = \sup_{\substack{F\subset X \\ \dim F \leq n}} \inf_{\substack{y\in F \\ |y|=1}} |D\varphi(1,\omega)y|.$$

Entonces si

$$E(\log(\overline{w_n}(D\varphi(1,\omega))) < 0$$

para algún $n \in \mathbb{N}$, el atractor aleatorio $\mathcal{A}(\omega)$ tiene dimensión de Hausdorff finita menor o igual que n.

4.2 Modos determinantes. Planteamiento del problema

Como hemos indicado en el capítulo 2, el hecho de que la dimensión del atractor global sea finita está relacionado con el comportamiento asintótico finito-dimensional del sistema dinámico. Expusimos el resultado sobre modos determinantes en Foias y Prodi [44], que expresaba la dependencia a largo plazo de las soluciones del sistema de un número finito de modos de sus desarrollo de Fourier.

En la sección precedente hemos escrito uno de los resultados que existen en la literatura sobre la dimensión de cada uno de los compactos $\mathcal{A}(\omega)$ y que expresan la finitud de ésta con probabilidad uno. La pregunta que nos hacemos en este capítulo es si será posible obtener un resultado sobre modos determinantes en el marco de la teoría de atractores aleatorios y, si lo es, bajo qué condiciones. No obstante, la atracción cuando $t \to +\infty$ hacia el atractor aleatorio sólo la conocemos *en probabilidad*, lo que introduce un factor más de dificultad a este problema (y anima, por otra parte, a la obtención de conjuntos aleatorios atrayentes $P - c.s.$ cuando el tiempo tiende a $+\infty$).

Robinson desarrolla en [88] un método de demostración para el resultado sobre modos determinantes en las ecuaciones de Navier-Stokes donde el razonamiento no se basa en trabajar directamente con las ecuaciones, sino que se obtiene un resultado general a partir de la *propiedad de aplastamiento o compresión*:

Definición 18 *(propiedad de aplastamiento o compresión)*
Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ el semigrupo asociado a un determinado sistema dinámico disipativo sobre el espacio X. Supongamos que estamos en las condiciones de existencia de atractor global $\mathcal{A}$. Sean $\mathcal{S} = \mathcal{S}(1)$ y $\delta \in (0,1)$. Diremos que $\mathcal{S}(t)$ posee la propiedad de aplastamiento (discreta) si existe n_0 tal que, para todo $u_0, v_0 \in \mathcal{A}$, o bien

$$|(I - P_{n_0})(\mathcal{S}u_0 - \mathcal{S}v_0)| \leq |P_{n_0}(\mathcal{S}u_0 - \mathcal{S}v_0)|,$$

o bien

$$|\mathcal{S}u_0 - \mathcal{S}v_0| \leq \delta |u_0 - v_0|,$$

donde $P_{n_0} : X \to P_{n_0}X$ es un proyector ortogonal de dimensión finita.

En estas condiciones, se prueba en [88] el siguiente resultado para las ecuaciones bidimensionales de Navier-Stokes:

Teorema 15 *(Modos determinantes)*
Supongamos que se verifica la propiedad de aplastamiento. Entonces los primeros n_0 modos son "determinantes"; es decir, si $u(t)$, $v(t)$ son dos soluciones de las ecuaciones bidimensionales de Navier-Stokes sobre el atractor, y se verifica que

$$|P_{n_0}(u(t) - v(t))| \to 0 \qquad \textit{cuando} \qquad t \to +\infty,$$

entonces se tiene que

$$|u(t) - v(t)| \to 0 \qquad \textit{cuando} \qquad t \to +\infty,$$

con $P_{n_0} : X \to P_{n_0}X$ *el proyector ortogonal asociado a las* n_0 *primeras autofunciones del operador* A *en estas ecuaciones.*

Lo novedoso de este teorema no es el resultado, sino el método de demostración, que permite obtener un resultado general sobre modos determinantes. En la siguiente sección generalizamos este resultado sobre modos determinantes para atractores aleatorios, el cual podremos aplicar a diversos ejemplos, incluyendo las ecuaciones bidimensionales de Navier-Stokes.

4.3 Propiedad de aplastamiento aleatoria

Hemos indicado que Crauel en [20] prueba la unicidad de los atractores aleatorios y, bajo la condición de ergodicidad sobre θ_t, que existe un conjunto compacto (y determinista) $K \subset X$ tal que $P - c.s.$ el atractor aleatorio es el conjunto omega-límite de K, es decir,

$$\mathcal{A}(\omega) = \bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq n} \varphi(t, \theta_{-t}\omega)K}.$$

Si denotamos

$$K_0(\omega) := \overline{\bigcup_{t\geq 0} \varphi(t, \theta_{-t}\omega)K},$$

y

$$K_s(\omega) := \overline{\bigcup_{t\geq s} \varphi(t, \theta_{-t}\omega)K} \quad s > 0,$$

podemos probar el siguiente lema, que da otra expresión para el atractor aleatorio y muestra otras propiedades del mismo.

Lema 8 *Sean* $K_0(\omega), K_s(\omega)$ *los conjuntos definidos anteriormente. Entonces,* $P -$ *c.s.*

i) $K_0(\omega)$ *es un conjunto aleatorio atrayente. Además, existe* $s_0 = s_0(\omega)$ *tal que, para todo* $s > s_0$, $K_s(\omega)$ *es compacto.*

ii) $\varphi(t,\omega)K_s(\omega) \subseteq K_s(\theta_t\omega) \qquad \forall t, s \geq 0.$

iii) El atractor aleatorio puede ser escrito como:

$$\mathcal{A}(\omega) = \bigcap_{n\geq 0} \varphi(n, \theta_{-n}\omega)K_0(\theta_{-n}\omega).$$

Demostración. Como $K_0(\omega)$ contiene a $\mathcal{A}(\omega)$, claramente se tiene que es un conjunto atrayente. Lo demás es consecuencia de la existencia de un conjunto absorbente y compacto $D(\omega)$. En efecto, dado $K \subset X$, existe $t_K(\omega) = s_0(\omega)$ tal que, para todo $t \geq t_K(\omega)$,

$$\varphi(t, \theta_{-t}\omega)K \subset D(\omega),$$

por lo que $K_{s_0}(\omega) \subset D(\omega)$ y, por tanto, es compacto.
Usamos ahora la propiedad del cociclo para probar ii).

$$\begin{aligned}
\varphi(r,\omega)K_s(\omega) &= \varphi(r,\omega)\overline{\cup_{t\geq s}\varphi(t,\theta_{-t}\omega)K} \\
&\subset \overline{\cup_{t\geq s}\varphi(t+r,\theta_{-t-r}\theta_r\omega)K} \\
&= \overline{\cup_{t\geq s+r}\varphi(t,\theta_{-t}\theta_r\omega)K} \subset K_s(\theta_r\omega).
\end{aligned}$$

Finalmente, llamemos $K_n(\omega) = \overline{\cup_{t\geq n}\varphi(t,\theta_{-t}\omega)K}$. Es claro que el atractor aleatorio puede verse como el límite de la familia decreciente $K_n(\omega)$, es decir, $P - c.s.$

$$\mathcal{A}(\omega) = \bigcap_{n\geq 0} K_n(\omega).$$

Veamos que $K_n(\omega) = \varphi(n,\theta_{-n}\omega)K(\theta_{-n}\omega)$. En efecto, tomemos $y \in K_n(\omega)$. Entonces, existe $\{t_m\}_{m\geq 1}$, $t_m \geq n$, y $\{k_m\}_{m\geq 1} \subset K$ tal que

$$\begin{aligned}
y &= \lim_{m\to\infty}\varphi(t_m,\theta_{-t_m}\omega)k_m \\
&= \lim_{m\to\infty}\varphi(n+(t_m-n),\theta_{-(t_m-n)}\theta_{-n}\omega)k_m \\
&= \lim_{m\to\infty}\varphi(n,\theta_{-n}\omega)\varphi(t_m-n,\theta_{-(t_m-n)}\theta_{-n}\omega)k_m \\
&= \varphi(n,\theta_{-n}\omega)\lim_{m\to\infty}\varphi(t_m-n,\theta_{-(t_m-n)}\theta_{-n}\omega)k_m.
\end{aligned}$$

Pero $\lim_{m\to\infty}\varphi(t_m-n,\theta_{-(t_m-n)}\theta_{-n}\omega)k_m \in K(\theta_{-n}\omega)$, pues $t_m - n \geq 0$, de manera que $y \in \varphi(n,\theta_{-n}\omega)K(\theta_{-n}\omega)$.

Una prueba similar daría la otra inclusión, y así el lema queda demostrado.

□

Como indicábamos anteriormente, Debussche prueba en [32] y [33] algunos resultados acerca del carácter finito de la dimensión de Hausdorff de los atractores aleatorios. En [33], los resultados muestran además algunas cotas superiores para la dimensión de estos atractores en función de los exponentes de Lyapunov asociados al sistema dinámico. Sin embargo, en [32] se prueba un teorema sobre la dimensión del atractor aleatorio basado en las primeras pruebas sobre dimensión de los atractores en el caso determinista que aparecen en Foias y Temam [45], donde la hipótesis principal supone un comportamiento de *aplastamiento* de los modos de Fourier. Esta propiedad es la que definimos antes como de aplastamiento de las soluciones (véase Constantin et al. [18]).

Es posible probar que se puede conseguir una generalización de esta propiedad en el caso estocástico. Sin embargo, el hecho de que el atractor aleatorio no sea uniformemente acotado hace que la correspondiente *propiedad de aplastamiento aleatoria* dependa de forma exponencial de una variable aleatoria. No obstante, un argumento de ergodicidad hará posible trabajar con esta propiedad más débil de los sistemas dinámicos aleatorios para obtener un resultado sobre modos determinantes en este marco.

Definición 19 *Sea $\varphi(t,\omega) : X \to X$ un SDA. Se dice que $\varphi(t,\omega)$ satisface la propiedad (discreta) de aplastamiento aleatorio (PAA) si existen $\delta \in (0,1)$, un proyector de dimensión finita $P_0 = P_0(\delta)$ y una variable aleatoria $C_0(\omega)$ con esperanza finita, en concreto $E(C_0(\omega)) < \log(\delta^{-1})$, tal que $P-c.s.$, o bien*

$$|(I-P_0)(\varphi(1,\omega)u_0 - \varphi(1,\omega)v_0)| \leq |P_0(\varphi(1,\omega)u_0 - \varphi(1,\omega)v_0)|$$

o bien

$$|\varphi(1,\omega)u_0 - \varphi(1,\omega)v_0| \leq \delta \exp\left(\int_0^1 C_0(\theta_s\omega)\, ds\right)|u_0 - v_0|,$$

para todos $u_0, v_0 \in \mathcal{A}(\omega)$.

Nota: La propiedad de aplastamiento muestra una alternativa en el comportamiento en $t=1$ de las soluciones asociadas al SDA: o bien los primeros modos acotan el comportamiento de los modos a partir de un cierto índice (dado por la dimensión del proyector ortogonal), o bien la evolución de la solución al cabo de una unidad de tiempo sufre un efecto de contracción respecto a los datos iniciales. El efecto de aplastamiento de las trayectorias es debido a la condición sobre la esperanza de la variable aleatoria $C_0(\omega)$, lo cual es muy importante en orden a probar nuestro resultado sobre modos determinantes. No obstante, es posible que otras variantes de esta propiedad puedan ser útiles o más apropiadas para otros motivos.

4.4 Los resultados principales

4.4.1 Resultado general sobre modos determinantes

A continuación demostramos el resultado sobre modos determinantes para sistemas dinámicos aleatorios. La principal diferencia en relación a la teoría determinista es que suponemos una convergencia exponencial de los primeros m modos de los desarrollos de Fourier de las soluciones, lo cual posibilita obtener también una convergencia exponencial de las trayectorias.

Teorema 16 *Supongamos que el sistema dinámico aleatorio es $P-$c.s. lipschitziano en la variable $x \in X$, uniformemente en $t \in [0,1]$, es decir, para casi todo $\omega \in \Omega$ existe $L(\omega) > 0$ tal que*

$$|\varphi(t,\omega)u_0 - \varphi(t,\omega)v_0| \leq L(\omega)|u_0 - v_0| \quad \forall u_0, v_0 \in X,$$

con

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log L(\theta_m\omega) = 0. \tag{4.1}$$

Supongamos que se satisface la PAA. Si existe $k \in \mathbb{R}^+$ verificando

$$E(C_0(\omega)) < k < \log(\delta^{-1})$$

y tal que

$$\lim_{t\to+\infty} e^{kt}|P_0(\varphi(t,\omega)u_0 - \varphi(t,\omega)v_0)| = 0,$$

entonces

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\hat{k}t}|\varphi(t,\omega)u_0 - \varphi(t,\omega)v_0| = 0,$$

para $0 < \hat{k} < k - E(C_0(\omega))$ *y para todos* $u_0, v_0 \in \mathcal{A}(\omega)$.

Demostración. Debido a la condición de Lipschitz del sistema dinámico aleatorio, es suficiente probar que el resultado es cierto en el caso discreto, es decir,

$$\lim_{m \to +\infty} e^{\hat{k}m} |\varphi(m,\omega)u_0 - \varphi(m,\omega)v_0| = 0 \quad 0 < \hat{k} < k - E(C_0(\omega)),$$

pues, si $t = m + s$, $s \in [0,1)$, tenemos

$$\begin{aligned} e^{\hat{k}t}|\varphi(t,\omega)u_0 - \varphi(t,\omega)v_0| &= e^{\hat{k}m}e^{\hat{k}s}|\varphi(m+s,\omega)u_0 - \varphi(m+s,\omega)v_0| \\ &= e^{\hat{k}m}e^{\hat{k}s}|\varphi(s,\theta_m\omega)\varphi(m,\omega)u_0 - \varphi(s,\theta_m\omega)\varphi(m,\omega)v_0| \\ &\leq e^{\hat{k}}e^{\hat{k}m}L(\theta_m\omega)|\varphi(m,\omega)u_0 - \varphi(m,\omega)v_0|. \end{aligned}$$

Ahora, para $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeño,

$$e^{\hat{k}}e^{(\hat{k}+\epsilon_0)m}e^{-\epsilon_0 m}L(\theta_m\omega)|\varphi(m,\omega)u_0 - \varphi(m,\omega)v_0|,$$

y para $e^{-\epsilon_0 m}L(\theta_m\omega)$ tenemos, gracias a (4.1), que para todo m suficientemente grande y ϵ suficientemente pequeño (tal que $(\epsilon - \epsilon_0) < 0$)

$$e^{-\epsilon_0 m}L(\theta_m\omega) \leq e^{(\epsilon-\epsilon_0)m},$$

y así, tomando límite cuando $m \to \infty$, este término tiende a cero, lo cual implica

$$e^{\hat{k}}e^{\hat{k}m}L(\theta_m\omega)|\varphi(m,\omega)u_0 - \varphi(m,\omega)v_0| \to 0 \quad \text{cuando } m \to \infty. \tag{4.2}$$

Volviendo al caso discreto, razonamos por reducción al absurdo (véase Robinson [88]): supongamos que existe $\epsilon > 0$ y una sucesión m_j tal que, para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$e^{\hat{k}m_j}|\varphi(m_j,\omega)u_0 - \varphi(m_j,\omega)v_0| \geq \epsilon > 0. \tag{4.3}$$

Entonces, existe j_0 tal que para todo $j \geq j_0$ se tiene que (notemos $Q_0 = I - P_0$)

$$e^{\hat{k}m_j}|Q_0(\varphi(m_j,\omega)u_0 - \varphi(m_j,\omega)v_0)| \geq e^{\hat{k}m_j}|P_0(\varphi(m_j,\omega)u_0 - \varphi(m_j,\omega)v_0)|. \tag{4.4}$$

En efecto, si no fuese así, tendríamos que, por hipótesis,

$$\lim_{t \to +\infty} e^{kt}|P_0(\varphi(t,\omega)u_0 - \varphi(t,\omega)v_0)| = 0,$$

y así, si (4.4) no es cierto, podemos usar la desigualdad triangular para probar que existe una subsucesión $\{m_j\}$, que notamos de nuevo por m_j, tal que

$$e^{\hat{k}m_j}|\varphi(m_j,\omega)u_0 - \varphi(m_j,\omega)v_0| \leq 2e^{\hat{k}m_j}|P_0(\varphi(m_j,\omega)v_0 - \varphi(m_j,\omega)v_0)|$$

y este último término tiende a cero cuando j crece a $+\infty$, lo cual contradice (4.3).

Así, de (4.4), y por la PAA,

$$|\varphi(m_j,\omega)u_0 - \varphi(m_j,\omega)v_0| \leq C(\theta_{m_j-1}\omega)|\varphi(m_j-1,\omega)u_0 - \varphi(m_j-1,\omega)v_0|,$$

donde $C(\omega) = \delta\exp(\int_0^1 C_0(\theta_s\omega)\,ds)$.

