



UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

**Estudio de Algunos Aspectos Geométricos  
de los Espacios Métricos Geodésicos  
y sus Consecuencias en  
la Teoría Métrica del Punto Fijo**

*Aurora Fernández León*



**UNIVERSIDAD DE SEVILLA**

**Facultad de Matemáticas**

**Departamento de Análisis Matemático**

**Estudio de Algunos Aspectos Geométricos de los  
Espacios Métricos Geodésicos y sus Consecuencias  
en la Teoría Métrica del Punto Fijo**

Memoria presentada por

Aurora Fernández León

para optar al grado de

Doctora en Matemáticas

por la Universidad de Sevilla.

Fdo. Aurora Fernández León

Vº. Bº.: Director del trabajo

Fdo. Dr. D. Rafael Espínola García

Profesor Titular del Departamento

de Análisis Matemático

de la Universidad de Sevilla

Sevilla, Octubre de 2010



# Agradecimientos

Durante estos cuatro años de trabajo, son muchas las personas que de un modo u otro han vivido conmigo la realización de esta tesis doctoral, con sus altos y bajos. Aunque es imposible nombrarlas aquí a todas, si me gustaría agradecerles, desde lo más profundo de mi corazón, el haberme brindado el apoyo, colaboración, ánimo y sobre todo cariño y amistad necesarios para llegar hasta aquí.

En primer lugar, me gustaría dejar constancia de mi agradecimiento a Rafa, mi director de Tesis. Aunque no puedo resumir en pocas palabras todo lo que he aprendido trabajando con Rafa durante estos cuatro años, si me gustaría agradecerle muy sinceramente su constante e ininterrumpida ayuda, las muchas horas de dedicación que ha empleado en este trabajo, su paciencia conmigo, el entusiasmo que transmite y con el que vive su tarea investigadora y por supuesto, y para mi lo más importante, el ejemplo de honestidad y humildad en el trabajo que ha sido para mí.

Debo un especial reconocimiento al departamento en el que he trabajado durante este tiempo, el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Sevilla, por el cariño y la ayuda que he recibido de la mayoría de sus miembros. En especial, agradezco enormemente la confianza que depositó en mí, hace ya cuatro años, el Prof. D. Tomás Domínguez Benavides, ofreciéndome la oportunidad de emprender esta aventura. También me gustaría darle las gracias con alegría, como no, a Pepa, por ofrecer siempre, por donde quiera que vaya, la mejor de sus sonrisas, haciendo que, en concreto para mí, brillase muchas veces el sol en la facultad cuando aparentemente estaba nublado.

Me complace también agradecer la acogida recibida en el ETH (Suiza) durante los tres meses y medio que duró mi estancia de investigación allí. En especial, destaco la amabilidad del Profesor Dr. Enrico Le Donne, que además me dio la oportunidad de aprender y disfrutar muchísimo delante de una pizarra durante varias largas tardes de intercambio matemático.

A mi compañera de despacho, Victoria, por lo importante y determinante que fueron su cariño y su apoyo para seguir con mi tarea investigadora cuando no parecía haber otra opción que abandonar.

Mi gratitud también para mis amigos, mis primas y mi hermanita; en especial, por confiar ciegamente en mi en todo momento, por estar conmigo para celebrar mis logros, pero sobre todo por tenderme la mano siempre que lo he necesitado. Nunca me cansaré: GRACIAS.

A Juan, aunque le agradezco en particular su gran ayuda con las ilustraciones de esta tesis, quiero darle las gracias en realidad por todo el apoyo y el cariño que me da día a día, por estar a mi lado y por ayudarme a levantarme siempre que no me quedan fuerzas, y sobre todo por saber dibujar en cualquier situación una sonrisa en mi cara. Gracias por hacerme feliz.

Por último, quiero dedicar estas últimas líneas a mostrar mi más sentido y sincero agradecimiento a toda mi familia. En especial, doy las gracias:

A mi padre, por mirarme siempre con ese brillo en los ojos y por dedicar siempre e incondicionalmente tanto tiempo a mi formación. Estoy segura que sin su ayuda no habría llegado nunca hasta aquí.

A mi madre, por estar siempre ahí y por quererme y adorarme tal y como soy.

*A mis padres*





# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>I</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Espacios métricos . . . . .	2
1.2. Espacios métricos geodésicos . . . . .	5
1.3. Convergencia “débil” en espacios métricos . . . . .	16
1.4. Espacios de curvatura acotada. Espacios $CAT(k)$ . . . . .	18
<b>2. Propiedades Geométricas de los Espacios <math>CAT(k)</math></b>	<b>39</b>
2.1. Convexidad uniforme y proyección métrica en espacios $CAT(1)$ . . . . .	40
2.2. Propiedad Kadec-Klee y propiedad $(P)$ de Lim y Xu en espacios $CAT(1)$ . . . . .	48
2.3. Condición $(Q_4)$ y propiedad $(N)$ en espacios $CAT(0)$ . . . . .	55
2.4. Característica de Lifšic en espacios $CAT(k)$ . . . . .	66
<b>3. Teoremas de Punto Fijo en Espacios Geodésicos</b>	<b>71</b>
3.1. Punto fijo para aplicaciones univaluadas . . . . .	71
3.1.1. Punto fijo para aplicaciones no expansivas . . . . .	72
3.1.2. Punto Fijo para aplicaciones de tipo convexo . . . . .	74
3.1.3. Punto fijo para aplicaciones uniformemente lipschitzianas . . . . .	80
3.2. Punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas . . . . .	82
3.3. Apéndice . . . . .	91
<b>4. Teoremas de Punto Fijo bajo Condiciones Asintóticas Puntuales</b>	<b>95</b>
4.1. Nociones y resultados previos . . . . .	96

4.2. Teoremas de punto fijo para aplicaciones no expansivas asintóticas puntuales en espacios métricos uniformemente convexos . . . . .	99
<b>5. Teoremas de Punto Fijo para Contracciones Cíclicas</b>	<b>109</b>
5.1. Nociones y resultados previos . . . . .	110
5.2. Teoremas de punto fijo para contracciones cíclicas en espacios métricos geodésicos . . . . .	114
5.2.1. Las propiedades WUC y HW . . . . .	118
5.2.2. Teoremas de existencia, unicidad y convergencia a puntos de mejor aproximación en espacios métricos geodésicos . . . . .	127
5.3. Teoremas de punto fijo para contracciones cíclicas en espacios de Banach	133
5.4. Apéndices . . . . .	137
5.4.1. Apéndice 1 . . . . .	137
5.4.2. Apéndice 2 . . . . .	148
<b>Bibliografía</b>	<b>151</b>

# Introduction

Given a nonempty set  $Z$  and a mapping  $T: Z \rightarrow Z$ , it is said that a point  $x \in Z$  is a fixed point of  $T$  if  $Tx = x$ . Metric Fixed Point Theory is the branch of Mathematical Analysis which focuses on the existence, uniqueness and localization of fixed points under metric conditions on both the domain of the mapping and on the mapping itself. This theory first appeared in the form of the Banach Contraction Principle in Stefan Banach's PhD in 1922, where it was applied to solve various integral equations which could be reduced to the form  $Tx = x$  where  $T$  is a contractive operator. More precisely, the Banach Contraction Principle is an exceptional result which guarantees existence and uniqueness of fixed points for mappings  $T: M \rightarrow M$  where  $M$  is a complete metric space and  $T$  is a *contraction*; that is,  $T$  satisfies the metric condition

$$d(Tx, Ty) \leq cd(x, y)$$

for each  $x, y \in M$  where  $c \in (0, 1)$  is fixed. Moreover, this result provides a constructive method to approach the fixed point through any sequence of iterates. The facts that the Banach Contraction Principle is applicable over any complete metric space and that it enjoys great versatility when it is applied to solve both differential and integral equations, seemed to work as an impediment for the fast development of Metric Fixed Point Theory as we know it nowadays. Metric Fixed Point Theory had its inflection point in the year 1965 when, simultaneously but independently, the works given by W. A. Kirk [42], F. Browder [10, 11] and Göhde [22] on the existence of fixed points in Banach spaces for a less restrictive class of mappings than that of contractive mappings were published. This new class of mappings were the so-called *nonexpansive*

*mappings*, which are characterized by the metric condition

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y),$$

for each  $x, y \in M$ . Now the problem becomes much more complicated since such a mapping may or may not have fixed points under convenient regular conditions. Even in the case where they have a fixed point, it may or may not be unique. Therefore a whole new world of possibilities was revealed. Consequently, new motivation which would govern a large part of the interest of many researchers working in Metric Fixed Point Theory, then consisted of finding the interrelation between the existence of fixed points for certain classes of operators and the geometry of the Banach spaces over which they are defined. However, it was not until the early eighties that the Kirk Fixed Point Theorem for nonexpansive mappings [42] would be stated in the more general setting of metric spaces. This extension of the theorem was equally due to W. A. Kirk [41]. Whereby a counterpart of the result obtained in 1965 was shown for bounded metric spaces with a certain convexity structure; that is, metric spaces with a distinguished family  $\mathfrak{S}$  of subsets containing the closed balls which is stable under intersections and enjoys the structural properties of numerable compactness and normal structure. One of the most well-known and useful versions of this result is Theorem 3.1.3 in this Dissertation, which assures that *any nonexpansive mapping  $T: M \rightarrow M$ , where  $M$  is a nonempty bounded and complete metric space with uniform normal structure, has a fixed point.* A new line of research evolved from this result. This new line of research consists of studying the existence of fixed points for nonexpansive-like mappings in a more general context than that of Banach spaces. Of course, a fundamental role in this new theory will be played by the structural properties (such as normal structure, uniform convexity,...) that find counterparts in these metric spaces as well as the identification of metric spaces where such counterparts occur in a natural way. As will be seen later in this work, the largest part of the new results shown in this Dissertation falls within this new research line.

Metric spaces are a very important tool for the description of certain natural processes, however the plain structure of a metric space is too general for practical use alone. This is why the very interesting examples of metric spaces always require

additional features and geometric constraints so that they can enjoy a minimum of regularity that may make them useful. The most relevant metric structures include fractal metric spaces, the Carnot-Carathéodory distance over Carnot and Heisenberg groups, doubling metric spaces, graph metrics,  $\mathbb{R}$ -trees, hyperconvex metric spaces, Riemannian and Finsler metrics and, those which are the actual object of this Dissertation, length and geodesic metric spaces with the particular case of geodesic spaces of bounded curvature. An excellent introduction to some of the recent, and not so recent, facts on these metric spaces can be found in the monographs by L. Ambrosio and P. Tilli “*Topics on Analysis in Metric Spaces*” [3], J. Heinonen “*Lectures on analysis on metric spaces*” [27] and L. Capogna, D. Danielli, S. D. Pauls, and J. T. Tyson “*An Introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem*” [15]. Many of the convenient properties of these spaces allow us to develop and find counterparts of already existing mathematical theories in smoother contexts. Some of these properties are also fundamental to making this particular class of metric spaces useful in applications to several problems. One of the most distinguished and studied classes is the class of geodesic metric spaces. What characterizes these spaces is that any two of its points can be joined by geodesics which, in general terms, are curves whose lengths equal the distance between their endpoints. The main goal of this Dissertation is to study various problems related to Metric Fixed Point Theory in geodesic metric spaces. More particularly, we will concentrate on spaces of curvature bounded from above and uniformly convex geodesic metric spaces. Occasionally we will also show some new and interesting consequences of our results on Metric Fixed Point Theory in the linear setting of Banach spaces. It can be noticed, throughout this work, how relevant the several metric properties of these two classes of spaces are in relation to Metric Fixed Point Theory.

Geodesic metric spaces of bounded curvature were studied at the beginning of the XXth Century as an adequate metric scenario for the generalization of the notion of sectional curvature already in existence for Riemannian manifolds. This first approach to the notion of curvature on metric spaces was due to Jaques Hadamard (1865-1963). Although these spaces were formally defined in the mid-twentieth Century, it was the

publication of works by Misha Gromov on groups of polynomial growth, in the eighties of the same century, that caused an extensive and generalized attention by a large number of researchers. The so-called CAT(0) spaces, also known as metric spaces of nonpositive curvature, became a main focus of interest. CAT(0) spaces are an example of metric space with bounded curvature from above by a number  $k$ , and are in fact the type of bounded curvature metric spaces considered in this work. The main idea of Jaques Hadamard when first defining these spaces was to establish a relation between the sectional curvature and the *thickness* of the triangles of a Riemannian manifold. In fact, it is by means of measuring the thickness of the triangles of a geodesic space in a certain manner that enables us to set the curvature of this geodesic space. In order to measure the thickness of a geodesic triangle in an arbitrary geodesic space, various comparison techniques with very well-known geodesic spaces (the so-called model spaces) will be applied as shown in Section 1.4.

A different, but related, class of spaces to that of CAT( $k$ ) spaces, is the class of uniformly convex geodesic spaces. We will also study the geometry of these spaces. It is worth pointing out here that many of the features enjoyed by CAT( $k$ ) spaces are actually a consequence of the fact that these spaces, as shown in this Dissertation, are uniformly convex under adequate constraints. A very interesting example in the literature of uniformly convex geodesic spaces are uniformly convex hyperbolic spaces as studied in [47].

The modulus of convexity of a uniformly convex Banach space has many useful properties (continuity, monotonicity, the fact that the radii of balls do not play a relevant role,...) which are easy to study thanks to the linear structure of these spaces. These properties play a very important role when applied to Fixed Point Theory. In order to derive many of the already fixed point results in existence from the more general context of uniformly convex geodesic spaces, we will impose certain regularity conditions on the modulus of convexity related to these metric spaces. These conditions will be monotonicity and lower semicontinuity from the right with respect to the radius variable  $r$ . Notice that the modulus of convexity of a geodesic space will not only depend in general on the separation variable  $\varepsilon$  but also on the radius. By

considering this double dependance of the modulus of convexity, we are actually taking into account the asymmetry of metric spaces at the same time we try to retain the information about the geometry of the balls that the uniform convexity usually gives.

Although, as explained above, the Kirk Fixed Point Theorem for metric spaces was studied in the early eighties, Metric Fixed Point Theory began to be developed on metric spaces of bounded curvature in the year 2002 with the studies [34, 35] by W. A. Kirk. These studies, where  $CAT(0)$  spaces are the main object of interest, take advantage of the very good geometrical properties of spaces of nonpositive curvature which, in many cases, resemble those of Hilbert spaces. From that point on, there was a definite increase in the amount of new work on Metric Fixed Point Theory, not only for  $CAT(0)$  spaces but also for more general classes of spaces. This is the case, for instance, for the above-mentioned uniformly convex hyperbolic spaces [47] (for more on hyperbolic spaces and Fixed Point Theory, see also [24, 26, 40, 59]).

The goal of this Dissertation is to study different geometric aspects of metric spaces of bounded curvature from above as well as uniformly convex geodesic spaces which are relevant to Metric Fixed Point Theory. Therefore, these studies will be later applied to obtain fixed point results on these structures for both single- and multi-valued mappings which satisfy nonexpansive-like conditions. This work is divided into five chapters which have been further divided into a number of sections. A brief summary of the structure and contents of each of these chapters now follows:

- The first chapter contains some preliminary information. Here we gather together elementary notions which will be needed for a more self-contained presentation and easier reading of the contents of this Dissertation. We have also included in this chapter some well-known results related to the notions introduced. Although most of the necessary elementary notions are contained in this first chapter, a few other notions have been placed in other chapters in order to help the presentation and are located in accordance with their relevance to the specific contents of those other chapters.

We have divided this chapter into four sections. The first is devoted to a de-

scription of the general context in which we are working; that is, this section contains basic notions on metric spaces. We also set the notation related to these spaces and introduce, in order to adequately work with the notion of multi-valued mapping, the Hausdorff metric. The second section begins with a brief description of the role of geodesic metric spaces in Metric Fixed Point Theory. This section is mainly devoted to the introduction of geodesic metric spaces as well as some related geometric notions, one of the most relevant of which is the Alexandrov angle defined by two geodesics with the same initial point. The main tool in order to properly describe this notion of angle will be that of the comparison triangle. It is at this moment when we first encounter the techniques of comparison which play a very relevant role in the definition of spaces of bounded curvature. Two of the main notions in this work are then presented. First we recall the definition of *uniform convexity* in a geodesic space and then we focus on the property of the *nonempty intersection* for a decreasing -with respect to the inclusion of sets- sequence of sets. Two convergence concepts are presented in the third section: the so-called  $\Delta$ -convergence and, by making use of the  $\phi$ -convergence of Sosov [65], the  $\phi_p$ -convergence. The title of this section “Weak convergence in metric spaces” stresses the idea that these convergence notions will be considered as counterparts of the usual weak convergence in Banach spaces. The chapter finishes with a section where a detailed description of  $\text{CAT}(k)$  spaces is given as well as of metric spaces of bounded curvature from above by a number  $k$ . Further to this description, we will also recall some of the most relevant geometrical properties of these spaces, among which special attention is paid to the CN inequality of  $\text{CAT}(0)$  spaces as well as some other properties directly inherited by  $\text{CAT}(k)$  spaces from the so-called model spaces.

- In the second chapter we study some geometric properties of  $\text{CAT}(k)$  spaces. As shown in successive chapters, these properties will be applied in order to obtain several results on fixed points for mappings which satisfy metric conditions.

The second chapter has been divided into four sections.  $\text{CAT}(1)$  spaces, and



hence by extension  $\text{CAT}(k)$  spaces with  $k > 0$ , are the main focus for the two first sections. In the first section we concentrate on the uniform convexity of  $\text{CAT}(1)$  spaces. Certain questions related to the normal structure as well as the metric projection from a point onto a closed and convex subset of these spaces are studied. It will be at this point that certain boundedness conditions will turn out to be very natural when dealing with  $\text{CAT}(1)$  spaces. These conditions will show up frequently in the rest of the presentation. We also recall how  $\text{CAT}(0)$  spaces behave with respect to the uniform convexity and the metric projection onto its convex and closed subsets. In the second section we study two geometric properties relevant in Metric Fixed Point Theory: the uniform Kadec-Klee property and property  $(P)$  of Lim and Xu in  $\text{CAT}(1)$  spaces. Since both properties are closely related to the notion of asymptotic centre, we deduce some new properties of these centres in  $\text{CAT}(1)$  spaces. In the third section we provide a negative answer to a question raised in [44] by showing that not all  $\text{CAT}(0)$  spaces satisfy the so-called  $(Q_4)$  property that has been recently introduced in [44]. The gluing of metric spaces is considered in order to find  $\text{CAT}(0)$  spaces without the  $(Q_4)$  property. At that point we also introduce a new geometric property for  $\text{CAT}(0)$  spaces which will be called property  $(N)$ . Once it is shown that property  $(N)$  is weaker than  $(Q_4)$ , we improve upon a result from [44] about convergence of the mid points of a sequence of geodesic segments. We finally close this chapter by showing an estimation of the Lifšic characteristic in  $\text{CAT}(k)$  spaces by finding its actual value in the model spaces  $M_k^2$ . This estimation gives a positive answer to an open question from [17].

In the last three chapters of our Dissertation we take up and solve a number of fixed point problems for different classes of mappings under metric conditions on  $\text{CAT}(k)$  and uniformly convex geodesic spaces. Our results and techniques will be occasionally studied on Banach spaces and strictly convex geodesic spaces.

- The third chapter contains fixed point results for nonexpansive, mild nonexpansive and uniformly Lipschitzian mappings in geodesic metric spaces. This third chapter is divided into two sections. The first section focuses on fixed

point theorems for single-valued mappings in  $CAT(k)$  spaces. There are three subsections in this section, each one of them devoted to different classes of mappings. The main result of the first subsection is the Kirk Fixed Point Theorem in  $CAT(1)$  spaces, which assures existence of fixed point for nonexpansive mappings in  $CAT(1)$  spaces with radius lower than  $\pi/2$  (as an immediate consequence, counterpart results are obtained for any  $CAT(k)$  with  $k > 0$ ). The next class of mappings we take into consideration are those of convex type. This family of mappings contains that of nonexpansive mappings and the main result we obtain about them is a Demiclosedness Principle in  $CAT(1)$  spaces similar to that obtained for  $CAT(0)$  spaces in [44]. This section ends with two fixed point results for uniformly Lipschitzian mappings in  $CAT(k)$  spaces. In the second section of this chapter we take up the problem of studying the existence of fixed points for nonexpansive multi-valued mappings in uniformly convex geodesic spaces. More particularly, we work with such spaces for which there is a modulus of convexity which is monotone or lower semi-continuous from the right. This problem had also been taken up also in [64] for uniformly convex geodesic spaces with a modulus that is independent from the radius and under the additional condition that the metric of the space was convex. Our work does not consider this later condition and, as a result, we can apply it to a collection of  $CAT(1)$  spaces which lack this condition. We also notice here that the problem becomes much more complicated under the absence of a convex metric. We close this chapter with an appendix where we give a new proof of the Kirk Fixed Point Theorem in  $CAT(1)$  spaces. While having been previously proved through applying techniques of asymptotic centres, we now parallel the original proof of this theorem based on normal structure arguments.

- In the fourth chapter we study existence and convergence of iterates for pointwise asymptotic nonexpansive mappings in uniformly convex geodesic spaces with modulus of convexity as those considered in Chapter 3. This chapter is divided into two sections. In the first section we briefly overview the recent history of pointwise asymptotic mappings in Metric Fixed Point Theory while we

introduce basic notions on this subject. In the second section we show several results for certain classes of asymptotic mappings with special attention paid to pointwise asymptotic nonexpansive mappings. Results contained in this chapter are mainly triggered by recent work [28] where similar results were obtained for  $CAT(0)$  spaces by means of the CN inequality. In [28] the difficulty extending these results to more general uniformly convex geodesic spaces was pointed out. We show that this is in fact possible by considering our usual conditions on the modulus of convexity.

- To conclude our presentation, in the fifth chapter, we introduce two new geometric properties, the so-called WUC and HW, to take up fixed point problems of cyclic contractions in geodesic metric spaces and Banach spaces. When we talk about fixed point problems for cyclic contractions, we are actually referring to the *best proximity points*; that is, a notion which replaces the idea of fixed points when dealing with cyclic mappings defined on a pair of sets with an empty intersection. This chapter has three sections. In the first section, we introduce the notions necessary for the description of our results on cyclic mappings, and summarize the brief and recent history of fixed point results for these mappings. The second section is divided into two subsections. In the first we give detailed definitions of WUC and HW for pairs of subsets of a metric space and, in particular, we study their relation to property UC, as recently defined in [67]. Several fixed point results for cyclic contractions in metric spaces are then obtained. When property HW is taken into consideration we move to the more restrictive context of strictly convex geodesic metric spaces with the nonempty intersection property. In the third and last section we study the same kind of problems in Banach spaces. As a consequence of the application of our earlier studies to metric spaces, we obtain improvements of already existing results from among these, it is worth mentioning an affirmative partial answer to the problem posed by A. Anthony Eldred and P. Veeramani in [19] about the existence of best proximity points for cyclic contractions in reflexive Banach spaces. This chapter ends with the addition of two appendices. In the first appendix we

propose a different approach to that used for the problems taken in the previous sections. This new approach is inspired in the techniques developed by R. Espínola in [20] to solve existence and uniqueness problems of best proximity points for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces. The basic idea of this approach is to find a new metric space where these relatively nonexpansive mappings behave as usual nonexpansive mappings. We show that the same can be attained for cyclic contractions; that is, these mappings can be regarded as usual contractions under certain conditions. The goal of this first appendix is to show how this can be done and which kind of consequences can be derived. The second appendix studies some of the problems from the third section of this chapter in the context of  $CAT(0)$  spaces. These results from the third section were obtained for Banach spaces and they required the usual weak convergence of these spaces. In this appendix we consider what happens if a similar approach is followed by replacing weak convergence by  $\Delta$ -convergence. As a consequence we show how  $CAT(0)$  spaces behave surprisingly close to Hilbert spaces regarding this problem.

Original results from this Dissertation have led to the following publications:

- R. Espínola and A. Fernández-León, *CAT( $k$ )-spaces, weak convergence and fixed points*, J. Math. Anal. Appl. (1) **353** (2009), 410–427.
- R. Espínola and A. Fernández-León, *On best proximity points in metric and Banach spaces*, accepted for publication in Canadian Journal of Mathematics.
- R. Espínola, A. Fernández-León and B. Piątek, *Fixed Points of Single- and Set-Valued Mappings in Uniformly Convex Metric Spaces With no Metric Convexity*, Fixed Point Theory and Applications, (2010), 1–16.
- A. Fernández-León, *Existence and uniqueness of best proximity points in geodesic metric spaces*, Nonlinear Anal. **73** (4), (2010), 915–921.

# Introducción

Dados un conjunto no vacío  $Z$  y una aplicación  $T: Z \rightarrow Z$ , se dice que  $x \in Z$  es un punto fijo de  $T$  si  $Tx = x$ . La Teoría Métrica del Punto Fijo es la rama del análisis matemático que estudia problemas de existencia, unicidad y localización de puntos fijos en los que las condiciones geométricas del espacio subyacente sobre el que se definen las aplicaciones y las características métricas de dichas aplicaciones juegan un papel fundamental. Esta teoría se inicia en los años 20 del siglo XX con el Principio de Contracción de Banach. Concretamente, este resultado aparece por primera vez en la tesis de Stefan Banach en 1922 y nace del interés de este célebre matemático por resolver ecuaciones integrales que puedan escribirse como un problema de punto fijo de la forma  $Tx = x$ , donde  $T$  es un operador que actúa sobre espacios de funciones. El Principio de Contracción de Banach es un resultado que garantiza existencia y unicidad de punto fijo para aplicaciones  $T: M \rightarrow M$ , donde  $M$  es un espacio métrico completo y  $T$  es una contracción, es decir,

$$d(Tx, Ty) \leq cd(x, y)$$

para todo  $x, y \in M$  con  $c \in (0, 1)$  fijo. Además, este resultado proporciona un método constructivo para encontrar el punto fijo de la aplicación a través de la convergencia de las iteradas de la misma. El hecho de que este principio sea válido sobre cualquier espacio métrico completo y posea una enorme versatilidad a la hora de aplicarlo a ecuaciones diferenciales e integrales, hace que la Teoría Métrica del Punto Fijo para otro tipo de aplicaciones tarde en desarrollarse. El resurgir de esta teoría tiene lugar en la década de los sesenta gracias a la aparición en 1965 de los trabajos casi

simultáneos pero independientes de W. A. Kirk [42], F. Browder [10, 11] y Göhde [22] sobre existencia de punto fijo, en el marco de los espacios de Banach, para un tipo de aplicaciones ya no tan restrictivas como las que se consideraban en el Principio de Contracción de Banach. Estas nuevas aplicaciones se denominan aplicaciones no expansivas y se caracterizan porque

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y),$$

para todo  $x, y \in M$ . A partir de este momento, el interés de esta teoría cambia de rumbo y se centra fundamentalmente en estudiar la interconexión entre la existencia de puntos fijos y la geometría de los espacios de Banach. Hasta principios de los años 80 no es cuando el Teorema de Kirk de punto fijo para aplicaciones no expansivas [42] se reformula para espacios métricos. Esta extensión se debe también a W. A. Kirk [41] y se prueba para aquellos espacios métricos acotados que poseen una estructura de convexidad, es decir, espacios métricos que contienen una familia  $\mathfrak{S}$  de subconjuntos del propio espacio que es numerablemente compacta, estable bajo intersecciones, normal y donde las bolas cerradas están en  $\mathfrak{S}$ . La versión quizás más conocida y utilizada de este teorema es el Teorema 3.1.3 de esta Memoria que afirma que *cualquier aplicación no expansiva  $T: M \rightarrow M$  donde  $M$  es un espacio métrico completo, acotado y no vacío que posee estructura normal uniforme tiene un punto fijo*. A partir de este teorema, comenzó a desarrollarse ampliamente una línea de investigación dentro de esta teoría que trata de extender los teoremas de punto fijo que se conocen en la literatura en espacios de Banach al contexto más general de los espacios métricos. Dentro de esta línea de investigación, juegan un papel fundamental el estudio de ciertas propiedades geométricas (estructura normal, convexidad uniforme, etc...) de los espacios métricos así como la búsqueda de ejemplos de espacios métricos que posean dichas propiedades. Como iremos viendo a medida que avancemos en este trabajo, la mayor parte de las aportaciones que hacemos en esta Memoria a la Teoría Métrica del Punto Fijo siguen esta reciente línea de investigación.

Los espacios métricos son una importante herramienta para modelar y resolver distintos procesos naturales. La estructura de un espacio métrico es realmente demasiado general para poder aplicar las teorías que se utilizan en el estudio de estos

procesos. Es por ello que las estructuras métricas útiles a estos efectos poseen ciertas características y restricciones geométricas que les proporcionan la regularidad necesaria para poder trabajar con ellas. Entre las estructuras métricas que a este respecto han recibido más atención en los últimos años destacan los espacios métricos fractales y métricas fractales, las métricas de Carnot-Caratheodory sobre grupos de Heisenberg, los espacios métricos doblantes, los espacios métricos hiperconvexos, las métricas riemannianas y finslerianas, y los espacios con los que mayoritariamente trabajamos en esta Memoria: los espacios de curvatura acotada, que son un caso particular de espacio de longitud y espacio geodésico. Una excelente introducción a muchos de los recientes, y no tan recientes, estudios sobre estos espacios son el libro de L. Ambrosio y P. Tilli “*Topics on Analysis in Metric Spaces*” [3], el de J. Heinonen “*Lectures on analysis on metric spaces*” [27] y el de L. Capogna, D. Danielli, S. D. Pauls, y J. T. Tyson “*An Introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem*” [15]. Muchas de las propiedades que poseen estas estructuras métricas permiten desarrollar y extender diversas teorías matemáticas. Entre ellas destacan aquéllas que juegan un papel esencial en la modelización de distintos procesos de la naturaleza. Un ejemplo básico y elemental son los espacios métricos geodésicos. La característica fundamental de estos espacios es el hecho de que sus puntos están unidos por geodésicas que, en líneas generales, son curvas sobre los espacios cuya longitud es igual que la distancia entre los puntos que une. En esta Memoria nos ocupamos principalmente de estudiar la Teoría Métrica del Punto Fijo en algunos de estos espacios métricos. En concreto, trabajamos sobre los espacios métricos de curvatura acotada superiormente y los espacios métricos uniformemente convexos aunque, en ciertas ocasiones, estableceremos algunas consecuencias o aportaciones interesantes a la Teoría del Punto Fijo en el contexto lineal de los espacios de Banach. A lo largo de esta Memoria se advierte lo apropiadas que son las propiedades de estas dos familias de espacios métricos en relación con la Teoría Métrica del Punto Fijo.

Los espacios métricos de curvatura acotada son espacios métricos geodésicos que surgen a principios del siglo XX en un intento por generalizar el concepto de curvatura seccional de las variedades riemannianas a un contexto puramente métrico.

Esta aproximación al concepto de curvatura en espacios métricos se debe a Jaques Hadamard (1865–1963). Aunque estos espacios se definieron formalmente a mediados del siglo pasado, no es hasta los años 80, tras los trabajos de Misha Gromov sobre grupos de crecimiento polinomial, cuando reciben una atención especial por parte de un gran número de investigadores. Concretamente reciben especial interés los espacios  $CAT(0)$ , también conocidos como espacios métricos de curvatura no positiva. Los espacios  $CAT(0)$  son un ejemplo de espacio métrico de curvatura acotada superiormente por un valor real  $k$ , que son los espacios de curvatura acotada que consideramos en este trabajo (aunque no lo estudiamos en esta Memoria, existe en la literatura el concepto análogo de espacio de curvatura acotada inferiormente por un valor real  $k$ ). Estableciendo una conexión entre la curvatura seccional y la forma o grosor de los triángulos geodésicos de una variedad riemanniana es como Jaques Hadamard se acerca al concepto de curvatura que hoy conocemos en espacios métricos geodésicos. De hecho, es midiendo de cierta forma “el grosor” que tienen los triángulos en un espacio geodésico como se determina la curvatura del mismo. Para medir el grosor de un triángulo geodésico en un espacio geodésico arbitrario se utilizan técnicas de comparación con espacios geodésicos conocidos que se encuentran descritas en la Sección 1.4 del primer capítulo.

En un intento por trabajar con una familia más general de espacios que los espacios  $CAT(k)$  y teniendo en cuenta que estos últimos son todos uniformemente convexos bajo condiciones naturales de acotación sobre el espacio, optamos por considerar la familia de los espacios geodésicos uniformemente convexos. Un ejemplo interesante en la literatura de espacio geodésico uniformemente convexo son los espacios hiperbólicos uniformemente convexos [47].

En un espacio de Banach uniformemente convexo, el módulo de convexidad del espacio posee muchas propiedades interesantes (continuidad, monotonía, etc...), que, en su mayoría, son consecuencia de la estructura lineal del espacio. En general, estas propiedades juegan un papel esencial en la obtención de resultados de punto fijo para estos espacios. Con objeto de extender muchos de los resultados de punto fijo que se conocen en espacios de Banach al contexto más general de los espacios métricos



uniformemente convexos, imponemos ciertas condiciones de regularidad sobre los módulos de convexidad de estos espacios métricos. Estas condiciones serán de monotonía y semicontinuidad inferior sobre la variable  $r$  (radio), ya que, a diferencia del caso lineal, los módulos de convexidad que utilizaremos en espacios métricos dependerán no sólo de  $\varepsilon$  sino también del radio de las bolas. Al considerar estas dos variables para el módulo de convexidad, se contempla la posible asimetría de un espacio métrico al mismo tiempo que se conservan las características geométricas que la convexidad uniforme clásica proporciona a las bolas de un espacio.

Aunque el Teorema de Kirk para espacios métricos se conocía desde los años ochenta, no es hasta aproximadamente el año 2002, y a partir de los trabajos [34, 35] de W. A. Kirk, cuando la Teoría Métrica del Punto Fijo para aplicaciones no expansivas ha empezado a desarrollarse en espacios métricos con curvatura acotada. Estos trabajos, desarrollados fundamentalmente en espacios CAT(0), ponen de manifiesto las excelentes propiedades geométricas que poseen los espacios métricos de curvatura no positiva, que, en muchos casos, son similares a las de los espacios de Hilbert. A partir de este momento se pueden encontrar en la literatura trabajos dentro de la Teoría Métrica del Punto Fijo no ya sólo para espacios CAT(0), sino también para otras familias más amplias de espacios métricos que los contienen. Éste es el caso por ejemplo de los espacios métricos hiperbólicos uniformemente convexos que nombramos anteriormente [47]. Aunque en esta Memoria no trabajaremos directamente con los espacios métricos hiperbólicos, de los cuales se conocen en la literatura muchas y diferentes definiciones (mirar por ejemplo [26, 40]), sí consideramos interesante señalar que la estructura que poseen estos espacios métricos los convierten en un contexto muy apropiado para estudiar la teoría de operadores en general y los problemas de punto fijo en particular [24, 59].

A grandes rasgos, el objetivo de esta Memoria es estudiar algunos aspectos geométricos de los espacios métricos de curvatura acotada y presentar posteriormente resultados de punto fijo en estos y otros espacios geodésicos más generales para diversos tipos de aplicaciones univaluadas y para aplicaciones no expansivas multivaluadas. Este trabajo está dividido en cinco capítulos que a su vez están subdivididos en difer-

entes secciones. A continuación pasamos a describir brevemente la estructura y los contenidos de esta Memoria.

- El primer capítulo de este trabajo es de carácter preliminar y en él se reúnen fundamentalmente los conceptos más elementales y, en su mayoría, no originales que hemos estimado necesarios para una adecuada lectura y comprensión de toda la Memoria. También se incluyen algunos resultados no originales relativos a los conceptos que se describen. En algunos casos, con la intención de hacer una exposición más lógica y cómoda, se ha pospuesto la introducción de alguno de los conceptos y resultados previos. En estas ocasiones, la naturaleza de los mismos está estrechamente ligada con el contenido del capítulo o sección concreta en el que se incluyen.

Hemos dividido este capítulo en cuatro secciones. La primera de ellas se dedica a describir el contexto general en el que vamos a trabajar a lo largo de toda la Memoria, es decir, en ella se determina de forma concreta el concepto de espacio métrico que consideramos. También se establece cierta notación relativa a estos espacios y, por último, con vistas a manejar el concepto de aplicación multivaluada, se recuerda el concepto de métrica de Hausdorff entre conjuntos. La segunda sección comienza con una breve justificación de la relevancia de los espacios métricos geodésicos dentro de la Teoría Métrica del Punto Fijo. Esta sección está dedicada fundamentalmente a introducir los espacios métricos geodésicos y algunos conceptos geométricos en estos espacios. Uno de los más relevantes es el de ángulo de Alexandrov entre dos geodésicas que parten de un mismo punto. La principal herramienta que se introduce para dar esta definición es la de triángulo de comparación. Esta noción supondrá el primer acercamiento en la Memoria a las técnicas de comparación que se utilizan al trabajar con los espacios de curvatura acotada. Por último se introducen dos de las nociones más relevantes del trabajo. Primero se ofrece la definición de *convexidad uniforme* en espacios geodésicos con la que vamos a trabajar y después se establece, esta vez sí de forma original, una propiedad relativa a intersecciones de conjuntos en estos espacios que denominamos *propiedad de la intersección no vacía*. En

la tercera sección se definen dos conceptos de convergencia en espacios métricos, la  $\Delta$ -convergencia y, a través de la  $\phi$ -convergencia definida por Sosov, la  $\phi_p$ -convergencia. El nombre que damos a esta sección de “convergencias débiles en espacios métricos” hace referencia, entre otras cosas, a que en general estas convergencias jugarán un papel análogo en espacios métricos al que tiene la convergencia débil clásica en espacios de Banach. Finaliza este capítulo con una sección dedicada a presentar los espacios  $\text{CAT}(k)$  y los métricos de curvatura acotada superiormente por un valor real  $k$ . Además de proporcionar una detallada descripción de los mismos, se ofrecen algunas propiedades geométricas de dichos espacios, entre las que destacamos la desigualdad CN de los espacios  $\text{CAT}(0)$  o las propiedades geométricas que heredan los espacios  $\text{CAT}(k)$  de los espacios modelos a través de los cuales se definen.

- El segundo capítulo está dedicado al estudio de algunas propiedades geométricas de los espacios  $\text{CAT}(k)$ . Como se pone de manifiesto en los siguientes capítulos, estas propiedades tienen en su mayoría importantes consecuencias dentro de la Teoría Métrica del Punto Fijo.

Este capítulo se ha dividido en cuatro secciones. En las dos primeras secciones se trabaja en el contexto de los espacios  $\text{CAT}(1)$  y, a consecuencia de la definición de estos espacios, también en el de los espacios  $\text{CAT}(k)$  cuando  $k > 0$ . En la primera sección se estudian principalmente la convexidad uniforme de los espacios  $\text{CAT}(1)$ , haciéndose referencia también a su estructura normal, y las características de la proyección métrica de un punto sobre un subconjunto cerrado y convexo de esos espacios. A partir de este momento se utilizan en la Memoria condiciones naturales de acotación sobre el diámetro o el radio de estos espacios. A lo largo de esta sección, aunque ya han sido estudiadas a priori, se comentan brevemente las características de estas mismas propiedades en los espacios  $\text{CAT}(0)$ . En la segunda sección se estudian la propiedad Kadec-Klee uniforme y la propiedad  $(P)$  de Lim y Xu en los espacios  $\text{CAT}(1)$ . Como ambas propiedades están muy relacionadas con el concepto de centro asintótico, se obtienen algunas propiedades del mismo en espacios  $\text{CAT}(1)$ . La tercera sección

prueba que no todos los espacios  $\text{CAT}(0)$  verifican la condición  $(Q_4)$  introducida en [44]. Para ello, se consideran los espacios métricos construidos a través de “pegamientos”. Por otro lado, se introduce una nueva propiedad geométrica en los espacios  $\text{CAT}(0)$ , denominada propiedad  $(N)$ . Una vez que se demuestra que esta propiedad es más débil que la condición  $(Q_4)$  en este contexto métrico, se mejora un resultado de [44] sobre convergencia de puntos medios de sucesiones de segmentos geodésicos. Por último, cerramos el capítulo ofreciendo una estimación de la característica de Lifšic de los espacios  $\text{CAT}(k)$  a través del valor concreto que tiene la característica Lifšic en los espacios modelo  $M_k^2$ . Esta estimación resuelve positivamente la conjetura que enuncian S. Dhompongsa, W. A. Kirk, y B. Sims en [17].

Los tres últimos capítulos de esta Memoria recogen resultados de punto fijo para diferentes tipos de aplicaciones.

- El tercer capítulo reúne resultados de punto fijo para aplicaciones, en su mayoría, de naturaleza no expansiva en espacios métricos geodésicos. Este capítulo se divide en dos secciones. La primera de ellas estudia teoremas de punto fijo para aplicaciones univaluadas en espacios  $\text{CAT}(k)$ . Hemos dividido a su vez esta sección en tres subsecciones, cada una de las cuales se dedica a un tipo particular y diferente de aplicación. El resultado fundamental de la primera subsección es el Teorema de Kirk en espacios  $\text{CAT}(1)$  con radio menor que  $\pi/2$  que proporciona en este contexto existencia de punto fijo para aplicaciones no expansivas (como consecuencia se obtiene también este resultado para cualquier  $\text{CAT}(k)$  con  $k > 0$ ). Las siguientes aplicaciones que consideramos son las aplicaciones de tipo convexo. Esta familia de aplicaciones contiene a las aplicaciones no expansivas y el resultado fundamental que se prueba para las mismas es un Principio de Demiclosedness en espacios  $\text{CAT}(1)$  (también  $\text{CAT}(k)$  con  $k > 0$ ). Por último, cerramos esta sección ofreciendo dos resultados de punto fijo para aplicaciones uniformemente lipschitzianas en el contexto de los espacios  $\text{CAT}(k)$ . En la segunda sección de este capítulo presentamos varios teoremas de punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas en espacios métricos uniformemente

convexos. En concreto, trabajaremos sobre aquellos espacios que admiten un módulo de convexidad monótono o semicontinuo inferiormente por la derecha. El principal objetivo es probar existencia de punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas con valores compactos y no vacíos. Este problema fue previamente estudiado en espacios geodésicos [64] imponiendo una condición de convexidad sobre la métrica que nosotros no asumimos y de la que carecen por ejemplo los espacios CAT(1). Veremos cómo prescindiendo de esta condición el problema se complica notablemente. Al final del capítulo, hemos incluido un apéndice en el que ofrecemos una prueba alternativa del Teorema de Kirk de punto fijo en espacios CAT(1) basada esencialmente en técnicas de estructura normal.

- El cuarto capítulo de la Memoria recoge principalmente resultados de existencia de puntos fijos y de convergencia de las iteradas para aplicaciones no expansivas asintóticas puntuales en el marco de los espacios métricos uniformemente convexos que admiten módulos de convexidad como en el capítulo anterior. Este capítulo se divide en dos secciones. En la primera de ellas se introducen los conceptos previos necesarios para trabajar en esta nueva rama de la teoría y se ofrece una breve introducción histórica de la Teoría Métrica del Punto Fijo para aplicaciones asintóticas. La segunda sección ofrece resultados de punto fijo para distintas aplicaciones asintóticas. Destacamos los que se dan para aplicaciones no expansivas asintóticas puntuales.
- Para finalizar, en el quinto capítulo, se introducen las propiedades geométricas WUC y HW para establecer teoremas de punto fijo en espacios geodésicos para contracciones cíclicas. Al hablar de teoremas de punto fijo para las aplicaciones cíclicas nos referimos a teoremas de existencia, unicidad y convergencia a *puntos de mejor aproximación*, que son puntos que juegan un papel análogo al de los puntos fijos en situaciones en las que las aplicaciones cíclicas están definidas sobre la unión de un par de conjuntos que tienen intersección vacía. Este capítulo consta de tres secciones. En la primera de ellas, paralelamente a la descripción de los nuevos conceptos que se manejan en esta rama de la

Teoría del Punto Fijo, se incluye un breve historial sobre los resultados de punto fijo para las aplicaciones cíclicas. La segunda sección incluye dos subsecciones. En la primera de ellas se describen las propiedades WUC y HW para pares de subconjuntos de un espacio métrico y se establece la relación de ambas propiedades con la propiedad UC definida recientemente en la literatura [67]. Para terminar la segunda sección, se ofrecen resultados de punto fijo para contracciones cíclicas en espacios métricos. Cuando utilicemos la propiedad HW en estos resultados, trabajaremos en el contexto más concreto de los espacios geodésicos estrictamente convexos que tienen la propiedad de la intersección no vacía. En la tercera y última sección estudiamos los mismos problemas de la sección anterior en el contexto más concreto de los espacios de Banach. Como consecuencia se obtienen diversas mejoras de resultados ya existentes en la teoría. Entre ellas destacamos la respuesta parcial y afirmativa que damos a la pregunta que proponen A. Anthony Eldred y P. Veeramani en [19] sobre existencia de punto de mejor aproximación para contracciones cíclicas en espacios reflexivos. En este capítulo hemos incluido dos apéndices. En el primero de ellos se utiliza un enfoque diferente para probar el problema ya resuelto en la sección anterior sobre existencia y unicidad de punto de mejor aproximación para contracciones cíclicas en espacios de Banach reflexivos y estrictamente convexos. Este original enfoque es el utilizado por R. Espínola en [20] para resolver problemas de existencia y unicidad de puntos de mejor aproximación para aplicaciones relativamente no expansivas en el marco de los espacios de Banach y se caracteriza por tratar las aplicaciones relativamente no expansivas (en nuestro caso contracciones cíclicas) como si fueran de algún modo aplicaciones no expansivas (contracciones). El segundo apéndice aborda algunos de los problemas estudiados en la tercera sección de este capítulo sobre espacios de Banach en el contexto de los espacios CAT(0). Principalmente se muestra una posible extensión de algunos resultados a través del uso de la  $\Delta$ -convergencia definida para espacios métricos.

Durante el tiempo que hemos estado trabajando hasta llegar a elaborar esta

Memoria, han ido surgiendo diversos problemas relacionados estrechamente con los resultados obtenidos y que no hemos conseguido resolver hasta el momento. Algunos de estos problemas podemos encontrarlos descritos en esta Memoria. Concretamente, nos referiremos a los mismos con el nombre de *Problema*.

Los resultados originales que presentamos en esta tesis han dado lugar a las siguientes publicaciones:

- R. Espínola y A. Fernández-León, *CAT(k)-spaces, weak convergence and fixed points*, J. Math. Anal. Appl. (1) **353** (2009), 410–427.
- R. Espínola y A. Fernández-León, *On best proximity points in metric and Banach spaces*, aceptado para su publicación en Canadian Journal of Mathematics.
- R. Espínola, A. Fernández-León y B. Piątek, *Fixed Points of Single- and Set-Valued Mappings in Uniformly Convex Metric Spaces With no Metric Convexity*, Fixed Point Theory and Applications, (2010), 1–16.
- A. Fernández-León, *Existence and uniqueness of best proximity points in geodesic metric spaces*, Nonlinear Anal. **73** (4), (2010), 915–921.





# Capítulo 1

## Preliminares

En este primer capítulo de la Memoria se recogen los conceptos y resultados más generales necesarios para comprender y abordar los diferentes problemas dentro de la Teoría Métrica del Punto Fijo que vamos a estudiar. En algunos casos, paralelamente a la exposición de esta información, se introducen también datos históricos que ayudan a situar en el tiempo los distintos elementos y avances que se van describiendo.

En la primera sección se presentan los principales espacios sobre los que vamos a trabajar, los espacios métricos, así como algunos de sus elementos más básicos. De entre estos elementos, destacamos el de centro asintótico de una sucesión ya que éste es una herramienta esencial dentro de la Teoría Métrica del Punto Fijo.

En la segunda sección se definen los espacios métricos con los que concretamente trabajaremos a lo largo de todo este trabajo, los espacios métricos geodésicos. Además de ofrecer distintas variantes y ejemplos de esta familia de espacios, se describen algunas características geométricas de los mismos. Entre ellas, destacamos la propiedad de la intersección no vacía o la convexidad uniforme.

La tercera sección está dedicada a describir las distintas nociones de “convergencia débil” sobre espacios métricos que vamos a manejar a lo largo de este escrito.

En la cuarta y última sección se definen los espacios de curvatura acotada superiormente por un valor constante  $k$  y se sitúa dentro de esta familia a los espacios

CAT( $k$ ).

## 1.1. Espacios métricos

La noción de espacio métrico que manejaremos en esta Memoria es la noción clásica que usualmente aparece en la literatura.

**Definición 1.1.1.** Sean  $M$  un conjunto cualquiera y  $d: M \times M \rightarrow [0, +\infty)$  una función. Decimos que el par  $(M, d)$  es un espacio métrico si, cualesquiera que sean  $x, y, z \in M$ , la función  $d$  verifica las siguientes propiedades:

$$(1) \quad d(x, y) = 0 \text{ si y sólo si } x = y,$$

$$(2) \quad d(x, y) = d(y, x),$$

$$(3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

En este caso la función  $d$  recibe el nombre de métrica o distancia.

Otra noción asociada a la de espacio métrico, y que también usaremos en esta Memoria, es la de espacio pseudométrico.

**Definición 1.1.2.** Diremos que el par  $(M, d)$  es un espacio pseudométrico si  $M$  y  $d$  son como en la definición anterior reemplazando (1) por:

$$(1)^* \quad d(x, x) = 0 \text{ para todo } x \in M.$$

En este caso  $d$  recibe el nombre de pseudométrica.

Dados  $(M, d)$  un espacio métrico,  $x \in M$  y  $r > 0$ , denominaremos *bola abierta* de centro  $x$  y radio  $r$ , y lo denotaremos  $\overset{\circ}{B}(x, r)$ , al conjunto de puntos  $\{y \in M : d(x, y) < r\}$ . De forma similar se define la *bola cerrada* de centro  $x$  y radio  $r$  como  $B(x, r) = \{y \in M : d(x, y) \leq r\}$ .

El concepto de espacio métrico propio o acotadamente compacto aparecerá puntualmente en la Memoria.

**Definición 1.1.3.** *Un espacio métrico  $(M, d)$  se dice que es propio o acotadamente compacto si cualquier bola cerrada del espacio es compacta.*

Es frecuente en la literatura encontrar esta propiedad definida de forma equivalente mediante sucesiones. En concreto, esta caracterización afirma que  $M$  es propio si cualquier sucesión acotada del espacio admite una subsucesión convergente a un punto  $x \in M$ . A lo largo de este trabajo diremos además que un subconjunto  $C \subseteq M$  es propio si lo es como espacio métrico con la distancia inducida sobre  $C$ .

