UNIVERSIDAD DE SEVILLA FACULTAD DE MATEMATICAS

Departamento de Análisis Matemático

# ALGUNOS RESULTADOS DE ESTABILIDAD DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES ESTOCÁSTICAS CON RETARDOS



Memoria que presenta
Tomás Caraballo Garrido
para optar al Grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas

Fdo.: Tomás Caraballo Garrido

V$^{\underline{o}}$ B$^{\underline{o}}$ el Director del trabajo:

Fdo.: José Real Anguas,
Profesor Titular de
Análisis Matemático.

Sevilla, julio de 1988.

Autorizo la consulta del presente trabajo.

# ALGUNOS RESULTADOS DE ESTABILIDAD DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES ESTOCÁSTICAS CON RETARDOS

Tomás Caraballo Garrido

# Agradecimiento

Quiero manifestar mi más sincero y profundo agradecimiento al Profesor D. José Real Anguas, por haberse preocupado en enseñarme las técnicas esenciales de investigación para el estudio de las Ecuaciones en Derivadas Parciales Estocásticas.

Del mismo modo, deseo agradecerle el que me haya propuesto el tema de esta memoria, así como su inestimable apoyo en cuanto a dirección, orientación, estímulo y ayuda, sin los cuales me habría sido imposible la realización del presente trabajo.

# INTRODUCCIÓN

En esta memoria presentamos una contribución al estudio de la estabilidad en las Ecuaciones en Derivadas Parciales Estocásticas (E.D.P.E) con retardo.

El estudio de las E.D.P.E. ha experimentado un gran desarrollo en los últimos años y la importancia de ello radica en que dichas ecuaciones aparecen en la modelización de fenómenos físicos (Cf. Chow [4]), biología de poblaciones (Cf. Fleming [13]), problemas de filtraje (Cf. Pardoux [30]), etc...

A pesar de que los estudios sobre la estabilidad de este tipo de ecuaciones estocásticas en dimensión finita comenzaron en la década de los cincuenta, el estudio en dimensión infinita no ha sido abordado hasta la última década por Haussmann [16], Curtain [9], Ichikawa [19] y Zabczyk [42] entre otros.

En los trabajos antes mencionados se establecen condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad asintótica exponencial del segundo momento de las soluciones, mediante la utilización de una función de Liapunov, y como consecuencia de ello en [9] y [16] se obtiene estabilidad exponencial trayectorial con probabilidad 1.

Nosotros nos hemos planteado estudiar el comportamiento asintótico de un sistema de la forma

$$(P) \qquad \begin{cases} dx_t = Ax_t\,dt + Bx_{\rho(t)}\,dw_t & t \geq 0 \\ x_t = \psi(t) & t \in [-h, 0] \end{cases}$$

donde $A$ y $B$ son operadores lineales continuos con valores en espacios de Hilbert reales separables (en concreto $A \in L(V, V')$, $B \in L(V, H)$ donde $V$, $H$ es la pareja clásica de espacios de Hilbert considerados en el marco variacional descrito por Lions [24] y Pardoux [32]); $w_t$ es un proceso de Wiener real unidimensional, $\rho$ es una función de retardo, y $\psi$ es el dato inicial (ambos satisfaciendo condiciones adecuadas).

El problema de la existencia y unicidad de solución de $(P)$ ha sido plenamente resuelto por Real [37], incluso en una situación bastante más general y que engloba nuestro caso. A la solución de este problema, que pertenecerá a un determinado espacio funcional (Cf. Capítulo II), la denominaremos solución en sentido fuerte (o simplemente solución fuerte).

En concreto, nos hemos planteado el estudio de la estabilidad de las trayectorias del proceso solución de $(P)$, ya que aunque en los primeros estudios de estabilidad realizados sobre las E.D.P.E. fue la estabilidad de los momentos (del proceso solución) lo que recibió la mayor atención, en los últimos años este estudio se ha enfocado hacia la estabilidad de las trayectorias.

En nuestra opinión, el comportamiento de los momentos es importante en la medida en la que nos proporcionen información acerca de la estabilidad de las trayectorias, dado que cuando sometemos a observación un sistema real bajo la acción de perturbaciones aleatorias, la información que recibimos hace referencia a las trayectorias del proceso solución de dicho sistema.

El estudio de la estabilidad de las soluciones de $(P)$ lo hemos dividido en dos partes:

a) Estabilidad exponencial del segundo momento de $x_t$.

b) Estabilidad exponencial de las trayectorias de $x_t$ con probabilidad 1.

Hagamos notar que cuando las ecuaciones estocásticas poseen retardos, aunque estos sean constantes, las técnicas utilizadas en [9] y [16], presentan grandes inconvenientes para el estudio de la estabilidad, ya que es preciso considerar funcionales de Liapunov, es decir, considerar una función que tenga en cuenta la historia del proceso. Esta observación ya fue efectuada por Krasovskii [22] , incluso para las E.D.O., y posteriormente por Kushner [23], El'sgol'ts-Norkin [12] entre otros, para las E.D.P.E..

Para el estudio de a) nos valdremos de un método que no hace uso de funcionales de Liapunov. En esencia, el método consiste en determinar un cierto $\lambda > 0$ tal que

$$\int_0^\infty e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2\,dt \leq \mathrm{const}\|\psi\|_1^2$$

(donde $\|.\|_1$ es una norma conveniente definida (ver Capítulos III-IV)), para posteriormente, y haciendo uso de la Fórmula de Itô poder concluir con

$$\mathbf{E}|x_t|^2 \leq \mathrm{const}\|\psi\|_1^2 e^{-\lambda t}\ .$$

En el estudio de b) utilizamos la Igualdad de la Energía (o Fórmula de Itô para el proceso $|x_t|^2$ ), y los resultados obtenidos en a) para concluir con que existe un conjunto $\Lambda$ de probabilidad cero tal que si $\omega \notin \Lambda$ entonces existe un $T(\omega)$ positivo tal que

$$|x_t(\omega)|^2 \leq \mathrm{const}\|\psi\|_1^2 e^{-\lambda t} \quad \forall t \geq T(\omega),$$

es decir, casi todas las trayectorias son exponencialmente asintóticamente estables.

Para poder dar respuesta satisfactoria a la cuestión a), nos hemos visto obligados a tener que exigir que el retardo sea derivable y estrictamente creciente, cosa que no nos parece excesivamente fuerte, ya que esto mismo es utilizado para asegurar la existencia y unicidad de solución de $(P)$ (ver [37]). De hecho, este tipo de hipótesis es usual también en las E.D.O. con retardo.

Por último, y antes de pasar a describir el contenido de nuestra memoria, resaltaremos que la importancia del estudio de las ecuaciones diferenciales estocásticas con retardos, se encuentra en que dichos retardos ejercen, en determinados casos, una acción estabilizadora sobre ecuaciones que en principio pueden ser inestables. El'sgol'ts-Norkin en [12] nos describen el siguiente ejemplo:

La solución de la ecuación escalar

$$dx_t = ax_t\,dt + bx_t\,dw_t \quad t \geq 0$$

(con $a > 0$) posee segundo momento inestable, mientras que si se le añade una perturbación con retardo puede conseguirse que la solución posea segundo momento estable (es decir, su límite es cero cuando $t \to \infty$). En consecuencia, las perturbaciones aleatorias retardadas ejercen una acción estabilizadora. En el Capítulo IV pueden verse otros ejemplos más detallados.

Hemos estructurado nuestro trabajo en cuatro capítulos.

En el primero se encuentran aquellos resultados sobre integración estocástica que nos serán de utilidad en el posterior desarrollo de nuestra memoria. Nos hemos limitado a exponer los resultados adecuándolos a nuestras necesidades, y hemos realizado un esfuerzo considerable por ordenar los conceptos realizando una exposición tan clara como nos ha sido posible.

De entre los resultados de este capítulo podemos destacar dos que van a ser fundamentales en nuestra labor: la Desigualdad de Burkhölder- Gundy y la Fórmula de Itô.

En el segundo capítulo trabajamos con otro concepto de solución de $(P)$ como es el de solución generalizada (o "mild solution"), que va a ser el proceso $y_t$ dado por la siguiente expresión

$$y_t = U_t x_0 + \int_0^t U_{t-s} B x_{\rho(s)} \, dw_s \quad t \geq 0$$

donde $\{U_t\}_{t \geq 0}$ es el semigrupo de operadores generado por el operador $A$ y $\psi(0) = x_0$. La relación principal que existe entre los dos tipos de soluciones que hemos mencionado, y que nos va a interesar en nuestro caso, es que la solución fuerte es solución generalizada. Es decir, en concreto probaremos que $x_t = y_t$ c.p.d. en $t$. El recíproco no siempre es cierto (puede consultarse Ichikawa [18]-[20] donde hay condiciones para que dicho recíproco sea cierto).

El hecho de que solución fuerte implica generalizada es utilizado por Haussmann en [16]. Sin embargo, no hemos encontrado en la literatura una demostración del mismo. Por ello hemos considerado conveniente llevar a cabo dicha prueba, ya que este resultado va a jugar un papel fundamental en el desarrollo de nuestro trabajo.

Para realizar dicha prueba, dedicamos un primer parágrafo a exponer los resultados principales sobre semigrupos de operadores. A continuación efectuamos la prueba del resultado en el caso determinista, para concluir finalmente con una sección en la que, basándonos en el caso anterior, probamos el caso estocástico. Para ello tendremos que dotar al dominio del operador $A$ de una estructura hilbertiana procedente de una norma que no es la del grafo (esta última suele ser usual en este espacio).

Los dos últimos capítulos constituyen la parte fundamental, y propiamente original, de este trabajo.

El primero de ellos, es decir el tercer capítulo, proporciona las respuestas a las cuestiones a), b) planteadas anteriormente. El método que utilizamos proporciona, además, una nueva demostración de los resultados de Haussmann [16] (en el caso en que tomemos $\rho(t) = t$) con las mismas hipótesis cuando $B \in L(H)$, y con una hipótesis algo más restrictiva en el caso en que $B \in L(V, V')$ y no conmute con $U_t$ (o lo que es lo mismo con $A$). Esta misma separación entre los casos conmutativo y no conmutativo se encuentra efectuada, por ejemplo, en Pugliese [36]. Concluimos el capítulo estudiando una serie de ejemplos en los que se pone de manifiesto la aplicación de los diversos resultados obtenidos previamente.

Finalmente, en el Capítulo IV efectuamos unos comentarios y observaciones que nos permiten relajar las condiciones adicionales impuestas sobre el retardo, hasta llegar a las que impone Real en [37] para el estudio de la existencia y unicidad de solución. A esto se dedica una primera sección. En la siguiente, se estudia una ecuación con dos perturbaciones retardadas que engloba, en cierta medida, el caso tratado en [12] por El'sgol'ts-Norkin, y que junto con dicho resultado nos permite dar un teorema que completa el estudio allí realizado.

# CAPÍTULO I

# PRELIMINARES SOBRE INTEGRACIÓN ESTOCÁSTICA

## I.0 INTRODUCCIÓN

En este Capítulo están contenidos todos los resultados sobre integración estocástica que necesitaremos a lo largo del presente trabajo.

En nuestra opinión, existen dos trabajos que son fundamentales conocer, o al menos saber manejar, para todo aquel que se interese por la construcción y utilización de la integral estocástica: METIVIER-PELLAUMAIL [26] y MEYER [28] .

El segundo trata sobre la integración de procesos reales respecto de martingalas también reales, mientras que el primero desarrolla una teoría general de integración estocástica que cubre, en particular, el caso de integrar un proceso vectorial respecto de una martingala hilbertiana.

El camino que hemos escogido para el desarrollo de nuestro trabajo es tratar de demostrar los resultados de la forma más simple y elemental, de modo que sea entendido por cualquier lector no interesado directamente en el tema. Por eso vamos a efectuar, sin demostraciones, la construcción de la integral estocástica respecto de un proceso de Wiener real unidimensional que será el tipo de integración empleado en los siguientes capítulos.

# I.1 PROCESOS ESTOCÁSTICOS: RESULTADOS BÁSICOS.

Consideraremos fijados en el presente Capítulo los siguientes elementos:
a) un intervalo de $\mathbf{R}^+$, que lo denotaremos por $\mathbf{T}$, y entenderemos por dicho intervalo $[0,T]$ o $\mathbf{R}^+$ , siendo $T$ un número positivo prefijado de antemano;

b) un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P}, (\mathbf{F}_t)_{t\in\mathbf{T}})$ verificándose las hipótesis usuales, es decir:
(b.1) $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ es un espacio de probabilidad completo,
(b.2) la familia de sub-$\sigma$-álgebras de $\mathbf{F}$ ,$(\mathbf{F}_t)_{t\in\mathbf{T}}$, es creciente, continua por la derecha (es decir, cumple que $\bigcap_{s>t} \mathbf{F}_s = \mathbf{F}_t$), y tal que $\mathbf{F}_0$ contiene todos los subconjuntos $\mathbf{P}$-despreciables de $\mathbf{F}$ .

c) Un espacio de Hilbert real separable, $\mathbf{X}$, con producto escalar $(.,.)$ y norma $|.|$.

(D.1.1) **Definición**
"Se llama **variable aleatoria** con valores en $\mathbf{X}$, a toda aplicación

$$x : \Omega \longrightarrow \mathbf{X},$$

que sea $\mathbf{F}$-medible, es decir, límite $\mathbf{P}$-c.s. de funciones escalonadas de la forma

$$\sum_{\text{finita}} x_i \mathbf{1}_{F_i}, \quad \text{donde } x_i \in \mathbf{X}, \quad F_i \in \mathbf{F}."$$

(N.1.1) **Nota**
Por ser $\mathbf{X}$ un espacio separable y el espacio de probabilidad completo se verifica (Cf.PETTIS [34]) que $x$ es $\mathbf{F}$-medible si y sólo si es débilmente medible, o equivalentemente, si la imagen inversa por $x$ de todo boreliano de $\mathbf{X}$ pertenece a $\mathbf{F}$.

Dada una variable aleatoria $x$, con valores en $\mathbf{X}$ , y tal que $|x|$ sea $\mathbf{P}$-integrable, se define la **esperanza** de $x$, y se denota por $\mathbf{E}(x)$, como

$$\mathbf{E}(x) = \int_\Omega x(\omega) d\mathbf{P}(\omega)$$

(integral entendida en sentido Bochner).

Denotamos por $L^1(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P} : \mathbf{X})$ el espacio de Banach de las (clases de) variables aleatorias con valores en $\mathbf{X}$ de norma $\mathbf{P}$-integrable dotado de la norma $\|x\| = \mathbf{E}(|x|)$.

Sea $\mathbf{G}$ una sub-$\sigma$-álgebra de $\mathbf{F}$ y sea $x \in L^1(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P} : \mathbf{X})$. Podemos definir, haciendo uso del teorema de Radon-Nikodym, la **esperanza condicionada** de $x$ respecto de la $\sigma$-álgebra $\mathbf{G}$ (Cf. SCALORA [38]), y la denotaremos por $\mathbf{E}^{\mathbf{G}}(x)$, como el único elemento de $L^1(\Omega, \mathbf{G}, \mathbf{P} : \mathbf{X})$ que verifica

$$\int_G x(\omega)\, d\mathbf{P}(\omega) = \int_G [\mathbf{E}^{\mathbf{G}}(x)](\omega)\, d\mathbf{P}(\omega), \quad \forall G \in \mathbf{G}$$

En los dos resultados siguientes resumimos las propiedades fundamentales de la esperanza condicionada (Cf. PARDOUX [31]):

(T.1.1) **Teorema**

*Sea* $\mathbf{G}$ *una sub-*$\sigma$*-álgebra de* $\mathbf{F}$. *Se verifican:*

*(i)* $\mathbf{E}^{\mathbf{G}}$ *es un operador lineal de norma menor o igual que uno, definido del espacio* $L^1(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P} : \mathbf{X})$ *en* $L^1(\Omega, \mathbf{G}, \mathbf{P} : \mathbf{X})$, *verificando* $\mathbf{E}^{\mathbf{G}}(1) = 1$.

*(ii)* $\mathbf{E}[\mathbf{E}^{\mathbf{G}}(x)] = \mathbf{E}(x), \ \forall x \in L^1(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P} : \mathbf{X})$.

*(iii) Si* $\mathbf{G}_1 \subset \mathbf{G}_2$ *son sub-*$\sigma$*-álgebras de* $\mathbf{F}$, *entonces se verifica*

$$\mathbf{E}^{\mathbf{G}_2}\left(\mathbf{E}^{\mathbf{G}_1}(x)\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{G}_1}\left(\mathbf{E}^{\mathbf{G}_2}(x)\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{G}_1}(x), \quad \forall x \in L^1(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P} : \mathbf{X})$$

*(iv)* $\|\mathbf{E}^{\mathbf{G}}(x)\| \leq \mathbf{E}^{\mathbf{G}}(\|x\|), \quad \forall x \in L^1(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P} : \mathbf{X})$. ∎

(T.1.2) **Teorema**

*Sea* $\mathbf{Y}$ *un espacio de Banach. Sea* $x \in L^1(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P} : \mathbf{X})$, *y sea* $A$ *una variable aleatoria con valores en el espacio de Banach de los operadores lineales y continuos de* $\mathbf{X}$ *en* $\mathbf{Y}$ *(denotado por* $L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$*). Si* $A$ *satisface*

*(i) es* $\mathbf{G}$*-medible*

*(ii)* $\mathbf{E}(\|A\||x|) < \infty$,

*entonces:*

$$\mathbf{E}^{\mathbf{G}}(Ax) = A\mathbf{E}^{\mathbf{G}}(x), \quad \mathbf{P} - c.s.. \quad \blacksquare$$

(D.1.2) **Definición**

"Se llama **proceso estocástico** con valores en $\mathbf{X}$, a toda familia $(x_t)_{t\in\mathbf{T}}$ de variables aleatorias con valores en $\mathbf{X}$. Por abuso de notación escribiremos el proceso $x_t$.

El proceso $x_t$ se dice que es $\mathbf{F}_t$**-adaptado** si, para cada $t \in \mathbf{T}$, la variable aleatoria $x_t$ es $\mathbf{F}_t$-medible.

Se dice que el proceso $x_t$ es **medible** si es medible como aplicación definida por

$$(t,\omega) \in \mathbf{T} \times \Omega \longrightarrow x_t(\omega) \in \mathbf{X}$$

cuando sobre $\mathbf{T} \times \Omega$ se considera la $\sigma$-álgebra producto $\mathbf{B}(\mathbf{T}) \otimes \mathbf{F}$, donde $\mathbf{B}(\mathbf{T})$ es la $\sigma$-álgebra de los borelianos de $\mathbf{T}$.

Fijado $\omega \in \Omega$, la aplicación $t \in \mathbf{T} \longrightarrow x_t(\omega) \in \mathbf{X}$, se denomina trayectoria del proceso $x_t$.

Un proceso se dice **continuo,continuo por la derecha con límite por la izquierda, de variación acotada**, etc., si $\mathbf{P}$-c.s. lo son sus trayectorias.

Dos procesos $x_t$ e $y_t$ se dicen **modificación uno del otro** si para cada $t \in \mathbf{T}$, se verifica que $x_t = y_t$ , $\mathbf{P}$-c.s.. Se dice que dichos procesos son **indistinguibles** si

$$\mathbf{P}[\sup_{t\in\mathbf{T}} |x_t - y_t| = 0] = 1."$$

(N.1.2) **Nota**

Hagamos constar que todas las igualdades entre procesos, que aparecerán a lo largo del presente trabajo se entenderán salvo indistinguibilidades.

Se verifica además que dos procesos continuos por la derecha y con límites por la izquierda, que sean modificación uno del otro, son indistinguibles (Cf. PARDOUX [32]).

(D.1.3) **Definición**

"Una **martingala** con valores en $\mathbf{X}$ es un proceso $M_t$ que verifica:

(i) $M_t \in L^1(\Omega, \mathbf{F}_t, \mathbf{P} : \mathbf{X})$, $\qquad \forall t \in \mathbf{T}$

(ii) $\mathbf{E}^{\mathbf{F}_s}[M_t] = M_s$,

En el caso en que $\mathbf{X} = \mathbb{R}$, se dirá que $M_t$ es una **submartingala** si $M_t$ satisface (i) y además

(iii) $\mathbf{E}^{\mathbf{F}_s}(M_t) \geq M_s, \quad \forall s \leq t$."

(N.1.3) **Nota**

En lo que sigue, y salvo mención en contra, todas las martingalas que aparecerán serán con valores reales.

Es bien conocido el siguiente resultado (Cf. MEYER [27]):

(T.1.3) **Teorema**

*Sea $M_t$ una submartingala positiva , continua por la derecha y con límite por la izquierda , y tal que* $\mathbf{E}(M_t^2) < \infty$, $\forall t \in \mathbf{T}$. *Entonces $M_t^2$ es una submartingala y además se verifican*

$$\mathbf{E}(\sup_{t\in\mathbf{T}} M_t^2) \leq 4\sup_{t\in\mathbf{T}}\mathbf{E}(M_t^2) \qquad (= 4\mathbf{E}(M_T^2) \;\; si \;\; \mathbf{T} = [0,T])$$

$$\mathbf{P}[\sup_{t\in\mathbf{T}} M_t^2 \geq \varepsilon] \leq \frac{1}{\varepsilon}\sup_{t\in\mathbf{T}}\mathbf{E}(M_t^2) \qquad (= \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}(M_T^2) \;\; si \;\; \mathbf{T} = [0,T]). \quad \blacksquare$$

# I.2 CONSTRUCCIÓN DE LA INTEGRAL ESTOCÁSTICA

En este apartado vamos a llevar a cabo la construcción de la integral estocástica respecto de una martingala real, y que en los capítulos venideros será un proceso de Wiener (Cf. I.3).

Fijemos en primer lugar un número real positivo $T$ (es decir, el intervalo $\mathbf{T}$ es ahora $[0,T]$), y denotemos por $\mathbf{M}^2(0,T)$ el espacio vectorial de las martingalas $\mathbf{F}_t$-adaptadas que sean continuas por la derecha con límites por la izquierda y de cuadrado integrable (es decir, $\mathbf{E}(M_t^2) < \infty \ \forall t$, pero en virtud de (T.1.3) basta con que $\mathbf{E}(M_T^2) < \infty$). Consideraremos identificadas a dos martingalas de este espacio que verifiquen ser modificación una de la otra.

El espacio $\mathbf{M}^2(0,T)$ se puede dotar de estructura hilbertiana definiendo el siguiente producto escalar

$$(M,N) := \mathbf{E}(M_T.N_T)$$

donde $M, N$ son procesos de $\mathbf{M}^2(0,T)$.

Denotemos por $\mathbf{M}_c^2(0,T)$ el subespacio de $\mathbf{M}^2(0,T)$ formado por las martingalas continuas. Es fácil ver que $\mathbf{M}_c^2(0,T)$ es un subespacio cerrado de $\mathbf{M}^2(0,T)$ y por tanto es un espacio de Hilbert.

Dada $M_t \in \mathbf{M}_c^2(0,T)$, se definen los espacios $L_M^2(0,T;\mathbf{X})$ y $I_M^2(0,T;\mathbf{X})$ como sigue:

$L_M^2(0,T;\mathbf{X})$ es el espacio de los procesos $x_t$ con valores en $\mathbf{X}$, adaptados a $\mathbf{F}_t$, medibles y tales que

$$\int_0^T |x_t|^2 dt < \infty \qquad \mathbf{P} - c.s.$$

$I_M^2(0,T;\mathbf{X})$ es el subespacio de $L_M^2(0,T;\mathbf{X})$ formado por los procesos que verifican

$$\int_0^T \mathbf{E}|x_t|^2 dt < \infty.$$

De modo análogo se definen $L_M^2(0,T;\mathbb{R})$, $I_M^2(0,T;\mathbb{R})$.

Notemos que sería más correcto escribir $\mathbf{F}_t$ como subíndice, en lugar de $M$, pues los procesos están relacionados con $\mathbf{F}_t$ y no directamente con $M$, pero no lo usamos para no confundirnos con el espacio $L^2(\Omega, \mathbf{F}_t, \mathbf{P} : \mathbf{X})$.

De otro lado podemos observar que $I_M^2(0,T;\mathbf{X})$ es un subespacio de Banach de $L^2(\Omega \times (0,T), \mathbf{F} \otimes \mathbf{B}(0,T), d\mathbf{P} \otimes dt; \mathbf{X})$

Nuestro objetivo es definir la integral de un proceso de $L^2_M(0,T;\mathbf{X})$ respecto de una martingala continua $M_t$, nula en el 0, y tal que ${M_t}^2 - t$ sea también una martingala adaptada a $\mathbf{F}_t$, es decir, es un proceso de Wiener (Cf.(T.3.2)). Para llevar a cabo esto, trataremos en primer lugar el caso en que $\mathbf{X} = \mathbb{R}$, para luego deducir el caso general a partir de este.

**Primera etapa:**

Sea $M_t \in \mathbf{M}^2_c(0,T)$ tal que $M_0 = 0$ y $\mathbf{E}^{\mathbf{F}_s}((M_t - M_s)^2) = t - s$. Consideremos $x_t \in I^2_M(0,T;\mathbb{R})$.

Denotamos por $\Lambda(0,T)$ al subespacio de $I^2_M(0,T;\mathbb{R})$ formado por los procesos acotados que sean escalonados, es decir, los $x_t$ que se puedan escribir como

$$x_t(\omega) = x_0(\omega)\mathbf{1}_0(t) + \sum_{i=1}^{n} x_i(\omega)\mathbf{1}_{(t_{i-1},t_i]}(t), \tag{2.1}$$

donde $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$, y $x_0, x_1, ..., x_n$ son variables aleatorias acotadas tales que $x_0$ es $\mathbf{F}_0$-medible, y $x_i$ es $\mathbf{F}_{t_{i-1}}$-medible.