Consideremos ahora $\varphi(m_j-1,\omega)u_0$ y $\varphi(m_j-1,\omega)v_0$. De nuevo, por la PAA, o bien se satisface

$$|Q_0(\varphi(m_j-1,\omega)u_0 - \varphi(m_j-1,\omega)v_0)| \leq |P_0(\varphi(m_j-1,\omega)u_0 - \varphi(m_j-1,\omega)v_0)|$$

o bien

$$|\varphi(m_j-1,\omega)u_0 - \varphi(m_j-1,\omega)v_0| \leq C(\theta_{m_j-2}\omega)|\varphi(m_j-2,\omega)u_0 - \varphi(m_j-2,\omega)v_0|.$$

Continuamos este proceso hasta alcanzar M_j con $M_j = m_j$ o $M_j < m_j$, verificando

$$|Q_0(\varphi(m_j-M_j,\omega)u_0-\varphi(m_j-M_j,\omega)v_0)| \leq |P_0(\varphi(m_j-M_j,\omega)u_0-\varphi(m_j-M_j,\omega)v_0)|.$$

Aplicando M_j veces la PAA,

$$\begin{aligned}
&|\varphi(m_j,\omega)u_0 - \varphi(m_j,\omega)v_0| \\
&\leq 2C(\theta_{m_j-1}\omega)\cdots C(\theta_{m_j-M_j}\omega)|P_0(\varphi(m_j-M_j,\omega)u_0 - \varphi(m_j-M_j,\omega)v_0)| \qquad (4.5)\\
&= 2\delta^{M_j}\exp(\textstyle\int_{m_j-M_j}^{m_j} C_0(\theta_s\omega)\,ds)|P_0(\varphi(m_j-M_j,\omega)u_0 - \varphi(m_j-M_j,\omega)v_0)|.
\end{aligned}$$

Observemos que ahora tenemos dos posibilidades para la sucesión M_j.

Caso 1. Supongamos que $\{M_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ está acotado, es decir

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} M_j = M < +\infty.$$

Entonces, multiplicando en los dos miembros de (4.5) por $e^{\hat{k}m_j}$ y teniendo en cuenta que $\delta < 1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&e^{\hat{k}m_j}|\varphi(m_j,\omega)u_0 - \varphi(m_j,\omega)v_0| \\
&\leq e^{\hat{k}m_j} 2\exp(\textstyle\int_{m_j-M_j}^{m_j} C_0(\theta_s\omega)\,ds)\sup_{1\leq m\leq M}|P_0(\varphi(m_j-m,\omega)u_0 - \varphi(m_j-m,\omega)v_0)| \\
&\leq 2e^{-(k-\hat{k})m_j}\exp(\textstyle\int_{m_j-M_j}^{m_j} C_0(\theta_s\omega)\,ds)e^{kM}\times \\
&\qquad \times \sup_{1\leq m\leq M} e^{k(m_j-m)}|P_0(\varphi(m_j-m,\omega)u_0 - \varphi(m_j-m,\omega)v_0)|.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Por otro lado, y por la ergodicidad del grupo θ_t, se tiene que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t C_0(\theta_s\omega)\,ds = E(C_0(\omega)),$$

y así, para $\epsilon > 0$, existe j_0 tal que $\forall j \geq j_0$

$$\int_0^{m_j} C_0(\theta_s\omega)\,ds \leq (\epsilon + E(C_0))m_j.$$

Por consiguiente, de (4.6) se llega a

$$\begin{aligned}
&e^{\hat{k}m_j}|\varphi(m_j,\omega)u_0 - \varphi(m_j,\omega)v_0| \leq \\
&2e^{(\hat{k}-k)m_j}\exp((\epsilon+E(C_0))m_j)e^{kM}\times \\
&\times \sup_{1\leq m\leq M} e^{k(m_j-m)}|P_0(\varphi(m_j-m,\omega)u_0 - \varphi(m_j-m,\omega)v_0)|.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Pero como, para ϵ suficientemente pequeño, $\hat{k} < k - (\epsilon + E(C_0))$, es decir, $k - \hat{k} > (\epsilon + E(C_0))$ y por hipótesis tenemos convergencia exponencial (con exponente k) de los primeros m modos del desarrollo de las soluciones, es claro que la última expresión tiende a cero cuando j crece a infinito, lo cual contradice (4.3).

Caso 2. Supongamos que existe una subsucesión de M_j, que denotamos de nuevo por M_j, tal que $\lim_{j\to\infty} M_j = +\infty$. En esta situación, de nuevo tenemos dos posibilidades:

Caso 2.1 Supongamos ahora que $\lim_{j\to\infty}(m_j - M_j)$ está acotado. Entonces, de (4.5)

$$\begin{aligned}
&|\varphi(m_j,\omega)u_0 - \varphi(m_j,\omega)v_0| \\
&\leq \delta^{m_j}\exp(\textstyle\int_0^{m_j} C_0(\theta_s\omega)\,ds)|P_0(\varphi(m_j-M_j,\omega)u_0 - \varphi(m_j-M_j,\omega)v_0)| \\
&\leq \delta^{m_j}e^{(\epsilon+E(C_0))m_j}K,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

donde K es una cota para el último término que aparece en (4.8). Si multiplicamos ambos términos de (4.8) por $e^{\hat{k}m_j}$, teniendo en cuenta que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño se verifica

$$(\epsilon + E(C_0)) + \hat{k} < k < \log(\delta^{-1}),$$

entonces obtenemos la convergencia a cero de la expresión de la derecha en (4.8).

Caso 2.2 Si $\lim_{j\to\infty}(m_j - M_j) = +\infty$ entonces

$$\begin{aligned}
&e^{\hat{k}m_j}|\varphi(m_j,\omega)u_0 - \varphi(m_j,\omega)v_0| \\
&\leq e^{\hat{k}m_j}\delta^{M_j}e^{(\epsilon+E(C_0))m_j}|P_0(\varphi(m_j - M_j,\omega)u_0 - \varphi(m_j - M_j,\omega)v_0)| \\
&= e^{(\hat{k}-k)m_j}e^{(\epsilon+E(C_0))m_j}\delta^{M_j}e^{kM_j}e^{k(m_j-M_j)}|P_0(\varphi(m_j - M_j,\omega)v_0 - \varphi(m_j - M_j,\omega)v_0)|,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

y observemos que esta última expresión tiende a cero por las condiciones que tenemos sobre las constantes $\hat{k}$ y k.

Esto acaba todos los casos posibles, por lo que la prueba está completa.

□

Nota: El resultado puede aplicarse de manera más general si en vez de tomar los datos iniciales en $\mathcal{A}(\omega)$ los tomamos en un conjunto aleatorio compacto e invariante en el que se satisfaga la PAA. En particular, en los conjuntos $K_s(\omega)$ definidos anteriormente. Ésta es la situación que nos encontraremos en las aplicaciones.

Antes de pasar a las aplicaciones de este resultado, veamos que también es cierto el mismo si la convergencia, como en los atractores aleatorios, la tomamos *desde* $-\infty$. En realidad, este sería en cierto modo el resultado que deberíamos haber puesto en primer lugar, teniendo en cuenta el concepto de atracción que se define para los atractores aleatorios. Sin embargo, sin duda el resultado que hemos dado en esta sección tiene una interpretación mucho más geométrica que el que exponemos a continuación, y por eso nos ha parecido más interesante escribirlo en el orden en el que lo hemos hecho.

4.4.2 Modos determinantes desde $-\infty$.

Si pensamos en $\varphi(t,\omega)u_0$ como la trayectoria que sigue la solución de una ecuación diferencial estocástica, el resultado de la sección anterior nos da una idea geométrica del comportamiento asintótico finito dimensional del SDA. En este apartado vamos a dar un paso más y probar que, bajo las mismas condiciones, el comportamiento asintótico *desde* $-\infty$ también está gobernado por un número finito de grados de libertad. El resultado puede deducirse directamente del teorema anterior debido a la siguiente proposición:

Proposición 9 *Si existe $k \in \mathbb{R}^+$ verificando que $P - c.s.$*

$$\lim_{t\to\infty} e^{kt}|\varphi(t,\theta_{-t}\omega)u_0 - \varphi(t,\theta_{-t}\omega)v_0| = 0,$$

entonces, $P - c.s.$ y para todo $\epsilon > 0$

$$\lim_{t\to\infty} e^{(k-\epsilon)t}|\varphi(t,\omega)u_0 - \varphi(t,\omega)v_0| = 0$$

para todos $u_0, v_0 \in X$.

Demostración. Sabemos que la convergencia $P - c.s.$ implica la convergencia en probabilidad, es decir, para todo $\delta > 0$

$$\lim_{t\to\infty} P(e^{kt}|\varphi(t,\theta_{-t}\omega)u_0 - \varphi(t,\theta_{-t}\omega)v_0| < \delta) = 1.$$

Así, dado $\gamma > 0$, existe $t_0 = t_0(\gamma)$ tal que, para todo $t \geq t_0$,

$$P(e^{kt}|\varphi(t,\theta_{-t}\omega)u_0 - \varphi(t,\theta_{-t}\omega)v_0| < \delta) > 1 - \gamma.$$

Llamemos $\Omega_t = \Omega_t(\gamma) \subset \Omega$ a este conjunto, es decir,

$$\Omega_t(\gamma) = \{\omega \in \Omega : e^{kt}|\varphi(t,\theta_{-t}\omega)u_0 - \varphi(t,\theta_{-t}\omega)v_0| < \delta\}.$$

Entonces, $P(\Omega_t) > 1 - \gamma$. Como θ_t conserva las medidas, $P(\theta_{-t}\Omega_t) = P(\Omega_t) > 1 - \gamma$, de manera que, para todo $t \geq t_0$,

$$P(e^{kt}|\varphi(t,\omega)u_0 - \varphi(t,\omega)v_0| < \delta) > 1 - \gamma, \tag{4.10}$$

pues para todo $\omega \in \theta_{-t}\Omega_t$ la primera desigualdad en (4.10) es cierta.

Pero esto implica la convergencia con probalidad uno. En efecto, queremos probar que para todo $\epsilon > 0$

$$P(\lim_{t\to\infty} e^{(k-\epsilon)t}|\varphi(t,\omega)u_0 - \varphi(t,\omega)v_0| = 0) = 1$$

y observemos que (4.10) se puede leer como: dado $\gamma > 0$ existe t_0 tal que para todo $t \geq t_0$

$$P(e^{(k-\epsilon)t}|\varphi(t,\omega)u_0 - \varphi(t,\omega)v_0| < \delta e^{-\epsilon t}) > 1-\gamma,$$

de donde es claro que

$$P(\lim_{t\to\infty} e^{(k-\epsilon)t}|\varphi(t,\omega)u_0 - \varphi(t,\omega)v_0| = 0) > 1-\gamma,$$

para todo $\gamma > 0$, lo cual finaliza la prueba.

□

De este resultado ahora obtenemos

Corolario 2 *En las condiciones del Teorema 16, si existe $k \in \mathbb{R}^+$ tal que $P-c.s.$*

$$\lim_{t\to\infty} e^{kt}|P_0(\varphi(t,\theta_{-t}\omega)u_0 - \varphi(t,\theta_{-t}\omega)v_0)| = 0$$

entonces $P-c.s.$ y para todo $\hat{k}$ con $0 < \hat{k} < k - E(C_0(\omega))$ se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} e^{(\hat{k}-\epsilon)t}|\varphi(t,\theta_{-t}\omega)u_0 - \varphi(t,\theta_{-t}\omega)v_0| = 0$$

para todos $u_0, v_0 \in \mathcal{A}(\omega)$ y $\epsilon > 0$.

Demostración. Observemos que un resultado similar al de la proposición anterior también nos prueba que la convergencia exponencial $P-c.s$ hacia $+\infty$ implica la convergencia $P-c.s.$ desde $-\infty$. Ello hace posible el siguiente razonamiento, que prueba el corolario: la convergencia exponencial a cero de los primeros modos de Fourier de la diferencia entre dos soluciones desde $-\infty$ implica la convergencia exponencial de estos modos cuando $t \to +\infty$, lo cual, por el Teorema 16, implica la convergencia $P-c.s.$ de las soluciones cuando el tiempo tiende a $+\infty$. Y, por la proposición anterior, ello nos conduce a la convergencia desde $-\infty$ de la diferencia entre soluciones con probabilidad uno.

□

4.5 Aplicaciones

4.5.1 Problema de reacción-difusión

Volvemos al problema de reacción-difusión con ruido aditivo planteado en el Capítulo 3 y estudiado en Crauel y Flandoli [22], Crauel et al. [23], Debussche [32].

Recordemos que tenemos el siguiente problema planteado en el abierto $D \subset \mathbb{R}^n$ con frontera regular

$$\begin{cases} du &= \Delta u dt + f(u)dt + \sum_{i=1}^{d} \phi^i dW_t^i \qquad \text{en } D \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial D \\ u(0) &= u_0 \end{cases} \tag{4.11}$$

donde $W_t^i : \Omega \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, son procesos de Wiener independientes ($t \in \mathbb{R}$) sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y

$$f(u) = \sum_{k=0}^{2p-1} a_k u^k, \qquad a_{2p-1} < 0.$$

La expresión variacional de este problema en $H = L^2(D)$ la expresamos como (véase Capítulo 3)

$$\begin{cases} du &= Audt + F(u)dt + \sum_{i=1}^{d} \phi^i dW_t^i \qquad \text{en } H \\ u(0) &= u_0 \end{cases} \tag{4.12}$$

con $A : D(A) \subset H \to H$, $Au = \Delta u$, $F : Z \to Z'$ definido como $F(u) = f(u)$ y tomamos $\phi^i \in D(A)$.

Consideramos el SDA $\varphi(t,\omega) : H \to H$ en $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\theta_t)_{t\in\mathbb{R}})$ para el que la existencia de atractores ya ha sido probada en [22]. Además, en Debussche [32] se prueba que la dimensión de Hausdorff de este atractor es finita (con la cota independiente de la variable ω). En este trabajo aparece además una formulación distinta de la PAA a la anteriormente introducida. En efecto, se prueba que existe una variable aleatoria $C_0(\omega)$ con $E(C_0(\omega)) < +\infty$, un proyector finito dimensional P_0 asociado a los números positivos λ y δ_0 tal que $P-c.s.$

$$|P_0(\varphi(t,\omega)u_0 - \varphi(t,\omega)v_0)| \leq \exp\left(\int_0^t C_0(\theta_s\omega)\, ds\right)|u_0 - v_0| \tag{4.13}$$

y

$$|(I-P_0)(\varphi(t,\omega)u_0-\varphi(t,\omega)v_0)|\leq(e^{-\lambda t}+\delta_0)\exp(\int_0^t C_0(\theta_s\omega)\,ds)|u_0-v_0|, \qquad (4.14)$$

para todo $t \geq 0$ y $u_0, v_0 \in \mathcal{A}(\omega)$. (4.13) es una consecuencia de la propiedad lipschitziana (en la variable $x \in X$) del sistema dinámico aleatorio asociado a la ecuación, la cual puede probarse sin dificultad debido a la expresión del término no lineal (observemos que, en este caso, la constante de Lipschitz $L(\omega) = L$ es independiente de ω). Además, podemos elegir λ lo suficientemente grande y δ_0 lo suficientemente pequeño para que $\delta = (e^{-\lambda} + \delta_0) < 1$. Ello es posible pues se prueba que, $\lambda = \frac{1}{2}\lambda_{m+1}$, donde λ_m es el autovalor m-ésimo del operador A, y $\delta_0 = \lambda_{m+1}^{-1/4}$, de manera que, como la sucesión de autovalores de A verifica $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_m \leq \cdots$ tendiendo a $+\infty$, podemos tomar $\delta < 1$ para m suficientemente grande.

De este resultado, y para $t = 1$, se puede deducir la PAA sobre el atractor aleatorio $\mathcal{A}(\omega)$. En efecto, si

$$|(I-P_0)(\varphi(1,\omega)u_0-\varphi(1,\omega)v_0)| > |P_0(\varphi(1,\omega)u_0-\varphi(1,\omega)v_0)|,$$

entonces, por (4.14) y m suficientemente grande,

$$|\varphi(1,\omega)u_0-\varphi(1,\omega)v_0|\leq\delta\exp(\int_0^1 C_0(\theta_s\omega)\,ds)|u_0-v_0|.$$

Por consiguiente, la PAA se satisface, por lo que son ciertos los resultados sobre modos determinantes de la sección anterior. Además, si seguimos los pasos de la prueba de esta propiedad en [32], y teniendo en cuenta que se satisfacen las hipótesis del lema 8, no es difícil generalizar la PAA del atractor aleatorio $\mathcal{A}(\omega)$ al conjunto aleatorio invariante $K_s(\omega)$, para s tal que nos permita asegurar que este conjunto está incluido en el compacto aleatorio y absorbente asociado al SDA.

