PROPIEDADES DE CONCENTRACIÓN EN ESPACIOS DE DIMENSIÓN FINITA. INMERSIONES ISOMÉTRICAS EN ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS

Dpto. Análisis Matemático
Universidad de Sevilla (Facultad de Matemáticas)

5/6/1998

25/6/1998

26 de Junio

del Depto.

Fdo.: José Cordoba Alvarez.

Rafael Villa Caro

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

PROPIEDADES DE CONCENTRACIÓN EN ESPACIOS DE DIMENSIÓN FINITA. INMERSIONES ISOMÉTRICAS EN ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS

Memoria presentada por
Rafael VILLA CARO
para optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

Rafael Villa Caro

V° B° del Director

D. Juan ARIAS DE REYNA MARTÍNEZ
Catedrático del Departamento de
Análisis Matemático de la
Universidad de Sevilla.

Agradecimientos

Muchas son las personas que, de una forma u otra, han contribuido a que esta memoria vea la luz. Quisiera agradecerles ahora su ayuda. Es probable que me deje muchas sin nombrar, pero aunque no estén todas las que son, puedo asegurar que sí son todas las que están.

A Juan, mi director, con el que he aprendido tanta Matemática como mi capacidad me ha permitido, y quien ha sabido hacerme disfrutar de ella. Por todo el tiempo que me ha dedicado y por la paciencia que ha demostrado conmigo. Gracias.

A Juan Carlos, Rafa, Fernando y Ricardín, mis compañeros y amigos, porque siempre han estado ahí, en los buenos y en los malos momentos. Porque con ellos he disfrutado con conversaciones sobre Matemáticas y sobre todo lo demás, que han hecho de este Departamento mi segunda casa en todos los sentidos. Y a Raquel, Lucía y Almudena, porque aunque estando lejos, me han ayudado tanto como si estuvieran aquí, y por formar parte del reducido grupo de amigos que he encontrado en este mundo de los matemáticos. Gracias.

A José Antonio Facenda, mi vecino, porque sólo él sabe la lata que le he dado con preguntas técnicas, aunque creo que ni se imagina el tiempo que me ha ahorrado. Gracias.

A Pepe Carmona y a Paco Hidalgo "el palangana", por la cantidad de veces que han tenido que sacarme de líos burocráticos, en los que soy experto en meterme. Gracias.

A Keith Ball, profesor de la UCL, por su amabilidad y hospitalidad durante mi estancia en Londres, que la hicieron tan agradable y productiva. Por demostrarme que la eminencia y el prestigio no están reñidos con la sencillez. Cheers!

Y finalmente, probablemente en el sitio menos indicado, a mi familia, y en especial a mis padres, por todo lo que me han aguantado (y lo que les queda...). Y a Amparo, porque ella se ha llevado la parte más desagradecida y difícil. Le estaré eternamente agradecido.

A Amparo

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Esta memoria está dedicada al estudio de dos problemas del Análisis Funcional: el estudio de propiedades de concentración y su relación con la Geometría de los Espacios de Banach, englobado dentro de la Teoría Local de Espacios Normados (capítulos 1 y 2), y el estudio de las inmersiones isométricas en espacios de Banach, el problema de la linealidad de dichas inmersiones, y la clasificación de los espacios de Banach desde este punto de vista (capítulo 3).

La Teoría Local de Espacios Normados es una rama del Análisis Funcional, que trata de los espacios normados de alta dimensión, es decir, de las propiedades geométricas de los espacios normados de dimensión finita, y de su comportamiento cuando la dimensión tiende a infinito.

El primer capítulo de esta memoria está dedicada al estudio de lo que se conoce como *fenómeno de concentración de la medida* en espacios de dimensión finita. El punto de partida de esta teoría es el siguiente resultado, debido a Paul Lèvy, en el que obtiene la concentración de la medida en la esfera S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$, considerando en ella la medida de Haar μ_n y la distancia geodésica ρ_n.

TEOREMA (DESIGUALDAD ISOPERIMÉTRICA EN S^n). *Dados $x_0 \in S^n$ y $r > 0$, para todo $\varepsilon > 0$ y todo Borel A de S^n, verificando $\mu_n(A) = \mu_n(B)$, siendo*

$B = \{x \in S^n : \rho_n(x, x_0) \leq r\}$, se tiene que, si $A_\varepsilon = \{x \in S^n : \rho_n(x, A) \leq \varepsilon\}$,

$$\mu_n(A_\varepsilon) \geq \mu_n(B_\varepsilon).$$

Este resultado relaciona la medida con la métrica, en el sentido siguiente: al añadir a un conjunto los puntos próximos, aumentamos su medida al menos tanto como lo haríamos para una bola. Este problema de averiguar para qué conjuntos se aumenta menos su medida cuando se aumenta usando la distancia, se conoce como problema isoperimétrico, ya que puede ser planteado desde el punto de vista del perímetro de los conjuntos. En ciertas condiciones, a un conjunto se le aumenta más la medida cuando se le añaden los puntos cercanos cuanto mayor sea su perímetro. Así, la desigualdad dada en el teorema de Lèvy puede enunciarse, usando este punto de vista, diciendo que, de entre todos los conjuntos de Borel de medida fija, aquellos que tienen perímetro menor son los casquetes esfericos.

La consecuencia más importante de esta desigualdad isoperimétrica es que si para un cierto conjunto de Borel A de S^{n+1}, $\mu_{n+1}(A) \geq 1/2$, entonces, para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto A_ε tiene medida no menor que B_ε, donde B es media esfera. Así se obtiene el fenómeno de concentración de la medida en S^{n+1}.

TEOREMA (FENÓMENO DE CONCENTRACIÓN DE LA MEDIDA EN S^{n+1}). *Para todo Borel A de S^{n+1} con $\mu_{n+1}(A) \geq 1/2$, se verifica*

$$\mu_{n+1}(A_\varepsilon) \geq 1 - \sqrt{\frac{\pi}{8}} e^{-\varepsilon^2 n/2},$$

donde A_ε denota el conjunto de puntos de S^{n+1} cuya distancia geodésica a A es menor o igual que ε.

Este resultado muestra como, para n grande, la mayor parte de la esfera S^{n+1} está a distancia menor o igual que ε de A. Aquí se muestra un caso donde estamos interesados en el comportamiento de estas medidas cuando la dimensión

n tiende a infinito. Esta idea de concentración ha servido para conocer propiedades y comprender los espacios normados de alta dimensión, no como espacios de dimensión finita, sino con el espíritu de la alta dimensión, y se ha usado para probar resultados clásicos, como el teorema de Dvoretzky (sobre secciones casi esféricas de cuerpos convexos, ver [Mi] o [FLM]). A partir de este ejemplo, han aparecido una gran variedad de familias de espacios con concentración de la medida. Esto da idea de que este fenómeno no es excepcional.

Dado un espacio métrico de probabilidad (Ω, Σ, μ, d) (un espacio métrico (Ω, d) dotado de una medida de probabilidad μ definida en la σ-álgebra Σ de los conjuntos de Borel de Ω), se llama *función de concentración* a

$$\varphi(\varepsilon) = \sup\{1 - \mu(A_\varepsilon) : A \in \Sigma,\ \mu(A) \geq 1/2\}$$

para $\varepsilon > 0$, donde $A_\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x, A) \leq \varepsilon\}$ y donde $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$. En adelante, omitiremos Σ, ya que en todos los casos entenderemos que los medibles serán los conjuntos de Borel del espacio.

La desigualdad dada en el teorema anteriormente citado muestra como, para el espacio $(S^{n+1}, \mu_{n+1}, \rho_{n+1})$ se tiene que

$$\varphi(\varepsilon) \leq \sqrt{\frac{\pi}{8}} e^{-\varepsilon^2 n/2},$$

que tiende a cero cuando $n \to \infty$, para $\varepsilon > 0$ fijo.

Siguiendo esta idea, una sucesion (Ω_n, μ_n, d_n) de espacios métricos de probabilidad se llama una *familia de Lèvy* si, para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(\varepsilon \operatorname{diam}(\Omega_n)) = 0$$

siendo φ_n la función de concentración del espacio (Ω_n, μ_n, d_n) y $\operatorname{diam}(\Omega_n)$ el diámetro de Ω_n, y se llama una *familia normal de Lèvy* si para ciertas constantes $c_1, c_2 > 0$, y para todo $\varepsilon > 0$

$$\varphi_n(\varepsilon) \leq c_1 e^{-c_2 \varepsilon^2 n}.$$

Así pues, la sucesión de espacios $(S^{n+1}, \mu_{n+1}, \rho_{n+1})$ forma una familia normal de Lèvy. Otros muchos ejemplos sobre estos conceptos están recogidos en el libro de Milman y Schechtman [MS].

Nosotros estamos interesados en el caso de espacios normados de dimensión finita, considerando como probabilidad la medida de Lebesgue normalizada en la bola unidad. Respecto de este caso, el resultado más importante conocido es el de los espacios uniformemente convexos estudiados por Gromov y Milman en [GM1], artículo de muy complicada lectura (Alesker [A] ha escrito una versión detallada con el mismo argumento).

En el primer capítulo veremos, mediante una nueva prueba debida a Keith Ball, más sencilla que las anteriores, un fenómeno de concentración de la medida para espacios uniformemente convexos, dotados de la medida de Lebesgue normalizada en la bola unidad.

TEOREMA (BALL). *Sea X un espacio normado n-dimensional uniformemente convexo, B su bola unidad cerrada, σ la medida de Lebesgue en B normalizada para que $\sigma(B) = 1$ y $\delta(\varepsilon)$ el módulo de convexidad de X. Para cada $A \subset B$ con $\sigma(A) \geq 1/2$, y cada $\varepsilon > 0$, se tiene que*

$$\sigma(A + \varepsilon B) > 1 - 2e^{-2\delta(\varepsilon)n}.$$

Con esta desigualdad se mejora el exponente dado por Gromov y Milman.

Por otra parte, es conocido que los espacios ℓ_∞^n no forman familia de Lèvy. Así, entre las sucesiones de espacios clásicos ℓ_p^n, estos resultados conocidos dejan sin resolver el caso de los espacios ℓ_1^n. Nosotros resolvemos esta cuestión, y vemos que el resultado anterior de Gromov-Milman-Ball puede mejorarse ampliamente en el caso de exponentes p próximos a 1. Probamos el siguiente teorema de concentración uniforme para ℓ_p^n con $1 \leq p \leq 2$.

TEOREMA 1.3.6. *Sea, para $1 \leq p \leq 2$, B_p^n la bola unidad cerrada de ℓ_p^n y σ_p la medida de Lebesgue normalizada en B_p^n. Existen dos constantes $\alpha, c > 0$ tales que, para todo $1 \leq p \leq 2$, todo Borel $A \subset B_p^n$ con $\sigma_p(A) \geq 1/2$, y todo $0 < \varepsilon < 1$*

$$\sigma_p(A + \varepsilon B_p^n) \geq 1 - \alpha n e^{-c\varepsilon^2 n}.$$

La herramienta principal en la prueba es el resultado de Talagrand sobre la isoperimetría para la medida γ_1^n en $\mathbb{R}^n$, producto de la medida en $\mathbb{R}$ con densidad $\frac{1}{2}e^{-|x|}$. En este estudio Talagrand abandona la idea de incrementar el conjunto usando una métrica sustituyéndolo por el paso de A a $A+\sqrt{t}B_2^n+tB_1^n$, lo que ha constituido un primer paso en su aproximación abstracta a la idea de isoperimetría.

Como hemos dicho anteriormente, un ejemplo de familia de espacios donde no hay concentración de la medida es la sucesión de espacios ℓ_∞^n. Conectaremos esta idea con las inmersiones de espacios con concentración para mostrar que en ℓ_∞^n los espacios con concentración "no caben bien" (es necesaria mucha distorsión o una dimensión muy alta para sumergirlos dentro de ℓ_∞^n). A partir de ahí, probamos también que dada una sucesión de espacios normados E_n de dimensión finita, no es cierto en general que puedan encontrarse subespacios $F_n \subset E_n$ de dimensión proporcional (i.e., $\dim(F_n) > c\dim(E_n)$) y con buenas propiedades de concentración.

Por último, en esta parte estudiaremos el mismo problema para medidas definidas en la esfera del espacio en lugar de en la bola unidad del mismo. Veremos que es posible definir una medida natural sobre la esfera a partir de la medida definida en la bola, y que conserva, en cierto sentido, la propiedad de concentración.

El segundo capítulo trata de otra propiedad de concentración: el *fenómeno de concentración de la distancia*. Aquí nos interesamos por conocer el comportamiento de la distancia entre los puntos de un espacio normado cuando la dimensión crece a infinito. Este estudio está motivado por el problema de encontrar en un espacio normado de dimensión finita el mayor número posible de puntos a distancia "casi uno" unos de otros. Concretamente, se trata de encontrar, dado X un espacio normado de dimensión finita y $\varepsilon > 0$, el mayor número natural $N = N(\varepsilon)$ tal que existen N puntos $x_1, \ldots, x_N \in X$ tales que para todos $i, j \in \{1, \ldots, N\}$, $i \neq j$

$$1 - \varepsilon \leq \|x_i - x_j\| \leq 1 + \varepsilon.$$

Este problema está relacionado con el comportamiento de la distancia entre dos puntos del espacio. En un intento de encontrar dichos puntos (mediante un argumento de probabilidad, es decir, donde se muestra que con probabilidad positiva es posible encontrar esos puntos), y puesto que en general no tenemos concentración de la medida de Lebesgue, definimos la función de distribución de la distancia entre dos puntos de la bola. Dado $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ un espacio normado n-dimensional, sea $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ su bola unidad cerrada y σ la medida de Lebesgue restringida a B, normalizada para que $\sigma(B) = 1$, denotemos por

$$F(t) = \sigma \otimes \sigma\{(x, y) \in B \times B : \|x - y\| \leq t\}$$

a la función de distribución correspondiente a la variable aleatoria $\|x - y\|$ ($x, y \in B$). Si para cierto $\varepsilon > 0$, existe un número $a \in (0, 2]$ y un número $\delta > 0$ tal que

$$F(a(1 + \varepsilon)) - F(a(1 - \varepsilon)) \geq 1 - \delta,$$

entonces es posible encontrar N puntos $x_1, \ldots, x_N$ en B de forma que los puntos $a^{-1}x_1, \ldots, a^{-1}x_N$ estén a distancia casi 1, siempre que $\binom{N}{2}\delta < 1$.

Usando esta idea, estudiaremos un *fenómeno de concentración de la distancia*, veremos que en las sucesiones de espacios clásicos ℓ_p^n ($1 \leq p \leq \infty$) este fenómeno se produce, pero que no es general en cualquier sucesión de espacios normados.

El resultado principal obtenido en relación con el comportamiento de la distancia entre los puntos de un espacio normado no se refiere al problema de los puntos casi-equidistantes, sino el hecho de que "la mayor parte de las parejas" distan más que $\sqrt{2}(1 - \varepsilon)$ entre sí. Esto muestra en particular que, de existir concentración de la distancia, no puede haberla a la izquierda de $\sqrt{2}$.

TEOREMA 2.3.1. *Sea X un espacio normado de dimensión n y B su bola unidad cerrada. Sea σ la medida de Lebesgue en B, de modo que $\sigma(B) = 1$. Entonces para cada $0 < \varepsilon < 1$*

$$\sigma \otimes \sigma\{(x, y) \in B \times B : \|x - y\| \leq \sqrt{2}(1 - \varepsilon)\} \leq \exp\left\{-\varepsilon^2 n/2\right\}.$$

Además tanto el factor ε^2 en el exponente, como el número $\sqrt{2}$ son los mejores posibles en general, pues esa desigualdad es óptima cuando $X = \ell_2^n$.

En la prueba de este teorema se usa la expresión explícita de la mejor constante en la desigualdad de Young, sobre convolución de funciones en $\mathbb{R}^n$, obtenida simultáneamente por Beckner [Be] y por Brascamp y Lieb [BL]. Recientemente, F. Barthe [Bar] ha dado una nueva demostración muy elegante de dicha desigualdad.

El teorema 2.3.1 implica la existencia de N puntos en la bola de cualquier espacio a distancia mayor que $\sqrt{2}(1 - \varepsilon)$ unos de otros, siempre que $N < \exp\{\varepsilon^2 n/4\}$. Este hecho fue probado por Bourgain usando descomposición QS (puede encontrarse una prueba en [FL]). Sin embargo, la prueba no consigue una estimación cuantitativa como la que se obtiene en 2.3.1.

Conectaremos el fenómeno de concentración de la distancia con el capítulo 1, probando que un fenómeno de concentración de la medida implica un fenómeno de concentración de la distancia.

TEOREMA 2.4.1. *Sea X un espacio normado n-dimensional, B su bola unidad y σ la medida de Lebesgue normalizada en B. Sea φ la función de concentración asociada a σ.*
Entonces existe un número $a \in [1/2, 2]$ de forma que para todo $\varepsilon > 0$,

$$F(a(1 + \varepsilon)) - F(a(1 - \varepsilon)) \geq 1 - 4\varphi(\varepsilon/4).$$

Parte de los resultados obtenidos en estos dos capítulos puede encontrarse en [ABV].

En el tercer capítulo de la memoria trateremos el estudio de la linealidad de las inmersiones isométricas en espacios normados. Dados dos espacios normados X e Y, una aplicación (no necesariamente lineal) $F : X \to Y$ es una *isometría* si para todos $x, y \in X$

$$\|F(x) - F(y)\| = \|x - y\|$$

El punto de partida de este problema se encuentra en un trabajo de *Mazur* y *Ulam* [MU], donde se prueba que toda isometría $F : X \to Y$ que verifique que $F(0) = 0$ y que $F(X) = Y$ es lineal. Sin embargo, si a la isometría no se le impone ser biyectiva, el resultado no es cierto.

Sin embargo, en algunos casos es posible "modificar" dicha isometría para conseguir que sea lineal. El problema que nos planteamos en este capítulo es el de encontrar, a partir de una isometría entre espacios de Banach, otra que además de isometría, sea lineal.

El siguiente resultado es una primera aproximación, en el caso particular en que $Y = C(K)$, el espacio de funciones continuas sobre un compacto K.

TEOREMA 3.2.1. *Sea K un espacio topológico compacto y $F : X \to C(K)$ una isometría definida en un espacio de Banach X, tal que $F(0) = 0$. Existe un conjunto cerrado $L \subset K$ tal que $Q \circ F : X \to C(L)$ es una isometría lineal, donde Q denota la aplicación restricción a L, es decir, $Q : C(K) \to C(L)$ está definida por ser $Qf = f_{|L}$.*

A partir de este resultado, y en algunos casos particulares, obtendremos una isometría lineal de X en Y.

TEOREMA 3.3.1. *Sea α un ordinal, X un espacio de Banach, y una isometría $F : X \to C_0(\alpha+1)$. Entonces existe una isometría lineal $T : X \to C_0(\alpha+1)$.*

TEOREMA 3.3.5. *Sea X un espacio de Banach separable, Y un espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym, y $F : X \to Y$ una isometría. Entonces existe una isometría lineal $T : X \to Y$.*

La segunda parte del capítulo 3 está dedicada a la clasificación de algunos espacios de Banach por isometrías.

El problema 48 de la famosa colección de problemas *The Scottish Book* [Mau], planteado por Mazur el año 1939, pregunta si todo espacio de funciones continuas definidas sobre un compacto numerable es isomorfo a c, el espacio de las sucesiones convergentes. De un trabajo de Jozef Schreier [Sc], se deduce que el espacio $C(\omega^\omega+1)$ no es isomorfo a c, con lo que el problema se resuelve negativamente. Posteriormente, C. Bessaga y A. Pelczynski [BP] dan una clasificación de los espacios $C(\alpha+1)$ para ordinales α numerables. Prueban, de hecho, que entre estos espacios hay una cantidad infinita no numerable de espacios con distinto tipo isomorfo.

Nosotros sustituimos los isomorfismos por isometrías, y damos una clasificación (completa, para todos los ordinales) de todos los espacios $C(\alpha+1)$ para ordinales α. De hecho probamos que $C(\alpha+1)$ y $C(\beta+1)$ tienen el mismo tipo isométrico si y sólo si α y β son homeomorfos (teorema 3.4.1).

Parte de los resultados recogidos en este capítulo se encuentran en [V].

CAPÍTULO 1

FENÓMENO DE CONCENTRACIÓN DE LA MEDIDA

Introducción

En este capítulo vamos a estudiar uno de los conceptos más usados en el desarrollo de la teoría asintótica de espacios normados finito-dimensionales: el fenómeno de concentración para medidas de probabilidad. Este fenómeno, frecuentemente conectado con desigualdades isoperimétricas, está estrechamente relacionado con una desigualdad de concentración, que muestra cómo ciertas funciones son casi constantes en la mayor parte del espacio.

El fenómeno de concentración para medidas homogéneas en estructuras de dimensión alta fue apuntado por primera vez por Paul Lèvy, sobre el ejemplo de la familia de esferas euclídeas S^{n+1} expuesto más adelante. Incluso, llegó a darse cuenta de que su observación tenía un sentido más general y buscó otros ejemplos. Poincaré [Po] ya había usado un hecho similar en la esfera euclídea S^{n+1}: para $x_0 \in S^{n+1}$ fijo,

$$\mu_{n+1}\{x \in S^{n+1} : |(x, x_0)| > \varepsilon\} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\varepsilon^2 n/2}$$

donde μ_{n+1} denota la medida de probabilidad de Haar invariante por rotaciones sobre S^{n+1}.

El punto de partida de Lèvy fue una observación hecha por E. Borel [Bo] acerca de una interpretación geométrica de la Ley de los Grandes Números. Lèvy

[Le] conectó esta idea con la desigualdad isoperimétrica clásica para obtener la concentración de la medida en la esfera S^{n+1} de $\mathbb{R}^{n+2}$. Considerando en S^{n+1} la medida de Haar μ_{n+1} y la distancia geodésica ρ_{n+1}, Lèvy prueba el siguiente resultado. Una prueba puede encontrarse en [MS].

TEOREMA 1.0.1 (DESIGUALDAD ISOPERIMÉTRICA EN S^{n+1}). *Dados $x_0 \in S^{n+1}$ y $r > 0$, para todo $\varepsilon > 0$ y todo Borel A de S^{n+1}, verificando $\mu_{n+1}(A) = \mu_{n+1}(B)$, siendo $B = \{x \in S^{n+1} : \rho_{n+1}(x, x_0) \leq r\}$, se tiene que*

$$\mu_{n+1}(A_\varepsilon) \geq \mu_{n+1}(B_\varepsilon)$$

donde $A_\varepsilon = \{x \in S^{n+1} : \rho_{n+1}(x, A) \leq \varepsilon\}$.

Así se relaciona la medida con la métrica, de forma que si aumentamos un conjunto usando la métrica, entonces aumentamos la medida al menos tanto como lo hariamos para una bola. El problema de averiguar qué conjuntos de medida fija son los que menos aumentan su medida al aumentar el conjunto usando la métrica se denomina problema isoperimétrico, y ha sido resuelto en otros casos.

OBSERVACIÓN 1.0.2. La *desigualdad isoperimétrica clásica* en la esfera S^{n+1} se enuncia desde el punto de vista del perímetro de los conjuntos. Si la frontera del conjunto $A \subset S^{n+1}$ es suficientemente regular, entonces su perímetro viene dado por

$$\mathcal{P}(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu_{n+1}(A_\varepsilon) - \mu_{n+1}(A)}{\varepsilon},$$

con lo que por el teorema anterior, si $B = \{x \in S^{n+1} : \rho_{n+1}(x, x_0) \leq r\}$ es la bola en S^{n+1} que verifica que $\mu_{n+1}(A) = \mu_{n+1}(B)$,

$$\mathcal{P}(A) \geq \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu_{n+1}(B_\varepsilon) - \mu_{n+1}(B)}{\varepsilon} = \mathcal{P}(B).$$

Más aún, de entre todos los conjuntos de Borel de medida fija, aquellos que tienen perímetro menor son los casquetes esfericos.

Como consecuencia importante de esta desigualdad isoperimétrica se obtiene que, si $\mu_{n+1}(A) \geq 1/2$, para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto A_ε tiene medida no menor que B_ε, donde B es media esfera, o lo que es lo mismo $B = \{x \in S^{n+1} : \rho_{n+1}(x, x_0) \leq \pi/2\}$. Así $B_\varepsilon = \{x \in S^{n+1} : \rho_{n+1}(x, x_0) \leq \pi/2 + \varepsilon\}$, que tiene medida al menos (ver [MS])

$$1 - \sqrt{\frac{\pi}{8}} e^{-\varepsilon^2 n/2}$$

con lo que se obtiene el fenómeno de concentración de la medida en S^{n+1}.

Corolario 1.0.3. *Para todo Borel A de S^{n+1} con $\mu_{n+1}(A) \geq 1/2$, se verifica*

$$\mu_{n+1}(A_\varepsilon) \geq 1 - \sqrt{\frac{\pi}{8}} e^{-\varepsilon^2 n/2},$$

donde A_ε denota el conjunto de puntos de S^{n+1} cuya distancia geodésica a A es menor o igual que ε.

Este resultado muestra como, para n grande, la mayor parte de la esfera S^{n+1} está a distancia menor o igual que ε de A.

La idea de la concentración de la medida permaneció prácticamente inactiva hasta los años setenta, donde empezó a ser utilizada intensamente, fundamentalmente por Vitali Milman, en el desarrollo de la Teoría Local de Espacios Normados. En uno de sus trabajos, Milman [Mi] demuestra el corolario 1.0.3 y lo utiliza para dar una prueba del teorema de Dvoretzky (sobre secciones casi esféricas de cuerpos convexos). En los últimos quince años han aparecido una gran variedad de ejemplos de familias de espacios con concentración de la medida, que han contribuido al desarrollo de dicha teoría. Más aún, la mayoría de ellos han sido descubiertos para tal fin. Esto muestra que tal fenómeno no es, en absoluto, excepcional.

Un segundo ejemplo importante donde se observa un fenómeno de concentración de la medida es en el espacio $\mathbb{R}^n$ dotado de la distancia euclídea ordinaria, y de la medida de probabilidad de Gauss γ^n, con densidad

$$(2\pi)^{-n/2}e^{-\|x\|_2^2/2}$$

respecto de la medida de Lebesgue. A partir de la desigualdad isoperimétrica en la esfera dada por el teorema 1.0.1, Borell [Bor], Sudakov y Tsirelson [ST] resuelven el problema isoperimétrico para la probabilidad γ^n: los conjuntos que menos aumentan su medida al aumentarlos usando la métrica son los subespacios (ver [LeT] para una demostración siguiendo la que se da en [ST]). A partir de ahí, y al igual que en el caso de la esfera, se deduce que, para cualquier conjunto medible A de $\mathbb{R}^n$ con $\gamma^n(A) \geq 1/2$ se verifica $\gamma^n(A_\varepsilon) \geq \gamma^n(H_\varepsilon)$, donde H es el subespacio $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq 0\}$, y por tanto $H_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq \varepsilon\}$, que tiene medida

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\varepsilon} e^{-t^2/2}\,dt \geq 1 - \frac{1}{2}e^{-\varepsilon^2/2}.$$

En consecuencia

$$\gamma^n(A_\varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{2}e^{-\varepsilon^2/2}. \tag{1.0.1}$$

Esta desigualdad, obtenida a partir de la desigualdad isoperimétrica en la esfera S^{n+1}, es en cierto sentido equivalente a ella. En efecto, hay una bola euclídea de cierto radio R cuya medida gaussiana es $1/2$. No es difícil ver que, asintóticamente, R es como $\sqrt{n}$. Usando esta observación de Poincaré (en la sección 3 se expone más detalladamente; ver también [LeT]) es posible obtener una desigualdad de desviación para la esfera a partir de la correspondiente para la medida de Gauss, sin más que re-escalar en un factor $1/\sqrt{n}$, con lo que la estimación $e^{-\varepsilon^2/2}$ dada en (1.0.1) se convierte en una del tipo $e^{-\varepsilon^2 n/2}$, como se obtiene en el corolario 1.0.3.

En este capítulo estudiaremos algunos ejemplos de espacios que disfrutan de un fenómeno de concentración, y de propiedades que verifican los espacios con dicho fenómeno.

Un *espacio métrico de probabilidad* es una cuaterna (Ω, Σ, μ, d), donde la terna (Ω, Σ, μ) es un espacio de probabilidad y d es una distancia definida sobre Ω. En todos los casos, omitiremos Σ, entendiendo que se trata de la σ-álgebra de los conjuntos de Borel del espacio.

Dado un espacio métrico de probabilidad (Ω, Σ, μ, d), se llama *función de concentración* a

$$\varphi(\varepsilon) = \sup\{1 - \mu(A_\varepsilon) : A \in \Sigma,\ \mu(A) \geq 1/2\} \tag{1.0.2}$$

para $\varepsilon > 0$, donde $A_\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x, A) \leq \varepsilon\}$ y donde $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$.

La desigualdad dada en el corolario 1.0.3 muestra como, para el espacio $(S^{n+1}, \mu_{n+1}, \rho_{n+1})$ se tiene que

$$\varphi(\varepsilon) \leq \sqrt{\frac{\pi}{8}} e^{-\varepsilon^2 n/2},$$

que tiende a cero cuando $n \to \infty$, para $\varepsilon > 0$ fijo.

Siguiendo este ejemplo, una sucesion de espacios métricos de probabilidad (Ω_n, μ_n, d_n) se llama una *familia de Lèvy* si, para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(\varepsilon \operatorname{diam}(\Omega_n)) = 0$$

siendo φ_n la función de concentración del espacio (Ω_n, μ_n, d_n) y $\operatorname{diam}(\Omega_n) = \sup\{d_n(x, y) : x, y \in \Omega_n\}$ el diámetro de Ω_n, y se llama una *familia normal de Lèvy* si para ciertas constantes $c_1, c_2 > 0$, y para todo $\varepsilon > 0$

$$\varphi_n(\varepsilon) \leq c_1 e^{-c_2 \varepsilon^2 n}.$$

Así pues, la sucesión de espacios $(S^{n+1}, \mu_{n+1}, \rho_{n+1})$ forma una familia normal de Lèvy.

La concentración de la medida está estrechamente relacionada con el comportamiento de las funciones lipschitzianas definidas en el espacio. El siguiente resultado muestra como, en un espacio donde la función de concentración sea pequeña, las funciones lipschitzianas se mantienen cercanas a un valor fijo en la mayor parte del espacio, con lo que se mantienen casi constantes en la mayor parte del mismo.

