LBS 00027950

464

043
36

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMATICAS

REPRESENTACION DE FUNCIONES Y MEDIDAS EXCESIVAS Y PROCESOS DE MARKOV

Memoria que presenta José María Alba Riesco, para optar al Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Sevilla, Julio de 1979

Vº Bº Cátedrático Director.

Fdo. Rafael Infante Macias

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

REPRESENTACION DE FUNCIONES Y MEDIDAS EXCESIVAS Y PROCESOS DE MARKOV

José María Alba Riesco

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

Quiero expresar aquí mi sincero agradecimiento al Profesor D. Rafael Infante Macias por su dirección y aliento continuo para la elaboración de la presente Memoria. Al Profesor D. Antonio de Castro Brzezicki expreso mi gratitud por las enseñanzas que de él recibí tanto como alumno como en la etapa de colaboración con él.

A los Profesores Dña. Carmen Leon Vela y D. José Real Anguas, que me soportaron en amplias y largas discusiones, debo agradecimiento por sus consejos durante el desarrollo y preparación de esta Memoria.

A mis compañeros, los Profesores del Departamento de Estadistica Matemática e Investigación Operativa, mi agradecimiento por su colaboración y aportación de ideas.

A MI MADRE

C O N T E N I D O

0.- INTRODUCCION.

En este primer apartado, de tipo introductorio, queremos exponer, a modo de resumen, el contenido abreviado de la presente Memoria, dando además una amplia referencia historica - del problema estudiado, así como una justificación de las condiciones en que nos hemos situado y una síntesis de los resultados obtenidos.

La idea inicial, a grosso modo, puede decirse que es el estudio, lo más general posible, del espacio de salidas de los procesos de Markov, con el fin de obtener representaciones - integrales para las funciones excesivas, invariantes y excesiva-nulas, y para las medidas coexcesivas, coinvariantes y coexcesiva-nulas, verificando determinadas condiciones de normalización. Estas representaciones nos llevaran además a caracterizaciones de éstos entes en términos de procesos de Markov.

El estudio de los espacios de salidas, y de los espacios de entradas, está relacionado con el estudio de las fronteras. Existen dos tipos de fronteras: Unas reales y otras ideales. Esta clasificación es excesivamente simplista y trivial y por consiguiente muy poco precisa, pero nos sirve, al menos a nivel intuitivo, para exponer una situación importante: La idea de frontera ideal. Mientras que la idea intuitiva de una frontera real está clara, ¿qué se entiende por una frontera ideal? Veamos: Si el espacio de estados no contiene su propia frontera, está claro que podremos adjuntarle su frontera sumergiendo el espacio de estados original en otro más amplio que tenga frontera pràpia, y esta frontera es entonces una frontera ideal del espacio inicial. El ejemplo clásico de esta situación lo proporciona la idea de compactificación de un espacio. Ahora bien, la compactificación de un espacio requiere una topología inicial sobre el espacio,y de un "criterio" para realizar la compactificación.[1)(*)] La frontera de Martin en la Teoria del Potencial es un ejemplo de frontera ideal. R.S.Martin introdujo la frontera,que ahora lleva su nombre, con el fin de obtener una representación integral del tipo de Poisson-Stieltjes para las funciones armónocas positivas.

Desde que en el trabajo de G.A.Hunt(1) quedera de manifiesto la ímtima relación entre la Teoria del Potencial y la Teoría de los Procesos de Markov, uno de los campos de investigación que quedaron de inmediato abiertos fue el de caracterizar por métodos probabilísticos la Frontera de Martin.

El primer paso en esta dirección fue dado por J.L.Doob(1) para el caso del movimiento browniano, introduciendo los h-procesos, que han llegado a ser una de las técnicas más importantes de esta teoría. Ahora bien, el movimiento browniano es útil para representar las funciones armónicas clásicas de $\mathbb{R}^n$, pero no es suficiente para la descripción probabilística de las funciones armónicas en el sentido general en que se estaban estudiando de forma axiomática por M.Brelot y H.Bauer[2)] por aquellas fechas.

(*) Estos números indican las notas que aparecen al final de ésta Introducción.

Así pues era necesario pasar a considerar en esta Teoría procesos de Markov más generales que el movimiento browniano. Tambien en esta ocasión es J.L.Doob(2) quien da el primer paso, y es en éste trabajo en el que aparecen por ver primera los términos de espacios de entrada y de salida. Sin embargo es G.A.Hunt(2) quien poco tiempo después (realmente son trabajos casi simultáneos) da unas ideas generales, atacando el problema desde otra perspectiva, que son las que hantenido una definitiva subsistencia. No obstante, estos primeros trabajos eran relativos a cadenas de Markov y por ello sólo útil para una teoría discreta.

El resultado definitivo se alcanza con el trabajo de H. Kunita-T.Watanabe(1). Estos dos autores establecen la conocida hipótesis de dualidad que supone la existencia de una medida y una función de cotransición de modo que las resolventes inicial y la corresolvente asociada a la función de cotransición esten en dualidad respecto de dicha medida. La continuación del trabajo de éstos dos autores es la monografía de P. A.Meyer(4), así como el texto de R.M.Blumenthal-R.K.Getoor(1) donde se estudian los procesos de Markov duales y una teoría dual del potencial. En las mismas fechas, es E.B.Dynkin(1) quien da de una forma definitiva la solución al problema de la frontera de Martin en conexión con los procesos de Markov en las hipótesis más generales, aplicándola a la representación de las funciones excesivas, invariantes y excesivas-nulas. Posteriormente, en E.B. Dynkin(2) y (4) se efectua una tratamiento análogo para las medidas excesivas, invariantes, y excesiva-nulas. Queda entonces claro que el espacio de salidas es el aconsejable para el estudio de las funciones, mientras que el espacio de entradas lo es para las medidas.

Hasta aquí el problema quedaba completamente resuelto, - pero siempre se obtenía su solución a través del compactificado de Martin del espacio de estados original, que se suponía localmente compacto. Las ideas generales de G.A.Hunt ya aludidas no habian sodo aún plenamente explotadas, y es,de nuevo, E.B.Dynkin(3) quien , en el Congreso Internacional de Niza, recoge estas ideas y abandona el procedimiento de compactificación para pasar a considerar un nuevo espacio medible que será el espacio de entradas (ó el de salidas) pudiendose ya - prescindir deconsideraciones topológicas sobre el espacio de estados. El desarrollo de éstas ideas aparece en E.B.Dynkin(5) de una forma casi definitiva, mientras que en E.B.Dynkin(6) lo aplica a la representación de funciones y medidas sin ninguna hipótesis de partida sobre las propiedds topológicas del espacio de estados. De éste modo se vió que la representación de Martin era equivalente, en sentido amplio, en el terreno probabilistico a la representación via el espacio de entradas o de salidas.

En todos estos trabajos la hipótesis de dualidad de Kunita-Watanabe permanece, ya que es la que permite estudiar los procesos y los coprocesos (procesos en dualidad), y además - es coherente con la más sencilla definición de proceso de -

Markov: El pasado y el futuro son condicionalmente independientes conocido el presente; definición que ha sido adoptada en el presente trabajo, frente a las definiciones extremadamente formalistas, que sólo tienen sentido cuando se consideran espacios de estados con una topología inicial muy concreta y estableciendo determinados axiomas, como puede verse en P.A.Meyer (2) y (3).

En este trabajo se parte de un espacio medible estandar[3)] como espacio de estados, y sobre el se considera dada una función de transición homogénea . Despues de estudiar de forma breve los espacios medibles estandar y los espacios medibles convexos, damos las propiedades más interesantes sobre los isomorfismos entre estos espacios, y pasamos a describir las funciones de transición y de cotransición, estableciendo a continuación los conceptos de funciones (medidas) excesivas y coexcesivas, que son los entes que vamos a estudiar.

Suponemos la hipótesis de dualidad de Kunita-Watanabe (sobre esta hipótesis y los procesos de Markov duales puede verse tambien el reciente trabajo de E.B.Dynkin(7)). A partir dela hipótesis de dualidad, establecemos el resultado referente a la existencia de la función de Green, y basándonos en éste, establecemos el isomorfismo entre los espacios S_n^p y $R_h^{\hat{p}}$. Aquí hemos hemos aplicado el proceso de demostración seguido por M.Weil(1) con las variantes de que éste autor considera medidas de Radon y nosotros consideramos medidas abstractas en general.

El isomorfismo que hemos establecido entre estos espacios, se refiere a isomorfismo entre espacios medibles convexos, por lo que previamente se han dotado de sus estructuras medibles y convexas naturales, con lo cual al ser considerados como simplexs se conservan las caracterizaciones sobre los puntos extremales de las que se hacen uso posteriormente. Este isomorfismo nos permite realizar el estudio de las funciones excesivas a través de las medidas coexcesivas, y recíprocamente.

Los temas tratados hasta aquí son, en si mismos, independientes de los procesos de Markov, ya que el estudio de las funciones (medidas) excesivas sólo depende del núcleo que se considere. En nuestro caso estamos tratando con la familia de núcleos correspondientes a la función de trnasición dada inicialmente, y las correspondientes familias de operadores resolventes y corresolventes dadas por la dualidad. Este tratamiento es la base dela Teoria del Potencial moderna tal como puede verse en P.A.Meyer(1).

La definición de proceso de Markov que hemos considerado en el presente trabajo es, como ya hemos indicado, la más simple de formular. Para nosotros un proceso de Markov es una medida de probabilidad P sobre el espacío medible $(W, \mathbb{N})$, donde W es el espacio de las trayectorias sobre el espacio de estados y $\mathbb{N}$ es la σ-álgebra de Kolmogorov sobre W, que verifica la propiedad de Markov : $P(AB|x_t) = P(A|x_t)P(B|x_t)$ siendo $A \in \mathbb{N}_t$ y $B \in \mathbb{N}^t$, sucesos del pasado y el futuro respectivamente.

Esta sencilla definición tiene la ventaja de poner de manifiesto la simetria existente entre el pasado y el futuro en un proceso de Markov, simetría que se pierde al considerar las funciones de transición. La hipótesis de dualidad repone esta simetría al considerar la existencia de una función de cotransición.

Estudiamos a continuación la construcción de un proceso de Markov a partir de una función de cotransición (es por tanto un coproceso, aunque en realidad la diferencia entre procesos y coprocesos es más bien formal) y de una medida coexcesiva convenientemente normalizada. Estos (co)procesos tiene como función de cotransición $\hat{p}^h$ que fue considerada ya inicialmente por J.L.Doob al introducir los h-procesos. El espacio de estos procesos de Markov lo denotamos por $K^{\hat{p}^h}$, y dedicam os un apartado entero a su estudio.

Las ideas generales que se desarrollan en este trabajo son semejantes a las de E.B.Dynkin(6), pero existen diferencias notables. En primer lugar, E.B.Dynkin considera de partida una función de trnasición no homogénea. Ciertamente esta es la situación más general, pero es conocido que efectuando un cambio de espacio de estados, un proceso no homogéneo puede transformarse en otro homogéneo, y de hechó las situaciones más importantes suelen responder a situaciones homogéneas. De todas formas, esto no es lo importante. La diferencia más notable es uqe cuando se considera una función de transición no homogénea, se está considerando una familia doblemente subindicada de núcleos, y por ello el concepto de función (medida) excesiva se altera con respecto al caso homogéneo, ya que en este caso una "función" ("medida") excesiva pasa a ser una familia de funciones (medidas) parametrizadas en el tiempo, t $\mathbb{R}_+$. Ya estas diferencias son un poco más que formales, y si bien no tiene mucha incidencia en el proceso de construir procesos de Markov a partir de una medida excesiva, si tiene importancia, y mucha, al considerar la situación inversa: obtener una medida excesiva a partir de un proceso de Markov.

En efecto, lo que se intenta es demostrar una relacion de isomorfismo entre los procesos de Markov y las medidas coexcesivas, y para ello es necesario poder obtener un proceso a partir de una medida y una medida a partir de un proceso. Este problema de obtener una medida coexcesiva a partir de un proceso de Markov es más sencillo en el caso no homogéneo que en el homogéneo, ya que el proceso define de forma natural una familia de medidas que es la situación conveniente en el caso no homogéneo, y es un poco más complejo el reducir esa familia de medidas a una sóla medida coexcesiva. Así pues, el situarnos en el caso homogéneo no supone una "pérdida de generalidad", ni siquiera "más fácil", sencillamente son dos puntos de partida distintos para estudiar distintos objetos.

La función de transición inicial la suponemos submarkoviana, pero esta no es una hipótesis "más general", ya que siempre se puede completar el espacio, pero dado que la función de transición que para nosotros es importante a la hora de construir un proceso de Markov, es la función de cotransición $\hat{p}^h$, siendo h una función cosupermedia, que resulta ser submarkoviana aunque la inicial fuese markoviana. Por ello completamos el espacio de estados adjuntando una punto A cuando es realmete necesario en la construcción del proceso.

Los procesos de Markov que obtenemos a partir de la función de cotransición $\hat{p}$ y de una medida coexcesiva m, normalizada por la relación $m(h) = 1$, lo designamos por P_h^m y los cosideramos definidos sobre el espacio de todas las trayectorias que son absorbidas en el punto A en el primer instante de su encuentro. Para poder definir P_h^m sobre este espacio de trayectorias, existen problemas de medibilidad, aplicamos un procedimiento de P.A.Meyer(3) precisando ciertos aspectos.[4)]

La inyección del espacio $R_h^{\hat{p}}$ en el espacio $K^{\hat{p}^h}$ no presen serios problemas, pero la reciproca no siendo cierta, no puede establecerse. Nosotros determinamos un subespacio K de modo que está en correspondencia biunívoca con el espacio $R_h^{\hat{p}}$ y éste subespacio K está determinado por el comportamiento en el instante inicial de los procesos.

Considerando en estos espacios las estructuras medibles y convexas naturales, y las inducidas por ećtas, obtenemos tres espacios medibles convexos $(S_n^p, \mathbb{B}_{S_n^p})$, $(R_h^{\hat{p}}, \mathbb{B}_{R_h^{\hat{p}}})$ y $(K, \mathbb{B}_K)$ que son isomorfos. Por ello, las propiedades de los puntos extremales se conservan de uno a otro de estos espacios.

Hacemos uso de un resultado importante de E.B.Dynkin(6) y (8), Yu.I.Kifer-S.A.Pirogov(1), y S.E.Kuznecov(1) que esta blece la propiedad de simplex del espacio $(R_h^{\hat{p}}, \mathbb{B}_{R_h^{\hat{p}}})$, con su estructura medible convexa natural. Este resultado es original de E,B.Dynkin(6) y fue obtenido a partir del resultado de Yu.I.Kifer-S.A.Pirogov(1) sobre sistemas dinámicos, siendo posteriormente S.E.Kuznecov(1) quien estableció condiciones necesarias y suficientes basadas sobre la continuidad absoluta de las funciones de cotransición. El procedimiento de demostración de este resultado de E.B.Dynkin no puede ser aplicado en nuestro caso, aunque el resultado sea válido, debido al hecho de que no se dan las condiciones de existencia de núcleos ergódicos, necesarios para aplicar el importante Teorema de Representación[5] de E.B.Dynkin(5), puesto que reposa en la immersión del espacio $R_h^{\hat{p}}$ en el espacio de todas las familias de medidas coexcesivas respecto de una función de cotransición no homogénea.

El hecho de que este espacio sea simplex, y debido al isomorfismo entre los tres espacios indicado antes,proporciona de forma automáticarepresentaciones integrales de los elementos de éstos espacios en términis de sus elementos extremales, (vértices del simplex)ya que todo elemento de una simplex es el baricentro de una medida de probabilidad soportada por sus vértices. Además, ya que los vértices engendran la frontera de un simplex, tenemos entonces representaciones integrales semejantes a las representación de G.Choquet(3) mediante integrales frontera en espacios topológicos localmente convexos, separables y de Hausdorff.

Las represenataciones integrales de este tipo son válidas en los tres espacios, puesto que todos son simplexs, y ello - nos permite obtener una descomposición de las funciones excesivas semejante a la descomposición de Riesz en la Teoría Clásica del Potencial. Aunque sólo damos esta descomposición para las funciones excesivas, está claro que tambien es válida para las medidas excesivas.

La importancia de los isomorfismos establescidos y de - éstas descomposiciones, es que nos permiten estudiar los elementos extremales o vértices de éstos simplexs trasladando - propiedades de uno a otro espacio. Así llegamos a las siguientes alternativas:

- Si una función $f \in S_n^p$ es extremal, entonces o bien es - invariante, o bien es excesiva-nula.

- Si una medida $m \in R_h^{\hat{p}}$ es extremal, entonces o bien es coinvariante o bien es coexcesiva-nula.

Estas dos alternativas exponen el hecho de que las funciones (medidas) excesivas pueden explicarse a través de las funciones (medidas) invariantes y excesivas nulas. Esta situación es el refleja de la existencia de dos caras complementarias en estos simplexs.

La tercera alternativa es relativa a los procesos $P \in K$ que son extremales, y esta basada sobre el espacio de salidas de estos procesos, proporcionando una interpretación probabilística de las dos alternativas anteriores.

El espacio de salidas U es la transformacion del espacio de las trayectorias de estos procesos, W , mediante la variable x_Z , donde Z es el tiempo de muerte de las trayectorias, o tiempo de salida del espacio E_o^{∞}. Ahora bien, U no es un subconjunto medible de E, pero demostramos que puede ser considerado un espacio de medida $(U, \mathbb{F}_U, \theta_P)$ asociado con cada proceso $P \in K$, siendo θ_P la medida espectral del proceso P, que puede de ser vista tambien como una capacidad en el sentido abstracto de G.Choquet.

Distinguimos dos subespacios complementarios U_a y U_b del espacio de salidas U, el espacio de las salidas alcanzables, $Z < \infty$, y el espacio de las salidas no alcanzables, $Z = \infty$. La tercera alternativa que formulasmos es entonces:

- Si $P \in K$ es extremal, entonces su medida espectral θ_P está soportada por U_a ó por U_b .

Esta alternativa nos dice que si $P \in K$ es extremal entonces el tiempo de salida de las trayectorias del proceso es finito Pc.s. ó infinito P c.s.

Como consecuencia de estas alternativas, entonces si $f \in S_n^p$ es invariante, entonces $w^f(dx) = f(x)\, w(dx)$, donde w es la medida de la dualidad, es coinvariante, por lo que el proceso P_h^{wf} , si además f es extremal, es tal que su medida espectral está concentrada sobre el èspacio de las salidas no alcanzables.La correspondiente situación para f extremal y excesiva nula, nos lleva a que la medida espectral del proceso está concentrada sobre el espacio de las salidas alcanzables.

Por último quiero hacer una breve exposición relativa al por qué de haber considerado un espacio de estados estandar.

Las buenas teorias de procesos de Markov estan construidas en espacios de estados con buenas propiedades topológicas, por ejemplo un espacio localmente compacto separable y de Hausdorff. Esta es la situación de los trabajos de G.A. Hunt(1) y de R.M.Blumenthal-R.K.Getoor(1), por ejemplo. Las razones pueden quedar claras si pensamos en $\mathbb{R}^n$ como espacio de estados, ó bien los espacios de Green de la teoria del potencial, y éste es uno de los motivos principales: se trata de realizar en estos trabajos una Teoria del Potencial asociada a un proceso de Markov, llegando a introducir todas las subteorias de balayage, topologia fina, etc. Mas tarde, despues de un trabajo de Shih Chung Tuo[6)], P.A.Meyer en (5) extiende la teoria desarrollada anteriormente a espacios de estados mas complejos, tambien mas generales, concretamente a espacios lusinianos metrizables, es decir un espacio homeomorfo a un subconjunto boreliano de un espacio métrico compacto.[7)] Posteriormente R.K.Getoor(1) trabaja con procesos de Markov en espacios de estados que son subconjuntos universalmente medibles de un espacio métrico compacto, son los U-espacios. Mas recientemente, L.Schwartz(1) considera los procesos de Markov sobre espacios de estados que son subconjuntos universalmente medibles de un espacio susliniano completamente regular.

La ganancia en generalidad sucesiva de estos trabajos en lo referente a las propiedades topologicas del espacio de estado esta clara. Sin embargo, no existe una relación clara - entre estos espacios que hemos mencionado y los espacios medibles estandars, Naturalmente, si introducimos la $_q$-topología en el espacio medible estandar, nos situamos si el espacio es no numerable en un espacio métrico compacto y en esta situación la teoria de los procesos de Markov está suficientemente elaborada. Sin embargo si no consideramos esta topología nos quedamos con un espacio medible sin ninguna propiedad topológica. En esta situación, esta claro que muy pocas de las buenas propiedades -especialmente las relativas a la regularidad de las trayectorias- podriamos obtener. El objetivo del presente trabajo no era este, y por ello esto es secundario. Pero entonces ¿ por qué un espacio estandar? La respuesta esta en el teorema de Kolmogorov. Como puede verse en K.R.Parthasaraty(1), el espacio mas general en el que se verifica el teorema de Kolmogorov es un espacio estandar, y puesto que en nuestro estudio hemos hecho uso de este teorema para construir un proceso de Markov a partir de una medida coexesiva, es difícil que pueda generalizarse las hipótesis de partida de nuestro trabajo sobre el espacio de estado, a menos que se cambie la técnica utilizada, ó bien se demuestre el teorema de Kolmogorov en otros espacios mas generales.

Notas:

1) Vease por ejemplo el Teorema General de Conpactificación de Constantinescu-Cornea, en M.Brelot: On topologies and Boundary in Potential Theory. Lectures Notes in Mathematics, 175, Springer-Verlag 1971.

2) Estas axiomáticas pueden verse en M.Brelot: Axiomatique des fonctions harmoniques. Press L'Univ. Montreal 1966, y en H. Bauer: Harmonische Raüme und ihre Potentialtheorie. Lect. Notes in Math. 22, Springer-Verlag, 1966. Para una exposición sobre la evólución histórica de la Teoría del Potencial desde sus orígenes en Gauss hasta nuestros días, puede verse la amena exposición de M.Brelot en L'Enseignement Mathem. 18, 1971, 1-36. En conexión con los procesos de Markov, la monografía de K. Ito: Lectures on Stochastics Processes, Bombay, 1968, puede verse para el estudio de la Teoría del Potencial Clásica asociada al movimiento Browniano.

3) Usamos aquí un anglicismo, en lugar de la expresión espacio medible "típico", por ser ésta traducción poco afortunada, y por que es la terminología más frecuentemente usada. Sin embargo, no debe confundirse con los espacios estandars de X.Fernique: Processus lineaires, processus généralisés, Ann.Inst.Fourier, 17,1967,1-92.

4)Elpropio Autor en Lect.Notes in Math.307,Springer-Verlag, 1973, dice:...étant prévenu que des exercices sont disséminés dans le texte sous forme d'erreurs...

5)Este Teorema de representación de E.B.Dynkin ha sido establecido posteriormente por el mismo autor en (8) bajo la forma de σ-álgebras suficientes, y ha sido utilizado por H.Follmer(1) y Ch.Preston(1) para el estudio de los campos aleatorios y los espacios de fase de la mecánica estadística. Puede verse tambien una posible aplicación en la Teoria de Representadión de Martingalas después del trabajo de M.Yor (1).

6) Vease Ann.Inst. Fourier, 20, 1970,303-316.

7) Vea se P.A.Meyer-J.B.Walsh (1).

1.- ESPACIOS MEDIBLES ESTANDARS.

Sean $(X, \mathbb{B}_X)$ e $(Y, \mathbb{B}_Y)$ dos espacios medibles. Por definición, estos espacios medibles son isomorfos si existe una transformación $j : X \longrightarrow Y$, inyectiva y completa, tal que tanto j como j^{-1} son medibles.

Un espacio medible $(E, \mathbb{B})$ se llama estandar si existe un espacio polaco (metrizable, completo y separable) X, tal que $(E, \mathbb{B})$ sea isomorfo al espacio medible $(Y, \mathbb{B}_Y)$ siendo Y un subconjunto boreliano de X, y $\mathbb{B}_Y$ la σ-álgebra traza de los borelianos de X, $\mathbb{B}_X$, sobre Y.

Por el teorema de isomorfismo entre espacios medibles, (K.R. Parthasaraty (1)), dos espacios medibles son isomorfos si, y sólo si, tienen la misma cardinalidad. Por consiguiente (K.Kuratowski (1)), si $(E, \mathbb{B})$ es un espacio medible estandar ha de ser isomorfo a uno de los dos espacios medibles siguientes: $(I, \mathbb{B}_I)$ ó $(J, \mathbb{B}_J)$, donde $I = [0,1]$ con $\mathbb{B}_I$ la σ-álgebra de los borelianos de I, y J es un subconjunto cerrado numerable de I, con $\mathbb{B}_J$ como la clase de las partes de J. Este isomorfismo que caracteriza a un espacio medible estandar según su cardinalidad, lo designaremos por q, y diremos que la aplicación q sobre E con valores en I ó J, es una coordenada del espacio medible $(E, \mathbb{B})$. Naturalmente, si p es un automorfismo de $(I, \mathbb{B}_I)$ ó $(J, \mathbb{B}_J)$, está claro que $p \circ q$ es tambien una coordenada del espacio medibles $(E, \mathbb{B})$, y por consiguiente, diremos que $p \circ q$ es la coordenada general del espacio medible estandar $(E, \mathbb{B})$.

La definición de espacio medible estandar que aquí se ha considerado no exige que $\mathbb{B}$ sea numerablemente generada, como en K.R. Parthasaraty (1), ya que esta propiedad es una consecuencia del isomorfismo con un subespacio medible boreliano de un espacio polaco.

Un espacio medible estandar tal como ha sido definido - no está dotado de una estructura topológica previa, pero sin embargo, caso de que esta fuese necesaria siempre puede introducirse una τ_q-topología a través de una q coordenada. - Esta τ_q-topología se introduce de modo que el isomorfismo q sea realmente un homeomorfismo. Además, si q y q' son dos - coordenadas del espacio medible estandar $(E, \mathbb{B})$, entonces las τ_q y $\tau_{q'}$ topologías son equivalentes, es decir, los espacios topológicos (E, τ_q) y $(E, \tau_{q'})$ son homeomorfos.

Sea W_q la familia numerable de funciones $\{q^0, q^1, q^2, \ldots\}$ definida a partir de una coordenada q del espacio medible estandar $(E, \mathbb{B})$. Entonces, como puede verse en E.B. Dynkin (5), se tiene las siguientes propiedades:

1ª) Si $\mathbb{H}$ es una familia de funciones que contiene a W_q, que es cerrada para las combinaciones lineales y el paso al límite de sucesiones inferiormente acotadas, entonces la familia $\mathbb{H}$ contiene a todas las funciones $\mathbb{B}$-medibles y acotadas.

2ª) Si designamos por $M^1(E)$ al espacio de todas las medidas de probabilidad sobre $(E, \mathbb{B})$, se tiene que la familia W_q separa a $M^1(E)$, es decir, si $m_1, m_2 \in M^1(E)$, y $m_1 \neq m_2$, existe $f \in W_q$ tal que $m_1(f) \neq m_2(f)$.

3ª) Si una sucesión de medidas $m_n \in M^1(E)$ es tal que $m_n(f)$ es convergente para cada $f \in W_q$, existe entonces una medida m de $M^1(E)$ tal que $m(f) = \lim_n m_n(f)$ para cada $f \in W_q$.