4.5.2 El problema de Navier-Stokes

Sea la siguiente ecuación de Navier-Stokes en dimensión 2 con ruido aditivo

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u+\nabla p=\nu\Delta u+f+\phi\frac{\partial W}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} u = 0$$

con condiciones periódicas en la frontera. El término $W(t)$ es un movimiento Browniano escalar en el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; los resultados podrían extenderse al caso $\sum_{i=1}^{n} \phi_i \frac{\partial W_i}{\partial t}$ con movimientos Brownianos independientes $W_i(t)$. Sean

$$H = \{\varphi \in [L^2(D)]^2 : \operatorname{div} \varphi = 0, \int_D \varphi = 0, \ \varphi \cdot \vec{n} \quad \text{periódica}\}$$

$$V = \{\varphi \in [H^1(D)]^2 : \operatorname{div} \varphi = 0, \int_D \varphi = 0, \ \varphi \quad \text{periódica}\}$$

con $\vec{n}$ la normal exterior. Denotamos por $|.|$ y $(.,.)$ la norma y producto escalar en H. Identificando H con su dual H', y H' con un subespacio de V' (el dual de V), tenemos $V \subset H \subset V'$ y podemos denotar por $\langle .,. \rangle$ el par dual entre V y V'. Llamamos $D(A) = [H^2(D)]^2 \cap V$ y definimos $A : D(A) \subset H \to H$ como $Au = -P\Delta u$, con P la proyección ortogonal de $[L^2(D)]^2$ sobre H. El operador A es positivo, autoadjunto, con inverso compacto (Temam [101], Cap. III, Sección 2.1); denotamos por $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ los autovalores de A y por $e_1, e_2, \ldots$ el sistema ortogonal de autofunciones, verificando

$$||u||^2 \geq \lambda_1 |u|^2. \tag{4.15}$$

Definimos el operador bilineal $B(u,v) : V \times V \to V'$ como

$$\langle B(u,v), z \rangle = \int_D z(x) \cdot (u(x) \cdot \nabla) v(x) \, dx$$

para todo $z \in V$. Por la condición de incompresibilidad tenemos

$$\langle B(u,v), v \rangle = 0, \quad \langle B(u,v), z \rangle = -\langle B(u,z), v \rangle. \tag{4.16}$$

Asumimos

$$f \in H, \quad \phi \in \left[W^{1,\infty}(D)\right]^2$$

y, por simplicidad, suponemos que ϕ es una autofunción de A.

Tras estos preliminares, consideramos la siguiente versión de las ecuaciones estocásticas de Navier-Stokes

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) + B(u(t), u(t)) = f + \phi \frac{dW(t)}{dt} \tag{4.17}$$

En [43], Flandoli prueba que existe un conjunto compacto, aleatorio y absorbente para el SDA asociado a esta ecuación, por lo que se puede aplicar el resultado general sobre existencia de atractores aleatorios. Lo interesante en este resultado es que se puede probar que la esperanza del radio de este conjunto absorbente es finita, lo que se indicaba como problema abierto en Debussche [32]. Ello permite tratar de comprobar que para este problema tenemos la PAA, que es el contenido del siguiente apartado (véase [43] para más detalle [1]).

Propiedad de aplastamiento aleatorio

Para la diferencia de dos soluciones u y v, tenemos

$$\frac{d(u-v)}{dt} + A(u-v) + B(u,u-v) + B(u-v,v) = 0.$$

Si P_0 es el proyector ortogonal de las $(m-1)$ primeras autofunciones de A, y $Q_0 = I - P_0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|Q_0(u-v)\right|^2 + \nu\left\|Q_0(u-v)\right\|^2 &\leq C\left(|u|_{L^4} + |v|_{L^4}\right)\left\|Q_0(u-v)\right\|\,|u-v|_{L^4} \\ &\leq \frac{\nu}{2}\left\|Q_0(u-v)\right\|^2 + C\left(|u|_{L^4}^2 + |v|_{L^4}^2\right)|u-v|_{L^4}^2 \end{aligned}$$

de manera que

$$\frac{d}{dt}\left|Q_0(u-v)\right|^2 + \nu\lambda_m\left|Q_0(u-v)\right|^2 \leq C\left(|u|_{L^4}^2 + |v|_{L^4}^2\right)|u-v|_{L^4}^2$$

de donde, por el lema de Gronwall , para $t > t_0$,

$$\begin{aligned} \left|Q_0(u(t)-v(t))\right|^2 &\leq e^{-\nu\lambda_m(t-t_0)}\left|Q_0(u(t_0)-v(t_0))\right|^2 + \\ &+ \int_{t_0}^{t} e^{-\nu\lambda_m(t-s)}C\left(|u|_{L^4}^2 + |v|_{L^4}^2\right)|u-v|_{L^4}^2\,ds. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Estimamos ahora $|u-v|_{L^4}^2$ por $\|u-v\|^2$, y esto último por $|\mathrm{rot}\,(u-v)|_{L^2}^2$, lo cual es finalmente estimado por $|u(t_0)-v(t_0)|^2$. Tenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u-v|^2 + \nu\|u-v\|^2 \leq$$

[1] Los cálculos que siguen en este apartado se deben principalmente a F. Flandoli. Hemos creído conveniente incluirlos por claridad y completitud en la exposición

$$\leq \frac{\nu}{2} \|u-v\|^2 + C |v|_{H^1}^2 |u-v|^2$$

y así,

$$\frac{d}{dt} |u-v|^2 + \nu \|u-v\|^2 \leq C |v|_{H^1}^2 |u-v|^2$$

por lo que, por el lema de Gronwall,

$$|u(t)-v(t)|^2 \leq e^{\int_{t_0}^t C|v(s)|_{H^1}^2 ds} |u(t_0)-v(t_0)|^2. \tag{4.19}$$

Observemos que esta expresión nos da la propiedad lipschitziana para el sistema dinámico aleatorio asociado a este problema. Si tomamos $t=1$ y $t_0=0$, $u_0, v_0 \in \mathcal{A}(\omega) \subset B_{H_0^1}(0, R(\omega))$, entonces $v(s,\omega; v_0) = \varphi(s,\omega)v_0 \in B_{H_0^1}(0, R(\theta_s\omega))$, de donde

$$L(\omega) = e^{\int_0^1 CR^2(\theta_s\omega)ds},$$

que satisface (4.1). En efecto, por ergodicidad de θ_t, tenemos que para una variable aleatoria general $C(\omega)$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \int_0^m C(\theta_s\omega)ds = E(C(\omega)),$$

de manera que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log L(\theta_m\omega) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \int_m^{m+1} CR^2(\theta_s\omega)ds$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{m+1}{m} \frac{1}{m+1} \int_0^{m+1} CR^2(\theta_s\omega)ds - \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \int_0^m CR^2(\theta_s\omega)ds = 0.$$

Por otro lado, y para $t \geq t_0 + 1$

$$\int_{t-1}^t \nu \|u-v\|^2 ds \leq |u(t-1)-v(t-1)|^2 + C \int_{t-1}^t |v(s)|_{H^1}^2 |u-v|^2 ds$$

$$\leq \left(e^{\int_{t_0}^{t-1} C|v(r)|_{H^1}^2 dr} + C \int_{t-1}^t |v(s)|_{H^1}^2 e^{\int_{t_0}^s C|v(r)|_{H^1}^2 dr} ds \right) |u(t_0)-v(t_0)|^2$$

$$\leq e^{\int_{t_0}^t C|v(r)|_{H^1}^2 dr} \left(1 + C \int_{t_0}^t |v(s)|_{H^1}^2 ds \right) |u(t_0)-v(t_0)|^2.$$

Además, escribiendo $\xi_u = \text{rot } u$, $\xi_v = \text{rot } v$,tenemos

$$\frac{d(\xi_u - \xi_v)}{dt} + ((u-v)\cdot\nabla)\xi_u + (v\cdot\nabla)(\xi_u-\xi_v) = \nu\Delta(\xi_u-\xi_v)$$

de donde, por la desigualdad de Agmon (Temam [101])

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\xi_u-\xi_v\right|^2+\nu\left\|\xi_u-\xi_v\right\|^2\leq$$

$$\leq\frac{\nu}{2}\left\|\xi_u-\xi_v\right\|^2+C\left|\xi_u\right|^4\left|\xi_u-\xi_v\right|^2.$$

Se sigue que, para $t\geq t_0+1$,

$$\left|\xi_u(t)-\xi_v(t)\right|^2\leq Ce^{\int_{t-1}^t C|\xi_u|^4dr}\int_{t-1}^t\left|\xi_u(s)-\xi_v(s)\right|^2ds$$

$$\leq Ce^{\int_{t-1}^t C|\xi_u|^4dr}\left(1+\int_{t-1}^t\left|v(s)\right|_{H^1}^2ds\right)e^{\int_{t_0}^t C|v(s)|_{H^1}^2ds}\left|u(t_0)-v(t_0)\right|^2$$

$$\leq C\left(1+\int_{t-1}^t\left|v(s)\right|_{H^1}^2ds\right)e^{\int_{t_0}^t C\left(|u(s)|_{H^1}^2+|v(s)|_{H^1}^2\right)ds}\left|u(t_0)-v(t_0)\right|^2.$$

Usando esta desigualdad en (4.18), obtenemos

$$\begin{aligned}\left|Q_0\left(u(t)-v(t)\right)\right|^2&\leq e^{-\nu\lambda_m(t-t_0)}\left|u(t_0)-v(t_0)\right|^2+\\&+\int_{t_0}^t e^{-\nu\lambda_m(t-s)}C\left(|u|_{L^4}^2+|v|_{L^4}^2\right)\times\\&\times\left(1+\int_{t-1}^t|v(\sigma)|_{H^1}^2d\sigma\right)e^{\int_{t_0}^s C\left(|u(r)|_{H^1}^2+|v(r)|_{H^1}^2\right)dr}ds\ \left|u(t_0)-v(t_0)\right|^2.\end{aligned}\tag{4.20}$$

De (4.19), (4.20) y para $t_0=0$, deducimos que existe una variable aleatoria $C_0(\omega)$ (que depende de las normas de u,v en H^1) y un proyector finito dimensional P_0 tal que para todo $t\in[0,1]$ y $P-c.s.$

$$\left|P_0(\varphi(t,\omega)u_0-\varphi(t,\omega)v_0)\right|\leq e^{\int_0^1 C_0(\theta_s\omega)ds}|u_0-v_0|\tag{4.21}$$

y

$$\left|Q_0(\varphi(t,\omega)u_0-\varphi(t,\omega)v_0)\right|\leq\delta e^{\int_0^1 C_0(\theta_s\omega)ds}|u_0-v_0|,\tag{4.22}$$

y podemos elegir m suficientemente grande tal que

$$\delta=(e^{-\nu\lambda_m}+\frac{1}{\nu\lambda_m})<1$$

de donde, argumentando como en el ejemplo anterior, obtenemos la PAA.

Dimensión finita del atractor aleatorio

En Debussche [32] (teorema 1.3) se prueba el siguiente resultado

Teorema 17 *Existen constantes K_1, K_2, K_3 tales que, si (4.21) y (4.22) se satisfacen y*

$$E(C_0) < \infty \tag{4.23}$$

$$\delta < K_1, \qquad \lambda_m > K_2 E(C_0), \tag{4.24}$$

entonces, $P-$c.s., el atractor aleatorio $\mathcal{A}(\omega)$ tiene dimensión de Hausdorff finita.

□

Como se ha probado, tenemos (4.23) para este problema, y podemos tomar m suficientemente grande de manera que se verifique (4.24), por lo que podemos deducir, por el teorema anterior,

Teorema 18 *El atractor aleatorio asociado a las ecuaciones de Navier-Stokes (4.17) tiene dimensión de Hausdorff finita.*

□

Capítulo 5

Construcción de un atractor exponencial aleatorio

Escribimos en este capítulo un argumento que permite construir un atractor exponencial aleatorio $\mathcal{E}(\omega)$ a partir de un atractor aleatorio $\mathcal{A}(\omega)$. La hipótesis fundamental supone la existencia de un conjunto aleatorio $B(\omega)$ compacto, absorbente e invariante para el SDA. Ello permitirá definir la convergencia hacia el atractor cuando $t \to +\infty$ con probabilidad uno. Algunas consecuencias y aplicaciones aparecen a continuación.

5.1 Introducción

Expusimos en el capítulo 1 algunas notas sobre la teoría de atractores exponenciales tal y como aparece en Eden et al. [36]. En este capítulo seguiremos algunas de las ideas expuestas en el trabajo anterior para dar una construcción de un atractor exponencial aleatorio en el caso general de una ecuación estocástica. La hipótesis esencial supone la existencia de un conjunto absorbente e invariante para el correspondiente sistema dinámico aleatorio. Por otro lado, el exponente de convergencia puede ser elegido de manera que sea todo lo grande que queramos. De esta forma, como en la teoría determinista, introducimos el concepto "intermedio" entre las teorías de atractores aleatorios y variedades inerciales estocásticas. Hasta el momento, no conocemos ningún resultado en la literatura en esta línea, por lo que el campo de trabajo que queda abierto es muy grande.

Por otro lado, el resultado sobre modos determinantes del capítulo anterior impone una condición de convergencia exponencial sobre los m primeros modos del desarrollo de Fourier de las soluciones. Por consiguiente, el estudio del control sobre la velocidad de atracción hacia el atractor aleatorio parece interesante también por este motivo.

5.2 Atractor exponencial aleatorio

5.2.1 Construcción del atractor exponencial aleatorio

Existen diversos trabajos sobre atractores aleatorios (véanse, por ejemplo, Arnold y Schmalfuss [5], Schmalfuss [94], [97], Schenk-Hoppé [91]) en los que se justifica la existencia de un conjunto aleatorio $K(\omega)$ compacto y absorbente que además es positivamente invariante, es decir, $P-c.s.$

$$\varphi(t,\omega)K(\omega) \subseteq K(\theta_t\omega), \quad \forall t \geq 0.$$

Bajo esta hipótesis (que supondremos a lo largo de este capítulo) es fácil comprobar (véase [91]) que el atractor aleatorio puede escribirse como el límite en n de la familia decreciente $\varphi(n,\theta_{-n}\omega)K(\theta_{-n}\omega)$, es decir, $P-c.s.$

$$\mathcal{A}(\omega) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \varphi(n,\theta_{-n}\omega)K(\theta_{-n}\omega).$$

La idea en la que se basa la construcción de un atractor exponencial en Eden et al. [36] es añadir una *nube de puntos* al compacto absorbente, entorno del atractor global, de manera que obtengamos un nuevo conjunto compacto, invariante, atrayente a una velocidad exponencial y "no demasiado grande". La siguiente construcción sigue básicamente esta idea, aunque el hecho de que los conjuntos dependan en este caso de las variables t y ω hacen este trabajo más complicado.

Observemos que, en general, el atractor aleatorio puede ser escrito como

$$\mathcal{A}(\omega) = \overline{\bigcup_{m\geq 0} \Lambda(B(0,m),\omega)}.$$

Construiremos el atractor exponencial aleatorio añadiendo un número finito de puntos a cada uno de los compactos de la familia decreciente

$$B_n^m(\omega) := \overline{\bigcup_{t\geq n} \varphi(t, \theta_{-t}\omega)B(0,m)} \cap K(\omega),$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, donde $K(\omega)$ es el conjunto compacto absorbente indicado anteriormente (gracias a Franco Flandoli por esta observación).

Nota: Observemos que, para m fijo, el límite cuando $n \to \infty$ de $B_n^m(\omega)$ es el conjunto límite de $B(0,m)$. El método de construcción del atractor exponencial aleatorio se basa en hacer a cada $\Lambda(B(0,m),\omega)$ un conjunto exponencialmente atrayente de todos los puntos en $B(0,m)$.

Paso 1.

Como

$$B_0^m(\omega) := \overline{\bigcup_{t\geq 0} \varphi(t, \theta_{-t}\omega)B(0,m)} \cap K(\omega)$$

es un conjunto compacto, existe $R = R(\omega) > 0$ tal que

$$B_0^m(\omega) \subset B(0,R).$$

Además, como $B_1^m(\omega) \subset B_0^m(\omega)$, este conjunto es también compacto. Tomemos $\delta \in (0,1)$. Entonces, existe un número finito de centros de bolas de radio δR tal que

$$B_1^m(\omega) \subset \bigcup_{j=1}^{N_1^m} B(a_{j,1}^m, \delta R).$$

Llamemos $E_1^m(\omega) = \{a_{j,1}^m, j = 1, ..., N_1^m\}$.

Paso 2.

De la misma forma, podemos cubrir $B_2^m(\omega)$ con un número finito de bolas de radio $\delta^2 R$, esto es, existe $\{a_{j,2}^m\}_{j=1}^{N_2^m}$ tal que

$$B_2^m(\omega) \subset \bigcup_{j=1}^{N_2^m} B(a_{j,2}^m, \delta^2 R)$$

y denotamos $E_2^m(\omega) = \{a_{j,2}^m, j = 1, ..., N_2^m\}$.

Paso n.

En el caso general,

$$B_n^m(\omega) \subset \bigcup_{j=1}^{N_n^m} B(a_{j,n}^m, \delta^n R)$$

y $E_n^m(\omega) = \{a_{j,n}^m, j = 1, ..., N_n^m\}$. Observemos que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $E_n^m(\omega) \subset B_n^m(\omega)$.

