UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

ALGUNOS MÓDULOS EN ESPACIOS DE BANACH CON APLICACIONES EN TEORÍA MÉTRICA DEL PUNTO FIJO

BEATRIZ GAVIRA AGUILAR

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

ALGUNOS MÓDULOS EN ESPACIOS DE BANACH CON APLICACIONES EN TEORÍA MÉTRICA DEL PUNTO FIJO

Memoria presentada por
Beatriz Gavira Aguilar
para optar al grado de Doctor
en Matemáticas.

V$^{\underline{o}}$ B$^{\underline{o}}$ del Director:

Fdo.: Beatriz Gavira Aguilar.

Fdo.: Dr. D. Tomás Domínguez Benavides
Catedrático del Departamento
de Análisis Matemático
de la Universidad de Sevilla.

Sevilla, Abril 2006

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi más profunda y sincera gratitud al director de este trabajo, el profesor D. Tomás Domínguez Benavides, por su valiosa ayuda, su inagotable paciencia y su infinita amabilidad. He sido muy afortunada de haber trabajado bajo su dirección y siempre estaré en deuda con él, pues nunca podré compensarle por todo el tiempo y esfuerzo que ha dedicado para que esta memoria pueda ver la luz.

Doy también las gracias a todos los miembros del Departamento de Análisis Matemático, en especial a los del grupo de investigación de *Análisis Funcional No Lineal* y a mis compañeros becarios, porque me han atendido y ayudado cada vez que lo he necesitado, mostrando gran interés y apoyo durante el largo período de investigación.
Merece especial mención la profesora Pepa Lorenzo, por ayudarme a resolver mis numerosas dudas y por el gran interés mostrado al leer una parte de esta memoria. Todas sus sugerencias me han resultado muy útiles.
Quisiera mencionar también a José Antonio Prado, compañero, consejero y amigo, siempre dispuesto a ayudarme ante cualquier obstáculo que se cruzaba en mi camino.

No puedo olvidar a mis compañeros del I.E.S. Al-Mudeyne, que día a día dan vida a nuestro centro formando una gran familia a la que he tenido la suerte de pertenecer durante los dos últimos años.

Gracias a “las niñas” y a todas aquellas personas con las que he compartido el escaso tiempo libre de que disponía, ya que de una u otra forma siempre han sabido darme ánimos para seguir adelante.

Infinitas gracias a mi familia por su cariño y apoyo incondicional. Especialmente a mis padres a los que dedico esta memoria, pues fueron ellos los que me animaron a realizar los estudios de Doctorado. A partir de ahora espero poder compensarles por todo el tiempo que les he robado.

Gracias a Dios.

A mis padres

Índice general

Introducción

El hecho de que una aplicación tenga o no punto fijo (esto es, un punto que permanece invariante bajo dicha aplicación) es una propiedad intrínseca de dicha aplicación. Sin embargo, muchas condiciones necesarias o suficientes para la existencia de punto fijo involucran propiedades de naturaleza algebraica, topológica o métrica de la aplicación o de su dominio. Entendemos por Teoría Métrica del Punto Fijo la rama de la Teoría del Punto Fijo que engloba los resultados que dependen de una métrica y que no tienen por qué ser invariantes cuando reemplazamos dicha métrica por otra equivalente. El primer teorema métrico de punto fijo fue dado por S. Banach en 1922.

Teorema 0.0.1. (Principio de Contracción de Banach, [5]) *Sea X espacio métrico completo y $T : X \to X$ una aplicación contractiva, esto es, existe $k \in [0, 1)$ tal que $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ para todo $x,\ y \in X$. Entonces T tiene un (único) punto fijo x_0. Además, $x_0 = \lim_n T^n x$ para cada $x \in X$.*

El Teorema de Banach es una herramienta básica en Análisis Funcional, Análisis No Lineal y Ecuaciones Diferenciales, por lo que se ha intentado obtener generalizaciones debilitando sus hipótesis. La generalización más natural debería ser permitir a la constante k tomar el valor 1 (es decir, relajar la condición de contractividad requiriendo solo que la aplicación sea no expansiva), pero en este caso el teorema no es cierto, como muestra una traslación en $\mathbb{R}$. Ni siquiera la hipótesis intermedia $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ asegura la existencia de punto fijo. En efecto, considerando

$X = [1, +\infty)$ y $T : X \to X$ dada por $Tx = x + 1/x$, se tiene

$$d(Tx, Ty) = \left| x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y} \right| = |y - x| - \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| < |y - x|$$

y, sin embargo, T no tiene punto fijo. Esto no sucedería si el intervalo en que se define T fuera acotado, porque en tal caso podríamos aplicar el Teorema de Brouwer:

Teorema 0.0.2. (Brouwer [11], 1912) *Sea M un subconjunto convexo, cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$ y $T : M \to M$ continua. Entonces T tiene un punto fijo.*

A la vista del Teorema de Brouwer y de los anteriores ejemplos surge una cuestión natural: Si M es un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach arbitrario y $T : M \to M$ es *no expansiva* (esto es, $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ para todo $x, y \in M$), ¿tiene T un punto fijo?. Nótese que se ha debilitado la hipótesis sobre el espacio, permitiéndole tener dimensión arbitraria, pero se ha fortalecido notablemente la hipótesis de continuidad de la aplicación. La respuesta vuelve a ser negativa como muestra el siguiente ejemplo debido a S. Kakutani.

Ejemplo 0.0.1. (Kakutani [47], 1943) *Sea B_{c_0} la bola unidad de c_0 y $T : B_{c_0} \to B_{c_0}$ definida por $T(x_1, x_2, \ldots) = (1, x_1, x_2, \ldots)$. Se tiene que T es una isometría afín y no tiene puntos fijos.*

Durante muchos años la Teoría Métrica del Punto Fijo se limitó a estudiar pequeñas extensiones del Teorema de Banach en la línea de rebajar la exigencia de contractividad, así como a la extensión de este resultado para aplicaciones multivaluadas. En la década de los sesenta, la Teoría Métrica del Punto Fijo recibe un nuevo impulso cuando F.E. Browder, D. Göhde y W.A. Kirk prueban la existencia de punto fijo para aplicaciones no expansivas en espacios de Banach que verifican ciertas propiedades geométricas. En 1965, Browder [12] probó que toda aplicación no expansiva definida en un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio de Hilbert, con imagen en sí mismo, tiene un punto fijo. En ese mismo año, simultáneamente Browder [13] y Göhde [42] probaron que toda aplicación no expansiva definida en un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach uniformemente convexo, con imagen en sí mismo, tiene un punto fijo; y Kirk [49] observó que una propiedad geométrica más débil, llamada estructura normal, garantizaba el mismo resultado en un espacio de Banach reflexivo. Recuérdese que un espacio de Banach X tiene estructura normal si cualquier subconjunto $A \subset X$ convexo, cerrado, acotado y diametral es unitario.

Teorema 0.0.3. *Sea C un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio X y $T : C \to C$ no expansiva. Si X es un espacio de Hilbert, o un espacio de Banach uniformemente convexo, o un espacio de Banach reflexivo con estructura normal, entonces T tiene un punto fijo.*

A partir de estos resultados se inicia la búsqueda de condiciones más generales para un espacio de Banach y para un subconjunto C que aseguren la existencia de puntos fijos. Para formular el problema se introduce de forma natural la siguiente definición: Se dice que un espacio de Banach X tiene la propiedad del punto fijo (FPP) para aplicaciones no expansivas si cada aplicación no expansiva definida en un subconjunto convexo, cerrado y acotado C de X, con imagen en C, tiene un punto fijo. El ejemplo de Kakutani muestra que hay espacios de Banach que no tienen la FPP. En este ejemplo, el hecho de que c_0 no tenga dicha propiedad es debido a que la bola unidad de c_0 no es débil compacta, puesto que una aplicación afín y continua es débil-débil continua y, por tanto, debe tener puntos fijos en conjuntos débilmente compactos (Teorema de Tychonoff). Ejemplos como éste y la importancia de otras topologías definidas en espacios de Banach, han motivado el estudio de la existencia de puntos fijos para aplicaciones no expansivas definidas en subconjuntos compactos con respecto a otras topologías.

Los resultados de Browder, Göhde y Kirk establecen un puente, hasta entonces inexistente, entre la Teoría Geométrica de los Espacios de Banach, tema enmarcado habitualmente en Análisis Funcional Lineal, y la Teoría del Punto Fijo, tema correspondiente al Análisis Funcional No Lineal. A partir de este momento muchos investigadores se preocupan por explotar esta conexión, esencialmente considerando otras propiedades geométricas de los espacios de Banach (tales como suavidad uniforme, condiciones de tipo Opial, casi convexidad uniforme, casi suavidad uniforme, etc.) que puedan ser aplicadas para probar la existencia de puntos fijos para distintos tipos de operadores no lineales. Asociados a estas propiedades van surgiendo unos módulos y coeficientes geométricos que las caracterizan. Así pues, dentro de la Teoría Geométrica de los Espacios de Banach es muy frecuente encontrar definiciones de módulos (esto es, ciertas funciones reales características del espacio) que están estrechamente relacionados con diferentes propiedades geométricas que este espacio puede verificar. Estos módulos dan una idea cuantitativa de la verificación de estas propiedades. Los más conocidos son, probablemente, el módulo de Clarkson de convexidad uniforme y el módulo de suavidad uniforme. Estos módulos, y otros muchos referentes a otras propiedades geométricas, han sido muy útiles para el estudio de la existencia de puntos fijos de operadores no expansivos (ver [4] y las referencias allí incluidas).

En 1995, C. Benítez, K. Przeslawski y D. Yost [8] definen un módulo, al que llaman módulo de cuadratura, que caracteriza simultáneamente diferentes propiedades geométricas de los espacios normados (convexidad uniforme, suavidad uniforme, estructura normal uniforme, etc.).

Teorema 0.0.4. ([8]) *Sea X un espacio normado y $\xi_X : [0,1) \to \mathbb{R}$ su módulo de cuadratura dado por*

$$\xi_X(\beta) = \sup\left\{ \frac{\|x - z(x,y)\|}{\|x\| - 1} : \|y\| \leq \beta < 1 < \|x\| \right\}$$

siendo $z(x,y)$ el único punto del segmento lineal $[x,y]$ con $\|z\| = 1$. Entonces:

1. *X es uniformemente convexo si y sólo si $\lim_{\beta\to 1}(1-\beta)\xi_X(\beta) = 0$.*

2. *X es uniformemente suave si y sólo si $\xi_X'(0) = 0$.*

3. *Si $\xi_X(\beta) < 1/(1-\beta)$ para algún $\beta \in (0,1)$, entonces X tiene estructura normal uniforme.*

La ventaja que este módulo tiene sobre otros antes definidos (como el módulo de suavidad uniforme, el módulo de Clarkson, de Gurarii, de Milman, etc.) es poder "medir" simultáneamente la suavidad y la convexidad del espacio en lugar de hacerlo independientemente.

El módulo de cuadratura (al igual que la convexidad y suavidad uniformes) tiene carácter finito-dimensional, esto es, sólo depende de los subespacios de dimensión finita del espacio considerado. Sin embargo, puesto que las anteriores propiedades geométricas tienen interesantes versiones de carácter infinito-dimensional (casi convexidad uniforme, casi suavidad uniforme, estructura normal débil uniforme, etc.), es natural plantearse la existencia de un módulo que caracterice dichas propiedades. Éste será nuestro principal objetivo en el Capítulo 2 de esta Memoria.

La Teoría del Punto Fijo para aplicaciones multivaluadas (aplicaciones que transforman puntos en conjuntos) tiene útiles aplicaciones en Ciencias Aplicadas, en particular, en Teoría de Juegos y en Economía Aplicada. Por ello, surge de forma natural el problema de extender los resultados de punto fijo obtenidos para aplicaciones univaluadas al campo de las aplicaciones multivaluadas.

Algunos teoremas de existencia de punto fijo para aplicaciones no expansivas univaluadas ya han sido extendidos al caso multivaluado, por ejemplo, S.B. Nadler [69] extendió el Principio de Contracción de Banach en 1969. Sin embargo, muchos otros resultados todavía no han podido ser extendidos, por ejemplo, se desconoce si es posible extender el famoso Teorema de Kirk, ya que los argumentos usados en la prueba de dicho teorema no son válidos en el caso multivaluado.

Como hay diversas propiedades que garantizan estructura normal y reflexividad (por ejemplo, convexidad uniforme, suavidad uniforme y casi convexidad uniforme), es lógico estudiar si dichas propiedades implican la FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas.

En 1974 T.C. Lim [57] probó la existencia de punto fijo para una aplicación no expansiva definida en un subconjunto C cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach uniformemente convexo, con imagen en los subconjuntos compactos de C.

La prueba original del Teorema de Lim combinaba el método de los centros asintóticos de Edelstein y la inducción transfinita. El estudio de ciertas propiedades del centro asintótico de sucesiones llevó a W.A. Kirk y S. Massa [52] en 1990 a una generalización del Teorema de Lim probando la existencia de punto fijo para una aplicación no expansiva definida en un subconjunto C cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach, con imagen en los subconjuntos compactos y convexos de C, bajo la hipótesis de compacidad del centro asintótico en C de cada sucesión acotada.

Un ejemplo dado por T. Kuczumov y S. Prus [54] muestra que en los espacios casi uniformemente convexos no se satisface esta propiedad de los centros asintóticos.

Así pues, el problema de obtener resultados de punto fijo en espacios casi uniformemente convexos y en espacios uniformemente suaves permanecía abierto. Estas cuestiones aparecieron formuladas explícitamente en un trabajo sobre Teoría Métrica del Punto Fijo para aplicaciones multivaluadas realizado por H.K. Xu [82] en 2000.

Problemas Abiertos ([82]): Sea X un espacio de Banach uniformemente suave o casi uniformemente convexo, C un subconjunto cerrado, acotado y convexo de X y $T : C \to KC(C)$ una aplicación no expansiva. ¿Tiene T punto fijo?

El análisis de la importancia del centro asintótico en el Teorema de Kirk-Massa llevó a T. Domínguez Benavides y P. Lorenzo al estudio de algunas conexiones entre los centros asintóticos y la geometría de ciertos espacios, incluidos los espacios casi uniformemente convexos. En [30] obtienen la siguiente relación entre el radio de Chebyshev del centro asintótico de una sucesión acotada y el radio asintótico de dicha sucesión, a través del módulo de convexidad no compacta con respecto a la medida de separación β:

$$r_C(A(C, \{x_n\})) \leq (1 - \Delta_{X,\beta}(1^-))r(C, \{x_n\})$$

siendo C un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Banach reflexivo y $\{x_n\}$ una sucesión acotada en C que es regular con respecto a C. Usando dicha relación que da lugar a un método iterativo que reduce en cada paso el valor del radio de Chebyshev para una cadena de centros asintóticos, prueban en [32] la existencia de punto fijo para una aplicación no expansiva con valores compactos y convexos definida en un subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach X tal que $\varepsilon_\beta(X) < 1$. Dicho resultado garantiza, en particular, la existencia de punto fijo en los espacios casi uniformemente convexos, dando así una respuesta afirmativa a uno de los problemas planteados por H.K. Xu. El problema abierto de los espacios uniformemente suaves será resuelto afirmativamente en el Capítulo 3 de esta Memoria.

