UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Facultad de Matemáticas
Departamento de Análisis Matemático

CICLIDAD DE COEFICIENTES MULTIPLICADORES Y SUBESPACIOS DE FUNCIONES UNIVERSALES

Memoria presentada por
José Antonio Prado Bassas
para optar al grado de
Doctor por la Universidad de Sevilla.

V$^{\underline{o}}$ B$^{\underline{o}}$
de la Directora

Fdo. M$^{\underline{a}}$ del Carmen Calderón Moreno
Profesora Titular del Dpto. Análisis Matemático
de la Universidad de Sevilla.

Sevilla, Abril de 2004

AGRADECIMIENTOS

A mi directora María del Carmen Calderón, por reincidente, y porque sin sus consejos, sin su paciencia, sin su ayuda y, en definitiva, sin su apoyo, esta Tesis no habría sido una realidad. Espero que todo este esfuerzo te haya merecido la pena.

Al profesor Luis Bernal, por todos los valiosos comentarios que nos hizo y por todo el tiempo que perdió por mi culpa. Confío en ser un digno "nieto".

Al Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Sevilla, por el apoyo tanto personal como mediático que me ha brindado.

A mis compañeros de despacho de estos años, en especial a José Manuel, Beatriz y Elías, porque siempre tenían unas palabras de ánimo con las que hacerme pasar un buen rato.

A mi familia, porque ha sido y es el pilar desde el que he logrado llegar hasta aquí y porque ha aguantado estoicamente huracanes y tormentas. Al final seguí vuestros pasos y ha dado sus frutos, pero amenazo con seguir.

A Aroa, porque nunca dudó de mi, en todo momento confió en mis posibilidades y siempre está cuando la necesito. Todos los agobios y desilusiones que aplacaste y todas las alegrías que celebraste ahora tienen su recompensa, aunque nunca te lo podré pagar.

Y por último, gracias a Dios, Él sigue sabiendo el porqué.

Índice general

Introducción

En el Análisis de Variable Compleja uno de los campos que más se está desarrollando en los últimos años es el fenómeno dinámico de la universalidad. Dentro de él se enmarcan el estudio del comportamiento de una función holomorfa en G en la frontera de dicho G por sí misma o bajo la acción de algún operador T, así como el fenómeno de la hiperciclicidad de operadores. Este es el entorno en el que se engloba la presente Memoria.

Desde 1929 se conoce la existencia de funciones enteras con un comportamiento "salvaje" en el infinito, único punto de la frontera. C. D. Birkhoff [28] demostró la existencia de una función entera $g(z)$ cuyo conjunto de trasladadas $\{g(z+a)\ :\ a \in \mathbb{C}\}$ es denso en $H(\mathbb{C})$, en otras palabras, la familia de los operadores de traslación $\{\tau_a :\ a \in \mathbb{C}\}$, donde $\tau_a(f(z)) = f(z+a)$, es universal en $H(\mathbb{C})$. Bastantes años después, en 1975, S. M. Voronin [93] probó un resultado similar para $g = \zeta$, la función zeta de Riemann, siendo éste uno de los pocos casos en que se da, de forma explícita, una función universal. Si en el resultado concreto de Birkhoff (ver [28]) consideramos el compacto $\{0\}$ y las funciones constantes obtenemos una función entera f tal que $\{f(n):\ n\in\mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{C}$. Un resultado parecido se deduce del Teorema de interpolación de Weierstrass. En este sentido, en 1992 L. Bernal [6] introduce el concepto de operador "omnipresente" T sobre $H(G)$, demostrando que es equivalente a la existencia de un conjunto residual de funciones f tales que Tf posee cluster set maximal en todo punto de la frontera de G. En particular, prueba que todo operador derivada y antiderivada es omnipresente. Posteriormente Bernal y M.C. Calderón extienden estos resultados a operadores diferenciales y antidiferenciales de orden infinito y en general a cualquier operador continuo T, relacionándolos además con el ya clásico concepto de monstruo holomorfo –funciones holomorfas tales que sus derivadas y antiderivadas de cualquier orden son universales (en el sentido Birkhoff)– (ver [15], [17], [18] y [19]).

Por otra parte, R. Tenthoff en 2000, demuestra la existencia de un conjunto denso de funciones $f\in H(\mathbb{D})$ con propiedades universales de aproximación a través de radios. En particular, es posible construir un conjunto denso de funciones $f\in H(\mathbb{D})$ con cluster set radial maximal en cualquier punto de la frontera de $\mathbb{D}$. Asimismo, lleva este estudio a dominios más generales como son los dominios de Jordan.

En 2002 Bernal y Calderón [16] estudian el comportamiento caótico de operadores sobre $H(G)$ a través de ciertos conjuntos planos $M(T,A)$. Definen el concepto de operador “con imágenes densas por doquier” como aquellos operadores para los cuales los conjuntos $M(T, A)$, con A un subconjunto no relativamente compacto de G, son residuales, es decir, “grandes” en sentido topológico. Dichos operadores engloban a los omnipresentes. Asimismo, estudian este concepto en relación con diversos operadores clásicos como los diferenciales de orden infinito, los de composición y los de multiplicación, entre otros.

Volviendo atrás, el resultado de Birkhoff nos garantizaba la universalidad de la familia de los operadores de traslación en el espacio de las funciones enteras y en particular la hiperciclicidad de uno de estos operadores τ_a. En este sentido encontramos un segundo ejemplo de operador hipercíclico en el operador diferencial $Df = f'$, considerado en el espacio $H(\mathbb{C})$ de las funciones enteras, y obtenido por MacLane [68] en 1952. Este resultado fue reobtenido por Blair y Rubel [29] y Duyos-Ruiz [46], pero esta vez estableciendo la existencia de un conjunto residual de funciones enteras hipercíclicas para dicho operador D. Siguiendo esta línea, diversos autores construyeron posteriormente funciones D-hipercíclicas con propiedades adicionales como, por ejemplo Grosse-Erdmann [55], Shkarin [91], Herzog [63] o Bernal [10]. Otros autores han estudiado la hiperciclicidad de operadores relacionados con D, como por ejemplo Godefroy y Shapiro [53] en 1991 o en 1999 Bernal [11].

En 1969 S. Rolewicz [82] aborda el problema de la existencia de operadores hipercíclicos sobre espacios de Banach de sucesiones, ℓ_p $(1 \leq p \leq +\infty)$ y c_0, y demuestra que ciertos múltiplos del operador desplazamiento son hipercíclicos sobre estos espacios. Diversos autores han continuado el estudio de la hiperciclicidad de operadores del tipo desplazamiento sobre otro tipo de espacios. R. M. Gethner y J. H. Shapiro [52] estudian la hiperciclicidad del operador desplazamiento sobre espacios de Hardy modificados mientras que H. Salas [87] hace lo propio pero con operadores de desplazamiento bilaterales y con pesos. En 1994 V. Mathew [70] se centra en operadores de desplazamiento con pesos en el espacio de las funciones enteras.

El resultado de Gethner y Shapiro se basa en parte en una condición suficiente para la hiperciclicidad de un operador, obtenida también, de manera independiente, por C. Kitai [67]. Este Criterio de Hiperciclicidad ha sido extensamente estudiado y generalizado posteriormente por estos y otros autores (ver por ejemplo [54], [53], [2], [12], [26]).

En la presente memoria vamos a generalizar y mejorar algunos de los resultados anteriores. En el Capítulo 1 exponemos dichos resultados y establecemos las notaciones y herramientas a utilizar en el desarrollo de la misma.

En el Capítulo 2 realizamos un análisis exhaustivo de la hiperciclicidad, superciclicidad y ciclicidad de operadores sobre espacios de funciones analíticas en los que los coeficientes de Taylor no se desplacen: los coeficientes multiplicadores. Veremos que diversos operadores como los operadores producto de

Hadamard o los Euler diferenciales, pueden verse como coeficientes multiplicadores. Asimismo, caracterizaremos las sucesiones de estos operadores que son hipercíclicas, supercíclicas y/o cíclicas, y veremos que ninguno de estos operadores es supercíclico. Por contra, mostraremos la existencia de coeficientes multiplicadores cíclicos, caracterizándolos y estudiando el "tamaño" algebraico y topológico del conjunto de funciones cíclicas. Además, demostraremos que ninguna sucesión de coeficientes multiplicadores puede verificar el Criterio de Hiperciclicidad.

En el Capítulo 3 introducimos el concepto de operador con imágenes densas y extensas por doquier (o LDI-operador) como generalización del operador con imágenes densas por doquier. Proporcionamos condiciones suficientes para que un operador sea LDI y demostramos que en cierto sentido son mínimas. Mediante la aplicación de las condiciones suficientes obtenemos que diversos operadores clásicos, como los operadores diferenciales de orden infinito, de composición o de multiplicación, son LDI y vemos cómo generar operadores LDI a partir de otros mediante composición, suma y producto de operadores.

Por último, en el Capítulo 4 e inspirados en los resultados de Tenthoff, abordamos el problema de la existencia de funciones holomorfas con cluster sets maximales. En particular, estudiamos la existencia de subespacios vectoriales densos de funciones $f \in H(G)$ con cluster sets maximales a lo largo de cualquier curva que se aproxime a ∂G, aunque no a todo punto de ∂G, es decir, con conjunto de oscilación no total. Asimismo, daremos condiciones suficientes para que dichas funciones caóticas existan en espacios de Hardy. Apuntemos que en este caso, logramos eliminar la condición sobre el conjunto de oscilación, aunque para ello debemos prefijar una familia numerable de curvas sobre las que tomar el cluster set. Por otra parte veremos qué ocurre si reemplazamos curvas por sucesiones que tiendan a ∂G. Adelantamos que, aunque demostramos que un resultado similar al de curvas no se puede conseguir, sí obtenemos resultados positivos sobre funciones holomorfas con cluster sets maximales a lo largo de sucesiones prefijadas.

Digamos para finalizar que todos los resultados contenidos en los capítulos 2, 3 y 4 son originales, estando los recogidos en el Capítulo 4 publicados en [20]. Los recogidos en los Capítulos 2 y 3 dan lugar a los trabajos [38] y [21], respectivamente, los cuales se encuentran actualmente en proceso de revisión.

Capítulo 1

Preliminares

En la primera sección de este Capítulo vamos a introducir las notaciones que utilizaremos en la Memoria así como algunos resultados clásicos de Análisis Funcional que nos serán de gran utilidad en capítulos posteriores. Todas las definiciones y demostraciones pueden consultarse en [83], [84] y [34], entre otros. En las secciones posteriores incluiremos diversos resultados y observaciones sobre los conceptos de universalidad e hiperciclicidad que nos permitirán un primer acercamiento a estos temas, con ejemplos concretos y relevantes.

1.1. Notaciones básicas

A lo largo de esta Memoria $\mathbb{N}$ denotará el conjunto de los enteros positivos, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}$ será el conjunto de los números reales, $\mathbb{C}$ el plano complejo y $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ el plano complejo extendido o compactificación de $\mathbb{C}$ por un punto. $\mathbb{K}$ denotará indistintamente el cuerpo de los escalares reales o complejos. Si A es un subconjunto de $\mathbb{C}$, $\overline{A}$ representará su cierre, A° su interior topológico, A' el conjunto de sus puntos de acumulación y ∂A su frontera en $\mathbb{C}_\infty$. En general, G representará un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, mientras que $\mathbb{D}$ representará el disco unidad abierto de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ su frontera o toro unidad.

La familia de todos los subconjuntos compactos K de un abierto G del plano complejo tales que su complemento $G \setminus K$ tiene componentes conexas no relativamente compactas será $\mathcal{K}(G)$, mientras que $\mathcal{K}_1(G)$ denotará la familia de todos los compactos $K \subset G$ tales que $\mathbb{C} \setminus K$ es conexo. Por tanto, $\mathcal{K}_1(G) \subset \mathcal{K}(G)$. Si g es una función compleja definida sobre un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, escribiremos $\|g\|_A := \sup_{z\in A} |g(z)|$.

Una sucesión $(K_n)_n$ de subconjuntos compactos de G se dice que es *exhaustiva* si $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = G$ y $K_n \subset K_{n+1}^\circ$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Un subconjunto abierto G de $\mathbb{C}$ se dice que es un *dominio* si es no vacío y conexo. Si además se cumple que $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ es conexo en $\mathbb{C}_\infty$, entonces el dominio se dirá *simplemente conexo*.

Por $H(G)$ entenderemos el espacio vectorial de las funciones holomorfas en el dominio $G \subset \mathbb{C}$, dotado de la topología compacta-abierta, es decir, de la convergencia uniforme en compactos.

Si K es un compacto de $\mathbb{C}$, notaremos por $\mathcal{A}(K)$ el espacio vectorial de las funciones holomorfas en K° y continuas en K. Este espacio se convierte en espacio de Banach si lo dotamos de la topología generada por la norma del supremo, de modo que la convergencia en tal espacio es la convergencia uniforme en K.

Un espacio vectorial topológico X se dice que es un *F-espacio* si es metrizable y completo. Si además es localmente convexo, entonces se dice que X es un *espacio de Fréchet*. $H(G)$ dotado de la topología de la convergencia uniforme en compactos es un espacio de Fréchet.

Si X es un espacio topológico y A es un subconjunto de X, denotaremos por $\operatorname{span}(A)$ el subespacio vectorial generado por A. Además:

- Se dice que el conjunto A es *raro* o *diseminado* si $(\overline{A})^\circ = \varnothing$.
- Se dice que A es de *primera categoría* si es unión numerable de conjuntos raros, es decir, si existe una sucesión de conjuntos $(F_n)_n$ cerrados de interior vacío de manera que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.
- Se dice que A es de *segunda categoría* si no es de primera categoría.
- Se dice que X es un *espacio de Baire* si todo abierto no vacío de X es de segunda categoría, o equivalentemente, si la intersección de una familia numerable de abiertos densos es de nuevo densa.
- Si X es un espacio de Baire, se dice que A es *residual* si su complemento es de primera categoría.

Teorema 1.1.1 (Teorema de Baire). *Sea X un espacio topológico completo y metrizable. Entonces X es un espacio de Baire.*

Como consecuencia, todo F-espacio y, en particular, cada espacio $H(G)$, es un espacio de Baire.

Por otra parte, recordemos que un conjunto A de un espacio topológico X se dice G_δ si es intersección numerable de abiertos. En particular, en un espacio de Baire un conjunto es residual si y sólo si contiene un G_δ-denso (ver [78]).

1.2. Operadores diferenciales y antidiferenciales de orden infinito

Una función entera $\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k z^k$ se dice que es *de tipo exponencial* cuando existen constantes positivas A y B tales que

$$|\Phi(z)| \leq Ae^{B|z|} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Usando las desigualdades de Cauchy, se puede demostrar que esto es equivalente a que

$$\limsup_{k\to\infty} (k!|\phi_k|)^{1/k} < +\infty.$$

Una función entera $\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k z^k$ se dice que es *de tipo subexponencial* cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe una constante positiva $A = A(\varepsilon)$ tal que

$$|\Phi(z)| \leq A e^{\varepsilon|z|} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

De nuevo las desigualdades de Cauchy nos permiten deducir que esto es equivalente a

$$\limsup_{k\to\infty} (k!|\phi_k|)^{1/k} = 0.$$

Denotaremos por D el operador derivada, es decir, si $f \in H(G)$, entonces $Df(z) = f'(z)$. A cada función entera $\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k z^k$ se le puede asociar formalmente un operador $\Phi(D) := \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k D^k$, donde $D^0 = I =$ el operador identidad. A este operador se le llama *operador diferencial de orden infinito.*

Si G es un dominio de $\mathbb{C}$ y Φ es una función entera de tipo subexponencial, entonces el operador diferencial de orden infinito $\Phi(D)$ está bien definido y es continuo en $H(G)$. Si $G = \mathbb{C}$, basta exigir que Φ sea de tipo exponencial (ver por ejemplo [11, Theorem 5]).

Demos a continuación un operador análogo para las antiderivadas. Observemos que en este caso tenemos que ser más precisos porque una función puede tener más de una antiderivada.

Sea G un dominio de $\mathbb{C}$ simplemente conexo, $a \in G$ y $k \in \mathbb{N}$. El operador antiderivada de orden k (respecto de a) $D_a^{-k} : H(G) \to H(G)$ se define para cada $f \in H(G)$ como $D_a^{-k} f =$ la única antiderivada g de orden k de f tal que

$$g^{(j)}(a) = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, k-1).$$

Al igual que D^0 denotaremos por D^{-0} el operador identidad I.

En 1999, L. Bernal [11] introduce los operadores antidiferenciales de orden infinito. Sean $G \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo y un punto $a \in G$. Sea $\Psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ una serie formal de potencias tal que

$$\limsup_{k \to \infty} \left(\frac{|c_k|}{k!} \right)^{1/p} \leq \frac{1}{\Delta_a(G)},$$

donde $\Delta_a(G) = \sup_{z \in G} \inf\{r > 0 : a$ está en la componente conexa de $B(z, r) \cap G$ que contiene a $z\}$. Entonces la serie

$$\Psi(D_a^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k D_a^{-k}$$

define un operador sobre $H(G)$, al que llamaremos *operador antidiferencial de orden infinito*. Tanto el operador antiderivada como los operadores antidiferenciales de orden infinito pueden introducirse equivalentemente por medio de una expresión integral. De hecho ambos son casos particulares de una clase más amplia de operadores, los operadores de Volterra de segunda especie

$$V_{S,\varphi} : f \in H(G) \mapsto V_{S,\varphi} f(z) = S f(z) + \int_a^z \varphi(z, t) f(t) dt \in H(G),$$

donde $G \subset \mathbb{C}$ es un dominio simplemente conexo, $S : H(G) \to H(G)$ es un operador (en general no integral), $\varphi : G \times G \to G$ es una función analítica y la integral está tomada a lo largo de cualquier curva rectificable contenida en G que una a con z.

1.3. Espacios de Banach de funciones analíticas

En la teoría de operadores suelen aparecer operadores entre espacios de Banach de funciones analíticas. Entre ellos destacan los espacios L^p, los espacios de Hardy [44] y los espacios de Bergman [45], los cuales aparecerán en los capítulos posteriores. Recordamos sus definiciones en el marco en que trabajaremos.

1.3.1. Espacios L^p

Definición 1.3.1. *Sea $p \in [1, +\infty)$. Se define el espacio $L^p(\mathbb{T})$ como*

$$L^p(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} : \ f \ \textit{es medible y} \ \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p dt < \infty \right\}.$$

En particular, tenemos que $\mathcal{A}(\overline{\mathbb{D}}) \subset L^p(\mathbb{T})$ para todo $p \in [1, +\infty)$. Si denotamos por

$$\|f\|_p := \left(\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p \frac{dt}{2\pi} \right)^{1/p},$$

entonces $L^p(\mathbb{T})$ dotado de dicha norma se convierte en espacio de Banach. Más aún, para $p = 2$, $L^2(\mathbb{T})$ se convierte en un espacio de Hilbert separable y de dimensión infinita, para el cual la familia $\{z^n : \ n \in \mathbb{N}_0\}$ es una base ortonormal y cuyo producto escalar asociado viene dado por

$$\langle f, g\rangle := \left(\int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})}\frac{dt}{2\pi}\right)^{1/2}.$$

En un espacio de Banach X, una sucesión $(x_n)_n \subset X$ se dice que es una *base de Schauder de* X si para cada elemento $x \in X$, existe una única sucesión de escalares $(a_n)_n \subset \mathbb{C}$ tal que $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Una sucesión $(x_n)_n \subset X$ se dice *básica* si es base de Schauder de la clausura del espacio vectorial que genera. En particular, en el caso de un espacio de Hilbert separable, cualquier base ortonormal es una sucesión básica y, por tanto, $(z^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión básica de $L^2(\mathbb{T})$.

Por otra parte, el dual de $L^2(\mathbb{T})$ vuelve a ser $L^2(\mathbb{T})$. Sea $(z_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$ la base dual de $(z^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, es decir, para cada $n \geq 0$, z_n^* es el funcional tal que $\langle z_n^*, z^m\rangle = 0$ si $n \neq m$ y $\langle z_n^*, z^n\rangle = 1$. Se tiene que $\|z_n^*\|_2 = 1$.

En [41, Chapter V, Theorem 9] se proporciona una técnica –llamada "de perturbación de la base"– para construir una sucesión básica en un espacio de Banach X a partir de otra. En particular, si consideramos en $L^2(\mathbb{T})$ la sucesión básica inicial $(z^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ y el hecho de que $\|z_n^*\|_2 = 1$, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.3.2. *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de funciones de $L^2(\mathbb{T})$ tal que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n(z) - z^n\|_2 < 1.$$

Entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *es una sucesión básica.*

1.3.2. Espacios de Hardy

Definición 1.3.3. *Sea* $p \in (0, +\infty)$*. Se define el espacio de Hardy de orden* p *en el disco unidad* $\mathbb{D}$ *como:*

$$H^p(\mathbb{D}) = H^p := \left\{ f \in H(G) : \sup_{0<r<1} \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \right) < \infty \right\}.$$

Si denotamos por

$$\|f\|_p := \sup_{0<r<1} \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/p},$$

entonces para $1 \leq p < +\infty$ el espacio H^p se convierte en un espacio de Banach si lo dotamos de la norma $\| \cdot \|_p$. Más aún, para $p = 2$, H^2 es un espacio de Hilbert con producto escalar

$$\langle f, g \rangle := \sup_{0<r<1} \left(\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \overline{g(re^{i\theta})} \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/2}.$$

1.3.3. Espacios de Bergman

Definición 1.3.4. *Sea* $p \in (0, +\infty)$*. Se define el espacio de Bergman de orden* p *en el disco unidad* $\mathbb{D}$ *como*

$$B^p(\mathbb{D}) = B^p := \left\{ f \in H(G) : \int\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p d\sigma(z) < \infty \right\},$$

donde $d\sigma(z)$ *denota la medida de área normalizada, es decir,* $d\sigma(z) = \frac{1}{\pi} dxdy$*.*

Si denotamos por

$$\|f\|_{B^p} := \left(\int \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p d\sigma(z) \right)^{1/p},$$

entonces para $1 \leq p < +\infty$ el espacio B^p se convierte en espacio de Banach si lo dotamos de la norma $\| \cdot \|_{B^p}$. Es más, para $p = 2$, B^2 es un espacio de Hilbert con producto escalar

$$\langle f, g \rangle := \left(\int \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)} d\sigma(z) \right)^{1/2}.$$

Por otra parte, dada la expresión integral de la norma de B^p es sencillo comprobar que $H^p \subset B^p$. De hecho, también se tiene que $H^p \subset B^{2p}$ (ver [45, Chapter 3]).

1.4. Algunos teoremas de aproximación

Muchos de los resultados estudiados en esta Memoria están estrechamente relacionados con problemas de aproximación en variable compleja. Por ello vamos a recordar a continuación algunos teoremas fundamentales en este campo, los cuales nos resultarán imprescindibles para el desarrollo de los resultados posteriores. De entre todos, quizás los más conocidos y más utilizados sean el teorema de Runge y el teorema de Mergelyan (ver [51] y [84]).

El teorema de Runge fue publicado en 1885 (ver [85]), mismo año en que Weierstrass publicó su teorema de aproximación uniforme por polinomios en intervalos, y supuso el comienzo de la teoría de aproximación en variable compleja. A continuación enunciamos una de las versiones más completas de este teorema (el apartado (a) se corresponde con la versión original), en la que se incluyen algunos casos particulares de especial interés por sí mismos.

Teorema 1.4.1 (Teorema de Runge).

(a) *Sean K un subconjunto compacto de un abierto G de $\mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$, $f \in H(G)$ y A un conjunto formado por un punto de cada componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$. Entonces existe una función racional R tal que $\{$polos de $R\} \subset A$ y $|f(z) - R(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in K$.*

(b) *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f \in H(G)$ y A un subconjunto formado por un punto de cada componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus G$. Entonces existe una sucesión de funciones racionales $(R_n)_n$ con polos sólo en A, tal que $R_n \to f$ $(n \to \infty)$ en $H(G)$.*

(c) *Si $G \subset \mathbb{C}$ es un dominio simplemente conexo, entonces el conjunto de los polinomios es denso en $H(G)$.*

El teorema de Mergelyan [71], publicado en 1951, supuso la conclusión de una serie de trabajos sobre aproximación uniforme mediante polinomios en conjuntos compactos.

Teorema 1.4.2 (Teorema de Mergelyan). *Sean $K \subset \mathbb{C}$ un subconjunto* *compacto tal que* $\mathbb{C} \setminus K$ *es conexo,* $f \in \mathcal{A}(K)$ *y* $\varepsilon > 0$*. Entonces existe un polinomio* $P(z)$ *tal que* $|P(z) - f(z)| < \varepsilon$ *para todo* $z \in K$*.*

Tanto el teorema de Runge como el de Mergelyan se refieren a una aproximación de tipo uniforme, es decir, mediante una constante arbitrariamente pequeña. Sin embargo, en algún momento, en particular en el Capítulo 4, nos interesará poder controlar el grado de aproximación, no uniformemente, sino mediante una función de error. Para cualquier consulta sobre los resultados y definiciones que enunciaremos a continuación y sobre otros resultados de aproximación con función de error, referimos a [51, Chapter IV §3].

Una función $\varepsilon(z)$ definida sobre un subconjunto (relativamente) cerrado F de un dominio arbitrario $G \subset \mathbb{C}$ se dice que es una *función de error* si es positiva y continua en F. Decimos que una función f continua en F y holomorfa en F° admite una *aproximación tangencial* en F (por funciones holomorfas) si para toda función de error $\varepsilon(z)$ existe una función $g \in H(G)$ tal que

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon(z) \qquad (z \in F).$$

Definición 1.4.3. *Se dice que un conjunto cerrado* F *en un dominio* $G \subset \mathbb{C}$ *es* de Carleman *en* G *si cualquier función* f *continua en* F *y holomorfa en* F° *admite aproximación tangencial en* F*.*

Dado un dominio $G \subset \mathbb{C}$ vamos a denotar por G_∞ la compactificación por un punto (o de Alexandroff) de G, mientras que ω denotará su punto del infinito. A. A. Nersesjan [76] enunció y demostró en 1971 el siguiente teorema de aproximación con función de error.

Teorema 1.4.4 (Teorema de Nersesjan). *Sean G un dominio de $\mathbb{C}$ y F un subconjunto cerrado y propio de G. Entonces F es de Carleman en G si y sólo si F satisface las siguientes condiciones:*

(a) *Para cada compacto $K \subset G$ existe un entorno V de ω en G_∞ tal que ninguna componente de F° corta a K y a V a la vez.*

(b) *$G_\infty \setminus F$ es conexo.*

(c) *$G_\infty \setminus F$ es localmente conexo en ω.*

En esta Memoria también vamos a estar interesados en resultados de aproximación dentro de los espacios de Hardy; en concreto, necesitaremos el teorema de Beurling y, sobre todo, una de sus consecuencias. Recordemos primero algunas ideas sobre la estructura de las funciones de H^p. Se sabe [44, Theorem 2.8] que toda función $f \in H^p$ posee una factorización canónica $f(z) = f_0(z)F(z)$, donde f_0 es una función *interior*, es decir, $f_0 \in H(\mathbb{D})$, $|f_0(z)| \leq 1$ y $|f_0(t)| = 1$ para casi todo $t \in \mathbb{T}$, y $F(z)$ es una función *exterior*, es decir, de la forma

$$F(z) = e^{i\alpha} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log\psi(t)dt\right\},$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\psi(t)$ es una función no negativa tal que $\psi \in L^p(\mathbb{T})$ y $\log\psi \in L^1(\mathbb{T})$. Además, si f_0 y g_0 son dos funciones interiores, se dice que f_0 es *divisor de* g_0 si g_0/f_0 es de nuevo una función interior.

Dada $f \in H^p$, denotaremos por $\mathcal{P}[f]$ la clausura del subespacio generado por las funciones $\{z^n f(z) : \ n \in \mathbb{N}_0\}$; en otras palabras, todas las funciones de H^p que pueden aproximarse por un polinomio multiplicado por f. En estas condiciones el teorema de Beurling [44, pp. 113-114] afirma lo siguiente.