Consideremos ahora un espacio métrico  $M$  con métrica  $d$ ,  $A$  y  $B$  dos subconjuntos de  $M$  y  $\{x_n\}$  una sucesión acotada en este espacio. A lo largo de este trabajo utilizaremos en muchas ocasiones las siguientes notaciones para referirnos a los subconjuntos del espacio métrico  $M$  que nombramos a continuación.

- *Radio relativo de Chebyshev de  $A$  con respecto de  $x$ :*

$$r_x(A) = \sup\{d(x, y) : y \in A\}, \text{ donde } x \in M.$$

- *Radio de Chebyshev de  $A$  con respecto de  $B$ :*

$$r_B(A) = \inf\{r_x(A) : x \in B\}.$$

*Si  $B = M$ , generalmente escribiremos tan sólo  $r(A)$ .*

- *Centro de Chebyshev de  $A$ :*

$$C(A) = \{x \in M : r_x(A) = r(A)\}.$$

- *Envoltura por Bolas de  $A$ :*

$$\text{cov}(A) = \bigcap \{B_i : B_i \text{ es una bola cerrada y } B_i \supseteq A\}.$$

- *Diámetro de  $A$ :*

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

- *Distancia de  $x$  a  $A$ :*

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}, \text{ donde } x \in M.$$

- *Distancia entre A y B:*

$$\text{dist}(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

- *Proyección métrica u ortogonal de x sobre A:*

$$P_A(x) = \{y \in A : d(x, y) = \text{dist}(x, A)\}, \text{ donde } x \in M.$$

Por abuso del lenguaje, diremos que  $P_A(x)$  es un único punto cuando este conjunto sea un conjunto unitario. Igualmente, diremos que  $x$  es el centro de Chebyshev de un conjunto  $A$  si  $C(A)$  es un conjunto unitario cuyo único elemento es  $x$ .

Para un punto dado  $x \in M$ , consideramos el siguiente límite:

$$r(x, x_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n). \quad (1.1.1)$$

La función  $\varphi: M \rightarrow [0, \infty)$  definida como  $\varphi(x) = r(x, x_n)$  para todo  $x \in M$  recibe el nombre de *tipo*.

En base al límite anterior, se establecen los siguientes elementos:

- *Radio asintótico de  $\{x_n\}$ :*

$$r(x_n) = \inf\{r(x, x_n) : x \in M\}.$$

- *Radio asintótico de  $\{x_n\}$  con respecto de  $C \subseteq M$ :*

$$r_C(x_n) = \inf\{r(x, x_n) : x \in C\}.$$

- *Centro asintótico de  $\{x_n\}$ :*

$$A(x_n) = \{x \in X : r(x, x_n) = r(x_n)\}.$$

- *Centro asintótico de  $\{x_n\}$  con respecto de  $C \subseteq M$ :*

$$A_C(x_n) = \{x \in C : r(x, x_n) = r_C(x_n)\}.$$

En general, por abuso del lenguaje, diremos que  $x$  es un centro asintótico de  $\{x_n\}$  cuando  $x \in A_C(x_n)$ .

Las aplicaciones que manejaremos en esta Memoria serán, en su mayoría, aplicaciones univaluadas  $T: M \rightarrow M$  verificando algún tipo de condición métrica que relaciona la distancia entre dos puntos con la distancia entre las imágenes de dichos puntos. Para poder imponer condiciones métricas similares a las anteriores cuando trabajemos con aplicaciones multivaluadas del tipo  $T: M \rightarrow 2^M$ , necesitamos definir una estructura métrica sobre el conjunto de partes de  $M$ . El concepto que generalmente se utiliza a este respecto dentro de la Teoría Métrica del Punto Fijo es el de métrica de Hausdorff.

**Definición 1.1.4.** *Sea  $(M, d)$  un espacio métrico. Denotamos  $\mathcal{M}$  a la familia de subconjuntos cerrados, acotados y no vacíos de  $M$ .*

- *Dados  $A \in \mathcal{M}$  y  $\varepsilon > 0$ , se define el  $\varepsilon$ -entorno de  $A$  como*

$$N_\varepsilon(A) = \{x \in M : d(x, A) < \varepsilon\}.$$

- *Dados  $A, B \in \mathcal{M}$ , se define la distancia de Hausdorff entre  $A$  y  $B$  como*

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N_\varepsilon(B) \text{ y } B \subseteq N_\varepsilon(A)\}.$$

La siguiente proposición [33, pág. 24 y 39], ampliamente conocida en la literatura, afirma que, efectivamente, la aplicación descrita en la definición anterior es una métrica.

**Proposición 1.1.5.**  *$(\mathcal{M}, H)$  es un espacio métrico. Además, si  $M$  es completo,  $\mathcal{M}$  es completo.*

## 1.2. Espacios métricos geodésicos

Tras el Principio de Contracción de Banach y las generalizaciones que de éste surgieron en torno a los años 20 del siglo XX, las aportaciones a la Teoría Métrica del Punto Fijo en el contexto de los espacios métricos no se generalizaron hasta unos

70 años después aproximadamente. Como ya comentamos en la Introducción de esta Memoria, estas aportaciones surgieron con el objetivo de extender a un contexto métrico el Teorema de Kirk [42] que data de 1965 y que presenta un resultado de punto fijo para aplicaciones no expansivas en espacios de Banach. Este resultado estaba en gran medida basado en propiedades geométricas que poseían algunos subconjuntos de un espacio normado. En 1981, el mismo W. A. Kirk [41], extendiendo estas propiedades a un contexto puramente métrico, fue quien presentó los primeros resultados de punto fijo para aplicaciones no expansivas en espacios métricos. Al empezar a avanzar la teoría en esta línea, se pone de manifiesto lo complicado que resulta encontrar espacios métricos que posean las propiedades geométricas que requieren estos resultados. Una familia interesante de espacios métricos a este respecto, y que será central en el desarrollo de esta Memoria, es la de los espacios métricos geodésicos. Antes de describir formalmente estos espacios, conozcamos algunos conceptos previos. Nuestro primer objetivo será definir qué se entiende por espacio métrico de longitud. Para ello, comenzamos definiendo las nociones de camino y longitud de un camino. Sea  $(M, d)$  un espacio métrico cualquiera.

**Definición 1.2.1.** Sean  $a$  y  $b$  dos números reales tales que  $a \leq b$ . Decimos que  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  es un camino o curva en  $M$  si es una aplicación continua.

Consideremos una partición  $Y$  de  $[a, b]$ , es decir, una colección finita de puntos  $Y = \{y_0, \dots, y_n\}$  tal que  $a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n = b$ .

**Definición 1.2.2.** Sea  $\gamma$  un camino en  $M$ . Llamamos longitud de  $\gamma$ ,  $L(\gamma)$ , al supremo de todas las siguientes sumas

$$\sum(Y) = \sum_{i=1}^n d(\gamma(y_{i-1}), \gamma(y_i)),$$

donde  $Y$  varía en el conjunto de todas las particiones del intervalo  $[a, b]$ . Diremos que el camino  $\gamma$  es rectificable si su longitud es finita.

Con estos elementos ya podemos definir espacio y métrica de longitud.

**Definición 1.2.3.** Se dice que  $M$  es un espacio de longitud si la distancia entre cualesquiera dos puntos del espacio viene dada por el ínfimo de las longitudes de todos los caminos rectificables que los unen, es decir,

$$d(x, y) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ camino rectificable que une } x \text{ e } y\}.$$

Una distancia  $d$  que verifique la última propiedad descrita recibe el nombre de métrica de longitud o métrica intrínseca.

**Observación 1.2.4.** (1) Observando la definición anterior se deduce que, en un espacio de longitud, todo par de puntos en  $M$  está conectado por al menos un camino rectificable.

(2) Otra consecuencia de esta definición es que todo espacio de longitud es un espacio conexo.

El elemento clave de los espacios que vamos a estudiar es el de geodésica o curva de longitud mínima.

**Definición 1.2.5.** Un camino geodésico (también llamado geodésica) entre dos puntos  $x$  e  $y \in M$  es un camino  $c: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $c(0) = x$ ,  $c(l) = y$ , y

$$d(c(t), c(t')) = |t - t'| \quad \text{para todo } t, t' \in [0, l].$$

Es fácil observar que  $c$  es una isometría y que  $d(x, y) = l$ . La imagen  $\alpha$  de  $c$  recibe el nombre de *segmento geodésico* que une  $x$  e  $y$ . Si analizamos la definición de longitud de un camino también se deduce que  $L(c) = l$  si  $c$  es una geodésica. De hecho, se puede probar que, en un espacio de longitud, las geodésicas son caminos cuya longitud coincide con la distancia entre sus extremos  $x$  e  $y$ , y, por ello,

$$L(c') \geq d(x, y) = L(c) = l,$$

cualquiera que sea el camino  $c'$  que una  $x$  e  $y$ . Teniendo en cuenta además que las geodésicas son los únicos caminos que verifican la condición anterior, se obtiene una caracterización de los caminos geodésicos que sólo depende de la longitud de los mismos.

Cuando trabajamos con la anterior definición de geodésica, una incomodidad que solemos encontrar es que el intervalo sobre el que está definida cada geodésica depende de la longitud que en particular posea cada una. En general, y fundamentalmente cuando trabajamos con más de un camino a la vez, es más cómodo que el intervalo en el que están definidos sea el mismo. Por ello introducimos el siguiente concepto.

**Definición 1.2.6.** *Sea  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo. Una aplicación  $c : I \rightarrow M$  se dice que es una geodésica parametrizada proporcionalmente a la longitud de arco si existe una constante  $\lambda$  (velocidad) tal que  $d(c(t), c(t')) = \lambda|t - t'|$  para todo  $t, t' \in I$ .*

El concepto que acabamos de definir es de gran utilidad en muchas demostraciones. Por ello, mostramos a continuación un conocido resultado en la literatura de carácter técnico que permite relacionar este concepto con el de geodésica.

**Proposición 1.2.7.**

- (1) *Sea  $c : [0, l] \rightarrow M$  una geodésica que une dos puntos  $x$  e  $y$ , y sea  $\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, l]$  una función que a cada  $t$  le hace corresponder  $tl$ . Entonces  $c' = c \circ \alpha$  es una geodésica reparametrizada proporcionalmente a la longitud de arco con  $\lambda = l$ .*
- (2) *Sea  $I = [a, b]$  un intervalo acotado y sea  $c : [a, b] \rightarrow M$  una geodésica reparametrizada proporcionalmente a la longitud de arco de velocidad  $\lambda$ . Entonces, si  $\alpha : [0, 1] \rightarrow [a, b]$  es tal que a cada  $t$  le hace corresponder  $(b - a)t + a$ , la aplicación  $\tilde{c} = c \circ \alpha$  es otra geodésica reparametrizada linealmente con velocidad  $(b - a)\lambda$ . Es más, si  $\beta : [0, (b - a)\lambda] \rightarrow [0, 1]$  lleva  $t$  en  $\frac{t}{(b - a)\lambda}$ , entonces  $\bar{c} = \tilde{c} \circ \beta$  es una geodésica.*

El concepto clásico de convexidad de un conjunto al que nos referimos cuando estamos en un contexto lineal carece en general de sentido en un espacio métrico cualquiera. Veamos que la noción de geodésica permite hablar de dicho concepto en un contexto puramente métrico incluso conservando el significado que éste tiene en espacios normados. De entre las distintas definiciones que se conocen en la literatura de convexidad en espacios métricos, consideramos la que describimos a continuación para este trabajo.



**Definición 1.2.8.** *Un subconjunto  $C$  de un espacio métrico  $(M, d)$  se dice convexo si cada par de puntos  $x, y \in C$  está unido al menos por una geodésica y la imagen de cualquier geodésica que une dichos puntos está en  $C$ .*

*Análogamente, decimos que  $C$  es  $D$ -convexo si la condición anterior se tiene para cualesquiera dos puntos  $x, y \in C$  con  $d(x, y) < D$ .*

Procediendo como en el caso lineal se puede definir también en un contexto métrico la envoltura convexa de un conjunto.

**Definición 1.2.9.** *Sea  $A \subseteq M$ . Denotamos  $G_1(A)$  a la unión de todos los segmentos geodésicos en  $M$  cuyos extremos están en  $A$ . Para  $n \geq 2$ , definimos de forma inductiva los conjuntos  $G_n(A)$  como  $G_n(A) = G_1(G_{n-1}(A))$ . Llamamos envoltura convexa de  $A$ , y la denotamos  $\text{conv}(A)$ , a*

$$\text{conv}(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n(A).$$

*Llamaremos envoltura convexa cerrada de  $A$ , y lo denotamos  $\overline{\text{conv}}(A)$ , a la clausura de su envoltura convexa  $\text{conv}(A)$ .*

**Observación 1.2.10.** (1) *Observando las definiciones anteriores se deduce que  $A$  es convexo si y sólo si  $G_1(A) = A$ .*

(2) *En un espacio métrico geodésico arbitrario no está garantizado, en general, que el conjunto  $\overline{\text{conv}}(A)$  sea convexo. En cualquier caso, esto no supondrá un problema para nosotros en esta Memoria ya que, en las situaciones en las que manejemos este tipo de conjuntos, la convexidad de los mismos vendrá garantizada directamente por la rica estructura del espacio ambiente en el que trabajemos.*

En general, hablar de triángulos en un espacio métrico carece de sentido si consideramos la noción clásica de triángulo en un espacio euclídeo. Esto se debe fundamentalmente a que la figura geométrica del triángulo en  $\mathbb{R}^n$  se caracteriza por tener, además de tres vértices (que no son más que tres puntos), tres lados. Utilizando el concepto de geodésica es posible extender la noción de triángulo a los espacios métricos.

**Definición 1.2.11.** *Llamamos triángulo geodésico en un espacio métrico  $M$ , y lo denotamos generalmente  $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ , a una colección de tres puntos de  $M$ , denominados vértices del triángulo, y tres segmentos geodésicos, denominados lados del triángulo  $\Delta$ , de modo que tales segmentos unen esos tres vértices del triángulo dos a dos. Diremos que el triángulo es degenerado si los tres vértices pertenecen a la misma geodésica.*

En la Sección 1.4 veremos que los triángulos geodésicos son la herramienta fundamental para desarrollar la teoría de espacios métricos de curvatura acotada. También será muy utilizada la noción de ángulo entre dos geodésicas que surgen de un mismo punto. Por ello, nuestro objetivo inmediato es definir este concepto. Con este fin, será necesario utilizar otros elementos que sirvan como puente entre la geometría de un espacio métrico arbitrario y la del plano euclídeo, en la que la noción de ángulo es ya ampliamente conocida. Estos elementos puente serán los triángulos y ángulos de comparación en  $\mathbb{E}^2$  (el plano euclídeo). Como veremos, tanto éstos como el resto de elementos de comparación que posteriormente se definen en la Memoria, serán imprescindibles en la última sección de este capítulo. De hecho, será a través de la comparación con espacios de curvatura conocida, tales como el plano euclídeo, o modelos hiperbólicos y elípticos, como se defina aquí la curvatura de un espacio métrico.

**Definición 1.2.12.** *Un triángulo de comparación en  $\mathbb{E}^2$  de una terna de puntos  $(p, q, r)$  de un espacio métrico  $(M, d)$  es un triángulo en  $\mathbb{E}^2$  de vértices  $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$  tales que  $d(p, q) = d(\bar{p}, \bar{q})$ ,  $d(q, r) = d(\bar{q}, \bar{r})$  y  $d(p, r) = d(\bar{p}, \bar{r})$ .*

Tras esta definición, una pregunta muy natural que surge es la de si este triángulo existe siempre o no. Se puede demostrar que la respuesta a esta pregunta es afirmativa. De hecho, utilizando las propiedades geométricas del plano euclídeo se deduce además que dicho triángulo es único salvo isometría y lo denotaremos  $\overline{\Delta}(p, q, r)$  o  $\Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$  (utilizaremos la segunda notación cuando sea necesario especificar los vértices  $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$  del triángulo de comparación).

Consideremos a continuación una terna de puntos  $(p, q, r)$  en un espacio métrico cualquiera  $(M, d)$ .

**Definición 1.2.13.** Se llama ángulo de comparación entre  $q$  y  $r$  en  $p$ , y lo designaremos por  $\bar{\angle}_p(q, r)$ , al ángulo interior de  $\bar{\Delta}(p, q, r) \subseteq \mathbb{E}^2$  en  $\bar{p}$ . (Este ángulo está bien definido siempre que  $q$  y  $r$  sean ambos distintos de  $p$ .)

Utilizando estos nuevos elementos de comparación, se puede definir una noción de ángulo en espacios métricos.

**Definición 1.2.14.** Sea  $(M, d)$  un espacio métrico y sean  $c: [0, a] \rightarrow M$  y  $c': [0, a'] \rightarrow M$  dos caminos geodésicos tales que  $c(0) = c'(0)$ . Dados  $t \in (0, a]$  y  $t' \in (0, a']$ , consideremos el triángulo de comparación  $\bar{\Delta}(c(0), c(t), c'(t'))$ , y el ángulo de comparación  $\bar{\angle}_{c(0)}(c(t), c'(t'))$ . Llamamos ángulo de Alexandrov o ángulo superior entre los caminos geodésicos  $c$  y  $c'$  al número  $\angle(c, c') \in [0, \pi]$  definido por:

$$\angle(c, c') := \limsup_{t, t' \rightarrow 0} \bar{\angle}_{c(0)}(c(t), c'(t')) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{0 < t, t' < \varepsilon} \bar{\angle}_{c(0)}(c(t), c'(t')).$$

Si existe  $\lim_{t, t' \rightarrow 0} \bar{\angle}_{c(0)}(c(t), c'(t'))$ , se dice que el ángulo existe en sentido estricto.

El ángulo entre dos segmentos geodésicos que tienen un punto extremo en común se define como el ángulo entre las únicas geodésicas que parten de ese punto común y cuyas imágenes son los segmentos dados.

**Proposición 1.2.15.** (1) Si  $c: [0, a] \rightarrow M$  y  $c': [0, a'] \rightarrow M$  son dos caminos geodésicos y  $c'': [0, l] \rightarrow M$  es otro camino geodésico para el cual existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $c''|_{[0, \varepsilon]} = c'|_{[0, \varepsilon]}$ , entonces el ángulo que entre  $c$  y  $c''$  es el mismo que entre  $c$  y  $c'$ .

(2) Si  $c: [a, b] \rightarrow M$  es una geodésica en la que  $a < 0 < b$ , y definimos  $c': [0, -a] \rightarrow M$  y  $c'': [0, b] \rightarrow M$  como  $c'(t) = c(-t)$  y  $c''(t) = c(t)$ , entonces  $\angle(c', c'') = \pi$ .

(3) Si  $c, c'$  y  $c''$  son tres geodésicas que parten de un mismo punto de un espacio métrico, entonces

$$\angle(c', c'') \leq \angle(c, c') + \angle(c, c'').$$

El ejemplo que aparece a continuación ilustra el hecho de que el ángulo entre dos geodésicas distintas que surgen del mismo punto puede ser cero aún cuando éstas sean distintas en un entorno de cero.

**Ejemplo 1.2.16.** Consideremos el espacio métrico  $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ , donde

$$d_\infty((x, y), (x', y')) := \max\{|x - x'|, |y - y'|\}.$$

Para todo entero  $n > 1$ , la función  $t \mapsto (t, (t(1-t))^n)$  define un camino geodésico de  $[0, 1/n] \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ . Estas geodésicas parten todas de un mismo punto y son disjuntas dos a dos en un entorno del origen; sin embargo, el ángulo entre cualesquiera dos de ellas es cero.

A lo largo de toda esta Memoria trabajaremos fundamentalmente problemas de punto fijo sobre espacios métricos uniformemente convexos o de curvatura acotada. Por ello, consideramos a continuación las estructuras geométricas sobre espacios métricos que nos permiten más adelante describir estos espacios. En primer lugar definimos qué se entiende por espacio métrico geodésico.

**Definición 1.2.17.** • Decimos que  $(M, d)$  es un espacio geodésico si cualesquiera dos puntos del espacio están conectados por una geodésica. Es más, se dice que  $M$  es único geodésico si existe exactamente una única geodésica que une  $x$  e  $y$ , para cada par  $x, y \in M$ .

- Dado un número real  $D > 0$ , se dice que  $(M, d)$  es  $D$ -geodésico si todo par de puntos  $x, y \in M$  que dista menos de  $D$  se conecta por una geodésica. Se dice que  $M$  es  $D$ -único geodésico si existe un único segmento geodésico uniendo cada par de puntos  $x$  e  $y$  en esas condiciones.

**Observación 1.2.18.** (1) Observando la definición anterior se deduce que todo espacio métrico geodésico es un espacio de longitud.

- (2) Si el segmento geodésico que une dos puntos  $x$  e  $y$  de  $M$  es único, lo denotaremos  $[x, y]$  (también es frecuente usar esta notación cuando estemos hablando de un segmento geodésico concreto).
- (3) En un espacio métrico  $M$  único geodésico, si  $p, x$  e  $y$  son tres puntos del espacio tales que  $p \neq x$  y  $p \neq y$ , el ángulo entre los segmentos geodésicos  $[p, x]$  y  $[p, y]$  se puede designar por  $\angle_p(x, y)$ .

Los puntos medios de los segmentos geodésicos juegan un papel muy relevante en la geometría de los espacios geodésicos con los que vamos a trabajar.

**Definición 1.2.19.** Sean  $x$  e  $y$  dos puntos de  $M$ . Se dice que  $m$  es punto medio de  $x$  e  $y$  si  $d(x, m) = d(y, m) = \frac{1}{2} d(x, y)$ .

La condición métrica que caracteriza a los puntos medios, aunque aparentemente no parezca que proporciona una estructura especial a un espacio, puede conllevar en ocasiones a resultados realmente sorprendentes. La siguiente proposición [56, pág. 70] es una muestra de ello.

**Proposición 1.2.20.** Si  $(M, d)$  es completo y para cada par de puntos de  $M$  existe un punto medio, entonces  $M$  es un espacio geodésico. Si ese punto medio existe para cada par de puntos de  $M$  que dista menos de un número real  $D$ , entonces  $M$  es  $D$ -geodésico.

Una de las propiedades geométricas más relevante de los espacios de Banach para la Teoría Métrica del Punto Fijo es la convexidad uniforme. Las características geométricas que esta propiedad proporciona a estos espacios lineales hacen que sean numerosos los resultados que se conocen en la literatura y dentro de esta teoría para estos espacios. En la actualidad, se conocen también distintas aunque similares nociones de convexidad uniforme en el contexto más general de los espacios métricos geodésicos. Estas nociones tratan de rescatar la geometría que la convexidad uniforme proporciona a los espacios lineales en los espacios métricos. De entre las distintas definiciones que en la literatura podemos encontrar de convexidad uniforme en espacios métricos, consideramos en este trabajo la siguiente.

**Definición 1.2.21.** Un espacio métrico geodésico  $(M, d)$  se dice que es uniformemente convexo si cualesquiera que sean  $r > 0$  y  $\varepsilon \in (0, 2]$  existe  $\delta \in (0, 1]$  tal que para todo  $a, x, y \in M$  con  $d(x, a) \leq r$ ,  $d(y, a) \leq r$  y  $d(x, y) \geq \varepsilon r$  se tiene que

$$d(m, a) \leq (1 - \delta)r,$$

donde  $m$  denota cualquier punto medio entre los puntos  $x$  e  $y$ . Una aplicación  $\delta : (0, \infty) \times (0, 2] \rightarrow (0, 1]$  que proporciona un  $\delta = \delta(r, \varepsilon)$  en las condiciones anteriores para cada  $r > 0$  y  $\varepsilon \in (0, 2]$  fijos se denomina módulo de convexidad de  $M$ .

Un módulo de convexidad muy utilizado en la literatura (fundamentalmente en algunos espacios métricos cuya geometría es conocida), y que denotaremos  $\delta_M(r, \varepsilon)$ , es aquel que se caracteriza por ser el mayor de todos los módulos de convexidad posibles que admite un espacio métrico uniformemente convexo  $M$ . Generalmente, este módulo se describe mediante la siguiente formulación equivalente: si  $M$  es un espacio métrico geodésico,

$$\delta_M(r, \varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{1}{r}(d(a, m))\right\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los puntos  $a, x, y$  y  $m$  un punto medio de entre  $x$  e  $y$  en  $M$  satisfaciendo que  $d(a, x) \leq r$ ,  $d(a, y) \leq r$  y  $d(x, y) \geq r\varepsilon$ , con  $r > 0$  y  $\varepsilon \in (0, 2]$ .

Es fácil observar cómo los espacios geodésicos uniformemente convexos son aquéllos para los cuales  $\delta_M(r, \varepsilon) > 0$  cualesquiera que sean  $r > 0$  y  $\varepsilon \in (0, 2]$ .

En el contexto de los espacios métricos, a diferencia de como ocurre en el caso lineal, no se conocen a priori propiedades útiles de los módulos de convexidad que nos permitan trabajar eficazmente con ellos. En general, para obtener nuestros resultados, tendremos que imponer condiciones adicionales sobre estos módulos. Basándonos en [47, 49], definimos la noción de módulo monótono de convexidad del siguiente modo.

**Definición 1.2.22.** *Si un espacio métrico uniformemente convexo  $M$  admite un módulo de convexidad  $\delta$  que decrece con la variable  $r$  (para cada  $\varepsilon$  fijo), diremos que  $\delta$  es un módulo de convexidad monótono para  $M$ .*

Intercambiando la condición de monotonía del caso anterior por una de continuidad, definimos los módulos de convexidad semicontinuos inferiormente por la derecha. Recordemos previamente que una función  $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es *semicontinua inferiormente* (por la derecha) en  $x_0$  si  $f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$  ( $f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ).

**Definición 1.2.23.** *Si un espacio métrico uniformemente convexo  $M$  admite un módulo de convexidad  $\delta$  que es semicontinuo inferiormente por la derecha con respecto de la variable  $r$  (para cada  $\varepsilon$  fijo), diremos que  $\delta$  es un módulo de convexidad semicontinuo inferiormente por la derecha para  $M$ .*

Si en la definición de convexidad uniforme se suprimen las condiciones de uniformidad, resulta un concepto geométrico similar al de convexidad estricta que se conoce en espacios de Banach. En la literatura, este concepto, también conocido como convexidad estricta en espacios métricos, aparece por primera vez en [1]. Veamos cómo se describe formalmente esta propiedad.

**Definición 1.2.24.** *Un espacio métrico geodésico  $M$  se dice que es estrictamente convexo si para cualesquiera  $r > 0$ ,  $a, x$  e  $y \in M$  con  $d(x, a) \leq r$ ,  $d(y, a) \leq r$  y  $x \neq y$ , se tiene que  $d(a, p) < r$ , donde  $p$  es cualquier punto entre  $x$  e  $y$  tal que  $p \neq x$  y  $p \neq y$ , es decir,  $p$  es cualquier punto del interior de un segmento geodésico que une  $x$  e  $y$ .*

**Observación 1.2.25.** (1) *Cualquier espacio métrico estrictamente convexo es único geodésico.*

(2) *Cualquier espacio métrico uniformemente convexo es estrictamente convexo.*

**Ejemplo 1.2.26.** *Un ejemplo bastante conocido en la literatura de espacio estrictamente convexo son los espacios de curvatura no positiva en el sentido de Busemann [13, 30, 56]. Estos espacios son espacios métricos geodésicos  $M$  cuya distancia es convexa en el sentido de Busemann, es decir, la distancia  $d$  del espacio es tal que, si  $c_1: [0, a_1] \rightarrow M$  y  $c_2: [0, a_2] \rightarrow M$  son dos geodésicas tales que  $c_1(0) = c_2(0)$ , entonces se verifica la desigualdad*

$$d(c_1(ta_1), c_2(ta_2)) \leq td(c_1(a_1), c_2(a_2))$$

para todo  $t \in [0, 1]$ .

Aplicando un simple razonamiento, se observa como en la definición anterior podemos suprimir la condición  $c_1(0) = c_2(0)$ . En ese caso, la condición más general pero equivalente sobre la distancia resulta

$$d(c_1(ta_1), c_2(ta_2)) \leq (1-t)d(c_1(0), c_2(0)) + td(c_1(a_1), c_2(a_2)).$$

Es frecuente en la literatura que, ante esta expresión, se diga que la métrica  $d$  es convexa (el lector interesado puede consultar [56] para conocer más detalles sobre estos espacios). En esta Memoria, para evitar confusiones cuando más adelante hablemos

de convexidad de una métrica, siempre nos referiremos a esta condición con el nombre de convexidad de una métrica en el sentido de Busemann.

Al igual que ocurre con la convexidad uniforme, la reflexividad es una propiedad de los espacios de Banach muy presente en el estudio de problemas de punto fijo. Es bien conocida en la literatura la gran cantidad de cualidades geométricas que poseen los espacios de Banach reflexivos y, en particular, cómo éstas son muy útiles en la resolución de problemas dentro de esta teoría. Con objeto de extender de algún modo el concepto de reflexividad a espacios métricos y así trasladar estas cualidades geométricas a un contexto no lineal, introducimos una nueva propiedad que denominamos propiedad de la intersección no vacía.

**Definición 1.2.27.** *Sea  $M$  un espacio métrico geodésico. Decimos que  $M$  tiene la propiedad de la intersección no vacía si para cualquier sucesión  $\{C_n\}$  de subconjuntos de  $M$  tales que  $C_{n+1} \subseteq C_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  (sucesión decreciente) y verificando que  $C_n$  es cerrado, acotado, convexo y no vacío para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$ .*

**Observación 1.2.28.** (1) *Cualquier espacio métrico completo y uniformemente convexo que admite un módulo de convexidad monótono o semicontinuo inferiormente por la derecha tiene la propiedad de la intersección no vacía (mirar la Proposición 2.2 en [47]).*

(2) *En un contexto lineal, un espacio de Banach  $X$  tiene la propiedad de la intersección no vacía si y sólo si es reflexivo (ver [33, pág. 150]).*

### 1.3. Convergencia “débil” en espacios métricos

A lo largo de la historia, se han definido diferentes nociones de convergencia sobre espacios métricos que resultan más débiles que la que induce la propia topología de la distancia sobre los espacios. Por ejemplo, en 1976, T. C. Lim [52] introdujo un concepto de convergencia sobre espacios métricos al que denominó  $\Delta$ -convergencia. Más recientemente, en 2004, E. N. Sosov [65] definió dos nociones diferentes de convergencia en espacios métricos, la  $\phi$ -convergencia y la  $\varphi$ -convergencia, aunque, esta vez,



bajo la premisa de que el espacio ambiente tenía que ser un espacio métrico geodésico. Estas tres nociones de convergencia, además de ser más débiles que la convergencia usual de la distancia, tienen la peculiaridad de que coinciden con la convergencia débil sobre espacios de Hilbert. Veamos a continuación cómo se definen formalmente algunas de estas convergencias.

La definición de  $\Delta$ -convergencia que aparece en [52] establece que una sucesión acotada  $\{x_n\}$  de un espacio métrico  $M$   $\Delta$ -converge a un punto  $x \in M$  si  $x$  es un centro asintótico de cualquier subsucesión  $\{u_n\}$  de  $\{x_n\}$ . Como en este escrito trabajaremos mayoritariamente sobre espacios métricos en los que los centros asintóticos de las sucesiones acotadas son únicos, la definición de  $\Delta$ -convergencia que manejaremos será la siguiente.

**Definición 1.3.1.** *Decimos que una sucesión acotada  $\{x_n\}$  de un espacio métrico  $M$   $\Delta$ -converge a un punto  $x \in M$  si  $x$  es el único centro asintótico de cualquier subsucesión  $\{u_n\}$  de  $\{x_n\}$ . En este caso se escribe  $\Delta - \lim_n x_n = x$  y decimos que  $x$  es el  $\Delta$ -límite de  $\{x_n\}$ .*

A continuación utilizamos la noción de  $\phi$ -convergencia definida por Sosov para introducir una nueva convergencia que se adecuaba más a nuestros objetivos. A esta convergencia le daremos el nombre de  $\phi_p$ -convergencia. Para definirla, adoptaremos la misma notación que Sosov utiliza en [65]. Sean  $M$  un espacio métrico único geodésico y  $p \in M$  un punto fijo en  $M$ . Supongamos que  $M$  es un espacio métrico en el que la proyección de cualquier punto  $y$  sobre cualquier segmento geodésico  $J$ ,  $P_J(y)$ , es única. Sea  $S$  el conjunto de todos los segmentos geodésicos que contienen al punto  $p$ . Dado  $I \in S$  y  $x \in M$ , se define la función  $\phi_I: M \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\phi_I(x) = d(p, P_I(x))$ . Sea  $\Phi_p(M)$  la familia de todas las  $\phi_I$  con  $I \in S$ . Definimos la  $\phi_p$ -convergencia del siguiente modo.

**Definición 1.3.2.** *Decimos que una sucesión  $\{x_n\} \subseteq M$   $\phi_p$ -converge a un punto  $x \in M$  si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n) = \phi(x)$$

*cualquiera que sea  $\phi \in \Phi_p(M)$ .*

**Observación 1.3.3.** *En el siguiente capítulo (mirar la Proposición 2.3.19), veremos que los dos conceptos de convergencia que acabamos de definir son equivalentes en los espacios  $CAT(0)$ . Los espacios  $CAT(0)$ , que definimos en la siguiente sección, son espacios métricos geodésicos que juegan un papel muy relevante en este trabajo. En concreto, dentro de esta familia de espacios se encuentran por ejemplo los espacios de Hilbert.*

## 1.4. Espacios de curvatura acotada. Espacios $CAT(k)$ .

En esta sección describimos con rigor los espacios métricos de curvatura acotada así como las características geométricas más inmediatas de estos espacios.

En términos generales, los espacios métricos de curvatura acotada son espacios geodésicos que se determinan en base a ciertos aspectos de su geometría. Concretamente, se describen midiendo cómo de “gruesos” o “delgados” son sus triángulos geodésicos. Por ejemplo, si sus triángulos son “más gruesos” que los euclídeos, entonces tendremos un espacio de curvatura positiva y si, por el contrario, son “más delgados”, entonces tendremos un espacio de curvatura negativa. De este modo, “el grosor” que tengan los triángulos de un espacio geodésico será determinante a la hora de establecer su curvatura. Más adelante en esta sección formalizaremos esta idea de grosor que acabamos de mencionar.

El inicio del estudio de estos espacios se remonta a Jaques Hadamard (1865-1963) en su intento de extender el concepto de curvaturas seccionales de superficies riemannianas a espacios métricos. El intento de Hadamard se puede considerar exitoso ya que sentó las bases de lo que hoy se conoce como espacios métricos de curvatura acotada aunque, como suele ocurrir en más de un caso, aún habría que esperar algún tiempo antes de que estos espacios se definieran formalmente y ganasen importancia por sí mismos. Concretamente, esto ocurrió a mediados del siglo XX tras los estudios de Cartan y Topogonov, entre otros, que dejaron el camino abierto para que otros matemáticos se encargaran de iniciar el estudio de las propiedades geométricas de tales espacios. Más adelante veremos que éstas están íntimamente ligadas con las de las

superficies riemannianas de curvatura constante: la esfera elíptica, el plano euclídeo y el plano hiperbólico. La definición formal de los espacios métricos de curvatura acotada es claramente fiel a los objetivos que perseguía Hadamard. Es más, a día de hoy, los espacios métricos de curvatura acotada y, en particular, los espacios  $CAT(k)$  se consideran una generalización de las variedades riemannianas con curvatura seccional acotada. Es bien conocido de hecho que cualquier variedad riemanniana completa, simplemente conexa y con curvatura seccional no positiva es un espacio  $CAT(0)$ .

Si seguimos avanzando en el tiempo, encontramos que realmente no es hasta los años 80 y, concretamente, a partir del trabajo de Misha Gromov sobre grupos de crecimiento polinomial cuando los espacios de curvatura acotada adquieren un elevado protagonismo dentro de distintas áreas de las matemáticas. También entonces, Gromov introduce el término  $CAT(k)$ , cuyas siglas hacen referencia a los matemáticos Cartan, Alexandrov y Topogonov, que denota una familia concreta de espacios métricos dentro de la de los geodésicos con curvatura acotada superiormente por un valor real  $k$ . En la última década, los espacios  $CAT(k)$  han llamado la atención de muchos autores ya que han jugado un papel muy importante en diferentes aspectos de la geometría. Un análisis riguroso sobre estos espacios y el papel que éstos juegan en la geometría puede encontrarse en el libro de M.R. Bridson y A. Haefliger [8] (ver también [12, 25]).

Como antes adelantábamos, para poder establecer si un triángulo geodésico es más o menos grueso, es necesario determinar una manera de medir “el grosor”. El método que principalmente se utiliza para ello es el de comparación. Concretamente, se comparan los triángulos de un espacio geodésico con los de otros espacios de curvatura (de Riemann) conocida. De este modo, según el resultado de esta comparación, habrá ocasiones en las que sea posible establecer que un espacio métrico es de curvatura acotada superiormente por un valor real  $k$ . A continuación, nos centramos en presentar la idea de comparación con la que vamos a trabajar. Para ello, será necesario que previamente conozcamos los espacios métricos con los que vamos a comparar. Los tres espacios que en esencia utilizaremos son los anteriormente citados espacios de curvatura constante: los planos euclídeo, esférico e hiperbólico. Estos espacios se conocen

en este contexto con el nombre de “espacios modelo” ya que es a través de ellos, y en términos de curvatura, como se establecerá una clasificación de los espacios métricos geodésicos. A continuación, realizamos un breve recorrido sobre las principales características geométricas de estos tres espacios. Toda la información que ahora incluimos se encuentra ampliada y detallada en [8].

### El espacio euclídeo

El espacio euclídeo, denotado en esta Memoria por  $\mathbb{E}^n$ , se define como el espacio métrico que se obtiene si dotamos al espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$  del producto escalar euclídeo,  $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ , donde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

Se puede demostrar que este espacio es único geodésico y que sus segmentos geodésicos son los subconjuntos de la forma

$$[x, y] = \{ty + (1-t)x : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Las propiedades geométricas de este espacio son ampliamente conocidas y, de hecho, podemos encontrarlas en cualquier manual básico de análisis matemático o geometría. En este trabajo no presentamos ninguna descripción de las mismas. Tan sólo recordamos la conocida Ley de los Cosenos ya que, al ser ésta una ley que recoge en sí misma toda la geometría euclídea, será una propiedad muy utilizada cuando trabajemos con los espacios métricos de curvatura acotada. Más adelante observaremos que los otros dos espacios modelo también disponen de sus respectivas Leyes de los Cosenos. En estos casos, igualmente, también son leyes que describen completamente la geometría de los espacios.

**Proposición 1.4.1.** *Sea  $\Delta$  un triángulo en  $\mathbb{R}^n$  de vértices  $A, B, C$ . Sea  $d$  la distancia euclídea y sean  $a=d(B,C)$ ,  $b=d(C,A)$  y  $c=d(A,B)$ . Sea  $\gamma$  el ángulo interior en el vértice  $C$ . Entonces*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

**Observación 1.4.2.** *En estos espacios, el ángulo de Alexandrov entre dos segmentos geodésicos que parten de un mismo punto coincide con el ángulo euclídeo.*

### El espacio esférico

El segundo espacio modelo que describimos es el espacio esférico. Para ello, lo primero que haremos será definir la esfera  $n$ -dimensional.

**Definición 1.4.3.** *La esfera  $n$ -dimensional  $\mathbb{S}^n$  es el conjunto de puntos  $\{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x|x) = 1\}$ , donde  $(\cdot|\cdot)$  denota el producto escalar euclídeo.*

Tras definir este conjunto de puntos, consideremos sobre él la siguiente métrica.

**Proposición 1.4.4.** *Sea  $d: \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la función que a cada par de puntos  $A$  y  $B$  de la esfera le hace corresponder el único número real  $d(A, B) \in [0, \pi]$  tal que  $\cos(d(A, B)) = (A|B)$ . Entonces se tiene que  $d$ , también llamada distancia esférica, es una métrica.  $(\mathbb{S}^n, d)$  recibe el nombre de espacio esférico.*

**Observación 1.4.5.** *La desigualdad triangular en la métrica anteriormente definida se deduce de la Proposición 1.2.15, apartado (3), ya que  $d(A, B)$  es realmente el ángulo entre los segmentos  $[0, A]$  y  $[0, B]$  en  $\mathbb{E}^{n+1}$ .*

Los contenidos que presentamos a continuación permiten dotar a  $\mathbb{S}^n$  de estructura de espacio métrico geodésico. En primer lugar, tratamos de acercarnos a la idea de geodésica en este espacio mediante la siguiente definición.

**Definición 1.4.6.** *Llamamos círculo diametral en  $\mathbb{S}^n$  a la intersección de la esfera con un subespacio afín dimensión 2 de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que pasa por el origen.*

Hay una manera natural de parametrizar arcos (partes) de círculos diametrales: dados  $A \in \mathbb{S}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^{n+1}$  unitario con  $(u|A) = 0$  y  $a \in [0, \pi]$ , consideremos el camino  $c: [0, a] \rightarrow \mathbb{S}^n$  dado por

$$c(t) = (\cos t)A + (\sin t)u. \quad (1.4.2)$$

Se puede demostrar que, siendo  $d$  la distancia esférica,  $d(c(t), c(t')) = |t - t'|$  para cualesquiera  $t, t' \in [0, a]$ ; así, este camino es una geodésica. Además, la imagen de  $c$  está contenida en el círculo diametral que se forma al intersecar la esfera con el subespacio afín que pasa por el origen, por  $A$  y contiene a  $u$  como dirección. El vector

$u$  recibe el nombre de vector inicial de la geodésica  $c$ , y cualquier geodésica en la esfera del tipo (1.4.2) se denomina segmento esférico.

Supongamos ahora que  $A$  y  $B$  son dos puntos cualesquiera y distintos de la esfera. Sea  $\overrightarrow{AB}$  el vector de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que va de  $A$  a  $B$ . Consideremos el plano de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que pasa por  $A$ , por el origen y contiene a la dirección  $\overrightarrow{AB}$ . Utilizando conocimientos básicos de geometría euclídea, es fácil demostrar que existe al menos un vector unitario en la dirección de este plano, que llamamos  $u$ , que es ortogonal a  $\overrightarrow{OA}$ , es decir,  $(u|A) = 0$  y que además forma un ángulo con  $\overrightarrow{AB}$  que es menor o igual que  $\pi/2$ . Sea  $a \in [0, \pi]$  el ángulo que forma  $\overrightarrow{OA}$  con  $\overrightarrow{OB}$ , es decir,  $a = d(A, B)$ . Si  $a = \pi$ , se puede comprobar que  $u$  puede ser cualquier vector ortogonal a  $A$ . Si por el contrario  $a = d(A, B) < \pi$ ,  $u$  es concretamente el vector unitario en la dirección de  $B - (A|B)A$ . Consideremos por último el camino geodésico  $c: [0, a] \rightarrow \mathbb{S}^n$  dado por  $c(t) = (\cos t)A + (\sin t)u$ . Un simple cálculo vectorial permite deducir que  $c(0) = A$  y que  $c(a) = B$ . Como consecuencia, se deduce parte de la siguiente proposición.

**Proposición 1.4.7.** *El espacio esférico  $(\mathbb{S}^n, d)$  es un espacio métrico geodésico. Además, si  $A$  y  $B$  son dos puntos de  $(\mathbb{S}^n, d)$  tales que  $d(A, B) < \pi$ , entonces existe un único segmento geodésico  $\overline{AB}$  (que es de la forma (1.4.2)) que une esos puntos. Dicho de otro modo,  $(\mathbb{S}^n, d)$  es un espacio  $\pi$ -único geodésico.*

Antes de enunciar la Ley de los Cosenos que se verifica en este espacio, comentaremos algunas características de los ángulos entre segmentos esféricos. En primer lugar, vamos a definir un nuevo concepto de ángulo en este contexto (recordemos que el ángulo de Alexandrov definido anteriormente también tiene sentido entre segmentos esféricos).

**Definición 1.4.8.** *Sean  $c_1$  y  $c_2$  dos geodésicas dadas por (1.4.2) en  $\mathbb{S}^n$ , de vectores iniciales  $u_1$  y  $u_2$  respectivamente, que surgen del mismo punto de  $\mathbb{S}^n$ . Se llama ángulo esférico entre  $c_1$  y  $c_2$  al único número  $\alpha \in [0, \pi]$  tal que  $\cos(\alpha) = (u_1|u_2)$ .*

De forma análoga se define la noción de ángulo esférico entre dos segmentos esféricos. Basta tener en cuenta que, dado un segmento geodésico, existe una única geodésica de la que es imagen.

Veamos a continuación qué relación existe entre las dos nociones de ángulo que conocemos en este contexto. Los detalles técnicos de la demostración de esta proposición podemos encontrarlos en [8, pág. 22].

**Proposición 1.4.9.** *El ángulo esférico entre dos segmentos esféricos  $\overline{CA}$  y  $\overline{CB}$  en  $\mathbb{S}^n$  coincide con el ángulo de Alexandrov entre ellos.*

En lo sucesivo, utilizaremos frecuentemente el término triángulo esférico para referirnos a los triángulos geodésicos en  $\mathbb{S}^n$ . Tales triángulos suelen visualizarse en la literatura del siguiente modo:

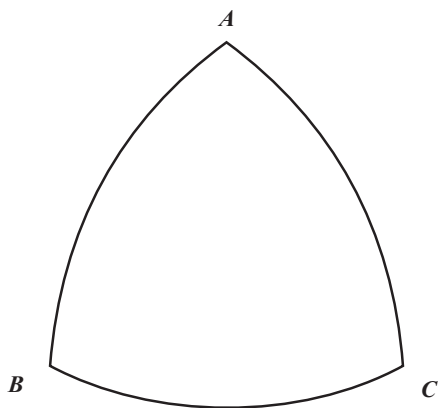


Figura 1.1: Triángulo esférico

A pesar de que la noción de ángulo esférico que hemos definido sólo tiene sentido entre geodésicas, la definición que presentamos a continuación permitirá hablar de ángulo en un vértice  $C$  de un triángulo esférico.

**Definición 1.4.10.** *Se define el ángulo en un vértice  $C$  de un triángulo esférico como el ángulo esférico entre los lados (segmentos esféricos)  $\overline{CA}$  y  $\overline{CB}$  del triángulo.*

A continuación describimos la Ley de los Cosenos en el espacio  $\mathbb{S}^n$ . Al igual que en el caso euclídeo, esta ley supone un resultado fundamental para conocer la geometría

de este espacio. De hecho, muchos de los resultados que ofrecemos en este trabajo dependen directamente de estas leyes trigonométricas.

**Proposición 1.4.11.** *Sea  $\triangle$  un triángulo esférico con vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Sea  $d$  la distancia esférica y sean  $a=d(B,C)$ ,  $b=d(C,A)$  y  $c=d(A,B)$ . Sea  $\gamma$  el ángulo en el vértice  $C$ . Entonces*

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

A continuación presentamos dos características geométricas significativas de este espacio. La primera que consideramos es la desigualdad triangular para la distancia esférica. Aunque esta desigualdad ya se obtiene directamente de la Proposición 1.4.7, la incluimos aquí para indicar en qué casos concretos se da la igualdad.

**Proposición 1.4.12.** (1) *Para todo  $A, B, C \in \mathbb{S}^n$ ,*

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B).$$

*La igualdad se verifica si y sólo si  $C$  pertenece a un segmento esférico que una  $A$  y  $B$ .*

(2) *Cualquier bola abierta (resp. cerrada) de radio  $r \leq \pi/2$  (resp.  $r < \pi/2$ ) en  $(\mathbb{S}^n, d)$  es convexa.*

Una propiedad del espacio esférico que será esencial para el desarrollo de esta Memoria es el hecho de que cualquier subconjunto convexo de este espacio con diámetro menor que  $\pi/2$  es uniformemente convexo. Concretamente, será de gran utilidad para este trabajo la estimación que se conoce [24, pág. 154] del “módulo de convexidad de la esfera”  $\delta_{\mathbb{S}^2}(r, \varepsilon)$ :

$$\delta_{\mathbb{S}^2}(r, \varepsilon) = 1 - \frac{1}{r} \arccos \left( \frac{\cos r}{\cos(\varepsilon r/2)} \right). \quad (1.4.3)$$

Al hablar de módulo de convexidad de la esfera estamos cometiendo un abuso del lenguaje ya que la esfera completa como espacio métrico geodésico no es realmente uniformemente convexa (basta considerar sobre la misma tres puntos que disten  $\pi/2$  dos a dos). Aunque en la literatura sea frecuente hablar de su módulo de convexidad



y encontrarlo definido como acabamos de mostrar, esta definición no se corresponde con la que dimos anteriormente en la Memoria. De hecho, el valor numérico  $\delta_{\mathbb{S}^2}(r, \varepsilon)$  sólo se corresponde con lo que ocurre en realidad sobre la esfera cuando consideramos bolas en la misma cuyo radio sea menor o igual que  $\pi/2$ . Cuando a lo largo de este trabajo utilizamos el concepto de “módulo de convexidad de la esfera” nos estaremos refiriendo al valor numérico  $\delta_{\mathbb{S}^2}(r, \varepsilon)$  para valores de  $r$  menores estrictamente que  $\pi/2$ .

A continuación describimos el espacio hiperbólico siguiendo un esquema similar al utilizado en el caso esférico.

### El espacio hiperbólico

Previo a la descripción de este conjunto, consideremos las dos siguientes definiciones.

**Definición 1.4.13.** Denotemos por  $E^{n,1}$  al espacio vectorial  $\mathbb{R}^{n+1}$  dotado de la forma bilineal simétrica que a cada par de vectores  $u = (u_1, \dots, u_{n+1})$  y  $v = (v_1, \dots, v_{n+1})$  le asigna el número real  $\langle u|v \rangle$  definido como

$$\langle u|v \rangle = -u_{n+1}v_{n+1} + \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

**Definición 1.4.14.** Llamamos complemento ortogonal de un vector  $v \in E^{n,1}$  con respecto a esa forma bilineal  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  al subespacio vectorial de dimensión  $n$  contenido en  $E^{n,1}$ ,  $v^\perp \subseteq E^{n,1}$ , formado por los vectores  $u \in E^{n,1}$  tales que  $\langle u|v \rangle = 0$

Los puntos que conforman el espacio hiperbólico son los puntos del hiperboloide real.