En el **Capítulo 1** se recogen los conceptos, resultados y técnicas que serán usados en los posteriores capítulos. No se incluyen demostraciones, sino que se intenta dar referencias concretas.

Comenzamos recordando el concepto de estructura normal y sus variantes (τ-estructura normal, estructura normal uniforme y τ-estructura normal uniforme), así como los coeficientes considerados como medidas de dichas propiedades.

A continuación se hace un breve estudio de algunas propiedades geométricas (tales como la propiedad de Opial, convexidad, suavidad, etc.), que implican algún tipo de estructura normal, junto con los módulos que las caracterizan.

Finalmente se recogen algunos resultados conocidos de existencia de punto fijo para aplicaciones no expansivas univaluadas y multivaluadas.

En el **Capítulo 2** se define un nuevo módulo de carácter infinito-dimensional con respecto a una topología lineal τ tal que la norma del espacio es τ-secuencialmente semicontinua inferiormente (τ-slsc), como sigue

$$\zeta_{X,\tau}(\beta) = \sup\left\{\liminf_{n\to\infty} \frac{\|x_n - y\|}{1 - \|x\|}\right\} \qquad \text{para cada } \beta \in (0,1)$$

donde el supremo se toma sobre todas las sucesiones $\{x_n\} \subset B_\beta$ tales que $\tau - \lim_n x_n = x \neq 0, \liminf_n \|x_n - x\| \leq \beta$ e $y = \frac{x}{\|x\|}$, donde $\tau - lim_n x_n$ denota el límite de la sucesión $\{x_n\}$ con respecto a la topología τ y B_β denota la bola cerrada de centro 0 y radio β.

Dicho módulo está acotado superior e inferiormente, ya que para cada $\beta \in (0,1)$

$$1 \leq \zeta_{X,\tau}(\beta) \leq \frac{1}{1-\beta},$$

y veremos que la cota inferior se alcanza en cualquier espacio con la propiedad de Schur, mientras que la cota superior se alcanza en ℓ_∞. Además se calcula también el valor de dicho módulo en algunos otros espacios clásicos (tales como, ℓ_p con $1 \leq p \leq \infty$, c_0 y $\ell_{p,\infty}$ con $1 \leq p < \infty$), destacando que, en particular, ha sido posible el cálculo del módulo infinito-dimensional en los espacios de sucesiones ℓ_p con $1 \leq p \leq \infty$, mientras que el módulo de cuadratura sólo es conocido para $p = 1$, $p = 2$ y $p = \infty$.

Se estudian a continuación algunas propiedades básicas de este nuevo módulo, obteniéndose que la función $\zeta_{X,\tau}(\cdot)$ es creciente, convexa y, por tanto, continua en $(0,1)$; además es también continua respecto a la distancia de Banach-Mazur.

El módulo infinito-dimensional está relacionado con el módulo de cuadratura mediante la siguiente desigualdad

$$\zeta_{X,\tau}(\beta) \leq \xi_X(\beta) \quad \text{para cualquier } \beta \in (0,1),$$

según la cual este nuevo módulo es un refinamiento del anterior. Además, en el caso del espacio de sucesiones ℓ_2 con la topología débil la estimación es óptima, ya que

$$\zeta_{\ell_2}(\beta) = \xi_{\ell_2}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{para todo } \beta \in (0,1).$$

A continuación se muestra que el módulo infinito-dimensional permite caracterizar simultáneamente la τ-casi convexidad uniforme y la τ-casi suavidad uniforme, de igual forma que el módulo de cuadratura caracterizaba la convexidad y suavidad uniformes.

Teorema 0.0.5. *Sea X un espacio de Banach y τ una topología lineal sobre X tal que la norma es τ-slsc. Entonces:*

1. *X es τ-casi uniformemente convexo si y sólo si X es reflexivo y $\lim_{\beta\to 1}(1-\beta)\zeta_{X,\tau}(\beta) = 0$.*

2. *X es τ-casi uniformemente suave si y sólo si $\zeta'_{X,\tau}(0) = 0$.*

Observación 0.0.1. En 1997 S. Prus [75] define la clase de los espacios de Banach UNC (uniformly noncreasy), que contiene todos los espacios uniformemente convexos y uniformemente suaves. Más tarde, en 2001, J. García-Falset, E. Llorens-Fuster y E.M. Mazcuñán Navarro [37] dan una generalización de dicha noción definiendo la propiedad de ser r-UNC (r-uniformly noncreasy) con $r \in (0,2]$. Sería, pues, interesante obtener una caracterización de los espacios de Banach que son UNC o r-UNC a través del módulo de cuadratura ξ.

Recientemente, S. Prus y M. Szczepanik [77] han definido la clase de los espacios de Banach NUNC (nearly uniformly noncreasy), una generalización con carácter infinito-dimensional, que contiene todos los espacios casi uniformemente convexos y casi uniformemente suaves. Por eso, de igual modo, sería interesante caracterizar, mediante el módulo infinito-dimensional ζ, los espacios de Banach que cumplen la propiedad NUNC.

Como el módulo de cuadratura podía ser usado también para obtener estructura normal uniforme, estudiamos si hay una relación similar entre el módulo infinito-dimensional y el concepto de τ-estructura normal uniforme. A partir de la siguiente cota inferior obtenida para el coeficiente $\tau CS(X)$ en función del módulo $\zeta_{X,\tau}(\cdot)$

$$\tau CS(X) \geq \sup_{\beta\in(0,1)} \frac{1+\beta-\zeta_{X,\tau}(\beta)+\sqrt{(\zeta_{X,\tau}(\beta)-1-\beta)^2+4\beta\zeta_{X,\tau}(\beta)}}{2},$$

se obtiene la siguiente condición suficiente para que un espacio de Banach tenga τ-estructura normal uniforme.

Teorema 0.0.6. *Sea τ una topología lineal sobre X tal que la norma es τ-slsc y cada conjunto τ-secuencialmente compacto es separable. Si*

$$\zeta_{X,\tau}(\beta) < \frac{\beta}{1-\beta} \quad \textit{para algún } \beta \in (0,1),$$

en particular si $\liminf_{\beta\to 1}(1-\beta)\zeta_{X,\tau}(\beta) < 1$, *entonces X tiene τ-estructura normal uniforme y, por tanto, τ-FPP.*

Esta estimación no es óptima ya que, por ejemplo, el espacio $X = (\mathbb{R} \oplus l_2)_\infty$ con la topología débil satisface $\zeta_X(\beta) \geq \beta/(1-\beta)$ para cada $\beta \in (0,1)$ y $WCS(X) = \sqrt{2}$. No obstante, no podemos esperar que la estimación $\zeta_{X,\tau}(\beta) < 1/(1-\beta)$ para algún β garantice τ-estructura normal uniforme como sucedía con el módulo de cuadratura ya que, por ejemplo, el espacio $X = c_0$ cumple $\zeta_X(\beta) = \beta/(1-\beta) < 1/(1-\beta)$ para $\beta \in (1/2, 1)$ y, sin embargo, c_0 no tiene estructura normal débil.

Hasta ahora el módulo infinito-dimensional nos ha permitido obtener resultados de punto fijo a través de condiciones que garantizan τ-estructura normal. No obstante, usando el coeficiente $R_\tau(X)$, veremos que el módulo infinito-dimensional también da una condición suficiente para que un espacio de Banach X tenga τ-FPP en ausencia de τ-estructura normal.

Teorema 0.0.7. *Sea τ una topología lineal sobre X tal que las funciones de tipo τ-nulo son τ-slsc y cada conjunto τ-secuencialmente compacto es τ-compacto. Si $\zeta_{X,\tau}(\beta) < 1+\beta$ para algún $\beta \in (0,1)$, en particular si $\zeta'_{X,\tau}(0) < 1$, entonces $R_\tau(X) < 2$ y, por tanto, X tiene la τ-FPP.*

Observación 0.0.2.

1. El recíproco del Teorema 0.0.7 no es cierto. Por ejemplo, $X = L_1(\mu)$ cumple la clm-FPP (ver [46]) y, sin embargo, $\zeta_{X,clm}(\beta) = 1+\beta$ para todo $\beta \in (0,1)$.

2. La estimación del Teorema 0.0.7 no da nuevos resultados de punto fijo para β próximo a 1. De hecho, si $\beta \geq (-1+\sqrt{5})/2$ se tiene

$$\frac{\beta}{1-\beta} \geq 1+\beta.$$

En este sentido, podemos decir que el Teorema 0.0.6 es útil para β próximo a 1 y el Teorema 0.0.7 para β próximo a 0. Sería interesante obtener resultados de punto fijo mediante el módulo $\zeta_{X,\tau}(\beta)$ para valores intermedios de β en espacios en los que $\tau CS(X) = 1$ y $R_\tau(X) = 2$.

Como consecuencia del Teorema 0.0.7 podemos obtener el siguiente resultado que relaciona el módulo infinito-dimensional con el módulo de τ-casi suavidad uniforme.

Corolario 0.0.1. *Si $\zeta_{X,\tau}(\beta) < 1+\beta$ para algún $\beta \in (0,1)$, en particular si $\zeta'_{X,\tau}(0) < 1$, entonces $b'_{X,\tau}(0) < 1$, donde $b_{X,\tau}(\cdot)$ denota el módulo de τ-casi suavidad uniforme de X.*

Finalmente, como los espacios de Orlicz son una generalización natural de los espacios L_p (en los que mostramos el valor del módulo infinito-dimensional con respecto a la topología de la convergencia local en medida) vamos a estimar el valor del módulo infinito-dimensional en dichos espacios.

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y Φ una función de Orlicz, es decir, una función $\Phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ convexa, continua, no decreciente, tal que $\Phi(0) = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = +\infty$. El conjunto de todas las funciones medibles $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ tales que

$$\int_\Omega \Phi(\rho|f|)d\mu < +\infty \quad \text{para algún } \rho > 0$$

con la norma

$$N_\Phi(f) = \inf\left\{\rho > 0 : \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f|}{\rho}\right) d\mu \le 1\right\}$$

es un espacio de Banach al que se denomina *espacio de Orlicz $L_\Phi(\mu)$*.

En adelante vamos a suponer que:

- (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finita,
- Φ es una función de Orlicz no degenerada, esto es, $\Phi(x) > 0$ para todo $x > 0$,
- Φ satisface la Δ_2-condición, esto es, existe $K > 0$ tal que $\Phi(2x) \le K\Phi(x)$ para cada $x \ge 0$,

- $\Phi(1) = 1$.

Además vamos a denotar Φ^{-1} por Ψ y escribiremos $I_\Phi(f)$ en lugar de $\int_\Omega \Phi(|f|)d\mu$ si dicha integral está bien definida.

En [46] se define la función $a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$a(\delta) = \text{ínf}\left\{\frac{\Psi(t)}{\Psi(\delta t)} : t > 0\right\}$$

(inspirada en la función de expansión definida por T. Domínguez Benavides y R.J. Rodríguez en [33]) que permite obtener información sobre la norma de una función $f \in L_\Phi(\mu)$ a través de la integral que define dicha norma.

Inspirados por la definición anterior definimos la función $b : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$b(\delta) = \sup\left\{\frac{\Psi(t)}{\Psi(\delta t)} : t > 0\right\},$$

que será de utilidad para estimar el valor del módulo infinito-dimensional en los espacios de Orlicz.

Usando algunas propiedades que cumplen estas funciones, se prueba el siguiente teorema que da una estimación del valor del módulo infinito-dimensional en los espacios de Orlicz con la topología de la convergencia local en medida.

Teorema 0.0.8. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finita y Φ una función de Orlicz no degenerada que satisface la Δ_2-condición y $\Phi(1) = 1$. Entonces, para cada $\beta \in (0, 1)$, se tiene*

$$\zeta_{L_\Phi(\mu),clm}(\beta) \le \sup_{A\in(0,\beta)} \frac{1 + \frac{\beta}{1-A}}{a\left(b^{-1}\left(\frac{1+\beta-A}{\beta}\right)\left(1 - a^{-1}\left(\frac{\beta}{A}\right)\right) + b^{-1}\left(\frac{1+\beta-A}{1-A}\right)\right)}.$$

La estimación obtenida mejora la cota superior del módulo infinito-dimensional $1/(1-\beta)$. Además, mediante cálculos elementales se comprueba que en los espacios $L_p(\mu)$ con la topología de la convergencia local en medida y en los espacios ℓ_p con la topología débil $(1 < p < +\infty)$ la estimación es óptima.

En el **Capítulo 3** se dan resultados de existencia de punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas con rangos contenidos o no en sus dominios. Todos estos resultados se obtienen como consecuencia de cierta relación existente entre el radio de Chebyshev del centro asintótico de ultra redes acotadas y el radio asintótico de tales ultra redes. El uso de ultra redes en lugar de sucesiones nos permitirá eliminar la hipótesis de separabilidad al trabajar con una topología arbitraria en lugar de la topología débil y al extender los resultados obtenidos para aplicaciones cuyo rango no esté contenido en su dominio.

Con objeto de garantizar que los centros asintóticos de redes con los que vamos a trabajar sean no vacíos, a lo largo de este capítulo X será un espacio de Banach y τ una topología lineal sobre X tal que las funciones de tipo τ-nulo son τ-semicontinuas inferiormente (τ-lsc), o tal que los conjuntos τ-secuencialmente compactos son τ-compactos y las funciones de tipo τ-nulo son τ-secuencialmente semicontinuas inferiormente (τ-slsc).

Comenzamos, pues, el capítulo definiendo la condición que será nuestra principal herramienta para garantizar la existencia de punto fijo. Diremos que X satisface la $(\mathrm{DL})_\alpha$-condición con respecto a τ ($\tau(\mathrm{DL})_\alpha$-condición) si existe $\lambda \in [0,1)$ tal que para cada subconjunto τ-compacto y convexo C de X y para cada ultra red acotada $\{x_\alpha\}$ en C se tiene

$$r_C(A(C,\{x_\alpha\})) \leq \lambda r(C,\{x_\alpha\}).$$

Se prueba que si X es un espacio de Banach que satisface la $\tau(\mathrm{DL})_\alpha$-condición y τ es una topología lineal sobre X tal que los conjuntos τ-secuencialmente compactos son τ-compactos y separables, entonces X tiene τ-estructura normal.

El teorema que enunciamos a continuación constituye la pieza clave del capítulo, ya que en él se prueba que la $\tau(\mathrm{DL})_\alpha$-condición implica la existencia de punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas.

Teorema 0.0.9. *Sea C un subconjunto no vacío, τ-compacto, cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach X y $T : C \to KC(C)$ una aplicación no expansiva. Si X satisface la $\tau(DL)_\alpha$-condición, entonces T tiene un punto fijo.*

A partir de aquí nuestro objetivo será probar que ciertas propiedades que implican algún tipo de estructura normal también garantizan que el espacio cumple la $\tau(\mathrm{DL})_\alpha$-condición y, por tanto, la τ-FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas. En este sentido, comenzamos mostrando que la condición dada a través del módulo de cuadratura $\xi_X(\beta) < 1/(1-\beta)$ para algún $\beta \in (0,1)$, que implica estructura normal uniforme, también implica la $(\mathrm{DL})_\alpha$-condición, esto es, la $(\mathrm{DL})_\alpha$-condición con respecto a la topología débil.