Teorema 1.4.5 (Teorema de Beurling). *Sean $f, g \in H^p$ $(1 \leq p < +\infty)$ dos funciones no idénticamente nulas, con funciones interiores f_0 y g_0 respectivamente. Entonces $g \in \mathcal{P}[f]$ si y sólo si f_0 es divisor de g_0.*

En particular si tomamos un punto cualquiera $\alpha \notin \mathbb{D}$ y la función $f(z) = z - \alpha$, obtenemos la siguiente consecuencia, que nos será de gran utilidad.

Corolario 1.4.6. *Sea $p \in [1, +\infty)$ y sea $\alpha \notin \mathbb{D}$. Entonces el conjunto Z_α de los polinomios que se anulan en α es denso en H^p.*

Como consecuencia, también el conjunto de todos los polinomios es denso en H^p, o lo que es lo mismo, con la notación anterior, $\mathcal{P}[1] = H^p$. De hecho, H^p es la clausura en $L^p(\mathbb{T})$ del conjunto de los polinomios.

1.5. Nociones de Universalidad

A lo largo de las últimas décadas, uno de los temas que más ha despertado el interés de los investigadores dentro del análisis complejo ha sido el estudio del comportamiento arbitrario o salvaje de las funciones holomorfas o de los operadores y, en particular, la universalidad, hiperciclicidad y conceptos relacionados. En la presente sección consideraremos diversos aspectos relativos a estos conceptos.

1.5.1. Definiciones y propiedades

En primer lugar, vamos a establecer la definición de universalidad, la cual nos permitirá desarrollar toda la sección.

Definición 1.5.1. *Sean X e Y dos espacios topológicos y $\mathcal{F}$ una familia de aplicaciones continuas $T_i : X \to Y$ $(i \in I)$. Se dice que un elemento $x \in X$ es* universal *para $\mathcal{F}$ si su órbita $\{T_i x : \ i \in I\}$ es densa en Y.*

$\mathcal{U}(\mathcal{F})$ denotará el conjunto de elementos universales para $\mathcal{F}$.

Esta definición unifica los distintos ejemplos de universalidad existentes en la literatura (ver [52] y [56]). De entre éstos, cabe destacar los conceptos de hiperciclicidad, superciclicidad y ciclicidad, que tienen lugar en un ámbito lineal.

Definición 1.5.2. *Sean X e Y dos espacios vectoriales topológicos y sea $(T_n : X \to Y)_n$ una sucesión de aplicaciones lineales y continuas.*

(1) *Se dice que un vector $x \in X$ es* hipercíclico *respecto de la sucesión $(T_n)_n$ si su órbita $\{T_n x : \ n \in \mathbb{N}_0\}$ es densa en Y. Si existe un tal vector, se dice*

que (T_n) *es una* sucesión hipercíclica *y denotaremos por* $HC((T_n)_n)$ *el subconjunto de los vectores de* X *que son hipercíclicos respecto de* $(T_n)_n$.

(2) *Se dice que un vector* $x \in X$ *es* supercíclico *respecto de la sucesión* $(T_n)_n$ *si su órbita proyectiva* $\{\lambda T_n x : \lambda \in \mathbb{K},\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *es densa en* Y. *Si existe un tal vector, se dice que* (T_n) *es una* sucesión supercíclica *y denotaremos por* $SC((T_n)_n)$ *el subconjunto de los vectores supercíclicos para* $(T_n)_n$.

(3) *Se dice que un vector* $x \in X$ *es* cíclico *respecto de la sucesión* $(T_n)_n$ *si el subespacio vectorial* $\operatorname{span}(\{T_n x :\ n \in \mathbb{N}_0\})$ *generado por su órbita es denso en* Y. *Si existe un tal vector, se dice que* (T_n) *es una* sucesión cíclica *y denotaremos por* $C((T_n)_n)$ *el subconjunto de los vectores cíclicos para* $(T_n)_n$.

En el caso de la hiperciclicidad, si el conjunto $HC((T_n)_n)$ es además denso se dice que la sucesión de operadores es *densamente hipercíclica*. Si en la Definición 1.5.2 elegimos en particular $X = Y$ y $(T_n)_n$ es la sucesión de iteradas de un operador (:= autoaplicación lineal y continua) $T : X \to X$, es decir, $T_0 = T^0 = I =$ el operador identidad, $T_1 = T$, $T_2 = T^2 = T \circ T$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $T_n = T^n = T \circ \overset{(n)}{\cdots} \circ T$, entonces diremos que el operador T es hipercíclico, supercíclico o cíclico si lo es, respectivamente, la sucesión de sus iteradas; un vector de X se dirá hipercíclico, supercíclico o cíclico respecto de T si lo es respecto de la sucesión de sus iteradas; y los conjuntos de estos elementos los notaremos por $HC(T)$, $SC(T)$ y $C(T)$, respectivamente.

Observemos que para que una sucesión de aplicaciones de X en Y sea hipercíclica, supercíclica o cíclica, es necesario que el espacio de llegada Y sea separable. Además, el concepto de hiperciclicidad es más fuerte que el de superciclicidad y éste a su vez más fuerte que el de ciclicidad. Por otra parte, si $T : X \to X$ es hipercíclico entonces el conjunto $HC(T)$ es denso, luego cualquier operador hipercíclico es de hecho densamente hipercíclico, en el sentido de que lo es la sucesión de sus iteradas. Comentemos que si X es un F-espacio entonces el conjunto $HC(T)$ es además residual.

Aunque el concepto de universalidad es más amplio que el de hiperciclicidad, a menudo se confunden en la literatura pues no existe un acuerdo unánime para nombrarlos (ver [56]). En esta memoria vamos a mantener la diferencia tal y como se plantea en las definiciones 1.5.1 y 1.5.2.

El estudio de la hiperciclicidad y la ciclicidad de un operador está estrechamente relacionado con el problema del subconjunto y del subespacio invariante, respectivamente. Recordemos que un subconjunto (subespacio, resp.) $A \subset X$ se dice que es invariante bajo una aplicación $T : X \to X$ si $TA \subset A$. Es evidente que un elemento $x \in X$ es hipercíclico (cíclico, resp.) para T si y sólo si no existe ningún subconjunto (subespacio, resp.) propio de X cerrado e invariante bajo T que contenga a x.

Ejemplos de operadores hipercíclicos y universales abundan en la literatura y veremos algunos de ellos en la sección 1.5.3. Por ahora comentemos que en 1969, S. Rolewicz [82] aborda el problema de existencia de operadores hipercíclicos sobre el espacio de Banach ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ de las sucesiones de escalares $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ tales que su p-norma $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p}$ es finita; o sobre el espacio c_0 de las sucesiones de escalares convergentes a 0, que es de Banach con la norma del supremo (ver Teorema 1.5.4). En dicho trabajo, Rolewicz, basándose en resultados de L.S. Pontryagin [80] adelantó que si X es un espacio de dimensión finita, ningún operador puede ser hipercíclico (C. Kitai [67, Theorem 1.2] en 1982 dio una demostración algebraica de este mismo hecho).

Apuntemos que, dado que Rolewicz construye un operador hipercíclico sobre ℓ_2, podemos concluir que se cierra positivamente el estudio de existencia de operadores hipercíclicos sobre espacios de Hilbert separables y de dimensión infinita. En el mismo trabajo, el autor plantea el problema de existencia de operadores hipercíclicos sobre espacios de Banach separables y de dimensión infinita arbitrarios. Este problema fue resuelto de manera independiente por S. Ansari [2] y Bernal [12] a finales de los 90. En particular, la prueba de Ansari permite extender el resultado a clases más amplias de espacios vectoriales topológicos. De hecho, ella muestra que cualquier espacio de Fréchet con un sistema biortogonal equicontinuo admite un operador hipercíclico [2, Theorem 1(c)]. En 1998 J. Bonet y A. Peris [32] eliminaron esta última restricción, consiguiendo demostrar la existencia de operadores hipercíclicos en cada espacio de Fréchet separable de dimensión infinita.

Anotemos para finalizar que, recientemente, en 2003, J. Wengenroth [94] ha establecido que si T es un operador hipercíclico sobre un espacio vectorial topológico, entonces $HC(T)$ contiene una variedad lineal densa cuyos vectores, salvo el nulo, son hipercíclicos para T.

1.5.2. El Criterio de Hiperciclicidad

Siguiendo los pasos de la demostración de Rolewicz [82], en los años 80 Kitai [67] y R.M. Gethner y J.H. Shapiro [52] establecen un primer resultado que nos proporciona condiciones suficientes para garantizar la hiperciclicidad de un operador. Este Criterio de Hiperciclicidad, de gran utilidad práctica para el estudio de ejemplos de operadores hipercíclicos, ha sido extensamente estudiado y generalizado posteriormente por diversos autores, como por ejemplo K. G. Grosse–Erdmann [54], G. Godefroy y el propio Shapiro [53], Bernal [12] o J. Bès y A. Peris [26]. Enunciamos a continuación una de las versiones más usadas de tal criterio, ver [56].

Teorema 1.5.3 (Criterio de Hiperciclicidad). *Sean X e Y dos F-espacios con Y separable y $(T_n : X \to Y)_n$ una sucesión de operadores continuos. Supongamos que existen dos subconjuntos densos X_0 de X e Y_0 de Y y una sucesión creciente $(n_k)_k \subset \mathbb{N}$ cumpliendo las siguientes dos condiciones:*

(i) $T_{n_k}x \to 0$ $(k \to \infty)$ *para todo* $x \in X_0$.

(ii) *Para todo $y \in Y_0$, existe una sucesión $(u_k)_k$ en X tal que $u_k \to 0$ y $T_{n_k} u_k \to y$ $(k \to \infty)$.*

Entonces la sucesión $(T_n)_n$ posee un conjunto G_δ-denso, luego residual, de elementos hipercíclicos.

Un enunciado equivalente se tiene para el caso de un solo operador y sus iteradas con sólo sustituir $(T_n)_n$ por $(T^n)_n$. Se dice que una sucesión de operadores (un operador) verifica el *Criterio de Hiperciclicidad para* (n_k) si satisface las hipótesis del teorema anterior para dicha $(n_k)_k$. Se dice que satisface el *Criterio de Hiperciclicidad* si lo satisface para alguna sucesión creciente $(n_k)_k \subset \mathbb{N}$. En tal caso, es evidente que la sucesión de operadores (el operador, resp.) es hipercíclica. En cuanto al recíproco de esta última afirmación podemos comentar que en 1991 H. Salas [86, Remark 2(b)] y D. A. Herrero [62] proporcionaron ejemplos de operadores en espacios de Hilbert que son hipercíclicos pero que no satisfacen el Criterio de Hiperciclicidad para la sucesión completa de números naturales, es decir, $n_k = k$ $(k \in \mathbb{N})$. Sin embargo, dichos ejemplos no nos sirven si consideramos el Criterio de Hiperciclicidad en su forma general. En 1999 Bès y Peris [26] plantean el siguiente problema.

Si T es un operador hipercíclico sobre un espacio de Hilbert (o sobre un espacio de Banach), ¿satisface T el Criterio de Hiperciclicidad?

En dicho trabajo [26, Theorem 2.14] obtienen una respuesta afirmativa para el caso en que T sea un operador, sobre espacios de Fréchet, caótico, es decir, hipercíclico y con un conjunto denso de puntos periódicos. En la actualidad el caso general sigue sin respuesta y es uno de los problemas abiertos que más expectación despierta entre los especialistas en este tema.

Por otra parte, debemos señalar que aunque en la literatura se pueden encontrar diversos criterios de hiperciclicidad (ver [56]), recientemente Bermúdez, Bonilla y Peris [5] han demostrado que, de hecho, todos ellos son equivalentes.

En el Capítulo 2 de la presente memoria presentaremos ejemplos de sucesiones hipercíclicas de operadores que no satisfacen el Criterio de Hiperciclicidad. Aunque obtener un ejemplo concreto de tales sucesiones resulta sencillo (ver [14] y Capítulo 2), en nuestro caso proporcionamos específicamente toda una clase de operadores dentro de la cual cualquier sucesión hipercíclica no satisface el Criterio de Hiperciclicidad.

1.5.3. Ejemplos de operadores hipercíclicos

El primer ejemplo de operador hipercíclico que encontramos en la literatura fue proporcionado en 1929 por C. D. Birkhoff [28]. Él demostró la existencia de una función entera f tal que el conjunto $\{f(z+n): \ n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $H(\mathbb{C})$. En particular obtiene la universalidad de la familia de las traslaciones $\mathcal{F} = \{\tau_a : \ a \in \mathbb{C}\}$, donde $\tau_a f(z) := f(z+a)$ para cada función entera $f(z)$; más concretamente, se tiene que el operador τ_1 es hipercíclico en $H(\mathbb{C})$. Posteriormente, en 1952, G. R. MacLane [68] construye una función entera f

tal que el conjunto de sus derivadas $\{f^{(n)} : n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en $H(\mathbb{C})$, es decir, f es hipercíclica respecto del operador derivada D. Este resultado fue reobtenido por C. Blair y L.A. Rubel [29] en 1983. Poco después, en 1984, S.M. Duyos–Ruiz [46] prueba que el conjunto de tales funciones es residual en $H(\mathbb{C})$.

Siguiendo esta línea, diversos autores han construido funciones hipercíclicas respecto de D, sobre $H(\mathbb{C})$ o $H(G)$, con propiedades adicionales, como por ejemplo, el mínimo tipo de crecimiento posible (Grosse–Erdmann [55], S.A. Shkarin [91]) o sin ceros (G. Herzog [63], Bernal [10]).

Otros autores han tratado la hiperciclicidad de operadores relacionados con D (ver [56]). En 1994, Bernal [7] estudia la hiperciclicidad de la sucesión de operadores $(c_n D^n)_n$ en $H(G)$, con G un dominio simplemente conexo y $(c_n)_n$ una sucesión compleja. En 2001 Calderón [36] permite que estos coeficientes sean funciones holomorfas. En 1991 Godefroy y Shapiro [53] obtienen la hiperciclicidad de los operadores diferenciales de orden infinito $\Phi(D)$ sobre $H(\mathbb{C})$ (de hecho, sobre $H(\mathbb{C}^N)$). En 1999 Bernal [11] (ver también [25]) estudia la hiperciclicidad de sucesiones $(\Phi_n(D))$ sobre dominios de $\mathbb{C}^N$ y la existencia de funciones hipercíclicas sin ceros.

Por otra parte, si describimos $H(\mathbb{C})$ como el espacio de sucesiones $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}$ tales que $|a_n|^{1/n} \to 0$ $(n \to \infty)$, entonces el operador D puede interpretarse como el operador de desplazamiento ponderado dado por $(a_n)_{n\geq 0} \mapsto ((n +$

$1)a_{n+1})_{n\geq 0}$. La universalidad de operadores de desplazamiento sobre espacios de funciones holomorfas o sobre espacios de sucesiones ha sido ampliamente estudiada. El primer resultado en este sentido fue proporcionado por Rolewicz [82] en 1969. Lo enunciamos a continuación.

Teorema 1.5.4. *Sea X el espacio ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$, o bien el espacio c_0; y sea B el operador de desplazamiento hacia atrás en X dado por $B(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$. Entonces para cada número complejo $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > 1$, el operador $T = \lambda B$ es hipercíclico en X.*

Apuntemos que este resultado es óptimo, ya que si un operador T sobre un espacio de Banach es hipercíclico entonces $\|T\| > 1$, pues en otro caso cualquier órbita sería acotada. Además es inmediato que si Λ es un conjunto numerable de constantes $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > 1$, el teorema de Baire nos garantiza la existencia de un conjunto residual de elementos hipercíclicos respecto de λB para todo $\lambda \in \Lambda$ (ya que ℓ_p con $1 \leq p < \infty$ y c_0 son F-espacios). Recientemente E. Abakumov y J. Gordon [1] han demostrado la existencia de un conjunto residual de vectores, en ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ o c_0, cuyos elementos son hipercíclicos respecto de cualquier múltiplo de B por constantes de módulo mayor que uno.

El ejemplo de Rolewicz supuso el comienzo del estudio de la hiperciclicidad de operadores de tipo desplazamiento (en espacios de Banach). Sin embargo, no es hasta 1987 cuando Gethner y Shapiro [52] proporcionan el primer ejemplo concreto de hiperciclicidad de operadores de desplazamiento sobre espacios de funciones analíticas, específicamente, sobre una variante del espacio de Hardy.

Sea $\beta = (\beta_k)_{k\geq 0}$ una sucesión decreciente de números positivos. Llamaremos $H^2(\beta)$ al espacio de las funciones analíticas $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ en el disco unidad $\mathbb{D}$ tales que $\|f\|_\beta^2 := \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^2 \beta_k^2 < +\infty$. Sobre este espacio, si $\sigma := \sup\{\beta_k/\beta_{k+1} : \ k \geq 0\} < +\infty$, el operador de desplazamiento hacia atrás dado por $B(\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k+1} z^k$ está bien definido.

Gethner y Shapiro prueban el siguiente resultado.

Teorema 1.5.5. *El operador B anterior es hipercíclico sobre $H^2(\beta)$ si y sólo si* $\lim\limits_{k\to\infty} \beta_k = 0$.

En 1995 Salas [87] consigue generalizar este resultado al eliminar la monotonía de la sucesión β y obtener como condición necesaria y suficiente que $\liminf\limits_{k\to\infty} \beta_k = 0$.

Observemos que Salas obtiene dicho resultado como consecuencia de su estudio sobre la hiperciclicidad de los operadores bilaterales de desplazamiento *ponderado*. Sobre el espacio $\ell_p(\mathbb{Z})$ o $c_0(\mathbb{Z})$, si $(e_n)_n$ es su base canónica, se dice que un operador T es un operador bilateral de desplazamiento hacia delante (hacia atrás, resp.) ponderado si $Te_n = a_n e_{n+1}$ ($Te_n = a_n e_{n-1}$, resp.), donde $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ es una sucesión acotada ($(a_n)_n$ puede considerarse incluso de números positivos). En [87] Salas consigue caracterizar los operadores bilaterales de desplazamiento ponderado hipercíclicos en función de la sucesión de pesos. Posteriormente utiliza dicho resultado para abordar el mismo problema en el caso unilateral, es decir, sobre los espacios $\ell_p(\mathbb{N})$ y $c_0(\mathbb{N})$, consiguiendo una caracterización en los mismos términos para los operadores de desplazamiento hacia atrás y estableciendo la no hiperciclicidad para los operadores de desplazamiento hacia delante.

En 1999 F. Martínez Giménez y Peris [69] extienden los resultados de Salas a espacios escalonados de Köthe. En 2000, Grosse–Erdmann [57] traslada el estudio de los operadores de desplazamiento a sucesiones de operadores en espacios de Fréchet de sucesiones en los cuales la base canónica forma una base de Schauder. Más recientemente, en 2003, N. Feldman [48] no sólo aborda la hiperciclicidad sino también la superciclicidad de la clase de los operadores de desplazamiento ponderado invertibles, logrando una caracterización de ambos casos y generalizando de nuevo los resultados de Salas. En 2001, A. Montes y el propio Salas [72] caracterizan los operadores de desplazamiento ponderado unilaterales y bilaterales que poseen un subespacio vectorial cerrado de dimensión infinita de vectores hipercíclicos o supercíclicos.

Volviendo a la interpretación de $H(\mathbb{C})$ como espacio de sucesiones, en 1994 V. Mathew [70] estudia la hiperciclicidad de operadores de desplazamiento ponderado sobre el espacio de las funciones enteras $H(\mathbb{C})$. En particular ofrece una condición suficiente para que un operador de desplazamiento hacia atrás ponderado sea hipercíclico, generalizando el teorema de MacLane [68] sobre la hiperciclicidad del operador derivada en $H(\mathbb{C})$. Asimismo, en 2000, Grosse–

Erdmann [58] estudia la máxima tasa de crecimiento de las funciones enteras hipercíclicas respecto de operadores de desplazamiento ponderado.

Hasta ahora hemos podido comprobar que el estudio de la hiperciclicidad y superciclicidad de operadores en los que los coeficientes que intervienen se desplazan ha sido tratado por muchos autores. Sin embargo, hasta donde conocemos, no se ha realizado un estudio similar sobre operadores que *no* desplacen los coeficientes. En esta dirección, en el Capítulo 2 de esta memoria, introduciremos los operadores coeficientes multiplicadores sobre espacios de funciones como aquéllos que multiplican cada coeficiente de Taylor por un peso adecuado sin desplazarlos, y realizaremos un estudio exhaustivo de la ciclicidad, hiperciclicidad y superciclicidad de sucesiones de estos operadores.

1.6. Cluster sets

La noción de cluster set fue introducida en 1895 por P. Painlevè [79] con objeto de estudiar de forma intuitiva el comportamiento de una función analítica en las cercanías de una singularidad. La definición de cluster set puede darse en marcos muy generales pues sólo está implicado el concepto de límite. Sin embargo, donde más relevancia adquiere es dentro del campo de las funciones analíticas.

Definición 1.6.1. *Supongamos que G es un dominio de $\mathbb{C}$, F una función* *definida sobre G y $A \subset G$ un conjunto no relativamente compacto.*

(1) *El* cluster set de F a lo largo de A *se define como el conjunto*

$$\begin{aligned} C_A(F) &= \{\omega \in \mathbb{C} : \text{ existen } t \in \partial G \text{ y una sucesión } (z_n)_n \subset A \\ &\quad \text{tales que } \lim_{n\to\infty} z_n = t \text{ y } \lim_{n\to\infty} F(z_n) = \omega\}. \end{aligned}$$

(2) *Si $t_0 \in \partial G$, entonces el* cluster set de F a lo largo de A en t_0 *se define como*

$$\begin{aligned} C_A(F, t_0) &= \{\omega \in \mathbb{C} : \text{ existe una sucesión } (z_n)_n \subset A \text{ que tiende a } t_0 \\ &\quad \text{tal que } \lim_{n\to\infty} F(z_n) = \omega\}. \end{aligned}$$

De la misma definición es inmediato que:

- $C_A(F)$ y $C_A(F, t_0)$ son siempre conjuntos cerrados.
- $C_A(F) = \overline{\bigcup_{t\in\partial G} C_A(F, t)}$.

Si $A = G$ entonces el subíndice "A" se suele omitir y la expresión "a lo largo de A" también. Para más información sobre cluster sets ver los surveys [39] y [77].

En este trabajo, la utilidad de los cluster sets se centra en el estudio del comportamiento de una función en la frontera de su dominio de definición. Diversos autores han planteado la existencia de funciones analíticas en G con comportamiento caótico o "salvaje" en la frontera de G. En particular, un problema interesante es la obtención de funciones holomorfas con cluster sets maximales, es decir, iguales a $\mathbb{C}$.

En este sentido, es fácil encontrar un primer ejemplo de tales funciones a través del teorema de interpolación de Weierstrass.

Teorema 1.6.2. *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un dominio, $(a_n)_n \subset G$ una sucesión de puntos distintos de G sin puntos de acumulación en G y $(\omega_n)_n \subset \mathbb{C}$ una sucesión. Entonces existe una función f holomorfa en G tal que $f(a_n) = \omega_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Como consecuencia, si consideramos un conjunto $A \subset G$ no relativamente compacto, existe una sucesión $(a_n)_n \subset A$ como la del teorema anterior. Si ahora $(\omega_n)_n$ es una sucesión densa en $\mathbb{C}$, tal teorema nos proporciona una función $f \in H(G)$ tal que el conjunto $\{f(a_n) : \ n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{C}$; en otras palabras, tal que $C_A(f) = \mathbb{C}$. Si además fijamos un punto $t_0 \in \partial G$ accesible a través de A, es decir, $t_0 \in A' \cap \partial G$, y elegimos $(a_n)_n \subset A$ con $a_n \to t_0$, se obtiene una función $f \in H(G)$ tal que $C_A(f, t_0) = \mathbb{C}$.

Siguiendo esta línea, en 1992 Bernal [6] introduce el concepto de operador (holomorfo) omnipresente de la siguiente forma.

Definición 1.6.3. *Sean G un dominio de $\mathbb{C}$ y $T : H(G) \to H(G)$ una aplicación continua. Se dice que T es* omnipresente *si y sólo si el conjunto*

$$\{f \in H(G) : \ C(Tf, t) = \mathbb{C} \ \ \textit{para todo } t \in \partial G\}$$

es residual.

Asimismo, Bernal prueba que los operadores derivada y antiderivada de cualquier orden son omnipresentes; por tanto, se verifica que para cada $j \in \mathbb{Z}$ el conjunto $\{f \in H(G) : \ C(f^{(j)}, t) = \mathbb{C}$ para todo $t \in \partial G\}$ es residual, y por el Teorema de Baire también es residual el conjunto $\{f \in H(G) : \ C(f^{(j)}, t) = \mathbb{C}$ para todo $t \in \partial G$ y todo $j \in \mathbb{Z}\}$.

Posteriormente, en 1995 el mismo autor [8] generaliza esta situación para el caso diferencial, obteniendo que para cada $A \subset G$ no relativamente compacto, el conjunto $\{f \in H(G) : \ C_A(f^{(n)}) = \mathbb{C}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0\}$ es residual. De nuevo fijando $t_0 \in A' \cap \partial G$, conseguimos la residualidad del conjunto $\{f \in H(G) : \ C_A(f^{(n)}, t_0) = \mathbb{C}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0\}$. Observemos que con este resultado es posible determinar de antemano el lugar por donde la sucesión se aproxima a la frontera (un sector, una curva, ...), mientras que a través de la omnipresencia no podemos realizar la acotación.

En 2002 Calderón [37] extiende estos resultados a cualquier suma finita de operadores diferenciales y antidiferenciales de orden infinito. En particular, demuestra que si $\Phi(D)$ es un operador diferencial de orden infinito no idénticamente nulo y $\Psi(D^{-1})$ un operador antidiferencial de orden infinito entonces para cada conjunto $A \subset G$ no relativamente compacto el conjunto $\{f \in H(G) : \ C_A((\Phi(D) + \Psi(D^{-1}))(f)) = \mathbb{C}\}$ es residual.

Como generalización del concepto de omnipresencia y de los resultados anteriores, en 2001 Bernal y Calderón [16] introducen los operadores con imágenes densas por doquier (DI-operador). Estos operadores poseen un comportamiento salvaje cerca de la frontera de un dominio G de $\mathbb{C}$ a través de ciertos subconjuntos.

Definición 1.6.4. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio. Se dice que una aplicación continua $T : H(G) \to H(G)$ es* DI-operador *si el conjunto*

$$M(T, A) := \{f \in H(G) : \ C_A(Tf) = \mathbb{C}\}$$

es residual en $H(G)$ para cualquier subconjunto A de G no relativamente compacto.

En el mismo trabajo, los autores proporcionan condiciones suficientes para que un operador sea DI y caracterizan los operadores de composición (a la derecha y a la izquierda) y los operadores de multiplicación que son DI-operadores.

En el Capítulo 3 de esta memoria vamos a introducir un nuevo tipo de operadores que generaliza a estos últimos, a saber, los operadores con imágenes densas y extensas por doquier o LDI-operadores. Estos operadores serán aquéllos en los que los conjuntos $M(T, A)$ son grandes topológica y algebraicamente. Obtendremos, en cierto sentido, condiciones mínimas para que un operador sea LDI y veremos que diversos operadores clásicos, incluidos los operadores diferenciales de orden infinito, los operadores de composición y los de multiplicación, son LDI. Con esto, generalizamos los resultados de Bernal y Calderón relativos a DI-operadores.

Volvamos de nuevo al concepto de DI-operador. Bernal y Calderón demostraron que el operador identidad es DI, por tanto el conjunto $\{f \in H(G) : C_A(f) = \mathbb{C}\}$ es residual en $H(G)$ para todo subconjunto A de G no relativamente compacto. En particular, si fijamos una familia numerable Γ de curvas en G que tienden a ∂G, el teorema de Baire nos garantiza que existe un subconjunto residual $M \subset H(G)$ tal que para cada función $f \in M$ y cada curva $\gamma \in \Gamma$, es $C_\gamma(f) = \mathbb{C}$.

De igual modo, si fijamos un subconjunto numerable S de ∂G (que puede tomarse denso) y tomamos para cada $t \in S$ una sucesión $(a_n^{(t)})_n \subset G$ con $a_n^{(t)} \to t$, logramos la existencia de un conjunto residual de funciones $f \in H(G)$ tales que $C_{(a_n^{(t)})_n}(f,t) = \mathbb{C}$ para todo $t \in S$.