Si tomamos la unión en $n \in \mathbb{N}$ de $E_n^m(\omega)$ obtenemos el siguiente conjunto con una cantidad numerable de puntos

$$E_\infty^m(\omega) := \bigcup_{n\geq 1} E_n^m(\omega).$$

Finalmente, añadiendo $E_\infty^m(\omega)$ al atractor aleatorio, obtenemos el conjunto

$$\mathcal{A}(\omega) \cup E_\infty^m(\omega).$$

Entonces se tiene

Lema 9 *$\mathcal{A}(\omega) \cup E_\infty^m(\omega)$ es un conjunto cerrado.*

Demostración. Como $\mathcal{A}(\omega)$ es cerrado, es suficiente probar que

$$\overline{E_\infty^m(\omega)} \subseteq \mathcal{A} \cup E_\infty^m(\omega).$$

Tomemos $\{y_p\}_{p=1}^\infty \subset E_\infty^m(\omega)$ tal que $y_p \to y_0$, $y_0 \in X$. Probaremos que $y_0 \in \mathcal{A}(\omega) \cup E_\infty^m(\omega)$. Primeramente, observemos que $y_p \in K(\omega)$, de manera que $y_0 \in K(\omega)$. Por otro lado, como $y_p \in E_\infty^m(\omega)$, existe $n(p)$ tal que $y_p \in E_{n(p)}^m(\omega)$. Tenemos ahora dos casos posibles:

Si $\sup\{n(p) : p \in \mathbb{N}\} = k < +\infty$, entonces $\{y_p\} \subseteq E_{k_0}^m(\omega)$ para infinitos p y $k_0 \leq k$, de manera que $y_0 \in E_{k_0}^m(\omega)$.

Si existe una subsucesión, denotada de nuevo por $\{n(p)\}$, con $n(p) \to +\infty$, se tiene que

$$y_p = \lim_{k\to\infty} z_k(p)$$

con $z_k(p) \in B^m_{n(p)}(\omega)$, de manera que

$$z_k(p) = \varphi(t_k, \theta_{-t_k}\omega)v_k, \quad t_k \geq n(p), \quad v_k \in B(0,m).$$

Así, para cada p, existe $z_k(p) \in B^m_{n(p)}(\omega)$ (para k suficientemente grande) tal que $\mathrm{d}(y_p, z_k(p)) < 1/p$, y así $\lim\limits_{p\to\infty} z_k(p) = y_0$. Puesto que $z_k(p) = \varphi(t_k, \theta_{-t_k}\omega)v_k$ y $t_k \to +\infty$, es claro que

$$\lim_{p\to\infty} z_k(p) = \lim_{p\to\infty} \varphi(t_k, \theta_{-t_k}\omega)v_k = y_0 \in \Lambda(B(0,m),\omega) \subset \mathcal{A}(\omega).$$

□

Observemos que este conjunto atrae a una velocidad exponencial a la bola $B(0,m)$, pues si tomamos $u_0 \in B(0,m)$ y n suficientemente grande, como $K(\omega)$ es absorbente, es claro que

$$\varphi(n, \theta_{-n}\omega)u_0 \in B^m_n(\omega) = \overline{\bigcup_{t\geq n} \varphi(t, \theta_{-t}\omega)B(0,m)} \cap K(\omega).$$

Si ahora evaluamos la distancia con $\mathcal{A}(\omega) \cup E^m_\infty(\omega)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}&\mathrm{dist}(\varphi(n, \theta_{-n}\omega)u_0, \mathcal{A}(\omega) \cup E^m_\infty(\omega))\\ &\leq \mathrm{dist}(\varphi(n, \theta_{-n}\omega)u_0, E^m_n(\omega)) \leq \delta^n R = Re^{n\log\delta}.\end{aligned}$$

No obstante, queremos que el conjunto atrayente sea invariante, de manera que, en una primera etapa, lo hacemos invariante discreto definiendo

$$\mathcal{E}^m_0(\omega) := \mathcal{A}(\omega) \cup \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} \varphi(j, \theta_{-j}\omega)E^m_\infty(\theta_{-j}\omega)}.$$

Observemos que $\mathcal{E}^m_0(\omega)$ es un conjunto compacto invariante discreto. En efecto, para $n \in \mathbb{N}$, por la invarianza del atractor aleatorio y la propiedad del cociclo,

$$\begin{aligned}&\varphi(n, \theta_{-n}\omega)\mathcal{E}^m_0(\theta_{-n}\omega) =\\ &= \varphi(n, \theta_{-n}\omega)\left(\mathcal{A}(\theta_{-n}\omega) \cup \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} \varphi(j, \theta_{-j-n}\omega)E^m_\infty(\theta_{-j-n}\omega)}\right)\\ &\subseteq \mathcal{A}(\omega) \cup \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} \varphi(j+n, \theta_{-j-n}\omega)E^m_\infty(\theta_{-j-n}\omega)}\\ &= \mathcal{A}(\omega) \cup \overline{\bigcup_{j=n}^{\infty} \varphi(j, \theta_{-j}\omega)E^m_\infty(\theta_{-j}\omega)}\\ &\subseteq \mathcal{E}_0(\omega).\end{aligned}$$

Para la compacidad de $\mathcal{E}_0^m(\omega)$ observemos que, para todo $j, n \in \mathbb{N}$

$$E_\infty^m(\theta_{-j}\omega) = \bigcup_{n\geq 1} E_n^m(\theta_{-j}\omega)$$

y $E_n^m(\theta_{-j}\omega)$ es el conjunto cuyos puntos son los centros del recubrimiento de

$$B_n^m(\theta_{-j}\omega) = \overline{\bigcup_{t\geq n} \varphi(t, \theta_{-t-j}\omega)B(0,m)} \cap K(\theta_{-j}\omega)$$

con bolas de radio $\delta^n R(\theta_{-j}\omega)$. Así, para todos $j, n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\varphi(j, \theta_{-j}\omega)E_n^m(\theta_{-j}\omega)\\
&\subseteq \overline{\bigcup_{t\geq n} \varphi(j, \theta_{-j}\omega)\varphi(t, \theta_{-t-j}\omega)B(0,m)} \cap \varphi(j, \theta_{-j}\omega)K(\theta_{-j}\omega)\\
&= \overline{\bigcup_{t\geq n} \varphi(j+t, \theta_{-t-j}\omega)B(0,m)} \cap K(\omega)\\
&\subseteq \overline{\bigcup_{t\geq n+j} \varphi(t, \theta_{-t}\omega)B(0,m)} \cap K(\omega)\\
&\subseteq \overline{\bigcup_{t\geq n} \varphi(t, \theta_{-t}\omega)B(0,m)} \cap K(\omega) = B_n^m(\omega) \subset K(\omega)
\end{aligned}$$

y este último conjunto es compacto.

Para conseguir un conjunto aleatorio continuamente invariante definimos $\mathcal{E}^m(\omega)$ como

$$\mathcal{E}^m(\omega) := \overline{\bigcup_{0\leq t\leq 1} \varphi(t, \theta_{-t}\omega)\mathcal{E}_0^m(\theta_{-t}\omega)}.$$

Entonces $\mathcal{E}^m(\omega)$ es invariante, pues, dado $s > 0$, $s = n + r$, $r \in [0,1)$,

$$\begin{aligned}
&\varphi(s, \theta_{-s}\omega)\mathcal{E}^m(\theta_{-s}\omega)\\
&= \varphi(s, \theta_{-s}\omega)\overline{\bigcup_{0\leq t\leq 1} \varphi(t, \theta_{-t-s}\omega)\mathcal{E}_0^m(\theta_{-t-s}\omega)}\\
&\subseteq \overline{\bigcup_{0\leq t\leq 1} \varphi(t+s, \theta_{-t-s}\omega)\mathcal{E}_0^m(\theta_{-t-s}\omega)}\\
&= \overline{\bigcup_{0\leq t\leq 1} \varphi(t+n+r, \theta_{-t-n-r}\omega)\mathcal{E}_0^m(\theta_{-t-n-r}\omega)}\\
&= \overline{\bigcup_{0\leq t\leq 1} \varphi(r+t, \theta_{-t-r}\omega)\varphi(n, \theta_{-n}\theta_{-t-r}\omega)\mathcal{E}_0^m(\theta_{-n}\theta_{-t-r}\omega)}\\
&\subseteq \overline{\bigcup_{0\leq t\leq 1} \varphi(r+t, \theta_{-t-r}\omega)\mathcal{E}_0^m(\theta_{-t-r}\omega)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\subseteq \overline{\bigcup_{r\leq t\leq r+1} \varphi(t,\theta_{-t}\omega)\mathcal{E}_0^m(\theta_{-t}\omega)} \\
&\subseteq \overline{\bigcup_{r\leq t\leq 1} \varphi(t,\theta_{-t}\omega)\mathcal{E}_0^m(\theta_{-t}\omega)} \cup \overline{\bigcup_{1\leq t\leq r+1} \varphi(t,\theta_{-t}\omega)\mathcal{E}_0^m(\theta_{-t}\omega)} \\
&\subseteq \mathcal{E}^m(\omega) \cup \overline{\bigcup_{0\leq t-1\leq r} \varphi(t-1,\theta_{-(t-1)}\omega)\varphi(1,\theta_{-t}\omega)\mathcal{E}_0^m(\theta_{-t}\omega)} \\
&\subseteq \mathcal{E}^m(\omega) \cup \overline{\bigcup_{0\leq t-1\leq r} \varphi(t-1,\theta_{-(t-1)}\omega)\mathcal{E}_0^m(\theta_{-(t-1)}\omega)} \\
&\subseteq \mathcal{E}^m(\omega).
\end{aligned}$$

Por otro lado, como $\mathcal{E}_0^m(\omega) \subseteq K(\omega)$ es compacto y el conjunto absorbente $K(\omega)$ es invariante, es claro que $\mathcal{E}^m(\omega) \subseteq K(\omega)$ $P-c.s.$, lo que prueba la compacidad de $\mathcal{E}^m(\omega)$.

Finalmente, veamos que $\mathcal{E}^m(\omega)$ atrae exponencialmente todos los puntos en $B(0,m)$. Para $t \geq t_0(u_0,\omega)$, $t = n+s$, $s \in [0,1)$,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{dist}(\varphi(t,\theta_{-t}\omega)u_0,\ \mathcal{E}^m(\omega)) \\
&= \operatorname{dist}(\varphi(n+s,\theta_{-n-s}\omega)u_0,\ \bigcup_{0\leq t\leq 1} \varphi(t,\theta_{-t}\omega)\mathcal{E}_0^m(\theta_{-t}\omega)) \\
&\leq \operatorname{dist}(\varphi(s,\theta_{-s}\omega)\varphi(n,\theta_{-n-s}\omega)u_0,\ \varphi(s,\theta_{-s}\omega)\mathcal{E}_0^m(\theta_{-s}\omega)) \\
&\leq L(\theta_{-s}\omega)\operatorname{dist}(\varphi(n,\theta_{-n-s}\omega)u_0,\ \mathcal{E}_0^m(\theta_{-s}\omega)) \\
&\leq L(\theta_{-s}\omega)\operatorname{dist}(\varphi(n,\theta_{-n-s}\omega)u_0,\ \mathcal{A}(\theta_{-s}\omega)\cup E_n^m(\theta_{-s}\omega)) \\
&\leq L(\theta_{-s}\omega)R(\theta_{-s}\omega)e^{n\log\delta} \\
&\leq \sup_{0\leq s\leq 1} L(\theta_{-s}\omega)R(\theta_{-s}\omega)e^{-s\log\delta}e^{t\log\delta} \\
&= Ke^{-ct}.
\end{aligned}$$

Nota. Observemos que el orden de atracción exponencial $\log\delta$ puede ser elegido arbitrariamente grande.

Finalmente, para obtener un atractor exponencial basta considerar

$$\mathcal{E}(\omega) := \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}^m(\omega)}.$$

Claramente, por el trabajo realizado hasta el momento, este es un conjunto compacto, positivamente invariante y que atrae a cualquier trayectoria con una velocidad exponencial. Podemos, por tanto, dar la siguiente definición

Definición 20 *Un conjunto compacto y aleatorio $\mathcal{E}(\omega)$ es un atractor exponencial aleatorio para el SDA $\varphi(t,\omega)$ si, $P - c.s.$, satisface:*

i) $\varphi(t,\omega)\mathcal{E}(\omega) \subseteq \mathcal{E}(\theta_t\omega)$ *para todo* $t \geq 0$ *y*

ii) $\mathrm{dist}(\varphi(t,\theta_{-t}\omega)B, \mathcal{E}(\omega)) \to 0$ *cuando* $t \to \infty$, *a una velocidad exponencial, para todo* $B \subset X$ *acotado.*

5.2.2 Convergencia cuando $t \to +\infty$ en el atractor exponencial aleatorio

Como observamos en la introducción, si podemos controlar el orden de atracción sobre el atractor aleatorio o, en concreto, si estamos ante un atractor exponencial, podemos concluir que $P - c.s.$ el atractor atrae a las trayectorias cuando $t \to +\infty$ gracias a la Proposición 9 del capítulo anterior.

Supongamos que el orden de atracción hacia el atractor es exponencial, es decir, existe $k > 0$ tal que, $P - c.s.$

$$\lim_{t\to+\infty} e^{kt}\mathrm{dist}(\varphi(t,\theta_{-t}\omega)u_0, \mathcal{A}(\omega)) = 0, \quad \text{para todo } u_0 \in X.$$

Usando argumentos similares a los de la Proposición 9, no es difícil probar la convergencia cuando $t \to +\infty$ hacia el atractor aleatorio con probabilidad uno:

Proposición 10 *Si existe $k \in \mathbb{R}^+$ tal que $P - c.s.$*

$$\lim_{t\to+\infty} e^{kt}\mathrm{dist}(\varphi(t,\theta_{-t}\omega)B, \mathcal{A}(\omega)) = 0,$$

entonces, $P - c.s.$ y para todo $\epsilon > 0$

$$\lim_{t\to+\infty} e^{(k-\epsilon)t}\mathrm{dist}(\varphi(t,\omega)B, \mathcal{A}(\theta_t\omega)) = 0, \quad \textit{para} \quad B \subset X \quad \textit{acotado}.$$

Demostración. Ya hemos indicado que la convergencia $P - c.s.$ implica convergencia la en probabilidad, es decir, para todo $\delta > 0$

$$\lim_{t\to+\infty} P(e^{kt}\mathrm{dist}(\varphi(t,\theta_{-t}\omega)B, \mathcal{A}(\omega)) < \delta) = 1.$$

Así, dado $\gamma > 0$, existe $t_0 = t_0(\gamma)$ tal que, para todo $t \geq t_0$

$$P(e^{kt}\mathrm{dist}(\varphi(t, \theta_{-t}\omega)B, \mathcal{A}(\omega)) < \delta) > 1 - \gamma.$$

Llamemos $\Omega_t = \Omega_t(\gamma) \subset \Omega$, $P(\Omega_t) > 1 - \gamma$, de manera que, para todo $\omega \in \Omega_t$ y $t \geq t_0$,

$$e^{kt}\mathrm{dist}(\varphi(t, \theta_{-t}\omega)B, \mathcal{A}(\omega)) < \delta.$$

Como θ_t conserva las medidas, $P(\theta_{-t}\Omega_t) = P(\Omega_t) > 1 - \gamma$, de forma que, para todo $t \geq t_0$,

$$P(e^{kt}\mathrm{dist}(\varphi(t, \omega)B, \mathcal{A}(\theta_t\omega)) < \delta) > 1 - \gamma, \tag{5.1}$$

pues, para toda $\omega \in \theta_{-t}\Omega_t$, se tiene la primera desigualdad en (5.1).

Pero esto implica la convergencia exponencial cuando $t \to +\infty$ con probabilidad uno. En efecto, veamos que, para todo $\epsilon > 0$,

$$P(\lim_{t\to\infty} e^{(k-\epsilon)t}\mathrm{dist}(\varphi(t, \omega)B, \mathcal{A}(\theta_t\omega)) = 0) = 1.$$

Observemos que (5.1) puede leerse como: dada $\gamma > 0$, existe t_0 tal que, para todo $t \geq t_0$,

$$P(e^{(k-\epsilon)t}\mathrm{dist}(\varphi(t, \omega)B, \mathcal{A}(\theta_t\omega)) < \delta e^{-\epsilon t}) > 1 - \gamma,$$

de donde es claro que

$$P(\lim_{t\to\infty} e^{(k-\epsilon)t}\mathrm{dist}(\varphi(t, \omega)B, \mathcal{A}(\theta_t\omega)) = 0) > 1 - \gamma$$

para toda $\gamma > 0$, lo cual acaba la prueba.