Teorema 0.0.10. *Sea C un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach reflexivo X y sea $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ una ultra red en C. Entonces, para cada $\beta \in (0,1)$*

$$r_C(A(C, \{x_\alpha\})) \leq (1-\beta)\xi_X(\beta) r(C, \{x_\alpha\}).$$

Consecuentemente, si C es un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach X tal que

$$\xi_X(\beta) < \frac{1}{1-\beta} \quad \textit{para algún } \beta \in (0,1)$$

y $T : C \to KC(C)$ es una aplicación no expansiva. Entonces T tiene un punto fijo.

Como consecuencia del resultado anterior y usando la siguiente desigualdad que relaciona el módulo de cuadratura con el módulo de suavidad

$$(1-\beta)\xi_X(\beta) \leq 2\rho_X(\beta) + 1 - \beta \quad \text{para todo } \beta \in (0,1)$$

([8], Teorema 2.4), se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 0.0.2. *Sea C un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach X tal que $\rho'_X(0) < 1/2$, y $T : C \to KC(C)$ una aplicación no expansiva. Entonces T tiene un punto fijo.*

En particular, teniendo en cuenta que un espacio de Banach X es uniformemente suave si y sólo si $\rho'_X(0) = 0$, se deduce que los espacios de Banach uniformemente suaves verifican la propiedad del punto fijo para aplicaciones no expansivas con valores compactos y convexos, dando así una respuesta afirmativa al Problema Abierto 1 planteado por H.K. Xu en [82].

A continuación presentamos tres condiciones equivalentes en términos del módulo infinito-dimensional, de la característica de τ-casi convexidad uniforme y del módulo de Opial, que implican τ-estructura normal uniforme y probamos que las mismas condiciones también implican la $\tau(\mathrm{DL})_\alpha$-condición y, por tanto, la τ-FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas.

Teorema 0.0.11. *Sea X un espacio de Banach y τ una topología lineal sobre X tal que las funciones de tipo τ-nulo son τ-lsc. Sea C un subconjunto acotado, convexo, τ-compacto y τ-secuencialmente compacto de X y $\{x_n\}$ una sucesión en C que es regular con respecto a C. Entonces*

$$r_C(A(C, \{x_{n_\alpha}\})) \leq \frac{1}{1 + r_{X,\tau}(1)} r(C, \{x_{n_\alpha}\})$$

para cada $\{x_{n_\alpha}\}$ subred universal de $\{x_n\}$.
Consecuentemente, si C es un subconjunto no vacío, convexo, cerrado, acotado, τ-compacto y τ-secuencialmente compacto de X. Supongamos que se verifica una de las siguientes condiciones equivalentes:

1. $r_{X,\tau}(1) > 0$
2. $\Delta_{0,\tau}(X) < 1$
3. $\zeta_{X,\tau}(\beta) < \beta/(1-\beta)$ *para algún* $\beta \in (0, 1)$.

Entonces cada aplicación no expansiva $T : C \to KC(C)$ tiene un punto fijo.

En particular, como la característica de convexidad no compacta $\Delta_{0,\tau}(X)$ cumple la desigualdad $\varepsilon_{\beta,\tau}(X) \geq \Delta_{0,\tau}(X)$, el resultado anterior mejora el Teorema 3.5 en [32]. Además, mostramos un ejemplo de un espacio X tal que $\Delta_{0,\tau}(X) < 1$ pero $\varepsilon_{\beta,\tau}(X) \geq 1$.

Un método para asegurar que un espacio de Banach cumple la τ-FPP puede ser probar que está "cerca" de otro espacio de Banach que cumpla una cierta condición (más que) suficiente para la τ-FPP. Por ese motivo estudiamos la permanencia bajo renormamiento de las anteriores propiedades que implican la $\tau(\mathrm{DL})_\alpha$-condición, lo cual da lugar a resultados de estabilidad para la τ-FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas. Para medir la proximidad entre dos espacios de Banach isomorfos usaremos la distancia de Banach-Mazur definida por

$$d(X,Y) = \text{ínf}\left\{\|U\|\|U^{-1}\| : U : X \to Y, U \text{ isomorfismo}\right\}.$$

Cuando X e Y son dos espacios de Banach isomorfos tales que $d(X,Y) \leq d$, podemos suponer que Y es un renormamiento de $(X, \|\cdot\|)$ con una norma $|\cdot|$ que verifica $\|x\| \leq |x| \leq d\|x\|$ para cada $x \in X$. Comenzamos, pues, estudiando la permanencia bajo renormamientos de la propiedad $\Delta_{0,\tau}(X) < 1$ y obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 0.0.12. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Supongamos que $|\cdot|$ es una norma definida sobre X tal que $\|x\| \leq |x| \leq d\|x\|$ para cada $x \in X$. Sea $Y = (X, |\cdot|)$. Entonces*

$$\Delta_{Y,\tau}(\epsilon) \geq d\Delta_{X,\tau}\left(\frac{\epsilon}{d}\right) + 1 - d \quad \textit{para cada} \quad \epsilon > 0.$$

Consecuentemente, si $\Delta_{X,\tau}\left(\frac{1^-}{d}\right) > 1 - \frac{1}{d}$, entonces $\Delta_{Y,\tau}(1^-) > 0$. Por tanto, si las funciones de tipo τ-nulo sobre Y son τ-lsc, entonces cada aplicación no expansiva $T : C \to KC(C)$ tiene un punto fijo, siendo C un subconjunto no vacío, convexo, cerrado, acotado, τ-compacto y τ-secuencialmente compacto de Y.

A continuación aplicamos el resultado anterior en el caso de los espacios ℓ_p y E_β con la topología débil y en los espacios $L_p(\mu)$ con la topología de la convergencia local en medida, y mostramos que las cotas obtenidas son también cotas para w-UNS y clm-UNS respectivamente. En particular, se da un ejemplo en que no se puede aplicar la generalización del teorema de Lami-Dozo dada por P. Lorenzo en [65], mientras que se puede usar el resultado de estabilidad anterior para deducir la FPP en ausencia de la propiedad de Opial.

De modo similar podemos obtener también un resultado de estabilidad usando $\varepsilon_{\beta,\tau}(X)$ en lugar de $\Delta_{0,\tau}(X)$, pero en el caso de los espacios $L_p(\mu)$ las cotas obtenidas son peores que las obtenidas usando $\Delta_{0,\tau}(X)$.

Nótese que el teorema anterior no da un resultado de estabilidad en el sentido usual de encontrar una constante k, dependiente de X, tal que si Y es un espacio de Banach con $d(X,Y) < k$ entonces Y también verifica la propiedad. Sin embargo, veremos en el siguiente teorema que el módulo de Opial da un resultado de estabilidad en el sentido usual.

Teorema 0.0.13. *Sean X e Y espacios de Banach isomorfos, entonces*

$$r_{X,\tau}(1) + 1 \leq d(X,Y)(r_{Y,\tau}(1) + 1).$$

Consecuentemente, si $d(X,Y) < r_{X,\tau}(1) + 1$, entonces $r_{Y,\tau}(1) > 0$. Por tanto, si las funciones de tipo τ-nulo sobre Y son τ-lsc, entonces cada aplicación no expansiva $T : C \to KC(C)$ tiene un punto fijo, siendo C un subconjunto no vacío, convexo, cerrado, acotado, τ-compacto y τ-secuencialmente compacto de Y.

Volvemos a aplicar el resultado obtenido en el caso de los espacios ℓ_p y E_β con la topología débil y en los espacios $L_p(\mu)$ con la topología de la convergencia local en medida y observamos que las cotas obtenidas coinciden con las que obtuvimos usando $\Delta_{0,\tau}(X)$, lo cual no es de extrañar teniendo en cuenta que las condiciones $r_{X,\tau}(1) > 0$ y $\Delta_{0,\tau}(X) < 1$ son equivalentes.

Terminamos el capítulo realizando un estudio similar para aplicaciones multivaluadas no expansivas cuyo rango no está contenido en su dominio. Para ello, lo primero que hemos de hacer es probar que, bajo ciertas condiciones adicionales, la $\tau(\mathrm{DL})_\alpha$-condición implica también la existencia de punto fijo para este tipo de aplicaciones.

Teorema 0.0.14. *Sea X un espacio de Banach y τ una topología lineal sobre X tal que las funciones de tipo τ-nulo son τ-lsc. Sea C un subconjunto no vacío, τ-compacto, cerrado, acotado y convexo de X y $T : C \to KC(X)$ una aplicación no* *expansiva y 1-χ-contractiva tal que $Tx \subset I_C(x)$ para cada $x \in C$. Si X verifica la $\tau(DL)_\alpha$-condición, entonces T tiene un punto fijo.*

Observación 0.0.3. No sabemos si la condición de χ-contractividad puede ser suprimida. No obstante, cuando C es un subconjunto τ-secuencialmente compacto de un espacio de Banach X separable o reflexivo cumpliendo la propiedad de Opial no estricta con respecto a τ, fue probado en ([65], Teorema 3.2.5) que cada aplicación no expansiva $T : C \to K(X)$ con $T(C)$ acotado es 1-χ-contractiva.

Vamos a aplicar el teorema anterior con el fin de extender algunos resultados conocidos para aplicaciones multivaluadas no expansivas cuyo rango no está contenido en su dominio.

Teorema 0.0.15. *Sea X un espacio de Banach y τ una topología lineal sobre X tal que las funciones de tipo τ-nulo son τ-lsc. Sea C un subconjunto no vacío, convexo, cerrado, acotado, τ-compacto y τ-secuencialmente compacto de X. Supongamos que se verifica una de las siguientes condiciones equivalentes:*

1. $r_{X,\tau}(1) > 0$
2. $\Delta_{0,\tau}(X) < 1$
3. $\zeta_{X,\tau}(\beta) < \beta/(1-\beta)$ *para algún* $\beta \in (0, 1)$.

Sea $T : C \to KC(X)$ una aplicación no expansiva y 1-χ-contractiva tal que $Tx \subset I_C(x)$ para cada $x \in C$. Entonces T tiene un punto fijo.

Como la característica de τ-casi convexidad uniforme $\Delta_{0,\tau}(X)$ verifica las siguientes desigualdades

$$\varepsilon_{\beta,\tau}(X) \geq \Delta_{0,\tau}(X) \geq \varepsilon_{\chi,\tau}(X),$$

el teorema anterior generaliza el Teorema 3.6 en [31] para una topología arbitraria τ y elimina la hipótesis de separabilidad de él.

Teniendo en cuenta la observación anterior podemos enunciar el siguiente corolario que generaliza ([31], Teorema 3.7) para una topología arbitraria τ y elimina la hipótesis de separabilidad de él, ya que $\Delta_{0,\tau}(X)$ coincide con $\varepsilon_{\chi,\tau}(X)$ cuando X satisface la propiedad de Opial no estricta con respecto a τ.

Corolario 0.0.3. *Sea X un espacio de Banach separable o reflexivo con la propiedad de Opial no estricta y τ una topología lineal sobre X tal que las funciones de tipo τ-nulo son τ-lsc. Sea C un subconjunto no vacío, convexo, cerrado, acotado, τ-compacto y τ-secuencialmente compacto de X. Supongamos que se verifica una de las siguientes condiciones equivalentes:*

1. $r_{X,\tau}(1) > 0$
2. $\Delta_{0,\tau}(X) < 1$
3. $\zeta_{X,\tau}(\beta) < \beta/(1-\beta)$ *para algún* $\beta \in (0,1)$.

Sea $T : C \to KC(X)$ una aplicación no expansiva tal que $Tx \subset I_C(x)$ para cada $x \in C$. Entonces T tiene un punto fijo.

De forma anóloga podemos extender también el Teorema 0.0.10 y el Corolario 0.0.2 para aplicaciones multivaluadas no expansivas cuyo rango no está contenido en su dominio.

Teorema 0.0.16. *Sea C un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach X tal que $\xi_X(\beta) < \frac{1}{1-\beta}$ para algún $\beta \in (0,1)$ (o, en particular, $\rho'_X(0) < 1/2$). Sea $T : C \to KC(X)$ una aplicación no expansiva y 1-χ-contractiva tal que $Tx \subset I_C(x)$ para cada $x \in C$. Entonces T tiene un punto fijo.*

En ([20], Teorema 3.4) S. Dhompongsa, A. Kaewcharoen y A. Kaewkhao obtuvieron una relación entre el centro asintótico de una sucesión acotada y la constante de James. Aquí vamos a mostrar una relación similar para redes que nos permitirá suprimir la hipótesis de separabilidad del Corolario 3.6 en [20]. Previamente recordamos que:

- Un espacio de Banach X se dice que verifica la propiedad WORTH si

$$\limsup_n \|x_n + x\| = \limsup_n \|x_n - x\|$$

para cualquier $x \in X$ y cualquier sucesión débilmente nula $\{x_n\}$ en X.

- Si X verifica la propiedad WORTH, entonces X verifica la propiedad de Opial no estricta [38].

- Un espacio de Banach X es uniformemente no cuadrado si y sólo si $J(X) < 2$, donde $J(X)$ denota la constante de James del espacio X definida por

$$J(X) = \sup \{\|x + y\| \wedge \|x - y\| : x, y \in B_X\}.$$

- Los espacios de Banach uniformemente no cuadrados son reflexivos [45].

Teorema 0.0.17. *Sea C un subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach reflexivo X verificando la propiedad WORTH y sea $\{x_n\}$ una sucesión en C que es regular con respecto a C. Entonces*

$$r_C(A(C, \{x_{n_\alpha}\})) \leq \frac{J(X)}{2} r(C, \{x_{n_\alpha}\})$$

para cada $\{x_{n_\alpha}\}$ subred universal de $\{x_n\}$.
Consecuentemente, si X es un espacio de Banach uniformemente no cuadrado verificando la propiedad WORTH y C es un subconjunto no vacío, acotado, cerrado y convexo de X. Entonces cada aplicación no expansiva $T : C \to KC(X)$, tal que $Tx \subset I_C(x)$ para todo $x \in C$, tiene un punto fijo.

