FUNCIONES UNIVERSALES PARA OPERADORES DE COMPOSICIÓN EN SUPERFICIES DE RIEMANN

Alfonso Montes Rodríguez

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FUNCIONES UNIVERSALES PARA OPERADORES DE COMPOSICIÓN EN SUPERFICIES DE RIEMANN

Memoria presentada por
D. Alfonso Montes Rodríguez
para optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

Alfonso Montes Rodríguez

V° B° del Director

Luis Bernal

D. Luis Bernal González.
Profesor titular del Departamento de
Análisis Matemático de la
Universidad de Sevilla.

Sevilla, Octubre 1994.

TRIBUNAL DE LA TESIS DOCTORAL:

Prof. José María Martínez Ansemil (Univ. Complutense de Madrid).

Prof. Joel H. Shapiro (Michigan State University).

Prof. Juan Arias de Reyna Martínez (Universidad de Sevilla).

Prof. María Angeles Prieto Yerro (Universidad Complutense de Madrid).

Prof. Joaquín Ortega Aramburu (Universidad de Barcelona).

Cuando cursaba estudios de bachillerato y el profesor de matemáticas José Luis Sarriá acababa de probar la fórmula del coseno de la diferencia, me asombró tanto que exclamé: "¡Qué casualidad!". Él contestó: "La casualidad es que tú estés aquí". Desde luego, decía una verdad como un templo. Lo que él no imaginaba, ni tampoco yo, es que la casualidad pudiera llegar a ser tan grande. Quizás, esto sea una consecuencia más del caos en el que estamos inmersos. Si en el caos no pudieramos encontrar cierto orden dejaría de ser caos.

Quiero agradecer a mi director de tesis Luis Bernal la valiosa ayuda prestada. Su constante estímulo, paciencia y gentileza han sido indispensables en la realización de este trabajo.

También quiero agradecer los comentarios y sugerencias de los Profesores Luis Rodríguez Piazza, Gillermo Curbera y Juan Arias de Reina.

Por último, mi agradecimiento a Antonio Quintero y Rafael Ayala del Departamento de Topología por la aportación de material y bibliografía que ha facilitado la realización de este trabajo.

A Pirinda y Kititos

Indice.

Introducción.

En 1929 G. D. Birkhoff [**Bi**] probó que existe una función entera tal que el conjunto de sus composiciones con las traslaciones es denso en el espacio de las funciones enteras con la topología de la convergencia uniforme en compactos (véase teorema 0.3.1). Este resultado fue generalizado en 1941 por Seidel y Walsh [**SW**] en el que probaron un teorema análogo para el disco unidad reemplazando las traslaciones euclídeas por traslaciones no euclídeas (véase teorema 0.3.2).

En 1952 G. R. MacLane [**Ma**] encontró una función entera tal que sus derivadas son densas en el espacio de las funciones enteras con la topología de la convergencia uniforme en compactos.

Funciones con un comportamiento tan "caótico" son las que han venido a llamarse funciones universales (ver definición 0.3.5).

Los trabajos mencionados anteriormente son considerados clásicos en la literatura. En años más recientes el estudio de las funciones universales ha seguido principalmente dos direcciones. Una en que se ataca el problema usando técnicas de demostración basadas en teoremas de aproximación en variable compleja –como son el teorema de Runge y el teorema de aproximación de Mergelyan– y otra dirección en que se hace un estudio del problema desde el punto de vista de la teoría de operadores.

Como ejemplos de los trabajos en que se usan técnicas de aproximación en variable compleja caben destacar los de W. Luh [**Lu1-3**], Große-Erdmann [**Gr1-**

2], Blair y Rubel [BR], L. Bernal [Ber] y P. Zappa [Za]. Rubel y Blair (1984) demuestran la existencia de una funcíon entera triplemente universal, es decir, una función que es universal no sólo en el sentido de Maclane y en el sentido de las traslaciones sino también en el sentido de las antiderivadas.

Los teoremas de Birkhoff y de Seidel-Walsh admiten un enunciado común, a saber, establecen que existe una función holomorfa en una región simplemente conexa (el plano complejo y el plano hiperbólico respectivamente) tal que, compuesta con traslaciones, es densa en el espacio de las funciones holomorfas en la región.

En [Za] (1989) hay un intento de generalización de los teoremas de Birkhoff y Seidel-Walsh a cualquier región del plano (es decir, un abierto conexo) sustituyendo las traslaciones por el grupo de automorfismos de la región. P. Zappa obtiene en particular que si Ω es el plano punzonado, es decir el plano menos un punto, se puede conseguir una función holomorfa en Ω que compuesta con los automorfismos de Ω es densa en el espacio de las funciones continuas sobre un compacto y holomorfas en el interior del compacto para cualquier subconjunto compacto de Ω cuyo complemento sea conexo (véase teorema 0.3.3). Para superficies de Riemann no compactas señala que es posible obtener el mismo resultado para compactos que poseen un sistema de entornos simplemente conexos (véase teorema 0.3.4).

Como siempre ocurre en otras muchas situaciones en matemáticas, lo que resulta extraño a nuestra intuición o incluso difícil de encontrar resulta que es la "inmensa mayoría", al menos en un sentido topológico. Esto lo probó Duios-Ruis [Dui] (1984). En este artículo se prueba que el conjunto de las funciones universales en el teorema de Birkhoff es un conjunto residual en el espacio de las funciones enteras. Además, prueba que las funciones universales en el teorema de Birkhoff pueden tener un crecimiento arbitrariamente "lento". Este resultado fue refinado por Chan y Shapiro [CS].

Los trabajos basados en la teoría de operadores tienen su origen en los trabajos de Rolewicz [Ro], en que prueba la existencia de vectores universales para desplazamientos hacia atrás (backwardshifts) en espacios de Hilbert, la tesis de C. Kitai [Ki], en la que se estudian conjuntos cerrados invariantes por operadores lineales, y el artículo de Gethner y Shapiro [GS]. En este último se prueba que hay una condición suficiente y sencilla que da una prueba unificada de existencia de funciones universales. no sólo en los teoremas de Birkhoff, Seidel-Walsh, MacLane y Rolewicz, sino también en otras muchas situaciones. Ciertamente, para la prueba del teorema de Birkhoff se usa que los polinomios son densos en el espacio de las funciones enteras y esto es la versión más simple del teorema de Runge (véase [Ru. p. 290]).

Un problema relacionado con los vectores universales es el de encontrar subespacios vectoriales. densos e invariantes. Un vector se dice ***cíclico*** para un operador en un espacio de Banach si el subespacio lineal engendrado por su órbita es denso en el espacio. Si la órbita misma es densa se dice ***hipercíclico***. La importancia de los vectores cíclicos se deriva del estudio de los subespacios invariantes. El subespacio lineal cerrado engendrado por la órbita de un vector es el subespacio cerrado más pequeño invariante bajo la acción del operador que contiene al vector. Por tanto. un operador no tiene subespacios invariantes cerrados no triviales si y solo si cada vector distinto de cero es cíclico. De manera similar un operador no tiene un subconjunto invariante cerrado no trivial si y sólo si cada vector distinto de cero es hipercíclico. Esto por tanto ha de estar relacionado con el problema de encontrar un operador que no tenga ningún subespacio cerrado invariante. Enflo [En] ha demostrado que existe un espacio de Banach en el que existe un operador que no tiene ningún subespacio cerrado invariante no trivial. C. Read en [Re1-2] da una simplificación de la demostración de Enflo. Sin embargo. como es bien sabido. para el caso de espacios de Hilbert el problema del subespacio invariante continúa abierto.

Beauzamy [Be 2-3]. ha modificado las técnicas profundas de Enflo para construir un operador en un espacio de Hilbert que tiene un subespacio vectorial denso e invariante en el cual, excepto para el vector nulo, todos los vectores son hipercíclicos. Por tanto, tomando la restricción de tal operador, ese subespacio vectorial es un espacio prehilbertiano con ningún subconjunto invariante propio.

En esta dirección cabe destacar el artículo de Godefroy y Shapiro **[GoS]** (1991), donde dan condiciones elementales que son suficientes para establecer los teorema de Beauzamy y otro de Hilden-Wallen **[HW]** para ciertas clases de operadores en marcos bastante generales. P. Bourdon **[Bo]** (1993) prueba que para cualquier operador T en un espacio de Banach X para el cual existe un vector hipercíclico, también existe un subespacio vectorial invariante denso que consta, excepción hecha del vector nulo, de vectores hipercíclicos.

Recientemente Shapiro ha escrito un libro acerca de operadores de composición en el espacio de Hardy H^2 (**[Sh]**) en el que se estudia también vectores hipercíclicos (véase especialmente capítulos 7 y 8 y también **[BS]**).

Nosotros nos centraremos en los operadores de composición en el espacio de las funciones holomorfas en una superficie de Riemann no compacta.

En primer lugar comenzamos preguntándonos si la generalización de P. Zappa a superficies de Riemann es la mejor posible. En concreto, caben hacerse las siguientes preguntas: ¿En qué superficies de Riemann se puede enunciar un teorema totalmente análogo al de Birkhoff y Seidel-Walsh?. En caso de que en una superficie de Riemann no funcione el análogo al teorema de Birkhoff ¿es posible mejorar el tipo de compactos para los que existe una función universal dado por P. Zappa? ¿Es posible cambiar los automorfismos por aplicaciones más generales? Todas estas preguntas quedan contestadas casi completamente en los teoremas 2.2.8, 2.3.18, 2.3.22, y 2.3.25 del Capítulo 2.

Esta memoria está dividida en cuatro capítulos. En el capítulo cero de preliminares introducimos la notación y recordamos los elementos necesarios que utilizaremos más tarde en el resto de este trabajo. De este capítulo tendrá una especial importancia todo lo referente a la compactificación de Freudenthal y a las sucesiones exhaustivas de subconjuntos compactos de una superficie.

En el capítulo primero, que se puede considerar introductorio, definimos (definición 1.1.1) lo que es una sucesión fugitiva de automorfismos en una región del plano complejo. Encontraremos que esta definición generaliza y permite un tratamiento simultáneo de los teoremas de Birkhoff, Seidel-Walsh y Zappa. También se caracterizan las sucesiones de automorfismos que verfican esa propiedad. De la caracterización de las sucesiones de automorfismos fugitivas del capítulo primero se observa que, debido a la "rigidez" de los automorfismos, son relativamente pocas las regiones con sucesiones de automorfimos fugitivas. Es por lo que se hace necesario generalizar el concepto de fugitividad a sucesiones que no constan necesariamente de automorfismos.

En el segundo capítulo generalizamos la definición 1.1.1 no sólo para sucesiones de automorfismos sino también para cierto tipo de sucesiones de aplicaciones más generales y nos situamos en el contexto, ya completamente general, de una superficie de Riemann no compacta. Se prueba que la definición de fugitividad es una propiedad topológica muy fuerte y logramos generalizar los teoremas de Birkhoff y Seidel-Walsh a las superficies de Riemann no compactas, que no son "similares" en cierto sentido al plano punzonado, para una clase de sucesiones más generales que las de automorfismos (teorema 2.3.22). También sin ninguna restricción sobre las superficies de Riemann mejoramos el tipo de compactos para los cuales existe una función universal. Terminamos el capítulo demostrando que las condiciones impuestas sobre las sucesiones son esencialmente necesarias. La técnica seguida en las demostraciones de los teoremas principales de este capítulo pone en conexión las de la teoría de aproximación y las de la teoría de operadores.

En el capítulo tercero nos planteamos un problema completamente diferente. Recientemente se ha estudiado la existencia de subespacios vectoriales cerrados de dimensión infinita de funciones que no son diferenciables en ningún punto en el espacio de las funciones continuas (véase **[FGK]**, **[Gu]** y **[Ro]**). También en el campo de las ecuaciones diferenciales es conocido que las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales no forman espacio vectorial y se intenta encontrar un subconjunto de soluciones que sí formen espacio vectorial. Nosotros planteamos el problema de encontrar un espacio cerrado de funciones universales de dimensión infinita y damos una respuesta afirmativa. Este interesante resultado es completamente nuevo y complementa el resultado mencionado anteriormente de P. Bourdon. Además, otra vez se observan interesantes conexiones entre las técnicas de la teoría de aproximación y las de operadores. En la demostración que damos del teorema principal juega un papel fundamental el hecho de que una perturbación de una sucesión básica en un espacio de Banach es también una sucesión básica.

Una buena parte de los resultados del capítulo primero está contenida en el capítulo segundo. El hecho de elegir este orden se debe a que fueron los primeros resultados que obtuvimos y se tiene que volver a estos métodos en el tercer capítulo. Por otra parte, los resultados del segundo capítulo son posteriores en el tiempo a los del tercer capítulo. Además, por el momento sólo los resultados de los capítulos primero y tercero han sido aceptados para publicación (véase **[BM1-2]**).

Para terminar, decir que a lo largo de esta introducción hemos mencionado alguna vez la palabra "caótico". Devaney **[De**, p. 50**]** ha propuesto la siguiente definición: una aplicación continua entre dos espacios métricos es ***caótica*** si es topológicamente transitiva (es decir, algún elemento tiene órbita densa), tiene un conjunto denso de puntos periódicos y posee cierta "sensibilidad" a las condiciones iniciales. Ejemplos de este tipo de aplicaciones son las iteradas de funciones racionales actuando sobre sus conjuntos de Julia. Que ciertos operadores que aquí manejamos son caóticos en el sentido de Devaney, fue probado por Godefroy y Shapiro (véase **[GoS**, sección 6**]**); en concreto lo son las iteradas de los operadores que inducen las traslaciones en el espacio de las funciones enteras.

Preliminares.

Este capítulo está dividido en tres secciones. En la primera sección recordamos el concepto de superficie así como algunos resultados conocidos sobre ellas. En la segunda sección entramos en el concepto de superficie de Riemann y enunciamos algunos de los teoremas más importantes que usaremos en los capítulos que siguen. Por último, en la última sección nos introduciremos en el tema propiamente dicho de los operadores de composición. También a lo largo de este capítulo iremos presentando la notación utilizada en el resto de esta memoria.

Sección 1: Superficies.

Siguiendo a Ahlfors y Sario [AS] una superficie de Riemann es, en primer lugar, una superficie y sus propiedades dependen en gran medida del carácter topológico de la superficie. Como veremos a lo largo de los siguientes capítulos, este trabajo es en cierto sentido un buen ejemplo de este hecho. Los resultados dependen en gran parte de lo que presentamos en esta sección. En lo que sigue seguimos fundamentalmente [AS] y [Sp], pero muchos de los hechos que se describen también se pueden encontrar en cualquiera de los numerosos libros sobre topología geométrica, por ejemplo [Mo], [St] y [Ar], por citar algunos.

Denotaremos por $\mathbb{C}$ el plano complejo. Siempre que tengamos $z \in \mathbb{C}$ supondremos que $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ denota el cuerpo de los números reales. Las partes real e imaginaria de z se denotarán Rez e Imz respectivamente.

El disco unidad es $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \sqrt{x^2 + y^2} < 1\}$ y el disco unidad cerrado es $\bar{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

1. Superficies. Una *superficie* es un espacio de Hausdorff conexo y segundo numerable tal que todo punto tiene un entorno homeomorfo a un subconjunto abierto del plano.

Una *superficie con borde* es un espacio de Hausdorff, conexo y segundo numerable tal que todo punto tiene un entorno homeomorfo a un subconjunto abierto del semiplano cerrado $\{z \in \mathbb{C} : Im z \geq 0\}$ y que además no es una superficie.

Dada una superficie R diremos que $U \subset R$ es una *región* si es un abierto conexo. Se deduce de la definición de superficie que una región es también una superficie.

Desde luego se puede quitar la propiedad de segundo numerable en la definición de superficie. No obstante, sólo estamos interesados en superficies de Riemann, para las cuales existe un teorema debido a Radó que afirma que son segundo numerables.

En las superficies $\bar{R}$ con borde es posible distinguir dos elementos complementarios: aquellos puntos que se aplican siempre sobre el eje X que denotamos por B y los que nunca lo hacen que denotamos por R. Se tiene que R es un abierto y B es un cerrado distinto de vacío. B es el *borde* de $\bar{R}$. Cada componente conexa de B se le llama *componente frontera*. A R se le llama el interior de $\bar{R}$ y es una superficie (véase [AS, pp. 23-25]).

Recordamos que toda superficie R con o sin borde es *arcoconexa*, esto es, para todo $z_1, z_2 \in R$ existe un arco uniendo z_1 con z_2, es decir, una aplicación continua $\gamma : [0,1] \to R$ con $\gamma(0) = z_1$ y $\gamma(1) = z_2$. Más aún, si z_1 y z_2 están en el borde de una superficie se pueden unir mediante un arco que está contenido en el interior de la superficie excepto sus puntos extremos.

2. Triangulaciones. Aquí R representa una superficie con o sin borde. Denotamos por e^0, e^1 y e^2 los conjuntos formados por un punto del plano, un segmento y un triángulo cerrado respectivamente. Un *n-simplex*, $n = 0,1,2$ sobre una superficie R es una aplicación φ inyectiva y continua de e^n en R. Un punto $z \in R$ se dice que pertenece a s^n si z pertenece a $\varphi(e^n)$. Las imágenes de los lados y vértices de e^2 se llaman *lados* y *vértices* de s^2 respectivamente, y a s^2 se le llama un triángulo sobre R.

Una *triangulación* T sobre una superficie R es una colección de triángulos que recubren R la cual verifica:

i) Si z pertence a un triángulo s^2 y no es un lado ni un vértice de ese triángulo, entonces s^2 es el único triángulo que contiene a z siendo además un entorno de z.

ii) Si z pertence a un lado s^1 de un triángulo s_1^2 y no es un vértice de s^1, entonces existe un único triángulo $s_2^2 \neq s_1^2$ tal que $s_1^2 \cap s_2^2 = s^1$ y $s_1^2 \cup s_2^2$ es un entorno de z.

iii) Si z es un vértice de s_1^2 existe un número finito de triángulos $s_1^2, s_2^2, ..., s_k^2$ que tienen a z como vértice, de forma que s_j^2 y s_{j+1}^2 tienen un lado en común y s_k^2 tiene un lado en común con s_1^2. Además estos triángulos son los únicos que contienen a z y su unión es un entorno de z.

Toda superficie con o sin borde es triangularizable y además el número de elementos de T es numerable.

3. Orientabilidad. Un n-simplex ($n = 0, 1$ o 2) sobre una superficie se dice que está *orientado* si sus $n+1$ vértices se dan en un orden especificado. Dos órdenes definen la misma orientación en un simplex s^n si se pueden obtener uno del otro mediante una permutación impar. En un triángulo con vértices z_1, z_2, z_3 es posible dar las dos siguientes orientaciones $(z_1, z_2, z_3) = (z_2, z_3, z_1) = (z_3, z_1, z_2)$ y $(z_3, z_2, z_1) = (z_2, z_1, z_3) = (z_1, z_3, z_2)$. Es claro que una orientación en un 2-simplex induce una orientación en cada uno de los 1-simplex que forman sus lados. Dos triángulos adyacentes se dicen *coherentemente* orientados si inducen orientaciones opuestas en su lado común.

Una superficie se dice *orientable* si existe una triangularización sobre ella en que todos los triángulos adyacentes están coherentemente orientados.

En lo que sigue sólo nos ocuparemos de las superficies orientables. Es un hecho conocido que las superficies orientables admiten una inmersión en $\mathbb{R}^3$, el espacio euclídeo de dimensión 3.

4. Clasificación de superficies compactas. Una superficie compacta se dice que tiene el borde vacío. Para una superficie compacta con borde se tiene que el número de componentes frontera es finito. Si K es una superficie (con o sin borde) compacta, entonces cualquier triangulación tiene un número finito de triángulos. Esto permite definir fácilmente la característica de Euler $\mathcal{X}(K)$ para una superficie compacta con o sin borde. Si la triangularización T contiene F caras, E lados y V vértices, entonces la característica de Euler $\mathcal{X}(K)$ de K es por definición $\mathcal{X}(K) = F - E + V$. El hecho crucial y bien conocido es que $\mathcal{X}(K)$ es un invariante topológico y es independiente de la triángulación particular T usada. Para una superficie orientable compacta (con o sin borde) que tenga m componentes frontera es posible definir el *género* g de K mediante la fórmula

$$g = \frac{2 - m - \mathcal{X}(K)}{2}$$

que siempre es un número natural.

En [AS p. 98] (entre otros) se puede encontrar el siguiente

TEOREMA 0.1.1. *Dos superficies orientables (con o sin borde) compactas son homeomorfas si y sólo si tienen el mismo género y mismo número de componentes frontera.*

Utilizando el teorema anterior es posible encontrar modelos canónicos de superficies compactas con borde con m componentes fronteras y de género g.

Llamaremos ***disco topológico*** a la imagen por una aplicación inyectiva y bicontinua del disco $\mathbb{D}$. Llamaremos ***disco topológico abierto*** a la imagen de $\mathbb{D}$ por la misma aplicación y llamaremos ***circunferencia topológica*** a la imagen mediante la misma aplicación de la frontera del disco $|z| = 1$, es decir un arco simple y cerrado.

Dados m y g números enteros no negativos podemos quitar a una esfera la imagen de $m+2g$ discos topológicos abiertos y disjuntos (Aquí, "disjunto" siempre se refiere a la imagen de de los discos cerrados correspondientes). Entonces podemos unir mediante cilindros $2g$ de estos discos. Esta superficie comúnmente se dice que es homeomorfa a una esfera con g asas a la cual se le han quitado m discos topológicos abiertos y disjuntos. Resulta que esta superficie tiene género g y m componentes frontera. Por el teorema de clasificación toda superficie compacta es homeomorfa a una superficie construida de esta manera.

Dada una superficie no compacta R se dice que es de género finito g si existe una subsuperficie compacta $K \subset R$ con borde de género g y cualquier otra subsuperficie K_1 conteniendo a K es del mismo género. En caso contrario se dirá que es de género infinito. Una superficie se dice ***plana*** si su género es 0. Toda superficie plana es homeomorfa a una superficie contenida en el plano. Reservaremos la notación Ω para superficies planas.

5. Sucesiones exhaustivas. Dada una superficie R no compacta se dice que la sucesión $\{K_n\}_{n\geq 0}$ de subconjuntos compactos de R es *exhaustiva* si $K_n \subset intK_{n+1}$ y $R = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$. En toda superficie no compacta existen sucesiones exhaustivas de conjuntos compactos. Por $intA$ denotaremos el interior de un subconjunto $A \subset R$.

Ciertos tipos de compactos tendrán una importancia especial. Un subconjunto compacto $K \subset R$ se dice *Runge* en R si todas las componentes conexas de $R \setminus K$ son no relativamente compactas (es decir, de clausura no compacta). El conjunto de los subconjuntos compactos que son Runge en R lo denotaremos por $\mathcal{K}(R)$. Otro tipo de compactos que jugará un papel importante son los subconjuntos compactos de R cuyo complemento es conexo en R. Éstos los denotaremos por $\mathcal{K}_1(R)$.

En [Fo, p. 188] por ejemplo, se demuestra la existencia de sucesiones exhaustivas de subconjuntos compactos que son Runge en una superficie no compacta R. La siguiente propiedad de los compactos que son Runge en R se usará muy a menudo. Ya que no hemos encontrado una referencia precisa, damos aquí una demostración. En [Na, p. 112] se puede encontrar una demostración bastante analítica para superficies planas.

PROPIEDAD 0.1.2. *Sea R una superficie no compacta. Entonces para todo subconjunto compacto $K \in \mathcal{K}(R)$, se tiene que el número de componentes conexas de $R \setminus K$ es finito.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\{U_j\}_{j\in J}$ la familia de las componentes conexas de $R \setminus K$, las cuales son no relativamente compactas. Sea un conjunto compacto K_1 tal que $K \subset intK_1$. Entonces toda componente U_j corta a K_1 pues si U_j no corta a K_1, estaría contenida en $R \setminus intK_1$ y entonces para la clausura de U_j tendríamos $\bar{U}_j \subset R \setminus intK_1 \subset R \setminus K$ y puesto que U_j es una componente conexa de $R \setminus K$, esto implicaría $U_j = \bar{U}_j$. Luego sería abierta y cerrada y distinta de $\emptyset$ y de R, lo cual está en contradicción con la conexión de R.

Para toda componente U_j se tiene que $U \cap FrK_1 \neq \emptyset$. Si no, otra vez se tendría que $U_j \cap intK_1 = U_j \cap K_1$ es un conjunto abierto y cerrado en U_j que es no vacío; puesto que U_j es conexo se tendría que $U_j \cap K_1 = U_j$ y U_j sería relativamente compacta, lo cual está en contradicción con que K es Runge.

Podemos concluir que el número de componentes conexas de $R \setminus K$ es finito ya que éstas son un recubrimiento por abiertos disjuntos de FrK_1 y éste es un compacto, por lo que se puede extraer un subrecubrimiento finito. □

Otra propiedad importante es que si R es una superficie no compacta entonces $\mathcal{K}_1(R) \subset \mathcal{K}(R)$. Ya que si $K \in \mathcal{K}_1(R)$ la única componente de $R \setminus K$ ha de ser no relativamente compacta pues, si no es así, R se puede escribir como unión de dos compactos y por tanto sería compacta, lo cual es una contradicción. Notemos también que, evidentemente, $\mathcal{K}_1(\mathbb{C}) = \mathcal{K}(\mathbb{C})$.

Necesitaremos sucesiones exhaustivas de compactos "muy regulares". En [BrM] y [Ri] se demuestra que en cualquier superficie no compacta es posible obtener una sucesión exhaustiva $\{K_n\}_{n\geq 0}$ de subconjuntos compactos la cual tiene las propiedades siguientes:

i) Cada K_n es una superficie con borde.

ii) Toda componente de $R \setminus K_n$ es no relativamente compacta y es o bien plana o de género infinito.

iii) La intersección de la clausura de cada componente conexa U de $R \setminus K_n$ con K_n es una única circunferencia topológica.

Esta sucesión exhaustiva de subconjuntos compactos tiene además las siguientes propiedades: por ser cada K_n una superficie con borde compacta, es de género finito y tiene un número finito de componentes frontera y es conexo. Es decir, cada K_n es homeomorfo a una esfera con un número finito de asas de la cual se ha quitado un número finito de discos topológicos abiertos disjuntos y además, y esto es importante para nosotros, la propiedad iii) implica que cada K_n tiene el mismo número de componentes frontera que componentes conexas tiene $R \setminus K_n$.

La tercera propiedad se interpreta geométricamente que la sucesión exhaustiva es elegida "sin cortar asas" (véase Fig. 3, p. 14).

Denotamos por $\mathcal{K}'(R)$ el subconjunto de $\mathcal{K}(R)$ que verifica las propiedades i), ii) y iii) anteriores. Desde luego es posible encontrar superficies R no compactas en las cuales existen subconjuntos de $\mathcal{K}(R)$ que son homeomorfos a una esfera con un número finito de asas de la cual se han quitado un número finito de discos topológicos abiertos y disjuntos y no están en $\mathcal{K}'(R)$ pero sí están en $\mathcal{K}(R)$. Denotamos $\mathcal{K}'_1(R) = \mathcal{K}'(R) \cap \mathcal{K}_1(R)$, es decir, aquellos subconjuntos de $\mathcal{K}_1(R)$ que son homeomorfos a una esfera con número finito de asas de la cual se ha quitado un *único* disco topológico abierto. También estos conjuntos tendrán una especial importancia en el Capítulo 2.

6. Compactificación de Freudenthal. (Véase **[Fr1]**, **[Fr2]** y **[Ch**, pp. 81-91**]**) En el contexto de superficies de Riemann esta compactificación suele llamarse también compactificación de Stoilow (véase **[AS**, pp. 81-87**]** y **[SN**, pp. 250-251**]**).

Dada una superficie R no compacta necesitamos una compactificación de R que distinga los "agujeros" de R. Intuitivamente la compactificación de Freudenthal se obtiene llenando cada agujero por un punto distinto. Resulta que es la compactificación más adecuada a nuestros propósitos.

Para la definición de sistema inverso y límite inverso y la proposición 0.1.3

véase [CV, pp. 169 y ss.] y [Du, pp. 427 y ss.].

Un *orden* en un conjunto D es una relación binaria "$\geq$" la cual es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Un conjunto ordenado $(D, \geq)$ se dice ***dirigido*** supuesto que para cada par $\alpha, \beta \in D$ existe un $\delta \in D$ tal que $\delta \geq \alpha$ y $\delta \geq \beta$. El par $(D, \geq)$ se llama entonces un conjunto dirigido.

Sea D un conjunto dirigido y sea $\{X_\alpha : \alpha \in D\}$ una familia de conjuntos. Supongamos que cada par α, β con $\beta \geq \alpha$ existe una aplicación $f_{\alpha\beta} : X_\alpha \to X_\beta$ tal que

i) $f_{\alpha\alpha}$ es la identidad en X_α.

ii) $f_{\alpha\beta} f_{\beta\gamma} = f_{\alpha\gamma}$ si $\gamma \geq \beta \geq \alpha$.

La tripleta $(X_\alpha; f_{\alpha\beta}, D)$ se llama ***sistema inverso.***

Dado un sistema inverso $S = (X_\alpha; f_{\alpha\beta}, D)$, se define el ***límite inverso*** de S como el subconjunto X_∞ del producto cartesiano $\prod\{X_\alpha : \alpha \in D\}$ que consta de los puntos (x_α) tales que $x_\alpha = f_{\alpha\beta}(x_\beta)$ cuando $\beta \geq \alpha$. X_∞ también se denota por $\varprojlim S$.

Dado un conjunto dirigido $(D, \geq)$, un subconjunto $D' \subset D$ se dice que es *cofinal* en D si para cada $\delta \in D$ existe $\delta' \in D'$ tal que $\delta' \geq \delta$. Se verifica la siguiente

PROPOSICIÓN 0.1.3. *Si D' es cofinal en D y X'_∞ es el limite inverso de $(X_\alpha, f_{\alpha\beta}, D')$, entonces existe una aplicación biyectiva entre X'_∞ y X_∞.*

La familia de todos los subconjuntos compactos de un espacio topológico X

puede ser dirigida por la inclusión $K \geq L$ si $L \subset K$.

Ahora estamos en posición de definir el concepto de final de Freudenthal en una superficie.

Si X es un espacio no compacto, localmente compacto, conexo, localmente conexo y segundo numerable, es posible considerar una sucesión exhaustiva de subconjuntos compactos $\{K_n\}_{n\geq 0}$ con $K_n \subset intK_{n+1}$ y $X = \bigcup_{n\geq 0} K_n$. La sucesión de conjuntos compactos puede ser dirigida mediante el orden $K_m \geq K_n$ si $K_n \subset K_m$.

Claramente, la sucesión exhaustiva de subconjuntos compactos es cofinal respecto la familia de todos los subconjuntos compactos de X con el orden inducido por la inclusión. Si denotamos por $\pi_0(X \setminus K_n)$ el conjunto de las componentes conexas de $X \setminus K_n$, entonces podemos considerar el límite inverso $\mathcal{F}(X) = \varprojlim \pi_0(X \setminus K_n)$ del sistema inverso $\{\pi_0(X \setminus K_n); i_{nm}, \{K_n\}_{n\geq 0}\}$ donde $i_{nm} : K_n \to K_m$ denota la inclusión natural cuando $m \geq n$. Es una consecuencia de la proposición 0.1.3 que el conjunto $\mathcal{F}(X)$ es independiente de la sucesión de conjuntos compactos $\{K_n\}_{n\geq 0}$, y cada elemento de $\mathcal{F}(X)$ se llama *un final de Freudenthal* o simplemente un *final*.

Por definición un final está determinado por una sucesión estrictamente decreciente $\{U_n\}_{n\geq 0}$, donde cada U_n es una componente conexa de $X \setminus K_n$. Dos sucesiones $\{U_n\}_{n\geq 0}$ y $\{U'_n\}_{n\geq 0}$ correspondientes a dos sucesiones exhaustivas de subconjuntos compactos de X, $\{K_n\}_{n\geq 0}$ y $\{K'_n\}_{n\geq 0}$ determinan el mismo final si y sólo si U_n contiene algún U'_m y viceversa.

El espacio de Freudenthal asociado a X se define como $\hat{X} = X \cup \mathcal{F}(X)$ con la topología generada por la base de conjuntos abiertos de la topología de X y los conjuntos $\hat{U} = U \cup U^*$ donde $U \in \pi_0(X \setminus K_n)$ y U^* es el conjunto de los finales determinados por alguna sucesión $\{U_m\}_{m\geq 0}$ con algún $U_m \subset U$ (en este caso diremos que U *determina* U^*). Obsérvese que, ya que X es segundo numerable, también lo es $\hat{X}$. El espacio $\hat{X}$ es una compactificación de Hausdorff de X, i.e., X es un conjunto denso de $\hat{X}$ y $\hat{X}$ es un espacio de Hausdorff.