Se verifica que $\Lambda(0,T)$ es denso en $I^2_M(0,T;\mathbb{R})$ considerando como norma la de $L^2(\Omega \times (0,T), \mathbf{F} \otimes \mathbf{B}(0,T), d\mathbf{P} \otimes dt; \mathbb{R})$, lo cual nos va a permitir definir la integral para procesos de $\Lambda(0,T)$ y luego extenderla a procesos de $I^2_M(0,T;\mathbb{R})$.

Dado $x \in \Lambda(0,T)$ escrito como indica (2.1) definimos el proceso $[I(x)]_t$ como sigue:

$$[I(x)]_t = \sum_{i=1}^{n} x_i(M_{t\wedge t_i} - M_{t\wedge t_{i-1}}) \tag{2.2}$$

Se verifica el siguiente

(T.2.1) **Teorema**

*El proceso* $[I(x)]_t$ *definido en* (2.2) *verifica:*

*(i)* $[I(x)]_t \in \mathbf{M}^2_c(0,T)$, *siendo* $[I(x)]_0 = 0$,

*(ii)* $\mathbf{E}([I(x)]_t^2) = \mathbf{E}\int_0^T x_s^2 ds$

*(iii) I es un operador lineal, es decir, dados los procesos $x_t, y_t \in \Lambda(0,T)$, y dados $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ entonces*

$$[I(\alpha x + \beta y)]_t = \alpha[I(x)]_t + \beta[I(y)]_t. \quad \blacksquare$$

En otras palabras, el teorema (T.2.1) nos indica que $I$ es una isometría lineal continua de $\Lambda(0,T)$ en $\mathbf{M}_c^2(0,T)$ (definiendo $\mathbf{E}\int_0^T x_s^2 ds$ como la norma en $\Lambda(0,T)$), y como $\Lambda(0,T)$ es denso en $I_M^2(0,T;\mathbb{R})$ entonces existe una única prolongación de $I$ a todo $I_M^2(0,T;\mathbb{R})$ que va a seguir siendo una isometría lineal, y que seguiremos denotando por $I$.

(D.2.1) **Definición**
"Dados $x_t \in I_M^2(0,T;\mathbb{R})$, $M_t \in \mathbf{M}_c^2(0,T)$, con $M_0 = 0$ y $\mathbf{E}^{\mathbf{F}_s}((M_t - M_s)^2) = t-s$, se define la **integral estocástica** de $x_t$ respecto de $M_t$ como el proceso $[I(x)]_t$ y lo denotaremos por

$$\int_0^t x_s \, dM_s."$$

Con esta notación la parte *(ii)* de (T.2.1) se escribe como:

$$\mathbf{E}\left|\int_0^T x_s \, dM_s\right|^2 = \mathbf{E}\int_0^T |x_s|^2 \, ds, \tag{2.3}$$

expresión que también es válida para $t \leq T$.

A continuación vamos a dar un resultado que nos será de utilidad en la segunda etapa.

(D.2.2) **Definición**
"Se llama **$\mathbf{F}_t$-tiempo de parada** a toda aplicación

$$\tau : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$$

tal que $\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathbf{F}_t \quad \forall t \geq 0.$"

Dado $x_t \in I_M^2(0,T;\mathbb{R})$, denotamos por $y_t$ al proceso $\int_0^t x_s dM_s$ y definimos el proceso parado $y_{t\wedge\tau}$, donde $\tau$ es un $\mathbf{F}_t$-tiempo de parada, como

$$y_{t\wedge\tau} = \int_0^{t\wedge\tau} x_s dM_s,$$

donde

$$y_{t\wedge\tau}(\omega) = \begin{cases} y_t(\omega), & \text{si } t \leq \tau(\omega); \\ y_{\tau(\omega)}(\omega), & \text{si } t > \tau(\omega). \end{cases}$$

Se verifica el siguiente

(T.2.2) **Teorema**

*Dados $x_t, M_t, \tau$ de* (D.2.1) *y* (D.2.2) *precedentes, entonces*

(2.4) $$\int_0^{t\wedge\tau} x_s dM_s = \int_0^t \mathbf{1}_{[s\leq\tau]} x_s dM_s. \quad \blacksquare$$

Este teorema se conoce con el nombre de Teorema de localización (Cf. PRIOURET [35]).

(N.2.1) **Nota**

En el caso en que $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ se define

$$\int_{t_1}^{t_2} x_s dM_s = \int_0^T \mathbf{1}_{[t_1,t_2]} x_s dM_s.$$

**Segunda etapa:**

Sea $M_t$ como en la primera etapa y sea $x_t \in L_M^2(0,T;\mathbb{R})$, entonces $\exists \Omega_1 \subset \Omega$ con $\mathbf{P}(\Omega_1) = 0$, y tal que si $\omega \notin \Omega_1$ es $\int_0^T |x_s|^2 ds < +\infty$. Sea $\alpha > 0$ y definamos el conjunto $\Omega_\alpha$ como sigue

$$\Omega_\alpha = \{\omega \in \Omega : \int_0^T |x_s(\omega)|^2 ds < +\infty\},$$

resultando inmediato que los conjuntos $\Omega_\alpha$ forman una familia creciente y tales que

$$\bigcup_{\alpha>0} \Omega_\alpha = \Omega \setminus \Omega_1.$$

Para cada $\alpha > 0$ definimos $x_t^\alpha$ como

$$x_t^\alpha = \begin{cases} x_t(\omega) & \text{si } \int_0^t |x_s(\omega)|^2 ds \leq \alpha \\ 0 & \text{si } \int_0^t |x_s(\omega)|^2 ds > \alpha. \end{cases}$$

Obviamente $x_t^\alpha \in I_M^2(0,T;\mathbb{R})$ $\forall \alpha$, con lo que tiene sentido $\int_0^t x_s^\alpha dM_s$. Usando (T.2.2) se prueba que existe el límite de $\mathbf{1}_{\Omega_\alpha}(\omega)\left(\int_0^t x_s^\alpha dM_s\right)(\omega)$, siempre que $\omega \notin \Omega_1$ y $\alpha \to +\infty$. Pues bien, a dicho límite lo llamamos $(\int_0^t x_s dM_s)(\omega)$, por lo que ya tenemos definido el proceso $\int_0^t x_s dM_s$, con $x_t \in L_M^2(0,T;\mathbb{R})$.

**Tercera etapa:**

Consideremos $M_t \in \mathbf{M}_c^2(0,T)$ verificando las hipótesis de la primera etapa y sea $x_t \in I_M^2(0,T;\mathbf{X})$, entonces basándonos en la primera etapa y usando una base ortonormal de $\mathbf{X}$ no es difícil probar el siguiente teorema (Cf. REAL [37]):

(T.2.3) **Teorema**

*Dado $x_t \in I_M^2(0,T;\mathbf{X})$, existe un único proceso $N_t \in \mathbf{M}_c^2(0,T;\mathbf{X})$, tal que $\forall t \in [0,T]$ es*

$$(N_t, x) = \int_0^t (x_s, x) dM_s \quad \forall x \in \mathbf{X} \quad \mathbf{P}-c.s.$$

*Dicho proceso $N_t$ recibe el nombre de integral de $x_t$ respecto de $M_t$ y será denotado por $\int_0^t x_s dM_s$, verificándose además:*

*(i)* $\mathbf{E}(\int_0^t x_s dM_s) = 0, \quad \forall t \in [0,T]$

*(ii) La aplicación $x_t \in I_M^2(0,T;\mathbf{X}) \rightarrow \int_0^t x_s dM_s \in \mathbf{M}_c^2(0,T;\mathbf{X})$, es lineal e isométrica, es decir:*

$$\mathbf{E}\left|\int_0^t x_s dM_s\right|^2 = \mathbf{E}\int_0^t |x_s|^2 ds, \quad \forall t \in [0,T]. \quad \blacksquare$$

(N.2.2) **Nota**
La construcción se puede generalizar para $x_t \in L^2_M(0,T;\mathbf{X})$, si bien las propiedades de (T.2.3) ya no serán válidas.

Finalizaremos este apartado enunciando dos resultados que serán de vital importancia en los restantes capítulos:

(T.2.4) **Teorema** (Desigualdad de BURKHÖLDER-GUNDY)
*Sean* $x_t \in I^2_M(0,T;\mathbb{R})$, *y* $M_t \in \mathbf{M}^2_c(0,T)$, *verificando las hipótesis de la primera etapa, entonces*

$$\mathbf{E} \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t x_s dM_s \right| \leq 3\mathbf{E} \left( \int_0^T |x_s|^2 ds \right)^{1/2}. \quad \blacksquare \tag{2.5}$$

(C.2.1) **Corolario**
*Sea* $M_t \in \mathbf{M}^2_c(0,T)$ *verificando las condiciones de* (T.2.4), *y sean los procesos* $x_t, y_t \in I^2_M(0,T;\mathbb{R})$, *tales que* $\mathbf{E}(\sup_{t\in[0,T]} |x_s|^2) < +\infty$. *Entonces* $\int_0^t x_s y_s dM_s$ *es una martingala continua, nula en cero, y por lo tanto, en particular se tiene*

$$\mathbf{E} \int_0^t x_s y_s dM_s = 0, \quad \forall t \in [0,T]. \quad \blacksquare \tag{2.6}$$

# I.3 LA INTEGRAL RESPECTO DE UN WIENER. FÓRMULA DE ITO.

En este apartado vamos a estudiar la integral estocástica de un proceso de un determinado espacio, respecto de un proceso de Wiener. Además enunciaremos el resultado fundamental de la diferenciación estocástica, como es la fórmula de Itô. También abordaremos un teorema de Fubini que nos será de utilidad en nuestro trabajo.

(D.3.1) **Definición**

"Un **proceso de Wiener** normalizado con valores en $\mathbb{R}$, también llamado movimiento browniano, es un proceso $(w_t)_{t\geq 0}$ definido sobre el espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$, que toma valores reales y que verifica:

(i) $w_t$ es continua $\mathbf{P}$-c.s.

(ii) $w_0 = 0$ $\mathbf{P}$-c.s.

(iii) los incrementos de $w_t$ son independientes:

$\forall t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_k$, y $\forall B_1, B_2, ..., B_k \in \mathbf{B}(\mathbb{R})$ se satisface

$$\mathbf{P}[w_{t_i} - w_{t_{i-1}} \in B_i, \quad i = 1, 2, ..., k] = \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}[w_{t_i} - w_{t_{i-1}} \in B_i]$$

(iv) $\forall 0 \leq s \leq t$ es $w_t - w_s \in N(0, t-s)$, es decir, $w_t - w_s$ es una variable aleatoria gaussiana de media 0 y de varianza $t - s$. Más aún,

$$\forall B \in \mathbf{B}(\mathbb{R}), \quad \mathbf{P}[w_t - w_s \in B] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_B e^{\frac{-x^2}{2(t-s)}} dx."$$

(N.3.1) **Nota**

Para la existencia de procesos de Wiener puede consultarse BENSOUSSAN-LIONS [2].

A continuación estudiaremos las propiedades de los procesos de Wiener y luego daremos una caracterización de éstos.

Dado el proceso de Wiener $w_t$, definimos $\mathbf{F}_t^w := \sigma(w_s, s \leq t)$, es decir $\mathbf{F}_t^w$ es la menor $\sigma$-álgebra que hace medible a $w_s, \forall s \leq t$, se suele decir que $\mathbf{F}_t^w$ contiene toda la historia del proceso hasta el instante $t$. Como consecuencia directa de (D.3.1) se verifica el siguiente

(T.3.1) **Teorema**

*Si $w_t$ es un proceso de Wiener normalizado, entonces $w_t \in \mathbf{M}_c^2(0,T)$, $w_t^2 - t$ es una martingala y $w_0 = 0$, cuando se considera como espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{F}_t^w, \mathbf{P})$.* ∎

No obstante, lo más interesante es el recíproco:

(T.3.2) **Teorema** (LEVY-DOOB)

*Sea* $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{F}_t, \mathbf{P})$ *un espacio de probabilidad filtrado y* $M_t \in \mathbf{M}_c^2(0,T)$, $\forall T > 0$, *y tal que* $M_0 = 0$, $M_t^2 - t$ *es una* $\mathbf{F}_t$*-martingala. Entonces* $M_t$ *es un proceso de Wiener normalizado.* ∎

De este modo la integral estocástica que hemos construido en el apartado II.2 es respecto de un Wiener, con lo cual ya tenemos perfectamente definido

$$\int_0^t x_s dw_s$$

donde $x_t \in I_w^2(0,T;\mathbf{X})$, y $w_t$ es un Wiener.

(N.3.2) **Nota**

Cuando no mencionemos respecto de qué colección de $\sigma$-álgebras $\mathbf{F}_t$, es $w_t$ una martingala, consideraremos que nos referimos a $\mathbf{F}_t^w$. En este caso y por comodidad de notación denotaremos por $I^2(0,T;\mathbf{R})$ e $I^2(0,T;\mathbf{X})$, a $I_w^2(0,T;\mathbb{R})$ e $I_w^2(0,T;\mathbf{X})$ respectivamente. Lo mismo haremos con los espacios $L_w^2$.

El siguiente resultado nos resume otras propiedades importantes de los procesos de Wiener:

(T.3.3) **Teorema**

*Sea* $w_t$ *un proceso de Wiener. Se verifican:*

*(i)* $-w_t$ *es un proceso de Wiener.*

*(ii)*$\frac{1}{c} w_{c^2 t}$ *es un proceso de Wiener,* $\forall c > 0$.

*(iii) El proceso* $W_t$ *definido a continuación también es un Wiener:*

$$W_t = \begin{cases} t w_{\frac{1}{t}} & si\ t > 0 \\ 0 & si\ t = 0 \end{cases}$$

*(iv) Se cumple que*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{w_t}{t} = 0 \quad \mathbf{P} - c.s.$$

$$(v) \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{w_t}{\sqrt{2t\log(\log t)}} = 1, \quad \liminf_{t\to\infty} \frac{w_t}{\sqrt{2t\log(\log t)}} = -1, \quad \mathbf{P} - c.s.$$

*(vi)* $\exists N \in \mathbf{F}$ *con* $\mathbf{P}(N) = 0$ *y de tal suerte que* $\forall \omega \notin N$, *la aplicación* $t \in (0,\infty) \longrightarrow w_t(\omega)$ *no es derivable en ningún punto de* $(0,\infty)$ *(es decir, casi todas las trayectorias son de variación no acotada en todo intervalo arbitrariamente pequeño).* ∎

Antes de abordar la Fórmula de Itô, trataremos un teorema de Fubini que nos hará falta usar más adelante.
Sea $G : [0,T] \times [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbf{X}$ una variable aleatoria tal que $\forall t \in [0,T]$ tanto $G(t,.)$ como $G(.,t)$ son $\mathbf{F}_t$-medibles y además se satisface

$$\int_0^T \int_0^T |G(s,t)|\, ds\, dt < +\infty \quad \mathbf{P} - \text{c.s.} \tag{3.1}$$

Entonces están perfectamente definidas las variables aleatorias

$$y_1 = \int_0^T \left( \int_0^T G(s,t)\, ds \right) dw_t, \quad y_2 = \int_0^T \left( \int_0^T G(s,t)\, dw_t \right) ds$$

siendo $w_t$ un Wiener.

(T.3.4) **Teorema** (de FUBINI para integrales estocásticas)
*Bajo las hipótesis precedentes se verifica que* $y_1(\omega) = y_2(\omega)$ $\mathbf{P}$-*c.s.* ∎

Para su demostración puede consultarse CURTAIN-FALB [7].

A continuación introduciremos el concepto de diferencial estocástica.

(D.3.2) **Definición**
"Sea $x_t$ el proceso estocástico con valores en $\mathbf{X}$ dado por

$$x_t = x_0 + \int_0^t q(s)ds + \int_0^t \phi(s)dw_s \tag{3.2}$$

donde $w_t$ es un Wiener real, $\phi \in L^2_w(0,T;\mathbf{X})$ $\forall T \geq 0$ y $q$ es un proceso estocástico con valores en $\mathbf{X}$, $\mathbf{F}_t$-adaptado y tal que $\int_0^T |q(s)|ds < \infty$ $\mathbf{P}-$c.s. $\forall T > 0$. Se dice entonces que la diferencial estocástica de $x$ es $qdt + \phi dw$ y lo denotaremos por $dx = qdt + \phi dw$ o bien $dx_t = q(t)dt + \phi(t)dw_t$."

En PARDOUX [31] se puede encontrar una fórmula de Itô encuadrada en el marco de las integrales estocásticas hilbertianas, y que abarca situaciones bastante generales, siendo válida incluso para martingalas locales. No obstante, para nuestros propósitos nos basta con la fórmula en el caso real, y para el caso de integrales estocásticas con valores en un Hilbert, en un ejemplo muy concreto que ahora vamos a tratar.

**Caso real:**
Sea $u_t = u_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dw_s$, donde $a$ es un proceso con valores reales, $\mathbf{F}_t$-adaptado, y tal que $\int_0^t |a(s)|ds < +\infty$ $\mathbf{P}-$c.s., $b \in L^2_w(0,T;\mathbb{R})$, $u_0$ es $\mathbf{F}_0$-medible con valores en $\mathbb{R}$.

(T.3.5) **Teorema** (Fórmula de ITÔ)
*Bajo las hipótesis precedentes, si* $\Psi \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R};\mathbb{R})$ *entonces*

$$(3.3)\ \Psi(t,u_t) = \Psi(0,u_0) + \int_0^t \left( \frac{\partial \Psi}{\partial s} + a(s)\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2(s)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right)(s,u_s)ds + \int_0^t b(s)\frac{\partial \Psi}{\partial x}(s,u_s)dw_s. \quad \blacksquare$$

Para la demostración puede consultarse BENSOUSSAN-LIONS [2].

**Caso vectorial:**
Sean $V, H$ dos espacios de Hilbert separables tales que $V \hookrightarrow H$, es decir, la inyección de $V$ en $H$ es continua y además densa. Denotaremos por $\|.\|$ la norma de $V$ y por $|.|$ la de $H$, $(.,.)$ será el producto escalar de $H$, y $<.,.>$ la dualidad $V, V'$ (por $V'$ entendemos el dual topológico y algebraico de

$V$). En esta situación, e identificando $H$ con su dual $H'$ se tiene la relación conocida

$$V \hookrightarrow H \simeq H' \hookrightarrow V'.$$

(T.3.6) **Teorema**

*Sean* $u_t \in I^2(0,T;V)$, *con* $u_0 \in L^2(\Omega, \mathbf{F}_0, \mathbf{P}; H)$, $v_t \in I^2(0,T;V')$, $\varphi_t \in I^2(0,T;H)$, *siendo*

$$u_t = u_0 + \int_0^t v_s\, ds + \int_0^t \varphi_s\, dw_s.$$

*Sea* $\Psi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ *un funcional dos veces diferenciable en cada punto que satisface además:*

*(i)* $\Psi, \Psi', \Psi''$ *son localmente acotadas.*

*(ii)* $\Psi, \Psi'$ *son continuas sobre* $H$.

*(iii)* $\forall Q \in L^1(H)$ *(Cf. PARDOUX* [31]*),* $tr(Q \circ \Psi'')$ *es un funcional continuo sobre* $H$.

*(iv) Si* $u \in V$, $\Psi'(u) \in V$ *y entonces la aplicación* $u \longrightarrow \Psi'(u)$ *es continua de* $V$ *(con la topología fuerte) en* $V$ *(con la topología débil).*

*(v)* $\exists k$ *tal que* $\|\Psi'(u)\| \leq k(1 + \|u\|)$, $\forall u \in V$.

*Entonces se verifica:*

$$\Psi(u_t) = \Psi(u_0) + \int_0^t < v_s, \Psi'(u_s) > ds + \tag{3.4}$$
$$+ \int_0^t (\Psi'(u_s), \varphi_s)\, dw_s + \frac{1}{2} \int_0^t (\Psi''(u_s)\varphi_s, \varphi_s)\, ds. \quad \blacksquare$$

Para su demostración puede consultarse PARDOUX [30].

(E.3.1) **Ejemplo**

Dado el proceso $u_t$ de (T.3.6) vamos a calcular la diferencial estocástica del proceso $e^{\lambda t}|u_t|^2$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comenzamos calculando la diferencial de $|u_t|^2$ mediante la aplicación de (T.3.6), con $\Psi(x) = |x|^2$, resultando

$$(3.5) \qquad |u_t|^2 = |u_0|^2 + 2\int_0^t < v_s, u_s > ds + \\ + \int_0^t |\varphi_s|^2 ds + 2\int_0^t (\varphi_s, u_s) dw_s.$$

Llamemos ahora $\xi_t = |u_t|^2$ que es un proceso con valores reales, del cual conocemos su diferencial estocástica.

Consideramos ahora la función $\Psi(t,x) = e^{\lambda t}x$ definida en $[0,T] \times \mathbb{R}$, que obviamente satisface las hipótesis del teorema (T.3.5), entonces aplicando dicho teorema al proceso $\xi_t$ cuya diferencial viene dada en (3.5) se obtiene

$$e^{\lambda t}\xi_t = \xi_0 + \lambda\int_0^t e^{\lambda s}\xi_s ds + \int_0^t e^{\lambda s}|\varphi_s|^2 ds \\ + 2\int_0^t e^{\lambda s} < v_s, u_s > ds + 2\int_0^t e^{\lambda s}(\varphi_s, u_s)\, dw_s$$

y por tanto,

$$(3.6) \qquad e^{\lambda t}|u_t|^2 = |u_0|^2 + \lambda\int_0^t e^{\lambda s}|u_s|^2 ds + \int_0^t e^{\lambda s}|\varphi_s|^2 ds \\ + 2\int_0^t e^{\lambda s} < v_s, u_s > ds + 2\int_0^t e^{\lambda s}(\varphi_s, u_s) dw_s.$$

# CAPÍTULO II

## RELACIÓN ENTRE LAS SOLUCIONES EN SENTIDO FUERTE Y GENERALIZADO DE UN TIPO DE ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS.

### II.0 INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo consideraremos dados, de una vez por todas, dos espacios de Hilbert separables $V, H$ tales que

$$V \hookrightarrow H \simeq H' \hookrightarrow V' \tag{0.1}$$

donde por $\|.\|$ denotaremos la norma de $V$, por $|.|$ la de $H$, por $\|.\|_*$ la de $V'$. El producto escalar de $H$ será $(.,.)$ y la dualidad $V', V$ será $< .,. >$.
Sean los operadores $A \in L(V, V')$, $B \in L(V, H)$ verificándose la hipótesis de coercividad siguiente:

(c1) $\quad \exists \nu \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0 : \ -2 < Ax, x > +\nu |x|^2 \geq \varepsilon \|x\|^2 + |Bx|^2, \quad \forall x \in V$

En el caso particular en que $B \in L(H, H) = L(H)$, bastará con suponer la siguiente hipótesis de coercividad:

(c2) $\quad \exists \nu \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0 : \ -2 < Ax, x > +\nu |x|^2 \geq \varepsilon \|x\|^2, \quad \forall x \in V$

Obviamente $(c1)$ implica $(c2)$.

Consideraremos fijados un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{F}_t, \mathbf{P})$, y un proceso de Wiener real normalizado, $w_t$, satisfaciendo las condiciones del Capítulo I.

En esta situación general, justificaremos la existencia de un único proceso

$$x_t \in I^2(0,T;V) \cap L^2(\Omega; C(0,T:H)), \quad \forall T > 0$$

(donde $L^2(\Omega; C(0,T:H))$, denota el espacio $L^2(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P}; C(0,T:H))$), que es solución de la ecuación diferencial estocástica con retardo variable $\rho$, y dato inicial $\psi$,

$$(P)\begin{cases} x_t = x_0 + \int_0^t Ax_s ds + \int_0^t Bx_{\rho(s)} dw_s & \text{(igualdad en } V') \\ x_t = \psi(t) \quad \text{si} \quad t \in [-h, 0] \end{cases}$$

(las condiciones sobre $\rho$ y $\psi$ se pueden encontrar en los parágrafos y capítulos siguientes).

A esta solución de $(P)$ será la que denominaremos **solución en sentido fuerte** o simplemente **solución fuerte**.

Llamaremos **solución generalizada** ("mild-solution") de $(P)$ al proceso $y_t$ dado por

$$(0.2) \qquad y_t = U_t x_0 + \int_0^t U_{t-s} Bx_{\rho(s)} dw_s \quad \text{(igualdad en } H),$$

siendo $(U_t)_{t \geq 0}$ el semigrupo de operadores generado por $A$ (Cf.(T.1.5)).

El resultado fundamental que demostraremos es el hecho de que $x_t = y_t \ \forall t \in [0,T] \ \ \mathbf{P} -$ c.s., es decir, la solución fuerte de $(P)$ es solución generalizada.

Para llevar a cabo la prueba de este resultado, dedicaremos un primer parágrafo a exponer los resultados fundamentales relacionados con la Teoría de Semigrupos de Operadores, que serán de utilidad en nuestros propósitos.

En segundo lugar probaremos un resultado determinista que nos servirá de base para el siguiente apartado, donde efectuaremos la prueba del antes mencionado aserto.

# II.1 NOCIONES SOBRE SEMIGRUPOS DE OPERADORES

Los resultados que vamos a exponer pueden encontrarse en DAUTRAY-LIONS [11]. También pueden consultarse los trabajos de CURTAIN-PRITCHARD [8], HILLE-PHILLIPS [17].

Hagamos constar que, aunque los resultados los referiremos al espacio de Hilbert $H$, se puede suponer que se trata de un espacio de Banach.