2.- ESPACIOS MEDIBLE CONVEXOS.

Diremos que un espacio medible $(E, \mathbb{B})$ es convexo, ó que es un espacio medible convexo, si está dotado de una estructura convexa, es decir, si a cada medida $m \in M^1(E)$ podemos hacer corresponder de forma unívoca un elemento $b(m) \in E$, llamado baricentro de m, ó centro de gravedad de la medida m.

Consideremos un espacio medible estandar $(E, \mathbb{B})$ tal que sus elementos $x \in E$ estan caracterizados como funciones $x(a)$ sobre un cierto conjunto paramétrico A, es decir, si $x \in E$ entonces $x : A \to \mathbb{R}$ es una función, y donde $\mathbb{B}$ es la σ-álgebra determinada sobre E de modo que las funciones $F_a : E \to \mathbb{R}$, definidas por $F_a(x) = x(a)$, para cada $a \in A$, sean medibles, considerando a $\mathbb{R}$ como espacio medible con la σ-álgebra de los borelianos. Entonces, para cada $m \in M^1(E)$ el elemento $b(m)$ de E está definido por la relación

$$b(m)(a) = \int_E x(a)\, m(dx) \qquad a \in A$$

Los espacios medibles convexos que consideraremos en el presente trabajo tendran las propiedades descritas, y desde ahora, cuando en un espacio medible estandar $(E, \mathbb{B})$ consideremos las estructuras medibles y convexas determinadas de esta manera, diremos que se ha dotado al espacio medible estandar de su <u>estructura medible y convexa natural</u>.

Un elemento x de un espacio medible convexo $(E, \mathbb{B})$ se dice que es <u>extremal</u> ó <u>vértice</u> si de la relación $x = b(m)$ para $m \in M^1(E)$, se sigue que ha de ser $m = \delta_x$, es decir, un elemento es extremal si sólo es centro de gravedad de la medida concentrada sobre él.

El conjunto de los vértices o puntos extremales lo representamos por E_e, y en general no es $\mathbb{B}$-medible. Sin embargo, si $E_e \in \mathbb{B}$, entonces diremos que el espacio medible convexo $(E, \mathbb{B})$ es un <u>simplex</u> si todo elemento $x \in E$ puede ser representado como baricentro de una medida de $M^1(E_e)$.

En el desarrollo posterior de este trabajo, nos encontraremos frecuentemente con espacios medibles convexos cuyos - elementos son medidas. En estos casos la caracterización de los elementos extremales que será usada es la siguiente: Si $(M, \mathbb{B}_M)$ es un espacio medible convexo, un elemento $m \in M$ es extremal ó vértice si de la relación $m = c_1 m_1 + c_2 m_2$, con $c_1, c_2 > 0$, $c_1 + c_2 = 1$, $m_1, m_2 \in M$, se sigue que $m = m_1 = m_2$. Naturalmente, esta caracterización de los elementos extremales es independiente del hecho que M sea o no un espacio de medidas, pero cuando éste es el caso, estacaracterización es especialmente cómoda por no caer en la redundancia de medidas sobre medidas.

Sea $(E, \mathbb{B})$ un espacio medible convexo estandar en el que sea posible considerar las estructuras medibles y convexas naturales. Supongamos además que $(E, \mathbb{B})$ sea un simplex. Se - tiene entonces que para cada $x \in E$, existe una medida $m_x \in M^1(E_e)$ tal que $x = b(m_x)$, es decir, se tiene la siguiente representación integral

$$
\begin{aligned}
x(a) &= \int_E \hat{x}(a)\ m_x(d\hat{x}) \\
&= \int_{E_e} \hat{x}(a)\ m_x(d\hat{x})
\end{aligned}
\qquad a \in A
$$

es decir, el elemento $x \in E$ está determinado a partir del conocimiento de los vértices o puntos extremales por la medida m_x. Este hecho será usado con gran frecuencia en desarrollos posteriores, y es, en cierto modo, la idea central de todas las representaciones integrales que seran consideradas.

Naturalmente, los simplexs finito dimensionales, es decir aquellos en los que E_e tiene un número finito de elementos, responden a esta situación más general. En el caso de un simplex finito dimensional una cara está determinada por un subconjunto de vértices, y ésta será tambien la situación en el caso general, pero, sin embargo, el concepto de cara que vamos a dar a continuación no esta basado en la estructura de simplex, ya que pueden considerarse las caras en un espacio medible convexo sin necesidad de que sea simplex.

En un espacio medible convexo estandar $(E, \mathbb{B})$, decimos que un conjunto $C \in \mathbb{B}$ es una <u>cara</u> si de la relación $m \in M^1(E)$ y $b(m) \in C$, se sigue necesariamente que $m \in M^1(C)$. Es decir, en una cara C, sus elementos pueden ser descritos sin necesidad de otros elementos ajenos a C.

Naturalmente, si $(E, \mathbb{B})$ es un simplex, entonces toda cara C es tambien un simplex $(C, \mathbb{B}_C)$, siendo $\mathbb{B}_C$ la σ-álgebra traza de $\mathbb{B}$ sobre C, y el conjunto de los puntos extremales de C está determinado por la relación $C_e = C \cap E_e$.

En un simplex $(E, \mathbb{B})$ diremos que dos caras C y D son complementarias si $C_e \cap D_e = \emptyset$, y $E_e = C_e \cup D_e$. Así pués, si existen dos caras complementarias C y D, todo elemento $x \in E$ que no pertenezca a $C \cup D$ puede ser representado en la forma

$$x(a) = c_1 \int_{D_e} \hat{x}(a)\, m_1(d\hat{x}) + c_2 \int_{C_e} \hat{x}(a)\, m_2(d\hat{x}) \qquad a \in A$$

donde $m_1 \in M^1(D_e)$, $m_2 \in M^1(C_e)$, $c_1 + c_2 = 1$, c_1 y c_2 positivos, y además,

$$m_1(\cdot) = \frac{m_x(\cdot \cap D_e)}{m_x(D_e)} \quad , \quad m_2(\cdot) = \frac{m_x(\cdot \cap C_e)}{m_x(C_e)}$$

$$c_1 = m_x(D_e) \quad \text{y} \quad c_2 = m_x(C_e) .$$

3.- ISOMORFISMO ENTRE ESPACIOS MEDIBLES CONVEXOS.

Sean $(E, \mathbb{B})$ y $(E', \mathbb{B}')$ dos espacios medibles convexos. Diremos que son isomorfos si existe un isomorfismo j entre los espacios medibles $(E, \mathbb{B})$ y $(E', \mathbb{B}')$, tal que además, para toda medida $m \in M^1(E)$, se tenga que $j(b(m)) = b(m')$, donde $m' \in M^1(E')$ es tal que $m'(G') = m(j^{-1}(G'))$ para todo $G' \in \mathbb{B}'$.

Se sigue entonces de la misma definición que un isomorfismo j entre espacios medibles convexos transforma los puntos extremales en puntos extremales a su vez, es decir, se tiene que $j(E_e) = E'_e$, y por consiguiente, un isomorfismo j

transforma un simplex en otro simplex.

Además, si C es una cara del espacio medible convexo E, se tiene que j(C) es una cara del espacio medible convexo E', ya que si $m' \in M^1(E')$ es tal que $b(m') \in j(C)$, entonces existe $m \in M^1(E)$ tal que $j(b(m)) = b(m') \in j(C)$, por lo que $m \in M^1(C)$ y por consiguiente $m' \in M^1(j(C))$.

Por otra parte, ya que j es inyectiva, si (E, $\mathbb{B}$) es simplex y tiene además dos caras complementarias C y D, las imágenes j(C) y j(D) son a su vez caras complementarias del simplex (E', $\mathbb{B}'$).

En apartados posterioresde este trabajo, se hará un uso bastante frecuente de estas propiedades del isomorfismo entre simplexs.

4.- PROCESOS DE MARKOV.

Sea $(\Omega, \mathcal{N})$ un espacio medible, y $\mathcal{N}_s$ una familia creciente de sub-σ-álgebras de $\mathcal{N}$ sobre Ω. Consideremos como espacio de estados un espacio medible estandar (E, $\mathbb{B}$), mientras que denotaremos por $\mathbb{R}_+$ la semirecta positiva,que será considerada como el espacio en que varía el tiempo t.

Con cada par $(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, asociamos un punto del espacio E que será denotado por $x_t(\omega)$ ó $x(t,\omega)$, de tal modo que la aplicación $x_t(\cdot): \Omega \to E$ sea, para cada $t \in \mathbb{R}_+$, una variable aleatoria $\mathcal{N}/\mathbb{B}$-medible, y $\mathcal{N}_t$-adaptada.

Una medida de probabilidad P sobre el espacio medible

$(\Omega,\mathcal{N})$ se dice que es un proceso de Markov si se tiene la relación siguiente

$$P(x_t \in G|\mathcal{N}_s) = P(x_t \in G\,|\,x_s) \quad \text{c.s. } P$$

cualesquiera que sean $G \in \mathbb{B}$, $t > s$ de $\mathbb{R}_+$.(aquí hemos usado la representación habitual de "$|x_s)$" para indicar la σ-álgebra engendrada por la variable aleatoria x_s).

Un proceso de Markov se dice que es homogéneo si la función $P(x_t \in G|x_s)$ depende en t y s sólo de la diferencia (t-s) y representaremos esta función en la forma $p(t-s,x_s,G)$. Aunque la homogeneidad aquí considerada es sólo con respecto al tiempo, y por ello deberíamos de decir más precisamente procesos de Markov temporalmente homogénees, y dado que no vamos a considerar otro tipo de homogeneidad, suprimiremos la palabra "temporalmente" por razones de sencillez.

La función $p(t,x,G)$ a la que hemos hecho referencia va a desempeñar una papel fundamental en el transcurso del presente trabajo, y por ello le dedicamos un apartado. Esta función recibe el nombre de función de transición para indicar que es la función de probabilidad que determina la evolución del fenómeno.

Sin embargo, la definición de lo que es una función de transición no depende de que consideremos o no procesos de Markov y pueden ser estudiadas independientemente de éstos. Este es el caso en el presente trabajo, en èl que a partir de una función de transición dada construiremos una familia de procesos de Markov.

5.- FUNCIONES DE TRANSICION.

Sea $(E, \mathbb{B})$ un espacio medible estandar. En general, un núcleo es una función sobre $E \times \mathbb{B}$, que representaremos por $N(x,L)$, $x \in E$, $L \in \mathbb{B}$, tal que $N(x,.)$ es una medida sobre $\mathbb{B}$ para todo $x \in E$, y, para todo $L \in \mathbb{B}$ la función $N(.,L)$ es $\mathbb{B}$-medible.

Una función de transición, que representaremos desde ahora por la notación $p(t,x,L)$, es una familia de núcleos subindicada por el parámetro $t \in \mathbb{R}_+$, sobre el espacio medible estandar $(E, \mathbb{B})$, que verifica las siguientes propiedades:

FT1.- Para cada $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in E$, fijos, $p(t,x,.)$ es una medida sobre $\mathbb{B}$, que es subestocástica, es decir que $p(t,x,E) \leq 1$.

FT2.- Para cada $t \in \mathbb{R}_+$, $L \in \mathbb{B}$, fijos, $p(t,.,L)$ es una función sobre E que es $\mathbb{B}$-medible.

FT3.- Se verifica la siguiente relación, conocida con el nombre de ecuación de Chapman-Kolmogorov,

$$\int_E p(t,x,dy)\ p(s,y,L) = p(t+s,x,L)$$

para cualesquiera $t,s \in \mathbb{R}_+$, $x \in E$, $L \in \mathbb{B}$.

Las condiciones FT1 y FT2 expresan el hecho de que para cada $t \in \mathbb{R}_+$ una función de transición es un núcleo sobre el espacio medible estandar $(E, \mathbb{B})$. El hecho de que la medida sea subestocástica se expresa tambien diciendo que la función de transición es submarkoviana, mientras que si $p(t,x,E) = 1$ para todos $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in E$, diremos que la función de transición es markoviana. Algunas veces indicaremos esta situación refiriendonos a núcleos submarkovianos ó a núcleos markovianos según la terminología usal establecida en P.A.Meyer (1).

Del hecho de que la función de transición sea submarkoviana se deduce de FT3 que cualesquiera que sean $s,t\in\mathbb{R}_+$

$$p(t+s,x,E) \leq p(t,x,E) \qquad x\in E$$

y por consiguiente, $p(t,x,E)$ es una función no-creciente en la variable t, por lo que existe el límite

$$p(0+,x,E) = \lim_{t\downarrow 0} p(t,x,E)$$

para todo $x\in E$.

En el caso en que $p(0+,x,E) = 1$, para todo $x\in E$, se dice que la función de trnasición es <u>normal</u>. Esta definición de normalidad es la dada por E.B.Dynkin, y es una condición de normalización adecuada para el estudio de las funciones excesivas que veremos más adelante, pero que no coincide con el concepto de normalidad de R.M.Blumenthal-R.K.Getoor (1) más adecuada para la formulación de la Ley 0-1 y el estudio de la regularidad.

Asociado con una función de transición $p(t,x,L)$ existe una familia de operadores P_t que actuan sobre las funciones $\mathbb{B}$-medibles positivas, $f\in\mathbb{B}$, de la forma $f\longrightarrow P_tf$ definida por

$$x\in E \qquad P_tf(x) = \int_E f(y)\, p(t,x,dy)$$

y sobre las medidas σ-finitas m sobre $\mathbb{B}$, de la forma - $m\longrightarrow mP_t$ definida por

$$L\in\mathbb{B} \qquad mP_t(L) = \int_E m(dy)\, p(t,y,L)$$

La relación de Chapman-Kolmogorov FT3 expresa que la familia de oprradores P_t verifica la relación de semigrupo

$$P_t\, P_s = P_{t+s}\ .$$

Si una función de transición $p(t,x,L)$ es tal que para - cada $L \in \mathbb{B}$ fijo, es medible en el par (t,x) de $\mathbb{R}_+ \times E$, entonces se dice que la función de transición es <u>medible</u>, o que es una familia medible de núcleos submarkovianos. En éste caso, es - decir, si suponemos que la función de transición p es medible, para cada $c > 0$ podemos definir un operador G_c asociado con elsemigrupo de operadores P_t, que actua a su vez sobre funcio nes $f \in \mathbb{B}$ y sobre medidas σ-finitas en la forma

$$G_c f(x) = \int_0^\infty e^{-ct} P_t f(x)\, dt \qquad x \in E$$

$$mG_c(L) = \int_0^\infty e^{-ct} mP_t(L)\, dt \qquad L \in \mathbb{B}$$

Del hecho de que la familia de operadores P_t sea un se- migrupo se sigue que la familia de operadores G_c, $c > 0$, es - la familia resolvente correspondiente, ya que verilica la lla mada <u>ecuación resolvente</u>

$$G_c - G_{c'} = (c' - c) G_c G_{c'} \qquad c, c' > 0 .$$

El operador G_c se llama frecuentemente el <u>c-operador de Green</u>, y está asociado con el núcleo $g_c(x,L)$ obtenido de la función de transición p mediante la relación

$$g_c(x,L) = \int_0^\infty e^{-ct} p(t,x,L)\, dt$$

que recibe el nombre de <u>c-núcleo de Green</u>. Si existen los co- rrespondientes núcleos $g(x,L)$ y operador G para $c = 0$, reciben el nombre de <u>núcleo de Green</u> y <u>operador de Green</u>,u <u>operador potencial</u>, respectivamente.

6.- FUNCIONES DE COTRANSICION.

En el apartado anterior hemos considerado las funciones de transición como una famila de núcleos sobre un espacio medible estandar. En éste, consideraremos familias de conúcleos.

Un conúcleo sobre un espacio medible estandar $(E, \mathbb{B})$ es una función $\hat{N}$ sobre $\mathbb{B}\times E$ tal que para cada $L\in\mathbb{B}$ fijo, la función $\hat{N}(L,\cdot)$ sobre E es $\mathbb{B}$-medible, y para cada $x\in E$ fijo, la función de conjunto $\hat{N}(\cdot,x)$ sobre $\mathbb{B}$ es una medida. En definitiva, el concepto de conúcleo es, en cierto modo, dual al concepto de núcleo: mientras un núcleo está definido sobre el espacio producto $E\times\mathbb{B}$, un conúcleo está definido sobre el producto $\mathbb{B}\times E$, pero conservando las mismas propiedades. Así pués la diferencia entre núcleos y conúcleos se manifiesta por el momento de una forma sólo formal, pero veremos más adelante que en el caso de los procesos de Markov esta diferencia formal se traduce en una diferencia más acusada al menos desde el punto de vista del significado real.

Desde ahora todos aquellos entes que consideremos a partir de un conúcleo serán denominados adjuntando el prefijo co- a la denominación usual del ente equivalente correspondiente a un núcleo, y seran denotados, aparte de la alternancia ya señalada, con la ayuda del acento ^ .

Una función de cotransición sobre un espacio medible estandar $(E, \mathbb{B})$ es simplemente una familia de conúcleos sobre dicho espacio medible, subindicada por el parámetro $t\in\mathbb{R}_+$, y la denotaremos desde ahora por $\hat{P}(t,L,x)$, verificando las siguientes propiedades:

FC1.-Para cada $t\in\mathbb{R}_+$, $x\in E$, $\mathfrak{p}(t,.,x)$ es una medida subestocás tica sobre $\mathbb{B}$.

FC2.-Para cada $t\in\mathbb{R}_+$, $L\in\mathbb{B}$, $\mathfrak{p}(t,L,.)$ es una función sobre E $\mathbb{B}$-medible.

FC3.-Si $s,t\in\mathbb{R}_+$, $x\in E$, $L\in\mathbb{B}$, se tiene la ecuación de Chapman-Kolmogorov:

$$\mathfrak{p}(t+s,L,x) = \int_E \mathfrak{p}(t,L,y)\ \mathfrak{p}(s,dy,x)$$

Las mismas consideraciones que hicimos antes sobre las funciones de transición se trasladan de la forma natural a las funciones de cotransición que estamos considerando ahora. Así los cooperadores $\hat{P}_t$ y $\hat{G}_c$ $c>0$, constituyen el semigrupo y la familia resolvente (en el caso de que exista, si es una función de cotransición medible) asociados a $\mathfrak{p}(t,L,x)$.

Como ya señalamos antes, las diferencias entre una función de transición y una función de cotransición hasta ahora son sólo formales, pero podemos ya señalar una diferencia conceptual muy importante. En la definición de lo que es un proceso de Markov, el "pasado" y el "futuro" juegan un papel simétrico en la llamada propiedad de Markov, pero esta simetría se rompe al aparecer el concepto de función de transición, ya que ésta función proporciona la información cuantitativa de las probabilidades de evolución del sistema desde el presente conocido hacia un futuro, de hecho $p(t,x,L)$ viene a indicar la probabilidad de que estando el sistema en el presente en el estado x, un tiempo t después (futuro), el sistema se encuentre en un estado del conjunto L. Una función de cotransición reestablece la simetría perdida, ya que se interpreta como una probabilidad hacia el pasado, y por consiguiente para mantener la simetría de la definición inicial es necesario introducir el concepto de función de cotransición como compensador del concepto de función de transición tan necesario para el desarrollo de la teoria. Naturalmente, éste no es un motivo suficiente para introducir nuevos conceptos que dificulten la teoría, pero desde luego si tiene un determinado peso relativo.

El porqué de la consideración de las funciones de transición se verá más adelante cuando consideremos las consecuencias de la hipótesis de dualidad que vamos a formular.

7.- HIPOTESIS DE DUALIDAD DE KUNITA-WATANABE.

Sea m una medida sobre $\mathbb{B}$, desde ahora adoptamos la notación:

$$\langle f,g\rangle_m = \int_E f(x)\, g(x)\, m(dx)$$

ó simplemente $\langle f,g\rangle$ si la medida m se sobreentiende. Las funciones f y g que se consideran son positivas y $\mathbb{B}$-medibles.

La hipótesis de dualidad de Kunita-Watanabe establece lo siguiente: Sea $p(t,x,L)$ una función de transición sobre el espacio medible estandar $(E, \mathbb{B})$, existe entonces una medida w sobre $\mathbb{B}$, σ-finita, y una función de cotransición, sobre el mismo espacio medible, $\hat{p}(t,L,x)$ para las que se verifica

HD1.- Para todo $c > 0$, si G_c y $\hat{G}_c$ son las familias resolventes y corresolventes asociadas a las funciones p y $\hat{p}$ respectivamente, se tiene para cualesquiera $f, g \in \mathbb{B}$

$$\langle f, \hat{G}_c g \rangle_w = \langle G_c f , g \rangle_w$$

HD2.- Los núcleos de Green $g_c(x,L)$ y los conúcleos de Green $\hat{g}_c(L,y)$ son, para todo $c > 0$ y todos $x, y \in E$, absolutamente continuos respecto de la medida w.

Esta hipótesis de dualidad, formulada por vez primera por H.Kunita y T.Watanabe, establece la existencia de una función de cotransición asociada a una función de transición mediante una medida de dualidad w, y constituye la hipótesis central y básica para todo el desarrollo posterior, y sirve de base para el estudio de la Teoria del Potencial asociada a los procesos de Markov, en donde la medida w recibe el nombre de medida de referencia, mientras que aquí adoptaremos la terminología de <u>medida de la dualidad</u>.

8.- FUNCIONES EXCESIVAS Y COEXCESIVAS.

Sea p una función de transición medible sobre el espacio medible estandar $(E, \mathbb{B})$. Consideraremos la función p dada fija en todo este apartado. Sean P_t el semigrupo y G_c, $c>0$, la familia resolvente asociados con la función de transición p.

Una función $f \in \mathbb{B}$ se dice que es <u>p-supermedia</u> ó simplemente <u>supermedia</u> si p se sobreentiende, si para todos $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in E$ se tiene que $P_t f(x) \leq f(x)$.

Una función f p-supermedia se dice que es <u>p-excesiva</u> si

$$\lim_{t \downarrow 0} P_t f(x) = f(x)$$

para todo $x \in E$.

Dado que el operador $G_c, c>0$, y el semigrupo P_t estan relacionados, las definiciones anteriores pueden tanbiem expresarse en términos de éstos, de la forma siguiente:

Una función $f \in \mathbb{B}$ se dice que es p-supermedia si

$$c\, G_c f(x) \leq f(x)$$

para todos $c>0$, $x \in E$.

Una función p-supermedia es p-excesiva si

$$\lim_{c \to \infty} cG_c f(x) = f(x)$$

para todo $x \in E$.

La equivalencia de estas definiciones, cada una de ellas es adecuada para el establecimientos de distintas propiedades, se obtiene de la relación

$$cG_c f(x) = \int_0^\infty e^{-u}\, P_{\frac{u}{c}} f(x)\, du$$

Una función $f \in \mathbb{B}$ se dice que es <u>p-r-supermedia</u> ó simplemente <u>r-supermedia</u>, con $r \geqslant 0$, si es supermedia con respecto al semigrupo de operadores $P_t^r = e^{-rt} P_t$. Análogamente, una función f que es p-r-supermedia se dice que es <u>p-r-excesiva</u> si es excesiva con respecto al semigrupo P_t^r. En términos de los operadores de Green estas definiciones se expresan en la forma siguiente: $f \in \mathbb{B}$ es p-r-supermedia si

$$c\, G_{c+r}\, f(x) \leq f(x)$$

para todo $x \in E$, y todo $c>0$. Si además se tiene que

$$\lim_{c \to \infty} c\, G_{c+r} f(x) = f(x)$$

entonces f es p-r-excesiva.

Dado que la notación puede verse cada vez más compleja debido a la adición de más y más caracteres, en el desarrollo posterior relajaremos un poco esta notación al sobreentenderse la función de transición p.

Propiedades de las funciones supermedias y excesivas fáciles de obtener son las siguientes:

* Las contantes no negativas son supermedias.

En efecto, por ser $p(t,x,E) \leq 1$, se sigue que, si a es - una constante positiva

$$P_t a = p(t,x,E) \cdot a \leq a .$$

* Bajo la hipótesis de normalización de p, es decir si p es una función de transición normal en el sentido de E.B.Dynkin entonces, las contantes no negativas son excesivas.

Basta con tomar límite y ver que

$$\lim_{t \downarrow 0} P_t a = p(0+,x,E)\, a = a .$$

Las siguientes propiedades son un poco más complejas de demostrar, y su comprobación puede verse en las referencias de R.M.Blumenthal-R.K.Getoor (1), R.K.Getoor (1),P.A.Meyer (1).

* Si f_n es una sucesión no decreciente de funciones excesivas, entonces, $\lim_n f_n$ es una función excesiva.

* Si f y g son funciones excesivas tambien lo es $f \wedge g$.

Esta propiedad es importante desde el punto de vista técnico en el sentido de que si f es no acotada, entonces puede ser aproximada por la sucesión $f_n = f \wedge n$, y limitarnos sólo a funciones acotadas.

* Si f y g son excesivas, f+g es excesiva.

Esta propiedad es sencilla de probar, así como la siguiente:

* Si $c \geqslant 0$, y $f \in \mathbb{B}$ entonces $G_c f$ es c-excesiva.

La siguiente propiedad de las funciones supermedias y excesivas vamos a demostrarla puesto que sienta un poco los antededentes del resultado más importante del apartado 10º posterior.

*** Sea f una función supermedia. Definimos, para cada x de E la función $\tilde{f}$ de la siguiente manera

$$\tilde{f}(x) = \lim_{c \to \infty} c\, G_c\, f(x)$$

Entonces, se tiene que

1º) la función f es excesiva.

2º) la función f es la mayor función excesiva dominada por f.

3º) las funciones $\tilde{f}$ y f coinciden salvo en un conjunto de potencial nulo.

La función $\tilde{f}$ se llama la <u>regularizada excesiva</u> de f.

La propiedad 3º) no la demostramos aquí, y puede consultarse para ello P.A.Meyer (1) IX-58/59. Demostramos primero la propiedad 2º). Sea h una función excesiva dominada por f. Entonces, para todo $c > 0$, se tiene que

$$c\ G_c h(x) \leq c\ G_c f(x) \qquad \forall x \in E$$

y por consiguiente, tomando límite cuando $c \to \infty$, por ser h excesiva se tiene que $h \leq \tilde{f}$. El hecho de ser $\tilde{f} \leq f$ se sigue del siguente argumento que implica además la existencia de la regularizada. De la ecuación resolvente y por ser f una función supermedia, se tiene que para cada $x \in E$ la función de c $c \longrightarrow cG_c f(x)$ es no decreciente, y por consiguiente existe el límite cuando $c \to \infty$, es decir, existe la regularizada excesiva de la función f, pero además, debido a la monotonía

$$\lim_{c\to\infty} c\, G_c\, f(x) = \tilde{f}(x) \leq f(x)$$

para cualquier $x \in E$.