Un espacio topológico se dice *cero dimensional* si cada punto tiene una base de entornos de conjuntos abiertos y cerrados. Un conjunto se dice que es *totalmente disconexo* si las únicas componentes conexas no vacías de X son los conjuntos unitarios.

Se tiene que $\mathcal{F}(X)$ es cero dimensional y totalmente disconexo. Más aún, $\mathcal{F}(X)$ es homeomorfo a un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor. Por tanto es compacto y metrizable. De hecho, $\hat{X}$ es la máxima compactificación de X tal que $\hat{X} \setminus X$ es cero dimensional.

Por otra parte, puesto que toda superficie R no compacta satisface todas las condiciones topológicas de arriba, podemos asumir que hemos construido su compactificación de Freundenthal $\hat{R}$.

Finalmente, notamos que un subconjunto compacto $K \subset R$ es Runge en R si y sólo si cada componente conexa de $\hat{R} \setminus K$ contiene, al menos, un final si y sólo si el conjunto de los finales determinados por cada componente conexa de $R \setminus K$ no es el conjunto vacío.

7. Clasificación de las superficies no compactas. Lo que sigue está recogido de [DH]. En este punto daremos una breve descripción geométrica de las superficies orientables no compactas. No obstante, en lo sucesivo no haremos ninguna referencia a este punto. Pero resulta ventajoso para la comprensión tener una imagen intuitiva de las superficies. Siguiendo a Ahlfors [Ah] *la intuición geométrica es una fuente de conocimiento. Las representaciones geométricas mentales ayudan y guían nuestra intuición.*

En 1963 Ian Richards [Ri] dio una clasificación completa de las superficies no compactas. Aquí sólo discutiremos las orientables. En lo que sigue $\mathcal{F}$ denota el conjunto de sus finales de Freudenthal de la superficie que se trate.

En primer lugar nos encontramos con las superficies planas. El sistema característico de una superficie plana será $(0, \mathcal{F}, \emptyset)$. Un final de una superficie se dice *plano* cuando admite una representación por una sucesión $\{U_n\}_{n\geq 0}$ en que algún término de la sucesión es plano. En caso contrario diremos que el final es *no plano* y al conjunto de estos finales lo representaremos por $\mathcal{F}^{np}$, el cual es cerrado.

Para una superficie orientable de género finito todos los finales serán planos. El sistema característico de una superficie orientable de género finito g será $(g, \mathcal{F}, \emptyset)$.

Por último una superficie orientable de género infinito debe admitir forzosamente un final no plano y su sistema característico se representa por $(\infty, \mathcal{F}, \mathcal{F}^{np})$.

Dos sistemas característicos se dicen isomorfos si cada coordenada de la terna que los definen son iguales u homeomorfos según el caso. El teorema de clasificación de superficies no compactas afirma que dos superficies son homeomorfas si y sólo si sus sistemas característicos son homeomorfos.

Ahora construiremos ejemplos de las superficies que acabamos de describir las cuales se deducen del Árbol de Cantor mediante construcciones geométricas.

Para cada número natural $n \geq 0$ se definen los siguientes puntos:

i) Para $n = 0$ se considera el punto $(\frac{1}{2}, -1)$ y el conjunto $A_0 = \{1\}$.

ii) Si $n = 1$, se considera los puntos $(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2})$ y $(\frac{5}{6}, -\frac{1}{2})$ y el conjunto $A_1 = \{1, 5\}$.

iii) Supuesto que $\{(\frac{a}{2\cdot 3^r}, -\frac{1}{2^r}) : a \in A_r\}$ es el conjunto de puntos definidos para $n = r$. Entonces, para $n = r+1$ consideramos el conjunto de puntos $\{(\frac{b}{2\cdot 3^{r+1}}, -\frac{1}{2^{r+1}}) : b \in A_{r+1}\}$ y el conjunto $A_{r+1} = A_r \cup \{2\cdot 3^{r+1} - a : a \in A_r\}$. A partir de este conjunto de puntos se construye el arbol $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ de Cantor que se define por la familia de segmentos

$$I_{(r,a)} = [x_{(r,a)}, x_{(r+1,3a-2)}] \quad \text{y} \quad D_{(r,a)} = [x_{(r,a)}, x_{(r+1,3a+2)}]$$

donde $x_{(r,a)} = (\frac{a}{2\cdot 3^r}, -\frac{1}{2^r})$, $r \in \mathbb{N}$, $a \in A_r$. Su espacio de finales es el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$. A todo subespacio cerrado $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}$ se le puede asociar un subárbol del árbol de cantor cuyo espacio de finales es precisamente $\mathcal{F}$.

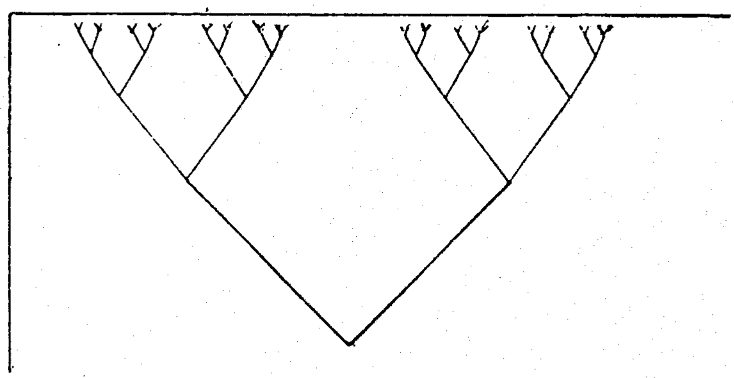

Fig. 1. Árbol de Cantor.

Los subárboles $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ se consideran inmersos en $\mathbb{R}^3$. Se tiene que el borde de un entorno regular de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ en $\mathbb{R}^3$ es una superficie plana cuyo sistema característico es $(0, \mathcal{F}, \emptyset)$. Esta superficie se denotará por $S(0, \mathcal{F}, \emptyset)$. Con lo cual se obtiene una representación canónica de los conjuntos abiertos y conexos del plano. Véase la figura 2.

La suma conexa de $S(0, \mathcal{F}, \emptyset)$ con una superficie orientable de género g produce una superficie orientable $S(g, \mathcal{F}, \emptyset)$ de género finito cuyo sistema característico es $(g, \mathcal{F}, \emptyset)$.

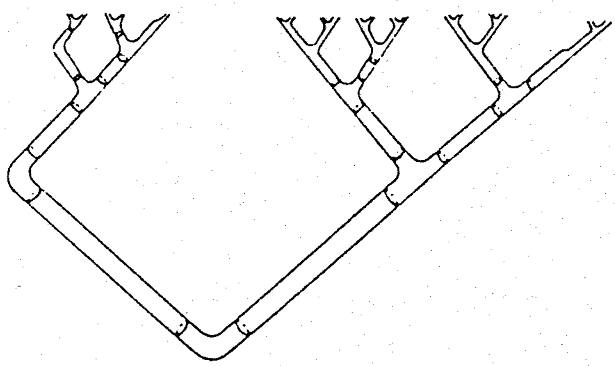

Fig. 2. Superficie plana.

Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}_1$, con $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ un par de cerrados de $\mathcal{C}$. Para cada segmento $[x, x']$ de $I_{r,a}$ o $D_{r,a}$ perteneciente al arbol $\mathcal{A}(\mathcal{F}_1)$ consideremos el subsegmento central $[x_1, x_1']$ que resulta de dividir $[x, x']$ en tres partes iguales. Los planos perpendiculares a $[x_1, x_1']$ por cada uno de sus puntos extremos determinan un cilindro $T_{(x,x')}$ inmerso en $S(0, \mathcal{F}_1, \emptyset)$.

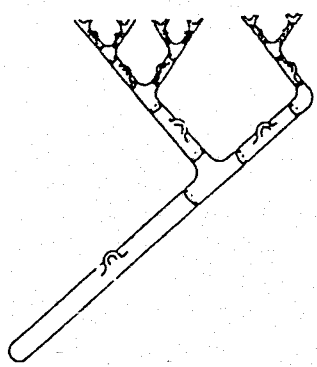

Fig. 3. Superficie orientable de género infinito.

Si por cada segmento $[x, x']$ en $\mathcal{A}(\mathcal{F}_1)$ realizamos la suma conexa con un toro, obtenemos una superficie orientable de género infinito $S(\infty, \mathcal{F}, \mathcal{F}_1)$ cuyo sistema característico es $(\infty, \mathcal{F}, \mathcal{F}_1)$. Véase la figura 3 en que $\mathcal{F}_1$ se ha tomado igual a $\mathcal{F}$.

A pesar de que los finales no planos pueden ser no numerables una superficie de género infinito sólo tiene una cantidad numerable de asas.

Sección 2: Superficies de Riemann.

1. Superficies de Riemann. (Véase [Fo]). Sea R una superficie. Una *carta compleja* sobre R es un homeomorfismo $\varphi : U \to V$ de un conjunto abierto $U \subset R$ sobre un conjunto abierto $V \subset \mathbb{C}$. Dos cartas complejas $\varphi_i : U_i \to V_i$, $i = 1, 2$ se dicen *holomórficamente compatibles* si la aplicación

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

es holomorfa.

Un *atlas complejo* sobre R es un sistema $\mathcal{U} = \{\varphi_i : U_i \to V_i, i \in I\}$ de cartas que son holomórficamente compatibles y las cuales recubren R, esto es, $\bigcup_{i \in I} U_i = R$.

Dos atlas $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ se dicen *analíticamente equivalentes* si cada carta de $\mathcal{U}$ es holomórficamente compatible con cada carta de $\mathcal{U}'$. Esto desde luego es una relación de equivalencia.

Una *estructura compleja* sobre una superficie R es una clase de equivalencia de atlas analíticamente equivalentes sobre R.

Una *superficie de Riemann* es un par (R, Σ) donde R es una superficie y Σ es una estructura compleja sobre R.

Usualmente se escribe R en lugar de (R, Σ) siempre y cuando esté claro cuál es la estructura compleja Σ.

Toda superficie de Riemann es una superficie orientable y recíprocamente toda superficie orientable se puede dotar de estructura de superficie de Riemann. (Véase [**Sp**, pp. 112, 113 y 217]).

El plano complejo $\mathbb{C}$. Su estructura compleja esta definida por el atlas cuya única carta es la aplicación identidad de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

Regiones. Si R es una superficie de Riemann y $U \subset R$ es una región, es decir una abierto conexo, entonces U hereda de R la estructura compleja natural que lo convierte en una superficie de Riemann. En particular toda región contenida en $\mathbb{C}$ es una superficie de Riemann.

2. Aplicaciones holomorfas. Si R y R' son superficies de Riemann, una aplicación continua $f : R \to R'$ se dice holomorfa si para cada par de cartas $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ sobre R y $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ sobre R' con $f(U_1) \subset U_2$, la aplicación

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : V_1 \to V_2$$

es holomorfa en el sentido usual.

Si $R' = R$ entonces tenemos las autoaplicaciones holomorfas cuyo conjunto denotaremos por $\mathcal{O}(R; R)$. En el caso de que $R' = \mathbb{C}$ las aplicaciones holomorfas pasan a llamarse *funciones holomorfas* cuyo conjunto denotaremos por $\mathcal{O}(R)$. La suma y el producto de funciones holomorfas son holomorfas. Las funciones constantes también son holomorfas, luego $\mathcal{O}(R)$ es una $\mathbb{C}$-Álgebra.

3. Automorfismos. Una aplicación $f : R \to R'$ se dice que es un *isomorfismo* entre R y R' si es biyectiva y $f : R \to R'$ y $f^{-1} : R' \to R$ son ambas holomorfas. Cuando $R' = R$ se dice que es un automorfismo. Se tiene que el conjunto de los automorfismos de una superficie de Riemann forma un grupo para la composición de aplicaciones, el cual denotaremos por $Aut(R)$.

Se dice que la acción del grupo de automorfismos $Aut(R)$ es ***propiamente discontinua*** sobre R si para todo subconjunto compacto $K \subset R$ se tiene que $K \cap \varphi(K) = \emptyset$ para todo $\varphi \in Aut(R)$, excepto un número finito. Estos grupos se llaman discretos.

Sólo hay 7 tipos de superficies de Riemann cuyo grupo de automorfismos no tiene la acción propiamente discontinua sobre R (véase [**Sp**, pp. 243-244]). Dos de ellas son compactas, a saber, el toro (superficie de Riemann de género 1) y la esfera (superficie compacta de género cero), que denotaremos en lo sucesivo por $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Las otras cinco están contenidas en $\mathbb{C}$ y son: el propio plano complejo $\mathbb{C}$, el disco unidad $\mathbb{D}$, el plano punzonado $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, el disco punzonado $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ y la familia uniparamétrica de anillos $A_r = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{r} < |z| < r\}$ para $r > 1$.

Es bien conocido que la lista de los grupos de automorfismos de estas cinco regiones es la siguiente:

$Aut(\mathbb{C}) = \{az + b : a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$.
$Aut(\mathbb{D}) = \{k\frac{z-a}{1-\bar{a}z} : |k| = 1, |a| < 1\}$.
$Aut(\mathbb{C}^*) = \{cz : c \neq 0\} \cup \{\frac{c}{z} : c \neq 0\}$.
$Aut(\mathbb{D}^*) = \{cz : |c| = 1\}$.
$Aut(A_r) = \{cz : |c| = 1\} \cup \{\frac{c}{z} : |c| = 1\}$.

Recordemos también que para una región $\Omega \subset \mathbb{C}$ de conectividad finita y mayor que 2 siempre se tiene que el grupo de automorfismos es finito. Véase [**He1**] o [**MR**].

Los automorfismos del disco unidad (véase [Sp, pp. 230-231]) son los movimientos rígidos del plano hiperbólico. Éstos se clasifican según sus puntos fijos. Un automorfismo $z \mapsto e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ distinto de la identidad puede ser:

i) Una traslación no euclídea, la cual tiene exactamente dos puntos fijos en $|z| = 1$. Esto se da si y sólo si $|a| > \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$.

ii) Una rotación límite no euclídea, la cual tiene un único punto fijo en $|z| = 1$. Esto se da si y sólo si $|a| = \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$.

iii) Una rotación no euclídea, que tiene un único punto fijo en $\mathbb{D}$. Esto se da si y sólo si $|a| < \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$.

4. Los espacios $A(K)$ y $\mathcal{O}(R)$. Si $K \subset R$ es un subconjunto compacto de una superficie no compacta se denotará por $A(K)$ el espacio de las funciones continuas sobre K y holomorfas en el interior de K dotado con la norma

$$p_K(f) = \sup_{z \in K} |f(z)|$$

de la convergencia uniforme sobre K. Se tiene que el espacio $A(K)$ es un espacio de Banach.

Al conjunto $\mathcal{O}(R)$ se le considera dotado de la topología de la convergencia uniforme en compactos. Esta topología está inducida por las seminormas p_K donde K recorre los subconjuntos compactos de R. En realidad, basta considerar una familia numerable de seminormas p_{K_n} donde $\{K_n\}_{n\geq 0}$ es cualquier sucesión exhaustiva de subconjuntos compactos de R. Entonces, se puede probar que esta topología es la misma que la inducida por la distancia

$$d(f,g) = \sum_0^\infty \frac{p_{K_n}(f-g)}{1 + p_{K_n}(f-g)}.$$

Con esta topología $\mathcal{O}(R)$ es un espacio de Fréchet segundo numerable en el que en particular se verifica el teorema de Baire, es decir, la intersección numerable de abiertos densos es denso. Cuando se trate de una región $\Omega \subset \mathbb{C}$ denotaremos el espacio $\mathcal{O}(R)$ por $H(\Omega)$.

5. Teoremas de aproximación. En las demostraciones de los teoremas de existencia de funciones universales los teoremas de aproximación juegan un papel fundamental.

Dada una superficie de Riemann R y un subconjunto compacto $K \subset R$, una función se dice holomorfa sobre K si existe un abierto $U \subset R$ que contiene a K y f es holomorfa en U. Un abierto $U \subset R$ se dice que es Runge en R si cada componente conexa de $R \setminus U$ es no compacta.

El teorema de Runge en su versión mas sencilla asegura que los polinomios son densos en el espacio de las funciones enteras $H(\mathbb{C})$. En [**Ru**, p. 288-290] se demuestra que si Ω es un abierto del plano y K es un compacto que es Runge en Ω, entonces para toda f que es holomorfa sobre K y para todo $\varepsilon > 0$ existe una función racional $q \in H(\Omega)$ con un polo a lo más en cada componente conexa de $\Omega \setminus K$ tal que $\max_K |f(z) - q(z)| < \varepsilon$. La versión del teorema de Runge para una superficie de Riemann cualquiera asegura que el espacio $\mathcal{O}(R)$ es denso en $H(U)$ para todo abierto que es Runge en R (véase [Fo, p. 200]).

Aunque para demostrar los teoremas 1.2.9, 2.3.18 y 3.0.3 basta el teorema de aproximación de Runge, nosotros utilizaremos el teorema de aproximación de Mergelyan, que hace las demostraciones más directas. Este teorema en su versión mas sencilla afirma que los polinomios son densos en $A(K)$ para todo subconjunto compacto de complemento conexo en $\mathbb{C}$. La diferencia entre el teorema de Meguelyan y el teorema de Runge estriba en que las funciones holomorfas en K se pueden cambiar por funciones de $A(K)$. En concreto en los capítulos 1 y 3 usaremos (véase [Ga, p. 119]) el siguiente teorema:

TEOREMA 0.2.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región. Entonces para todo compacto*

$K \in \mathcal{K}(\Omega)$ se tiene para toda $f \in A(K)$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe una función racional $q \in H(\Omega)$ con a lo más un polo en cada componente conexa de $\mathbb{C}^{\infty} \setminus K$ tal que

$$\max_{K} |q(z) - f(z)| < \varepsilon$$

En el capítulo 2 usaremos la siguiente versión del teorema de Mergelyan también debida a E. Bishop (véase [**Bis**]).

TEOREMA 0.2.2. *Sea R una superficie de Riemann no compacta. Entonces el espacio $\mathcal{O}(R)$ es un conjunto denso en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{K}(R)$.*

6. Sucesiones de iteradas. Para una aplicación $\varphi \in \mathcal{O}(R; R)$ podemos definir la sucesión de iteradas $\{\varphi^n\}_{n \geq 0}$ mediante φ^0 = la identidad en R y $\varphi^n = \varphi^{n-1} \circ \varphi$. Los primeros que empezaron el estudio de la iteración de funciones holomorfas fueron Julia y Fatou. El estudio de la iteración de funciones holomorfas ha tenido un resurgimiento en los últimos años. En el contexto que aquí tratamos interesan las sucesiones de iteradas porque como veremos en la próxima sección inducen en el espacio $\mathcal{O}(R)$ una sucesión de iteradas del operador que induce φ.

Sólo utilizaremos dos teoremas acerca de iteración de funciones holomorfas: el siguiente teorema de Denjoy-Wolff (véase [**St**, p. 42] o [**Bu**]) y una generalización suya de Heins.

TEOREMA 0.2.3. *Sea $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una aplicación holomorfa sin puntos fijos. Entonces la sucesión $\{\varphi^n\}_{n \geq 0}$ converge uniformemente en compactos del disco unidad a una constante de módulo 1.*

En otras palabras, el teorema significa que la sucesión de iteradas converge a la frontera. Precisemos la definición de convergencia a la frontera.

Dada una región $\Omega \subset \mathbb{C}$ denotaremos por $\partial\Omega$ la frontera de Ω como subconjunto de $\mathbb{C}^\infty$. Denotaremos $d(z, z')$ la distancia cordal entre $z, z' \in \mathbb{C}^\infty$. La distancia $d(A, B)$ entre dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{C}^\infty$ se define como

$$d(A, B) = \inf\{|z - z'| : z \in A, z' \in B\}.$$

Se dice que una sucesión de aplicaciones $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{O}(\Omega; \Omega)$ converge uniformemente en compactos a la frontera de Ω si para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$ existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ la distancia $d(\varphi_n(K), \partial\Omega) < \varepsilon$.

Existe una generalización del teorema de Denjoy-Wolff a regiones múltiplemente conexas distintas de $\mathbb{C}^*$ debida a M. H. Heins. Transcribimos aquí el enunciado. Véase **[He1]** para su demostración.

TEOREMA 0.2.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región de conectividad múltiple, que no es isomorfa a $\mathbb{C}^*$, y sea $\varphi : \Omega \to \Omega$ una función holomorfa en Ω. Entonces se da una y sólo una de las tres posibilidades siguientes:*

a) $\varphi \in Aut(\Omega)$ y o bien existe una iterada de φ que es la identidad en Ω, o bien la sucesión de iteradas converge uniformemente en compactos a la identidad en Ω.

b) φ tiene un punto fijo z_0 atrayente ($|\varphi'(z_0)| < 1$) y la sucesión de iteradas converge uniformemente en compactos de Ω a z_0.

b) La sucesión de iteradas converge uniformemente en compactos a $\partial\Omega$.

Sección 3: Operadores de composición.

En esta sección enunciamos con precisión algunos de los teoremas y definiciones mencionados en la introducción.

El siguiente teorema de Birkhoff (1929) se considera el primer teorema sobre funciones universales.

TEOREMA 0.3.1. *Existe una función entera $f(z)$ tal que para cualquier función entera arbitraria $g(z)$ existe una sucesión $\{a_n\}_{n\geq 0}$ que depende de $g(z)$ verificando*

$$\lim_{n\to\infty} f(z+a_n) = g(z)$$

uniformemente en conjuntos compactos.

Una tal f suele llamarse función *universal.*

En 1941 Seidel y Walsh [SW] generalizaron este teorema al disco unidad. En concreto probaron el siguiente teorema.

TEOREMA 0.3.2. *Existe una función f analítica en el disco unidad tal que dada una función arbitraria g analítica en el disco unidad, se tiene que existe una sucesión $\{a_n\}_{n\geq 0}$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{z+a_n}{1+\bar{a}_n z}\right) = g(z)$$

para todo z en $\mathbb{D}$ uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$.

En 1976 W. Luh [Lu1] estableció que dada una sucesión $\{a_n\}_{n\geq 0}$ con límite igual a ∞, existe una función entera f tal que para todo conjunto compacto K con complemento conexo en el plano complejo y para toda función g holomorfa en el interior de K y continua sobre K, existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k\geq 0}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} f(z+a_{n_k}) = g(z)$$

uniformemente en K.

En 1989 Zappa [Za] reemplazó el grupo aditivo de los números complejos $\mathbb{C}$ por el grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$ y probó el siguiente teorema.

TEOREMA 0.3.3. *Existe una función holomorfa en $\mathbb{C}^*$ tal que para todo subconjunto compacto K de $\mathbb{C}^*$ con complemento conexo, para toda función $f \in A(K)$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe una constante $c \neq 0$ con*

$$\max_K |F(cz) - f(z)| < \varepsilon.$$

P. Zappa señala ([**Za**. Remark 4]) que es posible probar el siguiente

TEOREMA 0.3.4. *Se R una superficie de Riemann no compacta tal que la acción del grupo G de automorfismos de R es propiamente discontinua sobre R. Entonces existe una función holomorfa F en R tal que para todo subconjunto compacto con un sistema de entornos simplemente conexos, y para todo $f \in A(K)$ para toda $\varepsilon > 0$ existe $g \in G$ tal que*

$$\max_K |F \circ g - f| < \varepsilon.$$

Si $\{\varphi_n\}_{n \geq 0} \subset \mathcal{O}(R; R)$, entonces podemos definir la sucesión correspondiente de operadores de composición

$$T_n : \mathcal{O}(R) \longrightarrow \mathcal{O}(R)$$

para $n \geq 0$ mediante $T_n(f) = f \circ \varphi_n$. Obviamente, cada T_n es un operador lineal y continuo en $\mathcal{O}(R)$. Si $f \in \mathcal{O}(R)$, entonces f se dice que es ***universal*** en $\mathcal{O}(R)$ (respectivamente en $A(K)$, donde $K \subset R$ es compacto) si la órbita $\{T_n(f) = f \circ \varphi_n\}_{n \geq 0}$ es densa en $\mathcal{O}(R)$ ($A(K)$, respectivamente). Está claro que los resultados anteriores pueden ser expresados en estos términos.

En general se puede dar la siguiente definición (véase [**Gr1**]).

DEFINICIÓN 0.3.5. *Sea F un espacio de Fréchet y $\{T_n\}_{n\geq 0}$ ($T_n : F \to F$) una sucesión de operadores lineales y continuos. Un vector $x \in F$ se dice que es $\{T_n\}$-universal si la sucesión $\{T_n(x)\}_{n\geq 0}$ es densa en F.*

Cuando la sucesión $\{T_n\}_{n\geq 0}$ está dada por las iteradas de un operador $T : F \to F$, es decir, $T_n = T^n$ para cada n, a los vectores universales se les llama *hipercíclicos*. Un caso particular se da cuando $T : \mathcal{O}(R) \to \mathcal{O}(R)$ está inducido por una aplicación $\varphi \in \mathcal{O}(R; R)$. Entonces se tiene que $T^n(f) = f \circ \varphi^n$.

Como ejemplo de cómo se relacionan las propiedades de la sucesión de operadores con la sucesión de funciones damos la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 0.3.6. *Sea R una superficie de Riemann no compacta, $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{O}(R; R)$ y $\{T_n\}_{n\geq 0}$ los correspondientes operadores de composición. Si para cada subconjunto compacto $K \subset R$, se tiene que $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n(K)$ es relativamente compacto, entonces no existe función $\{T_n\}$-universal en $\mathcal{O}(R)$.*

DEMOSTRACIÓN. Para todo subconjunto compacto K y para toda $f \in \mathcal{O}(R)$ se tiene que

$$\max_K |T_n(f)(z)| = \max_K |f \circ \varphi_n(z)| \leq \max_L |f(z)| < \infty$$

Se deduce que $\{T_n(f)\}_{n\geq 0}$ está acotado en $\mathcal{O}(R)$. Por tanto, por el teorema de Montel $\{T_n(f)\}_{n\geq 0}$ es relativamente compacto en $\mathcal{O}(R)$, por lo que no puede ser denso en $\mathcal{O}(R)$. $\square$

CAPÍTULO 1: Funciones universales en superficies planas.

Este capítulo está dedicado al estudio de las funciones universales en una región $\Omega \subset \mathbb{C}$. En la primera sección se estudian algunas de sus propiedades y se dan algunos ejemplos, en particular, se caracterizan las sucesiones fugitivas en $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ y $\mathbb{C}^*$.

En la sección 2 se prueba la existencia de funciones universales para $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ cuando esta sucesión es fugitiva en todo subconjunto compacto de Ω de complemento conexo. Por último se generalizan los teoremas de Birkhoff y de Seidel-Walsh a una región cualquiera que no sea isomorfa a $\mathbb{C}^*$.

Todas las demostraciones de este capítulo se han tratado de hacer de la forma más elemental posible. De hecho la única herramienta "fuerte" que se utilizará será el teorema de aproximación de Mergelyan junto con algunos resultados básicos de Análisis de Variable Compleja.

Las técnicas de demostración que usan la teoría de aproximación en variable compleja tienen su origen en la demostración del teorema de Birkhoff de 1.929.

En el capítulo 2 usaremos técnicas más modernas que utilizan la teoría de operadores. El hecho de elegir estas demostraciones aquí se justifica porque necesitaremos en el capítulo 3 volver a estos métodos en demostraciones más complicadas de doble inducción.

Sección 1: Sucesiones fugitivas de automorfismos.

En esta sección se define cuándo una sucesión de automorfismos $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset Aut(\Omega)$, donde $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una región, actúa de forma propiamente discontinua sobre Ω.

DEFINICIÓN 1.1.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región y $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset Aut(\Omega)$. Se dice que $\{\varphi_n\}_{n\geq o}$ es **fugitiva** si para cada conjunto compacto $K \subset \Omega$ existe un número natural $n_0 = n_0(K)$ tal que $K \cap \varphi_{n_0}(K) = \emptyset$.*

En otras palabras, la acción de $\{\varphi_n\}_{n\geq o}$ es propiamente discontinua sobre Ω. Hemos introducido el nombre de *fugitiva* para abreviar.

Las demostraciones de las propiedades siguientes son bastante sencillas, pero resulta conveniente enunciarlas para futuras referencias.

La propiedad de una sucesión de ser fugitiva se conserva por conjugación, más precisamente se tiene la siguiente

PROPIEDAD 1.1.2. *Si $\psi : \Omega \to \Omega_1$ es un isomorfismo entre dos regiones de $\mathbb{C}$, entonces $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva en Ω si y sólo si $\{\psi \circ \varphi_n \circ \psi^{-1}\}_{n\geq 0}$ es fugitiva en Ω_1.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos sólo una implicación pues el recíproco es análogo. Supongamos que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva en Ω. Sea K_1 un subconjunto compacto de Ω_1. Entonces $\psi^{-1}(K_1)$ es un compacto de Ω. Por tanto existe un número natural n_0 tal que $\varphi_{n_0}(\psi^{-1}(K_1)) \cap \psi^{-1}(K_1) = \emptyset$. Así, aplicando ψ se tiene que $\psi \circ \varphi_{n_0} \circ \psi^{-1}(K_1) \cap K_1 = \emptyset$. Por tanto $\{\psi \circ \varphi_n \circ \psi^{-1}\}_{n\geq 0}$ es fugitiva en Ω_1. $\square$

El hecho de que la definición de sucesión fugitiva "mezcla bien" con las sucesiones exhaustivas de subconjuntos compactos de una región se refleja en las propiedades 1.1.3, 1.1.4 y 1.1.6.

PROPIEDAD 1.1.3. *Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset Aut(\Omega)$ y $\{K_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión exhaustiva de conjuntos compactos de Ω. Si $K_n \cap \varphi_n(K_n) = \emptyset$ para todo número natural n, entonces $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva y toda subsucesión de $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es también fugitiva en Ω.*

DEMOSTRACIÓN. Por ser $\{K_n\}_{n\geq 0}$ exhaustiva, para todo conjunto compacto K existe un n_0 tal que $K \subset K_{n_0}$. Puesto que $K \cap \varphi_{n_0}(K) \subset K_{n_0} \cap \varphi_{n_0}(K_{n_0}) = \emptyset$ se tiene la primera parte del enunciado. Para la segunda parte del enunciado basta observar que para cualquier subsucesión $\{\varphi_{n_k}\}_{k\geq 0}$ se tiene que $K_{n_k} \cap \varphi_{n_k}(K_{n_k}) = \emptyset$ y que la sucesión $\{K_{n_k}\}_{k\geq 0}$ es también exhaustiva. Aplicando la primera parte se tiene que $\{\varphi_{n_k}\}$ es fugitiva en Ω. □

El recíproco viene dado por la siguiente

PROPIEDAD 1.1.4. *Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset Aut(\Omega)$ una sucesión fugitiva en Ω y $\{K_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión exhaustiva de conjuntos compactos de Ω. Entonces existe una subsucesión $\{\varphi_{n_k}\}_{k\geq 0}$ tal que $K_k \cap \varphi_{n_k}(K_k) = \emptyset$; además, en este caso, para todo $z \in \Omega$, $\{\varphi_{n_k}(z)\}_{k\geq 0}$ no tiene puntos de acumulación en Ω.*

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar la definición, pues para cualquier compacto K_k existe un n_k tal que $K_k \cap \varphi_{n_k}(K_k) = \emptyset$. Para lo segundo, sea $z \in \Omega$; entonces se tiene que $z \in K_k$ para todo $k \geq k_0$. Esto implica que $\varphi_{n_k}(z) \notin K_k$ para todo $k \geq k_0$. Por lo que no puede haber ningún punto de acumulación de $\{\varphi_{n_k}(z)\}_{k\geq 0}$. □

El recíproco de la segunda parte de la propiedad anterior no es cierto. Considérese, por ejemplo, $\Omega = \mathbb{C}$ y $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ definida por $\varphi_n(z) = n^2 z + n$. Esta sucesión no tiene puntos de acumulación en $\mathbb{C}$ pero no es fugitiva puesto que no verifica la proposición 1.1.12 que probaremos después (o, de modo más sencillo, $0 \in \varphi_n(K) \cap K$ para todo $n \geq 0$ donde $K = \{0\} \cup \{-\frac{1}{n} : n \geq 1\}$). No obstante, es cierto en el disco unidad $\mathbb{D}$ (véase proposición 1.1.14).

De las propiedades 1.1.3 y 1.1.4 se deduce que siempre podemos asumir que si $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva en Ω y se tiene una sucesión exhaustiva de subconjuntos compactos $\{K_n\}_{n\geq 0}$, entonces $K_n \cap \varphi_n(K_n) = \emptyset$, extrayendo una subsucesión de $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ si es necesario, y que toda subsucesión de $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es también fugitiva. Esta operación de extraer una subsucesión para la cual toda subsucesión es también fugitiva es similar a la de extraer una subsucesión con límite infinito de una sucesión numérica cuyo límite superior es infinito. De hecho podemos dar la siguiente

DEFINICIÓN 1.1.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región y $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset Aut(\Omega)$. Se dice que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es estrictamente fugitiva en Ω si para todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$ existe un número natural n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ $K \cap \varphi_n(K) = \emptyset$.*

Trivialmente, toda sucesión estrictamente fugitiva es fugitiva. La propiedad 1.1.4 significa que de toda sucesión fugitiva se puede extraer una subsucesión estrictamente fugitiva.