(D.1.1) **Definición**

"Se llama **semigrupo de operadores** de tipo $c_0$ sobre $H$ (o simplemente semigrupo cuando no haya lugar a confunsión), a toda familia de operadores $(U_t)_{t\geq 0} \subset L(H)$, que verifica:

(i) $U_{t_1+t_2} = U_{t_1} \circ U_{t_2} \quad \forall t_1, t_2 \geq 0$

(ii) $U_0 = I$, es decir, $\quad U_0 x = x \quad \forall x \in H$

(iii) $\lim_{t\downarrow 0} U_t x = x \quad \forall x \in H$"

(E.1.1) **Ejemplo**

Si $C \in L(H)$, entonces está perfectamente definido el operador

$$e^{-tC} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n C^n}{n!} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{(-t)^n C^n}{n!} \in L(H).$$

La familia $e^{-tC}$ verifica (i),(ii),(iii). De hecho los semigrupos de operadores generalizan a los operadores exponenciales. Nosotros, sin embargo, vamos a estar interesados en hallar los semigrupos asociados a unos operadores que son no acotados, es decir, no están definidos sobre todo $H$, sino sobre una parte de $H$, llamada dominio de dichos operadores.

(D.1.2) **Definición**

"Sea $(U_t)_{t\geq 0}$ un semigrupo sobre $H$. Se denomina **generador infinitesimal** del semigrupo, al operador lineal $C : D(C) \subset H \longrightarrow H$ dado por

$$Cx := \lim_{t\to 0^+} \frac{U_t x - x}{t} \quad \forall x \in D(C)$$

siendo

$$D(C) := \{x \in H : \exists \lim_{t\to 0^+} \frac{U_t x - x}{t}\}$$

Al conjunto $D(C)$ se le llama **dominio** de $C$, y en general es una parte propia de $H$, en tal caso se dirá que $C$ es un operador **no acotado.**"

(T.1.1) **Teorema**

*Se verifican las siguientes propiedades:*

*(i) $D(C)$ es un subespacio vectorial de $H$.*

*(ii) Si $x \in D(C)$ entonces $U_t x \in D(C), \forall t > 0$.*

*(iii) Si $\varphi : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, es una función continua entonces, $\forall x \in H, \forall t \geq 0$ es*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varphi(s) U_s x ds = \varphi(t) U_t x. \tag{1.1}$$

*(iv) El espacio $D(C)$ es denso en $H$.*

*(v) Si $x \in D(C)$ entonces la función $t \in [0, +\infty) \longrightarrow U_t x \in H$ es una vez continuamente diferenciable y se tiene*

$$\frac{d}{dt}(U_t x) = CU_t x = U_t C x \tag{1.2}$$

*donde por definición*

$$\frac{d}{dt}(U_t x) := \lim_{s\to t} \frac{U_s x - U_t x}{s - t}.$$

*(vi) El operador $C$ es cerrado.* ∎

Para la demostración puede consultarse DAUTRAY-LIONS [11].

(N.1.1) **Nota**

Observemos que $(v)$ significa que el problema siguiente

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Cu(t) \\ u(0) = u_0 \in D(C) \\ u \in C^1([0,+\infty); H) \end{cases}$$

admite como solución a $U_t u_0$.

Hasta ahora hemos visto que dado un semigrupo $U_t$ de tipo $c_0$, existe un operador $C$ (en general no acotado) que es el generador de dicho semigrupo. Nos planteamos a continuación el problema recíproco: "Dado un operador $C$ definido sobre una parte de $H$, ¿cuándo será el generador de un semigrupo de tipo $c_0$?."

En el caso particular en que $C \in L(H)$ entonces $U_t = e^{tC}$ es un semigrupo cuyo generador es $C$.

Abordemos ya el caso general en que $C$ esté definido sobre una parte propia de $H$.

(T.1.2) **Teorema**

*Si $(U_t)_{t\geq 0} \subset L(H)$ es un semigrupo de tipo $c_0$, entonces $\exists M > 0, \omega \in \mathbb{R}$ tales que*

$$|U_t| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0, \tag{1.3}$$

*donde por $|U_t|$ denotamos la norma del operador $U_t$ en el espacio $L(H)$.* ∎

Para la demostración de este teorema y de los tres que a continuación vamos a exponer puede consultarse [11].

(T.1.3) **Teorema**

*Si $C : D(C) \subset H \longrightarrow H$, es el generador de un semigrupo $U_t$, entonces se verifican:*

*(i) El problema*

$$(P) \begin{cases} \textit{Encontrar } u \in D(C), \textit{ verificando}: \\ -Cu + \lambda u = f, \textit{ con } f \in H \textit{ dado} \end{cases}$$

*admite, para $\lambda > \omega$, una solución única dada por*

$$(1.4) \qquad \begin{cases} u = R(\lambda)f, & \textit{donde } R(\lambda) \in L(H), \quad \lambda > \omega, \textit{ verifica} \\ R(\lambda)f = \int_0^{+\infty} U_t f e^{-\lambda t}\, dt \end{cases}$$

*(ii) Para $\lambda > \omega$ se cumple*

$$(1.5) \qquad |R^k(\lambda)| \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^k}, k = 1,2,3,...$$

*donde $R^k(\lambda) = (R(\lambda))^k$, y $M, \omega$, son las constantes que aparecen en la expresión* (1.3). ∎

Se tienen establecidas, pues, las condiciones necesarias para que $C$ sea el generador de un semigrupo. Sin embargo, lo más importante es que esas mismas condiciones son a su vez suficientes:

(T.1.4) **Teorema** (HILLE-YOSIDA)
*La condición necesaria y suficiente para que un operador $C$ cerrado, de dominio $D(C)$ denso en $H$, sea generador infinitesimal de un semigrupo de clase $c_0$ único, es que $\exists \omega \in \mathbb{R}$ tal que*

$$(1.6) \qquad \begin{cases} 1) & \textit{el problema } (P) \textit{ admita solución única para } \lambda > \omega, \\ 2) & \textit{si } u = R(\lambda)f \textit{ es esta solución, entonces se cumple } (1.5) \end{cases}$$

*El semigrupo generado verifica entonces* (1.3). ∎

Estos resultados se aplican para probar el siguiente aserto que será importante en nuestro trabajo.
Sea $A \in L(V, V')$, siendo $-A$ coercivo, es decir, satisface

$$(c2) \qquad \exists \nu \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 : -2 < Ax, x > +\nu|x|^2 \geq \varepsilon\|x\|^2, \quad \forall x \in V$$

y definido sobre $D(A) := \{v \in V : Av \in H\}$, que resulta ser un conjunto denso en $H$, y además $A$ es ahora un operador cerrado de $D(A)$ en $H$.(Cf.[11] pág. 388)

(T.1.5) **Teorema**

*El operador $A$ restringido a $D(A)$ genera un semigrupo $(U_t)_{t\geq 0} \subset L(H)$, de clase $c_0$ que verifica*

$$|U_t| \leq e^{\frac{\nu}{2}t}. \quad \blacksquare$$

# II.2 RELACIÓN ENTRE SOLUCIÓN Y SOLUCIÓN GENERALIZADA: CASO DETERMINISTA.

Nos encuadramos en la situación del parágrafo II.0, es decir, consideramos los espacios $V, H$ con

$$V \hookrightarrow H \simeq H' \hookrightarrow V'$$

y el operador (no acotado) $A \in L(V, V')$, siendo $-A$ coercivo:

$$\text{(c2)} \qquad \exists \nu \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 : -2 < Ax, x > +\nu|x|^2 \geq \varepsilon\|x\|^2, \quad \forall x \in V$$

Llamamos $D(A) = \{v \in V : Av \in H\}$. Según hemos acabado de ver en el parágrafo anterior $D(A)$ es un conjunto denso en $H$, resultando que $A$ genera un semigrupo $U_t$, siendo por tanto un operador cerrado. Es bien conocido el siguiente resultado determinista de LIONS [24]):

(T.2.1) **Teorema**

*Dados $u_0 \in H$, $f \in L^2(0, T; V')$, existe una única solución $u$ de*

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} u \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H) \\ \dfrac{du}{dt} = Au(t) + f(t) \quad \forall t \in [0, T] \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

*o equivalentemente de*

$$\text{(2.2)} \quad u(t) = u_0 + \int_0^t Au(s)\, ds + \int_0^t f(s)\, ds, \ \forall t \in [0, T] \ (\textit{igualdad en } V').$$

$\blacksquare$

Haciendo uso de este teorema vamos a demostrar el siguiente

(T.2.2) **Teorema**

*Sean* $u_0 \in H$, $f \in L^2(0,T;H)$ *(y por tanto* $f \in L^2(0,T;V')$*). La solución de* (2.1) *es igual a* $v(t)$, $\forall t \in [0,T]$, *donde* $v(t)$ *es la solución generalizada de* (2.1), *es decir, viene dada por*

$$v(t) = U_t u_0 + \int_0^t U_{t-s} f(s)\, ds \ \forall t \in [0,T] \tag{2.3}$$

*Si* $u_0 \in D(A)$, *entonces* $v(t)$ *(o* $u(t)$*)*$\in D(A)$, *c.p.d. en* $[0,T]$.

DEMOSTRACIÓN:

La efectuaremos en tres etapas.

Etapa 1:

Supongamos que $u_0 \in D(A)$, y que $f \in C^1(0,T;H)$. Llamemos $u(t)$ a la única solución de (2.1) que pertenece al espacio $L^2(0,T;V) \cap C(0,T;H)$. Se verifica (Cf.[8],pág.157) que $v(t) \in C^1(0,T;H)$, y también es solución de (2.1). Por lo tanto, en particular $v \in C(0,T;H)$, y es solución de (2.1). Si conseguimos probar que $v \in L^2(0,T;V)$, entonces por la unicidad de solución se tendrá que $v \equiv u$ (identidad en $L^2(0,T;V) \cap C(0,T;H)$).

Ahora bien, $v(t) \in V$, $\forall t \in [0,T]$, ya que $U_t u_0 \in D(A)$ ((T.1.1)$(ii)$ de este Capítulo), y $\int_0^t U_{t-s} f(s)\, ds \in D(A)$ (Cf.[8] pág.157). En consecuencia, de la coercividad de $-A$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\|v(t)\|^2 &\leq \frac{\nu}{\varepsilon}|v(t)|^2 + \frac{2}{\varepsilon}|< Av(t), v(t) >| \\
&\leq \frac{\nu}{\varepsilon}|v(t)|^2 + \frac{2}{\varepsilon}\|Av(t)\|_*\|v(t)\| \\
&\leq \frac{\nu}{\varepsilon}|v(t)|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{2}{\varepsilon}\|Av(t)\|_*^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|v(t)\|^2\right)
\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|^2 \leq \frac{\nu}{\varepsilon}|v(t)|^2 + \frac{2}{\varepsilon^2}\|Av(t)\|_*^2 \tag{2.4}$$

Como $v \in C^1(0,T;H)$, entonces $v \in L^2(0,T;H)$. De otro lado, $Av \in C(0,T;V')$, ya que $Av = \dfrac{dv}{dt} - f$ por ser solución de (2.1); y como $v \in C^1(0,T;H)$ y $f \in C^1(0,T;H)$, entonces $Av \in C(0,T;H) \subset C(0,T;V')$, y en consecuencia $Av \in L^2(0,T;V')$. Esto junto con (2.4) implica que $v \in L^2(0,T;V)$.

Además, de lo expuesto anteriormente se deduce que $v(t) \in D(A)$.

Etapa 2:

Supongamos que $u_0 \in D(A)$ y que $f \in L^2(0,T;H)$.

Es bien conocido que $\exists\{f_n\}_n \subset C^1(0,T;H)$ tal que $f_n \longrightarrow f$ en $L^2(0,T;H)$.

Para cada $f_n$ planteamos el problema $(2.1n)$ dado por

$$(2.1n) \qquad \begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} = Au_n + f_n \\ u_n(0) = u_0 \end{cases}$$

Por la Etapa 1, $(2.1n)$ posee solución única $u_n$ en $L^2(0,T;V) \cap C(0,T;H)$, siendo además $u_n(t) = U_t u_0 + \int_0^t U_{t-s} f_n(s)\,ds \in D(A)$. Es decir,

$$(2.5) \qquad u_n(t) = u_0 + \int_0^t Au_n(s)\,ds + \int_0^t f_n(s)\,ds$$

$$(2.6) \qquad u_n(t) = U_t u_0 + \int_0^t U_{t-s} f_n(s)\,ds$$

Probaremos que pasando al límite en (2.5), $u_n$ converge a $u$ en $C(0,T;H)$; y pasando al límite en (2.6) converge a $v$ en $C(0,T;H)$. Como ambos son iguales, entonces $u \equiv v$ en $C(0,T;H)$, y por el razonamiento de la Etapa 1 $u \equiv v$ en $L^2(0,T;V)$.

De $(2.1n)$ y de (2.1) se deduce

$$(u_n - u)(t) = \int_0^t A(u_n - u)(s)\,ds + \int_0^t (f_n - f)(s)\,ds$$

y por tanto

$$|(u_n-u)(t)|^2 = 2\int_0^t < A(u_n-u)(s),(u_n-u)(s) > ds$$
$$+2\int_0^t ((f_n-f)(s),(u_n-u)(s))ds \leq$$

por la coercividad y la desigualdad de HÖLDER

$$\leq 2\left(\int_0^t |(f_n-f)(s)|^2 ds\right)^{1/2}\left(\int_0^t |(u_n-u)(s)|^2 ds\right)^{1/2} +$$
$$+\nu\int_0^t |u_n(s)-u(s)|^2 ds$$
$$\leq (\nu+1)\int_0^t |u_n(s)-u(s)|^2 ds + \int_0^T |f_n(s)-f(s)|^2 ds,$$

y por la desigualdad de GRONWALL,

$$|u_n(t)-u(t)|^2 \leq e^{(\nu+1)t}\int_0^T |f_n(s)-f(s)|^2\, ds,$$

de donde llamando

$$K = \sup_{t\in[0,T]} e^{(\nu+1)t}$$

resulta

$$\sup_{t\in[0,T]} |u_n(t)-u(t)|^2 \leq K\int_0^T |f_n(s)-f(s)|^2\, ds \longrightarrow 0 \text{ para } n\to\infty,$$

por ser $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ (en $L^2(0,T;H)$). Luego efectivamente

$$u_n \longrightarrow u \text{ en } C(0,T;H)$$

De otra parte, $u_n(t)-v(t) = \int_0^t U_{t-s}(f_n(s)-f(s))\, ds$, por lo cual

$$|u_n(t)-v(t)| \leq \int_0^t |U_{t-s}(f_n(s)-f(s))|\, ds \leq \int_0^t |U_{t-s}||f_n(s)-f(s)|\, ds$$

por la desigualdad de HÖLDER

$$\leq \left(\int_0^t |U_{t-s}|^2\, ds\right)^{1/2} \left(\int_0^t |f_n(s) - f(s)|^2\, ds\right)^{1/2}$$

aplicando (T.1.5)

$$\leq \left(\int_0^t e^{\nu(t-s)}\, ds\right)^{1/2} \left(\int_0^T |f_n(s) - f(s)|^2\, ds\right)^{1/2},$$

y llamando

$$k = \sup_{t\in[0,T]} \left(\int_0^t e^{\nu(t-s)}\, ds\right)^{1/2}$$

obtenemos

$$\sup_{t\in[0,T]} |u_n(t) - v(t)| \leq k \left(\int_0^T |f_n(s) - f(s)|^2\, ds\right)^{1/2} \longrightarrow 0, \text{ para } n \to \infty,$$

por la misma razón anterior.

Esto prueba lo deseado. No obstante queda por demostrar que $v(t) \in D(A)$ c.p.d. en $[0,T]$, para lo cual, como $U_t u_0 \in D(A)$, bastará con ver que $\int_0^t U_{t-s} f(s)\, ds \in D(A)$. Esto se deduce inmediatamente del hecho de ser $A$ cerrado con dominio denso en $H$ (Cf. PAZY [33]).

Etapa 3:

Supongamos ya que $u_0 \in H$, $f \in L^2(0,T;H)$. Como $D(A)$ es denso en $H$, entonces podemos tomar una sucesión $\{u_{0n}\}_n \subset D(A)$ tal que $u_{0n} \longrightarrow u_0$ en $H$.

Para cada $n$ planteamos el problema

$$(2.7n) \qquad \begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} = Au_n + f \\ u_n(0) = u_{0n}. \end{cases}$$

Por la Etapa 2, para cada $n$, existe solución única de $(2.7n)$ en el espacio $L^2(0,T;V) \cap C(0,T;H)$ verificándose que si $u_n$ es dicha solución, entonces

$$u_n(t) = U_t u_{0n} + \int_0^t U_{t-s} f(s)\, ds$$

$$u_n(t) = u_{0n} + \int_0^t A u_n(s)\, ds + \int_0^t f(s)\, ds.$$

De modo similar a como lo hemos realizado en la Etapa 2, se prueba que $u_n \longrightarrow u$ y $u_n \longrightarrow v$ ambas convergencias en $C(0,T;H)$, luego $u \equiv v$ en $C(0,T;H)$ (y por tanto en $L^2(0,T;V)$). ∎

# II.3 RELACIÓN ENTRE SOLUCIÓN EN SENTIDO FUERTE Y SOLUCIÓN GENERALIZADA: CASO ESTOCÁSTICO

Sean $V, H, A, B$ los dados en II.0. Vamos a justificar en primer lugar que la ecuación diferencial estocástica con la que vamos a trabajar posee solución fuerte, y luego probaremos que tal solución es solución generalizada.

(T.3.1) **Teorema** (Cf. REAL [37],Teorema 4.2)
*Sean $A \in L(V,V')$, $B \in L(V,H)$ verificando la hipótesis de coercividad* (c1).
*Sea $\rho \in C^1([0,+\infty);\mathbb{R})$ tal que*

$$\inf_{t\in[0,+\infty)} \rho'(t) = \rho > 0,\ \exists h > 0 :\ -h \le \rho(t) \le t,\ \ \forall t \ge 0. \tag{3.1}$$

*Dada $\psi \in I^2(-h,0;V) \cap L^2(\Omega; C(-h,0;H))$, siendo $x_0 = \psi(0)$, se verifica que existe una única $x_t$ solución del problema*

$$\begin{cases} x_t = x_0 + \int_0^t A x_s\, ds + \int_0^t B x_{\rho(s)} dw_s, & t \ge 0 \\ x_t = \psi(t), & t \in [-h,0] \end{cases} \tag{3.2}$$

*que además pertenece al espacio*

$$I^2(-h,T;V) \cap L^2(\Omega; C(-h,T;H)),\ \ \forall T > 0.\ \blacksquare$$

(N.3.1) **Nota**
La hipótesis sobre el dato inicial $\psi$ se puede debilitar para asegurar la existencia de solución de (3.2), es decir, se puede suponer que

$\psi \in L^2(\Omega \times (-h,0), \mathbf{F}_0 \otimes \mathbf{B}(-h,0), d\mathbf{P} \otimes dt; V)$, $\psi(0) \in L^2(\Omega, \mathbf{F}_0, \mathbf{P}; H)$
y en el caso en que $B \in L(H)$,
$\psi \in L^2(\Omega \times (-h,0), \mathbf{F}_0 \otimes \mathbf{B}(-h,0), d\mathbf{P} \otimes dt; H)$, $\psi(0) \in L^2(\Omega, \mathbf{F}_0, \mathbf{P}; H)$,
sólo que en este caso la solución $x_t$ ya no pertenecería al mencionado espacio. También en el caso particular en que $B \in L(H)$ la hipótesis de coercividad $(c1)$ puede sustituirse por $(c2)$

$$(c2) \qquad \exists \nu \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 : -2 < Ax, x > +\nu|x|^2 \geq \varepsilon \|x\|^2, \quad \forall x \in V$$

Antes de abordar el resultado alrededor del cual gira todo este Capítulo, necesitamos dotar a $D(A)$ de una estructura hilbertiana con una norma que no es la del grafo.

(T.3.2) **Teorema**
*Sea $x \in D(A)$ y definamos $|||x|||^2 = \|x\|^2 + |Ax|^2$. Entonces el espacio $D(A)$ con la norma $|||.|||$ es un Hilbert.*

DEMOSTRACIÓN:
Que es prehilbertiano se deduce de la definición de la norma $|||.|||$. Veamos que es completo.
Sea $(v_n)_n \subset D(A)$ sucesión de Cauchy para la norma $|||.|||$, entonces $(v_n)_n$ es de Cauchy en $V$, y $(Av_n)_n$ es de Cauchy en $H$. Como $V, H$ son completos, $\exists v \in V$, $\exists z \in H$ tales que $v_n \longrightarrow v$ en $V$, y $Av_n \longrightarrow z$ en $H$, y por lo tanto $Av_n \longrightarrow z$ en $V'$. Pero como $A \in L(V,V')$, $Av_n \longrightarrow Av$ en $V'$. De esto se deduce que $Av = z \in H$, luego $v \in D(A) = \{x \in V : Ax \in H\}$. En consecuencia, $v_n \longrightarrow v$ en $V$, y $Av_n \longrightarrow Av$ en $H$, lo cual significa que $v_n \longrightarrow v$ en $D(A)$ con la norma $|||.|||$. ∎

(C.3.1) **Corolario**
*Si en $D(A)$ se considera la norma $|||.|||$, se verifica que*

$$I^2(0,T; D(A)) \subset I^2(0,T;V)$$

*con inyección continua pero no densa.* ∎

(T.3.3) **Teorema**

*Dados* $\phi \in I^2(0,T;H)$, $x_0 \in L^2(\Omega,\mathbf{F}_0,\mathbf{P};H)$, *se verifica que la única solución* $x_t$ *del problema*

$$(3.3) \qquad \begin{cases} x_t \in I^2(0,T;V) \cap L^2(\Omega;C(0,T;H)) \\ x_t = x_0 + \int_0^t Ax_s\,ds + \int_0^t \phi(s)dw_s \end{cases}$$

*puede escribirse como*

$$(3.4) \qquad x_t = U_t x_0 + \int_0^t U_{t-s}\phi(s)\,dw_s, \quad \forall t \in [0,T], \quad \mathbf{P}-c.s.,$$

*es decir, es solución generalizada.*
*Si además* $x_0 \in L^2(\Omega,\mathbf{F}_0,\mathbf{P};D(A))$, *entonces*

$$x_t \in D(A) \quad c.p.d.\ en\ \Omega \times [0,T].$$

(N.3.2) **Nota**

Nuestra ecuación encaja en el marco del teorema anterior llamando $\phi(s) = Bx_{\rho(s)}$, que obviamente pertenece al espacio $I^2(0,T;H)$, gracias a (T.3.1).

DEMOSTRACIÓN (de (T.3.3)):
La efectuaremos en dos etapas.
Etapa 1:
Supongamos que $\phi \in I^2(0,T;D(A))$. Llamando $N_t = \int_0^t \phi(s)\,dw_s$, resulta que $N_t \in I^2(0,T;D(A))$. En realidad se verifica que $N_t \in M_c^2(0,T;D(A))$, pero nos basta con lo anterior (Cf. Cap.I (T.2.3)). Por lo tanto, $AN_t \in I^2(0,T;H)$, ya que $A \in L(D(A),H)$ con norma menor o igual que 1, pues $|Ax| \leq |||x|||$, $\forall x \in D(A)$.
En esta situación, es claro que existe un conjunto $\Omega_1 \subset \Omega$ con $\mathbf{P}(\Omega_1) = 0$ y tal que

$$\omega \notin \Omega_1 \Rightarrow \begin{cases} x_0(\omega) \in H \\ AN_.(\omega) \in L^2(0,T;H). \end{cases}$$

Fijemos $\omega \notin \Omega_1$. Por (T.2.2) podemos asegurar que existe un único

$$v_\omega \in L^2(0,T;V) \cap C(0,T;H)$$

que satisface

$$v_\omega(t) = x_0(\omega) + \int_0^t Av_\omega(s)\,ds + \int_0^t AN_s(\omega)\,ds, \ \forall t \in [0,T] \tag{3.5}$$

y que se puede escribir como

$$v_\omega(t) = U_t x_0(\omega) + \int_0^t U_{t-s}AN_s(\omega)\,ds, \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.6}$$

Definamos el proceso $z : [0,T] \times \Omega \longrightarrow V$ dado por $z(t,\omega) = v_\omega(t)$.
Se verifica que el proceso $z_t$ definido anteriormente, es $\mathbf{F}_t$-adaptado con valores en $V$, y continuo con valores en $H$. Es más,

$$z \in I^2(0,T;V) \cap L^2(\Omega; C(0,T;H)). \tag{3.7}$$

Definamos ahora el proceso $x_t$ como sigue

$$x_t(\omega) := z(t,\omega) + N_t(\omega). \tag{3.8}$$

De (3.7) y de las propiedades de $N_t$, se deduce que

$$x_t \in I^2(0,T;V) \cap L^2(\Omega; C(0,T;H))$$

y además, es la única solución de (3.3) (Cf. REAL [37]).
Probemos por último que se satisface (3.4).
Fijado $\omega \notin \Omega_1$, entonces por (3.6) es

$$z(t,\omega) = U_t x_0(\omega) + \int_0^t U_{t-s}AN_s(\omega)\,ds$$

de donde

$$x_t(\omega) = U_t x_0(\omega) + \int_0^t U_{t-s}AN_s(\omega)\,ds + \left(\int_0^t \phi(s)\,dw_s\right)(\omega).$$

Para que (3.4) quede probado restará por ver que

$$(3.9) \qquad \int_0^t U_{t-s}AN_s\,ds + \int_0^t \phi(s)\,dw_s = \int_0^t U_{t-s}\phi(s)\,dw_s, \quad \mathbf{P}-\text{c.s.},$$

o equivalentemente que

$$(3.10) \qquad \int_0^t U_{t-s}AN_s\,ds = \int_0^t (U_{t-s}-I)\phi(s)\,dw_s, \quad \mathbf{P}-\text{c.s.}.$$

Veamos que se verifica (3.10):

$$\int_0^t U_{t-s}AN_s\,ds = \int_0^t U_{t-s}A\left(\int_0^s \phi(\sigma)\,dw_\sigma\right)ds =$$

por el Lema 2.22 de [7] $\Rightarrow$ **P**-c.s.

$$= \int_0^t U_{t-s}\int_0^s A\phi(\sigma)\,dw_\sigma\,ds =$$

por la Proposición 2.17 de [7] $\Rightarrow$ **P**-c.s.

$$= \int_0^t \int_0^s U_{t-s}A\phi(\sigma)\,dw_\sigma\,ds =$$

por (T.3.4) del Cap. I y ser $\phi \in I^2(0,T;D(A)) \Rightarrow$ **P**-c.s.

$$= \int_0^t \left(\int_\sigma^t U_{t-s}A\phi(\sigma)\,ds\right)dw_\sigma =$$

por (T.1.1)*(v)*, y ser $\phi(\sigma) \in D(A) \Rightarrow$ **P**-c.s.

$$= \int_0^t \left(\int_\sigma^t -\frac{d}{ds}(U_{t-s}\phi(\sigma))\,ds\right)dw_\sigma =$$

$$= \int_0^t (U_{t-\sigma}-I)\phi(\sigma)\,dw_\sigma.$$

Queda establecido de este modo (3.10), y finalizada la primera etapa.