**Definición 1.4.15.** La hoja superior del hiperboloide real, denotada  $\mathbb{H}^n$ , es el conjunto de puntos  $u = (u_1, \dots, u_{n+1}) \in E^{n,1}$  tales que  $\langle u|u \rangle = -1$  y además  $u_{n+1} > 0$ .

Al igual que hicimos con la esfera en el caso anterior, definimos una métrica sobre  $\mathbb{H}^n$ .

**Proposición 1.4.16.** Sea  $d: \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la función que a cada par de puntos  $A, B \in \mathbb{H}^n$  le asigna el único número no negativo  $d(A, B) \geq 0$  tal que

$$\cosh d(A, B) = -\langle A|B \rangle.$$

Entonces  $d$ , llamada distancia hiperbólica, es una métrica. Este nuevo espacio métrico,  $(\mathbb{H}^n, d)$ , recibe el nombre de espacio hiperbólico.

Veamos a continuación algunas nociones geométricas que necesitaremos para describir una geodésica en este nuevo espacio.

**Definición 1.4.17.** Llamamos línea geodésica en  $\mathbb{H}^n$  a la intersección de  $\mathbb{H}^n$  con un subespacio afín de dimensión 2 de  $E^{n,1}$  que pasa por el origen.

Dados  $A \in \mathbb{H}^n$  y un vector unitario  $u \in A^\perp \in E^{n,1}$  (es decir,  $\langle u, u \rangle = 1$  y  $\langle A, u \rangle = 0$ ), consideremos la aplicación continua  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$  definida del siguiente modo:

$$t \mapsto (\cosh t)A + (\sinh t)u.$$

Mediante un simple ejercicio de cálculo, se obtiene que  $d(c(t), c(t')) = |t - t'|$  para todo  $t, t' \in \mathbb{R}$ . De este modo, la restricción de la aplicación  $c$  a cualquier intervalo cerrado de  $\mathbb{R}$  es una geodésica. Cualquier segmento geodésico de este tipo en el espacio hiperbólico suele denominarse segmento hiperbólico.

Sean  $A$  y  $B$  dos puntos cualesquiera y distintos del espacio hiperbólico y sea  $u$  el vector unitario en la dirección  $(B + \langle A|B \rangle A) \in A^\perp$ . Sea  $a = d(A, B)$ . Consideremos el camino geodésico  $c: [0, a] \rightarrow \mathbb{H}^n$  dado por  $c(t) = (\cosh t)A + (\sinh t)u$ . Un simple cálculo vectorial permite deducir que  $c(0) = A$  y que  $c(a) = B$ . Como consecuencia, se deduce parte de la siguiente proposición.

**Proposición 1.4.18.** El espacio hiperbólico  $(\mathbb{H}^n, d)$  es un espacio métrico único geodésico.

Al igual que hicimos en el caso esférico, consideramos un nuevo concepto de ángulo en este contexto basado principalmente en los elementos geométricos que determinan los segmentos hiperbólicos anteriormente descritos.

**Definición 1.4.19.** Llamamos ángulo hiperbólico entre dos segmentos hiperbólicos que surgen del mismo punto, de vectores iniciales  $u$  y  $v$  respectivamente, al único número  $\alpha \in [0, \pi]$  tal que  $\cos \alpha = \langle u, v \rangle$

El siguiente teorema, al igual que el Teorema 1.4.9, establece la relación entre este nuevo ángulo y el ángulo de Alexandrov entre dos segmentos geodésicos del espacio hiperbólico. Los detalles técnicos de la prueba de este resultado también podemos encontrarlos en [8, pág. 22].

**Proposición 1.4.20.** *El ángulo hiperbólico entre dos segmentos hiperbólicos  $\overline{CA}$  y  $\overline{CB}$  en  $\mathbb{H}^n$  coincide con el ángulo de Alexandrov entre ellos.*

De aquí en adelante, utilizaremos frecuentemente el término triángulo hiperbólico para referirnos a los triángulos geodésicos en  $\mathbb{H}^n$ . Tales triángulos suelen visualizarse en la literatura del siguiente modo:

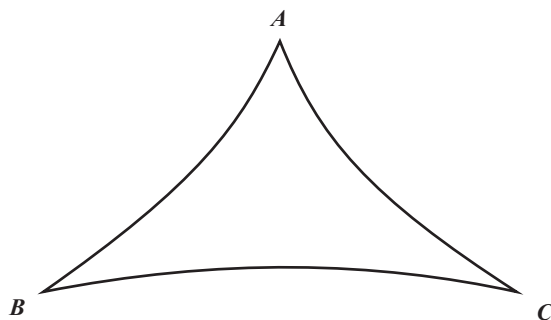


Figura 1.2: Triángulo hiperbólico

También en el caso hiperbólico, se define la noción de ángulo en un vértice de un triángulo hiperbólico.

**Definición 1.4.21.** *Se define el ángulo en un vértice  $C$  de un triángulo hiperbólico como el ángulo hiperbólico entre los segmentos  $\overline{CA}$  y  $\overline{CB}$ .*

A continuación pasamos a mostrar la Ley de los Cosenos para espacios hiperbólicos.

**Proposición 1.4.22.** *Sea  $\triangle$  un triángulo hiperbólico de vértices  $A, B, C$ . Sea  $a=d(B, C)$ ,  $b=d(C, A)$  y  $c=d(A, B)$ . Supongamos que  $\gamma$  denota el ángulo en el vértice  $C$  del triángulo. Entonces*

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \operatorname{senh} a \operatorname{senh} b \cos \gamma.$$

Como conclusión ofrecemos la siguiente proposición que pone de manifiesto algunas de las propiedades fundamentales de este espacio.

**Proposición 1.4.23.** (1) *Para todo  $A, B, C \in \mathbb{H}^n$ ,*

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B).$$

*La igualdad se verifica si y sólo si  $C$  pertenece a un segmento geodésico que una  $A$  y  $B$ .*

(2) *Todas las bolas en  $\mathbb{H}^n$  son convexas.*

#### Los espacios modelo $M_k^n$

Una de las propiedades más interesantes de los tres espacios anteriormente presentados es que son variedades riemannianas de curvatura constante (para más información el lector interesado puede consultar [6]). El plano euclídeo tiene curvatura cero, el espacio esférico 1 y el hiperbólico  $-1$ . Trabajar únicamente con estos tres espacios a la hora de determinar la curvatura de un espacio geodésico cualquiera resulta en principio insuficiente ya que éstos tan sólo servirían como referencia para asignar curvatura cero, uno o menos uno a un espacio. El objeto de este apartado es introducir variantes sobre la métrica de estos espacios que pongan a nuestra disposición nuevos espacios de curvatura (de Riemann) cualquiera  $k$ , ya sea positiva o negativa, con los que poder comparar.

**Definición 1.4.24.** *Sea  $k$  un número real. Denotamos por  $M_k^n$  a los siguientes espacios métricos clásicos:*

- (1) *si  $k = 0$ ,  $M_0^n$  es el espacio euclídeo  $\mathbb{E}^n$ ;*
- (2) *si  $k > 0$ ,  $M_k^n$  se obtiene del espacio esférico  $\mathbb{S}^n$  al multiplicar la distancia esférica por  $1/\sqrt{k}$ ;*

(3) si  $k < 0$ ,  $M_k^n$  se obtiene del espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^n$  al multiplicar la distancia hiperbólica por  $1/\sqrt{-k}$ .

Observando la definición, se deduce que estos nuevos espacios se obtienen directamente a partir de los tres modelos anteriores con sólo introducir una constante homotética sobre la definición de distancia. Este hecho permitirá trasladar muchas propiedades geométricas de unos a otros espacios de un modo casi inmediato. En particular esto es lo que ocurre con las propiedades que a nosotros nos interesan y que presentamos más adelante.

**Observación 1.4.25.** *Se tiene que  $\mathbb{E}^n = M_0^n$ ,  $\mathbb{S}^n = M_1^n$  y  $\mathbb{H}^n = M_{-1}^n$ .*

En lo sucesivo, se llamará *espacios modelo* a los espacios  $M_k^n$ . La siguiente proposición recoge algunas de las propiedades básicas de los espacios  $M_k^n$  como espacios métricos geodésicos. Estas propiedades resultan fundamentales a la hora de trabajar con estos espacios.

**Proposición 1.4.26.**  *$M_k^n$  es un espacio métrico geodésico.*

- (1) Si  $k \leq 0$ , entonces  $M_k^n$  es único geodésico y todas las bolas en  $M_k^n$  son convexas.
- (2) Si  $k > 0$ , entonces existe un único segmento geodésico que une cualesquiera dos puntos  $x$  e  $y$  en  $M_k^n$  si y sólo si  $d(x, y) < \pi/\sqrt{k}$ . Además, si  $k > 0$ , las bolas cerradas en  $M_k^n$  de radio  $r < \pi/(2\sqrt{k})$  son convexas.
- (3) Si  $D_k$  denota el diámetro de  $M_k^n$ , entonces  $D_k := \pi/\sqrt{k}$  si  $k > 0$  y  $D_k := \infty$  si  $k \leq 0$ .

**Observación 1.4.27.** *Es interesante señalar que, tal y como se advierte de la proposición anterior, al trabajar con los espacios  $M_k^n$  frecuentemente se manejará el número  $D_k$ .*

A continuación presentamos la Ley de los Cosenos en los espacios  $M_k^n$ .

**Proposición 1.4.28.** *Dado un triángulo geodésico en  $M_k^n$ , sean  $a, b$  y  $c$  números positivos que denotan la longitud de los lados del triángulo, y sea  $\gamma$  el ángulo en el vértice opuesto al lado de longitud  $c$ . Se tiene que,*

$$(1) \quad \text{si } k = 0, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma);$$

(2)

$$\text{si } k < 0, \quad \cosh(\sqrt{-k}c) = \cosh(\sqrt{-k}a) \cosh(\sqrt{-k}b) - \\ - \sinh(\sqrt{-k}a) \sinh(\sqrt{-k}b) \cos(\gamma);$$

(3)

$$\text{y si } k > 0, \quad \cos(\sqrt{k}c) = \cos(\sqrt{k}a) \cos(\sqrt{k}b) + \\ + \sin(\sqrt{k}a) \sin(\sqrt{k}b) \cos(\gamma).$$

**Observación 1.4.29.** Si fijamos  $a$ ,  $b$  y  $k$  en la proposición anterior, se observa que  $c$  es una función estrictamente creciente en función de  $\gamma$  que varía entre  $(b - a)$  y  $(a + b)$  cuando  $\gamma$  lo hace entre  $0$  y  $\pi$ .

Si revisamos la Sección 1.2, y en particular las Definiciones 1.2.12 y 1.2.13, encontramos algunos conceptos que permiten relacionar un espacio métrico cualquiera con el plano euclídeo mediante técnicas de comparación. El objetivo que perseguimos a continuación es comparar los espacios métricos geodésicos no sólo con el espacio  $\mathbb{E}^2$ , sino también con los espacios modelo  $M_k^2$  cuando  $k \neq 0$ . Una vez establecida dicha comparación, se definirá el ángulo de Alexandrov, hasta ahora sólo definido por comparación directa con el plano euclídeo, a través de los espacios  $M_k^2$ .

El siguiente lema nos permite hablar de triángulos de comparación en cualquier espacio  $M_k^2$ .

**Lema 1.4.30.** Sea  $k$  un número real, y sean  $p, q, r$  tres puntos en un espacio métrico  $M$ ; si  $k > 0$ , supongamos que  $d(p, q) + d(q, r) + d(r, p) < 2D_k$ . Entonces existen puntos  $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r} \in M_k^2$  tales que  $d(p, q) = d(\bar{p}, \bar{q})$ ,  $d(q, r) = d(\bar{q}, \bar{r})$  y  $d(r, p) = d(\bar{r}, \bar{p})$ .

El triángulo  $\Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) \subseteq M_k^2$  de vértices  $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$  recibe el nombre de triángulo de comparación de la terna  $(p, q, r)$ , y se demuestra que es único salvo isometría en  $M_k^2$ . Si  $\Delta \subseteq M$  es un triángulo geodésico con vértices  $p, q, r$ , entonces  $\Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$  recibe también el nombre de triángulo de comparación del triángulo  $\Delta$ .

**Observación 1.4.31.** Como ya se comentó para el caso euclídeo en la Sección 1.2, el triángulo de comparación  $\Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$  se denotará también  $\overline{\Delta}(p, q, r)$ .

**Definición 1.4.32.** Sea  $\Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) \subseteq M_k^2$  un triángulo de comparación de  $\Delta(p, q, r) \subseteq M$ . Se dice que  $\bar{x} \in [\bar{q}, \bar{r}]$  es un punto de comparación de  $x \in [q, r]$  si  $d(q, x) = d(\bar{q}, \bar{x})$ . Del mismo modo se definen los puntos de comparación en  $[\bar{p}, \bar{q}]$  y  $[\bar{p}, \bar{r}]$ .

La definición de ángulo de Alexandrov (Definición 1.2.14) entre dos caminos geodésicos de un espacio métrico se realizó utilizando métodos de comparación con el plano euclídeo  $\mathbb{E}^2$ . Sin embargo, también es posible obtenerlo comparando con cualquier  $M_k^2$ . Esto es una consecuencia inmediata de las Proposiciones 1.4.9 y 1.4.20, en las que se establece que los ángulos esféricos e hiperbólicos entre geodésicas coinciden con el ángulo de Alexandrov entre tales geodésicas. Para poder describir este hecho adecuadamente, necesitamos el concepto de ángulo de  $k$ -comparación.

**Definición 1.4.33.** Sea  $k$  un número real. Sean  $p, q, r \in M$  tres puntos distintos de un espacio métrico verificando  $d(p, q) + d(q, r) + d(r, p) < 2D_k$ . El ángulo de  $k$ -comparación entre  $q$  y  $r$  en  $p$ , denotado  $\angle_p^{(k)}(q, r)$ , es el ángulo de Alexandrov en  $\bar{p}$  en un triángulo de comparación  $\Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) \subseteq M_k^2$  de  $p, q$  y  $r$ . (En particular,  $\angle_p^{(0)}(q, r) = \overline{\angle}_p(q, r)$ .)

La siguiente proposición [8, pág. 184] establece que, para encontrar el ángulo de Alexandrov entre dos caminos geodésicos de un espacio métrico  $M$ , no es necesario comparar con  $\mathbb{E}^2$ .

**Proposición 1.4.34.** Sean  $k \in \mathbb{R}$  y  $M$  un espacio métrico. El ángulo Alexandrov entre dos caminos geodésicos  $c: [0, a] \rightarrow M$  y  $c': [0, a'] \rightarrow M$  que surgen de un mismo punto verifica:

$$\angle(c, c') = (\text{ángulo de Alexandrov}) = \limsup_{t, t' \rightarrow 0} \angle_{c(0)}^{(k)}(c(t), c'(t')).$$

**Observación 1.4.35.** El límite anterior está bien definido ya que se considera que  $t$  y  $t'$  son variables que tienden a cero. Notemos que, si  $t$  y  $t'$  son suficientemente pequeños, existe el triángulo de comparación  $\overline{\Delta}(c(0), c(t), c'(t')) \subseteq M_k^2$  y por tanto tiene sentido hablar del ángulo de  $k$ -comparación entre  $c(t)$  y  $c'(t')$  en  $c(0)$ .

Llegados a este punto y utilizando los métodos de comparación que ya conocemos, definimos los espacios  $CAT(k)$ . En primer lugar consideramos el axioma de comparación o desigualdad  $CAT(k)$ , que es la condición principal a través de la cual se definen estos espacios.

**Definición 1.4.36.** Sea  $(M, d)$  un espacio métrico y sea  $k$  un número real. Sea  $\Delta$  un triángulo geodésico en  $M$  cuyo perímetro sea menor que  $2D_k$ . Sea  $\bar{\Delta} \subseteq M_k^2$  un triángulo de comparación de  $\Delta$ . Entonces se dice que  $\Delta$  verifica la desigualdad  $CAT(k)$  si dados cualesquiera  $x, y \in \Delta$  y sus puntos de comparación  $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\Delta}$  se tiene que

$$d(x, y) \leq d(\bar{x}, \bar{y}).$$

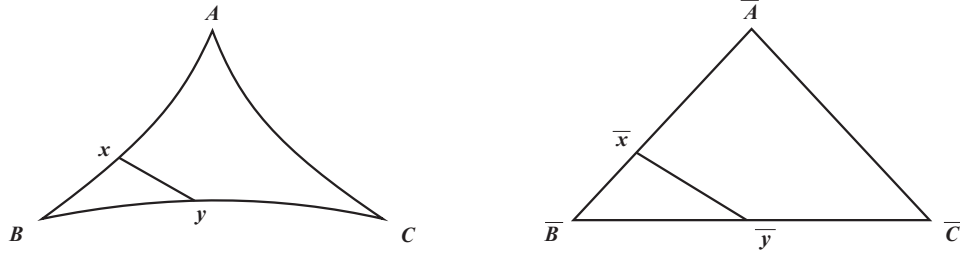


Figura 1.3: Desigualdad  $CAT(k)$

Veamos cuándo se dice que un espacio métrico es un espacio  $CAT(k)$ .

**Definición 1.4.37.** Sea  $(M, d)$  un espacio métrico.

- Se dice que  $M$  es un espacio  $CAT(k)$  para  $k \leq 0$  si  $M$  es un espacio geodésico cuyos triángulos geodésicos satisfacen todos la desigualdad  $CAT(k)$ .
- Se dice que  $M$  es un espacio  $CAT(k)$  para  $k > 0$  si  $M$  es  $D_k$ -geodésico y todos los triángulos geodésicos de  $M$  de perímetro menor que  $2D_k$  satisfacen la desigualdad  $CAT(k)$ .
- Finalmente, se dice que  $M$  es un espacio  $CAT(k)$  (o, sencillamente, que  $M$  es  $CAT(k)$ ) si satisface la correspondiente condición anterior para ese valor de  $k$ .



**Observación 1.4.38.** *Se deduce directamente de esta definición que, si  $M$  es un espacio  $CAT(k)$ , entonces es un espacio  $CAT(k')$  para todo  $k' \geq k$ .*

Los espacios de Hadamard y los  $\mathbb{R}$ -tree son quizás los espacios  $CAT(k)$  más estudiados hasta el momento en la literatura. Aunque realmente existen diferentes causas que hacen que esto sea así, la más significativa es que son espacios  $CAT(0)$ . Los espacios  $CAT(0)$  son, a consecuencia de su definición, aquellos espacios  $CAT(k)$  cuyas propiedades geométricas son más similares a las del espacio euclídeo. Es por ello que hoy en día podemos encontrar muchos resultados clásicos dentro del análisis o la geometría reformulados de forma prácticamente análoga para esta familia de espacios métricos. Algunos de estos resultados son recordados más adelante en esta Memoria. Entre ellos, destacamos el hecho de que los espacios  $CAT(0)$  son uniformemente convexos como espacios métricos geodésicos y admiten un módulo de convexidad monótono, el módulo de convexidad euclídeo (mirar la Sección 2.1 para más detalles). Veamos cómo se definen formalmente los espacios de Hadamard y los  $\mathbb{R}$ -tree.

**Definición 1.4.39.** *Se dice que un espacio métrico  $(M, d)$  es un espacio de Hadamard si, además de ser un  $CAT(0)$ , es completo.*

**Observación 1.4.40.** (1) *Los espacios  $CAT(k)$  no tienen por qué ser completos en general.*

(2) *Cualquier espacio  $CAT(0)$  es un espacio de curvatura no positiva en el sentido de Busemann [8, pág. 176].*

(3) *Cualquier espacio de Hadamard tiene la propiedad de la intersección no vacía. Esto se deduce de la Observación 1.2.28 ya que, como acabamos de comentar, los espacios  $CAT(0)$  son uniformemente convexos y admiten un módulo de convexidad monótono. El hecho de que los espacios de Hadamard verifiquen esta propiedad de la intersección no es más que otro ejemplo de la estrecha relación que existe entre la geometría de un espacio  $CAT(0)$  y la del espacio euclídeo. Recordemos que la propiedad de la intersección no vacía (mirar la Definición 1.2.27) en un espacio de Banach caracteriza a los espacios reflexivos.*

Una consecuencia de la Observación 1.4.38 es que cualquier resultado que sea cierto para espacios  $CAT(0)$  es automáticamente válido también para espacios  $CAT(k)$  con  $k < 0$ . La importancia de introducir esta consecuencia en la Memoria radica en que la mayoría de los resultados que se conocen en la literatura en el contexto de los espacios  $CAT(k)$  están formulados únicamente para espacios  $CAT(0)$ . En el capítulo siguiente veremos cómo muchos de los resultados que se conocen para espacios de Hadamard pueden extenderse, bajo ciertas condiciones sobre el diámetro de los espacios, al contexto más general de los espacios  $CAT(1)$ .

A continuación, definimos qué se entiende por  $\mathbb{R}$ -tree. Es de interés cómo las propiedades geométricas que caracterizan a este tipo de espacio hacen que éstos sean de gran utilidad dentro de la teoría de grafos.

**Definición 1.4.41.** *Un  $\mathbb{R}$ -tree es un espacio métrico  $T$  que verifica:*

- (1) *existe un único segmento geodésico (denotado por  $[x, y]$ ) que une cada par de puntos  $x, y \in T$ ;*
- (2) *si  $[x, y] \cap [x, z] = x$ , entonces  $[y, x] \cup [x, z] = [y, z]$ .*

**Observación 1.4.42.** *Se puede comprobar que  $M$  es un  $\mathbb{R}$ -tree si y sólo si  $M$  es un  $CAT(k)$  para todo  $k$ .*

En líneas generales, los espacios métricos de curvatura acotada superiormente no son más que una generalización local del concepto de espacio  $CAT(k)$ . La definición que presentamos a continuación fue introducida por Alexandrov en [2]. Su importancia se debe fundamentalmente a que proporciona una buena noción de “cota superior” de la curvatura en un espacio métrico cualquiera. Como comentamos en la Introducción de esta Memoria, la noción de curvatura que se introduce a continuación sobre espacios métricos geodésicos dota al espacio, vía el axioma de comparación (Definición 1.4.36), de una geometría similar a la que poseen las variedades riemannianas con curvatura seccional constante.

**Definición 1.4.43.** *Sea  $(M, d)$  un espacio métrico.*

- Se dice que  $M$  tiene curvatura menor o igual que  $k$  (o que  $M$  es de curvatura acotada superiormente por  $k$ ) si es un espacio  $CAT(k)$  localmente, es decir, si para todo  $x \in M$  existe  $r_x$  positivo tal que la bola  $B(x, r_x)$  dotada con la métrica inducida es un espacio  $CAT(k)$ .

Si  $M$  es un espacio de curvatura menor o igual que cero, se dice también que  $M$  es un espacio de curvatura no positiva.

- Se dice que  $M$  es un espacio de curvatura acotada superiormente si todo punto  $x \in M$  posee un entorno que, dotado de la métrica inducida, tiene curvatura menor o igual que  $k$  para algún  $k$  que depende de  $x$ .

Como ya comentamos en la Introducción, el concepto de curvatura acotada superiormente por un valor real  $k$  que acabamos de definir extiende el concepto de curvatura seccional en variedades riemannianas a espacios métricos geodésicos. Concretamente, los Teoremas de comparación clásicos de geometría diferencial muestran que si una variedad riemanniana es suficientemente suave (por ejemplo si es  $C^3$ ) entonces tendrá curvatura menor o igual que  $k$  en el sentido que acabamos de definir si y sólo si todas sus curvaturas seccionales son menores o iguales que  $k$  (ver el Apéndice que aparece en [8, pág. 169-174]).

Son muchas las propiedades geométricas que los espacios  $CAT(k)$  heredan de los espacios métricos modelos que, por comparación, los definen. A continuación, ofrecemos algunas de las más inmediatas y relevantes.

**Proposición 1.4.44.** *Sea  $M$  un espacio  $CAT(k)$ . Se tienen las siguientes propiedades:*

- (1) *existe un único segmento geodésico que une cada par de puntos  $x, y \in M$  (siempre que  $d(x, y) < D_k$  si  $k > 0$ ). Además, este segmento geodésico varía de forma continua con sus extremos,*
- (2) *las bolas en  $M$  de radio  $r < D_k/2$  son convexas.*

La desigualdad  $CAT(k)$  puede ser reformulada de un gran número de formas diferentes, todas debidas a Alexandrov [8, pág. 161]. Aquí presentamos cuatro de ellas. Cuando trabajemos con estos espacios, usaremos indistintamente la Definición

1.4.37 o cualquiera de las siguientes reformulaciones, dependiendo de la situación en la que nos encontremos.

**Proposición 1.4.45.** *Sea  $k \in \mathbb{R}$ . Sea  $M$  un espacio métrico que además es  $D_k$ -geodésico. Las siguientes condiciones son equivalentes (cuando  $k > 0$  asumimos que el perímetro de cada triángulo geodésico considerado es menor que  $2D_k$ ):*

- (1)  $M$  es un espacio  $CAT(k)$ .
- (2) *dados un triángulo geodésico  $\triangle(p, q, r)$  en  $M$  y un punto  $x \in [p, q]$ , el punto de comparación  $\bar{x} \in [\bar{q}, \bar{r}] \subseteq \bar{\triangle}(p, q, r) \subseteq M_k^2$  verifica la siguiente desigualdad:*

$$d(p, x) \leq d(\bar{p}, \bar{x}).$$

- (3) *dados un triángulo geodésico  $\triangle(p, q, r)$  en  $M$  y un par de puntos  $x \in [p, q], y \in [p, r]$  con  $x \neq p$  e  $y \neq q$ , los ángulos en los vértices correspondientes a  $p$  en los triángulos de comparación  $\bar{\triangle}(p, q, r) \subseteq M_k^2$  y  $\bar{\triangle}(p, x, y) \subseteq M_k^2$  satisfacen:*

$$\angle_p^{(k)}(x, y) \leq \angle_p^{(k)}(q, r).$$

- (4) *el ángulo de Alexandrov (Definición 1.2.14) entre los lados (segmentos) de cualquier triángulo geodésico en  $M$  con vértices distintos no es mayor que el ángulo entre los lados correspondientes de sus triángulos de comparación en  $M_k^2$ .*

- (5) *dado un triángulo geodésico  $\triangle(p, q, r)$  en  $M$  con  $p \neq q$  y  $p \neq r$ , si  $\gamma$  denota el ángulo de Alexandrov entre  $[p, q]$  y  $[p, r]$  en  $p$  y si  $\triangle(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) \subseteq M_k^2$  es un triángulo geodésico tal que  $d(\bar{p}, \bar{q}) = d(p, q), d(\bar{p}, \bar{r}) = d(p, r)$  y donde  $\angle_{\bar{p}}(\bar{q}, \bar{r}) = \gamma$ , entonces  $d(q, r) \geq d(\bar{q}, \bar{r})$ .*

**Observación 1.4.46.** (1) *La condición (5) de la proposición anterior puede ser reformulada más analíticamente mediante la Ley de los Cosenos. En el caso  $k = 0$ , si denotamos  $a = d(p, q), b = d(p, r), c = d(q, r)$  y  $\gamma$  el ángulo de Alexandrov en  $p$  entre  $[p, q]$  y  $[p, r]$ , entonces la condición requerida sería:*

$$c^2 \geq a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

(2) El apartado (2) del teorema anterior es equivalente a la siguiente formulación: para todo triángulo geodésico  $\Delta(p, q, r)$  en  $M$  (de perímetro menor que  $2D_k$  si  $k > 0$ ), si  $m \in [q, r]$  es el punto medio de segmento y su punto de comparación es  $\bar{m} \in [\bar{q}, \bar{r}] \subseteq \bar{\Delta}(p, q, r) \subseteq M_k^2$ , se verifica que:

$$d(p, m) \leq d(\bar{p}, \bar{m}).$$

La siguiente proposición ofrece otra reformulación de la desigualdad  $\text{CAT}(k)$  para el caso  $k = 0$ . Esta reformulación es comúnmente conocida como la desigualdad CN (curvatura negativa) de Brunat-Tits para espacios  $\text{CAT}(0)$ . Esta desigualdad tiene un gran impacto sobre la geometría de los espacios  $\text{CAT}(0)$  y reemplaza a la Identidad del Paralelogramo en espacios euclídeos. Es por ello que aparece muy frecuentemente en las pruebas de resultados en las que la geometría de los espacios de Hadamard juega un papel relevante.

**Proposición 1.4.47.** *Sea  $(M, d)$  un espacio métrico geodésico. Entonces  $M$  es un espacio  $\text{CAT}(0)$  si y sólo si para todo  $p, q, r \in M$  y todo  $m \in M$  tales que  $d(q, m) = d(r, m) = d(q, r)/2$  se tiene que*

$$d(m, p)^2 \leq \frac{1}{2}d(p, r)^2 + \frac{1}{2}d(p, q)^2 - \frac{1}{4}d(q, r)^2. \quad (1.4.4)$$

**Observación 1.4.48.** *Es fácil comprobar, mediante un simple cálculo con el producto escalar, que la desigualdad (1.4.4) es exactamente una igualdad en  $\mathbb{E}^2$ . Concretamente, es la Identidad del Paralelogramo.*



## Capítulo 2

# Propiedades Geométricas de los Espacios $\text{CAT}(k)$

En el presente capítulo vamos a estudiar en detalle algunas propiedades geométricas de los espacios  $\text{CAT}(k)$ . Para ordenar la presentación de dichas propiedades según su naturaleza, hemos dividido el capítulo en cuatro secciones.

En la primera sección se analizan las características de la convexidad uniforme y la proyección métrica en los espacios  $\text{CAT}(1)$ .

La segunda sección comienza con un breve estudio de las propiedades de los centros asintóticos en los espacios  $\text{CAT}(1)$ . Seguidamente, se definen dos propiedades muy relevantes para la Teoría Métrica del Punto Fijo: la propiedad Kadec-Klee y la propiedad (P) de Lim y Xu, que serán estudiadas en el contexto de los espacios  $\text{CAT}(1)$ .

Las propiedades geométricas que se prueban para espacios  $\text{CAT}(1)$  en estas dos primeras secciones pueden extenderse fácilmente a cualquier espacio  $\text{CAT}(k)$  con  $k > 0$ . Esto se debe a que los espacios modelo  $M_k^2$  para  $k > 0$  que determinan estos espacios  $\text{CAT}(k)$  se definen a partir del plano hiperbólico, cambiando únicamente la distancia hiperbólica entre dos puntos por una cantidad proporcional. Por otro lado, resulta muy interesante el siguiente hecho: las pruebas que ya se conocen de estas

mismas propiedades en el contexto más concreto de los espacios CAT(0) utilizan como herramienta principal la desigualdad CN de Brunat-Tits (mirar la Proposición 1.4.47), propiedad que caracteriza a los espacios CAT(0) y que, en general, no verifican los espacios CAT(1). Para presentar ahora resultados similares en los espacios CAT(1) será necesario utilizar métodos diferentes en las pruebas.

En la tercera sección estudiamos dos propiedades geométricas sobre los espacios CAT(0). Una de ellas, llamada  $(Q_4)$ , fue introducida y estudiada recientemente en [44], mientras que la segunda propiedad, que llamaremos  $(N)$ , será introducida por primera vez en este trabajo. En esta sección estudiamos las relaciones entre ambas y ofrecemos algunas mejoras de resultados obtenidos en [44].

Por último, en la cuarta sección, se calcula la característica Lifšic de los espacios modelo  $M_k^2$  y con ello se ofrece una estimación de esta misma característica en los espacios CAT( $k$ ), respondiendo afirmativamente a la conjetura realizada por S. Dhompongsa, W. A. Kirk y B. Sims en [17].

El estudio de la mayoría de las propiedades con las que trabajamos en este capítulo viene motivado por la fuerte influencia que éstas tienen dentro de la Teoría Métrica del Punto Fijo. Estas características geométricas han sido ya estudiadas en los espacios de Hilbert, los espacios de Banach e incluso en los espacios CAT(0). De hecho, son muy conocidos algunos resultados de punto fijo que se obtienen en estos espacios a consecuencia de estas propiedades. Al extender ahora el estudio de estas propiedades al contexto de los espacios CAT(1), demostraremos en el siguiente capítulo resultados de punto fijo similares a los estudiados en espacios CAT(0), pero ahora sobre estos espacios y, por consiguiente, en cualquier espacio CAT( $k$ ).

## 2.1. Convexidad uniforme y proyección métrica en espacios CAT(1)

En esta sección analizamos primero el carácter uniformemente convexo de los espacios CAT(1) y posteriormente utilizamos esta característica geométrica para establecer conclusiones y propiedades de la proyección métrica en estos espacios.



La convexidad uniforme en los espacios  $\text{CAT}(k)$  se deduce directamente por comparación con los espacios modelo  $M_k^2$ . Así fue como W. A. Kirk [34] probó que los espacios  $\text{CAT}(k)$  son, en cierto modo, uniformemente convexos y que los espacios  $\text{CAT}(0)$  tienen el módulo de convexidad euclídeo. En concreto, probó que, si  $p, q$  y  $r$  son tres puntos de un espacio  $\text{CAT}(0)$  tales que  $d(p, q) \leq R, d(p, r) \leq R$  y  $d(q, r) \geq r$ , se tiene que

$$d(p, m) \leq \left(1 - \delta\left(\frac{r}{R}\right)\right)R,$$

donde  $m$  es el punto medio de  $[q, r]$  y  $\delta(\varepsilon) := 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$ . Esta desigualdad pone de manifiesto que  $\delta = \delta_{\mathbb{R}^2}$ , el módulo de convexidad usual euclídeo, es un módulo de convexidad para cualquier espacio  $\text{CAT}(0)$ . Es conveniente observar en este punto que este módulo es independiente del radio.

Procediendo de forma análoga, se puede demostrar la proposición que establece la convexidad uniforme de los espacios  $\text{CAT}(1)$ . Observemos cómo para ello se ha de imponer una cota superior sobre el diámetro del espacio.

**Proposición 2.1.1.** *Sea  $M$  un espacio  $\text{CAT}(1)$  completo. Si  $\text{diam}(M) < \pi/2$ , entonces  $M$  es uniformemente convexo, el módulo de convexidad de la esfera,  $\delta_{\mathbb{S}^2}(r, \varepsilon)$ , es un módulo de convexidad de  $M$  y, por tanto, se verifica que*

$$\delta_M(r, \varepsilon) \geq \delta_{\mathbb{S}^2}(r, \varepsilon).$$

**Demostración.** Este resultado se obtiene directamente utilizando la desigualdad  $\text{CAT}(k)$  sobre triángulos de comparación y la convexidad uniforme del espacio esférico.  $\square$

El ejemplo que ofrecemos a continuación pone de manifiesto que el resultado anterior es óptimo. Este hecho motiva que a lo largo de la Memoria asumamos en muchos casos la condición  $\text{diam}(M) < \pi/2$  de forma natural cuando trabajemos con los espacios  $\text{CAT}(1)$ .

**Ejemplo 2.1.2.** *Sean  $(\mathbb{S}^2, d)$  el espacio esférico y  $e_i \in \mathbb{S}^2$ , con  $i = 1, 2, 3$ , cada uno de los elementos de la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $K$  la envoltura convexa cerrada sobre la esfera de  $\{e_i : i = 1, 2, 3\}$ , que coincide con el octante positivo de la esfera. Entonces*

tenemos que el espacio  $(K, d)$  es un espacio  $CAT(1)$  y que  $\text{diam}(K) = \pi/2$ , pero  $K$  no es uniformemente convexo ya que  $d(e_1, e_i) = \pi/2$  para  $i = 2, 3$  y  $d(e_1, m) = \pi/2$ , donde  $m$  denota el punto medio del segmento geodésico  $[e_2, e_3]$ .

Siendo más débil que la convexidad uniforme, la estructura normal es otra propiedad geométrica muy significativa y presente dentro de la Teoría Métrica del Punto Fijo (ejemplo de ello es el Teorema de Kirk en espacios de Banach [42]). A continuación describimos brevemente en qué consiste esta propiedad.

Un subconjunto  $A$  de un espacio métrico  $M$  se dice que es admisible si su envoltura por bolas (mirar la Sección 1.1) coincide con  $A$ , es decir, si  $\text{cov}(A) = A$ . Llamamos *coeficiente de estructura normal* de  $M$  al número

$$\tilde{N}(M) = \sup \left\{ \frac{r_A(A)}{\text{diam}(A)} \right\}$$

donde el supremo se toma sobre todos los subconjuntos admisibles  $A$  de  $M$  con diámetro mayor que cero.

En los casos en los que el cociente  $\frac{r_A(A)}{\text{diam}(A)}$  es estrictamente menor que 1 cualquiera que sea el conjunto admisible  $A$  con diámetro mayor que cero, se dice que  $M$  tiene *estructura normal* (en el sentido de Brodskii y Milman [33, pág. 102]). Si además  $\tilde{N}(M) \leq c$  para alguna constante  $c < 1$ , se dice que  $M$  tiene *estructura normal uniforme*.

A partir de la convexidad uniforme de los espacios  $CAT(1)$  se deduce, al igual que en los espacios de Banach [33, pág. 202], la estructura normal uniforme de estos espacios bajo la condición de que el diámetro sea menor que  $\pi/2$ . Más adelante, en el Apéndice 3.3, debilitaremos esta condición sobre el diámetro del espacio, no para la estructura normal uniforme, sino para un concepto análogo a éste denominado estructura  $\wedge$ -normal. Observaremos también cómo ambos conceptos juegan el mismo papel dentro de la Teoría Métrica del Punto Fijo.

El siguiente teorema, probado por U. Lang y V. Schroeder en [48], establece una relación entre el diámetro y el radio de un subconjunto no vacío de un espacio  $CAT(1)$  con radio menor que  $\pi/2$ .

**Teorema 2.1.3.** *Sea  $M$  un espacio CAT(1) completo y  $S$  un subconjunto no vacío de  $M$ . Si  $r(S) < \pi/2$ , entonces  $C(S)$  está formado por único punto y  $\text{diam}(S) \geq \Psi(r(S)) > r(S)$ , donde*

$$\Psi(r) = 2\arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\text{sen } r\right).$$

**Observación 2.1.4.** *Como en general  $r_S(S) \geq r_M(S)(= r(S))$ , este teorema no nos permite establecer ninguna conclusión acerca de la estructura normal de un espacio CAT(1) con diámetro mayor o igual que  $\pi/2$ .*

El ejemplo que presentamos a continuación, además de mostrar que el teorema anterior es óptimo, nos asegura que existen espacios CAT(1) con diámetro igual a  $\pi/2$  que no poseen estructura normal.

**Ejemplo 2.1.5.** *Consideremos la esfera unidad  $S_{\ell_2}$  del espacio de Hilbert  $\ell_2$  dotada con la métrica intrínseca  $d_L$ . Este espacio es un espacio CAT(1). Consideremos ahora los elementos de la base canónica  $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$  de  $\ell_2$ . Sea  $K = \{x = \{x_n\} \in S_{\ell_2} : x_n \geq 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$ , es decir,  $K$  es la envoltura convexa cerrada de  $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$  en  $(S_{\ell_2}, d_L)$ .*

*Como la distancia intrínseca entre dos puntos  $x$  e  $y$  en  $S_{\ell_2}$  coincide con el número real  $d(x, y) \in [0, \pi]$  tal que  $(x|y)_{\ell_2} = \cos d(x, y)$ , el diámetro de  $K$  se puede estimar de la siguiente manera:*

$$\text{diam}(K) = \sup_{i,j} d(e_i, e_j) = \sup_{i,j} \arccos(e_i|e_j) = \arccos 0 = \pi/2.$$

*Si ahora tomamos un punto cualquiera  $x \in S_{\ell_2}$ , se tiene además que  $d(x, e_n) = \arccos(x|e_n) = \arccos x_n$ . Así,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, e_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \arccos x_n = \arccos 0 = \pi/2.$$

*Como consecuencia, se tiene que  $r(K) = \pi/2 = \text{diam}(K)$ .*

Terminamos esta sección presentando algunas propiedades de la proyección métrica en los espacios CAT(1). En el siguiente capítulo veremos cómo, al igual que ocurre en el caso lineal, ciertas propiedades características de la proyección métrica juegan un papel relevante en el desarrollo de la Teoría Métrica del Punto Fijo para estos espacios.

**Proposición 2.1.6.** Sean  $M$  un espacio CAT(1) completo,  $x \in M$  y  $C \subseteq M$  un conjunto cerrado, no vacío y  $\pi$ -convexo tal que  $d(x, C) < \pi/2$ . Entonces se tiene que:

- (1) la proyección métrica de  $x$  sobre  $C$ ,  $P_C(x)$ , es un único punto,
- (2) si  $x'$  pertenece al segmento geodésico  $[x, P_C(x)]$ , entonces  $P_C(x') = P_C(x)$ ,
- (3) si  $x \notin C$  e  $y \in C$  con  $y \neq P_C(x)$ , entonces  $\angle_{P_C(x)}(x, y) \geq \pi/2$ ,
- (4) si  $\text{diam}(M) \leq \pi$ , entonces para cualquier  $y \in C$ ,

$$d(P_C(x), P_C(y)) = d(P_C(x), y) \leq d(x, y).$$

**Demostración.** Los apartados (1), (2) y (3) fueron propuestos como ejercicio en [8, pág. 178]. Por razones de completitud, desarrollamos aquí las pruebas de estas tres propiedades.

(1) Sea  $\{y_n\} \subset C$  una sucesión de puntos tal que  $d(y_n, x)$  tiende a  $d(x, C)$  cuando  $n$  tiende a infinito. Dicha sucesión existe ya que  $d(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y)$ . Veamos, en primer lugar, que toda sucesión  $\{y_n\}$  tomada de esa forma es de Cauchy.

Sea  $D = d(x, C)$  y sea  $\varepsilon > 0$  lo suficientemente pequeño para que  $D + \varepsilon < \pi/2$ . Por hipótesis, existe  $N > 0$  tal que  $d(y_n, x) < D + \varepsilon$  si  $n > N$ . Fijemos  $n, m > N$  y consideremos un triángulo de comparación  $\bar{\Delta}(x, y_n, y_m) \subset \mathbb{S}^2$  de la terna de puntos  $x, y_n$  e  $y_m$ . Consideremos dos bolas centradas en  $\bar{x}$ , una de ellas de radio  $D$  y la otra de radio  $D + \varepsilon$ . Supongamos que  $L = d(\bar{y}_n, \bar{y}_m) = d(y_n, y_m) > 0$  (en caso contrario, la prueba es inmediata). Sea  $\bar{z}_{nm} \in \mathbb{S}^2$  el punto medio del segmento geodésico  $[\bar{y}_n, \bar{y}_m]$ . Como  $B(\bar{x}, D + \varepsilon)$  es convexa,  $\bar{z}_{nm}$  pertenece a esta bola. De hecho, utilizando el módulo de convexidad de la esfera (mirar la fórmula (1.4.3)), se tiene en concreto que  $d(\bar{x}, \bar{z}_{nm}) \leq (D + \varepsilon)(1 - \delta_{\mathbb{S}^2}(D + \varepsilon, L))$ . Utilizando la desigualdad CAT( $k$ ) y el hecho de que  $C$  es convexo, se tiene además que  $D \leq d(x, z_{nm}) \leq d(\bar{x}, \bar{z}_{nm})$ , donde  $z_{nm}$  es el punto medio del segmento  $[y_n, y_m]$ .

Uniendo ambas cotas, se tiene que

$$D \leq (D + \varepsilon)(1 - \delta_{\mathbb{S}^2}(D + \varepsilon, L)) \Leftrightarrow$$

$$D \leq \text{arc cos} \left( \frac{\cos(D + \varepsilon)}{\cos(L/2)} \right) \Leftrightarrow$$

(como la función *coseno* es decreciente en  $[0, \pi/2]$ )

$$\cos D \geq \frac{\cos(D + \varepsilon)}{\cos(L/2)} \Leftrightarrow$$

$$d(y_n, y_m) = L \leq 2 \arccos \left( \frac{\cos(D + \varepsilon)}{\cos D} \right).$$

Así, se deduce que la sucesión  $\{y_n\}$  es de Cauchy.

Por otro lado, la completitud de  $C$  asegura que cualquier sucesión  $\{y_n\}$  como las anteriores converge a un punto  $y \in C$  tal que  $d(x, y) = d(x, C)$ . Si definimos  $P_C(x) = y$ , se tiene que  $d(x, P_C(x)) = d(x, C)$ . Además  $P_C(x)$  es el único punto en  $C$  con esta propiedad ya que si  $P_C(x)$  y  $P'_C(x)$  son dos puntos en  $C$  satisfaciendo la igualdad anterior, entonces la sucesión cuyos términos son alternativamente  $P_C(x)$  y  $P'_C(x)$  sería como las anteriores  $\{y_n\}$ . Por ello, sería de Cauchy y, en consecuencia,  $P_C(x) = P'_C(x)$ .

(2) Sea  $x'$  un punto del segmento geodésico  $[x, P_C(x)]$ . Por definición de geodésica, se tiene que  $d(x, P_C(x)) = d(x, x') + d(x', P_C(x))$ . Del apartado (1), se deduce que  $d(x', P_C(x)) \geq d(x', P_C(x'))$ . Aplicando la desigualdad triangular resulta que:

$$\begin{aligned} d(x, P_C(x')) &\leq d(x, x') + d(x', P_C(x')) = \\ &= d(x, P_C(x)) - d(x', P_C(x)) + d(x', P_C(x')) \leq d(x, P_C(x)). \end{aligned}$$

De nuevo por (1) se tiene que  $P_C(x) = P_C(x')$ .

(3) Supongamos por reducción al absurdo que  $\angle_{P_C(x)}(x, y) < \pi/2$ . Si esto ocurre, podemos encontrar  $x' \in [P_C(x), x]$  e  $y' \in [P_C(x), y]$  distintos de  $P_C(x)$  tales que, en el triángulo de comparación  $\overline{\Delta}(x', P_C(x), y') \subseteq M_1^2$ , el ángulo en  $\overline{P_C(x)}$ , denominado el ángulo de 1-comparación entre  $x'$  e  $y'$  en  $P_C(x)$  y denotado  $\angle_{P_C(x)}^{(1)}(x', y')$ , es menor que  $\pi/2$  (por definición de ángulo de Alexandrov). Utilizando la Ley de los Cosenos del espacio esférico, se deduce que existe al menos un punto  $\bar{p} \in [\overline{P_C(x)}, \bar{y}']$  tal que  $d(\bar{p}, \bar{x}') < d(\overline{P_C(x)}, \bar{x}')$ . Considerando el punto  $p \in C$  correspondiente a  $\bar{p}$  en el triángulo  $\Delta(x', P_C(x), y')$ , se obtiene que  $d(x', p) < d(x', P_C(x))$ . Así, llegamos a una contradicción ya que por el apartado (2)  $d(x', P_C(x)) = d(x', C)$ .

(4) Esta prueba basta hacerla para los puntos  $x \in M \setminus C$ . Del apartado (3), obtenemos que  $\angle_{P_C(x)}(x, y) \geq \pi/2$ , y, por tanto, por la Ley de los Cosenos,

$$\begin{aligned} \cos d(y, x) &\leq \cos d(y, P_C(x)) \cos d(x, P_C(x)) + \operatorname{sen} d(y, P_C(x)) \operatorname{sen} d(x, P_C(x)) \cos \gamma \\ &\leq \cos d(y, P_C(x)) \cos d(x, P_C(x)) \\ &\leq \cos d(y, P_C(x)). \end{aligned}$$

Además, como  $\operatorname{diam}(M) \leq \pi$ , obtenemos finalmente que

$$d(P_C(x), P_C(y)) = d(P_C(x), y) \leq d(x, y).$$

□

**Observación 2.1.7.** *En un espacio  $CAT(0)$ , la proyección métrica sobre un conjunto cerrado y convexo (ver [8, pag. 176]) tiene propiedades más fuertes y cómodas de usar que las anteriores. Ejemplo de ello son el hecho de que, por un lado, en un espacio  $CAT(0)$  no es necesario controlar la distancia de un punto al conjunto sobre el que se proyecta para asegurar la existencia de proyección, y, por otro lado, el hecho de que la proyección es una retracción no expansiva de  $M$  sobre  $C$  (estas dos propiedades son de gran relevancia en el estudio de la geometría de los espacios de Hilbert).*

El siguiente corolario se prueba utilizando técnicas similares a las empleadas en la prueba de la proposición anterior. Recordemos previamente que  $r(c_n)$  denota el radio asintótico de la sucesión  $\{c_n\}$ .

**Corolario 2.1.8.** *Sean  $M$  un espacio  $CAT(1)$  completo y  $\{C_n\}$  una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados, no vacíos y  $\pi$ -convexos de  $M$ . Supongamos que existe una sucesión de puntos  $\{c_n\}$  tal que  $c_n \in C_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y con  $r(c_n) < \pi/2$ . Entonces  $\bigcap_n C_n \neq \emptyset$ .*

**Demostración.** Como  $r(c_n) < \pi/2$ , sabemos que existe un punto  $p \in M$  tal que  $r(p, c_n) < \pi/2$ . En primer lugar, consideremos la sucesión de números reales  $d_n = \operatorname{dist}(p, C_n)$ . Dado el carácter decreciente de  $C_n$ , es fácil comprobar que  $d_n$  es una sucesión monótona creciente. Además,  $d_n$  es una sucesión acotada ya que, por la

definición de  $r(p, c_n)$ , sabemos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $d_n \leq d(p, c_n) \leq r(p, c_n) + 1$  para todo  $n \geq n_0$ . Por ello, existe  $d \in \mathbb{R}$  tal que  $d_n \rightarrow d$ .

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$D_n = B(p, d) \cap C_n,$$

donde  $B(p, d)$  es la bola cerrada de centro  $p$  y radio  $d$ . Como  $r(p, c_n) < \pi/2$ , tenemos que  $d_n < \pi/2$  para todo  $n$  natural suficientemente grande. Utilizando la proposición anterior y teniendo en cuenta que  $d_n \leq d$  para todo  $n$ , se tiene que  $D_n \neq \emptyset$  para todo  $n$ . De este modo, la sucesión  $D_n$  que hemos construido es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados, acotados y convexos. De forma inmediata,  $D_n \subseteq C_n$  para todo  $n$ . Por ello, basta demostrar que  $\bigcap D_n \neq \emptyset$ . Distinguimos los siguientes casos:

(1) Si existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $d_n = d$  para todo  $n \geq n_0$ , entonces  $D_{n_0} = D_n$  para todo  $n \geq n_0$  y por tanto es inmediato que  $\bigcap D_n = D_{n_0} \neq \emptyset$ .