□

5.2.3 Medibilidad del atractor exponencial aleatorio

En Crauel y Flandoli [22], se prueba que el atractor aleatorio $\mathcal{A}(\omega)$ es medible, de manera que para la medibilidad del atractor exponencial aleatorio sólo tenemos que verifica si la "nube de puntos aleatorios" añadida es medible. Recordemos que, por el Lema 9

$$\mathcal{A}(\omega) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^m(\omega)$$

es compacto, de manera que, para la medibilidad de este conjunto y por la Proposición III.4 en Castaing y Valadier [12], es suficiente probar que cada $E_n^m(\omega)$ es medible. Pero, para n, m fijos, este es un conjunto finito para cada $\omega \in \Omega$. Además, por construcción

$$E_n^m(\omega) \subset B_n^m(\omega)$$

y es claro, por la prueba de la medibilidad del atractor aleatorio en Crauel y Flandoli [22], que $B_n^m(\omega)$ es medible, de manera que, por el Teorema III.9 en [12], existe una selección medible $s_j^{m,n} : \Omega \to X$ tal que $P - c.s.$

$$B_n^m(\omega) = \overline{\{s_j^{m,n}(\omega) : \, j \in \mathbb{N}\}},$$

lo que significa que la selección $s_j^{m,n}$ es densa en $B_n^m(\omega)$. Si desde el principio de la construcción del atractor exponencial se toman los puntos en $E_n^m(\omega)$ de esta selección medible $\{s_j^{m,n}(\omega) : \, j \in \mathbb{N}\}$, queda probado que $E_n^m(\omega)$ es medible.

Ahora se puede probar la medibilidad de $\mathcal{E}_0^m(\omega)$ pues, por el Teorema 3.12 en Schenk-Hoppé [91], si un conjunto aleatorio $D(\omega)$ es medible, entonces $\varphi(j, \theta_{-j}\omega)D(\theta_{-j}\omega)$ también lo es. Por consiguiente,

$$\mathcal{E}_0^m(\omega) = \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} \varphi(j, \theta_{-j}\omega)(\mathcal{A}(\theta_{-j}\omega) \cup E_\infty^m(\theta_{-j}\omega))}$$

es un conjunto compacto y, por el Lema 9, cada uno de los conjuntos $\mathcal{A}(\theta_{-j}\omega) \cup E_\infty^m(\theta_{-j}\omega)$ es compacto, de manera que, por la continuidad del sistema dinámico aleatorio, $\varphi(j, \theta_{-j}\omega)(\mathcal{A}(\theta_{-j}\omega) \cup E_\infty^m(\theta_{-j}\omega))$ es cerrado, y, por tanto, de nuevo por la proposición III.4 en [12], $\mathcal{E}_0^m(\omega)$ es medible.

Además, el teorema de la proyección (ver [12], Teorema III.23) da la medibilidad de $\mathcal{E}^m(\omega)$ pues,

$$\begin{aligned} &\{\omega \in \Omega : \, \inf_{0 \le t \le 1} \mathrm{dist}(x, \varphi(t, \theta_{-t}\omega)\mathcal{E}_0^m(\theta_{-t}\omega) < \alpha\} \\ &= \textstyle\prod_\Omega \{(t, \omega) : \, \mathrm{dist}(x, \varphi(t, \theta_{-t}\omega)\mathcal{E}_0^m(\theta_{-t}\omega) < \alpha, \; t \in [0,1]\}, \end{aligned}$$

donde $\prod_\Omega$ es la proyección ortogonal de $[0,1] \times \Omega$ en Ω. Finalmente, la medibilidad del atractor exponencial aleatorio $\mathcal{E}(\omega)$ es clara, de nuevo por la Prop. III.4 en [12].

□

5.3 Aplicaciones

La principal hipótesis para la construcción de un atractor exponencial aleatorio asume la existencia de un conjunto compacto, absorbente y positivamente invariante. Existen casos muy interesantes donde ésta es precisamente la situación que nos encontramos.

a) En Schmalfuss [97] aparece el siguiente sistema de Lorenz con ruido multiplicativo

$$\begin{aligned} du_x(t) + Au_x(t)dt + F(u_x(t))dt &= fdt + u_x(t) \circ dW_t \\ u_x(0) &= x \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

donde W_t es un proceso de Wiener, $t \in \mathbb{R}$, y la expresión $\circ W_t$ debemos entenderla en el sentido de Stratonovich. A es un operador lineal dado por la matriz

$$\begin{pmatrix} \sigma & -\sigma & 0 \\ \sigma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

con $\sigma, b > 0$, por lo que es definida positiva. F es el término no lineal

$$F(u) = F_0(u,u), \quad F_0(u_1,u_2) = (0, x_1 z_2, -x_1 y_2),$$

$u_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$. Finalmente, la fuerza externa f viene dada por

$$f = (0, 0, -b(r+\sigma)), \; r > 0.$$

Se prueba en [97] (Teorema 4.2) que el sistema dinámico aleatorio que define $(t, \omega, x) \mapsto \varphi(t,\omega)x$ depende continuamente de (t, ω, x). El teorema 5.1 muestra la existencia de un conjunto compacto y positivamente invariante $B(\omega)$, absorbente de todos los conjuntos cerrados y aleatorios $D(\omega) \subset \mathbb{R}^3$ que satisfacen la siguiente hipótesis de crecimiento subexponencial

$$D(\omega) \subset B(0, r_D(\omega)) \quad \text{con} \quad \lim_{t\to+\infty} r_D(\theta_{-t}\omega)e^{-\epsilon t} = 0, \quad \text{para todo } \epsilon > 0. \tag{5.2}$$

Este hecho permite definir un concepto generalizado de atractor aleatorio como un conjunto atrayente de los cerrados aleatorios que satisfagan (5.2). En efecto, el conjunto $\mathcal{A}(\omega)$ definido por

$$\mathcal{A}(\omega) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi(n, \theta_{-n}\omega)B(\theta_{-n}\omega)$$

es invariante y, para todo $D(\omega)$ verificando (5.2), se tiene que

$$\lim_{t \to +\infty} \text{dist}(\varphi(t, \theta_{-t}\omega)D(\theta_{-t}\omega), \mathcal{A}(\omega)) = 0.$$

Notas.

i) Observemos que, en particular, los conjuntos compactos deterministas $K \subset \mathbb{R}^3$ satisfacen (5.2).

ii) En Schmalfuss [97] y Keller [63] aparecen interesantes simulaciones numéricas del atractor aleatorio de Lorenz para algunos parámetros particulares de la ecuación que asemejan una perturbación aleatoria del conocido atractor extraño de Lorenz (véase, por ejemplo, Guckenheimer y Holmes [54]).

b) Consideramos ahora un ejemplo de ecuación estocástica en un espacio de fases de dimensión infinita (Schmalfuss [94]). Sea la siguiente ecuación estocástica de Navier-Stokes con ruido multiplicativo en el sentido de Stratonovich

$$du(t) + \nu Au(t)dt + B(u(t))dt = \overline{u}dt + fdt + u(t) \circ dW(t)$$

sobre un toro bidimensional y condiciones de frontera periódicas. A y B son los operadores lineal y no lineal respectivamente usuales para estas ecuaciones, $\nu > 0$. El término f se supone independiente del tiempo y no aleatorio. $W(t)$ es un proceso de Wiener con $t \in \mathbb{R}$ y valores en $\mathbb{R}$. Finalmente, la variable aleatoria $\overline{u}$ es de cuadrado integrable e independiente de $W(t)$.

Los lemas 4.4 y 4.5 en Schmalfuss [94] muestran la existencia de un conjunto compacto $B(\omega)$, positivamente invariante y absorbente para el sistema dinámico aleatorio asociado a este problema. Así, el teorema 10 (Teorema 2.2 en [94]) asegura la existencia de un único atractor aleatorio $\mathcal{A}(\omega)$, y, por tanto, nuestro análisis puede realizarse para garantizar la existencia de un atractor exponencial aleatorio.

c) Un amplio estudio del comportamiento asintótico de la siguiente ecuación de Duffing-van der Pool aparece en Schenk-Hoppé [91]

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha x + \beta \frac{dx}{dt} - x^3 - x^2 \frac{dx}{dt} + \sigma_1 x \circ W_t^1 + \sigma_2 W_t^2,$$

con $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ y W_t^1, W_t^2 procesos de ruido blanco o ruido real.

Para el caso de ruido real, se prueba (Teorema 3.19 en [91]) la existencia de un conjunto aleatorio compacto $B(\omega)$, invariante y absorbente, y así la existencia de un atractor aleatorio $\mathcal{A}(\omega)$ que atrae todos los conjuntos aleatorios y cerrados en las condiciones de (5.2). Consecuentemente, podemos de nuevo construir un atractor exponencial aleatorio para este problema.

Capítulo 6

Seguimiento de trayectorias en conjuntos atrayentes aleatorios

En el capítulo 4 hemos comprobado cómo el hecho de que los atractores aleatorios tengan dimensión finita permite en algunos casos obtener resultados sobre modos determinantes para sistemas dinámicos aleatorios, mostrando de manera analítica la dependencia asintótica del sistema de un número finito de grados de libertad. Al igual que en el caso determinista, ello hace especialmente interesante el estudio de la dinámica en los conjuntos aleatorios atrayentes, pues son compactos finito-dimensionales que determinan el comportamiento asintótico de todo el sistema. En la última sección del capítulo 1 estudiamos cómo la dinámica en el atractor global nos describía la del sistema dinámico, obteniendo algunos resultado bastante intuitivos desde el punto de vista geométrico. El teorema sobre completitud asintótica para atractores exponenciales allí expuesto expresa la equivalencia entre las dinámicas en el atractor y la que se da en el espacio de fases.

En este capítulo vamos a generalizar estos resultados para conjuntos atrayentes aleatorios.

6.1 Seguimiento de trayectorias en atractores aleatorios

En esta sección probaremos la propiedad de seguimiento de trayectorias para atractores aleatorios análoga a la que escribimos en el capítulo 1. En síntesis dice que, dado un SDA para el que conocemos la existencia de atractor aleatorio, con una probabilidad todo lo cercana que se desee a la unidad, cualquier trayectoria del sistema puede ser seguida por una sucesión de trozos de trayectoria que se mueven sobre el atractor aleatorio.

Consideremos la siguiente ecuación en derivadas parciales en el espacio de Hilbert H (norma $|.|$) perturbada por un ruido blanco aditivo definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, siendo θ_t su correspondiente grupo de transformaciones en Ω

$$du = -Audt + f(u)dt + dW(t), \tag{6.1}$$

donde A es un operador lineal, autoadjunto, positivo y de inverso compacto, con dominio $D(A)$, y f el término no lineal.

Sea $\varphi : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times H \to H$ el SDA asociado al problema (6.1), para el que se verifica la siguiente propiedad de dependencia respecto a las condiciones iniciales: dado $s \geq 0$, se tiene que, para todo $u, v \in H$, $t \geq 0$, y $P - c.s.$,

$$|\varphi(t, \theta_s\omega)u - \varphi(t, \theta_s\omega)v| \leq e^{Lt}|u - v|. \tag{6.2}$$

Supongamos que las condiciones para la existencia de atractor aleatorio se satisfacen, y, así, para todo $B \subset H$ acotado y $P - c.s.$

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{dist}(\varphi(t, \theta_{-t}\omega)B, \mathcal{A}(\omega)) = 0.$$

Esta convergencia implica la convergencia en probabilidad, es decir, para todo $\epsilon > 0$,

$$\lim_{t \to +\infty} P(\mathrm{dist}(\varphi(t, \omega)B, \mathcal{A}(\theta_t\omega)) < \epsilon) = 1. \tag{6.3}$$

De (6.2) y (6.3) se puede probar lo siguiente:

Proposición 11 *Si escribimos la trayectoria del problema (5.1) como $\varphi(t, \omega)u_0$, $u_0 \in H$, y dados $0 < \epsilon < 1$, $0 < \delta < 1$, y $T > 0$, existe un tiempo $\tau(\epsilon, \delta, T) > 0$ tal que,* *para todo* $\tau \geq \tau(\epsilon, \delta, T)$, *existe* $\tilde{\Omega}$ *con* $P(\tilde{\Omega}) > 1 - \delta$ *tal que, si* $\omega \in \tilde{\Omega}$, *existe un punto* $v_\tau \in \mathcal{A}(\theta_\tau \omega)$ *satisfaciendo*

$$|\varphi(t + \tau, \omega)u_0 - \varphi(t, \theta_\tau \omega)v_\tau| < \epsilon, \quad \textit{para todo} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Demostración.

Dados $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$, existe $\tau(\epsilon)$ tal que, $\forall t \geq \tau(\epsilon)$,

$$P(\mathrm{dist}(\varphi(t, \omega)u_0, \mathcal{A}(\theta_t \omega)) < \epsilon e^{-LT}) \geq 1 - \delta.$$

En particular, para $t = \tau$, existe Ω_τ, $P(\Omega_\tau) \geq 1 - \delta$ y, para todo $\omega \in \Omega_\tau$,

$$\mathrm{dist}(\varphi(\tau, \omega)u_0, \mathcal{A}(\theta_\tau \omega)) < \epsilon e^{-LT}.$$

Como $\mathcal{A}(\theta_\tau \omega)$ es compacto, existe $v_\tau \in \mathcal{A}(\theta_\tau \omega)$ para el que

$$|\varphi(\tau, \omega)u_0 - v_\tau| \leq \epsilon e^{-LT},$$

y así, por (6.2),

$$|\varphi(t, \theta_\tau \omega)\varphi(\tau, \omega)u_0 - \varphi(t, \theta_\tau \omega)v_\tau| \leq |\varphi(\tau, \omega)u_0 - v_\tau| e^{Lt} \leq \epsilon,$$

para todo $t \in [0, T]$, lo cual acaba la prueba si aplicamos la propiedad del cociclo, pues se tiene para todo $\omega \in \Omega_\tau$.

□

Como consecuencia de este resultado obtenemos la siguiente propiedad de seguimiento de trayectorias en atractores aleatorios del problema (6.1).

Corolario 3 *Dados* $0 < \delta < 1$, $T > 0$, *y* $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\epsilon_n > 0$, $\epsilon_n \searrow 0$, *existen una sucesión de tiempos* $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\tau_n \nearrow +\infty$,

$$\tau_{n+1} > \tau_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \tau_{n+1} - \tau_n \to +\infty \quad \textit{cuando} \quad n \to \infty,$$

y un subconjunto $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ *con* $P(\tilde{\Omega}) > 1 - \delta$, *tal que, para cada* $\omega \in \tilde{\Omega}$, *existe* $v_{\tau_n} \in \mathcal{A}(\theta_{\tau_n} \omega)$ *satisfaciendo*

$$|\varphi(t + \tau_n, \omega)u_0 - \varphi(t, \theta_{\tau_n} \omega)v_{\tau_n}| < \epsilon_n, \quad 0 \leq t \leq nT, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración. Dados $\delta > 0$, $\epsilon_1 > 0$ y $T > 0$, elegimos una sucesión decreciente $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \delta \quad (\text{por ejemplo, } \delta_n = \frac{\delta}{2^{n+1}}). \tag{6.4}$$

Entonces, por la proposición anterior para ϵ_1, δ_1 y T, existe $\tau_1 = \tau(\delta_1, \epsilon_1, T)$ tal que, para todo $\tau \geq \tau(\delta_1, \epsilon_1, T)$, existe $\Omega_\tau \subset \Omega$ con $P(\Omega_\tau) > 1 - \delta_1$, satisfaciendo que, para cada $\omega \in \Omega_\tau$, existe $v_\tau \in \mathcal{A}(\theta_\tau \omega)$ con

$$|\varphi(t+\tau, \omega)u_0 - \varphi(t, \theta_\tau \omega)v_\tau| < \epsilon_1, \quad \text{para todo} \quad 0 \leq t \leq T.$$

De nuevo por el resultado anterior para ϵ_2, δ_2 y $2T$, existe $\tau_2 = \tau(\delta_2, \epsilon_2, T)$ tal que, para todo $\tau \geq \tau(\delta_1, \epsilon_1, T)$, existe $\Omega_\tau \subset \Omega$ con $P(\Omega_\tau) > 1 - \delta_2$, satisfaciendo que, para cada $\omega \in \Omega_\tau$, existe $v_\tau \in \mathcal{A}(\theta_\tau \omega)$ con

$$|\varphi(t+\tau, \omega)u_0 - \varphi(t, \theta_\tau \omega)v_\tau| < \epsilon_2, \quad \text{para todo} \quad 0 \leq t \leq 2T.$$

En general, dados ϵ_n, δ_n y nT, existe $\tau_n = \tau(\delta_n, \epsilon_n, T) \geq \tau_{n-1}$ tal que, para todo $\tau \geq \tau_n$, existe $\Omega_\tau \subset \Omega$ con $P(\Omega_\tau) > 1 - \delta_n$, satisfaciendo que, para cada $\omega \in \Omega_\tau$, existe $v_\tau \in \mathcal{A}(\theta_\tau \omega)$ con

$$|\varphi(t+\tau, \omega)u_0 - \varphi(t, \theta_\tau \omega)v_\tau| < \epsilon_n, \quad \text{para todo} \quad 0 \leq t \leq nT.$$