<u>Etapa 2</u>:
Sea $\phi \in I^2(0,T;H)$, vamos a aproximar $\phi$ por elementos de $I^2(0,T;D(A))$, a los que aplicaremos la Etapa 1. Como $D(A)$ es denso en $H$, entonces podemos tomar una base hilbertiana de $H$, formada por elementos de $D(A)$. Sea $\{e_k\}_{k\geq 1}$ dicha base.

Denotemos por $\phi^m$ al elemento de $I^2(0,T;D(A))$ dado por

$$(3.11) \qquad \phi^m = \sum_{k=1}^{m}(\phi, e_k)e_k \quad \forall m \geq 1.$$

Se verifica que

$$(3.12) \qquad \phi^m \longrightarrow \phi \quad \text{en} \quad I^2(0,T;H)$$

ya que el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue implica

$$(3.13)\ \mathbf{E}\int_0^T |\phi^m(t)-\phi(t)|^2\,dt = \mathbf{E}\int_0^T \left(|\phi^m(t)|^2 - |\phi(t)|^2\right)dt \to 0, \quad \text{si } m \to \infty$$

Para cada $m \geq 1$, y de acuerdo con la Etapa 1, existe un único $x^m$ tal que

$$(3.14) \qquad x^m \in I^2(0,T;V) \cap L^2(\Omega; C(0,T;H))$$

$$(3.15) \qquad x_t^m = x_0 + \int_0^t Ax_s^m\,ds + \int_0^t \phi^m(s)\,dw_s$$

$$(3.16) \qquad x_t^m = U_t x_0 + \int_0^t U_{t-s}\phi^m(s)\,dw_s$$

La sucesión $x^m$ es de Cauchy en $I^2(0,T;V)$ y en $L^2(\Omega;C(0,T;H))$ (Cf. REAL [37]), por lo que podemos asegurar que

$$\exists x \in I^2(0,T;V) \cap L^2(\Omega;C(0,T;H))$$

tal que $x^m \longrightarrow x$ en ambos espacios.
En consecuencia,

$$(3.17) \qquad Ax^m \longrightarrow Ax \quad \text{en} \quad I^2(0,T;V')$$

y aplicando (3.12) y (3.17) se puede pasar al límite en (3.15) y (3.16) resultando

$$x_t = x_0 + \int_0^t Ax_s\,ds + \int_0^t \phi(s)\,dw_s$$

$$x_t = U_t x_0 + \int_0^t U_{t-s}\phi(s)\,dw_s.$$

En el caso en que $x_0 \in L^2(\Omega, \mathbf{F}_0, \mathbf{P}; D(A))$, no es difícil ver que $x_t(\omega) \in D(A)$ c.p.d. en $\Omega \times [0,T]$. ∎

# CAPÍTULO III

# ESTABILIDAD ASINTÓTICA TRAYECTORIAL DE LA SOLUCIÓN DE UN TIPO DE ECUACIÓN DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA CON RETARDO VARIABLE.

## III.0 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Consideremos fijados los siguientes elementos:

(0.1) $(\Omega, \mathbf{F}, (\mathbf{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ espacio de probabilidad filtrado y completo.

(0.2) $w_t$, proceso de Wiener normalizado con valores en $\mathbb{R}$, $\mathbf{F}_t$-adaptado.

(0.3) $V, H$ espacios de Hilbert reales separables verificando (0.1) del Capítulo II, es decir

$$V \hookrightarrow H \simeq H' \hookrightarrow V',$$

y mantenemos la notación del mismo Capítulo II para las normas, producto escalar y dualidad.

(0.4) $A \in L(V, V')$, $B \in L(V, H)$, $\rho : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando hipótesis adecuadas.

(0.5) $\psi(t, \omega)$ dato inicial.

(Ver parágrafos III.1,III.2 y siguientes para las hipótesis sobre A, B, $\rho$, $\psi$)

Podemos asegurar, utilizando resultados de los capítulos precedentes, la existencia y unicidad de solución del siguiente problema

$$(P)\begin{cases} x_t \in I^2(0,T;V) \cap L^2(\Omega; C(0,T;H)) & \forall T \geq 0 \\ dx_t = Ax_t\,dt + Bx_{\rho(t)}\,dw_t, & t \geq 0 \\ x_t = \psi(t),\ t \in [-h, 0] & \end{cases}$$

En el presente Capítulo vamos a estudiar la estabilidad asintótica de las trayectorias del proceso $x_t$ solución de $(P)$, $\mathbf{P}$-c.s.
El método que vamos a usar para ello, prescinde de la Teoría de Funcionales de Liapunov. En esencia, el método se basa en probar en primer lugar una estimación exponencial para el segundo momento de $x_t$ (es decir, obtendremos estabilidad asintótica exponencial de $\mathbf{E}|x_t|^2$), para luego, a partir de esta estimación y haciendo uso de la Fórmula de ITÔ, deducir el resultado de estabilidad exponencial trayectorial ($\mathbf{P}$-c.s.) de $x_t$.
Este mismo esquema es usado por HAUSSMANN [16] en el caso sin retardo, es decir, cuando $\rho(t) = t$, pero haciendo uso de un funcional de Liapunov construido a partir de un cierto operador $P \in L(H)$, para demostrar la estimación exponencial relativa al segundo momento de $x_t$. De este modo, nuestro método proporciona una demostración más directa que la efectuada en [16] (válida para los casos en que $B \in L(H)$, o $B \in L(V, H)$ y conmuta con $A$, y con unas hipótesis algo más restrictivas en el caso general $B \in L(V, H)$), siendo además cierto el resultado para ecuaciones con retardos.

El estudio lo vamos a desglosar en los siguientes casos:
(i) $B \in L(H)$
(ii) $B \in L(V, H)$ y conmuta con $U_t$ (semigrupo generado por $A$)
(iii) $B \in L(V, H)$.
El motivo de considerar estos tres casos es que tanto en (i) como en (ii), las hipótesis que vamos a realizar, son las mismas que las efectuadas en [16], mientras que en (iii) nos veremos obligados a efectuar una hipótesis algo más restrictiva sobre $B$.

## III.1 ESTABILIDAD CUANDO $B$ PERTENECE A $L(H)$

Comencemos estableciendo las hipótesis adecuadas y necesarias sobre $A$, $B$, $\rho$, $\psi$.

(1.1) $\quad \rho \in C^1(0, +\infty; \mathbb{R}),\ \exists h > 0\ :\ -h \leq \rho(t) \leq t,\ \ \rho'(t) \geq 1\ \ \forall t \geq 0$

Esto implica automáticamente que $\exists \rho^{-1}$ y que además

$$(1.2) \qquad \exists k > 0 \; : \; t \leq \rho^{-1}(t) \leq t + k, \;\; \forall t \geq 0$$

(N.1.1) **Nota**

El caso en que $\rho'(t) \geq \sigma > 0, \;\; \forall t \geq 0$ lo trataremos en el Capítulo IV.

$(A_1)$: $A \in L(V, V')$, con $-A$ coercivo, es decir

$$(c2) \qquad \exists \nu \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 : -2 < Ax, x > +\nu |x|^2 \geq \varepsilon \|x\|^2, \quad \forall x \in V$$

Bajo estas hipótesis es conocido (Cap.II (T.1.5)) que $A$ genera un semigrupo de operadores $\{U_t\}_{t \geq 0} \subset L(H)$, de tipo $c_0$. La siguiente hipótesis exige que $A$, o lo que es lo mismo $U_t$, sea exponencialmente estable:

$$(H_1) \qquad \exists \gamma > 0, \; c > 0 \; : \; |U_t| \leq c e^{-\gamma t} \quad \forall t \geq 0$$

donde por $|.|$ denotamos también la norma de un operador de $L(H)$.

$(B_1)$ $B \in L(H)$

$$(H_2) \qquad \left| \int_0^\infty B^* U_t^* U_t B \, dt \right| < 1,$$

donde

$$\left| \int_0^\infty B^* U_t^* U_t B \, dt \right| = \sup_{x \in H \setminus \{\theta\}} \frac{\int_0^\infty (B^* U_t^* U_t B x, x) \, dt}{|x|^2}$$

$$(1.4) \qquad \begin{cases} \psi \in L^2(\Omega \times (-h, 0), \mathbf{F}_0 \otimes \mathbf{B}([-h, 0]), d\mathbf{P} \otimes dt; H) \\ \psi(0) = x_0 \in L^2(\Omega, \mathbf{F}_0, \mathbf{P}; H). \end{cases}$$

Bajo las hipótesis (1.1),$(A_1)$, $(B_1)$, (1.4), el Teorema (T.3.1) del Capítulo II asegura la existencia y unicidad de solución del problema $(P)$. Añadiendo las hipótesis $(H_1), (H_2)$ vamos a obtener estabilidad exponencial del segundo momento de $x_t$, y luego estabilidad trayectorial.

Un resultado que juega un papel fundamental es (T.3.3) del Capítulo II, que nos va a permitir usar que la solución de $(P)$ (solución fuerte) es solución generalizada.

(T.1.1) **Teorema**

*Bajo las hipótesis* $(1.1), (A_1), (B_1), (H_1), (H_2), (1.4)$, *la solución* $x_t$ *de* $(P)$ *verifica que* $\exists\, \lambda > 0, K > 0$ :

$$\mathbf{E}|x_t|^2 \leq K\|\psi\|_1^2 e^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0, \tag{1.5}$$

*donde* $\|\psi\|_1^2 = \text{máx}\{\mathbf{E}|x_0|^2, \int_{-h}^{0} \mathbf{E}|\psi(s)|^2\, ds\}$.

DEMOSTRACIÓN:

La efectuaremos en dos etapas. En la primera probaremos la existencia de $\lambda > 0,\ K_1 > 0$, tales que

$$\int_0^\infty e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2\, dt \leq K_1\|\psi\|_1^2.$$

En la segunda, haciendo uso de la estimación anterior y de la Fórmula de ITÔ, obtendremos la estimación (1.5).

<u>Etapa 1 :</u>

En virtud de (T.3.3) del Capítulo II, la solución $x_t$ de $(P)$ se puede escribir como

$$\begin{cases} x_t = U_t x_0 + \int_0^t U_{t-s} B x_{\rho(s)}\, dw_s, & t \geq 0 \\ x_t = \psi(t), \quad t \in [-h, 0) \end{cases} \tag{1.6}$$

de donde sigue

$$\begin{aligned} |x_t|^2 = |U_t x_0|^2 &+ \left| \int_0^t U_{t-s} B x_{\rho(s)}\, dw_s \right|^2 \\ &+ 2\left(U_t x_0, \int_0^t U_{t-s} B x_{\rho(s)}\, dw_s\right), \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

y de aquí ,

$$\mathbf{E}|x_t|^2 = \mathbf{E}|U_t x_0|^2 + \int_0^t \mathbf{E}|U_{t-s}Bx_{\rho(s)}|^2\,ds, \quad t \geq 0 \tag{1.8}$$

ya que, por el resultado (T.2.3)*(ii)* del Cap. I se cumple

$$\mathbf{E}\left|\int_0^t U_{t-s}Bx_{\rho(s)}\,dw_s\right|^2 = \int_0^t \mathbf{E}|U_{t-s}Bx_{\rho(s)}|^2\,ds,$$

y de otro lado

$$\mathbf{E}\left(U_t x_0, \int_0^t U_{t-s}Bx_{\rho(s)}\,dw_s\right) = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}^{\mathbf{F}_0}\left(U_t x_0, \int_0^t U_{t-s}Bx_{\rho(s)}\,dw_s\right)\right] =$$

$x_0$ es $\mathbf{F}_0$-medible, $U_t$ es continua $\Rightarrow U_t x_0$ es $\mathbf{F}_0$-medible, y por (T.1.2) Cap. I

$$= \mathbf{E}\left(U_t x_0, \mathbf{E}^{\mathbf{F}_0}\left[\int_0^t U_{t-s}Bx_{\rho(s)}\,dw_s\right]\right) =$$

por (T.2.3) del Capítulo I

$$= \mathbf{E}(U_t x_0, 0) = 0.$$

Tomemos $\lambda > 0$ (por determinar), multipliquemos la ecuación (1.8) por $e^{\lambda t}$ e integremos:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2\,dt &= \int_0^\infty e^{\lambda t}\mathbf{E}|U_t x_0|^2\,dt \\ &+ \int_0^\infty e^{\lambda t}\int_0^t \mathbf{E}|U_{t-s}Bx_{\rho(s)}|^2\,ds\,dt.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Evaluemos cada uno de los sumandos de (1.9).
Por $(H_1)$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{\lambda t}\mathbf{E}|U_t x_0|^2\,dt \leq c^2\int_0^\infty e^{(\lambda-2\gamma)t}\mathbf{E}|x_0|^2\,dt &\leq c^2\|\psi\|_1^2\int_0^\infty e^{(\lambda-2\gamma)t}\,dt \\ &= \frac{c^2}{2\gamma-\lambda}\|\psi\|_1^2,\end{aligned}$$

siempre que $\lambda$ verifique $0 < \lambda < 2\gamma$. Luego para un tal $\lambda$,

$$\int_0^\infty e^{\lambda t}\mathbf{E}|U_t x_0|^2\,dt \le \frac{c^2}{2\gamma-\lambda}\|\psi\|_1^2. \tag{1.10}$$

Para el segundo sumando, aplicando el Teorema de Fubini, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{\lambda t}\int_0^t \mathbf{E}|U_{t-s}Bx_{\rho(s)}|^2 ds dt &= \int_0^\infty \int_s^\infty e^{\lambda t}\mathbf{E}|U_{t-s}Bx_{\rho(s)}|^2 dt ds \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\lambda(t+s)}\mathbf{E}|U_t B x_{\rho(s)}|^2\,dt\,ds \\
&= \int_0^\infty e^{\lambda s}\int_0^\infty e^{\lambda t}\mathbf{E}(U_tBx_{\rho(s)}, U_tBx_{\rho(s)})\,dt\,ds \\
&= \int_0^\infty e^{\lambda s}\int_0^\infty e^{\lambda t}\mathbf{E}(B^*U_t^*U_tBx_{\rho(s)}, x_{\rho(s)})\,dt\,ds \\
&\le \int_0^\infty e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_{\rho(s)}|^2 \left|\int_0^\infty e^{\lambda t}B^*U_t^*U_tB\,dt\right| ds \\
&\le \int_0^\infty e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_{\rho(s)}|^2\,ds \left|\int_0^\infty e^{\lambda t}B^*U_t^*U_tB\,dt\right|.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

De otro lado, efectuando el cambio de variables $u = \rho(s)$ en la integral siguiente, y aplicando (1.1) se sigue:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_{\rho(s)}|^2\,ds &= \int_{\rho(0)}^\infty e^{\lambda\rho^{-1}(u)}\mathbf{E}|x_u|^2\frac{1}{\rho'(\rho^{-1}(u))}\,du \\
&\le \int_{-h}^\infty e^{\lambda u}e^{\lambda k}\mathbf{E}|x_u|^2\,du \\
&= e^{\lambda k}\int_{-h}^0 e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\,ds + e^{\lambda k}\int_0^\infty e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\,ds \\
&\le e^{\lambda k}\|\psi\|_1^2 + e^{\lambda k}\int_0^\infty e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2\,dt
\end{aligned}$$

por (1.9)

$$\begin{aligned}
&\le e^{\lambda k}\|\psi\|_1^2 + e^{\lambda k}\int_0^\infty e^{\lambda t}\mathbf{E}|U_tx_0|^2\,dt + \\
&\qquad + e^{\lambda k}\int_0^\infty e^{\lambda t}\int_0^t \mathbf{E}|U_{t-s}Bx_{\rho(s)}|^2\,ds\,dt
\end{aligned}$$

y tomando $0 < \lambda < 2\gamma$

$$\leq e^{\lambda k}\left(1+\frac{c^2}{2\gamma-\lambda}\right)\|\psi\|_1^2+$$
$$+e^{\lambda k}\int_0^\infty e^{\lambda t}\int_0^t \mathbf{E}|U_{t-s}Bx_{\rho(s)}|^2\,ds\,dt$$

por (1.11)

$$\leq e^{\lambda k}\left(1+\frac{c^2}{2\gamma-\lambda}\right)\|\psi\|_1^2+$$
$$+e^{\lambda k}\left|\int_0^\infty e^{\lambda t}B^*U_t^*U_tBdt\right|\int_0^\infty e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_{\rho(s)}|^2ds,$$

y llamando

$$f(\lambda)=\left|\int_0^\infty e^{\lambda t}B^*U_t^*U_tBdt\right|$$

llegamos a

$$\int_0^\infty e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_{\rho(s)}|^2\,ds\leq e^{\lambda k}\left(1+\frac{c^2}{2\gamma-\lambda}\right)\|\psi\|_1^2+ \tag{1.12}$$
$$+e^{\lambda k}f(\lambda)\int_0^\infty e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_{\rho(s)}|^2ds.$$

Ahora bien, por $(H_2)$ y por la continuidad de las funciones definidas por integrales dependientes de parámetros, es inmediato observar que $\exists\,\lambda>0$ suficientemente pequeño (y además menor que $2\gamma$ ), de tal suerte que

$$e^{\lambda k}f(\lambda)<1,$$

con lo que de (1.12) sigue

$$\int_0^\infty e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_{\rho(s)}|^2\,ds\leq e^{\lambda k}\left(1+\frac{c^2}{2\gamma-\lambda}\right)\frac{1}{1-e^{\lambda k}f(\lambda)}\|\psi\|_1^2, \tag{1.13}$$

y sustituyendo en (1.11)

$$\int_0^\infty e^{\lambda t}\int_0^t \mathbf{E}|U_{t-s}Bx_{\rho(s)}|^2dsdt\leq \frac{\left(1+\frac{c^2}{2\gamma-\lambda}\right)e^{\lambda k}f(\lambda)}{1-e^{\lambda k}f(\lambda)}\|\psi\|_1^2. \tag{1.14}$$

Uniendo (1.10) y (1.14) llegamos a que $\exists\lambda : 0 < \lambda < 2\gamma$, $\exists K_1 > 0$ tal que

$$(1.15) \qquad \int_0^\infty e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2\,dt \le K_1\|\psi\|_1^2.$$

<u>Etapa 2 :</u>

En virtud del ejemplo (E.3.1) del Capítulo I se deduce

$$(1.16)\ e^{\lambda t}|x_t|^2 = |x_0|^2 + \lambda\int_0^t e^{\lambda s}|x_s|^2\,ds + 2\int_0^t e^{\lambda s} < Ax_s, x_s > ds +$$

$$+ \int_0^t e^{\lambda s}|Bx_{\rho(s)}|^2\,ds + 2\int_0^t e^{\lambda s}(Bx_{\rho(s)}, x_s)\,dw_s,$$

tomando Esperanza y aplicando (C.2.1) del Capítulo I al último sumando de (1.16),

$$(1.17)\ e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2 = \mathbf{E}|x_0|^2 + \mathbf{E}\int_0^t e^{\lambda s}(\lambda|x_s|^2 + 2 < Ax_s, x_s > + |Bx_{\rho(s)}|^2)\,ds$$

y aplicando la coercividad ($c2$)

$$(1.18)\quad e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2 \le \|\psi\|_1^2 + (\lambda+\nu)\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2 ds +$$

$$+ |B|^2\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_{\rho(s)}|^2 ds$$

$$\le \|\psi\|_1^2 + (\lambda+\nu)\int_0^\infty e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2 ds +$$

$$+ |B|^2\int_0^\infty e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_{\rho(s)}|^2 ds$$

por las ecuaciones (1.13), (1.15)

$$\le (1+\lambda+\nu)K_1\|\psi\|_1^2 + \frac{\left(1+\frac{c^2}{2\gamma-\lambda}\right)e^{\lambda k}|B|^2 f(\lambda)}{1-e^{\lambda k}f(\lambda)}\|\psi\|_1^2,$$

siendo esto válido $\forall t \ge 0$, luego

$$(1.19) \qquad e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2 \le K\|\psi\|_1^2, \quad \forall t \ge 0,$$

o lo que es igual

$$(1.20) \qquad \mathbf{E}|x_t|^2 \le K\|\psi\|_1^2 e^{-\lambda t}, \quad \forall t \ge 0. \ \blacksquare$$

A continuación demostraremos un Lema, previo al estudio de la estabilidad trayectorial.

(L.1.1) **Lema**

*Si la solución de* $(P), x_t,$ *satisface* (1.5), *entonces* $\exists K_2 \in \mathbf{R}$ *tal que*

$$\mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t<+\infty} |x_t|^2\right] \leq K_2 \|\psi\|_1^2, \tag{1.21}$$

*es decir,* $x_t \in L^2(\Omega; C(0,+\infty; H))$.

DEMOSTRACIÓN:

Por aplicación de la Fórmula de ITÔ al proceso $|x_t|^2$, y utilizando la coercividad $(c2)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} |x_t|^2 &= |x_0|^2 + 2\int_0^t < Ax_s, x_s > ds + \int_0^t |Bx_{\rho(s)}|^2\, ds + \\ &\quad + 2\int_0^t (Bx_{\rho(s)}, x_s)\, dw_s \\ &\leq |x_0|^2 + \nu \int_0^t |x_s|^2\, ds + |B|^2 \int_0^t |x_{\rho(s)}|^2\, ds + \\ &\quad + 2\int_0^t (Bx_{\rho(s)}, x_s)\, dw_s. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Fijemos $T > 0$. Entonces de (1.22) se sigue

$$\begin{aligned} \sup_{0\leq t\leq T} |x_t|^2 &\leq |x_0|^2 + \nu \int_0^T |x_s|^2\, ds + |B|^2 \int_0^T |x_{\rho(s)}|^2\, ds + \\ &\quad + 2 \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t (Bx_{\rho(s)}, x_s)\, dw_s \right|, \end{aligned} \tag{1.23}$$

tomando Esperanza y efectuando el cambio de variables $u = \rho(s)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |x_t|^2\right] &\leq \mathbf{E}|x_0|^2 + \nu \int_0^T \mathbf{E}|x_s|^2 ds + |B|^2 \int_{\rho(0)}^{\rho(T)} \frac{\mathbf{E}|x_u|^2 du}{\rho'(\rho^{-1}(u))} + \\ &\quad + \mathbf{E}\left[2 \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t (Bx_{\rho(s)}, x_s)\, dw_s \right|\right] \end{aligned} \tag{1.24}$$

usando (1.1)

$$\leq \|\psi\|_1^2 + \nu \int_0^T \mathbf{E}|x_s|^2\, ds + |B|^2 \int_{-h}^T \mathbf{E}|x_s|^2\, ds +$$

$$+ \mathbf{E}\left[2 \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t (Bx_{\rho(s)}, x_s)\, dw_s \right|\right]$$

$$\leq (1+|B|^2)\|\psi\|_1^2 + (\nu + |B|^2) \int_0^T \mathbf{E}|x_s|^2\, ds +$$

$$+ \mathbf{E}\left[2 \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t (Bx_{\rho(s)}, x_s)\, dw_s \right|\right].$$

Examinemos los dos últimos sumandos de (1.24):
Por verificarse (1.5),

$$\int_0^T \mathbf{E}|x_s|^2\, ds \leq K\|\psi\|_1^2 \int_0^T e^{-\lambda s}\, ds = \frac{K\|\psi\|_1^2}{\lambda}(1-e^{-\lambda T}) \leq \frac{K}{\lambda}\|\psi\|_1^2, \quad (\forall T \geq 0). \tag{1.25}$$

Por la desigualdad de BURKHÖLDER-GUNDY,

$$2\mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t (Bx_{\rho(s)}, x_s)\, dw_s \right|\right] \leq 6\mathbf{E}\left(\int_0^T |(Bx_{\rho(s)}, x_s)|^2\, ds\right)^{1/2} \tag{1.26}$$

$$\leq 6\mathbf{E}\left[\left(\sup_{0\leq t\leq T} |x_t|^2\right)^{1/2} \left(\int_0^T |Bx_{\rho(s)}|^2\, ds\right)^{1/2}\right]$$

$$= 3\mathbf{E}\left[2\left(\sup_{0\leq t\leq T} |x_t|^2\right)^{1/2} \left(\int_0^T |Bx_{\rho(s)}|^2\, ds\right)^{1/2}\right]$$

y para cualquier $l > 0$,

$$\leq 3\mathbf{E}\left[l \sup_{0\leq t\leq T} |x_t|^2 + \frac{1}{l}\int_0^T |Bx_{\rho(s)}|^2\, ds\right]$$

utilizando de nuevo el cambio de variables y (1.25)

$$\leq 3l\mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |x_t|^2\right] + \frac{3}{l}|B|^2(1+\frac{K}{\lambda})\|\psi\|_1^2,$$

y por tanto (1.24) se convierte en

$$(1.27)\quad \mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|x_t|^2\right] \leq (1+|B|^2)\|\psi\|_1^2 + (\nu+|B|^2)\frac{K}{\lambda}\|\psi\|_1^2 +$$
$$+\frac{3|B|^2}{l}(1+\frac{K}{\lambda})\|\psi\|_1^2 + 3l\mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|x_t|^2\right],$$

tomando $l=\frac{1}{6}$ sigue

$$(1.28)\qquad \mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|x_t|^2\right] \leq K_2\|\psi\|_1^2, \quad \forall T>0,$$

y como $K_2$ es independiente de $T$, entonces

$$\mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t<+\infty}|x_t|^2\right] \leq K_2\|\psi\|_1^2. \quad \blacksquare$$

Establezcamos ya la estabilidad de las trayectorias de la solución del problema $(P)$.