TEOREMA 1.0.4. *Sea (Ω, μ, d) un espacio métrico de probabilidad, y φ la función de concentración definida en (1.0.2).*

(i) Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es L-Lipschitz y m es una mediana de f, entonces, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mu\{x \in \Omega : |f(x) - m| > \varepsilon\} \leq 2\varphi(\varepsilon/L).$$

(ii) Si $f : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ es separadamente L-Lipschitz, entonces existe un valor $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mu \otimes \mu\{(x, y) \in \Omega \times \Omega : |f(x, y) - M| > \varepsilon\} \leq 4\varphi(\varepsilon/2L).$$

DEMOSTRACIÓN. (i) Basta tener en cuenta que

$$\{x \in \Omega : f(x) \leq m + \varepsilon\} \supset \{x \in \Omega : f(x) \leq m\}_{\varepsilon/L}$$
$$\{x \in \Omega : f(x) \geq m - \varepsilon\} \supset \{x \in \Omega : f(x) \geq m\}_{\varepsilon/L}$$

(ii) Para cada $x \in \Omega$ fijo, consideremos la sección $f_x : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por $f_x(y) = f(x, y)$. Es una función L-Lipschitz, y por tanto, si $m(x)$ es una mediana de f_x, por (i), para cada $x \in \Omega$ fijo,

$$\mu\{y \in \Omega : m(x) - \varepsilon \leq f(x, y) \leq m(x) + \varepsilon\} \geq 1 - 2\varphi(\varepsilon/L), \qquad (1.0.3)$$

y debido a que $f(x_1, y) - f(x_2, y) \leq Ld(x_1, x_2)$ para $x_1, x_2 \in \Omega$, se tiene que

$$\{y \in \Omega : f(x_1, y) \geq m(x_1)\} \subset \{y \in \Omega : f(x_2, y) \geq m(x_1) - Ld(x_1, x_2)\}$$

y de ahí que $m(x_1) - m(x_2) \leq Ld(x_1, x_2)$. Por tanto, $m(x)$ es única para cada $x \in \Omega$, y define una función $m : \Omega \to \mathbb{R}$ que es L-Lipschitz. Sea M una mediana de m. De nuevo por (i)

$$\mu\{x \in \Omega : M - \varepsilon \leq m(x) \leq M + \varepsilon\} \geq 1 - 2\varphi(\varepsilon/L). \qquad (1.0.4)$$

Usando el teorema de Fubini, y las desigualdades (1.0.3) y (1.0.4),

$$\mu \otimes \mu\{(x, y) \in \Omega \times \Omega : M - 2\varepsilon \leq f(x, y) \leq M + 2\varepsilon\} \geq$$

$$\mu\otimes\mu\{(x,y)\in\Omega\times\Omega : m(x)-\varepsilon \le f(x,y) \le m(x)+\varepsilon \text{ y } M-\varepsilon \le m(x) \le M+\varepsilon\} \ge (1-2\varphi(\varepsilon/L))^2$$

de donde se obtiene el resultado deseado. □

Observación 1.0.5. En el apartado (ii) del teorema anterior, el número M es una mediana de la función $m : \Omega \to \mathbb{R}$. Pero el mismo argumento prueba que es cierta la desigualdad

$$\mu\otimes\mu\{(x,y)\in\Omega\times\Omega : |f(x,y)-M'| > \varepsilon\} \le 2c\varphi(\alpha\varepsilon/2)$$

para cualquier número M' que verifique

$$\mu\{x\in\Omega : |m'(x)-M'| > \varepsilon\} \le c\varphi(\alpha\varepsilon)$$

siendo $m' : \Omega \to \mathbb{R}$ una función tal que para todo $x\in\Omega$

$$\mu\{y\in\Omega : |f(x,y)-m'(x)| > \varepsilon\} \le c\varphi(\alpha\varepsilon).$$

El siguiente resultado muestra cómo la mediana de la función f puede ser sustituida por cualquier otra cantidad próxima, dejándonos de esta forma libertad para elegir aquella que sea más cómoda a la hora de realizar los cálculos. La demostración puede encontrarse en [Ber]. En [MS] puede encontrarse la prueba de este resultado para la función de Orlicz $\psi(t)=t^2$.

Teorema 1.0.6. *Sea (Ω,Σ,μ,d) un espacio métrico de probabilidad, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ una variable aleatoria, M una mediana de f, $\mathbb{E}(f)$ la esperanza de f, y $\psi : [0,+\infty)\to\mathbb{R}$ una función de Orlicz verificando la condición Δ_2 en cero. Son equivalentes:*

(i) Existen constantes $K_1,\delta_1>0$ y $A\in\mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon>0$

$$\mu\{x\in\Omega : |f(x)-A| > \varepsilon\} \le K_1\exp(-\delta_1\psi(\varepsilon))$$

(ii) Existen constantes $K_2, \delta_2 > 0$ tal que si $\widetilde{f}$ es una variable aleatoria independiente e identicamente distribuida a f, para todo $\varepsilon > 0$

$$\mu\{x \in \Omega : |f(x) - \widetilde{f}(x)| > \varepsilon\} \leq K_2 \exp(-\delta_2 \psi(\varepsilon))$$

(iii) Existen constantes $K_3, \delta_3 > 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$

$$\mu\{x \in \Omega : |f(x) - \mathbb{E}(f)| > \varepsilon\} \leq K_3 \exp(-\delta_3 \psi(\varepsilon))$$

(iv) Existen constantes $K_4, \delta_4 > 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$

$$\mu\{x \in \Omega : |f(x) - M| > \varepsilon\} \leq K_4 \exp(-\delta_4 \psi(\varepsilon))$$

Más aún,

$$K_1 \leq K_4 \leq 2K_3 \leq 2(K_2 + 1) \leq 2(2K_1 + 1)$$

y

$$\delta_1 \geq \delta_4 \geq C\delta_3 \geq C\delta_2/2 \geq C^2\delta_1/2$$

para cierta constante absoluta $C > 0$.

Observación 1.0.7. En el caso en que la función de concentración φ sea $\varphi(\varepsilon) = K\exp(-\delta\psi(\varepsilon))$, con ψ una función como en el teorema 1.0.6, si $f : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ es una función separadamente L-Lipschitz, por el teorema 1.0.4, si $m(x)$ denota la mediana de la función $f_x(y) = f(x, y)$, para cada $x \in \Omega$

$$\mu\{y \in \Omega : |f(x, y) - m(x)| > \varepsilon\} \leq 2K \exp(-\delta\psi(\varepsilon/L)),$$

con lo que, por la implicación (iv)⇒(iii) del teorema 1.0.6,

$$\mu\{y \in \Omega : |f(x, y) - \mathbb{E}(f_x)| > \varepsilon\} \leq (4K + 1) \exp(-C\delta\psi(\varepsilon/L)/2).$$

De la misma forma, como la función $x \in \Omega \mapsto \mathbb{E}(f_x)$ es L-Lipschitz, de nuevo por el teorema 1.0.4, si M' denota una mediana de dicha función, se tiene que

$$\mu\{x \in \Omega : |\mathbb{E}(f_x) - M'| > \varepsilon\} \leq 2K \exp(-\delta\psi(\varepsilon/L)),$$

y usando otra vez la implicación (iv)$\Rightarrow$(iii) del teorema 1.0.6,

$$\mu\{x \in \Omega : |\mathbb{E}(f_x) - \mathbb{E}(f)| > \varepsilon\} \leq (4K+1)\exp(-C\delta\psi(\varepsilon/L)/2).$$

Finalmente, por la observación 1.0.5, obtenemos la acotación

$$\mu \otimes \mu\{(x,y) \in \Omega \times \Omega : |f(x,y) - \mathbb{E}(f)| > \varepsilon\} \leq 2(4K+1)\exp(-C\delta\psi(\varepsilon/2L)/2).$$

Así pues, cuando la medida se concentra exponencialmente, las funciones $f : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ separadamente L-Lipschitz se concentran alrededor de su media $\mathbb{E}(f)$.

Habitualmente trabajaremos con una medida de probabilidad definida sobre la bola unidad B de un espacio normado. En casi todos los casos la medida considerada será la medida de Lebesgue normalizada en la bola. Nótese que en tal caso, A_ε y $A + \varepsilon B$ tienen la misma medida.

En la sección 2 veremos, mediante una nueva prueba más sencilla, el hecho conocido de que cualquier sucesión de espacios uniformemente convexos $\{X_n\}$ con módulo de convexidad verificando $\delta_n(\varepsilon) \geq \delta(\varepsilon)$ para cierta función $\delta(\varepsilon)$, dotados de la medida de Lebesgue normalizada en la bola unidad, forma una familia normal de Lèvy. En particular, para la sucesión de espacios ℓ_p^n, con p fijo, $1 < p < \infty$.

En la sección 3 veremos que la sucesión de espacios ℓ_p^n dotados de la medida de Lebesgue normalizada en la bola unidad de los mismos forman una familia de Lèvy uniformemente en p, con $1 \leq p \leq 2$. Este hecho, y en particular el de que la familia de espacios ℓ_1^n con la medida de Lebesgue normalizada en la bola unidad forma una familia de Lèvy, era desconocido hasta el momento, ya que no puede deducirse del resultado de la sección anterior.

La sección 4 está dedicada al estudio de ciertas propiedades sobre inmersiones en ℓ_∞^N de espacios donde se produce un fenómeno de concentración de la medida. Veremos que la dimensión N necesaria para que existan estas inmersiones ha de ser grande. Este hecho da idea de "lo lejos" que están los espacios ℓ_∞^N de los espacios con concentración, ya que como consecuencia, veremos que hay muchas medidas definidas en la bola de ℓ_∞^N (entre ellas la de Lebesgue) que no verifican un fenómeno de concentración.

En la última sección estudiaremos medidas definidas en la esfera del espacio, en lugar de en la bola, y veremos cómo, a partir de una medida con concentración definida en la bola se puede definir otra medida en la esfera que también disfruta de un fenómeno de concentración.

1. Preliminares

En esta sección veremos los conceptos y resultados conocidos que usaremos a lo largo de este capítulo. Aunque la mayor parte de la notación utilizada es estandar, hemos preferido incluirla aquí para facilitar su lectura.

Aplicaciones lipschitzianas. Dados dos espacios métricos M y M', una aplicación $f : M \to M'$ se dice *lipschitziana* si el número

$$\|f\|_{lip} = \sup_{x \neq y} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x,y)}$$

es finito. A dicho número se le llama *constante de Lipschitz* de f. Una aplicación f se dice *L-Lipschitz* si su constante de Lipschitz no es mayor que L. Si f es una aplicación L-Lipschitz, entonces, para todo $x, y \in M$

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x,y).$$

Isomorfismos e inmersiones. Un *isomorfismo* entre dos espacios normados X e Y es cualquier operador lineal biyectivo y bicontinuo de X en Y. Dado un isomorfismo $T : X \to Y$, en [G] se llama *distorsión* de T al número

$$\operatorname{dist}(T) = \|T\| \, \|T^{-1}\|$$

donde $\|T\|$ y $\|T^{-1}\|$ son las normas respectivas de T y T^{-1} como operadores lineales y continuos. Dos espacios de Banach se dicen *C-isomorfos* si existe un isomorfismo entre ellos con distorsión no mayor que C. En ese caso, es posible encontrar un isomorfismo $T : X \to Y$ verificando

$$\|x\| \leq \|Tx\| \leq C\|x\|$$

para todo $x \in X$.

Dados dos espacios de Banach X e Y, una *inmersión* de X en Y es cualquier operador $T : X \to Y$ lineal que sea un isomorfismo entre X y $T(X)$. Dada una inmersión $T : X \to Y$, se llama *distorsión* de T a la distorsión del correspondiente isomorfismo entre X y $T(X)$.

Una *d-inmersión* es una inmersión con distorsión no mayor que d. Si existe una d-inmersión de un espacio de Banach X en otro Y, entonces podemos encontrar una inmersión $T : X \to Y$ verificando

$$d^{-1}\|x\| \leq \|Tx\| \leq \|x\|$$

para $x \in X$.

Espacios normados. Dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, denotaremos por

$$B(X) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \quad \text{y} \quad S(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

a la bola unidad cerrada y la esfera unidad del espacio, respectivamente. Cuando no haya confusión, porque estemos considerando un solo espacio, escribiremos B y S.

Para $1 \leq p < \infty$, denotaremos por ℓ_p el espacio de sucesiones $x = (x_k)$ para las que

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} < \infty$$

dotado de la norma $\|\cdot\|_p$, y por ℓ_∞ el espacio de sucesiones (x_k) para las que

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_k| : k \in \mathbb{N}\} < \infty$$

dotado de la norma $\|\cdot\|_\infty$. El espacio $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ lo denotaremos por ℓ_p^n, donde, para $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \qquad \|x\|_\infty = \sup\{|x_k| : 1 \leq k \leq n\}$$

si $1 \leq p < \infty$. En estos casos, escribiremos B_p^n y S_p^n para denotar la bola unidad cerrada y la esfera unidad de ℓ_p^n.

Para $1 \leq p < q \leq \infty$, se tiene

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|x\|_q.$$

Dados m espacios normados $X_1, \ldots X_m$, denotaremos por $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_m)_p$ al espacio normado formado por las m-uplas $(x_1, \ldots x_m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$ dotado de la norma p, definida por

$$\|(x_1, \ldots x_m)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} \|x_i\|^p\right)^{1/p}$$

para $1 \leq p < \infty$, y por

$$\|(x_1, \ldots x_m)\|_\infty = \sup\{\|x_1\|, \ldots \|x_m\|\}$$

para $p = \infty$. El espacio $\ell_p^n(X)$ denotará el espacio $(X \oplus \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \oplus X)_p$.

Espacios de Orlicz. Una *función de Orlicz* es cualquier $M : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua, no decreciente, convexa, y verificando $M(0) = 0$ y $\lim_{t \to +\infty} M(t) = +\infty$. Una función de Orlicz M se dice *no degenerada* si $M(t) > 0$ para $t > 0$. En lo sucesivo, sólo consideraremos funciones de Orlicz no degeneradas, a las que llamaremos simplemente funciones de Orlicz.

Dada una función de Orlicz M, se llama *espacio de Orlicz* ℓ_M al espacio de las sucesiones $x = (x_k)$ para las que existe $\lambda > 0$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} M(|x_k|/\lambda) < \infty$$

dotado de la *norma de Luxemburg*

$$\|x\|_M = \inf\{\lambda > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M(|x_k|/\lambda) \leq 1\}$$

El espacio $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_M)$ se denota ℓ_M^n, donde para $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_M = \inf\{\lambda > 0 : \sum_{k=1}^{n} M(|x_k|/\lambda) \leq 1\}$$

Una función de Orlicz se dice *normalizada* si $M(1) = 1$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que M es normalizada, ya que si no, basta considerar la función de Orlicz $\widetilde{M}(t) = M(at)$, donde $a > 0$ es tal que $M(a) = 1$. Entonces $\widetilde{M}$ es normalizada y $\|x\|_{\widetilde{M}} = a\|x\|_M$.

Toda función de Orlicz M, por el hecho de ser no decreciente y convexa, tiene una derivada a la derecha en cada $t > 0$, que denotaremos por $M'(t)$.

Diremos que una función de Orlicz M verifica la condición Δ_2 en el cero si existe $C > 0$ y $t_0 > 0$ tales que si $0 < t \leq t_0$, entonces $M(2t) \leq CM(t)$.

Dos funciones de Orlicz M_1, M_2 se dicen *equivalentes en cero* cuando existen constantes $a, K, t_0 > 0$ tales que para todo $t \in [0, t_0]$

$$K^{-1}M_1(a^{-1}t) \leq M_2(t) \leq KM_1(at).$$

Si al menos una de las dos funciones verifica la condición Δ_2 en el cero, entonces podemos dar la equivalencia de las funciones M_1, M_2 de una forma más sencilla: existen constantes $K, t_0 > 0$ tales que para todo $t \in [0, t_0]$,

$$K^{-1}M_2(t) \leq M_1(t) \leq KM_2(t).$$

Dos funciones de Orlicz M_1, M_2 son equivalentes en cero si y sólo si los espacios ℓ_{M_1} y ℓ_{M_2} son isomorfos.

Asociados a cualquier función de Orlicz, pueden definirse varios coeficientes (ver [Hu]). Los *coeficientes de Simonenko* para M son ([M] o [Sim])

$$p_M = \inf_{t>0} \frac{tM'(t)}{M(t)} \qquad q_M = \sup_{t>0} \frac{tM'(t)}{M(t)} \tag{1.1.1}$$

Otros coeficientes asociados a una función de Orlicz M, y que jugarán un papel esencial en el estudio de la convexidad uniforme de los espacios de Orlicz son

$$p_M^0 = \liminf_{t\to 0+} \frac{tM'(t)}{M(t)} \qquad q_M^0 = \sup_{0<t\leq 1} \frac{tM'(t)}{M(t)} \tag{1.1.2}$$

El primero se conoce como coeficiente inferior de Lindberg en cero, y el segundo es un coeficiente superior tipo Simonenko.

Más información sobre espacios de Orlicz puede encontrarse en [LiT].

Espacios de Lorentz. Sea $p \geq 1$ y $\omega = (\omega_k)$ una sucesión no-creciente de números positivos verificando

$$\lim_{k\to\infty} \omega_k = 0 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \omega_n = \infty \qquad \omega_1 = 1$$

(la última condición es una condición de normalización que no es restrictiva). El *espacio de Lorentz* $d(\omega, p)$ es aquel formado por las sucesiones $x = (x_k)$ para las que

$$\|x\|_{d(\omega,p)} = \left(\sup_{\pi\in\Pi} \sum_{k=1}^{\infty} |x_{\pi(k)}|^p \omega_k \right)^{1/p} < \infty,$$

donde Π denota el grupo de las permutaciones de $\mathbb{N}$. Dotado de la norma $\|\cdot\|_{d(\omega,p)}$ es un espacio de Banach. El espacio $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{d(\omega,p)})$ se denota $d^n(\omega, p)$, donde, para $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_{d(\omega,p)} = \left(\sup_{\pi\in\Pi_n} \sum_{k=1}^{n} |x_{\pi(k)}|^p \omega_k \right)^{1/p},$$

siendo Π_n es el grupo de las permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$.

Espacios uniformemente convexos. Dado un espacio normado X se define el *módulo de convexidad* de X a la función definida para $\varepsilon \in (0,2]$ como

$$\delta(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x-y\| \geq \varepsilon,\ \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1\right\} \tag{1.1.3}$$

Un espacio normado X se dice *uniformemente convexo* si su módulo de convexidad verifica $\delta(\varepsilon) > 0$ para todo $\varepsilon \in (0,2]$.

En la definición (1.1.3) podemos sustituir la condición $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ por $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$, y la condición $\|x-y\| \geq \varepsilon$ por $\|x-y\| = \varepsilon$. Una prueba de este hecho puede encontrarse en [LiT]. En esa misma referencia se demuestra el siguiente resultado conocido.

Lema 1.1.1. *Si $\delta(\varepsilon)$ es el módulo de convexidad de un espacio normado X, entonces la función $\delta(\varepsilon)/\varepsilon$ es no decreciente en $(0,2]$.*

Clarkson [Cl] estimó los módulos de convexidad $\delta_p(\varepsilon)$ para los espacios ℓ_p; Hanner [Ha] ajustó la estimación para $p < 2$. Si $1 < p \leq 2$, entonces

$$\left(1 - \delta_p(\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}\right)^p + \left(1 - \delta_p(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2}\right)^p = 2$$

y si $2 \leq p < \infty$, entonces

$$\delta_p(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p}$$

Para ε pequeño, tenemos que

$$\delta_p(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{p-1}{8}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), & \text{si } 1 < p \leq 2 \\ \frac{1}{p2^p}\varepsilon^p + o(\varepsilon^p), & \text{si } 2 < p < \infty \end{cases} \tag{1.1.4}$$

En [MT] y [Hu] (ver también [F2]) se estudia la convexidad uniforme en los espacios de Orlicz ℓ_M. Se demuestra que si M es una función de Orlicz verificando la condición Δ_2 en el cero y tal que $M(\sqrt{t})$ es una función convexa en $(0, +\infty)$, entonces

$$1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right)^{1/q} \leq \delta_M(\varepsilon) \leq 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p}$$

para cada $\varepsilon \in (0, 2]$, donde $p = p_M^0$ y $q = q_M^0$ son los coeficientes definidos en (1.1.2). Si M verifica la condición Δ_2 en el cero y $M(\sqrt{t})$ es una función convexa en $(0, +\infty)$, entonces $2 \leq p_M^0 \leq q_M^0 < \infty$. En consecuencia, en esas condiciones para M, si $p_M^0 = q_M^0 = p$, el espacio ℓ_M tiene el mismo módulo de convexidad que ℓ_p.

Más generalmente, si para cierta $c > 0$ y todos $s, t \in [0, 1]$ se tiene $M(st) \geq cM(s)M(t)$, y $M(\sqrt{t})$ es equivalente a una función convexa, entonces $\delta_M(\varepsilon)$ es equivalente a $M(\varepsilon)$. Aquí entendemos que dos funciones $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ son equivalentes si existen constantes $K, t_0 > 0$ tal que para todo $t \in [0, t_0]$

$$K^{-1}g(t) \leq f(t) \leq Kg(t).$$

La convexidad uniforme también ha sido estudiada en [Al] para los espacios de Lorentz $d(\omega, p)$. Se prueba que, si $p \geq 2$, y para cierta constante $c > 0$ y todos $k, m \in \mathbb{N}$ se tiene $S(km) \geq cS(k)S(m)$, entonces el módulo de convexidad de $d(\omega, p)$ $\delta(\varepsilon)$ es equivalente a $\dfrac{1}{S^{-1}(\varepsilon^{-p})}$, donde la función $S : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es cualquier función estrictamente creciente tal que

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k$$

en cada natural n.

Espacios de probabilidad. Consideremos (Ω, Σ, μ) un espacio de probabilidad. En $\mathbb{R}$ consideraremos siempre la σ-álgebra $\mathcal{B}$ de los conjuntos de Borel.

Una *variable aleatoria* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es cualquier función real medible.

Dos variables aleatorias $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ se dicen *independientes* si para todo $A, B \in \mathcal{B}$

$$\mu\{x \in \Omega : f(x) \in A \text{ y } g(x) \in B\} = \mu\{x \in \Omega : f(x) \in A\} \cdot \mu\{x \in \Omega : g(x) \in B\}$$

Dos variables aleatorias $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ se dicen *identicamente distribuidas* si para todo $A \in \mathcal{B}$

$$\mu\{x \in \Omega : f(x) \in A\} = \mu\{x \in \Omega : g(x) \in A\}$$

Una variable aleatoria f se dice *simétrica* si para todo $A \in \mathcal{B}$

$$\mu\{x \in \Omega : f(x) \in A\} = \mu\{x \in \Omega : -f(x) \in A\}$$

y se dice simétrica respecto a $c \in \mathbb{R}$ si la variable aleatoria $f - c$ es simétrica.

Diremos que $M \in \mathbb{R}$ es una *mediana* de f si

$$\mu\{x \in \Omega : f(x) \leq M\} \geq 1/2 \quad \text{y} \quad \mu\{x \in \Omega : f(x) \geq M\} \geq 1/2.$$

Toda variable aleatoria $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tiene al menos una mediana, aunque no tiene por qué ser única. Si f es simétrica respecto a $c \in \mathbb{R}$, entonces c es una mediana de f.

Dada una variable aleatoria integrable, la esperanza de f se denotará por $\mathbb{E}(f) = \int_\Omega f\, d\mu$.

Medidas de Borel en $\mathbb{R}^n$. En todo el capítulo, cuando consideremos $\mathbb{R}^n$ como espacio de probabilidad, la σ-álgebra correspondiente será siempre la de los Borel de $\mathbb{R}^n$.

La medida de Lebesgue usual de $\mathbb{R}^n$ se denotará por m. El siguiente resultado, la desigualdad de Brunn-Minkowski, relaciona la medida de la suma de dos conjuntos con la medida de cada uno de ellos. Muchas son las referencias donde se estudia esta desigualdad. Una demostración puede encontrarse en [Pi2].

TEOREMA 1.1.2. *Dados $A, A' \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos medibles no vacíos,*

$$m_*(A + A')^{1/n} \geq m(A)^{1/n} + m(A')^{1/n}$$

donde m_* es la medida interior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

En la sección 2 usaremos una consecuencia de dicha desigualdad. Si $A, A' \subset \mathbb{R}^n$ son medibles, entonces

$$\mathrm{m}_* \left(\frac{A + A'}{2} \right) \geq \mathrm{m}(A)^{1/2} \mathrm{m}(A')^{1/2}. \tag{1.1.5}$$

Dado un espacio normado X de dimensión finita, denotaremos por σ la medida de Lebesgue definida en B normalizada para que $\sigma(B) = 1$. Es decir,

$$\sigma(A) = \mathrm{m}(B)^{-1} \mathrm{m}(A \cap B).$$

Cuando el espacio sea ℓ_p^n, se escribirá σ_p. Se tiene que

$$\mathrm{m}(B_p^n) = \frac{(2\Gamma(1 + 1/p))^n}{\Gamma(1 + n/p)}.$$

Dado $1 \leq p < \infty$, sea γ_p la probabilidad de Borel en $\mathbb{R}$ con densidad $c_p^{-1} e^{-|x|^p/p}$ con respecto de la medida de Lebesgue ($c_p = 2\Gamma(1 + 1/p)p^{1/p}$) y γ_p^n la probabilidad producto en $\mathbb{R}^n$, donde cada factor se dota de la medida γ_p. Así γ_p^n es una medida en $\mathbb{R}^n$ con densidad $c_p^{-n} e^{-\|x\|_p^p/p}$ respecto de m. Cuando $p = 2$, la medida se llama *medida gaussiana*, y se denota simplemente γ^n.

El siguiente resultado se encuentra, esencialmente, en un artículo de Talagrand [T1], acerca del espacio de Gauss. En él obtiene una desigualdad para la medida γ_1^n de la que puede deducirse la correspondiente desigualdad para la medida γ^n, ya conocida anteriormente (ver [Pi1], [Bor] o [Pi2]). Maurey simplificó en [Maur] el argumento de Talagrand para obtener el resultado. Damos aquí el enunciado dado por Maurey, que será tal como lo usaremos en la sección 3.

Teorema 1.1.3. *Existe una constante $\alpha > 0$ tal que para todo $t > 0$ y todo Borel $A \subset \mathbb{R}^n$ con $\gamma_1^n(A) > 0$ se tiene que*

$$\gamma_1^n(A + \sqrt{t} B_2^n + t B_1^n) \geq 1 - \frac{1}{\gamma_1^n(A)} e^{-\alpha t}.$$

Denotaremos por S^{n+1} la esfera euclídea de $\mathbb{R}^{n+2}$, esto es, $S^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+2} : \|x\|_2 = 1\}$, y en ella, consideraremos la medida de probabilidad de Haar μ_{n+1} invariante por rotaciones, y la métrica ρ_{n+1} dada por la distancia geodésica.

2. Concentración de la medida en espacios uniformemente convexos

En esta sección veremos una prueba extraordinariamente corta, debida a Keith Ball, de un fenómeno de concentración de la medida en espacios uniformemente convexos demostrado por Gromov y Milman en [GM2] (ver [A] para una prueba detallada siguiendo el mismo razonamiento de Gromov y Milman). El origen del argumento usado en esta prueba está en un artículo de Talagrand [T1] sobre el espacio de Gauss. Maurey [Maur] simplificó el razonamiento de Talagrand, que posteriormente fue usado por Schmuckenschläger [S] para estudiar espacios uniformemente convexos. La prueba dada a continuación persigue en esencia las mismas ideas. Aunque la brevedad de la demostración esconde las ideas que hay detrás, su simplicidad, habida cuenta de las complicadas demostraciones anteriores, hace muy interesante el incluirla en este capítulo. Quisiera agradecer a Keith Ball su permiso para que su prueba aparezca en esta memoria.

Dado un espacio X uniformemente convexo, consideraremos el módulo de convexidad $\delta(\varepsilon)$ definido en (1.1.3).

TEOREMA 1.2.1. *Sea X un espacio normado n-dimensional uniformemente convexo, B su bola unidad cerrada, σ la medida de Lebesgue en B normalizada para que $\sigma(B) = 1$ y $\delta(\varepsilon)$ el modulo de convexidad de X. Para cada $A \subset B$ con $\sigma(A) \geq 1/2$, y cada $\varepsilon > 0$, se tiene que*

$$\sigma(A + \varepsilon B) > 1 - 2e^{-2\delta(\varepsilon)n}.$$

DEMOSTRACIÓN. Usaremos la desigualdad (1.1.5) que se deduce del teorema de Brunn-Minkowski 1.1.2:

$$\sigma_*\left(\frac{A+A'}{2}\right) \geq \sigma(A)^{1/2}\sigma(A')^{1/2}.$$

Tomemos $A \subset B$ y pongamos

$$A' = \{y \in B : d(y, A) \geq \varepsilon\}.$$

Si $x \in A$ e $y \in A'$ entonces $\|x-y\| \geq \varepsilon$ con lo que

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta(\varepsilon).$$

Así

$$\frac{A+A'}{2} \subset (1-\delta(\varepsilon))\, B$$

y por tanto

$$\sigma(A)\sigma(A') \leq (1-\delta(\varepsilon))^{2n} \leq e^{-2n\delta(\varepsilon)}. \qquad \square$$

OBSERVACIÓN 1.2.2. El resultado anterior prueba, en particular, que la sucesión de espacios ℓ_p^n $(1 < p < \infty)$ dotados de la medida de Lebesgue normalizada en B_p^n forman una familia normal de Lèvy. Teniendo en cuenta que el módulo de convexidad es del orden $a_p\varepsilon^2$ para $1 < p \leq 2$, y del orden $b_p\varepsilon^p$ para $p > 2$ (1.1.4), la función de concentración en ℓ_p^n para $1 < p \leq 2$ es

$$\varphi_p(\varepsilon) < 2\exp\{-2a_p\varepsilon^2 n\}$$

y para $p > 2$ es

$$\varphi_p(\varepsilon) < 2\exp\{-2b_p\varepsilon^p n\}.$$

El teorema 1.2.1 también puede aplicarse a los espacios de Orlicz ℓ_M^n, para M una función de Orlicz verificando la condición Δ_2 en cero, y tal que $M(\sqrt{t})$

es una función convexa en $(0, +\infty)$. En ese caso, la función de concentración verifica

$$\varphi(\varepsilon) < 2\exp\{-c_q \varepsilon^q n\},$$

donde $q = q_M^0$ es el coeficiente definido en (1.1.2).

También, si para cierta $c > 0$ y todos $s, t \in [0, 1]$ se tiene

$$M(st) \geq cM(s)M(t),$$

y $M(\sqrt{t})$ es equivalente a una función convexa, entonces

$$\varphi(\varepsilon) < 2\exp\{-aM(b\varepsilon)n\}.$$

Por último, si aplicamos el teorema 1.2.1 a los espacios de Lorentz $d(\omega, p)$, obtenemos que, si $p \geq 2$, y para cierta constante $c > 0$ y todos $k, m \in \mathbb{N}$ se tiene $S(km) \geq cS(k)S(m)$, entonces

$$\varphi(\varepsilon) < 2\exp\left\{-\frac{an}{S^{-1}((b\varepsilon)^{-p})}\right\},$$

donde la función $S : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es cualquier función estrictamente creciente tal que

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k$$

en cada natural n.

3. Concentración uniforme de la medida en ℓ_p^n $(1 \leq p \leq 2)$

En la sección anterior hemos obtenido, en particular, una desigualdad de concentración en los espacios ℓ_p^n para $1 < p < \infty$, pero el exponente tiende a cero cuando $p \to 1^+$, y desde luego, no puede ser aplicada al espacio ℓ_1^n.

En el teorema 1.3.6 obtenemos una desigualdad de concentración uniforme para la medida de probabilidad de Lebesgue σ_p en todos los espacios ℓ_p^n $(1 \leq$

$p \leq 2$). Es importante destacar que este resultado, en particular, muestra que la sucesión de espacios ℓ_1^n dotados de la medida σ_1 forman una familia de Lèvy, hecho que hasta ahora era desconocido.

Para la demostración de este resultado, introduciremos dos medidas definidas en $\mathbb{R}^n$. Fijemos $p \in [1, 2]$.