Veamos ahora la propiedad 1º), es decir, $\tilde{f}$ es excesiva. Suponiendo que f sea acotada, ya que en caso contrario podríamos considerar la sucesión de funciones $f_n = f \wedge n$, tenemos por el Teorema de la Convergencia Dominada que

$$G_r\, \tilde{f}(x) = G_r \lim_{c\to\infty} cG_c f(x) = \lim_{c\to\infty} c\, G_r G_c f(x)$$

para cualquier $r > 0$, y $x \in E$. Aplicando ahora la ecuación resolvente

$$\begin{aligned} c\, G_r G_c f(x) &= G_r f(x) - G_c f(x) + r\, G_r G_c f(x) = \\ &= G_r f(x) - G_c(\, f(x) - r\, G_r f(x)\,) \end{aligned}$$

y puesto que $f(x) \geqslant rG_r f(x)$ un simple cálculo muestra que

$$\lim_{c\to\infty} G_c(\, f(x) - rG_r f(x)\,) = 0$$

por lo que de la relación anterior obtenemos que para todo r positivo $G_r \tilde{f}(x) = G_r f(x)$. Así pues, de

$$rG_r \tilde{f}(x) = rG_r f(x) \nearrow \tilde{f}(x)$$

cuando $r \to \infty$, se sigue que $\tilde{f}$ es excesiva como queríamos probar.

Hasta ahora hemos considerado funciones supermedias y excesivas asociadas con una función de transición dada p, y naturalmente, podemos considerar las análogas funciones asociadas con una función de cotransición $\hat{P}$. Esto vamos a hacer ahora.

Sea $\hat{P}$ una función de cotransición sobre el espacio medible estandar $(E, \mathbb{B})$, que supondremos fija desde ahora.

Una función $f \in \mathbb{B}$ se dice que es <u>$\hat{P}$-supermedia</u> ó <u>cosupermedia</u> (para notar que estamos tratando con una función de cotransición), si para cualesquiera $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in E$, se tiene

$$\hat{P}_t f(x) \leq f(x) .$$

Si, además se tiene que para todo $x \in E$

$$\lim_{t \downarrow 0} \hat{P}_t f(x) = f(x)$$

entonces se dice que es <u>$\hat{P}$-excesiva</u> o <u>coexcesiva</u>.

Haciendo uso de la relación

$$c\, \hat{G}_c f(x) = \int_0^\infty e^{-u}\, \hat{P}_{\frac{u}{c}} f(x)\, du$$

se pueden transcribir estas definiciones en términos de los cooperadores de Green.

Análogamente a los desarrollos anteriores, pueden ser definidas las funciones <u>r-coexcesivas</u> para $r \geq 0$, como aquellas que son coexcesivas para el semigrupo $\hat{P}^r_t = e^{-rt}\, \hat{P}_t$. Las propiedades semejantes a las establecidas antes pueden ser formuladas en términos de funciones coexcesivas, así como el estudio de la <u>regularizada coexcesiva</u> de una función cosupermedia.

9.- <u>MEDIDAS EXCESIVAS Y COEXCESIVAS</u>.

La teoria de la dualidad en los procesos de Markov tiene

tiene su fundamento en la relación entre las funciones excesivas y las medidas coexcesivas, y esta relación será la idea base del apartado 10º siguiente. En éste vamos a dar las definiciones necesarias para el desarrollo de aquél y es substancialemente análogo al apartado anterior. Por ello no se explicitan las propiedades que se extienden de forma natural de las funciones excesivas a las medidas excesivas.

Sea p una función de transición sobre un espacio medible estandar $(E, \mathbb{B})$. Una medida σ-finita m sobre $\mathbb{B}$ se dice que es p-excesiva si se verifican las dos siguientes relaciones:

$$m\,P_t\,(L) \leq m(L) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}_+$$

$$\lim_{t \downarrow 0} m\,P_t\,(L) = m(L) \qquad \forall\, L \in \mathbb{B}$$

La rpimera de estas relaciones caracteriza a las medidas llamadas p-supermedias. Dada la relación estrecha entre el semigrupo de operadores P_t y su familia resolvente G_c, $c>0$, está claro que las medidas p-supermedias y las p-excesivas pueden ser caracterizadas en términos de estos operadores de Green.

Igual que ocurría con las funciones, dada una medida p-supermedia m, la relación

$$\tilde{m}(L) = \lim_{c \to \infty} c\; mG_c(L)$$

defina una medida p-excesiva llamada la regularizada excesiva de la medida m.

Naturalmente, si partimos de una función de cotransición $\hat{p}$ sobre un espacio medible estandar $(E, \mathbb{B})$, podemos definir las medidas $\hat{p}$-excesivas ó coexcesivas y las medidas $\hat{p}$-supermedias, ó cosupermedias. Pero estos aspectos no lo desarrollamos aquí por no caer en la repetición, considerando que las exposiciones anteriores son suficientes para la comprensión de la mecánica de éstos conceptos.

10.- ISOMORFISMO ENTRE LOS ESPACIOS S_n^p Y $R_h^{\hat{p}}$.

Sea p una función de transición sobre el espacio medible estandar (E, $\mathbb{B}$), que supondremos normal en el sentido de E.B. Dynkin definido anteriormente en el apartado 5. Suponemos que se verifica la hipótesis de dualidad de Kunita-Watanabe establecida en el apartado 7, conservando la misma notación.

Sea $h \in \mathbb{B}$ estrictamente positiva, $h > 0$, y designemos por n la medida sobre $\mathbb{B}$ definida por

$$n(dx) = h(x)\ w(dx)$$

siendo w la medida de la dualidad.

Consideremos ahora los espacios de funciones siguientes:

El espacio de todas las funciones f $\mathbb{B}$ que son p-excesivas y normalizadas por la condición $n(f) = \langle f,h \rangle_w = 1$. Este espacio lo designaremos desde ahora por la notación S_n^p .

El espacio de todas las medidas σ-finitas m sobre $\mathbb{B}$ que son $\hat{p}$-excesivas (coexcesivas) y normalizadas por la condición $m(h) = \langle 1,h \rangle_m = 1$. Este espacio será designado desde ahora por la notación $R_h^{\hat{p}}$.

Antes de establecer el Teorema de Isomorfismo entre estos espacios, resultado que es el fundamental de este apartado y muy importante el en desarrollo posterior, vamos a esta blecer dos resultados parciales interesantes: El primero es - relativo a la medida de la dualidad w, y el segundo se refiere a la existencia y propiedades de la función de Green.

Lema.- La medida w es p-supermedia y $\hat{p}$-supermedia, es decir, w es supermedia y cosupermedia.

Vamos a ver que para todo $c > 0$, se tiene

$$c\, wG_c \leq w$$

$$c\, w\hat{G}_c \leq w$$

En efecto, consideremos $f \in \mathbb{B}$, se tiene entonces que

$$cwG_c(f) = \langle 1, cG_c f\rangle_w = \langle c\hat{G}_c 1, f\rangle_w \leq \langle 1, f\rangle_w = w(f)$$

ya que la constante 1 es supermedia y cosupermedia. Análogamente se demuestra la segunda relación. Tomando como fundión f el indicador de $L \in \mathbb{B}$, se obtienen las expresiones que caracterizan las medidas supermedias y cosupermedias.

Lema.--Para cada $c > 0$ existe una función positiva $\tilde{g}_c(x,y)$ $\mathbb{B}\times\mathbb{B}$-medible talque para todo $L \in \mathbb{B}$, $x,y \in E$:

$$g_c(x,L) = \int_E \tilde{g}_c(x,y)\; w(dy)$$

$$\hat{g}_c(L,y) = \int_E \tilde{g}_c(x,y)\; w(dx)$$

Además, $\tilde{g}_c(x,\cdot)$ es c-coexcesiva y $\tilde{g}_c(\cdot,y)$ es c-excesiva.

Para cada $c > 0$, la función $\tilde{g}_c(x,y)$ es única y se llama la c-función de Green, y si $c_1 \leq c_2$ se tiene

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{c_1}(x,y) &= \tilde{g}_{c_2}(x,y) + (c_2 - c_1)\int_E \tilde{g}_{c_1}(x,z)\,\tilde{g}_{c_2}(z,y)\; w(dz)\\ &= \tilde{g}_{c_2}(x,y) + (c_2 - c_1)\int_E \tilde{g}_{c_2}(x,z)\,\tilde{g}_{c_1}(z,y)\; w(dz)\end{aligned}$$

Para probar este Lema comenzamos primero por demostrar la existencia y despues veremos la unicidad de $\tilde{g}_c(x,y)$.

De las propiedades de los núcleos y conúcleos de Green, y del Lema1.7 de E.B.Dynkin (6), se sigue que si una función $F(x,y)$ sobre $E\times E$ es $\mathbb{B}\times\mathbb{B}$-medible, entonces las funciones:

$$G_cF(x,y) = \int_E F(z,y)\, g_c(x,dz)$$

$$\hat{G}_cF(x,y) = \int_E F(x,z)\, \hat{g}_c(dz,y)$$

son tambien $\mathbb{B}\times\mathbb{B}$-medibles para cada $c>0$.

Además, después del Lema4.1 de E.B.Dynkin (6), o bien - aplicando el resultado VIII-10 de P.A.Meyer (1), para cada - $c>0$ fijo, ya que el núcleo de Green $g_c(x,L)$ es $\mathbb{B}$-medible en la variable x, y es una medida acotada puesto que $g_c(x,E)\leq c^{-1}$, se obtiene que ha de existir una función $v_c(x,y)$ sobre $E\times E$, que es $\mathbb{B}\times\mathbb{B}$-medible y tal que

$$g_c(x,dy) = v_c(x,y)\ w(dy)$$

en virtud de la hipótesis HD2 de Kunita-Watanabe.

Entonces, si $f\in\mathbb{B}$ se tiene

$$G_cf(x) = \int_E f(y)\ g_c(x,dy) = \langle v_c(x,\cdot),f\rangle_w$$

y por consiguiente para todo real positivo r se tiene

$$\begin{aligned} r\langle \hat{G}_{c+r}v_c(x,.),f\rangle_w &= r\langle v_c(x,.),G_{c+r}f\rangle_w = \\ &= r\,G_cG_{r+c}f(x) = rG_{r+c}G_cf(x)\leq \\ &\leq G_cf(x) = \langle v_c(x,.),f\rangle_w \end{aligned}$$

puesto que G_cf es c-excesiva. Por tanto, como esta relación es válida para todo $f\in\mathbb{B}$, se tiene que para todo $r>0$, y todo $x\in E$,

$$r\,\hat{G}_{r+c}v_c(x,.)\leq v_c(x,.) \qquad (w)$$

Es decir, $v_c(x,.)$ es como función de la primera variable una función c-cosupermedia, y por consiguiente, su regularizada coexcesiva dada por

$$g_c(x,.) = \lim_{r\uparrow\infty} r\, \hat{G}_{r+c} v_c(x,.)$$

es c-coexcesiva w-casi todo, y por su construcción, $\mathbb{B}\times\mathbb{B}$-medible. Además, $g_c(x,.) = v_c(x,.)$ salvo en un conjunto de copotencial nula, y tomando límite cuando $r\to\infty$ en la expresión

$$\langle r\hat{G}_{r+c} v_c(x,.),f\rangle_w = rG_{r+c}G_c f(x)$$

obtenemos

$$\langle \tilde{g}_c(x,.),f\rangle_w = G_c f(x)$$

y tomando $f = I_L$, para cualquier $L\in\mathbb{B}$, se tiene

$$g_c(x,L) = \int_E \tilde{g}_c(x,y)\; w(dy)$$

por lo que $\tilde{g}_c(x,y)$ es una densidad $\mathbb{B}\times\mathbb{B}$-medible de $g_c(x,L)$ y es como función de x, c-coexcesiva.

Teniendo en cuenta ahora la hipótesis HD1 de Kunita-Watanabe, si $f_1,f_2\in\mathbb{B}$,

$$\langle\hat{G}_c f_1,f_2\rangle_w = \langle f_1,\, G_c f_2\rangle_w = \int_E w(dx)\; f_1(x)\; G_c f_2(x) =$$

$$= \int_E\int_E w(dx)\; f_1(x)\; \tilde{g}_c(x,y)\; f_2(y)\; w(dy) =$$

$$= \langle \int_E w(dx)\; f_1(x)\; \tilde{g}_c(x,.)\,,\, f_2\rangle_w$$

por lo que para toda $f\in\mathbb{B}$

$$\hat{G}_c f(y) = \int_E w(dx)\; \tilde{g}_c(x,y)\; f(x) \qquad (w)$$

y por consiguiente para todo $r>0$

$$r\hat{G}_{r+c}\hat{G}_c f(y) = \int_E\int_E w(dx)\; \tilde{g}_c(x,z)\; f(x)\; r\; \hat{g}_{r+c}(dz,y)$$

y puesto que $\hat{G}_c f$ es c-coexcesiva, y $g_c(x,z)$ es c-coexcesiva, haciendo que $r\to\infty$, tenemos que por ser

$$\int_E r\ \hat{g}_{r+c}(dz,y)\ \tilde{g}_c(x,z) \to \tilde{g}_c(x,y)$$

obtenemos de la relación anterior que

$$\hat{G}_c f(y) = \int_E w(dx)\ \tilde{g}_c(x,y)\ f(x)$$

y tomando $f = I_L$ para cualquier $L\in\mathbb{B}$,

$$\hat{g}_c(L,y) = \int_E w(dx)\ \tilde{g}_c(x,y)$$

es decir, $\tilde{g}_c(x,y)$ es una densidad de $\hat{g}_c(L,y)$.

Veamos ahora que $\tilde{g}_c(\cdot,y)$ es c-excesiva como función de - la segunda variable.

En efecto, puesto que para cada $r>0$

$$\begin{aligned} r\hat{G}_{r+c}\tilde{g}_c(\cdot,y) &= \int_E r\ \tilde{g}_c(\cdot,z)\ \hat{g}_{r+c}(dz,y) = \\ &= \int_E r\ \tilde{g}_c(\cdot,z)\ \tilde{g}_{r+c}(z,y)\ w(dz) = \\ &= \int_E r\ g_c(\cdot,dz)\ \tilde{g}_{r+c}(z,y) = \\ &= r\ G_c\tilde{g}_{r+c}(\cdot,y) \end{aligned}$$

tenemos que es una función c-excesiva, tomando una sucesión de reales positivos r_n que crezcan a ∞ con n, la sucesión de funciones $r_n\ \hat{G}_{r_n+c}\ \tilde{g}_c(\cdot,y)$ tiene como límite cuando $n\uparrow\infty$ una función c-excesiva. Por tanto, tomando límite en la relación

$$r_n\hat{G}_{r_n+c}\ \tilde{g}_c(x,y) = r_n\ \hat{G}_{c+r_n}v_c(x,y)$$

obtenemos que

$$\lim_n r_n\hat{G}_{r_n+c}\ \tilde{g}_c(x,y) = \tilde{g}_c(x,y)$$

es una función c-excesiva.

Veamos ahora la unicidad de la función de Green para cada $c > 0$ fijo.

Si fuese $\tilde{g}'_c(x,y)$ otra función que verifique las tesis del Lema, entonces para $f \in \mathbb{B}$ se tendría que

$$G_c f(x) = \int_E \tilde{g}_c(x,y)\ f(y)\ w(dy) =$$
$$= \int_E \tilde{g}'_c(x,y)\ f(y)\ w(dy)$$

por lo que

$$\langle \tilde{g}'_c(x,.),f \rangle_w = \langle \tilde{g}_c(x,.),f \rangle_w$$

y por consiguiente, sería

$$\tilde{g}'_c(x,.) = \tilde{g}_c(x,.) \qquad (w)$$

Así pués, ya que estas funciones son c-coexcesivas, y son iguales w-casi todo, son iguales salvo un conjunto de copotencial nulo, y por el resultado IX.60 de P.A.Meyer (1), éstas funciones han de ser iguales en todo E. Análogamente razonaríamos con la segunda variable, y por consiguiente, la función de Green existe y es única.

El resultado relativo a la relacion entre distintas funciones de Green para distintos valores de la constante c, se obtiene directamente usando la ecuación resolvente. Con esto queda probado el Lema.

Para establecer el resultado central de este apartado, acerca del isomorfismo entre los espacios S^p_n y $R^{\hat{p}}_h$, necesitamos primero dotar a estos espacios de las estructuras medibles y convexas apropiadas para poder hablar de isomorfismos. Estas estructuras no son otras que las llamadas naturales en el apartado 2.

Sea el espacio

$$S_n^p = \{ f \in \mathbb{B} : f \text{ es excesiva, y } n(f) = 1 \} .$$

Consideremos la función $F : S_n^p \times \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definida por

$$F(f,L) = \int_L f(x)\, w(dx)$$

para $f \in S_n^p$, $L \in \mathbb{B}$. Entonces, la función F genera una σ-algebra en el espacio producto $S_n^p \times \mathbb{B}$, que denotaremos por $\mathbb{B}_{S_n^p \times \mathbb{B}}$ de modo que F sea una función medible. Concretamente, esta σ-álgebra es la engendrada por la familia de conjuntos $F^{-1}(B)$ siendo B un boreliano de $\mathbb{R}_+$. Sea $\mathbb{B}_{S_n^p}$ la σ-álgebra traza de ésta sobre el espacio S_n^p. Esta σ-álgebra coincide con la generada por las funciones $f \longrightarrow w(f \cdot I_L)$, para cada $L \in \mathbb{B}$, definidas de S_n^p en $\mathbb{R}_+$.

Por el Lema4.1 de E.B.Dynkin (6), existe entonces una función $u(f,x)$ sobre el espacio producto $S_n^p \times E$ que es medible respecto de $\mathbb{B}_{S_n^p} \times \mathbb{B}$, de modo que se verifica

$$F(f,dx) = u(f,x)\, w(dx)$$

y puesto que

$$F(f,dx) = f(x)\, w(dx)$$

se tiene que la función $(f,x) \longrightarrow f(x) = u(f,x)$ sobre el espacio producto $S_n^p \times E$ es medible en ambas variables $\underline{f}$ y $\underline{x}$.

De éste modo tenemos ya una estructura medible en el espacio S_n^p, y vamos a dotarlo ahora de una estructura convexa.

Sea $m \in M^1(S_n^p)$ una medida de probabilidad sobre el espacio medible $(S_n^p, \mathbb{B}_{S_n^p})$. Es fácil ver que la función f_m definida por la relación

$$f_m(x) = \int_{S_n^p} f(x)\ m(df)$$

es un elemento del espacio de las funciones excesivas normalizadas S_n^p, y por consiguiente podemos hacer corresponder a cada medida sobre S_n^p su centro de gravedad o baricentro, es decir, tenemos definida un estructura medible convexa en S_n^p.

Consideremos ahora el espacio

$$R_h^{\hat{p}} = \{ m \in M_\sigma(E) : \text{m es coexcesiva, } m(h) = 1 \}$$

Sea H la función definida de $R_h^{\hat{p}} \times \mathbb{B}$ en $\mathbb{R}_+$ por

$$H(m,L) = m(L),$$

o bien la familia de funciones sobre $R_h^{\hat{p}}$ en $\mathbb{R}_+$ dada por

$$m \longrightarrow m(L)$$

para cada $L \in \mathbb{B}$. Esta familia de funciones induce una σ-álgebra sobre $R_h^{\hat{p}}$, caracterizada por ser medibles estas funciones con respecto a esta σ-álgebra, que denotaremos por $\mathbb{B}_{R_h^{\hat{p}}}$. Tambien puede caracterizarse esta σ-álgebra a traves de la función H, como la traza de la σ-álgebra inducida por H en $R_h^{\hat{p}} \times \mathbb{B}$ sobre el espacio $R_h^{\hat{p}}$, siguiendo argumentos muy semejantes a los anteriores. Así, puede verse que H(m,L) es $\mathbb{B}_{R_h^{\hat{p}}}$-medible, y por consiguiente podemos introducir una estructura convexa en este espacio de la forma natural siguiente: Sea $\eta \in M^1(R_h^{\hat{p}})$, entonces, la medida m_η definida por la relación

$$m_\eta(L) = \int_{R_h^{\hat{p}}} m(L)\ \eta(dm)$$

es un elemento del espacio de la medidas coexcesivas normalizadas $R_h^{\hat{p}}$, y por consiguiente $(R_h^{\hat{p}}, \mathbb{B}_{R_h^{\hat{p}}})$ podemos considerarlo como un espacio medible convexo.

La tesis del siguiente Teorema es la que da nombre a éste apartado, y como ya se ha indicado, es uno de los resultados más importantes que se desprenden de la hipótesis de dualidad de Kunita-Watanabe.

<u>Teorema.</u>- Los espacios medibles convexos S_n^p y $R_h^{\hat{p}}$, definidos anteriormente, son isomorfos. Más presisamente, para cada $f \in S_n^p$ la medida

$$w^f(dx) = f(x)\ w(dx)$$

es un elemento de $R_h^{\hat{p}}$, y reciprocamente, para cada medida m de $R_h^{\hat{p}}$ existe una función -su densidad respecto de w- f^m de S_n^p - tal que

$$m(dx) = f^m(x)\ w(dx)$$

y éstas aplicaciones constituyen un isomorfismo entre estos - espacios medibles convexos, con las estructuras medibles y convexas naturales definidas.

La demostración de este importante Teorema la llevaremos a cabo estableciendo distintos resultados parciales que enunciaremos sucesivamente.

1º) Para todo $c > 0$, fijo, se tiene que $\tilde{g}_c(x,y) = \tilde{g}_c(y,x)$ salvo a lo sumo un conjunto $w \otimes w$ -nulo, de $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$.

La medida w esta definida sobre el espacio medible estandar $(E, \mathbb{B})$ considerado inicialmente, e induce una medida $w \otimes w$ sobre el espacio medible producto $(E \times E, \mathbb{B} \otimes \mathbb{B})$ definida a partir de los rectangulos por $w \otimes w\ (J_1\ J_2) = w(J_1) \cdot w(J_2), J_1, J_2 \in \mathbb{B}$.

Por la hipótesis de la dualidad HD1, para todas $f_1, f_2 \in \mathbb{B}$

$$\langle G_c f_1, f_2 \rangle_w = \langle f_1, \hat{G}_c f_2 \rangle_w$$

y por tanto tomando $f_1 = I_L$, y $f_2 = I_{L'}$, donde

$$L = \{ x \in E:\ g_c(x,y) > g_c(y,x) \}$$

$$L' = \{ y \in E:\ g_c(x,y) > g_c(y,x) \}$$

tenemos que

$$\int_L \int_{L'} (\tilde{g}_c(x,y) - \tilde{g}_c(y,x))\ w(dx)\ w(dy) = 0$$

por lo que, o bien $w(L) = 0$, ó

$$\int_{L'} (\tilde{g}_c(x,y) - \tilde{g}_c(y,x))\ w(dx) = 0 \qquad (w)$$

es decir, que $w(L') = 0 \quad (w)$, por lo que

$$w \otimes w\ (L \times L') = 0$$

De forma completamente analoga, si

$$L'' = \{ x \in E:\ \tilde{g}_c(x,y) < \tilde{g}_c(y,x) \}$$

$$L''' = \{ y \in E:\ \tilde{g}_c(x,y) < \tilde{g}_c(y,x) \}$$

se tiene tambien que $w \otimes w(L'' \times L''') = 0$, por lo que

$$w \otimes w\ \{ (x,y) \in E \times E:\ \tilde{g}_c(x,y) \neq \tilde{g}_c(y,x) \} = 0$$

como queríamos probar. Además, para cada x e y fijos,

$$w\ \{ x \in E:\ \tilde{g}_c(x.y) \neq \tilde{g}_c(y,x) \} = 0$$

$$w\ \{ y \in E:\ \tilde{g}_c(x,y) \neq \tilde{g}_c(y,x) \} = 0 .$$

2º) Si $f \in S_n^p$, y $w^f(dx) = f(x)\ w(dx)$, es $w^f \in R_h^{\hat{p}}$.

En efecto, tenemos que

$$w^f(h) = \int_E h(x)\ w^f(dx) = \int_E h(x)\ f(x)\ w(dx) = \int_E f(x)\ n(dx) =$$
$$= n(f) = 1$$

y, para todo $c > 0$, $L \in \mathbb{B}$, se tiene que

$$c\ w^f \hat{G}_c\ (L) = \int_E c\ \hat{g}_c(L,y)\ w^f(dy) = \int_E c\ \hat{g}_c(L,y)\ f(y)\ w(dy) =$$

$$= c \int_E w(dy)\ f(y) \int_L \tilde{g}_c(x,y)\ w(dx) =$$

$$= c \int_L w(dx) \int_E \tilde{g}_c(x,y)\ f(y)\ w(dy) =$$

$$= c \int_L w(dx) \int_E \tilde{g}_c(x,dy)\ f(y) = c \int_L G_c f(x)\ w(dx)$$

y puesto que $f \in S_n^p$, es $cG_c f \leq f$, y $\lim\limits_{c\uparrow\infty} cG_c f = f$ de forma creciente, por lo que del resultado anterior

$$c\ w^f\ \hat{G}_c\ (L) \leq \int_L f(x)\ w(dx) = w^f(L)$$

que prueba que w^f es cosupermedia, y tomando límite cuando $c \rightarrow \infty$, tenemos que

$$\lim_{c\uparrow\infty} c\ w^f\ \hat{G}_c\ (L) = \lim_{c\uparrow\infty} \int_L c\ G_c f(x)\ w(dx) =$$

$$= \int_L f(x)\ w(dx) = w^f(L)$$

por lo que w^f es coexcesiva, y por consiguiente $w^f \in R_h^{\hat{p}}$, como queríamos probar.

3º) La aplicación j entre los espacios medibles $(S_n^p, \mathbb{B}_{S_n^p})$ y $(R_h^{\hat{p}}, \mathbb{B}_{R_h^{\hat{p}}})$ dada por $j : f \longrightarrow w^f$, es medible.

Sea $J \in \mathbb{B}_{R_h^{\hat{p}}}$, que podemos suponer que está generado a partir de un $L \in \mathbb{B}$, y un boereliano de $\mathbb{R}_+$ que denotaremos por B, concretamente, consideramos $J = \{ m \in R_h^{\hat{p}} : m(L) \in B \}$. Entonces,

$$j^{-1}(J) = \{ f \in S_n^p : j(f) \in J \} = \{ f \in S_n^p : w^f(L) \in B \} =$$

$$= \{ f \in S_n^p : w(f \cdot I_L) \in B \} = \{ f \in S_n^p : F(f,L) \in B \} \in \mathbb{B}_{S_n^p}$$

por la propia definición de ésta σ-álgebra. Así pués, la aplicación j considerada es medible como queríamos demostrar.

4º) Si $m \in R_h^{\hat{p}}$, entonces $f^m = \frac{dm}{dw}$ existe, y $f^m \in S_n^p$.

Es decir, toda medida de $R_h^{\hat{p}}$ es absolutamente continua respecto de la medida de la dualidad w, y su densidad es una función de S_n^p.