(T.1.2) **Teorema**

*Si $x_t$ es la solución de $(P)$, que además verifica* (1.5) *(lo cual ocurre, por ejemplo, si se satisfacen las hipótesis de* (T.1.1)*), y $-A$ es coercivo (es decir, se satisface* (c2)*), entonces*
$\exists\,\alpha,\beta>0,\ \exists\,\Lambda\subset\Omega,$ *con* $\mathbf{P}(\Lambda)=0,$ *tales que* $\forall\omega\in\Omega\setminus\Lambda\quad \exists\,T(\omega)\in\mathbb{R}:$
$\forall t\geq T(\omega)$ *se tiene*

$$(1.29)\qquad |x_t(\omega)|^2 \leq \alpha\|\psi\|_1^2 e^{-\beta t}.$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea $N_0$ el primer número natural tal que $\rho(N_0)\geq 0$. Por ser $\rho'(t)\geq 1>0$ resulta que $\forall N\geq N_0 \Rightarrow \rho(N)>0$.

Tomemos, pues, $N$ natural con $N \geq N_0$. Aplicando la Fórmula de ITÔ,

$$(1.30) \qquad |x_t|^2 - |x_N|^2 = 2\int_N^t < Ax_s, x_s > ds + \int_N^t |Bx_{\rho(s)}|^2 \, ds + \\ + 2\int_N^t (Bx_{\rho(s)}, x_s) \, dw_s$$

por la coercividad

$$\leq \nu \int_N^t |x_s|^2 \, ds + \int_N^t |Bx_{\rho(s)}|^2 \, ds + \\ + 2\int_N^t (Bx_{\rho(s)}, x_s) \, dw_s, \quad \forall t \geq N,$$

de donde se deduce

$$(1.31) \qquad |x_t|^2 \leq |x_N|^2 + \nu \int_N^t |x_s|^2 \, ds + \int_N^t |Bx_{\rho(s)}|^2 \, ds + \\ + 2\int_N^t (Bx_{\rho(s)}, x_s) \, dw_s.$$

Llamemos $I_N$ al intervalo $[N, N+1]$. Se tiene entonces que dado $\varepsilon_N > 0$ (por determinar) es

$$(1.32) \; \mathbf{P}\left[\sup_{t \in I_N} |x_t| \geq \varepsilon_N\right] = \mathbf{P}\left[\sup_{t \in I_N} |x_t|^2 \geq \varepsilon_N^2\right]$$

en virtud de (1.31)

$$\leq \mathbf{P}\left[|x_N|^2 \geq \frac{\varepsilon_N^2}{4}\right] + \mathbf{P}\left[\nu \int_N^{N+1} |x_s|^2 ds \geq \frac{\varepsilon_N^2}{4}\right] + \\ + \mathbf{P}\left[\int_N^{N+1} |Bx_{\rho(s)}|^2 ds \geq \frac{\varepsilon_N^2}{4}\right] + \\ + \mathbf{P}\left[2 \sup_{t \in I_N} \left|\int_N^t (Bx_{\rho(s)}, x_s) dw_s\right| \geq \frac{\varepsilon_N^2}{4}\right].$$

Evaluando los cuatro últimos sumandos de (1.32) obtenemos:
Por la desigualdad de KOLMOGOROV y por (1.5),

$$(1.33) \qquad \mathbf{P}\left[|x_N|^2 \geq \frac{\varepsilon_N^2}{4}\right] \leq \frac{4}{\varepsilon_N^2} \mathbf{E}|x_N|^2 \leq \frac{4K\|\psi\|_1^2}{\varepsilon_N^2} e^{-\lambda N}.$$

Por las mismas razones anteriores,

$$
\begin{aligned}
(1.34)\quad \mathbf{P}\left[\nu\int_N^{N+1}|x_s|^2ds \geq \frac{\varepsilon_N^2}{4}\right] &= \mathbf{P}\left[\int_N^{N+1}|x_s|^2ds \geq \frac{\varepsilon_N^2}{4\nu}\right] \\
&\leq \frac{4\nu}{\varepsilon_N^2}\int_N^{N+1}\mathbf{E}|x_s|^2ds \\
&\leq \frac{4\nu K\|\psi\|_1^2}{\varepsilon_N^2}\int_N^{N+1}e^{-\lambda s}ds \\
&= \frac{4\nu K\|\psi\|_1^2}{\varepsilon_N^2}\left(\frac{e^{-\lambda N}-e^{-\lambda(N+1)}}{\lambda}\right) \\
&\leq \frac{4\nu K\|\psi\|_1^2}{\lambda\varepsilon_N^2}e^{-\lambda N}.
\end{aligned}
$$

Por la desigualdad de KOLMOGOROV, el cambio de variables $u=\rho(s)$ y (1.5),

$$
\begin{aligned}
(1.35)\,\mathbf{P}\left[\int_N^{N+1}|Bx_{\rho(s)}|^2ds \geq \frac{\varepsilon_N^2}{4}\right] &\leq \frac{4}{\varepsilon_N^2}\int_N^{N+1}\mathbf{E}|Bx_{\rho(s)}|^2ds \\
&= \frac{4}{\varepsilon_N^2}\int_{\rho(N)}^{\rho(N+1)}\frac{\mathbf{E}|Bx_u|^2\,du}{\rho'(\rho^{-1}(u))} \\
&\leq \frac{4|B|^2}{\varepsilon_N^2}\int_{\rho(N)}^{\rho(N+1)}\mathbf{E}|x_u|^2\,du \\
&\leq \frac{4|B|^2K\|\psi\|_1^2}{\varepsilon_N^2}\int_{\rho(N)}^{\rho(N+1)}e^{-\lambda u}\,du \\
&= \frac{4|B|^2K\|\psi\|_1^2}{\varepsilon_N^2}\left(\frac{e^{-\lambda\rho(N)}-e^{-\lambda\rho(N+1)}}{\lambda}\right) \\
&\leq \frac{4|B|^2K\|\psi\|_1^2e^{-\lambda\rho(N)}}{\lambda\varepsilon_N^2}
\end{aligned}
$$

como $\rho'(t)\geq 1 \Rightarrow \rho(t)\geq t-h,\quad \forall t$

$$
\leq \frac{4|B|^2K\|\psi\|_1^2e^{\lambda h}e^{-\lambda N}}{\lambda\varepsilon_N^2}.
$$

Por último,

$$(1.36) \qquad \mathbf{P}\left[2\sup_{t\in I_N}\left|\int_N^t (Bx_{\rho(s)}, x_s)dw_s\right| \geq \frac{\varepsilon_N^2}{4}\right] =$$

$$= \mathbf{P}\left[\sup_{t\in I_N}\left|\int_N^t (Bx_{\rho(s)}, x_s)dw_s\right| \geq \frac{\varepsilon_N^2}{8}\right]$$

por la desigualdad de KOLMOGOROV

$$\leq \frac{8}{\varepsilon_N^2}\mathbf{E}\left[\sup_{t\in I_N}\left|\int_N^t (Bx_{\rho(s)}, x_s)dw_s\right|\right]$$

por la desigualdad de BURKHÖLDER-GUNDY

$$\leq \frac{24}{\varepsilon_N^2}\mathbf{E}\left(\int_N^{N+1} |(Bx_{\rho(s)}, x_s)|^2 ds\right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{24|B|}{\varepsilon_N^2}\mathbf{E}\left(\int_N^{N+1} |x_{\rho(s)}|^2|x_s|^2 ds\right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{24|B|}{\varepsilon_N^2}\mathbf{E}\left[\left(\sup_{s\in I_N}|x_s|^2\right)^{1/2}\left(\int_N^{N+1} |x_{\rho(s)}|^2 ds\right)^{1/2}\right]$$

por la desigualdad de HÖLDER

$$\leq \frac{24|B|}{\varepsilon_N^2}\left(\mathbf{E}\sup_{t\in I_N}|x_t|^2\right)^{1/2}\left(\mathbf{E}\int_N^{N+1} |x_{\rho(s)}|^2 ds\right)^{1/2}$$

por el Lema (L.1.1)

$$\leq \frac{24|B|K_2^{1/2}\|\psi\|_1}{\varepsilon_N^2}\left(\int_N^{N+1} \mathbf{E}|x_{\rho(s)}|^2 ds\right)^{1/2}$$

cambiando de variables en la integral y siguiendo como en (1.35)

$$\leq \frac{24|B|K_2^{1/2}K^{1/2}\|\psi\|_1^2 e^{\frac{\lambda h}{2}}}{\lambda^{1/2}\varepsilon_N^2}e^{\frac{-\lambda N}{2}}.$$

De (1.33), (1.34), (1.35), (1.36) obtenemos

$$(1.37)\,\mathbf{P}\left[\sup_{t\in I_N}|x_t| \geq \varepsilon_N\right] \leq \left(4K + \frac{4|B|^2Ke^{\lambda h}}{\lambda} + \frac{4\nu K}{\lambda}\right)\frac{e^{-\lambda N}}{\varepsilon_N^2}\|\psi\|_1^2 +$$

$$+\frac{24|B|K_2^{1/2}K^{1/2}e^{\lambda h}}{\lambda^{1/2}}\frac{e^{\frac{-\lambda N}{2}}}{\varepsilon_N^2}\|\psi\|_1^2,$$

y tomando para cada $N \geq N_0$, $\varepsilon_N = \|\psi\|_1 e^{\frac{-\lambda N}{8}}$ se sigue

$$\mathbf{P}\left[\sup_{t\in I_N}|x_t| \geq \varepsilon_N\right] \leq Me^{\frac{-\lambda N}{4}}, \tag{1.38}$$

donde $M$ es independiente de $N$.

Por último vamos a aplicar el Lema de Borel-Cantelli para conseguir el resultado deseado.

Dados $N \geq N_0$, $\varepsilon_N = \|\psi\|_1 e^{-\frac{\lambda N}{8}}$ denotamos por

$$A_N = \left\{\omega \in \Omega : \sup_{t\in I_N}|x_t(\omega)| \geq \varepsilon_N\right\}.$$

Por (1.38) se sigue que la serie numérica $\sum_{n=N_0}^{\infty}\mathbf{P}(A_n)$ es convergente, al ser de términos positivos y estar mayorada por $\sum_{n=N_0}^{\infty} Me^{-\frac{\lambda n}{4}}$.

Por el antes mencionado Lema se deduce que

$$\mathbf{P}\left[\limsup_{N\geq N_0} A_N\right] = 0, \tag{1.39}$$

o lo que es igual

$$\mathbf{P}\left[\bigcap_{N\geq N_0}\bigcup_{j=N}^{\infty} A_j\right] = 0. \tag{1.40}$$

LLamemos $\Lambda$ al conjunto

$$\Lambda := \bigcap_{N\geq N_0}\bigcup_{j=N}^{\infty} A_j,$$

con lo inmediatamente se verifica que $\mathbf{P}(\Lambda) = 0$. Sea $\omega \in \Omega \setminus \Lambda$ con lo que $\exists\, N(\omega) \geq N_0$ tal que $\forall j \geq N(\omega)$, es $\omega \notin A_j$, es decir

$$(1.41) \qquad \sup_{t \in I_j} |x_t(\omega)| < \varepsilon_j, \quad \forall j \geq N(\omega),$$

y teniendo en cuenta el valor de $\varepsilon_j$,

$$(1.42) \qquad \sup_{t \in I_j} |x_t(\omega)| < \|\psi\|_1 e^{-\frac{\lambda j}{8}}, \quad \forall j \geq N(\omega).$$

Ahora bien, si $t \in I_j \Rightarrow j \leq t \leq j+1 \Rightarrow -j \leq -(t-1)$, luego (1.42) se convierte en

$$(1.43) \qquad \sup_{j \leq t \leq j+1} |x_t(\omega)| < \|\psi\|_1 e^{-\frac{\lambda}{8}(t-1)}, \quad \forall t \in I_j, \quad \forall j \geq N(\omega),$$

de donde se sigue

$$(1.44) \qquad |x_t(\omega)| < \|\psi\|_1 e^{\frac{\lambda}{8}} e^{-\frac{\lambda t}{8}}, \quad \forall t \in I_j, \quad \forall j \geq N(\omega),$$

y por lo tanto

$$(1.45) \qquad |x_t(\omega)|^2 \leq \alpha \|\psi\|_1^2 e^{-\beta t}, \quad \forall t \geq N(\omega),$$

siendo $\alpha = e^{\frac{\lambda}{4}}$, $\beta = \dfrac{\lambda}{4}$. ∎

(N.1.2) **Nota**
No obstante lo expuesto anteriormente, existe una condición más fuerte que $(H_1)$, $(H_2)$, que junto con la Fórmula de ITÔ implican directamente la estimación (1.5). Dicha condición es

$$(H_{12}) \qquad \exists\, \mu > 0 \,:\, -2 < Ax, x > \geq \mu |x|^2 + |Bx|^2, \quad \forall x \in V.$$

(T.1.3) **Teorema**

*Sea $x_t$ la solución de $(P)$. Si se satisface $(H_{12})$, entonces* $\exists\, \lambda > 0$, $K > 0$ *tales que*

$$\mathbf{E}|x_t|^2 \le K\|\psi\|_1^2 e^{-\lambda t}, \quad \forall t \ge 0. \tag{1.5}$$

DEMOSTRACIÓN:

Tomemos de nuevo $\lambda > 0$ (por determinar). Aplicando la hipótesis $(H_{12})$ y el ejemplo (E.3.1) del Capítulo I:

$$\begin{aligned}(1.46)\ e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2 - \mathbf{E}|x_0|^2 &= \lambda \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\, ds + 2\int_0^t e^{\lambda s} < Ax_s, x_s > ds + \\ &+ \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_{\rho(s)}|^2\, ds \\ &\le (\lambda - \mu)\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\, ds + \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_{\rho(s)}|^2\, ds - \\ &- \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\, ds.\end{aligned}$$

Efectuando el cambio de variables en la integral que contiene el retardo:

$$\begin{aligned}(1.47)\ e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2 &\le \mathbf{E}|x_0|^2 + (\lambda - \mu)\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\, ds + \\ &+ \int_{\rho(0)}^{\rho(t)} \frac{e^{\lambda\rho^{-1}(u)}\mathbf{E}|Bx_u|^2}{\rho'(\rho^{-1}(u))}\, du - \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\, ds \\ &\le \|\psi\|_1^2 + (\lambda - \mu)\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\, ds + \\ &+ \int_{-h}^t e^{\lambda(u+k)}\mathbf{E}|Bx_u|^2\, ds - \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\, ds \\ &\le \|\psi\|_1^2 + \int_{-h}^0 e^{\lambda k}e^{\lambda u}\mathbf{E}|Bx_u|^2\, du + \\ &+ (\lambda - \mu)\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\, ds + (e^{\lambda k} - 1)|B|^2\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\, ds\end{aligned}$$

$$\leq (1 + e^{\lambda k}|B|^2)\|\psi\|_1^2 +$$
$$+ \left[\lambda - \mu + |B|^2(e^{\lambda k} - 1)\right] \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\, ds,$$

y como $\lim\limits_{\lambda \downarrow 0}[\lambda - \mu + |B|^2(e^{\lambda k} - 1)] = -\mu < 0,$ es posible determinar $\lambda > 0$ tal que $\lambda - \mu + |B|^2(e^{\lambda k} - 1) < 0$ con lo que (1.47) se convierte en

$$e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2 \leq (1 + e^{\lambda k}|B|^2)\|\psi\|_1^2, \quad \forall t > 0 \tag{1.48}$$

y por tanto se sigue (1.5). ∎

(N.1.3) **Nota**
Del Teorema (T.1.3) se sigue inmediatamente la conclusión de (T.1.2), y por ello podemos decir que la hipótesis $(H_{12})$ implica la estabilidad asintótica exponencial de las trayectorias del proceso solución de $(P)$, **P**-c.s.

# III.2 ESTABILIDAD CUANDO $B$ PERTENECE A $L(V,H)$

Trataremos en esta sección el problema que ya hemos resuelto en la pregunta precedente, pero suponiendo ahora que $B \in L(V, H)$.
Comenzaremos estableciendo algunas precisiones sobre la notación que utilizaremos.
Denotaremos por $\|B\|$, la norma de un operador de $L(V, H)$ , y $\bar{c}$ será la constante de la inyección $V \hookrightarrow H$ , es decir, se verifica que

$$|x| \leq \bar{c}\|x\|, \quad \forall x \in V. \tag{2.1}$$

Es conocido (Cf. Cap.II, (T.3.1), (N.3.1)) que para asegurar existencia y unicidad de solución del problema $(P)$ hace falta modificar las hipótesis efectuadas sobre $A$ y sobre el dato inicial $\psi$.
Establezcamos, pues, dichas hipótesis.

Para el retardo $\rho$ supondremos que verifica (1.1) y por lo tanto, **también** (1.2).

Para el operador $A$:

$(A_2)$: $\quad A \in L(V,V'), \quad$ con $\quad -A$ coercivo, es decir,

$$(c1) \qquad \exists \nu \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 : -2 < Ax, x > +\nu|x|^2 \geq \varepsilon\|x\|^2 + |Bx|^2, \quad \forall x \in V$$

Para $B$:

$(B_2)$: $\quad B \in L(V,H)$.

Para el dato inicial:

$$(2.2) \qquad \begin{cases} \psi \in L^2(\Omega \times (-h,0), \mathbf{F}_0 \otimes \mathbf{B}(-h,0), d\mathbf{P} \otimes dt; V) \\ \psi(0) = x_0 \in L^2(\Omega, \mathbf{F}_0, \mathbf{P}; H). \end{cases}$$

Para el semigrupo $(U_t)_{t \geq 0}$ generado por $A$, supondremos que se verifica $(H_1)$.

Por último, las hipótesis sobre la pequeñez de $B$ las iremos efectuando conforme las vayamos necesitando (serán $(H_2')$, $(H_2'')$).

(N.2.1) **Nota**

Observemos en primer lugar que si $\nu\bar{c}^2 - \varepsilon < 0$, entonces la estimación $(c1)$ implica la hipótesis $(H_{12})$, ya que

$$\begin{aligned} -2 < Ax, x > &\geq \varepsilon\|x\|^2 - \nu|x|^2 + |Bx|^2 \\ &\geq \left(\frac{\varepsilon}{\bar{c}^2} - \nu\right)|x|^2 + |Bx|^2, \quad \forall x \in V \end{aligned}$$

con lo que basta llamar $\mu = \dfrac{\varepsilon}{\bar{c}^2} - \nu > 0$.

No obstante, en este caso $(H_{12})$ no implica directamente la estimación (1.5), pero haciendo uso de $(c1)$ junto con que $\nu\bar{c}^2 - \varepsilon < 0$, vamos a poder demostrar dicha estimación.

(N.2.2) **Nota**

En este apartado denotaremos por $\|\psi\|_1^2$ a lo siguiente

$$\|\psi\|_1^2 = \text{máx}\left\{\mathbf{E}|x_0|^2, \int_{-h}^{0} \mathbf{E}\|\psi(s)\|^2\, ds\right\}$$

(T.2.1) **Teorema**

*Bajo las hipótesis* (1.1), (2.2), $(B_2)$, $(A_2)$, *donde* (c1) *se verifica con la condición* $\nu\overline{c}^2 - \varepsilon < 0$, $\exists\, \lambda, K > 0$ *tales que la solución* $x_t$ *de* $(P)$ *satisface la estimación* (1.5).

DEMOSTRACIÓN:

Tomemos, como es habitual, $\lambda > 0$ (por determinar). De nuevo por la Fórmula de ITÔ:

$$e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2 = \mathbf{E}|x_0|^2 + \lambda \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\, ds +$$
$$+ 2\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E} < Ax_s, x_s > ds + \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_{\rho(s)}|^2\, ds$$

por la coercividad

$$\leq \mathbf{E}|x_0|^2 + (\lambda + \nu)\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\, ds +$$
$$+ \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_{\rho(s)}|^2\, ds - \varepsilon\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}\|x_s\|^2\, ds -$$
$$- \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\, ds$$
$$\leq \mathbf{E}|x_0|^2 + [(\lambda+\nu)\overline{c}^2 - \varepsilon]\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}\|x_s\|^2\, ds +$$
$$+ \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_{\rho(s)}|^2\, ds - \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\, ds$$

efectuando el cambio de variables

$$\leq \mathbf{E}|x_0|^2 + [(\lambda+\nu)\overline{c}^2 - \varepsilon]\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}\|x_s\|^2\, ds +$$
$$+ \int_{-h}^t e^{\lambda k}e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\, ds - \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\, ds$$
$$\leq \|\psi\|_1^2 + [(\lambda+\nu)\overline{c}^2 - \varepsilon]\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}\|x_s\|^2\, ds +$$
$$+ \int_{-h}^0 e^{\lambda k}e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\, ds + (e^{\lambda k} - 1)\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\, ds$$
$$\leq (1 + e^{\lambda k}\|B\|^2)\|\psi\|_1^2 +$$

$$+\left[(\lambda+\nu)\bar{c}^2-\varepsilon+(e^{\lambda k}-1)\|B\|^2\right]\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}\|x_s\|^2\,ds,$$

y como

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}[(\lambda+\nu)\bar{c}^2-\varepsilon+(e^{\lambda k}-1)\|B\|^2]=\nu\bar{c}^2-\varepsilon<0,$$

es posible tomar $\lambda>0$ suficientemente pequeño para que sea

$$(\lambda+\nu)\bar{c}^2-\varepsilon+(e^{\lambda k}-1)\|B\|^2<0$$

y en ese caso,

$$e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2\leq(1+e^{\lambda k}\|B\|^2)\|\psi\|_1^2,\quad \forall t\geq 0$$

y por lo tanto se verifica (1.5). ∎

A continuación levantaremos la restricción $\nu\bar{c}^2-\varepsilon<0$, lo que nos va a llevar a tener que efectuar hipótesis de "pequeñez" sobre el operador $B$, para poder obtener los resultados de estabilidad buscados. Como paso previo al estudio del caso general, trataremos en primer lugar aquel en que $B$ y $U_t$ conmutan.

(T.2.2) **Teorema**

*Supongamos que se verifican* (1.1), $(A_2)$, $(B_2)$, (2.2), $(H_1)$, $(H_2')$, *donde*

$(H_2')$
$$\left|\int_0^\infty U_t^*B^*BU_t\,dt\right|<1,$$

*además de conmutar $B$ y $U_t$. Entonces $\exists\,\lambda>0, K>0$ tales que $x_t$, solución de $(P)$, satisface* (1.5), *es decir,*

$$\mathbf{E}|x_t|^2\leq K\|\psi\|_1^2e^{-\lambda t},\quad \forall t\geq 0.$$

DEMOSTRACIÓN:

Hagamos constar, en primer lugar, que bajo la hipótesis de coercividad $(c1)$, el operador $U_t$ aplica $H$ en $V$, en el sentido de que

$$\int_0^\infty e^{-2\nu t}\|U_tx\|^2\,dt\leq c_1|x|^2,\quad \forall x\in H\ \text{(Cf.[16], [24])}.$$

En consecuencia tiene perfecto sentido el operador $BU_t$. Que $B$ y $U_t$ conmuten significa que $BU_tx = U_tBx, \quad \forall x \in V$.
Una vez hechas estas precisiones, comenzamos la prueba del Teorema desglosándola en dos etapas.

Etapa 1:

Nuestro objetivo en esta etapa es probar el mismo resultado que en la Etapa 1 de (T.1.1).