Sea B_p^n la bola unidad de ℓ_p^n y σ_p' la probabilidad de Borel definida en $\mathbb{R}^n$ por

$$\sigma_p'(A) = \frac{1}{v_{p,n} n^{n/p}} m(A \cap n^{\frac{1}{p}} B_p^n), \tag{1.3.1}$$

donde $v_{p,n} = m(B_p^n) = \dfrac{(2\Gamma(1 + 1/p))^n}{\Gamma(1 + \frac{n}{p})}$ y donde m denota la medida de Lebesgue usual en $\mathbb{R}^n$.

Sea γ_p^n la medida producto en $\mathbb{R}^n$ con densidad $c_p^{-n} e^{-\|x\|_p^p/p}$ con respecto de la medida de Lebesgue ($c_p = 2\Gamma(1+1/p)p^{1/p}$). En la proposición 1.3.1 probamos una desigualdad de concentración para esta medida, que implicará un fenómeno de concentración para la medida de Lebesgue normalizada en la bola unidad de ℓ_p^n. Esto se debe a que las dos medidas γ_p^n y σ_p' están conectadas, en un cierto sentido. Concretamente, si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto de Borel,

$$\lim_{N \to \infty} \pi_N \sigma_p'(A) = \gamma_p^n(A),$$

donde $\pi_N : \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n} \to \mathbb{R}^n$ denota la proyección sobre las primeras n coordenadas. (Este hecho, para $p = 2$, el caso de la medida gaussiana γ_2^n, se conoce como observación de Poincaré, aunque al parecer no es debida a él; ver [DF].) En efecto, usando el teorema de Fubini, tenemos que (la notación $[P(x)]$ indicará 1 si la fórmula $P(x)$ es cierta y 0 en caso contrario)

$$\begin{aligned}
\pi_N \sigma_p'(A) &= \sigma_p'(\pi^{-1}(A)) \\
&= \frac{1}{v_{p,N} N^{N/p}} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n}} [x \in A][\|x\|_p^p + \|y\|_p^p < N] \, dm(x) \, dm(y) \\
&= \frac{1}{v_{p,N} N^{N/p}} \int_A v_{p,N-n} \left(N - \|x\|_p^p\right)^{\frac{N-n}{p}} dm(x) \\
&= \frac{v_{p,N-n}}{v_{p,N} N^{n/p}} \int_A \left(1 - \frac{\|x\|_p^p}{N}\right)^{\frac{N-n}{p}} dm(x)
\end{aligned}$$

y tomando límite

$$\lim_{N\to\infty} \pi_N \sigma'_p(A) = \frac{1}{2^n p^{n/p}\Gamma(1+1/p)^n} \int_A e^{-\|x\|_p^p/p}\, dx = c_p^{-n} \int_A e^{-\|x\|_p^p/p}\, dx.$$

La demostración de la siguiente proposición se basa en la desigualdad de Talagrand dada en el teorema 1.1.3, siguiendo el argumento usado por él mismo en [T2].

PROPOSICIÓN 1.3.1. *Sea $1 \leq p \leq 2$, B_p^n la bola unidad de ℓ_p^n y γ_p^n la medida en $\mathbb{R}^n$ con densidad $c_p^{-n} e^{-\|x\|_p^p/p}$ respecto de la medida de Lebesgue ($c_p = 2\Gamma(1+1/p)p^{1/p}$). Existe una constante absoluta $a > 0$ tal que para todo conjunto de Borel $A \subset \mathbb{R}^n$ con $\gamma_p^n(A) > 0$, y para todo $t > 0$, se tiene que*

$$\gamma_p^n\left(A + \left(t^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{p}}\right) B_p^n\right) \geq 1 - \frac{e^{-at}}{\gamma_p^n(A)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 1.1.3, existe una constante $\alpha > 0$ tal que para todo $t > 0$ y todo Borel $A \subset \mathbb{R}^n$ con $\gamma_1^n(A) > 0$ se tiene que

$$\gamma_1^n(A + \sqrt{t} B_2^n + t B_1^n) \geq 1 - \frac{1}{\gamma_1^n(A)} e^{-\alpha t}.$$

Teniendo en cuenta la inclusión $B_2^n \subset n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} B_p^n$, tenemos que

$$\gamma_1^n(A + \sqrt{t} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} B_p^n + t B_1^n) \geq 1 - \frac{1}{\gamma_1^n(A)} e^{-\alpha t}.$$

Sea $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función estrictamente creciente que transforma γ_1 en γ_p. La siguiente propiedad nos va a permitir obtener el resultado deseado a partir de esta desigualdad. Hemos creído conveniente incluir su demostración, para aclarar la que se encuentra en [T2], e insistir en que la constante K puede escogerse independiente de p, $1 \leq p \leq 2$.

LEMA 1.3.2. *Existe una constante absoluta $K > 0$ tal que para todo $1 \leq p \leq 2$ y todo $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq K \min\{|x - y|, |x - y|^{1/p}\}.$$

DEMOSTRACIÓN. La aplicación ψ verifica $\gamma_p(A) = \gamma_1(\psi^{-1}(A))$ para todo conjunto de Borel $A \subset \mathbb{R}$, y por tanto, si $x > 0$

$$c_p^{-1} \int_{\psi(x)}^{+\infty} e^{-t^p/p} dt = \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{2} e^{-x} \tag{1.3.2}$$

y si $x < 0$, $\psi(x) = -\psi(-x)$. La función ψ es continua, derivable, y su derivada vale

$$\psi'(x) = \frac{c_p}{2} e^{\psi(x)^p/p} e^{-x} \tag{1.3.3}$$

si $x \geq 0$ y $\psi'(x) = \psi'(-x)$ si $x < 0$. Sea, para $y \geq 0$, $R_p(y) = \int_y^{+\infty} e^{-t^p/p} dt$. Entonces (1.3.2) se escribe

$$R_p(\psi(x)) = \frac{c_p}{2} e^{-x} \tag{1.3.4}$$

Cambiando de variable, podemos escribir

$$R_p(y) = p^{1/p-1} \int_{y^p/p}^{+\infty} s^{1/p-1} e^{-s} ds,$$

e integrando por partes, obtenemos

$$R_p(y) = y^{1-p} e^{-y^p/p} - \frac{p-1}{p^{2-1/p}} \int_{y^p/p}^{+\infty} s^{1/p-2} e^{-s} ds$$

y como

$$\frac{p-1}{p^{2-1/p}} \left| \int_{y^p/p}^{+\infty} s^{1/p-2} e^{-s} ds \right| \leq (p-1) \frac{e^{-y^p/p}}{y^{2p-1}},$$

se tiene que para $y \geq 2$,

$$\frac{1}{2} < y^{p-1} e^{y^p/p} R_p(y) < \frac{3}{2}.$$

Si hacemos $y = \psi(x)$ (con $x \geq 0$), usando (1.3.4), obtenemos

$$\frac{1}{2} < \frac{c_p}{2}\psi(x)^{p-1}e^{\psi(x)^p/p}e^{-x} < \frac{3}{2} \tag{1.3.5}$$

para $x \geq \psi^{-1}(2)$. De (1.3.5), usando que $c_p = 2\Gamma(1+1/p)p^{1/p} \leq 4$, se deduce que

$$e^x \leq 4\psi(x)e^{\psi(x)^p} \tag{1.3.6}$$

y en particular, que $\psi^{-1}(2) \leq \log(8e^4) = x_0$. Así pues, las desigualdades (1.3.5) y (1.3.6) valen para todo $x \geq x_0$. Usando (1.3.6) se deduce que para $x \geq x_0$

$$e^x \leq 4\psi(x)e^{\psi(x)^p} \leq e^{4\psi(x)+\psi(x)^p} \leq e^{5\psi(x)^p},$$

con lo que

$$x \leq 5\psi(x)^p \tag{1.3.7}$$

para $x \geq x_0$.

Ahora usando (1.3.3), (1.3.5) y (1.3.7), se tiene que

$$\psi'(x) = \frac{c_p}{2}e^{\psi(x)^p/p}e^{-x} < \frac{3}{2}\psi(x)^{1-p} \leq \frac{3}{2}\left(\frac{x}{5}\right)^{1/p-1} \leq \frac{3\sqrt{5}}{2}x^{1/p-1}$$

para $x \geq x_0$. Usando la continuidad de ψ' respecto de p y la compacidad de $\{p : 1 \leq p \leq 2\}$, podemos encontrar una constante absoluta $K_1 > 0$ tal que si $x \in [0, x_0]$, entonces $\psi'(x) \leq K_1$ y si $x \geq x_0$ entonces $\psi'(x) \leq K_1 x^{1/p-1}$. En cualquier caso, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi'(x) = \psi'(|x|) \leq K(1+|x|)^{1/p-1}$$

siendo $K = K_1(1+x_0)^{\frac{1}{2}}$. Finalmente, para cualquier $h > 0$,

$$\psi(x+h) - \psi(x) = \int_x^{x+h} \psi'(t)dt \leq K\int_x^{x+h}(1+|t|)^{1/p-1}dt$$

de donde se deduce que

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq K\min\{|x-y|, |x-y|^{1/p}\}$$

para K constante absoluta. $\square$

Consideremos ahora la aplicación $\Psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\Psi(x_1, \ldots, x_n) = (\psi(x_1), \ldots, \psi(x_n)).$$

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma_p^n(A) = \gamma_1^n(\Psi^{-1}(A)) > 0$. Se tiene que

$$\gamma_1^n(\Psi^{-1}(A) + \sqrt{t}n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}B_p^n + tB_1^n) \geq 1 - \frac{1}{\gamma_1^n(\Psi^{-1}(A))}e^{-\alpha t}. \tag{1.3.8}$$

Lema 1.3.3.

$$\Psi(\Psi^{-1}(A) + \sqrt{t}n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}B_p^n + tB_1^n) \subset A + K\left((2t)^{\frac{1}{p}} + 2t^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\right)B_p^n.$$

Demostración. Tomemos $y \in \Psi^{-1}(A) + \sqrt{t}n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}B_p^n + tB_1^n$. Así $y = \Psi^{-1}(a) + \sqrt{t}n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}b_p + tb_1$, con $a \in A$, $b_p \in B_p^n$ y $b_1 \in B_1^n$. Entonces $a = \Psi(y - \sqrt{t}n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}b_p - tb_1)$ y si $x = \Psi(y)$, podemos escribir $x = a + (x - a)$, con lo que basta ver que $\|x - a\|_p \leq K((2t)^{\frac{1}{p}} + 2t^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}})$.

Por el lema 1.3.2 y la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}
\|x-a\|_p^p =& \sum_{i=1}^n \left|\psi(y_i) - \psi(y_i - \sqrt{t}n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}b_{pi} - tb_{1i})\right|^p \\
\leq& K^p \sum_{i=1}^n \min\left\{\left|tb_{1i} + \sqrt{t}n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}b_{pi}\right|^p, \left|tb_{1i} + \sqrt{t}n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}b_{pi}\right|\right\} \\
\leq& K^p \sum_{i=1}^n \min\left\{\left(t|b_{1i}| + \sqrt{t}n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}|b_{pi}|\right)^p, t|b_{1i}| + \sqrt{t}n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}|b_{pi}|\right\}.
\end{aligned}$$

Para cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$, si $\sqrt{t}n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}|b_{pi}| \leq t|b_{1i}|$, entonces el mínimo es

$$\leq 2t|b_{1i}|,$$

y si $\sqrt{t}n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}|b_{pi}| > t|b_{1i}|$, entonces el mínimo es

$$\leq 2^p t^{p/2} n^{1-p/2} |b_{pi}|^p.$$

En cualquier caso, el mínimo no es mayor que la suma, así que

$$\begin{aligned} \|x-a\|_p^p &\leq K^p \sum_{i=1}^{n} \left(2t|b_{1i}| + 2^p t^{p/2} n^{1-p/2} |b_{pi}|^p\right) \\ &\leq K^p \left(2t + 2^p t^{p/2} n^{1-p/2}\right) \end{aligned}$$

por tanto (usando que la norma ℓ_p es menor que la norma ℓ_1),

$$\|x-a\|_p \leq K\left(2t + 2^p t^{p/2} n^{1-p/2}\right)^{1/p} \leq K((2t)^{\frac{1}{p}} + 2t^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}). \qquad \square$$

Usando el lema 1.3.3 se obtiene (poniendo $t/4K^2$ en lugar de t en (1.3.8))

$$\gamma_p^n\left(A + \left(t^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{p}}\right) B_p^n\right) \geq 1 - \frac{e^{-\alpha t/4K^2}}{\gamma_p^n(A)} \qquad \square$$

Para deducir de la proposición anterior el resultado principal de esta sección, la concentración uniforme de la medida de Lebesgue en la bola de ℓ_p^n para $1 \leq p \leq 2$, necesitaremos dos lemas técnicos.

Lema 1.3.4. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad y f una función de densidad sobre X. Sea ν la medida con densidad f con respecto a μ, y $L_t = \{x \in X : f(x) \leq t\}$ los conjuntos de nivel. Para todo A medible tenemos la implicación*

$$\nu(A) \geq \nu(X \setminus L_t) \Longrightarrow \mu(A) \geq \mu(X \setminus L_t).$$

Demostración. Se tiene que

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu = \int_{A\cap L_t} f\,d\mu + \int_{A\setminus L_t} f\,d\mu. \tag{1.3.9}$$

Supongamos que fuese $\mu(A) < \mu(X \setminus L_t)$, esto es

$$\mu(A \cap L_t) + \mu(A \setminus L_t) < \mu(A \setminus L_t) + \mu[(X \setminus L_t) \setminus A].$$

De ahí se deduce $\mu(A \cap L_t) < \mu[(X \setminus L_t) \setminus A]$ y además en el conjunto $A \cap L_t$ se verifica $f \leq t$ y en el conjunto $(X \setminus L_t) \setminus A$ se verifica $f > t$. Sigue que

$$\int_{A \cap L_t} f\, d\mu < \int_{(X \setminus L_t) \setminus A} f\, d\mu$$

y de (1.3.9) se deduce

$$\nu(A) < \int_{(X \setminus L_t) \setminus A} f\, d\mu + \int_{A \setminus L_t} f\, d\mu = \int_{X \setminus L_t} f\, d\mu = \nu(X \setminus L_t).$$

La contradicción prueba el resultado. □

Una prueba del siguiente lema se puede encontrar en [Kn].

LEMA 1.3.5.
$$\lim_{b \to +\infty} \frac{1}{\Gamma(b)} \int_b^{+\infty} t^{b-1} e^{-t}\, dt = \frac{1}{2}.$$

TEOREMA 1.3.6. *Sea, para $1 \leq p \leq 2$, B_p^n la bola unidad cerrada de ℓ_p^n y σ_p la medida de Lebesgue normalizada en B_p^n. Existen dos constantes $\alpha, c > 0$ tales que, para todo $1 \leq p \leq 2$, todo Borel $A \subset B_p^n$ con $\sigma_p(A) \geq 1/2$, y todo $0 < \varepsilon < 1$*

$$\sigma_p(A + \varepsilon B_p^n) \geq 1 - \alpha n e^{-c\varepsilon^2 n}.$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos, como antes, la probabilidad de Borel γ_p^n definida en $\mathbb{R}^n$ con densidad $c_p^{-n} e^{-\|x\|_p^p/p}$ con respecto a la medida de Lebesgue m $(c_p = 2\Gamma(1 + 1/p)p^{1/p})$.

Para cualquier función medible $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$

$$c_p^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\|x\|_p)\, dm(x) = \frac{n}{\Gamma(1+\frac{n}{p})p^{n/p}} \int_0^\infty r^{n-1} f(r)\, dr. \tag{1.3.10}$$

Sea σ_p' la probabilidad de Borel definida en (1.3.1). Esta probabilidad σ_p' tiene densidad respecto de γ_p^n, dada por

$$\rho_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(1+\frac{n}{p})}{(n/p)^{n/p}} e^{\|x\|_p^p/p} & \text{si } \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}}, \\ 0 & \text{si } \|x\|_p > n^{\frac{1}{p}}, \end{cases}$$

Para esta función, el conjunto de nivel L_t es

$$L_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho_n(x) \leq t\} = \alpha_n B_p^n \cup (\mathbb{R}^n \setminus n^{\frac{1}{p}} B_p^n)$$

donde α_n verifica $e^{\alpha_n^p/p} = t(n/p)^{n/p}/\Gamma(1+\frac{n}{p})$. Elijamos t_0 (que depende de n) de forma que $\sigma_p'(\alpha_n B_p^n) = 1/2$ (i. e., tal que $\alpha_n = 2^{-\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{p}}$).

Fijemos un Borel $A \subset B_p^n$ con $\sigma_p(A) \geq 1/2$. Se tiene que

$$\sigma_p'(n^{\frac{1}{p}} A) = \sigma_p(A) \geq 1/2 = \sigma_p'(\mathbb{R}^n \setminus L_{t_0}).$$

Por el lema 1.3.4, $\gamma_p^n(n^{\frac{1}{p}} A) \geq \gamma_p^n(\mathbb{R}^n \setminus L_{t_0})$. De (1.3.10) se tiene

$$\begin{aligned} \gamma_p^n(n^{\frac{1}{p}} A) &\geq c_p^{-n} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : \alpha_n \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}}\}} e^{-\|x\|_p^p/p}\, dx \\ &= \frac{n}{\Gamma(1+\frac{n}{p})p^{n/p}} \int_{\alpha_n}^{n^{\frac{1}{p}}} r^{n-1} e^{-r^p/p}\, dr \\ &\geq \frac{n^{n/p} e^{-n/p}}{2\Gamma(1+\frac{n}{p})p^{n/p}} \\ &\sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{2\pi n}} \end{aligned}$$

y por tanto, para n suficientemente grande,

$$\gamma_p^n(n^{\frac{1}{p}}A) > \frac{c_1}{\sqrt{n}}$$

para cierta constante $c_1 > 0$. Por la proposición 1.3.1, para todo $t > 0$ se tiene

$$\gamma_p^n\left(n^{\frac{1}{p}}A + \left(t^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{p}}\right)B_p^n\right) \geq 1 - \frac{e^{-at}}{\gamma_p^n(n^{\frac{1}{p}}A)} > 1 - c_2\sqrt{n}e^{-at}.$$

Haciendo $t = n\delta/a$ se obtiene para cierta constante $K' > 0$

$$\gamma_p^n\left(n^{\frac{1}{p}}\left(A + K'\delta^{\frac{1}{2}}B_p^n\right)\right) > 1 - c_2\sqrt{n}e^{-n\delta} \tag{1.3.11}$$

para cualquier $0 < \delta < 1$. Sea $M = A + K'\delta^{\frac{1}{2}}B_p^n$. Demostraremos que para $n \geq n_0$

$$c_3e^{-n\delta} < 1 \Longrightarrow \sigma_p'(n^{\frac{1}{p}}M) \geq (1 - c_3e^{-n\delta})^{n/p}, \tag{1.3.12}$$

para ciertas constantes absolutas $c_3 > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ (realmente, podemos tomar $c_3 = 8\sqrt{\pi}c_2$). En efecto, podemos suponer que $c_3e^{-n\delta} < 1 - 2^{-p/n}$, ya que $\sigma_p'(n^{\frac{1}{p}}M) \geq \sigma_p'(n^{\frac{1}{p}}A) \geq 1/2$, y si $c_3e^{-n\delta} \geq 1 - 2^{-p/n}$ no hay nada que probar. Entonces para n_0 suficientemente grande y $n \geq n_0$, tenemos

$$c_2\sqrt{n}e^{-n\delta} < c_3\sqrt{n}e^{-n\delta} < \sqrt{n}(1 - 2^{-p/n}) < 1/4.$$

Por tanto, usando el lema 1.3.5, podemos encontrar $r(\delta)$ verificando

$$\begin{aligned}
c_2\sqrt{n}e^{-n\delta} &= \frac{n}{p^{n/p}\Gamma(1+\frac{n}{p})}\int_{r(\delta)}^{n^{\frac{1}{p}}} r^{n-1}e^{-r^p/p}\,dr \\
&= \frac{n/p}{\Gamma(1+\frac{n}{p})}\int_{r(\delta)^p/p}^{n/p} s^{n/p-1}e^{-s}\,ds.
\end{aligned}$$

Entonces (1.3.11) se puede escribir

$$\gamma_p^n(n^{\frac{1}{p}}M) > \gamma_p^n(L_\beta),$$

donde $\beta = (n/p)^{-n/p}\Gamma(1+\frac{n}{p})e^{r(\delta)^p/p}$. Así

$$\gamma_p^n(\mathbb{R}^n \setminus n^{\frac{1}{p}}M) < \gamma_p^n(\mathbb{R}^n \setminus L_\beta).$$

Usando de nuevo el lema 1.3.4,

$$\sigma'_p(\mathbb{R}^n \setminus n^{\frac{1}{p}}M) < \sigma'_p(\mathbb{R}^n \setminus L_\beta)$$

con lo que

$$\sigma'_p(n^{\frac{1}{p}}M) > \sigma'_p(L_\beta) = \frac{r(\delta)^n}{n^{n/p}}. \tag{1.3.13}$$

Pero $r(\delta)^p \geq n - c_3 n e^{-n\delta}$, ya que en caso contrario, para n grande, se tendría

$$\begin{aligned} c_2\sqrt{n}e^{-n\delta} &= \frac{n/p}{\Gamma(1+\frac{n}{p})}\int_{r(\delta)^p/p}^{n/p} s^{n/p-1}e^{-s}\,ds \\ &> \frac{n/p}{\Gamma(1+\frac{n}{p})}\int_{\frac{n}{p}-c_3\frac{n}{p}e^{-n\delta}}^{\frac{n}{p}} s^{n/p-1}e^{-s}\,ds \\ &> c_3\frac{n}{p}e^{-n\delta}\frac{n/p}{\Gamma(1+\frac{n}{p})}\left(\frac{n}{p}-c_3\frac{n}{p}e^{-n\delta}\right)^{n/p-1}e^{-n/p} \\ &> \frac{c_3\sqrt{n}e^{-n\delta}}{8\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

lo cual no es posible si $c_3 = 8\sqrt{\pi}c_2$. Ahora, de (1.3.13) se tiene que, para cierto n_0,

$$\sigma'_p(n^{\frac{1}{p}}M) > (1 - c_3 e^{-n\delta})^{n/p}$$

si $n \geq n_0$ y $c_3 e^{-n\delta} < 1 - 2^{-p/n}$. Esto prueba (1.3.12). Así que, para todo $n \geq n_0$

$$\sigma'_p(n^{\frac{1}{p}}M) > 1 - \frac{c_3 n}{p}e^{-n\delta}.$$

Finalmente, para todo $n \geq n_0$,

$$\sigma_p\left(A + K'\delta^{\frac{1}{2}}B_p^n\right) = \sigma'_p(n^{\frac{1}{p}}M) > 1 - c_3 n e^{-n\delta}$$

de donde se obtiene el resultado deseado para cierta constante $\alpha > 0$. $\square$

4. Aplicaciones a problemas de inmersión

En esta sección veremos dos resultados (teoremas 1.4.1 y 1.4.4) que dan idea de "lo lejos" que está el espacio ℓ_∞^N de los espacios con concentración de la medida, en términos de la mínima dimensión necesaria N que admite una inmersión de estos espacios en ℓ_∞^N. Las pruebas de estos resultados siguen los argumentos usados en [GM1, proposición 5.1 y teorema 5.2].

TEOREMA 1.4.1. *Sea X un espacio normado n-dimensional, B su bola unidad cerrada y φ la función de concentración de una probabilidad de Borel μ simétrica definida en B. Si existe una d-inmersión de X en ℓ_∞^N, entonces, para cualquier $0 < \varepsilon < 1/d$ tal que $\varphi(\varepsilon) > 0$,*

$$N \geq \frac{1}{2}\varphi(\varepsilon)^{-1}\left(1 - \mu(d\varepsilon B)\right).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $T : X \to \ell_\infty^N$ una inmersión lineal tal que $d^{-1}\|x\| \leq \|Tx\|_\infty \leq \|x\|$ para todo $x \in X$. Consideremos la proyección sobre la i-ésima coordenada $\pi_i : \ell_\infty^N \to \mathbb{R}$ y el funcional lineal $f_i = \pi_i \circ T$ $(1 \leq i \leq N)$. Para todo $x \in X$, se tiene que $|f_i(x)| \leq \|Tx\|_\infty \leq \|x\|$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y, para $1 \leq i \leq N$, sea $A_i = \{x \in B : |f_i(x)| \leq \varepsilon\}$. Usando la inclusión

$$\{x \in B : f_i(x) \leq \varepsilon\} \supset \{x \in B : f_i(x) \leq 0\} + \varepsilon B$$

y que, debido a que μ es simétrica, $\mu\{x \in B : f_i(x) \leq 0\} \geq 1/2$, se tiene que

$$\mu(A_i^c) = 2\mu\{x \in B : f_i(x) > \varepsilon\} \leq 2\varphi(\varepsilon)$$

para $1 \leq i \leq N$. Entonces

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^N A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^N \mu(A_i^c) \geq 1 - 2N\varphi(\varepsilon).$$

Por tanto, para cualquier $r \in (0,1)$ tal que $\mu(rB) < 1 - 2N\varphi(\varepsilon)$, se tiene que $\bigcap_{i=1}^N A_i \not\subset rB$, por lo que existe $x \in \bigcap_{i=1}^N A_i$ con $\|x\| > r$. De ahí

$$r < \|x\| \leq d\|Tx\|_\infty \leq d\varepsilon$$

con lo cual si $r \geq d\varepsilon$, entonces $\mu(rB) \geq 1 - 2N\varphi(\varepsilon)$. Como consecuencia

$$\mu(d\varepsilon B) \geq 1 - 2N\varphi(\varepsilon). \qquad \square$$

Una primera consecuencia de esta desigualdad es que ℓ_∞^N no admite concentración con muchas medidas. Es claro que si se considera en B_∞^N la medida de Lebesgue normalizada, y φ es la función de concentración correspondiente, se tiene que $\varphi(\varepsilon) \geq 1/2 - \varepsilon$. En general, se tiene:

COROLARIO 1.4.2. *Sea φ la función de concentración de una probabilidad de Borel μ simétrica definida en B_∞^N. Entonces, para cualquier $0 < \varepsilon < 1$,*

$$\varphi(\varepsilon) \geq \frac{1}{2N}\left(1 - \mu(\varepsilon B_\infty^N)\right).$$

DEMOSTRACIÓN. Basta considerar la identidad en ℓ_∞^N y aplicar el teorema 1.4.1. □

Como segunda consecuencia, se obtiene que en general no es posible probar un resultado que asegure la existencia en cualquier espacio normado de dimensión finita de subespacios X de dimensión proporcional que verifiquen una desigualdad de concentración del tipo

$$\varphi(\varepsilon) \leq a e^{-\psi(\varepsilon)\dim(X)}$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y ψ es una función.

PROPOSICIÓN 1.4.3. *Dados $a > 0$ y $\psi : (0,1) \to (0, +\infty)$, existen $c > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geq n_0$ y X es un subespacio de ℓ_∞^n de dimensión k, tal que la función de concentración φ de la medida de Lebesgue normalizada en la bola de X verifique*

$$\varphi(\varepsilon) \leq a e^{-\psi(\varepsilon)k}$$

entonces

$$k \leq c \log n.$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el teorema 1.4.1 para $\varepsilon = 1/2$ y la inclusión de X en ℓ_∞^n, se obtiene

$$n \geq \frac{1}{2a} e^{\psi(1/2)k}\left(1 - \sigma\left(\frac{1}{2}B\right)\right),$$

o bien

$$n \geq \frac{1}{2a} e^{\psi(1/2)k} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right),$$

luego

$$\log n \geq \psi(1/2)k - \log(4a)$$

y si $4a < n_0$, se tiene

$$2 \log n \geq \psi(1/2)k. \qquad \square$$

Como tercera consecuencia del teorema 1.4.1 podemos deducir, usando el fenómeno de concentración de la medida de Lebesgue en la bola de ℓ_p^n $(1 \leq p \leq 2)$ dado en el teorema 1.3.6, que no existen d-inmersiones de ℓ_p^n en ℓ_∞^N si $N < \frac{1}{4\alpha n} e^{cn/4d^2}$. De esta forma, si definimos como en [La]

$$d_p(N,k) = \inf\left\{\|T\|\,\|T^{-1}\| : T \text{ es un isomorfismo de } \ell_p^{[k \log N]} \text{ en } \ell_\infty^N\right\},$$

para $1 \leq p \leq 2$, se tiene que

$$\liminf_{N \to \infty} d_p(N,k) \geq \frac{\sqrt{\alpha k}}{2}.$$

En efecto, si $d = d_p(N,k)$ y $n = [k \log N]$, aplicando el teorema 1.4.1, para $0 < \varepsilon < 1/d$,

$$N \geq \frac{1}{2\alpha n} e^{c\varepsilon^2 n} \left(1 - (d\varepsilon)^n\right).$$

Tomando $\varepsilon = 1/2d$, queda

$$N \geq \frac{1}{4\alpha n} e^{cn/4d^2}.$$

De ahí se deduce que $4\alpha n N \geq e^{cn/4d^2}$, y por tanto para N grande,

$$3 \log N > \frac{cn}{4d^2},$$

de donde $d > \sqrt{\frac{c}{12} k}$.

Este argumento, más simple que el utilizado en [La], da el orden de crecimiento exacto respecto de k. Para $p = 1$, la mejor cota inferior $\sqrt{\frac{k}{\log 4}}$ se obtiene en [La].

En el siguiente teorema, $B(X)$ y $S(X)$ denotan la bola unidad y la esfera unidad de un espacio normado X.

TEOREMA 1.4.4. *Sea X un espacio normado n-dimensional y σ la medida de Lebesgue normalizada en $B(X)$ con función de concentración φ. Si existe una aplicación $f : S(X) \to S(\ell_\infty^N)$ L-Lipschitz antipodal (i. e., tal que $f(-x) = -f(x)$), entonces, para todo $\varepsilon > 0$ tal que $\varphi(\varepsilon/(2L+1)) > 0$,*

$$N \geq \frac{1-\varepsilon^n}{2\varphi(\varepsilon/(2L+1))}.$$

DEMOSTRACIÓN. Dada $f : S(X) \to S(\ell_\infty^N)$, definimos $F : B(X) \to B(\ell_\infty^N)$ dada por $F(x) = \|x\| f(x/\|x\|)$ si $x \neq 0$ y $F(0) = 0$. Sean $F_1, \ldots, F_N$ las componentes de F. Se tiene que $\|F(x)\|_\infty = \max\limits_{1\ldots N} |F_i(x)| = \|x\|$. Entonces

$$1-\varepsilon^n = \sigma\{\|x\| > \varepsilon\} = \sigma\{\|F\|_\infty > \varepsilon\} = \sigma\left(\bigcup_{i=1}^{N}\{|F_i| > \varepsilon\}\right) \leq 2\sum_{i=1}^{N}\sigma\{F_i > \varepsilon\}. \tag{1.4.1}$$

Las funciones F_i son (2L+1)-Lipchitz, y por ser f antipodal, 0 es una mediana de F_i. Así pues $\sigma\{F_i \leq 0\} \geq 1/2$, y como $\{F_i \leq \varepsilon\} \supset \{F_i \leq 0\} + (\varepsilon/(2L+1))B(X)$, se tiene que $\sigma\{F_i \leq \varepsilon\} \geq 1 - \varphi(\varepsilon/(2L+1))$. Así, de (1.4.1)

$$1-\varepsilon^n \leq 2N\varphi(\varepsilon/(2L+1)).$$ □

5. Concentración de la medida en la esfera

Para terminar el capítulo, veremos una desigualdad de concentración para cierta medida, definida en la esfera de un espacio normado a partir de otra medida definida en la bola del espacio y que disfruta de un fenómeno de concentración.