A raíz de estos dos resultados, cabe preguntarse si podemos suprimir en ambos la restricción sobre la cantidad de curvas o sucesiones. En particular, si para cada punto $t \in \partial G$ fijamos una curva γ_t (una sucesión $(a_n^{(t)})_n$) en G que tiende a t, nos preguntamos si existe alguna función $f \in H(G)$ tal que $C_{\gamma_t,t}(f) = \mathbb{C}$ ($C_{(a_n^{(t)})_n}(f,t) = \mathbb{C}$, respectivamente) para todo $t \in \partial G$. Observemos que la omnipresencia del operador identidad nos garantiza la existencia de funciones $f \in H(G)$ tales que $C(f,t) = \mathbb{C}$ para todo $t \in \partial G$, pero no nos permite prefijar por donde nos acercamos al punto t.

En esta dirección, R. Tenthoff [92] en 2000 aborda la existencia de funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$ con propiedades de universalidad a través de cada uno de los radios. Más concretamente, demuestra la existencia de un conjunto denso de funciones $f \in H(\mathbb{D})$ verificando que para cada $j \in \mathbb{Z}$, cada punto $t_0 \in \mathbb{T}$, cada compacto $K \subset \mathbb{D}$ con complemento conexo y cada función $g \in \mathcal{A}(K)$, existe una sucesión de funciones $t_n : K \to \{ut_0 : \ u \in [0,1)\}$ (no necesariamente holomorfas ni continuas) tal que $t_n(z) \to t$ puntualmente en K y $f^{(j)} \circ t_n \to g$ uniformemente en K.

Si F es una función definida sobre $\mathbb{D}$ y $t_0 \in \partial\mathbb{D}$, denotamos por $C_\varrho(F, t_0)$ el cluster set de la función F definida sobre $\mathbb{D}$ a lo largo del radio $\{ut_0 : \ u \in [0,1)\}$ y lo llamaremos *cluster set radial de F en t_0*. Si en el resultado anterior de Tenthoff elegimos como compacto el conjunto $K = \{0\}$, podemos deducir la existencia de un conjunto denso de funciones $f \in H(\mathbb{D})$ de forma que para cada $j \in \mathbb{Z}$ los cluster sets radiales $C_\varrho(f^{(j)}, t_0)$ son maximales. Asimismo, puede extenderse el resultado anterior a una región de Jordan cualquiera G, pero realizando la aproximación a través de unas curvas que dependen directamente de la región G. De hecho se puede afirmar que para cada dominio de Jordan G existe una familia $\Gamma = \{\gamma_t : \ t \in \partial G \text{ y } \gamma_t \to t\}$ de curvas en G, de forma que el conjunto de funciones $f \in H(G)$ tales que para cada $j \in \mathbb{Z}$ y cada $t \in \partial G$, el cluster set radial $C_{\gamma_t}(f^{(j)}, t)$ es maximal es denso en $H(G)$.

Recientemente, en 2002 A. Boivin, P. M. Gauthier y P. V. Paramonov

[30] han demostrado la existencia de una función $f \in H(G)$, donde G es un abierto G cuya frontera ∂G no posee componentes conexas formadas por un solo punto, tal que para cada punto $t \in \partial G$, cada curva $\gamma \subset G$ que acabe en t y cada $j \in \mathbb{N}_0$, el cluster set $C_\gamma(f^{(j)}, t)$ es maximal.

Siguiendo esta línea, en el Capítulo 4 de esta memoria nos planteamos la existencia de funciones holomorfas con cluster set maximal a lo largo de cualquier curva en un dominio de Jordan G que tienda a la frontera pero no a toda ella. Demostraremos la existencia de una variedad lineal densa de dichas funciones en $H(G)$ y estudiaremos qué ocurre en espacios de Hardy H^p (donde por el lema de Fatou sabemos que incluso el resultado de Tenthoff no es posible) si restringimos el número de curvas. Si sustituimos las curvas por sucesiones arbitrarias que tienden a ∂G, veremos que es necesario hacer restricciones sobre la cantidad de sucesiones a considerar para obtener resultados positivos. Con todo, generalizamos en cierto sentido, los resultados de Tenthoff y de Boivin, Gauthier y Paramonov.

Capítulo 2

Ciclicidad de operadores coeficientes multiplicadores

2.1. Introducción

Uno de los temas que más veces aparece dentro de la Matemática es el estudio de la "no-convergencia extrema", del cual se han derivado diversas nociones de caos. El caos aparece fundamentalmente en el análisis de sistemas dinámicos discretos, pero también puede observarse en sistemas dinámicos lineales si trabajamos con dimensión infinita. Este es el caso a lo largo de todo este Capítulo. Para cualquier consulta sobre conceptos fundamentales de caos de sistemas dinámicos lineales podemos remitirnos a los trabajos de

Godefroy y Shapiro [53], Grosse-Erdmann [59], Feldman [49], Shapiro [89] y Bonet, Martínez-Giménez y Peris [31].

Nosotros, a lo largo del presente Capítulo, nos restringiremos al marco del estudio de la ciclicidad, superciclicidad e hiperciclicidad de cierta clase de operadores sobre un F-espacio separable X. Todos estos conceptos fueron ya introducidos en el Capítulo 1.

En 1991 Godefroy y Shapiro [53] demostraron que los operadores hipercíclicos son "sensibles" respecto de las condiciones iniciales. En concreto:

Teorema 2.1.1. *Sea $T : X \to X$ un operador hipercíclico sobre un F-espacio, y sea d una distancia invariante por traslaciones compatible con la topología de X. Existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ y para todo $x \in X$, existe $y \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ con $d(x, y) < \delta$ pero $d(T^n x, T^n y) > \varepsilon$.*

Por tanto, la hiperciclicidad de un operador es equivalente a la noción de caos dada por J. Auslander y J. A. Yorke en 1980 (ver [3]).

Los diversos tipos de ciclicidad considerados (hiperciclicidad, superciclicidad y ciclicidad) han sido extensamente estudiados, como vimos en el Capítulo 1, en relación con los operadores de desplazamiento (ver además [90], [9] y [53]) Sin embargo, no podemos decir lo mismo cuando no permitimos que exista desplazamiento. En este capítulo nos proponemos eliminar tal vacío. Las definiciones de los operadores adecuados (los coeficientes multiplicadores) las estableceremos en la Sección 2.2. La tercera sección es meramente auxiliar y en ella proporcionamos una condición suficiente para la ciclicidad de una sucesión de operadores. Gracias a ella podremos establecer el resultado principal en la Sección 2.4. En particular, caracterizaremos la ciclicidad, superciclicidad e hiperciclicidad de sucesiones de coeficientes multiplicadores. En el caso de un solo operador veremos que éstos nunca son supercíclicos aunque sí existen coeficientes multiplicadores cíclicos. De hecho, los caracterizaremos. Es más, estudiaremos el tamaño (algebraico y topológico) del conjunto de elementos cíclicos de un operador coeficiente multiplicador. Finalmente, en la última sección probaremos que ninguna sucesión dentro de dicha clase de operadores satisface el Criterio de Hiperciclicidad, a pesar que podemos garantizar la existencia de sucesiones de coeficientes multiplicadores que son hipercíclicas.

2.2. Coeficientes multiplicadores

Sea G un dominio de $\mathbb{C}$ con $0 \in G$. Supongamos que X es un espacio vectorial topológico de funciones holomorfas en G, así que $X \subset H(G)$.

Definición 2.2.1. *Diremos que un operador $T : X \to X$ es un* coeficiente multiplicador *o, abreviadamente, un* c-multiplicador*, si existe una sucesión $\sigma = (a_k)_{k\geq 0}$ en $\mathbb{C}$ tal que para toda $f \in X$, con $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ en un entorno* *del origen, se tiene que*

$$Tf(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k z^k \text{ en un entorno del origen.}$$

En tal caso, denotaremos $T = T_\sigma$.

Observemos que la definición es bastante natural, encontrándose en la literatura numerosos ejemplos de este tipo de operadores. Mostramos a continuación algunos de los más usuales.

(1) Si $G = \mathbb{C}$ ($G = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < R\}$ con $0 < R < \infty$) entonces cualquier sucesión $(a_k)_{k\geq 0}$ en $\mathbb{C}$ tal que $\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} < \infty$ ($\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} \leq 1$, respectivamente) define un c-multiplicador en $H(G)$.

(2) Dado un número $\alpha \in \mathbb{C}$ y conjuntos $A, B \subset \mathbb{C}$ denotamos $\alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$, $A \cdot B = \{ab : a \in A, b \in B\}$ y $A \odot B = (A^c \cdot B^c)^c$. Sean G_1, G_2 dominios de $\mathbb{C}$ con $0 \in G_1 \cap G_2$. Entonces para cualesquiera funciones $g \in H(G_1)$, con $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k$, y $h \in H(G_2)$, con $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k$, podemos considerar su *producto de Hadamard*

$$g \odot h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k h_k z^k \in H(G_1 \odot G_2);$$

y en general el *operador producto de Hadamard* H_g dado por

$$H_g : h(z) \in H(G_2) \mapsto g \odot h(z) \in H(G_1 \odot G_2).$$

Se tiene que este operador está bien definido y es lineal y continuo (ver [74, Theorem H]). En particular, si $G_1 = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ y $G_2 = G$ es cualquier dominio con $0 \in G$ obtenemos $G_1 \odot G_2 = G$ (ver [27]) y H_g se convierte en un c-multiplicador sobre $H(G)$.

(3) Sea $Q \subset \mathbb{N}_0$ y $G \subset \mathbb{C}$ un dominio con $0 \in G$. Denotamos por $H_Q(G)$ el espacio de las funciones lagunares holomorfas en G,

$$H_Q(G) = \{f \in H(G) \,:\, f(z) = \sum_{n \in Q} f_n z^n \text{ alrededor del origen}\}.$$

Es obvio que $H(G) = H_Q(G)$ si $Q = \mathbb{N}_0$. Observemos también que $H_Q(G)$ es un subespacio cerrado de $H(G)$, luego es un F-espacio dotado de la topología compacta-abierta. Es inmediato que el operador D no tiene sentido de $H_Q(G)$ en sí mismo, pero sin embargo sí podemos considerar un operador que, en cierto sentido, está muy relacionado con $\Phi(D)$ y que conserva las lagunas en los coeficientes: el operador diferencial de Euler.

Sea $\mathcal{D}$ el operador sobre $H(G)$ dado por $\mathcal{D}f(z) = zf'(z)$ y sea $\mathcal{D}^n = \mathcal{D} \circ \overset{(n)}{\cdots} \circ \mathcal{D}$ $(n \in \mathbb{N})$ y $\mathcal{D}^0 = I$. Cada función entera $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n z^n$ de tipo subexponencial induce un operador lineal y continuo, llamado *operador diferencial de Euler*, como sigue

$$\begin{array}{rccl} \Phi(\mathcal{D}) : & H_Q(G) & \to & H_Q(G) \\ & f & \mapsto & \Phi(\mathcal{D})f := \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \mathcal{D}^n f. \end{array}$$

Además, si $f(z) = \sum_{n \in Q} f_n z^n$ alrededor del origen, entonces

$$\Phi(\mathcal{D})f(z) = \sum_{n \in Q} \Phi(n) f_n z^n \text{ alrededor del origen,}$$

de donde las imágenes están en efecto en $H_Q(G)$ (el caso $Q = \mathbb{N}_0 \setminus \Phi^{-1}(0)$ es el más estudiado). Por tanto $\Phi(\mathcal{D})$ puede interpretarse como un c-multiplicador. Ver [64, pp. 46-54]) y [50] para otras propiedades de los operadores diferenciales de Euler.

(4) Sea S_ν ($\nu \in \mathbb{R}$) el espacio de Hilbert de las funciones holomorfas $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ en el disco unidad $\mathbb{D}$ para las cuales la norma

$$\|f\|_\nu = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 (n+1)^{2\nu} \right)^{1/2}$$

es finita. Observemos que para $\nu = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ el espacio S_ν es, respectivamente, el espacio de Bergman B^2, el espacio de Hardy H^2 (ya definidos en el Capítulo 1) y el espacio de Dirichlet

$$\mathcal{D} = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \int \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dxdy < +\infty \right\}.$$

(En, por ejemplo, [98] podemos encontrar las propiedades fundamentales de estos espacios.)

Consideremos ahora el F-espacio $A^\infty := \{f \in H(\mathbb{D}) : f^{(n)}$ tiene extensión continua a $\overline{\mathbb{D}}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0\} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}_0} A^N$, dotado de la topología de la convergencia uniforme en $\overline{\mathbb{D}}$ de todas sus derivadas, y donde para cada $N \in \mathbb{N}_0$ se define el espacio A^N como

$$A^N := \{f \in H(\mathbb{D}) : \quad f^{(n)} \text{ tiene extensión continua a } \overline{\mathbb{D}} \\ \text{para todo } n = 0, 1, \ldots, N\},$$

que es un F-espacio dotado de la topología de la convergencia uniforme en $\overline{\mathbb{D}}$ de todas sus derivadas hasta orden N. Usando las desigualdades de Cauchy, es decir, $|f^{(n)}(0)| \leq (n!)^{-1} r^{-n} \max_{|z|=r} |f(z)|$ ($n \in \mathbb{N}_0$, $0 < r < 1$ y $f \in H(\mathbb{D})$), es fácil ver que $A^\infty = \{f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in H(\mathbb{D}) : \ (k^n |a_k|)_k$ está acotada para todo $n \in \mathbb{N}\}$.

Si $\sigma = (a_k)_{k \geq 0}$ es una sucesión acotada, entones de la definición de S_ν y la segunda expresión de A^∞ se obtiene que el c-multiplicador T_σ es un operador que está bien definido y es lineal y continuo sobre ambos espacios. Por motivos que se verán más adelante, vamos a resaltar el hecho de que los polinomios son densos en cada S_ν (A^∞) y que la topología de S_ν (A^∞, respectivamente) es más fina que la de la convergencia uniforme en compactos de $\mathbb{D}$ (ver [4] y [44]).

Consideremos ahora los espacios de Hardy H^p $(0 < p < \infty)$ y los espacios de Bergman $(0 < p < \infty)$, que son F-espacios si los dotamos de las distancias

$$d_p(f,g) := \begin{cases} \|f-g\|_p & \text{si} \quad p \geq 1 \\ \|f-g\|_p^p & \text{si} \quad p < 1. \end{cases}$$

Estos espacios satisfacen también que los polinomios son densos en ellos y que sus topologías son más finas que la de la convergencia uniforme en compactos de $\mathbb{D}$ (ver [44] y [45]). En la literatura existe una gran cantidad de resultados acerca de multiplicadores entre estos espacios. En particular, en [35] se demuestra que si una sucesión $\sigma = (a_k)_{k\geq 0}$ verifica que

$$\sum_{k=1}^{\infty} n^{|1-p/2|}|a_k|^p < \infty,$$

entonces el c-multiplicador T_σ es un operador que está bien definido sobre el espacio de Bergman B^p para $0 < p < \infty$; y si σ verifica que existen dos sucesiones $(b_k)_{k\geq 0}$ y $(c_k)_{k\geq 0}$ tales que para cada $k, N > 0$ se tiene que

$$\left| a_k - \sum_{i=0}^{N} b_i (k+1)^{-i} \right| \leq c_N (k+1)^{-N-1},$$

entonces el c-multiplicador T_σ es un operador bien definido sobre el espacio de Hardy H^p para cada $0 < p < \infty$. Más aún, si denotamos por BV el espacio de las sucesiones de variación acotada, es decir,

$$BV := \{\sigma = (a_k)_{k\geq 0} : \ \|\sigma\|_{BV} := |a_0| + \sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+1} - a_k| < \infty\},$$

se demuestra en [35, Proposition 3.7] que si $\sigma \in BV$, entonces T_σ es un operador bien definido sobre los espacios de Hardy H^p y de Bergman B^p (con $1 < p < \infty$).

Por último nos gustaría comentar, antes de introducirnos en el estudio de la ciclicidad de estos operadores, que en numerosos trabajos (ver [43], [75], [66], [96], [97] y [81] entre otros) podemos encontrar los operadores c-multiplicadores definidos del siguiente modo. Si A y B son dos espacios de funciones holomorfas en un entorno del cero, una serie de potencias $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k$ se dice que es un coeficiente multiplicador de A en B si el producto de Hadamard $g \odot f \in B$ para toda $f \in A$. Observemos que en realidad se exige que el operador *producto de Hadamard* esté bien definido entre A y B; por tanto, la definición que presentamos en esta Memoria (Definición 2.2.1) es mucho más general que la clásica aunque es coherente con ésta, es decir, en el caso de los operadores de Hadamard son equivalentes.

2.3. Una condición suficiente para la ciclicidad

Enunciamos en primer lugar un resultado de Grosse-Erdmann (ver [54]) que nos proporciona condiciones necesarias y suficientes para la universalidad de una familia.

Proposición 2.3.1. *Sean X e Y dos espacios vectoriales topológicos tales que X es de Baire e Y es segundo numerable. Sea $\mathcal{F}$ una familia de aplicaciones* *continuas de X en Y. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *El conjunto $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ de elementos universales para $\mathcal{F}$ es residual en X.*

(b) *El conjunto $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ es denso en X.*

(c) *El conjunto $\{(x, Tx) : \ x \in X, \ T \in \mathcal{F}\}$ es denso en $X \times Y$.*

De la Proposición 2.3.1 y de la definición de ciclicidad, superciclicidad e hiperciclicidad obtenemos inmediatamente el siguiente resultado auxiliar, que se usará después. Recordemos que si X es un F-espacio separable, entonces es de Baire y segundo numerable.

Lema 2.3.2. *Sean X un F-espacio separable y $T_n : X \to X$ $(n \in \mathbb{N})$ una sucesión de aplicaciones continuas. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) *El conjunto $C((T_n)_n)$ ($SC((T_n)_n)$, $HC((T_n)_n)$, respectivamente) es residual en X.*

(b) *El conjunto $C((T_n)_n)$ ($SC((T_n)_n)$, $HC((T_n)_n)$, respectivamente) es denso en X.*

(c) *El conjunto $\{(x, \sum_{n=1}^{N} \lambda_n T_n x) : \ x \in X, \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K}, N \in \mathbb{N}\}$ ($\{(x, \lambda T_N x) : x \in X, \lambda \in \mathbb{K}, N \in \mathbb{N}\}$, $\{(x, T_N x) : \ x \in X, N \in \mathbb{N}\}$, respectivamente) es denso en $X \times X$.*

Demostración. Basta recordar que $HC((T_n)_n) = \mathcal{U}(\{T_n : \ n \in \mathbb{N}\})$, $SC((T_n)_n) = \mathcal{U}(\{\lambda T_n : \ \lambda \in \mathbb{K}, \ n \in \mathbb{N}\})$, $C((T_n)_n) = \mathcal{U}(\{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n T_n : \ \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{K}, N \in \mathbb{N}\})$ y aplicar la Proposición 2.3.1. ■

2.4. Ciclicidad de c-multiplicadores

A partir de ahora, en lo que resta de este capítulo, G denotará un dominio de $\mathbb{C}$ con $0 \in G$ y X será un espacio vectorial topológico de funciones holomorfas en G. Representaremos por $(T_n)_n$ una sucesión de c-multiplicadores $T_n = T_{\sigma(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$ sobre X. Es decir, $\sigma(n) = (a_{kn})_{k \geq 0}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, donde los valores a_{kn} son números complejos. Así, si $f(z) \in X$ y $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ en un entorno del origen, tenemos que

$$T_k f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} f_k z^k \tag{2.1}$$

en un entorno del origen.

Denotemos por $\mathcal{P}$ la clase de los polinomios con coeficientes complejos. Con objeto de delimitar los espacios adecuados de funciones holomorfas en los que vamos a trabajar, introducimos el siguiente concepto.

Definición 2.4.1. *Supongamos que X es un F-espacio de funciones holomorfas en un dominio G de $\mathbb{C}$. Decimos que X es un* CP-espacio *sobre G si satisface las siguientes propiedades:*

(i) *La convergencia en X implica la convergencia uniforme en compactos de G; en otras palabras, la inclusión $X \subset H(G)$ es continua.*

(ii) *El conjunto $\mathcal{P}$ es un subconjunto denso de X.*

Por ejemplo, si G es simplemente conexo, el teorema de Runge (Teorema 1.4.1) nos asegura que $H(G)$ es un CP-espacio. También (ver Sección 2.1), los espacios S_ν $(\nu \in \mathbb{R})$, H^p, B^p $(0 < p < +\infty)$ y A^N $(N \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\})$ son CP-espacios. Como último ejemplo, comentemos que si G es un dominio de $\mathbb{C}$, entonces la clausura de $\mathcal{P}$ en $H(G)$ es siempre un CP-espacio.

Antes de introducirnos en el estudio y caracterización de la ciclicidad de una sucesión $(T_n)_n$, presentamos una condición necesaria para la ciclicidad de una función.

Lema 2.4.2. *Sea G un dominio de $\mathbb{C}$ con $0 \in G$. Supongamos que X es un CP-espacio sobre G y que $f \in C((T_n)_n)$, donde $(T_n)_n$ es la sucesión de c-multiplicadores dada en* (2.1). *Entonces todos los coeficientes de Taylor de f en el origen son no nulos.*

Demostración. Supongamos que $f \in X$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ en un entorno del origen, es tal que $\mathrm{span}(\{T_n f : n \in \mathbb{N}\})$ es denso en X. Fijemos $q \in \mathbb{N}_0$ y definamos $h(z) := z^q \,(\in X)$. Por hipótesis, existe una sucesión $(h_j = \sum_{n=1}^{N_j} \lambda_{jn} T_n f)_j \subset \mathrm{span}(\{T_n f : n \in \mathbb{N}\})$ tal que $h_j \to h$ $(j \to \infty)$ en X. Luego, por ser X un

CP-espacio,

$$h_j \to h \quad (j \to \infty) \text{ uniformemente en compactos de } G.$$

Notemos que

$$h_j(z) = \sum_{n=1}^{N_j} \lambda_{jn} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} f_k z^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{N_j} \lambda_{jn} a_{kn} \right) f_k z^k \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Por tanto, por el teorema de convergencia uniforme de Weierstrass,

$$h_j^{(q)}(z) = \sum_{k=q}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{N_j} \lambda_{jn} a_{kn} \right) \frac{k!}{(k-q)!} f_k z^{k-q} \to h^{(q)}(z) \quad (j \to \infty)$$

uniformemente en compactos de G. Tomando en particular el compacto $K = \{0\} \subset G$, se obtiene que

$$\left(\sum_{n=1}^{N_j} \lambda_{jn} a_{qn} \right) f_q \, q! \to q! \quad (j \to \infty),$$

de donde es inmediato que $f_q \neq 0$, como queríamos. ∎

Notaremos por $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ el conjunto de todas las sucesiones complejas con índices en $\mathbb{N}_0$, dotado de la topología producto. Recordemos que en esta topología, si $V \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ es un abierto, entonces existe un número $N \in \mathbb{N}_0$ y abiertos $V_0, \dots, V_N \subset \mathbb{C}$ tales que $V_0 \times \cdots \times V_N \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \subset V$ (ver [95, pp. 98-99]).

Teorema 2.4.3. *Sea G un dominio de $\mathbb{C}$ con $0 \in G$. Supongamos que X es un CP-espacio sobre G y que $(T_n)_n$ es una sucesión de c-multiplicadores sobre X*

con sucesiones asociadas $(a_{kn})_{k\geq 0}$ $(n \in \mathbb{N})$*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *El conjunto* $C((T_n)_n)$ *es residual en* X*.*

(b) *La sucesión* $(T_n)_n$ *es cíclica.*

(c) *El espacio vectorial generado por* $\{(a_{kn})_{k\geq 0} : \ n \in \mathbb{N}\}$ *es denso en* $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$*.*

Demostración. Es trivial que (a) implica (b). Supongamos que se satisface (b), es decir, que existe una función $f \in C((T_n)_n)$. Por el Lema 2.4.2, podemos suponer que $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ alrededor del origen con $f_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Fijemos un abierto no vacío V de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}_0$ tal que para cada $k = 0, \ldots, N$ existen abiertos no vacíos $V_k \subset \mathbb{C}$ tales que $V_0 \times V_1 \times \cdots \times V_N \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \subset V$. Tomemos un punto α_k en cada V_k $(k = 0, \ldots, N)$ y definamos el polinomio

$$h(z) := \sum_{k=0}^{N} \alpha_k f_k z^k,$$

el cual está en X ya que X es un CP-espacio.

Entonces existe una sucesión $(g_j = \sum_{n=1}^{N_j} \lambda_{jn} T_n f)_j \subset \mathrm{span}(\{T_n f : \ n \in \mathbb{N}\})$ tal que $g_j \to h$ en X $(j \to \infty)$. Así, para cada $k \in \{0, \ldots, N\}$,

$$g_j^{(k)} \to h^{(k)} \quad (j \to \infty) \quad \text{uniformemente en compactos de } G,$$

porque X es un CP-espacio y por tanto la convergencia en X implica la convergencia uniforme en compactos de G.

Ahora tan sólo tenemos que considerar el compacto $K = \{0\} \subset G$ para obtener, tras cálculos similares a los hechos en el Lema 2.4.2, que

$$\left(\sum_{n=1}^{N_j} \lambda_{jn} a_{kn}\right) f_k k! \to \alpha_k f_k k! \quad (j \to \infty) \quad (k = 0, \ldots, N).$$

Ahora bien, $f_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$, de donde

$$\sum_{n=1}^{N_j} \lambda_{jn} a_{kn} \to \alpha_k \quad (j \to \infty) \quad (k = 0, \ldots, N).$$

Pero $\alpha_k \in V_k$ y V_k es abierto, luego existe $m \in \mathbb{N}$ para el cual

$$\sum_{n=1}^{N_m} \lambda_{mn} a_{kn} \in V_k \quad \text{para todo } k \in \{0, \ldots, N\}.$$

Si $v := \left(\sum_{n=1}^{N_m} \lambda_{mn} a_{kn}\right)_{k \geq 0}$, entonces $v \in V \cap \operatorname{span}(\{(a_{kn})_{k\geq 0} : \ n \in \mathbb{N}\})$, por tanto este subespacio vectorial es denso en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ y tenemos (c).

Tan sólo resta ver que (c) implica (a). Por el Lema 2.3.2 basta probar que el conjunto

$$S := \left\{ \left(f, \sum_{n=1}^{N} \lambda_n T_n f \right) : \ N \in \mathbb{N};\ \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{C};\ f \in X \right\} \tag{2.2}$$

es denso en $X \times X$.

Fijemos dos polinomios $p(z) = \sum_{k=0}^{\alpha} p_k z^k$ y $q(z) = \sum_{k=0}^{\beta} q_k z^k$, que obviamente están en X, con $p_k \neq 0$ para todo $k \in \{0, \ldots, \alpha\}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\alpha < \beta$.