Denotemos por $\Omega_n \subset \Omega$ el conjunto con la propiedad de que, para todo $\omega \in \Omega_n$, existe $v_{\tau_n} \in \mathcal{A}(\theta_{\tau_n} \omega)$ satisfaciendo

$$|\varphi(t+\tau_n, \omega)u_0 - \varphi(t, \theta_{\tau_n} \omega)v_{\tau_n}| < \epsilon_n, \quad 0 \leq t \leq nT.$$

Tenemos así que $P(\Omega_n) > 1 - \delta_n$. Si llamamos $\tilde{\Omega} = \cap_{n=1}^{\infty} \Omega_\tau$, se deduce de (6.4) que $P(\tilde{\Omega}) > 1 - \delta$. Si tomamos ahora $\omega \in \tilde{\Omega}$ tenemos que existe $v_{\tau_n} \in \mathcal{A}(\theta_{\tau_n} \omega)$ con

$$|\varphi(t+\tau_n, \omega)u_0 - \varphi(t, \theta_{\tau_n} \omega)v_{\tau_n}| < \epsilon_n \quad 0 \leq t \leq nT,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y así

$$P(|\varphi(t+\tau_n, \omega)u_0 - \varphi(t, \theta_{\tau_n} \omega)v_{\tau_n}| < \epsilon_n, \quad 0 < t < nT, \quad \forall n \in \mathbb{N}) > 1 - \delta.$$

$\square$

Aplicación. Ecuación de reacción-difusión con ruido aditivo

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera regular y

$$f(u) = \sum_{k=0}^{2p-1} a_k u^k, \qquad a_{2p-1} < 0.$$

Volvemos a considerar la ecuación diferencial de reacción-difusión con ruido aditivo que estudiamos en el Capítulo 4

$$\left\{ \begin{array}{rcl} du & = & \Delta u dt + f(u)dt + \sum_{i=1}^{d} \phi^i dW_t^i \qquad \text{en } D \\ u & = & 0 \text{ sobre } \partial D \\ u(0) & = & u_0 \end{array} \right. \tag{6.5}$$

con $W_t^i : \Omega \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, procesos de Wiener independientes definidos en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ya indicamos que esta ecuación se podía expresar en forma variacional en el espacio de Hilbert $H = L^2(D)$ como

$$\left\{ \begin{array}{rcl} du & = & Audt + F(u)dt + \sum_{i=1}^{d} \phi^i dW_t^i \qquad \text{en } H \\ u(0) & = & u_0 \end{array} \right. \tag{6.6}$$

y tomamos $\phi^i \in D(A)$, por simplicidad.
Recordemos que este problema define un sistema dinámico aleatorio $\varphi(t, \omega) : H \to H$ en $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\theta_t)_{t\in\mathbb{R}})$ para el que se tiene la existencia de atractor aleatorio ([22]). Por la condición sobre el término no lineal f, y por cálculos de tipo estándard, se comprueba que $P - c.s.$

$$|u(t, \omega; u_0) - u(t, \omega; u_1)| \leq e^{kt}|u_0 - v_0|,$$

de manera que la propiedad de continuidad respecto a los datos iniciales (6.2) se verifica y así los resultados de esta seción se cumplen para este problema.

6.2 Seguimiento en atractores exponenciales aleatorios

La propiedad de seguimiento de trayectorias descrita anteriormente no es del todo satisfactoria, pues, debido a la convergencia sólo en probabilidad sobre el atractor aleatorio, el corolario de la sección anterior solamente nos proporciona una sucesión de trozos de trayectorias sobre el atractor aleatorio que, con una alta probabilidad, se acercan asintóticamente a las trayectorias del sistema. Por otro lado, el uso de la función de probabilidad hace menos intuitivo el carácter geométrico de este resultado. No obstante, recordemos que la proposición 9 nos proporciona una relación entre la convergencia desde $-\infty$ y la convergencia hacia $+\infty$. Para ello necesitamos una condición de convergencia exponencial para las trayectorias del sistema:.

Supongamos que tenemos un atractor exponencial aleatorio $\mathcal{E}(\omega)$. Recordemos que en este caso, por la proposición 10 se tiene la convergencia $P - c.s.$ sobre el atractor cuando $t \to +\infty$

$$\operatorname{dist}(\varphi(t,\omega)B, \mathcal{E}(\theta_t\omega)) \to 0 \quad \text{cuando } t \to +\infty.$$

En esta situación, los resultados de la sección anterior pueden generalizarse de la siguiente forma

Proposición 12 *Sea $\mathcal{E}(\omega)$ un atractor exponencial aleatorio para el SDA $\varphi(t,\omega)$ y supongamos que (6.2) se satisface. Entonces, dado $u_0 \in H$, $0 < \epsilon < 1$, y $T > 0$, existe un tiempo $\tau(\epsilon, T)$ y un subconjunto $\widetilde{\Omega}$ de Ω con probabilidad uno tal que, para cada $\omega \in \widetilde{\Omega}$ y $\tau \geq \tau(\epsilon, T)$, existe un punto $v_\tau \in \mathcal{E}(\theta_\tau\omega)$ satisfaciendo*

$$|\varphi(t+\tau,\omega)u_0 - \varphi(t,\theta_\tau\omega)v_\tau| < \epsilon, \quad \textit{para todo} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Demostración. La misma que la proposición 11, excepto la dependencia de la función de probabilidad P.

□

Corolario 4 *Dados $u_0 \in H$ y una sucesión $\{\epsilon_m\}$, $\epsilon_m > 0$, $\epsilon_n \searrow 0$, existe $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ con $P(\widetilde{\Omega}) = 1$, otra sucesión $\{\widetilde{\epsilon}_m\}$, $\widetilde{\epsilon}_m > 0$, $\widetilde{\epsilon}_m \searrow 0$, una sucesión de tiempos $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$, y una sucesión de puntos $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$, con $v_m \in \mathcal{E}(\theta_{t_m}\omega)$, tales que*

$$t_{m+1} > t_m \quad \forall m \in N, \qquad t_{m+1} - t_m \to +\infty \quad \textit{cuando} \quad m \to \infty,$$

y, para toda $\omega \in \widetilde{\Omega}$,

$$|\varphi(t+t_m,\omega)u_0 - \varphi(t,\theta_{t_m}\omega)v_m| < \epsilon_m \quad 0 \leq t \leq t_{m+1} - t_m.$$

Además, los saltos

$$|v_{m+1} - \varphi(t_{m+1} - t_m, \theta_{t_m}\omega)v_m|$$

decrecen a cero cuando $m \to \infty$.

Demostración. Tomemos una sucesión $\epsilon_m \searrow 0$ y la correspondiente sucesión de tiempos $t_m = t_m(\epsilon_m)$, tal que, para todo $t \geq t_m$,

$$\mathrm{dist}(\varphi(t,\omega)u_0, \mathcal{E}(\theta_t\omega)) < \epsilon_m e^{-mLT}.$$

Es claro que podemos elegir $t_{m+1} \geq t_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Así, y por la proposición precedente, existe $v_m \in \mathcal{E}(\theta_{t_m}\omega)$ tal que

$$|\varphi(t + t_m, \omega)u_0 - \varphi(t, \theta_{t_m}\omega)v_m| < \epsilon_m, \quad \forall t \in [0, mT].$$

Podemos suponer que $mT + t_m \geq t_{m+1}$. Si no es así, es decir, si $t_{m+1} > mT + t_m$, podemos seguir la trayectoria por un número finito de trozos de trayectorias sobre el atractor aleatorio de longitud (en tiempo) mT hasta alcanzar t_{m+1}, y denotar a la nueva sucesión por $\widetilde{\epsilon}_m$. Tomamos $\widetilde{\Omega} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Omega_m$, que claramente tiene probabilidad uno.

Además, para dos puntos consecutivos de la sucesión $\{v_m\}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&|v_{m+1} - \varphi(t_{m+1} - t_m, \theta_{t_m}\omega)v_m| \leq |v_{m+1} - \varphi(t_{m+1}, \omega)u_0| \\
&+|\varphi(t_{m+1} - t_m + t_m, \omega)u_0 - \varphi(t_{m+1} - t_m, \theta_{t_m}\omega)v_m| \\
&\leq \epsilon_{m+1} + |\varphi(t_{m+1} - t_m, \theta_{t_m}\omega)\varphi(t_m, \omega)u_0 - \varphi(t_{m+1} - t_m, \theta_{t_m}\omega)v_m| \\
&\leq \epsilon_{m+1} + \epsilon_m.
\end{aligned}$$

□

6.3 Completitud asintótica de variedades inerciales estocásticas

La generalización del concepto de variedad inercial a ciertas ecuaciones en derivadas parciales estocásticas con ruido aditivo fue introducida por Bensoussan y Flandoli en [9] y Chueshov y Girya en [28]. Tras ellos, Da Prato y Debussche [31] construyeron una variedad inercial estocástica para una ecuación con ruido multiplicativo. Como los atractores aleatorios, las variedades inerciales estocásticas son conjuntos que se mueven en t y en ω, como puede verse en la siguiente definición

Definición 21 *Una familia aleatoria de variedades $\mathcal{M}(\omega)$ es una variedad inercial estocástica para el SDA $\varphi : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times H \to H$ si $P - c.s.$ satisface*

i) $\mathcal{M}(\omega)$ es una variedad lipschitziana

ii) $\varphi(t,\omega)\mathcal{M}(\omega) = \mathcal{M}(\theta_t\omega)$ para todo $t \geq 0$ y

iii) $\exists \nu > 0$ tal que $P - c.s.$

$$\lim_{t\to\infty} e^{\nu t}\mathrm{dist}\left(\varphi(t,\omega)u_0,\ \mathcal{M}(\theta_t\omega)\right) = 0, \quad \text{para todo } u_0 \in H.$$

Al igual que en el caso determinista (véase Foias et al. [49]), en todos los ejemplos aparecidos en la literatura, la variedad inercial estocástica viene dada como el grafo de una determinada función aleatoria, lipschitziana para cada $t \in \mathbb{R}^+$ y $\omega \in \Omega$, $\phi_t(\omega) : P_mH \to (I - P_m)H$ en un espacio finito-dimensional P_mH, esto es, $P - c.s.$

$$\mathcal{M}(\omega) = \{P_m u + \phi_t(\omega)(P_m u), \quad u \in H, \quad P_m : H \to P_mH\},$$

donde P_m es el proyector ortogonal de dimensión finita en H definido como $P_m u = \sum_{i=1}^{m}(u, e_i)e_i$. La constante de Lipschitz L_ϕ de $\phi_t(\omega)$ es uniforme en $t \geq 0$ y $\omega \in \Omega$.

En esta situación, la convergencia exponencial sobre la variedad inercial puede escribirse (véase, por ejemplo, Chueshov y Girya [28]) como que existe $\nu > 0$ tal que $P - c.s.$

$$\lim_{t\to\infty} e^{\nu t}|Q_m\varphi(t,\omega)u_0 - \phi_t(\omega)(P_m\varphi(t,\omega)u_0)| = 0, \tag{6.7}$$

donde $Q_m = I - P_m$. Claramente, una variedad inercial estocástica describe el comportamiento asintótico de un sistema dinámico aleatorio con un número finito de grados de libertad. En concreto, los resultados sobre modos determinantes descritos en el capítulo 4 son casi directos cuando podemos garantizar la existencia de una variedad inercial estocástica, como probaremos en el siguiente resultado

Lema 10 *Sea $\mathcal{M}(\omega)$ una variedad inercial estocástica dada como el grafo de una determinada función lipschitziana $\phi_t(\omega) : P_m H \to Q_m H$. Entonces, si para $u_0, v_0 \in H$ y $P - c.s.$*

$$\lim_{t\to\infty} |P_m(\varphi(t,\omega)u_0 - \varphi(t,\omega)v_0)| = 0,$$

entonces, $P - c.s.$

$$\lim_{t\to\infty} |\varphi(t,\omega)u_0 - \varphi(t,\omega)v_0| = 0.$$

Demostración. De la propiedad de convergencia exponencial (6.7) y por la hipótesis del lema, tenemos

$$\begin{aligned}
|\varphi(t,\omega)u_0 - \varphi(t,\omega)v_0| &\leq |P_m(\varphi(t,\omega)u_0 - \varphi(t,\omega)v_0)| \\
&\quad + |Q_m(\varphi(t,\omega)u_0 - \varphi(t,\omega)v_0)| \\
&\leq |P_m(\varphi(t,\omega)u_0 - \varphi(t,\omega)v_0)| \\
&\quad + |Q_m\varphi(t,\omega)u_0 - \phi_t(\omega)(P_m\varphi(t,\omega)u_0)| + \\
&\quad + |\phi_t(\omega)(P_m\varphi(t,\omega)u_0) - \phi_t(\omega)(P_m\varphi(t,\omega)v_0)| \\
&\quad + |\phi_t(\omega)(P_m\varphi(t,\omega)v_0) - Q_m\varphi(t,\omega)v_0| \\
&\leq (1 + L_\phi)|P_m(\varphi(t,\omega)u_0 - \varphi(t,\omega)v_0)| + \\
&\quad + |Q_m\varphi(t,\omega)u_0 - \phi_t(\omega)(P_m\varphi(t,\omega)u_0)| \\
&\quad + |\phi_t(\omega)(P_m\varphi(t,\omega)v_0) - Q_m\varphi(t,\omega)v_0|,
\end{aligned}$$

lo cual tiende a cero, y el lema queda probado.

□

Ya hemos indicado que Robinson prueba en [84] que si una variedad inercial es de flujo normal hiperbólico, entonces es asintóticamente completa. En esta sección mostraremos cómo este resultado puede ser generalizado al caso estocástico, es decir, aunque el concepto de variedad inercial estocástica difiere cualitativamente de aquel en el caso determinista (especialmente por su dependencia de las variables t, ω), veremos que para estos conjuntos podemos encontrar trayectorias moviéndose en ellos que siguen asintóticamente a cualquier trayectoria del sistema.

Definición 22 *Se dice que una variedad inercial estocástica es asintóticamente completa si, $P-c.s.$ y para todo $u_0 \in H$, existe $v_0 \in \mathcal{M}(\omega)$ tal que*

$$\lim_{t\to\infty} |\varphi(t,\omega)u_0 - \varphi(t,\omega)v_0| = 0.$$

Nota: Observemos que, dado $v_0 \in \mathcal{M}(\omega)$, para todo $t \geq 0$, $\varphi(t,\omega)v_0 \in \mathcal{M}(\theta_t\omega)$, es decir, $\varphi(t,\omega)v_0$ describe una trayectoria sobre la variedad inercial. Como la variedad inercial viene definida como el grafo de una determinada función lipschitziana sobre un espacio de dimensión finita, la completitud asintótica de variedades inerciales muestra claramente de forma geométrica el comportamiento asintótico finito-dimensional del sistema dinámico aleatorio.

Observemos que, al igual que en el caso determinista (cf. Ladyzhenskaya [68], lema 2.1), debido a la invarianza estricta de la variedad inercial estocástica, se puede definir, para cada $v_0 \in \mathcal{M}(\omega)$, la semitrayectoria negativa $\varphi(-t,\omega)v_0 \in \mathcal{M}(\theta_{-t}\omega)$, para todo $t > 0$. Además, si, $P-c.s.$ y para todo $t > 0$, $\varphi(t,\omega)$ es inyectiva, la trayectoria completa ($t \in \mathbb{R}$) es única. En efecto, una *trayectoria completa* que pasa a través de $v_0 \in \mathcal{M}(\omega)$ sobre la variedad inercial es una función $v : \mathbb{R} \to H$ verificando

i) $v(t) \in \mathcal{M}(\theta_t\omega) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad v(0) = v_0$

ii) $\varphi(t,\theta_s\omega)v(s) = v(t+s), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0.$
En particular, $v(t) = \varphi(t,\omega)v_0$, para $t \geq 0$.