Dado un espacio normado X, y una probabilidad de Borel definida en la bola unidad B, hay una probabilidad natural asociada definida en la esfera S, dada por

$$\nu(A) = \mu \left\{ x \in B : \frac{x}{\|x\|} \in A \right\} \tag{1.5.1}$$

para cada Borel $A \subset S$. El siguiente resultado muestra que, si μ verifica una desigualdad de concentración, ν también.

TEOREMA 1.5.1. *Sea X un espacio normado n-dimensional, B su bola unidad cerrada, μ una probabilidad de Borel definida en B, φ su función de concentración, y ν la probabilidad de Borel definida en S dada por (1.5.1). Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ y todo Borel $A \subset S$ con $\nu(A) \geq 1/2$,*

$$\nu(A + \varepsilon B) \geq 1 - \inf_{r \in (0,1)} \left(\varphi\left(\frac{r\varepsilon}{2}\right) + \mu(rB) \right).$$

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $r \in (0,1)$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\nu(A + \varepsilon B) = \mu &\left(\left\{ x \in B : \frac{x}{\|x\|} \in A + \varepsilon B \right\} \cap (rB) \right) \\ &+ \mu \left(\left\{ x \in B : \frac{x}{\|x\|} \in A + \varepsilon B \right\} \setminus (rB) \right).\end{aligned}$$

Si $y \in \left(\left\{ x \in B : \frac{x}{\|x\|} \in A \right\} + \frac{r\varepsilon}{2} B \right) \setminus (rB)$, entonces $\|y\| > r$, y para cierto $z \in B$ tal que $\frac{z}{\|z\|} \in A$, se tiene que $\|y - z\| \leq \frac{r\varepsilon}{2}$. Pero entonces

$$\begin{aligned}\left\| \frac{y}{\|y\|} - \frac{z}{\|z\|} \right\| &\leq \frac{\|z\|\|y - z\| + \|z\| \, |\|y\| - \|z\||}{\|z\|\|y\|} \\ &\leq \frac{2\|y - z\|}{\|y\|} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

y por tanto $y \in \left\{ x \in B : \frac{x}{\|x\|} \in A + \varepsilon B \right\} \setminus (rB)$. Eso prueba que

$$\left\{ x \in B : \frac{x}{\|x\|} \in A + \varepsilon B \right\} \setminus (rB) \supset \left(\left\{ x \in B : \frac{x}{\|x\|} \in A \right\} + \frac{r\varepsilon}{2} B \right) \setminus (rB).$$

Como $\nu(A) \geq 1/2$, se tiene $\mu\left\{x \in B : \frac{x}{\|x\|} \in A\right\} \geq 1/2$, de donde se deduce que

$$\begin{aligned}\nu(A+\varepsilon B) &\geq \mu\left(\left\{x \in B : \frac{x}{\|x\|} \in A\right\} + \frac{r\varepsilon}{2}B\right) - \mu(rB)\\ &\geq 1 - \varphi\left(\frac{r\varepsilon}{2}\right) - \mu(rB)\end{aligned}$$

como quería probarse. □

Observación 1.5.2. Si consideramos en B la medida de Lebesgue normalizada σ, y su función de concentración φ verifica

$$\varphi(\varepsilon) \leq Ke^{-\psi(\varepsilon)n} \tag{1.5.2}$$

para cierta constante $K \geq 1$ y cierta función ψ no decreciente para la cual $\psi(\varepsilon)/\varepsilon$ es no decreciente, como ocurre cuando ψ es no decreciente y convexa, o cuando $\psi(\varepsilon) = \delta(\varepsilon)$ es el módulo de convexidad del espacio, entonces el teorema 1.5.1 implica una desigualdad de concentración del mismo orden para ν:

$$\nu(A+\varepsilon B) \geq 1 - 2Ke^{-\psi(c\varepsilon)n},$$

siendo $c = (2(1+\psi(1/2)))^{-1}$. En efecto, si fijamos $\varepsilon \in (0,1)$, se tiene, para todo $r \in (0,1)$

$$e^{-\psi(\varepsilon/2)r} \geq 1 - \psi(\varepsilon/2)r \geq 1 - \psi(1/2)r$$

con lo que $e^{-\psi(\varepsilon/2)r_0} \geq r_0$ si tomamos $r_0 = (1+\psi(1/2))^{-1}$. Pero entonces, usando que $\psi(\varepsilon)/\varepsilon$ es no decreciente y que $r_0 \leq 1$, $\psi(r_0\varepsilon/2) \leq \psi(\varepsilon/2)r_0$, de donde

$$e^{-\psi(r_0\varepsilon/2)n} + r_0^n \leq e^{-\psi(r_0\varepsilon/2)n} + e^{-\psi(\varepsilon/2)r_0 n} \leq 2e^{-\psi(r_0\varepsilon/2)n}.$$

Usando el teorema anterior, se obtiene

$$\nu(A+\varepsilon B) \geq 1 - K\left(\varphi(r_0\varepsilon/2) + r_0^n\right) \geq 1 - 2Ke^{-\psi(r_0\varepsilon/2)n},$$

para $r_0 = (1+\psi(1/2))^{-1}$.

Los teoremas 1.2.1 y 1.3.6 dan desigualdades de concentración del tipo (1.5.2), con lo que se deducen los siguientes resultados para los espacios uniformemente convexos, y para todos los ℓ_p^n con $1 \leq p < \infty$.

COROLARIO 1.5.3. *Sea X un espacio normado n-dimensional uniformemente convexo, B su bola unidad cerrada, σ la medida de Lebesgue normalizada en B y $\delta(\varepsilon)$ el modulo de convexidad de X. Sea ν la probabilidad de Borel definida en S dada por (1.5.1). Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ y todo Borel $A \subset S$ con $\nu(A) \geq 1/2$,*

$$\nu(A + \varepsilon B) \geq 1 - 4e^{-2\delta(c\varepsilon)n},$$

siendo $c = (2(1 + 2\delta(1/2)))^{-1}$. En particular,
(a) si $X = \ell_p^n$ $(1 \leq p < \infty)$, B_p^n su bola unidad cerrada, σ_p la medida de Lebesgue normalizada en B_p^n y ν_p la probabilidad de Borel definida en la esfera S_p^n de ℓ_p^n dada por (1.5.1), se tiene, para ciertas constantes $\alpha_p, \beta_p > 0$

(1) si $1 < p \leq 2$,

$$\nu_p(A + \varepsilon B_p^n) \geq 1 - 4e^{-\alpha_p \varepsilon^2 n}.$$

(2) si $p > 2$,

$$\nu_p(A + \varepsilon B_p^n) \geq 1 - 4e^{-\beta_p \varepsilon^p n}.$$

(b) si $X = \ell_M^n$, B_M^n su bola unidad cerrada, σ_M la medida de Lebesgue normalizada en B_M^n y ν_M la probabilidad de Borel definida en la esfera S_M^n de ℓ_M^n dada por (1.5.1),

(1) si M es una función de Orlicz verificando la condición Δ_2 en el cero y tal que $M(\sqrt{t})$ es una función convexa en $(0, +\infty)$, se tiene, para cierta constante $\gamma_q > 0$

$$\nu_M(A + \varepsilon B_M^n) \geq 1 - 4e^{-\gamma_q \varepsilon^q n},$$

donde $q = q_M^0$ es el coeficiente definido en (1.1.2).

(2) si para cierta $c > 0$ y todos $s, t \in [0, 1]$ se tiene $M(st) \geq cM(s)M(t)$, y $M(\sqrt{t})$ es equivalente a una función convexa, entonces

$$\nu_M(A + \varepsilon B_M^n) \geq 1 - 4e^{-aM(b\varepsilon)n},$$

(c) si $X = d(\omega, p)$, obtenemos que, si $p \geq 2$, y para cierta constante $c > 0$ y todos $k, m \in \mathbb{N}$ se tiene $S(km) \geq cS(k)S(m)$, entonces

$$\nu_{d(\omega,p)}(A + \varepsilon B_{d(\omega,p)}^n) \geq 1 - 4\exp\{-\frac{an}{S^{-1}((b\varepsilon)^{-p})}\},$$

donde la función $S : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *es cualquier función estrictamente creciente tal que*

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k$$

en cada natural n.

COROLARIO 1.5.4. *Sea* $X = \ell_p^n$, *para* $1 \leq p \leq 2$, B_p^n *su bola unidad cerrada,* σ_p *la medida de Lebesgue normalizada en* B_p^n *y* ν_p *la probabilidad de Borel definida en la esfera* S_p^n *de* X *dada por (1.5.1). Para todo* $\varepsilon > 0$ *y todo Borel* $A \subset S_p^n$ *con* $\nu_p(A) \geq 1/2$, *se tiene, para ciertas constantes* $a, b > 0$

$$\nu_p(A + \varepsilon B_p^n) \geq 1 - ane^{-b\varepsilon^2 n}.$$

CAPÍTULO 2

CONCENTRACIÓN DE LA DISTANCIA EN ESPACIOS NORMADOS

Introducción y resultados previos

Sea $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ un espacio normado n-dimensional, $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ su bola unidad cerrada y σ la medida de Lebesgue restringida a B, normalizada para que $\sigma(B) = 1$. Puesto que $\sigma(rB) = r^n$, para n grande, la mayor parte de los puntos de B están cerca de su superficie, o lo que es lo mismo, su norma es casi 1. En este capítulo, nuestro proposito es estudiar el comportamiento de la distancia entre *dos* puntos en la bola.

Este estudio viene motivado por una serie de resultados sobre el número de puntos que se pueden encontrar en ciertos espacios a distancia casi 1 unos de otros. Este problema equivale al estudio de inmersiones casi isométricas del ℓ_∞^N-cubo en espacios normados, y se puede enunciar de forma precisa como sigue: Dado X un espacio normado de dimensión finita, estimar el mayor número $N = N(\varepsilon)$ tal que existen N puntos $x_1, \ldots, x_N \in X$ tales que para todos $i, j \in \{1, \ldots, N\}$, $i \neq j$

$$1 - \varepsilon \leq \|x_i - x_j\| \leq 1 + \varepsilon. \tag{2.0.1}$$

Observación 2.0.1. Mediante un argumento de volumen, puede verse fácilmente que $N(\varepsilon) \leq \exp\{\phi(\varepsilon)n\}$ para cierta función ϕ, independiente del espacio X n-dimensional. En efecto, si $x_1, \ldots, x_N \in X$ verifican (2.0.1), entonces las bolas $x_j + \frac{1-\varepsilon}{2}B$ son disjuntas, y todas ellas están contenidas en la bola $\overline{x} + \frac{3+\varepsilon}{2}B$, donde $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{1\leq i\leq N} x_i$. Por tanto, tomando medida σ, se tiene

$$N\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)^n \leq \left(\frac{3+\varepsilon}{2}\right)^n$$

con lo que

$$N \leq \left(\frac{3+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^n.$$

OBSERVACIÓN 2.0.2. Existen resultados de existencia de puntos casi-equidistantes en espacios normados particulares. Es conocido que, dado $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, es posible elegir N puntos $x_1, \ldots, x_N \in X$ verificando (2.0.1) en los siguientes casos (c indica siempre una constante numérica):

(1) En cualquier espacio normado n-dimensional con base 1-subsimétrica y normalizada, si

$$N < \exp\{c\varepsilon^2 n\}.$$

Recuerdese que una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de un espacio normado X se dice 1-subsimétrica si para cualquier elección de $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$,

$$\left\|\sum_{i=1}^k a_i e_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^k \varepsilon_i a_i e_{j_i}\right\|$$

En los espacios ℓ_p^n, la base canónica es 1-subsimétrica. Así, la estimación anterior es válida, en particular, en todos los espacios ℓ_p^n.

(2) En cualquier espacio normado K-isomorfo a $\ell_p^n(\ell_q^m)$ $(1 \leq p, q < \infty)$, si

$$N < \exp\{c(\varepsilon/K)^{\max\{2,p,q\}} nm\}$$

(3) En cualquier espacio normado n-dimensional con cotipo q, si

$$N < \exp\{cC_q^{-2}\varepsilon^2 n^{2/q}\},$$

siendo C_q la constante de cotipo q de X. Recuerdese que, dado $2 \leq q < \infty$, se dice que un espacio normado X tiene *cotipo* q si existe una constante $C > 0$ tal que para $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_n \in X$, se tiene que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \right\|^2 dt \right)^{1/2} \tag{2.0.2}$$

La constante de cotipo q de X, que denotaremos $C_q(X)$, es la menor de todas las constantes C que verifican (2.0.2).

Es conocido que para $1 \leq p \leq 2$, el espacio ℓ_p^n tiene cotipo 2, y para $q \geq 2$, el espacio ℓ_q^n tiene cotipo q.

(4) En cualquier espacio K-isomorfo al espacio de Orlicz ℓ_M^n, donde M es una función de Orlicz que satisface la condición Δ_2 en cero, si

$$N < \exp\{c(\varepsilon/4K)^{q_\varphi \max\{1, 2/p_\varphi\}} n\}$$

donde p_M y q_M son los coeficientes de Simonenko de M definidos en (1.1.1) (tengase en cuenta que si $q_M \leq 2$, entonces ℓ_M^n es de cotipo 2 y se consigue una desigualdad mejor aplicando (3))

(5) En cualquier espacio K-isomorfo al espacio de Lorenz $d^n(\omega, p)$, con $\omega = (i^{-r})_{i=1}^n$ y $1 \leq p \leq \infty$, si $0 < r < 1$, $q > \frac{p}{1-r}$ y

$$N < \exp\{C_{p,q,r}(\varepsilon/K)^{\max\{2,q\}} n\}$$

Todos estos resultados se demuestran en [Ber]. La prueba de (1) puede encontrarse además en [BBK]; las pruebas de (2) y de (3), en [BB]. Otros resultados relacionados con este problema pueden encontrarse en [BPS1], [BPS2] y [BMW].

Observación 2.0.3. Es posible encontrar N puntos verificando (2.0.1) en cualquier espacio normado n-dimensional, siempre que

$$N \leq \exp\left\{c_1 \varepsilon^2 \exp\left\{c_2(\varepsilon)\sqrt{\log n}\right\}\right\},$$

siendo $c_1 > 0$ una constante absoluta, y $c_2(\varepsilon) > 0$ una constante dependiente de ε. En efecto, el siguiente teorema da una estimación sobre la dimensión de los espacios ℓ_∞^k o ℓ_2^k que son $(1+\varepsilon)$-isomorfos a un subespacio de un espacio normado de dimensión finita.

TEOREMA 2.0.4. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe una constante $C(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo espacio normado n-dimensional X, o bien X contiene un subespacio $(1+\varepsilon)$-isomorfo a ℓ_2^m para cierto m verificando* $\log\log m \geq \frac{1}{2}\log\log n$, *o bien X contiene un subespacio $(1+\varepsilon)$-isomorfo a ℓ_∞^k para cierto k verificando* $\log\log k \geq \frac{1}{2}\log\log n - C(\varepsilon)$.

Este resultado se encuentra en [AM], donde se muestra además que, en un cierto sentido, es el mejor posible. En efecto, si consideramos la familia de espacios $X_n = \ell_{q_n}^n$, siendo $q_n = \sqrt{\log n}$, entonces cualquier subespacio k-dimensional de X_n que sea 2-isomorfo a ℓ_2^k tiene dimensión $k \leq C q_n n^{2/q_n}$, para cierta constante absoluta $C > 0$. Así para n suficientemente grande, $\log\log k \leq \frac{1}{2}\log\log n + 1$. Por otro lado, X_n no contiene copias 2-isomorfas de ℓ_∞^k si $\log\log k \geq \frac{1}{2}\log\log n$.

Usando este resultado, dado un espacio normado n-dimensional X, existe un subespacio Y de X de dimensión m que es $(1+\varepsilon)$-isomorfo a ℓ_2^m, o a ℓ_∞^m, siendo

$$\log\log m \geq \frac{1}{2}\log\log n - C(\varepsilon),$$

para cierta constante $C(\varepsilon) > 0$. Pero entonces, por 2.0.2(1), y ya que tanto ℓ_2^m como ℓ_∞^m poseen base 1-subsimétrica normalizada, es posible encontrar en Y N puntos verificando (2.0.1) siempre que

$$N \leq \exp\{c_1 \varepsilon^2 m\}$$

para cierta constante absoluta $c_1 > 0$.

Esta acotación parece estar muy lejos de ser la mejor posible. De hecho, el teorema 2.0.4 es óptimo para el caso de la familia de espacios $\ell_{q_n}^n$, con $q_n = \sqrt{\log n}$. Sin embargo, para este caso se pueden encontrar una cantidad exponencial de puntos usando 2.0.2(1).

En este capítulo veremos que buenas propiedades de concentración de medidas implican buenos resultados sobre el número de puntos N que se pueden encontrar verificando (2.0.1). Los resultados del capítulo anterior prueban que existen espacios (p. ej. los espacios ℓ_∞^n) en los que este camino no conduce a un resultado satisfactorio.

Por otra parte, según hemos mendionado anteriormente, Bastero, Bernués y Kalton prueban que N es exponencialmente grande en todo espacio con base 1-subsimétrica y normalizada.

Estos dos caminos no se aplican a espacios generales. En un intento de obtener un camino que se aplique con más generalidad pasamos a estudiar la función de distribución de la función distancia $\|x-y\|$ cuando entendemos x e y variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas en la bola unidad de X. Este camino permite obtener una prueba común en una clase de espacios que contiene a ℓ_2^n y ℓ_∞^n: Los espacios con concentración de la distancia. Sin embargo, probamos que este camino tampoco se aplica a todo espacio normado; vemos que, por ejemplo, en el espacio $(\ell_2^n \oplus \ell_\infty^1)_\infty$ la distancia no se concentra.

El resultado más interesante a que nos ha llevado este estudio no se refiere directamente al problema anterior. Se trata del teorema 2.3.1, donde se prueba que la probabilidad de que la distancia entre dos puntos de la bola unidad sea mayor que $\sqrt{2}(1-\varepsilon)$ decrece exponencialmente con la dimensión, independientemente del espacio.

Finalmente, mencionar dos problemas relacionados con éste. Se conocen resultados para inmersiones isométricas ($\varepsilon = 0$). En [Pe] se demuestra que $\min\{4, n+1\} \leq N \leq 2^n$, y más aún, $N = 2^n$ si y sólo si $X = \ell_\infty^n$.

Por último, existen versiones infinito-dimensionales del problema. En [EO] se prueba:

TEOREMA 2.0.5. *En todo espacio normado X de dimensión infinita existe un número $\varepsilon > 0$ y un conjunto infinito $\{x_n\}$ de puntos en la esfera del espacio, de forma que para todo $n \neq m$, $\|x_n - x_m\| \geq 1+\varepsilon$.*

Como en ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ cualquier conjunto infinito en la esfera no puede estar separado más de $2^{1/p}$ (ver [BRR]), el teorema no puede ser mejorado. Una versión finito-dimensional de este resultado, en esencia más fuerte que el anterior, la veremos en la tercera sección del capítulo.

1. Preliminares

Este capítulo es, en cierta forma, una continuación del anterior, por lo que usaremos la notación y los preliminares de aquél. Tan sólo añadimos aquí el siguiente resultado, que será usado en la demostración del teorema 2.3.1.

Desigualdad de Young. Dadas dos funciones de Borel $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se define la *convolución* de f y g como

$$f * g(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t-x)g(x)dx$$

para $t \in \mathbb{R}^n$, siempre que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(t-x)g(x)|dx < \infty.$$

Como consecuencia de la desigualdad clásica de Hölder para el producto de funciones, se obtiene la desigualdad de Young para la convolución

$$\|f * g\|_s \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

para $p, q, s \geq 1$ con $1/p + 1/q = 1 + 1/s$, y para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Esta desigualdad puede escribirse equivalentemente en la forma

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y-x)g(x)h(y)dx\,dy \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r$$

donde $1/p + 1/q + 1/r = 2$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ y $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$. La mejor constante en esta desigualdad, a diferencia de la desigualdad de Hölder, no es la unidad, y fue encontrada simultáneamente por Beckner [Be] y por Brascamp y Lieb [BL]. Recientemente, F. Barthe [Bar] ha dado una nueva demostración muy elegante de esta desigualdad. Aquí la damos en la forma en la que la usaremos en la sección 3.

TEOREMA 2.1.1. *Para todos $p, q, r \geq 1$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2$, existe una constante $C(p, q, r; n) > 0$ tal que para cualesquiera funciones $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ y $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$, se tiene*

$$|f * g * h(0)| \leq C(p, q, r; n)\|f\|_p\|g\|_q\|h\|_r \tag{2.1.1}$$

donde la mejor constante $C(p, q, r; n)$ es igual a $(C_p C_q C_r)^n$, siendo

$$C_p^2 = p^{1/p} p'^{-1/p'}$$

(p' es el exponente conjugado de p). Más aún, la igualdad en (2.1.1) se da para ciertas f, g, h de la forma $\exp\{-a|x|^2\}$ $(a > 0)$.

2. Función de distribución de la distancia entre dos puntos

Respecto del problema de los puntos casi-equidistantes, los resultados en cada uno de los trabajos anteriores basan su demostración en el estudio de variables aleatorias con valores en el espacio de Banach; la idea subyacente es que dos vectores aleatorios independientes estarán, con una alta probabilidad, a distancia casi fija uno del otro. Nosotros aquí consideraremos como espacio de probabilidad la bola unidad con la medida de Lebesgue normalizada, y estudiaremos directamente la función de distribución de la función distancia entre dos puntos independientes.

Dado $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ un espacio normado n-dimensional sea $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ su bola unidad cerrada y σ la medida de Lebesgue restringida a B, normalizada para que $\sigma(B) = 1$. Para estudiar el comportamiento de la distancia de dos vectores aleatorios independientes en la bola del espacio, examinemos la función de distribución correspondiente a la variable aleatoria $\|x - y\|$ $(x, y \in B)$,

$$F(t) = \sigma \otimes \sigma\{(x, y) \in B \times B : \|x - y\| \leq t\}. \tag{2.2.1}$$

Si para cierto $\varepsilon > 0$, existe un número $a \in (0, 2]$ y un número $\delta > 0$ tal que

$$F(a(1 + \varepsilon)) - F(a(1 - \varepsilon)) \geq 1 - \delta,$$

entonces es posible encontrar N puntos $x_1, \ldots, x_N$ en B de forma que los puntos $a^{-1}x_1, \ldots, a^{-1}x_N$ verifiquen (2.0.1), siempre que $\binom{N}{2}\delta < 1$. En efecto, basta tener en cuenta que entonces el conjunto

$$\{(x_1, \ldots, x_N) \in B \times \overset{(N)}{\cdots} \times B : a(1-\varepsilon) \leq \|x_i - x_j\| \leq a(1+\varepsilon) \text{ para todo } i \neq j\}$$

tiene medida $\sigma \otimes \overset{(N)}{\cdots} \otimes \sigma$ positiva, ya que es

$$\begin{aligned} &\geq 1 - \binom{N}{2}\left(1 - \sigma \otimes \sigma\{(x,y) \in B \times B : a(1-\varepsilon) \leq \|x-y\| \leq a(1+\varepsilon)\}\right) \\ &\geq 1 - \binom{N}{2}\delta > 0. \end{aligned}$$

A la vista de esto, llamaremos *función de concentración de la distancia en torno a un valor* $a \in (0,2]$ a la función

$$H(a,\varepsilon) = 1 - (F(a(1+\varepsilon)) - F(a(1-\varepsilon))). \tag{2.2.2}$$

Dada una familia de espacios normados X_n, diremos que en dicha familia *la distancia se concentra en torno a la sucesión* (a_n) ($a_n \in (0,2]$) si para cada $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} H_n(a_n, \varepsilon) = 0,$$

siendo H_n la función de concentración de la distancia en torno a a_n correspondiente al espacio X_n definida en (2.2.2), y diremos que en dicha familia *la distancia se concentra exponencialmente en torno a* (a_n) si existen constantes $c_1, c_2 > 0$ y una función $\psi : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $\varepsilon > 0$

$$H_n(a_n,\varepsilon) < c_1 \exp\{-c_2\psi(\varepsilon)n\}.$$

Debido a que si $0 < a < b \leq 2$ y $0 < \varepsilon < \dfrac{b-a}{4}$, se tiene que

$$H(a,\varepsilon) + H(b,\varepsilon) \geq 1,$$

(ya que entonces $a(1+\varepsilon) < b(1-\varepsilon)$), si en una familia de espacios normados la distancia se concentra en torno a dos sucesiones (a_n) y (b_n), entonces

$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $H(a_n, \varepsilon) < 1/2$ y $H(b_n, \varepsilon) < 1/2$. Pero entonces $|a_n - b_n| \leq 4\varepsilon$. En consecuencia, si la la distancia se concentra en torno a una sucesión constante, todas las sucesiones en torno a la cual se concentra tienen límite común. Diremos entonces que la distancia se concentra en torno a dicho valor.

Observación 2.2.1. Según hemos visto anteriormente, dada una familia de espacios X_n y una sucesión (a_n), en cada X_n es posible encontrar N puntos verificando (2.0.1) siempre que

$$N^2 \leq \frac{2}{H_n(a_n, \varepsilon)}.$$

Por tanto, si en la familia de espacios X_n la distancia se concentra exponencialmente en torno a una sucesión, es posible encontrar N puntos verificando (2.0.1) siempre que

$$N^2 \leq \frac{2}{c_1} \exp\{c_2 \psi(\varepsilon) n\}.$$

Los ejemplos 1 y 2 siguientes muestran dos familias de espacios, ℓ_2^n y ℓ_∞^n, donde la distancia se concentra exponencialmente en torno a un valor, calculándose incluso dicho valor. En el ejemplo 3 se muestra una familia de espacios donde la distancia no se concentra.

Geométricamente, cuando la distancia se concentra alrededor de un valor, la distancia entre la mayor parte de las parejas en la bola del espacio X_n, para n suficientemente grande, oscila poco con respecto a una cantidad fija, y que por tanto, la mayoría de los puntos de la bola están a distancia casi fija unos de otros.

Previo al estudio del comportamiento de la función F en espacios particulares, vamos a obtener una expresión más cómoda de dicha función. La notación $[P(x)]$ indicará 1 si la relación $P(x)$ es cierta y 0 en caso contrario. Así, podemos escribir

$$F(t) = \frac{1}{\mathrm{m}(B)^2} \int_{\mathbb{R}^{2n}} [x \in B][y \in B][x - y \in tB]\, dx\, dy,$$

donde m denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y B la bola unidad para una norma en $\mathbb{R}^n$. Haciendo el cambio de variables $u = (x-y)/2$, $v = (x+y)/2$, tenemos que $dx\,dy = 2^n du\,dv$, y por tanto, aplicando el teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
F(t) &= \frac{2^n}{\mathrm{m}(B)^2}\int_{\mathbb{R}^{2n}}[u+v\in 2B][v-u\in 2B][2u\in tB]\,du\,dv\\
&= \frac{2^n}{\mathrm{m}(B)}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\mathrm{m}((-u+B)\cap(u+B))}{\mathrm{m}(B)}[2u\in tB]\,du\\
&= \frac{2^n}{\mathrm{m}(B)}\int_{\mathbb{R}^n}\sigma(2u+B)[2u\in tB]\,du\\
&= \frac{1}{\mathrm{m}(B)}\int_{tB}\sigma(u+B)\,du
\end{aligned}$$

EJEMPLOS 2.2.2. (1) Sea $X_n = \ell_2^n$. Para cada $u \in 2B$, por el teorema de Fubini, podemos poner

$$\sigma(u+B) = \frac{2}{v_n}\int_{r/2}^{1} v_{n-1}(1-s^2)^{\frac{n-1}{2}}\,ds,$$

siendo $r = \|u\|$ y v_n la medida de Lebesgue de la bola unidad de ℓ_2^n. Usando coordenadas polares, y cambiando el orden de integración,

$$\begin{aligned}
F_n^{(2)}(t) =&\frac{2nv_{n-1}}{v_n}\int_0^t r^{n-1}\left(\int_{r/2}^{1}(1-s^2)^{\frac{n-1}{2}}\,ds\right)dr\\
=&\frac{2v_{n-1}}{v_n}\left[\int_0^{t/2}(2s)^n(1-s^2)^{\frac{n-1}{2}}\,ds + t^n\int_{t/2}^{1}(1-s^2)^{\frac{n-1}{2}}\,ds\right]
\end{aligned}$$

Suponemos $n \geq 2$. Ahora, para $t < \sqrt{2}$, haciendo el cambio $u = \sqrt{n-1}(1-2s^2)$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_0^{t/2}(2s)^n(1-s^2)^{\frac{n-1}{2}}\,ds &= \frac{1}{2\sqrt{n-1}}\int_{\sqrt{n-1}(1-t^2/2)}^{\sqrt{n-1}}\left(1-\frac{u^2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}du\\
&\leq \frac{1}{2\sqrt{n-1}}\int_{\sqrt{n-1}(1-t^2/2)}^{+\infty}\exp(-u^2/2)du\\
&\leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2(n-1)}}\exp\left\{-\frac{n-1}{2}(1-t^2/2)^2\right\},
\end{aligned}$$

y haciendo el cambio $u = \sqrt{n-1}\,ts$,

$$\begin{aligned} t^n \int_{t/2}^1 (1-s^2)^{\frac{n-1}{2}} ds &\le t \int_{t/2}^1 \exp\left\{-\frac{n-1}{2}(1-t^2(1-s^2))\right\} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{n-1}} \exp\left\{\frac{n-1}{2}(t^2-1)\right\} \int_{t^2\sqrt{n-1}/2}^{t\sqrt{n-1}} \exp(-u^2/2) du \\ &\le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{n-1}} \exp\left\{-\frac{n-1}{2}(1-t^2/2)^2\right\}, \end{aligned}$$

de forma que para $t < \sqrt{2}$, (nótese que $\dfrac{v_n}{2v_{n-1}} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t dt \ge \frac{1}{\sqrt{n}}$; ver, p. ej. [MS, p.5])

$$F_n^{(2)}(t) \le \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \exp\left\{-\frac{n-1}{2}(1-t^2/2)^2\right\}$$

con lo que si $\varepsilon < 1$ y $t = \sqrt{2}(1-\varepsilon)$, obtenemos

$$F_n^{(2)}(\sqrt{2}(1-\varepsilon)) \le \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \exp\left\{-\frac{n-1}{2}\varepsilon^2\right\}$$

Por otra parte, si $t > \sqrt{2}$, haciendo $u = \sqrt{n-1}(2s^2-1)$,

$$\begin{aligned} F_n^{(2)}(t) &\ge \frac{2v_{n-1}}{v_n} \int_0^{t/2} (2s)^n (1-s^2)^{\frac{n-1}{2}} ds \\ &= 1 - \frac{2v_{n-1}}{v_n} \int_{t/2}^1 (2s)^n (1-s^2)^{\frac{n-1}{2}} ds \\ &= 1 - \frac{v_{n-1}}{v_n\sqrt{n-1}} \int_{\sqrt{n-1}(t^2/2-1)}^{\sqrt{n-1}} \left(1-\frac{u^2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} du \\ &\ge 1 - \frac{v_{n-1}}{v_n\sqrt{n-1}} \int_{\sqrt{n-1}(t^2/2-1)}^{+\infty} \exp(-u^2/2) du \\ &\ge 1 - \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \exp\left\{-\frac{n-1}{2}(t^2/2-1)^2\right\}, \end{aligned}$$

con lo que si $t = \sqrt{2}(1+\varepsilon)$,

$$F_n^{(2)}(\sqrt{2}(1+\varepsilon)) \ge 1 - \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \exp\left\{-\frac{n-1}{2}\varepsilon^2\right\},$$

y por tanto en la familia de espacios euclídeos ℓ_2^n la distancia se concentra alrededor de $a = \sqrt{2}$.