Por hipótesis, existe una sucesión $(N_j)_j \subset \mathbb{N}$ y sucesiones finitas de números complejos $(\lambda_{jn})_{n=1}^{N_j}$ $(j \in \mathbb{N})$ tales que

$$\sum_{n=1}^{N_j} \lambda_{jn} a_{kn} \to \begin{cases} q_k/p_k & \text{si} \quad 0 \le k \le \alpha \\ \infty & \text{si} \quad \alpha+1 \le k \le \beta \end{cases} \qquad (j \to \infty). \tag{2.3}$$

Observemos que podemos suponer sin pérdida de generalidad que todas las sumas

$$s(j,k) := \sum_{n=1}^{N_j} \lambda_{jn} a_{kn} \quad (j \in \mathbb{N},\ k \in \{0, \dots, \beta\})$$

son no nulas. Para cada $j \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, \beta\}$ definimos

$$f_{kj} := \begin{cases} p_k & \text{si} \quad 0 \le k \le \alpha \\ q_k/s(j,k) & \text{si} \quad \alpha+1 \le k \le \beta. \end{cases}$$

Por (2.3),

$$f_{kj} \to \begin{cases} p_k & \text{si} \quad 0 \le k \le \alpha \\ 0 & \text{si} \quad \alpha+1 \le k \le \beta \end{cases} \qquad (j \to \infty), \tag{2.4}$$

y

$$s(j,k) f_{kj} \to q_k \quad (j \to \infty) \ \text{ para todo } k \in \{0, \dots, \beta\}. \tag{2.5}$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$ consideremos el polinomio f_j dado por

$$f_j(z) := \sum_{k=0}^{\beta} f_{kj} z^k.$$

Entonces, por (2.4) y el hecho de que la suma y el producto por un escalar son operaciones continuas en el espacio vectorial topológico X, obtenemos que

$$f_j \to p \quad (j \to \infty). \tag{2.6}$$

Por otro lado,

$$\left(\sum_{n=1}^{N_j} \lambda_{jn} T_n\right)(f_j(z)) = \left(\sum_{n=1}^{N_j} \lambda_{jn} T_n\right)\left(\sum_{k=0}^{\beta} f_{kj} z^k\right) = \sum_{k=0}^{\beta} s(j,k) f_{kj} z^k.$$

Por tanto, por (2.5) y de nuevo por ser X un espacio vectorial topológico,

$$\left(\sum_{n=1}^{N_j} \lambda_{jn} T_n\right) f_j \to q \quad (j \to \infty). \tag{2.7}$$

Finalmente, (2.6) y (2.7) nos dicen que la clausura del conjunto S contiene al conjunto de todos los pares (p,q) con p,q polinomios, donde p tiene todos sus coeficientes no nulos. Pero el conjunto de tales polinomios p es denso en $\mathcal{P}$, pues si $P(z) := \sum_{k=0}^{m} c_k z^k \in \mathcal{P}$ y $A := \{k \in \{0,\dots,m\} : \ c_k \neq 0\}$, entonces la sucesión $P_n(z) := \sum_{k=0}^{m} c_{kn} z^k$ $(n \in \mathbb{N})$ dada por

$$c_{kn} = \begin{cases} c_k & \text{si} \quad k \in A \\ 1/n & \text{si} \quad k \notin A \end{cases}$$

verifica que $P_n \to P$ $(n \to \infty)$ en X (de nuevo hemos usado que la suma y el producto por un escalar son operaciones continuas sobre X) y todos los coeficientes de todos los P_n son no nulos. Así, la clausura de S contiene a $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$, que es un conjunto denso en $X \times X$ al ser X un CP-espacio. Por tanto, S es denso en $X \times X$, como se quería ver. ■

De manera similar al caso de ciclicidad podemos dar una caracterización de la superciclicidad y de la hiperciclicidad de una sucesión $(T_n)_n$ de c-multiplicadores. La prueba es completamente análoga a la del Teorema 2.4.3, pero con notación más simple ya que el conjunto del cual debemos probar su densidad (por el Lema 2.3.2) es mucho más sencillo de manejar en ambos casos.

Teorema 2.4.4. *Con las mismas notaciones que en el Teorema 2.4.3, se tiene que las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *El conjunto* $SC((T_n)_n)$ $(HC((T_n)_n)$*, respectivamente*$)$ *es residual en* X*.*

(b) *La sucesión* $(T_n)_n$ *es supercíclica* (*hipercíclica, respectivamente*)*.*

(c) *El conjunto* $\{\lambda(a_{kn})_{k\geq 0} : \ \lambda \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$ $(\{(a_{kn})_{k\geq 0} : \ n \in \mathbb{N}\}$*, respectivamente*$)$ *es denso en* $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$*.*

Gracias al Teorema 2.4.4 podremos establecer la no-superciclicidad, luego la no-hiperciclicidad, de cualquier c-multiplicador T_σ. Pero antes necesitaremos un resultado auxiliar.

Lema 2.4.5. *Sean* $a, b \in \mathbb{C}$*. Entonces el conjunto*

$$A = \{\lambda(a^n, b^n) : \ \lambda \in \mathbb{C}, \, n \in \mathbb{N}_0\}$$

no es denso en $\mathbb{C}^2$*.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que A es denso en $\mathbb{C}^2$. Fijemos $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces existen dos sucesiones $(\lambda_j)_j \subset \mathbb{C}$ y $(n_j)_j \subset \mathbb{N}_0$ tales que

$$\lambda_j(a^{n_j}, b^{n_j}) \to (\alpha, 1) \in \mathbb{C}^2 \qquad (j \to \infty).$$

Por tanto,
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n_j} = \frac{\lambda_j a^{n_j}}{\lambda_j b^{n_j}} \to \alpha \qquad (j \to \infty).$$
Luego el conjunto $\{(a/b)^n : \ n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en $\mathbb{C}$, lo que es claramente imposible. ■

Corolario 2.4.6. *Supongamos que T_σ es un c-multiplicador sobre un CP-espacio X definido sobre un dominio $G \subset \mathbb{C}$ con $0 \in G$. Entonces T_σ no es supercíclico, y por tanto tampoco es hipercíclico.*

Demostración. Por el Teorema 2.4.4, una sucesión de c-multiplicadores $(T_n)_n$ es supercíclica si y sólo si el conjunto $\{\lambda(a_{kn})_{k\geq 0} : \ \lambda \in \mathbb{C}, \ n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$. Observemos que dicha condición es equivalente a la siguiente:

Para todo $N \in \mathbb{N}_0$ el conjunto $A_N := \{\lambda(a_{0n}, \dots, a_{Nn}) :$
$\lambda \in \mathbb{C}, \, n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{C}^{N+1}$.

Esto es debido a la estructura de los abiertos de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$. Por tanto, la proposición quedará probada con sólo encontrar $N \in \mathbb{N}_0$ tal que A_N no sea denso en $\mathbb{C}^N$. Pero esto es inmediato, pues basta tener en cuenta que, con nuestras hipótesis, $a_{kn} = a_k^n$ ($k \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$) donde $(a_k)_{k\geq 0} = \sigma$, y por el Lema 2.4.5, aplicado a $N = 1$, se tiene que el conjunto $A_1 = \{\lambda(a_0^n, a_1^n) : \ \lambda \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$ no es denso en $\mathbb{C}^2$. ■

Observemos que para el caso de una sucesión $(T_n)_n$ de c-multiplicadores sí existen ejemplos de hiperciclicidad, incluso si buscamos ejemplos particulares como sucesiones de operadores diferenciales de Euler o sucesiones de operadores producto de Hadamard.

Proposición 2.4.7. (a) *En cualquier CP-espacio, existe una sucesión hipercíclica de c-multiplicadores.*

(b) *Si G es un dominio simplemente conexo de $\mathbb{C}$ con $0 \in G$, entonces existe una sucesión hipercíclica de operadores producto de Hadamard y una sucesión hipercíclica de operadores diferenciales de Euler.*

Demostración.

(a) Supongamos que X es un CP-espacio sobre cierto dominio $G \subset \mathbb{C}$ que contiene al origen. Sea $\sigma = (a_k)_{k \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ una sucesión casi nula, es decir, tal que existe $N \in \mathbb{N}$ con $a_k = 0$ para todo $k > N$. Si $f \in X$ y $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ alrededor del origen, entonces $T_\sigma f(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k f_k z^k$, luego $T_\sigma(f) \in X$, pues $\mathcal{P} \subset X$. Además, cada coeficiente funcional $f \in X \mapsto f_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} \in \mathbb{C}$ ($k \in \mathbb{N}_0$) es continuo porque la convergencia en X implica la convergencia uniforme (luego la convergencia uniforme de las derivadas) en cada compacto $K \subset G$ (en particular en $K = \{0\}$). Esto, unido al simple hecho de que X es un espacio vectorial topológico nos asegura que la aplicación $f \mapsto \sum_{k=0}^{N} a_k f_k z^k$ es continua, o lo que es lo mismo, que el c-multiplicador T_σ está bien definido sobre X.

Consideremos ahora el conjunto numerable $C := \{\sigma(n) = (a_{kn})_{k\geq 0}\} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ de todas las sucesiones casi nulas, es decir, con una cantidad finita de coeficientes no nulos, cuyas coordenadas tengan parte real e imaginaria racional. Es obvio que C es denso en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$. Por tanto, por el Teorema 2.4.4, la sucesión $(T_{\sigma(n)})_n$ es hipercíclica en X.

(b) Si C es el mismo conjunto numerable de la prueba de (a) y $\sigma(n) = (a_{kn})_{k\geq 0} \in C$, existe $m(n) \in \mathbb{N}$ tal que $a_{kn} = 0$ para todo $k > m(n)$. Entonces existe un polinomio Φ_n (por ejemplo, Φ_n puede ser el polinomio de interpolación de Lagrange, ver [47]) tal que

$$\Phi_n(k) = a_{kn} \quad (k = 0, \dots, m(n)).$$

Pero, por la estructura de los conjuntos abiertos de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$, el conjunto $C_1 := \{s(n) = (\Phi_n(k))_{k\geq 0} : \ n \in \mathbb{N}\}$ es también denso en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$. Por otra parte, $H(G)$ es un CP-espacio y, trivialmente, cada Φ_n pertenece a $H(\mathbb{C} \setminus \{1\})$ y es una función entera de tipo subexponencial, luego el operador producto de Hadamard H_{Φ_n} y el operador diferencial de Euler $\Phi_n(\mathcal{D})$ están bien definidos sobre $H(G)$, y $H_{\Phi_n} = T_{s(n)} = \Phi_n(\mathcal{D})$ $(n \in \mathbb{N})$. Finalmente, $(T_{s(n)})_n$ es una sucesión hipercíclica debido al Teorema 2.4.4, lo que concluye la prueba. ■

En contra de lo que se puede pensar tras observar el Corolario 2.4.6 sobre no existencia de c-multiplicadores supercíclicos, sí podemos garantizar, sin embargo, la existencia de c-multiplicadores cíclicos. De hecho, podemos obtener incluso una caracterización de tales operadores.

Teorema 2.4.8. *Sea X un CP-espacio sobre un dominio que contiene al origen y sea $T = T_\sigma$ un c-multiplicador sobre X. Sea $\sigma = (a_k)_{k\geq 0}$. Entonces T es cíclico si y sólo si los puntos a_k $(k \geq 0)$ son distintos dos a dos. En tal caso, el conjunto de funciones cíclicas para T es residual en X.*

Demostración. La última parte del resultado se deduce del Teorema 2.4.3 y del hecho de que T es cíclico si y sólo si $T^n = T_{\sigma(n)}$ $(n \geq 0)$ lo es, donde $\sigma(n) = (a_k^n)_{k\geq 0}$.

En cuanto a la equivalencia de la primera parte del enunciado, sabemos por el Teorema 2.4.3 que T es cíclico si y sólo si el conjunto

$$S := \operatorname{span}(\{(a_k^n)_{k\geq 0} : \ n \in \mathbb{N}\})$$

es denso en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$. Observemos que $S = \{(P(a_k))_{k\geq 0} : \ P \in \mathcal{P}\}$.

Supongamos que existen $p, q \in \mathbb{N}_0$, $p \neq q$, con $a_p = a_q$. Si S fuese denso en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$, el conjunto $\{(P(a_p), P(a_q)) \in \mathbb{C}^2 : \ P \in \mathcal{P}\}$ sería denso en $\mathbb{C}^2$, lo que es obviamente falso porque este conjunto sólo aproxima a la diagonal de $\mathbb{C}^2$. Luego S no puede ser denso.

Recíprocamente, supongamos que los puntos $\{a_k : \ k \geq 0\}$ son distintos dos a dos. Es evidente que basta probar que para todo $N \in \mathbb{N}_0$ el conjunto $S_N := \{(P(a_0), \ldots, P(a_N)) \in \mathbb{C}^{N+1} : \ P \in \mathcal{P}\}$ es denso en $\mathbb{C}^{N+1}$. De hecho, vamos a tener que $S_N = \mathbb{C}^{N+1}$. En efecto, para cualquier punto $\omega := (\omega_0, \ldots, \omega_N) \in$

$\mathbb{C}^{N+1}$, si tomamos el polinomio de interpolación P_ω en los puntos (distintos) $a_0, \ldots, a_N$ y con valores complejos $\omega_0, \ldots, \omega_N$, tenemos $P_\omega(a_j) = \omega_j$ ($j = 0, \ldots, N$). Con lo que $\omega \in S_N$ y concluye la demostración. ∎

2.5. Sobre el tamaño de $C(T_\sigma)$

Acabamos de ver que existen operadores T que son c-multiplicadores cíclicos y que todos ellos poseen un conjunto residual de elementos cíclicos. Sin embargo aún podemos decir más sobre cómo es y qué tamaño tiene $C(T)$. Entre otros resultados veremos (en el Teorema 2.5.2) que si una función f es cíclica para T entonces "muchas" funciones del espacio vectorial generado por su órbita $\{T^n f : \ n \geq 0\}$ son también cíclicas. Dicho espacio vectorial puede ser incluso ampliado si, además, exigimos que X sea Banach.

En el marco de los espacios de Banach vamos a necesitar una cierta base sobre el cálculo funcional de Dunford y, en general, sobre la teoría espectral (ver, por ejemplo, [42, Chapter 1] o [83, Chapter 10]). Si L es un operador sobre un espacio de Banach complejo E, entonces $\sigma(L)$ denotará su *espectro*, es decir,

$$\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ L - \lambda I \text{ no es invertible}\}.$$

Si L^* es el adjunto de L, entonces $\sigma(L) = \sigma(L^*)$. El *espectro puntual* $\sigma_p(L)$ de

L es el conjunto de autovalores de L, esto es,

$$\sigma_p(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ L - \lambda I \text{ no es inyectiva}\},$$

luego $\sigma_p(L) \subset \sigma(L)$. Denotemos por $\mathcal{F}(L)$ la familia de todas las funciones Φ holomorfas en cierto dominio $D(\Phi)$ que contiene a $\sigma(L)$. Entonces $H(\mathbb{C}) \subset \mathcal{F}(L) = \mathcal{F}(L^*)$. Sean $\Phi \in \mathcal{F}(L)$ y γ un ciclo de Jordan orientado positivamente que rodea a $\sigma(L)$ en el sentido contrario a las agujas del reloj y tal que tanto γ como su interior geométrico están contenidos en $D(\Phi)$. Se define el operador $\Phi(L)$ como

$$\Phi(L) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \Phi(\lambda)(\lambda I - T)^{-1} d\lambda,$$

donde la integral existe como un límite de sumas de Riemann en la norma del espacio de los operadores sobre E. Entonces $\Phi(L)$ depende sólo de Φ, y el concepto de $\Phi(L)$ extiende la definición $P(L) = \sum_{j=0}^{N} a_j L^j$, donde $P(z)$ es el polinomio $P(z) = \sum_{j=0}^{N} a_j z^j$. Otra propiedad importante es que $\Phi(L^*) = \Phi(L)^*$.

Haremos uso del siguiente resultado, que puede resultar de interés por sí mismo.

Lema 2.5.1. *Sea $T = T_\sigma$ un c-multiplicador definido sobre un CP-espacio de Banach X por una sucesión compleja σ. Entonces*

$$\sigma_p(T^*) = \sigma.$$

En particular, σ está acotada.

Demostración. Tenemos que X es un CP-espacio sobre cierto dominio $G \subset \mathbb{C}$ con $0 \in G$. La última parte del resultado se obtiene rápidamente de la inclusión $\sigma_p(T^*) \subset \sigma(T^*) = \sigma(T)$ y de la compacidad del espectro de un operador sobre un espacio de Banach.

Para la primera parte, supongamos que $\sigma = (a_k)_{k\geq 0}$. Fijemos $k \in \mathbb{N}_0$ y consideremos el funcional lineal $\varphi_k \in X^*$ (donde X^* es el espacio dual topológico de X) definido como sigue: Si $f \in X$ y $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j$ alrededor del origen, entonces $\varphi_k(f) = f_k$. Notemos que la continuidad de φ_k es consecuencia de que X sea un CP-espacio. Entonces, $\varphi_k \neq 0$. Por otro lado, $(T^*\varphi_k)(f) = \varphi_k(Tf) = a_k f_k = a_k \varphi_k(f)$ para toda $f \in X$, luego $T^*\varphi_k = a_k\varphi_k$ y φ_k es un autovector de T^* con autovalor a_k. Por tanto, $a_k \in \sigma_p(T^*)$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ y $\sigma \subset \sigma_p(T^*)$.

Recíprocamente, supongamos que $\lambda \in \sigma_p(T^*)$. Entonces debe existir un funcional $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$ con $T^*\varphi = \lambda\varphi$. Por linealidad y la densidad de $\mathcal{P}$ en X, podemos encontrar $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $\varphi(h_m) \neq 0$, donde $h_m(z) := z^m$. Pero $(T^*\varphi)(h_m) = \lambda\varphi(h_m)$, luego $\varphi(Th_m) = \lambda\varphi(h_m)$. Ahora bien, se tiene que $\varphi(Th_m) = \varphi(a_m h_m) = a_m\varphi(h_m)$, por lo que $a_m\varphi(h_m) = \lambda\varphi(h_m)$. Pero como $\varphi(h_m) \neq 0$, obtenemos $\lambda = a_m \in \sigma$, lo que prueba que $\sigma_p(T^*) \subset \sigma$, como se quería. ■

Hagamos hincapié en que debido a este último lema, cualquier función $\Phi \in$

$\mathcal{F}(T_\sigma)$ tiene sentido en los puntos de σ.

Teorema 2.5.2. *Sea X un CP-espacio sobre cierto dominio que contiene al origen y sea $f \in C(T_\sigma)$, donde T_σ es un c-multiplicador definido sobre X con sucesión $\sigma = (a_k)_{k\geq 0}$. Sea $S := \operatorname{span}(\{T^n f : n \geq 0\})$ y $A := \{P(T_\sigma)f : P \in \mathcal{P}, P(a_k) \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0\}$. Entonces se tiene:*

(a) *El conjunto A es un subconjunto de S que es denso en S, y por tanto en X.*

(b) *$A \subset C(T_\sigma)$.*

(c) *Si X es un espacio de Banach y*

$$B := \{\Phi(T_\sigma)f : \Phi \in \mathcal{F}(T_\sigma),\ \Phi(a_k) \neq 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{N}_0\},$$

entonces $A \subset B \subset C(T_\sigma)$. En particular, B es denso en X.

Demostración. Por simplificar la notación, denotaremos $T = T_\sigma$. Notemos que, por ser T cíclico y $f \in C(T)$, los puntos a_k $(k \in \mathbb{N}_0)$ son distintos dos a dos y S es denso en X.

(a) Observemos que podemos escribir $S = \{P(T)f : P \in \mathcal{P}\}$, por tanto $A \subset S$. Para la densidad, fijemos una función $g \in S \setminus A$ y un entorno U de g en X. Entonces $g = P(T)f$ para cierto $P \in \mathcal{P}$ con algún cero en $\{a_k : k \geq 0\}$. Podemos suponer que $g \not\equiv 0$, pues en tal caso un múltiplo λf de f, donde λ es una constante no nula, pequeña y adecuada, verifica que $\lambda f \in A \cap U$. Por tanto

$$P(z) = \gamma \prod_{j=1}^{r} (z - \alpha_j)^{m(j)} \cdot \prod_{j=1}^{s} (z - \beta_j)^{n(j)} \tag{2.8}$$

para ciertos $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha_j \in \{a_k : \ k \geq 0\}$ $(j = 1, \dots, r)$, $\beta_j \in \mathbb{C} \setminus \{a_k : \ k \geq 0\}$ $(j = 1, \dots, s)$, $m(j) \in \mathbb{N}$ $(j = 1, \dots, r)$ y $n(j) \in \mathbb{N}_0$ $(j = 1, \dots, s)$. Como los coeficientes de un polinomio dependen de manera continua de sus raíces, podemos cambiar los puntos $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ por puntos cercanos $\alpha'_1, \dots, \alpha'_r$ que no estén en $\{a_k : \ k \geq 0\}$ (pues $\mathbb{C} \setminus \{a_k : \ k \geq 0\}$ es denso en $\mathbb{C}$, ya que $\mathbb{C}$ es de Baire y $\{a_k : \ k \geq 0\}$ es numerable), de tal forma que $P_1(T)f \in U$ (hemos usado de nuevo que X es un espacio vectorial topológico), donde $P_1(z)$ tiene la misma expresión que $P(z)$ en (2.8) excepto que los puntos α_j han sido reemplazados por α'_j $(j = 1, \dots, r)$. Luego $P_1(T)f \in A \cap U$, lo que demuestra la densidad de A en S.

(b) Para probar que $A \subset C(T)$, fijemos $g = Q(T)f \in A$. Entonces $Q \in \mathcal{P}$ y $Q(a_k) \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Tenemos que demostrar que $\operatorname{span}(\{T^n g : \ n \geq 0\})$ es denso en X. Pero

$$\begin{aligned} \operatorname{span}(\{T^n g : \ n \geq 0\}) &= \{P(T)Q(T)f : \ P \in \mathcal{P}\} \\ &= Q(T)(\{P(T)f : \ P \in \mathcal{P}\}) \\ &= Q(T)(\operatorname{span}(\{T^n f : \ n \geq 0\})) = Q(T)(S). \end{aligned}$$

Recordemos que S es denso en X porque $f \in C(T)$. Por lo tanto, la prueba finalizará en cuanto probemos que el operador $Q(T)$ tiene rango denso. Para ello, observemos que $Q(T)$ tiene una descomposición factorial en una cantidad finita de operadores de la forma μI ($\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$), $T - \lambda I$ ($\lambda \notin \{a_k : \; k \geq 0\}$). Un operador de la forma μI tiene evidentemente rango denso, luego tan sólo resta ver que $T - \lambda I$ tiene rango denso. Como X es un CP-espacio, basta probar que $(T - \lambda I)(X) \supset \mathcal{P}$. Pero por linealidad, es suficiente ver que cada monomio z^m ($m \in \mathbb{N}_0$) está en $(T - \lambda I)(X)$. Y esto ya es sencillo, pues la función $F(z) := \dfrac{z^m}{a_m - \lambda}$ está en X (recordemos que $\mathcal{P} \subset X$ y que $a_m - \lambda \neq 0$) y $(T - \lambda I)F(z) = z^m$.

(c) Como $\mathcal{P} \subset H(\mathbb{C})$, tenemos, trivialmente, que $A \subset B$. Por tanto nuestro objetivo es demostrar que todo elemento de B es una función cíclica para T. Sea $g \in B$. Entonces existe $\Phi \in \mathcal{F}(T)$ tal que $g = \Phi(T)f$, Φ es holomorfa en un dominio $D(\Phi)$ que contiene a $\sigma(T)$ y $\Phi(a_k) \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. En este momento vamos a distinguir dos casos.

Si Φ es constante, por ejemplo $\Phi(z) \equiv \lambda \neq 0$, entonces $g = \lambda f$. De donde obviamente se deduce que g es cíclica, ya que f lo es.

Si Φ no es constante, entonces un refinamiento del teorema de la aplicación espectral [83, Theorem 10.33] asegura que $\sigma_p(\Phi(T^*)) = \Phi(\sigma_p(T^*))$. Por el Lema 2.5.1, tenemos que $\sigma_p(\Phi(T^*)) = \Phi(\{a_k : \; k \in \mathbb{N}_0\})$. Por tanto, $0 \notin \sigma_p(\Phi(T^*))$. Pero $\Phi(T^*) = \Phi(T)^*$, luego $0 \notin \sigma_p(\Phi(T)^*)$. Ahora una aplicación directa del teorema de Hahn-Banach nos permite asegurar que $\Phi(T)$ tiene rango denso. Finalmente, de forma análoga a la prueba de (b), tenemos que

$$\operatorname{span}(\{T^n g : \; n \in \mathbb{N}_0\}) = \{P(T)\Phi(T)f : \; P \in \mathcal{P}\} = \Phi(T)(S).$$

Por consiguiente, el último espacio vectorial es denso en X pues S lo es y $\Phi(T)$ tiene rango denso. Así $g \in C(T)$ y finaliza la prueba. $\blacksquare$

En el Teorema 2.4.3 probamos que el conjunto de funciones cíclicas para una sucesión $(T_n)_n$ de c-multiplicadores es no sólo no vacío sino incluso residual, en otras palabras, tal conjunto es muy grande desde el punto de vista topológico para cualquier función cíclica f. Es más, el Teorema 2.5.2 nos proporciona un conjunto explícito de funciones cíclicas que es grande topológicamente y que está contenido en la variedad lineal generada por la órbita de dicha función f. Por otra parte, si consideramos dos funciones cíclicas f, g para $(T_n)_n$, es claro que en general su suma $f+g$ no es una nueva función cíclica. Basta considerar $g = -f$. Luego el conjunto $C((T_n)_n)$ no es una variedad lineal. Por supuesto, si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $f \in C((T_n)_n)$ entonces $\lambda f \in C((T_n)_n)$, es decir, existen de hecho muchas variedades lineales de dimensión 1 contenidas en $C((T_n)_n)$. En vista de esto es lógico preguntarse lo siguiente:

> ¿Es $C((T_n)_n)$ grande en el sentido algebraico? Es decir, ¿existe alguna variedad lineal "grande" $M \subset X$ tal que $M \setminus \{0\} \subset C((T_n)_n)$?

La existencia de tales variedades lineales M, grandes en el sentido de ser densas, de dimensión infinita, ..., ha sido tratada ya para operadores hipercíclicos y supercíclicos o para sucesiones de operadores por diversos autores, ver por ejemplo [56], [59], [73]. Para el caso que nos ocupa de sucesiones de c-multiplicadores nos encontramos con un resultado negativo ya que nunca vamos a poder encontrar dichas variedades lineales grandes, según nos muestra el siguiente resultado.

Teorema 2.5.3. *Sea $(T_n)_n$ una sucesión cíclica de c-multiplicadores definidos sobre un CP-espacio X. Sea $M \neq \{0\}$ una variedad lineal tal que $M \setminus \{0\} \subset C((T_n)_n)$. Entonces* $\dim(M) = 1$.

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\dim(M) \geq 2$. Entonces existen dos funciones $f, g \in M \setminus \{0\} (\subset C((T_n)_n))$ tales que $f + \lambda g \not\equiv 0$ y $f + \lambda g \in C((T_n)_n)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Sean $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$, $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k$ alrededor del origen (recordemos que $f_k \neq 0 \neq g_k$ para cada $k \in \mathbb{N}_0$, por ser f y g cíclicas, ver Lema 2.4.2). Consideremos

$$\lambda := \frac{-f_0}{g_0}, \qquad h := f + \lambda g.$$

Por tanto $h \in M \setminus \{0\} \subset C((T_n)_n)$. Por otra parte h no puede ser cíclica ya que $h_0 = f_0 + \lambda g_0 = 0$. Por tanto tenemos una contradicción y debe ser $\dim(M) = 1$. ■

2.6. Espacios de funciones holomorfas lagunares

En esta sección vamos a realizar algunos comentarios sobre los espacios lagunares $H_Q(G)$ ($Q \subset \mathbb{N}_0$, Q infinito), ver Sección 2.2. Observemos que $H_Q(G)$ no es un CP-espacio (excepto para el caso trivial en que $Q = \mathbb{N}_0$), luego los resultados anteriores, en principio, no se pueden aplicar directamente. Sin embargo, es posible ver $H_Q(G)$, en cierta manera, como uno de tales espacios. Recordemos que $H_Q(G)$ es un F-espacio bajo la convergencia uniforme en compactos. Además, no es difícil comprobar que el conjunto $\mathcal{P}_Q := \mathcal{P} \cap H_Q(G)$ de los polinomios lagunares es denso en $H_Q(G)$ (si G es simplemente conexo). Así pues, si suponemos que Q es un conjunto infinito y escribimos $Q = \{n_l : l \geq 0\}$, podemos realizar la siguiente identificación:

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_N z^N \in \mathcal{P} \mapsto a_0 z^{n_0} + a_1 z^{n_1} + \cdots + a_N z^{n_N} \in \mathcal{P}_Q,$$

y es sencillo comprobar que es un isomorfismo entre $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}_Q$. Consecuentemente, podemos asumir –vía tal identificación– que $\mathcal{P}$ es un subconjunto denso de $H_Q(G)$, y por tanto todos los resultados para CP-espacios pueden ser apropiadamente adaptados siempre que no nos olvidemos de las lagunas. Destacamos los dos resultados siguientes:

Teorema 2.6.1. *Sean G un dominio de $\mathbb{C}$ con $0 \in G$ y $(T_n)_n$ una sucesión de c-multiplicadores sobre $H_Q(G)$ con sucesiones asociadas $(a_{kn})_{k \geq 0}$ $(n \in \mathbb{N})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *El conjunto $C((T_n)_n)$ es residual en $H_Q(G)$.*

(b) *La sucesión $(T_n)_n$ es cíclica.*

(c) *El conjunto* $\mathrm{span}(\{(a_{kn})_{k \in Q} : n \in \mathbb{N}\})$ *es denso en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$.*

Teorema 2.6.2. *Un c-multiplicador T_σ con $\sigma = (a_k)_{k\geq 0}$ definido sobre $H_Q(G)$ es cíclico si y sólo si $a_k \neq a_l$ para todo par $k, l \in Q$ con $k \neq l$.*

2.7. Sobre el Criterio de Hiperciclicidad para sucesiones

Recordemos (ver Capítulo 1) que si X es un F-espacio, entonces se dice que una sucesión $(T_n : X \to X)_n$ satisface el *Criterio de Hiperciclicidad* si existen conjuntos densos $X_0, Y_0 \subset X$ y una sucesión creciente $(n_j)_j \subset \mathbb{N}$ que verifican las dos siguientes propiedades:

(i) $T_{n_j}x \to 0$ $(j \to \infty)$ para todo $x \in X_0$.