PROPIEDAD 1.1.6. *Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset Aut(\Omega)$ fugitiva en Ω. Dado un número finito $K_0, K_1, \ldots, K_l$ de subconjuntos compactos de Ω, entonces existen unos números naturales $n_1, \ldots, n_l$ tales que $K_0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{l} \varphi_{n_i}(K_i)\right)$ es una unión disjunta.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue fácilmente por inducción. Considerando el compacto $K = K_0 \cup \left(\bigcup_{i<k} \varphi_{n_i}(K_i)\right) \cup K_k$ existe un número natural n_k tal que $\emptyset = K \cap \varphi_{n_k}(K) \supset K \cap \varphi_{n_k}(K_k)$ y ya se obtiene el enunciado. $\square$

Veamos algunos ejemplos sencillos de sucesiones fugitivas de automorfismos.

EJEMPLO 1.1.7. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que $Aut(\Omega)$ es un grupo infinito discreto. Entonces la acción de $Aut(\Omega)$ es propiamente discontinua sobre Ω, esto es, dado un subconjunto compacto $K \subset \Omega$ se tiene que $K \cap \varphi(K) = \emptyset$ para todo $\varphi \in Aut(\Omega)$ excepto un número finito. Por consiguiente, en este tipo de regiones siempre podremos encontrar sucesiones de automorfismos fugitivas. Por ejemplo, sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ donde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = \alpha u + \beta v, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$ donde u y v son dos números complejos, que no son nulos a la vez. Se tiene que para todo $w \in \Gamma \setminus \{0\}$ la sucesión de automorfismos $\{z + nw\}_{n\geq 0}$ es fugitiva en Ω.*

EJEMPLO 1.1.8. *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es de orden de conexión finita mayor o igual que 3 entonces $Aut(\Omega) = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ es un conjunto finito. Entonces para $M = \bigcup_{j=1}^{n} \varphi_n(K)$ donde K es cualquier subconjunto compacto de Ω distinto de vacío se tiene que $M \cap \varphi(M) \supset \varphi(K) \neq \emptyset$ para todo $\varphi \in Aut(\Omega)$. Luego no puede existir ninguna sucesión de automorfismos fugitiva en Ω.*

EJEMPLO 1.1.9. *Desde luego hay regiones de conectividad infinita para las cuales no existen sucesiones de automorfismos que puedan ser fugitivas. Siempre que su grupo de automorfismos sea finito (por ejemplo, es fácil comprobar que el único automorfismo de $\mathbb{D} \setminus \{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ es la identidad) se podrá proceder como en el ejemplo anterior.*

EJEMPLO 1.1.10. *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es de orden de conexión 2, entonces por el principio de uniformización de Koebe (véase* [**Ju**, *pp. 68-69*]*) Ω es isomorfa a una de las tres regiones siguientes: $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{D}^*$ o un anillo. El caso $\mathbb{C}^*$ lo veremos más adelante. En cualquiera de los otros dos casos veremos que no existen sucesiones fugitivas de automorfismos. Ya que la propiedad de fugitividad se conserva por conjugación basta ver que no existe ninguna sucesión de automorfismos fugitiva ni en $\mathbb{D}^*$ ni en ningún anillo.*

a) Puesto que los únicos automorfismos de $\mathbb{D}^*$ son los giros se tiene, tomando el compacto $K = \{z : |z| = \frac{1}{2}\}$, que $K \cap \varphi(K) = K$ para toda $\varphi \in Aut(\mathbb{D}^\star)$. Lo cual implica que no puede existir sucesión fugitiva en $\mathbb{D}^\star$.

b) Cualquier anillo es isomorfo a un anillo de la forma $A_r = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{r} < |z| < r\}$, con $r > 1$. Puesto que los automorfismos de A_r son los giros cz y las inversiones de la forma $\frac{c}{z}$ (con $|c| = 1$ en ambos casos), se tiene, si K es la circunferencia unidad, que $K \cap \varphi(K) = K$ para toda $\varphi \in Aut(A_r)$. Por consiguiente, tampoco pueden existir sucesiones fugitivas en A_r.

La siguiente proposición pone en conexión la propiedad de fugitividad de una sucesión con los puntos fijos de los elementos de la sucesión.

PROPOSICIÓN 1.1.11. *Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset Aut(\Omega)$ y supongamos que existe una sucesión $\{z_n\}_{n\geq 0} \subset \Omega$ tal que $\varphi_n(z_n) = z_n$ $(n \geq 0)$, esto es, z_n es un punto fijo para φ_n $(n \geq 1)$. Si $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva, entonces existe una sucesión $\{z_{n_k}\}_{k\geq 0}$ tal que $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} \in \partial\Omega$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva. Si no hay una tal subsucesión con $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} \in \partial\Omega$, entonces existe un conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que $\{z_n\}_{n\geq 0}$ está contenida en K. Por lo tanto, se tiene que $K \cap \varphi_n(K) \supset \{z_n\} \neq \emptyset$ para todo número natural n, lo cual es una contradicción ya que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva. $\square$

El recíproco de esta proposición no es cierto en general. Considérese, por ejemplo, $\Omega = \mathbb{C}$ y la sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset Aut(\mathbb{C})$ definida por $\varphi_n(z) = \frac{n+1}{n} z + 1$. En este caso $\{z_n = -n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de puntos fijos para $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ y tiende a ∞, pero por la proposición 1.1.12 que demostraremos más adelante, $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ no es fugitiva en $\mathbb{C}$. En orden a construir un contraejemplo en $\mathbb{D}$, obsérvese que si $\varphi(z) = k\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, con $0 \leq |a| < 1$ y $k = e^{i\theta}$, entonces φ tiene un punto fijo en $\mathbb{D}$ si y sólo si $|a| < |\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}|$. En tal caso, el punto fijo viene dado por uno de los números siguientes

$$\frac{-i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \pm i\sqrt{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} - |a|^2}}{\bar{a}}.$$

Se puede construir una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ de la siguiente manera: se elige a, $0 < |a| < 1$ y $k_n = e^{i\theta_n}$, con $|\operatorname{sen}\frac{\theta_n}{2}| > |a|$ y $\lim_{n\to\infty}|\operatorname{sen}\frac{\theta_n}{2}| = |a|$. Se define $\varphi_n(z) = k_n\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, la cual tiene un punto fijo en $\mathbb{D}$ para todo número natural n. Por otra parte, está claro que la sucesión de puntos fijos tiende a un número complejo de modulo 1, pero por la proposición 1.1.14 de más adelante, $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ no es fugitiva en $\mathbb{D}$.

Ahora se caracterizarán las sucesiones $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset Aut(\Omega)$ que son fugitivas en Ω, donde $\Omega = \mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ o $\mathbb{C}^*$. Denotaremos por $B(a,r)$ y $\bar{B}(a,r)$ los discos euclídeos en $\mathbb{C}$ de centro a y radio r ($a \in \mathbb{C}$, $r > 0$), abierto y cerrado respectivamente.

PROPOSICIÓN 1.1.12. *Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} = \{a_n z + b_n\}_{n\geq 0} \subset Aut(\mathbb{C})$. Entonces $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva si y sólo si $\limsup_{n\to\infty}(\min\{\left|\frac{b_n}{a_n}\right|, |b_n|\}) = +\infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero, supongamos que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión fugitiva. Entonces podemos extraer una subsucesión fugitiva $\{\varphi_{n_k}\}_{k\geq 0}$ tal que $\bar{B}(0,k) \cap \varphi_{n_k}(\bar{B}(0,k)) = \emptyset$. Por lo tanto, $|\varphi_{n_k}(0)| = |b_{n_k}| > k$. De modo que $\lim_{k\to\infty}|b_{n_k}| = +\infty$.

Ahora, es suficiente probar que $\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{b_{n_k}}{a_{n_k}}\right| = +\infty$. Si esto no es así, entonces existe un número real $M > 0$ tal que $\left|\frac{b_{n_k}}{a_{n_k}}\right| < M$ para todo $k \geq 0$. Si se considera el conjunto compacto $K = \bar{B}(0, M)$, entonces se tiene: $0 = \varphi_{n_k}(-\frac{b_{n_k}}{a_{n_k}}) \in K \cap \varphi_{n_k}(K)$ para todo k, lo cual es una contradicción. Así, la condición es necesaria.

Recíprocamente, supongamos que $\limsup_{n\to\infty}(\min\{\left|\frac{b_n}{a_n}\right|, |b_n|\}) = +\infty$. Si fijamos un subconjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$, entonces existe un número real $r > 0$ tal que $K \subset \bar{B}(0,r)$. Ya que la sucesión $\{\min\{\left|\frac{b_n}{a_n}\right|, |b_n|\}\}_{n\geq 0}$ no está acotada, existe un número natural m tal que $\left|\frac{b_m}{a_m}\right| > 2r$ y $|b_m| > 2r$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}|\varphi_m(z)| = |a_m z + b_m| =& |b_m|\left|1 + \frac{a_m}{b_m}z\right| \\ \geq& |b_m|\left(1 - \left|\frac{a_m}{b_m}\right||z|\right) \\ >& 2r\left(1 - \frac{r}{2r}\right) \\ =& r\end{aligned}$$

para $z \in \bar{B}(0,r)$. Hemos probado que $K \cap \varphi_m(K) \subset \bar{B}(0,r) \cap \varphi_m(\bar{B}(0,r)) = \emptyset$. Luego $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva. □

PROPOSICIÓN 1.1.13. *Sea $\varphi(z) = az + b \in Aut(\mathbb{C})$. Entonces $\{\varphi^n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva en $\mathbb{C}$ si y sólo si φ no tiene puntos fijos, o equivalentemente, φ es una traslación, o equivalentemente, $a = 1$ y $b \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue inmediatamente de la proposición anterior ya que

$$\varphi^n(z) = \begin{cases} a^n z + b\frac{a^n - 1}{a-1}, & \text{si } a \neq 1; \\ z + nb. & \text{si } a = 1\ . \end{cases}$$

□

PROPOSICIÓN 1.1.14. *Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} = \left\{\frac{z - a_n}{1 - \bar{a}_n z}k_n\right\}_{n\geq 0} \subset Aut(\mathbb{D})$, con $|a_n| < 1 = |k_n|$ para todo $n \geq 0$. Entonces $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva en $\mathbb{D}$ si y sólo si $\limsup_{n\to\infty} |a_n| = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{r_k\}_{k\geq 0}$ una sucesión estrictamente creciente de números reales positivos tal que $\lim_{k\to\infty} r_k = 1$. Si $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva, entonces existe una sucesión $\{n_k\}_{k\geq 0}$ de números naturales tal que $\varphi_{n_k}(0) \notin \bar{B}(0,r_k)$. Esto implica $|a_{n_k}| = |\varphi_{n_k}(0)| > r_k$. Luego $\limsup_{n\to\infty} |a_n| = 1$.

Por otra parte, para todo subconjunto compacto $K \subset \mathbb{D}$, existe r, $0 < r < 1$, tal que $K \subset \bar{B}(0,r)$. Si $\limsup_{n\to\infty} |a_n| = 1$, existe un numero natural m con $|a_m| > (2r - r^2)^{\frac{1}{2}}$. Ahora, si $z \in \bar{B}(0,r)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
|\varphi_m(z)| = \left|\frac{z - a_m}{1 - \bar{a}_m z}\right| &= \frac{1}{|\bar{a}_m|}\left|\frac{|a_m|^2 - \bar{a}_m z}{1 - \bar{a}_m z}\right| \\
&= \frac{1}{|a_m|}\left|1 + \frac{|a_m|^2 - 1}{1 - \bar{a}_m z}\right| \\
&\geq 1 - \frac{1 - |a_m|^2}{|1 - \bar{a}_m z|} \\
&\geq 1 - \frac{1 - |a_m|^2}{1 - |z|} \\
&\geq 1 - \frac{1 + r^2 - 2r}{1 - r} \\
&= r.
\end{aligned}$$

De modo que $K \cap \varphi_m(K) \subset \bar{B}(0,r) \cap \varphi_m(\bar{B}(0,r)) = \emptyset$. Por lo tanto, $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva en $\mathbb{D}$. □

A continuación damos una aplicación de la proposición anterior a la sucesión de iteradas de un automorfismo del disco unidad. Lo cual da lugar a ciertos cálculos. Estos se pueden omitir y pasar directamente justo después de la demostración donde se indica otra forma más simple para probar la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.1.15. *Sea $\varphi(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}k \in Aut(\mathbb{D})$ donde $k = e^{i\theta}$ para cierto $\theta \in [0, 2\pi]$. Entonces $\{\varphi^n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva si y sólo si φ no tiene ningún punto fijo en $\mathbb{D}$ o, equivalentemente, es una traslación no euclídea o es una rotación límite no euclídea o, equivalentemente, $|a| \geq \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$.*

DEMOSTRACIÓN. Haremos uso del isomorfismo existente entre el grupo de las transformaciones bilineales y el grupo cociente de las matrices de orden 2×2 no singulares, módulo un factor multiplicativo distinto de 0. De este modo φ

viene representada por la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} k & -ak \\ -\bar{a} & 1 \end{pmatrix}$$

y todos sus múltiplos por una constante distinta de 0. El representante canónico de φ será aquél en que aparece un 1 en el lugar $a_{2,2}$.

El polinomio característico de A es $\lambda^2 - (k+1)\lambda + k - k|a|^2$; por tanto, los autovalores de A vienen dados por:

$$\lambda = \frac{k+1 \pm \sqrt{(k-1)^2 + 4k|a|^2}}{2} = \frac{k+1 \pm b}{2}.$$

El caso $b = 0$ los dejaremos para más adelante. Si $b \neq 0$, A es diagonalizable y la matriz de Jordan viene dada por:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{k+1+b}{2} & 0 \\ 0 & \frac{k+1-b}{2} \end{pmatrix}.$$

La matriz de paso es:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1-k-b}{2} & \frac{1-k+b}{2} \\ \bar{a} & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

que tiene por inversa a:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{b} & \frac{1-k+b}{2\bar{a}b} \\ -\frac{1}{b} & -\frac{1-k-b}{2\bar{a}b} \end{pmatrix}.$$

de modo que $A = PJP^{-1}$. Por consiguiente

$$A^n = PJ^nP^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1-k+b}{2b}\left(\frac{k+1-b}{2}\right)^n - \frac{1-k-b}{2b}\left(\frac{k+1+b}{2}\right)^n & \frac{(1-k)^2-b^2}{4\bar{a}b}\left[\left(\frac{k+1+b}{2}\right)^n - \left(\frac{k+1-b}{2}\right)^n\right] \\ \frac{\bar{a}}{b}\left[\left(\frac{k+1-b}{2}\right)^n - \left(\frac{k+1+b}{2}\right)^n\right] & \frac{1-k+b}{2b}\left(\frac{k+1+b}{2}\right)^n - \frac{1-k-b}{2b}\left(\frac{k+1-b}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

Si escribimos $\varphi^n(z) = \frac{k_n z - k_n a_n}{-\bar{a}_n z + 1}$, su forma canónica, entonces por la proposición 1.1.14 se ha de computar:

$$\limsup_{n\to\infty} |\bar{a}_n| = \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a\left[\left(\frac{k+1+b}{2}\right)^n - \left(\frac{k+1-b}{2}\right)^n\right]}{\frac{1-k+b}{2}\left(\frac{k+1+b}{2}\right)^n - \frac{1-k-b}{2}\left(\frac{k+1-b}{2}\right)^n} \right|. \qquad (1)$$

Distinguiremos dos casos:

a) Si $|a| > \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, en este caso φ es una traslación no euclídea, entonces los autovalores son

$$\frac{k+1\pm b}{2} = \frac{e^{i\theta}+1\pm\sqrt{\left(e^{i\theta}-1\right)^2+4e^{i\theta}|a|^2}}{2} =$$

$$\frac{e^{i\theta}+1\pm e^{i\frac{\theta}{2}}\sqrt{e^{i\theta}-2+e^{-i\theta}+4|a|^2}}{2} =$$

$$e^{i\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\pm\sqrt{|a|^2+\left(\frac{\cos\theta-1}{2}\right)}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\pm\sqrt{|a|^2-\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\right). \tag{2}$$

Sustituyendo (2) en el límite (1) queda:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a\left[\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{|a|^2-\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\right)^n-\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{|a|^2-\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\right)^n\right]}{\frac{1-k+b}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{|a|^2-\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\right)^n-\frac{1-k-b}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{|a|^2-\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\right)^n}\right|$$

y teniendo en cuenta que los autovalores son de módulo distinto (en otro caso, $\cos\frac{\theta}{2}=0$, luego $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}=1$ y $|a|^2>1$: contradicción), se tiene que el valor de ese límite es

$$\left|\frac{2a}{1-k\pm b}\right| = \left|\frac{a}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(-i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\pm\sqrt{|a|^2-\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\right)}\right| = 1.$$

Por la proposición 1.1.14, $\{\varphi^n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva.

b) Si $|a| < \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, en este caso φ es una rotación no euclídea, entonces los autovalores son

$$\frac{k+1\pm b}{2} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\pm i\sqrt{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}-|a|^2}\right) = e^{i(\frac{\theta}{2}\pm\alpha)}\sqrt{1-|a|^2}. \tag{3}$$

y un simple cálculo da

$$\frac{1-k\pm b}{2} = ie^{\frac{i\theta}{2}}\left(-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\pm\sqrt{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}-|a|^2}\right). \tag{4}$$

Sustituyendo (3) y (4) en (1) y simplificando queda:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} |a_n| &= \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a(e^{-i\alpha n} - e^{i\alpha n})}{(e^{-i\alpha n} - e^{i\alpha n}) \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + (e^{i\alpha n} + e^{-i\alpha n})\sqrt{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} - |a|^2}} \right| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{-2ia \operatorname{sen}(\alpha n)}{-2i \operatorname{sen}(\alpha n) \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + 2\cos(\alpha n)\sqrt{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} - |a|^2}} \right| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{|a||\operatorname{sen}(\alpha n)|}{\sqrt{\operatorname{sen}^2(\alpha n)\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} + (\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} - |a|^2)\cos^2(\alpha n)}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{|a||\operatorname{sen}(\alpha n)|}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} - |a|^2\cos^2(\alpha n)}} \leq \frac{|a|}{|\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}|} < 1. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Para ver que la primera desigualdad de (5) es cierta basta considerar la siguiente función

$$f(x) = \frac{|a|^2 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} - |a|^2\cos^2 x},$$

que tiene período 2π y su derivada

$$f'(x) = \frac{|a|^2 \operatorname{sen}(2x)\left(\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} - |a|^2\cos(2x)\right)}{\left(\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} - |a|^2\cos^2 x\right)^2}$$

sólo se anula para $x = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, pues $\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} - |a|^2\cos(2x) > \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} - |a|^2 > 0$. Luego f alcanza su máximo en $x = \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$ y vale $|a|^2/\operatorname{sen}^2(\theta/2)$. Aplicando la proposición 1.1.14 se tiene que $\{\varphi^n\}_{n\geq 0}$ no es fugitiva.

Por último veamos el caso en que $b = 0$; aquí φ es una rotación límite no euclídea y $|a| = \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$. En este caso, A tiene un autovalor doble $\lambda = (k+1)/2$ y la matriz de Jordan viene dada por:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{k+1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{k+1}{2} \end{pmatrix}.$$

La matriz de paso es:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1-k}{2} & -1 \\ \bar{a} & 0 \end{pmatrix},$$

que tiene por inversa a:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\bar{a}} \\ -1 & \frac{1-k}{2\bar{a}} \end{pmatrix},$$

de modo que $A = PJP^{-1}$. Por tanto,

$$A^n = PJ^nP^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{k+1}{2}\right)^n - n\frac{1-k^2}{4}\left(\frac{k+1}{2}\right)^{n-2} & \frac{1}{a}\left(\frac{k+1}{2}\right)^{n-1}\left[\frac{1-k^2}{4} + n\left(\frac{1-k}{2}\right)^2 - \frac{1-k^2}{4}\right] \\ -n\bar{a}\left(\frac{k+1}{2}\right)^{n-1} & n\frac{1-k^2}{4}\left(\frac{k+1}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{k+1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

En este caso, puesto que $|a| \neq 1$ y $a \neq 0$, se tiene que $k \neq \pm 1$. Luego, si escribimos $\varphi^n(z) = \frac{k_n z - k_n a_n}{-\bar{a}_n z + 1}$, su forma canónica, entonces por la proposición 1.1.14 se ha de computar:

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} |\bar{a}_n| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-n\bar{a}\left(\frac{k+1}{2}\right)^{n-1}}{n\frac{1-k^2}{4}\left(\frac{k+1}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{k+1}{2}\right)^n} \right| \\ &= \left| \frac{2\bar{a}}{1-k} \right| \\ &= \left| \frac{\bar{a}}{ie^{i\frac{\theta}{2}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} \right| \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por consiguiente, en este caso, también $\{\varphi^n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva y la demostración de la proposición queda concluida. □

Veamos cómo se puede evitar el cálculo anterior. Si φ es una rotación límite no euclídea o una traslación no euclídea, entonces es conjugada a una traslación no trivial que deja invariante el semiplano superior o a una homotecia de razón positiva y distinta de 1 que deja invariante el semplano superior y con puntos fijos el 0 y el ∞, respectivamente. Aplicando la propiedad 1.1.2 es muy fácil probar en ambos casos que $\{\varphi^n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva. Si φ es una rotación no euclídea, entonces tiene un punto fijo en $\mathbb{D}$. Esto implica que también lo tiene φ^n para todo n. Por tanto, por la proposición 1.1.11, $\{\varphi^n\}_{n\geq 0}$ no puede ser fugitiva.

PROPOSICIÓN 1.1.16. *Sea $\{\varphi_n(z)\}_{n\geq 0} \subset Aut(\mathbb{C}^*)$, donde $\varphi_n(z) = a_n z$ $(n \geq 0)$ o $\varphi_n(z) = a_n/z$ $(n \geq 0)$. Entonces $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva si y sólo si $\limsup_{n\to\infty}(\max\{\left|\frac{1}{a_n}\right|, |a_n|\}) = +\infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Lo hacemos para el caso en que $\varphi_n = a_n z$ para cada natural n. El caso en que $\varphi_n(z) = \frac{a_n}{z}$ para cada n se deduce por conjugación, usando la propiedad 1.1.2 con $\Omega = \Omega_1 = \mathbb{C}^*$ y $\psi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ definida por $\psi(z) = \frac{1}{z}$.

Sea $\{r_k\}_{k\geq 0}$ una sucesión estrictamente creciente de números reales mayores que 1 tal que $\lim_{k\to\infty} r_k = \infty$. Si $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva, entonces existe una sucesión $\{n_k\}_{k\geq 0}$ tal que $\varphi_{n_k}(1) \notin K_{r_k}$, donde K_r, $1 \leq r < \infty$, es el anillo cerrado $\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{r} \leq |z| \leq r\}$. Esto implica que $|a_{n_k}| = |\varphi_{n_k}(1)| > r_k$ o $|a_{n_k}| = |\varphi_{n_k}(1)| < \frac{1}{r_k}$, de modo que $\max\{\left|\frac{1}{a_{n_k}}\right|, |a_{n_k}|\} > r_k$. Luego $\limsup_{n\to\infty}(\max\{\left|\frac{1}{a_n}\right|, |a_n|\}) = +\infty$.

Por otra parte, para todo subconjunto compacto $K \subset \mathbb{C}^*$, existe r, $1 \leq r < \infty$, tal que $K \subset K_r$. Si $\limsup_{n\to\infty}(\max\{\left|\frac{1}{a_n}\right|, |a_n|\}) = +\infty$, existe un número natural m con $\max\{\left|\frac{1}{a_m}\right|, |a_m|\} > r^2$. Ahora, si $z \in K_r$, tenemos que

$$|\varphi_m(z)| = |a_m z| < \frac{1}{r^2} r = \frac{1}{r},$$

o bien,

$$|\varphi_m(z)| = |a_m z| > r^2 \frac{1}{r} = r.$$

En uno y otro caso se tiene que $K \cap \varphi_m(K) \subset K_r \cap \varphi_m(K_r) = \emptyset$. Por lo que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva. $\square$

PROPOSICIÓN 1.1.17. *Sea $\varphi \in Aut(\mathbb{C}^\star)$. Entonces $\{\varphi^n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva en $\mathbb{C}^\star$ si y sólo si $\varphi(z) = az$ y $|a| \neq 1$, o equivalentemente, φ no es una rotación alrededor del origen ni una inversión.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\varphi(z) = \frac{a}{z}$ con $a \neq 0$ se tiene que $K \cap \varphi^n(K) = \{1, a\}$ para todo $n \geq 0$, donde $K = \{1, a\}$. Así, $\{\varphi^n\}_{n\geq 0}$ no puede ser fugitiva en $\mathbb{C}^\star$. Si $\varphi(z) = az$, entonces $\varphi^n(z) = a^n z$. Aplicando la proposición anterior se tiene que $\limsup_{n\to\infty}(\max\{\left|\frac{1}{a^n}\right|, |a^n|\}) = +\infty$ si y sólo si $|a| \neq 1$.

La proposición anterior nos proporciona un ejemplo de región en que hay automorfismos sin puntos fijos cuya sucesión de iteradas no es fugitiva. Pues si a es un número complejo de módulo 1 pero distinto de 1 se tiene que el automorfismo definido por $\varphi(z) = az$ no tiene ningún punto fijo en $\mathbb{C}^\star$ y por la proposición anterior la sucesión de iteradas no es fugitiva en $\mathbb{C}^\star$. Por aplicación directa de la proposición 1.1.11 lo que sí se tiene siempre es que si la sucesión de iteradas de un automorfismo es fugitiva, entonces el automorfismo no puede tener ningún punto fijo en Ω.

En resumen se tiene que, para cualquier región $\Omega \subset \mathbb{C}$, o bien Ω es isomorfa a $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}^\star$, $\mathbb{D}^\star$ o a un anillo en cuyo caso hemos caracterizado las sucesiones fugitivas de automorfismos, o bien Ω no es isomorfa a ninguno de estos cinco tipos de regiones. En el último caso se tiene que el grupo de automorfismos actúa de forma propiamente discontinua sobre Ω. Si tal grupo es infinito sí hay sucesiones fugitivas de automorfismos en Ω, y si es finito no hay sucesiones fugitivas de automorfismos.

Sección 2: Existencia de funciones universales.

En esta sección probaremos la existencia de funciones universales para una sucesión fugitiva de automorfismos $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$.

Primero probaremos que la condición de fugitividad en cualquier región $\Omega \subset \mathbb{C}$ permite demostrar la existencia de una función universal en $A(K)$ para todo conjunto compacto K de complemento conexo en Ω. Para ello necesitaremos el siguiente lema:

LEMA 1.2.1. *Para toda región $\Omega \subset \mathbb{C}$ existe una sucesión $\{K_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{K}_1(\Omega)$ tal que para todo $K \in \mathcal{K}_1(\Omega)$ existe un numero natural n_0 tal que $K \subset intK_{n_0}$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la familia munerable $\{U_n\}_{n\geq 0}$ de todas las uniones conexas y finitas de discos cordales (es decir, relativos a la distancia cordal en $\mathbb{C}^\infty$) con centros y radios racionales que contengan al conjunto compacto $L_1 = \mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$. Se define $K_n = \mathbb{C}^\infty \setminus U_n$. Si $K \in \mathcal{K}_1(\Omega)$, entonces se puede construir un conjunto compacto y conexo L de $\mathbb{C}^\infty$ con $L \cap K = \emptyset$ y $L_1 \subset L$. Sea r un número racional positivo tal que la distancia cordal entre K y L es mayor que r. Siempre podemos recubrir L por discos cordales de radio r y centros racionales tal que la intersección de cada disco con L no es el conjunto vacío. Si extraemos un subrecubrimiento finito por tales discos y llamamos U a su unión, es obvio que K está contenido en el interior de $\mathbb{C}^\infty \setminus U$ y que $U = U_n$ para algún numero natural n, lo cual termina la demostración. □

TEOREMA 1.2.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región. Si $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset Aut(\Omega)$ es fugitiva en Ω, entonces existe una función en $H(\Omega)$ que es universal respecto $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{K}_1(\Omega)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{p_n\}_{n\geq 0}$ un subconjunto denso y numerable de $H(\Omega)$. Consideremos también una sucesión exhaustiva de $\{K_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{K}(\Omega)$ de conjuntos compactos y la sucesión $\{K'_t\}_{t\geq 0}$ dada por el lema 1.2.1. Puesto que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva, usando la propiedad 1.1.6 y que $\{K_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión exhaustiva de compactos de Ω podemos encontrar por inducción una subsucesion de $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ que enumeramos con dos índices $\{\varphi_{t,m} : m \geq 0, 0 \leq t \leq m\}$ y otra subsucesión de subconjuntos compactos $\{K_m\}_{m\geq 0}$ tal que $L_m = K_m \cup (\bigcup_{t=0}^{m} \varphi_{t,m}(K'_t))$ es una unión disjunta tal que $L_m \subset intK_{m+1}$. Además, puesto que $\varphi_{t,m}$ son homeomorfismos, se tiene que $L_m \in \mathcal{K}(\Omega)$.

Sea $q_0(z) = 0$ y definimos por inducción en cada L_m las siguientes funciones:

$$h_m(z) = \begin{cases} q_{m-1}(z), & \text{si } z \in K_m; \\ p_m(\varphi_{t,m}^{-1}(z)), & \text{si } z \in \varphi_{t,m}(K_t'), \quad 0 \leq t \leq m . \end{cases}$$

Está claro que $h_m \in A(L_m)$ porque $q_{m-1} \in H(\Omega)$ por hipótesis de inducción; entonces, por el teorema de aproximación de Mergelyan (ver preliminares), existe una función racional $q_m(z)$ con, a lo más, un polo en cada componente conexa de $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ y ningún otro polo (por la definición de $\mathcal{K}(\Omega)$, L_m tiene sólo un número finito de agujeros) tal que $\max_{z \in L_m} |h_m(z) - q_m(z)| < \frac{1}{2^m}$. Por tanto, tenemos que

$$\max_{K_m} |q_m(z) - q_{m-1}(z)| < \frac{1}{2^m},$$

$$\max_{\varphi_{t,m}(K_t')} |q_m(z) - p_m(\varphi_{t,m}^{-1}(z))| < \frac{1}{2^m}.$$

para $0 \leq t \leq m$. Se tiene que $q_m \in H(\Omega)$ y además, claramente, $\{q_m(z)\}_{m \geq 0}$ converge uniformemente en conjuntos compactos de Ω a una función $f \in H(\Omega)$. Esta función se puede escribir, para todo $m \geq 0$, como

$$f(z) = q_m(z) + \sum_{k=m}^{\infty} (q_{k+1}(z) - q_k(z)).$$

Comprobemos ahora que f es universal respecto de $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ en $A(K_t')$ para todo natural $t \geq 0$. Para ello basta ver que f es universal en $A(K_t')$ para $\{\varphi_{t,m} : m \geq t\}$ para todo $t \geq 0$. Se tiene, para $z \in \varphi_{t,m}(K_t') \subset int K_{n+1}$ y $m \geq t$ lo siguiente:

$$\begin{aligned} |f(z) - p_m(\varphi_{t,m}^{-1}(z))| &\leq |q_m(z) - p_m(\varphi_{t,m}^{-1}(z))| + \sum_{k=m}^{\infty} |q_{k+1}(z) - q_k(z)| \\ &< \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^m} \\ &= \frac{1}{2^{m-1}} \end{aligned}$$

Así tenemos, para todo $t \geq 0$ y $m \geq t$,

$$\max_{K'_t} |f(\varphi_{t,m}(z)) - p_m(z)| = \max_{\varphi_{t,m}(K'_t)} |f(z) - p_m(\varphi_{t,m}^{-1}(z))| < \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Luego, para todo $t \geq 0$

$$\lim_{m \to \infty} (f(\varphi_{t,m}(z)) - p_m(z)) = 0$$

uniformemente en K'_t. Ya que por el teorema de aproximación de Mergelyan $\{p_n\}_{n\geq 0}$ es denso en $A(K'_t)$, tenemos que $\{p_n\}_{n\geq t}$ es denso en $A(K'_t)$ para todo número natural $t \geq 0$. Ya que para todo $t \geq 0$, la sucesión $\{f(\varphi_{t,n})\}_{n\geq t}$ está suficientemente cerca de $\{p_n\}_{n\geq t}$ y podemos extraer de esta última una subsucesión uniformemente convergente en K'_t a cualquier $g \in A(K'_t)$, tenemos que podemos extraer una sucesión de la anterior uniformemente convergente en compactos de Ω a cualquier $g \in A(K'_t)$ con lo cual hemos probado la universalidad de f en $A(K'_t)$ para $t \geq 0$.