(2) Si $X_n = \ell_\infty^n$, para $0 \leq t \leq 2$,

$$F_n^{(\infty)}(t) = \frac{1}{4^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} [x \in B][y \in B][x - y \in tB]\, dx\, dy$$

donde la integral de arriba coincide con la medida en $\mathbb{R}^2$ del conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1,\ |y| \leq 1,\ |x - y| \leq t\}$ elevada a n, es decir, para $0 \leq t \leq 2$,

$$F_n^{(\infty)}(t) = \left(\frac{t(4-t)}{4}\right)^n.$$

Así, se tiene que

$$F_n^{(\infty)}(2(1+\varepsilon)) - F_n^{(\infty)}(2(1-\varepsilon)) = 1 - (1-\varepsilon^2)^n \geq 1 - \exp\{-n\varepsilon^2\},$$

y por tanto, en la familia ℓ_∞^n la distancia se concentra en torno al valor $a = 2$.

(3) Sea $X_n = (\ell_2^n \oplus \ell_\infty^1)_\infty = (\mathbb{R}^{n+1}, \|\cdot\|)$, donde

$$\|(x, y)\| = \sup\{\|x\|_2, |y|\}, \qquad x \in \ell_2^n,\ y \in \ell_\infty^1$$

En este caso, $F_{n+1}(t) = F_n^{(2)}(t) F_1^{(\infty)}(t)$, siendo $F_n^{(2)}$ y $F_1^{(\infty)}$ las funciones de distribución correspondientes a ℓ_2^n y ℓ_∞^1 definidas por (2.2.1), respectivamente. Veamos que X_n no tiene concentración de la distancia en torno a ninguna sucesión (a_n) de $(0, 2]$. En efecto, fijemos $\delta > 0$ tal que $\sqrt{2}(1+\delta)^2 < 2$, y sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que $\varepsilon < \delta$ y $(1+\delta)(1-\varepsilon) > 1 + \delta/2$. Entonces, si $a \leq \sqrt{2}(1+\delta)$, se tiene que

$$F_{n+1}(a(1+\varepsilon)) - F_{n+1}(a(1-\varepsilon)) \leq F_1^{(\infty)}(\sqrt{2}(1+\varepsilon)) < 1,$$

y si $a > \sqrt{2}(1+\delta)$, entonces

$$F_{n+1}(a(1+\varepsilon)) - F_{n+1}(a(1-\varepsilon)) \leq F_1^{(\infty)}(a(1+\varepsilon)) - F_1^{(\infty)}(a(1-\varepsilon)) F_n^{(2)}(a(1-\varepsilon))$$

y como $a(1-\varepsilon) > \sqrt{2}(1+\delta)(1-\varepsilon) > \sqrt{2}(1+\delta/2)$,

$$\begin{aligned}
&\leq F_1^{(\infty)}(a(1+\varepsilon)) - F_1^{(\infty)}(a(1-\varepsilon))\left(1 - \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\exp\left\{-\frac{n-1}{8}\delta^2\right\}\right)\\
&\leq 1 - F_1^{(\infty)}(\sqrt{2}(1+\delta/2)) + \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\exp\left\{-\frac{n-1}{8}\delta^2\right\}\\
&< b
\end{aligned}$$

para cierto número fijo $b < 1$ y para n suficientemente grande.

En general no es fácil el cálculo de la función F, ni siquiera en los espacios clásicos ℓ_p^n. Como veremos más adelante, sabemos que en ellos la distancia se concentra en torno a una, aunque no sabemos en torno a qué valor o sucesión se concentra (salvo en los casos ya estudiados ℓ_2^n y ℓ_∞^n, y el caso ℓ_1^n que veremos más adelante en 2.4.3).

En el resto de la sección vamos a ver que para una clase de espacios que contiene a ℓ_∞^n y ℓ_2^n se tiene concentración de la distancia con constantes absolutas.

De las expresiones de la función de distribución de la distancia que hemos visto se deduce que

$$F(t) = \frac{1}{\mathrm{m}(B)^2}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{m}\Big(\Big(\frac{u}{2}+B\Big)\cap\Big(-\frac{u}{2}+B\Big)\Big)[u\in tB]\,du = \frac{1}{\mathrm{m}(B)}\int_{tB} H(u)^n\,du,$$

siendo $H\colon 2B \to \mathbb{R}$ dada por

$$H(u)^n = \mathrm{m}(B)^{-1}\mathrm{m}\Big(\Big(\frac{u}{2}+B\Big)\cap\Big(-\frac{u}{2}+B\Big)\Big).$$

Consideramos el convexo

$$K = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \mid x\in 2B, y\in\Big(\frac{x}{2}+B\Big)\cap\Big(-\frac{x}{2}+B\Big)\Big\}.$$

La familia de convexos $\{K_u : u\in 2B\}$, siendo K_u la sección de K por u, es una familia cóncava, es decir, si u_0, $u_1\in 2B$, $\theta\in(0,1)$ y $u_\theta = (1-\theta)u_0 + \theta u_1$, entonces

$$(1-\theta)K_{u_0} + \theta K_{u_1} \subset K_{u_\theta}.$$

La desigualdad de Brunn-Minkowski 1.1.2 aplicada a esta familia muestra que H es una función cóncava.

Es fácil ver que la aplicación de $S \times [0, +\infty]$ en $\mathbb{R}^n$ que aplica cada (ξ, s) en $s\xi$ transforma la medida producto $\nu \otimes \mu$ en $\mathrm{m}(B)^{-1}\mathrm{m}$, siendo ν la medida sobre S definida en (1.5.1) y μ es la medida definida en los Borel de $[0, +\infty)$ con densidad nt^{n-1} respecto de la medida de Lebesgue de $[0, +\infty)$. Usando esta expresión de la medida, podemos escribir

$$F(t) = \int_0^t ns^{n-1} \int_S H(s\xi)^n \, d\nu(\xi) \, ds = \int_0^t ns^{n-1} h(s)^n \, ds,$$

siendo

$$h(s)^n = \int_S H(s\xi)^n \, d\nu(\xi), \qquad 0 \leq s \leq 2.$$

La familia de los espacios que consideraremos es aquella formada por los espacios en que la función $h\colon [0,2] \to [0,1]$ es cóncava.

La demostración de que en estos espacios se tiene concentración de la distancia con constantes absolutas es consecuencia del siguiente teorema

TEOREMA 2.2.3. *Existe un natural n_0 tal que para todo $\varepsilon \in (0, 1/2)$ y para toda función cóncava $h\colon [0,2] \to [0,1]$, con $h(0) = 1$, $h(2) = 0$, y $n \geq n_0$, existe $\alpha \in [1/2, 2]$ tal que*

$$\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} nt^{n-1} h(t)^n \, dt \geq \left(1 - 12\sqrt{n}\exp(-\varepsilon^2 n/8)\right) \int_0^2 nt^{n-1} h(t)^n \, dt.$$

DEMOSTRACIÓN. Usando un argumento de aproximación podemos, sin perder generalidad, suponer que h es dos veces diferenciable con continuidad. Pongamos $g(t) = t^{1-1/n} h(t)$. g es una función continua, $g(0) = g(2) = 0$, y $g(t) > 0$ para cada $t \in (0, 2)$. La función g es dos veces diferenciable en $(0, 2)$ y

$$g'(t) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) t^{-1/n} h(t) + t^{1-1/n} h'(t).$$

$$g''(t) = -\frac{1}{n}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)t^{-(1+1/n)}h(t) + 2\Big(1-\frac{1}{n}\Big)t^{-1/n}h'(t) + t^{1-1/n}h''(t).$$

Puesto que $h: [0,2] \to [0,1]$ es concava y $h(0) = 1$, h is decreciente. Se sigue fácilmente que $g''(t) < 0$ para cada $t \in (0,2)$. Por tanto g es una función cóncava.

Por el teorema de Rolle, existe $\alpha \in (0,2)$ tal que $g'(\alpha) = 0$. Este valor α es único ya que $g''(t) < 0$ en $(0,2)$. Tenemos

$$\Big(1-\frac{1}{n}\Big)h(\alpha) = -\alpha h'(\alpha).$$

La concavidad de h implica que $h(t) \le h(\alpha) + h'(\alpha)(t-\alpha)$. Por tanto

$$h(t) \le h(\alpha)[1-(1-1/n)\alpha^{-1}(t-\alpha)]. \tag{2.2.3}$$

(Tomando $t = 2$ se deduce $\alpha \ge (2n-2)/(2n-1) > 1/2$, por tanto $\alpha - \varepsilon > 0$).

Análogamente, $t^{1-1/n}$ es cóncava y

$$t^{1-1/n} \le \alpha^{1-1/n}\big[1+(1-1/n)\alpha^{-1}(t-\alpha)\big]. \tag{2.2.4}$$

Multiplicando (2.2.3) y (2.2.4), se obtiene

$$g(t) \le g(\alpha)\Big[1-\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^2\frac{(t-\alpha)^2}{\alpha^2}\Big] \le g(\alpha)\exp\Big(-(1-1/n)^2\frac{(t-\alpha)^2}{\alpha^2}\Big).$$

Por abreviar la notación ponemos

$$I = \int_0^2 ng(t)^n\,dt = \int_0^2 nt^{n-1}h(t)^n\,dt.$$

Entonces, para cada $0 < \varepsilon < \alpha$ obtenemos

$$I - \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} nt^{n-1}h(t)^n\,dt \le ng(\alpha)^n \int_{\mathbb{R}\setminus(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)} \exp\Big(-(1-1/n)^2\frac{(t-\alpha)^2}{\alpha^2}n\Big)\,dt$$

lo que puede escribirse

$$\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} nt^{n-1}h(t)^n\,dt \ge I - 2ng(\alpha)^n \int_{\varepsilon}^{+\infty} \exp\Big(-(1-1/n)^2\frac{nx^2}{\alpha^2}\Big)\,dx.$$

Cambiando variables, vemos que

$$\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} nt^{n-1}h(t)^n\,dt \geq I - \sqrt{2}ng(\alpha)^n\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\int_{(1-1/n)\alpha^{-1}\sqrt{2n}\varepsilon} e^{-y^2/2}\,dy.$$

Usando $\alpha < 2$, $n \geq 4$, vemos

$$\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} nt^{n-1}h(t)^n\,dt \geq I - 4\sqrt{n}g(\alpha)^n\int_{(\varepsilon/2)\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-y^2/2}\,dy.$$

Ahora $g(0) = g(2) = 0$ y el hecho que g sea cóncava implican que si $0 < \delta < g(\alpha)$ existe un intervalo J de longitud $2\delta/g(\alpha)$ tal que $g(t) > g(\alpha) - \delta$ para cada $t \in J$. Entonces tenemos

$$I = \int_0^2 ng(t)^n\,dt \geq n(g(\alpha)-\delta)^n\frac{2\delta}{g(\alpha)}.$$

tomando $\delta = \theta g(\alpha)$, llegamos a

$$g(\alpha)^n \leq (1-\theta)^{-n}\frac{I}{2\theta n}.$$

Escogemos ahora $\theta = 1/n$ y deducimos que $g(\alpha)^n \leq (1-1/n)^{-n}(I/2) \leq 2I$. Por tanto

$$\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} nt^{n-1}h(t)^n\,dt \geq I\Big(1 - 8\sqrt{n}\int_{(\varepsilon/2)\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-y^2/2}\,dy\Big).$$

Teniendo en cuenta que

$$8\sqrt{n}\int_{(\varepsilon/2)\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-y^2/2}\,dy < 4\sqrt{2\pi n}e^{-\varepsilon^2 n/8} < 12\sqrt{n}e^{-\varepsilon^2 n/8}. \qquad \square$$

Sea (X_n) una sucesión de espacios normados, X_n de dimensión n tal que las funciones h_n correspondientes sean cóncavas. Vemos que, por la relación de h_n con F_n, se tiene

$$\int_0^2 nt^{n-1}h_n(t)^n\,dt = 1.$$

Con las notaciones del teorema, tenemos por tanto

$$F_n(\alpha_n+\varepsilon) - F(\alpha_n-\varepsilon) \geq 1 - 12\sqrt{n}\exp(-\varepsilon^2 n/8).$$

Como $\alpha > 1/2$ se deduce que la distancia se concentra en torno a la sucesión (a_n).

Un cálculo simple, partiendo de las expresiones que hemos dado para $F_n^{(\infty)}$ y $F_n^{(2)}$ permite ver que las funciones h_n correspondientes son cóncavas.

Naturalmente la sucesión de espacios $(\ell_2^n \oplus \ell_\infty^1)_\infty$, no cumplen para n grande que las funciones h_n sean cóncavas.

3. Grandes distancias en la bola de un espacio normado

En esta sección veremos que la distancia entre "la mayor parte" de los puntos en la bola unidad de cualquier espacio normado de dimensión finita es mayor que $\sqrt{2}(1-\varepsilon)$. Concretamente, veremos que

$$F(\sqrt{2}(1-\varepsilon)) < \exp\left(\frac{-n\varepsilon^2(2-\varepsilon)^2}{2}\right).$$

Así, en particular, si en una familia de espacios la distancia se concentra alrededor de una sucesión (a_n), entonces

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \geq \sqrt{2}.$$

En efecto, si $a < \sqrt{2}$ y $0 < \varepsilon < \dfrac{\sqrt{2}-a}{4}$, entonces $a(1+\varepsilon) < \sqrt{2}(1-\varepsilon)$, y así

$$F(a(1+\varepsilon)) - F(a(1-\varepsilon)) \leq F(\sqrt{2}(1-\varepsilon)) < \exp\left(\frac{-n\varepsilon^2(2-\varepsilon)^2}{2}\right).$$

Ahora bien, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$H_n(a_n, \varepsilon) < 1/2 \qquad \text{y} \qquad \exp\left(\frac{-n\varepsilon^2(2-\varepsilon)^2}{2}\right) < 1/2,$$

con lo que si $n \geq n_0$, o bien $a_n \geq \sqrt{2}$, o bien $0 < \sqrt{2} - a_n \leq 4\varepsilon$.

Este resultado es el mejor posible en este sentido, ya que en la familia de espacios euclídeos ℓ_2^n, se produce la concentración de la distancia en $\sqrt{2}$.

TEOREMA 2.3.1. *Sea X un espacio normado de dimensión n y B su bola unidad cerrada. Sea σ la medida de Lebesgue en B, de modo que $\sigma(B) = 1$. Entonces, para todo $0 < t < \sqrt{2}$*

$$\sigma \otimes \sigma\{(x, y) \in B \times B : \|x - y\| \leq t\} \leq \left(\frac{t^2(4-t^2)}{4}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Si $t = \sqrt{2}(1-\varepsilon)$, la estimación anterior no es mayor que

$$\exp\left\{-\varepsilon^2 n/2\right\}.$$

OBSERVACIONES. (1) Tanto el factor ε^2 en el exponente, como el número $\sqrt{2}$ son los mejores posibles en general, pues esa desigualdad es óptima cuando $X = \ell_2^n$. En efecto, ya hemos visto que en la familia de espacios euclídeos ℓ_n^2 se produce la concentración de la distancia en $\sqrt{2}$. Además

$$F_n^{(2)}(\sqrt{2}(1-\varepsilon)) > \frac{1}{2\sqrt{n}}(1-\varepsilon^2(2-\varepsilon)^2)^{\frac{n}{2}},$$

con lo que el teorema 2.3.1 muestra el "mejor" exponente. Para ver esta desigualdad, tengamos en cuenta que

$$F_n^{(2)}(t) \geq \frac{2v_{n-1}}{v_n} t^n \int_{\frac{t}{2}}^{1} (1-s^2)^{\frac{n-1}{2}} ds$$

y como para $\frac{t}{2} < s < 1$ se tiene que

$$t^2(1-s^2) > t^2\left(1-\frac{t^2}{4}\right)\frac{1-s}{1-t/2},$$

para cualquier s verificando $\frac{t}{2} < s < \frac{t}{2} + \frac{2-t}{2n}$ se tiene que

$$t^2(1-s^2) > \left(1-\frac{1}{n}\right)t^2\left(1-\frac{t^2}{4}\right),$$

con lo que, para n suficientemente grande,

$$\begin{aligned} F_n^{(2)}(\sqrt{2}(1-\varepsilon)) &> \frac{2v_{n-1}}{v_n}\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}+\frac{2-t}{2n}} \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)t^2\left(1-\frac{t^2}{4}\right)\right]^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\, ds \\ &\geq \frac{1}{2\sqrt{n}}(1-\varepsilon^2(2-\varepsilon)^2)^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

(2) El teorema 2.3.1 implica la existencia de N puntos en la bola de cualquier espacio a distancia mayor que $\sqrt{2}(1-\varepsilon)$ unos de otros, siempre que $N < \exp\{\varepsilon^2 n/4\}$. Este hecho fue probado por Bourgain usando descomposición QS (puede encontrarse una prueba en [FL]).

Esta estimación parece, en esencia, más fuerte que la obtenida para los espacios normados de dimensión infinita (teorema 2.0.5), pero, como ya dijimos, este resultado no puede ser mejorado. Así que no es posible aplicar el teorema 2.3.1 para mejorar el teorema 2.0.5.

Demostración. Sea para $t \in [0,2]$,

$$F(t) = \sigma \otimes \sigma\{(x,y) \in B \times B : \|x-y\| \leq t\}.$$

Como ya hemos visto antes, $F(t) = \chi_{tB} * \chi_B * \chi_B(0)$. Según la desigualdad de Young (teorema 2.1.1), para todos $p, q \geq 1$, con $\frac{1}{p} + \frac{2}{q} = 2$, y para cualesquiera funciones $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, se tiene

$$|f * g * g(0)| \leq C(p,q,q;n)\|f\|_p \|g\|_q^2,$$

siendo

$$C(p,q,q;n) = \left[\frac{(2q)^{1/q}}{2}\left(\frac{2}{q}-1\right)^{1/q-1/2}\right]^n.$$

De esta forma

$$\begin{aligned} F(t) = \chi_{tB} * \chi_B * \chi_B(0) &\leq \left[\frac{(2q)^{1/q}}{2}\left(\frac{2}{q}-1\right)^{1/q-1/2}\right]^n \|\chi_{tB}\|_p \|\chi_B\|_q^2 \\ &= \left[t^{2(1-1/q)}\frac{(2q)^{1/q}}{2}\left(\frac{2}{q}-1\right)^{1/q-1/2}\right]^n \end{aligned}$$

para cualquier valor de $q \geq 1$. Teniendo en cuenta que la expresión anterior se minimiza para $q = \frac{4-t^2}{2}$, si $t < \sqrt{2}$ y para $q = 1$ si $t \geq \sqrt{2}$, obtenemos

$$F(t) \leq \left(\frac{t^2(4-t^2)}{4}\right)^{n/2},$$

si $t < \sqrt{2}$ (para $t \geq \sqrt{2}$, sólo se obtiene la desigualdad $F(t) \leq 1$). Por tanto, si $0 < \varepsilon < 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} F(\sqrt{2}(1-\varepsilon)) &\leq \left(\frac{(\sqrt{2}(1-\varepsilon))^2(4-(\sqrt{2}(1-\varepsilon))^2)}{4}\right)^{n/2} \\ &= \left(1-\varepsilon^2\left(2-\varepsilon^2\right)^2\right)^{n/2} \\ &\leq \exp\left\{-\varepsilon^2 n/2\right\}. \quad \square \end{aligned}$$

4. Relación con la concentración de la medida

El siguiente resultado relaciona el fenómeno de concentración de la medida estudiado en el capítulo anterior con la concentración de la distancia definida en la sección 2.

TEOREMA 2.4.1. *Sea X un espacio normado n-dimensional, B su bola unidad y σ la medida de Lebesgue normalizada en B. Sea φ la función de concentración asociada a σ (definida por la fórmula (1.0.2)).*
Entonces existe un número $a \in [1/2, 2]$ de forma que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\sigma \otimes \sigma\{(x,y) \in B \times B : a(1-\varepsilon) \leq \|x-y\| \leq a(1+\varepsilon)\} \geq 1 - 4\varphi(\varepsilon/4),$$

o, usando la notación introducida en (2.2.2),

$$H(a,\varepsilon) \leq 4\varphi(\varepsilon/4).$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $f : B \times B \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \|x - y\|$. Es una función separadamente 1-Lipschitz, con lo que aplicando el teorema 1.0.4,(ii), para todo $\varepsilon > 0$ se tiene

$$\sigma \otimes \sigma\{(x,y) \in B \times B : M - \varepsilon \leq \|x-y\| \leq M + \varepsilon\} \geq 1 - 4\varphi(\varepsilon/2),$$

o bien

$$\sigma \otimes \sigma\{(x,y) \in B \times B : M(1-\varepsilon) \leq \|x-y\| \leq M(1+\varepsilon)\} \geq 1 - 4\varphi(M\varepsilon/2),$$

donde como M puede tomarse una mediana de la función $m : B \to \mathbb{R}$, siendo $m(x)$ la única mediana de la función $f_x : B \to \mathbb{R}$ dada por $f_x(y) = \|x-y\|$. Como $\sigma\{y \in B : \|y-x\| \leq 1/2\} \leq 2^{-n} \leq 1/2$, se tiene que $m(x) \geq 1/2$, y por tanto $M \geq 1/2$. Usando que φ es decreciente, obtenemos

$$\sigma \otimes \sigma\{(x,y) \in B \times B : M(1-\varepsilon) \leq \|x-y\| \leq M(1+\varepsilon)\} \geq 1 - 4\varphi(\varepsilon/4).$$

Basta tomar, pues, $a = M$. □

Observación 2.4.2. En el caso en que la función de concentración φ sea $\varphi(\varepsilon) = K\exp(-\delta\psi(\varepsilon))$, con $\psi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una función de Orlicz verificando la condición Δ_2 en cero, la observación 1.0.7 nos permite obtener la desigualdad

$$\sigma \otimes \sigma\{(x,y) \in B \times B : \mathbb{E}\|x-y\| - \varepsilon \leq \|x-y\| \leq \mathbb{E}\|x-y\| + \varepsilon\}$$
$$\geq 1 - 2(4K+1)\exp(-C\delta\psi(\varepsilon/2)/2)$$

para cierta constante numérica $C > 0$. Por último, es posible estimar inferiormente $\mathbb{E}\|x-y\|$ usando el teorema 2.3.1, ya que allí se obtiene para todo $t < \sqrt{2}$

$$F(t) \leq \left(\frac{t^2(4-t^2)}{4}\right)^{n/2},$$

y por tanto

$$\mathbb{E}\|x-y\| = \int_0^2 (1-F(t))dt \geq \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \left(\frac{t^2(4-t^2)}{4}\right)^{1/2}\right) dt$$
$$= \frac{4(\sqrt{2}-1)}{3} > 1/2,$$

con lo que obtenemos

$$\sigma \otimes \sigma\{(x,y) \in B \times B : \mathbb{E}\|x-y\|(1-\varepsilon) \leq \|x-y\| \leq \mathbb{E}\|x-y\|(1+\varepsilon)\}$$

$$\geq 1 - 2(4K+1)\exp(-C\delta\psi(\varepsilon/4)/2).$$

Por tanto, cuando la función de concentración φ es exponencialmente pequeña, la distancia se concentra en torno a su media.

OBSERVACIÓN 2.4.3. El teorema 2.4.1 puede ser aplicado a la familia de espacios ℓ_1^n, que verifican, por 1.3.6 un fenómeno de concentración de la medida, y deducir que en ella la distancia se concentra. Pero gracias a la observación 2.4.2, podemos saber en torno a qué sucesión lo hace. Un simple cálculo muestra que

$$\mathbb{E}\|x-y\|_1 = \frac{n(3n+1)}{(n+1)(2n+1)}.$$

En efecto, consideremos el símplice $\Delta = \{(t_1,\ldots,t_n) \in (0,1)^n : t_1+\cdots+t_n < 1\}$ y la transformación $\Psi : (0,1) \to \Delta$ dada por las ecuaciones

$$\begin{aligned}
t_1 &= 1 - x^{1/n}\\
t_2 &= x_1^{1/n}(1 - x_2^{1/(n-1)})\\
t_3 &= x_1^{1/n}x_2^{1/(n-1)}(1 - x_3^{1/(n-2)})\\
t_4 &= x_1^{1/n}x_2^{1/(n-1)}x_3^{1/(n-2)}(1 - x_4^{1/(n-3)})\\
&\ldots\\
t_n &= x_1^{1/n}x_2^{1/(n-1)}\ldots x_{n-1}^{1/2}(1-x_n).
\end{aligned}$$

El determinante de esta transformación Ψ es constante ($= 1/n!$). Así, la variable aleatoria $\|x-y\|_1$ ($x, y \in B_1^n$) está igualmente distribuida que

$$\sum_{j=1}^n |\varepsilon_j t_j - \delta_j s_j| \qquad (\varepsilon, \delta \in \{0,1\},\ t, s \in \Delta)$$

donde las variables $\varepsilon, \delta \in \{0,1\}$ son variables de Bernouilli. Pero entonces

$$\mathbb{E}\|x-y\|_1 = \mathbb{E}\sum_{j=1}^n |\varepsilon_j t_j - \delta_j s_j| = n\mathbb{E}|\varepsilon_1 t_1 - \delta_1 s_1|.$$

Usando el cambio de variables dado por Ψ, es posible hacer el cálculo de este número, ya que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\varepsilon_1 t_1 - \delta_1 s_1| &= \mathbb{E}|\varepsilon_1(1-x_1^{1/n}) - \delta_1(1-y_1^{1/n})| \\ &= \frac{1}{2}\int_{[0,1]^2} |x^{1/n} - y^{1/n}|\, dx\, dy + \frac{1}{2}\int_{[0,1]^2} |2 - x^{1/n} - y^{1/n}|\, dx\, dy \\ &= \frac{n(3n+1)}{(n+1)(2n+1)}.\end{aligned}$$

Corolario 2.4.4. *Sea X un espacio normado de dimensión finita, B su bola unidad, y σ la medida de Lebesgue normalizada en B. Sea φ la función de concentración asociada a σ (definida por la fórmula (1.0.2)). Para cada $\varepsilon > 0$ existen N puntos $x_1, \ldots, x_N \in X$ tales que*

$$1 - \varepsilon \leq \|x_i - x_j\| \leq 1 + \varepsilon$$

para $1 \leq i < j \leq N$, siempre que

$$N^2 \leq \frac{1}{2\varphi(\varepsilon/4)}.$$

Observación 2.4.5. Aplicando el corolario 2.4.4 a los espacios clásicos, para cada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar N puntos $x_1, \ldots, x_N \in X$ verificando

$$1 - \varepsilon \leq \|x_i - x_j\| \leq 1 + \varepsilon$$

para $1 \leq i < j \leq N$, en los siguientes casos:

(1) Si X es uniformemente convexo con módulo de convexidad $\delta(\varepsilon)$, siempre que

$$N \leq \frac{1}{2}\exp\{\delta(\varepsilon/4)n\}.$$

(2) Si $X = \ell_p^n$ con $1 < p \leq 2$, siempre que

$$N \leq \frac{1}{2}\exp\{\alpha_p \varepsilon^2 n\}.$$

En 2.0.2(1) se obtiene mejor constante en el exponente, ya que en lugar de α_p aparece una constante absoluta.

(3) Si $X = \ell_p^n$ con $p > 2$, siempre que

$$N \leq \frac{1}{2}\exp\{\alpha_p \varepsilon^p n\}.$$

En 2.0.2(1) se obtiene mejor constante en el exponente (de nuevo independiente de p) y mejor dependencia respecto de ε (exponente 2 en lugar de p).

(4) Si $X = \ell_M^n$, con M una función de Orlicz verificando la condición Δ_2 en cero tal que $M(\sqrt{t})$ es una función convexa en $(0, +\infty)$, y $q = q_M^0$ es el coeficiente definido en (1.1.2), siempre que

$$N \leq \frac{1}{2}\exp\{\beta_q \varepsilon^q n\}.$$

En 2.0.2(4) se obtiene una estimación con peor dependencia respecto de ε, cuando $M(\sqrt{t})$ sea una función convexa en $(0, +\infty)$.

(5) Si $X = \ell_M^n$, de forma que para cierta $c > 0$ y todos $s, t \in [0, 1]$ se tiene $M(st) \geq cM(s)M(t)$, y $M(\sqrt{t})$ es equivalente a una función convexa, siempre que

$$N \leq \frac{1}{2}e^{aM(b\varepsilon)n},$$

(6) Si $X = d(\omega, p)$, con $p \geq 2$, y de forma que, para cierta constante $c > 0$ y todos $k, m \in \mathbb{N}$ se tiene $S(km) \geq cS(k)S(m)$, siempre que

$$N \leq \frac{1}{2}\exp\{\frac{a}{S^{-1}((b\varepsilon)^{-p})}n\},$$

siendo $S : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ cualquier función estrictamente creciente tal que

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k$$

en cada natural n. En particular, si $\omega_k = k^{-r}$, siempre que

$$N \leq \frac{1}{2}\exp\left\{\alpha_{p,r}\varepsilon^{\frac{p}{1-r}} n\right\}$$

para $0 < r < 1$, y siempre que

$$N \leq \frac{1}{2} \exp\left\{a_p e^{-b_p \varepsilon^{-p}} n\right\}$$

para $r = 1$. En 2.0.2(5), la estimación dada para $0 < r < 1$ es peor respecto de ε.

(7) Si $X = \ell_p^n$ con $1 \leq p \leq 2$, siempre que

$$N \leq \frac{a}{\sqrt{n}} \exp\{b\varepsilon^2 n\}.$$

En este caso, se mejora la constante dada en el apartado anterior (2), que ya es independiente de p, aunque aparece un factor $1/\sqrt{n}$. En 2.0.2(1) se obtiene una mejor estimación.

5. Isomorfismos

A continuación, resumimos las cuatro propiedades sobre familias de espacios normados X_n estudiadas en estos dos capítulos. Suponemos que n es la dimensión del espacio X_n.

(A) Los espacios X_n son uniformemente convexos con módulo de convexidad

$$\delta_n(\varepsilon) \geq \delta(\varepsilon).$$

(B) Los espacios X_n admiten concentración de la medida de orden exponencial, es decir, existen constantes $a_1, b_1 > 0$ y una función $\psi_1 : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ tal que la función de concentración φ_n verifica

$$\varphi_n(\varepsilon) \leq a_1 \exp\{-b_1 \psi_1(\varepsilon) n\}.$$

(C) En los espacios X_n la distancia se concentra exponencialmente, es decir, existen constantes $a_2, b_2 > 0$, una función $\psi_2 : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ y una sucesión (a_n) en $(0,2]$ tal que la función de distribución F_n definida en (2.2.1) correspondiente a X_n verifica

$$F_n(a_n(1+\varepsilon)) - F_n(a_n(1-\varepsilon)) > 1 - a_2 \exp\{-b_2\psi_2(\varepsilon)n\}.$$

(D) Los espacios X_n contienen N puntos verificando (2.0.1) siempre que

$$N \leq a_3 \exp\{b_3\psi_3(\varepsilon)n\}.$$

Las relaciones que existen entre ellas son

(A) $\Rightarrow$ (B)	[teorema 1.2.1] ;
(B) $\Rightarrow$ (C)	[teorema 2.4.1] ;
(C) $\Rightarrow$ (D)	[observación 2.2.1] .