Comenzamos tomando $0 < \lambda < 2\gamma$ (por determinar), y escribiendo

$$x_t = U_t x_0 + \int_0^t U_{t-s} B x_{\rho(s)}\, dw_s, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.3}$$

De (2.3) se sigue

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2\, dt = &\int_0^\infty e^{\lambda t}\mathbf{E}|U_t x_0|^2\, dt + \\ &+ \int_0^\infty e^{\lambda t}\int_0^t \mathbf{E}|U_{t-s}Bx_{\rho(s)}|^2\, ds\, dt.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Evaluando los dos sumandos de la derecha de (2.4),

$$\int_0^\infty e^{\lambda t}\mathbf{E}|U_t x_0|^2\, dt \leq \frac{c^2}{2\gamma - \lambda}\|\psi\|_1^2, \text{ por ser } 0 < \lambda < 2\gamma \tag{2.5}$$

(Cf. (T.1.1)).

$$\int_0^\infty e^{\lambda t}\int_0^t \mathbf{E}|U_{t-s}Bx_{\rho(s)}|^2\, ds\, dt = \tag{2.6}$$

por el Teorema de Fubini

$$= \int_0^\infty \int_s^\infty e^{\lambda t}\mathbf{E}|U_{t-s}Bx_{\rho(s)}|^2\, ds\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{\lambda s}\int_0^\infty e^{\lambda t}\mathbf{E}|U_tBx_{\rho(s)}|^2\, ds\, dt$$

por conmutar $U_t$ y $B$

$$= \int_0^\infty e^{\lambda s} \int_0^\infty e^{\lambda t} \mathbf{E}|BU_t x_{\rho(s)}|^2 \, ds \, dt$$
$$= \int_0^\infty e^{\lambda s} \int_0^\infty e^{\lambda t} \mathbf{E}(BU_t x_{\rho(s)}, BU_t x_{\rho(s)}) \, ds \, dt$$
$$= \int_0^\infty e^{\lambda s} \int_0^\infty e^{\lambda t} \mathbf{E}(U_t^* B^* BU_t x_{\rho(s)}, x_{\rho(s)}) \, ds \, dt$$
$$\leq \left| \int_0^\infty e^{\lambda t} U_t^* B^* BU_t \, dt \right| \int_0^\infty e^{\lambda s} \mathbf{E}|x_{\rho(s)}|^2 \, ds.$$

LLamando

$$g(\lambda) = \left| \int_0^\infty e^{\lambda t} U_t^* B^* BU_t \, dt \right|$$

y examinando $\int_0^\infty e^{\lambda s} \mathbf{E}|x_{\rho(s)}|^2 \, ds$ del mismo modo que en (1.12) se obtiene:

$$\text{(2.7)} \qquad \int_0^\infty e^{\lambda s} \mathbf{E}|x_{\rho(s)}|^2 \, ds \leq e^{\lambda k} \left( \overline{c}^2 + \frac{c^2}{2\gamma - \lambda} \right) \|\psi\|_1^2 + \\ + e^{\lambda k} g(\lambda) \int_0^\infty e^{\lambda s} \mathbf{E}|x_{\rho(s)}|^2 \, ds.$$

De (2.7) , usando $(H_2')$ y la continuidad de las funciones definidas a través de integrales dependientes de parámetros se sigue que para $0 < \lambda < 2\gamma$ suficientemente pequeño,

$$\text{(2.8)} \qquad \int_0^\infty e^{\lambda s} \mathbf{E}|x_{\rho(s)}|^2 \, ds \leq e^{\lambda k} \left( \overline{c}^2 + \frac{c^2}{2\gamma - \lambda} \right) \frac{1}{1 - e^{\lambda k} g(\lambda)} \|\psi\|_1^2,$$

con lo que (2.6) se convierte en

$$\text{(2.9)} \quad \int_0^\infty e^{\lambda t} \int_0^t \mathbf{E}|U_{t-s} B x_{\rho(s)}|^2 \, ds \, dt \leq \left( \overline{c}^2 + \frac{c^2}{2\gamma - \lambda} \right) \frac{e^{\lambda k} g(\lambda)}{1 - e^{\lambda k} g(\lambda)} \|\psi\|_1^2.$$

Finalmente, de (2.5) y (2.9) se deduce la existencia de $\lambda > 0$, $K_1 > 0$ tales que

$$\text{(2.10)} \qquad \int_0^\infty e^{\lambda t} \mathbf{E}|x_t|^2 \, dt \leq K_1 \|\psi\|_1^2.$$

Etapa 2 :

Tomemos $\lambda$ que satisfaga las condiciones de la Etapa 1, pero aún por determinar. Vamos a probar que se puede determinar de modo que se obtenga la estimación deseada.

$$(2.11)\, e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2 = \mathbf{E}|x_0|^2 + \lambda \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\, ds + 2\int_0^t e^{\lambda s} < Ax_s, x_s > ds + \\ + \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_{\rho(s)}|^2\, ds$$

por la coercividad (c1)

$$\leq \|\psi\|_1^2 + (\lambda+\nu)\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\, ds + \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_{\rho(s)}|^2\, ds - \\ - \varepsilon \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}\|x_s\|^2\, ds - \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\, ds$$

cambiando de variables en la integral con el retardo

$$\leq \|\psi\|_1^2 + (\lambda+\nu)\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\, ds - \\ - \frac{\varepsilon}{\|B\|^2}\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\, ds + \\ + e^{\lambda k}\int_{-h}^0 e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\, ds + e^{\lambda k}\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\, ds - \\ - \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\, ds$$

$$\leq (1+\|B\|^2 e^{\lambda k})\|\psi\|_1^2 + (\lambda+\nu)\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\, ds + \\ + \left(e^{\lambda k} - 1 - \frac{\varepsilon}{\|B\|^2}\right)\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\, ds$$

y como

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\left(e^{\lambda k} - 1 - \frac{\varepsilon}{\|B\|^2}\right) = -\frac{\varepsilon}{\|B\|^2} < 0,$$

entonces es posible tomar $\lambda > 0$ (eventualmente más pequeño que el de la Etapa 1) tal que $e^{\lambda k} - 1 - \dfrac{\varepsilon}{\|B\|^2} < 0$. Esto junto con (2.10) nos lleva a escribir (2.11) como

$$e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2 \leq (1+\|B\|^2 e^{\lambda k})\|\psi\|_1^2 + (\lambda+\nu)\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\,ds$$
$$\leq (1+\|B\|^2 e^{\lambda k} + K_1(\lambda+\nu))\|\psi\|_1^2, \quad \forall t \geq 0,$$

de donde sigue

$$\mathbf{E}|x_t|^2 \leq K\|\psi\|_1^2 e^{-\lambda t}, \qquad \forall t \geq 0. \quad \blacksquare \tag{2.12}$$

Antes de abordar el problema de la estabilidad en el caso no conmutativo, vamos a probar un lema técnico que nos será de utilidad para esa cuestión.

(L.2.1) **Lema**

*Supongamos que se verifica* (c1). *Sea* $x_t$ *solución del problema* $(P)$. *Entonces, se puede determinar* $\lambda > 0$ *tal que* $(e^{\lambda k}-1)\|B\|^2 - \varepsilon < 0$, *y para ese tal* $\lambda$ *se satisface* $\forall t > 0$

$$\frac{e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2}{\varepsilon-(e^{\lambda k}-1)\|B\|^2} + \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}\|x_s\|^2\,ds \leq \frac{1+e^{\lambda k}\|\psi\|_1^2}{\varepsilon-(e^{\lambda k}-1)\|B\|^2} + \tag{2.13}$$
$$+\frac{\lambda+\nu}{\varepsilon-(e^{\lambda k}-1)\|B\|^2}\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\,ds.$$

DEMOSTRACIÓN:

De modo similar a como acabamos de hacer en (2.11) se deduce que

$$e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2 \leq (1+\|B\|^2 e^{\lambda k})\|\psi\|_1^2 + (\lambda+\nu)\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\,ds + \tag{2.14}$$
$$+ ((e^{\lambda k}-1)\|B\|^2-\varepsilon)\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}\|x_s\|^2\,ds,$$

y como $\lim_{\lambda\downarrow 0}((e^{\lambda k}-1)\|B\|^2-\varepsilon) = -\varepsilon < 0$ entonces para $\lambda$ suficientemente pequeño se verifica $(e^{\lambda k}-1)\|B\|^2-\varepsilon<0$, de donde sigue

$$e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2 + [\varepsilon-(e^{\lambda k}-1)\|B\|^2]\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}\|x_s\|^2\,ds \leq (1+e^{\lambda k}\|B\|^2)\|\psi\|_1^2+$$
$$+(\lambda+\nu)\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\,ds,$$

y por lo tanto se sigue (2.13). ∎

(T.2.3) **Teorema**

*Supongamos que se verifican* (1.1), $(A_2)$, $(B_2)$, (2.2), $(H_1)$ *y*

$$(H_2'') \qquad \left\| \int_0^\infty B^* U_t^* U_t B \, dt \right\|_{L(V,V')} < \frac{\varepsilon}{\nu},$$

*donde*

$$\left\| \int_0^\infty B^* U_t^* U_t B \, dt \right\|_{L(V,V')} := \sup_{x \in V \setminus \{\theta\}} \int_0^\infty \frac{< B^* U_t^* U_t B x, x >}{\|x\|^2} \, dt.$$

*Entonces,* $\exists \lambda > 0$, $K > 0$ *tales que la solución* $x_t$ *de* $(P)$ *satisface*

$$\mathbf{E}|x_t|^2 \leq K \|\psi\|_1^2 e^{-\lambda t}, \quad \forall t > 0.$$

DEMOSTRACIÓN:

Como vamos a utilizar el Lema (L.2.1), tomemos $\lambda > 0$ (por determinar) tal que $\lambda < 2\gamma$ y tal que $(e^{\lambda k} - 1)\|B\|^2 - \varepsilon < 0$.

De modo idéntico a como hemos deducido en otros teoremas anteriores, se tiene

$$(2.15) \qquad \int_0^\infty e^{\lambda t} \mathbf{E}|x_t|^2 \, dt = \int_0^\infty e^{\lambda t} \mathbf{E}|U_t x_0|^2 \, dt + \\ + \int_0^\infty e^{\lambda t} \int_0^t \mathbf{E}|U_{t-s} B x_{\rho(s)}|^2 \, ds \, dt.$$

Del mismo modo, por ser $0 < \lambda < 2\gamma$, se tiene

$$(2.16) \qquad \int_0^\infty e^{\lambda t} \mathbf{E}|U_t x_0|^2 \, dt \leq M_1 \|\psi\|_1^2, \quad \text{donde} \quad M_1 = \frac{c^2}{2\gamma - \lambda}.$$

De otro lado,

$$(2.17) \int_0^\infty e^{\lambda t} \int_0^t \mathbf{E}|U_{t-s} B x_{\rho(s)}|^2 \, ds \, dt = \int_0^\infty e^{\lambda s} \int_0^\infty e^{\lambda t} \mathbf{E}|U_t B x_{\rho(s)}|^2 \, dt \, ds$$

$$= \int_0^\infty e^{\lambda s} \int_0^\infty e^{\lambda t} \mathbf{E}(U_t B x_{\rho(s)}, U_t B x_{\rho(s)})\, dt\, ds$$
$$= \int_0^\infty e^{\lambda s} \int_0^\infty e^{\lambda t} \mathbf{E} < B^* U_t^* U_t B x_{\rho(s)}, x_{\rho(s)} > dt\, ds$$
$$\leq \left\| \int_0^\infty B^* U_t^* U_t B\, dt \right\|_{L(V,V')} \int_0^\infty e^{\lambda s} \mathbf{E} \| x_{\rho(s)} \|^2\, ds.$$

Utilizando el cambio de variables usual,

$$\int_0^\infty e^{\lambda s} \mathbf{E} \| x_{\rho(s)} \|^2\, ds \leq e^{\lambda k} \|\psi\|_1^2 + \int_0^\infty e^{\lambda k} e^{\lambda s} \mathbf{E} \| x_s \|^2\, ds, \tag{2.18}$$

y por (L.2.1),

$$\int_0^\infty e^{\lambda s} \mathbf{E} \| x_{\rho(s)} \|^2\, ds \leq e^{\lambda k} \|\psi\|_1^2 + \frac{e^{\lambda k}(1 + e^{\lambda k})}{\varepsilon - (e^{\lambda k} - 1)\|B\|^2} \|\psi\|_1^2 + \tag{2.19}$$
$$+ \frac{e^{\lambda k}(\lambda + \nu)}{\varepsilon - (e^{\lambda k} - 1)\|B\|^2} \int_0^\infty e^{\lambda s} \mathbf{E} |x_s|^2\, ds,$$

con lo que (2.17) adquiere la forma

$$\int_0^\infty e^{\lambda t} \int_0^t \mathbf{E} |U_{t-s} B x_{\rho(s)}|^2\, ds\, dt \leq M_2 \|\psi\|_1^2 + \tag{2.20}$$
$$+ f(\lambda) \int_0^\infty e^{\lambda t} \int_0^t \mathbf{E} |U_{t-s} B x_{\rho(s)}|^2\, ds\, dt,$$

donde

$$M_2 = e^{\lambda k} \left\| \int_0^\infty e^{\lambda t} B^* U_t^* U_t B\, dt \right\|_{L(V,V')} \left( 1 + \frac{1 + e^{\lambda k} + M_1(\lambda + \nu)}{\varepsilon - (e^{\lambda k} - 1)\|B\|^2} \right)$$

y

$$f(\lambda) = e^{\lambda k} \left\| \int_0^\infty e^{\lambda t} B^* U_t^* U_t B\, dt \right\|_{L(V,V')} \frac{\lambda + \nu}{\varepsilon - (e^{\lambda k} - 1)\|B\|^2}.$$

Como $\lim_{\lambda \downarrow 0} f(\lambda) = \left\| \int_0^\infty B^* U_t^* U_t B\, dt \right\|_{L(V,V')} \frac{\nu}{\varepsilon} < 1$ (Cf. (T.1.1), (T.2.2)), entonces podemos tomar $\lambda$ (eventualmente más pequeño que el encontrado en el (L.2.1) y en la estimación (2.16)) tal que $f(\lambda) < 1$ , y en consecuencia

$$\int_0^\infty e^{\lambda t} \int_0^t \mathbf{E} |U_{t-s} B x_{\rho(s)}|^2\, ds\, dt \leq M_3 \|\psi\|_1^2. \tag{2.21}$$

Por fin, en virtud de (2.16) y (2.21) deducimos

$$(2.22) \qquad \int_0^{\infty} e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2\,dt \le M_4\|\psi\|_1^2, \quad \text{donde} \quad M_4 = M_2 + M_3.$$

Volviendo a aplicar (L.2.1),

$$\frac{e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2}{\varepsilon - (e^{\lambda k}-1)\|B\|^2} \le \frac{1+e^{\lambda k}\|\psi\|_1^2}{\varepsilon - (e^{\lambda k}-1)\|B\|^2} + \\ + \frac{\lambda+\nu}{\varepsilon - (e^{\lambda k}-1)\|B\|^2}\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\,ds,$$

de donde

$$e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2 \le (1+e^{\lambda k})\|\psi\|_1^2 + (\lambda+\nu)\int_0^{\infty} e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\,ds$$

por (2.22)

$$\le (1+e^{\lambda k})\|\psi\|_1^2 + M_4\|\psi\|_1^2 = K\|\psi\|_1^2, \quad \forall t > 0,$$

luego

$$\mathbf{E}|x_t|^2 \le K\|\psi\|_1^2 e^{-\lambda t}, \quad \forall t > 0. \quad \blacksquare$$

A continuación vamos a probar que, bajo las hipótesis de los teoremas (T.2.1), (T.2.2), (T.2.3), se verifican dos estimaciones que intervendrán en el estudio de la estabilidad trayectorial.

(L.2.2) **Lema**

*Bajo las hipótesis de* (T.2.1), (T.2.2) *o* (T.2.3), *se verifican:*

$$(2.23) \qquad \forall \alpha \ge 0 \quad \textit{es} \quad \int_\alpha^t \mathbf{E}|Bx_s|^2\,ds \le K_1\|\psi\|_1^2 e^{-\lambda\alpha}, \ \forall t \ge \alpha,$$

*donde* $K_1$ *es una constante positiva, y* $\lambda$ *es el del correspondiente teorema;*

$$(2.24) \qquad \mathbf{E}\left(\sup_{0\le t<+\infty}|x_t|^2\right) \le K_2\|\psi\|_1^2, \quad \textit{siendo} \quad K_2 > 0.$$

DEMOSTRACIÓN:

La prueba de (2.23) consiste en aplicar la Fórmula de ITÔ (con $\lambda$ el del correspondiente teorema), utilizar la coercividad, y cambiar de variables en las integrales que contengan el retardo.

$$
\begin{aligned}
(2.25)\quad e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2 &\le \mathbf{E}|x_0|^2 + (\lambda+\nu)\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\,ds - \varepsilon\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}\|x_s\|^2\,ds+\\
&\quad + \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_{\rho(s)}|^2\,ds - \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\,ds\\
&\le (1+e^{\lambda k}\|B\|^2)\|\psi\|_1^2 + (\lambda+\nu)\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\,ds+\\
&\quad + (e^{\lambda k}-1)\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\,ds - \varepsilon\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}\|x_s\|^2\,ds.
\end{aligned}
$$

En el caso de (T.2.1), (2.25) se convierte en

$$
\begin{aligned}
(2.26)\quad e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2 &\le (1+e^{\lambda k}\|B\|^2)\|\psi\|_1^2+\\
&\quad + [(\lambda+\nu)\overline{c}^2 - \varepsilon + (e^{\lambda k}-1)\|B\|^2]\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}\|x_s\|^2\,ds
\end{aligned}
$$

y de la elección de $\lambda$

$$
(2.27)\quad \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}\|x_s\|^2\,ds \le \frac{1+e^{\lambda k}\|B\|^2}{(\lambda+\nu)\overline{c}^2 - \varepsilon + (e^{\lambda k}-1)\|B\|^2}\|\psi\|_1^2 = C_1\|\psi\|_1^2,
$$

y por lo tanto

$$
(2.28)\qquad \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\,ds \le \|B\|^2 C_1\|\psi\|_1^2 = C_2\|\psi\|_1^2 \quad \forall t>0.
$$

En consecuencia, dado $0\le\alpha<t$ , se tiene

$$
(2.29)\qquad \int_\alpha^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\,ds \le C_2\|\psi\|_1^2, \quad \forall\alpha\ge0, \quad \forall t\ge\alpha,
$$

o lo que es lo mismo

$$(2.30) \qquad e^{-\lambda\alpha}\int_\alpha^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\,ds \le C_2\|\psi\|_1^2 e^{-\lambda\alpha}, \quad \forall\alpha\ge 0, \quad \forall t\ge\alpha.$$

Pero como $e^{\lambda(s-\alpha)} > 1$ siempre que $\alpha \le s$ , resulta claro que

$$(2.31) \qquad \int_\alpha^t \mathbf{E}|Bx_s|^2\,ds \le \int_\alpha^t e^{\lambda(s-\alpha)}\mathbf{E}|Bx_s|^2\,ds \le C_2\|\psi\|_1^2 e^{-\lambda\alpha}.$$

En los restantes casos, (2.25) se convierte en

$$(2.32) \quad e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2 \le (1+e^{\lambda k}\|B\|^2)\|\psi\|_1^2 + (\lambda+\nu)\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\,ds + \\ + [(e^{\lambda k}-1)\|B\|^2-\varepsilon]\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}\|x_s\|^2\,ds,$$

como $\int_0^\infty e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2\,dt \le \overline{K}\|\psi\|_1^2$ y $\lambda$ es tal que $(e^{\lambda k}-1)\|B\|^2-\varepsilon < 0$, entonces

$$(2.33) \qquad e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2 \le [1+e^{\lambda k}\|B\|^2+(\lambda+\nu)\overline{K}]\|\psi\|_1^2 + \\ + [(e^{\lambda k}-1)\|B\|^2-\varepsilon]\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}\|x_s\|^2\,ds$$

de donde

$$(2.34) \qquad \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}\|x_s\|^2\,ds \le C_3\|\psi\|_1^2$$

que es de nuevo (2.27), y se sigue como antes para llegar a (2.31).
Efectuemos ya la prueba de (2.24). Usando la Igualdad de la Energía (Fórmula de ITÔ para el proceso $|x_t|^2$ ), la coercividad y el cambio de variables usual, se obtiene:

$$(2.35)\ |x_t|^2 = |x_0|^2 + 2\int_0^t < Ax_s, x_s > ds + \int_0^t |Bx_{\rho(s)}|^2\,ds + \\ + 2\int_0^t (Bx_{\rho(s)}, x_s)\,dw_s$$

$$
\begin{aligned}
&\leq |x_0|^2 + \int_{-h}^{0} |Bx_s|^2 ds + \nu \int_0^t \|x_s\|^2 ds + 2\int_0^t (Bx_{\rho(s)}, x_s) dw_s \\
&\leq |x_0|^2 + \|B\|^2 \int_{-h}^{0} \|\psi(s)\|^2\, ds + \nu \int_0^t |x_s|^2\, ds + \\
&\quad + 2\left| \int_0^t (Bx_{\rho(s)}, x_s)\, dw_s \right|
\end{aligned}
$$

de donde se sigue, para $T > 0$ fijo,

$$
\begin{aligned}
\text{(2.36)} \qquad \mathbf{E}\left( \sup_{t\in[0,T]} |x_t|^2 \right) &\leq C_4 \|\psi\|_1^2 + \nu \int_0^T \mathbf{E}|x_s|^2\, ds + \\
&\quad + \mathbf{E}\left( 2 \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t (Bx_{\rho(s)}, x_s)\, dw_s \right| \right)
\end{aligned}
$$

El sumando $\int_0^T \mathbf{E}|x_s|^2\, ds$ se examina como en (1.25) (Cf. (L.1.1)) mientras que el último sumando de (2.36) se hace como (1.26) obteniendo ($\forall l > 0$)

$$
\text{(2.37)} \qquad \int_0^T \mathbf{E}|x_s|^2\, ds \leq \frac{K}{\lambda} \|\psi\|_1^2, \quad \forall T > 0
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(2.38)}\ \mathbf{E}\left[ 2 \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t (Bx_{\rho(s)}, x_s)\, dw_s \right| \right] &\leq 3l\mathbf{E}\left( \sup_{t\in[0,T]} |x_s|^2 \right) + \\
&\quad + \frac{3}{l} \int_0^T \mathbf{E}|Bx_{\rho(s)}|^2\, ds \\
&\leq 3l\mathbf{E}\left( \sup_{t\in[0,T]} |x_s|^2 \right) + \\
&\quad + \frac{3}{l} \int_{-h}^0 \mathbf{E}|Bx_s|^2\, ds + \\
&\quad + \frac{3}{l} \int_0^T \mathbf{E}|Bx_s|^2\, ds
\end{aligned}
$$

por (2.23)

$$\leq 3l\mathbf{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}|x_s|^2\right)+$$
$$+\frac{3}{l}(\|B\|^2+K_1)\|\psi\|_1^2$$
$$\leq\frac{C_5}{l}\|\psi\|_1^2+3l\mathbf{E}\left(\sup_{s\in[0,T]}|x_s|^2\right),$$

y tomando $l=\frac{1}{6}$ resulta de (2.36), (2.37), (2.38)

$$\mathbf{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}|x_t|^2\right)\leq K_2\|\psi\|_1^2, \tag{2.39}$$

donde $K_2$ es independiente de $T$ y por lo tanto se sigue el resultado. ∎

(T.2.4) **Teorema**

*En las situaciones de los teoremas* (T.2.1), (T.2.2), (T.2.3) *se verifica que la solución* $x_t$ *de* $(P)$, *satisface:*

$\exists\,\Lambda\subset\Omega$, $\mathbf{P}(\Lambda)=0$ *tal que si* $\omega\notin\Lambda$ *entonces* $\exists\,T(\omega)\in\mathbb{R}$ *tal que* $\forall t\geq T(\omega)$ *se cumple*

$$|x_t(\omega)|^2\leq K_3\|\psi\|_1^2e^{-\lambda t}, \tag{2.40}$$

*donde* $K_3$ *es independiente de* $\omega$, *y* $\lambda$ *es el del correspondiente teorema.*

DEMOSTRACIÓN:

Al igual que en (T.1.2), llamemos $N_0$ al primer natural tal que $\rho(N_0)\geq 0$. Sean $N\geq N_0$ y $t\geq N$. Entonces

$$(2.41)\;|x_t|^2-|x_N|^2=2\int_N^t <Ax_s,x_s> ds+\int_N^t|Bx_{\rho(s)}|^2\,ds+$$
$$+2\int_N^t(Bx_{\rho(s)},x_s)\,dw_s$$
$$\leq\nu\int_N^t|x_s|^2\,ds-\int_N^t|Bx_s|^2\,ds+\int_{\rho(N)}^{\rho(t)}|Bx_s|^2\,ds+$$

$$
\begin{aligned}
&+2\int_N^t (Bx_{\rho(s)}, x_s)\,dw_s - \varepsilon \int_n^t \|x_s\|^2\,ds \\
\le{}& \nu \int_N^t |x_s|^2\,ds - \int_N^t |Bx_s|^2\,ds + \\
&+ \int_{\rho(N)}^t |Bx_s|^2\,ds + 2\int_N^t (Bx_{\rho(s)}, x_s)\,dw_s \\
={}& \nu \int_N^t |x_s|^2\,ds + \int_{\rho(N)}^N |Bx_s|^2\,ds + \\
&+ 2\int_N^t (Bx_{\rho(s)}, x_s)\,dw_s,
\end{aligned}
$$

de donde,

$$
\begin{aligned}
|x_t|^2 \le |x_N|^2 + \nu \int_N^t |x_s|^2\,ds + \int_{\rho(N)}^N |Bx_s|^2\,ds + \\
+ 2\left|\int_N^t (Bx_{\rho(s)}, x_s)\,dw_s\right|,
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

y llamando $I_N = [N, N+1]$

$$
\begin{aligned}
\sup_{t\in I_N} |x_t|^2 \le |x_N|^2 + \nu \int_N^{N+1} |x_s|^2\,ds + \int_{\rho(N)}^N |Bx_s|^2\,ds + \\
+ 2\left|\int_N^t (Bx_{\rho(s)}, x_s)\,dw_s\right|.
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

En consecuencia, dado $\varepsilon_N > 0$ se verifica que

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left[\sup_{t\in I_N} |x_t| \ge \varepsilon_N\right] = \\
&= \mathbf{P}\left[\sup_{t\in I_N} |x_t|^2 \ge \varepsilon_N^2\right] \\
&\le \mathbf{P}\left[|x_N|^2 \ge \frac{\varepsilon_N^2}{4}\right] + \mathbf{P}\left[\int_N^{N+1} |x_N|^2\,ds \ge \frac{\varepsilon_N^2}{4\nu}\right] + \\
&+ \mathbf{P}\left[\int_{\rho(N)}^N |Bx_N|^2\,ds \ge \frac{\varepsilon_N^2}{4}\right] + \\
&+ \mathbf{P}\left[\sup_{t\in I_N} \left|\int_N^t (Bx_{\rho(s)}, x_s)\,dw_s\right| \ge \frac{\varepsilon_N^2}{8}\right].
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

Los dos primeros sumandos de la derecha de (2.44) son análogos a los de (T.1.2) con lo que se obtiene

$$\mathbf{P}\left[|x_N|^2 \geq \frac{\varepsilon_N^2}{4}\right] \leq \frac{4K}{\varepsilon_N^2}\|\psi\|_1^2 e^{-\lambda N} \tag{2.45}$$

$$\mathbf{P}\left[\int_N^{N+1} |x_N|^2\, ds \geq \frac{\varepsilon_N^2}{4\nu}\right] \leq \frac{4\nu K}{\lambda \varepsilon_N^2}\|\psi\|_1^2 e^{-\lambda N}. \tag{2.46}$$

Para los dos restantes sumandos,

$$\mathbf{P}\left[\int_{\rho(N)}^{N} |Bx_N|^2\, ds \geq \frac{\varepsilon_N^2}{4}\right] \leq \frac{4}{\varepsilon_N^2}\int_{\rho(N)}^{N} \mathbf{E}|Bx_s|^2\, ds \tag{2.47}$$

por (2.23)

$$\leq \frac{4K_1}{\varepsilon_N^2}\|\psi\|_1^2 e^{-\lambda\rho(N)}$$

como en (1.35)

$$\leq \frac{4K_1 e^{\lambda h}}{\varepsilon_N^2}\|\psi\|_1^2 e^{-\lambda N}.$$

$$\mathbf{P}\left[\sup_{t\in I_N}\left|\int_N^t (Bx_{\rho(s)}, x_s)\, dw_s\right| \geq \frac{\varepsilon_N^2}{8}\right] \leq \tag{2.48}$$

$$\leq \frac{8}{\varepsilon_N^2}\mathbf{E}\left[\sup_{t\in I_N}\left|\int_N^t (Bx_{\rho(s)}, x_s)\, dw_s\right|\right]$$

por BURKHÖLDER

$$\leq \frac{24}{\varepsilon_N^2}\mathbf{E}\left[\int_N^{N+1} |(Bx_{\rho(s)}, x_s)|^2\, ds\right]^{1/2}$$

$$\leq \frac{24}{\varepsilon_N^2}\mathbf{E}\left[\int_N^{N+1} |Bx_{\rho(s)}|^2 |x_s|^2\, ds\right]^{1/2}$$

$$\leq \frac{24}{\varepsilon_N^2}\mathbf{E}\left[\left(\sup_{s\in I_N}|x_s|^2\right)^{1/2}\left(\int_N^{N+1} |Bx_{\rho(s)}|^2\, ds\right)^{1/2}\right]$$

por (2.24) y HÖLDER

$$\leq \frac{24K_2^{1/2}}{\varepsilon_N^2}\|\psi\|_1 \left(\int_N^{N+1} \mathbf{E}|Bx_{\rho(s)}|^2\, ds\right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{24K_2^{1/2}}{\varepsilon_N^2}\|\psi\|_1 \left(\int_{\rho(N)}^{N+1} \mathbf{E}|Bx_s|^2\, ds\right)^{1/2}$$

de nuevo por (2.23)

$$\leq \frac{24K_2^{1/2}K_1^{1/2}}{\varepsilon_N^2}\|\psi\|_1^2 e^{-\frac{\lambda\rho(N)}{2}}$$

al igual que en (1.35)

$$\leq \frac{24K_2^{1/2}K_1^{1/2}e^{\frac{\lambda h}{2}}}{\varepsilon_N^2}\|\psi\|_1^2 e^{-\frac{\lambda N}{2}}.$$

En virtud de (2.45) a (2.48), y por el razonamiento de (T.1.2) se sigue (2.40).
∎

# III.3 EJEMPLOS

En este apartado vamos a considerar una serie de ejemplos en los que vamos a llevar a cabo el estudio de la estabilidad trayectorial de la solución del problema $(P)$ mediante la aplicación de los resultados obtenidos en las secciones III.1 y III.2. Supondremos de modo general que la función de retardo $\rho(t)$, satisface la condición (1.1).