(2) Si por el contrario  $d_n < d$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , veamos en primer lugar que la sucesión  $\text{diam}(D_n)$  tiende a cero. Observando las definiciones de  $d_n$  y  $D_n$ , es fácil comprobar que  $D_n$  está contenido en la corona circular que encierran las bolas cerradas  $B(p, d_n)$  y  $B(p, d)$ . Por la demostración del apartado (1) de la proposición anterior, se observa cómo los segmentos geodésicos que pertenecen a esa corona circular tienen una longitud máxima que depende de los radios de las bolas,  $d$  y  $d_n$  en este caso. Como esa dependencia es tal que tiende a cero cuando el radio  $d_n$  se acerca a  $d$ , las longitudes de estos segmentos tienden a cero y por tanto el diámetro de  $D_n$  también tiende a cero. Razonando como en el Teorema de los Intervalos Encajados de Cantor, se deduce que  $\bigcap D_n \neq \emptyset$ .  $\square$

La Observación 1.4.40 del capítulo anterior afirmaba que los espacios CAT(0) tienen la propiedad de la intersección no vacía. El resultado anterior muestra sin embargo que los espacios CAT(1) no verifican exactamente esta propiedad. Concretamente, se observa que, como ocurre frecuentemente al trabajar con estos espacios, es necesario imponer condiciones naturales de acotación sobre ciertos elementos del espacio. En este caso, estas condiciones de acotación recaen sobre el radio asintótico de la sucesión  $\{c_n\}$ . En cualquier caso, el resultado anterior sigue relacionando de algún modo la geometría de los espacios CAT(1) con la de los espacios reflexivos.

## 2.2. Propiedad Kadec-Klee y propiedad ( $P$ ) de Lim y Xu en espacios CAT(1)

En esta sección vamos a describir y estudiar otras dos propiedades de gran relevancia en la Teoría Métrica del Punto Fijo: la propiedad Kadec-Klee y la propiedad ( $P$ ) de Lim y Xu para aplicaciones uniformemente lipschitzianas. Este estudio lo llevaremos a cabo en el contexto de los espacios CAT(1). Como ambas propiedades están íntimamente relacionadas con los conceptos de centro asintótico y de  $\Delta$ -límite, analizamos en primer lugar algunas de las peculiaridades que presentan estos elementos en el contexto de los espacios CAT(1). A continuación, ofrecemos un resultado que garantiza existencia y unicidad de centro asintótico de una sucesión bajo cierta acotación natural sobre el radio asintótico de la misma.

**Proposición 2.2.1.** *Sean  $M$  un espacio CAT(1),  $C \subseteq M$  un conjunto cerrado, no vacío y  $\pi$ -convexo y  $\{x_n\}$  una sucesión en  $M$ . Si  $r_C(x_n) < \pi/2$ , entonces  $A_C(x_n)$ , el centro asintótico de  $\{x_n\}$ , es un conjunto unitario.*

**Demostración.** La existencia es consecuencia inmediata del Corolario 2.1.8. La unicidad se deduce fácilmente a partir de la Proposición 2.1.1 que, recordemos, afirma que  $M$  es uniformemente convexo.  $\square$

El ejemplo que proponemos a continuación muestra que la cota que se impone sobre el radio asintótico en el resultado anterior es óptima.

**Ejemplo 2.2.2.** *Como en el Ejemplo 2.1.5, consideramos la esfera unidad  $S_{\ell_2}$  del espacio de Hilbert  $\ell_2$  dotada con la métrica intrínseca  $d_L$ . Consideremos la sucesión en este espacio formada por la base canónica  $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$  de  $\ell_2$ . Sea  $y = \{y_n\} \in S_{\ell_2}$ , entonces*

$$r(y, e_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d(y, e_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \arccos y_n = \pi/2.$$

Así,  $r(e_n) = \pi/2$  y  $A(e_n) = S_{\ell_2}$ .

En lo que sigue vamos a estudiar algunas propiedades de las sucesiones  $\Delta$ -convergentes en espacios CAT(1). En primer lugar, definimos el concepto de sucesión regular en un espacio métrico.



**Definición 2.2.3.** Sea  $\{x_n\}$  una sucesión en un espacio métrico. Decimos que  $\{x_n\}$  es una sucesión regular si todas sus subsucesiones tienen el mismo radio asintótico, es decir, si  $r(x_n) = r(u_n)$  cualquiera que sea la subsucesión  $\{u_n\}$  de  $\{x_n\}$ .

La siguiente proposición es un resultado clásico y conocido [23, pág. 166] de la Teoría de los espacios de Banach relacionado con este tipo de sucesiones. Como la naturaleza de este resultado es puramente métrica, lo enunciamos, por conveniencia en este trabajo, de la siguiente manera.

**Proposición 2.2.4.** Sea  $(M, d)$  un espacio métrico. Cualquier sucesión  $\{x_n\} \subset M$  acotada posee una subsucesión regular.

Como consecuencia de la Proposición 2.2.1, se obtienen las siguientes propiedades de sucesiones  $\Delta$ -convergentes en espacios CAT(1).

**Corolario 2.2.5.** Sean  $M$  un espacio CAT(1) completo y  $\{x_n\}$  una sucesión en  $M$ . Si  $r(x_n) < \pi/2$ , entonces  $\{x_n\}$  tiene una subsucesión  $\Delta$ -convergente.

**Demostración.** Por la Proposición 2.2.4 sabemos que  $\{x_n\}$  posee una subsucesión regular  $\{u_n\}$ . Por último, basta aplicar la Proposición 2.2.1 para deducir que  $\{u_n\}$  es además  $\Delta$ -convergente.  $\square$

La siguiente proposición muestra una importante propiedad de las sucesiones  $\Delta$ -convergentes.

**Proposición 2.2.6.** Sea  $M$  un espacio CAT(1) completo tal que  $\text{diam}(M) < \pi/2$ . Si una sucesión  $\{x_n\}$  en  $M$   $\Delta$ -converge a  $x \in M$ , entonces

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\text{conv}}\{x_k, x_{k+1}, \dots\}.$$

**Demostración.** Sea  $C_k = \overline{\text{conv}}\{x_k, x_{k+1}, \dots\}$  para  $k \in \mathbb{N}$ . En primer lugar veamos que  $C_k$ , además de ser cerrado, es convexo para cualquier  $k$ . Esta convexidad es consecuencia directa del hecho de que en un espacio CAT(1) los segmentos geodésicos varían de forma continua según sus extremos (Apartado (1) de la Proposición 1.4.44).

Veamos ahora que  $x \in C_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Como  $x_n \in C_k$  para todo  $n \geq k$ , aplicando la Proposición 2.1.6, se obtiene que

$$d(P_{C_k}(x), P_{C_k}(x_n)) = d(P_{C_k}(x), x_n) \leq d(x, x_n) \text{ para todo } n \geq k.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} r(P_{C_k}(x), x_n) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} d(P_{C_k}(x), x_n) \leq \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = r(x, x_n) = r(x_n). \end{aligned}$$

Por la Proposición 2.2.1, se tiene que  $P_{C_k}(x) = x$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  y así  $x \in C_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Observación 2.2.7.** *Notemos que el resultado anterior también es cierto si únicamente asumimos que  $\text{diam}(M) < \pi$  y  $r(x_n) < \pi/2$ .*

A continuación, pasamos a estudiar la propiedad Kadec-Klee en los espacios CAT(1). En este trabajo, estudiaremos en concreto la versión uniforme de esta propiedad, más conocida como propiedad Kadec-Klee uniforme (UKK). En primer lugar, recordemos esta última propiedad en espacios normados. Para ello, introducimos previamente lo que comúnmente se conoce como separación de los puntos de una sucesión. Dada una sucesión  $\{x_n\}$  en un espacio métrico, llamamos *separación de los puntos de  $\{x_n\}$* , y se denota por  $\text{sep}(x_n)$ , al número dado por la siguiente expresión:

$$\text{sep}(x_n) := \inf\{d(x_n, x_m) : n \neq m\}.$$

Si  $\text{sep}(x_n) > 0$ , diremos que la sucesión  $\{x_n\}$  es *separada*.

Veamos la definición de la propiedad UKK en espacios normados.

**Definición 2.2.8.** *Sea  $X$  un espacio de Banach. Se dice que  $X$  es uniformemente Kadec-Klee (UKK) si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $0 < \mu < 1$  tal que para cualquier sucesión  $\{x_n\} \subset X$  verificando que  $\|x_n\| \leq 1$ ,  $\text{sep}(x_n) > \varepsilon$  y  $x_n \rightharpoonup x$ , donde  $\rightharpoonup$  denota la convergencia débil clásica en un espacio normado, se tiene que  $\|x\| \leq 1 - \mu$ .*

Observando esta definición, advertimos la necesidad de manejar el concepto clásico de convergencia débil al trabajar con esta propiedad en espacios normados. Para poder

considerar de un modo análogo una propiedad Kadec-Klee en un contexto puramente métrico, se recurre al uso de “convergencias débiles” en espacios métricos. En concreto, en el contexto de los espacios  $\text{CAT}(0)$ , la propiedad Kadec-Klee es considerada en [44] utilizando el concepto de  $\Delta$ -convergencia que se describió en la Sección 1.3 del capítulo anterior. En este trabajo, W. A. Kirk y B. Panyanak prueban concretamente que un espacio  $\text{CAT}(0)$  completo es uniformemente Kadec-Klee con respecto a la  $\Delta$ -convergencia (Teorema 3.9 de [44]). Veamos a continuación el enunciado formal de este resultado.

**Teorema 2.2.9.** *Sean  $M$  un espacio  $\text{CAT}(0)$  completo,  $p \in M$  y  $\varepsilon > 0$ . Entonces existe  $\mu > 0$  de modo que, cualquiera que sea la sucesión  $\{x_n\} \subset M$  verificando que  $d(p, x_n) \leq 1$ ,  $\text{sep}(x_n) > \varepsilon$  y  $\Delta - \lim_n x_n = x$ , se tiene que  $d(p, x) \leq 1 - \mu$ .*

El teorema que presentamos a continuación prueba el resultado anterior en el contexto más general de los espacios  $\text{CAT}(1)$ .

**Teorema 2.2.10** (Propiedad Kadec-Klee Uniforme). *Sean  $M$  un espacio  $\text{CAT}(1)$  completo,  $p \in M$  y  $\varepsilon > 0$ . Entonces existe  $\mu > 0$  de modo que, cualquiera que sea la sucesión  $\{x_n\} \subset M$  verificando que  $d(p, x_n) \leq 1$ ,  $\text{sep}(x_n) > \varepsilon$  y  $\Delta - \lim_n x_n = x$ , se tiene que  $d(p, x) \leq 1 - \mu$ .*

**Demostración.** Por conveniencia, y sin pérdida de generalidad, asumimos que  $d(p, x_n) = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Extrayendo subsucesiones si es necesario, podemos suponer también que  $d(x_n, x) \geq \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $\Delta(\bar{p}, \bar{x}, \bar{x}_n) \subseteq \mathbb{S}^2$  un triángulo de comparación para el triángulo  $\Delta(p, x, x_n) \subseteq M$ . Como  $d(\bar{x}_n, [\bar{p}, \bar{x}]) \leq 1 < \pi/2$ , podemos aplicar la Proposición 2.1.6 para considerar, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , el punto  $\bar{u}_n$  del segmento  $[\bar{p}, \bar{x}]$  que está más cerca de  $\bar{x}_n$  y el punto  $u_n$  del segmento  $[p, x]$  que verifica que  $d(p, u_n) = d(\bar{p}, \bar{u}_n)$ . Tomando subsucesiones si es necesario, podemos asumir que  $\{\bar{u}_n\}$  y  $\{u_n\}$  convergen respectivamente a  $\bar{u} \in [\bar{p}, \bar{x}]$  y  $u \in [p, x]$ .

Sean  $a_n = d(\bar{p}, \bar{u}_n)$ ,  $c_n = d(\bar{x}_n, \bar{u}_n)$  y  $\gamma_n = \angle_{\bar{u}_n}(\bar{p}, \bar{x}_n)$ . Por la Ley de los Cosenos en  $\mathbb{S}^2$  se tiene que

$$\cos 1 = \cos a_n \cos c_n + \sin a_n \sin c_n \cos \gamma_n.$$

Teniendo en cuenta que  $a_n \leq \pi$  y  $c_n \leq 1 < \pi$  y considerando el apartado (3) de la Proposición 2.1.6,

$$\cos 1 \leq \cos a_n \cos c_n.$$

Además, como  $0 \leq c_n \leq 1 < \pi/2$ ,

$$\cos a_n \geq \frac{\cos 1}{\cos c_n}.$$

Como  $\{x_n\}$  es una sucesión separada, existe  $\delta > 0$  tal que  $c_n \geq \delta$  para todo  $n$ . Entonces obtenemos que  $\cos c_n \leq \cos \delta < 1$ .

Así, como  $\cos a_n \geq \frac{\cos 1}{\cos c_n} \geq \frac{\cos 1}{\cos \delta} > \cos 1$ , se deduce que

$$d(\bar{p}, \bar{u}_n) = a_n \leq \arccos \left( \frac{\cos 1}{\cos \delta} \right) < 1.$$

Sabiendo además que  $d(\bar{p}, \bar{u}_n) = d(p, u_n)$  converge a  $d(p, u)$ , se tiene que

$$d(p, u) \leq 1 - \mu,$$

donde  $\mu = 1 - \arccos \left( \frac{\cos 1}{\cos \delta} \right)$ .

Para finalizar la prueba, basta comprobar que  $u = x$ . Esta igualdad es inmediata ya que  $r(u, x_n) \leq r(x_n)$ .  $\square$

Si revisamos la prueba de esta misma propiedad en los espacios  $CAT(0)$  (mirar el Teorema 3.9 de [44]), se observa como una de las principales herramientas que se utiliza es el ángulo  $\theta_n = \angle_{\bar{p}}(\bar{x}, \bar{x}_n)$ , donde los puntos  $p, x$  y  $x_n$  en esa prueba denotan los mismos que en la anterior. Concretamente, es la relación que se establece entre  $d(\bar{p}, \bar{u}_n)$  y  $\theta_n$  lo que permite a los autores de [44] demostrar la propiedad Kadec-Klee. En el teorema anterior optamos por seguir otro tipo de razonamiento ya que encontrar relaciones similares entre esos dos valores numéricos en este contexto resulta una tarea complicada.

**Observación 2.2.11.** *Aunque aparentemente el resultado anterior extiende el Teorema 2.2.9 que ofrecen W. A. Kirk y B. Panyanak para espacios  $CAT(0)$ , es importante mencionar que, mientras dicho teorema puede reformularse sobre una bola cualquiera del espacio, en el teorema anterior, el hecho de que la bola tenga radio 1 (o al menos menor que  $\pi/2$ ) es una condición necesaria en la prueba.*

Comenzamos a desarrollar ahora el segundo bloque de contenidos de esta sección. En primer lugar, describimos la propiedad (P), estudiada recientemente en el contexto de los espacios CAT(0), para estudiarla en los espacios CAT(1). Concretamente, nuestro objetivo será mostrar que cualquier espacio CAT(1) completo bajo condiciones naturales de acotación sobre su diámetro tiene la propiedad (P). Esta propiedad fue introducida para espacios métricos por Lim y Xu en [53].

**Definición 2.2.12.** *Un espacio métrico  $(M, d)$  se dice que tiene la propiedad (P) si, dadas dos sucesiones acotadas  $\{x_n\}$  y  $\{z_n\}$  en  $M$ , siempre existe  $z \in \bigcap_{n \geq 1} \text{cov}(\{z_j : j \geq n\})$  verificando que*

$$r(z, x_n) \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} r(z_j, x_n).$$

A continuación, presentamos el resultado que, como ya hemos dicho, motiva este bloque temático.

**Teorema 2.2.13.** *Sea  $M$  un espacio CAT(1) completo. Si  $\text{diam}(M) < \pi/2$ , entonces  $M$  tiene la propiedad (P).*

**Demostración.**

Sean  $\{x_n\}$  y  $\{z_n\}$  dos sucesiones acotadas en  $M$  y consideremos el tipo  $\varphi$  asociado a la sucesión  $\{x_n\}$ , es decir,  $\varphi(x) = r(x, x_n)$  para todo  $x \in M$ . Sean

$$C_n := \text{cov}(\{z_j : j \geq n\}) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por la Proposición 2.2.1, deducimos que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe un único  $u_n \in C_n$  tal que

$$\varphi(u_n) = \inf_{x \in C_n} \varphi(x).$$

Como  $z_j \in C_n$  para todo  $j \geq n$ , tenemos que  $\varphi(u_n) \leq \varphi(z_j)$  siempre que  $j \geq n$ . Así,  $\varphi(u_n) \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \varphi(z_j)$  para todo  $n$ . Veamos que  $\{u_n\}$  es una sucesión de Cauchy. Para ello, supongamos por el contrario que no lo es. En este caso, existe  $\varepsilon > 0$  tal que, cualquiera que sea  $N \in \mathbb{N}$ , existen  $i, j \geq N$  de modo que  $d(u_i, u_j) \geq \varepsilon$ . Como la sucesión  $\{\varphi(u_n)\}$  es creciente y acotada, tenemos además que es convergente. Sea  $d := \text{diam}(M) < \pi/2$ . Sea  $\xi > 0$  tal que  $\xi < \arccos(\cos(\frac{\varepsilon}{2}) \cos d) - d$ , y tomemos  $N$  lo

suficientemente grande para que  $|\varphi(u_i) - \varphi(u_j)| \leq \xi$  si  $i, j \geq N$ . Consideremos ahora  $i > j \geq N$  tales que  $d(u_i, u_j) \geq \varepsilon$ . Sea  $m_j$  el punto medio del segmento geodésico que une  $u_i$  con  $u_j$ , y sea  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces, utilizando que  $M$  es uniformemente convexo (ver la Proposición 2.1.1),

$$d(m_j, x_n) \leq \arccos \left( \frac{\cos(\max\{d(u_i, x_n), d(u_j, x_n)\})}{\cos(\frac{\varepsilon}{2})} \right),$$

o de forma equivalente

$$\cos d(m_j, x_n) \geq \frac{\cos(\max\{d(u_i, x_n), d(u_j, x_n)\})}{\cos(\frac{\varepsilon}{2})}.$$

Tomando límite inferior en la anterior desigualdad, se deduce que

$$\begin{aligned} \liminf_n \cos d(m_j, x_n) &\geq \liminf_n \frac{\cos(\max\{d(u_i, x_n), d(u_j, x_n)\})}{\cos(\frac{\varepsilon}{2})} \\ &= \frac{1}{\delta} \liminf_n \cos(\max\{d(u_i, x_n), d(u_j, x_n)\}), \end{aligned}$$

donde  $\delta := \cos(\frac{\varepsilon}{2}) < 1$ .

Como la función *coseno* es decreciente en el intervalo  $[0, \pi/2]$ , tenemos que

$$\cos(\limsup_n d(m_j, x_n)) = \cos \varphi(m_j) \geq \frac{1}{\delta} \cos(\limsup_n \max\{d(u_i, x_n), d(u_j, x_n)\}).$$

Así,

$$\arccos(\delta \cos \varphi(m_j)) \leq \limsup_n \max\{d(u_i, x_n), d(u_j, x_n)\}.$$

Como además,

$$\begin{aligned} \limsup_n \max\{d(u_i, x_n), d(u_j, x_n)\} &= \max\{\limsup_n d(u_i, x_n), \limsup_n d(u_j, x_n)\} \\ &= \max\{\varphi(u_i), \varphi(u_j)\} \\ &= \frac{\varphi(u_i) + \varphi(u_j)}{2} + \frac{|\varphi(u_i) - \varphi(u_j)|}{2}, \end{aligned}$$

se deduce que  $\arccos(\delta \cos \varphi(m_j)) \leq \varphi(u_j) + \xi$ .

Sea  $f(x) = \arccos(\delta \cos x) - x$ . Se tiene que  $f'(x) \leq 0$  para todo  $x \in [0, d]$ . Como consecuencia,

$$\arccos(\delta \cos x) - x \geq \arccos(\delta \cos d) - d = f(d)$$

para todo  $x \in [0, d]$ . Teniendo ahora en cuenta que  $\xi < f(d)$ , se obtiene que

$$\varphi(m_j) \leq \arccos(\delta \cos \varphi(m_j)) - f(d) < \varphi(u_j),$$

contradiéndose con ello la definición de  $u_j$ . Así, como consecuencia, se prueba que  $\{u_n\}$  es una sucesión de Cauchy. La completitud del espacio nos permite afirmar que existe  $z \in M$  con  $z = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  que obviamente está en  $\cap_n C_n$ . Por último, utilizando que  $\varphi$  es continuo y que  $\varphi(u_n) \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \varphi(z_j)$  para todo  $n$ , concluimos que

$$\varphi(z) \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \varphi(z_j).$$

□

### 2.3. Condición $(Q_4)$ y propiedad $(N)$ en espacios $CAT(0)$

En esta sección, a diferencia de en las secciones anteriores, trabajaremos con los espacios  $CAT(0)$ . Esto se debe en esencia a que el contenido de esta sección se desarrolla fundamentalmente para dar respuesta a dos preguntas que proponen W. A. Kirk y B. Panyanak en [44] en el contexto concreto de los espacios de curvatura no positiva. En ese artículo se estudia para los espacios  $CAT(0)$  una condición geométrica que relaciona la posición de cuatro puntos en el espacio. Esta condición se denomina condición  $(Q_4)$ . Las dos preguntas que contestamos en esta sección se relacionan con esta propiedad y en concreto son, en primer lugar, si cualquier espacio  $CAT(0)$  satisface la condición  $(Q_4)$ , y, en segundo lugar, si esta condición es necesaria para asegurar la convergencia de los puntos medios de una sucesión de segmentos cuando los puntos extremos convergen (Proposición 4.2 de [44]). En esta sección daremos respuesta negativa a ambas preguntas y además mejoraremos la proposición que acabamos de mencionar a través de una condición geométrica más débil que la condición  $(Q_4)$ .

Comenzamos recordando la condición  $(Q_4)$  que se define en [44].

**Definición 2.3.1.** *Un espacio  $CAT(0)$  completo  $M$  se dice que verifica la condición*

( $Q_4$ ) si para cualesquiera cuatro puntos  $x, y, p, q \in M$

$$\left. \begin{array}{l} d(x, p) < d(x, q) \\ d(y, p) < d(y, q) \end{array} \right\} \Rightarrow d(z, p) \leq d(z, q),$$

siendo  $z$  cualquier punto del segmento  $[x, y]$ .

**Observación 2.3.2.** *Observemos cómo la condición ( $Q_4$ ) también está bien definida sobre cualquier espacio métrico único geodésico o, incluso, sobre cualquier espacio métrico  $D$ -único geodésico bajo algunas condiciones sobre los puntos  $x$  e  $y$ .*

A la vez que se pregunta en [44] si todos los espacios CAT(0) completos satisfacen la condición ( $Q_4$ ), los únicos ejemplos que se ofrecen de espacios CAT(0) que sí la verifican son los espacios de Hilbert y los  $\mathbb{R}$ -trees. A continuación, presentamos una colección más amplia de espacios CAT(0) que satisfacen esta condición. Previamente conozcamos cuándo se dice que un espacio métrico geodésico tiene curvatura constante.

**Definición 2.3.3.** *Sea  $k \leq k'$ , decimos que un espacio CAT( $k'$ ) tiene curvatura constante igual a  $k$  si cualquier triángulo no degenerado que consideremos en ese espacio (con una condición adecuada de acotación si  $k > 0$ ) es isométrico a su triángulo de comparación en  $M_k^2$ .*

El siguiente teorema, formulado para espacios CAT(0) por cuestiones de exposición, nos ofrece una familia de espacios CAT(0) verificando la condición ( $Q_4$ ).

**Teorema 2.3.4.** *Cualquier espacio CAT(0) con curvatura constante satisface la condición ( $Q_4$ ).*

**Demostración.** Este resultado se verifica para cualquier espacio modelo  $M_k^2$  del mismo modo que lo hace para  $\mathbb{R}^2$ . Escribimos la prueba para  $M_{-1}^2$ .

Sean  $x, y, p, q \in M_{-1}^2$  cuatro puntos verificando que  $d(x, p) < d(x, q)$  y  $d(y, p) < d(y, q)$ . Por la definición de la métrica hiperbólica, tenemos que

$$\operatorname{arccosh}(-\langle x|p \rangle) < \operatorname{arccosh}(-\langle x|q \rangle)$$



y

$$\operatorname{arccosh}(-\langle y|p\rangle) < \operatorname{arccosh}(-\langle y|q\rangle),$$

o de forma equivalente, tenemos que

$$\langle x|p\rangle > \langle x|q\rangle \text{ y } \langle y|p\rangle > \langle y|q\rangle.$$

Sea  $z$  un punto interior del segmento geodésico  $[x, y]$ . Necesitamos probar que  $\langle z|p\rangle \geq \langle z|q\rangle$ . Si  $c : [0, d(x, y)] \rightarrow M_{-1}^2$  es la geodésica que une los puntos  $x$  e  $y$ , podemos describir cada punto interior  $z$  como

$$z = \cosh(\alpha d(x, y))x + \sinh(\alpha d(x, y))u,$$

donde  $\alpha \in (0, 1)$  y  $u = \frac{y + \langle x|y\rangle x}{\|y + \langle x|y\rangle x\|}$ , con  $\|y + \langle x|y\rangle x\| = \sqrt{\langle y + \langle x|y\rangle x | y + \langle x|y\rangle x \rangle} = \sinh d(x, y)$ .

De este modo,

$$\begin{aligned} \langle z|p\rangle &= \cosh(\alpha d(x, y))\langle x|p\rangle + \sinh(\alpha d(x, y))\langle u|p\rangle \\ &= \left( \cosh(\alpha d(x, y)) + \frac{\sinh(\alpha d(x, y))\langle x|y\rangle}{\|y + \langle x|y\rangle x\|} \right) \langle x|p\rangle + \frac{\sinh(\alpha d(x, y))}{\|y + \langle x|y\rangle x\|} \langle y|p\rangle. \end{aligned}$$

De la misma manera,

$$\langle z|q\rangle = \left( \cosh(\alpha d(x, y)) + \frac{\sinh(\alpha d(x, y))\langle x|y\rangle}{\|y + \langle x|y\rangle x\|} \right) \langle x|q\rangle + \frac{\sinh(\alpha d(x, y))}{\|y + \langle x|y\rangle x\|} \langle y|q\rangle.$$

Dado que, obviamente,  $\frac{\sinh(\alpha d(x, y))}{\|y + \langle x|y\rangle x\|} \geq 0$ , es suficiente comprobar que el factor de  $\langle x|q\rangle$  es también no negativo. Pero

$$\cosh(\alpha d(x, y)) + \frac{\sinh(\alpha d(x, y))\langle x|y\rangle}{\|y + \langle x|y\rangle x\|} \geq 0 \Leftrightarrow$$

(como  $-\langle x|y\rangle > 0$  para cualesquiera  $x, y \in M_{-1}^2$ )

$$\tanh(\alpha d(x, y)) \leq \frac{\|y + \langle x|y\rangle x\|}{-\langle x|y\rangle} = \tanh d(x, y),$$

que es cierto a consecuencia de que  $\tanh$  es una función creciente.

Por último, veamos el caso general. Para ello, basta tener en cuenta que, dados los cuatro puntos  $x, y, p$  y  $q$ , sólo hemos de considerar los triángulos de comparación

de  $\Delta(p, x, y)$  y  $\Delta(q, x, y)$  en  $M_k^2$  de forma que el lado  $[\bar{x}, \bar{y}]$  sea un lado común a los dos triángulos. El resultado se obtiene, entonces, directamente por isometría con  $M_k^2$ .  $\square$

**Observación 2.3.5.** *Un resultado similar a éste se puede probar para espacios de curvatura constante positiva.*

A diferencia del teorema anterior, el Ejemplo 2.3.9 que veremos más adelante pone de manifiesto que existen espacios  $CAT(0)$  que no satisfacen la condición  $(Q_4)$ . En este ejemplo y en lo que resta de sección, trabajaremos con los “pegamientos de espacios métricos”. Por ello, ofrecemos a continuación una breve introducción teórica a estos pegamientos (para más detalles consultar el libro [8, pág. 67 y pág. 347]).

Tal y como se señala en [8], la manera más obvia de “pegar” espacios métricos es uniéndolos a través de subespacios isométricos. Aunque la definición que aparece en ese libro contempla el pegamiento de una familia arbitraria de espacios métricos, para simplificar adaptamos la definición al caso más simple con sólo dos espacios.

**Definición 2.3.6.** *Sean  $(N_1, d_1)$  y  $(N_2, d_2)$  dos espacios métricos con subespacios cerrados  $A_1 \subseteq N_1$  y  $A_2 \subseteq N_2$ . Sea  $C$  un espacio métrico y supongamos que tenemos dos isometrías  $I_1: C \rightarrow A_1$  e  $I_2: C \rightarrow A_2$ . Denotemos  $M$  el cociente de la unión disjunta  $N_1 \sqcup N_2$  por la relación de equivalencia generada por  $[I_1(c) \sim I_2(c) \forall c \in C]$ . Identificamos cada  $N_i$  con su imagen en  $M$  y escribimos*

$$M = N_1 \bigsqcup_C N_2.$$

A  $M$  se le denomina *pegamiento de  $N_1$  y  $N_2$  a través de  $C$* .

Una vez conocido este tipo de espacios, resulta natural tratar de considerar una distancia sobre el mismo que lo convierta en un espacio métrico. En el Lema 5.24 de [8] aparece descrita dicha métrica. A continuación, adaptamos la misma al caso de un pegamiento de dos espacios métricos.

**Proposición 2.3.7.** *Conservando la notación de la definición anterior, sea  $M =$*

$N_1 \bigsqcup_C N_2$ . Se define la función  $d: M \times M \rightarrow [0, +\infty)$  que a cada  $x, y \in M$  le asocia:

$$\begin{cases} d(x, y) = d_i(x, y) & \text{si } x, y \in N_i \\ d(x, y) = \inf_{c \in C} \{d_i(x, I_i(c)) + d_j(I_j(c), y)\} & \text{si } x \in N_i \text{ e } y \in N_j \text{ con } i \neq j. \end{cases}$$

Se tiene que:

- (1)  $d$  es una métrica sobre  $M$ .
- (2) Si  $N_1$  y  $N_2$  son propios, entonces  $M$  es propio.
- (3) Si  $N_1$  y  $N_2$  son espacios geodésicos y  $C$  es propio, entonces  $M$  es un espacio geodésico.
- (4) Si  $N_1$  y  $N_2$  son espacios de longitud, entonces  $M$  también lo es, además  $d$  es la única métrica de longitud verificando que la métrica de longitud inducida en cada  $N_i \subseteq M$  es  $d_i$ .

Una de las principales ventajas que posee este tipo de construcción es que permite construir ejemplos interesantes de espacios métricos. Como en esta sección trabajamos fundamentalmente con los espacios  $CAT(k)$ , nos resulta de interés conocer si el pegamiento de dos espacios  $CAT(k)$  es otro espacio  $CAT(k)$ . Este problema lo resuelve el siguiente resultado [8, pág. 347].

**Teorema 2.3.8** (Teorema de los pegamientos de Reshetnyak). *Sea  $k \in \mathbb{R}$  un número arbitrario. Sean  $N_1$  y  $N_2$  dos espacios  $CAT(k)$  (no necesariamente completos) y sea  $C$  un espacio métrico completo. Supongamos que se tienen dos isometrías  $I_i: C \rightarrow A_i$ , para  $i = 1, 2$ , donde  $A_i \subseteq N_i$  es convexo si  $k \leq 0$  o  $D_k$ -convexo si  $k \geq 0$ . Entonces  $N_1 \bigsqcup_C N_2$  es un espacio  $CAT(k)$ .*

A través de estos pegamientos, construimos a continuación un ejemplo de espacio  $CAT(0)$  que no verifica la propiedad  $(Q_4)$ .

**Ejemplo 2.3.9.** *Consideremos el conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$  dotado con la distancia euclídea  $d_1$  y el conjunto  $B = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$  igualmente dotado con*

la métrica usual  $d_2$  sobre  $\mathbb{R}$ . Sea  $M$  el pegamiento  $A \sqcup_{(0,0)} B$  dotado con la métrica usual del pegamiento  $d$  que este caso resulta:

$$d(x, y) = \begin{cases} d_i(x, y), & \text{si } x \text{ e } y \text{ están ambos en } A \text{ o en } B \\ d_1(x, (0, 0)) + d_2((0, 0), y), & \text{si } x \in B \text{ e } y \in A. \end{cases}$$

A consecuencia del teorema anterior, se deduce que  $(M, d)$  es un espacio  $CAT(0)$ ; sin embargo, si consideramos los puntos  $x = (0, 1)$ ,  $y = (0, -1)$ ,  $p = (11/10, 0)$  y  $q = (-1, 0)$  en  $M$ , tenemos que  $d(p, x) = d(p, y) < d(q, y) = d(q, x)$  y  $d(p, m) > d(q, m)$  para  $m = (0, 0)$  el punto medio del segmento geodésico  $[x, y]$ , contradiciéndose así la condición  $(Q_4)$  en este espacio.

Encontrar más espacios que no verifiquen la condición  $(Q_4)$  no resulta ser una tarea fácil e inmediata. De ahí, la relevancia del teorema que presentamos a continuación ya que, con él, se pone de manifiesto cómo el espacio  $M$  del ejemplo anterior no es más que un caso particular dentro de una familia más amplia de espacios  $CAT(0)$  que no verifican la condición  $(Q_4)$ . A priori, notemos que dos espacios de curvatura constante pero distinta sólo se pueden “pegar” a través de líneas geodésicas, segmentos geodésicos o puntos si queremos aplicar el Teorema de los pegamientos de Reshetnyak. Una línea geodésica es una aplicación que se diferencia únicamente de una geodésica en que el conjunto sobre el que está definida es toda la recta real  $\mathbb{R}$ . Para probar un lema previo al teorema, necesitamos la siguiente proposición que se puede encontrar en [12, pág. 314].

**Proposición 2.3.10.** *Sea  $\Delta(p, q, r)$  un triángulo geodésico de un espacio  $CAT(k)$  y  $\Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$  un triángulo de comparación en  $M_k^2$ . Entonces son equivalentes las siguientes condiciones:*

- (1) *El ángulo en  $p$  del triángulo  $\Delta(p, q, r)$  es igual al ángulo en  $\bar{p}$  del triángulo  $\Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ .*
- (2) *Existe un punto  $x \in [p, r]$  con  $x \neq p, r$ , verificando que  $d(q, x) = d(\bar{q}, \bar{x})$ , donde  $\bar{x}$  es el punto de comparación de  $x$  en  $[\bar{p}, \bar{r}]$ .*

(3) Todos los ángulos de  $\Delta(p, q, r)$  son iguales a los ángulos correspondientes de  $\Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ .

(4) Existe una isometría del triángulo “completo”  $\bar{p}\bar{q}\bar{r}$  (que es la unión de  $\Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$  con su interior topológico) al espacio  $CAT(k)$  de partida que lleva los lados de  $\Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$  en los correspondientes lados de  $\Delta(p, q, r)$ .

**Lema 2.3.11.** Sea  $\Delta(x, y, z)$  un triángulo geodésico isométrico a un triángulo de  $M_k^2$  y sea  $\Delta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  un triángulo de comparación para  $\Delta(x, y, z)$  en  $M_{k'}^2$ , siendo  $k < k'$ . Entonces  $d(x, p) < d(\bar{x}, \bar{p})$  para cualesquiera  $p \in [y, z]$  y  $\bar{p}$  su punto de comparación en  $\Delta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .

**Demostración.** En virtud de las desigualdades de comparación, es inmediato que  $d(x, p) \leq d(\bar{x}, \bar{p})$ . Por la proposición anterior, vemos que, si se alcanza la igualdad anterior, es porque necesariamente ambos triángulos son isométricos, lo que contradice el hecho de que ambos triángulos tienen curvatura constante pero diferente.  $\square$

A continuación, mostramos una familia de espacios  $CAT(0)$  que no verifican la condición  $(Q_4)$ . Previamente, notemos que, en el siguiente resultado, los pegamientos se consideran en un sentido más amplio que el estudiado en el Teorema 2.3.8. Concretamente, este teorema contempla la posibilidad de pegar una familia arbitraria de espacios  $CAT(k)$  (a este respecto mirar el Teorema 11.3 de [8, pág. 349] que generaliza el Teorema de los pegamientos de Reshetnyak).

**Teorema 2.3.12.** Cualquier espacio  $CAT(0)$  construido mediante pegamientos y que contenga dos espacios de curvatura constante  $k$  y  $k'$  respectivamente con  $k \neq k'$  no satisface la condición  $(Q_4)$ .

**Demostración.** En primer lugar, consideramos el caso en el que el pegamiento contiene un segmento geodésico. Para no complicar la prueba en exceso, nos reduciremos al caso en el que pegamos los espacios  $M_{-1}^2$  y  $\mathbb{R}^2$ . Para simplificar, asumimos que el segmento a través del cual se hace el pegamiento es el lado de un triángulo no degenerado en ambos espacios; en caso contrario, podríamos reducir la situación anterior a la de un pegamiento de espacios a través de un punto, circunstancia que

estudiaremos a posteriori. Una vez probado el caso particular para estos dos espacios modelo, el caso general se obtiene aplicando técnicas de isometría sobre los triángulos de los espacios modelo para hacer que éstos coincidan con los triángulos considerados en el pegamiento.

Sean  $[x, y] \subseteq M_{-1}^2$  y  $[\bar{x}, \bar{y}] \subseteq \mathbb{R}^2$  dos segmentos geodésicos isométricos, o, equivalentemente, dos segmentos que tienen la misma longitud. Sea  $(M, d)$  el espacio métrico que resulta al pegar el plano euclídeo y el plano hiperbólico a través de esos dos segmentos. Sea  $\bar{z}$  un punto de  $\mathbb{R}^2 \setminus [\bar{x}, \bar{y}]$  tal que  $d(\bar{x}, \bar{z}) = d(\bar{y}, \bar{z})$ . Utilizando el Lema 1.4.30 que asegura la existencia de triángulos de comparación en  $M_{-1}^2$ , podemos considerar un punto  $z \in M_{-1}^2$  tal que  $d(z, x) = d(\bar{z}, \bar{x}) = d(\bar{y}, \bar{z}) = d(y, z)$ .

Como vamos a trabajar y razonar sobre los espacios  $M_{-1}^2$  y  $\mathbb{R}^2$  por separado, tratamos a los segmentos isométricos como si fueran diferentes aunque, realmente, no lo son en  $M$ . Sean  $m \in [x, y]$  y  $\bar{m} \in [\bar{x}, \bar{y}]$  los puntos medios de estos segmentos. Usando el lema anterior, podemos deducir que  $d(z, m) < d(\bar{z}, \bar{m})$ . Aplicando ahora la Ley del Paralelogramo en  $\mathbb{R}^2$  (o en general la Ley de los Cosenos), tenemos que

$$d(\bar{z}, \bar{m})^2 = \frac{d(\bar{y}, \bar{z})^2}{2} + \frac{d(\bar{x}, \bar{z})^2}{2} - \left( \frac{d(\bar{x}, \bar{y})}{2} \right)^2,$$

y por tanto podemos asegurar que  $d(\bar{z}, \bar{m})$  depende de forma continua de  $d(\bar{z}, \bar{x})$  y  $d(\bar{z}, \bar{y})$ . Así, basta acortar un poco estas distancias para llegar a una contradicción con la condición (Q<sub>4</sub>).

Supongamos ahora que pegamos dos espacios  $M$  y  $N$  de curvatura constante (pero distinta) por un punto  $w$ . Entonces  $d(x, y) = d_M(x, w) + d_N(w, y)$  para todo  $x \in M$  e  $y \in N$ . Podemos asumir que  $w$  es el vértice de un triángulo no degenerado en uno de estos espacios, por ejemplo  $N$  (observemos que de lo contrario se deduciría que ambos espacios  $M$  y  $N$  son  $\mathbb{R}$ -trees y, por tanto, no serían de curvatura constante como hemos supuesto desde un principio). Consideremos  $u, v \in N$  de tal modo que  $\triangle(w, u, v)$  es no degenerado. Asumamos además que  $d(w, v) = d(w, u)$ , lo cual no impone ninguna restricción. Sea  $p$  la proyección métrica de  $w$  sobre el segmento geodésico  $[u, v]$ ; entonces  $p \in (u, v)$ . Sean  $c, c' : [0, 1] \rightarrow N$  las geodésicas parametrizadas proporcionalmente a la longitud de arco de los segmentos  $[w, v]$  y  $[w, u]$  respectivamente.

Utilizando propiedades de simetría en los espacios modelo (mirar [8, Capítulo I.2]) y el hecho de que  $N$  es de curvatura constante y, por tanto, no es un  $\mathbb{R}$ -tree, se obtiene que  $d(w, c(t)) = d(w, c'(t))$  para todo  $t$  y que los segmentos  $[w, p]$  y  $[c(t), c'(t)]$  tienen como intersección el punto medio de ambos segmentos.

Para simplificar, supongamos ahora que  $d(w, p) = 5/4$  (de no ser así, basta realizar un cambio de escala y razonar de forma similar) y que  $q \in M$  es tal que  $d(w, q) = 3/4$ . Fijemos  $t \in (0, 1)$  de modo que el punto medio  $m$  de  $[c(t), c'(t)]$  satisface  $d(w, m) = 1/4$  y hace que  $x = c(t)$  e  $y = c'(t)$ . Realizando ahora un simple cálculo con la Ley de los Cosenos correspondiente, se obtiene que  $d(x, p) = d(y, p) < d(x, q) = d(y, q)$  y  $d(p, m) = d(q, m)$ . La prueba queda terminada una vez que se aplica un razonamiento de continuidad análogo al del caso anterior.  $\square$

La condición geométrica  $(Q_4)$  fue realmente introducida y a posteriori utilizada en [44] para probar la siguiente proposición.

**Proposición 2.3.13.** *Sea  $M$  un espacio  $CAT(0)$  completo que satisface la condición  $(Q_4)$ , y supongamos que  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  son dos sucesiones  $\Delta$ -convergentes al mismo punto  $p \in M$ . Supongamos que  $z_n \in [x_n, y_n]$  verifica que  $d(x_n, z_n) = \lambda d(x_n, y_n)$  para cierto  $\lambda \in (0, 1)$  fijo. Entonces la sucesión  $\{z_n\}$  también  $\Delta$ -converge a  $p$ .*

**Observación 2.3.14.** *La prueba del resultado anterior se caracteriza fundamentalmente por utilizar técnicas de ultraproducto en su desarrollo. Concretamente, la herramienta principal que se usa y que establece un puente entre las técnicas de ultraproducto y las técnicas elementales que definen la  $\Delta$ -convergencia es la Proposición 4.1 de [44], que proporciona una caracterización de esta convergencia en espacios métricos en términos de ultraproductos.*

Los autores de [44] preguntan en su trabajo si la condición  $(Q_4)$  es necesaria en la proposición anterior. Esta cuestión sólo parece tener sentido en ausencia de compacidad ya que el resultado anterior es trivialmente cierto en espacios  $CAT(0)$  propios, como ocurre en el Ejemplo 2.3.9. Así, este hecho responde negativamente a la pregunta mencionada. No obstante, vamos a mostrar a continuación que la condición  $(Q_4)$  puede ser reemplazada por otra más débil que resulta ser suficiente para

establecer una versión más fuerte de la Proposición 2.3.13. Esta nueva condición se denomina propiedad de la buena proyección sobre geodésicas aunque, generalmente, nos referiremos a ella con el nombre de propiedad  $(N)$ .

**Definición 2.3.15.** *Un espacio  $CAT(0)$  completo  $M$  tiene la propiedad  $(N)$  si, dado cualquier segmento geodésico  $I \subseteq M$ , se verifica que  $P_I(z) \in [P_I(x), P_I(y)]$  para cualesquiera  $x$  e  $y$  en  $M$  y  $z \in [x, y]$ .*

**Observación 2.3.16.** *Es fácil comprobar cómo, de entre los espacios que se obtienen mediante pegamientos por el Teorema 2.3.12, aquéllos que se obtienen al realizar un pegamiento a través de puntos verifican esta propiedad si los espacios originales la verifican. Para el caso en el que los pegamientos se realizan a través de segmentos geodésicos, la situación parece ser más complicada. De hecho, aún no conocemos ningún ejemplo de espacio  $CAT(k)$  que no satisfaga la propiedad  $(N)$ .*

Al no conocer todavía espacios  $CAT(0)$  sin la propiedad  $(N)$ , surge de manera natural la siguiente pregunta.

**Problema 2.3.17.** *¿Verifica cualquier espacio  $CAT(0)$  completo la propiedad  $(N)$ ?*

El siguiente lema nos muestra que efectivamente la condición  $(Q_4)$  es más fuerte que la propiedad  $(N)$ .

**Lema 2.3.18.** *Si un espacio  $CAT(0)$  completo  $M$  verifica la condición  $(Q_4)$ , entonces satisface la propiedad  $(N)$ .*

**Demostración.** En primer lugar, observemos que la propiedad  $(N)$  se deduce directamente de la continuidad de la proyección  $P$  (mirar la Observación 2.1.7) siempre que se verifique también que, si  $u \in (x, y)$  es tal que  $P(u) = P(x)$ , entonces necesariamente  $P(v) = P(x)$  cualquiera que sea  $v \in [x, u]$ . Supongamos que  $M$  no satisface la propiedad  $(N)$ . En este caso, existen  $x, y \in M$  y  $z \in (x, y)$ , y un segmento geodésico  $I \subseteq M$  tal que  $P_I(x) = P_I(y) \neq P_I(z)$ . Denotemos ahora  $p = P_I(x)$  y  $q = P_I(z)$ . Entonces, por la Proposición 2.1.6, se deduce que  $d(p, x) < d(q, x)$ ,  $d(p, y) < d(q, y)$ , pero  $d(q, z) < d(p, z)$ , contradiciéndose así la condición  $(Q_4)$ .  $\square$



A continuación, presentamos un teorema que ofrece una versión más fuerte de la Proposición 2.3.13 utilizando la propiedad  $(N)$ . Teniendo en cuenta la naturaleza de esta propiedad y lo aparentemente lejos que queda del concepto de  $\Delta$ -convergencia, establecemos previamente una relación, que nos será de gran utilidad, entre esta convergencia y la  $\phi_p$ -convergencia (recordemos que la definición de la  $\phi_p$ -convergencia (ver Sección 1.3) está íntimamente ligada con las proyecciones métricas).

**Proposición 2.3.19.** *Sea  $M$  un espacio  $CAT(0)$ . Una sucesión  $\{x_n\} \subset M$   $\Delta$ -converge a  $p$  si y sólo si  $\phi_p$ -converge a  $p$ .*

***Demostración.***

$\Rightarrow$ : Sean  $I$  un segmento geodésico que contiene al punto  $p$  y  $P_I(x_n)$  la proyección métrica de  $x_n$  sobre  $I$ . Como  $p \in I$ , se tiene que  $\{x_n\}$   $\phi_p$ -converge a  $p$  si y sólo si  $P_I(x_n) \rightarrow p$  cuando  $n \rightarrow \infty$  para cada segmento  $I$  de características similares. Por tanto, si  $\{x_n\}$  no  $\phi_p$ -converge a  $p$ , entonces existe  $I$  tal que  $P_I(x_n)$  no converge a  $p$  en un sentido fuerte. En este caso, existen una subsucesión de  $P_I(x_n)$ , que denotamos del mismo modo, y  $x \in I$  con  $x \neq p$  tales que  $P_I(x_n) \rightarrow x$ . Como  $P_I(x_n)$  es la proyección de  $x_n$  sobre  $I$ , extrayendo subsucesiones si es necesario, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, p),$$

desigualdad que contradice el hecho de que el  $\Delta$ -límite es único.

$\Leftarrow$ : Si  $\{x_n\}$  no  $\Delta$ -converge a  $p$ , entonces existen una subsucesión de  $\{x_n\}$ , que denotamos del mismo modo, y un punto  $x \neq p$  tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) < \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, p).$$

Basta considerar ahora el segmento geodésico determinado por  $p$  y  $x$  para llegar a una contradicción con el hecho de que  $\{x_n\}$   $\phi_p$ -converge a  $p$ .  $\square$

**Observación 2.3.20.** *Notemos que la prueba anterior es también válida para un espacio  $CAT(1)$  cuyo diámetro está acotado por  $\pi/2$ .*

Llegados a este punto, ya estamos en condiciones de mostrar el teorema que anunciábamos antes de la proposición anterior.

**Teorema 2.3.21.** *Sea  $M$  un espacio CAT(0) completo con la propiedad (N), y supongamos que  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  son dos sucesiones  $\Delta$ -convergentes al mismo punto  $p \in M$ . Supongamos que  $z_n \in [x_n, y_n]$  para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces la sucesión  $\{z_n\}$  también  $\Delta$ -converge a  $p$ .*

**Demostración.** Como  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  son ambas  $\Delta$ -convergentes a  $p$ , la Proposición 2.3.19 implica que ambas  $\phi_p$ -converjan a  $p$ . Veamos que  $\{z_n\}$  también  $\phi_p$ -converge a  $p$ . Sea  $I$  un segmento geodésico que contiene a  $p$ . Se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_I(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_I(y_n) = p.$$

Como  $P_I(z_n) \in [P_I(x_n), P_I(y_n)]$  para todo  $n$ , se deduce también que  $\lim P_I(z_n) = p$ , lo que muestra que  $\{z_n\}$   $\phi_p$ -converge a  $p$  y por tanto que  $\Delta$ -converge a  $p$ .  $\square$

Este teorema, a parte de mejorar la Proposición 2.3.13, nos ofrece una prueba de la misma que no utiliza técnicas de ultraproducto, sino técnicas elementales.

## 2.4. Característica de Lifšic en espacios CAT ( $k$ )

Al igual que ocurre con la convexidad uniforme, la estructura normal o la propiedad de intersección no vacía, la característica de Lifšic de un espacio métrico es también una cualidad del espacio que nos permite obtener significativas consecuencias dentro de la Teoría Métrica del Punto Fijo. En concreto, la característica de Lifšic de un espacio, introducida en [51], es una constante asociada al mismo que se determina en cierto modo teniendo en cuenta la forma de las bolas en ese espacio. En esta sección, nos centraremos en estudiar cómo se comporta esta constante en los espacios CAT( $k$ ). Veamos a continuación la definición de dicha constante. Para ello, necesitamos previamente conocer cuándo se dice que las bolas de un espacio métrico son  $c$ -regulares.