Estas propiedades no se mantienen por isomorfismos. Por ejemplo, $(\ell_2^n \oplus \ell_\infty^1)_\infty$ y ℓ_2^{n+1} son $\sqrt{2}$-isomorfos, pero el primero no es uniformemente convexo mientras que el segundo sí lo es. De hecho, incluso, el primero es $(1+\varepsilon)$-isomorfo a un espacio uniformemente convexo (como veremos en 2.5.3). El mismo ejemplo sirve para ver que ni las propiedades (B) ni (C) se conservan por isomorfismos, por muy cercana a uno que sea la constante del isomorfismo (ver ejemplo 2.5.3). No conocemos ningún ejemplo de familia de espacios donde no se verifique la propiedad (D), pero no parece que esa propiedad pueda traspasarse por un isomorfismo, a no ser que éste tenga constante arbitrariamente cercana a uno. Este hecho ocurre, por ejemplo, cuando el espacio en cuestión es isomorfo a un uniformemente convexo. En efecto, arbitrariamente cerca de un espacio isomorfo a un uniformemente convexo puede encontrarse otro que también lo es. La idea de la demostración está tomada de [Li], donde se prueba un resultado más particular. Todo depende del siguiente lema.

LEMA 2.5.1. *Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas sobre un espacio X verificando $\|x\|_2 \leq a\|x\|_1$ para todo $x \in X$. Sea $\delta_1(\varepsilon)$ el módulo de convexidad de X con la norma $\|\cdot\|_1$. Entonces el módulo de convexidad $\delta(\varepsilon)$ de X con la norma $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2$ es*

$$\delta(\varepsilon) \geq \delta_1\left(\frac{\varepsilon}{2(a+1)}\right).$$

Demostración. Sean $x, y \in X$ con $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\|x - y\| \geq \varepsilon$. Supongamos que $\|x\|_1 \geq \|y\|_1$, y sean $\alpha = \frac{\|y\|_1}{\|x\|_1}$ y $z = \alpha x$. Así $\|z\|_1 = \|y\|_1$, $\|z\| = \alpha$ y $\|z - x\| = 1 - \alpha$.

Se tiene que $\|z - y\| \geq \varepsilon/2$, ya que si $\alpha \leq 1 - \varepsilon/2$,

$$\|z - y\| \geq \|y\| - \|z\| = 1 - \alpha \geq \varepsilon/2,$$

y si $\alpha > 1 - \varepsilon/2$

$$\|z - y\| \geq \|y - x\| - \|x - z\| \geq \varepsilon - (1 - \alpha) > \varepsilon/2.$$

Por lo tanto

$$\varepsilon/2 \leq \|z - y\| = \|z - y\|_1 + \|z - y\|_2 \leq (a + 1)\|z - y\|_1,$$

de donde $\|z - y\|_1 \geq \dfrac{\varepsilon}{2(a + 1)}$. Luego entonces

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_1 &\leq \|x - z\|_1 + \|z + y\|_1 \\
&\leq (1 - \alpha)\|x\|_1 + 2\|y\|_1 \left(1 - \delta_1 \left(\frac{\varepsilon}{2(a + 1)\|y\|_1}\right)\right) \\
&= \|x\|_1 + \|y\|_1 - 2\|y\|_1 \delta_1 \left(\frac{\varepsilon}{2(a + 1)\|y\|_1}\right) \\
&\leq \|x\|_1 + \|y\|_1 - 2\delta_1 \left(\frac{\varepsilon}{2(a + 1)}\right),
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado que $\|y\|_1 \leq 1$ y que, por el lema 1.1.1, $\delta(\varepsilon)/\varepsilon$ es no decreciente. Finalmente

$$\begin{aligned}
\|x + y\| &= \|x + y\|_1 + \|x + y\|_2 \\
&\leq \|x\|_1 + \|y\|_1 - 2\delta_1 \left(\frac{\varepsilon}{2(a + 1)}\right) + \|x\|_2 + \|y\|_2 \\
&= \|x\| + \|y\| - 2\delta_1 \left(\frac{\varepsilon}{2(a + 1)}\right)
\end{aligned}$$

con lo que $\delta(\varepsilon) \geq \delta_1 \left(\frac{\varepsilon}{2(a+1)}\right)$. $\square$

Con el lema anterior es posible entonces probar el resultado anunciado.

Corolario 2.5.2. *Sea X_1 un espacio normado uniformemente convexo, con módulo de convexidad $\delta_1(\varepsilon)$, y sea X_2 un espacio C-isomorfo a X_1. Para todo $\theta > 0$ existe un espacio X $(1+\theta)$-isomorfo a X_2, uniformemente convexo, y con módulo de convexidad*

$$\delta(\varepsilon) \geq \delta_1\left(\frac{\varepsilon\theta}{2(C+\theta)}\right).$$

Demostración. Por comodidad en la notación, supondremos que X_1 y X_2 son espacios normados sobre el mismo espacio vectorial, con normas respectivas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$, y tales que $\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$. Por el lema anterior, ya que $\|x\|_2 \leq \frac{C}{\theta}(\theta\|x\|_1)$, la norma $\|x\| = \|x\|_2 + \theta\|x\|_1$ tiene módulo de convexidad

$$\delta(\varepsilon) \geq \delta_1\left(\frac{\varepsilon}{2(C/\theta+1)}\right). \qquad \square$$

El siguiente ejemplo muestra el sorprendente hecho de que las propiedades (B) y (C) antes enunciadas no se transmiten por isomorfismos, ni siquiera para espacios para los que es posible encontrar espacios que cumplen dichas propiedades (incluso uniformemente convexos) que son isomorfos a aquellos con constante arbitrariamente cercana a 1.

Ejemplo 2.5.3. Existe una familia de espacios X_n, cada X_n de dimensión n, que no admite concentración de la distancia, y que sin embargo verifican la siguiente propiedad: para todo $\theta > 0$ existe una sucesión de espacios Y_n, cada Y_n de dimensión n, uniformemente convexo con módulo de convexidad

$$\delta_{Y_n}(\varepsilon) \geq c\varepsilon^2\theta^2$$

siendo $c > 0$ una constante absoluta, y tal que Y_n es $(1+\theta)$-isomorfo a X_n. En particular, en Y_n se produce un fenómeno de concentración de la medida (y en consecuencia de la distancia), siendo la función de concentración

$$\varphi_{Y_n}(\varepsilon) \leq 2\exp\{-c\theta^2\varepsilon^2 n\}.$$

En efecto, basta considerar la sucesión de espacios $X_{n+1} = (\ell_2^n \oplus \ell_\infty^1)_\infty$ (considerados en el ejemplo 2.2.2 (3)). Cada X_{n+1} es $\sqrt{2}$-isomorfo a ℓ_2^{n+1}, y aplicando el corolario 2.5.2, dado $\theta > 0$, existe un espacio Y_{n+1} que es $(1+\theta)$-isomorfo a X_{n+1}, y uniformemente convexo con módulo de convexidad

$$\delta_{Y_{n+1}}(\varepsilon) \geq \delta_{\ell_2^{n+1}}\left(\frac{\varepsilon\theta}{2(\sqrt{2}+\theta)}\right) > c\varepsilon^2\theta^2.$$

Gracias al corolario 2.5.2, vamos a poder traspasar los puntos casi-equidistantes que existen en un espacio uniformemente convexo, usando la observación 2.4.5 (1), a otro espacio isomorfo a aquél.

TEOREMA 2.5.4. *Sea X un espacio normado n-dimensional, C-isomorfo a un espacio uniformemente convexo con módulo de convexidad $\delta(\varepsilon)$. Para cada $\varepsilon \in (0,1)$ existen N puntos $x_1, \ldots, x_N \in X$ tales que*

$$1 - \varepsilon \leq \|x_i - x_j\| \leq 1 + \varepsilon$$

para $1 \leq i < j \leq N$, siempre que

$$N \leq \frac{1}{2}\exp\left\{\delta\left(\frac{a\varepsilon^2}{C}\right)n\right\},$$

siendo $a > 0$ una constante absoluta.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\theta > 0$ a determinar. Por el corolario 2.5.2, existe un espacio X_1 uniformemente convexo, $(1+\theta)$-isomorfo a X, y con módulo de convexidad

$$\delta_1(\varepsilon) \geq \delta\left(\frac{\varepsilon\theta}{2(C+\theta)}\right).$$

Pongamos $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ y $X_1 = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ de forma que

$$\|x\|_1 \leq \|x\| \leq (1+\theta)\|x\|_1.$$

Por el corolario 2.4.4, dado $\varepsilon' > 0$, existen N puntos $x_1, \ldots, x_N \in X$ tales que

$$1 - \varepsilon' \leq \|x_i - x_j\|_1 \leq 1 + \varepsilon'$$

para $1 \leq i < j \leq N$, siempre que

$$N \leq \frac{1}{2} \exp\left\{\delta\left(\frac{\varepsilon'\theta}{8(C+\theta)}\right)n\right\}.$$

Pero entonces, dado $\varepsilon \in (0,1)$, tomando $\varepsilon' = \varepsilon/2$ y $\theta = \varepsilon/3$, encontramos N puntos $x_1, \ldots, x_N \in X$ tales que

$$\|x_i - x_j\| \leq (1+\theta)\|x_i - x_j\|_1 \leq (1+\theta)(1+\varepsilon') \leq 1 + \varepsilon$$

y

$$\|x_i - x_j\| \geq \|x_i - x_j\|_1 \geq 1 - \varepsilon' \geq 1 - \varepsilon$$

siempre que

$$N \leq \frac{1}{2} \exp\left\{\delta\left(\frac{\varepsilon^2}{48(C+\varepsilon/3)}\right)n\right\}. \qquad \square$$

Observación 2.5.5. Aplicando el teorema 2.5.4 junto con la observación 2.4.5, para cada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar N puntos $x_1, \ldots, x_N \in X$ verificando

$$1 - \varepsilon \leq \|x_i - x_j\| \leq 1 + \varepsilon$$

para $1 \leq i < j \leq N$, en los siguientes casos:

(1) Si X es C-isomorfo a ℓ_p^n con $1 < p \leq 2$, siempre que

$$N \leq \frac{1}{2} \exp\left\{a_p \frac{\varepsilon^4}{C^2} n\right\}.$$

En 2.0.2 (2) se obtiene una mejor dependencia respecto de ε, y la misma respecto de C.

(2) Si X es C-isomorfo a ℓ_p^n con $2 < p < \infty$, siempre que

$$N \leq \frac{1}{2} \exp\left\{a_p \frac{\varepsilon^{2p}}{C^p} n\right\}.$$

Igual que en el apartado anterior, en 2.0.2 (2) se obtiene una mejor dependencia respecto de ε, y la misma respecto de C.

(3) Si X es C-isomorfo a ℓ_M^n, con M una función de Orlicz verificando la condición Δ_2 en cero tal que $M(\sqrt{t})$ es una función convexa en $(0,+\infty)$, y $q = q_M^0$ es el coeficiente definido en (1.1.2), siempre que

$$N \leq \frac{1}{2}\exp\left\{b_q \frac{\varepsilon^{2q}}{C^q} n\right\}.$$

En 2.0.2(4) se obtiene una dependencia distinta respecto de ε y peor respecto de C, siempre que $M(\sqrt{t})$ sea una función convexa en $(0,+\infty)$.

(4) Si X es C-isomorfo a ℓ_M^n, con M verificando $M(st) \geq cM(s)M(t)$ para cierta $c > 0$ y para todo $s, t \in [0,1]$, y $M(\sqrt{t})$ equivalente a una función convexa, siempre que

$$N \leq \frac{1}{2}\exp\left\{aM\left(b\frac{\varepsilon^2}{C}\right) n\right\}.$$

(5) Si X es C-isomorfo a $d^n(\omega, p)$, con $p \geq 2$, y (ω_k) una sucesión tal que $S(km) \geq cS(k)S(m)$ para cierta constante $c > 0$ y todos $k, m \in \mathbb{N}$, siempre que

$$N \leq \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{a}{S^{-1}\left(bC^p\varepsilon^{-2p}\right)} n\right\}.$$

donde $S : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ es cualquier función estrictamente creciente tal que

$$S(k) = \sum_{i=1}^{k} \omega_i$$

en cada natural k. En particular, si $\omega_k = k^{-r}$, siempre que

$$N \leq \frac{1}{2}\exp\left\{a_{p,r}\frac{\varepsilon^{\frac{2p}{1-r}}}{C^{\frac{p}{1-r}}} n\right\}$$

para $0 < r < 1$, y siempre que

$$N \leq \frac{1}{2}\exp\left\{a_p e^{-b_p C^p \varepsilon^{-2p}} n\right\}$$

para $r = 1$. En 2.0.2(5), la estimación dada para $0 < r < 1$ es mejor respecto de ε y peor respecto de C.

CAPÍTULO 3

INMERSIONES ISOMÉTRICAS EN ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS

Introducción

Dados dos espacios normados X e Y, una transformación (no necesariamente lineal) $F : X \to Y$ es una *isometría* si

$$\|F(x) - F(y)\| = \|x - y\|$$

para todo $x, y \in X$. Una isometría F que verifique que $F(0) = 0$ y que $F(X) = Y$ se llama una *rotación*. En un trabajo de *Mazur* y *Ulam* [MU] se prueba que toda rotación entre espacios de Banach es lineal.

Sin embargo, si a la isometría no se le exige ser biyectiva, el resultado no es cierto.

EJEMPLO 3.0.1. Sea X el espacio de los números reales $\mathbb{R}$ con la norma del valor absoluto, y sea $Y = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. La aplicación $F : X \to Y$ dada por $F(x) = (x, \operatorname{sen} x)$ es una isometría no lineal.

En condiciones más generales, se tiene el siguiente resultado de Figiel [F1].

TEOREMA 3.0.2. *Sean X e Y dos espacios de Banach, y $F : X \to Y$ una isometría (no necesariamente lineal) tal que $F(0) = 0$. Supongamos que la* *envolvente convexa de $F(X)$ es densa en Y, entonces existe un único operador lineal continuo $U : Y \to X$ tal que la composición $U \circ F$ es la identidad en X. Además U tiene norma uno.*

En la sección 2 probamos que si la isometría toma valores en un espacio de funciones continuas, entonces se puede "linealizar"en algún sentido, de modo que, olvidando las componentes no lineales, la transformación sigue siendo una isometría, y ahora lineal.

No sabemos si esta propiedad que tienen los espacios de funciones continuas, de contener lineal e isométricamente a todos los espacios que contiene isométricamente, es general de todos los espacios de Banach. En la sección 3 veremos algunos casos en los que, a partir de una isometría entre espacios de Banach puede encontrarse otra lineal.

En [Ba, p. 193] se define el concepto de *dimensión lineal* entre espacios de Banach. Dos espacios de Banach se dicen de la misma dimensión lineal cuando cada uno de ellos es isomorfo a un subespacio vectorial del otro. En [BP1] se da una clasificación (no completa) de los espacios de funciones continuas definidas sobre ordinales atendiendo a su dimension lineal. En dicho trabajo se prueba el siguiente teorema.

TEOREMA 3.0.3. *Sean $\alpha \leq \beta < \omega_1$ dos ordinales numerables. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\mathcal{C}(\alpha+1)$ y $\mathcal{C}(\beta+1)$ tienen la misma dimensión lineal;

(b) $\mathcal{C}(\alpha+1)$ y $\mathcal{C}(\beta+1)$ son isomorfos;

(c) o bien β es finito y $\alpha=\beta$, o bien $\omega \leq \alpha \leq \beta < \alpha^\omega$.

De forma análoga, sustituyendo los isomorfismos por isometrías lineales, podemos decir que dos espacios de Banach tienen la misma *dimensión lineal métrica* cuando cada uno de ellos sea linealmente isométrico a un subespacio vectorial del otro, es decir, cuando existan isometrías lineales de X en Y y de Y en X.

En la sección 4 damos una clasificación isométrica completa de los espacios de funciones continuas definidas sobre ordinales, atendiendo a la dimensión lineal métrica. Concretamente, veremos que dos de estos espacios tienen la misma dimensión lineal métrica si y sólo si son linealmente isométricos, es decir, si y sólo si existe una isometría biyectiva de X en Y.

1. Preliminares

Espacios compactos. Un espacio topológico X se llama un *espacio de Hausdorff* si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existen dos abiertos disjuntos $U, V \subset X$ tales que $x \in U$, $y \in V$. Debido a que todos los espacios compactos que consideraremos serán espacios de Hausdorff, escribiremos simplemente espacio compacto para referirnos a un espacio compacto de Hausdorff.

Dado un conjunto X, diremos que una familia $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X tiene la *propiedad de intersección finita* si $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k} \neq \emptyset$ para cualquier conjunto finito $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset I$. El siguiente resultado puede encontrarse en [E, teorema 3.1.1, p. 166].

TEOREMA 3.1.1. *Un espacio de Hausdorff X es compacto si y sólo si cualquier familia de subconjuntos cerrados de X que tenga la propiedad de intersección finita, tiene intersección no vacía.*

Un *conjunto dirigido* es un conjunto Σ dotado de una relación binaria $\leq$ que verifica las siguientes propiedades:

(a) si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$;

(b) para todo $x \in \Sigma$, $x \leq x$;

(c) para todo $x, y \in \Sigma$, existe $z \in \Sigma$ tal que $x \leq z$ e $y \leq z$.

Una *red* en un espacio topológico X es cualquier función definida de un conjunto dirigido en el espacio X. Dado un conjunto dirigido Σ y una red $S = \{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ en X, se dice que $x \in X$ es un *punto de acumulación de la red* S si para todo entorno abierto U de x y todo $\sigma_0 \in \Sigma$, existe $\sigma \geq \sigma_0$ tal que $x_\sigma \in U$.

Se tiene la siguiente caracterización de la compacidad en términos de redes. Una prueba puede encontrarse en [E, teorema 3.1.23, p. 172].

TEOREMA 3.1.2. *Un espacio de Hausdorff X es compacto si y sólo si toda red en X tiene un punto de acumulación.*

Espacio de funciones continuas sobre un compacto. Dado un espacio topológico compacto K, denotaremos por $\mathcal{C}(K)$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas $f : K \to \mathbb{R}$. Dotado de la norma del supremo,

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in K\}$$

es un espacio de Banach.

Dada $f \in \mathcal{C}(K)$ y $L \subset K$, denotaremos por $f_{|L}$ a la función f restringida a L, definida por $f_{|L}(x) = f(x)$ para cada $x \in L$.

El siguiente resultado, debido a Borsuk y Dugundji, puede encontrarse en [Se, teorema 21.1.4, p. 365] en una situación más general. Aquí lo enunciaremos tal y como lo usaremos en la sección 2.

TEOREMA 3.1.3. *Sea L un subconjunto cerrado y no vacío de un espacio topológico compacto y metrizable K. Existe un operador lineal $\Lambda : \mathcal{C}(L) \to \mathcal{C}(K)$ (operador de extensión simultánea) tal que $\|\Lambda\| = 1$ y $(\Lambda f)_{|L} = f$ para cada $f \in \mathcal{C}(L)$. Más aún, $(\Lambda f)(K) \subset co(f(L))$, donde $co(A)$ denota la envolvente convexa de A.*

Números ordinales. En este capítulo usaremos la definición de número ordinal (abreviado *ordinal*) dada por von Neumann, que en una primera aproximación lo define como el conjunto de todos los ordinales que le preceden.

El primer ordinal, *cero*, es el conjunto vacío $0 = \emptyset$. El segundo ordinal es el conjunto con un solo elemento $1 = 0 \cup \{0\} = \{0\}$. El tercer ordinal es $2 = 1 \cup \{1\} = \{0, \{0\}\}$, y así sucesivamente. El primer ordinal infinito es el conjunto de todos los ordinales finitos, es decir

$$\omega = \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}, \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}, \dots\}.$$

El siguiente es $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$, y así sucesivamente. Denotaremos por ω_1 al primer ordinal no numerable.

La clase $\mathbb{T}$ de todos los ordinales es la menor clase que satisface las tres condiciones siguientes:

(1) $0 \in \mathbb{T}$;

(2) si $\alpha \in \mathbb{T}$, entonces $\alpha \cup \{\alpha\} \in \mathbb{T}$;

(3) si $A \subset \mathbb{T}$, entonces $\cup A \in \mathbb{T}$.

Dados dos ordinales $\alpha \neq \beta$, o bien $\alpha \in \beta$ o bien $\beta \in \alpha$. De hecho, $\alpha \in \beta$ si y sólo si $\alpha \subset \beta$. Diremos que α *es menor que* β (escrito $\alpha < \beta$) si $\alpha \in \beta$. Dado un ordinal α, al ordinal $\alpha \cup \{\alpha\}$ se le llama *sucesor* de α, y se denota α^+. No hay ningún ordinal entre α y α^+. Un ordinal β se dice *compacto* si es sucesor de otro, es decir, si existe α tal que $\beta = \alpha^+$; en caso contrario, se dice *no-compacto*. Un ordinal α se dice *finito* si $\alpha \in \omega$; en otro caso, se dice *infinito*. Cualquier conjunto A de ordinales es un conjunto bien ordenado por la relación $\leq$, es decir, cualquier subconjunto $B \subset A$ tiene un elemento mínimo.

En el conjunto $\mathbb{T}$ se define la *suma* de ordinales $\alpha + \beta$, que queda representada mediante el ordinal correspondiente al conjunto ordenado que se forma al colocar β a continuación de α. Es la única operación que verifica las tres propiedades siguientes:

(1) $\alpha + 0 = \alpha$;

(2) $\alpha + \beta^+ = (\alpha + \beta)^+$;

(3) $\alpha + \gamma = \cup_{\beta < \gamma}\, \alpha + \beta$, si γ es un ordinal no compacto.

Así, $\alpha^+ = \alpha + 1$. La suma de ordinales no es conmutativa, ya que por ejemplo, $\omega + 1 \neq 1 + \omega = \omega$. No hay ningún ordinal entre α y $\alpha + 1$. Dados dos ordinales α y β tales que $\alpha \geq \beta$, existe un único ordinal γ tal que $\alpha = \beta + \gamma$; a ese ordinal lo denotaremos por $-\beta + \alpha$. Como consecuencia, la suma tiene la propiedad cancelativa a la izquierda, es decir

$$\alpha + \beta_1 = \alpha + \beta_2 \Longrightarrow \beta_1 = \beta_2$$

pero no a la derecha, ya que $1 + \omega = 0 + \omega$, y sin embargo, $1 \neq 0$.

En $\mathbb{T}$ también puede definirse el *producto* de ordinales $\alpha \cdot \beta$, que queda representado a través del conjunto ordenado que se obtiene al colocar α consecutivamente β veces. Es la única operación que verifica:

(1) $\alpha \cdot 0 = 0$;

(2) $\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$;

(3) $\alpha \cdot \gamma = \cup_{\beta<\gamma} \alpha \cdot \beta$, si γ es un ordinal no compacto.

El producto de ordinales no es conmutativo, puesto que $\omega \cdot 2 = \omega + \omega \neq 2 \cdot \omega = \omega$.

También puede definirse la *exponenciación* de ordinales α^β para $\alpha > 1$, que es la única función que verifica:

(1) $\alpha^0 = 1$;

(2) $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$;

(3) $\alpha^\gamma = \cup_{\beta<\gamma} \alpha^\beta$, si γ es un ordinal no compacto.

Todo ordinal α admite una descomposición única de la forma

$$\alpha = \omega^{\alpha_1} n_1 + \omega^{\alpha_2} n_2 + \cdots + \omega^{\alpha_k} n_k,$$

siendo k y $n_1, \ldots, n_k$ números naturales, y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ una sucesión decreciente de ordinales. A dicha representación se le conoce como la *forma normal de Cantor* del ordinal α

Un ordinal $\alpha > 0$ se dice un *componente primo* si no es la suma de dos ordinales menores que él, esto es, si para todos β, γ,

$$\beta, \gamma < \alpha \Longrightarrow \beta + \gamma < \alpha$$

Así, el único ordinal finito que es un componente primo es el 1. El ordinal ω es también un componente primo ya que la suma de dos menores que él es un ordinal finito. Los ordinales $\alpha + 1$ o $\alpha \cdot 2$ no son componentes primos, para cualquier ordinal $\alpha > 0$. Equivalentemente, α es un componente primo si y sólo si $\alpha = \beta + \gamma$ implica $\alpha = \gamma$, si y sólo si $\beta < \alpha$ implica $\beta + \alpha = \alpha$, o si y sólo si existe un único μ tal que $\alpha = \omega^\mu$.

Dado un ordinal $\alpha > 0$, existe el mayor componente primo $\leq \alpha$, que denotaremos por α'. Usando la forma normal de Cantor, todo ordinal $\alpha > 0$ puede representarse de forma única como $\alpha = \alpha' k + \gamma$ con k un número natural y $\gamma < \alpha'$.

Todo ordinal α es un conjunto totalmente ordenado, y por tanto un espacio topológico, considerando la topología del orden, donde los intervalos abiertos forman una base de entornos. Desde este punto de vista, todo ordinal α es un espacio localmente compacto, y es un espacio compacto si y sólo si es un ordinal compacto, es decir, si y sólo si es un sucesor.

En [Se, proposición 8.6.5] se obtiene la clasificación de los ordinales desde el punto de vista de los homeomorfismos.

TEOREMA 3.1.4. *Todo ordinal compacto infinito es homeomorfo a un ordinal de la forma* $\omega^\alpha \cdot m + 1$ *con* $m < \omega$.

El siguiente resultado, que será usado en la sección 4, se conoce como el Teorema del conteo, y una prueba del mismo puede encontrarse en [H, p. 117].

TEOREMA 3.1.5. *Para todo conjunto bien ordenado* L*, existe un único ordinal* λ *y una aplicación biyectiva* $\pi : L \longrightarrow \lambda$ *que conserva el orden.*

Para una información más detallada sobre ordinales y sus propiedades, puede consultarse [Si] o [Mo].

Conjuntos derivados. Para cada A subconjunto de un espacio topológico X, el conjunto derivado de A, $A^{(1)}$, es el conjunto de todos los puntos de acumulación de A en X (depende tanto de A como de X). Si ξ es un ordinal, definimos el ξ-ésimo conjunto derivado de A, $A^{(\xi)}$, por inducción transfinita (ver

[Se, definición 8.5.1, p. 147]):

$$A^{(0)} = A, \qquad A^{(\xi+1)} = \left(A^{(\xi)}\right)^{(1)}, \qquad A^{(\lambda)} = \bigcap_{\xi<\lambda} A^{(\xi)}, \qquad (3.1.1)$$

siendo λ un ordinal no compacto.

En [Se, teorema 8.6.6] se calculan los conjuntos derivados de los ordinales.

TEOREMA 3.1.6. *Sea $X = \omega^\alpha m + 1$, siendo α un ordinal y m un número natural. Entonces, para cualquier ordinal $\beta \leq \alpha$,*

$$X^{(\beta)} = \{\omega^\beta \gamma : 0 < \gamma \leq \omega^{-\beta+\alpha} m\}.$$

En particular, $X^{(\alpha)}$ tiene exactamente m puntos ω^α, $\omega^\alpha \cdot 2, \ldots, \omega^\alpha \cdot m$, y por tanto, $X^{(\alpha+1)}$ es vacío.

Puntos de suavidad. Dado un espacio de Banach X, diremos que $a \in X$ es un *punto de suavidad* si existe un único funcional de norma uno $f_a \in X^*$ tal que $f_a(a) = \|a\|$. El siguiente resultado, debido a Mazur, puede encontrarse en [R, proposición 9.4.3, p. 401].

TEOREMA 3.1.7. *Si X es un espacio de Banach separable, entonces el conjunto de todos los puntos de suavidad es un G_δ denso en X.*

En la sección 2 usaremos el siguiente lema técnico. Una demostración puede encontrarse en [R, lema 9.4.6., p. 405]).

LEMA 3.1.8. *Sean X e Y dos espacios de Banach, y $F : X \longrightarrow Y$ una isometría entre ellos, tal que $F(0) = 0$. Sea $a \in X$ un punto de suavidad, $f_a \in X^*$ el único funcional lineal y continuo de norma uno tal que $f_a(a) = \|a\|$, y $f \in Y^*$ un funcional lineal y continuo de norma uno tal que, para todo $r \in \mathbb{R}$,*

$$f(F(ra)) = r\|a\|.$$

Entonces, para todo $x \in X$,

$$f(F(x)) = f_a(x).$$

2. Inmersiones isométricas en espacios de funciones continuas

Sea K un espacio topológico compacto, y $C(K)$ el espacio de Banach formado por las funciones reales y continuas definidas sobre K dotado de la norma del supremo. Para cada $t \in K$, δ_t denotará la evaluación puntual en t, i. e., $\delta_t(f) = f(t)$ para todo $f \in C(K)$. Así $\delta_t : C(K) \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal de norma uno.

Sea X un espacio de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, y consideremos $F : X \to C(K)$ una isometría (no se supone F lineal ni sobreyectiva). El siguiente resultado nos permitirá "linealizar" dicha isometría.

TEOREMA 3.2.1. *Sea K un espacio topológico compacto y $F : X \to C(K)$ una isometría definida en un espacio de Banach X, tal que $F(0) = 0$. Existe un conjunto cerrado $L \subset K$ tal que $R \circ F : X \to C(L)$ es una isometría lineal, donde R denota la aplicación restricción a L, es decir, $R : C(K) \to C(L)$ está definida por ser $Rf = f_{|L}$.*

OBSERVACIÓN 3.2.2. La aplicación F no se supone lineal ni sobreyectiva. En la demostración se observa que podemos tomar como L el conjunto

$$L = \{t \in K : \ \delta_t \circ F \text{ es lineal}\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que X es separable.

Sea $a \in X$ un punto de suavidad. Sea $f_a \in X^*$ el único funcional de norma uno tal que $f_a(a) = \|a\|$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $t_n \in K$ tal que $|(F(na) - F(-na))(t_n)| = \|F(na) - F(-na)\| = 2n\|a\|$. Entonces, si $|r| \leq n$,

$$\begin{aligned}
2n\|a\| = \|F(na) - F(-na)\| &= |(F(na) - F(-na))(t_n)| \\
&\leq |(F(na) - F(ra))(t_n)| + |(F(ra) - F(-na))(t_n)| \\
&\leq \|F(na) - F(ra)\| + \|F(ra) - F(-na)\| \\
&= |n-r|\ \|a\| + |n+r|\ \|a\| = 2n\|a\|,
\end{aligned}$$

con lo que todas las desigualdades han de ser igualdades, y así $(n-r)\ \|a\| = |(F(na) - F(ra))(t_n)|$. Haciendo $r = 0$, obtenemos $|(F(na))(t_n)| = n\|a\|$. Sea $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tal que $\varepsilon_n F(na)(t_n) = n\|a\|$. Entonces $\varepsilon_n F(ra)(t_n) = r\|a\|$ para todo $|r| \leq n$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n \left(F(na)(t_n) - F(ra)(t_n)\right) &= n\|a\| - \varepsilon_n F(ra)(t_n) \\
&\geq n\|a\| - |F(ra)(t_n)| \\
&\geq n\|a\| - |r|\ \|a\| \geq 0,
\end{aligned}$$

y por tanto $\varepsilon_n (F(na) - F(ra))(t_n) = |(F(na) - F(ra))(t_n)| = (n-r)\ \|a\|$, de donde se deduce lo anterior.