Ahora, dado $v_0 \in \mathcal{M}(\omega)$, podemos fácilmente construir una trayectoria completa $v(t)$. Para $t \geq 0$, sea $v(t) = \varphi(t,\omega)v_0$. Para $t < 0$, usamos la invarianza de la variedad y, como $\varphi(1,\theta_{-1}\omega)\mathcal{M}(\theta_{-1}\omega) = \mathcal{M}(\omega)$, existe $v_{-1} \in \mathcal{M}(\theta_{-1}\omega)$ tal que $\varphi(1,\theta_{-1}\omega)v_{-1} = v_0$. De nuevo, como $\varphi(1,\theta_{-2}\omega)\mathcal{M}(\theta_{-2}\omega) = \mathcal{M}(\theta_{-1}\omega)$, entonces existe $v_{-2} \in \mathcal{M}(\theta_{-2}\omega)$ con $\varphi(1,\theta_{-2}\omega)v_{-2} = v_{-1}$. En general, existe $v_{-n} \in \mathcal{M}(\theta_{-n}\omega)$ con $\varphi(1,\theta_{-n}\omega)v_{-n} = v_{-(n-1)}$. Finalmente, unimos estos puntos de la siguiente forma: para $t < 0$, $t \in [-n,-n+1]$,

$$v(t) = \varphi(t+n,\theta_{-n}\omega)v_{-n}.$$

No es difícil comprobar que, por la propiedad del cociclo, $v(t)$ es una trayectoria completa. Sin embargo, la construcción muestra que la semitrayectoria negativa podría no ser única. No obstante, si el sistema dinámico aleatorio es inyectivo, $P - c.s.$, es decir, si $\varphi(t,\omega)$ es invertible, para todo $t \geq 0$ y $P - c.s.$, es evidente que la elección en la construcción anterior es única. Así, podemos extender el sistema dinámico aleatorio a toda la recta real $\mathbb{R}$ sobre la variedad inercial, y escribir $\varphi(t,\omega)$ para $t < 0$, teniendo en cuenta que $\varphi(t,\omega) = \varphi(-t, \theta_t\omega)^{-1}$. Podemos definir ahora el siguiente concepto, generalización de la definición 6

Definición 23 *Se dice que la variedad inercial estocástica $\mathcal{M}(\omega)$ es de flujo normal hiperbólico si satisface*

$$|\varphi(-t,\omega)v_1 - \varphi(-t,\omega)v_2| \leq D(\omega)e^{\gamma t}|v_1 - v_2| \tag{6.8}$$

para todo $t \geq 0$ y $v_1, v_2 \in \mathcal{M}(\omega)$, donde $\gamma < \nu$.

Nota. La definición se puede leer, análogamente a lo estudiado en el Capítulo 2, como que una variedad inercial estocástica es de flujo normal hiperbólico si el exponente de atracción sobre la variedad inercial es mayor que la separación *hacia atrás en el tiempo* de dos trayectorias sobre la misma.

En estas condiciones podemos probar el siguiente resultado

Teorema 19 *Supongamos que la variedad inercial estocástica $\mathcal{M}(\omega)$ es de flujo normal hiperbólico y la variable aleatoria $D(\theta_t\omega)$ que aparece en (6.8) tiene, a lo más, crecimiento polinomial en t. Entonces $\mathcal{M}(\omega)$ es asintóticamente completa. Además, el grado de atracción es el mismo que el que se tiene sobre la variedad inercial.*

Demostración. Como $\mathcal{M}(\omega)$ es una variedad inercial, para todo $u_0 \in H$

$$\operatorname{dist}(\varphi(t,\omega)u_0, \mathcal{M}(\theta_t\omega)) \leq C(\omega)e^{-\nu t}, \quad \forall t \geq 0$$

y así, para todo $t \geq 0$, existe $v_t \in \mathcal{M}(\theta_t\omega)$ tal que

$$\operatorname{dist}(\varphi(t,\omega)u_0, v_t) \leq C(\omega)e^{-\nu t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{6.9}$$

Definimos

$$v_\infty(t) = \lim_{T\to+\infty} \varphi(t-T,\theta_T\omega)v_T. \tag{6.10}$$

Observemos que $\varphi(t-T,\theta_T\omega)v_T$ es el valor en el tiempo t de la solución que está en v_T en el tiempo T, donde v_T verifica (6.9) y, por tanto,

$$v_T \in \mathcal{M}(\theta_T\omega),$$

lo cual implica

$$\varphi(t-T,\theta_T\omega)v_T \in \mathcal{M}(\theta_t\omega), \quad \forall T\geq 0,$$

por lo que

$$v_\infty(t) \in \mathcal{M}(\theta_t\omega), \quad \forall t\geq 0.$$

Se observa que $\varphi(t-T,\theta_T\omega)v_T$ está bien definido debido a la invarianza de la variedad inercial.

Probaremos que $v_\infty(t)$ está bien definido, es solución de nuestro problema y constituye la trayectoria de seguimiento de $\varphi(t,\omega)u_0$.

En primer lugar, queremos evaluar

$$|\varphi(t-(s+h),\theta_{s+h}\omega)v_{s+h} - \varphi(t-s,\theta_s\omega)v_s|.$$

Por una parte, por la propiedad del cociclo y la de flujo normal hiperbólico,

$$\begin{aligned}
&|\varphi(t-(s+h),\theta_{s+h}\omega)v_{s+h} - \varphi(t-s,\theta_s\omega)v_s| && (6.11)\\
&|\varphi(t-s,\theta_s\omega)\varphi(-h,\theta_{s+h}\omega)v_{s+h} - \varphi(t-s,\theta_s\omega)v_s| && (6.12)\\
\leq\ & D(\theta_s\omega)e^{-\gamma(t-s)}|\varphi(-h,\theta_{s+h}\omega)v_{s+h} - v_s| && (6.13)\\
\leq\ & D(\theta_s\omega)e^{-\gamma(t-s)}|\varphi(-h,\theta_{s+h}\omega)v_{s+h} - \varphi(-h,\theta_{s+h}\omega)\varphi(h,\theta_s\omega)v_s| && (6.14)\\
\leq\ & D(\theta_s\omega)D(\theta_{s+h}\omega)e^{-\gamma(t-s)}e^{\gamma h}|v_{s+h} - \varphi(h,\theta_s\omega)v_s|. && (6.15)\\
& && (6.16)
\end{aligned}$$

Por otra parte, de la definición de v_{s+h}, v_s y la propiedad de Lipschitz del sistema dinámico aleatorio, se sigue

$$\begin{aligned}
&|v_{s+h} - \varphi(h,\theta_s\omega)v_s|\\
&\leq |v_{s+h} - \varphi(s+h,\omega)u_0| + |\varphi(h,\theta_s\omega)\varphi(s,\omega)u_0 - \varphi(h,\theta_s\omega)v_s|\\
&\leq C(\omega)e^{-\nu(s+h)} + e^{Lh}C(\omega)e^{-\nu s}.
\end{aligned}$$

Así, volviendo a (6.16) se deduce que, fijado h_0, se verifica para $h \leq h_0$ lo siguiente

$$
\begin{aligned}
& |\varphi(t-(s+h),\theta_{s+h}\omega)v_{s+h} - \varphi(t-s,\theta_s\omega)v_s| && (6.17)\\
\leq\ & D(\theta_s\omega)D(\theta_{s+h}\omega)e^{-\gamma(t-s)}e^{\gamma h}C(\omega)e^{-\nu s}(e^{-\nu s}+e^{Lh}) && (6.18)\\
\leq\ & D(\theta_s\omega)D(\theta_{s+h}\omega)e^{-\gamma t}e^{-(\nu-\gamma)s}C(\omega)K. && (6.19)\\
& && (6.20)
\end{aligned}
$$

De (6.20) podemos concluir que (6.10) converge uniformemente en intervalos acotados de $[0,+\infty)$ pues, para todo $\tau > T$,

$$
\begin{aligned}
& |\varphi(t-\tau,\theta_\tau\omega)v_\tau - \varphi(t,\theta_T\omega)v_T| \\
& \leq Ke^{-\gamma t}C(\omega)e^{-(\nu-\gamma)T}\sum_{n=0}^{\infty} D(\theta_{T+nh}\omega)D(\theta_{T+(n+1)h}\omega)e^{-(\nu-\gamma)nh}
\end{aligned}
$$

y, por la hipótesis sobre $D(\omega)$, la serie anterior converge, de manera que la última expresión es

$$
= K_0e^{-\gamma t}e^{-(\nu-\gamma)T}
$$

lo cual tiende a cero uniformemente en $t \in [0,t_0]$, para todo $t_0 > 0$, cuando $T \to +\infty$. Por lo tanto, el límite en (6.10) existe y verifica la ecuación del problema, pues es el límite uniforme de soluciones del problema.

Además, claramente $v_\infty(t,\omega)$ satisface la propiedad de seguimiento para $\varphi(t,\omega)u_0$, pues

$$
\begin{aligned}
& |v_\infty(t) - \varphi(t,\omega)u_0| \leq |v_\infty(t) - v_t(\omega)| + |v_t(\omega) - \varphi(t,\omega)u_0| \\
& \leq KC(\omega)e^{-\gamma t}\sum_{n=0}^{\infty} D(\theta_{t+nh}\omega)D(\theta_{t+(n+1)h}\omega)e^{-(\nu-\gamma)(t+nh)} + C(\omega)e^{-\nu t} \\
& \leq K_0C(\omega)e^{-\gamma t}e^{-(\nu-\gamma)t} + C(\omega)e^{-\nu t} \\
& \leq C(\omega)\tilde{K}_0e^{-\nu t}.
\end{aligned}
$$

□

Nota. Observemos que en la demostración no hemos hecho referencia alguna a que la variedad inercial venga dada como el grafo de una determinada función, de manera que el teorema probado es válido para cualquier conjunto invariante que atraiga exponencialmente a las trayectorias y satisfaga la propiedad de flujo normal hiperbólico.

6.3.1 Aplicación. Una ecuación semilineal estocástica con ruido aditivo

En Bensoussan y Flandoli [9] (véase también Chueshov y Girya [28]) se prueba la existencia de variedad inercial estocástica para la siguiente ecuación en derivadas parciales con ruido aditivo

$$\begin{aligned} du(t) + Au(t)dt &= R(u(t)) + dW(t) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

donde A es un operador lineal, positivo, autoadjunto, con inverso compacto, por lo que existe una sucesión de autovalores

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots$$

cuya correspondiente sucesión de autofunciones constituye una base ortonormal del espacio de Hilbert H. R es el término no lineal, el cual se supone lipschitziano con constante L_R.

Bajo estas hipótesis sobre R, claramente se verifica (6.2); además, la variable aleatoria $D(\omega)$ en (6.8) es independiente de ω. En [9] se prueba que bajo la condición espectral de salto

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > 4L_R \tag{6.21}$$

existe una variedad inercial estocástica $\mathcal{M}(\omega)$ dada como el grafo de cierta función aleatoria $\phi_t(\omega)$. Además, en este caso $\gamma = (1+M)L_R + \lambda_n$. En efecto, una cota en la separación de las trayectorias en $\mathcal{M}(\omega)$ viene dada por una cota en la separación de las trayectorias de la ecuación diferencial

$$dp + Apdt = P_m R(p + \phi_t(\omega)p)dt + dP_m W_t,$$

y la constante de Lipschitz de $Ap + P_m R(p + \phi_t(\omega)p)$ es $(1+M)L_R + \lambda_n$.

Por otro lado, se tiene que el grado de atracción es $\nu = \lambda_{n+1} - L_R(1+M)$, donde M puede elegirse menor o igual que uno. Así, de (6.21) obtenemos

$$\gamma = (1+M)L_R + \lambda_n < 2L_R + \lambda_n < \lambda_{n+1} - 2L_R < \lambda_{n+1} - L_R(1+M) = \nu,$$

de manera que, como $\gamma < \nu$, $\mathcal{M}(\omega)$ es de flujo normal hiperbólico, por lo que, gracias al Teorema 19, es asintóticamente completa.

Anexo A

A.1 Conclusiones y problemas abiertos

Si para la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{du}{dt} + Au + f(u) = 0$$

tenemos una variedad inercial $\mathcal{M}$ dada como el grafo de una determinada función $\phi : P_m X \to Q_m X$, la dinámica en $\mathcal{M}$ queda completamente descrita por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en $P_m X$

$$\frac{dp}{dt} + Ap + f(p + \phi(p)) = 0. \tag{A.1}$$

De esta forma, el comportamiento asintótico del sistema dinámico asociado queda determinado por una ecuación diferencial en un espacio de dimensión finita. Desde un punto de vista geométrico, es la propiedad de completitud asintótica la que mejor expresa este comportamiento cuando $t \to +\infty$ dependiente de un número finito de variables.

Puesto que, en general, no es cierta la propiedad de completitud asintótica para atractores globales, hemos investigado bajo qué condiciones podemos escribir resultados análogos para estos conjuntos. Sin embargo, queda abierto el problema de encontrar un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias cuyo comportamiento describa la dinámica en el atractor, de manera que podamos escribir resultados de equivalencia para el comportamiento asintótico de ecuaciones en derivadas parciales y estos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, concretando apropiadamente la idea que relaciona la existencia de atractores globales finito-dimensionales con la dependencia asintótica de sistemas dinámicos de una cantidad finita de variables. Diversos intentos, aún parciales, han habido en esta línea, de entre los cuales debemos destacar los aparecidos en Eden et al. [36] y, más recientemente, los obtenidos por Robinson [86], [88]. En todos ellos la idea clave pasa por el uso de un resultado de Mañé [76], que afirma la existencia de un proyector ortogonal P_0 sobre $\mathbb{R}^{2d+1}$, mediante el cual podemos proyectar el atractor $\mathcal{A}$ de forma inyectiva sobre este espacio de dimensión finita, con d la dimensión fractal del atractor.

La resolución de este problema no es fácil y, por el momento, no conocemos cuál puede ser el camino más apropiado para abordarlo, aparte de lo ya obtenido, que no es poco, con las proyecciones de Mañé y los trabajos antes citados.

Como cabe esperar, en el caso de atractores aleatorios el problema aparece completamente abierto. Es más, el camino andado mediante el uso de proyecciones de Mañé parece difícilmente adaptable a esta situación, debido a la no acotación uniforme de estos conjuntos, pues estas proyecciones pierden parte de sus propiedades esenciales si no se aplican sobre conjuntos compactos. Por consiguiente, incluso la generalización de los resultados deterministas está abierta en este caso. Aunque en la memoria presentada no aparecen resultados sobre este tema, el trabajo en esta dirección ha sido en ocasiones intenso y, aún habiendo concluido únicamente aspectos parciales, éstos nos animan a continuar el trabajo en esta línea.

De esta forma, los resultados del Capítulo 6, aunque no dan respuesta directa a este problema, fueron obtenidos en este mismo intento de relacionar el comportamiento asintótico de sistemas dinámicos aleatorios con la dinámica finito-dimensional observada en atractores aleatorios y variedades inerciales estocásticas.

En la teoría de atractores aleatorios existe un importante problema abierto que, antes o después, ha de ser abordado. Hasta el momento, el tratamiento de la mayoría de las aplicaciones de esta teoría ha basado una parte importante de su argumentación en la realización de un cambio de variables tras el cual la ecuación diferencial estocástica puede ser tratada considerando a la variable $\omega \in \Omega$ como un parámetro. Ello ha permitido aplicar resultados de la teoría determinista en estos casos. Por tanto, la existencia de atractores aleatorios para ecuaciones diferenciales estocásticas más generales es un problema abierto cuya resolución no parece fácil. Harían falta, por tanto, más ejemplos y aplicaciones donde la teoría pueda ser aplicada con éxito.

Lo mismo ocurre con la teoría de variedades inerciales. En la actualidad existen, que conozcamos, escasos trabajos sobre existencia de variedades inerciales estocásticas y, en general, las hipótesis impuestas en las aplicaciones son fuertes. Por otro lado, la teoría de variedades inerciales deterministas está en la actualidad bastante desarrollada en métodos de construcción y aplicaciones, lo que proporciona gran cantidad de argumentos y herramientas que podrían tratar de generalizarse en el campo estocástico. En particular, creemos que el método de construcción de variedades inerciales que aparecen en Robinson [89] podría ser aplicado con éxito a ciertas ecuaciones estocásticas. No obstante, el problema actualmente está abierto.

Igualmente, consideramos que aún no se han aprovechado todas las posibilidades que la teoría de los sistemas dinámicos aleatorios ha abierto para el estudio de ecuaciones diferenciales no autónomas. Los trabajos existentes en esta dirección son pocos y recientes (Kloeden y Stoiner [65], Schmalfuss [97]).

Respecto al problema de semicontinuidad superior de atractores escrito en el Capítulo 3, quedaría pendiente el resultado análogo de semicontinuidad inferior y, así, podríamos concluir la continuidad de los atractores aleatorios respecto al atractor global. No obstante, en Crauel y Flandoli [24] se muestra una ecuación diferencial con tres puntos de equilibrio la cual, bajo la presencia de un ruido aditivo, posee un atractor aleatorio consistente en un único punto (aleatorio). Además, en el caso determinista se necesita cierta información sobre la dinámica en el atractor para resultados de este tipo, lo que precisaría en nuestro caso un conocimiento más profundo de la estructura de los atractores aleatorios, constituyendo un problema esencialmente distinto al tratado en el Capítulo 3. Igualmente, serían muy interesantes resultados sobre continuidad de variedades inerciales estocásticas respecto a la variedad inercial determinista.

El estudio de la dependencia de un número finito de variables de sistemas dinámicos aleatorios ha sido comenzado en el Capítulo 4. Sin embargo, aún quedan numerosas cuestiones pendientes en esta dirección. En primer lugar, obtener cotas superiores para el número de componentes de Fourier que determinan el comportamiento asintótico del sistema. Debemos esperar una relación de estas cotas con las obtenidas para la dimensión de los atractores aleatorios, cuya precisión en la estimación de cotas superiores también es una cuestión abierta. En segundo lugar, la generalización al campo estocástico de resultados del caso determinista sobre *nodos determinantes* (Foias y Temam [47]) y *elementos de volumen determinantes* (Foias y Titi [52]) son problemas abiertos que, para ejemplos concretos, deberían tener respuestas afirmativas.