**Definición 2.4.1.** *Las bolas de un espacio métrico  $M$  son  $c$ -regulares si se verifica la siguiente condición: para cada  $l < c$  existe  $\mu, \alpha \in (0, 1)$  tales que, para cada  $x, y \in M$  y  $r > 0$  verificando  $d(x, y) \geq (1 - \mu)r$ , existe  $z \in M$  tal que*

$$B(x, (1 + \mu)r) \cap B(y, l(1 + \mu)r) \subseteq B(z, \alpha r).$$

**Definición 2.4.2.** La característica de Lifšic  $\kappa(M)$  de un espacio métrico  $M$  se define como:

$$\kappa(M) = \sup\{c \geq 1 : \text{las bolas en } M \text{ son } c\text{-regulares}\}.$$

Si tratamos de calcular la característica de Lifšic de la familia de espacios  $\text{CAT}(k)$ , para cierto  $k$  fijo, nos encontramos con el siguiente problema. Si revisamos la definición de los espacios  $\text{CAT}(k)$ , advertimos cómo la generalidad de la condición  $\text{CAT}(k)$  (incluso para  $k$  fijo) nos impide esclarecer cómo son en concreto las bolas de estos espacios y, por tanto, también el comportamiento de las intersecciones entre las mismas. De hecho, teniendo en cuenta que el plano euclídeo y el plano hiperbólico son dos espacios  $\text{CAT}(0)$  que poseen distinta característica de Lifšic, se pone de manifiesto cómo esta constante en principio no se puede estimar de forma concreta en familias tan amplias de espacios. Por ello, nuestro principal objetivo en esta sección es calcular de forma explícita la característica de Lifšic en los espacios modelo  $M_k^2$  para así obtener como consecuencia una estimación de esta constante en los espacios  $\text{CAT}(k)$ .

La siguiente proposición calcula de forma exacta la característica de Lifšic en los espacios modelo.

**Proposición 2.4.3.** Si  $k < 0$ ,  $\kappa(M_k^2) = \frac{\text{arccosh}(\cosh^2 \sqrt{-k})}{\sqrt{-k}}$ .

**Demostración.** Sea  $k < 0$  fijo. Para cada  $l \geq 1$ , el caso más desfavorable para encontrar algunos posibles  $\mu, \alpha \in (0, 1)$  que den  $c$ -regularidad al espacio se produce cuando la intersección de las bolas es de tal forma que contiene a dos puntos que están a distancia  $r$  uno del otro. Con objeto de encontrar el menor  $l \geq 1$  posible para que esto ocurra, consideramos la siguiente situación:

Conocido el grupo de isometrías sobre  $\mathbb{H}^2$  (mirar por ejemplo [60]), basta considerar los puntos  $x = (0, 0, 1) \in M_k^2$  y, para  $u = (0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ ,  $y = (\cosh \sqrt{-k})x + (\sinh \sqrt{-k})u = (0, \sinh \sqrt{-k}, \cosh \sqrt{-k})$ . Utilizando la definición de distancia en  $M_k^2$ , se obtiene que  $d(x, y) = 1$ . Consideremos los puntos  $c \in M_k^2$  que distan  $r = 1$  de  $y$ . Estos puntos tienen todos la forma  $c = (\cosh \sqrt{-k})y + (\sinh \sqrt{-k})v$ , donde  $v$  es un vector que verifica que  $\langle v|v \rangle = 1$  y  $\langle y|v \rangle = 0$ . La geometría del espacio hiperbólico

nos permite deducir que el punto  $c$  que nos proporciona el menor  $l$  posible es el correspondiente a  $v = (1, 0, 0)$  ( $d(c, c^*) = 2$  si  $c^*$  es el punto en la bola simétrico a  $c$  con respecto de  $[x, y]$ ). Es decir,

$$c = (\sinh \sqrt{-k}, \cosh(\sqrt{-k})\sinh \sqrt{-k}, \cosh^2 \sqrt{-k}).$$

Así, como

$$\cosh(\sqrt{-k}d(x, c)) = -\langle x|c \rangle = \cosh^2 \sqrt{-k},$$

tenemos que

$$\kappa(M_k^2) = d(x, c) \leq \frac{\operatorname{arccosh}(\cosh^2 \sqrt{-k})}{\sqrt{-k}}.$$

No obstante, como estábamos en el caso más desfavorable, se deduce que en realidad

$$\kappa(M_k^2) = \frac{\operatorname{arccosh}(\cosh^2 \sqrt{-k})}{\sqrt{-k}}.$$

□

A continuación, estimamos, a través de una cota inferior, la característica de Lifšic de los espacios CAT( $k$ ).

**Proposición 2.4.4.** *Sea  $k < 0$ . Si  $(M, d)$  es un espacio CAT( $k$ ) completo, entonces  $\kappa(M) \geq \kappa(M_k^2)$ .*

**Demostración.** Esta prueba se desarrolla de forma prácticamente similar a la del Teorema 5 de [17]; escribimos la prueba por cuestiones de completitud. Sean  $r > 0$ ,  $x, y \in M$  verificando que  $d(x, y) = r$  y sean  $\bar{x}, \bar{y} \in M_k^2$  dos puntos cualesquiera cumpliendo que  $d(x, y) = d(\bar{x}, \bar{y})$ . Supongamos que  $l < \kappa(M_k^2)$ . Entonces

$$r(B(\bar{x}, r) \cap B(\bar{y}, lr)) \leq \xi r$$

para algún  $\xi < 1$ . Escojamos ahora  $\alpha \in (\xi, 1)$ . Para  $\mu \in (0, 1)$  suficientemente cercano a 0 y  $\alpha$  suficientemente cercano a 1, se obtiene que

$$r(B(\bar{x}, (1 + \mu)r) \cap B(\bar{y}, l(1 + \mu)r)) \leq \alpha r,$$

con  $d(\bar{x}, \bar{y}) \geq (1 - \mu)r$ . Sea

$$\bar{S} := B(\bar{x}, (1 + \mu)r) \cap B(\bar{y}, l(1 + \mu)r)$$

y

$$S := B(x, (1 + \mu)r) \cap B(y, l(1 + \mu)r).$$

De nuevo por las isometrías en  $\mathbb{H}^2$  (mirar [60], o, más concretamente para este caso, la observación sobre hiperplanos en  $\mathbb{H}^n$  en [8, pág. 21]), se deduce que el centro de Chebyshev  $\bar{c}$  de  $\bar{S}$  se encuentra sobre el segmento  $[\bar{x}, \bar{y}]$ . Además, si  $u \in S$  y  $\Delta(\bar{y}, \bar{x}, \bar{u})$  es un triángulo de comparación para  $\Delta(y, x, u)$  en  $M_k^2$ , se tiene que  $\bar{u} \in \bar{S}$ . Por lo tanto,  $d(\bar{u}, \bar{c}) \leq \alpha r$ . Si  $c$  es el punto del segmento  $[x, y]$  para el cual  $d(y, c) = d(\bar{y}, \bar{c})$ , entonces  $d(u, c) \leq d(\bar{u}, \bar{c}) \leq \alpha r$ , de donde se deduce el resultado.  $\square$

**Observación 2.4.5.** *En [17] se probó que  $\kappa(M) \geq \sqrt{2}$  para cualquier espacio  $M$   $CAT(k)$  con  $k \leq 0$  y también que  $\kappa(M) = 2$  si  $M$  es un  $\mathbb{R}$ -tree. En ese mismo trabajo, se conjeturó en la Observación 1 que la característica de Lifšic de un espacio  $CAT(k)$  con  $k < 0$  es una función continua y decreciente en función de  $k$  que toma valores en el intervalo  $(\sqrt{2}, 2)$ . Notar cómo considerando las dos proposiciones anteriores se contesta positivamente a esta conjetura.*

**Observación 2.4.6.** *Los resultados de esta sección se formulan sólo para espacios  $CAT(k)$  con  $k \leq 0$  por motivos de exposición. De forma similar se puede probar cuando  $k > 0$  que, bajo condiciones adecuadas de acotación,*

$$\kappa(M) \geq \kappa(M_k^2) = \frac{\text{Arccos}(\cos^2 \sqrt{k})}{\sqrt{k}},$$

si  $M$  es un espacio  $CAT(k)$  con  $k > 0$ .  $\text{Arccos}(\cos^2(\sqrt{k}))$  se debe de interpretar como el valor  $\arccos(\cos^2(\sqrt{k}))$  que varía de forma continua y creciente con respecto de  $k$ .



## Capítulo 3

# Teoremas de Punto Fijo en Espacios Geodésicos

En este capítulo utilizamos las propiedades estudiadas en el capítulo anterior para obtener distintos resultados de punto fijo en espacios geodésicos.

Este capítulo está dividido en dos secciones. En la primera sección vamos a trabajar con aplicaciones univaluadas que verifican diferentes condiciones de tipo métrico en espacios CAT(1) principalmente. En la segunda sección manejaremos aplicaciones multivaluadas no expansivas en contextos métricos geodésicos más generales.

### 3.1. Punto fijo para aplicaciones univaluadas

Los problemas de punto fijo que vamos a resolver en esta sección son para aplicaciones no expansivas, de tipo convexo y uniformemente lipschitzianas. Por cuestiones de estilo en la Memoria, dividimos esta sección en tres bloques diferenciados. En cada bloque se describirá un tipo diferente de aplicación y presentemos para ella los resultados de punto fijo que hemos obtenido.

### 3.1.1. Punto fijo para aplicaciones no expansivas

El principal objetivo de este bloque es estudiar el Teorema de Kirk de punto fijo para aplicaciones no expansivas en espacios CAT(1). Comenzamos describiendo algunos conceptos básicos de la Teoría Métrica del Punto Fijo.

**Definición 3.1.1.** Sean  $(M, d_1)$  y  $(N, d_2)$  dos espacios métricos. Una aplicación  $T: M \rightarrow N$  se dice *lipschitziana* si existe una constante  $l \geq 0$  tal que para todo  $x, y \in M$

$$d_2(Tx, Ty) \leq ld_1(x, y).$$

Decimos que  $T$  es no expansiva si la constante de Lipschitz  $l$  es igual a 1.

**Definición 3.1.2.** Sean  $(M, d)$  un espacio métrico y  $C$  un subconjunto de  $M$ . Sea  $T: C \subseteq M \rightarrow M$  una aplicación. Un punto  $z$  de  $C$  se dice que es un punto fijo de  $T$  si  $Tz = z$ .

La primera versión del Teorema de Punto Fijo de Kirk aparece en el año 1965 [42] para espacios de Banach con estructura normal uniforme. Tras este resultado, son muchas las generalizaciones que han surgido a partir del mismo. Concretamente, en los años ochenta, se ofrece la primera extensión de este teorema en un contexto puramente métrico. A continuación, ofrecemos la versión del Teorema general de Kirk de punto fijo para espacios métricos que más nos interesa en esta Memoria (mirar [33, pág. 103] para conocer más detalles sobre este teorema o [23] para una minuciosa exposición sobre la Teoría Métrica del Punto Fijo).

**Teorema 3.1.3.** Sea  $M$  un espacio métrico completo, acotado y no vacío que posee estructura normal uniforme. Cualquier aplicación no expansiva  $T: M \rightarrow M$  tiene un punto fijo.

En algunos contextos, el Teorema de Kirk del punto fijo puede probarse de varias formas diferentes (mirar [24, pág. 22] para el caso de los espacios de Banach uniformemente convexos). Esto ocurre por ejemplo en el marco de los espacios CAT(1). Para estos espacios, la prueba que a continuación ofrecemos de este resultado es



probablemente la más inmediata y se basa fundamentalmente en las propiedades que conocemos de los centros asintóticos en los espacios CAT(1).

**Teorema 3.1.4.** *Sea  $M$  un espacio CAT(1) completo y no vacío tal que  $r(M) < \pi/2$ . Entonces cualquier aplicación no expansiva  $T: M \rightarrow M$  tiene al menos un punto fijo.*

**Demostración.** Sea  $x \in M$  un punto concreto, pero arbitrario. Consideremos la sucesión de las iteradas de  $T$  en  $x$ ,  $\{T^n x\}$ . Como  $r(M) < \pi/2$ , la Proposición 2.2.1 asegura que  $\{T^n x\}$  tiene un único centro asintótico  $z$  en  $M$ . Además, al ser  $T$  no expansiva, se tiene que  $d(T^n x, Tz) \leq d(T^{n-1}x, z)$  para todo  $n \geq 1$ . Basta tomar límite superior en la desigualdad anterior para deducir que  $z = Tz$ .  $\square$

**Observación 3.1.5.** *El Teorema 11 que ofrece W. A. Kirk en [35] prueba también el resultado anterior aunque asumiendo la hipótesis más fuerte sobre el espacio  $M$  de cumplir que  $\text{diam}(M) < \pi/2$ . Es más, este resultado para  $\text{diam}(M) < \pi/2$  se obtiene también como consecuencia directa del Teorema 3.1.3 ya que, como comentamos en el capítulo anterior, un espacio CAT(1) con esta restricción sobre el diámetro tiene estructura normal uniforme.*

Al final de este capítulo incluimos un apéndice donde ofrecemos una prueba alternativa de este resultado basada en técnicas de estructura normal.

Una pregunta natural que surge de este teorema es la de si la condición sobre el radio que ahí aparece puede mejorarse de alguna forma. El problema que nos planteamos en esta dirección es ver qué ocurre si consideramos una aplicación también no expansiva pero ahora definida sobre un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de un espacio CAT(1). Como cualquier subconjunto de un espacio CAT(1) con estas características es a su vez un espacio CAT(1), el teorema anterior nos asegura que, bajo la condición  $r_C(C) \leq \pi/2$ , tenemos existencia de punto fijo. Teniendo en cuenta que en general  $r_M(C) \leq r_C(C)$ , resulta de interés el siguiente lema.

**Lema 3.1.6.** *Sea  $C$  un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de un espacio CAT(1) completo  $M$ . Si  $r_M(C) < \pi/2$  y  $\text{diam}(M) \leq \pi$ , entonces  $r_M(C) = r_C(C)$ .*

**Demostración.** Como el conjunto  $C$  es acotado, el Teorema 2.1.3 asegura que existe un único punto  $x \in M$  tal que  $C \subseteq B(x, r_M(C))$ . En consecuencia,  $\text{dist}(x, C) \leq r_M(C) < \pi/2$ . Aplicando ahora la Proposición 2.1.6, se obtiene que  $P_C(x) = x$ , lo que implica que  $x \in C$  y por tanto que  $r_M(C) = r_C(C)$ .  $\square$

**Observación 3.1.7.** *Observemos la estrecha relación que existe entre este lema y la Proposición 2 de [35]. En ambos resultados se establecen propiedades del radio  $r_C(C)$  para un subconjunto cerrado y convexo  $C$  de un espacios  $CAT(k)$  con  $k > 0$ .*

A partir de este lema vemos que el problema que nos planteábamos es equivalente al Teorema 3.1.4. Así, una formulación equivalente de este teorema es la que presentamos a continuación.

**Teorema 3.1.8.** *Sea  $C$  un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de un espacio  $CAT(1)$  completo  $M$ . Si  $r_M(C) < \pi/2$  y  $\text{diam}(M) \leq \pi$ , entonces cualquier aplicación no expansiva  $T: C \rightarrow C$  tiene al menos un punto fijo.*

Los resultados anteriores son óptimos en el sentido de que la condición  $r_M(C) < \pi/2$  no se puede reemplazar por  $r_M(C) \leq \pi/2$ . Basta considerar como conjunto  $C$  cualquier círculo diametral de  $\mathbb{S}^2$ .

### 3.1.2. Punto Fijo para aplicaciones de tipo convexo

En Teoría Métrica del Punto Fijo, se entiende por Principio de Demiclosedness cualquier resultado que garantiza existencia de punto fijo de una aplicación cuando la misma posee una sucesión de puntos fijos aproximados, es decir, cuando existe una sucesión  $\{x_n\}$  en el espacio verificando que  $d(x_n, Tx_n) \rightarrow 0$ .

En esta segunda parte de la sección, el principal objetivo es probar un Principio de Demiclosedness en espacios  $CAT(1)$  para una familia de aplicaciones más amplia que la de las aplicaciones no expansivas. Los resultados que obtendremos a lo largo de esta sección han sido considerados y estudiados previamente para espacios  $CAT(0)$  en [44]. La obtención de estos resultados en espacios  $CAT(0)$  se apoya fuertemente en la desigualdad CN, condición de la que no disponemos en los espacios  $CAT(1)$ .

Esto hace que nuestra aproximación a estos resultados requiera el uso de técnicas diferentes. A continuación, definimos los distintos tipos de aplicaciones con los que vamos a trabajar. En todas estas definiciones  $M$  denota un espacio CAT(1) cuyo diámetro es menor que  $\pi/2$  y  $K$  un subconjunto convexo y no vacío de  $M$ .

**Definición 3.1.9.** Una aplicación  $T: K \rightarrow M$  se dice que es de tipo  $\Gamma$  si existe una función continua, estrictamente creciente y convexa  $\gamma: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  con  $\gamma(0) = 0$  tal que, si  $x, y \in K$  y si  $m$  y  $m'$  son respectivamente los puntos medios de los segmentos  $[x, y]$  y  $[Tx, Ty]$ , entonces

$$\gamma(d(m', Tm)) \leq |d(x, y) - d(Tx, Ty)|.$$

**Definición 3.1.10.** Una aplicación  $T: K \rightarrow M$  es llamada  $\alpha$ -casi convexa para  $\alpha: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  continua, estrictamente creciente y  $\alpha(0) = 0$  si, para cualesquiera  $x, y \in K$ , se tiene que

$$J_T m \leq \alpha(\max\{J_T x, J_T y\}),$$

donde  $m$  es el punto medio del segmento  $[x, y]$  y  $J_T x := d(x, Tx)$ .

**Definición 3.1.11.** Una aplicación  $T: K \rightarrow M$  se dice que es de tipo convexo sobre  $K$  si cualesquiera que sean las sucesiones  $\{x_n\}, \{y_n\}$  en  $K$ , si  $\{m_n\}$  es la sucesión de puntos medios de los segmentos  $[x_n, y_n]$ , entonces

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, Ty_n) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(m_n, Tm_n) = 0.$$

La siguiente proposición relaciona las aplicaciones no expansivas con las tres aplicaciones que acabamos de describir en el contexto de los espacios CAT(1).

**Proposición 3.1.12.** Sea  $K$  un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de un espacio CAT(1)  $M$  y sea  $T: K \rightarrow M$ . Si  $\text{diam}(K) < \pi/2$ , entonces se tienen las siguientes implicaciones:

$$\begin{aligned} T \text{ es no expansiva} &\Rightarrow T \text{ es de tipo } \Gamma \Rightarrow \\ T \text{ es } \alpha\text{-casi convexa} &\Rightarrow T \text{ es de tipo convexo.} \end{aligned}$$

**Demostración.** Para demostrar la primera implicación, consideramos puntos cualesquiera  $x$  e  $y$  en  $K$  y denotamos  $m$  y  $m'$  los puntos medios de los segmentos  $[x, y]$  y  $[Tx, Ty]$  respectivamente.

En primer lugar veamos que  $d(m', Tm) < \pi/4$ . Por la no expansividad de  $T$ , sabemos que  $d(Tm, Tx)$  y  $d(Tm, Ty)$  son ambas menores que  $\pi/4$ . Por ello,  $Tx$  y  $Ty$  están en la bola  $B(Tm, \pi/4)$  y, con ellos, también cualquier punto del segmento geodésico  $[Tx, Ty]$  ya que la bola es convexa. Como consecuencia, se deduce que la función  $\gamma$  que buscamos basta encontrarla definida sobre el intervalo  $[0, \pi/4]$ .

Consideremos a continuación las siguientes desigualdades. En primer lugar, por la Proposición 2.1.1, se tiene que

$$d(m', Tm) \leq \arccos \left( \frac{\cos(\max\{d(Tm, Tx), d(Tm, Ty)\})}{\cos(\frac{d(Tx, Ty)}{2})} \right) =$$

(sin pérdida de generalidad)

$$= \arccos \left( \frac{\cos(d(Tm, Tx))}{\cos(\frac{d(Tx, Ty)}{2})} \right).$$

Teniendo en cuenta que los dos términos de la desigualdad anterior son menores que  $\pi/2$ , se deduce que

$$\begin{aligned} \cos(d(m', Tm)) &\geq \frac{\cos(d(Tm, Tx))}{\cos(\frac{d(Tx, Ty)}{2})} \\ &\geq \frac{\cos(d(m, x))}{\cos(\frac{d(Tx, Ty)}{2})} = \frac{\cos(\frac{d(x, y)}{2})}{\cos(\frac{d(Tx, Ty)}{2})}, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\cos^2(d(m', Tm)) \geq \frac{1 + \cos(d(x, y))}{1 + \cos(d(Tx, Ty))}.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2(d(m', Tm)) &\leq 1 - \frac{1 + \cos(d(x, y))}{1 + \cos(d(Tx, Ty))} \\
&= \frac{\cos(d(Tx, Ty)) - \cos(d(x, y))}{1 + \cos(d(Tx, Ty))} \\
&\leq \cos(d(Tx, Ty)) - \cos(d(x, y)) \\
&\quad (\text{para un cierto } \xi \in (d(Tx, Ty), d(x, y))) \\
&= (-\operatorname{sen}(\xi))(d(Tx, Ty) - d(x, y)) \\
&= \operatorname{sen}(\xi)(d(x, y) - d(Tx, Ty)) \\
&\leq d(x, y) - d(Tx, Ty).
\end{aligned}$$

De este modo, basta considerar como función  $\gamma$  la función que en el intervalo  $t \in [0, \pi/4]$  tiene la expresión  $\gamma(t) = \operatorname{sen}^2(t)$  y en el intervalo  $(\pi/4, \infty)$  toma los valores de cualquier extensión continua y apropiada, según las exigencias del problema, de la anterior función. Así, queda probada la primera implicación.

Para demostrar la segunda implicación, seguimos los mismos pasos que en [21],

$$\begin{aligned}
J_T m = d(m, Tm) &\leq d(m, m') + d(m', Tm) \\
&\leq d(m, m') + \gamma^{-1}(|d(x, y) - d(Tx, Ty)|) \\
&\leq d(m, p) + d(p, m') + \gamma^{-1}(d(x, Tx) + d(y, Ty)),
\end{aligned}$$

donde  $p$  es el punto medio del segmento  $[x, Ty]$ .

Consideremos en primer lugar el triángulo  $\triangle(x, y, Ty) \subseteq M$  y su triángulo de comparación  $\triangle(\bar{x}, \bar{y}, \overline{Ty})$  en  $\mathbb{S}^2$ . Sean  $\bar{m} \in [\bar{x}, \bar{y}]$  y  $\bar{p} \in [\bar{x}, \overline{Ty}]$  los puntos de comparación de  $m$  y  $p$  respectivamente. Con objeto de probar que  $d(m, p) \leq d(y, Ty)$ , veamos que  $d(\bar{m}, \bar{p}) \leq d(\bar{y}, \overline{Ty})$ .

Sean  $c, c' : [0, 1] \rightarrow M$  las geodésicas parametrizadas proporcionalmente a la longitud de arco que unen  $\bar{x}$  con  $\bar{y}$  y  $\overline{Ty}$  respectivamente. Entonces

$$c(t) = (\cos at)\bar{x} + (\operatorname{sen at})\bar{u},$$

$$c'(t) = (\cos bt)\bar{x} + (\operatorname{sen bt})\bar{v},$$

donde  $a = d(x, y)$ ,  $b = d(x, Ty)$ , y  $\bar{u} = \frac{\bar{y} - (\bar{x}|\bar{y})\bar{x}}{\|\bar{y} - (\bar{x}|\bar{y})\bar{x}\|}$ ,  $\bar{v} = \frac{\overline{Ty} - (\bar{x}|\overline{Ty})\bar{x}}{\|\overline{Ty} - (\bar{x}|\overline{Ty})\bar{x}\|}$  son los vectores unitarios que definen esas geodésicas. Como  $\cos d(c(t), c'(t)) = (c(t)|c'(t))$ , basta probar que la función  $f(t) = (c(t)|c'(t))$  es decreciente.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $\bar{x} = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ . Así, si  $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , se deduce que  $u_1 = v_1 = 0$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(t) &= ((\cos at, (\sin at)u_2, (\sin at)u_3)|(\cos bt, (\sin bt)v_2, (\sin bt)v_3)) = \\ &= \cos at \cos bt + \sin at \sin bt (\bar{u}|\bar{v}) = \\ &= \frac{1}{2}(1 - (\bar{u}|\bar{v})) \cos(t(a+b)) + \frac{1}{2}(1 + (\bar{u}|\bar{v})) \cos(t(a-b)). \end{aligned}$$

Entonces

$$f'(t) = -\frac{1}{2}(1 - (\bar{u}|\bar{v}))(a+b)\sin(t(a+b)) - \frac{1}{2}(1 + (\bar{u}|\bar{v}))(a-b)\sin(t(a-b)).$$

Como  $a$  y  $b$  son números menores que  $\pi/2$  y  $(\bar{u}|\bar{v}) \leq 1$ , se tiene que  $f'(t) \leq 0$ .

Del mismo modo, podemos probar que  $d(p, m') \leq d(x, Tx)$ . Con ello,

$$\begin{aligned} J_T m &\leq d(y, Ty) + d(x, Tx) + \gamma^{-1}(d(x, Tx) + d(y, Ty)) \leq \\ &\leq \alpha(\max\{J_T x, J_T y\}), \end{aligned}$$

donde  $\alpha(t) = 2t + \gamma^{-1}(2t)$ . Así, queda probada esta implicación.

La tercera y última implicación es inmediata.  $\square$

A continuación, mostramos el Principio de Demiclosedness que anunciábamos en la introducción de este bloque. Veamos primero cuándo se dice que una sucesión  $\{x_n\}$  es de puntos aproximados para una aplicación  $T$ .

**Definición 3.1.13.** Sean  $M$  un espacio métrico,  $C \subseteq M$  y  $T: C \rightarrow M$ . Decimos que  $\{x_n\} \subset C$  es una sucesión de puntos fijos aproximados para  $T$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0.$$

**Teorema 3.1.14.** *Sea  $K$  un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de un espacio  $CAT(1)$  completo  $M$  y sea  $T: K \rightarrow M$  una aplicación continua de tipo convexo. Supongamos que*

$$\inf\{d(x, Tx) : x \in K\} = 0.$$

*Si  $\text{diam}(M) < \pi/2$ , entonces  $T$  tiene un punto fijo en  $K$ .*

**Demostración.** Consideremos  $x_0 \in M$  un punto fijo, pero arbitrario, y definamos

$$\rho_0 = \inf\{\rho > 0 : \inf\{d(x, Tx) : x \in B(x_0, \rho) \cap K\} = 0\}.$$

Como  $K \subseteq B(x_0, \text{diam}(M))$ , tenemos que  $\rho_0 < \pi/2 < \infty$ . Además, si  $\rho_0 = 0$ , entonces  $x_0 \in K$  y  $Tx_0 = x_0$  al ser  $T$  continua. Por ello, supongamos que  $\rho_0 > 0$ . Consideremos ahora una sucesión  $\{x_n\} \subset K$  tal que  $d(x_n, Tx_n) \rightarrow 0$  y  $d(x_n, x_0) \rightarrow \rho_0$ . Basta mostrar que  $\{x_n\}$  es una sucesión convergente para probar el teorema. Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que  $\{x_n\}$  no es convergente. En ese caso, existen  $\varepsilon > 0$  y subsucesiones  $\{u_k\}$  y  $\{v_k\}$  de  $\{x_n\}$  tales que  $d(u_k, v_k) \geq \varepsilon$  para todo  $k$ . Extrayendo subsucesiones si es necesario, podemos suponer que  $d(u_k, x_0) \leq \rho_0 + \frac{1}{k}$  y  $d(v_k, x_0) \leq \rho_0 + \frac{1}{k}$ . Sean  $m_k$  el punto medio del segmento geodésico  $[u_k, v_k]$ ,  $\bar{m}_k$  el punto de comparación correspondiente a  $m_k$  en el triángulo de comparación  $\Delta(\bar{x}_0, \bar{u}_k, \bar{v}_k) \subseteq \mathbb{S}^2$  y  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\rho_0 + \frac{1}{k}}$ . Considerando la desigualdad  $CAT(1)$  y el módulo de convexidad de  $\mathbb{S}^2$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} d(x_0, m_k) &\leq d(\bar{x}_0, \bar{m}_k) \leq \left(\rho_0 + \frac{1}{k}\right) \left(1 - \delta_{\mathbb{S}^2}\left(\rho_0 + \frac{1}{k}, \varepsilon'\right)\right) = \\ &= \arccos\left(\frac{\cos\left(\rho_0 + \frac{1}{k}\right)}{\cos(\varepsilon/2)}\right). \end{aligned}$$

Como  $0 < \varepsilon < \pi/2$  y  $(\rho_0 + \frac{1}{k})$  es decreciente y convergente, podemos considerar  $k$  lo suficientemente grande de modo que

$$\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{\cos\left(\rho_0 + \frac{1}{k}\right)}{\cos \rho_0} < 1.$$

Entonces, para  $k \geq k'$ , se tiene que

$$\frac{\cos\left(\rho_0 + \frac{1}{k}\right)}{\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \geq \frac{\cos\left(\rho_0 + \frac{1}{k'}\right)}{\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} > \cos \rho_0,$$

y por tanto

$$d(x_0, m_k) \leq \arccos \left( \frac{\cos(\rho_0 + \frac{1}{k})}{\cos(\varepsilon/2)} \right) \leq \rho' < \rho_0.$$

Por otro lado, como  $T$  es de tipo convexo, se tiene que  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(m_k, Tm_k) = 0$ , contradiciéndose así la definición de  $\rho_0$ .  $\square$

**Observación 3.1.15.** *Observemos cómo el resultado anterior sigue siendo cierto si la condición de acotación sobre  $M$  se sustituye por el hecho de que exista una sucesión  $\{x_n\} \subset M$  verificando que  $r(x_n) < \pi/2$  y  $\lim d(x_n, Tx_n) = 0$ , situación que es visiblemente más débil aunque más complicada de comprobar.*

### 3.1.3. Punto fijo para aplicaciones uniformemente lipschitzianas

En este último bloque de la sección ofrecemos dos resultados de punto fijo para aplicaciones uniformemente lipschitzianas en el contexto de los espacios  $\text{CAT}(k)$ . Ambos resultados establecen una cota superior sobre la constante uniforme de lipschitz para garantizar existencia de punto fijo. En el primer caso, la cota superior viene dada en términos de la característica de Lifšic (mirar la Sección 2.4), y en el segundo, es el coeficiente de estructura normal del espacio el que determina dicha cota. Como veremos después, el segundo resultado está también relacionado con la propiedad  $(P)$  que consideramos en la Sección 2.2 del capítulo anterior. Antes de presentar los resultados mencionados, damos la definición de aplicación uniformemente  $l$ -lipschitziana.

**Definición 3.1.16.** *Sea  $M$  un espacio métrico. Una aplicación  $T: M \rightarrow M$  se dice que es uniformemente  $l$ -lipschitziana si existe una constante  $l$  tal que  $d(T^n x, T^n y) \leq ld(x, y)$  para cualesquiera  $x, y \in M$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

Comenzamos analizando el primer caso. En el Capítulo II hemos estudiado la característica de Lifšic de un espacio métrico. Esta característica fue introducida en [51] para demostrar el siguiente resultado de existencia de punto fijo para aplicaciones uniformemente  $l$ -lipschitzianas en espacios métricos (mirar también [23]).

**Teorema 3.1.17.** *Sea  $M$  un espacio métrico acotado y completo. Entonces cualquier aplicación  $T: M \rightarrow M$  uniformemente  $l$ -lipschitziana verificando que  $l < \kappa(M)$  tiene un punto fijo.*



Considerando este teorema junto con la Proposición 2.4.4, que recordemos proporciona una cota inferior de la característica de Lifšic de un espacios  $CAT(k)$ , se deduce de forma inmediata el siguiente resultado.

**Teorema 3.1.18.** *Sea  $M$  un espacio  $CAT(k)$  acotado y completo. Entonces cualquier aplicación  $T: M \rightarrow M$  uniformemente  $l$ -lipschitziana verificando que  $l < \kappa(M_k^2)$  tiene un punto fijo.*

**Observación 3.1.19.** (1) *Este teorema afina el Teorema 6 de [17] ya que este último establece el mismo resultado anterior aunque únicamente para espacios  $CAT(0)$ .*

(2) *Teniendo en cuenta que en el capítulo anterior se ha calculado explícitamente la característica de Lifšic de cualquier espacio modelo  $M_k^2$ , este teorema proporciona una cota superior concreta y conocida de la constante uniforme de lipschitz que sólo depende de  $k$ .*

Pasamos ahora al segundo caso. Comenzamos recordando un resultado de [53] que relaciona las aplicaciones uniformemente  $l$ -lipschitzianas con los conceptos geométricos de estructura normal uniforme y propiedad  $(P)$ .

**Teorema 3.1.20.** *Sea  $M$  un espacio métrico acotado y completo con estructura normal uniforme y que además tiene la propiedad  $(P)$ . Entonces cualquier aplicación  $T: M \rightarrow M$  uniformemente  $l$ -lipschitziana verificando que  $l < \tilde{N}(M)^{-\frac{1}{2}}$  tiene un punto fijo, donde  $\tilde{N}(M)$  es el coeficiente de estructura normal de  $M$ .*

Como consecuencia de las propiedades geométricas que poseen los espacios  $CAT(1)$ , se verifica el siguiente resultado.

**Teorema 3.1.21.** *Sea  $M$  un espacio  $CAT(1)$  completo. Si  $\text{diam}(M) < \pi/2$ , entonces cualquier aplicación  $T: M \rightarrow M$  uniformemente  $l$ -lipschitziana verificando que  $l < \tilde{N}(M)^{-\frac{1}{2}}$  tiene un punto fijo.*

**Demostración.** Basta tener en cuenta que el Teorema 2.2.13 y la Observación 3.1.5 establecen que los espacios  $CAT(1)$  con diámetro menor que  $\pi/2$  tienen la propiedad  $(P)$  y estructura normal uniforme respectivamente.  $\square$

### 3.2. Punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas

Sean  $M$  un espacio métrico. Se dice que una aplicación  $T$  es multivaluada si  $T: M \rightarrow 2^M$ , donde  $2^M$  denota el conjunto de las partes de  $M$ . Para este tipo de aplicaciones, decimos que un punto  $z \in M$  es un punto fijo de  $T$  si  $z \in Tz$ . En esta sección presentamos varios teoremas de punto fijo para aplicaciones multivaluadas en espacios métricos uniformemente convexos, un contexto en principio más general que en el que hemos trabajado en la sección anterior. Aunque estos resultados se prueban en su mayoría para espacios uniformemente convexos que admiten un módulo de convexidad monótono, se puede comprobar que también son ciertos cuando el espacio ambiente admite un módulo de convexidad semicontinuo inferiormente por la derecha. Las pruebas en el caso semicontinuo se omitirán en su mayoría ya que, en general, tan sólo difieren del caso monótono en ciertos detalles técnicos. Para ver la diferencia entre usar uno u otro módulo de convexidad, podemos también analizar las pruebas de algunos resultados del capítulo siguiente (mirar por ejemplo el Corolario 4.2.9).

Los problemas de punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas en el contexto de los espacios métricos uniformemente convexos fueron estudiados por primera vez por Shimizu y Takahashi en [64], donde la existencia de punto fijo se garantizaba bajo fuertes condiciones sobre el módulo de convexidad y la condición adicional de que la métrica fuera convexa en cierto sentido (más abajo describimos esta convexidad). A consecuencia de que, en lo que sigue, no asumimos ninguna condición de convexidad sobre las métricas, la resolución de problemas de punto fijo se convierte ahora en una tarea mucho más complicada. De hecho, esta ausencia de convexidad propiciará que tengamos que imponer nuevas condiciones sobre los módulos de convexidad. En su mayoría, estas condiciones estarán relacionadas con la geometría de los espacios con los que trabajemos.

Veamos en primer lugar cuándo se dice que una aplicación multivaluada es no expansiva.

**Definición 3.2.1.** Sean  $M$  un espacio métrico. Una aplicación  $T: M \rightarrow 2^M$  que

toma valores cerrados, acotados y no vacíos se dice que es no expansiva si

$$H(Tx, Ty) \leq d(x, y),$$

donde  $H$  es la métrica de Hausdorff, para cualesquiera que sean  $x, y \in M$ . Se dice además que es una contracción si existe  $c \in (0, 1)$  tal que  $H(Tx, Ty) \leq cd(x, y)$  igualmente para todo  $x, y \in M$ .

Nuestro principal objetivo en esta sección es estudiar si, en el contexto de los espacios acotados y uniformemente convexos con módulo de convexidad monótono (o semi-continuo inferiormente por la derecha), cualquier aplicación no expansiva  $T: M \rightarrow 2^M$  con valores compactos y no vacíos tiene al menos un punto fijo. Este problema fue por primera vez resuelto de forma afirmativa por Shimizu y Takahashi en [64] imponiéndose la siguiente condición de convexidad sobre la métrica.

**Definición 3.2.2.** Sea  $(M, d)$  un espacio métrico. Se dice que  $d$  es convexa si para cualesquiera  $x, y$  y  $z$  de  $M$

$$d(z, m) \leq 1/2(d(z, x) + d(z, y)),$$

donde  $m$  es un punto medio entre  $x$  e  $y$ .

Si consideramos el problema de punto fijo que hemos mencionado en el párrafo anterior sin imponer esta condición de convexidad sobre la métrica, la situación se complica enormemente y sólo obtenemos respuestas parciales aunque válidas sobre los espacios de mayor relevancia estudiados hasta el momento. Nuestra primera respuesta la obtenemos imponiendo la siguiente condición geométrica sobre el espacio:

- (i) existe un punto  $x \in M$  tal que para cada  $t \in (0, 1)$  existe un número  $s(t) \in (0, 1)$  que verifica que, cualesquiera que sean  $y, z \in M$ :

$$d(u, v) \leq s(t) d(y, z),$$

donde  $u, v$  denotan puntos en segmentos geodésicos  $[x, y]$  y  $[x, z]$  respectivamente tales que  $d(x, u) = t d(x, y)$  y  $d(x, v) = t d(x, z)$ .

**Observación 3.2.3.** *La condición (i) puede entenderse como una especie de condición de hiperbolicidad débil. De hecho, es inmediato comprobar que los espacios hiperbólicos uniformemente convexos estudiados en [47, 49, 50] y los espacios  $CAT(k)$  uniformemente convexos para  $k \in \mathbb{R}$  satisfacen la condición (i). Observemos aquí que, en realidad, cualquier espacio  $CAT(k)$  con  $k \leq 0$  es también un espacio hiperbólico uniformemente convexo.*

A continuación, ofrecemos el resultado que anunciábamos anteriormente de existencia de punto fijo para aplicaciones multivaluadas cuando imponemos la condición (i). En la prueba de este resultado aparece el concepto de sucesión de puntos fijos aproximados para una aplicación multivaluada.

**Definición 3.2.4.** *Sean  $M$  un espacio métrico y  $T: M \rightarrow 2^M$ . Decimos que  $\{x_n\} \subset M$  es una sucesión de puntos fijos aproximados para  $T$  si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0.$$

**Teorema 3.2.5.** *Sea  $(M, d)$  un espacio métrico completo y uniformemente convexo con un módulo de convexidad monótono. Supongamos que  $M$  es acotado y satisface la condición (i). Entonces cualquier aplicación  $T: M \rightarrow 2^M \setminus \{\emptyset\}$  no expansiva que toma valores compactos tiene un punto fijo.*

**Demostración.** Sea  $x_0 \in M$  el punto dado por la condición (i). Por (i) y el hecho de que  $Tx$  es compacto, cualquiera que sea  $x$  en el espacio, se deduce que las aplicaciones multivaluadas  $T_t: M \rightarrow 2^M$ , donde  $t \in (0, 1)$  y definidas por

$$T_t x = \{u \in M : \exists y \in Tx : u \in [x_0, y] \text{ y } d(x_0, u) = t d(x_0, y)\}$$

son contracciones con constante  $s(t)$  para cada  $t$  que toman valores compactos en cada punto. Aplicando el Teorema del Punto Fijo de Nadler para contracciones multivaluadas [54], se deduce que  $T_t$  tiene un punto fijo para cada  $t$  y como consecuencia que  $T$  tiene una sucesión  $\{x_n\} \subset M$  de puntos fijos aproximados. Según el Corolario 4.2.7, sabemos además que  $\{x_n\}$  tiene un único centro asintótico en  $M$ . El resto de la

prueba es similar a la del Teorema 15.3 de [23, pág. 165] que prueba este mismo resultado en el contexto de los espacios de Banach uniformemente convexos. En cualquier caso, introducimos los detalles por completitud.

Por la Proposición 2.2.4 del capítulo anterior, vemos que  $\{x_n\}$  admite una subsucesión regular. Sin pérdida de generalidad asumimos que la subsucesión es la propia sucesión  $\{x_n\}$ . Sean  $\{w\} = A(x_n)$  y  $r = r(x_n)$  el centro y radio asintótico de  $\{x_n\}$  respectivamente. Consideremos para cada  $n \in \mathbb{N}$  un punto  $y_n \in Tx_n$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x_n) = 0$ . A su vez, por cada  $y_n$  tomamos un punto  $z_n \in Tw$  tal que

$$d(y_n, z_n) \leq H(Tx_n, Tw) \leq d(x_n, w).$$

Como  $Tw$  es compacto, podemos extraer una subsucesión  $\{z_{n_k}\}$  de  $\{z_n\}$  que converge a un punto  $z \in Tw$ . Sabiendo además que

$$d(x_{n_k}, z) \leq d(x_{n_k}, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, z_{n_k}) + d(z_{n_k}, z)$$

y que

$$d(z_{n_k}, y_{n_k}) \leq d(x_{n_k}, w),$$

se deduce que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} d(z, x_{n_k}) \leq r.$$

Basta tener en cuenta que  $\{x_n\}$  es regular para concluir que  $w = z \in Tw$ .  $\square$

Por el capítulo anterior, sabemos que los espacios  $CAT(1)$  no tienen por qué ser uniformemente convexos si su diámetro no es menor que  $\pi/2$ . Sin embargo, a continuación mostramos que la riqueza de la geometría de los espacios de curvatura acotada hace posible obtener un resultado similar al anterior para espacios  $CAT(1)$  aunque sólo impongamos que su radio es menor que  $\pi/2$ . En este caso enunciamos el teorema de forma general para los espacios  $CAT(k)$  con  $k > 0$ . Recordemos que para  $k > 0$  el número  $D_k$  se definía en el primer capítulo como  $D_k = \pi/\sqrt{k}$ .

**Teorema 3.2.6.** *Sea  $k > 0$  y sea  $M$  un espacio  $CAT(k)$  completo tal que  $r(M) < \frac{D_k}{2}$ . Entonces cualquier aplicación no expansiva  $T: M \rightarrow 2^M \setminus \{\emptyset\}$  que toma valores compactos tiene al menos un punto fijo.*

**Demostración.** Consideremos un punto  $x_0 \in M$  de tal modo que

$$r_{x_0}(M) = \sup_{y \in M} d(x_0, y) < \frac{D_k}{2}.$$

Como se observa en [57, Lema 3], basta tomar la función  $s(t) = \sin \frac{t\pi}{2}$  con  $t \in (0, 1)$  para que se verifique la condición (i) con  $x = x_0$  en  $M$ . Razonando como en la prueba del resultado anterior, podemos encontrar una sucesión  $\{x_n\}$  de puntos fijos aproximados para  $T$ . Teniendo en cuenta la Proposición 2.2.1 y el hecho de que  $r(x_n) \leq r(M)$ , se deduce que el centro asintótico de cualquier subsucesión de  $\{x_n\}$  es único. El resto de la prueba se desarrolla siguiendo los mismos pasos que el resultado anterior.  $\square$

En lo que sigue, vamos a considerar dos nuevas condiciones geométricas con objeto de poder garantizar, al igual que con (i), existencia de punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas con valores compactos en espacios métricos uniformemente convexos. Describimos estas dos condiciones geométricas del siguiente modo:

(ii) existe una función  $f: \mathbb{N} \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  tal que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} f(n, \delta) = 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N};$$

y, para cualesquiera  $x, y, z \in M$  y  $u \in [x, y]$ ,  $v \in [x, z]$  escogidos de tal modo que  $d(x, u) = n^{-1} d(x, y)$ ,  $d(x, v) = n^{-1} d(x, z)$  y  $d(u, v) \leq \delta$ , se tiene que

$$d(y, z) \leq f(n, \delta);$$

(iii)  $\lim_{\substack{r \rightarrow R^+ \\ \varepsilon \rightarrow 2^-}} \delta(r, \varepsilon) = 1$ , donde  $\delta(r, \varepsilon)$  es, como de costumbre, un módulo de convexidad del espacio y  $R > 0$ .

En términos generales, las condiciones (i) y (ii) ofrecen información complementaria sobre la geometría de un espacio. Mientras la condición (i) implica que las geodésicas que parten de un mismo punto tienen que separarse, sin importar a qué velocidad lo hacen, la condición (ii) impone una cota superior sobre la posible separación entre dos geodésicas que parten de un mismo punto. De hecho, se comprueba fácilmente que cualquier espacio geodésico que admite geodésicas que se bifurcan (un

espacio de estas características es aquél en el que podemos encontrar dos segmentos geodésicos que parten de un mismo punto y que se cortan en otro punto distinto al de partida pero donde ninguno de los segmentos está contenido o es igual al otro) no puede verificar la condición (ii). En particular, ningún  $\mathbb{R}$ -tree tiene la propiedad (ii). Por el contrario, una familia de espacios que sí satisface esta condición son los espacios geodésicos con curvatura acotada inferiormente por un valor real  $k$ . Aunque en esta Memoria sólo hemos manejado el concepto de curvatura desde otra perspectiva, concretamente bajo la premisa de estar acotada superiormente, son cada vez más los autores que están estudiando y analizando las consecuencias geométricas que sobre un espacio tiene acotar por debajo la curvatura del mismo (el lector interesado puede consultar el libro [12] para conocer más en detalle estos espacios).

Antes de enunciar el siguiente resultado de existencia de punto fijo, introducimos un concepto que a ese respecto vamos a necesitar.

**Definición 3.2.7.** *Un espacio geodésico  $M$  se dice que tiene la propiedad de extensión geodésica si cualquier segmento geodésico del espacio está contenido en una línea geodésica, o lo que es lo mismo, una isometría  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ .*

Veamos cómo las condiciones (ii) y (iii) garantizan existencia de punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas en un contexto parecido al del Teorema 3.2.5.

**Teorema 3.2.8.** *Sea  $(M, d)$  un espacio métrico completo, uniformemente convexo con un módulo de convexidad monótono  $\delta(r, \varepsilon)$  y verificando la propiedad de extensión geodésica. Supongamos además que  $M$  satisface las condiciones (ii) y (iii) y que  $C$  es un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de  $M$ . Si  $T: C \rightarrow 2^C \setminus \{\emptyset\}$  es una aplicación no expansiva que toma valores compactos, entonces  $T$  tiene al menos un punto fijo.*

**Demostración.** Según la prueba del Teorema 3.2.5, sabemos que, si

$$\inf_{x \in C} d(x, Tx) = 0,$$

entonces la tesis de este teorema es cierta. Por ello, supongamos que

$$d := \inf_{x \in C} d(x, Tx) > 0$$

y consideremos  $\varepsilon > 0$  fijo y suficientemente pequeño. Escojamos  $x_0 \in C$  de tal modo que  $d(x_0, Tx_0) < d + \varepsilon$  y denotemos  $d_1$  a esa distancia entre punto y conjunto. Como  $Tx_0$  es un conjunto compacto, es claro que existe al menos un punto  $x_1 \in Tx_0$  que verifica que  $d(x_0, x_1) = d_1$ . Denotemos  $m_0$  el punto medio del segmento geodésico  $[x_0, x_1]$ . Las propiedades que satisface la aplicación  $T$  implican que existe  $m_1 \in Tm_0$  tal que  $d(x_1, m_1) \leq \frac{d_1}{2}$  y  $d(m_0, m_1) = d_2 \geq d$ .

Para estimar la distancia entre  $x_0$  y  $m_1$ , consideremos el punto medio  $p_0$  del segmento  $[m_0, m_1]$ . Utilizando la convexidad uniforme del espacio  $M$ , obtenemos que

$$d(x_1, p_0) \leq \left(1 - \delta \left(\frac{d_1}{2}, \frac{2d}{d_1}\right)\right) \frac{d_1}{2} =: \delta_1.$$

Si denotamos  $x_{\frac{3}{2}}$  el punto del rayo geodésico  $\gamma$  que contiene a  $[x_0, x_1]$  (un rayo geodésico no es más que una isometría entre  $[0, \infty)$  y el espacio  $M$ ) que verifica que  $d(x_1, x_{\frac{3}{2}}) = \frac{d_1}{2}$  y  $x_{\frac{3}{2}} \neq m_0$ , se tiene que  $d(m_1, x_{\frac{3}{2}}) \leq f(2, \delta_1)$  y

$$d(x_0, m_1) \geq \frac{3}{2}d - f(2, \delta_1). \quad (3.2.1)$$

Repitiendo este razonamiento para  $m_0, m_1$  y  $p_0$ , obtenemos puntos  $p_1 \in Tp_0$  y  $m_{\frac{3}{2}} \in M$  que satisfacen que

$$d(p_1, m_{\frac{3}{2}}) \leq f(2, \delta_2) \quad \text{y} \quad d(m_0, m_{\frac{3}{2}}) = \frac{3}{2}d_2,$$

donde

$$\delta_2 = \left(1 - \delta \left(\frac{d_2}{2}, \frac{2d}{d_2}\right)\right) \frac{d_2}{2}.$$

Si denotamos  $x_2$  el punto de  $\gamma$  que verifica que  $d(x_0, x_2) = 2d_1$  y  $d(x_1, x_2) = d_1$ , es fácil comprobar que  $d(x_2, m_{\frac{3}{2}}) \leq f(3, \delta_1)$ . Así

$$d(x_0, p_1) \geq d(x_0, x_2) - d(x_2, m_{\frac{3}{2}}) - d(m_{\frac{3}{2}}, p_1) \geq 2d - f(3, \delta_1) - f(2, \delta_2).$$

Siguiendo el proceso anterior, construimos por inducción una sucesión de puntos  $\{x_{\frac{n}{2}}\}$  y otra de números  $\{\delta_n\}$  tales que

$$d(x_0, x_{\frac{n}{2}}) = \frac{n}{2}d_1$$



y obteniéndose que, para cada  $n$  fijo, existe un punto  $y \in C$  que cumple que

$$d\left(y, x_{\frac{n}{2}}\right) \leq \sum_{k=2}^{n-1} f(k, \delta_{n-k}). \quad (3.2.2)$$

A continuación, fijemos  $M > 0$  y consideremos  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $M < (N - 2) \frac{d}{2}$ . En primer lugar, observemos cómo, por (ii), podemos escoger  $\delta > 0$  de modo que

$$\sum_{k=1}^N f(k, \delta) < d,$$

y por (iii), podemos considerar  $\varepsilon > 0$  lo suficientemente pequeño para que

$$\left(1 - \delta \left(r, \frac{d}{r}\right)\right) \frac{d+\varepsilon}{2} < \delta \text{ para todo } r \in \left(\frac{d}{2}, \frac{d+\varepsilon}{2}\right].$$

Escogiendo  $x_0 \in C$  tal que  $d(x_0, Tx_0) < d+\varepsilon$  y repitiendo nuestro proceso iterativo  $N$  veces, se observa que la sucesión  $\{d_n\}_{n=1}^N$  decrece, por lo que  $\delta_n < \delta$  para todo  $n \in \{1, \dots, N\}$ . Por último, encontramos  $y \in C$  que verifica, según (3.2.2),

$$d\left(y, x_{\frac{N}{2}}\right) \leq \sum_{n=1}^N f(n, \delta)$$

y

$$d(x_0, y) \geq N \frac{d}{2} - \sum_{n=1}^N f(n, \delta) > (N - 2) \frac{d}{2} > M,$$

contradiéndose con esto el hecho de que  $C$  es acotado. Así  $d = 0$  y el resultado queda probado.  $\square$

Terminamos este capítulo recordando una condición geométrica diferente a las anteriores que nos va a permitir obtener otra versión del Teorema 3.2.8. Esta condición se denomina propiedad de Stečkin.