(E.3.1) **Ejemplo**

Consideremos como $V$ el espacio de Sobolev $H_0^1(0,\pi;\mathbb{R})$, y como $H$ el espacio $L^2(0,\pi;\mathbb{R})$. Es conocido (Cf. BREZIS [3]) que

$$V \hookrightarrow H \simeq H' \hookrightarrow V',$$

verificándose que $\|\cdot\|_{L^2(0,\pi;\mathbb{R})} \leq \|\cdot\|_{H_0^1(0,\pi;\mathbb{R})}$ es decir, $\overline{c} = 1$. Sin embargo, no es menos cierto que la norma definida sobre $H_0^1(0,\pi;\mathbb{R})$ como

$$\|u\| = \left(\int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right)^{1/2}$$

es equivalente a la norma usual $\|.\|_{H_0^1(0,\pi;\mathbf{R})}$ . Por eso vamos a considerar esta última como la norma en $V$ con la que vamos a trabajar. En este caso, ya $\bar{c} \neq 1$ y vale concretamente $\bar{c} = \dfrac{\pi^2}{2}$ (Cf. [3]).
Denotemos, pues, por $|.|$ la norma usual de $L^2(0,\pi;\mathbb{R})$, y por $\|.\|$ ls norma de $H_0^1(0,\pi;\mathbf{R})$ definida anteriormente. Tomemos como $A = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ y como $B = r_1 I$, donde $I$ es el operador identidad.
Resulta inmediato que $A \in L(V,V')$, $B \in L(H)$.
Estudiaremos cómo ha de ser $r_1$ para que la solución de $(P)$ satisfaga (1.5) y (1.29).
Observemos en primer lugar que

$$< Au, v >= -\int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\,dx, \quad \forall u,v \in V, \tag{3.1}$$

$$|Bu|^2 = r_1^2 \int_0^\pi u^2\,dx = r_1^2 |u|^2, \quad \forall u \in H, \tag{3.2}$$

luego

$$-2 < Au, u >= 2\int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = 2\|u\|^2, \quad \forall u \in V, \tag{3.3}$$

$$|Bu|^2 = r_1^2|u|^2, \quad \forall u \in H, \tag{3.4}$$

de donde, para que se satisfaga en primer lugar la coercividad $(c2)$ es necesario encontrar $\nu$, $\varepsilon$ tales que

$$-2 < Au, u > +\nu|u|^2 \geq \varepsilon\|u\|^2, \quad \forall u \in V$$

o lo que es igual

$$2\|u\|^2 + \nu|u|^2 \geq \varepsilon\|u\|^2, \quad \forall u \in V,$$

lo cual es cierto tomando $\nu = 0$, $\varepsilon \leq 2$, es decir, la coercividad se verifica sin hipótesis adicionales sobre los operadores.

Ahora bien, tomando $r_1$ y $\mu$ tales que $r_1^2 < \frac{4}{\pi^2}$, $0 < \mu \leq \frac{4}{\pi^2} - r_1^2$, se cumple $(H_{12})$ ya que de la elección de $\mu$, $r_1$ se sigue que $(r_1^2+\mu)\frac{\pi^2}{2} \leq 2$, y por tanto $\forall u \in V$

$$|Bu|^2 + \mu|u|^2 = (r_1^2+\mu)|u|^2 \leq (r_1^2+\mu)\frac{\pi^2}{2}\|u\|^2 \leq 2\|u\|^2 = -2 < Au, u > .$$

En definitiva, tomando $r_1$ con $r_1^2 < \frac{4}{\pi^2}$ se cumple el Teorema (T.1.3) y por tanto se tiene (1.29).
Analicemos si es posible encontrar valores admisibles para $r_1$, que verificando $r_1^2 \geq \frac{4}{\pi^2}$ también impliquen (1.29).
Para ello tendremos que recurrir a utilizar (T.1.1), y entonces necesitaremos computar $(H_1)$, $(H_2)$.
En primer lugar, dada la forma que tiene el operador $A$, el semigrupo $U_t$ que genera satisface $(H_1)$ con $\gamma = c = 1$, puesto que es cierto lo siguiente: "Dado $u_0 \in H$, $U_t u_0(x) := u(t,x)$ es la solución del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = Au = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases}$$

siendo además $|u(t,.)|_H \leq e^{-t}|u_0(.)|_H$ (Cf. WEINBERGER [41])," o lo que es lo mismo, $|U_t u_0| \leq e^{-t}|u_0|$, lo que implica que $|U_t| \leq e^{-t}$.
De otra parte,

$$\left|\int_0^\infty B^* U_t^* U_t B\, dt\right| \leq |B|^2 \int_0^\infty |U_t|^2\, dt \leq r_1^2 \int_0^\infty e^{-2t}\, dt = \frac{r_1^2}{2},$$

luego si $r_1^2 < 2$ es cierta $(H_2)$ y en ese caso se tienen (1.5) y (1.29).
En conclusión, como $\frac{4}{\pi^2} < 2$, resulta que dado $r_1 \in (-2, 2)$ se puede garantizar estabilidad trayectorial de la solución de $(P)$, $\mathbf{P}$-c.s..

(N.3.1) **Nota**

En el ejemplo precedente, se puede considerar que $r_1$ en lugar de ser una constante, sea una función de $L^\infty(0,\pi;\mathbb{R})$, continuando siendo ciertos los resultados, pero bajo las condiciones

$$\|r_1\|^2_{L^\infty(0,\pi;\mathbb{R})} < \frac{4}{\pi^2}\,, \quad \text{o}\,, \quad \|r_1\|^2_{L^\infty(0,\pi;\mathbb{R})} < 2$$

según convenga.

(E.3.2) **Ejemplo**

Tomemos $V$ y $H$ como en (E.3.1), $A = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, $B = r_1\dfrac{\partial}{\partial x}$, con lo que se tendrá $A \in L(V,V')$, $B \in L(V,H)$ $\forall r_1 \in \mathbb{R}$.

Se verifica que $|Bu|^2 = r_1^2 \displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = r_1^2\|u\|^2$, $\forall u \in V$, con lo que para que la coercividad (cl) se tenga bastará con encontrar $\nu$ y $\varepsilon$ tales que

$$2\|u\|^2 + \nu|u|^2 \geq \varepsilon\|u\|^2 + r_1^2\|u\|^2, \quad \forall u \in V$$

y esto es cierto sin más que tomar $\nu = 0$, $r_1^2 < 2$ y $\varepsilon = 2 - r_1^2$.

Además, con esta elección de datos, son ciertas las hipótesis de (T.2.1) ya que $\nu\bar{c}^2 - \varepsilon < 0$, lo que implica el resultado (T.2.4) de estabilidad trayectorial. Al igual que en el ejemplo anterior, puede considerarse $r_1 \in L^\infty(0,\pi;\mathbb{R})$ y (T.2.4) será cierto si $\|r_1\|^2_{L^\infty(0,\pi;\mathbb{R})} < 2$.

(E.3.3) **Ejemplo**

Sean $V$, $H$, $B$ como en (E.3.2) y $A = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + r_0\dfrac{\partial}{\partial x}$, $r_0 \in \mathbb{R}$.

Claramente $A \in L(V,V')$ y como $\displaystyle\int_0^\pi u\frac{\partial u}{\partial x}\,dx = 0$, $\forall u \in H_0^1(0,\pi;\mathbb{R})$, entonces

$$-< Au, u >= \int_0^\pi \left[\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]^2 - r_0\frac{\partial u}{\partial x}u\right] dx = \int_0^\pi \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]^2 dx = \|u\|^2, \forall u \in V.$$

Por lo tanto, tomando $r_1$, $\nu$, $\varepsilon$ como en (E.3.2), y $r_0$ cualquiera, se verifican (T.2.1) y (T.2.4).

(E.3.4) **Ejemplo**

Sean $V$, $H$, $A$ como en (E.3.2), y $B = r_1 \dfrac{\partial}{\partial x} + r_2$.

Ya conocemos que $-< Au, u >= \|u\|^2, \quad \forall u \in V$.

De otro lado,

$$(3.5)\ |Bu|^2 = \int_0^\pi \left( r_1 \frac{\partial u}{\partial x} + r_2 u \right)^2 dx = \int_0^\pi \left[ r_1^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + r_2^2 u^2 \right] dx =$$
$$= r_1^2 \|u\|^2 + r_2^2 |u|^2.$$

Por lo tanto, para que se verifique la hipótesis de coercividad (cl) habrá de ser

$$2\|u\|^2 + \nu |u|^2 \geq \varepsilon \|u\|^2 + r_1^2 \|u\|^2 + r_2^2 |u|^2,$$

cosa que será cierta si se toman $r_1^2 < 2$, $\varepsilon = 2 - r_1^2$ y $\nu = r_2^2$.

Para obtener (2.40) mediante (T.2.1) necesitamos que $\nu \bar{c}^2 - \varepsilon < 0$, es decir, $r_2^2 \dfrac{\pi^2}{2} - (2 - r_1^2) < 0 \Rightarrow r_2^2 \dfrac{\pi^2}{2} < 2 - r_1^2 \Rightarrow r_2^2 < \dfrac{2}{\pi^2}(2 - r_1^2)$, luego una vez fijado $r_1^2 < 2$, tomando $r_2$ tal que $r_2^2 < \dfrac{2}{\pi^2}(2 - r_1^2)$, se satisface (T.2.1) y por tanto (2.40).

Examinemos ahora si podemos obtener (2.40) para algún valor de $r_2$ tal que $r_2^2 > \dfrac{2}{\pi^2}(2 - r_1^2)$ , lo cual si fuese posible tendría que serlo a través de (T.2.3).

Para ello, como $(H_1)$ se verifica con $\gamma = c = 1$ , bastará con comprobar $(H_2'')$. Ahora bien,

$$\left\| \int_0^\infty B^* U_t^* U_t B \, dt \right\| \leq \frac{\|B\|^2}{2} ,$$

y para que se satisfaga $(H_2'')$ será suficiente que $\dfrac{\|B\|^2}{2} \leq \dfrac{\varepsilon}{\nu}$ , y como $\|B\|^2 \leq r_1^2 + r_2^2 \dfrac{\pi^2}{2}$ (Ver (3.5)), bastará con que $r_1^2 + r_2^2 \dfrac{\pi^2}{2} < \dfrac{2\varepsilon}{\nu}$ , o lo que es igual $r_1^2 + r_2^2 \dfrac{\pi^2}{2} < \dfrac{2(2 - r_1^2)}{r_2^2}$ .

Fijado $r_1$ con $r_1^2 < 2$ , si tomamos $r_2$ tal que $r_1^2 + r_2^2\frac{\pi^2}{2} < \frac{2(2-r_1^2)}{r_2^2}$ , entonces se satisfará (T.2.3) y en consecuencia (2.40).

Analicemos un poco más cómo ha de ser $r_2$ :

$$r_1^2 + r_2^2\frac{\pi^2}{2} < \frac{2(2-r_1^2)}{r_2^2} \Rightarrow r_2^2\left(r_1^2 + r_2^2\frac{\pi^2}{2}\right) < 2(2-r_1^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{2}r_2^4 + r_1^2 r_2^2 - (4-2r_1^2) < 0,$$

luego tendrá que ser $s_1 \leq r_2^2 \leq s_2$ donde $s_1, s_2$ son las raíces de la ecuación $\frac{\pi^2}{2}s^2 + r_1^2 s^2 - (4-2r_1^2) = 0$ , cuyos valores son exactamente

$$s_1 = \frac{-r_1^2 - \sqrt{r_1^4 + 2\pi^2(4-2\pi^2)}}{\pi^2} < 0$$

$$s_2 = \frac{-r_1^2 + \sqrt{r_1^4 + 2\pi^2(4-2\pi^2)}}{\pi^2} > 0,$$

pero como $r_2^2 \geq 0$ habrá de ser $0 \leq r_2^2 \leq \frac{-r_1^2 + \sqrt{r_1^4 + 2\pi^2(4-2\pi^2)}}{\pi^2}$ y por simple comprobación se deduce que

$$\frac{-r_1^2 + \sqrt{r_1^4 + 2\pi^2(4-2\pi^2)}}{\pi^2} > \frac{2}{\pi^2}(2-r_1^2) ,$$

con lo que, en efecto, existen valores admisibles para $r_2^2$ , mayores que $\frac{2}{\pi^2}(2-r_1^2)$ y que hacen válida la estimación (2.40).

(N.3.2) **Nota**

En el ejemplo anterior, se puede considerar que $r_1, r_2$ sean funciones de $L^\infty(0,\pi;\mathbb{R})$ , y llamando $r_1 := \|r_1(.)\|_{L^\infty(0,\pi;\mathbb{R})}$, $r_2 := \|r_2(.)\|_{L^\infty(0,\pi;\mathbb{R})}$ , se obtienen expresiones análogas a las obtenidas en dicho ejemplo. No serán las mismas puesto que ahora lo que podemos asegurar es que

$$|Bu|^2 \leq 2r_1^2\|u\|^2 + 2r_2^2|u|^2, \quad \forall u \in V.$$

(E.3.5) **Ejemplo**

Sea $\Gamma$ un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$. Sean $V = H_0^1(\Gamma;\mathbb{R})$, $H = L^2(\Gamma:\mathbb{R})$ , que satisfacen las inclusiones densas y continuas usuales.

Sean $A = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ , $B = \sum_{i=1}^{N} r_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ donde $r_i(.) \in L^\infty(\Gamma : \mathbb{R})$ .

También es conocido que la norma $\|u\|^2 = \int_\Gamma \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]^2 dx$ es equivalente a la de $H_0^1(\Gamma; \mathbb{R})$ , por lo que será la norma que utilizaremos.

Denotemos por $r := \sup_{1 \leq i \leq N} \{\|r_i\|_{L^\infty(\Gamma:\mathbb{R})}\}$.

Se verifica que

$$- < Au, u >= \int_\Gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \|u\|^2, \quad \forall u \in V,$$

$$\begin{aligned} |Bu|^2 &= \int_\Gamma \left[\sum_{i=1}^{N} r_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}\right]^2 dx \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \|r_i\|^2_{L^\infty(\Gamma:\mathbb{R})} \int_\Gamma \left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]^2 dx \leq Nr^2 \|u\|^2. \end{aligned}$$

Para que se cumpla $(c1)$ hace falta encontrar $\varepsilon$ y $\nu$ tales que

$$Nr^2 \|u\|^2 + \varepsilon \|u\|^2 \leq \nu |u|^2 + 2\|u\|^2.$$

Tomando $\varepsilon = 2 - Nr^2$, $\nu = 0$, y los $r_i$ tales que $2 - Nr^2 > 0$ , se verificará la coercividad, y como además $\nu \overline{c}^2 - \varepsilon < 0$ entonces aplicando (T.2.1) y (T.2.4) se sigue (2.40).

(N.3.3) **Nota**

Se puede estudiar un ejemplo análogo al (E.3.4) también en dimensión $N$.

# CAPÍTULO IV

# COMENTARIOS, CONCLUSIONES Y GENERALIZACIONES

## IV.0 INTRODUCCIÓN

En este último Capítulo vamos a realizar una serie de observaciones que nos van a permitir relajar las hipótesis efectuadas sobre la función de retardo, $\rho$, en los Capítulos anteriores, lo cual nos va a obligar a tener que efectuar más restricciones sobre el operador $B$.

En segundo lugar analizaremos el caso en que la ecuación estudiada posea dos perturbaciones con retardos. Será el caso de dos retardos.

## IV.1 OBSERVACIONES SOBRE EL RETARDO

Nos encuadramos en la situación del Capítulo III. Vamos a reducir las exigencias efectuadas en (1.1) para el retardo, hasta llegar a las impuestas en REAL [37], para asegurar la existencia y unicidad de solución del problema $(P)$, y con estas vamos a comprobar que los resultados obtenidos en las secciones III.1, III.2 (y por consiguiente en III.3) siguen siendo válidos sin más que modificar convenientemente las hipótesis $(H_2)$, $(H_2')$, $(H_2'')$.

Notemos en primer lugar que para $\rho(t)$ ser lo que usualmente se conoce como función de retardo, habrá de ser $\rho(t) = t - \varphi(t)$. En este caso la condición (1.1) sobre $\rho$ nos lleva a que $\varphi \in C^1(0,\infty;\mathbb{R})$, $\varphi(t) \geq 0$ (para que se tenga $\rho(t) \leq t$ ) y $\varphi(t) \leq t + h$ (para que se cumpla $\rho(t) \geq -h$ ).

El hecho de que $\rho'(t) \geq 1$ nos lleva a que $\varphi'(t) \leq 0$ .
En conclusión, nos vale como retardo cualquier función $\varphi(t)$ que sea decreciente, de clase $C^1(0,\infty;\mathbb{R})$ , y tal que $0 \leq \varphi(t) \leq t+h$ . Por ejemplo, podemos tomar $\varphi(t) = \dfrac{t+2}{t+1}$ , $\varphi(t) = h$ (constante $> 0$), etc...
Recordemos que para poder asegurar existencia y unicidad de solución del problema $(P)$, sólo basta con suponer (Cf. Cap.II (T.3.1))

$$\inf_{0\leq t<\infty} \rho'(t) \geq \rho > 0 \quad \text{y} \quad -h \leq \rho(t) \leq t. \tag{1.0}$$

No obstante, para que los resultados del Capítulo III sigan siendo ciertos necesitaremos imponer alguna condición sobre $\rho^{-1}$ , que no parece ser restricción adicional, al menos desde un punto de vista lógico.
La forma en la que vamos a proceder va a ser intentar efectuar la prueba de (T.1.1) del Capítulo III, y nos daremos cuenta de las modificaciones que tendremos que efectuar.
Comencemos estableciendo las mismas hipótesis que las del antes mencionado Teorema, cambiando en (1.1) la condición $\rho'(t) \geq 1$ por (1.0).
Iniciamos la demostración de la Etapa 1 escribiendo, como es habitual

$$x_t = U_t x_0 + \int_0^t U_{t-s} B x_{\rho(s)}\, dw_s, \quad \forall t \geq 0 \tag{1.1}$$

y de aquí

$$\mathbf{E}|x_t|^2 = \mathbf{E}|U_t x_0|^2 + \int_0^t \mathbf{E}|U_{t-s} B x_{\rho(s)}|^2\, ds \tag{1.2}$$

y tomando $0 < \lambda < 2\gamma$ (por determinar)

$$\int_0^\infty e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2\, dt = \int_0^\infty e^{\lambda t}\mathbf{E}|U_t x_0|^2\, dt + \\ + \int_0^\infty e^{\lambda t} \int_0^t \mathbf{E}|U_{t-s} B x_{\rho(s)}|^2\, ds\, dt. \tag{1.3}$$

El primer sumando de la derecha de (1.3) no presenta modificaciones, y haciendo uso de $(H_1)$ se llega a

$$(1.4) \qquad \int_0^\infty e^{\lambda t}\mathbf{E}|U_t x_0|^2\,dt \leq \frac{c^2}{2\gamma-\lambda}\|\psi\|_1^2.$$

Para el segundo sumando tendremos:

$$\begin{aligned}(1.5)\int_0^\infty e^{\lambda t}\int_0^t \mathbf{E}|U_{t-s}Bx_{\rho(s)}|^2\,ds\,dt &= \int_0^\infty\int_s^\infty e^{\lambda t}\mathbf{E}|U_{t-s}Bx_{\rho(s)}|^2\,dt\,ds \\ &= \int_0^\infty e^{\lambda s}\int_0^\infty e^{\lambda t}\mathbf{E}|U_tBx_{\rho(s)}|^2\,dt\,ds \\ &\leq \left|\int_0^\infty e^{\lambda t}B^*U_t^*U_tB\,dt\right|\int_0^\infty e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_{\rho(s)}|^2\,ds.\end{aligned}$$

Efectuando el cambio de variables,

$$\begin{aligned}(1.6) \qquad \int_0^\infty e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_{\rho(s)}|^2\,ds &= \int_{\rho(0)}^\infty \frac{e^{\lambda\rho^{-1}(u)}\mathbf{E}|x_u|^2}{\rho'(\rho^{-1}(u))}\,du \\ &\leq \frac{1}{\rho}\int_{-h}^\infty e^{\lambda\rho^{-1}(u)}\mathbf{E}|x_u|^2\,du,\end{aligned}$$

y para poder proseguir como en (T.1.1) del Capítulo III necesitamos que $\rho^{-1} \leq u+k$ para algún $k$.

Notemos que esto no se deduce de ser $\inf_{0\leq t<\infty}\rho'(t) \geq \rho > 0$ , ya que lo único que podremos asegurar es que

$$\begin{aligned}(\rho^{-1})'(u) = \frac{1}{\rho'(\rho^{-1}(u))} \leq \frac{1}{\rho} &\Rightarrow \rho^{-1}(u)-\rho^{-1}(0) \leq \frac{1}{\rho}u \\ &\Rightarrow \rho^{-1}(u) \leq \rho^{-1}(0)+\frac{1}{\rho}u,\end{aligned}$$

pero ahora, cuando sea $\rho < 1$ ,tendremos que $\frac{1}{\rho} > 1$ y por lo tanto no podremos asegurar que $\rho^{-1}(u) \leq u+k$.