A lo largo del Capítulo 3 se han obtenido resultados en los que se prueba que ciertas propiedades que garantizan algún tipo de estructura normal también implican la $\tau(\mathrm{DL})_\alpha$-condición y, por tanto, la τ-FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas. Dichos resultados dan respuestas parciales al problema de extender el Teorema de Kirk para aplicaciones multivaluadas y nos llevan a conjeturar que estructura normal implica la existencia de punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas. De hecho, nos planteamos si los espacios con estructura normal cumplen la (DL)-condición, propiedad definida por S. Dhompongsa, A. Kaewcharoen y A. Kaewkhao [20] usando sucesiones en lugar de redes, que implica estructura normal débil y la w-FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas. Sin embargo, en el **Apéndice** se da un ejemplo que muestra que la (DL)-condición es estrictamente más fuerte que la estructura normal débil. Más aún, S. Dhompongsa, T. Domínguez Benavides, A. Kaewcharoen y B. Panyanak [19] han definido recientemente una nueva propiedad para espacios de Banach llamada propiedad (D), que es más débil que la (DL)-condición y más fuerte que la estructura normal débil, y prueban que si C es un subconjunto convexo y débil compacto de un espacio de Banach que verifica la propiedad (D) entonces toda aplicación no expansiva $T : C \to KC(C)$ tiene un punto fijo. El ejemplo que se da en el Apéndice muestra que la estructura normal uniforme no implica dicha propiedad (D). Por tanto, el problema de extender el Teorema de Kirk para aplicaciones multivaluadas no expansivas permanece abierto, ya que la (DL)-condición y la propiedad (D) sólo pueden dar respuestas parciales.

En el Apéndice se estudia la relación entre las siguientes propiedades: estructura normal uniforme, estructura normal uniforme débil, estructura normal débil, $r_X(1) > 0$, $\xi_X(\beta) < 1/(1-\beta)$ para algún $\beta \in (0,1)$, (DL)-condición y propiedad (D). Se ha determinado la validez o no validez de todas las posibles implicaciones entre dichas propiedades, excepto para la siguiente implicación: no sabemos si $\xi_X(\beta) < 1/(1-\beta)$ para algún $\beta \in (0,1)$ implica $\zeta_X(\beta) < \beta/(1-\beta)$ para algún $\beta \in (0,1)$. En la siguiente tabla recogemos los resultados obtenidos. En ella "S" quiere decir que la condición de arriba implica la condición de la izquierda, "N" quiere decir que la condición de arriba no implica la condición de la izquierda, "?" quiere decir que no sabemos si la condición de arriba implica la condición de la izquierda y, finalmente, ξ_X quiere decir $\xi_X(\beta) < \frac{1}{1-\beta}$ para algún $\beta \in (0,1)$.

	UNS	w-**UNS**	w-**NS**	$r_X(1) > 0$	ξ_X	**(DL)**	**(D)**
UNS	**S**	**N**	**N**	**N**	**S**	**N**	**N**
w-**UNS**	**S**	**S**	**N**	**S**	**S**	**N**	**N**
w-**NS**	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**
$r_X(1) > 0$	**N**	**N**	**N**	**S**	**?**	**N**	**N**
ξ_X	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	**N**	**N**
(DL)	**N**	**N**	**N**	**S**	**S**	**S**	**N**
(D)	**N**	**N**	**N**	**S**	**S**	**S**	**S**

Capítulo 1

Notación y Preliminares

1.1. Estructura normal, condiciones geométricas y módulos relacionados

El concepto de estructura normal juega un papel esencial en la Teoría Métrica del Punto Fijo, especialmente en aquellos problemas que conciernen a aplicaciones no expansivas. En esta sección vamos a recordar la noción de estructura normal así como otras propiedades geométricas relacionadas con ella. Antes de formular la definición, necesitamos establecer la siguiente notación.

Definición 1.1.1. *Sea (M, d) un espacio métrico y A un subconjunto acotado de M.*

1. *El diámetro de A se define como* $\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

2. *El radio de Chebyshev de A se define como*

$$r(A) = \inf\{\sup\{d(x, y) : y \in A\} : x \in A\}.$$

3. *Se dice que el conjunto A es diametral si* $\operatorname{diam}(A) = r(A)$.

El concepto de estructura normal fue introducido por M.S. Brodskii y P.D. Milman [10] en 1948 para estudiar los puntos fijos de las isometrías. Más tarde, se descubrió que dicho concepto está relacionado con la propiedad del punto fijo para aplicaciones no expansivas (W.A. Kirk [49], 1965) y se generalizó para la topología débil y, finalmente, para una topología arbitraria surgiendo el concepto de τ-estructura normal introducido por W.A. Kirk en [50]. Aquí vamos a usar la terminología que aparece en [46], [23] y [76].

Definición 1.1.2. *Se dice que un espacio de Banach X tiene estructura normal (NS) (respectivamente, estructura normal con respecto a una topología τ (τ-NS)) si todo subconjunto no vacío, cerrado (respectivamente, τ-secuencialmente compacto), acotado, convexo y diametral de X es unitario.*

Así pues, un espacio tiene estructura normal si todo subconjunto cerrado, acotado, convexo y no unitario puede ser recubierto por una bola de radio menor que su diámetro y centrada en el subconjunto. Intuitivamente puede parecer que esto sucede en todos los espacios de Banach y, en efecto, es el caso de todos los espacios uniformemente convexos (cuya definición veremos más adelante), entre los que están, por ejemplo, los espacios ℓ_p y $L_p(\Omega)$ con $1 < p < +\infty$. Sin embargo, c_0 no tiene ni estructura normal ni estructura normal débil (esto es, estructura normal con respecto a la topología débil). De hecho, si consideramos el subconjunto $A = \overline{co}(\{e_n : n \in \mathbb{N}\})$ donde $\{e_n\}$ es la base estándar, entonces $\operatorname{diam}(A) = 1$ y $r(A) = 1$ porque $\lim_n \|x - e_n\| \geq 1$ para cada $x \in c_0$. Como la sucesión $\{e_n\}$ es débilmente nula, A es débil compacto y, por tanto, c_0 no tiene estructura normal débil. Considerando el mismo conjunto A en ℓ_1, es fácil comprobar que ℓ_1 no tiene estructura normal. Sin embargo, veremos más adelante que ℓ_1 y, en general, cada espacio de Banach con la propiedad de Schur (esto es, toda sucesión débilmente convergente converge en norma) tiene estructura normal débil.

Recordemos un coeficiente geométrico relacionado con la estructura normal definido por W.L. Bynum [14] en 1980.

Definición 1.1.3. *Sea X un espacio de Banach. El coeficiente de estructura normal de X se define por*

$$N(X) = \text{ínf}\left\{\frac{\text{diam}(A)}{r(A)} : A \subset X \textit{ convexo, cerrado y acotado con } \text{diam}(A) > 0\right\}.$$

Obviamente, X tiene estructura normal si $N(X) > 1$. Sin embargo, hay espacios con estructura normal tales que $N(X) = 1$ ([4], Ejemplo VI.5). Diremos que un espacio de Banach X tiene *estructura normal uniforme* (UNS) si $N(X) > 1$. En tal caso, se tiene que X es reflexivo [66].

Asociado a la estructura normal débil, W.L. Bynum [14] definió el *coeficiente de sucesiones débilmente convergentes* de la siguiente forma:

Definición 1.1.4. *Sea X un espacio de Banach sin la propiedad de Schur. El coeficiente de sucesiones débilmente convergentes de X se define como*

$$WCS(X) = \text{ínf}\left\{\frac{\text{diam}_a(\{x_n\})}{r_a(\{x_n\})}\right\}$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las sucesiones $\{x_n\}$ débilmente convergentes que no convergen en norma, siendo

$$\text{diam}_a(\{x_n\}) = \lim_{k\to\infty} \sup\{\|x_n - x_m\| : n, m \geq k\}$$

$$r_a(\{x_n\}) = \text{ínf}\left\{\limsup_n \|x_n - x\| : x \in co(\{x_n\})\right\}$$

el diámetro y radio asintótico de $\{x_n\}$ respectivamente.

Se tiene que $WCS(X) \in [1, 2]$. Puesto que 2 es el valor máximo para $WCS(X)$ en la definición anterior, podemos establecer que $WCS(X) = 2$ cuando X verifica la propiedad de Schur. En el siguiente teorema recordamos que el coeficiente de sucesiones débilmente convergentes puede ser considerado como una medida de la estructura normal débil.

Teorema 1.1.1. ([14]) *Sea X un espacio de Banach con $WCS(X) > 1$. Entonces X tiene estructura normal débil.*

Como consecuencia, este coeficiente también se denomina *coeficiente de estructura normal débil*. Además, en [14] se prueba que $1 \leq N(X) \leq WCS(X)$. Sin embargo, hay espacios con estructura normal tales que $WCS(X) = 1$ ([4], Ejemplo VI.5). Diremos que X tiene *estructura normal débil uniforme (w-UNS)* si $WCS(X) > 1$.

Las siguientes expresiones equivalentes de $WCS(X)$, probadas en ([4], Lema VI.3.8), facilitan el cálculo de dicho coeficiente en muchos espacios de Banach.

Teorema 1.1.2. *Sea X un espacio de Banach sin la propiedad de Schur. Entonces:*

1.
$$WCS(X) = \inf\left\{ \frac{\operatorname{diam}_a(\{x_n\})}{\limsup_n \|x_n\|} : \{x_n\} \text{ converge débilmente a cero} \right\}$$

2.
$$WCS(X) = \inf\left\{ \frac{\lim_{n,m;n\neq m} \|x_n - x_m\|}{\lim_n \|x_n\|} \right\}$$
donde el ínfimo es tomado sobre todas las sucesiones $\{x_n\}$ débilmente nulas tales que ambos límites existen.

3.
$$WCS(X) = \inf\left\{ \lim_{n,m;n\neq m} \|x_n - x_m\| \right\}$$
donde el ínfimo es tomado sobre todas las sucesiones $\{x_n\}$ débilmente nulas tales que $\|x_n\| = 1$ para todo n y $\lim_{n,m;n\neq m} \|x_n - x_m\|$ existe.

Nótese que cada sucesión acotada en un espacio métrico tiene una subsucesión $\{x_n\}$ tal que $\lim_{n,m;n\neq m} d(x_n, x_m)$ existe ([4], Teorema III.1.5).

En el siguiente teorema recordamos cuál es el valor de $WCS(X)$ en algunos espacios de Banach particulares. Previamente recordamos la definición de los espacios de Bynum.

Definición 1.1.5. *Sea $p \in [1, +\infty)$, $q \in [1, +\infty]$. Los espacios de Bynum $\ell_{p,q}$ se definen como $\ell_{p,q} = (\ell_p, \|\cdot\|_{p,q})$ donde para $x \in \ell_p$*

$$\|x\|_{p,q} = (\|x^+\|_p^q + \|x^-\|_p^q)^{1/q} \qquad si \;\; q \in [1, +\infty)$$

$$\|x\|_{p,\infty} = \max\{\|x^+\|_p, \|x^-\|_p\}$$

x^+, x^- denotan la parte positiva y negativa de x respectivamente, esto es, cada $x \in \ell_p$ puede ser representado como $x = x^+ - x^-$ donde las respectivas componentes i-ésimas de x^+ y x^- son

$$(x^+)_i = \max\{x_i, 0\} = \frac{|x_i| + x_i}{2}$$

$$(x^-)_i = \max\{-x_i, 0\} = \frac{|x_i| - x_i}{2}$$

Nótese que para todo $p \in [1, +\infty)$ los espacios $\ell_{p,q}$ $(q \geq 1)$ son isomorfos a ℓ_p. Por otra parte, si $1 < p < +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$ y p^*, q^* son exponentes conjugados de p y q respectivamente (esto es, $1/p + 1/p^* = 1$ y $1/q + 1/q^* = 1$), entonces $\ell_{p,q}^*$ es isométricamente isomorfo a ℓ_{p^*,q^*}.

Teorema 1.1.3. *1. Para cada $p \geq 1$, se tiene $WCS(\ell_p) = 2^{1/p}$*

2. $WCS(c_0) = 1$

3. Sean $p > 1$, $q \geq 1$, entonces $WCS(\ell_{p,q}) = \min\left\{2^{1/p}, 2^{1/q}\right\}$

Para una topología τ arbitraria, M.A. Japón Pineda [46] define el siguiente coeficiente:

Definición 1.1.6. ([46], Definición 2.4) *Sea X un espacio de Banach y τ una topología sobre X tal que hay sucesiones τ-convergentes que no son convergentes en norma. Se define el coeficiente*

$$\tau CS(X) = \inf\left\{\frac{\lim_{n,m;n\neq m}\|x_n - x_m\|}{\lim_n \|x_n\|}\right\}$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las sucesiones $\{x_n\}$ *acotadas en norma y* τ*-nulas tales que ambos límites existen y* $\lim_n \|x_n\| \neq 0$.

Diremos que X *tiene estructura normal uniforme con respecto a la topología* τ *(*τ*-UNS) si* $\tau CS(X) > 1$.

Observación 1.1.1. Cuando τ es la topología débil, el coeficiente $\tau CS(X)$ coincide con el coeficiente de sucesiones débilmente convergentes $WCS(X)$ (Teorema 1.1.2). Sin embargo, cuando se extiende la definición de $WCS(X)$ para una topología arbitraria es más útil considerar la Definición 1.1.6 en lugar de una extensión directa de la definición de $WCS(X)$. Para mostrar este hecho, M.A. Japón Pineda ([46], Nota 2.2) consideró el espacio $L_1([0,1])$ dotado con la topología de la convergencia en medida y tomó la sucesión $f_n = n\chi_{[0,1/n]}$ en $L_1([0,1])$ que converge a cero en medida. Como $\|f_n - f_m\| = 2 - 2\frac{m}{n}$ para cada $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m$, se tiene que $\mathrm{diam}_a(\{f_n\}) = 2$. Por otra parte, sea $f \in co(\{f_n\})$, pongamos

$$f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k f_k \ \text{ con } \alpha_k \geq 0, k = 1, ..., m; \ \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1.$$

Para todo $n > m$ se tiene

$$\|f - f_n\| = 2 - 2\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \frac{k}{n}$$

y, por tanto, $\limsup_n \|f - f_n\| = 2$ y $r_a(\{f_n\}) = 2$. Así pues, el coeficiente obtenido extendiendo directamente la definición tendría valor 1, es decir,

$$1 = \inf \left\{ \frac{\mathrm{diam}_a(\{f_n\})}{r_a(\{f_n\})} \right\}$$

donde el ínfimo es tomado sobre las sucesiones $\{f_n\}$ τ-convergentes que no son convergentes en norma. Sin embargo, en el siguiente ejemplo veremos que, usando la Definición 1.1.6, $\tau CS(L_1([0,1])) = 2$ cuando τ es la topología de la convergencia en medida, lo cual implica que $L_1([0,1])$ tiene τ-estructura normal (Proposición 1.1.1).

Ejemplo 1.1.1. ([46], Ejemplo 2.3) Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida positiva σ-finita. Para cada $1 \leq p < +\infty$ consideramos el espacio de Banach separable $L_p(\mu)$ con la norma usual. Sea $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ una partición σ-finita de Ω. Consideramos la topología τ generada por la métrica

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{\mu(\Omega_n)} \int_{\Omega_n} \frac{|f-g|}{1+|f-g|} \, d\mu \qquad \text{para } f, g \in L_p(\mu).$$

Esta topología es conocida como la *topología de la convergencia local en medida (clm)*. Cuando $\mu(\Omega) < +\infty$, la métrica

$$d(f,g) = \int_{\Omega} \frac{|f-g|}{1+|f-g|} \, d\mu \qquad \text{para } f, g \in L_p(\mu)$$

genera la clm-topología y, en este caso, la clm-topología es equivalente a la topología de la convergencia en medida. Esto no es cierto, en general, si $\mu(\Omega) = +\infty$ (ver [46], pág. 34).
Para cada $p \in [1, +\infty)$, se tiene $(clm)CS(L_p(\mu)) = 2^{1/p}$. También es conocido que $WCS(L_p(\mu)) \geq \text{mín}\{2^{1/p}, 2^{1-1/p}\}$ y la igualdad se tiene si $p > 2$ o μ no es puramente atómica ([21]).