**Definición 3.2.9.** *Un espacio métrico  $M$  se dice que tiene la propiedad de Stečkin si fijados  $\varepsilon, d$ , y  $r$  números positivos existe  $\xi = \xi(\varepsilon, d, r) > 0$  tal que si  $x, y \in M$  son tales que  $d(x, y) = r$ , entonces*

$$\text{diam}(B(y, d + \xi) \setminus B(x, d + r)) < \varepsilon.$$

La propiedad Stečkin fue introducida en [66] para obtener diferentes resultados de existencia de único “punto más cercano” y único “punto más alejado” a subconjuntos

cerrados de un espacio normado. Esta propiedad ha sido estudiada por muchos autores desde entonces, siendo especialmente relevante en el estudio de los espacios de Banach uniformemente convexos (mirar por ejemplo [7, 31]). Es bastante conocido que los espacios geodésicos con geodésicas que se bifurcan no poseen la propiedad Stečkin [31, 68] y se ha estudiado también la relación entre esta propiedad y la de poseer curvatura acotada inferiormente (mirar [31, 68]). A continuación mostramos que esta propiedad, junto con una condición similar a la condición (ii), asegura existencia de punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas. En primer lugar introducimos la condición (ii)′:

(ii)′ existe una función  $f: \mathbb{N} \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  tal que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} f(n, \delta) = 0, \quad n \in \mathbb{N};$$

y, para cualesquiera  $x, y, z \in M$  y  $u \in [x, y]$ ,  $v \in [x, z]$  escogidos de modo que  $d(x, u) = \frac{2}{n} d(x, y)$ ,  $d(x, v) = \frac{2}{n} d(x, z)$  y  $d(u, v) \leq \delta$ , se tiene que

$$d(y, z) \leq f(n, \delta);$$

**Teorema 3.2.10.** *Sea  $(M, d)$  un espacio métrico completo, uniformemente convexo con un módulo de convexidad monótono y verificando la propiedad de extensión geodésica. Supongamos además que  $M$  satisface la condición (ii)′ y la propiedad Stečkin. Sea  $C$  un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de  $M$ . Si  $T: C \rightarrow 2^C \setminus \{\emptyset\}$  es una aplicación no expansiva que toma valores compactos, entonces  $T$  tiene al menos un punto fijo.*

**Demostración.** Omitimos los detalles de esta prueba pues son prácticamente análogos a los de la prueba del Teorema 3.2.8. Tan sólo señalamos a continuación la principal diferencia entre las mismas. Ésta tiene lugar cuando se utiliza el módulo de convexidad para estimar en primer lugar  $d(x_0, m_1)$  (mirar (3.2.1)) y después  $d(y, x_{\frac{n}{2}})$  (mirar (3.2.2)). En el presente teorema se usa sin embargo la propiedad de Stečkin para obtener estimaciones similares.  $\square$

### 3.3. Apéndice

Terminamos este capítulo ofreciendo una segunda prueba del Teorema 3.1.4. En primer lugar, recordemos que la prueba que ya dimos de este resultado al principio de este capítulo se basaba fundamentalmente en la unicidad de centro asintótico de la sucesión de iteradas de la aplicación no expansiva con la que se trabajaba. La nueva prueba sigue los mismos pasos que W. A. Kirk consideró en [33, pág. 103] para probar el Teorema 3.1.3. A pesar de que, como acabamos de comentar, el esquema de la prueba que desarrollamos es conocido, las herramientas que vamos utilizar a lo largo del mismo son sutilmente distintas a las del Teorema 3.1.3. El cambio más importante que se produce en la nueva prueba es que, en lugar de trabajar con el concepto de estructura normal de un espacio geodésico, se manejará una noción geométrica íntimamente relacionada con ésta, pero diferente. Esta noción es la de estructura  $\wedge$ -normal. Veamos a continuación su definición. Sea  $M$  un espacio métrico geodésico. Llamaremos coeficiente de estructura  $\wedge$ -normal de  $M$  al número

$$\hat{N}(M) = \sup \left\{ \frac{r_A(A)}{\text{diam}(A)} \right\}$$

donde el supremo se toma sobre todos los conjuntos  $A \subseteq M$  que son convexos, admisibles y que verifican que  $\text{diam}(A) > 0$ . De forma similar a cómo se define la estructura normal clásica, decimos que  $M$  tiene estructura  $\wedge$ -normal si el cociente  $\frac{r_A(A)}{\text{diam}(A)}$  es estrictamente menor que 1 cualquiera que sea el conjunto admisible  $A$  con diámetro mayor que cero. Si además  $\hat{N}(M) \leq c$  para alguna constante  $c < 1$ , entonces se dice que  $M$  tiene estructura normal  $\wedge$ -uniforme.

Veamos a continuación que para garantizar estructura normal  $\wedge$ -uniforme en el contexto de los espacios  $\text{CAT}(1)$  basta con asumir que el radio de Chebyshev del espacio  $r(M)$  sea menor que  $\pi/2$ .

**Corolario 3.3.1.** *Si  $M$  es un espacio  $\text{CAT}(1)$  completo que verifica que  $r(M) < \pi/2$ , entonces  $M$  tiene estructura normal  $\wedge$ -uniforme.*

**Demostración.** Al igual que cuando se prueba la estructura normal uniforme (mirar la Observación 3.1.5), este resultado se obtiene como consecuencia directa de combinar el Teorema 2.1.3 y el Lema 3.1.6.  $\square$

**Observación 3.3.2.** Comparando este resultado con la Observación 3.1.5, donde se prueba estructura normal uniforme para espacios  $CAT(1)$ , se observa cómo al trabajar con la estructura normal  $\wedge$ -uniforme en este contexto garantizamos que una familia más amplia de espacios verifique la propiedad ya que, si recordamos, sólo podemos garantizar estructura normal uniforme en un espacio  $CAT(1)$  si éste verifica que  $\text{diam}(M) < \pi/2$ .

A continuación probamos el resultado de punto fijo que motiva la redacción de este apéndice. Observemos cómo en este teorema la estructura normal  $\wedge$ -uniforme juega un papel análogo a la estructura normal uniforme en el Teorema 3.1.3.

**Teorema 3.3.3.** Sea  $M$  un espacio  $CAT(1)$  completo y no vacío tal que  $r(M) < \pi/2$ . Entonces cualquier aplicación no expansiva  $T: M \rightarrow M$  tiene al menos un punto fijo.

**Demostración.** Utilizando el Corolario 2.1.8 y el Lema de Zorn se prueba que existe un subconjunto convexo, admisible y no vacío  $D$  en  $M$  que es minimal con respecto al hecho de ser convexo, admisible, no vacío y verificar que  $T(D) \subseteq D$ . Si además  $\text{cac}(T(D))$  denota la clausura convexa y admisible (definida de forma natural con respecto a la inclusión de conjuntos) de  $T(D)$  en  $M$ , entonces  $T: \text{cac}(T(D)) \rightarrow \text{cac}(T(D))$ . Por tanto, la minimalidad de  $D$  implica que

$$D = \text{cac}(T(D)).$$

Veamos ahora que el conjunto  $D$  está formado por un único punto. Supongamos por el contrario que  $\text{diam}(D) > 0$ . Considerando el Lema 3.1.6 y el hecho de que  $r(M) < \pi/2$ , es posible escoger  $r$  de modo que

$$r_D(D) < r < \min\{\pi/2, \text{diam}(D)\}.$$

Así, el conjunto

$$C = \{x \in D : D \subseteq B(x, r)\} \neq \emptyset$$

es convexo y, como

$$C = \left( \bigcap_{x \in D} B(x, r) \right) \cap D,$$

se concluye que también es admisible.

Aunque a partir de este punto la prueba es similar a la del Teorema 5.1 de [33], introducimos los detalles por completitud. Consideremos ahora un punto  $w$  cualquier de  $C$ . Si  $x \in D$ , se tiene que

$$d(Tw, Tx) \leq d(w, x) \leq r.$$

De este modo,  $Tx \in B(Tw, r)$  cualquiera que sea el punto  $x$  de  $D$ . Así,  $T(D) \subseteq B(Tw, r)$  y por tanto  $\text{cov}(T(D)) \subseteq B(Tw, r)$ . Como sabíamos que  $D = \text{cov}(T(D))$ , se obtiene que  $D \subseteq B(Tw, r)$ . Esto prueba que  $Tw \in C$ . Como  $w$  estaba tomado arbitrariamente en  $C$ , se deduce que  $T : C \rightarrow C$ . Por otro lado, si consideramos dos puntos  $p$  y  $q$  en  $C$ , se tiene que  $d(p, q) \leq r$ , y por ello  $\text{diam}(C) \leq r < \text{diam}(D)$ . Esto demuestra que  $C$  es un subconjunto propio de  $D$ , es decir,  $C \subsetneq D$ . Como sabemos que  $C$  es convexo y que  $C \in \mathcal{A}(M)$  y  $T : C \rightarrow C$ , se llega a una contradicción con el hecho de que  $D$  es minimal. De este modo obtenemos que  $\text{diam}(D) = 0$  y así que  $D$  consiste en un único punto que, por definición, es un punto fijo que  $T$ .

□



## Capítulo 4

# Teoremas de Punto Fijo bajo Condiciones Asintóticas Puntuales

Este cuarto capítulo está dividido en dos secciones principales. En la primera de ellas se introducen las nuevas nociones que vamos a necesitar para poder comprender y presentar los principales resultados que se conocen hasta este momento sobre contracciones asintóticas en espacios métricos. Al final de esta primera sección mostramos los resultados a partir de los cuales comienza nuestra tarea investigadora en este contexto.

En la segunda y última sección desarrollamos nuestras contribuciones a esta línea de investigación. Fundamentalmente, estudiamos la existencia de puntos fijos y la convergencia de las iteradas de contracciones asintóticas puntuales en el marco de los espacios métricos uniformemente convexos.

## 4.1. Nociones y resultados previos

Comenzamos esta sección definiendo las principales herramientas que utilizaremos en este capítulo para desarrollar las pruebas de nuestros resultados. Aunque en la siguiente sección trabajaremos en el contexto concreto de los espacios métricos uniformemente convexos, presentaremos estas herramientas en el marco general de los espacios métricos ya que la estructura geodésica del espacio no es necesaria para su definición .

Sea  $(M, d)$  un espacio métrico y  $\mathcal{F}$  una familia de subconjuntos de  $M$ .

**Definición 4.1.1.** *Decimos que  $\mathcal{F}$  define una estructura de convexidad sobre  $M$  si contiene a las bolas cerradas de  $M$  y es estable por intersección.*

**Ejemplo 4.1.2.** *Dado un espacio métrico  $M$ , la familia de los conjuntos admisibles de  $M$ ,  $\mathcal{A}(M)$ , define una estructura de convexidad sobre  $M$ .*

**Definición 4.1.3.** *Supongamos que  $\mathcal{F}$  es una estructura de convexidad sobre  $M$ . Dada  $\Phi: M \rightarrow [0, \infty)$ , decimos que  $\Phi$  es  $\mathcal{F}$ -convexa si  $\{x : \Phi(x) \leq r\} \in \mathcal{F}$  para cualquier  $r \geq 0$ .*

Recordemos que, dada una sucesión acotada  $\{x_n\}$  en un espacio métrico  $M$ , la función tipo asociada a esta sucesión es la función  $\varphi: M \rightarrow [0, \infty)$  definida como  $\varphi(x) = r(x, x_n)$  para todo  $x \in M$ .

**Definición 4.1.4.** *Decimos que una estructura de convexidad es  $T$ -estable si todas las funciones tipo son  $\mathcal{F}$ -convexas.*

En [28], se considera la siguiente definición de compacidad para estructuras de convexidad.

**Definición 4.1.5.** *Dada  $\mathcal{F}$  una estructura de convexidad sobre  $M$ , decimos que  $\mathcal{F}$  es compacta si cualquier familia  $(A_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$  de elementos de  $\mathcal{F}$  tiene intersección no vacía siempre que  $\bigcap_{\alpha \in F} A_\alpha \neq \emptyset$  para cualquier subconjunto finito  $F \subseteq \Gamma$ .*



En la siguiente sección utilizaremos también la siguiente idea de compacidad. Se observa que esta segunda noción de compacidad es más débil que la anteriormente descrita.

**Definición 4.1.6.** *Dada  $\mathcal{F}$  una estructura de convexidad sobre  $M$ , decimos que  $\mathcal{F}$  es casi compacta si cualquier cadena decreciente  $(A_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$  de subconjuntos acotados y no vacíos de  $\mathcal{F}$  tiene intersección no vacía.*

**Observación 4.1.7.** *En el contexto concreto de los espacios métricos uniformemente convexos, si recordamos la Observación 1.2.28, podemos deducir que, si  $\mathcal{F}$  denota la familia de subconjuntos cerrados y convexos de un espacio métrico completo  $M$  uniformemente convexo con módulo de convexidad monótono (o semicontinuo inferiormente por la derecha), entonces  $\mathcal{F}$  es una estructura de convexidad casi compacta para  $M$ .*

En este capítulo vamos a trabajar con distintas nociones que debilitan el concepto de contracción. En primer lugar presentamos la noción de contracción puntual. Este concepto fue introducido en [38] como una generalización natural del concepto de contracción.

**Definición 4.1.8.** *Sea  $(M, d)$  un espacio métrico. Decimos que una aplicación  $T: M \rightarrow M$  es una contracción puntual si existe una función  $\alpha: M \rightarrow [0, 1)$  tal que*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha(x)d(x, y)$$

*para cualesquiera  $x, y \in M$ .*

En [43] (ver también [38]), se prueba un resultado de existencia, unicidad y convergencia de las iteradas a puntos fijos para este tipo de aplicaciones en el marco de los espacios de Banach. Concretamente, se prueba que, si  $K$  es un subconjunto convexo y débilmente compacto de un espacio de Banach y  $T: K \rightarrow K$  es una contracción puntual, entonces  $T$  tiene un único punto fijo y la sucesión de las iteradas de  $T$  converge al punto fijo para cualquier  $x \in K$ .

En [28], se prueba además que la unicidad de punto fijo y la convergencia de las iteradas al punto fijo para este tipo de aplicaciones son consecuencia directa de la existencia de punto fijo.

La Teoría Asintótica del Punto Fijo se caracteriza por imponer condiciones sobre las iteradas de la aplicación con la que se trabaja. Esta teoría tiene una larga historia dentro del análisis funcional no lineal (ver por ejemplo [9]) y, de hecho, el concepto de “contracción asintótica” ya se sugiere en una de las versiones más tempranas del Principio de Contracción de Banach que se atribuye a Caccioppoli [14]. Dando ahora un salto grande en el tiempo, pasamos a hablar directamente de las *contracciones asintóticas puntuales*, que se introducen por primera vez en [39] y son el resultado de combinar la definición anterior con condiciones de tipo contractivo para las iteradas de la aplicación.

**Definición 4.1.9.** Sean  $(M, d)$  un espacio métrico y  $T: M \rightarrow M$  una aplicación. Sea  $\alpha_n: X \rightarrow [0, \infty)$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , una función tal que

$$d(T^n x, T^n y) \leq \alpha_n(x) d(x, y) \text{ para cualesquiera } x, y \in X.$$

Entonces, se dice que:

- $T$  es una *contracción asintótica puntual* si  $\{\alpha_n\}$  converge puntualmente a  $\alpha: M \rightarrow [0, 1)$ .
- $T$  es una *aplicación no expansiva asintótica puntual* si  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(x) \leq 1$  para cualquier  $x \in M$ .
- $T$  es una *contracción fuertemente asintótica puntual* si existe  $0 < k < 1$  tal que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(x) \leq k$  para cualquier  $x \in M$ .

## 4.2. Teoremas de punto fijo para aplicaciones no expansivas asintóticas puntuales en espacios métricos uniformemente convexos

En esta sección estudiamos la Teoría del Punto Fijo para las aplicaciones asintóticas, que hemos definido al término de la sección anterior, en el contexto de los espacios métricos uniformemente convexos. Aunque, por razones de exposición, nuestros resultados se prueban únicamente en espacios métricos uniformemente convexos que admiten un módulo de convexidad monótono (al igual que en la Sección 3.2 del capítulo anterior), dichos resultados también son ciertos cuando la condición de monotonicidad del módulo se sustituye por la de ser semicontinuo inferiormente por la derecha. No obstante, cuando sea necesario, ofreceremos algunas indicaciones sobre las diferencias de las pruebas en ambos casos. Comenzamos con el siguiente resultado de carácter técnico.

**Proposición 4.2.1.** *Sea  $(M, d)$  un espacio métrico completo y uniformemente convexo con un módulo de convexidad monótono (o semicontinuo inferiormente por la derecha)  $\delta(r, \varepsilon)$ . Consideremos la familia  $\mathcal{F}$  formada por todos los subconjuntos cerrados y convexos de  $M$ . Entonces  $\mathcal{F}$  define una estructura de convexidad  $T$ -estable y casi compacta sobre  $M$ .*

### ***Demostración.***

Como consecuencia de la Observación 4.1.7, vemos que únicamente falta probar que  $\mathcal{F}$  es  $T$ -estable. Sea  $\{x_n\}$  una sucesión acotada de  $M$  y consideremos el tipo definido a partir de  $\{x_n\}$ . Necesitamos probar que  $C_r = \{x : r(x, x_n) \leq r\} \in \mathcal{F}$  para cualquier  $r$  mayor o igual cero. De forma inmediata se deduce que  $C_r$  es cerrado. Para ver que  $C_r$  es convexo, consideremos dos puntos diferentes  $x$  e  $y$  en  $C_r$ . No supone ninguna restricción asumir que  $\limsup_n d(y, x_n) \leq \limsup_n d(x, x_n) = r_1 \leq r$ . Sea  $m$  el punto medio del segmento  $[x, y]$  y tomemos  $\varepsilon_1 = \frac{d(x, y)}{r + 1}$ . Por la convexidad uniforme, tenemos que

$$d(m, x_n) \leq (1 - \delta(\max\{d(x, x_n), d(y, x_n)\}, \varepsilon_1)) \max\{d(x, x_n), d(y, x_n)\}$$

$$< \max\{d(x, x_n), d(y, x_n)\},$$

y por lo tanto

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(m, x_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \max\{d(x, x_n), d(y, x_n)\} = r_1 \leq r.$$

Así,  $m \in C_r$ . □

Los teoremas que ofrecemos a continuación fueron probados en [28] bajo la hipótesis de compacidad sobre la estructura de convexidad. Los enunciamos sin embargo bajo la hipótesis de casi compacidad ya que esta condición más débil de compacidad es, en realidad, la que se requiere en las pruebas desarrolladas en [28].

**Teorema 4.2.2.** *Sea  $M$  un espacio métrico acotado. Supongamos que la estructura de convexidad  $\mathcal{A}(M)$  de los conjuntos admisibles de  $M$  es casi compacta. Sea  $T: M \rightarrow M$  una contracción puntual. Entonces  $T$  tiene un único punto fijo  $z$ . Además, la órbita  $\{T^n x\}$  converge a  $z$  para cada  $x \in M$ .*

**Teorema 4.2.3.** *Sea  $M$  un espacio métrico acotado. Supongamos que la estructura de convexidad  $\mathcal{A}(M)$  es casi compacta. Sea  $T: M \rightarrow M$  una contracción fuertemente asintótica puntual. Entonces  $T$  tiene un único punto fijo  $z$ . Además, la órbita  $\{T^n x\}$  converge a  $z$  para cada  $x \in M$ .*

Atendiendo al contenido de la Proposición 4.2.1, se obtiene como consecuencia el siguiente resultado.

**Corolario 4.2.4.** *Los dos teoremas anteriores son válidos en espacios métricos completos, acotados y uniformemente convexos que admiten un módulo de convexidad monótono o semicontinuo inferiormente por la derecha.*

A continuación, probamos un teorema de existencia, unicidad y convergencia para contracciones asintóticas puntuales. Con este objeto, incluimos previamente el siguiente lema. Su prueba es inmediata.

**Lema 4.2.5.** *Sea  $M$  un espacio métrico y  $\mathcal{F}$  una estructura de convexidad casi compacta sobre  $M$  que es  $T$ -estable. Entonces, para cualquier tipo  $r(\cdot, x_n)$ , existe un punto  $x_0 \in M$  tal que*

$$r(x_0, x_n) = \inf\{r(x, x_n) : x \in M\}.$$

El teorema que adelantábamos en el párrafo anterior se obtiene como consecuencia de la Proposición 4.2.1 y del lema anterior. Omitimos su prueba pues sigue los mismo pasos que la del Teorema 4.2 en [28].

**Teorema 4.2.6.** *Sea  $(M, d)$  un espacio métrico completo y uniformemente convexo con un módulo de convexidad monótono (o semicontinuo inferiormente por la derecha)  $\delta(r, \varepsilon)$ . Supongamos que  $M$  es acotado. Entonces cualquier contracción asintótica puntual  $T: M \rightarrow M$  tiene un único punto fijo  $z$ . Además, la órbita  $\{T^n x\}$  converge a  $z$  para cada  $x \in M$ .*

A continuación, presentamos algunas consecuencias de la Proposición 4.2.1 y del Lema 4.2.5. Para ello, estudiamos por separado los resultados para módulos de convexidad monótono y semicontinuo inferiormente por la derecha ya que requieren pruebas distintas.

**Corolario 4.2.7.** *Sean  $(M, d)$  un espacio métrico completo y uniformemente convexo con un módulo de convexidad monótono  $\delta(r, \varepsilon)$  y  $\{x_n\}$  una sucesión acotada en  $M$ . Entonces el centro asintótico de  $\{x_n\}$ ,  $A(x_n)$ , tiene un único elemento.*

**Demostración.** Sean  $u$  y  $v$  dos puntos diferentes de  $A(x_n)$  y sea  $m$  el punto medio del segmento geodésico  $[u, v]$ . Sean  $r = r(u, x_n) = r(v, x_n)$ ,  $c = r + 1$  y  $\varepsilon_1 = d(u, v)/c$ . Como  $M$  es uniformemente convexo, sabemos que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq N$ ,

$$\begin{aligned} d(m, x_n) &\leq (1 - \delta(\text{máx}\{d(u, x_n), d(v, x_n)\}, \varepsilon_1)) \text{máx}\{d(u, x_n), d(v, x_n)\} \\ &\leq (1 - \delta(c, \varepsilon_1)) \text{máx}\{d(u, x_n), d(v, x_n)\}. \end{aligned}$$

Si hacemos tender  $n$  a infinito, obtenemos que  $r(m, x_n) \leq (1 - \delta(c, \varepsilon_1))r < r$ , que es claramente una contradicción.  $\square$

**Observación 4.2.8.** *Este corolario se probó por primera vez en la Proposición 3.3 de [50] para otra familia de espacios. Concretamente, se probó para un cierto tipo de espacios hiperbólicos uniformemente convexos con módulo de convexidad monótono.*

Veamos a continuación el caso semicontinuo inferiormente.

**Corolario 4.2.9.** *Sean  $(M, d)$  un espacio métrico completo y uniformemente convexo con un módulo de convexidad semicontinuo inferiormente por la derecha y  $\{x_n\}$  una sucesión acotada de  $M$ . Entonces el centro asintótico de  $\{x_n\}$  tiene un único elemento.*

**Demostración.** Sean  $u$  y  $v$  dos puntos diferentes de  $A(x_n)$  y sea  $m$  el punto medio del segmento geodésico  $[u, v]$ . Sean  $r = r(u, x_n) = r(v, x_n)$  y  $\varepsilon = \frac{d(u, v)}{r+1}$  y fijemos  $p \in \mathbb{N}$ . Entonces, para  $n$  suficientemente grande, se tiene que  $\max\{d(u, x_n), d(v, x_n)\} \leq r + p^{-1}$ . Aplicando la convexidad uniforme, se obtiene que

$$d(m, x_n) \leq (1 - \delta(r + p^{-1}, \varepsilon))(r + p^{-1})$$

para los mismos  $n$  que antes, y por tanto

$$r(m, x_n) \leq (1 - \delta(r + p^{-1}, \varepsilon))(r + p^{-1}). \quad (4.2.1)$$

Por último, basta observar que

$$\delta(r + p^{-1}, \varepsilon) \geq \frac{1}{2}\delta(r, \varepsilon)$$

y

$$1 - \delta(r + p^{-1}, \varepsilon) \leq 1 - \frac{1}{2}\delta(r, \varepsilon),$$

para  $p$  suficientemente grande. Combinando esta última desigualdad con (4.2.1) y haciendo tender  $p$  a infinito, se obtiene, como en el corolario anterior, que  $r(m, x_n) < r$  y por tanto la contradicción.  $\square$

Otra consecuencia que también obtenemos es el Teorema de Kirk de Punto Fijo en espacios métricos uniformemente convexos.

**Corolario 4.2.10.** *Sea  $(M, d)$  un espacio métrico completo y uniformemente convexo con un módulo de convexidad monótono (o semicontinuo inferiormente por la derecha)  $\delta(r, \varepsilon)$ . Supongamos que  $M$  es acotado. Entonces cualquier aplicación no expansiva  $T: M \rightarrow M$  tiene al menos un punto fijo.*

**Demostración.** Dado  $x \in M$ , consideremos la sucesión  $\{T^n x\}$  de las iteradas de  $T$  en  $x$ . Sea  $x_0$  el único centro asintótico de  $\{T^n x\}$  en  $M$ . Como  $T$  es no expansiva, se tiene que  $r(Tx_0, T^n x) \leq r(x_0, T^n x)$ , de lo que se deduce que  $T(x_0) = x_0$ .  $\square$

A continuación, presentamos un teorema análogo al Teorema 5.1 de [28], dado para espacios  $\text{CAT}(0)$ , en el contexto más general de los espacios métricos uniformemente convexos. Con este resultado, contestamos a la pregunta que Hussain y Khamsi hacen en este trabajo sobre si se pueden extender algunos de sus resultados a estructuras métricas más generales que las de los espacios  $\text{CAT}(0)$ . En concreto, estos autores se plantean si los espacios geodésicos uniformemente convexos poseen una herramienta tan potente y parecida a la desigualdad CN que les permita obtener de forma análoga esas generalizaciones (esta duda viene motivada por el hecho de que los espacios de Banach uniformemente convexos si tienen esta herramienta [43, Proposición 3.4]). Aunque en un principio los autores plantean esta cuestión, cierran su trabajo sin contestarla (tan sólo es bien conocido que si un espacio geodésico verifica específicamente la desigualdad CN, entonces es un espacio  $\text{CAT}(0)$ ). Es más, tampoco ofrecen pruebas alternativas a sus resultados mediante el uso de otras técnicas. Vemos a continuación un posible camino para obtener esas generalizaciones en el contexto de los espacios métricos uniformemente convexos.

**Teorema 4.2.11.** *Sea  $(M, d)$  un espacio métrico completo y uniformemente convexo con un módulo de convexidad monótono (o semicontinuo inferiormente por la derecha)  $\delta(r, \varepsilon)$ . Sea  $C$  un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de  $M$ . Entonces cualquier aplicación no expansiva asintótica puntual  $T: C \rightarrow C$  tiene un punto fijo y el conjunto de puntos fijos de  $T$ ,  $\text{Fix}(T)$ , es cerrado y convexo.*

**Demostración.** Sea  $x$  un punto de  $C$  y consideremos la sucesión  $x_n = T^n x$ . Por el Corolario 4.2.7, sabemos que  $A_C(x_n)$  es un conjunto unitario. Sea  $x_0$  el único punto de ese conjunto. Por definición,  $x_0$  es tal que  $r(x_0, x_n) = \inf\{r(u, x_n) : u \in C\}$ . Veamos que  $\{T^m x_0\}$  es una sucesión de Cauchy. Supongamos por el contrario que no lo es. En este caso existe una subsucesión separada  $\{T^{m_i} x_0\}$  de  $\{T^m x_0\}$ , es decir, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $d(T^{m_k} x_0, T^{m_h} x_0) \geq \varepsilon$  para todo  $k \neq h$  en  $\mathbb{N}$ .

Sean  $m_{kh}$  el punto medio del segmento  $[T^{m_k} x_0, T^{m_h} x_0]$ ,  $c = \text{diam}(C)$  y  $\varepsilon_1 = \varepsilon/c$ .

La convexidad uniforme del espacio junto con el carácter monótono del módulo de convexidad implican que para todo  $k$  y  $h$  en  $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(m_{kh}, x_n) &\leq \\ &\leq (1 - \delta(\text{máx}\{d(T^{m_h}x_0, x_n), d(T^{m_k}x_0, x_n)\}, \varepsilon_1)) \text{máx}\{d(T^{m_h}x_0, x_n), d(T^{m_k}x_0, x_n)\} \\ &\leq (1 - \delta(c, \varepsilon_1)) \text{máx}\{d(T^{m_h}x_0, x_n), d(T^{m_k}x_0, x_n)\}. \end{aligned}$$

De la definición de  $T$ , se deduce además que

$$r(T^m x_0, x_n) \leq \alpha_m(x_0)r(x_0, x_n). \quad (4.2.2)$$

Así, haciendo tender  $n$  a infinito,

$$\begin{aligned} r(x_0, x_n) &\leq r(m_{kh}, x_n) \leq (1 - \delta(c, \varepsilon_1)) \text{máx}\{r(T^{m_k}(x_0, x_n), r(T^{m_h}x_0, x_n)\} \\ &\leq (1 - \delta(c, \varepsilon_1)) \text{máx}\{\alpha_{m_k}(x_0)r(x_0, x_n), \alpha_{m_h}(x_0)r(x_0, x_n)\}. \end{aligned}$$

Como  $T$  es no expansiva asintótica puntual, se tiene además que

$$r(x_0, x_n) \leq (1 - \delta(c, \varepsilon_1))r(x_0, x_n),$$

de donde se deduce que  $r(x_0, x_n) = 0$ , lo que es una contradicción ya que, en virtud de (4.2.2), esta igualdad implica que  $\{T^m x_0\}$  converge a  $x_0$ . De este modo, ya tenemos que  $\{T^m x_0\}$  es una sucesión de Cauchy cuyo límite, de nuevo por (4.2.2), es  $x_0$ . Basta tener en cuenta que  $T$  es continua para poder concluir que  $Tx_0 = x_0$ .

Veamos que  $Fix(T)$  es tal y como se afirma en el enunciado del teorema. En primer lugar, por la existencia de punto fijo, sabemos trivialmente que  $Fix(T)$  es un conjunto no vacío. Como  $T$  es continua,  $Fix(T)$  es cerrado. Así, falta únicamente comprobar que  $Fix(T)$  es también convexo. Sean  $u, v$  dos puntos distintos de  $Fix(T)$  y  $w$  el punto medio del segmento  $[u, v]$ . Veamos que  $w \in Fix(T)$ . Como  $T$  es no expansiva asintótica puntual, tenemos que

$$d(u, T^n w) = d(T^n u, T^n w) \leq \alpha_n(w)d(u, w) = \alpha_n(w)d(u, v)/2$$

e igualmente

$$d(v, T^n w) = d(T^n v, T^n w) \leq \alpha_n(w)d(v, w) = \alpha_n(w)d(u, v)/2.$$



Así, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces

$$T^n w \in B(u, d(u, v)/2 + \varepsilon) \cap B(v, d(u, v)/2 + \varepsilon) = D_\varepsilon.$$

Observando la prueba de la Proposition 2.2 de [47], se deduce que los diámetros de los conjuntos  $D_\varepsilon$  tienden a 0 cuando  $\varepsilon$  tiende a 0. De este modo,  $\lim_n T^n w = w$ , lo que prueba que  $w$  es un punto fijo de  $T$ .  $\square$

**Observación 4.2.12.** *La prueba del caso semicontinuo inferiormente se desarrolla de forma similar a la anterior aunque a partir de los razonamientos utilizados en el Corolario 4.2.9.*

En [28] se prueba un Principio de Demiclosedness para aplicaciones no expansivas asintóticas puntuales en espacios CAT(0). Para terminar este capítulo, presentamos un resultado similar a éste para espacios métricos uniformemente convexos. Usando la misma notación que en [28], definimos

$$\{x_n\} \rightarrow_C \omega \text{ si y sólo si } r(\omega, x_n) = \inf_{x \in C} r(x, x_n),$$

donde  $C$  es un subconjunto cerrado y convexo de un espacio métrico uniformemente convexo y  $\{x_n\}$  es una sucesión acotada contenida en  $C$ . Esta definición es independiente del conjunto  $C$  que consideremos cuando el espacio  $M$  es un espacio CAT(0). Esto se debe a que el centro asintótico de una sucesión acotada de un espacio CAT(0) pertenece a la envoltura convexa cerrada de dicha sucesión, hecho que se deduce fácilmente de la no expansividad de la proyección métrica sobre subconjuntos cerrados y convexos de un espacio CAT(0) completo (mirar [8] para más detalles). Antes de presentar el resultado que anunciábamos al principio de este párrafo, recordemos que, fijada una sucesión  $\{x_n\}$ , la existencia y unicidad de  $\omega \in C$  con  $\{x_n\} \rightarrow_C \omega$  en un espacio métrico completo y uniformemente convexo con un módulo de convexidad monótono está garantizada por el Corolario 4.2.7.

**Proposición 4.2.13.** *Sea  $(M, d)$  un espacio métrico completo y uniformemente convexo con un módulo de convexidad monótono  $\delta(r, \varepsilon)$ . Sean  $C$  un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de  $M$  y  $T: C \rightarrow C$  una aplicación no expansiva asintótica*

puntual sobre  $C$  que además es uniformemente continua. Sea  $\{x_n\} \in C$  una sucesión de puntos fijos aproximados tal que  $\{x_n\} \rightarrow_C x_0$  para un cierto  $x_0 \in C$ . Entonces  $Tx_0 = x_0$ .

***Demostración.***

En primer lugar, probemos que

$$r(x, x_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x, T^m x_n) = r(x, T^m x_n) \quad (4.2.3)$$

para cualquier  $m \geq 1$ .

Es únicamente para demostrar esta ecuación cuando usamos la continuidad uniforme de  $T$ . En particular, bajo esta hipótesis sobre  $T$  podemos ver por inducción que  $\{T^m x_n\}$  es una sucesión de puntos fijos aproximados para cada  $m \in \mathbb{N}$ . Así, sea  $m = 1$ ,  $\varepsilon > 0$  y elijamos el  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  dado por la continuidad uniforme de  $T$ . Como  $\{x_n\}$  es una sucesión de puntos fijos aproximados, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x_n, Tx_n) \leq \delta$  para todo  $n \geq n_0$ . Esto implica que

$$d(Tx_n, T^2x_n) \leq \varepsilon$$

para todo  $n \geq n_0$ . Así,  $\{d(Tx_n, T^2x_n)\} \rightarrow 0$ , lo que prueba nuestra afirmación. Supongamos ahora que  $\{T^{m-1}x_n\}$  es una sucesión de puntos fijos aproximados. Veamos que  $\{T^m x_n\}$  también lo es. Dado  $\varepsilon > 0$ , fijamos  $\delta > 0$  como en el caso  $m = 1$ . Como  $\{T^{m-1}x_n\}$  es una sucesión de puntos fijos aproximados, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $d(T^{m-1}x_n, T^m x_n) \leq \delta$  para todo  $n \geq n_0$ . Esto implica que

$$d(T^m x_n, T^{m+1} x_n) \leq \varepsilon$$

para todo  $n \geq n_0$ . Así, concluimos que  $\{T^m x_n\}$  es una sucesión de puntos fijos aproximados.

Como además

$$d(x, T^m x_n) \leq d(x, x_n) + d(x_n, T^m x_n), \text{ y } d(x, x_n) \leq d(x, T^m x_n) + d(T^m x_n, x_n),$$

basta recordar que  $d(T^m x_n, x_n) \leq \sum_{k=0}^{m-1} d(T^k x_n, T^{k+1} x_n)$ , para deducir que la ecuación (4.2.3) es cierta.

En consecuencia, como  $r(T^m x, T^m x_n) \leq \alpha_m(x)r(x, x_n)$  si  $x \in C$ , (4.2.2) se tiene para cualquier  $x$ .

Por lo tanto, particularizando para  $x_0$ , se tiene que  $\limsup_{m \rightarrow \infty} r(T^m x_0, x_n) = r(x_0, x_n)$ . Veamos ahora que  $T^m x_0 \rightarrow x_0$  cuando  $m$  tiende a infinito. Supongamos por el contrario que existe un  $\varepsilon > 0$  y una subsucesión  $\{T^{m_k} x_0\}$  de  $\{T^m x_0\}$  tal que  $d(T^{m_k} x_0, x_0) \geq \varepsilon$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Sea  $x_{0m_k}$  el punto medio del segmento geodésico  $[T^{m_k} x_0, x_0]$ ,  $c = \text{diam}(C)$  y  $\varepsilon_1 = \varepsilon/c$ . Por la convexidad uniforme, para todo  $k$ , tenemos que

$$\begin{aligned} d(x_{0m_k}, x_n) &\leq (1 - \delta(\text{máx}\{d(x_0, x_n), d(T^{m_k} x_0, x_n)\}, \varepsilon_1)) \text{máx}\{d(x_0, x_n), d(T^{m_k} x_0, x_n)\} \\ &\leq (1 - \delta(c, \varepsilon_1)) \text{máx}\{d(x_0, x_n), d(T^{m_k} x_0, x_n)\}. \end{aligned}$$

Si consideramos el límite superior de la desigualdad anterior cuando  $n$  tiende a infinito, obtenemos que

$$r(x_0, x_n) \leq r(x_{0m_k}, x_n) \leq (1 - \delta(c, \varepsilon_1)) \text{máx}\{r(x_0, x_n), r(T^{m_k} x_0, x_n)\}.$$

Si hacemos lo mismo aunque ahora tomando límite superior en  $k$ , se obtiene finalmente que  $r(x_0, x_n) \leq (1 - \delta(c, \varepsilon_1))r(x_0, x_n)$ . Así,  $r(x_0, x_n) = 0$ . A partir de aquí, basta razonar como en el Teorema 4.2.11 para demostrar la existencia de punto fijo.  $\square$

**Observación 4.2.14.** *La prueba del caso semicontinuo inferiormente se desarrolla de forma similar a la anterior aunque a partir de los razonamientos utilizados en el Corolario 4.2.9.*

El último resultado que ofrecemos en este capítulo mezcla la teoría de las aplicaciones asintóticas que hemos trabajado con la de las aplicaciones multivaluadas no expansivas que analizamos en el capítulo anterior. Concretamente, es combinando el Teorema 4.2.11 con el Teorema 3.2.5 del capítulo anterior, como se obtiene el resultado que presentamos, que, además, notemos es una generalización del Teorema 5.2 de [28]. Omitimos la prueba ya que es análoga a la que se da para los espacios CAT(0) en [28]. No obstante, es interesante mencionar que la principal diferencia, y también dificultad, que nos encontramos al trabajar en un contexto más amplio que el de los

espacios CAT(0) a este respecto es que ya no podemos contar, en general, con existencia de punto fijo para aplicaciones no expansivas multivaluadas. Es necesario por ello imponer condiciones geométricas adicionales como las del capítulo anterior.

Antes de enunciar el teorema, conozcamos las siguientes notaciones y definiciones. Sea  $M$  un espacio métrico uniformemente convexo. Consideremos las aplicaciones  $t: M \rightarrow M$  y  $T: M \rightarrow 2^M \setminus \{\emptyset\}$ . Decimos que  $t$  y  $T$  conmutan si  $ty \in T(tx)$  para todo  $y \in Tx$  y para todo  $x \in M$ . Un punto  $z$  se dice que es un centro para la aplicación  $t: M \rightarrow M$  si para cada  $x \in M$ ,  $d(z, tx) \leq d(z, x)$ . El conjunto  $Z(t)$  denota el conjunto de todos los centros de la aplicación  $t$ .

**Teorema 4.2.15.** *Sea  $(M, d)$  un espacio métrico completo y uniformemente convexo con un módulo de convexidad monótono  $\delta(r, \varepsilon)$ . Supongamos que  $M$  es acotado y satisface la condición (i) (mirar la Sección 3.2). Supongamos que  $t: M \rightarrow M$  es una aplicación no expansiva asintótica puntual y  $T: M \rightarrow 2^M \setminus \{\emptyset\}$  una aplicación no expansiva que toma valores convexos y compactos. Si  $t$  y  $T$  conmutan y satisfacen la condición*

$$Tx \cap \text{Fix}(t) \subseteq Z(t), \quad x \in \text{Fix}(t),$$

*entonces existe  $z \in M$  tal que  $z = tz \in Tz$ .*

**Observación 4.2.16.** *Se obtiene también el resultado anterior si en lugar de imponer la condición (i) sobre el espacio uniformemente convexo imponemos las mismas condiciones geométricas que en el Teorema 3.2.8 del capítulo anterior, es decir,  $M$  tiene la propiedad de extensión geodésica y se verifican las condiciones (ii)-(iii).*

## Capítulo 5

# Teoremas de Punto Fijo para Contracciones Cíclicas

El último capítulo de esta Memoria está dividido en tres secciones. En la primera sección aportamos un breve historial de la Teoría del Punto Fijo para aplicaciones cíclicas que satisfacen algún tipo de condición de tipo contractivo. Paralelamente, establecemos cierta nomenclatura necesaria en este contexto y recordamos algunos de los teoremas más destacados hasta el momento.

En la segunda sección presentamos nuestras aportaciones a esta teoría; primero, en espacios métricos completos arbitrarios y, después, en espacios métricos geodésicos que son estrictamente convexos y verifican la propiedad de la intersección no vacía.

Por último, en la tercera sección, estudiamos los mismos problemas de la sección anterior pero en el marco más concreto de los espacios de Banach.

## 5.1. Nociones y resultados previos

Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos de un espacio métrico  $(M, d)$ . Se dice que una aplicación  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  es cíclica si

$$T(A) \subseteq B \text{ y } T(B) \subseteq A.$$

El concepto de aplicación cíclica aparece por primera vez en el contexto de la Teoría del Punto Fijo en un trabajo de W.A. Kirk, P.S. Srinivasan y P. Veeramani [46] en el año 2003. Concretamente, las aplicaciones cíclicas que en este artículo se consideran son aquéllas para las cuales existe  $k \in (0, 1)$  tal que  $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$  para cualesquiera  $x \in A$  e  $y \in B$ . Bajo esta hipótesis de contractividad sobre la aplicación, se prueba que si  $A$  y  $B$  son subconjuntos cerrados y no vacíos de un espacio métrico completo, entonces necesariamente  $A \cap B \neq \emptyset$  y, además,  $T$  tiene un único punto fijo en  $A \cap B$ . Este hecho motiva a un gran número de autores para estudiar diferentes generalizaciones de esta situación en el caso en el que  $A \cap B = \emptyset$  (ver [19, 18, 20, 62, 67]). En [19, 62, 67], se considera en concreto el caso en el que la aplicación cíclica  $T$  verifica la condición de contractividad que definimos a continuación.

**Definición 5.1.1.** Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico  $M$ . Se dice que  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  es una *contracción cíclica* si:

- (1)  $T$  es una aplicación cíclica y
- (2) existe  $k \in (0, 1)$  tal que  $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) + (1 - k) \text{dist}(A, B)$  para cualesquiera  $x \in A$  e  $y \in B$ .

Cuando  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  es una aplicación cíclica y la intersección entre  $A$  y  $B$  es vacía, es obvio que dicha aplicación no tiene puntos fijos. Es más, no tiene siquiera sentido hablar de la existencia de los mismos en estas circunstancias. El concepto que se define a continuación, denominado *punto de mejor aproximación*, es un concepto que rescata, para este nuevo contexto, la idea de proximidad que existe entre un punto y su imagen si dicho punto es un punto fijo de una aplicación. Dicha idea de

proximidad para un punto, atendiendo a la definición de punto fijo, no es otra que la de estar lo más cerca posible de su imagen. Recientemente, el interés por el estudio de las contracciones cíclicas en las que  $A \cap B = \emptyset$  ha crecido notablemente. Por ello, los puntos de mejor aproximación han pasado a ser el principal objeto de estudio de una nueva rama de la Teoría Métrica del Punto Fijo que nace a partir del año 2003 con los trabajos [19, 18, 46]. Los principales problemas que estudia esta teoría son los de existencia, unicidad y convergencia a puntos de mejor aproximación en este tipo de aplicaciones y en diferentes contextos. Veamos qué se entiende por punto de mejor aproximación para una aplicación cíclica.

**Definición 5.1.2.** Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico  $M$ . Sea  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  una aplicación cíclica. Se dice que  $z \in A \cup B$  es un punto de mejor aproximación para  $T$  si  $d(z, Tz) = \text{dist}(A, B)$ .

**Observación 5.1.3.** El concepto de punto de mejor aproximación coincide con el de punto fijo cuando  $A \cap B \neq \emptyset$ .

Las contracciones cíclicas se definen por primera vez en un artículo de A. Anthony Eldred y P. Veeramani [19] en 2005, siendo por ello este trabajo el primero en abordar los problemas de existencia, unicidad y convergencia de las iteradas de este tipo de aplicaciones hacia puntos de mejor aproximación. No obstante, simultáneamente en el tiempo [18], nace también el interés por el estudio de este mismo tipo de problemas para otra familia más amplia de aplicaciones cíclicas, las denominadas *relativamente no expansivas*, que son aquéllas que satisfacen que  $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ , para cualesquiera  $x \in A$  e  $y \in B$ . El estudio de existencia y unicidad de puntos de mejor aproximación para aplicaciones relativamente no expansivas tiene lugar en el contexto de los espacios de Banach y se basa concretamente en el concepto de *estructura normal proximal* para un par de subconjuntos  $(A, B)$ . Esta noción está motivada y, por tanto, íntimamente relacionada con la de estructura normal en el sentido de Brodskiĭ y Milman usada para demostrar la existencia de puntos fijos para aplicaciones no expansivas (tal y como se ha mostrado con anterioridad en esta Memoria). En [18] se reproduce la demostración del resultado anterior para aplicaciones no ex-

pansivas al caso de las aplicaciones relativamente no expansivas utilizando, en lugar de la estructura normal, la estructura normal proximal.

El estudio de las contracciones cíclicas que comienzan A. Anthony Eldred y P. Veeramani en [19] se desarrolla fundamentalmente para espacios de Banach uniformemente convexos, pues es para estos espacios para los que se prueba el principal teorema del artículo que asegura en este contexto existencia, unicidad y convergencia de las iteradas de la contracción cíclica  $T$  al punto de mejor aproximación. Sin embargo, también aparecen en ese trabajo los primeros resultados sobre las propiedades fundamentales de las contracciones cíclicas en espacios métricos. Entre los más destacados consideramos las Proposiciones 3.1, 3.2 y 3.3 de [19]. Veamos a continuación qué afirman estos resultados.

**Proposición 5.1.4.** *Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico  $M$ . Supongamos que  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  es una contracción cíclica,  $x_0$  es un punto en  $A \cup B$  y  $x_{n+1} = Tx_n$ ,  $n \geq 0$ . Entonces*

$$d(x_n, Tx_n) \rightarrow \text{dist}(A, B).$$

**Proposición 5.1.5.** *En las condiciones de la proposición anterior, se tiene que*

- (1) *las sucesiones de iteradas  $\{x_{2n}\}$  y  $\{x_{2n+1}\}$  son acotadas y*
- (2) *si  $\{x_{2n}\}$  o  $\{x_{2n+1}\}$  admite alguna subsucesión convergente, entonces existe  $z \in A \cup B$  tal que  $d(z, Tz) = \text{dist}(A, B)$ .*

El Teorema 3.10 y el Ejemplo 3.6 de [19] son, a nuestro entender, las principales aportaciones a la teoría de ese artículo. En el Ejemplo 3.6 se considera una contracción cíclica, sin puntos de mejor aproximación, sobre dos subconjuntos  $A$  y  $B$  de  $\ell^p$  (para  $1 \leq p \leq \infty$ ). El Teorema 3.10 es el primer resultado de existencia, unicidad y convergencia a puntos de mejor aproximación para contracciones cíclicas que se conoce en la literatura. Veamos a continuación qué establece concretamente este resultado.

**Teorema 5.1.6.** *Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos de un espacio de Banach uniformemente convexo  $X$ . Supongamos que  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$*



es una contracción cíclica. Entonces existe un único punto de mejor aproximación para  $T$  en  $A$ . Además, si  $x_0$  es un punto de  $A$  y  $x_{n+1} = Tx_n$ ,  $n \geq 0$ , entonces  $\{x_{2n}\}$  converge al punto de mejor aproximación.