Por último si $K \in \mathcal{K}_1(\Omega)$, entonces por el lema 1.2.1 existe un n_0 tal que $K \subset intK'_{t_0}$. Puesto que K y K'_{t_0} son de complemento conexo en Ω se tiene que cada componente de $intK'_{t_0} \setminus K$ es conexa por lo que podemos aplicar de nuevo el teorema de aproximación de Mergelyan obteniendo que $A(K'_{t_0})$ es denso en $A(K)$ y por tanto cualquier función universal en $A(K'_{t_0})$ lo es también en $A(K)$. □

COROLARIO 1.2.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región y $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset Aut(\Omega)$. Si $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva en Ω, entonces existe una función de $H(\Omega)$ que es universal en $H(\Omega_1)$ para todo Ω_1 de complemento conexo en Ω.*

DEMOSTRACIÓN. Para toda Ω_1 de complemento conexo en Ω es suficiente construir una sucesión exhaustiva de conjuntos compactos $\{K_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{K}_1(\Omega)$ de Ω_1. □

NOTA 1.2.4. *Obsérvese que este corolario junto con las proposiciones 1.1.12 y 1.1.14 ya contiene generalizaciones de los teoremas de Birkhoff y de Seidel-Walsh pues si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexa (por el teorema de aplicación de Riemann $\Omega = \mathbb{C}$ o es isomorfa $\mathbb{D}$) entonces tiene complemento conexo en sí misma. Por tanto, si $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva en Ω, entonces en este caso existe una función universal en $H(\Omega)$. El teorema 1.2.2 junto con la proposición 1.1.16 también contiene al teorema 0.3.3 de P. Zappa.*

NOTA 1.2.5. *Lo dicho en la nota anterior no se puede generalizar a cualquier región Ω. De hecho si Ω es isomorfa a $\mathbb{C}^*$ es falso. Para ver esto, supongamos que $\{c_n z\}_{\geq 0}$ es fugitiva y $f \in H(\mathbb{C}^*)$ es universal en $H(\mathbb{C}^*)$ (esto implica que f tiene una singularidad esencial en 0 y en ∞). Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\{|c_n|\}_{n\geq 0}$ es decreciente y $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ (aplicar proposición 1.1.16 y extraer una subsucesión si es necesario). Sea $f_n(z) = f(c_n z)$ $(n \geq 0)$. Ya que f es universal podemos extraer una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k\geq 0}$ que converge a cierta $g \in H(\mathbb{C}^*)$ en el interior de un anillo $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$. Fijemos $\rho \in (r, R)$. Entonces $|g(z)|$ está acotada por un número positivo en $|z| = \rho$ y, consecuentemente, las funciones $\{f_{n_k}\}_{k\geq 0}$ están uniformemente acotadas en $|z| = \rho$. Esto implica que $|f(z)| < M$ en $|z| = |c_{n_k}|\rho$ para todo $k \geq 0$. Aplicando el principio del módulo máximo, vemos que $|f(z)| < M$, $0 < |z| < |c_{n_k}|\rho$, lo cual contradice el hecho de que f tiene una singularidad esencial en el origen. El argumento efectuado es análogo al de una de las pruebas del teorema de Picard (véase* [Mar. *vol. II, pp. 591-592*]*).*

Sorprendentemente el ejemplo anterior es esencialmente el único que se podía dar ya que el plano menos un punto es la única región a la que no se puede generalizar el teorema de Birkhoff, pues como veremos en el teorema 1.2.9, si Ω no es isomorfa a $\mathbb{C}^*$ y se da una sucesión fugitiva en Ω sí existe una función universal en $H(\Omega)$. Antes de demostrar el teorema citado necesitaremos demostrar un par de lemas topológicos preparatorios. De los ejemplos 1.1.8 y 1.1.10 vistos en la sección anterior se desprende que aparte de $\mathbb{C}^*$ el único interés de la definición 1.1.1 está en las regiones simplemente conexas y en las de orden de conexión infinito. Es por esto por lo que nos concentraremos en regiones de conexión infinita.

DEFINICIÓN 1.2.6. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ de conectividad infinita. Diremos que una componente conexa C of $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ es* aislada *si existe un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}^\infty$ tal que $C \subset U$ y $U \cap C' = \emptyset$ para las restantes componentes C' de $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$.*

Obsérvese que por la compacidad de $\mathbb{C}^\infty$ para toda región $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$ de orden de conexión infinito se tiene que $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ posee al menos una componente conexa no aislada.

En este punto es conveniente recordar que si $K \in \mathcal{K}(\Omega)$, entonces $\mathbb{C}^\infty \setminus K$ tiene un número finito de componentes conexas. Además, $\mathbb{C}^\infty \setminus K$ tiene tantas componentes conexas como $\mathbb{C}^\infty \setminus \varphi(K)$, donde φ es un automorfismo de Ω.

En los siguientes lemas para cada subconjunto $S \subset \mathbb{C}^\infty$ llamaremos un *agujero* de S a cada componente conexa de $\mathbb{C}^\infty \setminus S$, incluyendo la componente conexa que contiene a ∞. Se tiene que un compacto K contenido en Ω es Runge (o sea, de $\mathcal{K}(\Omega)$) si y sólo si cada agujero de K contiene un agujero de Ω.

LEMA 1.2.7. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región de conectividad infinita y $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset Aut(\Omega)$ una sucesión fugitiva. Entonces existe una componente conexa no aislada C de $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$, y una subsucesión fugitiva $\{\varphi_{n_k}\}_{k\geq 0}$ tal que para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$ y para todo conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}^\infty$ con $C \subset U$, existe un número natural k_0 tal que para todo $k \geq k_0$ se tiene $\varphi_{n_k}(K) \subset U$.*

DEMOSTRACIÓN. Siempre se puede elegir un sucesión exhaustiva $\{K_n\}_{n\geq 0}$ de subconjuntos compactos conexos de Ω satisfaciendo $\mathbb{C}^\infty \setminus K_n = \cup_{j\in J_n} U_j^n$, donde la unión es disjunta. J_n es un conjunto finito y cada U_j^n es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^\infty$, de tal forma que, o bien U_j^n contiene una única componente conexa aislada de $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$, o contiene una componente conexa no aislada. En este último caso, debe contener infinitas componentes conexas de $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$. También se puede suponer que $\mathbb{C}^\infty \setminus K_n$ tiene tres o más componentes conexas para cada n. Ya que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva tenemos que, extrayendo una subsucesión, si es necesario, $K_n \cap \varphi_n(K_n) = \emptyset$ para cada n; luego $\varphi_n(K_n) \subset \mathbb{C} \setminus K_n$ y, puesto que $\varphi_n(K_n)$ es conexo, existe $j_0 \in J_n$ con $\varphi_n(K_n) \subset U^n_{j_0}$ donde $U^n_{j_0}$ contiene una componente conexa no aislada de $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$, digamos, C_n. Ahora, usando la compacidad de $\mathbb{C}^\infty$, existe una componente conexa C de $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ y una subsucesión $\{C_{n_k}\}_{k\geq 0}$ con la siguiente propiedad: Dado un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}^\infty$ con $C \subset U$, existe un número natural k_0 tal que $C_{n_k} \subset U$ para todo $k \geq k_0$. Entonces se ve fácilmente que C es no aislada y que $\{\varphi_{n_k}\}_{k\geq 0}$ satisface las condiciones requeridas. □

LEMA 1.2.8. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región de conectividad infinita, $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset Aut(\Omega)$ una sucesión fugitiva y $K_1, K \in \mathcal{K}(\Omega)$. Entonces existe un número natural n_0 tal que $K_1 \cap \varphi_{n_0}(K) = \emptyset$ y $K_1 \cup \varphi_{n_0}(K) \in \mathcal{K}(\Omega)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que K_1 y K son conexos. Ahora, sean l_1 y l el número de agujeros de K_1 y K, respectivamente. Sea C la componente conexa dada por el lema 1.2.7. Entonces $U_1 = \mathbb{C}^\infty \setminus K_1$ es un entorno abierto de C. Ya que C es no aislada existe un entorno abierto U y una componente conexa C_0 de $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ tal que $C \subset U \subset U_1$ y $C_0 \subset U_1 \setminus U$. Por el lema 1.2.7, existe un número natural n_0 tal que $\varphi_{n_0}(K) \subset U$. Claramente, $K_1 \cap \varphi_{n_0}(K) = \emptyset$. Entonces, el número de agujeros de $K_1 \cup \varphi_{n_0}(K)$ es $l_1 + l - 1$. Puede ocurrir que K_1 esté en una componente conexa acotada de $\mathbb{C}^\infty \setminus \varphi_{n_0}(K)$, o $\varphi_{n_0}(K)$ esté en una componente conexa acotada de $\mathbb{C}^\infty \setminus K_1$, o ninguna de las dos cosas. En este último caso no hay nada que probar. En los dos primeros casos, $K_1 \cup \varphi_{n_0}(K)$ tiene, al menos, $l_1 + l - 2$ agujeros que contienen un agujero de Ω. Supongamos que $\varphi_{n_0}(K)$ está en una componente conexa acotada de $\mathbb{C}^\infty \setminus K_1$ (el caso en que K_1 esté en una componente conexa de $\mathbb{C}^\infty \setminus \varphi_{n_0}(K)$ se puede tratar análogamente). Hemos de probar que hay un agujero de Ω que está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}^\infty \setminus \varphi_{n_0}(K)$ el cual está en el mismo agujero de K_1 que $\varphi_{n_0}(K)$. Pero, por la construcción anterior, C_0 está en una componente conexa no acotada de $\mathbb{C}^\infty \setminus \varphi_{n_0}(K)$ y, consecuentemente, en el mismo agujero de K_1 que $\varphi_{n_0}(K)$. $\square$

El enunciado del lema anterior es trivialmente cierto si Ω es simplemente conexa mientras que es falso si $\Omega = \mathbb{C}^\star$: basta tomar $K = K_1 = \{|z| = 1\}$ y $\varphi_n(z) = nz$ $(n \geq 0)$.

TEOREMA 1.2.9. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región, que no es isomorfa a $\mathbb{C}^\star$. Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset Aut(\Omega)$ tal que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva en Ω. Entonces existe una función de $H(\Omega)$ que es universal en $H(\Omega)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{p_n\}_{n\geq 0} \subset H(\Omega)$ un subconjunto denso y numerable de $H(\Omega)$. Consideramos también una sucesión exhaustiva de conjuntos compactos $\{K_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{K}(\Omega)$. Obsérvese que por hipótesis Ω es simplemente conexa o es de orden de conexión infinito. Ya que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva, aplicando el lema anterior podemos extraer una subsucesión de $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ y de $\{K_n\}_{n\geq 0}$, que seguiremos denotando igual, tal que el conjunto compacto $L_n = K_n \cup \varphi_n(K_n)$ es una unión disjunta que está en $\mathcal{K}(\Omega)$ y contenida en $int K_{n+1}$. Definimos por inducción en el conjunto compacto L_n la siguiente función:

$$h_n(z) = \begin{cases} q_{n-1}, & \text{si } z \in K_n; \\ p_n(\varphi_n^{-1}(z)), & \text{si } z \in \varphi_n(K_n). \end{cases}$$

Hemos tomado $q_0 \in H(\Omega)$ arbitrariamente. Claramente, $h_n(z) \in A(L_n)$. Luego, por el teorema de aproximación de Merguelyan, existe una función racional $q_n \in H(\Omega)$, con a lo más un polo en cada componente conexa de $\mathbb{C}^\infty \setminus L_n$ (por la definición de $\mathcal{K}(\Omega)$) y sin ningún otro polo, tal que $\max_{z\in L_n} |h_n(z) - q_{n-1}(z)| < \frac{1}{2^n}$. Por lo tanto, tenemos que

$$\max_{K_n} |q_n(z) - q_n(z)| < \frac{1}{2^n},$$

$$\max_{\varphi_n(K_n)} |q_n(z) - p_n(\varphi_n^{-1}(z))| < \frac{1}{2^n}.$$

Claramente, $\{q_n\}_{n\geq 0}$ converge uniformemente en conjuntos compactos de Ω a una función $f \in H(\Omega)$ que se puede escribir, para cualquier $n \geq 0$, como

$$f(z) = q_n(z) + \sum_{k=n}^{\infty} (q_{k+1}(z) - q_k(z)).$$

Para ver que f es universal para $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$, es suficiente observar que para $z \in \varphi_n(K_n) \subset K_{n+1}$ tenemos

$$\begin{aligned}
|f(z) - p_n(\varphi_n^{-1}(z))| \leq & |q_n(z) - p_n(\varphi_n^{-1}(z))| + \sum_{k=n}^{\infty} |q_{k+1}(z) - q_k(z)| \\
< & \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
= & \frac{1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\max_{K_n} |f(\varphi_n(z)) - p_n(z)| = \max_{\varphi_n(K_n)} |f(z) - p_n(\varphi_n^{-1}(z))| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Por tanto se tiene

$$\lim_{n\to\infty} |f(\varphi_n(z)) - p_n(z)| = 0$$

uniformemente en conjuntos compactos.

Sea g cualquier función en $H(\Omega)$. Puesto que la sucesión $\{p_n\}_{n\geq 0}$ es densa en $H(\Omega)$ existe una subsucesión $\{p_{n_k}\}_{k\geq 0}$ tal que $\lim_{k\to\infty} |p_{n_k}(z) - g(z)| = 0$ uniformemente en compactos de Ω. Por tanto, $\lim_{k\to\infty} |f(\varphi_{n_k}(z)) - g(z)| = 0$ uniformemente en compactos de Ω y la demostración queda concluida. □

Es muy interesante observar que la demostración del teorema anterior así como la del teorema 1.2.2, siendo constructivas, tienen un grado de libertad en la elección de la función q_0. Esta elección, que en modo alguno es sustancial, es la que permitiría inmediatamente probar que el conjunto de las funciones universales es un conjunto denso de $H(\Omega)$. De hecho es lo que permitirá en el último capítulo demostrar la existencia de espacios vectoriales cerrados de dimensión infinita de funciones universales.

También es conveniente hacer notar que puesto que por el teorema de aproximación de Mergelyan $H(\Omega)$ es denso en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{K}(\Omega)$, se tiene que si Ω no es isomorfa a $\mathbb{C}^*$ se han mejorado los subconjuntos compactos de Ω respecto de los que da Zappa (véase teorema 0.3.4) para los cuales existe una función universal.

Acabamos este capítulo comentando una diferencia entre las sucesiones fugitivas en el plano complejo y las sucesiones fugitivas en regiones simplemente conexas isomorfas al disco unidad $\mathbb{D}$. Esta diferencia viene dada por la proposición siguiente:

PROPOSICIÓN 1.2.10. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplemente conexa y distinta de $\mathbb{C}$ y $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset Aut(\Omega)$. Si $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ no es fugitiva en Ω entonces para todo compacto $K \subset \mathbb{D}$ se tiene que $\bigcup_{n=0}^{\infty} \varphi_n(K)$ es relativamente compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Por conjugación podemos suponer que $\Omega = \mathbb{D}$ y por tanto para cada $n \geq 0$ se tiene que $\varphi_n(z) = \frac{z-a_n}{1-\bar{a}_n z} k_n$ con $|k_n| = 1$ y $0 \leq |a_n| < 1$.

Puesto que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ no es fugitiva en $\mathbb{D}$, por la proposición 1.1.14 se tiene que existe numero real, $0 \leq s < 1$, tal que $|a_n| \leq s$, para todo $n \geq 0$.

Sea $\varphi(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} k \in Aut(\mathbb{D})$ con $|a| = s$ y fijemos un compacto $K \subset \mathbb{D}$ y un $r \in [0,1)$ tal que $K \subset \bar{B}(0,r)$. Por el principio del módulo máximo se tiene

$$\max_{|z|\leq r} \left| k \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| = \max_{|z|=r} \frac{|z-a|}{|1-\bar{a}z|}$$

para calcular este máximo hacemos $z = re^{it}$ y $a = se^{i\theta}$.

Consideremos pues, la siguiente función definida en $[0, 2\pi]$:

$$f(t) = \frac{(r\cos t - s\cos\theta)^2 + (r\,\mathrm{sen}\,t - s\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}{(1 - rs\cos(\theta + t))^2 + rs\,\mathrm{sen}^2(\theta - t)} = \frac{|z - a|^2}{|1 - \bar{a}z|^2}.$$

cuya derivada es

$$f'(t) = \frac{2rs(r^2 + s^2 - 1 - r^2s^2)}{(1 - 2rs\cos(\theta - t) + r^2s^2)^2}.$$

Por consiguiente si $s \neq 0$ y $r \neq 0$, entonces f alcanza su máximo en $t = \theta - \pi$ (módulo $[0, 2\pi]$) y vale

$$\frac{r + s}{1 + rs} < 1. \tag{6}$$

Por lo que en todos los casos se tiene que $L = \cup_{n=1}^{\infty}\varphi_n(K)$ es relativamente compacto. Es trivial si $r = 0$ ó $s = 0$. En otro caso, otra vez por el principio del módulo máximo, el miembro izquierdo de (6) es estrictamente creciente en r y por simetría también lo es en s. Por tanto $L \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\bar{B}(0, r)) \subset \bar{B}(0, \frac{r+s}{1+rs})$ que está contenido en $B(0, \frac{r+s}{1+rs})$, de donde se deduce que L es relativamente compacto. □

Este resultado no es cierto en $\mathbb{C}$ pues la sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ definida por

$$\varphi(z) = \begin{cases} nz, & \text{si } n \text{ es par ;} \\ n(z - 1), & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

no es fugitiva en $\mathbb{C}$, ya que si $K = \{0, 1\}$ se tiene que $K \cap \varphi_n(K) \supset \{0\} \neq \emptyset$. Sin embargo, se puede verificar fácilmente que para todo subconjunto compacto no vacío $K \subset \mathbb{C}$ el conjunto $\bigcup_{n=0}^{\infty}\varphi_n(K)$ es no relativamente compacto.

Como consecuencia de la proposición anterior tenemos el siguiente corolario, el cual incluye que la condición de fugitividad sobre una sucesión de automorfismos es necesaria para la existencia de funciones universales en regiones simplemente conexas y distintas de $\mathbb{C}$.

COROLARIO 1.2.11. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región simplemente conexa y distinta de $\mathbb{C}$ y $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset Aut(\Omega)$. Entonces son equivalentes:*

a) $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva en Ω.

b) Existe un subconjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que $\bigcup_{n=0}^{\infty} \varphi_n(K)$ no es relativamente compacto.

c) Existe una función $f \in H(\Omega)$ que es universal en $H(\Omega)$ para $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$.

DEMOSTRACIÓN. Que b) implica a) es el contrarrecíproco de la proposición 1.2.10. Que a) implica c) es el teorema 1.2.9.

Veamos que c) implica b) por reducción al absurdo. Si para todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$ el conjunto $\bigcup_{n=0}^{\infty} \varphi_n(K)$ es relativamente compacto se tiene por la proposición 0.3.6 que no existe función universal para $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$, en contradicción con c). $\square$

CAPÍTULO 2: Funciones universales en superficies de Riemann.

En este capítulo generalizaremos los resultados del capítulo anterior en dos sentidos. Por un lado, nos situaremos en el contexto ya completamente general de una superficie de Riemann no compacta R y por otro lado, no nos restringiremos a sucesiones de automorfismos de la superficie de Riemann, sino que consideraremos sucesiones de aplicaciones holomorfas de la superficie de Riemann en sí misma. Esto último está justificado, pues como vimos en el capítulo anterior, debido a la "rigidez" del grupo de automorfismos, existen regiones cuyo grupo de automorfismos no contiene sucesiones de automorfismos fugitivas. Recordamos que el grupo de automorfismos de las regiones de conectividad finita (excepto $\mathbb{C}^*$), así como otras muchas regiones cuyo grupo de automorfismos es finito, no poseían ninguna sucesión de automorfismos que pudiera ser fugitiva.

Generalizando el concepto de fugitividad a sucesiones de aplicaciones holomorfas que no sean necesariamente automorfismos, se obtiene una cantidad enorme de ejemplos en cualquier región del plano.

En la primera sección se define cuándo una sucesión de aplicaciones holomorfas en una superficie de Riemann no compacta es lisa-fugitiva. Esta definición jugará el mismo papel que las sucesiones de automorfismos fugitivas en el capítulo anterior. También se estudian algunas de sus propiedades y se dan algunos ejemplos.

En la segunda sección se demuestra que el hecho de que una sucesión de aplicaciones sea lisa-fugitiva es suficiente para la existencia de funciones universales para la sucesión de aplicaciones en todo subconjunto compacto de complemento conexo en R. Con lo cual se mejora el resultado de Zappa (teorema 0.3.4), no sólo en el tipo de compactos para los cuales existe una función universal sino también en el hecho de que esta universalidad es respecto de sucesiones de aplicaciones más generales que los automorfismos.

La tercera sección está encaminada a generalizar los resultados de Birkhoff y de Seidel-Walsh a una superficie de Riemann no compacta cualquiera, excepto las que son "similares" en el sentido de Freudenthal a $\mathbb{C}^*$, es decir, aquellas superficies de Riemann cuyas compactificaciones de Freudenthal se obtienen con sólo dos finales de Freudenthal.

Para esto habrá que afinar aún más la definición de sucesión de aplicaciones lisa-fugitivas definiendo qué es una sucesión de aplicaciones lisa-fugitiva preservante. Se obtiene entonces, vía el teorema de aproximación de Mergelyan que existe una función universal para todo subconjunto compacto de R que sea Runge, mejorándose todavía más el resultado de Zappa.

Por último, en esta sección también demostramos la necesidad de las condiciones impuestas a la sucesión de aplicaciones para la existencia de funciones universales para la sucesión.

En las demostraciones seguiremos técnicas más recientes que usan la teoría de operadores, con las que se obtiene que el conjunto de funciones universales es un conjunto residual. De todas formas el teorema de aproximación de Mergelyan seguirá jugando un papel fundamental. Con ello se demuestra que no hay una diferencia sustancial entre las técnicas más modernas de demostración de existencia de funciones universales y las técnicas de teoría de aproximación del capítulo anterior.

Sección 1: Sucesiones lisa-fugitivas de aplicaciones holomorfas.

Si examinamos detenidamente las demostración del teorema 1.2.9, en que se utiliza el inverso del automorfismo φ_n, observaremos que este inverso sólo se utiliza sobre el compacto K_n. Por otra parte es esencial la existencia de esta inversa para la definición de la función h_n. Es por esto por lo que para la existencia de funciones universales para una sucesión de aplicaciones no bastará sólo con que para cualquier subconjunto compacto $K \subset R$ exista un número natural n_0 tal que $K \cap \varphi_{n_0}(K) = \emptyset$, sino que además será necesario que sea inyectiva sobre K. Es decir, la sucesión de aplicaciones será también "exhaustivamente inyectiva". Es por todo esto por lo que damos las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN 2.1.1. *Sea R una superficie de Riemann no compacta. Se dice que una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{O}(R; R)$ es **lisa** en R si para cada subconjunto compacto $K \subset R$ existe un número natural $n_0 = n_0(K)$ tal que φ_{n_0} restringida a K es inyectiva.*

DEFINICIÓN 2.1.2. *Sea R una superficie de Riemann no compacta. Se dice que una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{O}(R; R)$ es **fugitiva** en R si para cada subconjunto compacto $K \subset R$ existe un número natural $n_0 = n_0(K)$ tal que $K \cap \varphi_{n_0}(K) = \emptyset$.*

La combinación de las dos definiciones anteriores da la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.1.3. *Sea R una superficie de Riemann no compacta. Se dice que una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{O}(R; R)$ es **lisa-fugitiva** en R si para cada subconjunto compacto $K \subset R$ existe un número natural $n_0 = n_0(K)$ tal que $K \cap \varphi_{n_0}(K) = \emptyset$ y φ_{n_0} restringida a K es inyectiva.*

En las tres definiciones anteriores se puede añadir el adjetivo "estricta" cuando la condición correspondiente se verifica para todo número natural $n \geq n_0$.

De las definiciones se deduce que una sucesión es estrictamente lisa-fugitiva si y sólo si es estrictamente lisa y estrictamente fugitiva. Sin embargo, no es cierto en general que una sucesión sea lisa-fugitiva si y sólo si es lisa y fugitiva por separado.

La definición 2.1.3 sólo tiene sentido en superficies de Riemann no compactas R, ya que si R fuese compacta, entonces, tomando como subconjunto compacto la propia superficie R, para toda $\varphi \in \mathcal{O}(R;R)$ distinta de constante se tiene que $R \cap \varphi(R) = R \neq \emptyset$. Recordemos que toda aplicación holomorfa y distinta de constante de una superficie de Riemann compacta en sí misma es sobreyectiva (véase por ejemplo [**Fo**, p. 11]).

Por otra parte, la definición 2.1.3 contiene a la definición 1.1.1 pues los automorfismos de una superficie R son inyectivos en R. En particular, sobre cualquier subconjunto compacto $K \subset R$.

Al igual que en el capítulo 1 tenemos las siguientes propiedades, cuyas demostraciones son omitidas por ser completamente análogas a las allí dadas.

PROPIEDAD 2.1.4. *Si $\psi : R \to R_1$ es un isomorfismo entre dos superficies de Riemann, entonces $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es lisa-fugitiva en R si y sólo si $\{\psi\circ\varphi_n\circ\psi^{-1}\}_{n\geq 0}$ es lisa-fugitiva en R_1.*

PROPIEDAD 2.1.5. *Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{O}(R;R)$ y $\{K_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión exhaustiva de conjuntos compactos de R. Si $K_n \cap \varphi_n(K_n) = \emptyset$ y φ_n es inyectiva en K_n para todo número natural n, entonces $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es lisa-fugitiva y toda subsucesión de $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es también lisa-fugitiva en R.*

PROPIEDAD 2.1.6. *Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{O}(R;R)$ una sucesión lisa-fugitiva. Si $\{K_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión exhaustiva de conjuntos compactos de R, entonces existe una subsucesión $\{\varphi_{n_k}\}_{k\geq 0}$ tal que $K_k \cap \varphi_{n_k}(K_k) = \emptyset$ y φ_{n_k} es inyectiva* *en K_k. Además, en este caso, para todo $z \in R$ la sucesión $\{\varphi_{n_k}(z)\}_{k\geq 0}$ no tiene ningún punto de acumulación en R.*

PROPIEDAD 2.1.7. *Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{O}(R; R)$ lisa-fugitiva en R. Dado un número finito $K_0, K_1, \ldots, K_l$ de subconjuntos compactos de R, existen unos números naturales $n_1, \ldots, n_l$ tales que $K_0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{l} \varphi_{n_i}(K_i)\right)$ es una unión disjunta y cada φ_{n_i} restringida a K_i es inyectiva.*

Además de las propiedades anteriores tenemos la siguiente propiedad, que ya nos dice algo sobre el carácter topológico de la definición 2.1.3.

PROPOSICIÓN 2.1.8. *Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{O}(R; R)$ una sucesión lisa-fugitiva en R. Si el género de R es positivo, entonces R es de género infinito.*

DEMOSTRACIÓN. Si el género es finito e igual a $g > 0$, entonces existe una subsuperficie K compacta y con borde $K \subset R$ de género igual a g. Por tanto, cada componente conexa de $R \setminus K$ es plana. Puesto que K es un compacto, existe un número natural n_0 tal que $K \cap \varphi_{n_0}(K) = \emptyset$ y φ_{n_0} es inyectiva sobre K. Ya que el género es un invariante topológico, $\varphi_{n_0}(K)$ es una superficie de género g contenida en una de las componentes conexas de $R \setminus K$ las cuales son todas subsuperficies planas, lo cual es una contradicción. □

Veamos ahora cómo ha aumentado la riqueza de ejemplos gracias a la ampliación de la definición de fugitividad a aplicaciones holomorfas.

EJEMPLO 2.1.9. *Sea $R = \mathbb{C}$ y sean $\{a_n\}_{n\geq 0}$ y $\{b_n\}_{n\geq 0}$ dos sucesiones de números complejos tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (con $a_n \neq 0$ para todo número natural n) y $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re} b_n = +\infty$. Veamos que la sucesión de funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ definida por $\{\varphi_n(z) = e^{a_n z + b_n}\}_{n\geq 0}$ es lisa-fugitiva en $\mathbb{C}$. Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Entonces existe $r > 0$ tal que $K \subset \bar{B}(0, r)$. Pongamos $a_n = r_n e^{i\theta_n}$. Cada función $e^{a_n z + b_n}$ es inyectiva en la banda $B_n = \{z =$*

$e^{-i\theta_n}w \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{r_n} < Im w < \frac{\pi}{r_n}\}$. *Puesto que* $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *tiende a cero, se tiene que* $\bar{B}(0,r) \subset B_n$ *para todo número natural* $n \geq n_1$. *Por consiguiente la sucesión es estrictamente lisa. Por otra parte,* $-r_n r + Reb_n > r$ *para todo* $n \geq n_2$ *y por tanto por el principio del módulo mínimo y usando que* $r > 0$ *tenemos que*

$$\min_{|z|\leq r} |e^{a_n z + b_n}| = \min_{|z|=r} |e^{a_n z + b_n}| = \min_{|z|=r} e^{Re(a_n z + b_n)} = e^{-r_n r + Reb_n} \geq e^r > r.$$

Esto implica que es estrictamente fugitiva. Con lo cual, si $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ *se tiene que* $\bar{B}(0,r) \cap \varphi_n(\bar{B}(0,r)) = \emptyset$ *y* φ_n *es inyectiva en* $\bar{B}(0,r)$ *y lo mismo pasa con el compacto* K. *Por consiguiente,* $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ *es lisa-fugitiva en* $\mathbb{C}$.

Recordamos que un punto *crítico* de una aplicación holomorfa φ es aquél para el cual no existe ningún entorno en el que φ sea inyectiva. Cuando se trata de funciones holomorfas con valores a $\mathbb{C}$ se reconocen fácilmente porque anulan a la derivada. En los ejemplos que siguen se observa que para que una sucesión de aplicaciones holomorfas sea lisa-fugitiva debe existir una subsucesión en que los puntos críticos de cada aplicación, si existen, deben ir quedando fuera de cada compacto de una sucesión exhaustiva de subconjuntos compactos de la superficie.

EJEMPLO 2.1.10. *Sea* $R = \mathbb{C}$ *y* $\{a_n z + b_n\}_{n\geq 0}$ *una sucesión de automorfismos de* $\mathbb{C}$ *tales que* $\lim_{n\to\infty}(\min\{\left|\frac{b_n}{a_n}\right|, |b_n|\}) = +\infty$. *luego es estrictamente fugitiva en* $\mathbb{C}$ *(véase proposición 1.1.12). Consideramos también una sucesión de números naturales* $\{c_n\}_{n\geq 0}$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n}|\frac{b_n}{a_n}| = \infty$. *En particular, esto es cierto si* $\{c_n\}_{n\geq 0}$ *es una sucesión constante. Entonces la sucesión de funciones* $\{\varphi_n(z) = (a_n z + b_n)^{c_n}\}_{n\geq 0}$ *es lisa-fugitiva en* $\mathbb{C}$. *Para ver esto, consideremos un subconjunto compacto* $K \subset \mathbb{C}$. *Sea* $r \geq 1$ *tal que* $K \subset \bar{B}(0,r)$. *Cada función* φ_n *es inyectiva en la región angular* $B_n = \{z = -\frac{b_n}{a_n} + re^{i\theta} : 0 < r < \infty; -\frac{\pi}{c_n} - \arg\frac{b_n}{a_n} < \theta < \frac{\pi}{c_n} + \arg\frac{b_n}{a_n}\}$. *Las semirrectas que determinan estas regiones son tangentes a la bola de centro* 0 *y radio* r_n *donde*

$$r_n = \frac{|\frac{b_n}{a_n}| \operatorname{tg}\frac{\pi}{c_n}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{c_n}}}$$

y puesto que $\lim_{n\to\infty} r_n = +\infty$ *existe un número natural* n_1 *tal que* φ_n *es inyectiva sobre* $B(0,r)$ *para todo* $n \geq n_1$. *Por otro lado, por ser* $\{a_n z + b_n\}_{n\geq 0}$ *estrictamente fugitiva, entonces para todo* $n \geq n_2$, *se tiene que* $\min_{|z|\leq r} |a_n z + b_n| > r$. *Por consiguiente, puesto que* $r \geq 1$ *se obtiene que* $\min_{|z|\leq r} |(a_n z + b_n)^{c_n}| > r^{c_n} \geq r$. *Con lo cual, si* $n \geq \max\{n_1, n_2\}$, *se tiene que* $\bar{B}(0,r) \cap \varphi_n(\bar{B}(0,r)) = \emptyset$ *y* φ_n *es inyectiva en* $\bar{B}(0,r)$. *Luego, ya que* $|z| \leq r$ *para todo* $z \in K$, *lo mismo pasa con el compacto* K. *Luego* $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ *es lisa-fugitiva en* $\mathbb{C}$.