Obviamente, $1 \leq \tau CS(X) \leq 2$ y, al igual que ocurría con el coeficiente $WCS(X)$, $\tau CS(X)$ puede ser considerado como una medida de τ-estructura normal.

Proposición 1.1.1. ([76], Proposición 5.8) *Sea τ una topología lineal sobre X tal que cada conjunto τ-secuencialmente compacto es separable. Si $1 < \tau CS(X)$, entonces X tiene τ-NS. Cuando τ es la topología débil la condición de separabilidad no es necesaria.*

En los últimos cincuenta años se han estudiado propiedades geométricas, tales como la propiedad de Opial, convexidad, suavidad, etc., que implican algún tipo de estructura normal (NS, UNS, τ-NS o τ-UNS). Vamos a recordar algunas de dichas propiedades junto con los módulos que dan una idea cuantitativa de la verificación de dichas propiedades.

Comenzaremos recordando la propiedad de Opial. Fue Z. Opial [70] el primero en estudiar dicha propiedad respecto a la topología débil y aplicarla a la Teoría del Punto Fijo. La propiedad de Opial uniforme con respecto a la topología débil fue definida por S. Prus en [74] y el módulo de Opial fue introducido en [62] por P.K. Lin, K.K. Tan y H.K. Xu.

Definición 1.1.7. *Diremos que un espacio de Banach X satisface la propiedad de Opial con respecto a una topología τ si para cada sucesión acotada $\{x_n\}$ τ-nula y cada $x \neq 0$ en X se tiene*

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n + x\|.$$

Reemplazando $<$ por $\leq$ tenemos la definición de propiedad de Opial no estricta con respecto a la topología τ.

Nótese que si τ es la topología débil o la topología débil estrella, las sucesiones τ-convergentes son acotadas y, por tanto, la palabra "acotada" puede suprimirse de la definición.

El módulo de Opial de X se define para $c \geq 0$ como

$$r_{X,\tau}(c) = \inf \left\{ \liminf_{n} \|x_n + x\| - 1 \right\}$$

donde el ínfimo es tomado sobre todo $x \in X$ con $\|x\| \geq c$ y toda sucesión τ-nula $\{x_n\}$ en X con $\liminf_n \|x_n\| \geq 1$.

Diremos que X satisface la propiedad de Opial uniforme con respecto a τ si $r_{X,\tau}(c) > 0$ para cada $c > 0$.

Cuando τ sea la topología débil, diremos simplemente que X verifica la propiedad de Opial, la propiedad de Opial no estricta o la propiedad de Opial uniforme, y el módulo de Opial se denotará por $r_X(\cdot)$. Usando los mismos argumentos que para la topología débil, se prueba que $r_{X,\tau}(\cdot)$ es una función creciente y continua en $[0, +\infty)$.

A modo de ejemplo podemos citar que los espacios de Hilbert y los espacios ℓ_p $(1 < p < +\infty)$ cumplen la propiedad de Opial, y el espacio c_0 verifica la propiedad de Opial no estricta. Sin embargo, $L_p[0, 2\pi]$ no cumple la propiedad de Opial no estricta para $p \neq 2$ ([76], Ejemplo 4.20).

Los siguientes resultados establecen la relación existente entre las nociones de propiedad de Opial y estructura normal.

Teorema 1.1.4. ([43]) *Si X es un espacio de Banach separable que satisface la propiedad de Opial con respecto a una topología τ, entonces X tiene τ-estructura normal.*
Cuando τ es la topología débil, la condición de separabilidad no es necesaria.

Proposición 1.1.2. ([46], Lema 2.3) *Sea X un espacio de Banach y τ una topología lineal sobre X. Entonces*

$$\tau CS(X) \geq 1 + r_{X,\tau}(1).$$

Consecuentemente, X tiene τ-UNS si $r_{X,\tau}(1) > 0$.

A continuación estudiaremos la convexidad del espacio, otra propiedad geométrica relacionada con la estructura normal. Las nociones básicas de convexidad estricta y convexidad uniforme fueron introducidas por J.A. Clarkson [16].

Definición 1.1.8. *Decimos que un espacio de Banach X es estrictamente convexo si la superficie esférica unidad no contiene segmentos, o equivalentemente, si para cualquier par x, y de vectores no colineales de X se tiene $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$.*

Un concepto más fuerte de convexidad se obtiene exigiendo la propiedad anterior de una manera uniforme, esto es, hablando sin rigor, exigiendo que no puedan encontrarse segmentos de longitud predeterminada tan próximos como se quiera a la superficie esférica.

Definición 1.1.9. *Decimos que un espacio de Banach X es uniformemente convexo (UC) si para cada $\epsilon \in (0, 2]$ existe $\delta > 0$ tal que para $x, y \in X$ con $\|x\|$, $\|y\| \leq 1$ y $\|x - y\| \geq \epsilon$, se tiene $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta$.*

Algunos ejemplos de espacios uniformemente convexos son los espacios de Hilbert, los espacios ℓ_p y los espacios de funciones $L_p[0,1]$ con $1 < p < +\infty$ (ver [7]).

Asociado a la convexidad uniforme, se define el *módulo de convexidad*, también llamado *módulo de Clarkson*, como sigue:

$$\delta_X(\epsilon) = \text{ínf}\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in B_X, \|x-y\| \geq \epsilon\right\}$$

para cada $\epsilon \in [0,2]$, donde B_X denota la bola unidad cerrada de X. Vamos a denotar $\varepsilon_0(X)$ la *característica de convexidad* de X dada por

$$\varepsilon_0(X) = \sup\left\{\epsilon \geq 0 : \delta_X(\epsilon) = 0\right\}.$$

Obviamente, X es uniformemente convexo si y sólo si $\delta_X(\epsilon) > 0$ para todo $\epsilon \in (0,2]$ (equivalentemente, $\varepsilon_0(X) = 0$).

El módulo de Clarkson y el coeficiente de estructura normal están relacionados por medio de la siguiente desigualdad:

Teorema 1.1.5. *Sea X un espacio de Banach. Entonces $N(X) \geq (1 - \delta_X(1))^{-1}$.*

Consecuentemente, la condición $\delta_X(1) > 0$ implica que X es reflexivo y tiene estructura normal uniforme. En particular, nótese que no sólo los espacios uniformemente convexos tienen estructura normal, sino también todos aquellos espacios que no tienen segmentos de longitud mayor o igual que 1 tan próximos como se quiera a la superficie esférica unidad.

Vamos a estudiar ahora otro concepto geométrico relacionado con la estructura normal: la suavidad.

Definición 1.1.10. *Sea X un espacio de Banach. Decimos que X es suave si cada punto x de la superficie esférica unidad soporta un único funcional tangente, esto es, existe un único $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(x) = 1$.*

Nótese que el concepto de suavidad es parcialmente dual al de convexidad estricta. En efecto, se tiene:

(a) Si X^* es suave, X es estrictamente convexo

(b) Si X^* es estrictamente convexo, X es suave.

En general, los recíprocos de (a) y (b) no son ciertos (ver [4], Ejemplo IV.3).

Vamos a considerar ahora un concepto más fuerte que la suavidad, la suavidad uniforme.

Definición 1.1.11. *Decimos que un espacio de Banach X es uniformemente suave (US) si*

$$\rho'_X(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\rho_X(t)}{t} = 0$$

donde ρ_X es el módulo de suavidad de X, definido para $t \geq 0$ como

$$\rho_X(t) = \sup \left\{ \frac{1}{2}(\|x + ty\| + \|x - ty\|) - 1 : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \right\}.$$

Observación 1.1.2.

1. Todo espacio uniformemente suave es suave, sin que, en general, sea cierta la aserción inversa.

2. Como consecuencia de las fórmulas de dualidad de Lindenstrauss, se tiene la siguiente relación entre los módulos de convexidad y suavidad ([4], pág. 84):

$$\rho'_{X^*}(0) = \varepsilon_0(X)/2 \quad \text{y} \quad \rho'_X(0) = \varepsilon_0(X^*)/2,$$

de donde se deduce que la convexidad uniforme y la suavidad uniforme son conceptos duales, esto es,

(a) X es UC si y sólo si X^* es US

(b) X es US si y sólo si X^* es UC.

El módulo de suavidad y el coeficiente de estructura normal débil están relacionados por medio de la siguiente desigualdad:

Teorema 1.1.6. ([73]) *Sea X un espacio de Banach con módulo de suavidad $\rho_X(\cdot)$. Denotemos*

$$\rho = \text{ínf}\left\{\rho_X(t) - \frac{t}{2} + 1 : t \in (0, 1/2]\right\}.$$

Entonces $N(X) \geq 1/\rho$. Consecuentemente, si $\rho'_X(0) < 1/2$, entonces X es reflexivo y tiene estructura normal uniforme.

A continuación recordamos los conceptos de casi convexidad uniforme y casi suavidad uniforme, que son generalizaciones de las nociones de convexidad y suavidad uniforme.

Como el módulo de Clarkson sólo depende de los subespacios bidimensionales, en la década de los setenta V.D. Milman [68] y F. Sullivan [79], independientemente, inician el estudio de la convexidad uniforme multidimensional (k-convexidad uniforme y k-uniform rotundness) e introducen diversas generalizaciones del módulo de Clarkson que involucran a los subespacios de dimensión $k > 2$. Más tarde, se demostró que los espacios k-uniformemente convexos tienen la propiedad de Kadec-Klee uniforme introducida por R. Huff [44].

Definición 1.1.12. *Un espacio de Banach X se dice que es uniformemente Kadec Klee (UKK) si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\{x_n\}$ es una sucesión en la bola unidad de X que converge débilmente a x con sep$(\{x_n\}) := \text{ínf}\{\|x_n - x_m\| : n \neq m\} \geq \epsilon$, entonces $\|x\| \leq 1 - \delta$.*

Como los espacios k-uniformemente convexos son reflexivos y cumplen la propiedad de Kadec-Klee uniforme, R. Huff [44] inicia en 1980 el estudio de los espacios que satisfacen ambas propiedades, a los que llamó espacios casi uniformemente convexos. Sin embargo, debemos hacer notar que, independientemente de Huff, K. Goebel y T. Sękowski [41] introdujeron también una propiedad equivalente a la casi convexidad uniforme bajo el nombre de convexidad uniforme no compacta.

Definición 1.1.13. *Se dice que un espacio de Banach X es casi uniformemente convexo (NUC) si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\{x_n\}$ es una sucesión en B_X con sep$(\{x_n\}) > \epsilon$, entonces co$(\{x_n\}) \cap B(0, 1-\delta) \neq \emptyset$.*

Usando medidas de no compacidad, se define un módulo de casi convexidad uniforme. Recordamos previamente las definiciones de las medidas de no compacidad de Kuratowski, de Hausdorff y de separación.

Definición 1.1.14. *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Para cada A subconjunto acotado de X, se definen las medidas de no compacidad α de Kuratowski, χ de Hausdorff y β de separación como sigue:*

$$\alpha(A) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 : A \textit{ puede ser cubierto por un número finito de conjuntos}$$

$$\textit{de diámetro } \leq \epsilon\}$$

$$\chi(A) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 : A \textit{ puede ser cubierto por un número finito de bolas}$$

$$\textit{de radio } \leq \epsilon\}$$

$$\beta(A) = \sup\{r > 0 : A \textit{ tiene una } r - \textit{separación infinita }\}$$

donde una r-separación de A es un subconjunto $B \subset A$ tal que $d(x, y) \geq r$ para todo $x, y \in B,\ x \neq y$.

Para todo subconjunto acotado A de X se verifican las siguientes desigualdades

$$\chi(A) \leq \beta(A) \leq \alpha(A) \leq 2\chi(A).$$

Un estudio detallado de tales medidas de no compacidad puede encontrarse en [4].

Definición 1.1.15. *Sea X un espacio de Banach y ϕ la medida de no compacidad α, χ ó β. Se define el módulo de convexidad no compacta asociado a ϕ de la siguiente forma:*

$$\Delta_{X,\phi}(\epsilon) = \text{ínf}\{1 - d(0, A) : A \subset B_X \textit{ convexo }, \phi(A) > \epsilon\}.$$

Se define la característica de convexidad no compacta de X asociada a la medida de no compacidad ϕ, como

$$\varepsilon_\phi(X) = \sup\{\epsilon \geq 0 : \Delta_{X,\phi}(\epsilon) = 0\}.$$

El módulo $\Delta_{X,\alpha}$ fue considerado por K. Goebel y T. Sękowski [41], $\Delta_{X,\chi}$ por J. Banás [6] y $\Delta_{X,\beta}$ por T. Domínguez Benavides y G. López [29].

Se tienen las siguientes relaciones:

$$\delta_X(\epsilon) \leq \Delta_{X,\alpha}(\epsilon) \leq \Delta_{X,\beta}(\epsilon) \leq \Delta_{X,\chi}(\epsilon)$$

$$\varepsilon_0(X) \geq \varepsilon_\alpha(X) \geq \varepsilon_\beta(X) \geq \varepsilon_\chi(X)$$

Además, estos módulos caracterizan la propiedad de casi convexidad uniforme en el sentido de que un espacio X es NUC si y sólo si $\varepsilon_\phi(X) = 0$, donde ϕ es α, χ ó β ([4], Capítulo V).

Teorema 1.1.7. ([4], Teorema V.1.7) *Si $\varepsilon_\chi(X) < 1$, entonces X es reflexivo.*

Como consecuencia, teniendo en cuenta las desigualdades anteriores, se tiene que X es reflexivo si $\varepsilon_\phi(X) < 1$, para $\phi = \alpha, \beta$ ó χ. En particular, los espacios casi uniformemente convexos son reflexivos.

Para espacios de Banach reflexivos, los módulos de convexidad no compacta asociados a χ y β pueden expresarse como sigue ([4], Capítulo V):

$$\Delta_{X,\chi}(\epsilon) = \text{ínf}\{1 - \|x\| : \{x_n\} \subset B_X,\ x_n \rightharpoonup x,\ \chi(\{x_n\}) \geq \epsilon\}$$

$$\Delta_{X,\beta}(\epsilon) = \text{ínf}\{1 - \|x\| : \{x_n\} \subset B_X,\ x_n \rightharpoonup x,\ sep(\{x_n\}) \geq \epsilon\}.$$

A comienzos de los noventa, C. Lennard [56] extendió el concepto de casi convexidad uniforme de Huff para una topología arbitraria τ y lo usó para obtener un resultado de punto fijo en el espacio $L_1(\Omega)$ con la topología de la convergencia local en medida. Aquí vamos a usar la terminología que aparece en [46], que es ligeramente diferente a la de C. Lennard.

En [46], las expresiones de los módulos de convexidad no compacta asociados a β y χ se generalizan para una topología arbitraria τ.