A partir de este trabajo de A. Anthony Eldred y P. Veeramani, se ha abierto una nueva línea de investigación dentro de esta rama de la Teoría Métrica del Punto Fijo que, en esencia, trata de buscar respuesta a la pregunta que los propios autores proponen al final de su artículo:

**Pregunta 5.1.7.** *¿Existe punto de mejor aproximación cuando  $A$  y  $B$  son subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos de un espacio de Banach reflexivo?*

En el trabajo [67] de T. Suzuki, M. Kikkawa y C. Vetro, se siguen estudiando problemas de la misma naturaleza que en [19] aunque esta vez desde una perspectiva diferente. Se plantean y estudian problemas similares a los hasta este momento considerados aunque, esta vez, desde un enfoque más general, caracterizado fundamentalmente por dar protagonismo a las propiedades métricas del par de conjuntos  $A$  y  $B$  sobre los que se define la aplicación. Este nuevo enfoque extiende de un modo natural esta teoría al contexto de los espacios métricos. Este hecho se pone de manifiesto con el Teorema 5.1.9 que detallamos más abajo. La propiedad métrica que se maneja en este trabajo relativa a pares de conjuntos recibe el nombre de propiedad UC.

**Definición 5.1.8.** *Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico  $M$ . Se dice que el par  $(A, B)$  tiene la propiedad UC si para cualesquiera sucesiones  $\{x_n\}$  y  $\{x'_n\}$  en  $A$  y cualquier sucesión  $\{y_n\}$  en  $B$  cumpliendo que  $\lim_n d(x_n, y_n) = \lim_n d(x'_n, y_n) = \text{dist}(A, B)$ , se tiene que  $\lim_n d(x_n, x'_n) = 0$ .*

El resultado fundamental de [67] es el primer teorema que aparece en la literatura que prueba existencia, unicidad y convergencia de las iteradas a puntos de mejor aproximación utilizando las propiedades métricas de los pares de conjuntos  $(A, B)$ .

**Teorema 5.1.9.** *Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico  $M$  y  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  una contracción cíclica. Supongamos que  $(A, B)$  tiene la propiedad UC. Entonces*

- (1)  $T$  admite un único punto  $z$  de mejor aproximación.
- (2)  $z$  es el único punto fijo de  $T^2$  en  $A$ .
- (3)  $\{T^{2^n}x\}$  converge a  $z$  para todo  $x \in A$ .
- (4)  $T$  tiene al menos un punto de mejor aproximación en  $B$ .
- (5) Si el par  $(B, A)$  tiene también la propiedad UC,  $Tz$  es el único punto de mejor aproximación en  $B$  y  $\{T^{2^n}y\}$  converge a  $Tz$  para todo  $y \in B$ .

La Proposición 3 de [67], que prueba la propiedad UC para ciertos pares de conjuntos en espacios de Banach uniformemente convexos, pone de manifiesto que el teorema anterior contiene al Teorema 5.1.6 como caso particular. En ese mismo trabajo, se intenta además contestar, al menos parcialmente, a la Pregunta 5.1.7. Para ello, se prueba que la propiedad UC se satisface para pares de conjuntos en algunos espacios de Banach fuera del marco de los uniformemente convexos. Concretamente, se obtiene para ciertos pares de conjuntos en espacios de Banach UCED (uniformemente convexos en cada dirección) y estrictamente convexos, aunque, en ambos casos, imponiendo sobre uno de los subconjuntos que forman el par la condición, excesivamente restrictiva, de poseer clausura compacta. En general, dentro de la Teoría Métrica del Punto Fijo, imponer condiciones de compacidad sobre subconjuntos del espacio suele conllevar importantes consecuencias en cuanto a la existencia de punto fijo de una aplicación. En la siguiente sección veremos por qué resulta tan restrictiva esta condición de compacidad al trabajar con contracciones cíclicas.

## 5.2. Teoremas de punto fijo para contracciones cíclicas en espacios métricos geodésicos

Nuestras aportaciones a esta teoría surgen, por un lado, tratando de debilitar la propiedad UC para obtener nuevos y más generales resultados de existencia, unicidad e incluso convergencia análogos al Teorema 5.1.9 en espacios geodésicos, y por otro

lado, tratando de responder a la Pregunta 5.1.7 sobre existencia de puntos de mejor aproximación en espacios de Banach reflexivos.

En primer lugar, vamos a describir brevemente algunas propiedades de la propiedad UC. Comenzamos observando, a través de la siguiente caracterización de la propiedad UC, la naturaleza uniforme que esta propiedad posee.

**Proposición 5.2.1.** *Dados  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico  $M$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i)  $(A, B)$  tiene la propiedad UC,
- (ii) para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  de modo que  $\text{diam}(A \cap B(y, \text{dist}(A, B) + \delta)) \leq \varepsilon$  para todo  $y \in B$ .

**Demostración.** Veamos en primer lugar que (i)  $\Rightarrow$  (ii). Supongamos por el contrario que existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para todo  $\delta = 1/n$  existen  $y_n \in B$  y  $x_n, x'_n \in A$  verificando que  $d(y_n, x_n) \leq \text{dist}(A, B) + \frac{1}{n}$ ,  $d(y_n, x'_n) \leq \text{dist}(A, B) + \frac{1}{n}$  y  $d(x_n, x'_n) > \varepsilon_0$ . Entonces llegamos a una contradicción con (i) ya que, en vista de las dos primeras desigualdades anteriores,  $d(x_n, x'_n)$  tendería a cero.

Probamos ahora (ii)  $\Rightarrow$  (i). Consideremos sucesiones  $\{x_n\}, \{x'_n\} \subset A$  e  $\{y_n\} \subset B$  tales que  $d(y_n, x_n)$  y  $d(y_n, x'_n)$  convergen ambas a  $\text{dist}(A, B)$  cuando  $n$  tiende a infinito. Entonces, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\text{diam}(A \cap B(y, \text{dist}(A, B) + \delta)) \leq \varepsilon$  para cualquier  $y \in B$ . Basta tomar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x_n, y_n), d(x'_n, y_n) \leq \text{dist}(A, B) + \delta$  para cualquier  $n \geq n_0$  para deducir que  $d(x_n, x'_n) \leq \varepsilon$  si  $n \geq n_0$ .  $\square$

En el trabajo [67] de T. Suzuki, M. Kikkawa y C. Vetro se prueba que cualquier par de subconjuntos no vacíos  $(A, B)$  de un espacio de Banach uniformemente convexo en el que  $A$  es convexo tiene la propiedad UC. A continuación, mostramos que podemos decir algo similar en espacios geodésicos uniformemente convexos bajo ciertas condiciones adicionales sobre el módulo de convexidad.

**Proposición 5.2.2.** *Sea  $(M, d)$  un espacio geodésico uniformemente convexo que admite un módulo de convexidad monótono  $\delta(r, \varepsilon)$ . Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de  $M$  de modo que  $A$  es convexo. Entonces el par  $(A, B)$  tiene la propiedad UC.*

**Demostración.** Supongamos por el contrario que existen sucesiones  $\{x_n\}$ ,  $\{x'_n\}$  en  $A$ ,  $\{y_n\}$  en  $B$  y  $\varepsilon_0 > 0$ , verificando que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x'_n, y_n) = \text{dist}(A, B)$  y tales que, para cualquier  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $n_k \geq k$  de modo que  $d(x_{n_k}, x'_{n_k}) \geq \varepsilon_0$ .

Sin pérdida de generalidad supongamos que  $\delta(r, \varepsilon) < 1$  si  $r, \varepsilon > 0$  y que  $\text{dist}(A, B) > 0$  ya que, en caso contrario, el resultado se obtiene de forma inmediata. Para  $\gamma > \text{dist}(A, B)$  y  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0/\gamma$ , consideramos  $\varepsilon > 0$  tal que

$$\varepsilon < \min \left\{ \gamma - \text{dist}(A, B), \frac{\text{dist}(A, B)\delta(\gamma, \varepsilon_1)}{1 - \delta(\gamma, \varepsilon_1)} \right\}.$$

Bajo estas condiciones, existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n_k \geq N_0$ , entonces  $d(x_{n_k}, y_{n_k}) \leq \text{dist}(A, B) + \varepsilon$  y  $d(x'_{n_k}, y_{n_k}) \leq \text{dist}(A, B) + \varepsilon$ . Sea  $m_{n_k}$  el punto medio del segmento geodésico  $[x_{n_k}, x'_{n_k}]$ . Por la convexidad uniforme de  $M$ , deducimos que

$$\begin{aligned} d(y_{n_k}, m_{n_k}) &\leq (1 - \delta(\text{dist}(A, B) + \varepsilon, \varepsilon_1))(\text{dist}(A, B) + \varepsilon) \leq \\ &\leq (1 - \delta(\gamma, \varepsilon_1))(\text{dist}(A, B) + \varepsilon) < \text{dist}(A, B). \end{aligned}$$

Como consecuencia, si  $n_k \geq N_0$

$$d(y_{n_k}, m_{n_k}) < \text{dist}(A, B).$$

Con esta desigualdad llegamos a una contradicción ya que  $m_{n_k} \in A$  para cualquier  $n_k$ . □

**Observación 5.2.3.** *Este resultado sigue siendo cierto si la condición de monotonidad sobre el módulo de convexidad se reemplaza por la condición de ser semicontinuo inferiormente por la derecha.*

Como adelantábamos brevemente al principio de esta sección, uno de los principales motivos que nos llevará a debilitar en la siguiente sección la propiedad UC es contestar a la Pregunta 5.1.7. Teniendo en cuenta que en [67] ya se contesta parcialmente a esta pregunta, el objetivo principal es poder responder a dicha cuestión sin necesidad de imponer las condiciones de compacidad que se exigen en [67] cuando trabajamos fuera de los espacios de Banach uniformemente convexos. En concreto,

en [67] se prueba la propiedad UC para pares de conjuntos  $(A, B)$  en espacios de Banach UCED y estrictamente convexos asumiendo que  $A$  es relativamente compacto. Justifiquemos en primer lugar por qué en este contexto (al igual que ocurre en la mayoría de las ramas de la Teoría del Punto Fijo) la hipótesis de compacidad resulta tan restrictiva. Para ello, consideramos relevante recordar el siguiente teorema de [19]. Recordemos así mismo que un subconjunto  $C$  de un espacio métrico se dice *acotadamente compacto* si cualquier sucesión acotada en  $C$  admite una subsucesión convergente a un punto  $c \in C$ .

**Teorema 5.2.4.** *Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos cerrados y no vacíos de un espacio métrico  $M$  y sea  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  una contracción cíclica. Si  $A$  ó  $B$  son acotadamente compactos, entonces existe  $x$  en  $A \cup B$  tal que  $d(x, Tx) = \text{dist}(A, B)$ .*

Si aplicamos el teorema anterior, en lugar del Teorema 5.1.9, para el caso en el que  $A$  es un conjunto relativamente compacto de un espacio de Banach, perdemos unicidad y convergencia de las iteradas de la aplicación. A continuación, se pone de manifiesto cómo ambas situaciones se pueden obtener añadiendo la débil y natural condición sobre  $A$  en este contexto de ser un conjunto de Chebyshev para puntos proximales con respecto de  $B$ .

**Definición 5.2.5.** *Dados  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico  $M$ , decimos que  $A$  es un conjunto de Chebyshev para puntos proximales con respecto de  $B$  si para cualquier  $x \in B$  tal que  $\text{dist}(x, A) = \text{dist}(A, B)$  se tiene que  $P_A(x)$  es un único punto.*

**Observación 5.2.6.** (1) *La propiedad UC es más fuerte que la propiedad anterior.*

(2) *El concepto más conocido en la literatura de conjunto de Chebyshev no es en realidad el que acabamos de definir. En general, un conjunto  $A$  de un espacio métrico se dice de Chebyshev con respecto de otro conjunto  $B$  si, para todo  $x \in B$ ,  $P_A(x)$  es un único punto.*

A continuación probamos el resultado que adelantábamos.

**Teorema 5.2.7.** Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos cerrados y no vacíos de un espacio métrico  $M$  y sea  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  una contracción cíclica. Si  $A$  es un conjunto acotadamente compacto y de Chebyshev para puntos proximales con respecto de  $B$ , el punto de mejor aproximación  $z \in A$  para  $T$  es único y la sucesión  $\{T^{2n}x\}$  converge a  $z$  para cualquier  $x \in A$ .

**Demostración.** Probamos en primer lugar la unicidad. Supongamos que  $z$  y  $z'$  son dos puntos distintos de mejor aproximación para  $T$  en  $A$ . La condición de Chebyshev sobre  $A$  implica que  $Tz \neq Tz'$ . Como  $T$  es relativamente no expansiva, se tiene además que

$$d(T^2z, Tz) \leq d(z, Tz) = \text{dist}(A, B),$$

y, por tanto, de la condición de Chebyshev sobre  $A$  se deduce también que  $z$  y  $z'$  son puntos fijos de  $T^2$ . Si definimos  $d^*(x, y) = d(x, y) - \text{dist}(A, B)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} d^*(z, Tz') &= d^*(T^2z, Tz') \\ &\leq kd^*(z', Tz) = kd^*(T^2z', Tz) \leq k^2d^*(z, Tz'). \end{aligned}$$

Así,  $d^*(z, Tz') = 0$  y como consecuencia  $z = z'$ . Esta contradicción prueba la unicidad de punto de mejor aproximación en  $A$ .

La convergencia de las iteradas se obtiene como consecuencia de que  $A$  es acotadamente compacto, las sucesiones  $\{T^{2n}x\}$  son acotadas para cualquier  $x \in A$  y  $\lim_n d(T^{2n}x, Tz) = \text{dist}(A, B)$  para todo  $x \in A$ .  $\square$

### 5.2.1. Las propiedades WUC y HW

Tal y como comentamos al principio de esta sección, una de nuestras líneas de trabajo en esta teoría consiste en debilitar la propiedad UC de forma que sigamos obteniendo resultados similares de punto de mejor aproximación. A este respecto, sugerimos reemplazar la propiedad UC por una más débil que definimos a continuación.

**Definición 5.2.8.** Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico  $M$ . Se dice que el par  $(A, B)$  tiene la propiedad WUC si cualquier sucesión  $\{x_n\} \subset A$ ,

verificando que para cualquier  $\varepsilon > 0$  existen  $y \in B$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que  $d(x_n, y) \leq \text{dist}(A, B) + \varepsilon$  para  $n \geq n_0$ , es una sucesión convergente.

**Observación 5.2.9.** Otra posible forma de plantear la definición anterior es exigiendo a la sucesión  $\{x_n\}$  que sea de Cauchy en lugar de convergente. Se observa que, en el contexto en el que trabajaremos con esta nueva propiedad, esta diferencia se convierte puramente en un detalle de naturaleza formal ya que en todos nuestros resultados asumiremos que el conjunto  $A$  es completo.

Lo primero que vamos a destacar es que la propiedad WUC implica una versión no uniforme de la equivalencia dada en la Proposición 5.2.1 para la propiedad UC.

**Proposición 5.2.10.** Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico  $M$ . Supongamos que  $(A, B)$  tiene la propiedad WUC, entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam}(A \cap B(y, \text{dist}(A, B) + \varepsilon)) = 0$$

para todo  $y \in B$ .

**Demostración.** Supongamos por el contrario que existen  $y_0 \in B$  y  $r > 0$  tales que  $\text{diam}(A \cap B(y_0, \text{dist}(A, B) + \varepsilon)) \geq r$  para todo  $\varepsilon > 0$ . Entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$  existen  $x_n, x'_n \in A$  verificando que  $d(y_0, x_n) \leq \text{dist}(A, B) + \frac{1}{n}$ ,  $d(y_0, x'_n) \leq \text{dist}(A, B) + \frac{1}{n}$  y  $d(x_n, x'_n) \geq r$ . Sea  $\{y_n\}$  la sucesión definida como  $y_{2n} = x_n$  e  $y_{2n+1} = x'_n$ . Esta sucesión verifica que, para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $d(y_n, y_0) \leq \text{dist}(A, B) + \varepsilon$  cuando  $n > \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}$ . Aplicando la propiedad WUC, se obtiene que  $\{y_n\}$  es una sucesión convergente y por tanto también de Cauchy, lo cual es imposible.  $\square$

A continuación, pasamos a comparar las propiedades UC y WUC de un modo directo. La siguiente proposición establece que la propiedad UC implica la propiedad WUC.

**Proposición 5.2.11.** Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico  $M$  de modo que  $A$  es completo. Supongamos que el par  $(A, B)$  tiene la propiedad UC. Entonces  $(A, B)$  tiene la propiedad WUC.

**Demostración.** Sea  $\{x_n\}$  una sucesión en  $A$  tal que para todo  $\delta > 0$  existen  $y \in B$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  de modo que  $d(x_n, y) \leq \text{dist}(A, B) + \delta$  para  $n \geq n_0$ . Como  $A$  es completo, basta probar que  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy. Pero este hecho se obtiene como consecuencia directa del apartado (ii) de la Proposición 5.2.1.  $\square$

Tras esta proposición, surge de manera natural la siguiente pregunta:

**Pregunta 5.2.12.** *¿Es realmente la Propiedad UC estrictamente más fuerte que la Propiedad WUC?*

Recientemente [58], B. Piątek ha contestado afirmativamente a esta pregunta a través del siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5.2.13.** *En primer lugar, se define una distancia,  $d_0$ , sobre el conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$ .*

*Para ello, se considera primero la función  $c: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  definida como:*

$$c(i, j) = \begin{cases} 0, & i \geq j; \\ k + 2, & i < j, k \in \mathbb{N} \text{ y } 2^k i \leq j < 2^{k+1} i. \end{cases}$$

*Se ve fácilmente que la función  $c$  satisface las siguientes propiedades:*

$$c(i + 1, j + 1) \leq c(i, j), \quad (5.2.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c(1 + n, m + n) = 2, \quad m > 1. \quad (5.2.2)$$

*Además, para cada terna  $\{m, n, p\} \subseteq \mathbb{N}$  tal que  $m < n < p$ , se observa también que*

$$\max\{c(m, n), c(n, p), c(m, p)\} = c(m, p) \leq c(m, n) + c(n, p) - 1. \quad (5.2.3)$$

*Por otro lado, si  $c(m, n) = a + 2$  y  $c(n, p) = b + 2$ , con  $a, b \in \mathbb{N}$ , entonces*

$$2^a 2^b m \leq p < 2^{a+1} 2^{b+1} m,$$

*lo que implica que*

$$c(m, p) < a + b + 4 = c(m, n) + c(n, p).$$

*Para definir la distancia  $d_0$  sobre  $\mathbb{N}$  se procede de la siguiente manera. Sea  $m$  un número natural mayor que 1. Por (5.2.1)–(5.2.2), se deduce que cualquier número*



natural  $r > 2$  se alcanza por la función  $c$  en un número finito de pares de la forma  $(1+i, m+i)$ . Concretamente, si  $m$  está fijo, las soluciones de la ecuación  $c(1+i, m+i) = r$  se pueden encontrar para  $i \in \{m(r), m(r)+1, \dots, m(r-1)-1\}$ , donde  $m(r)$  denota la menor de todas las posibles soluciones.  $d_0$  se define sobre pares de la forma  $(1+i, m+i)$  para  $m(r) \leq i < m(r-1)$  como:

$$d_0(1+i, m+i) = d_0(m+i, 1+i) = r+1 - 2^{i-m(r-1)}. \quad (5.2.4)$$

Para los pares  $(1+i, m+i)$  tales que  $i \geq m(2)$  se define

$$d_0(1+i, m+i) = d_0(m+i, 1+i) = 2 + 2^{m(2)-i-1}. \quad (5.2.5)$$

Por último,  $d_0(i, i) = 0$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

La función  $d_0$  es una distancia que convierte al espacio métrico  $(\mathbb{N}, d_0)$  en un espacio métrico completo. Para demostrar que  $d_0$  es realmente una distancia falta probar la desigualdad triangular. Esta desigualdad se deduce directamente de (5.2.3) y del hecho de que  $d_0(i, j) \in (c(i, j), c(i, j)+1)$  para  $i < j$ .  $(\mathbb{N}, d_0)$  es completo ya que la topología que  $d_0$  induce sobre  $\mathbb{N}$  es la discreta.

Sea  $A \subseteq \mathbb{N}$  el conjunto de los números impares y  $B \subseteq \mathbb{N}$  el de los números pares. Entonces  $(A, B)$  tiene la propiedad WUC pero sin embargo no satisface la propiedad UC. A continuación justificamos estas dos afirmaciones.

- (1)  $(A, B)$  tiene la propiedad WUC: Este hecho es trivial ya que dada una sucesión cualquiera de números impares en  $A$ , siempre se puede encontrar  $\varepsilon > 0$  de modo que, para cualesquiera  $y \in B$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  que tomemos, existe  $m > n_0$  de modo que  $d(x_m, y) > \text{dist}(A, B) + \varepsilon$ .
- (2)  $(A, B)$  no tiene la propiedad UC: Basta considerar, para todo  $n \geq 0$ , las sucesiones  $x_n = 2n+1$  y  $x'_n = 2n+3$  en  $A$  y la sucesión  $y_n = 2n+2$  en  $B$ . Se puede comprobar que  $\lim_n d(x_n, y_n) = \lim_n d(x'_n, y_n) = 2 = \text{dist}(A, B)$  y, sin embargo,  $\lim_n d(x_n, x'_n) = 2 \neq 0$ .

A parte del ejemplo anterior, las características formales de la propiedad WUC hacen que esta propiedad sea aún más cómoda de verificar que la propiedad UC. Un

ejemplo de ello es el que presentamos a continuación. Con él vemos que la propiedad WUC se satisface para pares de conjuntos de un espacio de Banach que no es necesariamente uniformemente convexo. En esta proposición utilizaremos el concepto de propiedad UKK en espacios de Banach que describimos en la Definición 2.2.8.

**Proposición 5.2.14.** *Sea  $X$  un espacio de Banach UKK, reflexivo y estrictamente convexo. Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos y convexos de  $X$ . Entonces el par  $(A, B)$  tiene la propiedad WUC.*

**Demostración.** Sea  $\{x_n\}$  una sucesión en  $A$  tal que para cada  $\varepsilon > 0$  existen  $y \in B$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  de modo que  $d(x_n, y) \leq \text{dist}(A, B) + \varepsilon$  si  $n \geq n_0$ . Supongamos que  $\{x_n\}$  no es convergente. En primer lugar veamos que esta sucesión necesariamente admite una subsucesión separada. Supongamos que  $\{x_{n_k}\}$  y  $\{x_{n_l}\}$  son dos subsucesiones convergentes de  $\{x_n\}$  con límites respectivos  $x$  y  $x'$  en la clausura de  $A$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tomamos  $y_n \in B$  de modo que las colas de ambas subsucesiones están en  $B(y_n, \text{dist}(A, B) + 1/n)$ . Entonces es claro que

$$x, x' \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(y_n, \text{dist}(A, B) + 1/n).$$

Como la sucesión  $\{y_n\}$  está acotada, admite una subsucesión débilmente convergente a un punto  $y$  de la clausura de  $B$ . Así, se obtiene que  $x, x' \in B(y, \text{dist}(A, B))$ , de donde, como  $X$  estrictamente convexo, se deduce que  $x = x'$ .

De este modo, podemos asumir que  $\{x_n\}$  no posee ninguna subsucesión convergente y que por ello es una sucesión separada. Sea  $\varepsilon > 0$  tal que  $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$  para todo  $n \neq m$ . Como esta sucesión es acotada y  $X$  es reflexivo, podemos asumir también que  $\{x_n\}$  converge débilmente a un punto  $x$ . Aplicando ahora la propiedad UKK de forma análoga a como se aplica la convexidad uniforme en la proposición anterior, se deduce que  $x$  está en la clausura de  $A$ , pero, como  $\text{dist}(x, B) < \text{dist}(A, B)$ , llegamos a una contradicción con la definición de  $\text{dist}(A, B)$ .  $\square$

Si asumimos que el espacio ambiente, en lugar de ser un espacio de Banach, es un espacio geodésico en el que *las sucesiones acotadas poseen un único centro asintótico que pertenece a la envoltura convexa cerrada de la propia sucesión*, como ocurre en los

espacios  $CAT(0)$  (ver [44]), podemos formular una proposición similar a la anterior en este contexto más general. Omitimos la prueba de la misma ya que es análoga a la del resultado anterior.

**Proposición 5.2.15.** *Sea  $M$  un espacio métrico geodésico con la propiedad UKK para sucesiones  $\Delta$ -convergentes de modo que la función  $\mu(r, \varepsilon)$  dada por esta propiedad decrece con respecto al radio. Supongamos además que  $M$  tiene la propiedad para sucesiones acotadas que se menciona en el párrafo anterior. Entonces cualquier par  $(A, B)$  de subconjuntos no vacíos y convexos de  $M$  tiene la propiedad WUC.*

**Observación 5.2.16.** *La constante  $\mu$  de la propiedad UKK que consideramos en la Sección 2.2 sólo dependía de epsilon.  $\mu(r, \varepsilon)$  representa la misma constante cuando tenemos en cuenta la posibilidad de que  $\mu$  dependa también del radio. Recordemos que en un espacio de Banach o  $CAT(0)$   $\mu(r, \varepsilon)$  es en realidad  $\mu(\varepsilon)$ .*

En los espacios de Banach es conocido que la convexidad uniforme implica la propiedad UKK. En general, esta implicación parece estar lejos de ser cierta en los espacios métricos geodésicos para las nociones de convexidad uniforme y UKK que estamos utilizando en este contexto. En realidad, la propiedad UKK en el caso concreto de los espacios  $CAT(k)$ , tal y como se muestra en [44], parece estar más relacionada con la condición de Opial [23, pág. 107] que con la convexidad uniforme. Por ello, es significativo recordar que los espacios de Hilbert y los espacios de sucesiones  $\ell_p$  son los únicos que se conocen que satisfagan la condición de Opial. Para más detalles sobre este y otros temas relacionados, el lector interesado puede consultar los Capítulos 3, 4, 5 y 16 en [45] o [5, pág. 102].

Una vez definida y estudiada la propiedad WUC, continuamos con el segundo bloque de esta sección. En primer lugar, introducimos dos nuevas propiedades geométricas para pares de conjuntos, las propiedades HW y HWT, que nos permitirán establecer algunos de los resultados más importantes de las siguientes secciones. Entre ellos, cabe destacar el Teorema 5.2.29, que ofrece existencia y unicidad de punto de mejor aproximación para contracción cíclicas en espacios geodésicos, y el Corolario 5.3.1, con el que se da una respuesta parcial y afirmativa a la Pregunta 5.1.7.

**Definición 5.2.17.** Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico  $M$ . Se dice que el par  $(A, B)$  tiene la propiedad HW si para cualesquiera sucesiones  $\{x_n\} \subset A$  y  $\{z_n\} \subset B$ , y cualesquiera dos puntos  $q \in A$  y  $p \in B$  se tiene que

$$\left. \begin{array}{l} d(x_n, p) \rightarrow d \\ d(x_n, z_n) \rightarrow d \\ d(z_n, q) \rightarrow d \end{array} \right\} \Rightarrow d(p, q) = d$$

donde  $d = \text{dist}(A, B)$ .

**Definición 5.2.18.** Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico  $M$  y  $T$  una contracción cíclica sobre  $A \cup B$ . Se dice que el par  $(A, B)$  tiene la propiedad HWT si para toda sucesión  $\{x_n\} \subset A$ , y todo punto  $p \in B$  se tiene que

$$\left. \begin{array}{l} d(x_n, p) \rightarrow d \\ d(x_n, Tx_n) \rightarrow d \end{array} \right\} \Rightarrow d(p, Tp) = d$$

donde  $d = \text{dist}(A, B)$ .

**Observación 5.2.19.** La propiedad HWT depende claramente no sólo de los conjuntos  $A$  y  $B$ , sino también de la aplicación  $T$ . Así, la propiedad HWT es más débil que la HW.

La siguiente proposición proporciona una caracterización de la propiedad HW.

**Proposición 5.2.20.** Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico  $M$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i)  $(A, B)$  tiene la propiedad HW.
- (ii) Sea  $d = \text{dist}(A, B)$ . Si  $q \in A$  y  $p \in B$  son tales que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{dist}(A_\varepsilon, B_\varepsilon) \rightarrow d$ , donde  $A_\varepsilon = A \cap B(p, d + \varepsilon)$  y  $B_\varepsilon = B \cap B(q, d + \varepsilon)$ , entonces  $d(p, q) = d$ .

**Demostración.** (ii)  $\Rightarrow$  (i). Sean  $\{x_n\} \subset A$  y  $\{z_n\} \subset B$  dos sucesiones y  $p \in B$  y  $q \in A$  dos puntos tales que  $d(x_n, p) \rightarrow d$ ,  $d(x_n, z_n) \rightarrow d$  y  $d(z_n, q) \rightarrow d$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , sea  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \in A \cap B(p, d + \varepsilon)$ ,  $z_n \in B \cap B(q, d + \varepsilon)$  y  $d(x_n, z_n) \leq d + \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ . Como  $d \leq \text{dist}(A_\varepsilon, B_\varepsilon) \leq d(x_{n_0}, z_{n_0}) \leq d + \varepsilon$  y  $\varepsilon$

es un número arbitrario positivo, se obtiene que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{dist}(A_\varepsilon, B_\varepsilon) = d$ . Finalmente, a través de la propiedad (ii), se deduce que  $d(p, q) = d$ .  $\square$

**Observación 5.2.21.** *Es casi inmediato comprobar que la afirmación (ii) de la proposición anterior admite la siguiente formulación equivalente:*

(ii)\* *Sea  $d = \text{dist}(A, B)$ . Si  $q \in A$  y  $p \in B$  son puntos tales que, para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $\text{dist}(A_\varepsilon, B_\varepsilon) = d$ , donde  $A_\varepsilon = A \cap B(p, d + \varepsilon)$  y  $B_\varepsilon = B \cap B(q, d + \varepsilon)$ , entonces  $d(p, q) = d$ .*

En la Proposición 5.2.11 vimos ya que la propiedad UC es más fuerte que la propiedad WUC. A continuación, veamos que la propiedad HW no sólo es más débil que la propiedad UC, sino que también es de algún modo más débil que la propiedad WUC. Se observa además que, a diferencia de las propiedades UC y WUC, la propiedad HW es simétrica con respecto a  $A$  y  $B$ .

**Proposición 5.2.22.** *Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico  $M$ . Entonces se tiene que*

- (1) *Si  $(A, B)$  tiene la propiedad UC, entonces  $(A, B)$  tiene la propiedad HW.*
- (2) *Supongamos que  $M$  es un espacio métrico estrictamente convexo (Definición 1.2.24). Si  $(A, B)$  y  $(B, A)$  tienen ambos la propiedad WUC,  $A$  y  $B$  son cerrados y al menos uno de estos conjuntos es convexo, entonces  $(A, B)$  tiene la propiedad HW.*
- (3) *Supongamos que  $M$  es un espacio métrico estrictamente convexo con la propiedad de la intersección no vacía. Si  $(A, B)$  tiene la propiedad WUC y  $B$  es cerrado y convexo, entonces  $(A, B)$  tiene la propiedad HW.*

**Demostración.** (1) Sean  $\{x_n\} \subset A$  y  $\{z_n\} \subset B$  dos sucesiones y  $p \in B$  y  $q \in A$  dos puntos tales que  $d(x_n, p) \rightarrow d$ ,  $d(x_n, z_n) \rightarrow d$ , y  $d(z_n, q) \rightarrow d$ , donde  $d = \text{dist}(A, B)$ . Utilizando la propiedad UC se deduce que  $d(x_n, q) \rightarrow 0$ , y como consecuencia se obtiene (1).

(2) Asumimos que  $A$  es convexo. Sean  $\{x_n\} \subset A$ ,  $\{z_n\} \subset B$ ,  $p \in B$  y  $q \in A$  tales que  $d(x_n, p) \rightarrow d$ ,  $d(x_n, z_n) \rightarrow d$ , y  $d(z_n, q) \rightarrow d$ , donde  $d = \text{dist}(A, B)$ . Como  $(A, B)$  y  $(B, A)$  verifican la propiedad WUC, entonces  $\{x_n\}$  y  $\{z_n\}$  son tales que  $x_n \rightarrow x \in A$  y  $z_n \rightarrow z \in B$ . Haciendo tender  $n$  a infinito, se obtiene que  $d(x, p) = d$ ,  $d(x, z) = d$  y  $d(z, q) = d$ . Sea  $m \in A$  el punto medio entre  $q$  y  $x$ . Se tiene que

$$d = \text{dist}(A, B) \leq d(A, z) + d(z, B) = d(A, z) \leq d(m, z).$$

Como  $d(m, z) < d$ , se obtiene de inmediato una contradicción. Así, se deduce que  $q = x$  y por tanto que  $d(q, p) = d$ .

(3) Sean  $\{x_n\} \subset A$ ,  $\{z_n\} \subset B$ ,  $q \in A$  y  $p \in B$  tales que  $d(x_n, p) \rightarrow d$ ,  $d(x_n, z_n) \rightarrow d$ , y  $d(z_n, q) \rightarrow d$ , donde  $d = \text{dist}(A, B)$ .

Como en la prueba de (2), tenemos que  $x_n \rightarrow x_0$ . Teniendo en cuenta las hipótesis, se obtiene que  $d(x_0, p) = d$  y  $d(z_n, x_0) \rightarrow d$ . Consideremos la sucesión decreciente de subconjuntos  $\{B_\varepsilon\}$  de  $B$  dada por

$$B_\varepsilon = B(x_0, d + \varepsilon) \cap B(q, d + \varepsilon) \cap B$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . Es inmediato que  $B_\varepsilon$  es cerrado, acotado, convexo y no vacío para todo  $\varepsilon$  positivo. Como  $X$  tiene la propiedad de la intersección no vacía, existe  $h \in B(x_0, d) \cap B(q, d) \cap B$ , o equivalentemente, existe  $h$  tal que  $d(x_0, h) \leq d$  y  $d(q, h) = d$ . Como  $d(A, x_0) = 0$ , la desigualdad

$$d = \text{dist}(A, B) \leq d(A, x_0) + d(x_0, B) \leq d(A, x_0) + d(x_0, h)$$

implica que  $d(x_0, h) = d$ . Además, tenemos que  $d(x_0, p) = d$  y que  $B$  es convexo. Sea  $m \in B$  el punto medio entre  $h$  y  $p$ . Se tiene que

$$d(A, m) \leq d(A, x_0) + d(x_0, m).$$

Como  $d(x_0, m) < d$ , llegamos a una contradicción. Así, se deduce que  $h = p$  y por tanto se completa la prueba.  $\square$

La siguiente proposición prueba que ciertos pares de conjuntos de un espacio de Banach reflexivo y estrictamente convexo tienen la propiedad HW. Más adelante,

veremos que esta proposición es clave para dar una respuesta parcial a la Pregunta 5.1.7. Por ello, este resultado puede considerarse uno de los principales de este capítulo.

**Proposición 5.2.23.** *Cualquier par  $(A, B)$  de subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos de un espacio de Banach  $X$  reflexivo y estrictamente convexo tiene la propiedad HW.*

**Demostración.** Sean  $\{x_n\} \subset A$ ,  $\{z_n\} \subset B$ ,  $q \in A$  y  $p \in B$  tales que

$$(a) d(x_n, p) \rightarrow d, \quad (b) d(x_n, z_n) \rightarrow d \text{ y } (c) d(z_n, q) \rightarrow d,$$

donde  $d = \text{dist}(A, B)$ . Como  $\{x_n\}$  y  $\{z_n\}$  son sucesiones acotadas, existen subsucesiones débilmente convergentes  $x_{n_k} \rightharpoonup x \in A$  y  $z_{n_k} \rightharpoonup z \in B$ . Así, por (b) y la semicontinuidad inferior de la norma,

$$\|x - z\| \leq \liminf_k \|x_{n_k} - z_{n_k}\| = d,$$

de lo que se deduce que  $d(x, z) = d$ . Análogamente, por (a) y (c), se obtiene que  $d(x, p) = d$  y  $d(z, q) = d$ . Basta utilizar la convexidad de  $A$  ó  $B$  y que  $X$  es estrictamente convexo para demostrar que  $d(p, q) = d$ .  $\square$

**Observación 5.2.24.** (1) *Aunque hemos asumido que tanto  $A$  como  $B$  son convexos, la convexidad es sólo necesaria en uno de los dos conjuntos. Además, si uno de ellos, por ejemplo  $B$ , es acotado, este resultado continúa siendo cierto si únicamente asumimos que  $B$  es débilmente cerrado (o débilmente compacto) y no vacío.*

(2) *La hipótesis de reflexividad sobre el espacio  $X$  se puede eliminar si suponemos que  $A$  y  $B$  son subconjuntos no vacíos débilmente compactos.*

### 5.2.2. Teoremas de existencia, unicidad y convergencia a puntos de mejor aproximación en espacios métricos geodésicos

En esta sección, probamos resultados de existencia, unicidad y convergencia a puntos de mejor aproximación utilizando, en primer lugar, la propiedad WUC para pares

de conjuntos (ver Proposición 5.2.25) y, en segundo lugar, a través de la propiedad HW (ver Proposición 5.2.29).

La Proposición 5.2.25, que justo presentamos a continuación, es un resultado que se formula de forma análoga al Teorema 5.1.9, pero que, en lugar de imponer la propiedad UC sobre el par  $(A, B)$  de conjuntos involucrado en el teorema, asume tan sólo que el par tenga la propiedad WUC. Recordando la relación que existe entre estas dos propiedades para pares de conjuntos (ver la Proposición 5.2.11), es claro que esta proposición mejora estrictamente el mencionado teorema. Revisando la sección anterior, se encuentran algunas proposiciones que prueban la propiedad WUC sobre pares de conjuntos en ciertos espacios de Banach reflexivos. Por tanto, para estos conjuntos es inmediato comprobar, via la proposición que ofrecemos a continuación, que se tiene existencia, unicidad y convergencia al punto de mejor aproximación en contracciones cíclicas. Como consecuencia, estos ejemplos dan una respuesta parcial y afirmativa a la pregunta sobre existencia de punto de mejor aproximación para contracciones cíclicas en espacios reflexivos. Tratar de encontrar una respuesta más fina a esta pregunta es uno de los motivos principales que lleva a considerar la propiedad HW. Concretamente, es a consecuencia de la Proposición 5.2.29 como este objetivo se lleva a cabo.

A continuación, presentamos uno de los resultados más relevantes de este capítulo. Con él se pone de manifiesto cómo una propiedad estrictamente más débil que la propiedad UC, la WUC, continúa garantizando existencia, unicidad y convergencia de las iteradas de una contracción cíclica a puntos de mejor aproximación.

**Teorema 5.2.25.** *Sean  $(M, d)$  un espacio métrico y  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de  $M$  tales que el par  $(A, B)$  verifica la propiedad WUC. Supongamos además que  $A$  es completo. Si  $T$  es una contracción cíclica sobre  $A \cup B$ , entonces  $T$  admite un único punto de mejor aproximación  $z$  en  $A$  y la sucesión  $\{T^{2n}x\}$  converge a  $z$  para todo  $x \in A$ .*

**Demostración.** Al igual que en [67], consideramos  $d^*(x, y) = d(x, y) - \text{dist}(A, B)$ . Es claro que  $d^*(Tx, Ty) \leq kd^*(x, y)$  para cualesquiera  $x \in A$  e  $y \in B$ . Como consecuencia,  $d^*(T^2x, Tx) \leq kd^*(x, Tx)$  y  $d^*(Ty, T^2y) \leq kd^*(Ty, y)$  si  $x \in A$  e  $y \in B$ .



Fijemos  $x \in A$  y  $n \in \mathbb{N}$  y sea  $m = n + l$  con  $l \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$\begin{aligned} d^*(T^{2m}x, T^{2n+1}x) &\leq k^{2n} d^*(T^{2l}x, Tx) \\ &\leq k^{2n} \sup\{d(Tx, T^{2l}x) : l \in \mathbb{N}\} = k^{2n} M(x). \end{aligned}$$

Como la Proposition 3.3 en [19] asegura que las órbitas de una contracción cíclica son acotadas en cada punto, deducimos que  $M(x)$  es finito sea cual sea  $x$ . Así, dado  $\varepsilon > 0$  y tomando  $n$  suficientemente grande de modo que  $k^{2n} M(x) < \varepsilon$ , se tiene que

$$T^{2m}x \in B(T^{2n+1}x, \text{dist}(A, B) + \varepsilon) \quad (5.2.6)$$

cuando  $m \geq n$  y, por tanto, aplicando la propiedad WUC, se concluye que  $\{T^{2n}x\}$  es convergente. El resto de la prueba sigue los mismos pasos que la prueba del Teorema 3 de [67]. Sea  $z \in A$  el límite de  $\{T^{2n}x\}$ , entonces

$$\begin{aligned} d^*(z, Tz) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d^*(T^{2n}x, Tz) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} kd^*(z, T^{2n-1}x) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} k(d(z, T^{2n}x) + d^*(T^{2n}x, T^{2n-1}x)) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} k(d(z, T^{2n}x) + k^{2n-2}d^*(T^2x, Tx)) = 0. \end{aligned}$$

De esta cadena de desigualdades se deduce que  $z$  es un punto de mejor aproximación de  $T$  en  $A$ .

Como además

$$d(T^2z, Tz) \leq d(z, Tz) = \text{dist}(A, B),$$

podemos afirmar también que  $Tz$  es un punto de mejor aproximación de  $T$  en  $B$ . De nuevo, por la propiedad WUC, se obtiene además que  $T^2z = z$ , lo que implica que  $z$  es un punto fijo  $T^2$ .

Sea  $z'$  otro punto de mejor aproximación en  $A$ . Al igual que  $z$ ,  $z'$  es también un punto fijo de  $T^2$ . Por ello,

$$\begin{aligned} d^*(z, Tz') &= d^*(T^2z, Tz') \\ &\leq kd^*(z', Tz) = kd^*(T^2z', Tz) \leq k^2 d^*(z, Tz'). \end{aligned}$$

Así, se deduce que necesariamente  $d^*(z, Tz') = 0$  y por tanto se concluye que  $d(z, z') = 0$ .  $\square$

La propiedad WUC se puede debilitar aún más de modo que siga siendo posible obtener un resultado de punto de mejor aproximación análogo al anterior.

**Definición 5.2.26.** Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico  $M$ . Se dice que el par  $(A, B)$  tiene la propiedad  $W$ -WUC si cualquier sucesión  $\{x_n\} \subset A$ , verificando que para cualquier  $\varepsilon > 0$  existen  $y \in B$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que  $d(x_n, y) \leq \text{dist}(A, B) + \varepsilon$  para  $n \geq n_0$ , admite una subsucesión convergente  $\{x_{n_k}\}$ .

Con esta definición se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 5.2.27.** Sean  $(M, d)$  un espacio métrico y  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de  $M$  tales que el par  $(A, B)$  verifica la propiedad  $W$ -WUC. Supongamos además que  $A$  es completo y que es un conjunto de Chebyshev con respecto de  $B$ . Si  $T$  es una contracción cíclica sobre  $A \cup B$ , entonces  $T$  admite un único punto de mejor aproximación  $z$  en  $A$  y la sucesión  $\{T^{2^n}x\}$  converge a  $z$  para todo  $x \in A$ .

**Demostración.** Siguiendo los mismos pasos que en la prueba del teorema anterior, y tras aplicar la propiedad  $W$ -WUC, se obtiene que cualquier subsucesión de  $\{T^{2^n}x\}$  tiene una subsucesión convergente. Consideremos por ello una subsucesión convergente  $\{T^{2^{n_m}}x\}$  de  $\{T^{2^n}x\}$ . Procediendo de la misma forma, denotemos por  $z \in A$  al límite de  $\{T^{2^{n_m}}x\}$ . En este caso, se tiene

$$\begin{aligned} d^*(z, Tz) &= \lim_{m \rightarrow \infty} d^*(T^{2^{n_m}}x, Tz) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} kd^*(z, T^{2^{n_m}-1}x) \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} k(d(z, T^{2^{n_m}}x) + d^*(T^{2^{n_m}}x, T^{2^{n_m}-1}x)) \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} k(d(z, T^{2^{n_m}}x) + r^{2^{n_m}-2}d^*(T^2x, Tx)) = 0. \end{aligned}$$

Así, se deduce que  $z$  es un punto de mejor aproximación para  $T$  en  $A$ . Como en la prueba anterior, pero en este caso usando la condición de Chebyshev en lugar de la propiedad WUC, obtenemos que  $z$  es un punto fijo de  $T^2$ . La unicidad de punto de mejor aproximación se obtiene a partir de aquí de la misma forma que en la prueba

anterior. Como además  $T$  es relativamente no expansiva, se tiene que  $\{d(T^{2^n}x, Tz)\}$  es una sucesión decreciente que verifica que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(T^{2^m}x, Tz) = \text{dist}(A, B).$$

Como consecuencia, las colas de la sucesión  $\{T^{2^n}x\}$  están todas contenidas en

$$B(Tz, \text{dist}(A, B) + \varepsilon)$$

para  $\varepsilon > 0$ . Por último, la anterior igualdad y el hecho de que  $A$  es un conjunto de Chebyshev implican que cualquier subsucesión convergente de  $\{T^{2^n}x\}$  tiene que converger necesariamente al punto  $z$ , concluyéndose de esta forma la prueba del teorema.

□

**Observación 5.2.28.** *La condición sobre  $A$  de ser un conjunto de Chebyshev con respecto de  $B$  puede debilitarse con la introducida anteriormente en la Definición 5.2.5 de ser un conjunto de Chebyshev para puntos proximales.*

El resto de esta sección lo dedicaremos a mostrar las aportaciones que nos ha permitido realizar la propiedad HW a esta rama de la Teoría Métrica del Punto Fijo. En primer lugar, presentamos nuestro teorema más relevante en esta línea. Este resultado proporciona existencia y unicidad de puntos de mejor aproximación en ciertos espacios métricos a través de las propiedades HW y HWT.

**Teorema 5.2.29.** *Sea  $M$  un espacio métrico estrictamente convexo con la propiedad de la intersección no vacía y sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de  $M$  tales que  $A$  es cerrado y convexo. Supongamos que  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  es una contracción cíclica. Si el par  $(A, B)$  tiene la propiedad HW, entonces existe un único punto de mejor aproximación  $z \in A$ .*

**Demostración.** Siguiendo los primeros pasos del Teorema 5.2.25, consideramos  $d^*(x, y) = d(x, y) - \text{dist}(A, B)$ . Igualmente, se tiene que  $d^*(Tx, Ty) \leq kd^*(x, y)$  para cualesquiera  $x \in A$  e  $y \in B$ . Fijamos del mismo modo  $x \in A$  y  $m_0 \in \mathbb{N}$  y consideramos  $m = m_0 + l$  con  $l \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$d^*(T^{2^m}x, T^{2^{m_0+1}}x) \leq k^{2m_0} d^*(T^{2^l}x, Tx)$$

$$\leq k^{2m_0} \sup\{d(T^{2l}x, Tx) : l \in \mathbb{N}\} = k^{2m_0} M(x).$$

Como las órbitas de una contracción cíclica son acotadas en cualquier punto  $y \in A \cup B$  (mirar [19, Proposición 3.3]), se tiene que, para cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe  $m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que  $T^{2m}x \in B(T^{2m_0(\varepsilon)+1}x, d + \varepsilon)$  para todo  $m \geq m_0(\varepsilon)$ , donde  $d = \text{dist}(A, B)$ .

Sea  $\varepsilon_n = 1/n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces existe  $y_n = T^{2m_0(\varepsilon_n)+1}x \in B$  tal que  $T^{2m}x \in B(y_n, d + \varepsilon_n)$  para todo  $m \geq m_0(\varepsilon_n)$ . Denotamos  $B_n = B(y_n, d + \varepsilon_n)$  y consideramos la sucesión de subconjuntos  $\{C_n\}$  de  $M$  definida como  $C_1 = A \cap B_1$  y  $C_n = C_{n-1} \cap B_n$  para todo  $n \geq 2$ .

Por la definición, se deduce que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_n$  es cerrado, acotado y no vacío. Como  $M$  es estrictamente convexo, también se tiene que  $C_n$  es convexo. Así, a través de la propiedad de la intersección no vacía, concluimos que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$ . Sea  $p \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \subseteq A$ . Como  $p \in C_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $d(y_n, p) \rightarrow d = \text{dist}(A, B)$ . Por otro lado, se tiene también que  $d(Ty_n, Tp) \rightarrow d$ . Tomando  $m_0(\varepsilon_n)$  como una sucesión creciente en función de  $n$ , es fácil ver que  $\{y_n\}$  es una subsucesión de  $\{T^{2k+1}x\}$ . Así, por la Proposición 5.1.4, se tiene que  $d(y_n, Ty_n) \rightarrow d$ . Por último, aplicando la propiedad HW a las sucesiones  $\{Ty_n\}$  e  $\{y_n\}$ , obtenemos que  $d(p, Tp) = \text{dist}(A, B)$ . La unicidad del punto de mejor aproximación se obtiene probando, en primer lugar, que  $T^2(q) = q$  para cualquier punto de mejor aproximación  $q$  de  $T$  y, después, siguiendo los mismos pasos que en la prueba del Teorema 5.2.25.  $\square$

**Observación 5.2.30.** (1) *El teorema continúa siendo cierto si únicamente asumimos que el par  $(A, B)$  tiene la propiedad HWT.*

(2) *Indirectamente, se obtiene también existencia de punto de mejor aproximación en  $B$ . La unicidad sin embargo no es cierta en general.*

### 5.3. Teoremas de punto fijo para contracciones cíclicas en espacios de Banach

En esta sección estudiamos los teoremas de la sección anterior en el contexto particular de los espacios de Banach. En concreto, se analizan en detalle las principales consecuencias de estos resultados en este marco lineal, al igual que se detallan las mejoras que se consiguen en esta teoría.

Como ya hemos comentado anteriormente, una de nuestras principales motivaciones para trabajar insistentemente en esta teoría ha sido la de encontrar respuesta a la pregunta sobre la existencia de puntos de mejor aproximación en espacios de Banach reflexivos. El resultado que presentamos a continuación responde parcialmente a esta pregunta ya que asegura existencia y unicidad de puntos de mejor aproximación en espacios de Banach reflexivos que además son estrictamente convexos. Esta respuesta afirmativa es consecuencia directa de combinar el Teorema 5.2.29 con la Proposición 5.2.23.