Extrayendo una subsucesión, podemos suponer que $\varepsilon_n = \varepsilon_a \in \{-1, 1\}$ para todo n. La sucesión $\{t_n\}$ tiene en K un punto de acumulación t_a. Es fácil ver que entonces

$$\varepsilon_a F(ra)(t_a) = r\|a\|$$

para todo $r \in \mathbb{R}$, con lo cual $\varepsilon_a \delta_{t_a}(F(ra)) = r\|a\|$ para todo $r \in \mathbb{R}$. De ahí se deduce, usando el lema 3.1.8, que

$$\varepsilon_a \delta_{t_a}(F(x)) = f_a(x)$$

para todo $x \in X$. Así $\delta_{t_a} \circ F$ es lineal. Consideremos el subconjunto cerrado de K definido por

$$L = \{t \in K \ :\ \delta_t \circ F \text{ es lineal}\}.$$

Hemos probado que para cada punto de suavidad $a \in X$, existe $t_a \in L$ tal que $|F(a)(t_a)| = \|a\|$. Como X es separable, por el teorema 3.1.7, el conjunto de puntos de suavidad es denso en X, y así la aplicación $U : X \longrightarrow \mathcal{C}(L)$ dada por $U(x)(t) = F(x)(t)$ es una isometría lineal.

Supongamos ahora que X no es separable. Según acabamos de probar, para cada subespacio $Y \subset X$ separable, existe una isometría lineal $U_Y : Y \longrightarrow \mathcal{C}(L(Y))$ dada por $U_Y(x) = F(x)_{|L(Y)}$, donde aquí

$$L(Y) = \{t \in K : \ (\delta_t \circ F)_{|Y} \text{ es lineal}\}.$$

Notese que dados dos subespacios separables $Y_1, Y_2 \subset X$, la clausura del subespacio suma de ambos, $\overline{Y_1 + Y_2}$, es separable, y $L(\overline{Y_1 + Y_2}) \subseteq L(Y_1) \cap L(Y_2)$, con lo que la familia $\{L(Y) : \ Y \subset X, \ Y \text{ separable}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. El teorema 3.1.1 asegura que la intersección de la familia es no vacía. Sea $L = \{t \in K : \ \delta_t \circ F \text{ es lineal}\}$. Es claro que

$$L = \bigcap \{L(Y) : \ Y \subseteq X \text{ separable}\}, \tag{3.2.1}$$

y por tanto L es un subconjunto no vacío y cerrado de K. Sea $U_0 : X \longrightarrow \mathcal{C}(L)$ definida por $U_0 x = (Fx)_{|L}$. Es un operador lineal. Falta únicamente probar que U_0 es una isometría, es decir, que $\|U_0 x\| = \|x\|$ para todo $x \in X$.

Fijemos $x \in X$, y consideremos la familia (dependiente de x)

$$\mathcal{A} = \{Y \subset X \ : \ x \in Y, Y \text{ separable}\}.$$

Es un conjunto no vacío y dirigido por inclusión, ya que dados $Y_1, Y_2 \in \mathcal{A}$, el subespacio $Y = \overline{Y_1 + Y_2}$ es separable y contiene a ambos. Para cada $Y \in \mathcal{A}$, se tiene que $\|U_Y(x)\| = \|x\|$, y por tanto, existe un punto $t_Y \in L(Y)$ para el cual $|(Fx)(t_Y)| = \|x\|$. Así, construimos una red $\{t_Y : \ Y \in \mathcal{A}\}$ en el compacto K. Entonces, usando el teorema 3.0.2, la red tiene un punto de acumulación $t_0 \in K$. Eso significa que para cualquier entorno V de t_0 y para cualquier $Y_0 \in \mathcal{A}$, existe $Y \in \mathcal{A}$ tal que $Y \supseteq Y_0$ y $t_Y \in V$. De aquí es fácil deducir que $|(Fx)(t_0)| = \|x\|$.

Queda probar que $t_0 \in L$. Por (3.2.1), basta ver que $t_0 \in L(Y)$ para todo $Y \subset X$ separable. Si no, sea $Y_0 \subset X$ separable tal que $t_0 \notin L(Y_0)$. Podemos suponer que $x \in Y_0$, con lo que $Y_0 \in \mathcal{A}$. Por ser $L(Y_0)$ un compacto, existe un entorno V de t_0 verificando $V \cap L(Y_0) = \emptyset$. Como t_0 es un punto de acumulación de la red $\{t_Y \ : \ Y \in \mathcal{A}\}$, dados V e Y_0, existe $Y \in \mathcal{A}$, $Y \supseteq Y_0$ tal que $t_Y \in V$, que contradice que $t_Y \in L(Y) \subseteq L(Y_0)$. $\square$

3. Inmersiones isométricas en espacios de Banach

En esta sección estudiaremos el problema siguiente:

PROBLEMA:. Sea $F : X \to Y$ una isometría (no necesariamente lineal) entre dos espacios de Banach X e Y. ¿Existe entonces una isometría lineal $T : X \to Y$?

Resolveremos el problema en algunos casos particulares.

Ya hemos citado anteriormente que cuando la isometría es sobreyectiva, entonces es lineal. Es conocido también que cuando Y es estrictamente convexo, cualquier isometría F de un espacio de Banach X en Y tal que $F(0) = 0$ tiene que ser lineal, ya que lleva puntos medios de X en puntos medios (univocamente determinados) en Y.

Un primer caso se obtiene cuando $Y = C_0(\alpha+1)$, siendo α un ordinal, usando de nuevo el teorema 3.2.1 junto con el teorema 3.1.5, con el que podremos definir la isometría en $C_0(\alpha+1)$. Aquí, $C(\alpha+1)$ será el espacio de Banach de las funciones reales y continuas definidas sobre el ordinal compacto $\alpha+1$ dotado de la norma del supremo, y $C_0(\alpha+1)$ será el subespacio de $C(\alpha+1)$ de las funciones que se anulan en α.

TEOREMA 3.3.1. *Sea α un ordinal, X un espacio de Banach, y $F : X \to C_0(\alpha+1)$ una isometría. Entonces existe $T : X \to C_0(\alpha+1)$ una isometría lineal.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $F : X \longrightarrow C_0(\alpha+1)$ una isometría. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $F(0) = 0$. Podemos considerar $F : X \longrightarrow$

$\mathcal{C}(\alpha+1)$ y aplicar el teorema 3.2.1. Así, existe un cerrado

$$L = \{\beta \leq \alpha : \delta_\beta \circ F \text{ es lineal}\}$$

de forma que la composición

$$X \xrightarrow{F} \mathcal{C}(\alpha+1) \xrightarrow{R} \mathcal{C}(L)$$

es lineal, siendo R la restricción. Como $F(x)(\alpha) = 0$ para todo $x \in X$, se tiene que $\alpha \in L$. Como L es un conjunto bien ordenado, el teorema 3.1.5 implica que existe un ordinal λ y una aplicación biyectiva

$$\pi : L \longrightarrow \lambda$$

que conserva el orden. Como L tiene un último elemento, α, λ también, con lo cual es sucesor. Pongamos $\lambda = \gamma + 1$, siendo $\pi(\alpha) = \gamma$ Como π conserva el orden, conserva la topología. Así, tenemos una isometría $G : X \to \mathcal{C}(\gamma+1)$ definida por

$$G(x)(\beta) = F(x)(\pi - 1(\beta)).$$

De hecho $G(x)(\gamma) = F(x)(\pi^{-1}(\gamma)) = F(x)(\alpha) = 0$, y por tanto, $G : X \to \mathcal{C}_0(\gamma+1)$. Puesto que $\pi^{-1} : \gamma+1 \to \alpha+1$, es creciente y biyectiva, $\gamma \leq \alpha$. Así pues, $\mathcal{C}_0(\gamma+1) \hookrightarrow \mathcal{C}_0(\alpha+1)$. □

OBSERVACIÓN 3.3.2. El teorema 3.2.1 podría usarse para resolver el problema en el caso en que $Y = \mathcal{C}(K)$, siendo K un compacto metrizable. En efecto, por dicho teorema, dada una isometría $F : X \to \mathcal{C}(K)$ podríamos encontrar un cerrado $L \subset K$ de forma que $R \circ F : X \to \mathcal{C}(L)$ es una isometría lineal, siendo $R : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(L)$ la restricción a L. Pero por ser K metrizable, usando el teorema de extensión simultánea de Borsuk-Dugundji 3.1.3, podríamos componer dicha isometría con la isometría $\Lambda : \mathcal{C}(L) \to \mathcal{C}(K)$ que da el teorema 3.1.3 y obtener así una isometría lineal $T = \Lambda \circ R \circ F : X \to \mathcal{C}(K)$. Además, teniendo en cuenta dicho teorema de extensión, podemos asegurar que para cada $x \in X$,

$$(Tx)(K) \subset \operatorname{co}((Fx)(K)).$$

ya que, por el teorema 3.1.3, $(\Lambda \circ R \circ F)(x)(K) \subset \mathrm{co}(R \circ F)(x)(K)$, y por ser R la restricción a L, $(R \circ F)(x)(L) \subset F(x)(K)$.

Sin embargo, este caso no añade ninguna solución nueva al problema. En efecto, si K es numerable, es homeomorfo a un ordinal numerable compacto (ver [Se, proposición 8.5.7 y teorema 8.6.10]), con lo que se le aplicaría el teorema 3.3.1 anterior. Por otra parte, si K es no numerable y metrizable, y hay una isometría $F : X \to \mathcal{C}(K)$, el espacio X es separable (puesto que $\mathcal{C}(K)$ lo es, ver [Se, proposición 7.6.2]). Pero entonces existe una isometría lineal $T : X \to \mathcal{C}(2^{\mathbb{N}})$, siendo $2^{\mathbb{N}}$ el conjunto de Cantor (ver [BP2, proposición 1.5]). Ahora bien, como K es no numerable y metrizable, contiene un subconjunto cerrado $M \subset K$ homeomorfo a $2^{\mathbb{N}}$, con lo cual, $\mathcal{C}(M)$ y $\mathcal{C}(2^{\mathbb{N}})$ son linealmente isométricos. Usando nuevamente el teorema 3.1.3, encontramos una isometría lineal de X en $\mathcal{C}(K)$.

En el siguiente resultado, que es consecuencia del teorema 3.2.1, se obtiene una isometría lineal sobre un espacio cociente del espacio de llegada original.

TEOREMA 3.3.3. *Sean X e Y dos espacios de Banach, $F : X \to Y$ una isometría tal que $F(0) = 0$. Entonces existe un subespacio M de Y^* tal que $T = q \circ F : X \to Y/M^{\perp}$ es una isometría lineal, siendo $q : Y \to Y/M^{\perp}$ la aplicación cociente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea K el conjunto $\{y^* \in Y^* : \|y^*\| \leq 1\}$ dotado de la topología $*$-débil. Por el teorema de Alaoglú, K es compacto. Sea

$$\Phi : Y \to \mathcal{C}(K)$$

dada por $\Phi(y)(y^*) = y^*(y)$. Es una isometría lineal, y por tanto, la composición

$$\Phi \circ F : X \to \mathcal{C}(K)$$

es una isometría. Aplicando el teorema 3.2.1, la composición

$$R \circ \Phi \circ F : X \to \mathcal{C}(L)$$

es una isometría lineal, donde $L = \{t^* \in K : \delta_{t^*} \circ \Phi \circ F \text{ es lineal}\}$ y $R : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(L)$, dada por $Rz = z_{|L}$, es la restricción a L. Nótese que para todo $x \in X$

$$(\delta_{t^*} \circ \Phi \circ F)(x) = \Phi(F(x))(t^*) = (t^* \circ F)(x).$$

Consideremos el subespacio de Y^*

$$M = \{t^* \in Y^* : t^* \circ F \text{ es lineal}\}$$

y $q : Y \to Y/M^\perp$ la aplicación cociente, que es lineal y de norma ≤ 1. Sea, por último, $T : X \to Y/M^\perp$ dada por $Tx = q(Fx) = Fx + M^\perp$ La aplicación T es lineal, ya que si $x_1, x_2 \in X$ y $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, para cualquier $t^* \in M$,

$$t^*(F(a_1x_1 + a_2x_2)) = a_1(t^* \circ F)(x_1) + a_2(t^* \circ F)(x_2) = t^*(a_1F(x_1) + a_2F(x_2))$$

y por tanto,

$$F(a_1x_1 + a_2x_2) - (a_1F(x_1) + a_2F(x_2)) \in M^\perp$$

con lo que $T(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1T(x_1) + a_2T(x_2)$.

Además, T es una isometría. En efecto, como $\|Tx\| = \inf_{y \in M^\perp} \{\|F(x) + y\|\}$, por un lado, para cualquier $x \in X$,

$$\|T(x)\| \leq \|F(x)\| = \|x\|$$

y por otra parte, si $x \in X$, existe $t^* \in L$ tal que $|(R \circ \Phi \circ F)(x)(t^*)| = \|(R \circ \Phi \circ F)(x)\| = \|x\|$, y por tanto, para cualquier $y \in M^\perp$,

$$\|F(x) + y\| \geq |t^*(F(x) + y)| = |t^*(F(x))| = |(R \circ \Phi \circ F)(x)(t^*)| = \|x\|. \qquad \square$$

Del teorema 3.3.3, usando la regla de la cadena, podemos obtener una isometría lineal sobre el espacio de llegada, imponiendo cierta regularidad a la isometría, concretamente que sea diferenciable en un punto. Pero sin embargo este hecho puede ser probado directamente (teorema 3.3.4). Recuerdese que una aplicación $F : U \to Y$, definida de un abierto U de un espacio de Banach X en otro Y es diferenciable en un punto $a \in U$ si existe una aplicación lineal y continua $DF(a) : X \to Y$ (que se llama *diferencial de F en a*) tal que

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{F(a + h) - F(a) - DF(a)(h)}{\|h\|} = 0$$

TEOREMA 3.3.4. *Sea $F : X \to Y$ una isometría entre dos espacios de Banach, diferenciable en un punto. Entonces existe $T : X \to Y$ una isometría lineal.*

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer que $F(0) = 0$ y, sin perdida de generalidad, que F es diferenciable en 0. Así pues existe una aplicación lineal continua $T = DF(0) : X \to Y$. Veamos que es una isometría. En efecto, ya que

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{F(h) - T(h)}{||h||} = 0,$$

fijado $h \in X$, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_0 > 0$ tal que para todo $0 < \delta \leq \delta_0$,

$$||F(\delta h) - T(\delta h)|| < \varepsilon \delta ||h||.$$

Pero entonces, para $0 < \delta \leq \delta_0$,

$$||\frac{F(\delta h)}{||\delta h||} - \frac{T(\delta h)}{\delta ||h||}|| < \varepsilon.$$

Aplicando la desigualdad triangular, y usando que F es una isometría y que T es lineal, obtenemos

$$1 - \varepsilon < ||\frac{T(h)}{||h||}|| < 1 + \varepsilon,$$

de donde $||T(h)|| = ||h||$. La igualdad es válida para todo $h \in X$, y por tanto prueba que T es una isometría. □

Como consecuencia, usando un resultado probado independientemente por N. Aronszajn [Ar], J. P. R. Christensen [C] y P. Mankiewicz [Ma], que asegura que toda función de Lipschitz de un espacio de Banach separable en otro espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym es derivable en al menos un punto, obtenemos otro caso donde puede darse respuesta positiva al problema planteado. Recuerdese que un espacio de Banach Y tiene la propiedad de Radon-Nikodym si para cualquier espacio de medida finito (Ω, Σ, μ) y cualquier medida vectorial $G : \Omega \to Y$ tal que la variación de G, $|G|$, es absolutamente continua respecto de μ, existe una función $g \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu; Y)$ tal que para todo conjunto $A \in \Sigma$,

$$G(A) = \int_A g(\omega)\, d\mu(\omega).$$

Teorema 3.3.5. *Sea X un espacio de Banach separable, Y un espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym, y $F : X \to Y$ una isometría tal que $F(0) = 0$. Entonces existe una isometría lineal $T : X \to Y$.*

Observación 3.3.6. No conocemos si en general será cierto que entre dos espacios de Banach entre los que exista una isometría, debe haber una que además sea lineal. Los resultados anteriores cubren una gran variedad de espacios (entre ellos, los espacios L^p con $1 < p < \infty$), aunque quedan fuera espacios clásicos como L^1.

4. Dimensión lineal métrica de los espacios de funciones continuas

En lo que sigue, dados dos espacios de Banach X e Y, diremos que son *linealmente isométricos* si existe una isometría lineal biyectiva de X en Y. Diremos que X tiene *dimensión lineal métrica menor o igual* que Y, y lo escribiremos $X \hookrightarrow Y$, cuando X sea linealmente isométrico a un subespacio vectorial de Y. Cuando $X \hookrightarrow Y$ e $Y \hookrightarrow X$, diremos que tienen la *misma dimensión lineal métrica*, y lo escribiremos $X \cong Y$. Por $X \not\hookrightarrow Y$ y $X \ncong Y$ entenderemos lo contrario de $X \hookrightarrow Y$ y $X \cong Y$, respectivamente.

Dados dos espacios topológicos compactos K y L, y una aplicación continua y biyectiva $\varphi : K \to L$, podemos definir una aplicación $T : C(L) \to C(K)$ dada por $Tx = x \circ \varphi$, que resulta ser una isometría. En particular, si K y L son homeomorfos, los espacios $C(K)$ y $C(L)$ son linealmente isométricos.

En el resto de la sección, dados dos espacios de Banach X e Y, el espacio $X \times Y$ lo consideraremos dotado de la norma del supremo

$$\|(x, y)\| = \sup\{\|x\|, \|y\|\}.$$

$\mathcal{C}(\alpha+1)$ será el espacio de Banach de las funciones reales y continuas definidas sobre el ordinal compacto $\alpha+1$ dotado de la norma del supremo, y $\mathcal{C}_0(\alpha+1)$ será el subespacio de $\mathcal{C}(\alpha+1)$ de las funciones que se anulan en α. En esta sección vamos a clasificar estos espacios según su dimensión lineal métrica. Puesto que $\mathcal{C}(\alpha+1)$ y $\mathcal{C}_0(\alpha+2)$ son linealmente isométricos, será suficiente clasificar los espacios $\mathcal{C}_0(\alpha+1)$. Además, debido a un teorema de Mazurkiewicz y Sierpiński [Se, teorema 8.6.10], cualquier espacio compacto numerable K es homeomorfo a un ordinal, y por tanto $\mathcal{C}(K)$ es linealmente isométrico a un $\mathcal{C}(\alpha+1)$, con lo cual la clasificación dada en esta sección incluye a los espacios $\mathcal{C}(K)$ con K un compacto numerable.

Dados dos ordinales $\alpha \leq \beta$, siempre se tiene $\mathcal{C}(\alpha+1) \hookrightarrow \mathcal{C}(\beta+1)$ y $\mathcal{C}_0(\alpha+1) \hookrightarrow \mathcal{C}_0(\beta+1)$ mediante la isometría lineal $T : \mathcal{C}(\alpha+1) \to \mathcal{C}(\beta+1)$, definida para cada $x \in \mathcal{C}(\alpha+1)$ por $Tx = y$, donde

$$y(\gamma) = \begin{cases} x(\gamma), & \text{si } \gamma \leq \alpha \\ 0, & \text{si } \gamma > \alpha \end{cases}$$

y que restringida a $\mathcal{C}_0(\alpha+1)$, tiene su imagen contenida en $\mathcal{C}_0(\beta+1)$.

El siguiente resultado clasifica los espacios $\mathcal{C}_0(\alpha+1)$ según su dimensión lineal métrica.

TEOREMA 3.4.1. *Sean $\alpha = \alpha' n + \gamma + 1$ y $\beta = \beta' m + \delta + 1$ dos ordinales, siendo α' y β' los mayores componentes primos que son menores o iguales que α y β, respectivamente, y siendo $\gamma < \alpha'$, $\delta < \beta'$ y n, m dos números naturales. Se verifica:*

(a) si α es finito, entonces $\mathcal{C}_0(\alpha) \cong \mathcal{C}_0(\beta)$ si y sólo si $\alpha = \beta$.

(b) si α es infinito, entonces $\mathcal{C}_0(\alpha) \cong \mathcal{C}_0(\beta)$ si y sólo si se verifican las tres condiciones siguientes:

(1) $\alpha' = \beta'$;
(2) $n = m$; *y*
(3) $\gamma, \delta > 0$ *ó* $\gamma = \delta = 0$.
En consecuencia, $\mathcal{C}_0(\alpha) \cong \mathcal{C}_0(\beta)$ *si y sólo si* $\mathcal{C}_0(\alpha)$ *y* $\mathcal{C}_0(\beta)$ *son linealmente isométricos. Más aún, por 3.1.4, dados dos ordinales compactos* α *y* β, *son homeomorfos si y sólo si* $\mathcal{C}(\alpha) \cong \mathcal{C}(\beta)$.

La prueba del teorema 3.4.1 se basa en los siguientes lemas:

LEMA 3.4.2.
(a) Sean α *y* β *dos ordinales compactos. Entonces* $\mathcal{C}(\alpha + \beta) \cong \mathcal{C}(\alpha) \times \mathcal{C}(\beta)$, *y por tanto* $\mathcal{C}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) \cong \mathcal{C}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{\pi(i)})$, *para cualesquiera* $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ *ordinales compactos y para cualquier permutación* π *de* $\{1, \ldots n\}$.
(b) Si α *es un componente primo,* $\gamma < \alpha$ *y* $k \in \mathbb{N}$, *entonces* $\mathcal{C}(\alpha k + \gamma + 1) \cong \mathcal{C}(\alpha k + 1)$.

DEMOSTRACIÓN. (a) La aplicación

$$T : \mathcal{C}(\alpha + \beta) \to \mathcal{C}(\alpha) \times \mathcal{C}(\beta)$$

dada por $T(z) = (x, y)$ donde $x(t) = z(t)$ para $0 \leq t < \alpha$ e $y(t) = z(\alpha + t)$ para $0 \leq t < \beta$ es una isometría lineal biyectiva.
(b) se deduce de (a) y de la igualdad $\gamma + \alpha k = \alpha k$. □

LEMA 3.4.3. *Sea* α *un ordinal. Las condiciones siguientes son equivalentes:*
(i) Para todo ordinal $\gamma < \alpha$, *se tiene* $\mathcal{C}(\alpha + 1) \not\hookrightarrow \mathcal{C}(\gamma + 1)$.
(ii) $\mathcal{C}(\alpha + 1) \not\hookrightarrow \mathcal{C}_0(\alpha + 1)$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que se verifica (i) y no (ii). Sea

$$T : \mathcal{C}(\alpha + 1) \to X \subset \mathcal{C}_0(\alpha + 1)$$

una isometría lineal biyectiva. Sea $U : X \to \mathcal{C}(\alpha+1)$ la inversa de T. Así, para todo $x \in X$, $\|Ux\| = \|x\|$.

Sea $y_0 \in \mathcal{C}(\alpha+1)$ la función $y_0 \equiv 1$. Sea $x_0 = Ty_0$. Por ser T una isometría, $\|x_0\| = 1$, y como $x_0 \in X \subset \mathcal{C}_0(\alpha+1)$, existe $\gamma < \alpha$ tal que si $t > \gamma$, entonces $|x_0(t)| < 1/2$.

Sea

$$P : \mathcal{C}(\alpha+1) \to \mathcal{C}(\gamma+1)$$

la restricción a $\gamma+1$, es decir, $Px = z$ siendo $z(t) = x(t)$ para $t \leq \gamma$, y consideremos la composición

$$P \circ T : \mathcal{C}(\alpha+1) \longrightarrow \mathcal{C}(\gamma+1),$$

que por (i) no es una isometría. Así, existe $y_1 \in \mathcal{C}(\alpha+1)$, con $\|y_1\| = 1$ tal que $\|P \circ T(y_1)\| < 1$. Tomemos ξ tal que $|y_1(\xi)| = 1$, sea $x_1 = Ty_1 \in X \subset \mathcal{C}_0(\alpha+1)$. Se tiene que $\|x_1\| = 1$.

Sea $\varepsilon = \text{signo}(y_1(\xi))$, y sea $z_0 = x_0 + \varepsilon x_1 \in X$. Así

$$\|z_0\| = \|U(z_0)\| \geq z_0(\xi) = y_0(\xi) + \varepsilon y_1(\xi) = 2,$$

con lo cual $\|z_0\| \geq 2$. Ahora bien, si s_0 es tal que $\|z_0\| = |z_0(s_0)|$,

$$2 \leq \|z_0\| = |(x_0 + \varepsilon x_1)(s_0)|.$$

Pero si $s_0 \leq \gamma$, entonces $|x_1(s_0)| \leq \|Px_1\| < 1$ y $|x_0(s_0)| \leq \|x_0\| = 1$, y si $s_0 > \gamma$, entonces $|x_0(s_0)| < 1/2$ y $|x_1(s_0)| \leq \|x_1\| = 1$, con lo que en cualquier caso $\|z_0\| < 2$, lo cual no es posible.

Recíprocamente, si es cierto (ii), y existiera $\gamma < \alpha$ tal que $\mathcal{C}(\alpha+1) \hookrightarrow \mathcal{C}(\gamma+1)$, entonces, como $\gamma+1 \leq \alpha$, podríamos fácilmente definir las siguientes inmersiones lineales isométricas:

$$\mathcal{C}(\alpha+1) \hookrightarrow \mathcal{C}(\gamma+1) \cong \mathcal{C}_0(\gamma+2) \hookrightarrow \mathcal{C}_0(\alpha+1). \qquad \square$$

El propósito ahora es demostrar que no es posible encontrar una isometría lineal de $\mathcal{C}_0(\alpha(k+1)+1)$ en $\mathcal{C}(\alpha k+1)$, siendo α un componente primo (lema

3.4.6). Introduciremos para ello la siguiente notación.

Sean α y β dos ordinales, y $T : \mathcal{C}_0(\alpha+1) \to \mathcal{C}(\beta+1)$ una isometría lineal.

Para cada conjunto $A \subseteq \alpha$ no vacío, abierto y cerrado en $\alpha+1$, se tiene que $\chi_A \in \mathcal{C}_0(\alpha+1)$, y $\|\chi_A\| = 1$. Sea

$$\langle A, T\rangle = \{\gamma \leq \beta : |T(\chi_A)(\gamma)| = 1\},$$

que es un conjunto no vacío y cerrado. En lo que sigue haremos uso de las siguientes propiedades:

Lema 3.4.4. *Sean $A, B, A_1, \ldots, A_p$ abiertos y cerrados no vacíos de $\alpha+1$.*
(a) Si $A \cap B = \emptyset$ y $\gamma \in \langle A, T\rangle$, entonces $T(\chi_B)(\gamma) = 0$.
(b) $A \subset B \Rightarrow \langle A, T\rangle \subset \langle B, T\rangle$
(c) $A_1 \cap \cdots \cap A_p = \emptyset \Leftrightarrow \langle A_1, T\rangle \cap \cdots \cap \langle A_p, T\rangle = \emptyset$

Demostración. (a) Sea $\varepsilon_1 = T(\chi_A)(\gamma) \in \{-1, 1\}$, y $\varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$ es tal que $\varepsilon_2 T(\chi_B)(\gamma) = |T(\chi_B)(\gamma)|$. Entonces

$$1 = \|\varepsilon_1\chi_A + \varepsilon_2\chi_B\| \geq |\varepsilon_1 T(\chi_A)(\gamma) + \varepsilon_2 T(\chi_B)(\gamma)| = 1 + |T(\chi_B)(\gamma)|.$$

(b) Sea $\gamma \in \langle A, T\rangle$. Entonces, por (a), $T(\chi_{B\setminus A})(\gamma) = 0$ y por linealidad, si $\varepsilon = T(\chi_A)(\gamma)$,

$$1 = \|T(\chi_B)\| \geq |T(\chi_B)(\gamma)| \geq \varepsilon(T(\chi_A)(\gamma) + T(\chi_{B\setminus A})(\gamma)) = 1,$$

de donde $|T(\chi_B)(\gamma)| = 1$, y por tanto $\gamma \in \langle B, T\rangle$.

(c) Supongamos que $A_1 \cap \cdots \cap A_p = \emptyset$, y sea $\gamma \in \langle A_1, T\rangle \cap \cdots \cap \langle A_p, T\rangle$. Sea $\varepsilon_i = \text{signo}(T(\chi_{A_i})(\gamma))$. Por ser la intersección $A_1 \cap \cdots \cap A_p = \emptyset$,

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i \chi_{A_i}\right\| \leq p - 1,$$

y sin embargo

$$\left|T\left(\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i \chi_{A_i}\right)(\gamma)\right| = p,$$

lo cual es absurdo. □

Recuerdese la definición de conjuntos derivados dada en (3.1.1).

LEMA 3.4.5. *Sea $\eta \geq 1$ un ordinal, $\alpha = \omega^\eta$ y β un ordinal. Para todo ξ, con $0 \leq \xi < \eta$, para todo $n \geq 1$ y para toda isometría lineal $T : C_0(\alpha+1) \to C(\beta+1)$, se verifica que el conjunto*

$$\langle A_{\xi,n}, T\rangle^{(\xi)}$$

tiene al menos n elementos, siendo $A_{\xi,n} = [1, \omega^\xi n]$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que $n = 1$. Haremos la demostración por inducción en ξ.

Para $\xi = 0$, basta observar que el conjunto $\langle A_{0,1}, T\rangle = \langle\{1\}, T\rangle$ es no vacío.

Supongamos que el resultado es cierto para ξ. Veamos que entonces también es cierto para $\xi + 1$.

Se tiene que

$$A_{\xi+1,1} \supset \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{\xi,k},$$

donde para cada $k \geq 0$, $B_{\xi,k} = [\omega^\xi k + 1, \omega^\xi(k+1)]$. Los conjuntos $\langle B_{\xi,k}, T\rangle$ son disjuntos y cerrados, con lo que los conjuntos derivados $\langle B_{\xi,k}, T\rangle^{(\xi)}$ también son disjuntos, y todos ellos están contenidos en $\langle A_{\xi+1,1}, T\rangle^{(\xi)}$. Veamos que de la hipótesis de inducción se deduce que además son no vacíos.

Para cada $k \geq 0$, consideremos la biyección continua $\varphi_k : \alpha+1 \to \alpha+1$ dada por

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} t, & \text{si } t \notin B_{\xi,k} \cup A_{\xi,1} \\ \omega^\xi k + t, & \text{si } t \in A_{\xi,1} \\ -\omega^\xi k + t, & \text{si } t \in B_{\xi,k} \end{cases}$$

que, para $k > 0$, intercambia los conjuntos $B_{\xi,k}$ y $A_{\xi,1}$, y la isometría $T_k : C_0(\alpha+1) \to C(\beta+1)$ dada por $T_k x = T(x \circ \varphi_k)$. Entonces $\langle B_{\xi,k}, T\rangle = \langle A_{\xi,1}, T_k\rangle$, ya que $\chi_{A_{\xi,1}} \circ \varphi_k = \chi_{B_{\xi,k}}$, y por tanto, por la hipótesis de inducción, $\langle B_{\xi,k}, T\rangle^{(\xi)}$

tiene al menos un elemento. De todo esto se deduce que $\langle A_{\xi+1,1}, T\rangle^{(\xi)}$ es infinito, con lo que tiene un punto de acumulación. Eso prueba que $\langle A_{\xi+1,1}, T\rangle^{(\xi+1)}$ tiene al menos un elemento.

Falta por último ver que si λ es no compacto y el resultado es cierto para todo $\xi < \lambda$, lo es también para λ. Puesto que

$$\langle A_{\lambda,1}, T\rangle^{(\lambda)} = \bigcap_{\xi<\lambda} \langle A_{\lambda,1}, T\rangle^{(\xi)},$$

y ya que $\beta + 1$ es compacto, para ver que es no vacío, usando el teorema 3.1.1, basta ver que la intersección de un número finito de ellos lo es. Pero si $\xi_1, \ldots \xi_n < \lambda$ y ξ es el mayor, entonces

$$\langle A_{\lambda,1}, T\rangle^{(\xi_1)} \cap \cdots \cap \langle A_{\lambda,1}, T\rangle^{(\xi_n)} = \langle A_{\lambda,1}, T\rangle^{(\xi)}$$

que contiene a $\langle A_{\xi,1}, T\rangle^{(\xi)}$, que por hipótesis, es no vacío.