Supongamos, pues, que $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $\rho^{-1}(u) \leq u+k$, entonces de (1.6) se sigue

$$(1.7)\int_0^\infty e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_{\rho(s)}|^2\,ds \leq \frac{1}{\rho}\int_{-h}^\infty e^{\lambda u+\lambda k}\mathbf{E}|x_u|^2\,du$$

$$\leq \frac{e^{\lambda k}}{\rho}\int_{-h}^0 e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\,ds + \frac{e^{\lambda k}}{\rho}\int_{-h}^\infty e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\,ds$$

$$\leq \frac{e^{\lambda k}}{\rho}\|\psi\|_1^2 + \frac{e^{\lambda k}}{\rho}\int_{-h}^\infty e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\,ds,$$

y por ello (1.5) adquiere la forma

$$(1.8)\qquad \int_0^\infty e^{\lambda t}\int_0^t \mathbf{E}|U_{t-s}Bx_{\rho(s)}|^2\,ds\,dt \leq \frac{e^{\lambda k}f(\lambda)}{\rho}\|\psi\|_1^2 +$$

$$+\frac{e^{\lambda k}f(\lambda)}{\rho}\int_0^\infty e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\,ds$$

por (1.3)

$$\leq \frac{e^{\lambda k}f(\lambda)}{\rho}\|\psi\|_1^2 +$$

$$+\frac{e^{\lambda k}f(\lambda)}{\rho}\int_0^\infty e^{\lambda t}\mathbf{E}|U_t x_0|^2\,dt +$$

$$+\frac{e^{\lambda k}f(\lambda)}{\rho}\int_0^\infty e^{\lambda t}\int_0^t \mathbf{E}|U_{t-s}Bx_{\rho(s)}|^2\,ds\,dt$$

$$\leq \left(\frac{e^{\lambda k}}{\rho} + \frac{c^2}{2\gamma-\lambda}\right) f(\lambda)\|\psi\|_1^2 +$$

$$+\frac{e^{\lambda k}f(\lambda)}{\rho}\int_0^\infty e^{\lambda t}\int_0^t \mathbf{E}|U_{t-s}Bx_{\rho(s)}|^2\,ds\,dt,$$

donde por definición $f(\lambda) = \left|\int_0^\infty e^{\lambda t}B^*U_t^*U_tB\,dt\right|$, y como

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{e^{\lambda k}f(\lambda)}{\rho} = \frac{1}{\rho}\left|\int_0^\infty B^*U_t^*U_tB\,dt\right|,$$

entonces imponiendo que $\frac{1}{\rho}\left|\int_0^\infty B^*U_t^*U_tB\,dt\right| < 1$ podremos deducir que

$$(1.9)\qquad \int_0^\infty e^{\lambda t}\int_0^t \mathbf{E}|U_{t-s}Bx_{\rho(s)}|^2\,ds\,dt \leq c_1\|\psi\|_1^2.$$

Uniendo (1.4) y (1.9) se concluirá la primera etapa.

La segunda etapa sigue exactamente igual que la de (T.1.1) del Capítulo III, teniendo únicamente cuidado en la integral que contiene la función de retardo, al hacer el cambio de variables pertinente.

Por lo tanto, acabamos de demostrar el siguiente

(T.1.1.$\rho$) **Teorema**

*Bajo las hipótesis* $(A_1)$, $(B_1)$, (1.4), $(H_1)$ *y*

$(1.1\rho)$ : $\rho \in C^1(0,\infty;\mathbb{R})$, $\quad -h \leq \rho(t) \leq t$, $\quad \inf\limits_{0\leq t<\infty} \rho'(t) \geq \rho > 0$, $\quad$ *y*

$\qquad \rho^{-1}(t) \leq t + k$, *para ciertos* $h, k \in \mathbb{R}^+$

$(H_{2\rho})$ : $\quad \left|\int_0^\infty B^* U_t^* U_t B \, dt\right| < \rho$,

*se verifica que* $\exists\, \lambda > 0, K > 0$ *tales que la solución de* $(P)$, $x_t$, *satisface*

$$\mathbf{E}|x_t|^2 \leq K\|\psi\|_1^2 e^{-\lambda t}, \quad \forall t > 0. \quad \blacksquare$$

(N.1.1) **Nota**

Como consecuencia de (T.1.1.$\rho$) también es cierto el análogo a (T.1.2), teniéndose por tanto, estabilidad asintótica de las trayectorias de $x_t$ **P**-c.s. De modo análogo a como acabamos de hacer, se pueden demostrar (T.2.2), (T.2.3) (del Capítulo III) sin más que sustituir (1.1) por $(1.1\rho)$ y $(H_2')$, $(H_2'')$ por

$(H_{2\rho}')$ : $\quad \left|\int_0^\infty U_t^* B^* B U_t \, dt\right| < \rho$

$(H_{2\rho}'')$ : $\quad \left\|\int_0^\infty B^* U_t^* U_t B \, dt\right\|_{L(V,V')} < \rho\dfrac{\varepsilon}{\nu}$

respectivamente. Con todo esto, (T.2.4) seguirá siendo cierto igualmente.

# IV.2 UNA ECUACIÓN CON DOS RETARDOS

Comenzaremos planteando el problema, cuya solución va a tener trayectorias asintóticamente estables (**P**-c.s.).

Nos situamos en el marco del Capítulo III, en lo que se refiere a las hipótesis de tipo general sobre $V$, $H$, $A$, $B$, $w_t$, $\rho$ . Y consideraremos otro operador $C \in L(V,H)$ (o $C \in L(H)$ según veremos), y otra función de retardo $\tau(.)$ , satisfaciendo condiciones análogas a las de $\rho$, aunque para los resultados relativos a existencia y unicidad serán necesarias condiciones menos restrictivas.

(T.2.1) **Teorema** (Cf. REAL [37],Teorema 4.2)
*Sean* $A \in L(V,V')$, $B, C \in L(V,H)$ *verificando:*
$\exists\, \varepsilon > 0$, $\nu \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$(2.1) \qquad -2 < Ax, x > +\nu|x|^2 \geq \varepsilon\|x\|^2 + |Bx|^2, \quad \forall x \in V.$$

*Sean* $\rho$, $\tau$, *funciones definidas de* $(0,\infty)$ *en* $\mathbb{R}$, *cumpliendo:*
(2.2) $\rho \in C^1(0,\infty;\mathbb{R})$, $\exists\, h_1 > 0 : -h_1 \leq \rho(t) \leq t, \quad \forall t > 0$
(2.3) $\inf\limits_{0 \leq t < \infty} \rho'(t) = \rho \geq 1$
(2.4) $\tau$ *es medible, y* $\exists\, h_2 > 0 : -h_2 \leq \tau(t) \leq t, \quad \forall t > 0.$
*Sea* $\psi \in I^2(-h,0;V) \cap L^2(\Omega; C(-h,0;H))$ *siendo* $h = \text{máx}\{h_1, h_2\}$.
*Entonces, el problema*

$$(2.5) \qquad \begin{cases} x_t \in I^2(-h,T;V) \cap L^2(\Omega;(-h,T;H)), & \forall T > 0 \\ x_t = x_0 + \int_0^t Ax_s\, ds + \int_0^t Cx_{\tau(s)}\, ds + \int_0^t Bx_{\rho(s)}\, dw_s, & t \geq 0 \\ x_t = \psi(t), \quad t \in [-h,0] \end{cases}$$

*(donde* $x_0 = \psi(0)$ *) posee una única solución (salvo indistinguibilidades).*
∎

(N.2.1) **Nota**
Hagamos notar en primer lugar, que la hipótesis $\rho \geq 1$ se puede debilitar hasta $\rho > 0$ , pero en contrapartida haría falta modificar la coercividad del modo siguiente (Cf. REAL [37] pág. 68):

$$-2 < Ax, x > +\nu|x|^2 \geq \varepsilon\|x\|^2 + \frac{1}{\rho}|Bx|^2, \quad \forall x \in V.$$

En segundo lugar, la condición sobre el dato inicial se puede relajar hasta ser como se indica en la Nota (N.3.1) del Capítulo II.
En el caso en que $B \in L(H)$ la coercividad se puede sustituir por

$$-2 < Ax, x > +\nu|x|^2 \geq \varepsilon\|x\|^2, \quad \forall x \in V.$$

Finalmente, la solución de (2.5), $x_t$ ,también verifica ser una solución generalizada, es decir, podemos decir que dicha solución satisface

$$x_t = U_t x_0 + \int_0^t U_{t-s} C x_{\tau(s)}\, ds + \int_0^t U_{t-s} B x_{\rho(s)}\, dw_s, \quad \forall t \geq 0$$

(la prueba de este resultado es similar a la del caso en que no aparecía $C$, sin más que efectuar unas pequeñas modificaciones motivadas por la presencia de este otro sumando).
No obstante, el método utilizado en el Capítulo III para obtener la estabilidad exponencial de $\mathbf{E}|x_t|^2$ no nos vale ahora, puesto que en general no es cierto que

$$\mathbf{E}\left[\left|\int_0^t f(s,\omega)\, ds\right|^2\right] \leq \text{const} \int_0^t \mathbf{E}|f(s,\omega)|^2\, ds$$

(donde "const" significa una constante independiente de $t$). Pero a pesar de ello, vamos a conseguir estabilidad en un caso que engloba al problema tratado por EL'SGOL'TS-NORKIN en [12], y que discutiremos una vez hayamos probado nuestro resultado.

(T.2.2) **Teorema**
*Sean* $A \in L(V, V')$, $B, C \in L(H)$. *Sean* $\rho, \tau \in C^1(0, \infty; \mathbf{R})$ *tales que*
(2.6) $\exists h \geq 0 : \quad -h \leq \rho(t) \leq t, \quad -h \leq \tau(t) \leq t, \quad \forall t > 0.$

(2.7) $$\inf_{0 \leq t < \infty} \rho'(t) = \rho \geq 1 \quad , \quad \inf_{0 \leq t < \infty} \tau'(t) = \tau \geq 1.$$

(2.8) $\exists \nu \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 : -2 < Ax, x > +\nu|x|^2 \geq \varepsilon\|x\|^2 \quad , \quad \forall x \in V,$
*y además*

(2.9) $\exists \alpha > 1 : \quad -2 < Ax, x > \geq \alpha|x|^2 + |Cx|^2 + |Bx|^2 \quad , \quad \forall x \in V.$
*Y sea* $\psi$ *verificando* (1.4) *del Capítulo III.*
*En estas condiciones,* $\exists\, \lambda > 0, K > 0$ *tales que* $x_t$*, solución de* (2.5)*, satisface*

$$\mathbf{E}|x_t|^2 \leq K\|\psi\|_1^2 e^{-\lambda t} \quad , \quad \forall t > 0, \tag{2.10}$$

*donde* $\|.\|_1^2$ *es la dada en III.*1.

DEMOSTRACIÓN:
Aplicando la Fórmula de ITÔ análoga a (3.8) del Capítulo I,

$$\begin{aligned} e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2 \leq \mathbf{E}|x_0|^2 + \lambda \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_t|^2 ds + 2\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E} < Ax_s, x_s > ds + \\ + 2\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}(Cx_{\tau(s)}, x_s)\, ds + \int_0^t \mathbf{E}|Bx_{\rho(s)}|^2\, ds, \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde, como de costumbre, $\lambda > 0$ está por determinar.
Aplicando (2.9),

$$\begin{aligned} e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2 &\leq \|\psi\|_1^2 + (\lambda - \alpha)\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\, ds - \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Cx_s|^2\, ds + \\ &+ \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_{\rho(s)}|^2\, ds - \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\, ds + \\ &+ 2\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}(Cx_{\tau(s)}, x_s)\, ds \\ &\leq \|\psi\|_1^2 + (\lambda - \alpha)\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\, ds - \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Cx_s|^2\, ds + \\ &+ \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_{\rho(s)}|^2\, ds - \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\, ds + \\ &+ \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Cx_{\tau(s)}|^2\, ds + \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\, ds. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Cambiando ahora de variable en las integrales con retardos y teniendo en cuenta que $\rho^{-1}(s) \leq s + k_1 \quad , \quad \tau^{-1}(s) \leq s + k_2$ resultará:

$$\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Cx_{\tau(s)}|^2\, ds \leq e^{k_2\lambda}\int_{-h}^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Cx_s|^2\, ds \tag{2.13}$$

$$\leq e^{k_2\lambda}|C|^2\|\psi\|_1^2 + e^{k_2\lambda}\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Cx_s|^2\,ds$$

$$(2.14)\quad \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_{\rho(s)}|^2\,ds \leq e^{k_1\lambda}|B|^2\|\psi\|_1^2 + e^{k_1\lambda}\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\,ds,$$

con lo que (2.12) se convierte en

$$\begin{aligned}(2.15)\, e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2 &\leq (1 + e^{\lambda k_2}|C|^2 + e^{\lambda k_1}|B|^2)\|\psi\|_1^2 + (\lambda - \alpha)\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\,ds + \\ &+ e^{\lambda k_2}\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Cx_s|^2\,ds - \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Cx_s|^2\,ds + \\ &+ e^{\lambda k_1}\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\,ds - \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|Bx_s|^2\,ds + \\ &+ \int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\,ds \\ &\leq (1 + e^{\lambda k_2}|C|^2 + e^{\lambda k_1}|B|^2)\|\psi\|_1^2 + u(\lambda)\int_0^t e^{\lambda s}\mathbf{E}|x_s|^2\,ds,\end{aligned}$$

donde

$$u(\lambda) = 1 + \lambda - \alpha + (e^{\lambda k_2} - 1)|C|^2 + (e^{\lambda k_1} - 1)|B|^2,$$

y como $\lim_{\lambda\downarrow 0}[1+\lambda-\alpha+(e^{\lambda k_2}-1)|C|^2+(e^{\lambda k_1}-1)|B|^2] = 1-\alpha < 0$ , entonces podemos determinar $\lambda$ tal que $1+\lambda-\alpha+(e^{\lambda k_2}-1)|C|^2+(e^{\lambda k_1}-1)|B|^2 < 0$ , con lo cual tendremos que, para ese tal $\lambda$ ,

$$(2.16)\qquad e^{\lambda t}\mathbf{E}|x_t|^2 \leq K\|\psi\|_1^2 \quad , \quad \forall t > 0,$$

de donde

$$(2.17)\qquad \mathbf{E}|x_t|^2 \leq K\|\psi\|_1^2 e^{-\lambda t} \quad , \quad \forall t > 0. \quad \blacksquare$$

(E.2.1) **Ejemplo**

Compararemos ahora (T.2.2) con el resultado de EL'SGOL'TS-NORKIN mencionado anteriormente.

Empezaremos por encuadrarnos en el marco escalar descrito en [12], es decir, $V = H = \mathbb{R}$. Los operadores $A$, $B$, $C$, serán en ese caso, constantes que las denotaremos por $a$, $b$, $c$. Esto lo que significa es que $Ax = ax$, $Bx = bx$, $Cx = cx$ donde $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$.

La ecuación considerada en [12] es

$$\begin{cases} dx_t = ax_t\, dt + cx_{t-h_1}\, dt + bx_{t-h_2}\, dw_t & t > 0 \\ x_t = \psi(t), \qquad t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{2.18}$$

donde $h$ =máx$\{h_1, h_2\}$,(siendo $h_1$, $h_2$ constantes positivas) y $\psi$ verifica (1.4) del Capítulo III.

EL'SGOL'TS-NORKIN prueban que bajo la hipótesis

$$2(a+c)(1-|c|h_1) + b^2 < 0, \quad \text{con} \quad |c|h_1 < 1, \tag{2.19}$$

la solución de (2.18) satisface

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbf{E}|x_t|^2 = 0, \tag{2.20}$$

siempre que el dato inicial $\psi$ mantenga su norma no superior a un cierto $\delta > 0$.

Observamos que (2.18) encaja en el esquema de (T.2.2) sin más que tomar $\tau(t) = t - h_1$, $\rho(t) = t - h_2$ , que obviamente satisfacen (2.6), (2.7) con $\rho = 1$, $\tau = 1$ y $h$ el dado aquí .

Si suponemos que $\exists\, \alpha > 1$ tal que

$$2a + \alpha + c^2 + b^2 < 0\,, \tag{2.21}$$

entonces se verifica (2.8) (tomando, por ejemplo, $\nu = -\alpha$, $\varepsilon = c^2 + b^2$ ) con lo que el Teorema (T.2.2) nos asegura que

$$\mathbf{E}|x_t|^2 \le K\|\psi\|_1^2 e^{-\lambda t}, \quad \forall t > 0, \tag{2.22}$$

lo cual implica claramente que $\lim_{t \to +\infty} \mathbf{E}|x_t|^2 = 0$ , no teniendo que imponer restricción adicional ni sobre el dato inicial $\psi$ ni sobre los retardos $h_1$, $h_2$ . Obviamente, nuestras hipótesis sobre $a$ son más fuertes que las que aparecen en [12], puesto que de (2.21) se sigue que $a < 0$ , mientras que de (2.19) lo que se deduce es que $a + c < 0$ . Sin embargo, el resultado que obtenemos en (T.2.2) es bastante más potente que el de [12], no requiriendo condiciones adicionales sobre los retardos y valiendo incluso para retardos variables.
Observemos que el hecho de ser $a < 0$ por verificarse (2.21), lo que significa es que el semigrupo que genera el operador $A$, que en este caso es $e^{at}$ , es exponencialmente estable (es decir, satisface $(H_1)$ ). En consecuencia, (T.2.2) nos indica que si las soluciones de la ecuación determinista

$$\text{(2.23)} \qquad \begin{cases} dx_t = ax_t\, dt \quad , \quad t > 0 \\ x_0 = \psi(0) \end{cases}$$

son exponencialmente estables ( $a < 0$ ), entonces el problema perturbado (2.18) también posee soluciones exponencialmente estables (verifican (2.10)).
No obstante, (2.19) no implica directamente que $a$ tenga que ser negativo, sino que ha de serlo $a + c$ . Esto significa que aunque las soluciones de (2.23) sean inestables (como ocurre cuando $a > 0$ ), entonces al considerar el problema perturbado (2.18), sus soluciones son al menos estables ( $\lim_{t \to +\infty} \mathbf{E}|x_t|^2 = 0$ ) siempre que se satisfaga (2.19).
Se suele decir que las perturbaciones aleatorias retardadas del tipo tratado anteriormente, ejercen una acción estabilizadora.
De la discusión anterior podemos concluir con el siguiente

(T.2.3) **Teorema**
*La solución* $x_t$ *de* (2.18) *satisface:*
*(i) Si* $\exists\, \alpha > 1$ *tal que* $2a + \alpha + c^2 + b^2 < 0$ *, entonces* $\exists\, \lambda > 0, K > 0$ *:*

$$\mathbf{E}|x_t|^2 \le K\|\psi\|_1^2 e^{\lambda t} \quad , \forall t > 0 \quad \text{y en particular} \quad \lim_{t \to +\infty} \mathbf{E}|x_t|^2 = 0$$

*siendo esto válido para cualesquiera retardos* $h_1$, $h_2$ *.*

*(ii) Si* $2(a+c)(1-|c|h_1)+b^2<0$ *con* $|c|h_1<1$ *, entonces sólo podemos asegurar que se verifica* $\lim_{t\to+\infty} \mathbf{E}|x_t|^2 = 0$ *, siendo cierto para cualquier* $h_2>0$ *.* ∎

(N.2.2) **Nota**

Se puede conseguir estabilidad asintótica trayectorial **P**-c.s. de la solución de (2.18), en ambos casos de (T.2.3). En (i) será una estabilidad exponencial, mientras que en (ii) será del tipo $\lim_{t\to+\infty}|x_t| = 0 \quad \mathbf{P}-c.s.$ . La prueba en el primer caso es análoga a la dada en III, la del caso (ii) se puede efectuar directamente sin más que usar la técnica descrita por GIKHMAN-SKOROKHOD en [14] (ver pág. 327).

(N.2.3) **Nota**

En el caso en que $c=0$, basta tomar $\alpha>0$ tal que $2a+\alpha+b^2<0$ (Cf. Cap. III (T.1.3)) para obtener extabilidad exponencial. Pero esta condición es exactamente la misma que la utilizada por EL'SGOL'TS-NORKIN ya que si $2a+b^2<0$ entonces $\exists\,\alpha>0$ tal que $2a+\alpha+b^2<0$ y reciprocamente. Luego en el caso de un único retardo nuestro resultado implica el de [12].

# BIBLIOGRAFÍA


[1] BALL J.M.: "Strongly Continuous Semigroups, weak solutions, and the Variation of Constants Formula". *Proc. Amer. Math. Soc.* 63, 2 (1977).

[2] BENSOUSSAN A. - LIONS J.L.: "Équations Differentielles Stochastiques et Équations aux Dérivées Partielles Lineaires du 2$^{eme}$ Ordre". Rapport Ceremade Paris-Dauphine n$^{\underline{o}}$ 7701 (1977).

[3] BREZIS H.: "Analyse Fonctionnelle". Masson, Paris (1983).

[4] CHOW P.L.: "Stochastic Partial Differential Equations: Turbulence related problems". Prob. analysis and related topics, 1. A.T. Bharucha-Reid. Academic Press, New York (1978).

[5] CURTAIN R.F.: "Stochastic Evolution Equations with General White Noise Disturbance". *J. Math. Anal. Appl.* 60, 570-595 (1977).

[6] CURTAIN R.F. - FALB P.L.: "Ito's Lemma in Infinite Dimensions". *J. Math. Anal. Appl.* 31, 434-448 (1970).

[7] CURTAIN R.F. - FALB P.L.: "Stochastic Differential Equations in Hilbert Spaces". *J. Differential Equations* 10, 412-430 (1971)

[8] CURTAIN R.F. - PRITCHARD A.J.: "Functional Analysis in Modern Applied Mathematics". Academic Press, London (1977).

[9] CURTAIN R.F: "Stability of Stochastic Partial Differential Equation". *J. Math. Anal. Appl.* 79, 352-369 (1981).

[10] DAWSON D.A. - GOROSTIZA L.G.: "$*$-Solutions of Evolution Equations in Hilbert Space". *J. Differential Equations* 68, 299-319 (1987)

[11] DAUTRAY R. - LIONS J.L.: "Analyse Mathèmatique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques". Masson, Paris (1984).

[12] EL'SGOL'TS L.E. - NORKIN S.B.: "Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments". Academic Press, London (1973).

[13] FLEMING W.H.: "Distributed parameter stochastic systems in population biology". Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems vol. 107, Springer-Verlag, Berlin-New York (1975).

[14] GIKHMAN I.I. - SKOROKHOD A.V.: "Stochastic Differential Equations". Kiev, Nauka (1968).

[15] GROSSMAN S.E. - YORKE J.A.: "Asymptotic Behavior and Exponential Stability Criteria for Differential Delay Equations". *J. Differential Equations* 12, 236-255 (1972).

[16] HAUSSMANN U.G.: "Asymptotic Stability of the Linear Ito Equation in Infinite Dimensions". *J. Math. Anal. Appl.* 65, 219-235 (1978).

[17] HILLE E. - PHILLIPS R.S.:"Functional Analysis and Semigroups". American Mathematical Society, Providence (1957).

[18] ICHIKAWA A.: "Stability of Semilinear Stochastic Evolution Equations". *J. Math. Anal. Appl.* 90, 12-44 (1982).

[19] ICHIKAWA A.: "Dynamic Programming Approach to Stochastic Evolution Equations". *SIAM J. Control and Optimization* 17, 1 (1979).

[20] ICHIKAWA A.: "Linear Stochastic Evolution Equation in Hilbert Space". *J. Differential Equations* 28, 266-277 (1978).

[21] KOZIN F.: "Stability of Linear Stochastic System". Lecture Notes in Mathematics n$^{\underline{o}}$ 294 (1972).

[22] KRASOVSKII N.N.: "Stability of Motion". Stanford University Press, (1963).

[23] KUSHNER H.J.: "On the Stability of Processes Defined by Stochastic Difference-Differential Equations". *J. Differential Equations* 4, 424-443 (1968).

[24] LIONS J.L.:"Équations Differentielles, Opérationelles, et Problèmes aux Limites". Springer-Verlag, Berlin (1961).

[25] LIONS J.L.: "Contrôle Optimal de Systèmes Gouvernés par des Équations aux Dérivées Partielles". Dunod, Paris (1968).

[26] METIVIER M. - PELLAUMAIL J.: "Notions de base sur l'intégrale stochastique". Rapport I.R.I.A. n° 61, Rennes (1976).

[27] MEYER P.A.: "Probabilités et Potentiel". Hermann, Paris (1966).

[28] MEYER P.A.: "Un Cours sur les Intégrales Stochastiques". Lecture Notes in Mathematics n° 511, Springer-Verlag, New York (1976).

[29] NAKAGIRI S.: "On the Fundamental Solution of Delay-Differential Equations in Banach Spaces". *J. Differential Equations* 41, 349-368 (1981).

[30] PARDOUX E.: "Stochastic Partial Differential Equations and Filtering of Diffusion Processes". *Stochastics* 3, 127-167 (1979).

[31] PARDOUX E.: "Intégrales Stochastiques Hilbertiennes". Rapport Ceremade Paris-Dauphine n° 7617 (1976).

[32] PARDOUX E.: "Équations aux Dérivées Partielles Stochastiques non Linéaires Monotones". Tesis U. Paris XI (1975).

[33] PAZY A.:"Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations". Springer-Verlag, New York (1983).

[34] PETTIS B.J.: "On Integration in Vector Spaces". *Trans. Amer. Math. Soc.* 44 (1938).

[35] PRIOURET P.: "Processus de Diffusion et Équations Différentielles Stochastiques". Lecture Notes in Mathematics n° 390. Springer-Verlag , New York- Berlin (1974).

[36] PUGLIESE A.: "Stability for Linear Stochastic Differential Equations in Hilbert Space".( Aparecerá)

[37] REAL J.: "Contribución al estudio de una clase de Ecuaciones en Derivadas Parciales Estocásticas con Retardo." Tesis U. Sevilla (1980).

[38] SCALORA F.: "Abstract Martingale Convergence Theorems". *Pac. J. Math.* 11 (1961).

[39] SHAIKHET L.E.: "Use of Method of Lyapunov Functional to Investigate the Stability of Stochastic Systems with Delay". *Problemy Peredachi Informatsii* 11, 4, 70-76 (1975).

[40] TSAR'KOV E.F.:"Asymptotic Exponential Mean-Square Stability of the Trivial Solution of Stochastic Functional Differential Equations". *Theory Probab. Appl.* 21, 850-854 (1977).

[41] WEINBERGER H.F.: "A First Course in Partial Differential Equations". Blaisdell, New York (1965).

[42] ZABCZYK J.: "On the Stability of Infinite-Dimensional Linear Stochastic Systems". Probability Theory Banach Center Publications, Vol. 5, Warsaw (1979).

# ÍNDICE

# UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. TOMAS CARABALLO GARRIDO titulada ALGUNOS RESULTADOS DE ESTABILIDAD PARA ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES ESTOCASTICAS CON RETARDO acordó otorgarle la calificación de APTO CUM LAUDE

Sevilla, 26 de NOVIEMBRE 1.988

El Vocál, El Vocal, El Vocal,

El Presidente El Secretario, El Doctorado,