Para cada $c > 0$, definimos la función sobre E

$$u_c(x) = c \int_E \tilde{g}_c(x,y)\, m(dy)$$

Esta función u_c tiene las siguientes propiedades:

a) u_c es no negativa, y además

$$u_c(x) = c \int_E \tilde{g}_c(x,y)\, m(dy) = c \int_E \tilde{g}_c(y,x)\, m(dy)$$

ya que para cada $x \in E$, el conjunto $\{y \in E:\ \tilde{g}_c(x,y) \neq \tilde{g}_c(y,x)\}$ es w-nulo, y por tanto m-nulo, ya que como veremos después m es absolutamente continua respecto de w.

b) Se tiene la relación siguiente para cada $L \in \mathbb{B}$

$$c\, m\hat{G}_c(L) = \int_L u_c(x)\, w(dx)$$

ya que por simple cálculo

$$c\, m\hat{G}_c(L) = c \int_E m(dy)\, \hat{g}_c(L,y) = c \int_E m(dy) \int_L \tilde{g}_c(x,y)\, w(dx) =$$

$$= c \int_L w(dx) \int_E \tilde{g}_c(x,y)\, m(dy) = \int_L w(dx)\, u_c(x)$$

por lo que

$$c\, m\hat{G}_c(dx) = u_c(x)\, w(dx)$$

como queríamos probar.

c) La función u_c es $\mathbb{B}$-medible, ya que lo es la función de Green $\tilde{g}_c(x,y)$.

d) La función $u_c(x)$ es para w-casi todo x, una función no decreciente del parámetro c positivo.

En efecto, si $c_1 \leq c_2$, ya que la medida m es coexcesiva, se tiene que

$$c_1 \, m\hat{G}_{c_1}(L) \leq c_2 \, m\hat{G}_{c_2}(L)$$

para todo $L \in \mathbb{B}$, y por consiguiente de b) es

$$\int_L u_{c_1}(x) \; w(dx) \leq \int_L u_{c_2}(x) \; w(dx)$$

Sea entonces $L = \{ x \in E : u_{c_1}(x) > u_{c_2}(x) \}$, se tiene entonces que

$$\int_{[u_{c_1} > u_{c_2}]} (u_{c_1}(x) - u_{c_2}(x)) \; w(dx) \leq 0$$

por lo que ha de ser $w(u_{c_1} > u_{c_2}) = 0$, como queríamos ver.

e) Para w-casi todo x, existe el límite

$$u(x) = \lim_{c \uparrow \infty} u_c(x) \qquad (w)$$

y es una función $\mathbb{B}$-medible .

Esto es una consecuencia de la propiedad de monotonía d) y de la propiedad c).

f)La función u(x) es una densidad de m respecto de w.

En efecto, haciendo uso del teorema de la convergencia monotona, para cualquier $L \in \mathbb{B}$, se tiene

$$m(L) = \lim_{c \uparrow \infty} c \, m\hat{G}_c(L) = \lim_{c \uparrow \infty} \int_L u_c(x) \; w(dx) =$$

$$= \int_L w(dx) \lim_{c \uparrow \infty} u_c(x) = \int_L u(x) \; w(dx)$$

por lo que

$$m(dx) = u(x) \; w(dx).$$

Después de estas propiedades de la función u_c y u, pasamos a demostrar la propiedad 4º) enunciada, construyendo una densidad f^m a partir de la función u .

Definimos ahora la función f^m de la forma siguiente:

$$f^m(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \text{ es tal que } \lim_{c\uparrow\infty} u_c(x) \text{ existe} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se tiene entonces de e) que $f^m = u$ w-casi todo, y por tanto f^m es una densidad de m respecto de w, por f), es decir,

$$m(dx) = f^m(x)\ w(dx)$$

y $f^m \in \mathbb{B}$ por su definición y por e).

Además, se tiene que

$$n(f^m) = \int_E f^m(x)\ n(dx) = \int_E f^m(x)\ h(x)\ w(dx) =$$

$$= \int_E h(x)\ m(dx) = m(h) = 1$$

Queda por ver que la función f^m es excesiva. Hemos de - ver que se tiene para todo $L \in \mathbb{B}$, $c > 0$,

$$c\ G_c f^m \leq f^m$$

$$\lim_{c\uparrow\infty} c\ G_c f^m = f^m$$

Haciendo uso de la hipótesis HD1 de la dualidad, tenemos que para toda $f \in \mathbb{B}$

$$\langle c\ G_c\ u_{c'}, f\rangle_w = \langle u_{c'}, c\ \hat{G}_c f\rangle_w = \int_E u_{c'}(x)\, c\ \hat{G}_c f(x)\ w(dx) =$$

$$= \int_E w(dx)\ c\ \hat{G}_c f(x) \int_E c'\ \tilde{g}_{c'}(x,y)\ m(dy) =$$

$$= \int_E m(dy) \int_E c\hat{G}_c f(x)\ c'\ \hat{g}_{c'}(dx,y) =$$

$$= \int_E c\hat{G}_c f(x)\ c' m\hat{G}_{c'}(dx) \leq$$

y puesto que m es coexcesiva,

$$\leq \int_E c\ G_c f(x)\ m(dx) =$$

$$= \int_E m(dx) \int_E c\ \hat{g}_c(dy,x)\ f(y) =$$

$$= \int_E m(dx) \int_E c\ \tilde{g}_c(y,x)\ f(y)\ w(dy) =$$

$$= \int_E w(dy)\ f(y) \int_E m(dx)\ c\ \tilde{g}_c(y,x) =$$

$$= \int_E w(dy)\ f(y)\ u_c(y) \leq$$

puesto que u_c u, (w), ya que u_c u,

$$\leq \int_E w(dy)\ f(y)\ u(y) = \langle u,f \rangle_w$$

es decir, se tiene la relación

$$\langle c\ G_c u_{c'},\ f \rangle_w \leq \langle u\ ,\ f \rangle_w$$

para toda $f \in \mathbb{B}$, y $c,\ c' > 0$, por lo que

$$c\ G_c\ u_r \leq u \qquad (w)$$

para todos $c, r > 0$.

Por otra parte, ya que para cada $f \in \mathbb{B}$, $\langle cG_c u_r, f \rangle_w$ está acotado por $\langle u,f \rangle_w$ para todo $r > 0$, tomando límite con $r \to \infty$, y aplicando el Teorema de Fatou-Lebesgue, tenemos que

$$\langle u,f \rangle_w \geq \lim_r \inf \langle cG_c\ u_r\ ,\ f \rangle_w \geq \langle \lim_r cG_c u_r\ ,\ f \rangle_w =$$

$$= \langle c\ G_c\ u\ ,\ f \rangle_w$$

por lo que para toda $f \in \mathbb{B}$ es

$$\langle cG_c u\ ,\ f \rangle_w \leq \langle u,f \rangle_w$$

es decir, que

$$cG_c u \leq u \qquad (w).$$

Ahora bien, puesto que $f^m = u$ (w), podemos escribir, ya que $f^m = 0$ si $f^m \neq u$,

$$c\ G_c\ f^m \leq f^m \quad .$$

por lo que f^m es supermedia.

Consideremos ahora la regularizada excesiva de esta función,

$$\tilde{f}^m = \lim_{c \uparrow \infty} c\ G_c f^m$$

y vamos a ver que $\tilde{f}^m = f^m$, por lo que resultará inmediatamente que f^m es excesiva como habíamos enunciado. Para ver ésto es necesario primero demostrar que la función u_c es c-excesiva, y a ello van dirigidos los siguientes pasos.

En efecto, puesto que $m(dx) = f^m(x)\ w(dx)$, tenemos que para $c > 0$,

$$
\begin{aligned}
u_c(x) &= c \int_E \tilde{g}_c(x,y)\ m(dy) = c \int_E \tilde{g}_c(x,y)\ f^m(y) w(dy) = \\
&= c \int_E g_c(x,dy)\ f^m(y) = \\
&= c\ G_c f^m(x)
\end{aligned}
$$

y por consiguiente, aplicando ahora la ecuación resolvente, para $r > 0$,

$$
\begin{aligned}
rG_{c+r}u_c(x) &= r\,c\,G_{r+c}G_c f^m(x) = cG_c f^m(x) - c\ G_{r+c}f^m(x) = \\
&= u_c(x) - cG_{c+r}f^m(x) \leqslant u_c(x)
\end{aligned}
$$

ya que $cG_{c+r}f^m(x) \geqslant 0$, por lo que tenemos ya que la función u_c es c-supermedia. Tomando ahora límite cuando $r \to \infty$, y suponiendo que f^m es acotada, -lo cual no es ninguna rectricción importante, ya que en caso contrario se aproximaría f^m por la sucesión de funciones acotadas $f^m_N = f^m \wedge N$, pasando al límite en N después - tenemos que

$$
\lim_{r \uparrow \infty} rG_{r+c}u_c(x) = u_c(x) - \lim_{r \uparrow \infty} c\ G_{c+r}f^m(x) = u_c(x)
$$

ya que $\lim\limits_{r \uparrow \infty} cG_{c+r}f^m(x) = 0$ si f^m es acotada como hemos supuesto. Así pués, para cada c la función u_c es c-excesiva como queríamos ver.

Para completar la demostración de esta 4ª) propiedad, sólo nos queda por ver que $\tilde{f}^m = f^m$. En efecto, tenemos que

$$\tilde{f}^m(x) = \lim_{r\uparrow\infty} r\, G_r\, f^m(x) = \lim_{r\uparrow\infty} r\, G_r\, u(x) =$$

$$= \lim_{r\uparrow\infty} \lim_{c\uparrow\infty} r\, G_r\, u_c(x) = \lim_{c\uparrow\infty} \lim_{r\uparrow\infty} (c+r) G_{c+r}\, u_c(x) =$$

$$= \lim_{c\uparrow\infty} \lim_{r\uparrow\infty} c G_{c+r} u_c(x) + \lim_{c\uparrow\infty} \lim_{r\uparrow\infty} r G_{c+r} u_c(x) =$$

$$= \lim_{c\uparrow\infty} \lim_{r\uparrow\infty} r G_{c+r} u_c(x) = \lim_{c\uparrow\infty} u_c(x) = u(x)$$

caso de que éste límite exista, pero cuando este límite existe, tenemos que $f^m = u$, por lo que $\tilde{f}^m = f^m$, y en caso contrario, es decir si no existe el límite, entonces carece de sentido las relaciones anteriores, pero como por definición es - $f^m = 0$, en este caso, su regularizada es tambien $\tilde{f}^m = 0$, por lo que se tiene que $\tilde{f}^m$ y f^m coinciden en todo el espacio E, y por consiguiente, $f^m \in R_h^{\hat{p}}$, como queríamos demostrar.

5º) La aplicación k entre los espacios medibles $(R_h^{\hat{p}}, \mathbb{B}_{R_h^{\hat{p}}})$ y $(S_n^p, \mathbb{B}_{S_n^p})$ dada por $k: m \longrightarrow f^m$ es medible y $k = j^{-1}$.

La demostración de que la aplicación k es medible sigue las mismas ideas que la demostración de la medibilidad de j afirmada en la relación 3º). Concretamente, sea $J \in \mathbb{B}_{S_n^p}$, que podemos suponer es uno de los generadores de ésta σ-álgebra, es decir que puede expresarse en términos de un boreliano B real en la forma $J = \{ f \in S_n^p : F(f,L) \in B \}$, para algún $L \in \mathbb{B}$ fijo. Entonces, la imagen inversa de J mediante k^{-1} es

$$k^{-1}(J) = \{ m \in R_h^{\hat{p}} : k(m) \in J \} = \{ m \in R_h^{\hat{p}} : f^m \in J \} =$$

$$= \{ m \in R_h^{\hat{p}} : F(f^m, L) \in B \} = \{ m \in R_h^{\hat{p}} : w(f^m \cdot I_L) \in B \} =$$

$$= \{ m \in R_h^{\hat{p}} : \int_L w(dx)\, f^m(x) = m(L) \in B \}$$

que es de la σ-álgebra $\mathbb{B}_{R_h^{\hat{p}}}$ por la definición de ésta.

Demostrada la medibilidad de la aplicación k, veamos que se tiene la relación de igualdad $k = j^{-1}$.

Primero de todo observemos que la aplicación j es inyectiva y que por tanto tiene sentido considerar su inversa j^{-1}. En efecto, si $j(f_1) = j(f_2)$, entonces $w^{f_1} = w^{f_2}$, por lo que

$$f_1(x)\ w(dx) = f_2(x)\ w(dx)$$

es decir, $f_1 = f_2$ (w), y puesto que f_1 y f_2 son funciones - excesivas que se diferencian en un conjunto w-nulo y por consiguiente de potencial nulo, ha de ser $f_1 = f_2$ en todo, por - lo que j es inyectiva y por consiguiente tiene sentido considerar la aplicación inversa j^{-1}.

Tenemos que si $m \in R_h^{\hat{p}}$ entonces $j^{-1}(m)$ es el elemento del espacio S_n^p caracterizado por ser

$$w^{j^{-1}(m)}(dx) = j^{-1}(m)(x)\ w(dx) = m(dx)$$

por lo que ha de ser $j^{-1}(m) = f^m$, es decir $j^{-1} = k$, como queríamos probar. Naturalmente, de ésto se sigue que la aplicación k tambien es inyectiva y que $k^{-1} = j$. Por lo que desde ahora nos limitaremos a considerar sólo la aplicación j y su inversa j^{-1}, sin hacer ya ninguna referencia a la aplicación k.

6º)La aplicación j es un isomorfismo entre los espacios medibles convexos $(S_n^p, \mathbb{B}_{S_n^p})$ y $(R_h^{\hat{p}}, \mathbb{B}_{R_h^{\hat{p}}})$.

Este resultado es precisamente la afirmación del Teorema que venimos demostrando, y es el epílogo de la demostración. El hecho de que j sea un isomorfismo entre estos espacios medibles es consecuencia de las afirmaciones 3º) y 5º) que afirman las propiedades de medibilidad de j y j^{-1}, ya que el hecho de ser j completa es fácil de ver. Solo falta por ver que este isomorfismo entre las estructuras medibles de estos espacios lo es tambien respecto de las estructuras convexas naturales definidas en ellos, es decir, concluimos la demostración del Teorema estableciendo que j conserva las estructuras convexas de éstos espacios.

Sea $\eta \in M^1(R_h^{\hat p})$ y sea m_η su baricentro:

$$m_\eta(J) = \int_{R_h^{\hat p}} m(J)\ \eta(dm)$$

para cualquier $J \in \mathbb{B}_{R_h^{\hat p}}$. Entonces, ya que $m \in R_h^{\hat p}$, se tiene que para todo $L \in \mathbb{B}$

$$m(L) = \int_L f^m(x)\ w(dx)$$

por lo que

$$\int_L f^{m_\eta}(x)\ w(dx) = \int_{R_h^{\hat p}} \eta(dm) \int_L f^m(x)\ w(dx) =$$

$$= \int_L w(dx) \int_{R_h^{\hat p}} f^m(x)\ \eta(dm)$$

por lo que se tiene

$$f^{m_\eta}(x) = \int_{R_h^{\hat p}} f^m(x)\ \eta(dm) \qquad (w)$$

y puesto que $f^m = j^{-1}(m)$, haciendo el "cambio de variable" de integración $f^m = f$, tenemos que w-casi todo

$$f^{m_\eta}(x) = \int_{S_n^p} f(x)\ \eta\{m \in R_h^{\hat p}:\ f^m = j^{-1}(m) \in df\} =$$

$$= \int_{S_n^p} f(x)\ \mathfrak{m}(df)$$

donde la medida $\mathfrak{m}$ está definida por la relación

$$\mathfrak{m}(J) = \eta\,(j(J))$$

para cualquier $J \in \mathbb{B}_{S_n^p}$. Ahora bien, ya que las relaciones anteriores eran válidas w-casi todo, y dado que eran relaciones de igualdad entre funciones excesivas, estas relaciones son - ciertas en todo, y por consiguiente, las relaciones anteriores muestran que j^{-1} conserva la estructura medible convexa entre estos espacios, y análogamente se prueba que lo mismo es cierto para la aplicación j. Así pués j es un isomorfismo como habíamos enunciado y queríamos demostrar.

En éste apartado, hemos supuesto como hipótesis de partida que la función de trnasición p sobre el espacio medible estandar $(E, \mathbb{B})$ era normal. Esta hipótesis no es realmente necesaria para el desarrollo de este apartado, ya que su incidencia está el el hecho de que bajo este supuesto las constantes no negativas son excesivas, pero éste es un resultado más fuerte del que es necesario, ya que sólo se utiliza el hecho de - que las constantes no negativas son supermedias, y ésto es - siempre cierto ya que p es subestocástica. Bajo ésta hipótesis de normalidad de p, el resultado enunciado en el Lema primero, puede ser modificado, resultando entonces que la medida de la dualidad w es coexcesiva. El que ésta medida sea tambien excesiva , depende de si la hipótesis de normalidad se conserva bajo la hipótesis de dualidad de Kunita-Watanabe para la función de cotransición, pero esta posibilidad será estudiada en un apartado posterior, cuando revisemos algunas consecuencias de la hipótesis de dualidad.

11.- EL ESPACIO $K^{\hat{p}^h}$.

Sea p una función de transición sobre el espacio medible estandar $(E, \mathbb{B})$, y supongamos que se verifica la hipótesis de dualidad de Kunita-Watanabe, por lo que existe una función de cotransición sobre este mismo espacio, que designaremos por $\hat{p}$ y que supondremos fija desde ahora.

Sea $h \in \mathbb{B}$ una función cosupermedia. Definimos entonces la familia de conúcleos $\hat{p}^h(t,L,y)$ sobre el espacio medible estandar $(E, \mathbb{B})$, de la forma siguiente:

$$\hat{p}^h(t,L,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{h(y)} \displaystyle\int_L h(x)\ \hat{p}(t,dx,y) & \text{si } y \in E_0^\infty \\ 0 & \text{si } y \in E - E_0^\infty \end{cases}$$

para $t \in \mathbb{R}_+$, $L \in \mathbb{B}$, $y \in E$, donde $E_0^\infty = \{y \in E:\ 0 < h(y) < \infty\}$, y por consiguiente $E - E_0^\infty = \{y \in E : h(y) = 0 \text{ , ó } h(y) = \infty\}$. Este último conjunto lo partimos a su vez en los dos conjuntos $E_0 = \{y \in E: h(y) = 0\}$, y $E_\infty = \{y \in E:\ h(y) = \infty\}$, por lo que se tiene la siguiente partición del espacio E :

$$E = E_0^\infty \cup E_0 \cup E_\infty .$$

Vamos a probar que ésta familia de conúcleos es una función de cotransición sobre el espacio medible estandar $(E, \mathbb{B})$.

Es fácil ver que por la definición dada, $\hat{p}^h(t,\cdot,y)$ es para cada $t \in \mathbb{R}_+$, $y \in E$, una medida, y que además esta medida es subestocástica, ya que si $y \in E_0^\infty$, se tiene

$$\hat{p}^h(t,E,y) = \frac{1}{h(y)} \int_E h(x)\ \hat{p}(t,dx,y) = \frac{\hat{P}_t h(y)}{h(y)} \leq 1$$

ya que h es cosupermedia por hipótesis. Si $y \in E - E_0^\infty$, entonces, $\hat{p}^h(t,E,y) = 0 \leq 1$, por definición, y por tanto queda probado el caracter subestocástico.

Es fácil ver que, tambien por su misma definición, la función $\hat{p}^h(t,L,\cdot)$ es $\mathbb{B}$-medible, para cada $t\in\mathbb{R}_+$, $L\in\mathbb{B}$.

Se tienen de ésta forma las propiedades FC1 y FC2 que definen las funciones de cotransición. Queda sólo por ver que se verifica la ecuación de Chapman-Kolmogorov, es decir la tercera propiedad FC3.

Para una posterior referencia, vamos a demostrar primero, enunciandolo como un Lema, dos relaciones importantes entre la función de cotransición $\hat{p}$ y los subconjuntos $E-E_0$, y E_∞, que como es fácil de ver son elementos de $\mathbb{B}$.

<u>Lema.</u>- En las condiciones expuestas, se tienen las relaciones:

Si $z\in E_0$, entonces $\hat{p}(s,E-E_0,z)=0$,

Si $z\in E-E_\infty$, entonces $\hat{p}(s,E_\infty,z)=0$,

para todo $s\in\mathbb{R}_+$.

En efecto, puesto que h es una función cosupermedia, ha de ser

$$\hat{P}_s h(y)\leq h(y)$$

para todo $y\in E$, es decir, que

$$\hat{P}_s h(y)=\int_{E_0^\infty} h(z)\hat{p}(s,dz,y)+\int_{E_\infty} h(z)\hat{p}(s,dz,y)+\int_{E_0} h(z)p(s,dz,y)=$$
$$=\int_{E_0} h(z)p(s,dz,y)+\int_{E_\infty} h(z)\dot{p}(s,dz,y)\leq h(y)$$

ya que si $z\in E_0$, es $h(z)=0$, por lo que la integral tercera se anula. Entonces, si $y\in E-E_\infty$, es $h(y)$ finito, por lo que la segunda integral siendo no negativa ha de ser finita, pero esto sólo es posible si $\hat{p}(s,E_\infty,y) = 0$, y ésto prueba la segunda relación del Lema.

La primera relación se obtiene observando que si $z \in E_o$, entonces

$$\hat{P}_s h(z) \leq h(z) = 0$$

por lo que

$$\int_E h(y)\ \hat{p}(s,dy,z) = \int_{E-E_o} h(y)\ \hat{p}(s,dy,z) = 0$$

y esto sólo es posible si se tiene $\hat{p}(s,E-E_o,z) = 0$ para todo $z \in E_o$. Con esto queda probado el Lema.

Demestramos ahora la propiedad FC3 anunciada antes, y en su demostración se hará uso de las relaciones establecidas en éste Lema, sin hacer una meción especial.

Hemos de probar que para cualesquiera $L \in \mathbb{B}$, $y \in E$, $s,t \in \mathbb{R}_+$ se tiene

$$\int_E \hat{p}^h(t,L,z)\ \hat{p}^h(s,dz,y) = \hat{p}^h(t+s,L,y)\ .$$

En primer lugar, observemos que

$$\int_E \hat{p}^h(t,L,z)\ \hat{p}^h(s,dz,y) = \int_{E_o^\infty} \hat{p}^h(t,L,z)\ \hat{p}^h(s,dz,y)$$

ya que por la definición de la función $\hat{p}^h$, ésta es nula en $E-E_o^\infty$. Si suponemos que $y \in E_o \cup E_\infty$, entonces la ecuación de Chapman-Kolmogorov es tirvialmente cierta, por reducirse a una identidad trivial de elementos nulos. Así pués, consideramos desde ahora que $y \in E_o^\infty$. Además, ya que $\hat{p}^h(t,L,z)$ está definida entérminos de la integral de la función h con respecto a la medida $\hat{p}(t,dx,z)$, que no carga los subconjuntos medibles de $E-E_o$, cuando $z \in E_o$, podemos suponer, por tanto, que el conjunto L no tiene parte común con E_o .

Se tiene entonces que

$$\int_{E_o^\infty} \hat{p}^h(t,L,z)\ \hat{p}^h(s,dz,y) =$$

$$= \int_{E_o^\infty} \frac{1}{h(z)} \int_L \hat{p}(t,dx,z)\ h(x)\ \frac{1}{h(y)}\ \hat{p}(s,dz,y)\ h(z) =$$

$$= \frac{1}{h(y)} \int_L h(x) \int_{E_o^\infty} \hat{p}(t,dx,z)\ \hat{p}(s,dz,y) =$$

$$= \frac{1}{h(y)} \int_L h(x)\ \hat{p}(t+s,dx,y)$$

ya que

$$\int_{E_o^\infty} \hat{p}(t,dx,z)\ \hat{p}(s,dz,y) = \int_E \hat{p}(t,dx,z)\ \hat{p}(s,dz,y) = \hat{p}(t+s,dx,y)$$

por ser $\hat{p}$ una función de cotransición, y por tanto verificar la ecuación de Chapman-Kolmogorov.

De estas relaciones se obtiene ya inmediatamente que la función $\hat{p}^h$ verifica la ecuación de Chapman-Kolmogorov, y es por consiguiente una función de cotransición como queríamos ver.

A partir de ahora, denotaremos por $K^{\hat{p}^h}$ el conjunto de todos los procesos de Markov P que tienen a $\hat{p}^h$ como función de cotransición.

En los trabajos sobre procesos de Markov, es frecuente considerar éstos como obtenidos a partir de una función de transición p , y una condición adicional sobre el comportamiento inicial del proceso, por ello dado que aquí estamos considerando los procesos de Markov que tienen una misma función de cotransición, parecería aconsejable referirnos a éstos como <u>coprocesos</u> y denotarlos por una notación del tipo $\hat{P}$ para -

dejar constancia de su procedencia de una función de cotransición. Sin embargo una postura de éste tipo sería excesivamente formalista, ya que para un proceso de Markov dado P, pueden considerarse tanto la función de transición p como la función de cotransición $\hat{p}$, que indican como es la evolución hacia el futuro y hacia el pasado respectivamente, y por ello la posible diferencia entre un proceso y un coproceso es más bien de tipo formal. Así pués en el presente desarrollo, usaremos una notación amplia tanto de P como de $\hat{P}$, para designar los procesos de Markov según la conveniencia de cada momento.

Vamos a efectuar ahora una serie de consideraciones relativas ala hipótesis de dualidad, como habíamos anunciado al final del apartado anterior.

La condición de normalidad de la función de transición p en el sentido de R.M.Blumenthal-R.K.Getoor (1), como ya hemos indicado no es necesaria en el desarrollo posterior, y es por ello que no vamos a analizar aquí. Por el contrario, una hipótesis más fuerte que ésta si es necesaria en el apartado 13, y por ello la formulamos ya desde ahora: Para cada $x \in E$, y para cada $L \in \mathbb{B}$, existe el límite $p(0+,x,L)$, y es igual a $I_L(x)$. Bajo ésta hipótesis, tenemos que

$$\lim_{c \nearrow \infty} c\, G_c\, I_L(x) = \int_0^\infty e^{-u}\, p(0+,x,L)\, du = I_L(x)$$

por lo que por la hipótesis HD1 de la dualidad

$$\langle cG_c I_{L_1}(\cdot), I_{L_2}(\cdot)\rangle_w = \langle I_{L_1}(\cdot), c\hat{G}_c I_{L_2}(\cdot)\rangle_w$$

para cualesquiera $L_1, L_2 \in \mathbb{B}$. Tomando límite cuando $c \nearrow \infty$, obtenemos

$$w(L_1 \cap L_2) = \int_{L_1} \hat{p}(0+,L_2,x)\ w(dx)$$

por lo que, para todo $L \in \mathbb{B}$

$$\hat{p}(0+,L,x) = I_L(x) \qquad (w)$$

y ésta es la misma propiedad que la que se habñia supuesto para la función de transición p .

Sobre esta hipótesis obtenedremos nosotros en el apartado 13 unos resultados importantes, y para referencia futura de la misma, la denominaremos desde ahora como <u>hipótesis HC</u> (puesto que será usada para probar una propiedad de continuidad por la derecha de uaa determinada función).

Como consecuencia de ésta hipótesis HC, podemos ya afirmar que la función de transición inicial p es normal en el sentido definido en al apartado 5 , y por consiguiente la medida de la dualidad w es coexcesiva. Pero además, puesto que $\hat{p}$ es normal (w), se tiene que w es tambien excesiva. Esta última afirmación, no se obtiene sin embargo de ser p sólo normal, sino que es necesaria esta hipótesis más fuerte HC .