Definición 1.1.16. ([46]) *Sea X un espacio de Banach y τ una topología lineal sobre X tal que la norma es τ-secuencialmente semicontinua inferiormente. Asociados a las medidas de no compacidad de Hausdorff χ y de separación β se definen los siguientes módulos:*

$$\Delta_{X,\chi,\tau}(\epsilon) = \operatorname{ínf}\{1 - \|x\| : \{x_n\} \subset B_X,\ \tau - \lim_n x_n = x,\ \chi(\{x_n\}) \geq \epsilon\}.$$

$$\Delta_{X,\beta,\tau}(\epsilon) = \operatorname{ínf}\{1 - \|x\| : \{x_n\} \subset B_X,\ \tau - \lim_n x_n = x,\ \beta(\{x_n\}) \geq \epsilon\}.$$

Recordamos que se dice que una función $f : X \to \mathbb{R}$ es τ-secuencialmente semicontinua inferiormente (τ-slsc) si cada sucesión $\{x_n\}$ τ-convergente a $x \in X$ satisface $f(x) \leq \liminf_n f(x_n)$. Recuérdese que si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y w es la topología débil, entonces la norma $\|\cdot\|$ es w-slsc.

Cuando el espacio de Banach es reflexivo y τ es la topología débil, estas definiciones coinciden con las de los módulos de convexidad no compacta asociados a las correspondientes medidas de no compacidad. Por otra parte, puede comprobarse sin dificultad que:

$$\Delta_{X,\beta,\tau}(\epsilon) = \operatorname{ínf}\{1 - \|x\| : \{x_n\} \subset B_X,\ \tau - \lim_n x_n = x,\ sep(\{x_n\}) \geq \epsilon\}.$$

La característica de convexidad no compacta asociada a la medida de no compacidad ϕ se define por:

$$\varepsilon_{\phi,\tau}(X) = \sup\{\epsilon \geq 0 : \Delta_{X,\phi,\tau}(\epsilon) = 0\}.$$

Sea τ una topología lineal sobre X tal que la norma es τ-slsc. El espacio X se dice que es casi uniformemente convexo con respecto a τ (τ-NUC) si X es reflexivo y $\Delta_{X,\phi,\tau}(\epsilon) > 0$ para todo $\epsilon > 0$ (o equivalentemente $\varepsilon_{\phi,\tau}(X) = 0$).

También vamos a usar la siguiente formulación equivalente: X es τ-NUC si y sólo si X es reflexivo y $\Delta_{X,\tau}(\epsilon) > 0$ para todo $\epsilon > 0$ (o equivalentemente $\Delta_{0,\tau}(X) = 0$), donde

$$\Delta_{X,\tau}(\epsilon) = \operatorname{ínf}\{1 - \|x\| : \{x_n\} \subset B_X, \tau - \lim_n x_n = x, \liminf_n \|x_n - x\| \geq \epsilon\}$$

$$\Delta_{0,\tau}(X) = \sup\{\epsilon \geq 0 : \Delta_{X,\tau}(\epsilon) = 0\}.$$

Se puede comprobar que X es τ-NUC si y sólo si X es reflexivo y uniformemente Kadec Klee con respecto a τ (τ-UKK). Recordamos que un espacio de Banach X se dice que es τ-UKK si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\{x_n\}$ es una sucesión en B_X τ-convergente a un punto x con $\text{sep}\{x_n\} \geq \epsilon$, entonces $\|x\| \leq 1 - \delta$.

Las relaciones entre los diferentes módulos son

$$\Delta_{X,\beta,\tau}(\epsilon) \leq \Delta_{X,\tau}(\epsilon) \leq \Delta_{X,\chi,\tau}(\epsilon)$$

y consecuentemente

$$\varepsilon_{\beta,\tau}(X) \geq \Delta_{0,\tau}(X) \geq \varepsilon_{\chi,\tau}(X).$$

Cuando el espacio X satisface la propiedad de Opial no estricta con respecto a la topología τ, entonces $\Delta_{0,\tau}(X)$ coincide con $\varepsilon_{\chi,\tau}(X)$.

En el Teorema 1.1.5 vimos que el módulo de convexidad de Clarkson da una cota inferior para el coeficiente de estructura normal. En el siguiente teorema recordamos que hay una acotación similar para el coeficiente $\tau CS(X)$ reemplazando el módulo de Clarkson por el módulo de convexidad no compacta asociado a la medida de separación.

Teorema 1.1.8. ([46], Lema 2.4) *Sea X un espacio de Banach y τ una topología lineal sobre X. Entonces,*

$$\tau CS(X) \geq \lim_{\epsilon \to 1^-} \frac{1}{1 - \Delta_{X,\beta,\tau}(\epsilon)}.$$

Consecuentemente, si $\varepsilon_{\beta,\tau}(X) < 1$ (en particular, si X es τ-NUC), entonces X tiene τ-UNS.

Ejemplo 1.1.2. El valor de cada uno de los módulos de convexidad no compacta en los espacios ℓ_p ($1 < p < +\infty$) viene dado por las siguientes expresiones ([4], Capítulo V):

$$\Delta_{\ell_p,\alpha}(\epsilon) = 1 - \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Delta_{\ell_p,\beta}(\epsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\epsilon^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Delta_{\ell_p,\chi}(\epsilon) = 1 - (1 - \epsilon^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida positiva σ-finita. Consideremos el espacio $L_p(\mu)$ con la topología de la convergencia local en medida. En ([46], Ejemplo 2.4) se prueba que para $1 \leq p < +\infty$ se tiene:

$$\Delta_{L_p(\mu),\beta,clm}(\epsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\epsilon^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Delta_{L_p(\mu),\chi,clm}(\epsilon) = 1 - (1 - \epsilon^p)^{\frac{1}{p}}.$$

A continuación recordamos el concepto de espacio casi uniformemente suave introducido por S. Prus [72] quien además demostró la dualidad entre las nociones de casi suavidad uniforme y casi convexidad uniforme.

Recordemos que una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio de Banach X se dice que es una *base de Schauder* de X si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $\{\alpha_n\}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$. Una sucesión $\{x_n\}$ es una *sucesión básica* si es una base de Schauder de $\overline{span}\{x_n\}$.

Definición 1.1.17. *Un espacio de Banach X es casi uniformemente suave (NUS) si para cada $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que si $t \in (0, \eta)$ y $\{x_n\}$ es una sucesión básica en B_X entonces existe $k > 1$ tal que $\|x_1 + tx_k\| \leq 1 + \epsilon t$.*

Teorema 1.1.9. ([72], Proposición 2.3) *Sea X un espacio de Banach NUS. Entonces X es reflexivo.*

Teorema 1.1.10. ([72], Teorema 2.4) *Sea X un espacio de Banach. Entonces*

1. *X es NUC si y sólo si X^* es NUS*

2. *X es NUS si y sólo si X^* es NUC*

En [22] T. Domínguez Benavides define el módulo de NUS de un espacio de Banach X como

$$\Gamma_X(t) = \sup\left\{\inf_{n>1}\left\{\frac{\|x_1 + tx_n\| + \|x_1 - tx_n\|}{2} - 1\right\} : \{x_n\} \textit{sucesión básica en } B_X\right\}$$

para cada $t \geq 0$. Resulta obvio, de la definición, que $\Gamma_X(t) \leq \rho_X(t)$ para todo $t \geq 0$.

Proposición 1.1.3. ([22], Proposición 1) *Sea X un espacio de Banach reflexivo. Entonces*

$$\Gamma_X(t) = \sup\left\{\inf\left\{\frac{\|x_1 + tx_n\| + \|x_1 - tx_n\|}{2} - 1 : n > 1\right\} : \{x_n\}\ w - \textit{nula en } B_X\right\}.$$

Proposición 1.1.4. ([22], Proposición 2) *Sea X un espacio de Banach. Entonces X es NUS si y sólo si X es reflexivo y $\lim_{t\to 0^+} \frac{\Gamma_X(t)}{t} = 0$.*

En [76] se generaliza el concepto de casi suavidad uniforme para una topología arbitraria como sigue:

Definición 1.1.18. *Se dice que un espacio de Banach X es casi uniformemente suave con respecto a una topología τ (τ-NUS) si*

$$\lim_{t\to 0} \frac{b_{X,\tau}(t)}{t} = 0,$$

siendo para cada $t \geq 0$

$$b_{X,\tau}(t) = \sup\left\{\limsup_n \|x + tx_n\| - 1 : x \in B_X,\ \{x_n\} \subset B_X\ \tau - \textit{nula}\right\}.$$

No es complicado probar la siguiente formulación equivalente del concepto de τ-casi suavidad uniforme.

Proposición 1.1.5. *X es τ-NUS si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que para cualquier $t \in (0, \eta)$ y cualquier sucesión $\{x_n\} \subset B_X$ τ-nula existe $k > 1$ tal que $\|x_1 + tx_k\| \leq 1 + \epsilon t$.*

Demostración: Supongamos que X es τ-NUS. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario, existe $\eta > 0$ tal que $b_{X,\tau}(t) < \epsilon t$ si $t \in (0, \eta)$. Sea $t \in (0, \eta)$ y $\{x_n\} \subset B_X$ τ-nula. Entonces $\limsup_n \|x_1 + tx_n\| < 1 + \epsilon t$, lo cual implica que existe k tal que $\|x_1 + tx_k\| < 1 + \epsilon t$. Recíprocamente, sea $\epsilon > 0$ arbitrario y $\eta = \eta(\epsilon)$ dado por la hipótesis. Sea $t \in (0, \eta)$, $x \in B_X$ y $\{x_n\} \subset B_X$ τ-nula. Tomamos una subsucesión $\{y_n\}$ de $\{x_n\}$ tal que $\limsup_n \|x + tx_n\| = \lim_n \|x + ty_n\|$. Consideramos la sucesión $x, y_1, y_2, y_3, \ldots$ que está contenida en B_X y es τ-nula. Entonces existe $k_1 \geq 1$ tal que $\|x + ty_{k_1}\| \leq 1 + \epsilon t$. Si nos quedamos ahora con la subsucesión τ-nula $x, y_{k_1+1}, y_{k_1+2}, \ldots$ que está en B_X, tenemos que existe $k_2 > k_1$ tal que $\|x + ty_{k_2}\| \leq 1 + \epsilon t$. Repitiendo el razonamiento, se tiene que existen infinitos n tales que $\|x + ty_n\| \leq 1 + \epsilon t$, lo cual implica que

$$\limsup_n \|x + tx_n\| = \lim_n \|x + ty_n\| \leq 1 + \epsilon t.$$

■

Nótese que, como consecuencia de la proposición anterior, deducimos que X es NUS si y sólo si es w-NUS y reflexivo.

Como vimos antes, cada espacio τ-NUC tiene τ-estructura normal uniforme. Sin embargo, hay espacios NUS que no tienen estructura normal. De hecho, $\ell_{p,1}$ es NUC, por tanto su dual $\ell_{q,\infty}$ es NUS, pero este espacio no tiene estructura normal ([4], Ejemplo VI.2).

En 1995 C. Benítez, K. Przeslawski y D. Yost [8] definieron un módulo bidimensional para espacios normados. Dado un espacio normado X, se observa que para cada $x, y \in X$ con $\|y\| < 1 < \|x\|$, existe un único $z = z(x, y)$ en el segmento lineal $[x, y]$ con $\|z\| = 1$. Así pues, definen la función $\xi_X : [0, 1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\xi_X(\beta) = \sup \left\{ \frac{\|x - z(x, y)\|}{\|x\| - 1} : \|y\| \leq \beta < 1 < \|x\| \right\}.$$

Llamaron a ξ *módulo de cuadratura*, porque sus valores extremos caracterizan la casi cuadratura (recordemos que X es casi cuadrado si para todo $\epsilon > 0$ existe Y subespacio de X con $\dim Y = 2$ tal que $d(Y, \ell_1(2)) < 1 + \epsilon$, donde $d(E, F)$ es la distancia de Banach-Mazur entre dos espacios normados E y F). En [8] Benítez, Przeslawski y Yost realizan un profundo estudio sobre el módulo de cuadratura en el que prueban algunas propiedades básicas y relacionan el comportamiento de ξ con propiedades geométricas de los espacios de Banach, tales como convexidad uniforme, suavidad uniforme y estructura normal uniforme. Sus principales resultados los recogemos en el siguiente teorema:

Teorema 1.1.11. ([8]) *Sea X un espacio normado y ξ su módulo de cuadratura. Entonces:*

1. $\xi(\beta) = \sup\{\xi_M(\beta) : M \subset X,\ \dim M = 2\}$.

2. *ξ es estrictamente creciente y convexo.*

3. *$\xi(\beta) < \xi_1(\beta)$ para cada $\beta \in (0,1)$, a menos que X sea casi cuadrado, en cuyo caso $\xi(\beta) = \xi_1(\beta)$ para todo $\beta \in (0,1)$, donde*
$$\xi_1(\beta) = \frac{1+\beta}{1-\beta}.$$
En particular, si X no es reflexivo, $\xi(\beta) = \xi_1(\beta)$ para todo $\beta \in (0,1)$.

4. *$\xi' \leq \xi_1'$ en casi todo $(0,1)$.*

5. *$\xi(\beta) > \xi_2(\beta)$ para cada $\beta \in (0,1)$, a menos que X sea prehilbertiano, en cuyo caso $\xi(\beta) = \xi_2(\beta)$ para todo $\beta \in (0,1)$, donde*
$$\xi_2(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

6. *Si X e Y son espacios normados isomorfos cuya distancia de Banach-Mazur es menor que $1+\delta^2$ con $\delta \leq 1$. Entonces*
$$|\xi_X(\beta) - \xi_Y(\beta)| \leq \frac{2(\delta+\delta^2)}{(1-\beta)^2} \quad \text{para todo } \beta \in (0,1).$$

7. *X es uniformemente convexo si y sólo si $\lim_{\beta\to 1}(1-\beta)\xi(\beta) = 0$.*

8. *X es uniformemente suave si y sólo si $\xi'(0) = 0$.*

9. *El módulo de cuadratura de X^* en β es $\xi_{X^*}(\beta) = 1/\xi^{-1}(1/\beta)$.*

10. *Si $\xi(\beta) < 1/(1-\beta)$ para algún $\beta \in (0,1)$, entonces X tiene estructura normal uniforme.*

La ventaja que este módulo tiene sobre otros antes definidos (como el módulo de suavidad uniforme, el módulo de Clarkson, de Milman, de Gurarii, etc.) es poder utilizar simultáneamente la suavidad y la convexidad del espacio, en lugar de hacerlo independientemente. Este módulo, al igual que la convexidad y suavidad uniforme, tiene carácter finito-dimensional, esto es, sólo depende de los subespacios de dimensión finita del espacio considerado. En el Capítulo 2 se define un módulo de carácter infinito-dimensional que es adecuado simultáneamente para la τ-casi convexidad uniforme y τ-casi suavidad uniforme (conceptos paralelos a la convexidad y suavidad uniforme pero con carácter infinito-dimensional).

1.2. La Propiedad del Punto Fijo para Aplicaciones No Expansivas Univaluadas

Sea (M, d) un espacio métrico. Recordamos que una aplicación $T : M \to M$ se dice que es no expansiva si $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ para cada $x, y \in M$.