(ii) Para todo $y \in Y_0$, existe una sucesión $(u_j)_j$ en X tal que $u_j \to 0$ y $T_{n_j}u_j \to y$ $(j \to \infty)$.

Como vimos en el Capítulo 1, aún es un problema abierto saber si cualquier operador hipercíclico T satisface el Criterio de Hiperciclicidad, es decir, si la sucesión $(T^n)_n$ de sus iteradas lo verifica. Sin embargo, no es difícil encontrar una sucesión hipercíclica de operadores de rango 1 sobre un F-espacio localmente convexo y separable X que no verifique el Criterio de Hiperciclicidad, como nos muestra el siguiente resultado elemental (ver [14]).

Proposición 2.7.1. *Sea X un F-espacio localmente convexo y separable. Sea $(x_n)_n$ una sucesión densa en X y f un funcional lineal, continuo y no trivial* *sobre X. Entonces la sucesión de operadores $(T_n)_n$ dada por*

$$T_n x := f(x)x_n \quad (x \in X,\ n \in \mathbb{N})$$

es densamente hipercíclica y no verifica el Criterio de Hiperciclicidad.

Demostración. Veamos que $(T_n)_n$ es hipercíclica. Como $f \not\equiv 0$, existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq 0$, luego $\{T_n(x) :\ n \in \mathbb{N}\} = f(x) \cdot \{x_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ y este conjunto es evidentemente denso en X. Más aún, $HC((T_n)_n) = \{x \in X :\ f(x) \neq 0\} = X \setminus \mathrm{Ker}(f)$, que es un abierto denso, porque $\mathrm{Ker}(f)$ es cerrado de interior vacío.

Por otra parte, por ser $(x_n)_x$ densa en X, se tiene que $T_n x \to 0$ en X si y sólo si $f(x) = 0$; pero $\{x \in X :\ f(x) = 0\}$ no es denso en X, y por tanto $(T_n)_n$ no puede cumplir el Criterio de Hiperciclicidad. ∎

Hemos visto en la Sección 2.4 que existen sucesiones hipercíclicas de c-multiplicadores. En esta sección vamos a probar que, por el contrario, ninguna de tales sucesiones verifica el Criterio de Hiperciclicidad. Con ello terminamos el Capítulo proporcionando toda una amplia clase de operadores donde no se pueden encontrar sucesiones que verifiquen el Criterio de Hiperciclicidad.

Proposición 2.7.2. *Sea X un CP-espacio y $(T_n)_n$ una sucesión de c-multiplicadores. Entonces $(T_n)_n$ no verifica el Criterio de Hiperciclicidad.*

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que $(T_n)_n$ verifica el Criterio de Hiperciclicidad, y sea $(n_j)_j$ la sucesión de enteros positivos dada por tal criterio. Entonces cualquier subsucesión (m_j) de (n_j) también verifica el Criterio de Hiperciclicidad, luego $(T_{m_j})_j$ es también hipercíclica. Sea $T_n = T_{\sigma(n)}$ con $\sigma(n) = (a_{kn})_{k\geq 0}$. Entonces si $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ alrededor del origen se tiene $T_n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} f_k z^k$ alrededor del origen. Si $f \in HC((T_{n_j})_j)$ entonces la sucesión $(a_{kn_j} f_k)_{j\geq 0}$ debe ser densa en $\mathbb{C}$ para todo $k \geq 0$ (y $f_k \neq 0$) puesto que la convergencia en X implica la convergencia de los coeficientes de Taylor en el origen. En particular, $(a_{0n_j})_{j\geq 0}$ debe ser densa en $\mathbb{C}$. Por tanto, existe una subsucesión creciente $(m_j)_j$ de $(n_j)_j$ con $a_{0m_j} \to 0$ $(j \to \infty)$. Pero esto demuestra la no hiperciclicidad de $(T_{m_j})_j$, lo que nos llevaría a contradicción.

Aunque la prueba ya ha concluido, podemos conseguir otra demostración mucho más directa. De nuevo por reducción al absurdo, supongamos que $(T_n)_n$ verifica el Criterio de Hiperciclicidad, por tanto tenemos los conjuntos densos X_0 e Y_0 de X y la sucesión creciente $(n_j)_j \subset \mathbb{N}$. Como X es un CP-espacio, el conjunto $\{f \in X : \ f(0) = 0\}$ es cerrado (pues la convergencia en X implica la convergencia puntual) y no es todo X, pues $1 \in X$. Luego el conjunto $\{f \in X : \ f(0) \neq 0\}$ es un abierto no vacío de X; y por tanto, por densidad, existen $f \in X_0$ y $g \in Y_0$, con $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$, $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k$ alrededor del origen, tales que $f_0 \neq 0 \neq g_0$. Entonces, $T_{n_j} f \to 0$ cuando $j \to \infty$, de donde $a_{0n_j} f_0 \to 0$, y como $f_0 \neq 0$,

$$a_{0n_j} \to 0 \qquad (j \to \infty). \tag{2.9}$$

Más aún, existe una sucesión $(h_j)_j \subset X$ tal que $h_j \to 0$ y $T_{n_j} h_j \to g$ cuando $j \to \infty$. Sea $h_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{kj} z^k$ alrededor del origen. Entonces, como X es un CP-espacio,

$$h_{0j} \to 0 \qquad (j \to \infty). \tag{2.10}$$

Pero $T_{n_j} h_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn_j} h_{kj} z^k$ alrededor del origen, luego $a_{0n_j} h_{0j} \to g_0 \neq 0$ $(j \to \infty)$ lo que contradice (2.9) y (2.10).

Demos aún una tercera prueba, esta vez más indirecta: Si $(T_n)_n$ verificase el Criterio de Hiperciclicidad, entonces por un resultado de Bernal y Grosse-Erdmann [22, Theorem 2.2], el cual a su vez extiende un importante teorema de Bès y Peris [26, Theorem 2.3], existiría una subsucesión $(T_{n_k})_k$ tal que cada subsucesión suya es densamente hipercíclica. Esto, por un resultado de Bernal [13, Theorem 2] implicaría que existe una variedad lineal densa $M \subset X$ tal que $M \setminus \{0\} \subset HC((T_n)_n)$, lo que contradice el Teorema 2.5.3.

$\blacksquare$

Capítulo 3

Subespacios vectoriales de funciones holomorfas con cluster sets maximales bajo operadores

3.1. Introducción

Como ya apuntamos en el Capítulo 1, en 2001 Bernal y Calderón [16] definen el concepto de operadores con imágenes densas por doquier (DI-operadores) como aquellos operadores T (continuos pero no necesariamente lineales) sobre $H(G)$ (con G un dominio de $\mathbb{C}$) para los cuales los conjuntos

$$M(T, A) = \{f \in H(G) : \ C_A(Tf) = \mathbb{C}\}$$

son residuales en $H(G)$, es decir, topológicamente grandes. Estrictamente, la definición original de los conjuntos $M(T, A)$ fue la siguiente:

$$M(T, A) = \{f \in H(G) : \ Tf(A) \text{ es denso en } \mathbb{C}\}.$$

Sin embargo, observemos que por la continuidad del operador T, si $M(T, A) \neq \varnothing$ entonces el conjunto A es no relativamente compacto en G y se tiene que $M(T, A) = \{f \in H(G) : \ C_A(Tf) = \mathbb{C}\}$. En el mismo trabajo, dichos autores proporcionan diversas condiciones suficientes y/o necesarias para que un operador T sea DI y dan diversos ejemplos de éstos. En particular, caracterizan aquellos operadores de composición y multiplicación que son DI-operadores.

En este capítulo vamos a centrarnos en el "tamaño algebraico"de $M(T, A)$, donde ahora T será un operador continuo y *lineal*. Nuestro objetivo es garantizar que cada conjunto $M(T, A)$ es "grande" también en este sentido.

3.2. El caso simplemente conexo para la identidad

Supongamos que $G \subset \mathbb{C}$ es un dominio simplemente conexo y sea $T = I =$ el operador identidad. Una sucesión $(\varphi_n)_n \subset \mathrm{Aut}(G) := \{$automorfismos de $G\}$ se dice que es *fugitiva* si para cualquier compacto $K \subset G$ existe $m \in \mathbb{N}$ con $K \cap \varphi_m(K) = \varnothing$. Este concepto fue introducido por Bernal y Montes en [23], donde además caracterizan las sucesiones de automorfismos fugitivas de $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. En concreto, una sucesión $(\varphi_n)_n \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ es fugitiva si y sólo si $\limsup_{n\to\infty} |\varphi_n(0)| = 1$ (ver [23, Proposition 2.5]) y una sucesión $(\varphi_n(z) = a_n z + b_n)_n \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ es fugitiva si y sólo sin $\limsup_{n\to\infty}(\min\{|b_n/a_n|, |b_n|\}) = +\infty$ (ver [23, Proposition 2.3]). En 1995 Bernal y Montes [24] demuestran el siguiente resultado.

Teorema 3.2.1. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio no isomorfo a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sea $(\varphi_n)_n \subset \mathrm{Aut}(G)$ una sucesión fugitiva. Entonces existe un subespacio vectorial F de $H(G)$ cerrado y de dimensión infinita tal que para cada función $f \in F \setminus \{0\}$ el conjunto $\{f \circ \varphi_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $H(G)$.*

Como consecuencia de este resultado, podemos obtener que $M(I, A)$ es “grande” en el sentido algebraico. Bastará tener en cuenta el siguiente lema auxiliar.

Lema 3.2.2. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo. Para cualquier sucesión $(a_n)_n \subset G$ con $a_n \to t \in \partial G$ y cualquier $z_0 \in G$, existe una sucesión fugitiva $(\varphi_n) \subset \mathrm{Aut}(G)$ con $\varphi_n(z_0) = a_n$ $(n \in \mathbb{N})$.*

Demostración. El caso $G = \mathbb{D}$, $z_0 = 0$ es claro, ya que basta considerar $\phi_n(z) := \dfrac{z + a_n}{1 + \overline{a_n} z}$, pues $(\phi_n) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ y es fugitiva ya que $\lim_{n\to\infty} |\phi_n(0)| = \lim_{n\to\infty} |a_n| = |t| = 1$. Para el caso $G \neq \mathbb{C}$, basta tomar $\varphi_n := h^{-1} \circ \phi_n \circ h$, donde $h : G \to \mathbb{D}$ es un isomorfismo –dado por el Teorema del isomorfismo de Riemann– tal que $h(z_0) = 0$ y $(\phi_n)_n$ es la sucesión anterior (donde a_n se cambia por $h(a_n)$). Por último, si $G = \mathbb{C}$, consideramos $\varphi_n(z) = z - z_0 + a_n$.

Así $(\varphi_n)_n \subset \mathrm{Aut}(G)$ y es fugitiva porque $a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. ■

Proposición 3.2.3. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo. Sea $A \subset G$ no relativamente compacto. Entonces existe un subespacio vectorial F de $H(G)$ cerrado y de dimensión infinita tal que*

$$F \setminus \{0\} \subset M(I, A).$$

Demostración. Por ser A no relativamente compacto en G, existen una sucesión $(a_n)_n \subset A(\subset G)$ y un punto $t \in \partial G$ tales que $a_n \to t$ $(n \to \infty)$. Sea $z_0 \in G$ fijo. Por el Lema 3.2.2 existe una sucesión fugitiva $(\varphi_n)_n \subset \mathrm{Aut}(G)$ con $\varphi_n(z_0) = a_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Entonces, por el Teorema 3.2.1, existe un subespacio vectorial $F \subset H(G)$ cerrado y de dimensión infinita tal que $\{f \circ \varphi_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $H(G)$ para toda $f \in F \setminus \{0\}$. Veamos por último que $F \setminus \{0\} \subset M(I, A)$. Sea $f \in F \setminus \{0\}$ y $\omega \in \mathbb{C}$. Entonces existe $(n_k)_k \subset \mathbb{N}$ tal que

$$f \circ \varphi_{n_k} \to \omega \quad \text{uniformemente en compactos de } G \quad (k \to \infty).$$

En particular, si $K = \{z_0\}$,

$$f(a_{n_k}) = f(\varphi_{n_k}(z_0)) \to \omega \qquad (k \to \infty).$$

Luego $\{f(a_n) : \ n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{C}$ y $f \in M(I, A)$. ■

La proposición anterior nos ha permitido dar una respuesta rápida a nuestro problema para el caso de dominios simplemente conexos, es decir, de dominios cuyo complemento en $\mathbb{C}_\infty$ posee sólo una componente conexa. Desafortunadamente, si $G \subset \mathbb{C}$ es un dominio de conexividad finita cuyo complemento tiene 3 o más componentes, sólo existe un número finito de automorfismos de G (ver [60]) y no hay sucesiones fugitivas. Por tanto el proceso anterior no es válido en general, incluso para el operador identidad, y necesitaremos otro tipo de razonamiento para el caso de un dominio $G \subset \mathbb{C}$.

3.3. Condiciones necesarias y/o suficientes en el caso general

En esta sección obtendremos condiciones generales suficientes, y en cierto sentido mínimas, para la existencia de un subespacio vectorial cerrado de dimensión infinita en $M(T, A) \cup \{0\}$, sin que se pierda la residualidad. En [16] Bernal y Calderón ya obtuvieron diversas condiciones suficientes que aseguraban la residualidad de los conjuntos $M(T, A)$. En ellas un factor importante es la existencia de una cierta continuidad o estabilidad fronteriza para el operador T que nos permita controlar el comportamiento de las imágenes $Tf(a)$ para puntos a "cerca" de ∂G. Dicha propiedad fue llamada "estabilidad puntual en la frontera".

Antes de continuar, recordemos que por $\mathcal{K}(G)$ denotamos la familia de compactos $K \subset G$ tales que $G \setminus K$ tiene componentes conexas no relativamente compactas, y por $\mathcal{K}_1(G)$ la familia de compactos $K \subset G$ tales que $\mathbb{C} \setminus K$ es conexo. Observemos que en cualquier dominio $G \subset \mathbb{C}$ es posible considerar una sucesión exhaustiva de compactos de G contenida en $\mathcal{K}(G)$ (ver [40]).

Definición 3.3.1. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio. Diremos que un operador lineal y continuo $T : H(G) \to H(G)$ es* puntualmente estable en la frontera de G *si y sólo si se verifica la siguiente propiedad:*

> *Para cada compacto $K \subset G$ existe un compacto $L \subset G$ tal que para cada punto $a \in G \setminus L$ y cada número positivo $\varepsilon > 0$ existen un conjunto $B \in \mathcal{K}_1(G)$ con $B \subset G \setminus K$ y un número $\delta > 0$ tales que para cada función $f \in H(G)$, se tiene*
>
> $$\|f\|_B < \delta \Longrightarrow |Tf(a)| < \varepsilon.$$

Observemos que la definición de estabilidad anterior no es en absoluto artificial, de hecho se cumple (como se verá en la Sección 3.4) para diversas clases de operadores clásicos como los operadores diferenciales de orden infinito, los operadores de composición por la derecha y los operadores de multiplicación.

Debemos comentar que la definición de estabilidad puntual dada es ligeramente más débil que la original de Bernal y Calderón [16, p. 101]; en ésta se exigía que el conjunto B fuese una bola contenida en $G \setminus K$. Sin embargo este hecho no es fundamental en las demostraciones de [16] y todas ellas, y con ello los resultados, son válidas con esta "nueva" definición de estabilidad.

Para obtener nuestros principales resultados (Teoremas 3.3.3 y 3.3.4) sobre el tamaño algebraico de los conjuntos $M(T,A)$ necesitaremos antes un resultado topológico auxiliar.

Lema 3.3.2. *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un dominio, $(K_n)_{n\geq 0}$ una sucesión exhaustiva de compactos de G y $(C_n)_n$ una sucesión de compactos de G. Entonces existe una sucesión creciente $(n_k)_k \subset \mathbb{N}_0$ tal que para cada conjunto finito $I \subset \mathbb{N}_0$ con primer elemento "l" y último "s" se tiene*

$$K_{n_l} \cup \left(\bigcup_{i\in I} C_{n_i} \right) \subset K_{n_{s+1}}.$$

Demostración. Sea $n_0 := 0$. Por inducción, supongamos que tenemos $n_0 < n_1 < \cdots < n_k$. Como $(K_n)_n$ es exhaustiva y la unión finita de compactos sigue siendo compacta, existe $n_{k+1} > n_k$ tal que $K_{n_k} \cup C_{n_0} \cup \cdots \cup C_{n_k} \subset K_{n_{k+1}}$. Así, para $I \subset \mathbb{N}_0$ como en la hipótesis,

$$K_{n_l} \cup \left(\bigcup_{i\in I} C_{n_i} \right) \subset K_{n_s} \cup \left(\bigcup_{i=0}^{s} C_{n_i} \right) \subset K_{n_{s+1}}$$

como se pretendía. ■

Ya estamos en condiciones de enunciar el primero de lo resultados principales, en el que, una vez fijado el conjunto no relativamente compacto A, proporcionamos condiciones suficientes para incluir un subespacio vectorial cerrado y de dimensión infinita dentro de $M(T,A) \cup \{0\}$.

Teorema 3.3.3. *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un dominio, $T : H(G) \to H(G)$ un operador lineal y continuo y A un subconjunto no relativamente compacto de G. Supongamos que T satisface las siguientes condiciones:*

(∗) *T es puntualmente estable en la frontera de G.*

(∗∗) *Para cualquier sucesión $(a_n)_n \subset A$ no relativamente compacta, existen una sucesión creciente $(n_k)_k \subset \mathbb{N}_0$ y una sucesión de funciones $(g_k)_k \in H(G)$ tales que $Tg_k(a_{n_k}) \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Entonces existe un subespacio vectorial F de $H(G)$ cerrado y de dimensión infinita tal que $F \setminus \{0\} \subset M(T, A)$.

Demostración. Sean $(q_n)_{n\geq 0}$ una sucesión densa en $\mathbb{C}$, $(\varrho_m)_{m\geq 0}$ una sucesión de números positivos tales que $\sum_{m=0}^{\infty} \varrho_m < 1$ y $(K_n)_{n\geq 0}$ una sucesión exhaustiva de compactos de G tales que $K_n \in \mathcal{K}(G)$ $(n \geq 0)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $K_0 \subset \overline{\mathbb{D}} \subset G$.

Para cada par de enteros positivos $m, n \geq 0$, sea $i(m, n) := \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$ y definamos la sucesión $(p_i)_{i\geq 0}$ como $p_{i(m,n)} = q_n$ para cada $m \geq 0$. Nótese que cada $i \in \mathbb{N}_0$ puede escribirse como $i = i(m, n)$ para un único par $(m, n) \in \mathbb{N}_0^2$. Por tanto cada número q_n aparece infinitas veces en la sucesión $(p_i)_i$.

1.- Fijemos una sucesión $(b_j)_j \subset A$ tal que $b_j \to t$ $(j \to \infty)$ para cierto punto $t \in \partial G$. Dado $M_0 := K_0$, sea L_0 el compacto dado por la estabilidad de T. Entonces existe un número $k_0 \geq 0$ y un punto $a_0 \in (b_j)_j$ tales que

$a_0 \in G \setminus K_{k_0} \subset G \setminus L_0$, y sea $\varepsilon_0 := 1$. Por $(*)$, existe un compacto $B_0 \subset G \setminus M_0$ con $B_0 \in \mathcal{K}_1(G)$ y un número $\delta_0 > 0$ tales que para cada función $f \in H(G)$ se tiene que

$$\|f\|_{B_0} < \delta_0 \Longrightarrow |Tf(a_0)| < \varepsilon_0 = 1.$$

Por inducción, sea M_n el compacto $M_n := K_n \cup \left(\bigcup_{j=0}^{n-1} B_j \right)$ y L_n el compacto dado por la estabilidad de T aplicada sobre M_n. Entonces existen un número $k_n (\geq k_{n-1})$ y un punto $a_n \in (b_j)_j$ tales que $a_n \in G \setminus K_{k_n} \subset G \setminus L_n$, y sea $\varepsilon_n := 1/2^n$. Por $(*)$, existen un compacto $B_n \subset G \setminus M_n$ con $B_n \in \mathcal{K}_1(G)$ y un número positivo δ_n, que podemos suponer menor que δ_{n-1}, tales que para cada función $f \in H(G)$ se tiene

$$\|f\|_{B_n} < \delta_n \Longrightarrow |Tf(a_n)| < \frac{1}{2^n}. \tag{3.1}$$

Observemos que por construcción los compactos $(B_n)_n$ son disjuntos dos a dos. Además, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la sucesión exhaustiva $(K_n)_n$ y la sucesión de compactos $(B_n)_n$ verifican la tesis del Lema 3.3.2 (el hecho de considerar las subsucesiones (K_{n_k}) y (B_{n_k}), como deberíamos, sólo supone una complicación innecesaria de la notación).

La sucesión $(a_n)_n$ construida está contenida en A y tiende a $t \in \partial G$, luego por $(**)$ existen una sucesión de funciones $(h_n)_n \subset H(G)$ y una subsucesión de enteros positivos, que de nuevo podemos suponer sin pérdida de generalidad que es la sucesión completa, tal que $Th_n(a_n) \neq 0$ para todo $n \geq 0$. Sea

$g_n(z) := \dfrac{p_n}{Th_n(a_n)} \cdot h_n(z) \in H(G)$; entonces

$$Tg_n(a_n) = p_n \quad \text{para todo } n \geq 0. \tag{3.2}$$

2.- Vamos a construir una sucesión de funciones $(f_m)_m \subset H(G)$ con las siguientes propiedades:

(a) Para todo $m \geq 0$, $\|f_m(z) - z^m\|_{\overline{\mathbb{D}}} < \varrho_m$.

(b) Para todo $m, n \geq 0$, $\|f_m(z) - g_{i(m,n)}(z)\|_{B_{i(m,n)}} < \delta_{i(m,n)}$.

(c) Para todo $m, n \geq 0$ y $k \neq m$, $\|f_m(z)\|_{B_{i(k,n)}} < \delta_{i(k,n)}$.

Para cada $m \geq 0$ definamos el compacto $L_{m,0}$ como $L_{m,0} := K_0 \cup \left(\bigcup_{j=0}^{i(m,0)} B_j \right)$ ($\subset K_{i(m,0)+1}$) y la función $h_{m,0} : L_{m,0} \to \mathbb{C}$ como

$$h_{m,0}(z) := \begin{cases} z^m & \text{si} \quad z \in K_0 \\ 0 & \text{si} \quad z \in B_j, \ 0 \leq j < i(m,0) \\ g_{i(m,0)}(z) & \text{si} \quad z \in B_{i(m,0)}. \end{cases}$$

Notemos que $L_{m,0} \in \mathcal{K}(G)$ porque es una unión finita de compactos disjuntos dos a dos, y que $h_{m,0} \in \mathcal{A}(L_{m,0})$. Así, por el teorema de Mergelyan (Teorema 1.4.2), para cada $m \geq 0$ existe una función racional $q_{m,0}(z)$ con polos fuera de G (por tanto $q_{m,0} \in H(G)$) tal que

$$\|h_{m,0}(z) - q_{m,0}(z)\|_{L_{m,0}} < \text{mín} \left\{ \frac{\varrho_m}{2^{i(m,0)+1}}, \frac{\delta_{i(m,0)}}{2} \right\}.$$

Por tanto, para cada $m \geq 0$ se tiene

$$\|q_{m,0}(z) - z^m\|_{K_0} < \text{mín}\left\{\frac{\varrho_m}{2^{i(m,0)+1}}, \frac{\delta_{i(m,0)}}{2}\right\},$$

$$\|q_{m,0}(z)\|_{B_j} < \frac{\delta_{i(m,0)}}{2} \quad (0 \leq j < i(m,0))$$

y

$$\|q_{m,0}(z) - g_{i(m,0)}(z)\|_{B_{i(m,0)}} < \frac{\delta_{i(m,0)}}{2}.$$

Por inducción sobre "n", para cada $m \geq 0$ definimos el compacto $L_{m,n}$ como

$$L_{m,n} := K_{i(m,n-1)+1} \cup \left(\bigcup_{j=i(m,n-1)+1}^{i(m,n)} B_j\right) (\subset K_{i(m,n)+1})$$

y la función $h_{m,n} : L_{m,n} \to \mathbb{C}$ como

$$h_{m,n}(z) := \begin{cases} q_{m,n-1}(z) & \text{si} \quad z \in K_{i(m,n-1)+1} \\ 0 & \text{si} \quad z \in B_j,\ i(m,n-1)+1 \leq j < i(m,n) \\ g_{i(m,n)}(z) & \text{si} \quad z \in B_{i(m,n)}. \end{cases}$$

De nuevo, $L_{m,n} \in \mathcal{K}(G)$ y $h_{m,n} \in \mathcal{A}(L_{m,n})$. Luego, por el teorema de Mergelyan (Teorema 1.4.2), para cada $m \geq 0$ existe una función $q_{m,n}(z) \in H(G)$ tal que

$$\|h_{m,n}(z) - q_{m,n}(z)\|_{L_{m,n}} < \text{mín}\left\{\frac{\varrho_m}{2^{i(m,n)+1}}, \frac{\delta_{i(m,n)}}{2^{n+1}}\right\}.$$

Así, para cada $m \geq 0$ se tiene:

$$\|q_{m,n}(z) - q_{m,n-1}(z)\|_{K_{i(m,n-1)+1}} < \text{mín}\left\{\frac{\varrho_m}{2^{i(m,n)+1}}, \frac{\delta_{i(m,n)}}{2^{n+1}}\right\}, \tag{3.3}$$

$$\|q_{m,n}(z)\|_{B_j} < \frac{\delta_{i(m,n)}}{2^{n+1}} \quad (i(m,n-1)+1 \le j < i(m,n)) \tag{3.4}$$

y

$$\|q_{m,n}(z) - g_{i(m,n)}(z)\|_{B_{i(m,n)}} < \frac{\delta_{i(m,n)}}{2^{n+1}}. \tag{3.5}$$

Para cada $m \ge 0$, $i(m,n) \to \infty$ $(n \to \infty)$, de donde la sucesión de compactos $(K_{i(m,n-1)+1})_n$ es exhaustiva. Esto y (3.3) junto con la desigualdad triangular nos asegura que para cada $m \ge 0$ la sucesión $(q_{m,n})_n$ es de Cauchy en $H(G)$. Por tanto existe una función $f_m \in H(G)$ tal que $q_{m,n}(z) \to f_m(z)$ uniformemente convergente en compactos de G. Además, para cada $l \ge 0$ la función f_m puede escribirse como

$$f_m(z) = q_{m,l}(z) + \sum_{j \ge l}(q_{m,j+1}(z) - q_{m,j}(z)).$$

Puesto que $\overline{\mathbb{D}} \subset K_0 \subset K_{i(m,j)+1}$ $(j \ge 0)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|f_m(z) - z^m\|_{\overline{\mathbb{D}}} &\le \|q_{m,0}(z) - z^m\|_{K_0} + \sum_{j=0}^{\infty} \|q_{m,j+1}(z) - q_{m,j}(z)\|_{K_{i(m,j)+1}} \\
&< \frac{\varrho_m}{2^{i(m,0)+1}} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varrho_m}{2^{i(m,j+1)+1}} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varrho_m}{2^{i(m,j)+1}} < \varrho_m
\end{aligned}$$

y se tiene (a).