Por último, nosotros hemos supuesto que la función de transición p era tal que los operadores P_t resultan ser submarkovianos, en lugar de markovianos. Esta generalidad es, en principio,un pocò ficticia, ya que mediante un cambio del espacio de estados puede conseguirse que los operadores P_t sean markovianos. Sin embargo, no hemos realizado aquí el cambio del espacio de estados E, por dos razones principalmente: La primera, porque de haber efectuado el cambio de espacio de estados, a otro, el semigrupo de los cooperadores $\hat{P}_t$ no sería markoviano salvo afirmaciones de casi todo $t \in \mathbb{R}_+$, y además el semigrupo de cooperadores asociado a la función de cotransición $\hat{p}^h$, teniendo en cuenta que h cosupermedia, no sería markoviano, por lo que habría que efectuar un nuevo cambio en el espacio de estados. La seguuda razón, es que no es necesario en los desarrollos anteriores que los semigrupos de operadores ó cooperadores sean markovianos.

12.- LA INYECCION DE $R_h^{\hat{p}}$ EN $K^{\hat{p}^h}$.

El fin principal de éste apartado es demostrar la afirmación que le da título. Es decir, probar que para cada medida $m \in R_h^{\hat{p}}$, existe un proceso de Markov P_h^m de $K^{\hat{p}^h}$ construido a partir de m y h.

La demostración se llevará a cabo estableciendo resultados parciales de los que obtendremos, como consecuencia final, éste que deseamos. Los pasos generales consisten en: 1º) Extender el espacio de estados; 2º) Construir una medida de probabilidad sobre el espacio de todas las aplicaciones de $\mathbb{R}_+$ sobre el espacio de estados ampliado; 3º) Restringirnos al espacio de las trayectorias que son absorbidas en un estado concreto; 4º) Verificar que la medida de probabilidad resultante es un proceso de Markov de $K^{\hat{p}^h}$; y, 5º) Establecer la inyección de $R_h^{\hat{p}}$ en $K^{\hat{p}^h}$ como habíamos anunciado.

Veamos la extensión del espacio de estados $(E, \mathbb{B})$. Denotemos por A un ente que adjuntamos al espacio E, y designemos al nuevo espacio por E_A. Sobre este nuevo espacio consideramos la σ-álgebra $\mathbb{B}_A$ generada por los elementos $L \in \mathbb{B}$ y el conjunto $\{A\}$. Puesto que el espacio de estados $(E, \mathbb{B})$ que hemos considerado hasta ahora era estandar, hemos de ver si se conserva esta misma propiedad para el espacio de estados ampliado $(E_A, \mathbb{B}_A)$. Vamos a ver que efectivamente ésta es la situación.

Lema.- El espacio medible $(E_A, \mathbb{B}_A)$ es estandar.

Puesto que el espacio de partida es un espacio medible estandar, existe un espacio medible $(X, \mathbb{B}_X)$, siendo X un espacio polaco, y $\mathbb{B}_X$ la σ-álgebra de sus borelianos, tal que $(E, \mathbb{B})$ es isomorfo a un espacio medible $(B, \mathbb{B}_B)$, donde $B \in \mathbb{B}_X$, y $\mathbb{B}_B$ es la σ-álgebra traza de $\mathbb{B}_X$ sobre B. Denotemos por j el isomorfismo entre los espacios medible $(E, \mathbb{B})$ y $(B, \mathbb{B}_B)$.

Distinguimos ahora dos casos: Primero, supongamos que B es un subconjunto propio de X, $B \neq X$. Sea $z \in X - B$, entonces - el conjunto $\{z\}$ es cerrado, por lo que $\{z\} \in \mathbb{B}_X$, y $B_z = B \cup \{z\}$ es un conjunto boreliano de X. Se tiene entonces que $(E_A, \mathbb{B}_A)$ es isomorfo al espacio medible $(B_z, \mathbb{B}_{B_z})$, obtenido del espacio medible $(B, \mathbb{B}_B)$ por adjunción del punto $z \in X - B$. Efectivamente, si definimos $j': E_A \longrightarrow B_z$, mediante la relación:

$$j'(x) = j(x) \text{ si } x \in E$$

$$j'(A) = z$$

entonces j' es una aplicación que es completa, uno-a-uno (inyectiva), y medible, ya que si $C \in \mathbb{B}_{B_z}$, entonces $C = B_z \cap C'$ para algún $C' \in \mathbb{B}_X$, es decir, que $C = B' \cup \{z\}$, con $B' \in \mathbb{B}_B$, o bien, es $C \in \mathbb{B}_B$. Si $C = B' \cup \{z\}$, entonces

$$j'^{-1}(C) = j'^{-1}(B') \cup j'^{-1}(\{z\}) = j^{-1}(B') \cup \{A\} \in \mathbb{B}_A$$

mientras que si $C \in \mathbb{B}_B$, entonces

$$j'^{-1}(C) = j^{-1}(C) \in \mathbb{B} \subset \mathbb{B}_A$$

por lo que j' es medible como queríamos ver. Análogamente, se puede demostrar que j'^{-1} es tambien medible, y por consiguiente j es un isomorfismo. Es decir, hemos demostrado, en éste primer caso, que $(E_A, \mathbb{B}_A)$ es un espacio medible estandar.

Caso segundo: Supongamos que $B = X$. Consideremos entonces el espacio producto $X \times X$, con la topología producto. Este nuevo espacio es tambien polaco, vease N.Bourbaki (1) IX.57, y si z es cualquier elemento del espacio X fijado ya desde ahora, se tiene que $X \times \{z\} \in \mathbb{B}_{X \times X}$, y el espacio medible estandar $(E, \mathbb{B})$ es isomorfo al subespacio medible $(X \times \{z\}, \mathbb{B}_{X \times \{z\}})$ mediante el isomorfismo $\jmath$ definido por

$$\jmath(x) = (j(x), z) \quad \text{para } x \in E$$

siendo j el isomorfismo inicial entre E y X. Así pues, ya que $X \times \{z\}$ es un subconjunto propio de $X \times X$, este caso se reduce al anterior, y queda probado el Lema.

Sea $m \in R_h^{\hat{p}}$. Vamos a construir ahora una medida de probabilidad, que denotaremos por P_h^m, para indicar su procedencia de la función h y la medida m, que será un proceso de Markov sobre el espacio de estados ampliado $(E_A, \mathbb{B}_A)$.

Sean $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$ elementos de $\mathbb{R}_+$, y $L_1, L_2, \ldots, L_n$

elementos de la σ-álgebra $\mathbb{B}$ sin ampliar. Definimos, por recurrencia sobre n, las siguientes funciones de conjunto:

$$q_{t_i}(L_i) = \int_{L_i} m_{t_i}(dx)\, h(x)$$

$$q_{t_1 t_2 \dots t_n}(L_1, L_2, \dots, L_n) = \int_{L_1} m_{t_1}(dx_1) \int_{L_2} \hat{p}(t_2 - t_1, dx_2, x_1)$$

$$\dots \int_{L_n} \hat{p}(t_n - t_{n-1}, dx_n, x_{n-1})\, h(x_n)$$

donde

$$m_t(.) = m\, \hat{P}_t\,(.)$$

Extendemos ahora la función $q_{\dots}(\dots)$ a los conjuntos de $\mathbb{B}_A$, y denotaremos por $\bar{q}_{\dots}(\dots)$ la función extendida. Conservando la notación, ponemos para $t_1 \leq t_2 \leq \dots t_n$ de $\mathbb{R}_+$, y $L_1, L_2, \dots, L_n$ de $\mathbb{B}_A$,

$$\bar{q}_{t_i}(L_i) = q_{t_i}(L_i \cap E) + I_{L_i}(A)\,(\, 1 - q_{t_i}(E)\,)$$

y

$$\bar{q}_{t_1 t_2 \dots t_n}(L_1, L_2, \dots, L_n) = q_{t_1 t_2 \dots t_n}(L_1 \cap E, L_2 \cap E, \dots, L_n \cap E) +$$

$$+ I_{L_n}(A) \Big\{ \bar{q}_{t_1 \dots t_{n-1}}(L_1, \dots, L_{n-1}) -$$

$$- q_{t_1 t_2 \dots t_n}(L_1 \cap E, L_2 \cap E, \dots, L_{n-1} \cap E, E\,) \Big\}$$

Vamos a demostrar ahora una serie de propiedades de estas funciones, q y $\bar{q}$, que serán útiles en lo sucesivo.

1ª) Para todo $t \in \mathbb{R}_+$, $q_t(E) \leq 1$.

En efecto, por la misma definición, y puesto que m es co-excesiva,

$$q_t(E) = \int_E m_t(dx)\, h(x) = m_t(h) \leq m(h) = 1\ .$$

2 *) Para cada $t \in \mathbb{R}_+$, $\bar{q}_t(E_A) = 1$.

En efecto, por simple cálculo,

$$\bar{q}_t(E_A) = q_t(E_A \cap E) + I_{E_A}(A)\ (1 - q_t(E)) = q_t(E) + 1 - q_t(E) = 1.$$

3 *) Para cualquier $i=1,2,..,n-1$,

$$q_{t_1..t_i..t_n}(L_1,...,E,...,L_n) = q_{t_1..t_{i-1}t_{i+1}..t_n}(L_1,..L_{i-1},L_{i+1},.L_n)$$

Por cálculo directo, para $i=2,3,...,n-1$, se tiene

$$q_{t_1.t_i.t_n}(L_1,.,E,.,L_n) = \int_{L_1} m_{t_1}(dx_1)...\int_E \hat{p}(t_i-t_{i-1},dx_i,x_{i-1})$$

$$\int_{L_{i+1}}\hat{p}(t_{i+1}-t_i,dx_{i+1},x_i)... \int_{L_n}\hat{p}(t_n-t_{n-1},dx_n,x_{n-1})h(x_n) =$$

(por la ecuación de Chapman-Kolmogorov)

$$= \int_{L_1} m_{t_1}(dx_1)... \int_{L_{i+1}}\hat{p}(t_{i+1}-t_{i-1},dx_{i+1},x_{i-1})...$$

$$... \int_{L_n}\hat{p}(t_n-t_{n-1},dx_n,x_{n-1})\ h(x_n) =$$

$$= q_{t_1.t_{i-1}t_{i+1}.t_n}(L_1,.,L_{i-1},L_{i+1},.,L_n)$$

como queríamos ver. Ahora, para $i=1$, tenemos

$$q_{t_1...t_n}(E,...,L_n) = \int_E m_{t_1}(dx_1)\int_{L_2}\hat{p}(t_2-t_1,dx_2,x_1)... =$$

$$= \int_E m(dx)\int_E\hat{p}(t_1,dx_1,x)\int_{L_2}\hat{p}(t_2-t_1,dx_2,x_1)\ ... =$$

$$= \int_E m(dx)\int_{L_2}\hat{p}(t_2,dx_2,x)\ .... = q_{t_2...t_n}(L_2,..,L_n)$$

como se quería demostrar.

4 *) Para todo $i=1,2,..,n$, con las notaciones anteriores,

$$\bar{q}_{t_1.t_i.t_n}(L_1,.,E_A,.,L_n) = \bar{q}_{t_1.t_{i-1}t_{i+1}.t_n}(L_1,.,L_{i-1},L_{i+1},.,L_n)$$

Tenemos, para $i=1,2,..,n-1$

$$\bar{q}_{t_1 . t_i . t_n}(L_1,.,E_A,.,L_n) = q_{t_1 . t_i . t_n}(L_1\cap E,.,E_A\cap E,.,L_n\cap E) +$$

$$+ I_{L_n}(A)\Big\{ \bar{q}_{t_1 , t_i , t_{n-1}}(L_1,.,E_A,.,L_{n-1}) -$$

$$- q_{t_1 . t_i , t_{n-1} t_n}(L_1\cap E,.,E_A\cap E,.,L_{n-1}\cap E, E)\Big\} =$$

(por la propiedad 3*))

$$= q_{t_1 . t_{i-1} t_{i+1} . t_n}(L_1\cap E,.,L_{i-1}\cap E,L_{i+1}\cap E,.,L_n\cap E) +$$

$$+ I_{L_n}(A)\Big\{ \bar{q}_{t_1 . t_i . t_{n-1}}(L_1,.,E_A,.,L_{n-1}) -$$

$$- q_{t_1 . t_{i-1} t_{i+1} . t_n}(L_1\cap E,.,L_{i-1}\cap E,L_{i+1}\cap E,.,E)\Big\} =$$

(aplicando ahora un razonamiento de inducción sobre el número de subíndices de la función $\bar{q}_{..}(..)$, de modo que suponemos cier ta la relación 4*) que queremos probar, para n-1 subíndices, es decir, que $\bar{q}_{t_1 .. t_{n-1}}(L_1,.,E_A,.,L_{n-1}) = \bar{q}_{t_1 . t_{i-1} t_{i+1} . t_{n-1}}(L_1,.,$ $L_{i-1},L_{i+1},.,L_{n-1})$)

$$= q_{t_1 . t_{i-1} t_{i+1} . t_n}(L_1\cap E,.,L_{i-1}\cap E,L_{i+1}\cap E,.,L_n\cap E) +$$

$$+ I_{L_n}(A)\Big\{ \bar{q}_{t_1 . t_{i-1} t_{i+1} . t_{n-1}}(L_1,.,L_{i-1},L_{i+1},.,L_{n-1}) -$$

$$- q_{t_1 . t_{i-1} t_{i+1} . t_n}(L_1\cap E,.,L_{i-1}\cap E,L_{i+1}\cap E,.,E)\Big\} =$$

$$= \bar{q}_{t_1 . t_{i-1} t_{i+1} . t_n}(L_1,.,L_{i-1},L_{i+1},.,L_n)$$

como queríamos ver. Ahora bien, para que este razomamiento por inducción sea válido es necesario demostrar que se tiene la siguiente relación:

$$\bar{q}_{t_1 ... t_n}(L_1,...,E_A) = \bar{q}_{t_1 ... t_{n-1}}(L_1,...,L_{n-1})$$

es decir, que se verifica tambien la relación para $i = n$, y además que sea

$$\bar{q}_{t_1 t_2}(E_A, L_2) = \bar{q}_{t_2}(L_2)$$

Vamos a ver primero que se verifica ésta última, y después comprobaremos el caso $i = n$, con lo que finalizara la demostración de esta propiedad.

Por cálculo directo, aplicando 2*) y 3*), tenemos:

$$\bar{q}_{t_1 t_2}(E_A, L_2) = q_{t_1 t_2}(E, L_2 \cap E) +$$

$$+ I_{L_2}(A)\left\{ \bar{q}_{t_1}(E_A) - q_{t_1 t_2}(E, E) \right\} =$$

$$= q_{t_2}(L_2 \cap E) + I_{L_2}(A)\left\{ 1 - q_{t_2}(E) \right\} =$$

$$= \bar{q}_{t_2}(L_2)$$

Para el caso $i \neq n.$, tenemos sin necesidad de la inducción,

$$\bar{q}_{t_1 \ldots t_n}(L_1, \ldots, E_A) = q_{t_1 \ldots t_n}(L_1 \cap E, .., L_{n-1} \cap E, E) +$$

$$+ I_{E_A}(A)\left\{ \bar{q}_{t_1 \ldots t_{n-1}}(L_1, \ldots, L_{n-1}) - \right.$$

$$\left. - q_{t_1 \ldots t_n}(L_1 \cap E, .., L_{n-1} \cap E, E) \right\} =$$

$$= \bar{q}_{t_1 \ldots t_{n-1}}(L_1, \ldots, L_{n-1})$$

con lo que finaliza la demostración de la propiedad 4*).

5*) Para cualesquiera $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$ de $\mathbb{R}_+$, la función de conjunto $\bar{q}_{t_1 \ldots t_n}(L_1, \ldots, L_n)$ es para cada compomente una medida sobre $\mathbb{B}$.

La positividad de la función $q_{..}(..)$ es inmediata por la propia definición, ya que la función h es no negativa. La σ-aditividad de ésta función, en cada componente, se tiene del hecho de la σ-aditividad de la integral con respecto al dominio de integración.

6 ∗) Para cualesquiera $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$ de $\mathbb{R}_+$, la función de conjunto $\bar{q}_{t_1 \ldots t_n}(L_1, \ldots, L_n)$ es una medida sobre $\mathbb{B}_A$ en cada una de sus componentes.

Observemos que debido al hecho de ser h una función cosupermedia, se tiene que

$$q_{t_1 \ldots t_n}(L_1, \ldots, L_{n-1}, E) = \int_{L_1} \ldots \int_{L_{n-1}} \hat{p}(t_{n-1}-t_{n-2}, dx_{n-1}, x_{n-2}) \int_E \hat{p}(t_n - t_{n-1}, dx_n, x_{n-1})\, h(x_n) =$$

$$= \int_{L_1} \ldots \int_{L_{n-1}} \hat{p}(t_{n-1}-t_{n-2}, dx_{n-1}, x_{n-2})\, \hat{P}_{t_n - t_{n-1}} h(x_{n-1})$$

$$\leq \int_{L_1} \ldots \int_{L_{n-1}} \hat{p}(t_{n-1}-t_{n-2}, dx_{n-1}, x_{n-2})\, h(x_{n-1}) =$$

$$= q_{t_1 \ldots t_{n-1}}(L_1, \ldots, L_{n-1})$$

es decir, que

$$(*) \qquad q_{t_1 \ldots t_n}(L_1, \ldots, L_{n-1}, E) \leq q_{t_1 \ldots t_{n-1}}(L_1, \ldots, L_{n-1})$$

Además, por inducción sobre n, tenemos que por 1 ∗)

$$\bar{q}_t(L) = q_t(L \cap E) + I_L(A)\{1 - q_t(E)\} \geq q_t(L \quad E)$$

y supuesto entonces que para n-1

$$\bar{q}_{t_1 \ldots t_{n-1}}(L_1, \ldots, L_{n-1}) \geq q_{t_1 \ldots t_{n-1}}(L_1 \quad E, \ldots, L_{n-1} \quad E)$$

tenemos que

$$\bar{q}_{t_1 \ldots t_n}(L_1, \ldots, L_n) = q_{t_1 \ldots t_n}(L_1 \cap E, \ldots, L_n \cap E) +$$

$$+ I_{L_n}(A)\left\{ \bar{q}_{t_1\ldots t_{n-1}}(L_1,\ldots,L_{n-1}) - q_{t_1\ldots t_n}(L_1\cap E,..,L_{n-1}\cap E,E)\right\}$$

$$\geqslant q_{t_1\ldots t_n}(L_1\cap E,\ldots,L_n\cap E) \geqslant 0$$

ya que por (*) se tiene que

$$\bar{q}_{t_1\ldots t_{n-1}}(L_1,\ldots,L_{n-1}) \geqslant q_{t_1\ldots t_n}(L_1\cap E,\ldots,L_{n-1}\cap E,E)$$

Así pués, la función $\bar{q}_{..}(..)$ es no negativa.

Vamos a probar ahora la σ-aditividad. La demostración es tambien por inducción. Tenemos que

$$\bar{q}_t(\bigcup_n L_n) = q_t(\bigcup_n (L_n\cap E)) + I_{\bigcup_n L_n}(A)\left\{1 - q_t(E)\right\} =$$
$$= \sum_n q_t(L_n\cap E) + \sum_n I_{L_n}(A)\left\{1 - q_t(E)\right\} =$$
$$= \sum_n \bar{q}_t(L_n)$$

para todo $t\in \mathbb{R}_+$, y $L \in \mathbb{B}_A$. Además,

$$\bar{q}_{t_1t_2}(\bigcup_n L_n^1, L^2) = q_{t_1t_2}(\bigcup_n (L_n^1\cap E), L^2\cap E) +$$
$$+ I_{L^2}(A)\left\{\bar{q}_{t_1}(\bigcup_n L_n^1) - q_{t_1t_2}(\bigcup_n (L_n^1\cap E), E)\right\} =$$
$$= \sum_n q_{t_1t_2}(L_n^1\cap E, L^2\cap E) +$$
$$+ \sum_n I_{L^2}(A)\left\{\bar{q}_{t_1}(L_n^1) - q_{t_1t_2}(L_n^1\cap E, E)\right\} =$$
$$= \sum_n \bar{q}_{t_1t_2}(L_n^1, L^2)$$

para cuales quiera $t_1,t_2\in \mathbb{R}_+$, $t_1\leq t_2$, y L_i^1, $L^2\in \mathbb{B}_A$, $i=1,..,n$.

Analogamente, se demuestra que

$$\bar{q}_{t_1t_2}(L^1,\bigcup_n L_n^2) = \sum_n \bar{q}_{t_1t_2}(L^1, L_n^2)$$

para cualesquiera $t_1\leq t_2$ de $\mathbb{R}_+$, y L^1, $L_i^2\in \mathbb{B}_A$, $i=1,\ldots,n$.

Entonces, bajo la hipótesis de inducción, tenemos que

$$\bar{q}_{t_1\ldots t_n}(L_1,.,\bigcup_m L_i^m,.,L_n) =$$

$$= q_{t_1\ldots t_n}(L_1\cap E,.,\bigcup_m (L_i^m\cap E),.,L_n\cap E) +$$

$$+ I_{L_n}(A)\Big\{\bar{q}_{t_1\ldots t_{n-1}}(L_1,..,\bigcup_m L_i^m,.,L_{n-1}) -$$

$$- q_{t_1\ldots t_n}(L_1\cap E,.,\bigcup_m (L_i^m\cap E),.,E)\Big\}=$$

$$= \sum_m \bar{q}_{t_1\ldots t_n}(L_1,.,L_i^m,.,L_n)$$

con lo que queda demostrada la propiedad 6*).

Como conclusiones de todas estas propiedades demostradas resulta que las funciones $\bar{q}_{..}(..)$ verifican las condiciones del Teorema de Kolmogorov, concretamente, las propiedades 2*), 4*) y 6*). Así pués, existe una medida de probabilidad, que denotaremos por $\tilde{P}$, sobre el espacio medible $(\tilde{W}, \tilde{\mathbb{N}})$, donde $\tilde{W}$ representa el espacio de todas las aplicaciones de $\mathbb{R}_+$ sobre E_A, y $\tilde{\mathbb{N}}$ es la σ-álgebra de Kolmogorov engendrada sobre $\tilde{W}$ por los conjuntos de la forma $\{w\in\tilde{W} : w(t)\in L\}$, para $t\in\mathbb{R}_+$, $L\in\mathbb{B}_A$. Concretamente, la medida $\tilde{P}$ está dada por

$$\tilde{P}\{w\in\tilde{W}: w(t_1)\in L_1, w(t_2)\in L_2,\ldots,w(t_n)\in L_n\} =$$

$$= \bar{q}_{t_1 t_2\ldots t_n}(L_1,L_2,\ldots,L_n)$$

para $t_1\leq t_2\leq\ldots\leq t_n$ de $\mathbb{R}_+$, y $L_1,L_2,\ldots,L_n\in\mathbb{B}_A$.

El siguiente paso en la demostración del Teorema fundamental de éste apartado es restringirnos al espacio de las trayectorias que son absorbidas en el punto A añadido al espacio E. Concretando más, designemos por W el espacio de todas las tratectorias $w\in\tilde{W}$ tales que $w(0)\in E$, y además $w(t)=A$ para todo t de $\mathbb{R}_+$ mayor que $Z(w) = \inf\{t\in\mathbb{R}_+ : w(t) = A\}$. Ahora bien, este conjunto W noes necesariamente $\tilde{\mathbb{N}}$-medible, y por consiguiente puede no teenr significado $\tilde{P}(W)$. Sin embargo, el siguiente lema que vamos a probar establece que $\tilde{W} - W$ es en cierto modo $\tilde{P}$ - despreciable. En efecto, tenemos el

Lema.- El conjunto $\tilde{W} - W$ es interiormente $\tilde{P}$-nulo, es decir, para todo $C \subset \tilde{W} - W$, $C \in \tilde{\mathbb{N}}$, es $\tilde{P}(C) = 0$.

Para la demostración de éste resultado aplicamos un procedimiento semejante al usado por P.A.Meyer (3) precisando algunos aspectos. Establecemos en primer lugar la siguiente propiedad:

*) Si $C \subset \tilde{W} - W$, y si existe un conjunto numerable $Q \subset \mathbb{R}_+$ - tal que se verifique:

$$w \in C,\ w(s) = \bar{w}(s)\quad \forall s \in Q \quad \Rightarrow \quad \bar{w} \in C$$

se tiene entonces que

$$C \subset \bigcup_{\substack{r,s \in Q \\ r<s}} \{w : w(r) = A,\ w(s) \neq A\}$$

En efecto, bajo las supuestas hipótesis, razonemos por reducción al absurdo; si fuese

$$C \not\subset \bigcup_{\substack{r,s\in Q \\ r<s}} \{w : w(r) = A,\ w(s) \neq A\}$$

entonces consideremos un $w \in A$ fijo y definamos

$$Z(w) = \inf\{t \in Q : w(t) = A\}.$$

Sea $x \in E$ tambien fijo, y sea para todo $s \in \mathbb{R}_+$

$$w'_x(s) = \begin{cases} w(s) & \text{si } s \in Q \text{ y } s < Z(w) \\ x & \text{si } s \notin Q \text{ y } s \leq Z(w) \\ A & \text{si } s > Z(w) \end{cases}$$

Entonces, por construcción, $w'_x \in W$, pero como

$$w'_x(s) = w(s) \quad \forall\, s \in Q \;,\; w \in C$$

se tiene por hipótesis que $w'_x \in C$, en contra de ser $C \subset \widetilde{W}-W$. Así pués ha de verificarse la tesis enunciada.

Hemos de probar ahora que para cualquier $C \in \mathbb{N}$, $C \subset \widetilde{W} - W$, se verifica la tesis anterior. Sea $w \in C$, y Q_+ los racionales no negativos. Definimos

$$C_w = \{ \bar{w} \in \widetilde{W} \;:\; w(r) = \bar{w}(r) \;,\; \forall\, r \in Q_+ \} =$$
$$= \bigcap_{r \in Q_+} \{ \bar{w} \in \widetilde{W} \;:\; w(r) = \bar{w}(r) \}$$

Esta claro que entonces $C_w \in \mathbb{N}$, y que $w \in C_w$, por lo que C_w no es vacío. Sea ahora

$$\bar{C} = \bigcup_{w \in C} C_w$$

Este conjunto no es necesariamente $\mathbb{N}$-medible, pero sin embargo siempre se tiene que $C \subset \bar{C}$, y además, se verifica que

$$\text{Si } \bar{w} \in \bar{C} \text{ y } \bar{w}(r) = w'(r) \quad \forall\, r \in Q_+ \;\Rightarrow\; w' \;\; \bar{C}$$

ya que por ser $\bar{w} \in \bar{C}$, se sigue que existe un $w \in C$, tal que

$$\bar{w}(r) = w(r) \quad \forall\, r \in Q_+$$
$$\bar{w}(r) = w'(r) \quad \forall\, r \in Q_+$$

por lo que $w'(r) = w(r)$ $\forall\, r \in Q_+$, es decir, $w' \in C_w \subset \bar{C}$.

Así pues podemos aplicar en este caso la propiedad establecida antes, y resulta que

$$C \subset \bar{C} \subset \bigcup_{\substack{r,s \in Q_+ \\ r<s}} \{ w \;:\; w(r) \doteq A \,,\, w(s) \neq A \}.$$

Con esta relación establecida, la demostración del Lema es ya fácil, puesto que

$$\tilde{P}(C) \leqslant \sum_{\substack{r,s \in Q_+ \\ r<s}} \tilde{P}\,\{ w \;:\; w(r) = A \,,\, w(s) \neq A \}$$

y como para $r < s$,

$$\tilde{P}\{w : w(r) = A,\ w(s) \neq A\} = \bar{q}_{rs}(A,E) =$$
$$= q_{rs}(\emptyset, E) + I_E(A)\{\bar{q}_r(\emptyset) - q_{rs}(\emptyset,E)\} =$$
$$= q_{rs}(\emptyset, E) = 0$$

tenemos que

$$\tilde{P}(C) = 0$$

por lo que $\tilde{W} - W$ es interiormente $\tilde{P}$-nulo como queríamos probar. Con esto finaliza la demostración del Lema.