Un método diferente para probar que una sucesión es lisa-fugitiva se usa en el siguiente ejemplo en el que la superficie de Riemann es el disco unidad.

EJEMPLO 2.1.11. *Sea* $R = \mathbb{D}$ *y* $\psi_n(z) = k_n \frac{z-a_n}{1-\bar{a}_n z}$ *una sucesión de automorfismos de* $\mathbb{D}$ *tales que* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$ *(esto implica que* $\{\psi_n\}_{n\geq 0}$ *es estrictamente fugitiva en* $\mathbb{D}$ *por la proposición 1.1.14). Veamos que para todo número natural* p *la sucesión* $\{\varphi_n(z) = (\psi_n(z))^p\}_{n\geq 0}$ *es lisa-fugitiva en* $\mathbb{D}$. *Sea un subconjunto compacto* $K \subset \mathbb{D}$. *Entonces existe un* r, $0 < r < 1$, *tal que* $K \subset \bar{B}(0,r)$. *Ya que* ψ_n *es estrictamente fugitiva, existe un número natural* n_1 *tal que si* $n \geq n_1$ $\min_{|z|\leq r} |\psi_n(z)| > r^{\frac{1}{p}}$. *Por otra parte* $\psi_n(\bar{B}(0,r))$ *es un círculo euclídeo cuyo centro* $C(\psi_n)$ *y radio* $R(\psi_n)$ *vienen dados por*

$$C(\psi_n) = \frac{r^2-1}{1-r^2|a_n|^2} a_n \quad \text{y} \quad R(\psi_n) = \frac{1-|a_n|^2}{1-r^2|a_n|^2} r.$$

De aquí, junto con que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$ *se deduce que* $\psi_n(\bar{B}(0,r))$ *está contenida en un ángulo centrado en el origen de amplitud menor que* $\frac{2\pi}{p}$. *En este ángulo la función* $f(z) = z^p$ *es inyectiva. Resulta que* φ_n *es inyectiva sobre* $\bar{B}(0,r)$ *por ser composición de funciones inyectivas y si* $n \geq n_0$, *entonces* $\min_{|z|\leq r} |\varphi_n(z)| \geq r$ *por lo que* $\bar{B}(0,r) \cap \varphi(\bar{B}(0,r)) = \emptyset$. *De modo que* $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ *es lisa-fugitiva en* $\mathbb{D}$.

EJEMPLO 2.1.12. *Sea* $R = \mathbb{C}$ *y* $\{\varphi_n(z) = (z-a_n)(z-b_n)\}_{n\geq 0}$. *Entonces el punto crítico de cada elemento de la sucesión está en* $\frac{a_n+b_n}{2}$. *Se* *comprueba fácilmente que* $\varphi_n(z) = \varphi_n(z')$ *si y sólo si* $z + z' = a_n + b_n$. *De modo que* φ_n *es inyectiva en la bola* $\bar{B}(0, r)$ *con* $r < \frac{|a_n+b_n|}{2}$. *Por otra parte, si* $r + \sqrt{r} < \min\{|a_n|, |b_n|\}$ *se tiene que para todo* $z \in \bar{B}(0, r)$ *la desigualdad* $|(z - a_n)(z - b_n)| \geq (|a_n| - |z|)(|b_n| - |z|) > r$. *Por consiguiente, basta que* $\lim_{n\to\infty} \min\{|a_n|, |b_n|\} = \infty$ *y que* $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n+b_n|}{2} = \infty$ *para que la sucesión de polinomios de grado 2 sea lisa-fugitiva.*

En el siguiente ejemplo se comprueba cómo regiones cuyo grupo de automorfismos no contiene sucesiones de automorfismos fugitivas, sí tienen sucesiones lisa-fugitivas de funciones.

EJEMPLO 2.1.13. *Sea, ahora, la región* $\Omega = \mathbb{D} \setminus \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ *del ejemplo 1.1.9 y sea la sucesión dada por* $\{\varphi_n(z) = \frac{z}{n} + \frac{1}{n} - 1\}_{n\geq 1}$. *Puesto que todos los elementos de la sucesión son funciones univalentes en* Ω *y* $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ *tiende uniformemente en compactos de* Ω *a la función constante igual a* -1, *se comprueba fácilmente que la sucesión* $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ *es fugitiva en* Ω. *Es claro que se pueden dar ejemplos análogos en regiones que se obtengan del disco unidad quitando una cantidad finita de puntos o discos. En particular, en el disco unidad perforado o en cualquier anillo.*

Finalmente, veremos algunos ejemplos en superficies de Riemann no planas.

EJEMPLO 2.1.14. *Las superficies de Riemann que se describen a continuación las consideraremos inmersas en* $\mathbb{R}^3$. *Identificamos* $\mathbb{C}$ *con el plano* XY *en el espacio de dimensión 3. Para la definición de doble de una superficie de Riemann con borde véase* [**AS**, *pp. 26-27 y 118-119*].

a) *Sea* R *la superficie de Riemann que se obtiene mediante la duplicación de la región contenida en* $\mathbb{C}$ *acotada por la recta* $y = 0$ *y la sucesión de circunferencias* $|z - i - n| = \frac{1}{9}$, $n \in \mathbb{Z}$. *Esta superficie de Riemann la podemos representar por la unión de la región que se resulta de quitar a* $\mathbb{C}$ *la sucesión de discos cerrados* $|z \pm i - n| \leq \frac{1}{9}$, $n \in \mathbb{Z}$ *unida con las superficies engendradas por el giro de 180 grados alrededor del eje* OX *de* *las fronteras de los discos que están en el semiplano superior. Se tiene que R es una superficie de Riemann de género infinito y cuyo conjunto de finales de Freudenthal es unitario.*

b) Sea R la "escalera infinita" formada mediante la duplicación de la región en el plano XY acotada por las rectas $y = \pm 1$ y la sucesión de circunferencias $|z - n| = \frac{1}{9}$, $n \in \mathbb{Z}$. Podemos representar R como una superficie en el espacio de dimensión 3 que está por encima y por debajo de la región dada del plano. Entonces R es una superficie de Riemann de género infinito cuyo conjunto de finales de Freudenthal consta exactamente de 2 elementos.

c) Si quitamos de la superficie del apartado b) los puntos que son intersección con el eje OY se obtiene una superficie de Riemann R cuyo conjunto de finales de Freundenthal es infinito.

Consideremos una traslación w en el espacio de dimensión 3 de módulo un número entero distinto de cero y cuya dirección coincide con la del eje OX. Esta traslación induce en los tres casos anteriores una aplicación $\varphi : R \longrightarrow R$. Es fácil comprobar que en los tres casos la sucesión de iteradas $\{\varphi^n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión fugitiva de automorfismos de R. A pesar de la similitud de las superficies de los apartados b) y c) el teorema 2.3.18 es aplicable a la sucesión de iteradas sólo en los casos a) y c) mientras que el teorema 2.2.8 es aplicable en los tres casos.

En la siguiente proposición, que es una generalización de la proposición 1.1.11, vemos cómo interviene la compactificación de Freudenthal.

PROPOSICIÓN 2.1.15. *Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{O}(R;R)$ y supongamos que existe una sucesión $\{z_n\}_{n\geq 0} \subset R$ tal que $\varphi_n(z_n) = z_n$ $(n \geq 0)$, esto es, z_n es un punto fijo para φ_n $(n \geq 0)$. Si $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es lisa-fugitiva, entonces existe una subsucesión $\{z_{n_k}\}_{k\geq 0}$ y un final $e \in \mathcal{F}(R)$ tal que $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = e$.*

DEMOSTRACIÓN. Todo lo que tenemos que probar es que existe una subsucesión de puntos fijos que diverge en R. Así, usando la compacidad de $\hat{R}$ podemos extraer de esta subsucesión otra subsucesión que converge en $\hat{R}$, por lo que debe de converger a un final $e \in \mathcal{F}(R)$. Si no existe una subsucesión que diverge en R entonces existe un subconjunto compacto $K \subset R$ tal que $\{z_n\}_{n\geq 0}$ está contenida en K. De modo que, tenemos $K \cap \varphi_n(K) \supset \{z_n\} \neq \emptyset$ para todo natural n, lo cual contradice el hecho de que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es lisa-fugitiva. □

Recordamos que un punto $z \in R$ se dice *periódico* de orden m para φ si es un punto fijo para φ^m y no es punto fijo para φ^n para $n < m$. En el caso particular de que la sucesión de aplicaciones sea la sucesión de iteradas de una cierta aplicación φ tenemos la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 2.1.16. *Sea $\varphi \in \mathcal{O}(R;R)$. Si $\{\varphi^n\}_{n\geq 0}$ es lisa-fugitiva en R entonces φ no tiene ningún punto periódico.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que z es punto periódico de orden n para φ. Entonces el subconjunto compacto $K = \{z, \varphi(z), \ldots, \varphi^{m-1}(z)\}$ es invariante por φ^n para todo número natural n, esto es, $\varphi^n(K) = K$. De aquí se tiene que $K \cap \varphi^n(K) = K \neq \emptyset$. Por tanto φ no puede ser fugitiva en R. □

Como aplicación tenemos la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 2.1.17. *Sea $\varphi \in H(\mathbb{C})$. Entonces $\{\varphi^n\}_{n\geq 0}$ es lisa-fugitiva en $\mathbb{C}$ si y sólo si φ es una traslación no trivial, o, equivalentemente, φ no tiene puntos fijos y es univalente.*

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición 1.1.13 sabemos que si φ es una traslación no trivial, entonces $\{\varphi^n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva.

Recíprocamente, puesto que φ es una función polinómica o una función trascendente se tiene en el primer caso que φ, al no ser una traslación, tiene al menos un punto fijo y por tanto también lo tiene φ^n para todo n. Si φ es trascendente, por un resultado debido a Fatou (véase **[Fa]** o **[Bw]**) φ tiene al menos un punto periódico de orden 2. Así, en ambos casos, aplicando la proposición 2.1.17 a $R = \mathbb{C}$ tampoco puede ser fugitiva la sucesión de iteradas. $\square$

Como vemos, si $R = \mathbb{C}$ no hemos aumentado el número de ejemplos para los cuales la sucesión de iteradas de una función holomorfa pueda ser fugitiva. Sin embargo, si $R = \mathbb{D}$ se tiene una situación totalmente diferente pues el número de ejemplos aumenta considerablemente. Antes de comprobar esto veremos que para que la sucesión de iteradas de una aplicación holomorfa φ sea lisa-fugitiva, φ ha de ser univalente.

PROPOSICIÓN 2.1.18. *Sea $\varphi \in \mathcal{O}(R;R)$. Si $\{\varphi^n\}_{n\geq 0}$ es lisa-fugitiva, entonces φ es univalente en R.*

DEMOSTRACIÓN. Si φ no es univalente, entonces existen $z_0, z_1 \in R$, $z_0 \neq z_1$ con $\varphi(z_0) = \varphi(z_1)$. Así $\varphi^n(z_0) = \varphi^n(z_1)$ para todo n. Por tanto, no existe n tal que φ^n pueda ser inyectiva en el conjunto compacto $\{z_0, z_1\}$ luego $\{\varphi^n\}_{n\geq 0}$ no puede ser lisa-fugitiva en R. $\square$

PROPOSICIÓN 2.1.19. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región simplemente conexa y $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega;\Omega)$. Entonces $\{\varphi^n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva en Ω si y sólo si φ no tiene puntos fijos y es univalente en Ω.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexa, entonces, por el teorema de la aplicación de Riemann, $\Omega = \mathbb{C}$ o bien Ω es isomorfa al disco unidad. Si $\Omega = \mathbb{C}$ es la proposición 2.1.17. Luego podemos suponer que Ω es isomorfa al disco unidad.

Si $\{\varphi^n\}_{n\geq 0}$ es lisa-fugitiva, entonces por las proposiciones 2.1.16 y 2.1.18 respectivamente φ no puede tener puntos fijos y tiene que ser univalente en Ω.

Para probar el recíproco, puesto que la propiedad de fugitividad se conserva por conjugación podemos suponer que $\Omega = \mathbb{D}$.

Aplicando el teorema de Denjoy-Wolff (teorema 0.2.3) tenemos que si φ no tiene puntos fijos en $\mathbb{D}$, entonces $\{\varphi^n\}_{n\geq 0}$ tiende uniformemente en conjuntos compactos a una constante α de módulo 1. Si K es un conjunto compacto del disco unidad, entonces para todo $z \in K$ tenemos que $|z| \leq r$ para algún r fijo con $0 \leq r < 1$. Así, existe un número natural n_0 tal que para $n \geq n_0$ tenemos $|\varphi^n(z) - \alpha| \leq 1 - r$ para todo z, $|z| \leq r$. Entonces $\min_K |\varphi^n(z)| = \min_K |\varphi^n(z) - \alpha + \alpha| \geq \min_K ||\alpha| - |\varphi^n(z) - \alpha|| \geq 1 - (1 - r) = r$ y, consecuentemente, $K \cap \varphi_{n_0}(K) = \emptyset$. Por tanto, siendo φ univalente, $\{\varphi^n\}_{n\geq 0}$ es lisa-fugitiva. $\square$

Aplicando la proposición anterior también se puede evitar el cálculo realizado en la proposición 1.1.15. Podemos generalizar la proposición anterior a cualquier región del plano mediante la extensión del teorema de Denjoy-Wolff debida a M. H. Heins.

PROPOSICIÓN 2.1.20. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región y $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega; \Omega)$. Si φ no es un automorfismo de Ω se tiene que $\{\varphi^n\}_{n\geq 0}$ es lisa-fugitiva en Ω si y sólo si φ no tiene puntos fijos y es univalente en Ω.*

DEMOSTRACIÓN. Si Ω es simplemente conexa el enunciado se deduce de la proposición anterior. Luego podemos suponer que Ω es de conexión multiple.

Si $\{\varphi^n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva, se tiene de nuevo que por las proposiciones 2.1.16 y 2.1.18 φ no tiene puntos fijos en Ω y es univalente en Ω.

Recíprocamente, teniendo en cuenta que las únicas aplicaciones univalentes de $\mathcal{O}(\mathbb{C}^*; \mathbb{C}^*)$ son los automorfismos y φ no es un automorfismo de Ω podemos suponer que Ω no es isomorfa a $\mathbb{C}^*$. Puesto que φ no tiene puntos fijos en Ω sólo se puede dar la tercera posibilidad del teorema de Heins (teorema

0.2.4), es decir $\{\varphi^n\}_{n\geq 0}$ tiende uniformemente en compactos a $\partial\Omega$. Ahora bien, cualquier subconjunto compacto $K \subset \Omega$, se tiene que $d(K, \partial\Omega) > 0$. Por consiguiente, existe un número natural n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $\max_K d(\varphi^n(z), \partial\Omega) = d(\varphi^n(K), \partial\Omega) < d(K, \partial\Omega)$. De esta manera se tiene

$$d(\varphi^n(K), K) \geq |d(\varphi^n(K), \partial\Omega) - d(K, \partial\Omega)| > 0$$

para todo $n \geq n_0$ y esto implica que $K \cap \varphi^n(K) = \emptyset$ para todo $n \geq n_0$, y por tanto, siendo φ^n univalente, se deduce que $\{\varphi^n\}_{n\geq 0}$ es lisa-fugitiva en Ω. □

NOTA 2.1.21. *No podemos rebajar las hipótesis de la proposición anterior y quitar la condición de que φ no sea un automorfismo de Ω porque, como vimos en la proposición 1.1.17 del capítulo 1, se pueden encontrar ejemplos de regiones múltiplemente conexas para las cuales φ no tiene puntos fijos y la correspondiente sucesión de iteradas puede ser o no fugitiva.*

En general es fácil construir superficies de Riemann R no compactas y sucesiones de iteradas de una aplicación holomorfa que sean fugitivas en R. Para una superficie de Riemann R' cuya superficie recubridora universal sea el disco unidad (véase [Fo, pp. 31 y ss.] para la definición de superficie recubridora universal) se tiene que si $\varphi \in \mathcal{O}(R'; R')$ tiene un punto fijo z_0 en R', entonces, o bien, φ es un automorfismo, o bien, la sucesión de iteradas converge uniformemente en conjuntos compactos de R a z_0 (véase [MRR, teorema 4, sección 4]). Luego, de manera análoga a la proposición anterior se tiene que si φ es univalente en R' y no es un automorfismo de R', entonces la sucesión correspondiente de iteradas es fugitiva en $R = R' \setminus \{z_0\}$.

Sección 2: Existencia de funciones universales.

También aquí se necesitarán algunos lemas topológicos para demostrar la existencia de funciones universales. En particular, en el lema 2.2.6 se observa que las sucesiones fugitivas tienen un propiedad topológica muy fuerte.

Para los siguientes lemas recordamos que $\mathcal{K}_1'(R) = \mathcal{K}'(R) \cap \mathcal{K}_1(R)$. Todo elemento de este conjunto es una superficie con borde compacta de R, la cual es homeomorfa a una esfera con un número finito de asas de la cual se ha quitado un disco topólogico abierto, o, equivalentemente, homeomorfa a una superficie plana con borde a la cual se han pegado g asas. El recíproco, que viene dado por la siguiente propiedad, se utilizará constantemente a lo largo de las demostraciones de los lemas que siguen.

PROPIEDAD 2.2.1. *Sea R una superficie de Riemann no compacta. Si $K \subset R$ es homeomorfo a una esfera con g asas de la cual se ha quitado un disco topológico abierto, entonces $K \in \mathcal{K}_1'(R)$.*

DEMOSTRACIÓN. Lo único que hay que probar es que $R \setminus K$ sólo tiene una componente conexa. Pero esto es obvio pues si tuviera más de componente conexa la frontera de K sería disconexa, lo cual es una contradicción. □

Recordamos que este recíproco no se da para los conjuntos de $\mathcal{K}'(R)$. Es decir dada una superficie de Riemann no compacta R, puede existir un subconjunto de R homeomorfo a una esfera con un número finito de asas de la cual se a quitado un número finito de discos topológicos abiertos que no está en $\mathcal{K}'(R)$.

LEMA 2.2.2. *Si $K' \in \mathcal{K}'(R)$, entonces $K_1 \subset intK'$ está en $\mathcal{K}_1(R)$ si y sólo si $intK' \setminus K_1$ es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $K_1 \subset intK'$ y supongamos que $intK' \setminus K_1$ es conexo. Basta ver que $R \setminus K_1$ es arco conexo. Sean $z_1, z_2 \in R \setminus K_1$. Si z_1 y z_2 están en la misma componente conexa de $R \setminus K'$ o están ambos en $intK' \setminus K_1$ no hay nada que probar pues todos estos conjuntos son abiertos y conexos y por tanto conexos por arcos. Si z_1 y z_2 están en diferentes componentes conexas de $R \setminus K'$, o uno de ellos está en $intK' \setminus K_1$ y el otro en una componente conexa de $R \setminus K'$, entonces consideramos un arco γ en R que una z_1 con z_2. Los trozos de arco que quedan dentro de K' pueden ser sustituidos por arcos que no cortan a K_1

pues $intK' \setminus K_1$ es conexo. El arco resultante no corta pues a K_1 y de aquí se deduce que $R \setminus K_1$ es arco conexo.

Recíprocamente, sea $K_1 \in \mathcal{K}_1(R)$ y $K' \in \mathcal{K}'(R)$ con $K_1 \subset intK'$. Sean $z_1, z_2 \in intK' \setminus K_1$. Puesto que K_1 unido con z_1 y z_2 es compacto, existe $K_1' \in \mathcal{K}'(R)$ tal que $K_1 \subset intK_1' \subset K_1' \subset intK'$ y $z_1, z_2 \in intK_1' \setminus K_1$.

Sean C_i, $i = 1, ..., m$, las componentes frontera de K_1'. Usando que $R \setminus K_1$ es conexo existe un arco $\gamma : [0,1] \longrightarrow R \setminus K_1$ uniendo z_1 con z_2. Sean C_i, $i = 1, ..., r$, el número de las componentes frontera de K_1' que corta γ. Puesto que cada componente frontera corresponde a una única componente conexa de $R \setminus K_1'$ y viceversa, tienen sentido los siguientes números: $t_1 = \min\{t \in [0,1] : \gamma(t) \in C_1\}$ y $t_2 = \max\{t \in [0,1] : \gamma(t) \in C_1\}$. Sustituyendo el subarco de γ que une $\gamma(t_1)$ con $\gamma(t_2)$ por el arco que une $\gamma(t_1)$ y $\gamma(t_2)$ que está contenido en C_1 se obtiene un arco γ_1 que corta una componente conexa menos de la frontera y que une z_1 con z_2; además este nuevo trozo de subarco está contenido en $intK'$.

Procediendo de esta manera en un número finito de pasos se llega a un arco γ_r que une z_1 con z_2 y que está completamente contenido en $K_1' \setminus K_1 \subset intK' \setminus K_1$. Por consiguiente, $intK' \setminus K_1$ es arco conexo y la demostración queda concluida. $\square$

El resultado del lema anterior se usará especialmente cuando el compacto K' pertenezca a $\mathcal{K}_1'(R)$.

LEMA 2.2.3. *Sea R una superficie de Riemann no compacta. Entonces para cada subconjunto $K_1 \in \mathcal{K}_1(R)$ existe un subconjunto $K_1' \in \mathcal{K}_1'(R)$ tal que $K_1 \subset intK_1'$.*

DEMOSTRACIÓN.– Sea $\{K_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{K}'(R)$ una sucesión exhaustiva de subconjuntos compactos de R. Si $K_1 \in \mathcal{K}_1(R)$, entonces, ya que K_1 es compacto, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K_1 \subset intK_{n_0}$. Sea m y g el número de componentes frontera de K_{n_0} y el género de K_{n_0}, respectivamente. Entonces K_{n_0} es homeomorfo a una esfera con g asas de la cual se han quitado m discos topólogicos disjuntos. Sean C_i, $i = 1, ..., m$, las m circunferencias topológicas correspondientes a las fronteras de los m discos.

Puesto que $K_1 \in \mathcal{K}_1(R)$ por el lema 2.2.2 $intK_{n_0} \backslash K_1$ es arco conexo. Luego, podemos unir C_1 con C_2 mediante un arco de Jordan L_1 con $L_1 \subset intK_{n_0} \setminus K_1$ excepto su puntos extremos que están uno en C_1 y otro en C_2. Puesto que K_1 y L_1 son compactos, podemos recubrir L_1 con una banda suficientemente estrecha V_1, es decir, un abierto conexo y simplemente conexo de forma que la clausura de V_1 no corta a K_1.

V_1 se puede escribir como $V_1 = \bigcup_{i=1}^{k-1} D_i$ donde cada D_i es un disco topológico. Además denotamos por D_0 y D_k los discos correspondientes a C_1 y C_2. Los discos se eligen de forma que $D_i \cap D_j = \emptyset$ si $|i-j| > 1$ y esta intersección sea simplemente conexa cuando $|i-j| = 1$. De modo que $V = \bigcup_{i=0}^{k} D_i$ es también simplemente conexa. De esta manera (como consecuencia del teorema 0.1.1) $M_1 = K_{n_0} \setminus V_1 = K_{n_0} \setminus V$ es una nueva superficie con borde homeomorfa a una esfera con g asas a la cual se han quitado $m-1$ discos topológicos disjuntos.

Además puesto que V_1 no corta a K_1, se tiene que $K_1 \subset intM_1$. De forma que podemos repetir el procedimiento anterior. De este modo en un número finito de veces llegamos a una superficie con borde $K_1' = M_{m-1}$ que es homeomorfa a una esfera con g asas de la cual se ha quitado un disco topológico y tal que $K_1 \subset intK_1'$. Con lo cual se tiene el enunciado del lema. □

LEMA 2.2.4. *Para toda superficie de Riemann no compacta R existe una sucesión $\{K_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{K}_1(R)$ tal que para todo $K \in \mathcal{K}_1(R)$ existe un número natural n_0 tal que $K \subset intK_{n_0}$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el conjunto numerable $\{U_n\}_{n\geq 0}$ de todas las uniones finitas y conexas de la base numerable de $\hat{R}$ que contienen el conjunto compacto $\mathcal{F}(R)$. Definimos los conjuntos $K_n = \hat{R}\setminus U_n = R\setminus U_n$, los cuales son claramente de complemento conexo. Si $K \in \mathcal{K}_1(R)$, como $\mathcal{F}(R)$ y K son conjuntos compactos del espacio de Hausdorff $\hat{R}$, podemos encontrar un recubrimiento finito $V_1, ..., V_k$ de la base numerable de $\hat{R}$ cuya unión contiene a $\mathcal{F}(R)$ y su intersección con K es el conjunto vacío. Elegimos $z_i \in V_i \cap R$. Como $R\setminus K$ es conexo (de hecho, es una superficie de Riemann no compacta), es arco conexo y podemos construir un arco de Jordan $L \subset R\setminus K$ que una todos los puntos z_i. Como L y K son compactos en el espacio de Hausdorff localmente conexo R podemos encontrar un recubrimiento finito $V_1', ..., V_{k'}'$ de L de la base numerable de R cuya unión es conexa y su intersección con K es de nuevo el conjunto vacío. Sea $U = (\bigcup V_i)\cup(\bigcup V_i')$. Entonces U es un subconjunto conexo, K está contenido en $R\setminus U$ y $U = U_n$ para algún número natural n, con lo que se tiene el enunciado del lema. □

LEMA 2.2.5. *Sea R una superficie de Riemann no compacta. Entonces existe una sucesión de conjuntos compactos $\{K_n'\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{K}_1'(R)$ tales que para todo $K_1 \in \mathcal{K}_1(R)$ existe un número natural n_0 tal que $K_1 \subset intK_{n_0}'$.*

DEMOSTRACIÓN. Es una combinación de los dos lemas anteriores. Por el lema 2.2.4 existe una sucesión $\{K_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{K}_1(R)$ tal que para todo $K \in \mathcal{K}_1(R)$ existe un número natural n_0 tal que $K \subset K_{n_0}$. Ahora por el lema 2.2.3 para cada elemento K_n de esta sucesión existe un elemento $K_n' \in \mathcal{K}_1'(R)$ tal que $K_n \subset intK_n'$. Entonces $\{K_n'\}_{n\geq 0}$ es la sucesión buscada. □

En [Za, Remark 4] se dice que la unión disjunta de un compacto $K_1 \in \mathcal{K}_1(R)$ y otro compacto $K \in \mathcal{K}(R)$ no tiene por qué estar en $\mathcal{K}(R)$. Esto desde luego es cierto como se puede comprobar fácilmente con un ejemplo (más aúns, ni siquiera es cierto en general que la unión disjunta de dos compactos de $\mathcal{K}_1(R)$ esté en $\mathcal{K}(R)$). De aquí Zappa deduce que no se puede generalizar la existencia de una función universal para todo compacto K_1 de complemento conexo. Sin embargo, Zappa parece no tener en cuenta que está trabajando con un grupo de automorfismos cuya acción es propiamente discontinua sobre la superficie R. De hecho, cuando se trabaja con una sucesión lisa-fugitiva (no sólo con sucesiones de automorfismos) se tiene el siguiente lema:

LEMA 2.2.6. *Sea R una superficie de Riemann no compacta y $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{O}(R;R)$ una sucesión lisa-fugitiva. Entonces, dado $K_1 \in \mathcal{K}_1(R)$ y $K \in \mathcal{K}(R)$ existe un número natural n_0 tal que $K \cap \varphi_{n_0}(K_1) = \emptyset$, φ_{n_0} restringida a K_1 es inyectiva y $K \cup \varphi_{n_0}(K_1) \in \mathcal{K}(R)$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el lema 2.2.3 podemos elegir un subconjunto compacto $K_1' \in \mathcal{K}_1'(R)$ tal que $K_1 \subset intK_1'$. Entonces, ya que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es lisa-fugitiva, existe un número natural n_0 tal que $K \cap \varphi_{n_0}(K_1') = \emptyset$ y φ_{n_0} restringida a K_1' es inyectiva (éste es el punto: la propiedad de fugitividad se aplica sobre K_1' y no sobre K_1). Como K_1' es conexo también lo es $\varphi_{n_0}(K_1')$. Por tanto, tenemos que $\varphi_{n_0}(K_1') \subset U$, donde U es una componente conexa no relativamente compacta de $R\backslash K$, así que U es una subsuperficie de Riemann de R. Ahora, ya que φ_{n_0} es una aplicación holomorfa e inyectiva sobre K_1', tenemos que es un homeomorfismo de K_1' sobre su imagen $\varphi_{n_0}(K_1')$. Esto significa, por la propiedad 2.2.1, que $\varphi_{n_0}(K_1') \subset U$ está también en $\mathcal{K}_1'(U)$. Por consiguiente, $U \setminus \varphi_{n_0}(K_1')$ es conexo.

Por otra parte, $R \setminus (K \cup \varphi_{n_0}(K_1'))$ tiene las mismas componentes conexas que $R\backslash K$, excepto que la componente conexa U es reemplazada por $U\backslash\varphi_{n_0}(K_1')$. Pero esta última componente conexa es no relativamente compacta, pues si no lo fuese, $U = (U \setminus \varphi_{n_0}(K_1')) \cup \varphi_{n_0}(K_1')$ sería relativamente compacta, lo cual es una contradicción. Por tanto, hemos probado que $K \cup \varphi_{n_0}(K_1') \in \mathcal{K}(R)$.

Resta probar que $K \cup \varphi_{n_0}(K_1) \in \mathcal{K}(R)$. Para ver esto es suficiente demostrar que $U \setminus \varphi_{n_0}(K_1)$ es conexo (pues que no es relativamente compacto es como en el párrafo anterior). Pero esto ha de ser verdad, ya que por el lema 2.2.2 $intK_1' \setminus K_1$ es conexo y ya que la conexión es un invariante topológico, se deduce que $\varphi_{n_0}(intK_1' \setminus K_1) = int\varphi_{n_0}(K_1')\setminus\varphi_{n_0}(K_1)$ es un conjunto conexo. Puesto que

$\varphi_{n_0}(K_1') \in \mathcal{K}_1'(U)$ tenemos otra vez por el lema 2.2.2 que $U \setminus \varphi_{n_0}(K_1)$ también es conexo. □

En realidad, sólo usaremos el lema para subconjuntos compactos de $\mathcal{K}_1'(R)$. El hecho de que el enunciado del lema sea válido para todo subconjunto compacto de $\mathcal{K}_1(R)$ demuestra la fuerte propiedad topológica que tienen las sucesiones lisa-fugitivas.

Como veremos en la próxima sección, cabe mejorar aún más el lema anterior para superficies de Riemann cuyo espacio de finales de Fredenthal no es un conjunto binario. Aunque para ello es preciso añadir una propiedad más (que tienen los automorfismos de una superficie) a la definición de sucesión de aplicaciones lisa-fugitivas.

Es un hecho conocido que el conjunto de las vectores hipercíclicos para un operador T verifican una ley $0-1$ (véase [Sh, p. 108] o [GS]). Esta ley siginifica que cuando el conjunto de las vectores hipercíclicos es no vacío, automáticamente existe un conjunto residual de ellos. Lo que se puede probar para el conjunto de las funciones $f \in \mathcal{O}(R)$ que son universales en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{K}_1(R)$ es que este conjunto es un G_δ, es decir, es una intersección numerable de abiertos.

Recordamos que T_n denota el operador de composición correspondiente a la aplicación φ_n.

PROPOSICIÓN 2.2.7. *Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{O}(R; R)$. El conjunto de las funciones $f \in \mathcal{O}(R)$ que son $\{T_n\}_{n\geq 0}$-universales en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{K}_1(R)$ es un G_δ.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{f_k\}_{k\geq 0} \subset \mathcal{O}(R)$ un conjunto denso y numerable de $\mathcal{O}(R)$. Consideramos también una sucesión estrictamente decreciente de números positivos $\{\varepsilon_m\}_{m\geq 0}$ cuyo límite es 0 y $\{K_n'\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{K}_1'(R)$ la sucesión de subconjuntos compactos dada por el lema 2.2.5.