Para obtener (b) fijamos $m, n \ge 0$. Para todo $j \ge n$ se cumple $B_{i(m,n)} \subset$

$K_{i(m,n)+1} \subset K_{i(m,j)+1}$, y por (3.3) y (3.5),

$$\begin{aligned}\|f_m(z) - g_{i(m,n)}(z)\|_{B_{i(m,n)}} &\leq \|q_{m,n}(z) - g_{i(m,n)}(z)\|_{B_{i(m,n)}} \\ &\quad + \sum_{j=n}^{\infty} \|q_{m,j+1}(z) - q_{m,j}(z)\|_{B_{i(m,n)}} \\ &< \frac{\delta_{i(m,n)}}{2^{n+1}} + \sum_{j=n}^{\infty} \|q_{m,j+1}(z) - q_{m,j}(z)\|_{K_{i(m,j)+1}} \\ &< \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\delta_{i(m,j)}}{2^{j+1}}.\end{aligned}$$

Pero la sucesión $(\delta_n)_n$ es decreciente, y para todo $j \geq n$, $i(m,j) \geq i(m,n)$, luego

$$\|f_m(z) - g_{i(m,n)}(z)\|_{B_{i(m,n)}} < \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\delta_{i(m,j)}}{2^{j+1}} \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\delta_{i(m,n)}}{2^{j+1}} \leq \delta_{i(m,n)},$$

y tenemos (b).

Fijemos ahora $m, n \geq 0$ y $k \neq m$. Por la construcción de los números $i(m,n)$, existe un único $r > 0$ tal que $i(m, r-1) < i(k,n) < i(m,r)$; entonces por (3.4)

$$\|q_{m,r}(z)\|_{B_{i(k,n)}} < \frac{\delta_{i(m,r)}}{2^{r+1}}.$$

Para todo $j \geq r$,

$$B_{i(k,n)} \subset K_{i(k,n)+1} \subset K_{i(m,r)} \subset K_{i(m,j)+1},$$

luego por (3.3),

$$\|q_{m,j+1}(z) - q_{m,j}(z)\|_{B_{i(k,n)}} \leq \|q_{m,j+1}(z) - q_{m,j}(z)\|_{K_{i(m,j)+1}} < \frac{\delta_{i(m,j+1)}}{2^{j+2}}.$$

Además, por ser $(\delta_n)_n$ decreciente,

$$\delta_{i(m,j+1)} \leq \delta_{i(m,r)} \leq \delta_{i(k,n)} \quad (j \geq r).$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\|f_m(z)\|_{B_{i(k,n)}} &\leq \|q_{m,r}(z)\|_{B_{i(k,n)}} + \sum_{j=r}^{\infty} \|q_{m,j+1}(z) - q_{m,j}(z)\|_{B_{i(k,n)}} \\
&< \frac{\delta_{i(m,r)}}{2^{r+1}} + \sum_{j=r}^{\infty} \frac{\delta_{i(m,j+1)}}{2^{j+2}} < \frac{\delta_{i(m,r)}}{2^{r+1}} + \sum_{j=r}^{\infty} \frac{\delta_{i(m,r)}}{2^{j+2}} \\
&= \delta_{i(m,r)} \sum_{j=r}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} < \delta_{i(m,r)} < \delta_{i(k,n)}.
\end{aligned}$$

Luego (c) está probado, y hemos terminado la construcción de la sucesión de funciones $(f_m)_{m\geq 0} \subset H(G)$ buscada.

Por otra parte, por (3.2),

$$\begin{aligned}
T(f_m - g_{i(m,n)})(a_{i(m,n)}) &= Tf_m(a_{i(m,n)}) - Tg_{i(m,n)}(a_{i(m,n)}) \\
&= Tf_m(a_{i(m,n)}) - p_{i(m,n)} \\
&= Tf_m(a_{i(m,n)}) - q_n,
\end{aligned}$$

para todo $m, n \geq 0$. Así, por (b) y (3.1),

$$|Tf_m(a_{i(m,n)}) - q_n| = |T(f_m - g_{i(m,n)})(a_{i(m,n)})| < \frac{1}{2^{i(m,n)}} < \frac{1}{2^n};$$

y por (c) y (3.1), si $k \neq m$,

$$|Tf_m(a_{i(k,n)})| < \frac{1}{2^{i(k,n)}} < \frac{1}{2^n}.$$

En resumen, hemos construido una sucesión de funciones $(f_m)_{m\geq 0} \subset H(G)$ tales que:

$$\|f_m(z) - z^m\|_{\overline{\mathbb{D}}} < \varrho_m \quad (m \geq 0), \tag{3.6}$$

$$|Tf_m(a_{i(m,n)}) - q_n| < \frac{1}{2^{i(m,n)}} < \frac{1}{2^n} \quad (m, n \geq 0) \tag{3.7}$$

y

$$|Tf_m(a_{i(k,n)})| < \frac{1}{2^{i(k,n)}} < \frac{1}{2^n} \quad (m, n \geq 0,\ k \neq m). \tag{3.8}$$

3.- Sea E el subespacio vectorial generado por $(f_m)_{m\geq 0}$ y denotemos por F su clausura en $H(G)$. Es claro que F es un subespacio vectorial cerrado de $H(G)$. Veamos que F es el espacio vectorial buscado, es decir, que es de dimensión infinita y que $F \setminus \{0\} \subset M(T, A)$.

Para demostrar que el espacio F es de dimensión infinita vamos a seguir un razonamiento análogo al realizado en [24, Theorem 1.2]. Consideremos el espacio $L^2(\mathbb{T})$ y su base ortonormal $(z^m)_{m\geq 0}$. Por (3.6), obtenemos la desigualdad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|z^m - f_m(z)\|_2 \leq \sum_{m=0}^{\infty} \|z^m - f_m(z)\|_{\overline{\mathbb{D}}} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \varrho_m < 1.$$

Gracias a la Proposición 1.3.2, la sucesión $(f_m)_{m\geq 0}$ es una sucesión básica de $L^2(\mathbb{T})$. Por tanto, las funciones $(f_m)_{m\geq 0}$ son linealmente independientes y F es un espacio de dimensión infinita.

Tan sólo resta probar que $F \setminus \{0\} \subset M(T, A)$. Sea $f \in F \setminus \{0\}$ y sea $f = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m f_m$ su representación en $L^2(\mathbb{T})$. Como $f \neq 0$, existe algún $k \geq 0$

tal que $\alpha_k \neq 0$, de hecho podemos suponer que $\alpha_k = 1$ porque si $f \in M(T, A)$ entonces $\lambda f \in M(T, A)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Por ser $F = \overline{E}$, existe una sucesión $\left(h_l := \sum_{m=0}^{N_l} \alpha_m^{(l)} f_m \right)_{l \geq 0} \subset E$ convergente a f en $H(G)$. Siempre podemos suponer que $\alpha_k^{(l)} = 1$ para todo $l \geq 0$; caso contrario basta considerar la sucesión $(h_l^*)_{l \geq 0}$ obtenida al descomponer $h_l = h_l^* + (\alpha_k^{(l)} - 1) f_k$. Entonces cada h_l^* tiene su k-ésimo coeficiente igual a 1, la sucesión $(h_l^*)_{l \geq 0}$ está también contenida en E, y $h_l^* \to f$ en $H(G)$ porque al ser $(f_m)_{m \geq 0}$ una base de F se tiene que $\alpha_k^{(l)} \to \alpha_k = 1$ $(l \to \infty)$ y de aquí $(\alpha_k^{(l)} - 1) f_k \to 0$ $(l \to \infty)$ uniformemente en compactos de G.

Para cada k, n el conjunto $B_{i(k,n)}$ es un compacto contenido en G, luego existe $l \geq 0$ tal que

$$\|h_l - f\|_{B_{i(k,n)}} < \delta_{i(k,n)};$$

y por (3.1) y la linealidad de T,

$$|Th_l(a_{i(k,n)}) - Tf(a_{i(k,n)})| < \frac{1}{2^{i(k,n)}} < \frac{1}{2^n}.$$

Entonces por la desigualdad triangular, (3.7) y (3.8),

$$\begin{aligned} |Tf(a_{i(k,n)}) - q_n| &\leq |Tf(a_{i(k,n)}) - Th_l(a_{i(k,n)})| + |Th_l(a_{i(k,n)}) - q_n| \\ &\leq \frac{1}{2^n} + |Tf_k(a_{i(k,n)}) - q_n| + \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{N_l} |\alpha_m^{(l)} Tf_m(a_{i(k,n)})| \\ &\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{N_l} |\alpha_m^{(l)}| \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \cdot C, \end{aligned}$$

donde $C := 1 + \sum_{m=0}^{N_l} |\alpha_m^{(l)}|$ es una constante que no depende de n. Luego

$$\lim_{n\to\infty} \big(Tf(a_{i(k,n)}) - q_n\big) = 0.$$

Finalmente (q_n) es denso en $\mathbb{C}$, por tanto $\{Tf(a_{i(k,n)}) : \ n \in \mathbb{N}\}$ también lo es y se tiene que $f \in M(T, A)$. Esto concluye la demostración. ■

Ya tenemos condiciones suficientes para que $M(T, A)$ sea "grande" algebraicamente. Por otra parte, en el marco de operadores puntualmente estables en la frontera del dominio G, se sabe que si $M(T, A)$ es no vacío entonces es siempre residual (ver [16, Theorem 3.4]). Este hecho nos permite asegurar que $M(T, A)$ es "grande" algebraica y topológicamente si se tienen condiciones suficientes mínimas.

Teorema 3.3.4. *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un dominio y $T : H(G) \to H(G)$ un operador lineal, continuo y puntualmente estable en la frontera. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *Para cualquier sucesión no relativamente compacta $(a_n)_n \subset G$ existe una sucesión creciente $(n_k)_k \subset \mathbb{N}_0$ y una sucesión de funciones $(g_k)_k \subset H(G)$ tales que $Tg_k(a_{n_k}) \neq 0$ para todo $k \geq 0$.*

(2) *Para cualquier conjunto $A \subset G$ no relativamente compacto existe un subespacio vectorial F cerrado en $H(G)$ y de dimensión infinita tal que $F \setminus \{0\} \subset M(T, A)$.*

(3) *Para cualquier conjunto* $A \subset G$ *no relativamente compacto el conjunto* $M(T, A)$ *es no vacío.*

(4) *El operador* T *es DI, es decir,* $M(T, A)$ *es residual para todo* $A \subset G$ *no relativamente compacto.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): Se deriva directamente de la aplicación del Teorema 3.3.3 a cualquier conjunto no relativamente compacto $A \subset G$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Trivial.

(3) $\Rightarrow$ (1): Si suponemos (3), entonces para cualquier sucesión $(a_n) \subset G$ no relativamente compacta existe una función $f \in H(G)$ tal que el conjunto $\{Tf(a_n) : \ n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{C}$. Por tanto existe una sucesión creciente $(n_k)_k \subset \mathbb{N}$ con $Tf(a_{n_k}) \neq 0$ para todo $k \geq 0$, y basta tomar $g_k := f \in H(G)$ para que $Tg_k(a_{n_k}) \neq 0$.

(4) $\Rightarrow$ (3): Trivial.

(3) $\Rightarrow$ (4): Se deriva de [16, Theorem 3.4]. ∎

Resaltemos el hecho de que la condición "mínima" (1) implica que $M(T, A)$ es, simultáneamente, algebraica y topológicamente grande para todo conjunto $A \subset G$ no relativamente compacto. A partir de ahora utilizaremos la siguiente definición.

Definición 3.3.5. *Diremos que un operador lineal y continuo* T *sobre* $H(G)$ tiene imágenes extensas y densas por doquier *o que es un* LDI-operador *si* *para cualquier $A \subset G$ no relativamente compacto el conjunto $M(T, A) \cup \{0\}$ es residual y contiene un subespacio vectorial cerrado e infinito–dimensional.*

En cuanto a ejemplos de operadores que verifiquen la condición de estabilidad del Teorema 3.3.4 nos remitimos a la Sección 3.4. Por otra parte, la condición (1) es fácilmente comprobable, por ejemplo, basta con que el rango de un operador T contenga una constante no nula. Pero podemos establecer condiciones más generales, como muestra el siguiente lema.

Lema 3.3.6. *Sea $T : H(G) \to H(G)$ un operador lineal y continuo. Si el rango de T contiene algún polinomio no nulo, entonces T verifica la condición* (1) *del Teorema 3.3.4.*

Demostración. Supongamos que $p(z) \not\equiv 0$ es un polinomio que está en el rango de T. Entonces existe una función $g \in H(G)$ tal que $Tg(z) = p(z)$. Como $p \not\equiv 0$, el conjunto de sus raíces es finito, luego para cualquier sucesión $(a_n)_n \subset G$ no relativamente compacta, existe un entero $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $Tg(a_n) \neq 0$ para todo $n \geq n_0$. ■

Por supuesto, otra condición suficiente para (1) sería que el rango de T contuviese alguna función con un número finito de ceros en G.

Para finalizar esta sección observemos que la condición “LDI” puede enunciarse desde el punto de vista de sucesiones.

Lema 3.3.7. *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un dominio y T un operador lineal y continuo sobre $H(G)$. Entonces T es un LDI-operador si y sólo si para cada punto $t \in \partial G$ y cada sucesión $(a_n)_n \subset G$ con $a_n \to t$ $(n \to \infty)$ el conjunto $M(T, (a_n)_n)$ es residual y existe un subespacio vectorial F cerrado y de dimensión infinita tal que $F \setminus \{0\} \subset M(T, (a_n)_n)$.*

Demostración. La implicación directa es evidente, pues si $(a_n)_n \subset G$ con $a_n \to t \in \partial G$ $(n \to \infty)$, entonces $(a_n)_n$ es un conjunto no relativamente compacto y la definición de LDI-operador nos da el resultado.

En cuanto al recíproco, basta probar que dado un conjunto $A \subset G$ no relativamente compacto, existen un punto $t \in \partial G$ y una sucesión $(a_n)_n \subset G$ con $a_n \to t$ $(n \to \infty)$, tales que $M(T, (a_n)_n) \subset M(T, A)$. Pero esto es evidente, pues si $A \subset G$ no relativamente compacto, existe un punto $t \in \overline{A} \cap \partial G$ y existe una sucesión $(a_n)_n \subset A(\subset G)$ tal que $a_n \to t$ $(n \to \infty)$. Además, $M(T, B) \subset M(T, A)$ si $B \subset A$. ■

3.4. Ejemplos

A lo largo de esta sección obtendremos, mediante la aplicación de los resultados anteriores, diversos ejemplos de LDI-operadores, incluyendo entre ellos operadores clásicos como los diferenciales, los de composición y los de multiplicación. Asimismo estudiaremos algunas propiedades sobre la preservación de la condición LDI a través de operaciones entre operadores, como la suma o la composición.

1. Sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio. Recordemos (ver Capítulo 1) que si $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es una función entera de tipo subexponencial (resp. exponencial), entonces $\Phi(D) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n$ define un operador lineal y continuo sobre $H(G)$ (resp. $H(\mathbb{C})$). A través de las desigualdades de Cauchy y mediante un proceso análogo al realizado en [15, Theorem 3] podemos probar el siguiente resultado.

   Proposición 3.4.1. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio y sea Φ una función entera de tipo subexponencial (resp. exponencial si $G = \mathbb{C}$). Entonces el operador $\Phi(D)$ es puntualmente estable en la frontera de G.*

   Demostración. Veamos el caso en que Φ es de tipo subexponencial y $G \neq \mathbb{C}$. El caso $G = \mathbb{C}$ es análogo, pero más sencillo. Sea $K \subset G$ un compacto y definamos $L := K$. Fijemos un punto $a \in G \setminus K$ y un número $\varepsilon > 0$. Como $G \setminus K$ es abierto, existe un número $s > 0$ suficientemente pequeño para que $\overline{B}(a, s) \subset G \setminus K$. Definamos $B = \overline{B}(a, s)$. Es evidente que $B \in \mathcal{K}_1(G)$ y que $B \subset G \setminus K$. Por otra parte, por ser Φ de tipo subexponencial, existe una constante $C \geq 0$ tal que

$$|a_n| \leq C \frac{(\frac{1}{2}s)^n}{n!} \quad (n \geq 0).$$

Finalmente, tomemos $\delta > 0$ con $\delta < \dfrac{\varepsilon}{2C}$. Sea $f \in H(G)$ con $\|f\|_B < \delta$. Por la fórmula de la integral de Cauchy para derivadas, si $\gamma := \{t : |t-a| < s\}$, se obtiene

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(a)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt \right| \\ &\le \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{2\pi s}{s^{n+1}} \cdot \|f\|_B \le \frac{n!}{s^n} \cdot \delta \qquad (n \ge 0). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} |\Phi(D)f(a)| &\le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||f^{(n)}(a)| \\ &\le \sum_{n=0}^{\infty} C \frac{(\frac{1}{2}s)^n}{n!} \cdot \frac{n!}{s^n} \cdot \delta \\ &= C\delta \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto $\Phi(D)$ es puntualmente estable. ∎

Por otra parte, es claro que si la función $\Phi(z)$ no es idénticamente nula, el rango de $\Phi(D)$ contiene constantes no nulas; en efecto, si llamamos $p := \text{mín}\{n : \; a_n \neq 0\}$, entonces $\Phi(D)(z^p) = a_p \cdot p!$. Por tanto podemos asegurar lo siguiente:

Teorema 3.4.2. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio. Sea $\Phi(z)$ una función entera de tipo subexponencial (resp. exponencial si $G = \mathbb{C}$) con $\Phi \not\equiv 0$. Entonces el operador $\Phi(D)$ es un LDI-operador.*

Demostración. Basta combinar la Proposición 3.4.1, el Lema 3.3.6 y el Teorema 3.3.4. ■

En particular, nos gustaría destacar los siguientes casos:

- Sea $\Phi(z) \equiv 1$, entonces $\Phi(D) = I =$ el operador identidad es LDI.
- Sea $\Phi(z) = z$, entonces $\Phi(D) = D =$ el operador derivada es LDI.
- Sean $G = \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $\Phi(z) = e^{bz}$. Entonces $\Phi(D) = \tau_b$, donde τ_b es el operador de traslación $\tau_b f(z) = f(z + b)$ (en $H(\mathbb{C})$) (ver [53, §5]). Luego τ_b (en $H(\mathbb{C})$) es LDI.

En el caso general en que $G \subset \mathbb{C}$ sea un dominio tal que $G + b = G$ (por ejemplo, $G = \{z \in \mathbb{C} : \ |\Im(z)| < r\}$ con $r > 0$ y $b \in \mathbb{R}$) no podemos ver τ_b como un caso particular de operador diferencial de orden infinito; sin embargo, sí podemos probar que es LDI.

Teorema 3.4.3. *Sea $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio tal que $G + b = G$. Entonces el operador traslación τ_b es LDI.*

Demostración. Veamos en primer lugar que τ_b es puntualmente estable en la frontera de G. Sea $K \subset G$ un compacto y definamos $L = -b + K$; por tanto L es un compacto contenido en G. Fijemos un punto $a \in G \setminus L$ y un número $\varepsilon > 0$. Entonces $a + b \notin K$ y podemos tomar una bola cerrada $B(\in \mathcal{K}_1(G))$ de centro $a + b$ y radio suficientemente pequeño para que

$B \subset G \setminus K$. Además, sea $\delta := \varepsilon$. En consecuencia, si $\|f\|_B < \delta$ se tiene que $|\tau_b f(a)| = |f(a+b)| < \delta = \varepsilon$, y con ello se satisface la condición de estabilidad.

Por otra parte, es trivial que todas las constantes están en el rango de τ_b. Por tanto, de nuevo por el Teorema 3.3.4 y el Lema 3.3.6, τ_b es LDI. ■

Observemos que no es posible aplicar el Teorema 3.3.4 al operador antiderivada $D^{-N}f$ porque no es puntualmente estable en la frontera. Esto hace natural proponer la siguiente cuestión:

¿Es D^{-N} un LDI-operador?

Señalemos que estos operadores son DI (ver [16] o [37]). El mismo problema surge si consideramos el caso de los operadores antidiferenciales de orden infinito $\Psi(D^{-1})$ o incluso el todavía más general de los operadores de Volterra de segunda especie $V_{S,\varphi}$ (ver Capítulo 1).

2. Sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio. Si $\varphi \in H(G,G) := \{f \in H(G) : \ f(G) \subset G\}$, entonces el operador de composición (a la derecha) definido como $C_\varphi : f \in H(G) \mapsto f \circ \varphi \in H(G)$ es un operador lineal y continuo. Damos a continuación una caracterización de aquellos operadores C_φ que son LDI. Recordemos que una aplicación $\Psi : X \to X$ sobre un espacio topológico

se dice *propia* si la preimagen por Ψ de un subconjunto compacto es de nuevo un subconjunto compacto.

Teorema 3.4.4. *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un dominio y $\varphi \in H(G,G)$. El operador de composición C_φ sobre $H(G)$ es LDI si y sólo si φ es propia. En particular, si $G = \mathbb{C}$, tenemos que C_φ es LDI si y sólo si φ es un polinomio no constante.*

Demostración. En el ejemplo anterior hemos visto que el operador identidad es LDI. Por otro lado, es inmediato que $M(C_\varphi, A) = M(I, \varphi(A))$ para cualquier $A \subset G$. Pero es fácil ver que una aplicación $\varphi : G \to G$ es propia si y sólo si $\varphi(A)$ es no relativamente compacto en G para todo $A \subset G$ no relativamente compacto.

Recíprocamente, supongamos que C_φ es LDI. Entonces para cualquier $A \subset G$ no relativamente compacto el conjunto $M(C_\varphi, A)$ $(= M(I, \varphi(A)))$ es no vacío. Pero en general si $M(T, B) \neq \varnothing$ entonces $B \subset G$ es no relativamente compacto en G. Luego $\varphi(A)$ es no relativamente compacto y con ello φ es propia.

Para la última parte, basta recordar –debido al Teorema de Casorati-Weierstrass aplicado al punto del infinito– el hecho de que en $\mathbb{C}$ las únicas aplicaciones propias son los polinomios no constantes. ■

Evidentemente, la conclusión del Teorema 3.4.4 se verifica si en particular

φ es biyectiva. De hecho, si para todo $r > 0$ denotamos por $r\mathbb{D}$ el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < r\}$, entonces el operador de rotación R_α ($\alpha \in [0, 2\pi)$) definido como:

$$R_\alpha : f(z) \in H(r\mathbb{D}) \mapsto f(ze^{i\alpha}) \in H(r\mathbb{D})$$

es LDI, pues $R_\alpha = C_{\varphi_\alpha}$, donde $\varphi_\alpha(z) = ze^{i\alpha}$ ($z \in r\mathbb{D}$) es la rotación de ángulo α.

Consideremos ahora una función entera φ. El operador de composición a la izquierda definido como $L_\varphi : f \in H(G) \mapsto \varphi \circ f \in H(G)$ es un operador continuo pero no necesariamente lineal. En concreto, L_φ es lineal si y sólo si φ es lineal, es decir, $\varphi(z) = cz$ para cierta constante $c \in \mathbb{C}$. En este caso $L_\varphi = cI$ y por el Teorema 3.4.2, L_φ es LDI-operador si y sólo si $c \neq 0$.

3. Sea T un operador lineal y continuo sobre $H(G)$ y sea $\psi \in H(G)$. El operador generalizado de multiplicación definido como:

$$M_\psi T : f(z) \in H(G) \mapsto \psi(z) \cdot Tf(z) \in H(G)$$

es un operador lineal y continuo. En particular si $T = I$, se obtiene el operador clásico de multiplicación M_ψ.

En el siguiente resultado obtenemos una condición suficiente para que estos operadores sean LDI.

Teorema 3.4.5. *Sea T un operador lineal y continuo sobre $H(G)$ puntualmente estable en la frontera de G y que verifica la condición* (1) *del Teorema 3.3.4. Sea $\psi \in H(G)$ tal que el conjunto $Z(\psi)$ de ceros de ψ es finito. Entonces $M_\psi T$ es LDI.*

Demostración. En primer lugar veamos que $M_\psi T$ es puntualmente estable en la frontera de G. Si $K \subset G$ es compacto y L es el compacto dado por la estabilidad de T, entonces $\widetilde{L} := L \cup Z(\psi)$ es también un conjunto compacto contenido en G. Fijemos un punto $a \in G \setminus \widetilde{L}\,(\subset G \setminus L)$ y un número $\varepsilon > 0$. Como $a \notin \widetilde{L}$, tenemos que $\psi(a) \neq 0$ y podemos definir el número positivo $\widetilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{|\psi(a)|}$. Por la estabilidad de T, existe un conjunto compacto $B \in \mathcal{K}_1(G)$ con $B \subset G \setminus K$ y un número $\delta > 0$ tales que para cada función $f \in H(G)$ con $\|f\|_B < \delta$ tenemos que $|Tf(a)| < \widetilde{\varepsilon}$. Por tanto, $|M_\psi Tf(a)| = |\psi(a)| \cdot |Tf(a)| < |\psi(a)| \cdot \widetilde{\varepsilon} = \varepsilon$, de donde $M_\psi T$ es puntualmente estable en la frontera de G.

Por otro lado, como T verifica la condición (1) del Teorema 3.3.4 y $Z(\psi)$ es finito, $M_\psi T$ verifica la misma condición. En efecto, sea $(a_n)_n \subset G$ una sucesión no relativamente compacta (podemos suponer que todos sus puntos son distintos); entonces existe una sucesión creciente $(n_k)_k \subset \mathbb{N}_0$ y una sucesión de funciones $(g_k)_k \subset H(G)$ tales que $Tg_k(a_{n_k}) \neq 0$ y $\psi(a_{n_k}) \neq 0$ para todo $k \geq 0$. Así pues, $M_\psi Tg_k(a_{n_k}) = \psi(a_{n_k})Tg_k(a_{n_k}) \neq$

0. Ahora tan sólo basta aplicar el Teorema 3.3.4 para concluir la demostración. ■

Como consecuencia, obtenemos una caracterización de aquellos operadores clásicos de multiplicación que son LDI.

Corolario 3.4.6. *Sea $\psi \in H(G)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *M_ψ es LDI.*

(2) *$Z(\psi)$ es finito.*

Demostración. Que (2) implica (1) se deduce directamente del Teorema 3.4.5 tomando $T = I$. Para el recíproco, supongamos por reducción al absurdo que $Z(\psi)$ es infinito. Entonces $Z(\psi) \subset G$ es no relativamente compacto y por (1) el conjunto $M(M_\psi, Z(\psi)) = \{f \in H(G) : \ M_\psi f(Z(\psi))$ es denso en $\mathbb{C}\}$ es no vacío. Pero para cualquier función $f \in H(G)$ se tiene que $M_\psi f(Z(\psi)) = \{\psi(z)f(z) : z \in Z(\psi)\} = \{0\}$, luego $M(M_\psi, Z(\psi)) = \varnothing$, lo que es una contradicción. ■

4. Finalizaremos con resultados concernientes a la composición, suma o producto de operadores. Estos nos permiten construir nuevos operadores LDI a partir de otros que ya lo son.

Teorema 3.4.7. *Supongamos que $T, S : H(G) \to H(G)$ son operadores lineales y continuos tales que T es LDI y S es sobreyectivo. Entonces $T \circ S$ es LDI.*

Demostración. La parte de la residualidad es como en [16]: Puesto que $M(TS, A) = S^{-1}(M(T, A))$ para cualquier subconjunto $A \subset G$, obtenemos que si A es no relativamente compacto, entonces $M(T, A)$ contiene un G_δ denso, sea $\mathcal{D} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$, donde cada $\mathcal{D}_n$ es abierto en $H(G)$. Por ser S sobreyectivo y lineal, el Teorema de la Aplicación Abierta garantiza que S es abierta, de donde se deduce que $S^{-1}(\mathcal{D})$ es también denso. Por otra parte, cada $S^{-1}(\mathcal{D}_n)$ es abierto de $H(G)$ debido a la continuidad de S. En consecuencia, $M(TS, A)$ contiene al G_δ denso $S^{-1}(\mathcal{D}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} S^{-1}(\mathcal{D}_n)$, luego $M(TS, A)$ es residual.