Ahora bien, aplicando el resultado de P.A.Meyer (1),II.27, el espacio probabilístico $(\tilde{W}, \tilde{\mathbb{N}}, \tilde{P})$ puede ser completado a un nuevo espacio probabilístico $(\tilde{W}, \mathbb{N}', P')$, donde $\mathbb{N}'$ es la σ-álgebra engendrada por los elementos de $\tilde{\mathbb{N}}$ y $(\tilde{W}-W)$, y P' es la extensión de $\tilde{P}$ a ésta σ-álgebra. Además, se tiene que $P'(\tilde{W}-W) = 0$, y por consiguiente podemos ahora restirngirnos a un nuevo espacio probabilístico $(W, \mathbb{N}, P)$ donde $\mathbb{N}$ es la σ-álgebra traza de $\mathbb{N}'$ sobre W, y P esta definida por $P(C) = P'(C \cap W)$.

El espacio probabilístico inicial que habíamos considerado podía haber sido dotado de un filtraje de sub-σ-álgebras crecientes $\tilde{\mathbb{N}}_t$ para representar el pasado del proceso, ó de un filtraje de sub-σ-álgebras crecientes $\tilde{\mathbb{N}}^t$, para representar el futuro. Estas familias de σ-álgebras se transforman a otras nuevas familias en el proceso de completación y restricción descrito anteriormente, de modo que junto con el espacio probabilístico $(W, \mathbb{N}, P)$ puede ser considerado dos familias de sub-σ-álgebras, $\mathbb{N}_t$ y $\mathbb{N}^t$ para cada $t \in \mathbb{R}_+$ que representan el pasado y el futuro respectivamente.

Con cada $w \in W$, podemos asociar su tiempo de muerte o tiempo de absorción en A, definido por

$$z(w) = \inf \{ t : w(t) = A \}$$

sin embargo, la variable z no es un tiempo de parada en general tal como los que se consideran en la moderna Teoria General de Procesos, ya que no hemos supuesto una topología sobre el espacio de estados $(E_A, \mathbb{B}_A)$, y por consiguiente no podemos hacer - consideraciones sobre la continuidad de las trayectorias.

A partir de ahora, ya que la medida de probabilidad P ha sido construida a partir de la medida $m \in R_h^{\hat{p}}$ y la función cosupermedia h , para reflejar esta situación adoptaremos la notación P_h^m para representar la medida de probabilidad. Además, desde - ahora tambien, y como es usual, denotaremos por $x_t(w)$, ó simplemente x_t cuando no exista confusión posible, el estado del proceso w(t) en el instante t .

En este nueva notación, tenemos que para cualesquiera $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$ de $\mathbb{R}_+$, $L_1, L_2, \ldots, L_n$ de $\mathbb{B}_A$,

$$P_h^m(x_{t_1} \in L_1, \ldots , x_{t_n} \in L_n) = \bar{q}_{t_1 \ldots t_n}(L_1, \ldots, L_n)$$

El siguiente paso, es demostrar que la medida de probabilidad P_h^m así construida es un proceso de Markov asociado a la función de cotransición $\hat{p}^h$. Es decir, hemos de probar que

$$P_h^m [x_t \in L \mid \mathbb{N}_s] = P_h^m [x_t \in L \mid x_s] \quad \text{c.s. } P_h^m, x_s \in E$$

para cualesquiera $t > s$ de $\mathbb{R}_+$, y $L \in \mathbb{B}_A$, y además que

$$P_h^m [x_t \in L \mid \mathbb{N}_s] = \hat{p}^h(t-s, L, x_s) \quad \text{c.s. } P_h^m, x_s \in E$$

Ahora bien, ésta última relación carece de sentido en general ya que la función de cotransición $\hat{p}^h$ sólo está definida sobre los elementos de $\mathbb{B}$, pero no sobre los de $\mathbb{B}_A$, por lo que deberemos extender la definición de $\hat{p}^h$ al nuevo espacio medible estandar $(E_A, \mathbb{B}_A)$, para que tenga sentido las relaciones escritas. Esta labor será abordada posteriormente, y procederemos ahora a demostrar estas relaciones para el caso en que $L \in \mathbb{B}$, y luego veremos el caso general.

Vamos a demostrar que para $t > s$ de $\mathbb{R}_+$ y $L \in \mathbb{B}$:

$$P_h^m [x_t \in L \mid x_s] = \hat{p}^h(t-s,L,x_s) \quad \text{c.s. } P_h^m \; x_s \in E .$$

Esta relación es equivalente a escribir

$$\int_{C \cap [x_s \in E]} I_{[x_t \in L]} \, dP_h^m = \int_{C \cap [x_s \in E]} \hat{p}^h(t-s,L,x_s) \, dP_h^m$$

para cualquier C de la σ-álgebra engendrada por x_s .

En forma más compacta, podemos escribir esta relación de manera equivalente:

$$P_h^m [C, x_s \in E, x_t \in L] = P_h^m [C, x_s \in E, \hat{p}^h(t-s,L,x_s)]$$

y puesto que C es cualquiera engendrado por x_s podemos considerar que $C = [x_s \in L']$ para algún $L' \in \mathbb{B}_A$, pero como además es $x_s \in E$, hemos de probar que

$$P_h^m [x_s \in L_1, x_t \in L] = P_h^m [x_s \in L_1, \hat{p}^h(t-s,L,x_s)]$$

donde $L_1 = E \cap L' \in \mathbb{B}$.

Haciendo uso de la definición de la medida P_h^m en términos de las funciones $q_{..}(..)$, ésta última relación se transforma en

$$q_{st}(L_1,L) = \int_{[x_s \in L_1]} \hat{p}^h(t-s,L,x_s) \, dP_h^m =$$

$$= \int_{L_1} \hat{p}^h(t-s,L,x)\; q_s(dx)$$

es decir, hemos de demostrar que

$$q_{st}(L_1,L) = \int_{L_1} \hat{p}^h(t-s,L,x)\; q_s(dx)$$

donde $\hat{p}^h(t-s,L,x)$ está definida en términos de $\hat{p}$, y

$$q_s(dx) = m_s(dx)\; h(x)\; .$$

Aquí consideramos ahora dos casos: Primero, que $L_1 \subset E_o^\infty$, entonces,

$$\int_{L_1} \hat{p}^h(t-s,L,x)\; q_s(dx) = \int_{L_1} q_s(dx)\; \frac{1}{h(x)} \int_L \hat{p}(t-s,dy,x)\; h(y) =$$

$$= \int_{L_1} \frac{m_s(dx)}{h(x)}\; h(x) \int_L \hat{p}(t-s,dy,x)\; h(y) =$$

$$= \int_{L_1} m_s(dx) \int_L \hat{p}(t-s,dy,x)\; h(y) = q_{st}(L_1,L)$$

como queríamos ver. En el segundo caso, si suponemos que $L_1 \subset E - E_o^\infty$, entonces, $\hat{p}^h(t-s,L,x) = 0$ para $x \in L_1$, por lo que hay que demostrar que se tiene

$$q_{st}(L_1,L) = 0$$

Efectivamente, por cálculo directo, teneiendo en cuenta las relaciones obtenidas en el Lema del apartado 11,

$$q_{st}(L_1,L) = \int_{L_1} m_s(dx) \int_L \hat{p}(t-s,dy,x)\; h(y) =$$

$$= \int_E m(dz) \int_{L_1} \hat{p}(s,dx,z) \int_L \hat{p}(t-s,dy,x)\; h(y) =$$

$$= \int_E m(dz) \int_{L_1} \hat{p}(s,dx,z) \int_{L\cap(E-E_o)} \hat{p}(t-s,dy,x)\; h(y)$$

$$= \int_E m(dz) \int_{L_1\cap E_o} \hat{p}(s,dx,z) \int_{L\cap(E-E_o)} \hat{p}(t-s,dy,x)\; h(y) +$$

$$+ \int_E m(dz) \int_{L_1\cap E_\infty} \hat{p}(s,dx,z) \int_{L\cap(E-E_o)} \hat{p}(t-s,dy,x)\; h(y) =$$

$$= \int_E m(dz) \int_{L_1\cap E_\infty} \hat{p}(s,dx,z) \int_{L\cap(E-E_0)} \hat{p}(t-s,dy,x)\, h(y) =$$

$$= \int_{E_\infty} m(dz) \int_{L_1\cap E_\infty} \hat{p}(s,dx,z) \int_{L\cap(E-E_0)} \hat{p}(t-s,dy,x)\, h(y) +$$

$$+ \int_{E-E_\infty} m(dz) \int_{L_1\cap E_\infty} \hat{p}(s,dx,z) \int_{L\cap(E-E_0)} \hat{p}(t-s,dy,x)\, h(y) =$$

$$= \int_{E_\infty} m(dz) \int_{L_1\cap E_\infty} \hat{p}(s,dx,z) \int_{L\cap(E-E_0)} \hat{p}(t-s,dy,x)\, h(y) = 0$$

ya que $m(E_\infty) = 0$, puesto que por ser $m(h) = 1$, se tiene que

$$m(h) = \int_{E_\infty} h(x)\, m(dx) + \int_{E-E_\infty} h(x)\, m(dx) = 1$$

por lo que necesariamente ha de ser $m(E_\infty) = 0$.

Vamos a demostrar ahora que se tiene la propiedad de Markov:

$$P_h^m [x_t \in L \mid \mathbb{N}_s] = P_h^m [x_t \in L \mid x_s] \quad \text{c.s. } P_h^m \ x_s \in E \ ,$$

para todo $t > s$ de $\mathbb{R}_+$, y $L \in \mathbb{B}$.

Esta relación es equivalente a escribir

$$\int_{C\cap[x_s\in E]} I_{[x_t\ L]}\, dP_h^m = \int_{C\cap[x_s\in E]} \hat{p}^h(t-s,L,x_s)\, dP_h^m$$

para cualquier $C \in \mathbb{N}_s$, en virtud de la relación ya establecida. Podemos tambien , además limitarnos a considerar el conjunto C de la forma

$$C = [x_{s_1} \in L_1 , \ldots , x_{s_n} \in L_n]$$

para $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n \leq s$ y $L_1, L_2, \ldots, L_n \in \mathbb{B}_A$, ya que estos son generadores de la σ-álgebra $\mathbb{N}_s$. Por consiguiente, en estas condiciones la relación enterior es equivalente a

$$P_h^m [x_{s_1} \in L_1, \ldots, x_{s_n} \in L_n,\ x_s \in E,\ x_t \in L] =$$

$$= \int_{C\cap[x_s\in E]} \hat{p}^h(t-s,L,x_s)\, dP_h^m =$$

$$= \int_E \hat{p}^h(t-s,L,x)\ P_h^m\left[x_{s_1}\in L_1,.,x_{s_n}\in L_n,\ x_s\in dx\right]$$

es decir, hemos de demostrar que

$$\bar{q}_{s_1\ldots s_n st}(L_1,\ldots,L_n,E,L) =$$

$$= \int_E \hat{p}^h(t-s,L,x)\ \bar{q}_{s_1\ldots s_n s}(L_1,.,L_n,dx)$$

Para demostrar esta relación observemos que al ser $L\in\mathbb{B}$, se tiene que $A\notin L$, por lo que

$$\bar{q}_{s_1\ldots s_n st}(L_1,\ldots,L_n,E,L) = q_{s_1\ldots s_n st}(L_1\cap E,.,L_n\cap E,E,L) =$$

$$= \int_{L_1\cap E} m_{s_1}(dx_1)\ \ldots\ \int_E \hat{p}(s-s_n,dx,x_n) \int_L \hat{p}(t-s,dy,x)\ h(y) =$$

teniendo en cuenta que $m_{s_1}(E_\infty) = 0$, y las relaciones del Lema del apartado 11, las integrales anteriores pueden reducirse bien a E_o^∞ ó a las intersecciones $L_i\cap E_o^\infty$, $L\cap E_o^\infty$, por lo que

$$= \int_{L_1\cap E_o^\infty} m_{s_1}(dx_1)\ldots\int_{E_o^\infty}\hat{p}(s-s_n,dx,x_n)\int_{L\cap E_o^\infty}\hat{p}(t-s,dy,x)h(y)=$$

por la definidión de $\hat{p}^h$,

$$= \int_{L_1\cap E_o^\infty} m_{s_1}(dx_1)\ \ldots\ \int_{E_o^\infty}\hat{p}(s-s_n,dx,x_n)\ h(x)\ \hat{p}^h(t-s,L\cap E_o^\infty,x)=$$

ya que $\hat{p}^h(t-s,L\cap E_o^\infty,x) = \hat{p}^h(t-s,L,x)$, para $x\in E_o^\infty$,

$$= \int_{L_1\cap E_o^\infty} m_{s_1}(dx_1)\ldots\int_{E_o^\infty}\hat{p}(s-s_n,dx,x_n)h(x)\hat{p}^h(t-s,L,x) =$$

$$= \int_{L_1\cap E_o^\infty} m_{s_1}(dx_1)\ldots\int_E\hat{p}(s-s_n,dx,x_n)h(x)\hat{p}^h(t-s,L,x) =$$

$$= \int_E \hat{p}^h(t-s,L,x)\ q_{s_1\ldots s_n s}(L_1\cap E,.,L_n\cap E,dx) =$$

$$= \int_E \hat{p}^h(t-s,L,x)\ \bar{q}_{s_1\ldots s_n s}(L_1,\ldots,L_n,dx)$$

como queriamos demostrar.

Hemos demostrado ya las siguientes relaciones

$P_h^m\left[x_t \in L \mid \mathbb{N}_s\right] = P_h^m\left[x_t \in L \mid x_s\right] = \hat{p}^h(t-s,L,x_s)$ c.s.P_h^m $x_s \in E$

para $t > s$, y con la restricción de ser $L \in \mathbb{B}$. Vamos ahora a extender estas relaciones al caso en que $L \in \mathbb{B}_A$. Para ello, ya que la función de cotransición $\hat{p}^h$ es una medida (una familia de medidas), es suficiente con determinar $P_h^m[x_t = A \mid \mathbb{N}_s]$ para $t > s$.

Sea $C \in \mathbb{N}_s$, que podemos considerar es uno de los generadores, como en el razonamiento anterior, tenemos entonces que

$$\int_{C\cap[x_s\in E]} P_h^m\left[x_t = A \mid \mathbb{N}_s\right] dP_h^m = \int_{C\cap[x_s\in E]} I_{[x_t=A]}\, dP_h^m =$$

$$= P_h^m\left[C,\ x_s \in E,\ x_t = A\right] =$$

$$= P_h^m\left[x_{s_1}\in L_1,..,x_{s_n}\in L_n,\ x_s \in E,\ x_t = A\right] =$$

$$= \bar{q}_{s_1\ldots s_n st}(L_1,\ldots,L_n,E,A) =$$

$$= \bar{q}_{s_1\ldots s_n s}(L_1,\ldots,L_n,E) - q_{s_1\ldots s_n st}(L_1\cap E,..,L_n\cap E,E,E) =$$

$$= \bar{q}_{s_1\ldots s_n s}(L_1\cap E,..,L_n\cap E,E) - q_{s_1\ldots s_n st}(L_1\cap E,..,L_n\cap E,E,E) =$$

y aplicando el resultado obtenido anteriormente,

$$= \int_E q_{s_1\ldots s_n s}(L_1\cap E,..,L_n\cap E,dx) -$$

$$- \int_E \hat{p}^h(t-s,E,x)\, q_{s_1\ldots s_n s}(L_1\cap E,..,L_n\cap E,dx) =$$

$$= \int_E \left\{1 - \hat{p}^h(t-s,E,x)\right\} q_{s_1\ldots s_n s}(L_1\cap E,..,L_n\cap E,dx) =$$

$$= \int_E \left\{1 - \hat{p}^h(t-s,E,x)\right\} \bar{q}_{s_1\ldots s_n s}(L_1,\ldots,L_n,dx) =$$

$$= \int_{C\cap[x_s\in E]} \{1 - \hat{p}^h(t-s,E,x_s)\}\, d\, P_h^m$$

por lo que concluimos que

$$P_h^m\left[x_t = A \mid \mathbb{N}_s\right] = 1 - \hat{p}^h(t-s,E,x_s) \quad \text{c.s.}P_h^m \quad x_s\in E$$

y por consiguiente, se tiene tambien que es

$$P_h^m\left[x_t = A \mid \mathbb{N}_s\right] = P_h^m\left[x_t = A \mid x_s\right] \text{ c.s.}P_h^m \quad x_s\in E$$

Así pués, si definimos

$$\hat{p}^h(t,A,x) = 1 - \hat{p}^h(t,E,x)$$

tenemos que la medida P_h^m es un proceso de Markov sobre el espacio de estados $(E_A, \mathbb{B}_A)$, con función de trnasición $\hat{p}^h$. Pero, con la extensión que se ha realizado de la función $\hat{p}^h$ definida inicialmente sobre el espacio medible estandar $(E, \mathbb{B})$ a estar definida sobre el espacio medibles estandar $(E_A, \mathbb{B}_A)$, ¿se conservan aún las propiedades de una función de cotransición? Además de responder a ésta pregunta, hemos de decir cual es el valor de $\hat{p}^h(t,L,A)$ para que realmente la extensión sea completa. Puesto que podemos determinar éste valor con una cierta libertad, lo fijaremos de modo que la respuesta a la pregunta anterior sea afirmativa.

Respecto de la medibilidad no existen problemas, y respecto de la ecuación de Chapman-Kolmogorov, sea $L \in \mathbb{B}_A$, por lo que podemos suponer $L = L'\cup A$, $L'\in\mathbb{B}$, entonces:

$$\int_E \hat{p}^h(t,dx,y)\, \hat{p}^h(s,L,x) = \int_E \hat{p}^h(t,dx,y)\, \hat{p}^h(s,L',x) +$$

$$+ \int_E \hat{p}^h(t,dx,y)\, \hat{p}^h(s,A,x) =$$

ya que $L'\in\mathbb{B}$, y por definición adoptada para $\hat{p}^h(s,A,x)$,

$$= \hat{p}^h(t+s,L',y) + \hat{p}^h(t,E,y) - \int_E \hat{p}^h(t,dx,y)\, \hat{p}^h(s,E,x) =$$

$$= \hat{p}^h(t+s,L',y) + \hat{p}^h(t,E,y) - \hat{p}^h(t+s,E,y)$$

expresión que es en general distinta de $\hat{p}^h(t+s,L,y)$ como debería ser para que tuviese validez la ecuación de Chapman-Kolmogorov. Ahora bien, si hacemos

$$\hat{p}^h(t,L,A) = I_L(A)$$

por definición, -definición que es coherente con el hecho de ser A un estado absorbente para el proceso- entonces tenemos definido la familia de "conúcleos" $\hat{p}^h(t,.,.)$, $t\in \mathbb{R}_+$, sobre todo el espacio medible estandar $(E_A, \mathbb{B}_A)$, y se tiene que

$$\int_{E_A} \hat{p}^h(t,dx,y)\, \hat{p}^h(s,L,x) = \int_E \hat{p}^h(t,dx,y)\, \hat{p}^h(s,L,x) +$$

$$+ \hat{p}^h(t,A,y)\, \hat{p}^h(s,L,A) =$$

$$= \hat{p}^h(t+s,L-A,y) + \hat{p}^h(t,E,y) - \hat{p}^h(t+s,E,y) +$$

$$+ \hat{p}^h(t,A,y)\, \hat{p}^h(s,L,A) =$$

$$= \hat{p}^h(t+s,L-A,y) + \hat{p}^h(t,E_A,y) - \hat{p}^h(t+s,E,y) =$$

$$= \hat{p}^h(t+s,L-A,y) + 1 - \hat{p}^h(t+s,E,y) =$$

$$= \hat{p}^h(t+s,L-A,y) + \hat{p}^h(t+s,A,y) = \hat{p}^h(t+s,L,y)$$

por lo que se verifica la ecuación de Chapman-Kolmogorov, como queríamos ver.

Así pués, recapitulando, hemos construido para cada medida $m\in R_h^{\hat{p}}$ un proceso de Markov $P_h^m \in K^{\hat{p}h}$. Sea $\phi : R_h^{\hat{p}} \longrightarrow K^{\hat{p}h}$, definida por $\phi(m) = P_h^m$. Demostramos ahora el Teorema que da título a éste apartado.

<u>Teorema</u>.- Si E_o es w-nulo, entonces la aplicación ϕ es una inyección del espacio $R_h^{\hat{p}}$ en el espacio $K^{\hat{p}h}$.

En efecto, hemos demostardo que ϕ es una aplicación que a cada medida $m \in R_h^{\hat{p}}$ le hace corresponder un proceso de Markov P_h^m del espacio $K^{\hat{p}h}$, y sólo nos queda por ver que esta aplicación ϕ es inyectiva. Sea $m_1, m_2 \in R_h^{\hat{p}}$ tales que $\phi(m_1) = \phi(m_2)$, es decir, $P_h^{m_1} = P_h^{m_2}$. Se tiene entonces que para todo $L \in \mathbb{B}$ y todo $s \in \mathbb{R}_+$ es

$$P_h^{m_1}[x_s \in L] = P_h^{m_2}[x_s \in L]$$

por lo que

$$\int_L m_1 \hat{P}_s(dx)\, h(x) = \int_L m_2 \hat{P}_s(dx)\, h(x)$$

para todo $L \in \mathbb{B}$. Entonces, ya que las medidas de éstas integrales son no-negativas, se tiene que para todo $s \in \mathbb{R}_+$

$$h \cdot (m_1 - m_2)\hat{P}_s = 0$$

por lo que

$$m_1 \hat{P}_s = m_2 \hat{P}_s$$

en $E - E_o$. Pero como hemos pedido como hipótesis que $w(E_o) = 0$, se tiene que $m_1(E_o) = m_2(E_o) = 0$ ya que todas las medidas m del espacio $R_h^{\hat{p}}$ son absolutamente continuas respecto de la medida de la dualidad w. Así pues, tenemos que es

$$m_1 \hat{P}_s = m_2 \hat{P}_s \qquad \forall\, s \in \mathbb{R}_+$$

en todo el espacio E.

Tomando límite en la relación anterior cuando $s \downarrow 0$, ya que las medidas m_1 y m_2 son coexcesivas, se tiene que

$$m_1 = m_2$$

en todo el espacio E, con lo que se ha demostrado que ϕ es inyectiva, como queríamos demostrar.

Para finalizar este apartado, y motivar el siguiente, obsérvese que la aplicación ϕ no es completa. Este resultado no es trivial, pero del desarrollo del apartado siguiente se verá claro. Por ello, dado que éste es un resultado todavía parcial no hemos dedicado aquí lugar al estudio de los problemas de medibilidad de la aplicación ϕ, que serán abordados en el apartado 14, mientras que el próximo apartado estará dedicado a caracterizar la aplicación ϕ como aplicación completa sobre un subespacio K del espacio $K^{\hat{p}^h}$.

13.- EL ESPACIO K.

Por definición, para nosotros K designará el subconjunto del espacio $K^{\hat{p}^h}$ determinado por la aplicación ϕ definida en el apartado anterior, de modo que

$$K = \phi(R_h^{\hat{p}})$$

El fin principal de este apartado es establecer una serie de propiedades de éste subconjunto K que serán de aplicación en los siguientes apartados. Concretamente, dotaremos a K de una estructura medible y de una estructurra convexa convenientes y necesarias para el apartado siguiente.

En primer lugar vamos a dar otra caracterización de K.

Se tiene que

$$K = \phi(R_h^{\hat{p}}) = \left\{ P \in K^{\hat{p}^h} : P(x_o \in E_o^{\infty}) = 1 , \ \frac{P(x_o \in dx)}{h(x)} \in R_h^{\hat{p}} \right\}$$

En efecto, sea $P \in \phi(R_h^{\hat{p}})$, entonces existe una medida m de $R_h^{\hat{p}}$ tal que $P = P_h^m$, por lo que

$$P(x_o \in E_o^\infty) = P_h^m(x_o \in E_o^\infty) = \int_{E_o^\infty} m(dx)\, h(x) = m(h) = 1$$

ya que la medida $m \in R_h^{\hat{p}}$ no carga el conjunto E_∞.

Además, para todo $L \in \mathbb{B}$, $L \subset E_o^\infty$, se tiene

$$P(x_o \in L) = P_h^m(x_o \in L) = \int_L m(dx)\, h(x)$$

por lo que

$$P(x_o \in dx) = h(x)\, m(dx)$$

en E_o^∞, y por consiguiente

$$\frac{P(x_o \in dx)}{h(x)} = m(dx)$$

es decir, que

$$\frac{P(x_o \in dx)}{h(x)} \in R_h^{\hat{p}}$$

y por tanto $\phi(R_h^{\hat{p}}) \subset \left\{P \in K^{\hat{p}^h} : P(x_o \in E_o^\infty) = 1,\ \frac{P(x_o \in dx)}{h(x)} \in R_h^{\hat{p}}\right\}$.

Recíprocamente, sea $P \in K^{\hat{p}^h}$ tal que $P(x_o \in E_o^\infty) = 1$, y la medida $\frac{P(x_o \in dx)}{h(x)}$ sea de $R_h^{\hat{p}}$. Se tiene entonces que para cualesquiera $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ de $\mathbb{R}_+$ y $L_1, L_2, \dots, L_n \in \mathbb{B}$ es

$$P(x_{t_1} \in L_1, \dots, x_{t_n} \in L_n) = P(x_o \in E_o^\infty,\ x_{t_1} \in L_1, \dots,\ x_{t_n} \in L_n) =$$

$$= \int_{E_o^\infty} P(x_o \in dx) \int_{L_1} \hat{p}^h(t_1, dx_1, x) \dots \int_{L_n} \hat{p}^h(t_n - t_{n-1}, dx_n, x_{n-1}) =$$

$$= \int_{E_o^\infty} P(x_o \in dx) \int_{L_1 \cap E_o^\infty} \frac{1}{h(x)}\, \hat{p}(t_1, dx_1, x)\, h(x_1) \dots$$

$$\dots \int_{L_n \cap E_o^\infty} \frac{1}{h(x_{n-1})}\, \hat{p}(t_n - t_{n-1}, dx_n, x_{n-1})\, h(x_n) =$$

$$= \int_{E_o^\infty} \frac{P(x_o \in dx)}{h(x)} \int_{L_1 \cap E_o^\infty} \hat{p}(t_1, dx_1, x) \dots \int_{L_n \cap E_o^\infty} \hat{p}(t_n - t_{n-1}, dx_n, x_{n-1})\, h(x_n) =$$

$$= P_h^{\frac{P(x_o \in dx)}{h(x)}} (x_{t_1} \in L_1 \cap E_o^\infty, \ldots , x_{t_n} \in L_n \cap E_o^\infty)$$

Ahora bien, ya que

$$P(x_t \in L) = \int_{E_o^\infty} P(x_o \in dx)\ \hat{p}^h(t,L,x) =$$

por las relaciones del Lema del apartado 11,

$$= \int_{E_o^\infty} P(x_o \in dx)\ \frac{1}{h(x)} \int_L \hat{p}^h(t,dy,x)\ h(y) =$$

$$= \int_{E_o^\infty} P(x_o \in dx)\ \hat{p}^h(t,L \cap E_o^\infty,x)$$

tenemos que la medida inducida por x_t a partir de P en $\mathbb{B}$ no carga los subconjuntos de E_o^∞, para cualquier $t \in \mathbb{R}_+$, por lo que de las relaciones anteriores tenemos

$$P(x_{t_1} \in L_1 , \ldots , x_{t_n} \in L_n) = P_h^{\frac{P(x_o \in dx)}{h(x)}} (x_{t_1} \in L_1, \ldots, x_{t_n} \in L_n)$$

es decir, que

$$P = P_h^{\frac{P(x_o \in dx)}{h(x)}}$$

por lo que $P \in \emptyset(R_h^{\hat{p}})$.