Supongamos ahora que $n > 1$, y consideremos la unión disjunta

$$A_{\xi,n} = \bigcup_{k=0}^{n-1} B_{\xi,k}.$$

De ahí se deduce que, para $0 \leq k \leq n-1$, $\langle B_{\xi,k}, T\rangle \subset \langle A_{\xi,n}, T\rangle$, y por tanto que $\langle B_{\xi,k}, T\rangle^{(\xi)} \subset \langle A_{\xi,n}, T\rangle^{(\xi)}$, siendo los conjuntos $\langle B_{\xi,k}, T\rangle^{(\xi)}$ disjuntos dos a dos. Si de nuevo consideramos las funciones φ_k y las isometrías T_k anteriores, para $0 \leq k \leq n-1$, se tiene que $\langle B_{\xi,k}, T\rangle = \langle A_{\xi,1}, T_k\rangle$. Según hemos probado anteriormente, los conjuntos $\langle A_{\xi,1}, T_k\rangle^{(\xi)}$ tienen al menos un elemento, y como

$$\langle A_{\xi,n}, T\rangle^{(\xi)} \supset \bigcup_{k=0}^{n-1} \langle B_{\xi,k}, T\rangle^{(\xi)},$$

el conjunto $\langle A_{\xi,n}, T\rangle^{(\xi)}$ tiene al menos n elementos. $\square$

Demostramos ahora el resultado anunciado.

LEMA 3.4.6. *Si α es un ordinal primo infinito y $k \in \mathbb{N}$, entonces no existe isometría lineal de $C_0(\alpha(k+1)+1)$ en $C(\alpha k+1)$.*

DEMOSTRACIÓN. Es fácil ver que $C_0(\alpha(k+1)+1)$ y $C(\alpha+1)^k \times C_0(\alpha+1)$ son linealmente isométricos, y que $C(\alpha k+1)$ y $C(\alpha+1)^k$ también lo son. Supongamos que existiese una isometría lineal $T : C(\alpha+1)^k \times C_0(\alpha+1) \to C(\alpha+1)^k$, y consideremos, para cada $1 \leq p \leq k$, la isometría restricción a la p-ésima coordenada, $T_p : C(\alpha+1) \to C(\alpha+1)^k$, dada por

$$T_p(x) = T(0, \ldots, 0, \overset{(p)}{x}, 0, \ldots, 0),$$

y la isometría restricción a la $(k+1)$-ésima coordenada $T_{k+1} : C_0(\alpha+1) \to C(\alpha+1)^k$, definida análogamente.

Como α es componente primo e infinito, es de la forma $\alpha = \omega^\eta$, con $\eta \geq 1$. dividimos la demostración en dos partes, según que η sea sucesor o compacto.

Supongamos en primer lugar que $\alpha = \omega^{\eta+1}$, para $\eta \geq 0$. Para cada $n > 1$, consideremos los conjuntos $A_{\eta,n} = [1, \omega^\eta n]$. Sean, para $n > 2k$, $1 \leq p \leq k+1$ y $1 \leq i \leq k$ los vectores $x_i^{p,n} \in C(\alpha+1)$ tales que

$$T_p(\chi_{A_{\eta,n}}) = (x_1^{p,n}, \ldots, x_k^{p,n}).$$

Como, por el lema 3.4.5, $\langle A_{\eta,n}, T_p\rangle^{(\eta)}$ tiene al menos n elementos, y

$$\langle A_{\eta,n}, T_p\rangle^{(\eta)} = \bigcup_{i=1}^{k} \alpha(i-1) + \{\gamma \leq \alpha : |x_i^{p,n}(\gamma)| = 1\}^{(\eta)},$$

para cada $n > 2k$ y cada $1 \leq p \leq k+1$, existe $i = i(p,n) \in \{1, \ldots k\}$ tal que

$$\{\gamma \leq \alpha : |x_i^{p,n}(\gamma)| = 1\}^{(\eta)}$$

tiene al menos $\lfloor n/k \rfloor$ elementos ($\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera por defecto de x). Por tanto, por el teorema 3.1.6, para ese i

$$\{\gamma \leq \alpha : |x_i^{p,n}(\gamma)| = 1\} \not\subset [0, \omega^\eta(\lfloor n/k \rfloor - 2)],$$

con lo cual, existe $\gamma > \omega^\eta(\lfloor n/k \rfloor - 2)$ tal que $|x_i^{p,n}(\gamma)| = 1$. Debido a que sólo hay un número finito de índices i, debe existir, para cada $1 \leq p \leq k+1$ un índice $i = i(p) \in \{1, \ldots k\}$ tal que para todo $n > 2k$ existen $m > n$ y $\gamma > \omega^\eta(\lfloor m/k \rfloor - 2)$ tal que $|x_i^{p,m}(\gamma)| = 1$. En efecto, si consideramos, fijado $1 \leq p \leq k+1$ los conjuntos disjuntos

$$\Omega_i = \{n > 2k : i(p,n) = i\}$$

para $1 \leq i \leq k$, tienen unión $[2k+1, \omega)$. Debe, por tanto, existir un $i = i(p)$ para el cual Ω_i sea no acotado, y por tanto se verifique que para todo $n \in \mathbb{N}$ exista $m > n$ en Ω_i. Entonces $i(p,m) = i$, de ahí que exista $\gamma > \omega^\eta(\lfloor m/k \rfloor - 2)$ para el que $|x_i^{p,m}(\gamma)| = 1$.

Sea $y \equiv 1 \in C(\alpha+1)$, y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $C_{\eta,n}$ el complementario en $\alpha+1$ de $A_{\eta,n}$. Pongamos, para $1 \leq p \leq k$,

$$z^p = (z_1^p, \ldots, z_k^p) = T_p(y) = T_p(\chi_{A_{\eta,n}}) + T_p(\chi_{C_{\eta,n}}),$$

siendo $z_j^p \in C(\alpha+1)$. Sabemos que para cada $n > 2k$ existen $m > n$ y $\gamma > \omega^\eta(\lfloor m/k \rfloor - 2)$ tales que $|x_i^{p,m}(\gamma)| = 1$, siendo $i = i(p)$. Pero entonces, para ese valor de γ, $\big(T_p(\chi_{C_{\eta,m}})\big)_i(\gamma) = 0$. En efecto, si $\varepsilon_1 = x_i^{p,m}(\gamma) \in \{-1,1\}$, y $\varepsilon_2 \in \{-1,1\}$ es tal que $\varepsilon_2 \big(T_p(\chi_{C_{\eta,m}})\big)_i(\gamma) = \big|\big(T_p(\chi_{C_{\eta,m}})\big)_i(\gamma)\big|$, se tiene

$$\begin{aligned} 1 &= \|\varepsilon_1 \chi_{A_{\eta,m}} + \varepsilon_2 \chi_{C_{\eta,m}}\| \\ &\geq \big|\varepsilon_1 (T_p(\chi_{A_{\eta,m}}))_i(\gamma) + \varepsilon_2 (T_p(\chi_{C_{\eta,m}}))_i(\gamma)\big| \\ &= 1 + \big|(T_p(\chi_{C_{\eta,m}}))_i(\gamma)\big| . \end{aligned}$$

Por tanto, para cada para cada natural $n > 2k$ existe $\gamma > \omega^\eta(\lfloor n/k \rfloor - 2)$ tal que $|z_i^p(\gamma)| = 1$, siendo $i = i(p)$. Como $z_i^p \in C(\alpha+1)$, se deduce que $|z_i^p(\alpha)| = 1$.

Pueden ocurrir dos casos.

Caso I. Todos los $i(p)$ son diferentes para cada $1 \leq p \leq k$. Entonces existe $1 \leq p \leq k$ tal que $i(p) = i(k+1) = i$. Ahora bien, tomemos $\varepsilon \in \{-1,1\}$ y $\gamma_0 < \alpha$ tales que $\varepsilon z_i^p(\gamma) > 1/2$ para todo $\gamma \geq \gamma_0$, y dado γ_0, tomemos $n > 2k$ tal que

$\gamma_0 < \omega^\eta(\lfloor n/k \rfloor - 2)$, y para ese n, el natural $m > n$ y el ordinal $\gamma > \omega^\eta(\lfloor m/k \rfloor - 2)$ tales que $x_i^{k+1,m}(\gamma) = \delta \in \{-1, 1\}$. Entonces tendríamos

$$\begin{aligned} 1 &= \|T(0, \ldots, 0, \overset{(p)}{\varepsilon y}, 0, \ldots, 0, \delta\chi_{A_{\eta,m}})\| = \|\varepsilon z^p + \delta T_{k+1}(\chi_{A_{\eta,m}})\| \\ &\geq \varepsilon z_i^p(\gamma) + \delta x_i^{k+1,m}(\gamma) > 3/2, \end{aligned}$$

lo cual es absurdo.

Caso II. Existen $1 \leq p < q \leq k$ para los que $i(p) = i(q) = i$. En este caso, $z_i^p(\alpha) = \varepsilon \in \{-1, 1\}$ y $z_i^q(\alpha) = \delta \in \{-1, 1\}$, pero entonces

$$\begin{aligned} 1 &= \|T(0, \ldots, 0, \overset{(p)}{\varepsilon y}, 0, \ldots, 0, \overset{(q)}{\delta y}, 0, \ldots 0)\| = \|\varepsilon z^p + \delta z^q\| \\ &\geq \varepsilon z_i^p(\alpha) + \delta z_i^q(\alpha) = 2, \end{aligned}$$

lo cual no puede ser.

Supongamos ahora que $\alpha = \omega^\eta$, siendo η un ordinal no compacto. La idea de la prueba sigue los argumentos usados en el caso anterior. Consideremos para cada $1 \leq \xi < \eta$, $A_{\xi+1,1} = [1, \omega^{\xi+1}]$, y para $1 \leq p \leq k+1$ y $1 \leq i \leq k$, los vectores $x_i^{p,\xi} \in C(\alpha + 1)$ tales que

$$T_p(\chi_{A_{\xi+1,1}}) = (x_1^{p,\xi}, \ldots x_k^{p,\xi}).$$

Como, por el lema 3.4.5, para cada $1 \leq p \leq k+1$, y cada $\xi < \eta$, el conjunto $\langle A_{\xi+1,1}, T_p \rangle^{(\xi+1)}$ tiene al menos un elemento, y ya que

$$\langle A_{\xi+1,1}, T_p \rangle^{(\xi+1)} = \bigcup_{i=1}^{k} \alpha(i-1) + \{\gamma \leq \alpha : |x_i^{p,\xi}(\gamma)| = 1\}^{(\xi+1)},$$

para cada $\xi < \eta$ y cada $1 \leq p \leq k+1$, existe $i = i(p, \xi) \in \{1, \ldots k\}$ tal que

$$\{\gamma \leq \alpha : |x_i^{p,\xi}(\gamma)| = 1\}^{(\xi+1)}$$

tiene al menos un elemento. Por tanto, por el teorema 3.1.6, para ese i

$$\{\gamma \leq \alpha : |x_i^{p,\xi}(\gamma)| = 1\} \not\subset [0, \omega^\xi],$$

con lo que existen $\gamma > \omega^\xi$ e $i = i(p,\xi) \in \{1, \ldots k\}$ tales que $|x_i^{p,\xi}(\gamma)| = 1$. Puesto que sólo hay una cantidad finita de índices i, para cada $1 \leq p \leq k+1$ debe existir un $i = i(p) \in \{1, \ldots k\}$ tal que para todo $\lambda < \eta$ existen $\xi > \lambda$ y $\gamma > \omega^\xi$ tales que $|x_i^{p,\xi}(\gamma)| = 1$. En efecto, si consideramos los conjuntos disjuntos, para $1 \leq i \leq k$,

$$\Omega_i = \{\xi < \eta : i(p,\xi) = i\},$$

cuya unión es η, al menos uno de ellos debe verificar la condición de que para cada $\lambda < \eta$ exista $\xi > \lambda$ en Ω_i, con lo que $i = i(p,\xi)$, y por tanto existe $\gamma > \omega^\xi$ tal que $|x_i^{p,\xi}(\gamma)| = 1$.

Consideremos $y \equiv 1 \in C(\alpha+1)$. Sea $C_{\lambda+1,1}$ el complementario en $\alpha+1$ de $A_{\lambda+1,1}$. Pongamos, para $1 \leq p \leq k$,

$$z^p = (z_1^p, \ldots, z_k^p) = T_p(y) = T_p(\chi_{A_{\lambda+1,1}}) + T_p(\chi_{C_{\lambda+1,1}}),$$

siendo $z_j^p \in C(\alpha+1)$. Sabemos que para cada $\lambda < \eta$ existen $\xi > \lambda$ y $\gamma > \omega^\xi$ para los que $|x_i^{p,\xi}(\gamma)| = 1$, siendo $i = i(p)$. Pero entonces, para ese valor de γ, $\left(T_p(\chi_{C_{\xi+1,1}})\right)_i(\gamma) = 0$. En efecto, si $\varepsilon_1 = x_i^{p,\xi}(\gamma) \in \{-1,1\}$, y $\varepsilon_2 \in \{-1,1\}$ es tal que $\varepsilon_2 \left(T_p(\chi_{C_{\xi+1,1}})\right)_i(\gamma) = |(T_p(\chi_{C_{\xi+1,1}}))_i(\gamma)|$, se tiene

$$\begin{aligned}
1 &= \|\varepsilon_1 \chi_{A_{\xi+1,1}} + \varepsilon_2 \chi_{C_{\xi+1,1}}\| \\
&\geq \left|\varepsilon_1 (T_p(\chi_{A_{\xi+1,1}}))_i(\gamma) + \varepsilon_2 (T_p(\chi_{C_{\xi+1,1}}))_i(\gamma)\right| \\
&= 1 + \left|(T_p(\chi_{C_{\xi+1,1}}))_i(\gamma)\right|.
\end{aligned}$$

Así, para cada $\lambda < \eta$ existe $\gamma > \omega^\lambda$ para el cual $|z_i^p(\gamma)| = 1$. Como $z_i^p \in C(\alpha+1)$, se deduce que $|z_i^p(\alpha)| = 1$.

Pueden ocurrir dos casos.

Caso I. Todos los $i(p)$ son diferentes para cada $1 \leq p \leq k$. Entonces existe $1 \leq p \leq k$ tal que $i(p) = i(k+1) = i$. Ahora bien, si $\varepsilon \in \{-1,1\}$ y $\gamma_0 < \alpha$ son tales que $\varepsilon z_i^p(\gamma) > 1/2$ para todo $\gamma \geq \gamma_0$, y tomamos $\lambda < \eta$ tal que $\omega^\lambda > \gamma_0$, y los correspondientes $\xi > \lambda$ y $\gamma > \omega^\xi$ para el que se cumple que $x_i^{k+1,\xi}(\gamma) = \delta \in \{-1,1\}$, tendríamos

$$\begin{aligned} 1 &= \|T(0,\ldots,0,\overset{(p)}{\varepsilon y},0,\ldots,0,\delta\chi_{A_{\xi+1,1}})\| = \|\varepsilon z^p + \delta T_{k+1}(\chi_{A_{\xi+1,1}})\| \\ &\geq \varepsilon z_i^p(\gamma) + \delta x_i^{k+1,\xi}(\gamma) > 3/2, \end{aligned}$$

lo cual es absurdo.

Caso II. Existen $1 \leq p < q \leq k$ para los que $i(p) = i(q) = i$. En este caso, $z_i^p(\alpha) = \varepsilon \in \{-1,1\}$ y $z_i^q(\alpha) = \delta \in \{-1,1\}$, pero entonces

$$\begin{aligned} 1 &= \|T(0,\ldots 0,\overset{(p)}{\varepsilon y},0,\ldots 0,\overset{(q)}{\delta y},0,\ldots 0)\| = \|\varepsilon z^p + \delta z^q\| \\ &\geq \varepsilon z_i^p(\alpha) + \delta z_i^q(\alpha) = 2, \end{aligned}$$

lo cual no puede ser. $\square$

Lema 3.4.7. *Si α es un componente primo, $k \in \mathbb{N}$ y $\beta < \alpha k$, entonces*

$$\mathcal{C}_0(\alpha k + 1) \not\hookrightarrow \mathcal{C}(\beta + 1).$$

Demostración. Si β es finito, el resultado es trivial. Supongamos pues que $\beta \geq \omega$.

Sea β' el mayor componente primo $\leq \beta$, y pongamos $\beta = \beta' n + \gamma$, siendo $\gamma < \beta$ y n un número natural. Supongamos en primer lugar que $k = 1$. Entonces $\beta < \alpha$ implica $\beta' < \alpha$. Como ambos son componentes primos, se tiene que $\beta'\omega \leq \alpha$. Si el resultado fuese falso, podríamos definir fácilmente las siguientes isometrías lineales

$$\mathcal{C}_0(\beta'(n+1)+1) \hookrightarrow \mathcal{C}_0(\alpha+1) \hookrightarrow \mathcal{C}(\beta+1) \hookrightarrow \mathcal{C}(\beta' n + 1),$$

en contradicción con el lema 3.4.6.

Para $k > 1$, $\beta' n + \gamma = \beta < \alpha k$ implica que $\beta' < \alpha$, o bien que $\beta' = \alpha$ y

$n < k$. En el caso en que $\beta' < \alpha$, si el resultado fuese falso, podríamos definir las siguientes isometrías lineales

$$\mathcal{C}_0(\alpha k + 1) \hookrightarrow \mathcal{C}(\beta + 1) \hookrightarrow \mathcal{C}(\alpha(k-1)+1),$$

usando que $\beta < \alpha(k-1)$. Esto contradice el lema 3.4.6. En el caso en que $\beta' = \alpha$ y $n < k$, entonces $\beta \leq \alpha(k-1)+\gamma$, y si el resultado fuese falso, podríamos definir las isometrías lineales

$$\mathcal{C}_0(\alpha k + 1) \hookrightarrow \mathcal{C}(\beta + 1) \hookrightarrow \mathcal{C}(\alpha(k-1)+\gamma+1) \hookrightarrow \mathcal{C}(\alpha(k-1)+1),$$

que contradice nuevamente el lema 3.4.6. □

Demostración del teorema 3.4.1. (a) Basta considerar la dimensión de los espacios $\mathcal{C}_0(\alpha)$ y $\mathcal{C}_0(\beta)$.

(b) Sea α un ordinal infinito. Las condiciones (1), (2) y (3) son suficientes para que $\mathcal{C}_0(\alpha) \cong \mathcal{C}_0(\beta)$ (realmente implican que $\mathcal{C}_0(\alpha)$ y $\mathcal{C}_0(\beta)$ son linealmente isométricos).

Supongamos α infinito, y $\mathcal{C}_0(\alpha) \cong \mathcal{C}_0(\beta)$, debemos probar las condiciones (1), (2) y (3). Si fuese $\alpha = \beta$, estas condiciones se cumplen. Así pues, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\beta < \alpha$.

(1) Si $\beta' < \alpha'$ se tiene $\beta'(m+1)+1 < \alpha' \leq \alpha' n + \gamma + 1$, y usando la hipótesis $\mathcal{C}_0(\alpha) \cong \mathcal{C}_0(\beta)$ y el lema 3.4.2, obtenemos

$$\mathcal{C}_0(\beta'(m+1)+1) \hookrightarrow \mathcal{C}_0(\alpha) \cong \mathcal{C}_0(\beta) \hookrightarrow \mathcal{C}(\beta) \cong \mathcal{C}(\beta' m + 1),$$

lo cual contradice el lema 3.4.6.

Por tanto, $\beta' = \alpha'$.

(2) Si $n \neq m$, como $\beta < \alpha$, debe ser $m < n$. Por ser α' un componente primo, se deduce $\beta = \alpha' m + \delta + 1 < \alpha' n$, y por el lema 3.4.7,

$$\mathcal{C}_0(\alpha) \cong \mathcal{C}_0(\alpha' n + 1) \not\hookrightarrow \mathcal{C}(\beta + 1).$$

En particular, $\mathcal{C}_0(\alpha) \not\hookrightarrow \mathcal{C}_0(\beta)$, que contradice la hipótesis.

(3) Si fuese (3) falso, como $\beta < \alpha$, esto implicaría que $0 = \delta < \gamma$. Por el

lema 3.4.7, para cualquier $\eta < \alpha' n$, se tiene que $\mathcal{C}_0(\alpha' n + 1) \not\hookrightarrow \mathcal{C}(\eta + 1)$. En particular, se deduce que para todo $\eta < \alpha' n$

$$\mathcal{C}(\alpha' n + 1) \not\hookrightarrow \mathcal{C}(\eta + 1).$$

Por el lema 3.4.3, esto implica que

$$\mathcal{C}(\alpha' n + 1) \not\hookrightarrow \mathcal{C}_0(\alpha' n + 1). \tag{3.4.1}$$

Pero como $\alpha' n + 1 < \alpha' n + \gamma + 1$, se deduce

$$\mathcal{C}(\alpha' n + 1) \hookrightarrow \mathcal{C}_0(\alpha' n + \gamma + 1) = \mathcal{C}_0(\alpha) \cong \mathcal{C}_0(\beta) = \mathcal{C}_0(\alpha' n + 1),$$

lo cual contradice (3.4.1). $\square$

REFERENCIAS

[A] S. Alesker, *On the Gromov-Milman theorem regarding the concentration phenomenon on uniformly convex sphere*, to appear.

[AM] N. Alon, V. D. Milman, *Embedding of ℓ_∞^k in finite dimensional Banach spaces*, Israel J. Math. 45 (1983), 265–280.

[Al] Z. Altshuler, *Uniform convexity in Lorenz sequence spaces*, Israel J. Math. 20 (1975), 260–274.

[ABV] J. Arias-de-Reyna, K. Ball, R. Villa, *Concentration of the distance in finite dimensional normed spaces*, no publicado.

[Ar] N. Aronszajn, *Differenciability of Lipschitzian mappings between Banach spaces*, Studia Math. 58 (1976), 147–190.

[Ba] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Chelsea, New York, 1933.

[Bar] F. Barthe, Geometric and Functional Analysis (pendiente de aparición).

[BB] J. Bastero, J. Bernués, *Applications of deviation inequalities on finite metric sets*, Math. Nachr. 153 (1991), 33–41.

[BBK] J. Bastero, J. Bernués, N. Kalton, *Embedding ℓ_∞^n-cubes in finite dimensional 1-subsymmetric spaces*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid 2 (1989), 47–52.

[BPS1] J. Bastero, A. Peña, G. Schechtman, *Embeddings ℓ_∞^n-cubes in the orbit of an element in commutative and noncommutative ℓ_p^n-spaces*, Seminario Dpto. Análisis Matemático, Univ. Complut. Madrid.

[BPS2] J. Bastero, A. Peña, G. Schechtman, *Embeddings ℓ_∞^n-cubes in low dimensional Schatten classes*, Geometric Aspects of Functional Analysis (Israel, 1992-1994) (1995), 5–11.

[Be] W. Beckner, *Inequalities in Fourier analysis*, Ann. of Math. 102 (1975), 159–182.

[Ber] J. J. Bernués, *Inclusiones asintóticas del ℓ_∞^n-cubo y de ℓ_p^n, $0 < p < 2$, en espacios de dimensión finita (Tesis Doctoral)*, Seminario Matemático García de Galdeano, 1991.

[BP1] C. Bessaga, A. Pelczyński, *Spaces of continuous functions (IV)*, Studia Math. 19 (1960), 53–62.

[BP2] C. Bessaga, A. Pelczyński, *Selected topics in infinite-dimensional topology*, PWN, Warszawa, 1975.

[Bo] E. Borel, *Introduction géometrique á quelques Théories physiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1914.

[Bor] C. Borell, *The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space*, Inventiones Math. 30 (1975), 205–216.

[BMW] J. Bourgain, V. Milman, H. Wolfson, *On type of metric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 294 (1986), 295–317.

[BL] H. J. Brascamp, E. H. Lieb, *Best constants in Young's inequality, its converse, and its generalization to more than three functions*, Advances in Math. 20 (1976), 151–173.

[BRR] J. A. C. Burlak, R. A. Rankin, A. P. Robertson, *The packing of spheres in the space ℓ_p*, Proc. Glasgow Math. Assoc. 4 (1958), 22–25.

[C] J. P. R. Christensen, *Measure Theoretic zero sets in infinite dimensional spaces and applications to differentiability of Lipschitz mappings, II*, Coll. Anal. Funct., Bordaux (1973), 29–39.

[Cl] J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 396–414.

[DF] P. Diaconis, D. Freedman, *A dozen de Finetti-style results in search of a theory*, Ann. Inst. H. Poincaré 23 (1987), 397–423.

[EO] J. Elton, E. Odell, *The unit ball of every infinite-dimensional normed linear space contains a $(1+\varepsilon)$-separated sequence*, Colloq. Math. 44 (1981), 105–109.

[E] R. Engelking, *General Topology*, PWN, Warszawa, 1977.

[F1] T. Figiel, *On non-linear isometric embeddings of normed linear spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. 16 (1968), 185–188.

[F2] T. Figiel, *On the moduli of convexity and smoothness*, Studia Math. 56 (1976), 121–155.

[FLM] T. Figiel, J. Lindenstrauss, V. D. Milman, *The dimension of almost spherical sections of convex bodies*, Acta Math. 139 (1977), 53–94.

[FL] Z. Füredi, P. A. Loeb, *On the best constant for the Besicovitch covering theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. (2) 121 (1994), 1063–1073.

[G] M. Gromov, *Filling Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. 18 (1983), 115–117.

[GM1] M. Gromov, V. D. Milman, *Brunn Theorem and a concentration of volume phenomena for symmetric convex bodies*, Geometric Aspects of Functional Analysis, Seminar Notes, Tel-Aviv (1983-1984).

[GM2] M. Gromov, V. D. Milman, *Generalization of the spherical isoperimetric inequality to uniformly convex Banach spaces*, Compositio Math. 62 (1987), 263–282.

[H] P. R. Halmos, *Teoría intuitiva de los conjuntos*, Compañía Editorial Continental, 1973.

[Ha] O. Hanner, *On the uniform convexity of L_p and ℓ_p*, Ark. Mat. 3 (1956), 239–244.

[Hu] H. Hudzik, *Lower and upper estimations of the modulus of convexity in some Orlicz spaces*, Arch. Math. 57 (1991), 80–87.

[K] J. P. Kahane, *Some random series of functions*, Heath Math. Monographs, 1968.

[Kn] D. E. Knuth, *The art of computer programming (Vol I) Fundamental Algorithms*, Addison-Wesley, Reading Mass, 1968.

[La] J. Larsson, *Embeddings of ℓ_p^m into ℓ_∞^n, $1 \leq p \leq 2$*, Israel J. Math. 55 (1986), 94–124.

[LeT] M. Ledoux, M. Talagrand, *Probability in Banach spaces*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1991.

[Le] P. Lèvy, *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1951.

[Li] J. Lindenstrauss, *On the modudlus of smoothness and divergent series in Banach spaces*, Michigan Math. J. 10 (1963), 241–252.

[LiT] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I and II*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[MT] R. P. Maleev, S. L. Troyanski, *On the moduli of convexity and smoothness in Orlicz spaces*, Studia Math 54 (1975), 131–141.

[M] L. Maligranda, *Indices and interpolation*, Dissertationes Math. 234 (1985), 1–54.

[Ma] P. Mankiewicz, *On the differentiability of Lipschitz mappings in Fréchet spaces*, Studia Math. 45 (1973), 15–29.

[Mau] R. D. Mauldin, *The Scottish Book*, Birkhäuser, Boston, 1981.

[Maur] B. Maurey, *Some deviation inequalities*, Geom. Funct. Anal. 1 (1991), 188–197.

[MU] S. Mazur, S. Ulam, *Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés*, Comptes Rendus de l'Acad des Sc. 194 (1932), 946–948.

[Mi] V. Milman, *A new proof of A. Dvoretzky's theorem on cross-sections of convex bodies*, Funktional. Anal. i Priložen 5 (1971), 28–37.

[MS] V. Milman, G. Schechtman, Lecture Notes in Mathematics 1200 (1986), Springer-Verlag, New York-Berlin.

[Mo] J. D. Monk, *Introduction to Set Theory*, McGraw-Hill, New York, 1969.

[Pe] C. M. Petty, *Equilateral sets in Minkowski spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 29 (1971), 369–374.

[Pi1] G. Pisier, *Remarques sur un Résultat non publié de B. Maurey*, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle, Exp. V (1980-1981).

[Pi2] G. Pisier, *The volume of convex bodies and Banach spaces geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[Po] H. Poincaré, *Calcul des probabilities*, Gauthier-Villars, Paris, 1912.

[R] S. Rolewicz, *Metric Linear Spaces*, Reidel - PWN, Dordrecht - Warszawa, 1985.

[S] M. Schmuckenschläger, *A concentration of measure phenomenon on uniformly convex bodies*, Geometric Aspects of Functional Analysis (Israel, 1992-1994) (1995), 275–287.

[Sc] J. Schreier, *Ein Gegenbeispiel zur Theorie der shwachen Konvergenz*, Studia Math 2 (1930), 58–62.

[Se] Z. Semadeni, *Banach Spaces of Continuous Functions*, PWN, Warszawa, 1971.

[Si] W. Sierpiński, *Cardinal and Ordinal Numbers*, PWN, Warszawa, 1958.

[Sim] J. B. Simonenko, *Interpolation and extrapolation of linear operators in Orlicz spaces (Russian)*, Mat.Sb. 63 (1964), 536–553.

[ST] V. Sudakov, B. Tsirelson, *Extremal properties of half spaces for spherically invariant measures*, Zap. Nauch. Sem. LOMI 41 (1974).

[T1] M. Talagrand, *A new isoperimetric inequality and the concentration of measure phe-*

nomenon, Geometric Aspects of Functional Analysis (Israel Seminar, 1989-1990). Lecture Notes in Math 1469 (1991), 94–124.

[T2] M. Talagrand, *The supremum of some canonical processes*, Amer. J. Math. 116 (1994), 283–325.

[V] R. Villa, *Isometric embedding into spaces of continuous functions*, Studia Math. 129 (1998), 197–205.

RAFAEL VILLA CARO
"Propiedades de Concentración en Espacios de Dimensión Finita. Inmersiones Isométricas en Espacios de Funciones Continuas".

SOBRESALIENTE CUM LAUDE (POR UNANIMIDAD)

21 Septiembre 98

Gabriel Vera

Jesús Bastero

Carlos Benítez Rodríguez

Luis Rodríguez Piazza

Rafael Villa

nomenon, Geometric Aspects of Functional Analysis (Israel Seminar, 1989-1990). Lecture Notes in Math 1469 (1991), 94–124.

[T2] M. Talagrand, *The supremum of some canonical processes*, Amer. J. Math. 116 (1994), 283–325.

[V] R. Villa, *Isometric embedding into spaces of continuous functions*, Studia Math. 129 (1998), 197–205.

...AFAEL Villa Caro,
...Propiedades de Concentración en Espacios de Dimensión
...Inmersiones Isométricas en Espacios de Funciones Continuas.
SOBRESALIENTE CUM ...
(POR UNANIMIDAD)
21 de septiembre 98

Gabriel Vera
José Bonet
Luis Rodríguez Piazza
Rafael Villa