Definición 1.2.1. *Un espacio de Banach X se dice que tiene la propiedad del punto fijo (FPP) si cada aplicación no expansiva $T : C \to C$ tiene punto fijo (es decir, existe $x \in C$ tal que $x = Tx$), siendo C un subconjunto convexo, cerrado y acotado de X.*

En 1965 Kirk [49] probó el siguiente resultado que vincula el concepto de estructura normal con la existencia de punto fijo para aplicaciones no expansivas.

Teorema 1.2.1. (Kirk [49]) *Sea X un espacio de Banach reflexivo con estructura normal. Entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

El ejemplo de S. Kakutani [47] de una aplicación no expansiva de la bola unidad de c_0 en sí misma sin punto fijo, muestra que hay espacios de Banach que no cumplen la FPP. En dicho ejemplo, el hecho de que c_0 no tenga dicha propiedad es debido a que la bola unidad de c_0 no es débil compacta. Este hecho dio lugar a que muchos investigadores comenzaran a estudiar la existencia de punto fijo para aplicaciones no expansivas bajo condiciones más fuertes. Como en los espacios reflexivos todo conjunto cerrado, convexo y acotado es débil compacto, parece natural plantearse la siguiente pregunta: Si C es un subconjunto convexo y débil compacto de un espacio de Banach X y $T : C \to C$ es no expansiva, ¿tiene T un punto fijo?

Definición 1.2.2. *Diremos que un espacio de Banach X satisface la propiedad débil del punto fijo (w-FPP) si toda aplicación no expansiva $T : C \to C$ tiene punto fijo, siendo C un subconjunto convexo y débil compacto de X.*

La respuesta a la pregunta anterior es negativa, ya que D.E. Alspach [2] prueba que $L_1[0,1]$ no cumple la w-FPP. Como consecuencia, se empieza a investigar también qué ocurre si se reemplaza la topología débil por otras topologías como, por ejemplo, la topología débil estrella o la topología de la convergencia local en medida. En [23] y [46] se considera una topología arbitraria τ sobre X y se define la propiedad del punto fijo con respecto a τ como sigue:

Definición 1.2.3. *Diremos que un espacio de Banach X tiene la propiedad del punto fijo respecto de una topología τ (τ-FPP) si cada aplicación no expansiva $T : C \to C$ tiene punto fijo, siendo C un subconjunto de X convexo, acotado en norma y τ-secuencialmente compacto.*

Del Teorema de Eberlein-Smulian (que prueba la equivalencia entre compacidad débil y compacidad secuencial débil), se deduce que la definición de τ-FPP coincide con la de w-FPP cuando τ es la topología débil. Además, es obvio que para un espacio de Banach reflexivo las propiedades FPP y w-FPP son idénticas.

El siguiente teorema da una generalización del famoso Teorema de Kirk para una topología τ.

Teorema 1.2.2. ([23], Teorema 1) *Sea X un espacio de Banach y τ una topología lineal sobre X tal que la norma es τ-slsc. Si X tiene τ-NS, entonces X tiene la τ-FPP.*

No se conoce una completa caracterización de los espacios de Banach que tienen la τ-FPP. Sin embargo, en los últimos cincuenta años se han estudiado propiedades geométricas (tales como la propiedad de Opial, la convexidad, la suavidad, etc.), que aseguran estructura normal (ver Sección 1.1) y, por tanto, la existencia de punto fijo.

Veremos a continuación que hay otras propiedades geométricas de los espacios de Banach que también garantizan la existencia de punto fijo, en ausencia de estructura normal. El caso más representativo es el espacio c_0 que no posee estructura normal débil y, sin embargo, veremos a continuación que c_0 sí satisface la w-FPP.

En 1991, J. García-Falset [35] define el siguiente coeficiente geométrico

$$R(X) = \sup\left\{\liminf_{n\to\infty} \|x_n + x\| : \ x \in B_X, \{x_n\} \subset B_X, \ x_n \rightharpoonup 0\right\}$$

y, más tarde, prueba que un espacio de Banach X tiene la w-FPP si $R(X) < 2$ ([36], Teorema 3).

Observación 1.2.1.

1. Para $X = c_0$ se tiene $WCS(c_0) = 1$. Sin embargo, en [36] se prueba que $R(c_0) = 1$ y, por tanto, c_0 tiene la w-FPP.

2. En la Sección 1.1 vimos que hay espacios casi uniformemente suaves que no tienen estructura normal. No obstante, cada espacio X casi uniformemente suave verifica $R(X) < 2$ y, por tanto, tiene la w-FPP ([36], Corolario 5).

En [46] se generaliza el coeficiente $R(X)$ para una topología arbitraria τ sobre X como sigue

$$R_\tau(X) = \sup\left\{\liminf_n \|x_n + x\| : x \in B_X,\ \{x_n\} \subset B_X\ \tau - nula\right\}$$

y se obtiene el siguiente resultado de punto fijo:

Teorema 1.2.3. ([46], página 54) *Sea X un espacio de Banach, τ una topología lineal sobre X tal que las funciones de tipo τ-nulo son τ-slsc y cada conjunto τ-secuencialmente compacto es τ-compacto. Entonces X tiene la τ-FPP si $R_\tau(X) < 2$.*

Recordemos que si $\{x_n\}$ es una sucesión τ-nula y acotada en norma en $(X, \|\cdot\|)$, la función Φ de tipo τ-nulo asociada a $\{x_n\}$ se define como $\Phi_{\{x_n\}}(x) = \limsup_n \|x_n - x\|$. Cuando τ es la topología débil, las funciones de tipo w-nulo son w-slsc.

1.3. La Propiedad del Punto Fijo para Aplicaciones No Expansivas Multivaluadas

En esta sección introducimos algunas nociones y resultados conocidos relacionados con la existencia de punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas, la mayoría de los cuales pueden encontrarse con más detalle en [82] y [83].

Previamente vamos a recordar el concepto de centro asintótico y algunos resultados relacionados con él. El concepto de centro asintótico de sucesiones fue considerado por primera vez por M. Edelstein [34] y posteriormente extendido por T.C. Lim [58] para redes.

Definición 1.3.1. *Sea C un subconjunto no vacío de un espacio de Banach X, $\mathcal{D}$ un conjunto dirigido y $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ una red acotada en X. El radio asintótico y el centro asintótico de la red $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ en C se definen, respectivamente, como*

$$r(C, \{x_\alpha\}) = \inf\{\limsup_\alpha \|x_\alpha - x\| : x \in C\}$$

$$A(C, \{x_\alpha\}) = \{x \in C : \limsup_{\alpha} \|x_\alpha - x\| = r(C, \{x_\alpha\})\}$$

siendo

$$\limsup_{\alpha} \|x_\alpha - x\| = \inf\{\sup\{\|x_\beta - x\| : \beta \geq \alpha\} : \alpha \in \mathcal{D}\}.$$

La convexidad de C implica la convexidad de $A(C, \{x_\alpha\})$, aunque este conjunto puede ser vacío. Suponiendo que las funciones de tipo τ-nulo son τ-semicontinuas inferiormente, o bien que dichas funciones son τ-secuencialmente semicontinuas inferiormente y que los conjuntos τ-secuencialmente compactos son τ-compactos, se tiene que $A(C, \{x_\alpha\})$ es un conjunto no vacío y τ-compacto si C lo es (ver [65], pág. 18 y 30).

Recordamos que, dado un espacio topológico (X, τ), una función $f : X \to \mathbb{R}$ se dice que es τ-semicontinua inferiormente (τ-lsc) si $f^{-1}((-\infty, a])$ es un conjunto τ-cerrado para cada $a \in \mathbb{R}$.

Definición 1.3.2. *Una sucesión acotada (respectivamente una red) se dice que es regular (resp. n-regular) con respecto a C si cada una de sus subsucesiones (resp. subredes) tiene el mismo radio asintótico en C; y se dice que es asintóticamente uniforme (resp. n-asintóticamente uniforme) con respecto a C si cada una de sus subsucesiones (resp. subredes) tiene el mismo centro asintótico en C.*

Observemos que si $\{x_{\alpha_\nu} : \nu \in \mathcal{I}\}$ es una subred de la red $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$, entonces $r(C, \{x_{\alpha_\nu}\}) \leq r(C, \{x_\alpha\})$. Además, si $r(C, \{x_{\alpha_\nu}\}) = r(C, \{x_\alpha\})$, entonces $A(C, \{x_\alpha\}) \subseteq A(C, \{x_{\alpha_\nu}\})$.

El método de los centros asintóticos juega un papel importante en Teoría del Punto Fijo de aplicaciones no expansivas univaluadas y multivaluadas debido al siguiente lema:

Lema 1.3.1. *Sea C un subconjunto de un espacio de Banach X y $\{x_n\}$ una sucesión acotada en X.*

(i) (Goebel [39], Lim [57]) *Siempre existe una subsucesión de* $\{x_n\}$ *que es regular con respecto a* C.

(ii) (Kirk [51]) *Si* C *es separable, entonces* $\{x_n\}$ *contiene una subsucesión que es asintóticamente uniforme con respecto a* C.

En general, como muestra el lema anterior, sólo tenemos garantizada la existencia de sucesiones asintóticamente uniformes con respecto a un conjunto cuando dicho conjunto es separable. Sin embargo, a continuación veremos que podemos prescindir de la separabilidad si consideramos centros asintóticos de ultra redes.

Recordemos que una red $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ en un conjunto S se dice que está eventualmente en un subconjunto $H \subset S$ si existe $\alpha_0 \in \mathcal{D}$ tal que $x_\alpha \in H$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$.

Definición 1.3.3. *Una red* $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ *en un conjunto* S *se dice que es una ultra red (o red universal) si, dado un subconjunto* $G \subset S$, *o bien* $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ *está eventualmente en* G *o bien* $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ *está eventualmente en* $S \setminus G$.

La utilidad de las ultra redes procede de los siguientes resultados que pueden encontrarse en ([40], página 157):

- Toda red en un conjunto tiene una subred que es una ultra red.
- Sean S_1 y S_2 dos conjuntos y $f : S_1 \to S_2$. Si $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ es una ultra red en S_1, entonces $\{f(x_\alpha) : \alpha \in \mathcal{D}\}$ es una ultra red en S_2.
- Si S es un compacto de un espacio topológico de Hausdorff y $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ es una ultra red en S, entonces $\lim_\alpha x_\alpha$ existe.

Como consecuencia de estos hechos, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.3.1. ([65], Proposición 1.5.1) *Sea* X *un espacio de Banach,* C *un subconjunto débil compacto y convexo de* X *y* $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ *una ultra red acotada en* X, *entonces* $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ *es* n*-asintóticamente uniforme con respecto a* C.

Denotaremos por $CB(X)$ la familia de todos los subconjuntos no vacíos cerrados y acotados de X y por $K(X)$ (resp. $KC(X)$) la familia de todos los subconjuntos no vacíos y compactos (resp. compactos y convexos) de X. Sobre $CB(X)$ se tiene la métrica de Hausdorff H dada por

$$H(A,B) := \max\left\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\right\}, \quad A,B \in CB(X)$$

donde para $x \in X$ y $E \subset X$, $d(x,E) := \inf\{\|x-y\| : y \in E\}$ es la distancia del punto x al subconjunto E.

Definición 1.3.4. *Una aplicación multivaluada $T : C \to CB(X)$ se dice que es k-contractiva ($k \in [0,1)$) si*

$$H(Tx,Ty) \leq k\|x-y\|, \quad x,y \in C,$$

y T se dice que es no expansiva si

$$H(Tx,Ty) \leq \|x-y\|, \quad x,y \in C.$$

Una aplicación $T : C \to 2^X$ se denomina ϕ-condensante (resp. k-ϕ-contractiva), donde ϕ es una medida de no compacidad, si para cada subconjunto acotado B de C con $\phi(B) > 0$ se cumple la desigualdad

$$\phi(T(B)) < \phi(B) \quad (\textit{resp. } \phi(T(B)) \leq k\phi(B))$$

siendo $T(B) = \bigcup_{x\in B} Tx$.

Una aplicación multivaluada $T : C \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ se dice que es *semicontinua superiormente* en C si $\{x \in C : Tx \subset V\}$ es abierto en C siempre que $V \subset X$ sea abierto; T se dice que es *semicontinua inferiormente* si $T^{-1}(V) := \{x \in C : Tx \cap V \neq \emptyset\}$ es abierto en C siempre que $V \subset X$ sea abierto. Se dice que T es continua si es semicontinua superior e inferiormente. Otra definición de continuidad para un operador multivaluado es la siguiente: $T : X \to CB(X)$ se dice que es continuo en X (con respecto a la métrica de Hausdorff H) si $H(Tx_n, Tx) \to 0$ siempre que $x_n \to x$. Ambas definiciones de continuidad son equivalentes si Tx es compacto para cada $x \in X$ (ver [3] y [17]).

Algunos teoremas de existencia de punto fijo para aplicaciones no expansivas univaluadas ya han sido extendidos al caso multivaluado. Por ejemplo, el Principio de Contracción de Banach fue extendido por S.B. Nadler [69] en 1969.

Teorema 1.3.1. ([69]) *Sea C un subconjunto cerrado de un espacio de Banach X y $T : C \to CB(C)$ una contracción. Entonces T tiene un punto fijo, es decir, existe $x \in C$ tal que $x \in Tx$.*

Sin embargo, muchos otros resultados todavía no han podido ser extendidos. Por ejemplo, se desconoce si es posible extender para aplicaciones multivaluadas el famoso Teorema de Kirk (según el cual los espacios de Banach reflexivos con estructura normal tienen la propiedad del punto fijo). No obstante, como vimos en la Sección 1.1, hay diversas propiedades de los espacios de Banach que garantizan estructura normal y reflexividad. De ahí que hayan ido surgiendo algunas respuestas parciales al problema de extender el Teorema de Kirk, encaminadas a probar que dichas propiedades implican la existencia de punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas.

En 1973 E. Lami Dozo dio el siguiente resultado de existencia de punto fijo para espacios que satisfacen la propiedad de Opial.

Teorema 1.3.2. (Lami Dozo [55], Teorema 3.2) *Sea X un espacio de Banach que satisface la propiedad de Opial. Si C es un subconjunto débil compacto y convexo de X y $T : C \to K(C)$ es una aplicación no expansiva, entonces T tiene punto fijo.*

En 1974 T.C. Lim [57] dio un resultado similar para espacios uniformemente convexos usando el método de Edelstein de los centros asintóticos [34].

Teorema 1.3.3. (Lim [57]) *Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo, C un subconjunto cerrado, acotado y convexo de X y $T : C \to K(C)$ una aplicación no expansiva. Entonces T tiene un punto fijo.*

En 1990 W.A. Kirk y S. Massa prueban la siguiente generalización del Teorema de Lim usando centros asintóticos de sucesiones y de redes.