Con la caracterización que hemos establecido para el subconjunto K vamos a formular ahora el resultado más importante de éste apartado.

Sea $\mathbb{B}_{K^{\hat{p}^h}}$ la σ-álgebra sobre el espacio $K^{\hat{p}^h}$ generada por las funciones $P \longrightarrow Pf$, $f \in \mathbb{N}$. Se tiene entonces

<u>Teorema</u>.- K es $\mathbb{B}_{K^{\hat{p}^h}}$ -medible.

En virtud de la caracterización de K que hemos obtenido, tenemos que

$$K = \left\{ P \in K^{\hat{p}^h} : P(x_o \in E_o^\infty) = 1 \right\} \cap$$

$$\cap \left\{ P \in K^{\hat{p}^h} : \frac{P(x_o \in dx)}{h(x)} \text{ es coexcesiva} \right\}$$

El primero de estos dos conjuntos es claramente medible con respecto a la σ-álgebra $\mathbb{B}_{K^{\hat{p}^h}}$ por la propia definición de ésta.

El segundo conjunto, puede ser representado tambien de la forma

$$\left\{ P \in K^{\hat{p}^h} : \frac{P(x_o \in dx)}{h(x)} \text{ es coexcesiva} \right\} =$$

$$= \left\{ P \in K^{\hat{p}^h} : \int_{E_o^\infty} \hat{p}(t,L,x) \frac{P(x_o \in dx)}{h(x)} \leq \int_L \frac{P(x_o \in dx)}{h(x)} \text{ , } \forall t \in \mathbb{R}_+ \; \forall L \in \mathbb{B}_{E_o^\infty} \right\}$$

$$\cap \left\{ P \in K^{\hat{p}^h} : \lim_{t \downarrow o} \int_{E_o^\infty} \frac{P(x_o \in dx)}{h(x)} \hat{p}(t,l,x) = \int_L \frac{P(x_o \in dx)}{h(x)} \text{ ,} \forall L \in \mathbb{B}_{E_o^\infty} \right\}$$

Además, ya que

$$\int_{E_o^\infty} P(x_o \in dx) \frac{1}{h(x)} \hat{p}(t,l,x) = \int_{E_o^\infty} P(x_o \in dx) \int_L \frac{\hat{p}^h(t,dy,x)}{h(y)} =$$

$$= \int_L \frac{1}{h(y)} \int_{E_o^\infty} P(x_o \in dx) \; \hat{p}^h(t,dy,x) = \int_L \frac{P(x_t \in dy)}{h(y)} = P\left[\frac{I_L(x_t)}{h(x_t)}\right]$$

las relaciones anteriores las podemos escribir

$$\left\{ P \in K^{\hat{p}^h} : \frac{P(x_o \in dx)}{h(x)} \text{ es coexcesiva} \right\} =$$

$$= \left\{ P \in K^{\hat{p}^h} : P\left[\frac{I_L(x_t)}{h(x_t)}\right] \leq P\left[\frac{I_L(x_o)}{h(x_o)}\right] \; \forall t \in \mathbb{R}_+ \text{, } \forall L \in \mathbb{B}_{E_o^\infty} \right\}$$

$$\cap \left\{ P \in K^{\hat{p}^h} : \lim_{t \downarrow o} P\left[\frac{I_L(x_t)}{h(x_t)}\right] = P\left[\frac{I_L(x_o)}{h(x_o)}\right] \; \forall L \in \mathbb{B}_{E_o^\infty} \right\}$$

y puesto que bajo la hipótesis HC sobre la función de transición, como además la medida $P(x_t \in dx)$ es absolutamente continua respecto de la medida de la dualidad w , tenemos que ésta hipótesis HC puede formularse en términos de la función de co transición $\hat{p}$ de modo que $\hat{p}(0+,L,x) = I_L(x)$ salvo en un conjunto de medida $P(x_s \in dx)$,$\forall s \in \mathbb{R}_+$, nula, tenemos que de

$$P\left[\frac{I_L(x_{t+s})}{h(x_{t+s})}\right] = P\left[P\left[\frac{I_L(x_{t+s})}{h(x_{t+s})} \,\Big|\, \mathbb{N}_s\right]\right] = P\left[\hat{p}^h(t,\frac{I_L}{h}, x_s)\right] =$$

$$= \int_{E_0^\infty} P(x_s \in dx) \int_{E_0^\infty} \hat{p}^h(t,dy,x) \frac{I_L(y)}{h(y)} =$$

$$= \int_{E_0^\infty} P(x_s \in dx) \frac{1}{h(x)} \hat{p}(t,L,x)$$

al tomar límite cuando $t \downarrow 0$, nos queda

$$\lim_{t \downarrow 0} P\left[\frac{I_L(x_{t+s})}{h(x_{t+s})}\right] = P\left[\frac{I_L(x_s)}{h(x_s)}\right]$$

por lo que la función

$$P\left[\frac{I_L(x_t)}{h(x_t)}\right]$$

es continua por la derecha en todo $t \in \mathbb{R}_+$, por lo que

$$\left\{P \in K^{\hat{p}^h} : \lim_{t \downarrow 0} P\left[\frac{I_L(x_t)}{h(x_t)}\right] = P\left[\frac{I_L(x_0)}{h(x_0)}\right], \ \forall\ L \in \mathbb{B}_{E_0^\infty}\right\} = K^{\hat{p}^h} \in \mathbb{B}_{K^{\hat{p}^h}}$$

y además, por la continuidad a la derecha

$$\left\{P \in K^{\hat{p}^h} : P\left[\frac{I_L(x_t)}{h(x_t)}\right] \leq P\left[\frac{I_L(x_0)}{h(x_0)}\right] \forall t \in \mathbb{R}_+ , \ \forall\ L \in \mathbb{B}_{E_0^\infty}\right\} =$$

$$= \bigcap_{t \in Q_+} \left\{P \in K^{\hat{p}^h} : P\left[\frac{I_L(x_t)}{h(x_t)}\right] \leq P\left[\frac{I_L(x_0)}{h(x_0)}\right] \forall\ L \in \mathbb{B}_{E_0^\infty}\right\} \in \mathbb{B}_{K^{\hat{p}^h}}$$

donde Q_+ representa los racionales no negativos, ya que por ser $(E, \mathbb{B})$ un espacio medible estandar la σ-álgebra $\mathbb{B}$ está generada por un conjunto numerable de subconjuntos de E, y por consiguiente, lo mismo es cierto para $\mathbb{B}_{E_0^\infty}$, y podemos, por tanto, limitarnos a los generadores de ésta, resultando entonces una intersección numerable de conjuntos de la forma

$$\left\{ P \in K^{\hat{p}^h} : P\left[\frac{I_L(x_t)}{h(x_t)}\right] \leq P\left[\frac{I_L(x_0)}{h(x_0)}\right] \right\}$$

siendo L un generador, que es ciertamente $\mathbb{B}_{K^{\hat{p}^h}}$ - medible por la definición de ésta σ-álgebra. Con ésto concluimos la demostración del Teorema.

Consideremos ahora sobre K la σ-álgebra traza de $\mathbb{B}_{K^{\hat{p}^h}}$, que denotaremos por $\mathbb{B}_K$. Entonces, $(K, \mathbb{B}_K)$ es un espacio medible en el cual vamos a introducir una estructura convexa.

Sea $\eta \in M^1(K)$ una medida de probabilidad sobre el espacio medible $(K, \mathbb{B}_K)$. Definimos su baricentro P_η mediante la relación

$$P_\eta(C) = \int_K \tilde{P}(C) \cdot \eta(d\tilde{P})$$

para cualquier $C \in \mathbb{N}$.

Vamos a demostrar a continuación que $P_\eta \in K$, con lo que quedará establecida la estructura convexa que habíamos anunciado.

Hemos de ver que

a) $P_\eta \in K^{\hat{p}^h}$, es decir que $P_\eta\left[x_t \in L \mid \mathbb{N}_s\right] = \hat{p}^h(t-s, L, x_s)$ c.s. P_η.

b) $P_\eta\left[x_0 \in E_0^\infty\right] = 1$

c) La medida $\dfrac{P_\eta(x_0 \in dx)}{h(x)}$ es coexcesiva.

Para demostrar a) consideremos un conjunto $C \in \mathbb{N}_s$ arbitrario. Tenemos entonces, por la definición de la esperanza condi cional que

$$\int_C P_\eta[x_t \in L \mid \mathbb{N}_s]\, dP_\eta = \int_C I_{[x_t\in L]}\, dP_\eta = P_\eta[C\,,\, x_t \in L] =$$

$$= \int_K \tilde{P}[C,\, x_t \in L]\cdot\eta(d\tilde{P}) = \int_K \eta(d\tilde{P}) \int_C \tilde{P}[x_t \in L \mid \mathbb{N}_s]\, d\tilde{P} =$$

$$= \int_K \eta(d\tilde{P}) \int_C \hat{p}^h(t-s,L,x_s)\, d\tilde{P} = \int_C \hat{p}^h(t-s,L,x_s)\, dP_\eta$$

como queríamos demostrar.

La relación b) se obtiene directamente de la propia definición de P_η. La relación c) se demuestra tambien aplicando directamente la definición de la medida P_η, y teniendo presente la caracterización que hemos dado de los elementos del espacio K.

14.- ISOMORFISMO ENTRE K y $R_h^{\hat{p}}$.

En el apartado 12 establecimos una inyección ϕ del espacio $K^{\hat{p}^h}$ en el espacio $R_h^{\hat{p}}$, y en el último apartado hemos denotado por K al espacio imagen $\phi(R_h^{\hat{p}})$, por lo que ϕ resulta ser ya una aplicación inyectiva y completa entre los espacios $R_h^{\hat{p}}$ y K, y por consiguiente existe la aplicación inversa ϕ^{-1} de K en $R_h^{\hat{p}}$. El objetivo de este apartado es demostrar que las aplicaciones ϕ y ϕ^{-1} son medibles cuando se consideran las estructuras medibles $\mathbb{B}_{R_h^{\hat{p}}}$ y $\mathbb{B}_K$ sobre estos espacios definidas en los apartados 10 y 13 respectivamente. Posteriormente, demostraremos que se conservan las estructuras convexas definidas en éstos epsacios en los apartados ya citados, y estableceremos el resultado fundamental que da título a este apartado:

<u>Teorema</u>.- Los espacios medibles $(K, \mathbb{B}_K)$ y $(R_h^{\hat{p}}, \mathbb{B}_{R_h^{\hat{p}}})$ son isomorfos.

Recordemos que ϕ estaba definida por

$$\phi(m) = P_h^m$$

para $m \in R_h^{\hat{p}}$, mientras que la inversa ϕ^{-1} está definida por la relación

$$\phi^{-1}(P) = m_P = \frac{P(x_o \in dx)}{h(x)}$$

para $P \in K$, queriendo con ello indicar que para cualquier $L \in \mathbb{B}$

$$\phi^{-1}(P)(L) = m_P(L) = \int_L P(x_o \in dx)\, \frac{1}{h(x)}$$

Para demostrar que ϕ es medible hemos de ver que

$$\phi^{-1}(\mathbb{B}_K) \subset \mathbb{B}_{R_h^{\hat{p}}}$$

mientras que para ver que ϕ^{-1} hemos de probar que

$$\phi(\mathbb{B}_{R_h^{\hat{p}}}) \subset \mathbb{B}_K$$

Observemos que si se demuestra que las funciones

$$\theta_f : m \longrightarrow P_h^m(f)$$

definidas sobre $R_h^{\hat{p}}$ son medibles, para $f \in \mathbb{N}$, entonces teniendo presente el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(R_h^{\hat{p}}, \mathbb{B}_{R_h^{\hat{p}}}) \arrow[rr, shift left, "\phi"] \arrow[dr, "b_L"'] & & (K, \mathbb{B}_K) \arrow[ll, shift left, "\phi^{-1}"] \arrow[dl, "b_f"] \\
& (\mathbb{R}_+, \mathbb{B}_{\mathbb{R}_+}) &
\end{tikzcd}$$

donde $b_L : m \longrightarrow m(L)$, y $b_f : P \longrightarrow P(f)$, son las familias de funciones que engendran las estructuras medibles de éstos espacios, para cualesquieras $L \in \mathbb{B}$, y $f \in \mathbb{N}$, entonces, tendremos que

$$\theta_f = b_f \circ \phi$$

es una función medible, y por tanto, si $C \in \mathbb{B}_K$ entonces podremos suponer que C es uno de los generadores, es decir, que $C = b_f^{-1}(B)$ para algún $B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}_+}$ y algún $f \in \mathbb{N}$, por lo que

$$\phi^{-1}(C) = \phi^{-1} \circ b_f^{-1}(B) = \theta_f^{-1}(B) \in \mathbb{B}_{R_h^{\hat{p}}}$$

y quedaría demostrada la medibilidad de ϕ. Así pués, hemos de probar que para cualquier $f \in \mathbb{N}$, la función θ_f es medible.

Para ver ésto, podemos limitarnos al caso en que $f \in \mathbb{N}$ es de la forma

$$f = I_{[x_{t_1} \in L_1, \ \ldots \ , \ x_{t_n} \in L_n]}$$

para cualesquiera $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$ de $\mathbb{R}_+$, y $L_1, L_2 \ldots, L_n \in \mathbb{B}_E$. En esta situación, tenemos que

$$\theta_f(m) = P_h^m(f) = P_h^m[x_{t_1} \in L_1, \ldots, x_{t_n} \in L_n] =$$

$$= \int_E m(dx) \int_{L_1} \hat{p}(t_1, dx_1, x) \ldots \int_{L_n} \hat{p}(t_n - t_{n-1}, dx_n, x_{n-1}) h(x_n) =$$

$$= \int_E m(dx)\ H(x) = m(H)$$

donde H es la funcíon definida por

$$H(x) = \int_{L_1} \hat{p}(t_1, dx_1, x) \ \ldots \ \int_{L_n} \hat{p}(t_n - t_{n-1}, dx_n, x_{n-1})\ h(x_n)$$

La función H así definida es medible y positiva, por lo que $H \in \mathbb{B}_E$, y por consiguiente, por la propia definición de la σ-álgebra $\mathbb{B}_{R_h^{\hat{p}}}$ se tiene que θ_f es medible como queríamos demostrar.

Así pues, la aplicación ϕ es medible.

Veamos ahora que ϕ^{-1} es medible. La demostración es completamente análoga a la anterior. En este caso consideramos las funciones :

$$\theta_L : P \longrightarrow m_P(L)$$

para cada $L \in \mathbb{B}_E$, donde m_P es la notación introducida antes para representar la imagen inversa de P mediante ϕ^{-1}, y donde debe entenderse que $m_P(L) = m_P(L \cap E_o^\infty)$.

Haciendo uso del diagrama anterior, tenemos que

$$\theta_L = b_L \circ \phi^{-1}$$

por lo que si demostramos que θ_L es medible, entonces considerando generadores de $\mathbb{B}_{R_h^{\hat{p}}}$, tenemos para $C = b_L^{-1}(B)$, $B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}_+}$,

$$\phi(C) = \phi \circ b_L^{-1}(B) = \theta_L^{-1}(B) \in \mathbb{B}_K$$

y quedaría demostrada la medibilidad de ϕ^{-1}.

Que la función θ_L es medible se obtiene simplemente observando que

$$\theta_L(P) = m_P(L) = \int_{L \cap E_o^\infty} P(x_o \in dx)\, \frac{1}{h(x)} = P\left[\frac{I_{L \cap E_o^\infty}(x_o)}{h(x_o)}\right]$$

y puesto que

$$\frac{I_{L \cap E_o^\infty}(x_o)}{h(x_o)} \in \mathbb{N}$$

se tiene de la definición de $\mathbb{B}_K$ que la función θ_L es medible, como queríamos demostrar.

Así pués, ya se ha demostrado que ϕ es un isomorfismo entre las estructuras medibles de los espacios K y $R_h^{\hat{p}}$. Nos queda por ver que es además un isomorfismo entre los espacios medibles dotados de sus estructuras convexas, es decir, hemos de probar que ϕ conserva las estructuras convexas.

Sea $M \in M^1(R_h^{\hat{p}})$ y m_M su centro de gravedad. Hay que demostrar que

$$\phi(m_M) = P_{M'}$$

es el centro de gravedad de la medida de probabilidad M' sobre K dada por

$$M'(D) = M(\phi^{-1}(D))$$

para cualquier $D \in \mathbb{B}_K$.

Puesto que para cualesquiera $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$ de $\mathbb{R}_+$, y $L_1, L_2, \ldots, L_n \in \mathbb{B}_E$ se tiene que

$$P_h^{m_M}[x_{t_1} \in L_1, \ldots, x_{t_n} \in L_n] = m_M(H) = \int_{R_h^{\hat{p}}} \tilde{m}(H)\, M(d\tilde{m}) =$$

$$= \int_{R_h^{\hat{p}}} P_h^{\tilde{m}}[x_{t_1} \in L_1, \ldots, x_{t_n} \in L_n]\, M(d\tilde{m})$$

donde H es la función definida anteriormente, podemos escribir para cualquier $C \in \mathbb{N}$:

$$P_h^{m_M}(C) = \int_{R_h^{\hat{p}}} P_h^{\tilde{m}}(C)\, M(d\tilde{m})$$

y puesto que $P_h^{\tilde{m}} = \phi(\tilde{m})$:

$$P_h^{m_M}(C) = \int_{R_h^{\hat{p}}} \phi(\tilde{m})(C)\, M(d\tilde{m})$$

y efectuando el "cambio de variable" $\phi(\tilde{m}) = \tilde{P}$ tenemos

$$P_h^{m_M}(C) = \int_K \tilde{P}(C)\, M\{\tilde{m} \in R_h^{\hat{p}} : \phi(\tilde{m}) \in d\tilde{P}\} =$$

$$= \int_K \tilde{P}(C)\, M'(d\tilde{P})$$

siendo $M'(D) = M(\phi^{-1}(D))$, $D \in \mathbb{B}_K$, como queríamos demostrar. Así pués, ϕ es un isomorfismo como habíamos enunciado.

15.- ANALISIS SIMPLICIAL DE LAS MEDIDAS COEXCESIVAS NULAS Y COINVARIANTES.

Como ya hemos demostrado el espacio medible convexo de las medidas coexcesivas normalizadas $(R_h^{\hat{p}}, \mathbb{B}_{R_h^{\hat{p}}})$ es isomorfo a los espacios medibles convexos $(K, \mathbb{B}_K)$ y $(S_n^p, \mathbb{B}_{S_n^p})$, y en este apartado vamos a dar una caracterización importante de éstos espacios haciendo uso de la teoría de simplexs tal como la expusimos en el apartado 2.

Hacemos aquí uso del resultado de E.B.Dynkin(6) y (8), y Yu.I.Kifer-S.A.Pirogov(1), por el cual se afirma que el espacio medible $(R_h^{\hat{p}}, \mathbb{B}_{R_h^{\hat{p}}})$ con la estructura convexa natural es un simplex.

Como consecuencia de éste resultado, y basandonos en los resultados de los apartados 2, 3 y 14, podemos establecer el

Teorema.- El espacio medible $(K, \mathbb{B}_K)$ dotado de su estructura convexa natural es un simplex.

Nos proponemos ahora realizar un estudio del simplex $R_h^{\hat{p}}$ y dejaremos para el siguiente apartado el analisis del simplex K, lo que nos brindará entonces las interpretaciones probabilísticas de los resultados de éste.

Damos primero algunas definiciones necesarias.

Diremos que una medida $m \in R_h^{\hat{p}}$ es coinvariante si

$$m \, \hat{P}_t = m$$

para todo $t \in \mathbb{R}_+$.

Diremos que una medida $m \in R_h^{\hat{p}}$ es <u>coexcesiva-nula</u> si

$$\liminf_{\substack{t \to \infty \\ t \in Q_+}} m \, \hat{P}_t \, (L) = 0$$

para todo $L \in \mathbb{B}$.

Denotaremos por R_I y R_N los subconjuntos de $R_h^{\hat{p}}$ constituidos por las medidas coinvariantes y las medidas coexcesiva-nula respectivamente. Estos subconjuntos no son vacios, ya que a partir de una medida $m \in R_h^{\hat{p}}$ podemos construir medidas coinvariantes y medidas coexcesiva-nulas de lasiguiente manera:

Si $m \in R_h^{\hat{p}}$, entonces

$$m' = \liminf_{t \to \infty} m\hat{P}_t$$

es coinvariante, aunque no necesariamente sea $m'(h) = 1$, pero haciendo

$$m_1 = \frac{m'}{m'(h)}$$

tenemos que $m_1 \in R_I$. Además, si $m'' = m - m'$, entonces m'' es coexcesiva-nula, por lo que

$$m_2 = \frac{m''}{m''(h)}$$

resulta $m_2 \in R_N$.

Los subconjuntos R_I y R_N son disjuntos, ya que si existiera $m \in R_I \cap R_N$, se tendría que para todo $L \in \mathbb{B}$

$$0 = \liminf_{\substack{t \to \infty \\ t \in Q+}} mP_t(L) = m(L)$$

en contra de ser $m(h) = 1$.

Sin embargo, no podemos decir que los subconjuntos R_I y R_N sean una partición del espacio $R_h^{\hat{p}}$, puesto que de los razonamientos anteriores queda claro que existen medidas $m \in R_h^{\hat{p}}$ que no son coinvariantes ni coexcesiva-nulas, por lo que la unión $R_I \cup R_N$ no recubre todo el espacio.

Sin embargo, si consideramos los elementos extremales de $R_h^{\hat{p}}$, el conjunto de los cuales lo designaremos por R_e para simplificar la notación, entonces la situación es distinta. Se tiene en éste caso que

1º) Si $m \in R_e$, entonces, o bien $m \in R_I$ ó bien $m \in R_N$.

En efecto, si $m \in R_e$, no fuese coexcesiva-nula ni coinvariante, podríamos escribir

$$m = m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2$$

con $m_1, m_2 \in R_h^{\hat{p}}$, $c_1 = m_1(h)$, $m_2(h) = c_2$, por lo que $c_1 + c_2 = 1$, en contra de ser m extremal, a menos que fuese

$$m = m_1 = m_2$$

lo cual no es posible ya que $m_1 \in R_I$ y $m_2 \in R_N$.

Así pués, como consecuencia directa de esta propiedad de alternativa, tenemos que si

$$R_{Ie} = R_I \cap R_e$$

$$R_{Ne} = R_N \cap R_e$$

podemos escribir

$$R_e = R_{Ie} \cup R_{Ne} .$$

2º) R_I es una cara del simplex $R_h^{\hat{p}}$.

Puesto que bajo la hipótesis HC la función $t \to m\hat{P}_t(L)$ es continua por la derecha, tenemos que

$$R_I = \{ m \in R_h^{\hat{p}} : m\hat{P}_t(L) = m(L) , \forall t \in \mathbb{R}_+ , \forall L \in \mathbb{B} \} =$$

$$= \bigcap_{s \in Q_+} \{ m \in R_h^{\hat{p}} : m\hat{P}_t(L) = m(L) , \forall L \in \mathbb{B} \} \in \mathbb{B}_{R_h^{\hat{p}}}$$

puesto que la función $m \to m(L)$ es medible por definición de ésta σ-álgebra, y la función $m \to m\hat{P}_t(L)$ es la composición de una función $\mathbb{B}$-medible con otra medible respecto de ésta σ-álbebra $\mathbb{B}_{R_h^{\hat{p}}}$.

Para demostrar que R_I es una cara nos queda por ver que si $M \in M^1(R_h^{\hat{p}})$ es tal que su baricentro $b(M) \in R_I$, entonces ha de ser $M \in M^1(R_I)$. En efecto, puesto que

$$b(M)\hat{P}_t(L) = b(M)(L)$$

para todo $L \in \mathbb{B}$, se tiene que

$$\int_E b(M)(dx)\ \hat{p}(t,L,x) = \int_E \hat{p}(t,L,x) \int_{R_h^{\hat{p}}} M(dm)\ m(dx) =$$

$$= \int_{R_h^{\hat{p}}} M(dm)\ m\hat{P}_t(L) =$$

$$= \int_{R_I} M(dm)\ m(L) + \int_{R_h^{\hat{p}} - R_I} M(dm)\ m\hat{P}_t(L)$$

y tambien

$$b(M)(L) = \int_{R_I} M(dm)\ m(L) + \int_{R_h^{\hat{p}} - R_I} M(dm)\ m(L)$$

por lo que

$$\int_{R_h^{\hat{p}} - R_I} M(dm)\left[m(L) - m\hat{P}_t(L)\right] = 0$$

y ésta relación sólo es posible si $M(R_h^{\hat{p}} - R_I) = 0$, es decir que $M \in M^1(R_I)$ como queríamos demostrar.

3º) R_I es un simplex, y el conjunto de sus puntos extremales es precisamente R_{Ie}.

Este resultado es un corolario de la propiedad anterior y de las expuestas en el apartado 2.

4º) R_N es una cara del simplex $R_h^{\hat{p}}$.

Ya que la función $m \to \lim_{\substack{t\to\infty \\ t\in Q_+}} \inf m\hat{P}_t(L)$ es $\mathbb{B}_{R_h^{\hat{p}}}$ -medible, se tiene que

$$R_N = \left\{ m \in R_h^{\hat{p}} : \lim_{\substack{t\to\infty \\ t\in Q_+}} \inf m\hat{P}_t(L) = 0 \ , \ \forall\, L \in \mathbb{B} \right\} \in \mathbb{B}_{R_h^{\hat{p}}}$$

y hay que demostrar que si $M \in M^1(R_h^{\hat{p}})$ y $b(M) \in R_N$, entonces es $M \in M^1(R_N)$. En efecto, siguiendo un proceso análogo al efectuado antes, tenemos que para cualquier $L \in \mathbb{B}$

$$b(M)\hat{P}_t(L) = \int_{R_N} M(dm)\ m\hat{P}_t(L) + \int_{R_h^{\hat{p}} - R_N} M(dm)\ m\hat{P}_t(L)$$

y por el lema de Fatou

$$0 = \lim_{\substack{t\to\infty \\ t\in Q_+}} \inf b(M)\hat{P}_t(L) \geqslant \int_{R_h^{\hat{p}}} M(dm) \lim_{\substack{t\to\infty \\ t\in Q_+}} \inf m\hat{P}_t(L) \geqslant 0$$

por lo que

$$\int_{R_h^{\hat{p}} - R_N} M(dm) \lim_{\substack{t\to\infty \\ t\in Q_+}} \inf m\hat{P}_t(L) = 0$$

Por consiguiente, $M(R_N) = 1$, como queríamos ver.