Por otra parte, existe un subespacio vectorial cerrado y de dimensión infinita $F \subset M(T, A) \cup \{0\}$. Por la linealidad y continuidad de S, $S^{-1}(F)$ es un subespacio vectorial cerrado contenido en $M(TS, A) \cup \{0\}$. Finalmente, la dimensión de $S^{-1}(F)$ es infinita ya que si $S^{-1}(F)$ fuera de dimensión finita, entonces $\dim(F) = \dim(S(S^{-1}(F)))$ sería también finita ($F = SS^{-1}(F)$ ya que S es sobreyectivo), y no lo es. ∎

Observemos que para el caso particular de $T = I$, conseguimos el siguiente corolario, que estimamos de interés por sí mismo.

Corolario 3.4.8. *Todo operador lineal, continuo y sobreyectivo es LDI.*

Finalizaremos el Capítulo con un resultado relativo al comportamiento de la condición “ser LDI” respecto a la suma y producto de operadores. *Grosso modo*, podemos decir que la propiedad LDI de un operador se conserva si se le suma o se le multiplica por otro operador que se comporta “suavemente” en la frontera.

Teorema 3.4.9. *Sean $T, S : H(G) \to H(G)$ operadores lineales y continuos tales que:*

(a) *T es LDI.*

(b) *Para cada función $f \in H(G)$ y cada punto $t \in \partial G$*

$$\exists \lim_{z \to t} (Sf)(z) \in \mathbb{C}.$$

Entonces $T + S$ es LDI.

Demostración. Como T es LDI, por el Lema 3.3.7, basta comprobar que para cada punto $t \in \partial G$ y cada sucesión $(a_n)_n \subset G$ con $a_n \to t$ $(n \to \infty)$, $M(T, (a_n)_n) \subset M(T + S, (a_n)_n)$.

Fijemos un punto $t \in \partial G$ y una sucesión $(a_n)_n \subset G$ con $a_n \to t$ $(n \to \infty)$. Definamos $C(t) := \lim_{z \to t} (Sf)(z) \in \mathbb{C}$. Sea $f \in M(T, (a_n)_n)$ y fijemos $\omega \in \mathbb{C}$. Entonces existe una sucesión $(n_k)_k \subset \mathbb{N}$ tal que $Tf(a_{n_k}) \to$

$\omega - C(t)$ $(k \to \infty)$. Por tanto $(T+S)(f)(a_{n_k}) = Tf(a_{n_k}) + Sf(a_{n_k}) \to \omega - C(t) + C(t) = \omega$ y $f \in M(T+S,(a_n)_n)$. ∎

Teorema 3.4.10. *Sean $T, S : H(G) \to H(G)$ operadores lineales y continuos tales que*

(a) *T es LDI.*

(b) *Para cada función $f \in H(G)$ y cada punto $t \in \partial G$*

$$\exists \lim_{z \to t} (Sf)(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Entonces $T \cdot S$ es LDI.

Demostración. Como T es LDI, por el Lema 3.3.7, basta comprobar que para cada punto $t \in \partial G$ y cada sucesión $(a_n)_n \subset G$ con $a_n \to t$ $(n \to \infty)$, $M(T,(a_n)_n) \subset M(T \cdot S,(a_n)_n)$.

Fijemos un punto $t \in \partial G$ y una sucesión $(a_n)_n \subset G$ con $a_n \to t$ $(n \to \infty)$. Definamos $C(t) := \lim_{z\to t}(Sf)(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sea $f \in M(T,(a_n)_n)$ y fijemos $\omega \in \mathbb{C}$. Entonces existe una sucesión $(n_k)_k \subset \mathbb{N}$ tal que $Tf(a_{n_k}) \to \dfrac{\omega}{C(t)}$ $(k \to \infty)$. Por tanto $(T \cdot S)(f)(a_{n_k}) = Tf(a_{n_k}) \cdot Sf(a_{n_k}) \to \dfrac{\omega}{C(t)} \cdot C(t) = \omega$ y $f \in M(T \cdot S,(a_n)_n)$. ∎

Capítulo 4

Cluster sets maximales a lo largo de curvas arbitrarias

4.1. Introducción

Remitimos al Capítulo 1 para las definiciones de cluster set $C_A(F)$ de F a lo largo de A, cluster set $C_A(F, t_0)$ de F a lo largo de A en t_0 y de cluster set radial $C_\varrho(F, t_0)$, donde $G \subset \mathbb{C}$ es un dominio, F es una función definida sobre G, $A \subset G$ es un subconjunto no relativamente compacto y $t_0 \in \partial G$, con $G = \mathbb{D}$ en el caso radial.

En este capítulo obtendremos que, al menos para dominios de Jordan, existe una variedad lineal y densa de funciones holomorfas tales que, con la obvia excepción de la función idénticamente nula, tienen cluster sets maximales a lo largo de cualquier curva que tiende a la frontera y cuyo conjunto de valores de oscilación no es el total. Por tanto, podremos decir que el conjunto de funciones con tal propiedad de aproximación es grande topológica y algebraicamente. Además, veremos que si exigimos a tales funciones que estén en espacios de tipo Hardy podremos suprimir la condición sobre el conjunto de valores de oscilación, aunque restringiremos la cantidad de curvas. Asimismo estudiaremos qué ocurre al cambiar curvas por sucesiones.

4.2. El resultado principal

Antes de abordar el resultado principal del Capítulo (Teorema 4.2.3) sobre existencia de "muchas" funciones con comportamiento arbitrario a través de curvas, necesitaremos algunas definiciones y resultados previos. Recordemos que un dominio de Jordan es un dominio de $\mathbb{C}$ cuya frontera en $\mathbb{C}_\infty$ es una imagen topológica de la circunferencia unidad $\mathbb{T}$. Con la siguiente definición acotaremos la extensión de ∂G que aproxima un subconjunto A de G. En particular nos interesará especialmente el caso en que A sea el conjunto imagen de una curva.

Definición 4.2.1. *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un dominio y $A \subset G$ un conjunto no relativamente compacto. Definimos el* conjunto de valores de oscilación de A (en la frontera) *como el conjunto siguiente*

$$\begin{aligned} Osc(A) &= \{t \in \partial G : \text{ existe una sucesión } (z_n)_n \subset A \\ &\quad \text{con } \lim_{n\to\infty} z_n = t\}. \end{aligned}$$

En otras palabras, $Osc(A) = A' \cap \partial G$. Es obvio que $Osc(A)$ es no vacío si A es no relativamente compacto. Por definición, una *curva que tiende a la frontera de* G es una aplicación continua $\gamma : [0,1) \to G$ tal que $\lim_{t\to 1^-} \mathrm{dist}(\gamma(t), \partial G) = 0$. Aquí "dist" representa la distancia cordal en $\mathbb{C}_\infty$, pero puede tomarse la distancia euclídea si G es acotado. Por abuso de lenguaje, entenderemos que $Osc(\gamma) = Osc(\gamma([0,1)))$.

Recordemos a continuación el Teorema de extensión de Osgood-Carathéodory (ver [61]) que nos será de gran utilidad en la demostración del Teorema 4.2.3, pues nos permitirá reducirnos al caso $G = \mathbb{D}$. Si $B \subset \mathbb{C}$, denotaremos por $\overline{B}^\infty$ la clausura de B en $\mathbb{C}_\infty$. Entendemos por isomorfismo entre dos dominios una aplicación holomorfa y biyectiva de uno sobre otro.

Teorema 4.2.2 (Teorema de Osgood-Carathéodory). *Sean G_1 y G_2 dos dominios de Jordan de $\mathbb{C}$, y sea $f : G_1 \to G_2$ un isomorfismo. Entonces existe una función $F : \overline{G_1}^\infty \to \overline{G_2}^\infty$ tal que F es un homeomorfismo y $F(z) = f(z)$ para todo $z \in G_1$.*

Ya estamos en condiciones de establecer y demostrar el resultado principal del Capítulo.

Teorema 4.2.3. *Sea G un dominio de Jordan. Entonces existe una variedad lineal densa $\mathcal{D}$ en $H(G)$ tal que para cada función $f \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ y cada curva $\gamma \subset G$ tendiendo a la frontera de G con $Osc(\gamma) \neq \partial G$ se tiene que $C_\gamma(f) = \mathbb{C}$. En particular, $f(\gamma)$ es denso en $\mathbb{C}$ para cada par (f, γ) como antes.*

Demostración. Por el Teorema de Osgood-Carathéodory combinado con el Teorema del isomorfismo de Riemann, existe un homeomorfismo φ de $\overline{G}^\infty$ en $\overline{\mathbb{D}}$ cuya restricción sobre G es un isomorfismo de G en $\mathbb{D}$. Entonces, si $\mathcal{D}$ es la variedad lineal densa obtenida para $H(\mathbb{D})$, el conjunto

$$\mathcal{D}_1 := \{f \circ \varphi \ f \in \mathcal{D}\}$$

sería la variedad lineal deseada en $H(G)$.

En efecto, $\mathcal{D}_1$ es una variedad lineal pues si $f_1, g_1 \in \mathcal{D}_1$ entonces $f_1 = f \circ \varphi$ y $g_1 = g \circ \varphi$ para ciertas $f, g \in \mathcal{D}$; por tanto para cualesquiera escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ se verifica $\lambda f_1 + \mu g_1 = \lambda f \circ \varphi + \mu g \circ \varphi = (\lambda f + \mu g) \circ \varphi \in \mathcal{D}_1$ pues $\lambda f + \mu g \in \mathcal{D}$ al ser $\mathcal{D}$ una variedad lineal. Por otra parte, sean $f_1 \in H(G)$, $K \subset G$ un compacto y $\varepsilon > 0$; entonces $f := f_1 \circ \varphi^{-1} \in H(\mathbb{D})$ y $\varphi(K) \subset \mathbb{D}$ y es compacto, al ser φ un isomorfismo. Como $\mathcal{D}$ es denso en $H(\mathbb{D})$, existe una función $g \in \mathcal{D}$ tal que $|g(z) - f_1(\varphi^{-1}z)| = |g(z) - f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in \varphi(K)$, es decir, existe una función $g \in \mathcal{D}$ tal que

$$|g(\varphi(w)) - f_1(\varphi^{-1}\varphi(w))| < \varepsilon \text{ para todo } w \in K,$$

o lo que es lo mismo, existe una función $g_1 := g \circ \varphi \in \mathcal{D}_1$ tal que $|g_1(w) -$

$f_1(w)| < \varepsilon$ para todo $w \in K$, con lo que se demuestra que $\mathcal{D}_1$ es denso en $H(G)$. Por último, sean $f_1 \in \mathcal{D}_1 \setminus \{0\}$ y $\gamma \subset G$ una curva tendiendo a ∂G con $Osc(\gamma) \neq \partial G$. Entonces, existe $f \in \mathcal{D}$ tal que $f_1 = f \circ \varphi$, y $\varphi(\gamma)$ es una curva en $\mathbb{D}$ que tiende a la frontera de $\mathbb{D}$ con $Osc(\varphi(\gamma)) \neq \partial\mathbb{D}$, ya que φ es un homeomorfismo. Luego $C_{\varphi(\gamma)}(f) = \mathbb{C}$. Pero $C_{\varphi(\gamma)}(f) = \{\omega \in \mathbb{C} : \ \exists (z_n)_n \subset \varphi(\gamma),\ z_n \to \partial\mathbb{D}$ y $f(z_n) \to \omega\}$. Si $z_n \in \varphi(\gamma)$ $(n \in \mathbb{N})$, existe $z_n' \in \gamma$ tal que $z_n = \varphi(z_n')$ $(n \in \mathbb{N})$ y además $(z_n')_n$ debe tender a la frontera de G. Así,

$$C_{\varphi(\gamma)}(f) = \{\omega \in \mathbb{C} : \ \exists (z_n')_n \subset \gamma,\ z_n' \to \partial G,\ f_1(z_n') \to \omega\}.$$

Luego $C_\gamma(f_1) = \mathbb{C}$, como queríamos.

Por tanto, podemos restringirnos al caso en que $G = \mathbb{D}$. Supongamos que $(p_m^*(z))_m$ es un conjunto denso y numerable en $H(\mathbb{D})$ (por ejemplo una enumeración de los polinomios holomorfos cuyos coeficientes tienen parte real e imaginaria racional). Consideremos una sucesión $(p_n(z))_n$ donde cada $p_m^*(z)$ aparece infinitas veces. Fijemos dos sucesiones $(r_n)_n$ y $(s_n)_n$ de números positivos cumpliendo $r_1 < s_1 < r_2 < s_2 < \cdots < r_n < s_n < r_{n+1} < \cdots$ y $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Dividamos $\mathbb{N}$ en infinitas sucesiones estrictamente crecientes $\{(p_{n,j}) : \ j \in \mathbb{N}\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo, consideremos el conjunto $F_n \subset \mathbb{D}$ dado por la unión disjunta

$$F_n = \overline{B}\left(0, \frac{n}{n+1}\right) \cup \bigcup_{j=J(n)}^{\infty} K_j,$$

donde $J(n) := \min\{j \in \mathbb{N} : \ r_j > \frac{n}{n+1}\}$ y cada K_j es el conjunto compacto, dado por una espiral de dos pasos con inicio en r_j y fin en s_j:

$$K_j := \left\{ \left(r_j + \frac{s_j - r_j}{4\pi} \right) e^{i\theta} : \ \theta \in [0, 4\pi] \right\}.$$

Observemos que cada K_j tiene complemento conexo, y que la sucesión $(K_j)_j$ tiende a $\mathbb{T}$ pues tanto $(r_j)_j$ como $(s_j)_j$ tienden a 1 $(j \to \infty)$ y $r_j \leq |z| \leq s_j$ para todo $z \in K_j$. Notemos también que todos los conjuntos F_n son cerrados en $\mathbb{D}$. Recordemos que por $\mathbb{D}_\infty$ denotamos la compactificación de un punto de $\mathbb{D}$, mientras que ω denotará su punto del infinito. Es inmediato que $\mathbb{D}_\infty \setminus F_n$ es conexo, pues $\mathbb{D} \setminus F_n$ es conexo y $\mathbb{D} \setminus F_n \subset \mathbb{D}_\infty \setminus F_n \subset$ la clausura en $\mathbb{D}_\infty$ de $\mathbb{D} \setminus F_n$; y es localmente conexo en ω por un razonamiento similar. Además, F_n satisface la condición (c) del teorema de Nersesjan (Teorema 1.4.4), pues $F_n^\circ = B(0, \frac{n}{n+1})$ y para cualquier compacto $K \subset \mathbb{D}$ podemos elegir $V := \{\omega\} \cup \{\frac{n}{n+1} < |z| < 1\}$.

Sea $(q_j)_j$ una sucesión densa en $\mathbb{C}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $g_n : F \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$g_n(z) := \begin{cases} p_n(z) & \text{si} \quad z \in \overline{B}(0, \frac{n}{n+1}) \\ q_j & \text{si} \quad z \in K_{p(n,j)} \quad \text{y} \quad p(n,j) \geq J(n) \\ 0 & \text{si} \quad z \in K_{p(k,j)} \ (k \neq n) \quad \text{y} \quad p(k,j) \geq J(n); \end{cases}$$

y sea $\varepsilon_n(z) = \dfrac{1 - |z|}{n}$. Observemos que, trivialmente, g_n es continua en F_n y holomorfa en F_n°, y que $\varepsilon_n(z)$ es una función de error (es decir, positiva y continua en F_n). En estas condiciones, el teorema de Nersesjan nos asegura para cada $n \in \mathbb{N}$ la existencia de una función $f_n \in H(\mathbb{D})$ tal que

$$|f_n(z) - g_n(z)| < \frac{1-|z|}{n} \qquad (z \in F_n),$$

de donde

$$|f_n(z) - p_n(z)| < \frac{1-|z|}{n} < \frac{1}{n} \qquad (z \in \overline{B}\left(0, \frac{n}{n+1}\right)), \tag{4.1}$$

$$|f_n(z) - q_j| < \frac{1-|z|}{n} \qquad (z \in K_{p(n,j)},\ p(n,j) \geq J(n)) \tag{4.2}$$

y

$$|f_n(z)| < \frac{1-|z|}{n} \qquad (z \in K_{p(k,j)},\ k \neq n,\ p(k,j) \geq J(n)). \tag{4.3}$$

Definamos $\mathcal{D}$ como el subespacio lineal

$$\mathcal{D} := \operatorname{span}\{f_n :\ n \in \mathbb{N}\}$$

Es obvio que $\mathcal{D}$ es una variedad lineal de $H(\mathbb{D})$. Además $\mathcal{D}$ es denso en $H(\mathbb{D})$ porque la sucesión $(f_n)_n$ lo es. Para verlo recordemos que cada función $p_m^*(z)$ aparece infinitas veces en la sucesión $(p_n(z))_n$, luego para cada $m \in \mathbb{N}$ existe una sucesión estrictamente creciente $(n_j)_j \subset \mathbb{N}$ con $p_{n_j} = p_m^*$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por otra parte, si $K \subset \mathbb{D}$ es un conjunto compacto, entonces existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \overline{B}(0, \frac{n_j}{n_j+1})$ para todo $j > j_0$. Por tanto, por (4.1), tenemos que

$$|f_{n_j}(z) - p_m^*(z)| = |f_{n_j}(z) - p_{n_j}(z)| < \frac{1}{n_j} \text{ para todo } z \in K \text{ y todo } j > j_0,$$

y $f_{n_j} \to p_m^*$ $(j \to \infty)$ uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$. Por consiguiente, la clausura de $\{f_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ contiene al conjunto denso $\{p_m^*(z) :\ m \in \mathbb{N}\}$, y tenemos probada la densidad de $\{f_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ en $H(\mathbb{D})$.

Queda por demostrar que para cualquier curva prefijada $\gamma \subset G$ como en la hipótesis y cualquier función $f \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ se tiene que $C_\gamma(f) = \mathbb{C}$. Para ello, fijemos una función $f \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$. Para tal función f, existen $N \in \mathbb{N}$ y escalares complejos $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ tales que $\lambda_N \neq 0$ y $f = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_N f_N$. Como $Osc(\gamma) \neq \mathbb{T}$ y γ tiende a $\mathbb{T}$, esta curva debe cortar a todas las espirales K_j excepto como mucho a un número finito de ellas. En efecto, si no fuera el caso entonces la forma de los K_j (espirales compactas de 2 pasos con centro el origen) junto con la continuidad de γ forzaría a la curva a dar infinitas vueltas alrededor del origen mientras se aproxima a $\mathbb{T}$, lo que contradice la hipótesis $Osc(\gamma) \neq \mathbb{T}$. Por tanto existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p(k, j_0) \geq J(N)$ $(k = 1, \ldots, N)$ y $\gamma \cap K_{p(N,j)} \neq \varnothing$ $(j \geq j_0)$. Elijamos puntos $z_j \in \gamma \cap K_{p(N,j)}$ $(j \geq j_0)$. Entonces por (4.2) obtenemos que, para todo $j \geq j_0$,

$$|f_N(z_j) - q_j| < \frac{1 - |z_j|}{N} \leq 1 - |z_j| \leq 1 - r_j;$$

y por (4.3) obtenemos que para cada $n = 1, \ldots, N-1$,

$$|f_n(z_j)| < \frac{1 - |z_j|}{n} \leq 1 - |z_j| \leq 1 - r_j.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |f(z_j) - \lambda_N q_j| &= |\lambda_1 f_1(z_j) + \cdots + \lambda_N f_N(z_j) - \lambda_N q_j| \\ &\leq |\lambda_N| \cdot |f_N(z_j) - q_j| + \sum_{n=1}^{N-1} |\lambda_n f_n(z_j)| \\ &< \left(\sum_{n=1}^{N} |\lambda_n| \right) (1 - r_j). \end{aligned}$$

Y de aquí,

$$f(z_j) - \lambda_N q_j \to 0 \qquad (j \to \infty). \tag{4.4}$$

La sucesión $\{\lambda_N q_j : \ j \in \mathbb{N}\}$ es densa en $\mathbb{C}$ porque $\lambda_N \neq 0$, luego para $\alpha \in \mathbb{C}$ dado existe una sucesión creciente $(j_k)_k \subset \mathbb{N}$ con

$$\lambda_N q_{j_k} \to \alpha \qquad (k \to \infty). \tag{4.5}$$

Ahora bien, $z_j \in \gamma \cap K_{p(N,j)}$ $(j \geq j_0)$ luego $z_j \to \mathbb{T}$ cuando $j \to \infty$ y existirán una sucesión $\{k(1) < k(2) < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ y un punto $t \in \mathbb{T}$ con $\omega_l := z_{j_{k(l)}} \to t$ $(l \to \infty)$. Entonces $(\omega_l)_l \subset \gamma$ y por (4.4) y (4.5),

$$f(\omega_l) = f(\omega_l) - \lambda_N q_{j_{k(l)}} + \lambda_N q_{j_{k(l)}} \to \alpha \qquad (l \to \infty),$$

luego $\alpha \in C_\gamma(f)$. En otras palabras, $C_\gamma(f) = \mathbb{C}$, como se quería demostrar. ■

A la vista del Teorema 4.2.3, surgen de manera natural diversas cuestiones que vamos a tratar a continuación.

En primer lugar nos preguntamos si es posible reemplazar la curva arbitraria γ por conjuntos aún más restrictivos, como por ejemplo una sucesión arbitraria $(z_n)_n$ que tiende a la frontera (incluso con $Osc((z_n)_n) \neq \partial G$). El siguiente resultado responde a esta cuestión en sentido negativo.

Proposición 4.2.4. *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un dominio acotado y $f \in H(G)$. Entonces existe un punto $t \in \partial G$, un valor $\alpha \in \mathbb{C}$ y una sucesión $(z_n)_n \subset G$ que tiende a t tal que* $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \alpha$.

Demostración. Si f tiene infinitos ceros, por el Principio de Prolongación Analítica es inmediato que o bien $f \equiv 0$ o bien existe una sucesión $(z_n)_n \subset G$ de ceros de f que tiende a un punto $t \in \partial G$. Luego tenemos la conclusión para $\alpha = 0$. Supongamos que f tiene un número finito de ceros. Definamos $g := f/P$, donde $P \equiv 1$ si f no tiene ceros o bien $P(z) = \prod_{j=1}^{p}(z - c_j)$ si $c_1, \ldots, c_p$ son los ceros de f contados tantas veces como su multiplicidad indique. Entonces $g \in H(G)$ y no tiene ceros. Fijemos una sucesión exhaustiva $(K_n)_n$ de compactos de G. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $K_1^\circ \neq \varnothing$. Elijamos $a \in K_1^\circ$, entonces $a \in K_n^\circ$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como g no tiene ceros, el Principio del Módulo Mínimo nos garantiza que el mínimo de $|g|$ en K_n se alcanza en algún punto $a_n \in \partial K_n$, por tanto $|g(a_n)| < |g(a)|$. Entonces

$$|f(a_n)| = |P(a_n)| \cdot |g(a_n)| \leq M := |g(a)| \cdot \sup_{z \in G} |P(z)| \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

donde M es una constante finita pues G es acotado. Resumiendo, hemos obtenido una sucesión $(a_n)_n \subset G$ tal que $(f(a_n))_n$ es acotada. Pero la exhaustividad de $(K_n)_n$ implica que dado un compacto $K \subset G$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $K \subset K_{n_0}$, luego $\{a_n : \ n > n_0\} \cap K = \varnothing$, de donde, como $\overline{G}$ es compacto, se sigue que existe $t \in \partial G$ con $b_n \to t$ $(n \to \infty)$ para cierta subsucesión $(b_n)_n$ de $(a_n)_n$. Finalmente, la acotación de $(f(b_n))_n$ garantiza que $f(z_n) \to \alpha$ $(n \to \infty)$ para cierto $\alpha \in \mathbb{C}$ y cierta subsucesión $(z_n)_n$ de $(b_n)_n$. ■

Por otra parte, es claro que un resultado similar al Teorema 4.2.3 no es cierto si se desea que f pertenezca a un subespacio de funciones acotadas. Pero incluso sin esta restricción de acotación el resultado sería en general falso para subespacios de $H(\mathbb{D})$. Por ejemplo, si f estuviera en el espacio de Hardy H^p del disco unidad, entonces el teorema de Fatou nos asegura que el límite radial $\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$ existe y es finito para casi todo $\theta \in [0, 2\pi]$, ver [44]. Por tanto $C_\gamma(f)$ es un conjunto unitario para casi todo radio $\gamma = \{re^{i\theta} : \ r \in [0, 1)\}$. Sin embargo, relacionándolo con los resultados comentados en la Sección 1.6, nos podríamos preguntar si al menos para una familia numerable y fija de curvas en $\mathbb{D}$ tendiendo a $\mathbb{T}$ la afirmación del Teorema 4.2.3 es válida en H^p. En este caso veremos más adelante (Teorema 4.2.7) que la respuesta es positiva, incluso sin la restricción sobre el conjunto de oscilación de las curvas: $Osc(\gamma) \neq \mathbb{T}$. Queremos resaltar que así como para demostrar el Teorema 4.2.3 hemos seguido un razonamiento constructivo utilizando teoremas de aproximación, para demostrar el Teorema 4.2.7 utilizaremos técnicas completamente distintas basándonos en resultados de hiperciclicidad.

Recordemos que una sucesión $T_n : X \to Y$ de aplicaciones lineales y continuas se dice densamente hipercíclica si el conjunto $HC((T_n)_n)$ de elementos hipercíclicos es denso en X. El siguiente resultado auxiliar fue probado por Bernal y Calderón en 2002 y puede encontrarse en [17, Theorem 3.1]

Lema 4.2.5. *Supongamos que X e Y son espacios vectoriales topológicos metrizables y que X es de Baire y separable. Supongamos que, para cada $k \in \mathbb{N}$,*

$T_n^{(k)} : X \to Y$ $(n \in \mathbb{N})$ *es una sucesión de aplicaciones lineales y continuas, y supongamos que para cada* $k \in \mathbb{N}$ *y cada sucesión creciente* $(n_j)_j \subset \mathbb{N}$ *la sucesión* $(T_{n_j}^{(k)})_j$ *es densamente hipercíclica. Entonces existe una variedad lineal densa* $M \subset X$ *tal que*

$$M \setminus \{0\} \subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}} HC((T_n^{(k)})_n).$$

En los años noventa Bourdon y Shapiro probaron que si $p = 2$ existe un conjunto residual de funciones $f \in H^p$ para las que su órbita $\{f \circ \psi^n : \ n \in \mathbb{N}\}$ es densa en H^p, donde ψ^n es la n-ésima iteración de un automorfismo ψ de $\mathbb{D}$ sin puntos fijos en $\mathbb{D}$ (ver [33] y [88, Chapter 7], donde pueden encontrarse diversos resultados de este tipo). La demostración para $p = 2$ funciona igualmente para $1 \leq p < \infty$ pues en última instancia está basada en que para todos los puntos de $\mathbb{T}$ salvo como mucho uno, la sucesión $(\psi^n(z))_n$ tiende a un valor constante $\alpha \in \mathbb{T}$ y en el Corolario 1.4.6, que a su vez era una consecuencia del teorema de Beurling.

Para cada $a \in \mathbb{D}$, denotemos por φ_a el automorfismo de $\mathbb{D}$ dado por $\varphi_a(z) = \dfrac{z + a}{1 + \overline{a}z}$. Si $(a_n)_n \subset \mathbb{D}$ y $a_n \to \alpha \in \mathbb{T}$, entonces $\varphi_{a_n}(t) \to \dfrac{t + \alpha}{1 + \overline{\alpha}t} = \alpha$ $(n \to \infty)$ para todo $t \in \mathbb{T} \setminus \{-\alpha\}$. Con estos precedentes, podemos probar la siguiente extensión del resultado de Bourdon y Shapiro sobre espacios H^p.