Sea $K \subset R$ un conjunto compacto, $f \in \mathcal{O}(R)$ y $\varepsilon > 0$. Se definen los siguientes subconjuntos de $\mathcal{O}(R)$:

$$G(f, \varepsilon, K) = \{g \in \mathcal{O}(R) : \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \max_{z \in K} |T_n(g(z)) - f(z)| < \varepsilon\},$$

$$O(f, \varepsilon, K) = \{h \in \mathcal{O}(R) : \max_{z \in K} |h(z) - f(z)| < \varepsilon\}.$$

De hecho, los subconjuntos $O(f, \varepsilon, K)$ son una base abierta para la topología de $\mathcal{O}(R)$. Ya que T_n es continuo para todo número natural n, tenemos que $G(f, \varepsilon, K)$ es un conjunto abierto de $H(\Omega)$, pues

$$G(f, \varepsilon, K) = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n^{-1}(O(f, \varepsilon, K)).$$

Sea $K \subset R$ un subconjunto compacto. Si denotamos por $G(K)$ el conjunto de las funciones universales en $A(K)$, tenemos que este conjunto se puede escribir como

$$G(K) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcap_{m=0}^{\infty} G(f_k, \varepsilon_m, K).$$

Veamos esto por doble inclusión. Primero se tiene que si $g \in \mathcal{O}(R)$ es universal en $A(K)$, entonces para todo k y para todo m números naturales existe un número natural n tal que $\max_K |T_n(g(z)) - f_k(z)| < \varepsilon_m$. Luego, tenemos la inclusión a la derecha.

Para comprobar la otra inclusión veremos que si g está en la intersección de la derecha, entonces g es universal en $A(K)$. Sea $f \in A(K)$ y $\varepsilon > 0$, entonces puesto que $K \in \mathcal{K}_1(R)$ se tiene, por el teorema de aproximación de Mergelyan, que para todo $\varepsilon > 0$ existe un función f_k de la sucesión densa en $\mathcal{O}(R)$ tal que $\max_K |f(z) - f_k(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $\varepsilon_m < \frac{\varepsilon}{2}$. Por estar g en la intersección de la derecha existe un n_0 tal que $\max_K |T_{n_0}(g(z)) - f_k(z)| < \varepsilon_m$. Por la desigualdad triangular se tiene que $\max_K |T_{n_0}(g(z)) - f(z)| < \varepsilon$. Podemos así construir una sucesión $\{n_k\}_{k \geq 0}$ de números naturales tal que $T_{n_k}(g(z))$ tiende a $f(z)$ uniformemente en K y de esta forma se tiene la inclusión hacia la izquierda.

Denotemos ahora el conjunto de las funciones universales en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{K}_1(R)$ por G. Este conjunto se puede escribir como

$$G = \bigcap_{n=0}^{\infty} G(K'_n) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n=0}^{\infty} G(f_k, \varepsilon_m, K'_n).$$

La inclusión hacia la derecha es trivial, pues si una función es universal en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{K}_1(R)$, en particular es universal en $A(K'_n)$ para todo número natural n, pues $\{K'_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{K}'_1(R) \subset \mathcal{K}_1(R)$.

Para la otra inclusión, tenemos que probar que si f es universal en $A(K'_n)$ para todo número natural n entonces también es universal en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{K}_1(R)$. Pero dado $K \in \mathcal{K}_1(R)$, por el lema 2.2.5 existe un número natural n tal que $K \subset intK'_n$. Por el lema 2.2.2 se tiene que $intK_n \setminus K$ es de complemento conexo, por tanto por el teorema de aproximación de Mergelyan se tiene que $A(K'_n)$ es denso en $A(K)$. Por lo cual, si una función es universal en $A(K'_n)$ también lo es en $A(K)$. Puesto que G se puede escribir como intersección numerable de abiertos se tiene que es un G_δ. □

TEOREMA 2.2.8. *Sea R una superficie de Riemann no compacta y sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{O}(R{:}\,R)$ una sucesión lisa-fugitiva en R. Entonces existe un conjunto residual de funciones $f \in \mathcal{O}(R)$ cada una de las cuales es universal para $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{K}_1(R)$.*

DEMOSTRACIÓN. Mantendremos la misma notación de la proposición anterior. Lo único que hay que probar es que cada $G(f_k, \varepsilon_m, K'_n)$ es un conjunto denso en $\mathcal{O}(R)$. Así, puesto que $\mathcal{O}(R)$ es un espacio de Baire y el conjunto de las funciones de $\mathcal{O}(R)$ cada una de las cuales es universal para $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{K}_1(R)$ es un G_δ, se tendrá, por el teorema de Baire, el enunciado del teorema.

Veamos pues que si $K_1 \in \mathcal{K}'_1(R)$, entonces $G(f, \varepsilon, K_1)$ es un conjunto denso en $\mathcal{O}(R)$. Para comprobar esto, fijamos $\varepsilon' > 0$, $h \in \mathcal{O}(R)$ y $K \in \mathcal{K}(R)$. Debemos probar que $G(f,\varepsilon,K_1) \cap O(h,\varepsilon',K) \neq \emptyset$, es decir, existe $g \in \mathcal{O}(R)$ tal que:

$$\max_{z\in K} |h(z) - g(z)| < \varepsilon' \tag{1}$$

y

$$\max_{z\in K_1} |f(z) - T_{n_0}(g(z))| < \varepsilon, \tag{2}$$

para algún número natural n_0. Con esto ya tendríamos que cada $G(f,\varepsilon,K_1)$ es denso en $O(R)$ pues los conjuntos $O(h,\varepsilon,K_n)$ –con $\{K_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{K}(R)$ una sucesión exhaustiva de subconjuntos compactos de R– es una base de entornos para la topología de $\mathcal{O}(R)$.

Ya que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva en R, por el lema 2.2.6 existe un número natural n_0 tal que $K \cap \varphi_{n_0}(K_1) = \emptyset$. $L = K \cup \varphi_{n_0}(K_1) \in \mathcal{K}(R)$ y φ_{n_0} restringida a K es un homeomorfismo sobre su imagen $\varphi_{n_0}(K_1)$.

Definimos en L la función

$$h_1 = \begin{cases} h(z), & \text{if } z \in K; \\ f(\varphi_{n_0}^{-1}(z)), & \text{if } z \in \varphi_{n_0}(K_1)\,. \end{cases}$$

donde $\varphi_{n_0}^{-1}$ denota la inversa de la aplicación $\varphi_{n_0} : K_1 \to \varphi_{n_0}(K_1)$. Está claro que $h_1 \in A(L)$; entonces, ya que $L \in \mathcal{K}(R)$, por el teorema de aproximación de Mergelyan existe una función holomorfa $g \in \mathcal{O}(R)$ tal que $\max_{z\in L} |h_1(z) - g(z)| < \varepsilon'' = \min(\varepsilon,\varepsilon')$. Luego, tenemos

$$\max_{z\in K} |h(z) - g(z)| < \varepsilon'$$

y

$$\begin{aligned} \max_{K_1} |f(z) - T_{n_0}(g(z))| &= \max_{z\in K_1} |f(z) - g(\varphi_{n_0}(z))| \\ &= \max_{z\in\varphi_{n_0}(K_1)} |f(\varphi_{n_0}^{-1}(z)) - g(z)| \\ &\leq \max_{z\in L} |h_1(z) - g(z)| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

que son (1) y (2) respectivamente, lo cual concluye la demostración del teorema. □

Sección 3: Generalización del teorema de Birkhoff.

En esta sección definimos cuándo una sucesión de aplicaciones holomorfas es lisa-fugitiva preservante y demostramos que para las superficies de Riemann que poseen una sucesión de aplicaciones lisa-fugitiva preservante y cuyo espacio de finales de Freudenthal no es un conjunto binario, entonces existe una función de $\mathcal{O}(R)$ que es universal en $\mathcal{O}(R)$ para dicha sucesión de aplicaciones. Esto es de hecho la generalización del teorema de Birkhoff a superficies de Riemann. Como corolario se obtiene que el tipo de compactos para los cuales existe una función universal se amplía a aquellos compactos que son Runge en R, es decir, aquéllos que son de $\mathcal{K}(R)$. Terminamos la sección demostrando que para la existencia de una función universal para una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es necesario que la sucesión verifique las propiedades de las definiciones 2.2.1 y 2.2.2.

Si $K \in \mathcal{K}'(R)$ y φ es continua e inyectiva en K, entonces es un homeomorfismo sobre $\varphi(K)$. En consecuencia, como el género es un invariante topológico, tenemos que $\varphi(K)$ tiene el mismo género que K. No obstante, cada componente conexa de $R \setminus \varphi(K)$ puede ser relativamente compacta; así que puede ocurrir que $\varphi(K)$ no esté en $\mathcal{K}'(R)$. En este caso ni siquiera pertenecería a $\mathcal{K}(R)$, y, en el caso de que sí pertenezca a esta última clase de subconjuntos, $R\setminus\varphi(K)$ no tiene por qué tener el mismo número de componentes conexas que $R \setminus K$. Veamos esto con un par de ejemplos.

EJEMPLO 2.3.1. *Sea $R = \mathbb{D}^*$ y consideremos la sucesión $\{\varphi_n(z) = \frac{1}{n}z + 1 - \frac{1}{n}\}_{n\geq 1}$ que es fugitiva en $\mathbb{D}^*$. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $0 < \alpha < \beta < 1$. Consideremos el subconjunto compacto $K = \{z \in \mathbb{D} : \alpha \leq |z| \leq \beta\}$. Se tiene que $K \in \mathcal{K}'(\mathbb{D}^*)$. Sin embargo, si $K \cap \varphi_n(K) = \emptyset$, entonces $\mathbb{D}^* \setminus \varphi_n(K)$ tiene una componente conexa que es relativamente compacta. A saber, la imagen mediante φ_n del conjunto $\{z \in \mathbb{D} : |z| \leq \alpha\}$. Por tanto, $\varphi_n(K)$ no pertenecería a $\mathcal{K}'(\mathbb{D}^*)$.*

EJEMPLO 2.3.2. *Si quitamos a la superficie del ejemplo 2.1.14 a) el punto $2i$ se obtiene una superficie de Riemann R con dos finales de Freudenthal. Consideremos como compacto K un pequeño anillo cerrado cuyo centro es el punto $2i$. $R \setminus K$ consta exactamente de dos componentes conexas no relativamente compactas. Sin embargo, la imagen de K mediante una aplicación φ continua podría llevar este anillo en el interior de una de las asas. De este modo, aunque $\varphi(K) \in \mathcal{K}(R)$ se tiene que $\varphi(K) \notin \mathcal{K}'(R)$ pues $R \setminus \varphi(K)$ sólo tendría una componente conexa no relativamente compacta mientras $\varphi(K)$ tiene dos componentes frontera.*

Así, para soslayar estas dificultades resulta conveniente añadir una condición más a la definición 2.1.3.

DEFINICIÓN 2.3.3. *Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{O}(R;R)$, se dice que que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión **lisa-fugitiva preservante** si para todo $K \in \mathcal{K}'(R)$ existe un número natural n_0, tal que $K \cap \varphi_{n_0}(K) = \emptyset$, φ_{n_0} restringida a K es inyectiva y $\varphi_{n_0}(K) \in \mathcal{K}'(R)$.*

PROPIEDAD 2.3.4. *Si $K \in \mathcal{K}'(R)$ y $\varphi \in \mathcal{O}(R;R)$ es inyectiva sobre K y es tal que $\varphi(K) \in \mathcal{K}'(R)$, entonces $R \setminus K$ tiene el mismo número de componentes conexas que $R \setminus \varphi(K)$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $K \in \mathcal{K}'(R)$ y φ inyectiva sobre K entonces es homeomorfismo sobre la imagen $\varphi(K)$, de modo que $\varphi(K)$ tiene tantas componentes frontera como K y el número de componentes conexas del complementario de un compacto de $\mathcal{K}'(R)$ viene determinado por el número de componentes frontera. □

Está claro que si una sucesión es lisa-fugitiva preservante entonces es automáticamente lisa-fugitiva. Basta tomar una sucesión exhaustiva de compactos en $\mathcal{K}'(R)$ y aplicar la propiedad 2.1.5.

Ahora veremos con unos cuantos ejemplos cómo el recíproco, es decir, el hecho de que una sucesión sea lisa-fugitiva implica que es lisa-fugitiva preservante, se verifica en una gran variedad de situaciones distintas. El ejemplo 2.3.1 nos da una situación en la que el recíproco no se verifica.

EJEMPLO 2.3.5. *Sea R una superficie de Riemann no compacta tal que $\mathcal{F}(R)$ es unitario. Si $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{O}(R;R)$ es lisa-fugitiva en R, entonces $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es lisa-fugitiva preservante. Esto es trivial, ya que si $K \in \mathcal{K}'(R) = \mathcal{K}'_1(R)$, entonces existe un número natural n_0 tal que $K \cap \varphi_{n_0}(K) = \emptyset$, y φ_{n_0} restringida a K es inyectiva. Aplicando la propiedad 2.2.1 se tendría que $\varphi_{n_0}(K) \in \mathcal{K}'_1(R) = \mathcal{K}'(R)$. En particular, puesto que $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ y $\mathcal{F}(\mathbb{D})$ son ambos conjuntos unitarios, se tiene que las sucesiones de los ejemplos 2.1.9-12 son todas lisa-fugitivas preservantes. Por la misma razón se tiene idéntica conclusión para el ejemplo 2.1.14 a)*

EJEMPLO 2.3.6. *Si $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset Aut(R)$ es fugitiva, es automáticamente lisa-fugitiva pues todos los elementos de la sucesión son univalentes. También se tiene que es lisa-fugitiva preservante. Esto es obvio, pues en este caso cada φ_n es un homeomorfismo global sobre R. Por tanto conserva las componentes conexas relativamente compactas. En particular, en los tres casos del ejemplo 2.1.14 así como en todos los ejemplos del Capítulo 1 la sucesión dada es una sucesión de aplicaciones lisa-fugitiva preservante.*

EJEMPLO 2.3.7. *Si R es una superficie plana y $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{O}(R;R)$ es una sucesión lisa-fugitiva en R donde cada aplicación φ_n es una aplicación recubridora (véase* [Fo, *p.* 24]*), entonces $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es lisa-fugitiva preservante. Para comprobar esto, consideremos $K \in \mathcal{K}'(R)$. Sean $C_1, ..., C_m$ las componentes frontera de K. Puesto que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es lisa-fugitiva en R, existe un número natural n_0 tal que $K \cap \varphi_{n_0}(K) = \emptyset$ y φ_{n_0} es inyectiva sobre K. Usando que φ_{n_0} es inyectiva sobre K se tiene que $\varphi_{n_0}(K)$ consta del mismo número de componentes frontera que K y puesto que $\varphi_n(K)$ está contenida en una superficie plana, se tiene que $\varphi_n(K)$ tiene el mismo orden de conexión que K y por tanto $R \setminus K$ tiene* *tantas componentes conexas como $R \setminus \varphi_n(K)$. Además ninguna de las componentes conexas de $R \setminus \varphi_{n_0}(K)$ puede ser relativamente compacta. Para ver esto último, podemos suponer que $R \subset \mathbb{C}$. Si U es la componente conexa no acotada en $\mathbb{C}$ de $R \setminus \varphi_{n_0}(K)$ entonces automáticamente es no relativamente compacta. Supongamos pues, que U es una componente conexa de $R \setminus \varphi_{n_0}(K)$ acotada y relativamente compacta y llegaremos a contradicción. Sea $\varphi(C_i)$ la componente frontera de U. Entonces la clausura $\bar{U} = U \cup \varphi(C_i)$ es un disco topológico. Con lo cual $\varphi(C_i)$ sería homotópico a 0 en R. Sin embargo la componente conexa correspondiente a C_i es no relativamente compacta y de aquí se tiene que C_i no es homotópica a cero en R. Esto es una contradicción, ya que una aplicación recubridora induce un homomorfismo inyectivo entre los grupos fundamentales correspondientes (véase* [**Fo**. *Capítulo 1. sección 4*]. *de modo que el núcleo de este homomorfismo es el 0.*

Por último, veremos un método standard para construir regiones de conectividad infinita con sucesiones de aplicaciones lisa-fugitivas preservantes.

EJEMPLO 2.3.8. *Consideremos el disco unidad $\mathbb{D}$ (todo lo que sigue también sería válido en el plano complejo $\mathbb{C}$. con los cambios obvios). Sea la sucesión dada por $\{\varphi_n(z) = \frac{1}{n}z\}_{n\geq 1}$. Para cada número natural k definimos el conjunto $F_k = \{\varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2} \circ \dots \circ \varphi_{i_k}(1) : i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}\}$. Sea $F' = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_k$. Todos los elementos de F' son puntos aislados y el único punto límite de F' es el 0. De modo que $F = F' \cup \{0\}$ es cerrado y así $\Omega = \mathbb{D} \setminus F$ es una región contenida en $\mathbb{C}$. Comprobemos que la sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión fugitiva preservante en Ω. Sea $K \in \mathcal{K}'(\Omega)$. Entonces K es un disco topológico cerrado del cual se han quitado un número finito de discos topológicos disjuntos que son entornos de al menos un punto de F. Obsérvese que $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ si y sólo si cada componente de $\mathbb{D} \setminus K$ contiene algún punto de F. El hecho de que $0 \in F$ implica que una de las componentes de $\mathbb{D} \setminus K$. pongamos U. es entorno de 0. Puesto que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ tiende uniformemente a 0 en compactos del disco unidad, para todo $K \subset \mathcal{K}'(\Omega)$ existe un número natural n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, el compacto $\varphi_n(K)$ está contenido U y así. $K \cap \varphi_n(K) = \emptyset$. Además, ya que cada φ_n es univalente en*

$\mathbb{D}$, *se tiene que es inyectiva sobre* K *y cada componente conexa de* $\mathbb{D} \setminus K$ *se corresponde mediante* φ_n *con una componente conexa de* $\mathbb{D} \setminus \varphi_n(K)$. *Luego, por la definición de* F, *encontramos que cada componente de* $\mathbb{D} \setminus \varphi_n(K)$ *contiene algún punto de* F. *Esto implica que cada componente conexa de* $\Omega \setminus \varphi_n(K)$ *es no relativamente compacta y se tiene que* $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ *es una sucesión lisa-fugitiva preservante.*

Resulta conveniente en los lemas que siguen hacer uso de la siguiente notación: si $\hat{S} \subset \hat{R}$, entonces denotamos $S = \hat{S} \cap R$.

DEFINICIÓN 2.3.9. *Sea* R *una superficie de Riemann no compacta. Se dice que un final* $e \in \mathcal{F}(R)$ *es no aislado si es un punto no aislado en el espacio topológico* $\mathcal{F}(R)$, *esto es, para todo entorno abierto* $\hat{U} \subset \hat{R}$ *con* $e \in \hat{U}$, *existe otro final* $e' \neq e$ *tal que* $e' \in \hat{U}$.

La definición anterior se corresponde con la definición de componente conexa no aislada dada en el capítulo anterior.

LEMA 2.3.10. *Sea* R *una superficie de Riemann no compacta. Entonces existe una sucesión exhaustiva de subconjuntos compactos* $\{K_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{K}'(R)$ *de modo que cada componente de* $R \setminus K_n$ *determina un único final aislado o un final no aislado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{K'_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{K}'(R)$ una sucesión exhaustiva de subconjuntos compactos de R. La sucesión requerida se construirá a partir de ésta por inducción.

Veremos que si $R \setminus K'_0$ tiene una componente conexa U que determina un número finito de finales $e_1, \ldots, e_k$, entonces podemos construir otro compacto $K_0 \in \mathcal{K}'(R)$ que contenga a K'_0 de forma que $R \setminus K_0$ tiene las mismas componentes conexas que $R \setminus K'_0$ excepto que la componente conexa U se sustituye por las componentes $U_1, ..., U_k$ donde cada U_i determina el final e_i. Puesto que si $K \in \mathcal{K}'(R)$ su complementario tiene un número finito de componentes conexas, se tiene que en un número finito de pasos podemos eliminar todas las componentes conexas que contengan más de un final aislado.

Ya que los finales e_i, $i = 1, ..., k$, son aislados y los conjuntos $\hat{V}$ tales que V es una componente conexa de $R \setminus K_n$ para algún número natural n es una base numerable de entornos de cada final $e \in \mathcal{F}(R)$ se tiene que existe un compacto K'_m de la sucesión exhaustiva tal que $K'_0 \subset K'_m$ de forma que existe $U_1, ..., U_k$ componentes de $R \setminus K'_m$ tales que cada una de ellas es un entorno exclusivamente de $e_1, ..., e_k$ respectivamente. Puesto que $K'_0 \subset K'_m$ cada una de estas componentes U_i, $i = 1, ..., k$ está contenida en U. Se trata ahora de sustituir la componente U por las componentes $U_1, ..., U_k$. Sea $K_0 = K'_0 \cup (U \setminus (\bigcup_{i=1}^k U_i))$. Éste es un subconjunto compacto y las componentes conexas de $R \setminus K_0$ son la mismas que las de $R \setminus K'_0$, excepto que la componente U ha sido sustituida por $U_1, ..., U_k$. Luego $K_0 \in \mathcal{K}'(R)$.

Ahora se elige K'_{m_1} de la sucesión exhaustiva tal que $K_0 \subset intK'_{m_1}$ y se repite el proceso anterior para K_{m_1} obteniéndose un compacto K_1 y se sigue por inducción que podemos construir la sucesión $\{K_n\}_{n \geq 0}$ requerida por el lema. □

LEMA 2.3.11. *Sean $K, K_1 \in \mathcal{K}'(R)$ y l, l_1 el número de componentes conexas de $R \setminus K$ y $R \setminus K_1$ respectivamente. Si $K \cap K_1 = \emptyset$, entonces $R \setminus (K \cup K_1)$ tiene $l + l_1 - 1$ componentes conexas. Además existen dos componentes conexas U_1 y V_1 de $R \setminus K$ y $R \setminus K_1$ respectivamente tales que U_1 contiene cualquier otra componente conexa de $R \setminus K_1$ distinta de V_1 y a su vez V_1 contiene cualquier otra componente conexa de $R \setminus K$ distinta de U_1.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $U_1, U_2, ..., U_l$ y $V_1, V_2, ..., V_{l_1}$ las componentes conexas de $R \setminus K$ y de $R \setminus K_1$ respectivamente. Puesto que $K \cap K_1 = \emptyset$ se tiene que K está contenido en $R \setminus K_1$. Se deduce, ya que K es conexo, que está contenido en alguna de las componentes V_i, pongamos V_1. Igualmente se tiene que K_1 está contenido en alguna U_i, pongamos U_1.

Se tiene que $U_1 \cap V_j \neq \emptyset$ para todo $j = 1, ..., l_1$ ya que U_1 es abierto y contiene las fronteras de $V_1, ..., V_{l_1}$ pues éstas son las componentes frontera de K_1 y U_1 contiene a K_1. Análogamente, se tiene que $V_1 \cap U_i \neq \emptyset$ para todo $i = 1, ..., l$.

Veamos que $U_1 \cap V_1, U_2, ..., U_l, V_2, ..., V_{l_1}$ son las componentes conexas de $R \setminus (K \cup K_1)$. Claramente cada uno de estos conjuntos es abierto. Sólo hay que comprobar que la intersección de cada dos de ellas es disjunta. Esto es obvio excepto cuando se trata de intersectar algún U_i con algún V_j. Para ver este caso supongamos que tenemos probada la segunda parte del lema, es decir, que $V_j \subset U_1$ para todo $j = 2, ..., l_1$ (desde luego por simetría también se cumple que $U_i \subset V_1$ para todo $i = 2, ..., l_1$). De aquí se deduce para todo i, j $(i = 2, ..., l$, $j = 2, ..., l_1)$ que $U_i \cap V_j \subset U_i \cap U_1 = \emptyset$.

Queda pues por probar que $V_j \subset U_1$ para $j = 2, ..., l_1$. Pero el hecho de que algún V_j $(j = 2, ..., l_1)$ no esté contenido en U_1 implica que la intersección de V_j con el complementario de U_1 es no vacía y puesto que la intersección de V_j con K es vacío se tiene que V_j debe intersectar algún U_i, $i \neq 1$. Esto está en contradicción con la maximalidad de las componentes conexas, pues U_1 y U_i se podrían conectar mediante un arco en V_j que no corta a K.

Por último es un simple ejercicio de teoría de conjuntos comprobar que $R \setminus (K \cup K_1)$ es unión de las $l + l_1 - 1$ componentes conexas indicadas. □

Veremos pronto que si $\mathcal{F}(R)$ es un conjunto finito con más de 2 elementos, entonces no hay sucesiones de aplicaciones que puedan ser lisa-fugitivas preservantes. Por tanto, en los lemas 2.3.12 y 2.3.13 $\mathcal{F}(R)$ será infinito.

LEMA 2.3.12. *Sea R una superficie con un espacio infinito de finales $\mathcal{F}(R)$ y*

$\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{O}(R;R)$ una sucesión lisa-fugitiva preservante. Entonces existe un final no aislado e y una subsucesión lisa-fugitiva preservante $\{\varphi_{n_k}\}_{k\geq 0}$ tal que para todo subconjunto compacto $K \subset R$ y para todo entorno abierto $\hat{U} \subset \hat{R}$ con $e \in \hat{U}$, existe un número natural k_0 tal que para todo $k \geq k_0$ tenemos que $\varphi_{n_k}(K) \subset \hat{U}$ y φ_{n_k} restringida a K es inyectiva.

DEMOSTRACIÓN. Por el lema 2.3.10 podemos elegir una sucesión exhaustiva $\{K_n\}_{n\geq 0} \subset K'(R)$ tal que $\hat{R}\setminus K_n = \cup_{j\in J_n}\hat{U}_j^n$, donde la unión es disjunta, J_n es un conjunto finito y cada $\hat{U}_j^n$ es un subconjunto abierto y conexo de $\hat{R}$, de tal forma que $\hat{U}_j^n$ contiene un único final aislado o contiene un final no aislado. En este último caso, debe contener infinitos finales de $\mathcal{F}(R)$. Puesto que $\mathcal{F}(R)$ es infinito podemos suponer que $\hat{R}\setminus K_n$ tiene tres o más componentes para cada natural n.

Ya que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es lisa-fugitiva preservante, tenemos (por aplicación de la propiedad 2.1.6) que para cada n, extrayendo una subsucesión, si es necesario, $K_n \cap \varphi_n(K_n) = \emptyset$, φ_n restringida a K_n es inyectiva y $R\setminus\varphi_n(K_n)$ tiene tantas componentes conexas como tiene $R\setminus K_n$. Por tanto, $\varphi_n(K_n) \subset R\setminus K_n$ y, puesto que $\varphi_n(K_n)$ es conexo, existe $j_0 \in J_n$ con $\varphi_n(K_n) \subset U_{j_0}^n$ donde $\hat{U}_{j_0}^n$ contiene un final no aislado de $\mathcal{F}(R)$, pongamos, e_n. Esto es a causa de que $R\setminus\varphi_n(K_n)$ tiene al menos tres componentes conexas y por el lema 2.3.11 dos de ellas (las cuales determinan, al menos, dos finales distintos, porque son disjuntas) son subconjuntos de $U_{j_0}^n$ y esto es imposible ya que $U_{j_0}^n$ determina exactamente un único final si $\hat{U}_{j_0}^n$ contiene un final aislado.

Por tanto, por la compacidad de $\hat{R}$, existe un final $e \in \mathcal{F}(R)$ y una subsucesión $\{e_{n_k}\}_{k\geq 0}$ convergente a e. Esto implica que e es no aislado pues si la sucesión $\{e_{n_k}\}_{k\geq 0}$ es constante a partir de un cierto k_0, hemos visto que los elementos de la sucesión son no aislados.

– Dado un entorno $\hat{U}$ de e (sin pérdida de generalidad podemos suponer que

U es una componente conexa del complementario de algún $K_{n_{k_1}}$ pues estas componentes son las que definen la base de entornos del espacio de finales), se tiene que $e_{n_k} \in \hat{U}$ para todo $k \geq k_2$ pues $\{e_{n_k}\}_{k\geq 0}$ converge a e. Esto implica que U determina a e_{n_k} para todo $k \geq k_2$. Puesto que K_{n_k} es una sucesión exhaustiva de subconjuntos compactos se tiene que $U_{j_0}^{n_k} \subset U$ para todo $k \geq\geq \max\{k_1, k_2\}$.

Sea $K \subset R$ un subconjunto compacto cualquiera. Entonces existe un subconjunto compacto $K_{n_{k_3}}$ tal que $K \subset intK_{n_{k_3}}$. Entonces si $k_0 = \max\{k_1, k_2, k_3\}$ se tiene que, para todo $k \geq k_0$, $\varphi_{n_k}(K) \subset \varphi_{n_k}(K_{n_k}) \subset U_{j_0}^{n_k} \subset U$, siendo φ_{n_k} inyectiva sobre K_{n_k}, esto es el enunciado del lema. □

En lo que sigue, si R tiene un espacio infinito de finales $\mathcal{F}(R)$ y $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{O}(R; R)$ es una sucesión lisa-fugitiva preservante, podemos asumir que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ satisface la propiedad del lema previo, extrayendo una subsucesión, si es necesario.

LEMA 2.3.13. *Sea R una superficie de Riemann no compacta con un espacio infinito de finales $\mathcal{F}(R)$, $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{O}(R; R)$ una sucesión lisa-fugitiva preservante y $K_1, K \in \mathcal{K}(R)$. Entonces existe un número natural n_0 tal que $K_1 \cap \varphi_{n_0}(K) = \emptyset$, φ_{n_0} restringida a K es inyectiva y $K_1 \cup \varphi_{n_0}(K) \in \mathcal{K}(R)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea l_1 y l el número de componentes conexas –todas ellas no relativamente compactas– de $R \setminus K_1$ y $R \setminus K$, respectivamente. Sea e el final cuya existencia asegura el lema 2.3.12. Entonces, sea $\hat{U}_0$ la componente conexa de $\hat{R} \setminus K_1$ que contiene a e. Ya que e es un final no aislado, existe un entorno abierto de e, $\hat{U}$, y un final $e_0 \in \mathcal{F}(R)$ tal que $e \in \hat{U} \subset \hat{U}_0$ y $e_0 \in \hat{U}_0 \setminus \hat{U}$. Por el lema 2.3.12, existe un número natural n_0 tal que $\varphi_{n_0}(K) \subset U$ y φ_{n_0} restringida a K es inyectiva. Claramente, $K_1 \cap \varphi_{n_0}(K) = \emptyset$. Entonces por el lema 2.3.11 y la propiedad 2.3.4, el número de componentes conexas de $K_1 \cup \varphi_{n_0}(K)$ es $l_1 + l - 1$. De este mismo lema se deduce que $l_1 + l - 2$ de estas componentes conexas determinan, al menos, un final, por tanto son no relativamente compactas, y por la construcción de arriba la restante componente conexa de $R \setminus (K_1 \cup \varphi_{n_0}(K))$, a saber, la componente conexa que contiene $U_0 \setminus U$ (la componente $U_1 \cap V_1$ del lema 2.3.11) determina, al menos, e_0. Así, esta componente tampoco es relativamente compacta. Por tanto, $K_1 \cup \varphi_{n_0}(K) \in \mathcal{K}(R)$. □

De la demostración del lema 2.3.12 se deduce la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 2.3.14. *Sea R una superficie de Riemann no compacta y cuyo espacio de finales $\mathcal{F}(R)$ es finito y mayor que 2. Entonces no existe ninguna sucesión lisa-fugitiva preservante.*

DEMOSTRACIÓN. Si el espacio de finales es finito se tiene que todos los finales son aislados y por tanto, puesto que el número de finales es mayor que 2, siguiendo la demostración del lema 2.3.12 se tendría que existiría un final no aislado, lo cual es una contradicción. □

NOTA 2.3.15. *El enunciado del lema 2.3.13 es obvio cuando $\mathcal{F}(R)$ es un conjunto unitario, pues en este caso el complementario de $K \cup \varphi_n(K_1)$ sólo tiene una componente conexa que determina el único final de Freudenthal.*

NOTA 2.3.16. *El enunciado del lema 2.3.13 es falso cuando $\mathcal{F}(R)$ tiene exactamente dos elementos. Considérese el caso en que $R = \mathbb{C}^*$ (o el ejemplo 2.1.14 b)) y una sucesión fugitiva $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset Aut(\mathbb{C}^*)$. Si $K \in \mathcal{K}'(\mathbb{C}^*)$ y su complementario tiene dos componentes conexas no relativamente compactas se tiene que, si $K \cap \varphi_n(K) = \emptyset$, entonces el complementario de $K \cup \varphi_n(K)$ tiene tres componentes conexas una de las cuales es relativamente compacta.*

Tenemos los elementos necesarios para demostrar la generalización del teorema de Birkhoff a una superficie de Riemann cualquiera. Pero antes probaremos que el conjunto de las funciones $f \in \mathcal{O}(R)$ que son universales en $\mathcal{O}(R)$ para una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{O}(R; R)$ es también un G_δ.

PROPOSICIÓN 2.3.17. *Sea R una superficie de Riemann no compacta y $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{O}(R;R)$. El conjunto de las funciones $f \in \mathcal{O}(R)$ que son $\{T_n\}_{n\geq 0}$-universales en $\mathcal{O}(R)$ es un G_δ.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{f_k\}_{k\geq 0}$ un conjunto numerable denso en $\mathcal{O}(R)$. Consideramos también una sucesión estrictamente decreciente de números positivos $\{\varepsilon_m\}_{m\geq 0}$ cuyo límite es 0 y $\{K_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{K}'(R)$ una sucesión exhaustiva de subconjuntos compactos de R.