Por último, la construcción del atractor exponencial aleatorio escrita en el Capítulo 5 debe ser mejorada y ampliada. No obstante, consideramos que en lo que allí se expone están algunas de las ideas fundamentales que han de servir de base a una construcción donde, al igual que en el caso determinista, sea posible controlar la dimensión fractal del atractor exponencial. Ello necesitaría un trabajo bastante elaborado, aunque consideramos que, gracias a la propiedad de aplastamiento aleatorio expuesta en el Capítulo 4, este problema debería ser abordado con una probabilidad alta de alcanzar una respuesta afirmativa.

Bibliografía

[1] Arnold, L. (1974): *Stochastic Differential Equations. Theory and Applications.* Wiley, New York.

[2] Arnold, L., Crauel, H. (1990): Random dynamical systems. *Lyapunov Exponents, Proceedings, Oberwolfach.* Lect. Notes Math. **1486**, 1-22.

[3] Arnold, L. (1995): Six lectures on random dynamical systems. In R. Johnson, editor, *Dynamical Systems (CIME Summer School 1994).* Lect. Notes Math. **1609**, 1-43.

[4] Arnold, L., Scheutzow, M. (1995): Perfect cocycles through stochastic differential equations. *Prob. Th. Rel. Fields* **101**, 65-88.

[5] Arnold, L., Schmalfuss, B. (1995): Fixed points an attractors for random dynamical systems. *Institut for Dynamische Systeme.* Report n 350.

[6] Arnold, L. (1996): Trends and open problems in the theory of random dynamical systems. *Institut for Dynamische Systeme.* Report No. 365.

[7] Babin, A.B., Vishik, M.I. (1983): Attractors of partial differential equations and estimates of their dimension. *Russian Math. Surveys* **38:4**, 151-213.

[8] Babin, A.B., Vishik, M.I. (1992): *Attractors of Evolutions Equations.* North Holland.

[9] Bensoussan, A., Flandoli, F. (1995): Stochastic inertial manifolds. *Stochastics Stochastic Rep.*, **53**, 13-39.

[10] Bensoussan, A., Temam, R. (1973): Equations stochastiques du type Navier-Stokes. *J. Functional Anal.* **13**, 195-222.

[11] Brzezniak, Z., Capinski, M, Flandoli, F. (1993): Pathwise global attractors for stationary random dynamical systems. *Prob. Th. Rel. Fields* **95**, 87-102.

[12] Castaing, C., Valadier, M. (1977): *Convex Analysis and Measurable Multifunctions.* Lect. Notes Maths. **580**. Springer.

[13] Caraballo, T. (1988). Tesis. Universidad de Sevilla.

[14] Caraballo, T., Langa, J.A., Robinson, J.A. (1997): Upper semicontinuity of attractors for small random perturbations of dynamical systems. Enviado para publicación a *Comm. in Part. Diff. Eq.*

[15] Caraballo, T., Langa, J.A. (1998): A first construction of a random exponential attractor. Enviado para publicación a *Nonlinear Analysis TMA.*

[16] Caraballo, T., Langa, J.A. (1998): Tracking properties of trajectories on random attracting sets. *Stoch. Analysis and Applications* Aparecerá.

[17] Constantin, P., Foias, C. (1985): Global Lyapunov exponents, Kaplan-Yorke formulas and the dimension of the attractors for two dimensional Navier-Stokes equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **38**, 1-27.

[18] Constantin, P., Foias, C., Temam, R. (1985): *Attractors representing turbulent flows.* Mem. Amer. Math. Soc. **53**.

[19] Constantin, P., Foias, C., Nicolaenko, B., Teman, R. (1988): *Integral Manifolds and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations.* Springer, Berlin.

[20] Crauel, H. (1996): Invariant measures are supported by random attractors. Prepublicación.

[21] Crauel, H., Debussche, A., Flandoli, F. (1995): Random attractors. *J. Dyn. Diff. Eq.* **9**, n 2, 307-341.

[22] Crauel, H., Flandoli, F. (1994): Attractors for random dynamical systems. *Prob. Th. Rel. Fields* **100**, 365-393.

[23] Crauel, H. (1995): *Random Probability Measures on Polish Spaces.* Habilitationsschrift. Bremen.

[24] Crauel, H., Flandoli, F. (1996): Additive noise destroys a pitchfork bifurcation. Prepublicación.

[25] Chepyzhov, V.V., Vishik, M.I. (1993): A Hausdorff dimension estimate for kernel sections of non-autonomous evolution equations. *Ind. Univ. Math. J.* **42**, No. 3, 1057-1076.

[26] Chepyzhov, V.V., Vishik, M.I. (1994): Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension. *J. Math. Pures Appl.* **73**, 279-333.

[27] Chow, S.N., Lu, K., Sell, G.R. (1992): Smoothness of inertial manifolds. *J. Math. Anal. Appl.* **169**, 283-312.

[28] Chueshov, I.D., Girya, T.V.: Inertial manifolds for stochastic dissipative dynamical systems. *Doklady of Acad. Sci. Ukraine* **7**, 42-45.

[29] Chueshov, I.D., Girya, T.V. (1994): Inertial manifolds and forms for semilinear parabolic equations subjected to additive white noise. *Letters in Math. Phys.* **34**, 69-76.

[30] Da Prato, G., Zabczyk, J. (1992): *Stochastic Equations in Infinite Dimensions.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 44, Cambridge University Press.

[31] Da Prato, G., Debussche, A.: Construction of stochastic inertial manifold using backward integration. *Stochastics Stochastic Rep.* **59**, 305-324.

[32] Debussche, A. (1997): On the finite dimensionality of random attractors. *Stoch. Anal. and Appl.* 15 4, 473-492.

[33] Debussche, A. (1996): Hausdorff dimension of a random invariant set. Prepublicación 96-34 Universidad de Paris-Sud.

[34] Eden, A., Foias, C., Nicolaenko, B., Temam, R. (1990): Esembles inertiels pour des équations d'évolution dissipatives. *C. R. Acad. Sci. Paris* **310**, serie I, 559-562.

[35] Eden, A., Foias, C., Nicolaenko, B., She, Z.S. (1993): Exponential attractors and their relevance to fluid dynamics systems. *Physica* **D63**, 350-360.

[36] Eden, A., Foias, C., Nicolaenko, B., Temam, R. (1994): *Exponential Attractors for Dissipative Evolution Equations*. RAM, Wiley, Chichester.

[37] Elworthy, K.D. (1982): *Stochastic Differential Equations on Manifolds*. Cambridge University Press, Cambridge.

[38] Falconer, K. (1990): *Fractal Geometry*. Wiley, Chichester.

[39] Fenichel, N. (1971): Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows. *Indiana Univ. Math. J.* **23**, 193-226.

[40] Flandoli, F., Schmalfuss, B. (1996): Random attractors for the 3D stochastic Navier-Stokes equation with multiplicative white noise. *Stochastics Stochastic Rep.* **59**, 21-45.

[41] Flandoli, F. (1994): Dissipativity and invariant measures for stochastic Navier-Stokes equations. *NoDEA* **1**, 403-423.

[42] Flandoli, F. (1995): *Regularity Theory and Stochastic Flows for Parabolic SPDEs*. Gordon and Breach, Amsterdam.

[43] Flandoli, F., Langa, J.A. (1997): Determining modes for dissipative random dynamical systems. *Stochastic Stochastic Rep.* Aparecerá.

[44] Foias, C., Prodi, G. (1967): Sur le comportement global des solutions non-stationnaires des equations de Navier-Stokes en dimension 2. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **39**, 1-34.

[45] Foias, C., Temam, R. (1979): Some analytic and geometrical properties of the solutions of Navier-Stokes equations. *J. Math. Pures Appl.* **58**, 339-368.

[46] Foias, C., Manley, R., Temam, R., Treve, Y. (1983): Asymptotic analysis of the Navier-Stokes equations. *Physica* **D9**, 157-188.

[47] Foias, C., Temam, R. (1984): Determination of the solutions of the Navier-Stokes equations by a set of nodal values. *Math. Comput.* **43**, 117-133.

[48] Foias, C., Sell, G.R., Temam, R. (1985): Variétés inertielles des équations différéntielles disipatives. *C.R. Acad. Sci. Paris* I **301**, 139-141.

[49] Foias, C., Sell, G.R., Temam, R. (1988): Inertial manifolds for dissipative evolution equations. *J. Differential Eq.* **73**, 311-353.

[50] Foias, C., Manley, O., Temam, R. (1988): Modelling of the interaction of small and large eddies in two dimensional turbulent flows. *Math. Mod. Numer. Anal.* **22**, 93-118.

[51] Foias, C., Sell, G.R., Titi, E. (1989): Exponential tracking and approximation of inertial manifolds for dissipative nonlinear equations. *J. Dyn. Diff. Eq.* **1**, 199-244.

[52] Foias, C., Titi, E. (1991): Determining nodes, finite differences schemes and inertial manifolds. *Nonlinearity* 4, 135-153.

[53] Freidlin, M.I. (1992): *Semilinear PDE's and limit theorems for large deviations.* Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XX-1990 Lect. Notes Maths. **1527**, 1-108. Berlin Heidelberg, Springer.

[54] Guckenheimer, J., Holmes, P. (1983): *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields.* Springer-Verlag, Nueva York.

[55] Hale, J.K. (1988): *Asymptotic Behaviour of Dissipative Systems.* Math. Surveys and Monographs, vol. **25**, Amer. Math. Soc., Providence.

[56] Hale, J., Lin, X., Raugel, G. (1988): Upper semicontinuity of attractors for approximations of semigroups and PDE's. *Math. Comp.* **50** (1988), number 181, 89-123.

[57] Hale, J., Raugel, G. (1988): Upper semicontinuity of the attractor for a singularly perturbed hyperbolic equation. *J. Differential Eq.* **73**, 197-214.

[58] Haraux, A. (1988): Attractors of asymptotically compact processes and applications to nonlinear partial differential equations. *Comm. in Part. Diff. Eq.* **13** (11), 1383-1414.

[59] Haraux, A. (1991): *Systemes Dinamiques Dissipatifs et Applications*. Masson, París.

[60] Henry, D. (1981): *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Lect. Notes Math., vol. **840**, Springer-Verlag, New York.

[61] Ichikawa, A. (1984): Semilinear Stochastic evolution equations: boundedness, stability and invariant measures. *Stochastics* **12**, 1-39.

[62] Jones, D.A., Titi, E.S. (1993): On the number of determining modes, nodes and volume elements for the Navier-Stokes equations. *Indiana Univ. Math. J.* **42**, 1-12.

[63] Keller, H. (1996): Attractors and bifurcations of the stochastic Lorenz system. *Institut for Dynamische Systeme*. Report n 389.

[64] Kloeden, P.E., Schmalfuss, B. (1996): Nonautonomous systems, cocycle attractors and variable time-step discretization. *Institut for Dynamische Systeme*. Report No. 370.

[65] Kloeden, P.E., Stoiner, D.J. (1996): Cocycle attractors in nonautonomously perturbed differential equations. *CADSEM*. Report 96-010, Deakin University.

[66] Kunita, H. (1990) : *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations*. Cambridge University Press, Cambridge.

[67] Kurzweil, J. (1968): Invariant manifolds of differential systems. *J. Differential Eq.* 4, 406-412.

[68] Ladyzhenskaya, O. (1991): *Attractors for Semigroups and Evolution Equations*. Accademia Nazionale dei Lincei, Cambridge University Press, Cambridge.

[69] Langa, J.A., Robinson, J.C. (1996): Determining asymptotic behaviour from the dynamics on attracting sets. *J. Dyn. and Diff. Eq.* Aparecerá.

[70] Lavenda, B. (1985): El movimiento browniano. En *Orden y Caos*. Libros de Investigación y Ciencia. Barcelona, 1994.

[71] Lorenz, E. (1963): Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* **20**, 448-464.

[72] Mallet-Paret, J. (1976): Negatively invariant sets of compact maps and an extension of a theorem of Cartwright. *J. Differential Eq.* **22**, 331-348.

[73] Mallet-Paret, J., Sell, G.R. (1988): Inertial manifolds for reaction-diffusion equations in higher space dimensions. *J. Amer. Math. Soc.* **1**, 805-866.

[74] Maslowski, B. (1989): Uniqueness and stability of invariant measures for stochastic differential equations in Hilbert spaces. *Stochastics Stochastic Rep.* **28**, 85-114.

[75] Mandelbrot, B. (1982): *The fractal Geometry of Nature.* Freeman. San Francisco.

[76] Mañé, R. (1981): On the dimension of compact invariant sets of certain nonlinear maps. *Lect. Notes Maths.* **898**, 230-242.

[77] Marlin, J.A., Struble, R.A. (1967): Asymptotic equivalence of nonlinear systems. *J. Differential Eq.* **6**, 578-596.

[78] Morimoto, H. (1992): Attractors of probability measures for semilinear stochastic evolution equations. *Stoch. Analysis and Applications* **10** (2), 205-212.

[79] Øksendal, B. (1992): *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.

[80] Pardoux, E. (1979): Stochastic partial differential equations and filtering of diffusion processes. *Stochastics* **3**, 127-167.

[81] Renardy, M., Rogers, R.C. (1992): *An Introduction to Partial Differential Equations.* Springer-Verlag Texts in Applied Maths. , vol. **13**, New York.

[82] Robinson, J.C. (1994): *Inertial Manifolds.* Tesis por la Universidad de Cambridge.

[83] Robinson, J.C. (1994): Finite dimensional behaviour in dissipative partial differential equations. *Chaos* **5**, 330-345.

[84] Robinson, J.C. (1996): *The asymptotic completeness of inertial manifolds.* Nonlinearity, **9**, 1325-1340.

[85] Robinson, J.C. (1997): Some closure results for inertial manifolds. *J. Dyn. Diff. Eq.* **9**, n 3, 373-400.

[86] Robinson, J.C. (1997): Global attractors: topology and finite-dimensional dynamics. *J. Dyn. Diff. Eq.*, en impresión.

[87] Robinson, J.C. (1997): All possible chaotic dynamics can be approximated in three dimensions. Prepublicación.

[88] Robinson, J.C. (1997): *Some approaches to finite-dimensional behaviour in the Navier-Stokes equations.* Seminario impartido en el Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla. (1997)

[89] Rosa, R., Temam, R. (1994): Inertial manifolds and normal hyperbolicity. *The Institute for Scientific Computating and Applied Maths.* (Indiana) Prepublicación n 9407.

[90] Sacker, R., Sell, G. (1978): A spectral theory for linear differential systems. *J. Differential Eq.* **27**, 320-358.

[91] Schenk-Hoppé, K.R (1996): Attractors and invariant measures of the stochastic Duffing-van der Pol equation. *Institut for Dynamische Systeme.* Report No. 369.

[92] Schmalfuss, B. (1991): Long-time behaviour of the stochastic Navier-Stokes equation. *Math. Nachr.* **152**, 7-20.

[93] Schmalfuss, B. (1992): Backward cocycles and attractors of stochastic differential equations. In V. Reitmann, T. Riedrich and N Koksch, editors, *International Seminar on Applied Mathematics-Nonlinear Dynamics: Attractor Approximation and Global Behaviour*, 185-192.

[94] Schmalfuss, B. (1995): Measure attractors and stochastic attractors. *Institut for Dynamische Systeme.* Report No. 332.

[95] Schmalfuss, B. (1996): The random attractor for the stochastic Lorenz system. *Institut for Dynamische Systeme.* Report No. 367.

[96] Schmalfuss, B. (1996): Attractors for the non-autonomous Navier-Stokes equation. Prepublicación.

[97] Schmalfuss, B. (1997): Qualitative properties for the stochastic Navier-Stokes equation. *Nonlinear Analysis* **28**, No. 9, 1545-1563.

[98] Sell, G.R. (1967): Nonautonomous differential equations and topological dynamics I, II. *Trans. Amer. Math. Soc.* **127** (1967), 241-262, 263-283.

[99] Sinai, Ya. G. (1977): *Introduction to the Ergodic Theory.* Math. Notes Princeton University Press, Princeton.

[100] Stratonovich, R.L. (1966): A new representation for stochastic integrals and equations. J. Siam Control 4, 362-371.

[101] Temam, R. (1988): *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics.* Springer-Verlag, New York.

[102] Temam, R. (1990): Inertial manifolds. *Math. Intell.* **12**, 68-73.

[103] Wallman, Hurewicz (1948): *Dimensional Theory.* Princeton University Press.

[104] Wiggins, S. (1994): *Normally Hyperbolic Invariant Manifolds in Dynamical Systems.* Springer-Verlag. New York.

[105] Vishik, M.I. (1992): *Asymptotic Behaviour of Solutions of Evolutionary Equations.* Accademia Nazionale dei Lincei, Cambridge University Press, Cambridge.

José Antonio Langa Rosado

Atractores y Comportamiento finito-dimensional en Sistemas dinámicos aleatorios

Apto cum laude por unanimidad

3 Julio 98

El Vocal,

Aníbal Rodríguez B

El Vocal,

El Doctorando

El Secretario,