Lema 4.2.6. *Sea* $p \in [1, +\infty)$ *un número fijo y sea* $(a_n)_n \subset \mathbb{D}$ *una sucesión que tiende a un punto* $\alpha \in \mathbb{T}$. *Entonces el conjunto de funciones* $f \in H^p$ *para* *las que su órbita* $\{f \circ \varphi_{a_n} : \ n \in \mathbb{N}\}$ *es densa en* H^p *es un conjunto residual en* H^p.

Demostración. Se tiene $\alpha \in \mathbb{T}$, luego por el Corolario 1.4.6 el conjunto Z_α de los polinomios que se anulan en α es denso en H^p. Además, para toda función $f \in Z_\alpha$ la sucesión $(f \circ \varphi_{a_n})_n$ es convergente en casi todo $\mathbb{T}$ a $f(\alpha) = 0$, porque $\varphi_{a_n} \to \alpha$ puntualmente en $\mathbb{T} \setminus \{-\alpha\}$. Pero f es continua en el compacto $\mathbb{T}$ y $\varphi_{a_n}(\overline{\mathbb{D}}) = \overline{\mathbb{D}}$, por tanto $(f \circ \varphi_{a_n})_n$ está uniformemente acotada en $\mathbb{T}$ y el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue garantiza que la sucesión $(f \circ \varphi_{a_n})_n$ converge también a 0 en H^p. Así hemos demostrado que la sucesión de operadores de composición $(C_{\varphi_{a_n}})_n$ converge puntualmente a 0 en Z_α.

Por otra parte, como φ_{a_n} es un automorfismo, es invertible, y su inversa es $(\varphi_{a_n})^{-1} = \varphi_{-a_n}$. También es invertible, pues, el operador de composición $C_{\varphi_{a_n}}$ y $C^{-1}_{\varphi_{a_n}} = C_{\varphi_{-a_n}}$. De manera completamente análoga a $(C_{\varphi_{a_n}})_n$ y partiendo del hecho de que la sucesión $b_n := -a_n \to -\alpha \in \mathbb{T}$, podemos demostrar que $(C^{-1}_{\varphi_{a_n}})_n$ converge puntualmente a 0 en el conjunto $Z_{-\alpha}$, el cual también es denso en H^p.

En resumen, tenemos que los conjuntos Z_α y $Z_{-\alpha}$ son densos en H^p y que se verifica:

- $C_{\varphi_{\alpha_n}} f \to 0$ para toda $f \in Z_\alpha$.
- Para toda $f \in Z_{-\alpha}$, existe una sucesión $g_n := C_{\varphi_{-a_n}} f \in H^p$ con $g_n \to 0$

$(n \to \infty)$ en H^p y $C_{\varphi_{a_n}} g_n = f \to f$ $(n \to \infty)$.

Basta ahora aplicar el Criterio de Hiperciclicidad (Teorema 1.5.3) para concluir que la sucesión $(C_{\varphi_{a_n}})_n$ posee un conjunto residual de elementos hipercíclicos, o en otras palabras, que el conjunto

$$\{f \in H^p : \ (f \circ \varphi_{a_n})_n \text{ es densa en } H^p\}$$

es residual en H^p. ■

Con la ayuda de los dos últimos lemas podemos demostrar ya el anunciado resultado sobre existencia de funciones de H^p con comportamiento salvaje a través de curvas.

Teorema 4.2.7. *Supongamos que $p \in [1, +\infty)$ y que Γ es un conjunto numerable de curvas en $\mathbb{D}$ que tienden a la frontera de $\mathbb{D}$. Entonces existe una variedad lineal densa $\mathcal{D}$ en H^p tal que $C_\gamma(f) = \mathbb{C}$ para toda función $f \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ y toda curva $\gamma \in \Gamma$.*

Demostración. Como Γ es numerable podemos escribir $\Gamma = \{\gamma_k : \ k \in \mathbb{N}\}$ donde cada γ_k es una curva en $\mathbb{D}$ tendiendo a $\mathbb{T}$. Así, para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos elegir una sucesión $\{a_n^{(k)} : \ n \in \mathbb{N}\} \subset \gamma_k$ que tiende a cierto punto $\alpha_k \in \mathbb{T}$ $(n \to \infty)$. Si $\{n_1 < n_2 < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ entonces también $a_{n_j}^{(k)} \to \alpha_k$ $(j \to \infty)$. Y por el Lema 4.2.6, las funciones $f \in H^p$ tales que su órbita $\{f \circ \varphi_{a_{n_j}^{(k)}} : \ j \in \mathbb{N}\}$ es densa en H^p forman un conjunto residual (luego denso) en H^p para todo $k \in \mathbb{N}$.

En otras palabras, cada sucesión $(T_{n_j}^{(k)})_j$ $(k \in \mathbb{N})$ es densamente hipercíclica, donde $T_n^{(k)}$ denota el operador de composición

$$C_{\varphi_{a_n^{(k)}}} : f \in H^p \mapsto f \circ \varphi_{a_n^{(k)}} \in H^p.$$

Pero $X := H^p =: Y$ es un espacio vectorial topológico de Baire metrizable y separable, luego el Lema 4.2.5 proporciona la existencia de una variedad lineal densa $\mathcal{D} \subset H^p$ tal que $\mathcal{D} \setminus \{0\} \subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}} HC((T_n^{(k)})_n)$.

Finalmente, tomemos una función $f \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ y una curva $\gamma = \gamma_k \in \Gamma$. Entonces $f \in HC((T_n^{(k)})_n)$, lo que implica que el conjunto $\{f \circ \varphi_{a_n^{(k)}} : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en H^p, luego en $H(\mathbb{D})$. En particular el conjunto $\{f \circ \varphi_{a_n^{(k)}}(0) : n \in \mathbb{N}\} = \{f(a_n^{(k)}) : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\{g(0) : g \in H(\mathbb{D})\} = \mathbb{C}$. Pero $\{a_n^{(k)} : n \in \mathbb{N}\} \subset \gamma$ y $a_n^{(k)} \to \alpha_k \in \mathbb{T}$, luego $\mathbb{C} \subset C_\gamma(f)$ y la demostración concluye. ■

Observemos que al ser la convergencia en H^p más fuerte que la convergencia uniforme en compactos de $\mathbb{D}$, la variedad $\mathcal{D}$ obtenida en el teorema también es densa en $H(\mathbb{D})$.

4.3. Notas finales

1. Como comentamos en el Capítulo 1, Tenthoff [92, Kapitel 3] construye un conjunto denso de funciones en $H(\mathbb{D})$ con un comportamiento extremadamente salvaje en la frontera, y como consecuencia se deduce la existencia

de un conjunto denso de funciones $f \in H(\mathbb{D})$ tales que todos sus cluster sets radiales $C_\varrho(f,t)$ son maximales. Observemos que cualquier radio de $\mathbb{D}$ es una curva en las condiciones del Teorema 4.2.3. Por tanto nuestro resultado generaliza el de Tenthoff; de hecho, nos permite enunciar el siguiente resultado:

> Existe una variedad lineal densa de funciones $f \in H(\mathbb{D})$ tales que todos sus cluster sets radiales $C_\varrho(f,t)$ son maximales.

En relación con lo anterior, nos planteamos la posibilidad de "ampliar" el tamaño topológico del conjunto de tales funciones; en concreto, proponemos el siguiente problema abierto:

> ¿Es residual en $H(\mathbb{D})$ el conjunto $\{f \in H(\mathbb{D}) : \ C_\varrho(f,t) = \mathbb{C}$ para todo $t \in \mathbb{T}\}$?

Debemos comentar que en este sentido el concepto de omnipresencia introducido por Bernal (Definición 1.6.3) permite dar un resultado relacionado. Recordemos que el operador identidad es omnipresente y por tanto el conjunto $\{f \in H(G) : \ C(f,t) = \mathbb{C}$ para todo $t \in \partial G\}$ es residual en $H(G)$. Recordemos también el Teorema de maximalidad de Collingwood ([39, Theorem 4.8]).

Teorema 4.3.1 (Teorema de maximalidad de Collingwood). *Sean f una función continua en $\mathbb{D}$ y $(\gamma_\theta)_{\theta\in[0,2\pi)}$ la familia de las rotaciones de* *una curva $\gamma_0 \subset \mathbb{D}$ que tiende a 1. Entonces existe un conjunto residual $A = A_f \subset \mathbb{T}$ tal que $C_{\gamma_\theta}(f, e^{i\theta}) = C(f, e^{i\theta})$ para todo $e^{i\theta} \in A$.*

Proposición 4.3.2. *El conjunto* $C := \{f \in H(\mathbb{D})$: existe un subconjunto residual $A = A_f \subset \mathbb{T}$ tal que $C_\varrho(f, t) = \mathbb{C}$ para todo $t \in A\}$ *es residual en* $H(\mathbb{D})$.

Demostración. Como el operador identidad es omnipresente, el conjunto M las funciones $f \in H(\mathbb{D})$ con cluster set maximal $C(f, t)$ en cualquier $t \in \mathbb{T}$ es residual. Sea $f \in M$; por el teorema de maximalidad de Collingwood, si elegimos $\gamma := [0, 1)$, existe un conjunto residual $A = A_f \subset \mathbb{T}$ tal que $C_\varrho(f, t) = C(f, t) = \mathbb{C}$ para todo $t \in A$. Luego $M \subset C$ y, como M es residual, C también lo es. ■

Desafortunadamente no podemos, con este razonamiento, eliminar el conjunto $A = A_f$ residual y dar una respuesta al problema planteado, aunque sospechamos que ésta debe ser afirmativa.

2. La Proposición 4.2.4 muestra que para un dominio acotado $G \subset \mathbb{C}$ no existen funciones $f \in H(G)$ con cluster set maximal a lo largo de cualquier sucesión $(z_n)_n \subset G$ que tiende a la frontera ∂G. Sin embargo, si limitamos la cantidad de sucesiones $(z_n)_n$, podremos obtener un resultado positivo. Recordemos que por ser la identidad LDI-operador (Teorema 3.4.2), en

particular un DI-operador, tenemos que para cualquier subconjunto A no relativamente compacto de G (con G un dominio de $\mathbb{C}$), el conjunto

$$M(I, A) = \{f \in H(G) : \ f(A) \text{ es denso en } \mathbb{C}\}$$

es residual en $H(G)$.

Proposición 4.3.3. *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un dominio y A un subconjunto no relativamente compacto de G. Entonces el conjunto*

$$\mathcal{M} := \{f \in H(G) : \ C_A(f,t) = \mathbb{C} \text{ para todo } t \in A' \cap \partial G\}$$

es residual en $H(G)$.

Demostración. Sea $(t_k)_k$ un conjunto denso de $A' \cap \partial G$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, elegimos una sucesión $(a_n^{(k)})_n \subset A$ tendiendo a t_k ($n \to \infty$). Por ser la identidad un DI-operador, los conjuntos

$$\begin{aligned} M(I, \{a_n^{(k)} : \ n \in \mathbb{N}\}) &= \{f \in H(G) : \ f(\{a_n^{(k)} : \ n \in \mathbb{N}\}) \text{ es denso en } \mathbb{C}\} \\ &= \{f \in H(G) : \ C_{\{a_n^{(k)} : \ n \in \mathbb{N}\}}(f, t_k) = \mathbb{C}\} \quad (k \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

son residuales en $H(G)$ y, por el teorema de Baire, el conjunto

$$D := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f \in H(G) : \ C_{\{a_n^{(k)} : \ n \in \mathbb{N}\}}(f, t_k) = \mathbb{C}\}$$

es residual en $H(G)$.

Basta probar ahora que $D \subset \mathcal{M}$ para tener que $\mathcal{M}$ es residual en $H(G)$. Sea $f \in D$ y $t \in A' \cap \partial G$. Tenemos que ver que $C_A(f,t) = \mathbb{C}$.

Sea $(\omega_n)_n$ un conjunto denso de $\mathbb{C}$. Por inducción, podemos construir una sucesión creciente $(m_n)_n \subset \mathbb{N}$ tal que

$$|f(a_{m_n}^{(k)}) - \omega_n| < \frac{1}{n} \qquad (k = 1, \ldots, n;\ n \in \mathbb{N}). \tag{4.6}$$

Fijemos un valor $\omega \in \mathbb{C}$. Existe una sucesión creciente $(i_n)_n \subset \mathbb{N}$ con

$$|\omega_{i_n} - \omega| < \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.7}$$

El punto "t" es un punto de acumulación del conjunto

$$\{a_{m_{i_n}}^{(k)} :\ k = 1, \ldots, i_n;\ n \in \mathbb{N}\}$$

ya que $a_{m_{i_n}}^{(k)} \to t_k$ $(n \to \infty)$ y "t" es punto de acumulación de $\{t_k :\ k \in \mathbb{N}\}$. Por tanto, existe una sucesión creciente $(j(n))_n \subset \mathbb{N}$ y una sucesión $(k_n)_n$, $1 \leq k_n \leq i_{j(n)}$, tales que

$$a_{m_{i_{j(n)}}}^{(k_n)} \to t \qquad (n \to \infty).$$

Por otra parte, por (4.6) y (4.7),

$$\begin{aligned} |f(a_{m_{i_{j(n)}}}^{(k_n)}) - \omega| &\leq |f(a_{m_{i_{j(n)}}}^{(k_n)}) - \omega_{i_{j(n)}}| + |w_{i_{j(n)}} - \omega| \\ &< \frac{1}{i_{j(n)}} + \frac{1}{j(n)} \to 0 \qquad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Por tanto $\omega \in C_A(f,t)$ y $C_A(f,t) = \mathbb{C}$ para cualquier $t \in A' \cap \partial G$. ■

Observemos que si en particular consideramos como A la unión de los conjuntos de puntos de una cantidad numerable de sucesiones prefijadas

$(a_n^{(k)})_n \subset G$ $(k \in \mathbb{N})$ con $a_n^{(k)} \to t_k$ $(n \to \infty)$, donde $(t_k)_k$ es un conjunto denso de ∂G, obtenemos (de la prueba) el siguiente resultado.

Proposición 4.3.4. *En las condiciones anteriores, el conjunto de funciones* $f \in H(G)$ *tales que* $C_{\{a_n^{(k)}:\ n\in\mathbb{N}\}}(f, t_k) = \mathbb{C}$ $(k \in \mathbb{N})$ *y* $C_A(f, t) = \mathbb{C}$ *para todo punto* $t \in (\partial G) \setminus \{t_k :\ k \in \mathbb{N}\}$ *es residual en* $H(G)$*.*

Este resultado plantea el siguiente problema abierto:

> Supongamos que para cada punto $t \in \partial G$ fijamos una sucesión $(a_n^{(t)})_n \subset G$ con $a_n^{(t)} \to t$ $(n \in \mathbb{N})$. ¿Existe alguna función $f \in H(G)$ con cluster set maximal a lo largo de $(a_n^{(t)})_n$ para cualquier $t \in \partial G$?

3. Por último, comentemos que en vista del Teorema 4.2.3 es natural preguntarse si existe una función entera $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $C_\gamma(F)$ sea maximal para cualquier curva γ tendiendo a ∞. Sin embargo, esto es siempre falso. De hecho, cualquier función entera F no constante satisface que $\lim\limits_{z\to\infty,\ z\in\gamma} F(z) = \infty$ a lo largo de al menos una curva γ tendiendo a ∞, ver [65, pp. 159–161].

Bibliografía

[1] E. Abakumov y J. Gordon, *Common hypercyclic vectors for multiples of backward shift*, J. Funct. Anal. **200** (2003), 494–504.

[2] S. I. Ansari, *Existence of hypercyclic operators on topological vector spaces*, J. Funct. Anal. **148** (1997), 384–390.

[3] J. Auslander y J. A. Yorke, *Interval maps, factor of maps, and chaos*, Tohoku Math. J. **32** (1980), 177–188.

[4] S. Axler, P. Bourdon y W. Ramey, "Harmonic function theory", Springer-Verlag, New York, 1992.

[5] T. Bermúdez, A. Bonilla y A. Peris, *On hypercyclicity and supercyclicity criteria*, Bull. Austral. Math. Soc., en prensa.

[6] L. Bernal-González, *Omnipresent holomorphic operators and maximal cluster sets*, Colloq. Math. **63** (1992), 315–322.

[7] L. Bernal-González, *Derivative and antiderivative operators and the size of complex domains*, Ann. Polon. Math. **59** (1994), 267–274.

[8] L. Bernal-González, *Plane sets having dense holomorphic images*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **40** (1995), 567–569.

[9] L. Bernal-González, *Universal functions for Taylor shifts*, Complex Variables **31** (1996), 121–129.

[10] L. Bernal-González, *On universal entire functions with zero–free derivatives*, Arch. Math. **68** (1997), 145–150.

[11] L. Bernal-González, *Hypercyclic sequences of differential and antidifferential operators*, J. Approx. Theory **96** (1999), 323–337.

[12] L. Bernal-González, *On hypercyclic operators on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1003–1010.

[13] L. Bernal-González, *Densely hereditarily hypercyclic sequences and large hypercyclic manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 3279–3285.

[14] L. Bernal-González, *Norms of hypercyclic sequences*, prepublicación.

[15] L. Bernal-González y M. C. Calderón-Moreno, *Holomorphic T–monsters and strongly omnipresent operators*, J. Approx. Theory **104** (2000), 204–219.

[16] L. Bernal-González y M. C. Calderón-Moreno, *Operators with dense images everywhere*, J. Math. Anal. Appl. **263** (2001), 95–109.

[17] L. Bernal-González y M. C. Calderón-Moreno, *Dense linear manifolds of monsters*, J. Approx. Theory **119** (2002), 156–180.

[18] L. Bernal-González, M. C. Calderón-Moreno y K.-G. Grosse-Erdmann, *Strongly omnipresent integral operators*, Integral Equations Operator Theory **44** (2002), 397–409.

[19] L. Bernal-González, M. C. Calderón-Moreno y K.-G. Grosse-Erdmann, *Strongly omnipresent operators: general conditions and applications to composition operators*, J. Austral. Math. Soc. **72** (2002), 335–348.

[20] L. Bernal-González, M. C. Calderón-Moreno y J. A. Prado-Bassas, *Maximal cluster sets along arbitrary curves*, por aparecer en J. Approx. Theory.

[21] L. Bernal-González, M. C. Calderón-Moreno y J. A. Prado-Bassas, *Ciclicity of coefficient multipliers*, prepublicación.

[22] L. Bernal-González y K.-G. Grosse-Erdmann, *The Hypercyclicity Criterion for sequences of operators*, Studia Math. **157** (2003), 17–32.

[23] L. Bernal-González y A. Montes, *Universal functions for composition operators*, Complex Variables **27** (1995), 47–56.

[24] L. Bernal-González y A. Montes, *Non–finite dimensional closed vector spaces of universal functions for composition operators*, J. Approx. Theory **82** (1995), 375–391.

[25] L. Bernal-González y J. A. Prado-Tendero, *Sequences of differential operators: exponentials, hypercyclicity and equicontinuity*, Ann. Polon. Math. **78** (2001), 169–187.

[26] J. P. Bès y A. Peris, *Hereditarily Hypercyclic Operators*, J. Funct. Anal. **167** (1999), 94–112.

[27] L. Bieberbach, "Analytische Fortsetzung", Springer, Berlin, 1955.

[28] C. D. Birkhoff, *Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières,* C. R. Acad. Sci. Paris **189** (1929), 473–475.

[29] C. Blair y L. A. Rubel, *A universal entire function*, Amer. Math. Monthly **90** (1983), 331–332.

[30] A. Boivin, P. M. Gauthier y P. V. Paramonov, *Approximation on closed sets by analytic or meromorphic solutions on elliptic equations and applications*, Canad. J. Math. **54** (2002), 945–969.

[31] J. Bonet, F. Martínez-Giménez y A. Peris, *Linear chaos on Fréchet spaces*, J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **13** (2003), 1649–1655.

[32] J. Bonet y A. Peris, *Hypercyclic operators on non-normable Fréchet spaces*, J. Funct. Anal. **159** (1998), 587-595.

[33] P. Bourdon y J. H. Shapiro, *Cyclic phenomena for composition operators*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. **596**, Providence, RI, 1997.

[34] H. Brézis, "Analyse fonctionnelle", Masson, París, 1983.

[35] S. M. Buckley, P. Koskela y D. Vukotić, *Fractional integration, differentiation, and weighted Bergman spaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **126** (1999), 369–385.

[36] M. C. Calderón-Moreno, *Universality of derivative and antiderivative operators with holomorphic coefficients*, Ann. Polon. Math. **78** (2001), 197–1001.

[37] M. C. Calderón-Moreno, *Holomorphic differential operators and plane sets with dense image*, Complex Variables **47** (2002), 167–176.

[38] M. C. Calderón-Moreno y J. A. Prado-Bassas, *Large spaces of holomorphic functions with wild behavior on plane sets*, prepublicación.

[39] E. F. Collingwood y A. J. Lohwater, "The theory of cluster sets", Cambridge University Press, London, 1966.

[40] J. B. Conway, "Functions of one complex variable", Springer–Verlag, New York, 1986.

[41] J. Diestel, “Sequences and series in Banach spaces”, Springer-Verlag, New–York, 1984.

[42] H. R. Dowson, “Spectral Theory of Linear Operators”, Academic Press, London, 1978.

[43] P. L. Duren, “Univalent fuctions”, Springer-Verlag, New York, 1983.

[44] P. L. Duren, “Theory of H^p spaces”, Dover Publications Inc. Mineola, New York, 2000.

[45] P. L. Duren y A. Schuster, “Bergman Spaces”, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 100, American Mathematical Society, 2004.

[46] S. M. Duyos–Ruis, *Universal functions of the structure of the space of entire functions*, Soviet Math. Dokl. **30** (1984), 713–716.

[47] K. Endl y W. Luh “Analysis I, Eine integrierte Darstellung”, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1980.

[48] N. S. Feldman, *Hypercyclicity and supercyclicity for invertible bilateral weighted shifts*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 479–485.

[49] N. S. Feldman, *Linear chaos*, prepublicación, `http://home.wlu.edu/~feldmann`.

[50] L. Frerick, *Coefficient multipliers with closed range*, Note di Mat. **17** (1997), 61–70.

[51] D. Gaier, “Lectures on complex approximation”, Birkhauser, Basel–London–Stuttgart, 1987.

[52] R. M. Gethner y J. H. Shapiro, *Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 281–288.

[53] G. Godefroy y J. H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal. **98** (1991), 229–269.

[54] K.-G. Grosse-Erdmann, *Holomorphe Monster und universelle Funktionen*, Mitt. Math. Sem. Giessen **176** (1987), 1–84.

[55] K.-G. Grosse-Erdmann, *On the universal functions of G. R. MacLane*, Complex Variables **15** (1990), 193–196.

[56] K.-G. Grosse-Erdmann, *Universal families and hypercyclic operators*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **36** (1999), 345–381.

[57] K.-G. Grosse-Erdmann, *Hypercyclic and chaotic weighted shifts*, Studia Math. **139** (2000), 47–68.

[58] K.-G. Grosse-Erdmann, *Rate of growth of hypercyclic entire functions*, Indag. Math. **11** (2000), 561–571.

[59] K.-G. Grosse-Erdmann, *Recent developments in hypercyclicity*, Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. **97** (2003), 273–286.

[60] M. Heins, *On the number of 1–1 directly conformed maps which a multiply–conected plane region of finite connectivity* p (> 2) *admits onto itself*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 454–457.

[61] P. Henrici, "Applied and computational complex analysis", vol. 3, J. Wiley, New York, 1986.

[62] D. A. Herrero, *Limits of hypercyclic and supercyclic operators*, J. Funct. Anal. **99** (1991), 179-190.

[63] G. Herzog, *On zero–free universal entire functions*, Arch. Math. **63** (1994), 329–332.

[64] E. Hille, "Analytic Function Theory", vol. II, Chelsea Publishing Company, New York, 1987.

[65] A. S. B. Holland, "Introduction to the theory of entire functions", Academic Press, New York, 1973.

[66] M. Jevtic y M. Pavlovic, *Coefficient multipliers on spaces of analytic functions*, Acta Sci. Math. (Szeged) **64** (1998), 531–545.

[67] C. Kitai, "Invariant Closed Sets for Linear Operators", Thesis, Univ. Toronto, 1982.

[68] G. R. MacLane, *Sequences of derivatives and normal families*, J. Analyse Math. **2** (1952), 72–87.

[69] F. Martínez–Giménez y A. Peris, *Chaos for backward shift operators*, J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **12** (2002), 1703–1715.

[70] V. Mathew, *A note on hypercyclic operators on the space of entire sequences*, Indian J. Pure Appl. Math. **25** (1994), 1181–1184.

[71] S. N. Mergelyan, *On the representation of functions by series of polynomials on closed sets* (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) **78** (1951), 405–408. English transl. in: Translations Amer. Math. Soc. **3** (1953), 287–293.

[72] A. Montes y H. Salas, *Supercyclic subspaces: spectral theory and weighted shifts*, Adv. Math. **163** (2001), 74–134.

[73] A. Montes y H. Salas, *Supercyclic subspaces*, Bull. London. Math. Soc. **35** (2003), 721–737.

[74] J. Müller, *The Hadamard multiplication theorem and applications in summability theory*, Complex Variables **18** (1992), 155–166.

[75] J. Müller, *Coefficient multipliers from $H(G_1)$ into $H(G_2)$*, Arch. Math. **61** (1993), 75–81.

[76] A. A. Nersesjan, *Carleman sets* (Russian), Izv. Akad. Nauk Armjan. SSR Ser. Mat. **6** (1971), 465–471. English transl. in: Amer. Math. Soc. Transl. (2) **122** (1984), 99–104.

[77] K. Noshiro, "Cluster sets", Springer-Verlag, Berlin, 1960.

[78] J. C. Oxtoby, "Measure and Category", 2nd. ed., Springer, New York, 1980.

[79] P. Painlevè, "Leçons sur la théorie analytique des équations difféfretielles professées à Stockholm 1895", Hermann, París, 1897.

[80] L. S. Pontryagin, "Topological groups", Gordon and Breach Science Publishers Inc. New York, London, París, 1966.

[81] H. Render y A. Sauer, *Multipliers on vector spaces of holomorphic functions*, Nagoya Math. J. **159** (2000), 167–178.

[82] S. Rolewicz, *On orbits of elements*, Studia Math. **32** (1969), 17-22.

[83] W. Rudin, "Functional Analysis", McGraw-Hill, New York, 1991.

[84] W. Rudin, "Real and complex analysis", 3rd ed., MacGraw–Hill, New York, 1987.

[85] C. Runge, *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*, Acta Math. **6** (1885), 228–244.

[86] H. Salas, *An hypercyclic operator whose adjoint is also hypercyclic*, Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 765-770.

[87] H. Salas, *Hypercyclic weighted shifts*, Amer. Math. Soc. **347** (1995), 993-1004.

[88] J. H. Shapiro, "Composition operators and classical function theory", Springer–Verlag, New York, 1993.

[89] J. H. Shapiro, *Notes on the dynamics of linear operators*, prepublicación, `http://www.mth.msu.edu/~shapiro`.

[90] A.L. Shields, "Weight shift operators and analytic function theory", Topics of Operator Theory, edited by C. Pearcy, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1974.

[91] S. A. Shkarin, *On the growth of D–universal functions*, Moscow Univ. Math. Bull. **48** (1993), 49–51.

[92] R. Tenthoff, "Universelle holomorphe Funktionen mit vorgegebene Approximationswegen", Shaker Verlag, Aachen, 2000.

[93] S. M. Voronin, *A theorem on the "universality-of the zeta-function, (Russian)* Izv. Acad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **39** (1975), 475-486. English transl. in: Math. USSR-Izv. (1975), 443-453.

[94] J. Wengenroth, *Hypercyclic operators on non-locally convex spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 1759–1761.

[95] A. Wilansky, "Topology for Analysis", Robert E. Krieger Publishing Company, Inc. Malabar, Florida, 1983.

[96] Y. Xiukui, *Coefficient multipliers on weighted Bergman spaces*, Complex Variables **40** (1999), 163–172.

[97] Y. Xiukui, *Multipliers of* A^p *and* H^p *spaces*, J. Math. Res. Exposition **19** (1999), 165–170.

[98] K. Zhu, "Operator Theory in Functions Spaces", Marcel-Dekker, New York, 1990.