Análogamente a como se hizo en la proposición 2.2.7, se definen los subconjuntos abiertos de $\mathcal{O}(R)$:

$$G(f,\varepsilon,K) = \{g \in \mathcal{O}(R): \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \max_{z\in K} |T_n(g(z)) - f(z)| < \varepsilon\},$$

$$O(f,\varepsilon,K) = \{h \in \mathcal{O}(R) : \max_{z\in K} |h(z) - f(z)| < \varepsilon\}.$$

Ahora, si denotamos por G el conjunto de las funciones universales en $\mathcal{O}(R)$, encontramos que este conjunto se puede escribir como

$$G = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n=0}^{\infty} G(f_k, \varepsilon_m, K_n).$$

La inclusión hacia la derecha es trivial ya que, si f es universal, entonces para toda $g \in \mathcal{O}(R)$, para todo subconjunto compacto $K \subset R$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe un n_0 tal que $\max_K |f \circ \varphi_{n_0}(z) - g(z)| < \varepsilon$. En particular esto se tiene para $g = f_k$, para $K = K_n$ y para $\varepsilon = \varepsilon_m$.

Veamos que si f está en la intersección de la derecha entonces es universal. Sea $g \in \mathcal{O}(R)$ entonces puesto que $\{f_k\}_{k\geq 0}$ es denso en $\mathcal{O}(R)$ para todo subconjunto compacto $K \subset R$ y para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que existe f_{k_0} tal que $\max_K |g(z) - f_{k_0}(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea ahora un subconjunto K_{n_0} de la sucesión exhaustiva cuyo interior contenga a K y $\varepsilon_{m_0} < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces existe un n_1 tal que $\max_{K_{n_0}} |\overline{f}(\varphi_{n_1}(z)) - f_{k_0}(z)| < \varepsilon_m$. Ahora basta aplicar la desigualdad triangular para obtener que $\max_K |f(\varphi_{n_0}(z)) - g(z)| < \varepsilon$.

Puesto que el conjunto de las funciones universales se puede escribir como una intersección numerable de abiertos se tiene que es un G_δ. □

TEOREMA 2.3.18. *Sea R una superficie de Riemann no compacta cuyo espacio de finales de Freudenthal no es un conjunto binario. Si $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{O}(R;R)$ es una sucesión lisa-fugitiva preservante en R, entonces existe un conjunto residual de funciones $f \in \mathcal{O}(R)$ cada una de las cuales es universal para $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ en $\mathcal{O}(R)$.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración es análoga a la del teorema 2.2.8 con algunas pequeñas modificaciones. También mantendremos la misma notación de la proposición anterior. Obsérvese que por hipótesis y por la proposición 2.3.14 se tiene que el espacio de los finales de Freudenthal debe de ser un conjunto unitario o infinito.

Lo único que hay que probar es que cada $G(f_k, \varepsilon_m, K_n)$ es un conjunto denso en $\mathcal{O}(R)$. Así, puesto que $\mathcal{O}(R)$ es un espacio de Baire y el conjunto de las funciones de $\mathcal{O}(R)$ universales para $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ en $\mathcal{O}(R)$ es un G_δ, se tendrá, por el teorema de Baire, el enunciado del teorema.

Veamos pues que si $K' \in \mathcal{K}'(R)$, entonces $G(f, \varepsilon, K')$ es un conjunto denso en $\mathcal{O}(R)$. Para comprobar esto, fijamos $\varepsilon' > 0$, $h \in \mathcal{O}(R)$ y $K \in \mathcal{K}'(R)$. Debemos probar que $G(f, \varepsilon, K') \cap O(h, \varepsilon', K) \neq \emptyset$, esto es decir, existe $g \in \mathcal{O}(R)$ tal que:

$$\max_{z\in K} |h(z) - g(z)| < \varepsilon' \tag{3}$$

y

$$\max_{z\in K'} |f(z) - T_{n_0}(g(z))| < \varepsilon, \tag{4}$$

para algún número natural n_0. Con esto ya tendríamos que cada $G(f, \varepsilon, K')$ es denso en $O(R)$ pues los conjuntos $O(h, \varepsilon, K_n)$ forman una base de abiertos para la topología de $\mathcal{O}(R)$.

Ya que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es lisa-fugitiva preservante en R, por el lema 2.2.13 existe un número natural n_0 tal que $K \cap \varphi_{n_0}(K') = \emptyset$. $L = K \cup \varphi_{n_0}(K') \in \mathcal{K}(R)$ y φ_{n_0} restringida a K' es un homeomorfismo sobre su imagen $\varphi_{n_0}(K')$.

Definimos en L la función

$$h_1 = \begin{cases} h(z), & \text{si } z \in K; \\ f(\varphi_{n_0}^{-1}(z)), & \text{si } z \in \varphi_{n_0}(K') \end{cases}$$

donde $\varphi_{n_0}^{-1}$ denota la inversa de la aplicación $\varphi_{n_0} : K' \to \varphi_{n_0}(K')$. Está claro que $h_1 \in A(L)$. Entonces, ya que $L \in \mathcal{K}(R)$, por el teorema de aproximación de Mergelyan existe una función holomorfa $g \in \mathcal{O}(R)$ tal que $\max_{z\in L} |h_1(z) - g(z)| < \varepsilon'' = \min(\varepsilon, \varepsilon')$. Luego tenemos

$$\max_{z\in K} |h(z) - g(z)| < \varepsilon'$$

y

$$\begin{aligned} \max_{K'} |f(z) - T_{n_0}(g(z))| &= \max_{z\in K'} |f(z) - g(\varphi_{n_0}(z))| \\ &= \max_{z\in\varphi_{n_0}(K')} |f(\varphi_{n_0}^{-1}(z)) - g(z)| \\ &\leq \max_{z\in L} |h_1(z) - g(z)| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

que son (3) y (4) respectivamente, lo cual concluye la demostración del teorema. □

COROLARIO 2.3.19. *Sea R una superficie de Riemann no compacta cuyo espacio de finales de Freudenthal no es un conjunto binario. Si $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{O}(R; R)$ es una sucesión lisa-fugitiva preservante en R, entonces existe un conjunto residual de funciones $f \in \mathcal{O}(R)$ cada una de las cuales es universal para $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{K}(R)$.*

DEMOSTRACIÓN. Es una simple aplicación del teorema de aproximación de Mergelyan y del teorema anterior pues, si f es universal, entonces $\{f \circ \varphi_n\}_{n \geq 0}$ es denso en $\mathcal{O}(R)$ y este espacio a su vez es denso en $A(K)$ para todo elemento K de $\mathcal{K}(R)$. □

NOTA 2.3.20. *La demostración del teorema 2.3.18 también sería válida para sucesiones de aplicaciones continuas $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ tales que para todo compacto $K \in \mathcal{K}'(R)$ existe un n_0 tal que $K \cap \varphi_{n_0}(K) = \emptyset$, la aplicación φ_{n_0} restringida a K es de $A(K)$ e inyectiva en K y $\varphi_{n_0}(K) \in \mathcal{K}'(R)$. Sería posible, por ejemplo, dar una sucesión de homeomorfismos en $\mathbb{D}^*$ con las propiedades antes citadas.*

NOTA 2.3.21. *También es posible definir sucesiones de aplicaciones lisa-fugitiva semipreservantes $\{\varphi_n\}_{n \geq 0} \subset \mathcal{O}(R; R)$ como sigue: para todo compacto $K \in \mathcal{K}'(R)$ existe un número natural n_0 tal $K \cap \varphi_{n_0}(K) = \emptyset$, φ_{n_0} restringida a K es inyectiva y $\varphi_{n_0}(K) \in \mathcal{K}(R)$ (no a $\mathcal{K}'(R)$). Esta definición alteraría los lemas topológicos previos y la proposición 2.3.14. Por ejemplo, podrían existir sucesiones lisa-fugitivas semipreservantes para superficies de Riemann no compactas tales que su espacio de finales es finito y distinto de 2. La alteración de los lemas dependería del número de componentes conexas que perdiera $R \setminus \varphi_{n_0}(K)$ respecto $R \setminus K$. Pero seguiría siendo posible demostrar un teorema análogo al teorema 2.3.18 para este tipo de sucesiones.*

La demostración del teorema 2.3.18 se puede hacer utilizando el teorema de Runge en lugar del teorema de Mergelyan (no así la del corolario 2.3.19). No obstante el teorema de Mergelyan se muestra más directo y natural para esta clase de demostraciones.

Ahora probaremos que la condición de fugitividad en el teorema 2.3.18 es necesaria.

TEOREMA 2.3.22. *Sea $\{\varphi_n\}_{n \geq 0} \subset \mathcal{O}(R; R)$. Si $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ no es fugitiva en R, entonces no existe ninguna función $g \in \mathcal{O}(R)$ universal en $\mathcal{O}(R)$.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ no es fugitiva en R existe un subconjunto compacto K tal que para todo número natural n se tiene que $K \cap \varphi_n(K) \neq \emptyset$. Para este compacto K existe un subconjunto compacto $K_1 \in \mathcal{K}(R)$ con $K \subset intK_1$. Entonces para todo número natural se tiene que $K_1 \cap \varphi_n(K_1) \supset K \cap \varphi_n(K) \neq \emptyset$. De modo que podemos suponer que inicialmente K pertenece a $\mathcal{K}(R)$.

Así, podemos elegir $z_n \in K$ con $\varphi_n(z_n) \in K$. Supongamos que $g \in \mathcal{O}(R)$ es una función universal en $A(K)$ y consideremos la función constante $f(z) = 1 + \max_K |g(z)| \in \mathcal{O}(R)$. Se tiene que, para todo n,

$$\begin{aligned}\max_{z\in K} |f(z) - g(\varphi_n(z))| \geq& ||f(z)| - |g(\varphi_n(z_n))|| \\ =& 1 + \max_{z\in K} |g(z)| - |g(\varphi_n(z_n))| \\ \geq& 1.\end{aligned}$$

lo cual está en contradicción con la universalidad de f, pues $\{f \circ \varphi_n\}_{n\geq 0}$ no aproximaría a las funciones constantes. □

Como consecuencia tenemos el siguiente teorema para sucesiones de automorfismos.

TEOREMA 2.3.23. *Sea R una superficie de Riemann no compacta cuyo espacio de finales no es un conjunto binario y sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset Aut(R)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva en R.

b) Existe un conjunto residual en $\mathcal{O}(R)$ de funciones universales en $\mathcal{O}(R)$.

c) Existe $f \in \mathcal{O}(R)$ que es universal en $\mathcal{O}(R)$.

d) Existe $f \in \mathcal{O}(R)$ tal que el conjunto de las funciones constantes está contenido en la clausura de $\{f \circ \varphi_n : ngeq0\}$ con respecto a $\mathcal{O}(R)$.

DEMOSTRACIÓN. Que a) implica b) es el teorema 2.3.18, pues se tiene que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es lisa-fugitiva preservante en R por ser una sucesión de automorfismos. Que b) implica c) y c) implica d) son triviales y que d) implica a) es consecuencia de la demostración del teorema anterior pues si $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ no es fugitiva en R, el conjunto definido en d) no contendría las funciones constantes, lo cual es una contradicción. □

Para finalizar el capítulo veremos que la condición de "exhaustivamente inyectiva", es decir, la inyectividad de alguna φ_n en cada compacto prefijado, es también necesaria por lo menos cuando R es una superficie plana. Antes de poder demostrar esto necesitamos sucesiones exhaustivas de compactos especiales cuya existencia viene dada por el siguiente lema. Si γ es un arco en R denotamos por $long(\gamma)$ su longitud.

LEMA 2.3.24. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región, entonces para todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$ existe un subconjunto compacto y conexo $K_1 \subset \Omega$ tal que $K \subset intK_1$ verificando que existe un número real $M = M(K_1) > 0$ tal que para todo $z_1, z_2 \in K_1$ existe un arco $\gamma \subset K_1$ tal que $long(\gamma) < M|z_1 - z_2|$.*

DEMOSTRACIÓN. Fijamos un compacto $K \subset \Omega$. Usando una sucesión exhaustiva de conjuntos compactos y conexos siempre se puede encontrar un subconjunto compacto $K_2 \subset \Omega$ conexo tal que $K \subset intK_2$. Recubriendo $\mathbb{C}$ por una red de cuadrados cerrados suficientemente pequeños (por ejemplo, tales que su diagonal sea menor que la distancia euclídea de K_2 a $\mathbb{C} \setminus \Omega$) y tomando como K_1 la unión de todos los cuadrados que intersectan a K_2, tenemos un subconjunto compacto y conexo cuyo interior contiene a K.

Resta ver que existe M tal que cualesquiera dos puntos $z_1, z_2 \in K_1$ pueden ser unidos por un arco γ en K_1 tal que $long(\gamma) < M|z_1 - z_2|$. Sea l la longitud del lado de cada uno de los cuadrados cuya unión es K_1 y sea n el número de estos cuadrados.

Entonces si $|z_1 - z_2| > l$ podemos unir z_1 con z_2 mediante una poligonal de longitud, a lo más, nl que pasa perpendicularmente por todos los cuadrados y por consiguiente, en este caso, $long(\gamma) < nl < n|z_1 - z_2|$.

Si $|z_1 - z_2| < l$ entonces z_1 y z_2 están en el mismo cuadrado o en cuadrados adyacentes. Si z_1 y z_2 están en el mismo cuadrado o en cuadrados adyacentes que tienen un lado en común, z_1 se puede unir con z_2 mediante el segmento que va de z_1 a z_2 que tiene por longitud $|z_1 - z_2|$. Si están en cuadrados adyacentes con un sólo un vértice en común, z_1 se puede unir con z_2 mediante dos segmentos perpendiculares entre sí, uno de los cuales tiene por longitud $|\mathrm{Re}\ (z_1 - z_2)|$ y el otro $|\mathrm{Im}\ (z_1 - z_2)|$. Luego se puede unir con un arco de longitud $|\mathrm{Re}\ (z_1 - z_2)| + |\mathrm{Im}\ (z_1 - z_2)| \leq \sqrt{2}|z_1 - z_2|$.

Tomando $M = \max\{\sqrt{2}, n\}$ se tiene que siempre existe un arco γ en K_1 tal que $long(\gamma) < M|z_1 - z_2|$. □

TEOREMA 2.3.25. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región y $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{O}(\Omega;\Omega)$ una sucesión de funciones holomorfas tales que existe $f \in H(\Omega)$ que es universal para $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$. Entonces para cada subconjunto compacto $K \subset \Omega$ existe un número natural n_0 tal que φ_{n_0} es inyectiva sobre K.*

DEMOSTRACIÓN. Fijamos $K \subset \Omega$ compacto. Elegimos un subconjunto compacto $K_1 \subset \Omega$ verificando las propiedades del lema anterior. Entonces existe existe un número real positivo $r > 0$ tal que $K_1 \subset \bigcup_{j=1}^{k} \bar{B}(a_j, r) \subset \bigcup_{j=1}^{k} \overline{B}(a_j, 2r) \subset \Omega$. Por universalidad existe un número natural n_0 tal que $\max_{K_2} |f \circ \varphi_{n_0}(z) - z| < \frac{r}{2M}$ donde $K_2 = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{B}(a_i, 2r)$. Ponemos $g = f \circ \varphi_{n_0}$. Para todo $z \in K_1$ tenemos que $z \in B(a_j, r)$ para algún a_j. Así, por la fórmula de Cauchy para la derivada primera, para todo $z \in K_1$ tenemos:

$$|g'(z)-1| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi-a_j|=2r}\frac{g(\xi)-\xi}{(\xi-z)^2}d\xi\right| \leq \frac{1}{2\pi}\oint_{|\xi-a_j|=2r}\frac{|g(\xi)-\xi|}{|\xi-z|^2}|d\xi| < \frac{1}{M}.$$

Supongamos que existe $z_1 \neq z_2$ con $z_1, z_2 \in K_1$ y $g(z_1) = g(z_2)$. Elegimos un arco $\gamma \subset K_1$ tal que $long(\gamma) < M|z_1 - z_2|$, entonces

$$|z_1 - z_2| = \left|\int_\gamma (g'(z)-1)dz\right| \leq \int_\gamma |g'(z)-1||dz| < \frac{long(\gamma)}{M} < |z_1 - z_2|,$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, $g = f \circ \varphi_{n_0}$ es inyectiva sobre K_1 y, consecuentemente, también lo es φ_{n_0} sobre K_1. Por lo tanto, también es inyectiva sobre K. □

CAPÍTULO 3: Espacios vectoriales de funciones universales.

En este último capítulo demostraremos un resultado completamente nuevo, a saber, demostraremos la existencia de espacios vectoriales cerrados de dimensión infinita de forma que todos sus elementos, excepto la función nula, son funciones universales.

Curiosamente para la demostración de los teoremas de este capítulo volveremos a los métodos del capítulo 1. De hecho, las demostraciones de los primeros pasos de los teoremas 3.0.3 y 3.0.4 serán una potenciación de la demostraciones de los teoremas 1.2.9 y 1.2.3.

Necesitaremos para la demostración de los teoremas de este capítulo algunas nociones sobre sucesiones básicas.

En lo que sigue X denota un espacio de Banach dotado de la norma $\|.\|$. Una *base de Schauder*, o simplemente una *base* en un espacio de Banach X es una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0} \subset X$ tal que para cada $x \in X$ existe una única sucesión $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ de números complejos tales que

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k.$$

Fácilmente se comprueba que cualquier base consta de vectores linealmente independientes. Una sucesión *básica* es una sucesión que es una base para el subespacio lineal cerrado que engendra.

Dada una sucesión básica $\{x_n\}_{n\geq 0}$, es posible definir los *coeficientes funcionales* sobre el subespacio lineal cerrado que engendra, $x_k^* : \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x_n \mapsto \alpha_k$ $(k \geq 0)$ que son lineales y continuos (véase [**Di**, p. 32]). Por el teorema de Hahn-Banach se pueden extender a funcionales lineales y continuos sobre X.

Dados dos espacios de Banach X e Y, dos sucesiónes básicas $\{x_n\}_{n\geq 0} \subset X$ y $\{y_n\}_{n\geq 0} \subset Y$ se dicen *equivalentes* si la convergencia de $\sum a_n x_n$ es equivalente a la convergencia de $\sum a_n y_n$ [**Di**, p. 43].

Necesitaremos el siguiente teorema sobre "pertubación" de sucesiones básicas. Su demostración se puede encontrar en [**Di**, p. 46].

TEOREMA 3.0.1. *Sea $\{z_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión básica en el espacio de Banach X, y supongamos que $\{z_n^*\}_{n\geq 0}$ es la sucesión de los coeficientes funcionales. Si $\{y_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión en X para la cual $\sum_{n=0}^{\infty} \|z_n^*\| \|z_n - y_n\| < 1$, entonces $\{y_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión básica equivalente a $\{z_n\}_{n\geq 0}$.*

Denotaremos por l^2 el espacio de Hilbert de las sucesiones de números complejos tales que la norma

$$\|\{a_n\}_{n\geq 0}\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

es finita y por $L^2(T)$ el espacio de Hilbert de las funciones complejas en el toro $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ para las cuales la norma

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

es finita. Haremos uso del isomorfismo existente entre estos dos espacios de Hilbert.

Necesitaremos el siguiente lema topológico que es una generalización del lema 1.2.8.

LEMA 3.0.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región de conectividad infinita, $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset Aut(\Omega)$ una sucesión fugitiva y $\{K_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{K}(\Omega)$ una sucesión exhaustiva de subconjuntos compactos de Ω. Entonces existe una subsucesión fugitiva $\{\varphi_{n_k}\}_{k\geq 0}$ y una subsucesión de subconjuntos compactos $\{K_{n_k}\}_{k\geq 0}$ tales que, para todo conjunto finito I de número naturales con primer elemento l y último elemento s, tenemos $K_{n_l} \cup \left(\bigcup_{i\in I} \varphi_{n_{k_i}}(K_{n_{k_i}})\right)$ es una unión disjunta que pertenece a $\mathcal{K}(\Omega)$ y está contenida en $K_{n_{k_s+1}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Construiremos la sucesión por inducción. Dado K_0, por el lema 1.2.8, existe φ_{n_0} tal que $K_0 \cup \varphi_{n_0}(K_0) \in \mathcal{K}(\Omega)$ es una unión disjunta.

Por ser $\{K_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión exhaustiva de subconjuntos compactos de Ω existe un subconjunto compacto K_{n_1} tal que $K_0 \cup \varphi_{n_0}(K_0) \subset intK_{n_1}$.

Denotamos por $[k]$ el conjunto de los k primeros números naturales. Supongamos que tenemos construido K_{n_k} y φ_{n_k} de forma que para todo subconjunto finito $I \subset [k]$ con primer elemento l y último elemento s se tiene que el siguiente subconjunto compacto

$$L_I = K_{n_l} \cup \left(\bigcup_{i\in I} \varphi_{n_{k_i}}(K_{n_{k_i}})\right)$$

es una unión disjunta que pertenece a $\mathcal{K}(\Omega)$. Usando que $\{K_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión exhaustiva de subconjuntos compactos, existe un subconjunto compacto $K_{n_{k+1}}$ tal que $L_{[k]} \subset intK_{n_{k+1}}$. Esto implica que $L_I \subset intK_{n_{k+1}}$ ya que $L_I \subset L_{[k]}$ para todo $I \subset [k]$.

Sea C la componente conexa dada por el lema 1.2.7. Como en el lema 1.2.8. Sea U_1 la componente de $\mathbb{C}^\infty \setminus K_{n_{k+1}}$ que es entorno de C. Puesto que C es no aislada podemos encontrar un entorno U de C y C_0 otra componente conexa de $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ con $C \subset U \subset U_1$ y $C_0 \subset U_0 \setminus U$.

Sea $\varphi_{n_{k+1}}$ tal que $\varphi_{n_{k+1}}(K_{n_{k+1}}) \subset U$. Claramente $L_I \cup \varphi_{n_{k=1}}(K_{n_{k+1}})$ es una unión disjunta para todo $I \subset [k]$. Tenemos que probar que $L_I \cup \varphi_{n_{k+1}}(K_{n_{k+1}})$ es Runge, para cada $I \subset [k]$.

Consideremos $U_1, U_2, ..., U_l$ y $V_1, V_2, ..., V_l$ las componentes conexas de los subconjuntos $K_{n_{k+1}}$ y $\varphi_{n_{k+1}}(K_{n_{k+1}})$ respectivamente.

Igual que en el lema 1.2.8 las componentes conexas del complementario de $K_{n_{k+1}} \cup \varphi_{n_{k+1}}(K_{n_{k+1}})$ respecto de Ω son

$$U_1 \cap V_1, U_2, ..., U_l, V_2, ..., V_l,$$

que son todas no relativamente compactas.

Sean $U_1^I, U_2^I, ..., U_{l_I}^I$ las componentes conexas de L_I. Puesto que L_I está contenido en $intK_{n_{k+1}}$, cada una de las componentes $U_1, ..., U_l$ está contenida en alguna U_j^I $(j = 1, ..., l_I)$. Recíprocamente, puesto que L_I es Runge para todo $I \subset [k]$, cada U_j^I $(j = 1, ..., l_I)$ contiene alguna U_i $(i = 1, ..., l)$. Luego alguna contiene a U_1 y podemos suponer que es U_1^I.

Las componentes conexas de $\Omega \setminus (L_I \cup \varphi_{n_{k+1}}(K_{n_{k+1}}))$ son entonces

$$U_1^I \cap V_1, U_2^I, ..., U_{l_I}^I, V_2, ..., V_l.$$

Puesto que cada una de ellas contiene alguna de $\Omega \setminus (K_{n_{k+1}} \cup \varphi_{n_{k+1}}(K_{n_{k+1}}))$, son todas no relativamente compactas. □

El enunciado del lema anterior es trivial si Ω es una región simplemente conexa.

TEOREMA 3.0.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región, la cual no es isomorfa a $\mathbb{C}^\star$. Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset Aut(\Omega)$ una sucesión fugitiva. Entonces existe un espacio cerrado de dimensión infinita $F \subset H(\Omega)$ tal que cada $f \in F \setminus \{0\}$ es una función universal en $H(\Omega)$.*

DEMOSTRACIÓN. Aplicando la propiedad 1.1.2. podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\overline{\mathbb{D}} \subset \Omega$. Sea $\{\varepsilon_m\}_{m\geq 0}$ una sucesión de números positivos tal que $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_m < 1$. Sea $\{K_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión exhaustiva de subconjuntos compactos de Ω tal que $\overline{\mathbb{D}} \subset K_0$. En realidad, consideramos que $\{K_n\}_{n\geq 0}$ y $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ satisfacen la propiedad de la subsucesión obtenida en el lema 3.0.2. Por último, sea $\{p_n(z)\}_{n\geq 0}$ un conjunto denso y numerable de $H(\Omega)$.

Ya que la demostración tiene dos partes muy diferentes, resulta conveniente dividirla en dos pasos.

Paso primero. Si escribimos $i(m,n) = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + m$ $(m \geq 0, n \geq 0)$, los números naturales quedan distribuidos como se indica en la siguiente tabla:

$n \backslash m$	0	1	2	...	m	...
0	0	2	5		$\vdots$	
1	1	4			$\vdots$	
2	3				$\vdots$	
$\vdots$					$\vdots$	
n	......	......	......	......	$i(m,n)$	...
$\vdots$					$\vdots$	

Así, de esta manera $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ queda dividida en infinitas subsucesiones disjuntas $\{\varphi_{i(m,n)}\}_{n\geq 0}$ $(m \geq 0)$, para cada una de las cuales construiremos una función f_m tal que:

a) Cada f_m es una función universal para $\{\varphi_{i(m,n)}\}_{n\geq 0}$ y por tanto también lo es para $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$. De hecho, tenemos que

$$\max_{K_n} |f_m(\varphi_{i(m,n)}(z)) - p_n(z)| < \frac{\varepsilon_m}{2^n} \quad (n \geq 0).$$

b) Para todo número natural $k \neq m$ la sucesión $\{f_m(\varphi_{i(k,n)})\}_{n\geq 0}$ converge uniformemente a cero en subconjuntos compactos de Ω. De hecho, se tiene

$$\max_{K_n} |f_m(\varphi_{i(k,n)}(z))| < \frac{\varepsilon_m}{2^n} \quad (n \geq 0).$$

c) $\max_{\overline{\mathbb{D}}} |f_m(z) - z^m| < \varepsilon_m$.

Ya que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ y $\{K_n\}_{n\geq 0}$ satisfacen la propiedad de la subsucesión obtenida en el lema 3.0.2, tenemos, para cada número natural $m \geq 0$, que el conjunto

$$L_{m,0} = K_0 \cup \left(\bigcup_{j=0}^{i(m,0)} \varphi_j(K_j) \right)$$

es una unión disjunta la cual está en $\mathcal{K}(\Omega)$ y está contenida en $K_{i(m,0)+1}$. Definimos sobre el subconjunto $L_{m,0}$ la siguiente función:

$$h_{m,0}(z) = \begin{cases} z^m, & \text{si } z \in K_0; \\ p_0(\varphi^{-1}_{i(m,0)}(z)), & \text{si } z \in \varphi_{i(m,0)}(K_{i(m,0)}); \\ 0, & \text{si } z \in \varphi_j(K_j) \quad \text{para } 0 \leq j < i(m,0). \end{cases}$$

Claramente, $h_{m,0}(z) \in A(L_{m,0})$. Por tanto, por el teorema de aproximación de Mergelyan, para cada $m \geq 0$, existe una función racional $q_{m,0} \in H(\Omega)$, con a lo más un polo en cada componente conexa de $\mathbb{C}^\infty \setminus L_{m,0}$ (por la definición de $\mathcal{K}(\Omega)$) y ningún otro polo, tal que $\max_{L_{m,0}} |h_{m,0}(z) - q_{m,0}(z)| < \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,0)+1}}$. Así, tenemos

$$\max_{K_0} |q_{m,0}(z) - z^m| < \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,0)+1}},$$

$$\max_{\varphi_{i(m,0)}(K_{i(m,0)})} |q_{m,0}(z) - p_0(\varphi^{-1}_{i(m,0)}(z))| < \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,0)+1}},$$

$$\max_{\varphi_j(K_j)} |q_{m,0}(z)| < \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,0)+1}} \quad (0 \leq j < i(m,0)).$$

Obsérvese que el tercer máximo deja de aparecer cuando $m = 0$.

Por inducción, podemos definir, para cada $m \geq 0$, el subconjunto

$$L_{m,n} = K_{i(m,n-1)+1} \cup \left(\bigcup_{j=i(m,n-1)+1}^{i(m,n)} \varphi_j(K_j) \right)$$

y de nuevo tenemos que es una unión disjunta la cual está en $\mathcal{K}(\Omega)$ y está contenida en $K_{i(m,n)+1}$. Definimos sobre el subconjunto compacto $L_{m,n}$ la siguiente función:

$$h_{m,n}(z) = \begin{cases} q_{m,n-1}(z), & \text{si } z \in K_{i(m,n-1)+1}; \\ p_n(\varphi^{-1}_{i(m,n)}(z)), & \text{si } z \in \varphi_{i(m,n)}(K_{i(m,n)}); \\ 0, & \text{si } z \in \varphi_j(K_j)(i(m,n-1) < j < i(m,n)). \end{cases}$$

Claramente, $h_{m,n}(z) \in A(L_{m,n})$ para todo $m \geq 0$. Por tanto, otra vez por el teorema de aproximación de Mergelyan, para cada $m \geq 0$, existe una función racional $q_{m,n} \in H(\Omega)$, con a lo más un polo en cada componente conexa de $\mathbb{C}^\infty \setminus L_{m,n}$ (por la definición de $\mathcal{K}(\Omega)$) y ningún otro polo, tal que

$$\max_{z \in L_{m,n}} |h_{m,n}(z) - q_{m,n}(z)| < \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,n)+1}}.$$

Por consiguiente tenemos

$$\max_{K_{i(m,n-1)+1}} |q_{m,n}(z) - q_{m,n-1}(z)| < \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,n)+1}},$$

$$\max_{\varphi_{i(m,n)}(K_{i(m,n)})} |q_{m,n}(z) - p_n(\varphi^{-1}_{i(m,n)}(z))| < \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,n)+1}},$$

$$\max_{\varphi_j(K_j)} |q_{m,n}(z)| < \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,n)+1}} \quad (i(m,n-1) < j < i(m,n)).$$

Por ser $H(\Omega)$ completo y $\{K_n\}_{n\geq 0}$ exhaustiva, se obtiene de la primera desigualdad que $\{q_{m,n}\}_{n\geq 0}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω a una función $f_m \in H(\Omega)$ para todo $m \geq 0$. Cada función f_m se puede escribir, para cualquier $n \geq 0$, como

$$f_m(z) = q_{m,n}(z) + \sum_{k=n}^{\infty} (q_{m,k+1}(z) - q_{m,k}(z)).$$

Por tanto, ya que $\overline{\mathbb{D}} \subset K_0 \subset K_{i(m,k)+1}$ para todo $k \geq 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\max_{\overline{\mathbb{D}}} |f_m(z) - z^m| &\leq \max_{K_0} |q_{m,0}(z) - z^m| + \sum_{k=0}^{\infty} \max_{K_{i(m,k)+1}} |q_{m,k+1}(z) - q_{m,k}(z)| \\ &< \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,k)+1}} \\ &< \varepsilon_m,\end{aligned}$$

para todo $m \geq 0$. De este modo se tiene c).

Para ver que para cada $m \geq 0$, la función f_m es universal para $\{\varphi_{i(m,n)}\}_{n\geq 0}$, es suficiente observar que para $z \in \varphi_{i(m,n)}(K_{i(m,n)}) \subset K_{i(m,n)+1}$ tenemos

$$\begin{aligned}|f_m(z) - p_n(\varphi_{i(m,n)}^{-1}(z))| &\leq |q_{m,n}(z) - p_n(\varphi_{i(m,n)}^{-1}(z))| + \sum_{k=n}^{\infty} |q_{m,k+1}(z) - q_{m,k}(z)| \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,k)+1}} \\ &< \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,n)}}.\end{aligned}$$

Así, se obtiene:

$$\begin{aligned}\max_{K_n} |f_m(\varphi_{i(m,n)}(z)) - p_n(z)| &\leq \max_{K_{i(m,n)}} |f_m(\varphi_{i(m,n)}(z)) - p_n(z)| \\ &= \max_{\varphi_{i(m,n)}(K_{i(m,n)})} |f_m(z) - p_n(\varphi_{i(m,n)}^{-1}(z))| \\ &< \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,n)}} \\ &< \frac{\varepsilon_m}{2^n}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada natural $m \geq 0$

$$\lim_{n \to \infty} |f_m(\varphi_{i(m,n)}(z)) - p_n(z)| = 0$$

uniformemente en subconjuntos compactos.