**Teorema 5.3.1.** *Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos de un espacio de Banach  $X$  reflexivo y estrictamente convexo y sea  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  una contracción cíclica. Entonces existe un único punto  $z \in A$  tal que  $T^2 z = z$  y  $\|z - Tz\| = \text{dist}(A, B)$ .*

**Observación 5.3.2.** (1) *Además de dar una respuesta parcialmente afirmativa a la Pregunta 5.1.7, con este resultado se obtienen mejoras de otros resultados similares a éste que ya se conocían en la literatura. Este es por ejemplo el caso del Teorema 11 de [62], en el que se prueba también el corolario anterior aunque imponiendo una condición más sobre el par de conjuntos  $(A, B)$ . En concreto, se pide a los conjuntos  $A$  y  $B$  que verifiquen la condición geométrica  $(A - A) \cap (B - B) = \{0\}$ . Así, el teorema anterior se convierte en la respuesta afirmativa más cercana que se conoce hasta el momento de la Pregunta 5.1.7.*

(2) *Como consecuencia de la Proposición 5.2.23, se deduce que la hipótesis de convexidad sobre el conjunto  $B$  no es necesaria en este teorema. De hecho, tal*

y como está enunciado el teorema anterior, también se obtiene existencia y unicidad de punto de mejor aproximación en  $B$ .

Una pregunta natural que surge tras este resultado y que, hasta el momento, no hemos conseguido resolver es la siguiente.

**Problema 5.3.3.** *¿Sigue siendo cierto este resultado cuando el espacio ambiente es sólo un espacio métrico estrictamente convexo con la propiedad de la intersección no vacía?*

Para obtener convergencia de las iteradas de  $T$  al punto de mejor aproximación en las condiciones del resultado anterior, es suficiente asumir que el espacio  $X$  tenga la propiedad  $(H)$ , también conocida como la propiedad Kadec-Klee. Esta propiedad geométrica, cuya versión uniforme hemos utilizado en la sección anterior, se usa con mucha frecuencia dentro de la Teoría Métrica del Punto Fijo y más concretamente en el contexto de los espacios de Banach, ya que sus características la hacen idónea para resolver distintos problemas en este campo. Veamos a continuación la definición formal que vamos a utilizar de esta propiedad para nuestros resultados.

**Definición 5.3.4.** *Sea  $X$  un espacio de Banach. Se dice que  $X$  tiene la propiedad  $(H)$  si cualquier sucesión débilmente convergente en la esfera unidad de  $X$  es convergente en norma.*

En el contexto del resultado anterior, la siguiente proposición prueba la convergencia de cualquier órbita de la aplicación cíclica  $T$  al punto de mejor aproximación.

**Proposición 5.3.5.** *En las condiciones del teorema anterior, supongamos además que el espacio  $X$  tiene la propiedad  $(H)$ . Entonces, para todo  $x \in A$ , la subsucesión  $\{T^{2^n}x\}$  de las iteradas de  $T$  en  $x$  converge a  $z$ , el único punto de mejor aproximación de  $T$  en  $A$ .*

**Demostración.** Sea  $z$  el único punto de mejor aproximación de  $T$  en  $A$  dado por el teorema anterior. Consideremos  $x$  un punto cualquiera, pero fijo, en  $A$ . Como

$$\text{dist}(A, B) \leq \|T^{2^n}x - Tz\| = \|T^{2^n}x - T^{2^{n-1}}z\|$$

(iterando la condición de contractividad)

$$\leq k^{2n-1}\|Tx - z\| + (1 - k) \operatorname{dist}(A, B) \left( \sum_{i=0}^{2n-2} k^i \right) \leq k^{2n-1}\|Tx - z\| + \operatorname{dist}(A, B),$$

se concluye que

$$\|T^{2n}x - Tz\| \rightarrow \operatorname{dist}(A, B) \quad (5.3.7)$$

cuando  $n$  tiende a infinito.

Por otro lado, como  $A$  es cerrado y convexo en un espacio reflexivo  $X$  y  $\{T^{2n}x\}$  es acotada, existe una subsucesión débilmente convergente  $\{T^{2n_i}x\}$  a un punto  $x_0 \in A$ . Además, como

$$\|x_0 - Tz\| \leq \liminf \|T^{2n_i}x - Tz\| = \operatorname{dist}(A, B),$$

obtenemos que  $x_0 = z$ . Así, como  $\{T^{2n_i}x\}$  es cualquier subsucesión débilmente convergente, concluimos que

$$T^{2n}x \rightharpoonup z. \quad (5.3.8)$$

Consideremos ahora la bola cerrada  $\hat{B} = B(Tz, \operatorname{dist}(A, B))$  y la proyección radial de  $T^{2n}x$  sobre  $\hat{B}$ , que denotamos por  $\tilde{P}_{\hat{B}}(T^{2n}x)$ . Si  $B(a, r)$  es una bola en  $X$  y  $c \in X \setminus B(a, r)$ , la *proyección radial* de  $c$  sobre  $B(a, r)$  no es más que el punto que resulta de intersecar la frontera de la bola con el segmento  $[a, c]$ . Como

$$\|T^{2n}x - Tz\| = \|Tz - \tilde{P}_{\hat{B}}(T^{2n}x)\| + \|\tilde{P}_{\hat{B}}(T^{2n}x) - T^{2n}x\|,$$

teniendo en cuenta además (5.3.7), se obtiene que

$$\|\tilde{P}_{\hat{B}}(T^{2n}x) - T^{2n}x\| \rightarrow 0.$$

Por (5.3.8), obtenemos también que  $\tilde{P}_{\hat{B}}(T^{2n}x) \rightharpoonup z$ . Aplicando la propiedad (H), se deduce que esta sucesión también converge en norma a  $z$  y, por tanto, podemos concluir que  $T^{2n}x$  converge a  $z$ .  $\square$

Como ya se ha puesto de manifiesto antes (ver Observación 5.3.2), en [62] se obtienen, entre otros resultados, algunos teoremas de existencia y unicidad de puntos de mejor aproximación para contracciones cíclicas en espacios de Banach. Muchos de

los resultados de ese trabajo se apoyan en un nuevo concepto que ahí se define relativo a las aplicaciones cíclicas. Ese concepto es el de propiedad proximal de una aplicación cíclica  $T$ .

**Definición 5.3.6.** *Sea  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  una aplicación cíclica entre dos subconjuntos  $A$  y  $B$  de un espacio normado. Decimos que  $T$  satisface la propiedad proximal si*

$$x_n \rightarrow x \in A \cup B \text{ y } d(x_n, Tx_n) \rightarrow \text{dist}(A, B) \Rightarrow d(x, Tx) = \text{dist}(A, B).$$

Estudiando detenidamente los resultados de [62], se puede establecer también una conexión entre el Teorema 12 de ese artículo y el Teorema 5.2.29 de este documento. Antes de comentar y analizar dicha conexión, enunciamos el Teorema 12 de [62]. Recordemos que, dado un espacio de Banach  $X$ , una aplicación  $T: A \subseteq X \rightarrow X$  se dice débilmente continua si es continua con respecto a la topología débil en  $X$ .

**Teorema 5.3.7.** *Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de un espacio de Banach reflexivo y estrictamente convexo  $X$  de modo que  $A$  es cerrado y convexo y sea  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  una contracción cíclica. Si  $T$  satisface la propiedad proximal o bien es débilmente continua en  $A$ , entonces existe un único punto de mejor aproximación  $z \in A$  que verifica además  $T^2 z = z$ .*

Veamos a continuación que este teorema es en realidad consecuencia directa del Teorema 5.2.29. Concretamente, mostraremos que, asumiendo el resto de hipótesis necesarias, el hecho de que la aplicación cíclica  $T$  tenga la propiedad proximal o que sea débilmente continua en  $A$  implica que el par de conjuntos  $A$  y  $B$  sobre los que se define  $T$  tiene la propiedad HWT.

**Proposición 5.3.8.** *Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de un espacio de Banach reflexivo y estrictamente convexo  $X$  de modo que  $A$  es cerrado y convexo y sea  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  una contracción cíclica. Si  $T$  satisface la propiedad proximal o es débilmente continua sobre  $A$ , entonces  $(A, B)$  verifica la propiedad HWT.*

**Demostración.** Como ambas pruebas son similares, veamos por ejemplo el caso en el que  $T$  satisface la propiedad proximal. Sean  $\{x_n\}$  una sucesión en  $A$  y  $p$  un



punto en  $B$  tales que

$$d(x_n, p) \rightarrow d \quad (5.3.9)$$

y

$$d(x_n, Tx_n) \rightarrow d, \quad (5.3.10)$$

con  $d = \text{dist}(A, B)$ . Como  $A$  es un conjunto cerrado para la topología débil y  $X$  es un espacio reflexivo, existe una subsucesión  $\{x_{n_k}\}$  de  $\{x_n\}$  que converge débilmente a un punto  $x \in A$ . Como  $T$  satisface la propiedad proximal, se obtiene via (5.3.10) que  $d(x, Tx) = d$ . Por (5.3.9), se tiene además que

$$d(x, p) = \|x - p\| \leq \lim \|x_n - p\| = d,$$

lo que implica que  $d(x, p) = d$ . Utilizando que  $T$  es relativamente no expansiva, también se tiene que  $d(Tx, Tp) = d$ . Finalmente, como  $A$  es convexo y  $X$  es estrictamente convexo, necesariamente tiene que ocurrir que  $x = Tp$ , obteniéndose así que  $d(p, Tp) = d$ .  $\square$

**Observación 5.3.9.** *El Teorema 12 de [62] es por tanto un corolario inmediato del Teorema 5.2.29.*

## 5.4. Apéndices

### 5.4.1. Apéndice 1

En este apéndice vamos a mostrar un nuevo enfoque para abordar algunos de los problemas ya vistos hasta este momento para contracciones cíclicas. De hecho, el principal objetivo que se persigue con esto es conocer mejor la naturaleza de estas aplicaciones contractivas. El nuevo enfoque que presentamos es el utilizado por R. Espínola en [20] para resolver problemas de existencia y unicidad de puntos de mejor aproximación para aplicaciones relativamente no expansivas en el marco de los espacios de Banach. Los razonamientos que se utilizan a este respecto tienen un carácter puramente geométrico, concretamente por el uso de la noción de paralelismo

y proximidad relativa a conjuntos de un espacio de Banach, y se basan o apoyan fundamentalmente en el uso de una semimétrica auxiliar  $d_1$  que definimos más adelante. En primer lugar, conozcamos que entenderemos por semimétrica.

**Definición 5.4.1.** *Sea  $M$  un conjunto no vacío. Una función  $d: M \times M \rightarrow [0, \infty)$  se dice que es una semimétrica sobre  $M$  si*

- (1)  $d(x, y) = 0$  si y sólo si  $x = y$ .
- (2)  $d(x, y) = d(y, x)$  para cualesquiera  $x, y \in M$ .

*En este caso, el espacio  $(M, d)$  se denomina espacio semimétrico.*

Del mismo modo que se definen las contracciones para una métrica dada, se pueden definir también contracciones con respecto a una semimétrica.

**Definición 5.4.2.** *Sea  $(M, d)$  un espacio semimétrico. Una aplicación  $T: M \rightarrow M$  se dice que es una contracción si existe una constante  $k \in (0, 1)$  de modo que para todo  $x, y \in M$*

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y).$$

La siguiente definición permitirá desarrollar más fácilmente la prueba de los resultados posteriores.

**Definición 5.4.3.** *Sea  $M$  un conjunto no vacío. Sean  $d$  y  $d_1$  una métrica y semimétrica sobre  $M$  respectivamente. Decimos que  $d$  y  $d_1$  son compatibles sobre  $M$  si para todo  $\varepsilon > 0$  y  $x \in M$  existe  $f_x(\varepsilon) > 0$  y  $g_x(\varepsilon) > 0$  tales que*

$$B_d(x, f_x(\varepsilon)) \subseteq B_{d_1}(x, \varepsilon) \text{ y } B_{d_1}(x, g_x(\varepsilon)) \subseteq B_d(x, \varepsilon),$$

*donde  $B_d(x, r)$  y  $B_{d_1}(x, r)$  denotan, respectivamente, las bolas cerradas de centro  $x$  y radio  $r$  con respecto de la métrica y la semimétrica.*

Análogos al Principio de Contracción de Banach, podemos encontrar en la literatura resultados de existencia, unicidad y convergencia para contracciones en el contexto más general de los espacios semimétricos. En [29], se prueban diferentes teoremas a este respecto. A continuación, enunciamos una adaptación de uno de esos teoremas a nuestro contexto (ver el Teorema 1 en [29]).

**Teorema 5.4.4.** *Sea  $(M, d)$  un espacio métrico y  $d_1$  una semimétrica sobre  $M$  de modo que  $d$  y  $d_1$  son compatibles. Sea  $T$  una contracción sobre  $M$  respecto de la semimétrica  $d_1$ . Entonces  $T$  tiene un único punto fijo  $z$ . Además, para todo  $x \in M$  la sucesión  $\{T^n x\}$  converge a  $z$ .*

Con objeto de definir la semimétrica  $d_1$  que anunciábamos al principio de este apéndice, necesitamos introducir ciertos conceptos y herramientas geométricas relativas a conjuntos de un espacio de Banach. Comenzamos con el concepto de par proximal.

**Definición 5.4.5.** *Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico  $M$ . Se dice que el par  $(A, B)$  es proximal si para cada par de puntos  $(x, y) \in A \times B$  existe otro par  $(x', y') \in A \times B$  tal que*

$$d(x, y') = d(x', y) = \text{dist}(A, B).$$

*Si además se impone la condición de que el par de puntos  $(x', y') \in A \times B$  es único para cada par  $(x, y) \in (A, B)$ , entonces decimos que el par  $(A, B)$  es un par proximal óptimo. En este caso, si  $x \in A$  e  $y' \in B$  son tales que  $d(x, y') = \text{dist}(A, B)$ ,  $y'$  recibe el nombre de punto proximal de  $x$  en  $B$  (del mismo modo se habla de punto proximal de un punto de  $B$  en  $A$ ).*

En algunas ocasiones, según las características del espacio métrico en el que estamos trabajando, los pares proximales pueden además satisfacer otras propiedades geométricas. En [20] se prueba que, cuando el espacio ambiente es un espacio de Banach que además es estrictamente convexo, los subconjuntos  $A$  y  $B$  que forman un par proximal  $(A, B)$  satisfacen la siguiente definición.

**Definición 5.4.6.** *Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de un espacio de Banach  $X$ . Decimos que  $A$  y  $B$  son conjuntos proximales paralelos si se satisfacen las siguientes dos condiciones:*

- (1)  $(A, B)$  es un par proximal óptimo.
- (2)  $B = A + h$  para un cierto  $h \in X$  con  $\|h\| = \text{dist}(A, B)$ .

La notación que describimos a continuación la utilizaremos a lo largo de todo este apéndice. Cuando  $(A, B)$  es un par proximal paralelo, se observa fácilmente que  $a' = a + h$  para  $a \in A$  y  $b' = b - h$  para  $b \in B$  son los puntos proximales en  $B$  y  $A$ , respectivamente, de  $a$  y  $b$ .

Dados  $A$  y  $B$  dos conjuntos proximales paralelos en un espacio de Banach  $X$ , vamos a considerar más adelante el conjunto  $C = A + 2h$ , donde  $h \in X$  es tal que  $B = A + h$ . De forma inmediata se observa que  $A, B$  y  $C$  son conjuntos proximales paralelos dos a dos.

A partir de ahora, diremos que un par de conjuntos  $(A, B)$  satisface una propiedad si cada conjunto  $A$  y  $B$  del par tiene dicha propiedad.

El resultado de carácter técnico que damos a continuación relaciona el concepto de par proximal paralelo con el de contracción cíclica.

**Lema 5.4.7.** Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos proximales paralelos de un espacio de Banach y  $T$  una contracción cíclica definida sobre  $A \cup B$ . Entonces  $T(a + h) = Ta - h$  para cualquier  $a \in A$  y  $T(b - h) = Tb + h$  para cualquier  $b \in B$ .

**Demostración.** Dado  $a \in A$ , sea  $a' = a + h$  su punto proximal en  $B$ . Como  $T$  es relativamente no expansiva,

$$\|Ta - Ta'\| \leq \|a - a'\| = \text{dist}(A, B),$$

de donde, por la unicidad de los puntos proximales, se deduce que  $T(a + h) = Ta - h$ .  
□

Tal y como comentamos al comienzo de este apéndice, una de las herramientas fundamentales para desarrollar este enfoque de la teoría es la semimétrica  $d_1$ , introducida por primera vez en [20]. Damos a continuación su definición.

**Definición 5.4.8.** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos proximales paralelos de un espacio de Banach y  $C$  como lo describimos tras la Definición 5.4.6. Consideramos la función  $d_1 : B \times B \rightarrow [0, \infty)$  definida por

$$d_1(x, y) = \inf\{r > 0 : y \in B(x - h, d + r) \cap B(x + h, d + r)\}.$$

donde  $d = \text{dist}(A, B)$ .

Directamente de la definición, se deducen las dos siguientes propiedades de  $d_1$ .

**Proposición 5.4.9.** (1)  $d_1$  define una semimétrica sobre  $B$ .

(2) Para todo  $x, y \in B$ ,  $d_1(x, y) \leq \|x - y\|$ .

Como consecuencia directa del apartado (2) de la proposición anterior, podemos establecer una relación entre las bolas con respecto a la norma y a la semimétrica  $d_1$ .

**Corolario 5.4.10.** Si  $B(x, r)$  y  $B_1(x, r)$  denotan respectivamente las bolas cerradas con respecto a la norma y a la semimétrica  $d_1$  en  $B$ , entonces

$$B(x, r) \subseteq B_1(x, r)$$

para cualesquiera  $x \in B$  y  $r \geq 0$ .

En general, la contención contraria a la del corolario anterior entre estas bolas no es cierta. La siguiente proposición ofrece condiciones suficientes para que una contención parecida a la opuesta tenga lugar. Concretamente, vamos a demostrar que dentro de cualquier bola con respecto a la norma  $B(x, r)$  podemos introducir una bola con respecto a  $d_1$  centrada en el mismo punto aunque con distinto radio. Enunciamos este resultado de la siguiente forma equivalente.

**Proposición 5.4.11.** Sea  $X$  un espacio de Banach reflexivo y estrictamente convexo que verifica además la propiedad (H). Supongamos que  $A, B$  y  $C$  son subconjuntos como en la definición de  $d_1$ . Si  $B$  es cerrado, convexo y no vacío, entonces existe  $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  tal que  $\lim_{r \rightarrow 0} f(r) = 0$  y

$$B_1(x, r) \subseteq B(x, f(r)).$$

**Demostración.** La existencia de  $f(r) > 0$  tal que  $B_1(x, r) \subseteq B(x, f(r))$  es inmediata dado que  $B_1(x, r)$  es un conjunto acotado en el espacio normado  $X$ . Falta por tanto comprobar que  $f$  puede escogerse de modo que se verifique la condición del límite descrita en el enunciado. Como las bolas con respecto a  $d_1$  son monótonas con respecto al radio, basta encontrar  $f$  que verifique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Consideremos el conjunto  $B_1(x, \frac{1}{n})$  y sean  $x_n, y_n \in B$  tales que

$$d(x_n, y_n) = \text{diam}(B_1(x, \frac{1}{n})),$$

donde el diámetro se considera con respecto a la métrica inducida por la norma (asumimos que el diámetro se alcanza para simplificar la prueba). Es obvio que estos puntos pertenecen a la frontera de  $B_1(x, \frac{1}{n})$ ,  $\partial B_1(x, \frac{1}{n})$ , donde esta frontera la estamos considerando con respecto a la topología inducida en  $B$  por la norma del espacio  $X$ . Como  $\{B_1(x, \frac{1}{n})\}_n$  es una sucesión decreciente de conjuntos, las sucesiones  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  están en  $B_1(x, 1)$  para todo  $n$ . Además, como  $B_1(x, 1)$  es un conjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach reflexivo, existen subsucesiones  $\{x_{n_k}\}$  e  $\{y_{n_k}\}$  tales que  $x_{n_k} \rightharpoonup z$  e  $y_{n_k} \rightharpoonup w$ , para ciertos  $z, w \in B_1(x, 1)$ . Como también sabemos que  $x_n \in B_1(x, \frac{1}{n_0})$  para todo  $n \geq n_0$ , obtenemos que  $z, w \in B_1(x, \frac{1}{n})$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . De este modo, necesariamente debe ocurrir que  $z = w = x$ , deduciéndose así que ambas sucesiones  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  convergen débilmente a  $x$ . Sea  $B^+$  el conjunto en  $X$  definido como  $B^+ = B(x + h, d)$ , donde  $d = \|h\| = \text{dist}(A, B)$ . Consideremos ahora la sucesión  $\{\tilde{P}_{B^+}(x_n)\}$  de las proyecciones radiales de  $\{x_n\}$  sobre  $B^+$ . Se tiene que

$$\|(x + h) - x_n\| = \|(x + h) - \tilde{P}_{B^+}(x_n)\| + \|\tilde{P}_{B^+}(x_n) - x_n\| = d + \|\tilde{P}_{B^+}(x_n) - x_n\|$$

Como  $x_n \in B_1(x, \frac{1}{n})$ , sabemos que  $\|(x + h) - x_n\| \leq d + \frac{1}{n}$ . Por tanto, obtenemos que  $\tilde{P}_{B^+}(x_n) \rightharpoonup x$ . Aplicando la propiedad (H), deducimos que esta última sucesión converge también en norma y, por lo tanto, concluimos que  $x_n \rightarrow x$ . Razonando del mismo modo, podemos probar también que  $y_n \rightarrow x$ . Esto implica que  $d(x_n, y_n) = \text{diam}(B_1(x, \frac{1}{n})) \rightarrow 0$ . Basta tomar  $f(1/n) = \text{diam}(B_1(x, \frac{1}{n}))$  para probar el teorema.  $\square$

**Corolario 5.4.12.** *En las condiciones de la proposición anterior, la métrica inducida por la norma sobre  $B$  y la semimétrica  $d_1$  son compatibles en el sentido de la Definición 5.4.3.*

A continuación, vamos a probar el Teorema 5.3.1 inspirándonos en las pruebas de los resultados de [18, 20]. Para ello, tal y como adelantábamos al comienzo del

apéndice, vamos a utilizar nuevas herramientas y, por tanto, un nuevo enfoque para resolver este problema de existencia y unicidad de puntos de mejor aproximación de contracciones cíclicas.

**Observación 5.4.13.** *Sin que suponga ninguna diferencia sustancial, y fundamentalmente para respetar la construcción de la semimétrica  $d_1$  dada en [20], enunciaremos el siguiente resultado refiriéndonos a la existencia de punto de mejor aproximación en  $B$  en lugar de en  $A$ , que es como aparece en el Teorema 5.3.1.*

*Además del Teorema 5.3.1, también incluimos en el enunciado otras propiedades que se obtienen como consecuencia de la prueba.*

**Teorema 5.4.14.** *Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos de un espacio de Banach  $X$  reflexivo y estrictamente convexo y sea  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  una contracción cíclica. Supongamos que  $X$  tiene la propiedad  $(H)$ . Entonces existe un único punto  $z \in B$  tal que  $\|z - Tz\| = \text{dist}(A, B)$ .*

*Además, existen  $h \in X$  y  $B_0 \subseteq B$  tales que, si  $T'b = Tb + h$  para  $b \in B_0$ , entonces*

(i)  $T': B_0 \rightarrow B_0$  es una  $d_1$ -contracción,

(ii)  $z = Tz + h$ , y

(iii)  $(T')^n b \rightarrow z$  para todo  $b \in B_0$

**Demostración.** Consideramos el par de conjuntos  $(A, B)$ . Sean  $A_0$  y  $B_0$  los subconjuntos de  $X$  definidos del siguiente modo:

$$A_0 = \{x \in A : d(x, y') = \text{dist}(A, B) \text{ para algún } y' \in B\},$$

$$B_0 = \{y \in B : d(x', y) = \text{dist}(A, B) \text{ para algún } x' \in A\}.$$

Como  $X$  es reflexivo y el par  $(A, B)$  es cerrado, convexo y no vacío,  $(A_0, B_0)$  es igualmente cerrado, convexo y no vacío. Directamente por la definición de estos conjuntos, se tiene que  $(A_0, B_0)$  es un par proximal verificando que

$$\text{dist}(A_0, B_0) = \text{dist}(A, B).$$

Veamos que la aplicación  $T$  continúa siendo una *contracción cíclica* ahora sobre  $A_0 \cup B_0$ . Sea  $x_0 \in A_0 \subseteq A$ . Utilizando la definición de  $A_0$ , sabemos que existe  $y'_0 \in B_0$  tal que  $d(x_0, y'_0) = \text{dist}(A, B)$ . Teniendo en cuenta que  $T$  es una contracción cíclica sobre  $A \cup B$ , sabemos además que

$$d(Tx_0, Ty'_0) = \text{dist}(A, B).$$

Como  $Ty'_0 \in A$ , se deduce que  $Tx_0 \in B_0$ , y como consecuencia que  $T(A_0) \subseteq B_0$ . Del mismo modo, se prueba que  $T(B_0) \subseteq A_0$ . Así, tenemos que  $T: A_0 \cup B_0 \rightarrow A_0 \cup B_0$ . Además, como  $\text{dist}(A_0, B_0) = \text{dist}(A, B)$ ,

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) + (1 - k)\text{dist}(A_0, B_0),$$

para cualesquiera  $x \in A_0, y \in B_0$ .

Como consecuencia del Lema 3.1 de [20], podemos concluir que  $A_0$  y  $B_0$  son además conjuntos proximales paralelos. Sea  $h$ , por tanto, el vector de  $X$  tal que  $B_0 = A_0 + h$ . Esta igualdad de conjuntos implica directamente (i).

Por el Lema 5.4.7, sabemos que para todo  $a \in A_0$  y  $b \in B_0$ ,

$$T(a + h) = Ta - h \quad \text{y} \quad T(b - h) = Tb + h.$$

Veamos a continuación que  $T'$  es una contracción sobre  $B_0$  con respecto de la semimétrica  $d_1$ , es decir, una  $d_1$ -contracción. Sean  $x, y \in B_0$ . Denotemos  $r = d_1(x, y)$  y  $d = \text{dist}(A_0, B_0)$ . Para demostrar que  $T'$  es una contracción de constante  $k$  con respecto de  $d_1$  basta probar que

$$T'y \in B(T'x - h, d + kr) \cap B(T'x + h, d + kr).$$

Con este objeto, consideramos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} T'y \in B(T'x - h, d + kr) &\Leftrightarrow \|T'y - (T'x - h)\| \leq d + kr \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \|Ty + h - (Tx + h - h)\| &\leq d + kr \Leftrightarrow \|Tx - (Ty + h)\| \leq d + kr \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \|Tx - T(y - h)\| &\leq d + kr. \end{aligned} \tag{5.4.11}$$



Como  $T$  es una contracción cíclica,

$$\|Tx - T(y - h)\| \leq k\|x - (y - h)\| + (1 - k)d \leq k(d + r) + (1 - k)d = d + kr,$$

y, por tanto, la desigualdad (5.4.11) es cierta. Para demostrar que  $T'y \in B(T'x + h, d + kr)$ , hemos de introducir una nueva aplicación. Sea  $\hat{T}: B \cup C \rightarrow B \cup C$  la aplicación definida por  $\hat{T}b = Tb + 2h$  si  $b \in B$  y  $\hat{T}c = T(c - 2h)$  para  $c \in C$ . De forma inmediata se observa que  $\hat{T}(B) \subseteq C$  y  $\hat{T}(C) \subseteq B$ . Además, como  $Tb + h = T(b - h)$  y  $T(c - 2h) = T(c - h) + h$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \|\hat{T}b - \hat{T}c\| &= \|Tb + 2h - T(c - 2h)\| = \|T(b - h) - T(c - h)\| \\ &\leq k\|b - c\| + (1 - k) \operatorname{dist}(A, B) = k\|b - c\| + (1 - k) \operatorname{dist}(B, C). \end{aligned}$$

Por tanto,  $\hat{T}$  es una contracción cíclica. Ahora, basta repetir el razonamiento antes utilizado para concluir que  $T'$  es una  $d_1$ -contracción.

La prueba de este teorema se concluye aplicando el Teorema 5.4.4 a la aplicación  $T'$  definida sobre  $B_0$ . Como el punto de mejor aproximación  $z$  es el punto fijo de la aplicación  $T'$ , (ii) y (iii) se cumplen. El hecho de que  $z$  es único (como punto de mejor aproximación) incluso para todo el conjunto  $B$  se obtiene siguiendo pasos similares a los de la demostración del Teorema 5.2.25.  $\square$

**Observación 5.4.15.** Como  $(T')^{2n}b = T^{2n}b$  para todo  $b \in B_0$ , (iii) implica que  $T^{2n}b \rightarrow z$  si  $b \in B_0$ . De hecho, dado que el espacio  $X$  tiene la propiedad (H), también se tiene la convergencia de las iteradas sobre cualquier punto  $b \in B$  (ver la Proposición 5.3.5).

De esta proposición, cabe destacar fundamentalmente la originalidad de la prueba, ya que, en este caso concreto, este nuevo enfoque no ofrece ninguna mejora con respecto al Teorema 5.3.1. Es más, el hecho de utilizar ahora la propiedad (H) como hipótesis para probar existencia y unicidad de punto de mejor aproximación pone de manifiesto que, en realidad, el Teorema 5.3.1 es un resultado más fuerte que esta proposición.

Si revisamos con detenimiento el contenido de este apéndice hasta este momento, vemos que muchos de los nuevos conceptos que aquí se introducen están definidos

dentro del marco lineal de los espacios de Banach (no olvidemos que esto se debe a que el principal objetivo por el que se introducen estas nociones es el de proporcionar una prueba diferente del Teorema 5.3.1). Éste es por ejemplo el caso de la semimétrica  $d_1$ , cuya definición está íntimamente ligada con la estructura lineal del espacio ambiente. No obstante, esta semimétrica se puede definir en ciertos espacios métricos sin necesitar el uso de la estructura lineal. Estos espacios métricos a los que nos referimos son ciertos espacios métricos único geodésicos que poseen “buenas” propiedades con respecto a la prolongación de los segmentos geodésicos. Dentro de esta familia de espacios se encuentran por ejemplo los espacios CAT(0) que, como ya hemos comentado en capítulos anteriores, son uno de los ejemplos más importantes de espacios métricos geodésicos uniformemente convexos que se conocen. Por ello, definiremos  $d_1$  ahora en este contexto y veremos que, gracias a las propiedades geométricas de estos espacios, en su mayoría similares a la de los espacios de Hilbert, la semimétrica  $d_1$  “coincide” con la métrica del espacio métrico CAT(0) en el conjunto donde se define  $d_1$ .

Sean, por tanto,  $M$  un espacio CAT(0) completo y  $A$  y  $B$  dos subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos de  $M$ .

Supongamos que  $\text{dist}(A, B) > 0$ , ya que en caso contrario no habría nada que probar. Definimos los conjuntos  $A_0$  y  $B_0$  en este caso como en la prueba del Teorema 5.4.14.

$$A_0 = \{x \in A : d(x, y') = \text{dist}(A, B) \text{ para algún } y' \in B\},$$

$$B_0 = \{y \in B : d(x', y) = \text{dist}(A, B) \text{ para algún } x' \in A\}.$$

A continuación, resumimos algunas de las propiedades del par  $(A_0, B_0)$  en este nuevo contexto.

**Proposición 5.4.16.** *El par  $(A_0, B_0)$  es cerrado, convexo y no vacío en  $M$ . Además, cualquier punto  $b \in B_0$  se puede unir a través de un segmento geodésico de longitud  $d = \text{dist}(A, B)$  a su punto proximal  $b - h$  en  $A_0$  y viceversa.*

**Demostración.** Que  $A_0$  y  $B_0$  son cerrados se obtiene directamente de su definición y del hecho de que  $A$  y  $B$  son ambos cerrados. Para demostrar que  $A_0$  y  $B_0$  son

no vacíos basta proceder como en el caso lineal cuando utilizábamos la hipótesis de reflexividad ya que, como es bien conocido (mirar la Observación 1.4.40), la intersección de una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados, acotados, convexos y no vacíos de un espacio CAT(0) es no vacía. Finalmente, la convexidad de los conjuntos  $A_0$  y  $B_0$  se deduce de la convexidad de la métrica en un espacio CAT(0) (ver la Proposición 2.2 del Capítulo II.2 en [8]).  $\square$

A continuación, definimos la semimétrica  $d_1$  sobre  $B_0$  ya que es este conjunto y no  $B$  en general el que, como en el caso lineal, posee ciertas propiedades de proximidad con respecto a  $A$  (en concreto con respecto a  $A_0$ ). En este caso, esta definición no requerirá utilizar ningún conjunto auxiliar  $C_0$ .

**Definición 5.4.17.** *Definimos la función  $d_1: B_0 \times B_0 \rightarrow [0, \infty)$  como*

$$d_1(x, y) = \inf\{r > 0 : y \in B(x - h, d + r) \text{ and } y - h \in B(x, d + r)\},$$

donde  $d = \text{dist}(A, B)$ .

**Observación 5.4.18.** *Es fácil comprobar que esta definición y la Definición 5.4.8 coinciden en espacios lineales.*

A continuación, se establece la relación entre la métrica de  $M$  y la semimétrica  $d_1$  en  $B_0$ .

**Teorema 5.4.19.** *La semimétrica  $d_1$  es compatible con la métrica  $d$  inducida por  $M$  sobre  $B_0$ . De hecho,  $B_1(x, \sqrt{d^2 + r^2} - d) = B_0 \cap B(x - h, \sqrt{d^2 + r^2}) = B_0 \cap B(x, r) \subseteq B_1(x, r)$*

**Demostración.** Demostramos este teorema aplicando, de forma sencilla, el *Teorema del cuadrilátero plano* ([8, pág.181]). Dados dos puntos cualesquiera  $x$  e  $y$  en  $B_0$ , consideremos la cuaterna de puntos  $x, y, x - h$  e  $y - h$ , donde  $x$  (respectivamente,  $y$ ) es el punto proximal de  $x - h$  (rep.,  $y - h$ ) en  $B_0$  y viceversa. El hecho de que los puntos sean proximales dos a dos implica que los ángulos  $\angle_x(x - h, y)$ ,  $\angle_y(x, y - h)$ ,  $\angle_{y-h}(x - h, y)$  y  $\angle_{x-h}(y - h, x)$  son mayores o iguales que  $\pi/2$ . Así, si se aplica el Teorema del Cuadrilátero Plano, podemos deducir que la envoltura convexa de los

puntos  $x, y, x - h$  e  $y - h$  es isométrica a un rectángulo en el espacio euclídeo bidimensional. Aplicando ahora el Teorema de Pitágoras, se deduce de forma inmediata que

$$B_1(x, \sqrt{d^2 + r^2} - d) = B_0 \cap B(x - h, \sqrt{d^2 + r^2}) = B_0 \cap B(x, r).$$

Para concluir la prueba, basta observar cómo la contención  $B_0 \cap B(x, r) \subseteq B_1(x, r)$  se implica directamente de la definición de  $d_1$ .  $\square$

Este apéndice lo terminamos comentando qué ocurre si hacemos un uso de esta semimétrica  $d_1$  (definida ahora en un espacio  $\text{CAT}(0)$ ) similar al que hemos hecho en el caso lineal, cuando trabajamos con una contracción cíclica  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$ . En primer lugar, se observa fácilmente que, al encontrarnos en un espacio único geodésico, también podemos definir la aplicación  $T'b = Tb + h$  para  $b \in B_0$  (ver Teorema 5.4.14), donde  $Tb + h$  denota el punto proximal de  $Tb \in A_0$  en  $B_0$ . Si revisamos la demostración del Teorema 5.4.14 y tratamos de ajustarla a este nuevo contexto, nos encontraríamos principalmente con la dificultad de comprobar si  $T'$  es también ahora una contracción sobre  $B_0$ . Este hecho sin embargo se puede probar siguiendo los mismos pasos que en el caso lineal y teniendo en cuenta, en cierto momento de la prueba, que la envoltura convexa de los puntos  $x, y, x - h$  e  $y - h$  es en realidad un rectángulo.

### 5.4.2. Apéndice 2

En este segundo apéndice estudiamos algunos de los resultados de la Sección 5.3 en el contexto de los espacios  $\text{CAT}(0)$ .

Como ya hemos comentado en otras ocasiones a lo largo de este documento, uno de los problemas más importantes que nos encontramos al trabajar toda esta teoría en un marco puramente métrico es la ausencia de un concepto de convergencia débil en este contexto tan versátil como el que se conoce en los espacios de Banach. Los diferentes tipos de convergencia “débil” para espacios métricos que se conocen (ver por ejemplo [44, 65]) están en su mayoría poco estudiados y, por tanto, es difícil encontrar literatura sobre ellos que aclare un poco más cómo funcionan o qué los caracteriza.

Si por ejemplo tratamos de probar un teorema análogo al Teorema 10 de [62],

en el contexto de los espacios métricos, siguiendo la prueba que se desarrolla en este mencionado artículo, nos damos cuenta de que necesitamos un concepto de convergencia en el espacio métrico que tenga propiedades similares o funcione del mismo modo a como lo hace la convergencia débil en los espacios de Banach. Veamos a continuación hasta dónde podemos llegar en este teorema concreto si consideramos la  $\Delta$ -convergencia (ver Definición 1.3.1) en un espacio métrico.

Teniendo en cuenta la definición de la  $\Delta$ -convergencia, diremos que un subconjunto  $A$  de un espacio métrico  $M$  es  $\Delta$ -cerrado si el  $\Delta$ -límite de cualquier sucesión  $\Delta$ -convergente  $\{x_n\} \subset A$  está en  $A$ .

A continuación, consideramos la propiedad proximal (definida para espacios de Banach en la Sección 5.3) en el contexto de los espacios métricos.

**Definición 5.4.20.** *Sea  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  una aplicación cíclica entre dos subconjuntos  $A$  y  $B$  de un espacio métrico  $M$ . Decimos que  $T$  satisface la propiedad proximal para la  $\Delta$ -convergencia si*

$$x_n \rightarrow^{\Delta} x \in A \cup B \text{ y } d(x_n, Tx_n) \rightarrow \text{dist}(A, B) \Rightarrow d(x, Tx) = \text{dist}(A, B).$$

Utilizando la definición anterior, probamos el siguiente resultado de puntos de mejor aproximación (análogo al Teorema 10 de [62]) en espacios métricos.

**Teorema 5.4.21.** *Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico  $M$ . Si cualquier sucesión acotada  $\{x_n\} \subset A$  tiene un único centro asintótico en  $M$  y  $A$  es un subconjunto  $\Delta$ -cerrado, entonces cualquier contracción cíclica  $T$  que satisfaga la propiedad proximal para la  $\Delta$ -convergencia tiene al menos un punto de mejor aproximación  $a \in A$ .*

**Demostración.** Sea  $x$  un punto arbitrario, pero fijo, en  $A$ . Consideremos la sucesión  $x_{2n} = T^{2n}x \in A$ . Como esta sucesión es acotada, podemos encontrar una subsucesión  $\{x_{n_k}\}$   $\Delta$ -convergente a un punto  $z \in M$  (ver [44, pág. 2] para más detalles). Utilizando que  $A$  es además  $\Delta$ -cerrado, se tiene que  $z \in A$ . Directamente aplicando la propiedad proximal se obtiene que  $d(z, Tz) = \text{dist}(A, B)$ .  $\square$

**Observación 5.4.22.** *Este teorema extiende de forma trivial el Teorema 10 de [62] para los casos en los que el espacio de Banach  $X$  es un espacio de Hilbert ya que la  $\Delta$ -convergencia coincide con la convergencia débil en estos espacios lineales.*

A pesar de que este teorema va dirigido a un contexto muy amplio (el de los espacios métricos), vemos que las condiciones que se imponen sobre el conjunto  $A$  son bastante restrictivas. De hecho, sólo conocemos una situación general, fuera del contexto de los espacios normados, en la que podemos garantizarlas. Esto se pone de manifiesto en el siguiente corolario.

**Corolario 5.4.23.** *Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de un espacio  $CAT(0)$  de modo que  $A$  es cerrado y convexo. Entonces se verifica el teorema anterior.*

**Demostración.** Este resultado es consecuencia inmediata del teorema anterior ya que todo subconjunto cerrado y convexo de un espacio  $CAT(0)$  es  $\Delta$ -cerrado y además cualquier sucesión acotada  $\{x_n\}$  de un espacio  $CAT(0)$  posee un único centro asintótico. Estos dos hechos fueron probados en [44, pág. 2].  $\square$

**Observación 5.4.24.** *Este corolario también se obtiene a partir del Teorema 2 de [67] y la Proposición 5.2.2.*

# Bibliografía

- [1] G. C. Ahuja, T. D. Narang y S. Trehan, *Best Approximation on Convex Sets in a Metric Space*, J. Approx. Theory **12** (1974), 94–97.
- [2] A. D. Alexandrov, *A theorem on triangles in a metric space and some of its applications*, Trudy Mat. Inst. Steklov **38** (1951), 5–23.
- [3] L. Ambrosio y P. Tilli, *Topics on Analysis in Metric Spaces*, Oxford University Press, (2004).
- [4] M. Arav, F. E. Castillo Santos, S. Reich, y A. J. Zaslavski, *A note on asymptotic contractions*, Fixed Point Theory Appl. (2007), Art. ID 39465 6pp.
- [5] J. M. Ayerbe, T. Domínguez, y G. López, *Measures of Noncompactness on Metric Fixed Point Theory*, Birkhäuser, 1997.
- [6] M. Berger, *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, (2003).
- [7] F. S. de Blasi, J. Myjak, y P. L. Papini, *Porous sets in best approximation theory*, J. London Math. Soc. (2) **44** (1991), 135–142.
- [8] M. R. Bridson y A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-positive Curvature*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999.
- [9] F. E. Browder, *On the convergence of successive approximations for nonlinear functional equations*, Indag. Math. **30** (1968), 27–35.

- [10] F. E. Browder, *Fixed point theorems for noncompact mappings in Hilbert spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **43** (1965), 1272–1276.
- [11] F. E. Browder, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **54** (1965), 1041–1044.
- [12] D. Burago, Y. Burago, y S. Ivanov, *A Course in Metric Geometry*, in: Graduate Studies in Math., vol. 33, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [13] H. Busemann, *The Geometry of Geodesics*, Academic Press, New York, 1955.
- [14] R. Caccioppoli, *Una teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale*, Rend. Accad. Naz. Lincei **11** (1930), 794–799.
- [15] L. Capogna, D. Danielli, S. D. Pauls, y J. T. Tyson, *An Introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem*, vol. 259 of Progress in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [16] S. Dhompongsa, A. Kaewkhao, y B. Panyanak, *Lim's theorems for multivalued mappings in CAT(0) spaces*, J. Math. Anal. Appl. **312** (2) (2005), 478–487.
- [17] S. Dhompongsa, W. A. Kirk, y B. Sims, *Fixed points of uniformly lipschitzian mappings*, Nonlinear Anal. **65** (2006), 762–772.
- [18] A. A. Eldred, W. A. Kirk, y P. Veeramani, *Proximal normal structure and relatively nonexpansive mappings*, Studia Math. **171** (3) (2005), 283–293.
- [19] A. A. Eldred y P. Veeramani, *Existence and convergence of best proximity points*, J. Math. Anal. Appl. **323** (2) (2006), 1001–1006.
- [20] R. Espínola, *A new approach to relatively nonexpansive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (6) (2008), 1987–1995.
- [21] J. García-Falset, E. Llorens-Fuster y B. Sims, *Fixed point theory for almost convex function*, Nonlinear Anal. **32** (1998), 601–608.
- [22] D. Göhde, *Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung*, Math. Nach. **30** (1965), 251–258.



- [23] K. Goebel y W. A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [24] K. Goebel y S. Reich, *Uniform Convexity, Hyperbolic Geometry, and Nonexpansive Mappings*, Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, Inc. New York and Basel, 1984.
- [25] M. Gromov, *Metric Structure for Riemannian and non-Riemannian Spaces*, Progress in Mathematics **152**, Birkhäuser, Boston, 1984.
- [26] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, Essays in group theory (S. M. Gersten, ed.), Springer-Verlag, MSRI publi. **8** (1987), 75–263.
- [27] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [28] N. Hussain y M. A. Khamsi, *On asymptotic pointwise contractions in metric spaces*, Nonlinear Anal. **71** (2009), 4423–4429.
- [29] J. Jachymski, J. Matkowski, y T. Świątkowski, *Nonlinear contractions on semi-metric spaces*, (English summary) J. Appl. Anal. **1** (2) (1995), 125–134.
- [30] J. Jost, *Nonpositive curvature: Geometric and analytic aspects*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.
- [31] A. Kaewcharoen y W. A. Kirk, *Proximality in geodesic spaces*, Abstr. Appl. Anal. **2006**, 1–10.
- [32] M. A. Khamsi, *On Asymptotically Nonexpansive Mappings in Hyperconvex Metric Spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 365–373.
- [33] M. A. Khamsi y W. A. Kirk, *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*, Wiley Interscience, New York, 2001.
- [34] W. A. Kirk, *Geodesic geometry and fixed point theory*, (Proceedings, Universities of Malaga and Seville, Sept. 2002-Feb. 2003) (Eds. D. Girela, G. López y R. Villa), Universidad de Sevilla, Sevilla, 2003, 195–225.

- [35] W. A. Kirk, *Geodesic geometry and fixed point theory II*, in: J. García-Falset, E. Llorens-Fuster, B. Sims (Eds.), *Fixed Point Theory Appl.*, Yokohama Publ., (2004), 113–142.
- [36] W. A. Kirk, *Fixed points of asymptotic contractions*, *J. Math. Anal. Appl.* **277** (2003), 645–650.
- [37] W. A. Kirk, *Some recent results in metric fixed point theory*, *J. Fixed Point Theory Appl.* **2** (2007), 195–207.
- [38] W. A. Kirk, *Mappings of generalized contractive type*, *J. Math. Anal. Appl.* **32** (1970), 567–572.
- [39] W. A. Kirk, *Asymptotic pointwise contractions*, in: Plenary Lecture, the 8th International Conference on Fixed Point Theory and Its Applications, Chiang Mai University, Thailand, July 16–22, 2007.
- [40] W. A. Kirk, *Krasnoselskii's iteration process in hyperbolic spaces*, *Numer. Funct. Anal. Optimiz.* **4** (1981-82), 371–381.
- [41] W. A. Kirk, *An abstract fixed point theorem for nonexpansive mappings*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **82** (1981), 640–642.
- [42] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, *Amer. Math. Monthly* **72** (1965), 1004–1006.
- [43] W. A. Kirk y Hong-Kun Xu, *Asymptotic pointwise contractions*, *Nonlinear Anal.* **69** (2008), 4706–4712.
- [44] W. A. Kirk y B. Panyanak, *A concept of convergence in geodesic spaces*, *Nonlinear Anal.* **68** (12) (2008), 3689–3696.
- [45] W. A. Kirk y B. Sims, *Handbook of Metric Fixed Point Theory*, (W.A. Kirk and B. Sims editors) Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [46] W. A. Kirk, P.S. Srinivasan, P. Veeramani, *Fixed points for mappings satisfying cyclical contractive conditions*, *Fixed Point Theory* **4** (2003) 79–89.

- [47] U. Kohlenbach y L. Leuştean, *Asymptotically nonexpansive mappings in uniformly convex hyperbolic spaces*, J. of the European Math. Soc. **12**, (2010), 71–92.
- [48] U. Lang y V. Schroeder, *Jung's Theorem for Alexandrov Spaces of Curvature Bounded Above*, Annals of Global Analysis and Geometry **15** (1997), 263–275.
- [49] L. Leuştean, *A quadratic rate of asymptotic regularity for  $CAT(0)$ -spaces*, J. Math. Anal. Appl. (1) **325** (2007), 386–399.
- [50] L. Leuştean, *Nonexpansive iterations in uniformly convex  $W$ -hyperbolic spaces*, Contemporary Mathematics **494** (2009) 161-184.
- [51] E. A. Lifšic, *A fixed point theorem for operators in strongly convex spaces*, Voronež. Gos. Univ. Trudy Math. Fak. **16** (1975), 23–28 (in Russian).
- [52] T. C. Lim, *Remarks on some fixed point theorems*, Proc. Amer. Math. Soc. **60** (1976) 179–182.
- [53] T. C. Lim y H. K. Xu, *Uniformly lipschitzian mappings in metric spaces with uniform normal structure*, Nonlinear Anal. **25** (1995), 1231–1235.
- [54] S. B. Nadler Jr., *Multi-valued contraction mappings*, Pacific J. Math. **30** (1969), 475–478.
- [55] B. L. Lin, P. K. Lin, y S. L. Troyanski, *Some geometric and topological properties of the unit sphere in a Banach space*, Math. Ann. **274** (4) (1986), 613–616.
- [56] A. Papadopoulos, *Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature*, European Math. Soc., Zürich, 2005, xii + 287 pp.
- [57] B. Piątek, *Halpern iteration in spherical spaces*, aceptado para su publicación en Acta Math.Sin. (English Series).
- [58] B. Piątek, *On cyclic Meir-Keeler contractions in metric spaces*, Nonlinear Anal. **74** (1) (2011), 35–40.
- [59] S. Reich y I. Shafrir, *Nonexpansive iterations in hyperbolic spaces*, Nonlinear Anal. **15** (6) 1990, 537–558.

- [60] W. F. Reynolds, *Hyperbolic Geometry on a Hyperboloid*, The American Math. Monthly, **100** (5) (1993), 442–455.
- [61] D. Rolfsen, *Geometric Methods in Topological Spaces*, Topology Conference, Arizona State University, 1967.
- [62] M.A. Al-Thagafi, Naseer Shahzad, *Convergence and existence results for best proximity points* Nonlinear Anal. **70** (10) (2009), 3665–3671.
- [63] N. Shahzad y J. Markin, *Invariant approximations for commuting mappings in CAT(0) and hyperconvex spaces*, J. Math. Anal. Appl. **337** (2) (2008), 1457–1464.
- [64] T. Shimizu y W. Takahashi, *Fixed points of multivalued mappings in certain convex metric spaces*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **8** (1996), 197–203.
- [65] E. N. Sosov, *On analogues of weak convergence in a special metric space*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat **5** (2004), 84–89. Translation in Russian Math. (Iz. VUZ) **48** (5) (2004), 79–83.
- [66] S. B. Stečkin, *Approximation properties of sets in normed linear spaces*, Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées **8** (1963), 5–18. (Russian.)
- [67] T. Suzuki, M. Kikkawa, y C. Vetro, *The existence of best proximity points in metric spaces with the property UC*, Nonlinear Anal. **71** (7–8) (2009), 2918–2926.
- [68] T. Zamfirescu, *On the cut locus in Alexandrov spaces and applications to convex surfaces*, Pacific J. Math. (2) **217** (2004), 375–386.