5º) R_N es un simplex, y el conjunto de sus puntos extremales es precisamente R_{Ne} .

6º) R_N y R_I son caras complementarias del simplex $R_h^{\hat{p}}$.

Estas dos propiedades son corolarios de las anteriores y de los resultados establecidos en el apartado 2.

16.- INTERPRETACION PROBABILISTICA.

En éste apartado vamos a establecer la interpretación probabilística de los resultados establecidos en el anterior, haciendo uso del ismorfismo demostrado en el apartado 14, y llegaremos a establecer la existencia de caras complementarias en el simplex K .

En primer lugar vamos a caracterizar las imágenes de las caras R_I y R_N mediante el isomorfismo ϕ .

1º) $\phi(R_I) = \{ P \in K : P(x_t \in L) = P(x_o \in L),\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \forall L \in \mathbb{B} \}$

Sea $m \in R_I$, entonces

$$m(L) = m\hat{P}_t(L)$$

y por consiguiente ya que $\phi(m) = P_h^m$ se tiene

$$P_h^m(x_t \in L) = \int_E m(dx) \int_L \hat{p}(t,dy,x)\ h(y) = \int_L h(y)\ m\hat{P}_t(dy) =$$

$$= \int_L h(y)\ m(dy) = P_h^m(x_o \in L)$$

para cualesquiera $t \in \mathbb{R}_+$ y todos $L \in \mathbb{B}$.

Recíprocamente, si $P \in K$ es tal que para todo $t \in \mathbb{R}_+$ y todo $L \in \mathbb{B}$ se tiene $P(x_t \in L) = P(x_o \in L)$, entonces de la relación

$$P(x_t \in L) = \int_E \hat{p}^h(t,L,x)\ P(x_o \in dx)$$

se tiene que

$$P(x_o \in L) = P(x_t \in L) = \int_E \hat{p}^h(t,L,x)\ P(x_o \in dx) =$$

$$= \int_E P(x_o \in dx)\ \frac{1}{h(x)} \int_L \hat{p}(t,dy,x)\ h(y) =$$

$$= \int_L h(y)\ \phi^{-1}(P)\,\hat{P}_t(dy)$$

por lo que

$$P(x_t \in dx) = h(x)\ \phi^{-1}(P)\hat{P}_t(dx)$$

es decir,

$$\phi^{-1}(P)(L) = \int_L \frac{P(x_o \in dx)}{h(x)} = \phi^{-1}(P)\ \hat{P}_t(L)$$

por lo que $\phi^{-1}(P) \in R_I$, como queríamos demostrar.

De los desarrollos anteriores, se obtiene sin dificultad que para cualquier $f \in \mathbb{B}$ y para cualquier t de $\mathbb{R}_+$

$$P_h^m(f(x_t)) = \langle f,h \rangle_m$$

y en particular

$$P_h^m(x_t) = m(h) = 1 .$$

2º) $\phi(R_N) = \left\{ P \in K : \lim\inf_{\substack{t \to \infty \\ t \in Q_+}} P\left[\frac{I_L(x_t)}{h(x_t)}\right] = 0 \ , \ \forall\, L \in \mathbb{B} \right\}$

La demostración de esta relación sigue los mismos pasos que la anterior. Así, si $m \in R_N$ entonces como

$$P_h^m(x_t \in L) = \int_L h(x)\, m\hat{P}_t(dx)$$

tenemos que

$$\lim\inf_{\substack{t \to \infty \\ t \in Q_+}} m\hat{P}_t(L) = \lim\inf_{\substack{t \to \infty \\ t \in Q_+}} P_h^m\left[\frac{I_L(x_t)}{h(x_t)}\right] = 0 .$$

Reciprocamente, si $P \in K$ es tal que

$$\lim\inf_{\substack{t \to \infty \\ t \in Q_+}} P\left[\frac{I_L(x_t)}{h(x_t)}\right] = 0$$

entonces como

$$\phi^{-1}(P)(dx) = \frac{P(x_o \in dx)}{h(x)}$$

tenemos que

$$\phi^{-1}(P)\ \hat{P}_t(L) = \int_E P(x_o \in dx)\ \frac{\hat{p}(t,L,x)}{h(x)} = P\left[\frac{I_L(x_t)}{h(x_t)}\right]$$

ya que

$$\frac{\hat{p}(t,L,x)}{h(x)} = \int_L \frac{\hat{p}^h(t,dy,x)}{h(y)}$$

por lo que

$$\lim\inf_{\substack{t \to \infty \\ t \in Q_+}} \phi^{-1}(P)\ \hat{P}_t(L) = 0$$

para todo $L \in \mathbb{B}$, y por consiguiente, $\phi^{-1}(P) \in R_N$, como queríamos demostrar.

Denotaremos, a partir de ahora, las imágenes de las caras R_N y R_I mediante la aplicación ϕ por K_N y K_I respectivamente. Se tiene entonces el siguiente resultado

<u>Teorema</u>.- K_N y K_I son caras complementarias del simplex K, y además K_N y K_I son a su vez simplexs.

Este resultado es una consecuancia de las propiedades de los isomorfismos entre simplexs estudiadas en los apartados 2 y 3, así como de los anteriores resultados. Los conjuntos de - puntos extremales de los simplexs K, K_I y K_N serán denotados - por K_e, K_{Ie} y K_{Ne} respectivamente.

Puesto que los procesos de Markov $P \in K$ son tales que las distribuciones de probabilidad de las variables componente x_t estan soportadas por E_0^∞, podemos limitarnos desde ahora, aun que tambien podíamos haberlo hecho antes, al espacio E_0^∞ como espacio de estados base, entendiendo que el punto de muerte A' del proceso es entonces $E_A - E_0^\infty$ que seguiremos denotando por la misma letra A.

Sea Z la variable definida sobre W por

$$Z(w) = \inf \{ t \in Q_+ : x_t(w) \notin E_0^\infty \}$$

entendiendo que $Z(w) = \infty$ si el conjunto de tiempos es vacío.

Esta variable Z no puede afirmarse que sea un tiempo de parada, ni siquiera que sea una variable aleatoria, pero sin - embargo, se tiene que

$$\{w \in W: Z(w) = \infty\} = \{w \in W: x_t(w) \in E_0^\infty, \forall t \in Q_+\} \in \mathbb{N}$$

$$\{w \in W: Z(w) < \infty\} = \{w \in W: \exists t \in Q_+ \text{ con } x_s(w) \in E_0^\infty\} \in \mathbb{N}$$

por lo que tendrá sentido determinar las probabilidades de estos sucesos. Además estos sucesos son complementarios, ya que $[Z=\infty]^c = [Z<\infty]$.

3º) Sean

$$K^1 = \{P \in K : P(Z=\infty) = 1\}$$

$$K^2 = \{P \in K : P(Z<\infty) = 1\}$$

Entonces, K^1, $K^2 \in \mathbb{B}_K$ y además $K_I \subset K^1$ y $K_N \subset K^2$.

Sea $m \in R_I$, se tiene entonces que

$$P_h^m(Z=\infty) = P_h^m \bigcap_{s\in Q_+} (x_s \in E_o^\infty) = 1$$

como se demuestra tomando complementarios, y teniendo presente que por ser $P_h^m \in K_I$, la ley de distribución de x_s es la misma ley que la de x_o para todo $s \in \mathbb{R}_+$. Así pués, $\phi(m) \in K^1$.

Por otra parte, si $m \in R_N$, entonces por el lema de Fatou

$$\forall L \in \mathbb{B}_{E_o} \qquad \liminf_{\substack{t\to\infty \\ t\in Q_+}} \frac{I_L(x_t)}{h(x_t)} = 0 \qquad \text{c.s. } P_h^m$$

es decir, que existe un $t \in Q_+$ finito tal que $x_t \notin E_o^\infty$, P_h^m c.s. , y por tanto $Z<\infty$, P_h^m c.s. , es decir, que $\phi(m) \in K^2$ como queríamos demostrar.

Estos resultados que acabamos de probar son parciales en el sentido de que pueden ser más precisos. De hecho se tiene el siguiente Teorema uqe establece la interpretación probabilística de las caras R_I y R_N en términos de las caras complementarias K_I y K_N y los conjuntos K^1 y K^2.

<u>Teorema</u>.- $K_I = K^1$ y $K_N = K^2$, por lo que el que una medida $m \in R_h^{\hat{p}}$ sea coinvariante ó coexcesiva-nula viene determinado por

el comportamineto del proceso P_h^m cuando abandona el espacio de estados E_0^∞ a través de instantes racionales de tiempos.

Para la demostración de éste Teorema establecemos primero el siguiente Lema:

<u>Lema</u>.- Si $C \in \mathbb{B}$, entonces $K_C = \{P \in K: P(C) = 1\}$ es una cara del simplex K.

En efecto, que K_C es $\mathbb{B}_K$-medible es una consecuencia directa de la definición de $\mathbb{B}_K$ y de K_C. Además, si $M \in M^1(K)$ y su baricentro $b(M) \in K_C$, entonces

$$b(M)(C) = \int_{K_C} P(C)\, M(dP) + \int_{K-K_C} P(C)\, M(dP) =$$

$$= M(K_C) + \int_{K-K_C} P(C)\, M(dP) = 1$$

por lo que

$$M(K-K_C) = \int_{K-K_C} P(C)\, M(dP)$$

pero como $P(C) < 1$, para $P \in K-K_C$, ésto sólo puede ocurrir si es $M(K-K_C) = 0$, es decir, si $M \in M^1(K_C)$, y por tanto K_C es una cara como queríamos probar.

Como consecuencia de éste Lema, tenemos que por la definición de K^1 y de K^2 estos subconjuntos de K son caras de éste simplex, aunque en principio no puede decirse que sean complementarias.

Ahora bien, puesto que por los resultado 3º) es $K_I \subset K^1$ y $K_N \subset K^2$, siendo K_I y K_N caras complementarias, por el Teorema anterior, tenemos que $K_{Ie} \subset K_e^1$ y $K_{Ne} \subset K_e^2$, por lo que

$$K_e = K_{Ie} \cup K_{Ne} \subset K_e^1 \cup K_e^2 \subset K_e$$

es decir, que K^1 y K^2 son caras complementarias, ya que eran subconjuntos disjuntos.

Entonces, si existe $P \in K_e^1 - K_{Ie}$, debería de ser $P \in K_{Ne}$, y por consiguiente $P \in K_e^2$, en contra de ser K^1 y K^2 caras complementarias, por tanto $K_e^1 - K_{Ie}$ debe ser vacío, y por la propia definición de simplex, ha de ser $K^1 = K_I$. La demostración de que K^2 coincide con K_N es completamente análoga, y repetitiva.

Así pués se ha demostrado que

$$K_I = \{P \in K : P(Z = \infty) = 1\}$$

$$K_N = \{P \in K : P(Z < \infty) = 1\}$$

Estas relaciones constituyen uno de los resultados más importantes aquí obtenidos, y volveremos sobre éste en el último apartado.

El próximo apartado está destinado a un estudio, semejante al realizado en apartado anterior, para funciones especiales de S_n^p.

17.- ESTUDIO DE LAS FUNCIONES INVARIANTES Y EXCESIVA-NULAS.

La definición de funciones invariantes y de funciones excesivas nulas, es completamente análoga a las dadas en el apartado anterior para las medidas.

Concretamente, diremos que una función $f \in S_n^p$ es <u>invariante</u> si se tiene que para todo $t \in \mathbb{R}_+$

$$f = P_t f$$

Una función $f \in S_n^p$ se dice que es <u>excesiva-nula</u> si

$$\lim_{\substack{t \to \infty \\ t \in Q_+}} \sup P_t f = 0$$

Nótese que aquí hay una disimetría con respecto a la definición de una medida coexcesiva-nula, ya que se ha cambiado el concepto de límite que se toma, en una era lím inf y aquí es lim sup. Esta situación no es, naturalmente, la habitual, ya que normalmente se estudian las medidas coexcesivas-nulas y las funciones excesivas-nulas cuando los límites inferior y superior coinciden, con lo cual desaparece el problema. Sin embargo aquí se ha preferido, a costa de perder la simetría, tomar como definición en un caso u otro aquel concepto de límite que es necesario para los desarrollos posteriores.

Denoteremos por S_I el subconjunto de S_n^p constituido por las funciones invariantes, mientras que S_N denotará el subconjunto de las funciones excesiva-nulas.

Puesto que, como establecimos en el apartado 10, los espacios S_n^p y $R_h^{\hat{p}}$ son isomorfos, resulta que S_n^p es un simplex, y denotaremos por S_e el conjunto de sus vértices o puntos extremales. Por consiguiente, toda función $f \in S_n^p$ puede ser representada como el baricentro de una medida de $M^1(S_e)$, es decir

$$f(x) = \int_{S_e} \tilde{f}(x) \, M_f(d\tilde{f}).$$

Establecemos ahora el siguiente resultado:

- Si $f \in S_I$ entonces $w^f \in R_I$, y si $f \in S_N$ entonces $w^f \in R_N$.

En efecto, si $f \in S_I$ entonces $cG_c f = f$ para todo $c>0$, y

$$c\, w^f\, \hat{G}_c(L) = c\langle f,\hat{g}_c(L,.)\rangle_W = c\langle G_c f\, ,\, I_L\rangle_W = \langle f,I_L\rangle_W =$$
$$= \int_L f(x)\; w(dx) = w^f(L)$$

por lo que $w^f \in R_I$.

Si $f \in S_N$ entonces

$$w^f\; \hat{P}_t\,(L) = \int_E w^f(dx)\; \hat{p}(t,L,x) = \langle f\, ,\, \hat{p}(t,L,.)\rangle_W = \langle P_t f,\, I_L\rangle_W =$$
$$= \int_L w(dx) \int_E h(y)\; p(t,x,dy) = \int_L P_t f(x)\; w(dx)$$

y aplicando el lema de Fatou

$$\limsup_{\substack{t\to\infty \\ t\in Q_+}} w^f\, \hat{P}_t(L) = \limsup_{\substack{t\to\infty \\ t\in Q_+}} \int_L w(dx)\; P_t f(x) \leq$$
$$\leq \int_L w(dx) \limsup_{\substack{t\to\infty \\ t\in Q_+}} P_t f(x) = 0$$

por lo que $w^f \in R_N$, como queríamos demostrar.

Así pues, como consecuencia de estas relaciones, el simplex S_n^p admite dos caras complementarias S_I y S_N, y ésta situación se traduce en que si $f \in S_n^p$ entonces

$$f(x) = \int_{S_{Ie}} \tilde{f}(x)\; M_f(d\tilde{f}) + \int_{S_{Ne}} \tilde{f}(x)\; M_f(d\tilde{f})$$

siendo M_f la medida de probabilidad sobre S_e que caracteriza a la función f, y S_{Ie} y S_{Ne} los conjuntos de los puntos extremales de los simplexs S_I y S_N.

Puesto que en la descomposiciñon anterior

$$f_1(x) = \int_{S_{Ie}} \tilde{f}(x)\; M_f(d\tilde{f})$$

es una función invariante, aunque no necesariamente de S_I, por cuestiones de normalización, y

$$f_2(x) = \int_{S_{Ne}} \tilde{f}(x)\; M_f(d\tilde{f})$$

es una función excesiva-nula, aunque no necesariamente de S_N por cuestión de normalización, tenemos que toda función excesiva $f\in S_n^p$ admite una descomposición en suma de una función invariante f_1, y otra función excesiva nula f_2 :

$$f = f_1 + f_2 .$$

Esta descomposición es análoga a la descomposición de Riesz en la Teoria Clásica del Potencial, de las funciones superarmónicas (excesivas) en suma de una función armónica (invariante) y una función potencial (excesiva-nula).

18.- <u>ESPACIO DE SALIDAS</u>.

Designemos por U el subconjunto de puntos del espacio de estados E_A definido por

$$U = \{ x_Z(w) : w\in W \}$$

donde Z es el tiempo de muerte definido en el apartado 16. Este conjuuto U así definido lo llamaremos desde ahora el <u>espacio de salidas</u> de las trayectorias $w\in W$, (identificamos aquí las trayectorias $x_{\bullet}(w)$ con los puntos muestrales w, por la construcción que hemos hecho).

Puesto que, como demostramos en el apartado 16, si $P\in K_e$ entonces se tiene que o bien $P(Z=\infty) = 1$, o bien $P(Z<\infty) = 1$, es decir es válida para $P\in K_e$ una Ley del tipo 0-1, y además ésto nos permite clasificar el espacio de las trayectorias W en dos subespacios disjuntos, que denotaremos por W_a y W_b , y que estan definidos por

$$W_a = \{ w \in W :\ Z(w) < \infty \}$$
$$W_b = \{ w \in W :\ Z(w) = \infty \}$$

Por tanto, el espacio de salidas U admite una descomposición análoga

$$U = U_a \cup U_b$$

en subconjuntos disjuntos U_a y U_b dados por

$$U_a = \{ x_Z(w) \ :\ w \in W_a \}$$
$$U_b = \{ x_Z(w) \ :\ w \in W_b \}$$

Está claro que U_a representa el espacio de las salidas alcanzables, mientras que U_b es el espacio de las salidas no alcanzables.

Ahora bien, el espacio de salidas U sólo es un subconjunto del espacio de estados E_A, pero no puede afirmarse que sea $\mathbb{B}_A$-medible, y por ello es poco lo que puede decirse sobre este espacio en líneas generales. Sin embargo, podemos introducir en éste espacio de salidas U una cierta medida de probabilidad con la ayuda de la variable x_Z, y en este sentido van dirigidos los pasos siguientes.

Sea $\mathbb{F}_U$ la clase de subconjuntos de U determinadapor:

$$C \in \mathbb{F}_U \iff C = U \cap L \text{ , para algún } L \in \mathbb{B}_A : [x_Z \in L] \in \mathbb{N}$$

La clase $\mathbb{F}_U$ se demuestra, facilmente, que es estable para las operaciones de conjuntos de unión e intersección numerables, así como para la diferencia. Además el conjunto vacío pertenece a la clase, es decir, se tiene que $\mathbb{F}_U$ es un σ-anillo, pero no es en general una σ-álgebra ya que U no pertenece a ella.

Sin embargo, nosotros estabilizamos ésta clase de modo que contenga los conjuntos U, U_a y U_b, y seguiremos designando por $\mathbb{F}_U$ a la clase estabilizada. Si $\widetilde{\mathbb{B}}_A = \{L \in \mathbb{B}_A : [x_Z \in L] \in \mathbb{N}\}$:

La variable x_Z determina para cada $P \in K$ una ley de probabilidad en $(E_A, \widetilde{\mathbb{B}}_A)$ de la forma habitual: $\tilde{\theta}(L) = P(x_Z \in L)$ para cualquier $L \in \widetilde{\mathbb{B}}_A$. Definimos entonces la función de conjunto θ sobre $\mathbb{F}_U$ por la relación

$$\theta(C) = \tilde{\theta}(L)$$

si $C = U \cap L$, $L \in \widetilde{\mathbb{B}}_A$. Esta función θ es independiente de la representación elegida para C, ya que si $C = U \cap L = U \cap L'$ entonces $\{w \in W: x_Z(w) \in L\} = \{w \in W: x_Z(w) \in L'\}$, ya que $U = x_Z(W)$, por lo que $\theta(L) = P(x_Z \in L) = P(x_Z \in L') = \theta(L')$, por lo que $\theta(C)$ está definida sin ambigüedad en $\mathbb{F}_U$.

A partir de ahora, para indicar la dependencia de la función de conjunto θ del proceso $P \in K$, la denotaremos por θ_P, y es fácil verificar que esta función de conjunto es una capacidad de Choquet,[*] tal como puede verse en P.A.Meyer+C.Dellacherie(1), sobre el espacio $(U, \mathbb{F}_U)$, ya que es una función positiva, creciente, y que verifica las relaciones:

$\theta_P(\bigcup_n C_n) = \sup \theta_P(C_n)$ para toda sucesión creciente $\{C_n\}$ de elementos de $\mathbb{F}_U$.

$\theta_P(\bigcap_n C_n) = \inf \theta_P(C_n)$ para toda sucesión decreciente $\{C_n\}$ de elementos de $\mathbb{F}_U$.

Esta caracterización de θ_P como una capacidad no es muy

---

[*] Sobre la Teoría de Capacidades puede verse la extensa monografía de G.Choquet(1), o bien los parágrafos dedicados en los textos de P.A.Meyer(1) ó el del mismo G.Choquet(2).

operativa, y por ello ya que verifica las condiciones suficien tes de P.R.Halmos(1) para que U sea fuerte (thick), podemos - afirmar que $(U, \mathbb{F}_U, \theta_P)$ es un espacio de medida, y θ_P es una medida sobre el σ-anillo $\mathbb{F}_U$, que llamaremos <u>medida espectral</u> del proceso P. Al espacio "medible" $(U, \mathbb{F}_U)$ lo llamaremos <u>espacio de salidas general</u>, y, por los argumentos anteriores, - con cada proceso $P \in K$ hay asociada una medida sobre el espacio de salidas general θ_P que es su medida espectral. Además, puesto que $\theta_P(U) = P(W) = 1$, la medida espectral es una medida de probabilidad.

Por último, si $P \in K_I$ entonces $\theta_P(U_a) = 1$, mientras que - si $P \in K_N$, entonces $\theta_P(U_b) = 1$, y por consiguiente, tenemos que si P es extremal, $P \in K_e$, entonces o bien $\theta_P(U_a) = 1$, ó bien - es $\theta_P(U_b) = 1$, es decir, que si el proceso P es extremal entonces su medida espectral sobre el espacio de salidas se encuentra concentrada sobre el espacio de salidas alcanzables ó sobre el espacio de las salidas no alcanzables.

BIBLIOGRAFIA.

(1) R.M.BLUMENTHAL-R.K.GETOOR : Markov Processes and Potential Theory. Acad. Press. 1969.

(1) G.CHOQUET: Theory of Capacities. Ann. Inst. Fourier, 5, 1955, 131-295, M.R. 18# 295.

(2) G.CHOQUET: Lectures on Analysis, Vol. I: Integrations and Topological Vector Spaces. W.A.Benjamin, Inc.1969.

(3) G.CHOQUET: Lectures on Analysis, Vol. II: Representation Theory. W.A.Benjamin, Inc. 1969.

(1) J.L.DOOB: Conditional Brownian Motion and the boundary limits of harmonic functions. Bull. Soc. Math. France, 85, 1957, 431-458, M.R. 22# 844.

(2) J.L.DOOB: Discrete potential theory and boundary. J. Math. Mech. 8, 1959, 433-458, M.R. 21,#5825

(1) E.B.DYNKIN: The space of exit of a Markov processes. Russ. Math. Surv. 24, 1969, 89-157, M.R. 41# 9359

(2) E.B.DYNKIN: Excesive functions and the exit space of a Markov processes. Theory of Prob. Appl. 15, 1970, 37-44, M.R. 42 # 2543.

(3) E.B.DYNKIN: Entrance and exit space for a Markov processes. Actes Congr. Inst. Math. 1970, t-2, 507-512.

(4) E.B.DYNKIN: Excesive measures and entry laws for a Markov processes. Math. USSR Sbornik, 13, 1971, 209-246, M.R. 44#7638.

(5) E.B.DYNKIN: The initial and final behaviour of trajectories of Markov processes. Rus. Math. Surv. 26, 1971, 165-185, M.R. 45#7807.

(6) E.B.DYNKIN: Integral representation of excesive measures and excesive functions. Russ. Math. Surv. 27, 1972, 43-84, M.R. 53, # 9394.

(7) E.B.DYNKIN: Duality for Markov Processes. En "Stochastic Analysis". Ed. A.Friedman-M.Pinsky. Acad.Press 1978.

(8) E.B.DYNKIN: Suficient statisties and extreme points. - Annals of Prob. 6, 1978, 705-730.

(1) H.FOLLMER: Phase transition and Martin Boundary. Seminaire des Probabilités IX, Lect. Notes in Math.465, Springer 1975.

(1) R.K.GETOOR: Markov Processes: Ray processes and Rigth - processes. Lect. Notes in Math. 440, Springer-1975.

(1) P.R.HALMOS: Measure Theory. Van Nostrand, 1950

(1) G.A.HUNT: Markov Processes and Potentials. I,II,III. Illinois J. Math. 1, 1957, 44-93, 316-369,M.R.19, 951 y 2, 1958, 151-213, M.R. 21, # 5824.

(2) G.A.HUNT: Markov chains and Martin Boundaries. Illinois J. Math. 4, 1960, 313-340, M.R. 23, # A691

(1) YU.I.KIFER-S.A.PIROGOV: The descompositions of quasi-invariant measure into ergodic measures. Apendice en E.B.Dynkin (6).

(1) H.KUNITA-T.WATANABE: Markov Processes and Martin Boundary. Illinois J. Math. 9, 1965, 485-526, M.R.31 # 5240.

(1) KURATOWSKI: Topology. Acad. Press. 1967-9.

(1) S.E.KUZNECOV: On the descomposition of excesive measures. Soviet.Math.Dokl. 15, 1974, 121-124, M.R. 49, #4101.

(1) P.A.MEYER: Probabilités et Potentiels. Hermann 1966.

(2) P.A.MEYER: Sur les relations entre diverses properties des Processus de Markov. Inv. Math. 1, 1966, 59-100, M.R. 35. #2349.

(3) P.A.MEYER: Processus de Markov. Lect. Notes in Math. 26, Springer-1967.

(4) P.A.MEYER: Processus de Markov: La frontiere de Martin. Lect. Notes in Math. 77, Springer-1968.

(5) P.A.MEYER: Balayage pour les processus de Markov continuos a droite, d'apres Shin Chung Tuo. Seminaire de Pro babilités V. Lect. Notes in Math. 191, Springer 1971.

(1) P.A.MEYER-C.DELLACHERIE: Probabilités et Potentiels. Chap. I,IV. Hermann 1975.

(1) P.A.MEYER-J.B.WALSH: Quelques applications des Resolventes de Ray. Inv. Math. 14, 1971, 143-166, M.R.45,# 4502.

(1) K.R.PARTHASARATY: Probability measures on metric spaces. Acad. Press. 1967.

(1) CH.PRESTON: Random Fields. Lect. Notes in Math. 534, Sprin-ger-1976.

(1) L.SCHWARTZ: Processus de Markov et desintegrations regulie-res. Ann. Inst. Fourier, 27, 1977, 211-277.

(1) M.WEIL: Resolventes en dualité. Seminaire de Probabilité I. Lect. Notes in Math. 39. Springer 1967.

(1) M.YOR: Quelques resultats sus certains measures extremales. Applications a la representation des martingales, en "Measure Theory: Applications to Stochastic Analysis" Lecture Notes in Math. 695, Springer-1978.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Jose Mª Alba Riesco

titulada "Representación de Funciones y Medidas excesivas y Procesos de Markov."

acordó otorgarle la calificación de SOBRESALIENTE "CUM LAUDE"

Sevilla, 11 de octubre 1.979

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

El Presidente, El Secretario, El Doctorando,