Ya que, para todo natural $m \geq 0$, la sucesión $\{f_m(\varphi_{i(m,n)})\}_{n \geq 0}$ esta suficientemente cerca de $\{p_n\}_{n \geq 0}$ y se puede extraer de esta última una subsucesión convergente uniformemente en compactos a cualquier función $f \in H(\Omega)$, tenemos que podemos extraer de la anterior una subsucesión convergente uniformemente en subconjuntos compactos a cualquier función $f \in H(\Omega)$. Lo cual prueba la universalidad de f_m para todo $m \geq 0$. Esto es a).

Nos queda probar que $\{f_m(\varphi_{i(k,n)})\}_{n \geq 0}$ converge uniformemente en compactos a la función nula para $k \neq m$. Fijamos $n \in \{0, 1, 2, ...\}$ y denotamos por r el único número natural tal que $i(m, r-1) < i(k, n) < i(m, r)$ (donde $i(m, r-1) = 0$ si $r = 0$). Ya que $K_n \subset K_{i(k,n)}$ y $\varphi_{i(k,n)}(K_{i(k,n)}) \subset K_{i(k,n)+1} \subset K_{i(m,r)+1}$, se tienen entonces las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
\max_{K_n} |f_m(\varphi_{i(k,n)}(z))| &\leq \max_{K_{i(k,n)}} |f_m(\varphi_{i(k,n)}(z))| \\
&\leq \max_{K_{i(k,n)}} |q_{m,r}(\varphi_{i(k,n)}(z))| + \sum_{l=r}^{\infty} \max_{K_{i(m,l)+1}} |q_{m,l+1}(z) - q_{m,l}(z)| \\
&< \sum_{l=r}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,l)+1}} \\
&< \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,r)}} \\
&< \frac{\varepsilon_m}{2^{i(k,n)}} \\
&< \frac{\varepsilon_m}{2^n}.
\end{aligned}$$

Esto es b). Así, la demostración del primer paso está concluida.

Segundo paso. Sea E el subespacio vectorial que consta de todas las series $\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m f_m$ las cuales convergen uniformemente en subconjuntos compactos de Ω y llamamos F a la clausura de E en $H(\Omega)$. Claramente, F es cerrado. Así, tenemos sólo que probar que es un espacio vectorial de dimensión infinita de funciones universales. La universalidad se entiende exceptuando la función nula.

Primero, probamos que $\{f_m\}_{m\geq 0}$ es una sucesión básica en $L^2(T)$. Por tanto son linealmente independientes en $L^2(T)$ y, consecuentemente, en $H(\Omega)$. Sea $\{z_m^\star\}_{m\geq 0}$ los coeficientes funcionales correspondientes a la sucesión básica $\{z^m\}_{m\geq 0}$. Usando c) y el hecho de que $\|z_m^\star\|_2 = 1$ para todo m, tenemos en $L^2(T)$ las siguientes desigualdades:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|z_m^\star\|_2 \|z^m - f_m(z)\|_2 \leq \sum_{m=0}^{\infty} \max_{\overline{\mathbb{D}}} |z^m - f_m(z)| < \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m < 1.$$

Como $\{z^m\}_{m\geq 0}$ es una sucesión básica en $L^2(T)$, tenemos que $\{f_m\}_{m\geq 0}$ es una sucesión básica equivalente sobre $L^2(T)$ to $\{z^m\}_{m\geq 0}$ (véase teorema 3.0.1). Esto significa que el subespacio lineal cerrado en $L^2(T)$ generado por $\{z^m\}_{m\geq 0}$ es isomorfo al subespacio lineal cerrado en $L^2(T)$ generado por $\{f_m\}_{m\geq 0}$. Así, podemos asociar a cada elemento de F una única sucesión $\{\alpha_m\}_{m\geq 0}$ que está en l^2. Esto puede realizarse de la siguiente manera. Si $f \in F$, entonces existe una sucesión de series en E las cuales convergen a f. Por la continuidad de $\|.\|_2$ con respecto a la norma del máximo tenemos que esta sucesión de series converge a f en $L^2(T)$. Así, f tiene una representación como serie en $L^2(T)$. Desde luego, esta representación como serie no tiene por qué converger uniformemente en subconjuntos compactos. Además se tiene el siguiente detalle importante: usando el principio del módulo máximo se comprueba fácilmente que la única función a la que le asociamos la sucesión nula es la función nula.

Ahora probaremos que cada serie $\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m f_m$ convergente uniformemente en subconjuntos compactos, distinta de la función nula, es una función universal para $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$. Ya que $\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m f_m$ no es la función nula existe un $\alpha_k \neq 0$. Es obvio que el producto por un escalar distinto de cero de una función universal es también universal. Así, podemos suponer que $\alpha_k = 1$. Para ver que $\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m f_m$

es universal para $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ tenemos sólo que comprobar que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m f_m(\varphi_{i(k,n)}(z)) - p_n(z)\right) = 0 \tag{1}$$

uniformemente en conjuntos compactos. Esto se ve rápidamente computando

$$\max_{K_n}\left|\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m f_m(\varphi_{i(k,n)}(z)) - p_n(z))\right|. \tag{2}$$

Por la desigualdad triangular (2) es menor que

$$\max_{K_n}|f_k(\varphi_{i(k,n)})(z)) - p_n(z)| + \max_{K_n}\sum_{m\neq k}|\alpha_m f_m(\varphi_{i(k,n)}(z))|. \tag{3}$$

Usando a) y b) tenemos que (3) es menor que

$$\frac{\varepsilon_k}{2^n} + \sum_{m\neq k}|\alpha_m|\frac{\varepsilon_m}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{\infty}|\alpha_m|\varepsilon_m. \tag{4}$$

y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene que (4) es menor que

$$\frac{\|\{\alpha_m\}_{m\geq 0}\|_2\|\{\varepsilon_m\}_{m\geq 0}\|_2}{2^n} < \frac{\|\{\alpha_m\}_{m\geq 0}\|_2}{2^n} \tag{5}$$

lo cual tiende a 0 cuando n tiende a ∞, así que tenemos (1).

Queda por demostrar que toda $f \in F$, excepto la función nula, es una función universal para $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$. Sea $\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m f_m$ su representación como serie en $L^2(T)$. Suponemos otra vez que algún $\alpha_k = 1$. Sea $\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m^l f_m\right\}_{l\geq 0}$ la sucesión de series de E que converge en $H(\Omega)$ a f. Es obvio que podemos considerar que $\alpha_k^l = 1$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Análogamente, para ver que f es una función universal, es suficiente verificar que

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(\varphi_{i(k,n)}(z)) - p_n(z)\right) = 0 \tag{6}$$

uniformemente en subconjuntos compactos. Para esto, fijamos l y n y estimamos

$$\max_{K_n}|f(\varphi_{i(k,n)}(z)) - p_n(z)| \leq$$

$$\max_{K_n}\left|f(\varphi_{i(k,n)}(z)) - \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^l_m f_m(\varphi_{i(k,n)}(z))\right| +$$

$$\max_{K_n}\left|\sum_{m=0}^{\infty} \alpha^l_m f_m(\varphi_{i(k,n)}(z)) - p_n(z)\right| <$$

$$\max_{K_n}\left|f(\varphi_{i(k,n)}(z)) - \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^l_m f_m(\varphi_{i(k,n)}(z))\right| + \frac{\|\{\alpha^l_m\}_{m\geq 0}\|_2}{2^n}, \qquad (7)$$

donde la última desigualdad se debe a que (2) es menor que el segundo miembro de (5) sustituyendo α_m por α^l_m. Como la sucesión de series converge a f y $\|\{\alpha^l_m\}_{m\geq 0}\|_2$ converge a $\|\{\alpha_m\}_{m\geq 0}\|_2$ cuando l tiende a ∞, tenemos que existe $l(n)$ tal que (7) es menor que $\frac{1}{2^n} + \frac{\|\{\alpha_m\}_{m\geq 0}\|_2+1}{2^n}$, lo cual tiende a 0. Así, tenemos (6). Esto termina el segundo paso y la demostración. □

Aunque por simplicidad hemos demostrado el teorema para regiones no isomorfas a $\mathbb{C}^\star$ del plano complejo $\mathbb{C}$ que poseen una sucesión fugitiva de automorfismos, el teorema anterior se puede generalizar a superficies de Riemann con una sucesión de aplicaciones lisa-fugitiva preservante, siempre que el espacio de finales de Freudenthal no sea binario.

Es interesante notar que la independencia lineal de las funciones $\{f_m\}_{m\geq 0}$ se puede deducir de los apartados a) y b). Para ver esto basta tomar una combinación lineal finita de funciones de la sucesión $\{f_m\}_m \geq 0$ anteriormente construida, que podemos suponer que son las k primeras funciones, igualada a 0. Esto es

$$\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_2 f_k = 0$$

con algún escalar α_j distinto de 0. Ahora, componiendo con $\{\varphi_{i(j,n)}\}_{n\geq 0}$ se tiene que existe una subsucesión de $\{f_j(\varphi_{i(m,j)})\}_{n\geq 0}$ que tiende a 1 por ejemplo. Puesto que $\{f_l(\varphi_{i(j,n)}\}_{n\geq 0}$ converge a 0 cuando $l \neq j$ se tiene que la combinación lineal tendería a $\alpha_j \neq 0$, lo cual es una contradicción pues esa sucesión es constantemente 0.

Estudiemos por últimos el caso del plano punzonado. Si $\Omega = \mathbb{C}^\star$ tenemos algunas diferencias. Por la nota 1.2.5 se tiene que no existe ninguna función que pueda ser universal en $H(\mathbb{C}^*)$. Pero por el teorema 2.2.8 dada una sucesión fugitiva $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ en $\mathbb{C}^*$ existe un conjunto residual en $H(\mathbb{C}^*)$ de funciones universales respecto de $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{K}_1(\mathbb{C}^*)$. Más aún, es posible construir un espacio cerrado de dimensión infinita de funciones universales en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{K}_1(\mathbb{C}^*)$. Más precisamente, tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 3.0.4. *Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset Aut(\mathbb{C}^*)$ una sucesión fugitiva. Entonces existe un espacio vectorial cerrado de dimensión infinita $F \subset H(\mathbb{C}^*)$ tal que toda función $f \in F \setminus \{0\}$ es universal en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{K}_1(\mathbb{C}^*)$.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración es bastante parecida a la del teorema anterior pero con algunas modificaciones. Podemos suponer otra vez que $\overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{C}^*$. Sea $\{\varepsilon_m\}_{m\geq 0}$ una sucesión de números positivos tales que $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_m < 1$. También consideramos un conjunto denso y numerable de $H(\mathbb{C}^*)$, $\{p_n(z)\}_{n\geq 0}$, y asimismo la sucesión de subconjuntos compactos $\{K'_n\}_{n\geq 0}$ dada por el lema 1.2.1. Al igual que en los dos capítulos anteriores se tiene que es suficiente probar el teorema para $A(K'_n)$ para todo número natural n.

Usando que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es fugitiva, podemos elegir una sucesión exhaustiva de subconjuntos compactos de $\mathbb{C}^*$, $\{K_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{K}(\mathbb{C}^*)$, tal que para una subsucesión de $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ que reenumeramos por $\{\varphi_{t,n} : 0 \leq t \leq n\}$ tenemos que los subconjuntos compactos

$$L_n = K_n \cup \left(\bigcup_{t=0}^{n} \varphi_{t,n}(K'_t) \right)$$

son uniones disjuntas las cuales están contenidas en K_{n+1} y están en $\mathcal{K}(\mathbb{C}^*)$ para todo número natural $n \geq 0$. También supondremos que $\overline{\mathbb{D}} \subset K_0$. Se tiene que L_n está en $\mathcal{K}(\mathbb{C}^*)$ para todo n. También aquí dividimos la demostración en dos pasos.

Primer paso. Ponemos de nuevo $i(m,n) = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + m$ y se obtiene, para cada $t \geq 0$ y $m \geq 0$, una subsucesión $\{\varphi_{t,i(m,n)} : n \geq 0; i(m,n) \geq t\}$ de $\{\varphi_{t,n}\}_{n\geq t}$. A partir de estas sucesiones, por un procedimiento de doble inducción, construiremos una sucesión de funciones $\{f_m\}_{m\geq 0} \subset H(\mathbb{C}^*)$ de tal forma que:

a) Para todo $m \geq 0$ y cada $t \geq 0$, f_m es una función universal para $\{\varphi_{t,i(m,n)} : i(m,n) \geq t\}$ en $A(K_t')$. Por tanto, también lo es para $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ on $A(K_t')$ para todo número natural $t \geq 0$. De hecho tenemos que

$$\max_{K_t'} |f_m(\varphi_{t,i(m,n)}(z)) - p_n(z)| < \frac{\varepsilon_m}{2^n} \quad (n \geq 0; i(m,n) \geq t).$$

b) Para todo $m \geq 0$ y para cada $t \geq 0$, si $k \neq m$ se tiene que la sucesión $\{f_m(\varphi_{t,i(k,n)}) : i(k,n) \geq t\}$ converge uniformemente a 0 en K_t'. De hecho, tenemos que para $n \geq n(t)$ suficientemente grande:

$$\max_{K_t'} |f_m(\varphi_{t,i(k,n)}(z))| < \frac{\varepsilon_m}{2^n}.$$

c) $\max_{\overline{\mathbb{D}}} |f_m(z) - z^m| < \varepsilon_m$.

Consideramos para cada $m \geq 0$ el subconjunto compacto

$$L_{m,0} = K_0 \cup \left(\bigcup_{j=0}^{i(m,0)} \left(\bigcup_{t=0}^{j} \varphi_{t,j}(K_t') \right) \right)$$

el cual está en $\mathcal{K}(\mathbb{C}^*)$ y está contenido en $K_{i(m,0)+1}$. Definimos en cada subconjunto compacto $L_{m,0}$ la siguiente función:

$$h_{m,0}(z) = \begin{cases} z^m, & \text{si } z \in K_0; \\ p_0(\varphi_{t,i(m,0)}^{-1}(z)), & \text{si } z \in \varphi_{t,i(m,0)}(K_t') \quad (0 \leq t \leq i(m,0)); \\ 0, & \text{si } z \in \varphi_{t,j}(K_t') \quad (0 \leq t \leq j < i(m,0)). \end{cases}$$

Claramente, $h_{m,0}(z) \in A(L_{m,0})$. Entonces, para cada m, por el teorema de aproximación de Mergelyan existe una función racional $q_{m,0} \in H(\mathbb{C}^*)$, con a lo más un polo en cada componente conexa de $\mathbb{C}^\infty \setminus L_{m,n}$ y ningún otro polo, tal que $\max_{L_{m,0}} |h_{m,0}(z) - q_{m,0}(z)| < \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,0)+1}}$. Así, tenemos

$$\max_{K_0} |q_{m,0}(z) - z^m| < \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,0)+1}},$$

$$\max_{\varphi_{t,i(m,0)}(K'_t)} |q_{m,0}(z) - p_0(\varphi^{-1}_{t,i(m,0)}(z))| < \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,0)+1}} \quad (0 \le t \le i(m,0)),$$

$$\max_{\varphi_{t,j}(K'_t)} |q_{m,0}(z)| < \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,0)+1}} \quad (0 \le t \le j < i(m,0)).$$

Por inducción, para cada número natural n, tenemos que

$$L_{m,n} = K_{i(m,n-1)+1} \cup \left(\bigcup_{j=i(m,n-1)+1}^{i(m,n)} \left(\bigcup_{t=0}^{j} \varphi_{t,j}(K'_t) \right) \right)$$

es un subconjunto compacto que está contenido en $K_{i(m,n)+1}$ y pertenece a $\mathcal{K}(\mathbb{C}^*)$. Definimos, para cada $m \ge 0$, sobre $L_{m,n}$ la siguiente función:

$$h_{m,n}(z) = \begin{cases} q_{m,n-1}(z), & z \in K_{i(m,n-1)+1}; \\ p_n(\varphi^{-1}_{t,i(m,n)}(z)), & z \in \varphi_{t,i(m,n)}(K'_t) \quad (0 \le t \le i(m,n)) \,; \\ 0, & z \in \varphi_{t,j}(K'_t) \quad \begin{cases} (i(m,n-1) < j < i(m,0) \\ \text{y } 0 \le t \le j) \end{cases} \end{cases}.$$

Claramente, para cada $m \ge 0$, tenemos que $h_{m,n}(z) \in A(L_{m,n})$. Entonces, por el teorema de aproximación de Mergelyan existe una función racional $q_{m,n} \in H(\mathbb{C}^*)$, con a lo más un polo en cada componente conexa de $\mathbb{C}^\infty \setminus L_{m,n}$ y ningún otro polo, tal que

$$\max_{L_{m,n}} |h_{m,n}(z) - q_{m,n}(z)| < \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,n)+1}}.$$

Así, tenemos que

$$\max_{K_{i(m,n-1)+1}} |q_{m,n}(z) - q_{m,n-1}(z)| < \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,n)+1}},$$

$$\max_{\varphi_{t,i(m,n)}(K_t')} |q_{m,n}(z) - p_n(\varphi_{t,i(m,n)}^{-1}(z))| < \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,n)+1}} \quad (0 \leq t \leq i(m,n)),$$

$$\max_{\varphi_{t,j}(K_t')} |q_{m,n}(z)| < \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,n)+1}} \quad (i(m,n-1) < j < i(m,n); 0 \leq t \leq j).$$

Es claro que, para cada $m \geq 0$, $\{q_{m,n}(z)\}_{n\geq 0}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}^*$ a una función $f_m \in H(\mathbb{C}^*)$. Estas funciones pueden escribirse, para cualquier $n \geq 0$, como

$$f_m(z) = q_{m,n}(z) + \sum_{k=n}^{\infty} (q_{m,k+1}(z) - q_{m,k}(z)).$$

Por tanto, como en la demostración del teorema 3.0.3 se puede obtener c).

Para ver que f_m es universal en $A(K_t')$ para $\{\varphi_{t,i(m,n)} : i(m,n) \geq t\}$ para todo $t \geq 0$ computamos, para $z \in \varphi_{t,i(m,n)}(K_t') \subset K_{i(m,n)+1}$ lo siguiente:

$$\begin{aligned} |f_m(z) - p_n(\varphi_{t,i(m,n)}^{-1}(z))| &\leq |q_{m,n}(z) - p_n(\varphi_{t,i(m,n)}^{-1}(z))| + \sum_{k=n}^{\infty} |q_{m,k+1}(z) - q_{m,k}(z)| \\ &< \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,k)+1}} \\ &< \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,n)}} \\ &< \frac{\varepsilon_m}{2^n}. \end{aligned}$$

Así, tenemos para todo $t \geq 0$,

$$\max_{K_t'} |f_m(\varphi_{t,i(m,n)}(z)) - p_n(z)| = \max_{\varphi_{t,i(m,n)}(K_t')} |f_m(z) - p_n(\varphi_{t,i(m,n)}^{-1}(z))| < \frac{\varepsilon_m}{2^n}.$$

Así, para todo $t \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} (f_m(\varphi_{t,i(m,n)}(z)) - p_n(z)) = 0$$

uniformemente en K'_t. Denotamos por $n(m,t)$ el primer número natural n para el cual $i(m,n) \geq t$. Ya que por el teorema de aproximación de Mergelyan $\{p_n\}_{n\geq 0}$ es denso en $A(K'_t)$ tenemos que $\{p_n\}_{n\geq n(m,t)}$ es denso en $A(K'_t)$ para todo número natural $t \geq 0$. Por consiguiente hemos probado la universalidad de f_m en $A(K'_t)$ para todo $t \geq 0$. Esto es a).

Queda probar que para cada $m \geq 0$, $t \geq 0$ y $k \geq 0$ con $k \neq m$, la sucesión $\{f_m(\varphi_{t,i(k,n)}) : n \geq 0; i(k,n) \geq t\}$ converge uniformemente a la función nula en K'_t. Nótese que, para $n \geq n(t)$ suficientemente grande, $K'_t \subset K_{i(0,n)} \subset K_{i(k,n)}$ y $\varphi_{t,i(k,n)}(K_{i(k,n)}) \subset K_{i(k,n)+1}$. Si r es el único número natural con $i(m,r-1)+1 \leq i(k,n) < i(m,r)$, estimamos:

$$\begin{aligned}
\max_{K'_t}|f_m(\varphi_{t,i(k,n)}(z))| &\leq \max_{K_{i(k,n)}}|q_{m,n}(\varphi_{t,i(k,n)}(z))| + \sum_{l=r}^{\infty}\max_{K_{i(m,l)+1}}|q_{m,l+1}(z)-q_{m,l}(z)| \\
&\leq \sum_{l=r}^{\infty}\frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,l)+1}} \\
&< \frac{\varepsilon_m}{2^{i(m,r)}} \\
&< \frac{\varepsilon_m}{2^{i(k,n)}} \\
&< \frac{\varepsilon_m}{2^{n}}.
\end{aligned}$$

Así b) y el primer paso están completados.

Segundo paso. Este segundo paso también es análogo al del teorema 3.0.3. Así, definimos E y F como antes. Para ver que $\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m f_m$ es universal para $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$, donde $\alpha_k = 1$, sólo tenemos que comprobar que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m f_m(\varphi_{t,i(k,n)}(z)) - p_n(z)\right) = 0 \tag{8}$$

uniformemente en K'_t para $t \geq 0$. Podemos ver esto computanto para n suficientemente grande

$$\max_{K'_t}\left|\sum_{0}^{\infty}\alpha_m f_m(\varphi_{t,i(k,n)}(z)) - p_n(z))\right|,$$

lo cual como en el teorema anterior es menor que $\frac{\|\{\alpha_m\}_{m\geq 0}\|_2}{2^n}$. Esto tiende a 0 cuando n tiende a ∞. Así que tenemos (8).

Sea $\left\{\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^l f_m\right\}_{l\geq 0}$ una sucesión de series en E que convergen en $H(\mathbb{C}^*)$ a f. Esto implica que la sucesión de series converge en K_t' para todo $t \geq 0$. También consideramos que $\alpha_k^l = 1$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Como antes, para ver que f es una función universal, es suficiente verificar que

$$\lim_{n\to\infty} \left(f(\varphi_{t,i(k,n)}(z)) - p_n(z)\right) = 0 \tag{9}$$

uniformemente en K_t' para todo $t \geq 0$. Para esto, fijamos l y n suficientemente grandes y estimamos

$$\max_{K_t'} |f(\varphi_{t,i(k,n)}(z)) - p_n(z)| \leq$$

$$\max_{K_t'} \left| f(\varphi_{t,i(k,n)}(z)) - \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^l f_m(\varphi_{t,i(k,n)}(z)) \right| +$$

$$\max_{K_t'} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^l f_m(\varphi_{t,i(k,n)}(z)) - p_n(z) \right| <$$

$$\max_{K_t'} \left| f(\varphi_{t,i(k,n)}(z)) - \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^l f_m(\varphi_{t,i(k,n)}(z)) \right| + \frac{\|\{\alpha_m^l\}_{m\geq 0}\|_2}{2^n}. \tag{10}$$

Como la sucesión de series converge a f y $\|\{\alpha_m^l\}_{m\geq 0}\|_2$ converge a $\|\{\alpha_m\}_{m\geq 0}\|_2$ cuando l tiende a ∞, tenemos que existe un $l(n)$ tal que (10) es menor que $\frac{1}{2^n} + \frac{\|\{\alpha_m\}_{m\geq 0}\|_2 + 1}{2^n}$, el cual tiende a 0. Así, tenemos (9). Esto termina el segundo paso y la demostración. □

También aquí cabe señalar que la demostración anterior es válida para superficies de Riemann cuyo conjunto de finales de Freudenthal es binario y que poseen una sucesión de aplicaciones lisa-fugitiva.

Hay que mencionar que el método de demostración seguido en los teoremas anteriores no sirve para demostrar que para otras sucesiones de operadores, tales como el operador derivada, exista un espacio vectorial cerrado de dimensión infinita. De hecho, en este caso no se puede conseguir a) , b) y c) del teorema 3.0.3. Esto es una diferencia importante entre los operadores de composición y el operador derivada y parece que se debe a que es posible encontrar funciones universales para operadores de composición de lento crecimiento (véase **[Dui]** y **[CS]**). Sin embargo, no es posible encontrar funciones universales de lento crecimiento para el operador derivada (véase **[Gr2]**). Básicamente este hecho repercute de la siguiente manera: Para una sucesión de operadores de composición podemos encontrar una función que aproxime a z^m en el disco unidad cerrado y sea próxima a cero en otro lugar de la región considerada. Esto es independiente de la potencia m. Sin embargo, para el operador de derivación necesitamos una derivada cada vez mayor para que anule a z^m.

Referencias.

[Ah] L.V. Ahlfors, "Complex Analysis," McGraw-HIll, 1966.

[AS] L. V. Ahlfors and L. Sario, "Riemann surfaces," Princenton University Press, 1960.

[Ar] M.A. Armstrong, "Basic topology," McGraw-Hill. 1979.

[Be1] B. Beauzamy, *An operator on a separable Hilbert space, with many hypercyclic vectors*, Studia Math. **87** (1988). 71-78.

[Be2] B. Beauzamy. *Un opérateur sur l'espace de Hilbert, dont tous les polynômes sont hypercycliques*. C.R. Acad. Sci. Paris Ser. **303** (1986), 923-927.

[Ber] L. Bernal-González. *Derivative and antiderivative operators and the size of complex domains*. Ann. Polonici Math. **59** no 3 (1994), 267-274.

[BM1] L. Bernal-González and A. Montes-Rodríguez. *Universal functions for composition operators*, Complex Variables *to appear.*

[BM2] L. Bernal-González and A. Montes-Rodríguez. *Non-finite dimensional closed vector spaces for composition operators*, J. Approx. Theory *to appear.*

[Bw] W. Bergweiler, *Iteration of Meromorphic functions*, Bull. of A.M.S. **29** no. 2 (1993), 151-188.

[Bi] G. D. Birkhoff, *Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières*, C. R. Acad. Sci. Paris **189** (1929), 473-475.

[Bis] E. Bishop, *Subalgebras of Functions on a Riemann Surface*, Pacific J. Math. 8 (1958), 29-50.

[BR] C. Blair and L.A. Rubel, *A triply universal entire function*, Enseign. Math. **30** (1984), 269-274.

[Bo] P. Bourdon, *Invariant manifolds of hypercyclic vectors*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 845-847.

[BS] P. Bourdon and J.H. Shapiro, *Cyclic composition operators on H^2*, Proc. Symp. Pure Math. **51** Part 2 (1990). 43-53.

[BrM] E. M. Brown and Messer. *The Classification of Two-dimensional Manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **255** (1979). 377-402.

[Bu] R. B. Burckel. *Iterating Analytic Self-Maps of Discs*, Amer. Math. Monthly **88** (1981). 396-407.

[CS] K.C. Chan and J.H. Shapiro. *The cyclic behavior of translation operators on Hilbert spaces of entire functions*. Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), 1421-1449.

[Ch] R.E. Chandler. "Hausdorff Compactifications," Marcel Dekker, INC, 1976.

[CV] C. O. Christenson and W. L. Voxman, "Aspects of Topology," Marcel Dekker, 1977.

[De] R.L. Devaney, "An introduction to Chaotic Dynamical Systems," Addison-Wesley, Reading MA, 1989.

[Di] J. Diestel, "Sequences and Series in Banach Spaces," Springer-Verlag, New York, 1984.

[DH] E. Domínguez y L. J. Hernández, *Sobre la clasificación de las superficies abiertas*, Contribuciones matemáticas en honor a Luis Virgil, Universidad de Zaragoza (1984).

[Dug] J. Dugundji, "Topology," Allyn and Bacon, INC Boston, 1966.

[Du] S.M. Duios-Ruis, *Universal functions of the structure of the space of entire functions*, Soviet Math. Dokl **30**, no.3 (1984), 713-716.

[En] P. Enflo, *On the invariant subspace problem for Banach Spaces*, Acta Math. **158** (1987).

[FGK] V.P. Fonf, V.I.Gurarii and M.J. Kadec, On certain subspace of C, Preprint.

[Fa] P. Fatou, *Sur l'itération des fonctions transcendantes entières*, Acta Math **47** (1926), 337-360.

[Fo] O. Forster, "Lectures on Riemann surfaces," Springer-Verlag, 1981.

[Fr1] H. Freudenthal, *Uber die Enden topologischer Raüme und Gruppen*, Math. Zeitsch **33** (1931), 692-713.

[Fr2] H. Freudenthal, *Kompactisierungen und Bikompaktisierungen*, Indag. Math. **13** (1951), 184-192.

[Ga] D. Gaier, "Lectures on Complex Appoximation," Birkhäuser Boston, 1987.

[GS] R. M. Gethner and J. H. Shapiro, *Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** no.2 (1987), 281-288.

[GoS] G. Godefroy and J.H. Shapiro, *Operators with dense invariant cyclic vector manifolds*, J. Functional Analysis **98** (1991), 229-269.

[Gr1] K. G. Große-Erdmann, *Holomorphe Monster und universelle Funktionen*, Mitt. Math. Sem. Giessen **176** (1987), 1-84.

[Gr2] K.G. Große-Erdmann, *On the universal functions of G.R. MacLane*, Complex Variables **15** (1990), 193-196.

[Gu] V. I. Gurarii, *On subspaces of C consisting of non-differentiable functions (in Russian)*, C.R. Acad. Bulgare Sci **74** no.5 (1991), 13-16.

[He1] M. Heins, *On the iteration of functions which are analytic and single-valued in a given multiply-connected region*, Amer. Jour. Math. **63** (1941), 461-480.

[He2] M. Heins, *On the number of 1-1 directly conformal maps which a multiply-connected plane region of finite connectivity* p *(> 2) admits onto itself*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 454-457.

[HW] H.M. Hilden and L.J. Wallen,, *Some cyclic and non-cyclic vectors of certain operators*, Indiana Univ. Math. J (1974), 557-565.

[Ju] G. Julia, "Leçons sur la représentation conforme des aires multiplement connexes," Gauthier-Villars Paris. 1939.

[Ki] C. Kitai, "Invariant Closed Sets for Linear Operators," Thesis, Univ. Toronto, 1982.

[Lu1] W. Luh, *On universal funtions*, Colloq. Math. Soc. János Bolyai **19** (1976), 503-511.

[Lu2] W. Luh, *Approximation by antiderivatives*, C. Approx. **2** (1986), 179-187.

[Lu3] W. Luh, *Holomorphic Monsters*, J. Approx. Theory **53** (1988), 128-144.

[Ma] G. R. MacLane, *Sequences of derivatives and normal families*, J. Analyse Math. **2** (1952), 72-87.

[Mar] A. Markushevich, "Teoría de las funciones analíticas," Editorial Mir, vol II, 1978.

[MRR] A. Marden, I Richards and B. Rodin, *Analitic Self-mappings of Riemann Surfaces*, J. d'Analyse Math. **18** (1967), 197-225.

[Mo] E. Moise, "Geometric topology in dimensions 2 and 3," Springer-Verlag, 1977.

[MR] C. Mueller and W. Rudin, *Proper holomorphic self-maps of plane regions*, Complex Variables **17** (1992), 113-121.

[Na] R. Narasimhan, "Complex Analysis in One Variable," Birkhäuser, 1985.

[Re1] C. Read, *A solution to the invariant subspace problem*, Bull. London Math. Soc. **16** (1984), 337-401.

[Re2] C. Read, *A solution to the invariant subspace problem on l^1*, Bull London Math. Soc **17** (1985), 305-317.

[Ri] I. Richard, *On the classification of non-compact surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **106** (1963), 259-269.

[Ro] L. Rodríguez-Piazza, *Every separable Banach space is isometric to a space of continuous nowhere differentiable functions*. Proc. Amer. Math. Soc *to appear*.

[Rol] S. Rolewicz, *On orbits of elements*, Studia Math 32 (1969), 17-22.

[Ru] W. Rudin, "Real and Complex Analysis," Tata McGraw-Hill, Faridabad, India 1974.

[SN] L. Sario and M. Nakai, "Classification Theory of Riemann Surfaces," Springer Verlag, 1970.

[Sh] J. H. Shapiro, "Composition Operators," Springer-Verlag, 1993.

[SW] W. P. Seidel and J. L. Walsh, *On Approximation by Euclidean and non-Euclidean Translates of an Analytic Function*, Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), 916-920.

[Sp] G. Springer, "Introduction to Riemann Surfaces," Addison-Wesley, 1957.

[St] N. Steinmetz, "Rational Iteration," Walter de Gruyter, 1993.

[Sti] J. Stillwell, "Classical Topology and Combinatorial Group Theory," Springer-Verlag, 1980.

[ZA] P. Zappa, *On universal holomorphic functions*, Bollettino U. M. I. (7) **2-A** (1989), 345-352.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Alfonso Montes Rodríguez titulada Funciones Universales para operadores de composición superficies de Riemann

acordó otorgarle la calificación de apto cum laude por unanimidad

Sevilla, 19 de diciembre 1994

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

El Presidente El Secretario El Doctorado,