Teorema 1.3.4. (Kirk-Massa [52]) *Sea C un subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach X y $T : C \to KC(C)$ una aplicación no expansiva. Si el centro asintótico en C de cada sucesión acotada de X es no vacío y compacto, entonces T tiene un punto fijo.*

Aunque no se tiene una caracterización completa de los espacios en los que los centros asintóticos de sucesiones acotadas son compactos, sí se conocen algunos resultados parciales, por ejemplo, los espacios k-uniformemente convexos cumplen dicha condición [51]. Sin embargo, en los espacios NUC el centro asintótico de una sucesión acotada con respecto a un subconjunto cerrado, acotado y convexo no es necesariamente compacto [54].

El análisis de la importancia del centro asintótico en el Teorema de Kirk-Massa llevó a T. Domínguez Benavides y P. Lorenzo al estudio de algunas conexiones entre los centros asintóticos y la geometría de ciertos espacios. Así pues, en [30] Domínguez y Lorenzo obtienen la siguiente relación entre el centro asintótico de una sucesión acotada y el módulo de convexidad no compacta con respecto a las medidas β y χ. Recordemos que, si D es un subconjunto acotado de X, el radio de Chebyshev de D relativo a C se define como

$$r_C(D) = \text{ínf}\left\{\sup\{\|x - y\| : y \in D\} : x \in C\right\}.$$

Teorema 1.3.5. ([30], Teorema 3.4) *Sea C un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Banach reflexivo X y $\{x_n\}$ una sucesión acotada en C que es regular con respecto a C. Entonces*

$$r_C(A(C, \{x_n\})) \leq (1 - \Delta_{X,\beta}(1^-))r(C, \{x_n\}).$$

Además, si X satisface la propiedad de Opial no estricta, entonces

$$r_C(A(C,\{x_n\})) \leq (1-\Delta_{X,\mathcal{X}}(1^-))r(C,\{x_n\}).$$

Las desigualdades anteriores dan lugar a un método iterativo que reduce en cada paso el valor del radio de Chebyshev para una cadena de centros asintóticos. Como consecuencia, Domínguez y Lorenzo deducen en [32] la siguiente extensión parcial del Teorema de Kirk que, en particular, garantiza que los espacios casi uniformemente convexos tienen la propiedad del punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas.

Teorema 1.3.6. ([32], Teorema 3.5) *Sea C un subconjunto no vacío cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach X tal que $\varepsilon_\beta(X) < 1$. Sea $T : C \to KC(C)$ una aplicación no expansiva. Entonces T tiene un punto fijo.*

Nótese que en los anteriores resultados de punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas, el rango de la aplicación está contenido en su dominio. No obstante, hay un estudio paralelo para aplicaciones con imagen en un conjunto mayor que su dominio. Por ejemplo, a continuación enunciamos las extensiones de los teoremas de Nadler, Lim, Kirk-Massa y Domínguez-Lorenzo para aplicaciones cuyo rango no está contenido en su dominio.

Teorema 1.3.7. ([60]) *Sea C un subconjunto no vacío y cerrado de un espacio de Banach X y $T : C \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ una contracción con valores cerrados y tal que*

$$Tx \subset \overline{I_C(x)} \quad \textit{para todo } x \in C,$$

donde $I_C(x)$ es el conjunto "hacia dentro"de x con respecto a C definido por

$$I_C(x) := \{x + \lambda(y-x) : \lambda \geq 0, y \in C\}.$$

Entonces T tiene un punto fijo.

Teorema 1.3.8. ([59], [83]) *Sea C un subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach X uniformemente convexo y $T : C \to K(X)$ una aplicación no expansiva tal que $Tx \subset \overline{I_C(x)}$ para todo $x \in C$. Entonces T tiene un punto fijo.*

Teorema 1.3.9. ([82], Teorema 2.3.1) *Sea C un subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach X y $T : C \to KC(X)$ una aplicación no expansiva tal que $Tx \subset I_C(x)$ para todo $x \in C$. Si el centro asintótico en C de cada sucesión acotada de X es no vacío y compacto, entonces T tiene un punto fijo.*

Teorema 1.3.10. ([31], Teorema 3.6) *Sea X un espacio de Banach tal que $\varepsilon_\beta(X) < 1$, C un subconjunto cerrado, acotado, convexo y separable de X y $T : C \to KC(X)$ una aplicación no expansiva y 1-χ-contractiva tal que $T(C)$ es acotado y $Tx \subset I_C(x)$ para todo $x \in C$. Entonces T tiene un punto fijo.*

Cuando X es un espacio de Banach reflexivo que verifica la propiedad de Opial no estricta, se prueba en ([65], Teorema 3.2.5) usando propiedades de conjuntos χ-minimales, que la χ-contractividad está implícita en la no expansividad y, por tanto, puede omitirse en el Teorema 1.3.10. Teniendo en cuenta dicha observación, en [31] se enuncia el siguiente resultado en el que se reemplaza $\varepsilon_\beta(X)$ por la característica de no compacidad respecto a la medida de Hausdorff.

Teorema 1.3.11. ([31], Teorema 3.7) *Sea X un espacio de Banach con la propiedad de Opial no estricta y tal que $\varepsilon_\chi(X) < 1$. Sea C un subconjunto cerrado, acotado, convexo y separable de X y $T : C \to KC(X)$ una aplicación no expansiva tal que $T(C)$ es acotado y $Tx \subset I_C(x)$ para todo $x \in C$. Entonces T tiene un punto fijo.*

Capítulo 2

Módulo universal infinito-dimensional y aplicaciones en Teoría del Punto Fijo

C. Benítez, K. Przeslawski y D. Yost estudiaron en [8] un módulo bidimensional para espacios normados, llamado módulo de cuadratura, que puede ser considerado, a la vez, como una medida de la convexidad y suavidad uniforme del espacio (ver Sección 1.1). Puesto que dichas propiedades tienen interesantes versiones de carácter infinito-dimensional (que se conocen con el nombre de casi convexidad uniforme y casi suavidad uniforme), es natural plantearse la existencia de un módulo que caracterice estas propiedades. Por ello, inspirándose en la definición y en el comportamiento del módulo de cuadratura, T. Domínguez Benavides y S. Prus definieron un módulo de carácter infinito-dimensional adecuado simultáneamente para la casi convexidad uniforme y casi suavidad uniforme.

El objetivo de este capítulo es realizar un estudio de este nuevo módulo similar al que hicieron Benítez, Przeslawski y Yost en [8] sobre el módulo de cuadratura.

Como en la definición del nuevo módulo interviene la convergencia débil, parece natural preguntarse qué ocurre cuando reemplazamos la topología débil por una topología τ arbitraria. La respuesta es que, bajo ciertas condiciones, los resultados obtenidos para el módulo infinito-dimensional respecto de una topología τ son análogos a los obtenidos para la topología débil. Por ello, con el fin de que los resultados recogidos en este capítulo sean más generales, realizamos el estudio del nuevo módulo respecto de una topología τ arbitraria.

En la Sección 2.1 definimos el nuevo módulo infinito-dimensional y calculamos el valor de dicho módulo en algunos espacios clásicos. En particular, cabe destacar que ha sido posible el cálculo del módulo infinito-dimensional en los espacios de sucesiones ℓ_p con $1 \leq p \leq \infty$, mientras que el módulo de cuadratura sólo es conocido para $p = 1$, $p = 2$ y $p = \infty$.

En la Sección 2.2 se estudian algunas propiedades básicas del nuevo módulo (crecimiento, convexidad, continuidad respecto de su variable, continuidad respecto de la distancia de Banach-Mazur, ...) y se compara el módulo infinito-dimensional con el módulo de cuadratura.

En la Sección 2.3 se muestran las caracterizaciones de τ-casi convexidad uniforme y τ-casi suavidad uniforme en función del módulo infinito-dimensional. Dichas caracterizaciones son análogas a las obtenidas en [8] para convexidad y suavidad uniforme a través del módulo de cuadratura.

En la Sección 2.4 se obtiene una condición suficiente para que un espacio tenga τ-estructura normal uniforme en función del módulo infinito-dimensional. A continuación se da una condición suficiente para que un espacio de Banach tenga la propiedad del punto fijo a través del coeficiente $R_\tau(X)$, que permite obtener resultados de existencia de punto fijo en ausencia de τ-estructura normal.

En la Sección 2.1 mostramos el valor del módulo infinito-dimensional en los espacios de funciones $L_p(\mu)$ con la topología de la convergencia local en medida. Como los espacios de Orlicz son una generalización natural de los espacios $L_p(\mu)$, en la Sección 2.5 nuestro objetivo es estimar el valor del módulo infinito-dimensional en dichos espacios.

2.1. Módulo universal infinito-dimensional con respecto a una topología τ: Definición

A lo largo de todo el capítulo X será un espacio de Banach y τ una topología lineal sobre X tal que la norma es τ-secuencialmente semicontinua inferiormente (τ-slsc), esto es, $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$ para cada sucesión $\{x_n\}$ τ-convergente a $x \in X$. En particular, cuando w es la topología débil, se tiene que la norma es w-slsc.

Definición 2.1.1. *Para cada $\beta \in (0,1)$, el* módulo universal infinito-dimensional con respecto a τ *se define como*

$$\zeta_{X,\tau}(\beta) = \sup \left\{ \liminf_{n\to\infty} \frac{\|x_n - y\|}{1 - \|x\|} \right\}$$

donde el supremo se toma sobre todas las sucesiones $\{x_n\} \subset B_\beta$ tales que $\tau - \lim_n x_n = x \neq 0$ con $\liminf_n \|x_n - x\| \leq \beta$ e $y = \frac{x}{\|x\|}$, donde $\tau - lim_n x_n$ denota el límite de la sucesión $\{x_n\}$ con respecto a τ y B_β denota la bola cerrada de centro 0 *y radio β.*

Cuando τ es la topología débil, el módulo universal infinito-dimensional se denota simplemente por $\zeta_X(\cdot)$.

Observación 2.1.1. Sea $\{x_n\} \subset B_\beta$ una sucesión τ-convergente a $x \neq 0$ tal que $\liminf_n \|x_n - x\| \leq \beta$ e $y = x/\|x\|$. Como la norma $\|\cdot\|$ es τ-slsc, se tiene $\|x\| \leq \beta$ y, por tanto,

$$\liminf_n \frac{\|x_n - y\|}{1 - \|x\|} \leq \liminf_n \frac{\|x_n - x\|}{1 - \|x\|} + \frac{\|x - y\|}{1 - \|x\|} \leq \frac{\beta}{1-\beta} + 1 = \frac{1}{1-\beta}.$$

Por otra parte, usando también que la norma es τ-slsc deducimos la siguiente cota inferior

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\|x_n - y\|}{1 - \|x\|} \geq \frac{\|x - y\|}{1 - \|x\|} = 1.$$

Por tanto, para cada $\beta \in (0,1)$ tenemos las siguientes desigualdades

$$1 \leq \zeta_{X,\tau}(\beta) \leq \frac{1}{1-\beta}.$$

En el siguiente teorema veremos que ambos valores extremos se alcanzan en algunos espacios.

Teorema 2.1.1. *1. Si X satisface la propiedad de Schur, esto es, toda sucesión débilmente convergente converge en norma, entonces $\zeta_X(\beta) = 1$ para cualquier $\beta \in (0,1)$.*

2. Para cada $\beta \in (0,1)$

$$\zeta_{\ell_\infty}(\beta) = \frac{1}{1-\beta}.$$

3. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida positiva σ-finita. Para cada $1 \leq p < +\infty$, consideramos el espacio de Banach $L_p(\mu)$ con la norma usual y la topología de la convergencia local en medida (clm). Entonces, para cada $\beta \in (0,1)$

$$\zeta_{L_p(\mu),clm}(\beta) = \frac{(\beta^p + (1-\beta^q)^{p-1})^{1/p}}{(1-\beta^q)^{1/q}} \quad \textit{si } 1 < p < +\infty,$$

$$\zeta_{L_1(\mu),clm}(\beta) = 1 + \beta.$$

4. Si $1 < p < \infty$, entonces para cada $\beta \in (0,1)$ se tiene

$$\zeta_{\ell_p}(\beta) = \frac{(\beta^p + (1-\beta^q)^{p-1})^{1/p}}{(1-\beta^q)^{1/q}}.$$

En particular, para $p = 2$ se tiene

$$\zeta_{\ell_2}(\beta) = \xi_{\ell_2}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \textit{para cada } \beta \in (0,1).$$

5. Para cada $\beta \in (0,1)$

$$\zeta_{c_0}(\beta) = \max\left(1, \frac{\beta}{1-\beta}\right).$$

6. Si $1 \leq p < \infty$, entonces para cada $\beta \in (0,1)$

$$\zeta_{\ell_{p,\infty}}(\beta) = \left(1 + \frac{\beta^p}{(1-\beta)^p}\right)^{1/p}.$$

Demostración:

1. Obvio

2. Denotamos $\mathbf{1} := \sum_{k=1}^{\infty} e_k$ y consideramos la sucesión $x_n = \beta(\mathbf{1} - e_n) \in B_\beta$ que converge débilmente a $\beta\mathbf{1} =: x$ con $\liminf_n \|x_n - x\| \le \beta$. Además, como $y = x/\|x\| = \mathbf{1}$, se tiene que $\|x_n - y\| = 1$ para cada n, lo cual implica
$$\zeta_{\ell_\infty}(\beta) \ge \frac{1}{1-\beta}$$
y, teniendo en cuenta la observación anterior, deducimos que
$$\zeta_{\ell_\infty}(\beta) = \frac{1}{1-\beta} \quad \text{para cada } \beta \in (0,1).$$

3. Usando el Lema de Fatou y teniendo en cuenta que cada sucesión clm-convergente tiene una subsucesión que converge al mismo límite e.c.t., podemos deducir que la norma $\|\cdot\|_p$ es clm-slsc para cada $p \in [1,+\infty)$. Además, el siguiente resultado se puede deducir de [9]: Si $\{f_n\}$ es una sucesión clm-nula en $L_p(\mu)$, $1 \le p < +\infty$, y f es una función en $L_p(\mu)$, entonces
$$\liminf_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p^p = \|f\|_p^p + \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p^p. \tag{2.1}$$
Tras este recordatorio, vamos a calcular $\zeta_{L_p(\mu),clm}(\beta)$. Sea $\{f_n\} \subset B_\beta$ una sucesión clm-convergente a f con $\liminf_n \|f_n - f\| \le \beta$ y $g = f/\|f\|$. Denotando $A = \|f\|_p$ y aplicando (2.1) obtenemos
$$\beta^p \ge \liminf_n \|f_n\|_p^p = A^p + \liminf_n \|f_n - f\|_p^p$$
y
$$\liminf_n \frac{\|f_n - g\|_p^p}{(1-\|f\|_p)^p} = \frac{\|f-g\|_p^p}{(1-\|f\|_p)^p} + \liminf_n \frac{\|f_n - f\|_p^p}{(1-\|f\|_p)^p} \le 1 + \frac{\beta^p - A^p}{(1-A)^p}.$$
La función $F(A) = (\beta^p - A^p)/(1-A)^p$ alcanza su máximo en $[0,\beta]$ en el punto $A = \beta^q$ con $1/q = 1 - 1/p$ si $p \ne 1$ y en el punto $A = 0$ si $p = 1$. Sustituyendo

dichos valores deducimos que

$$\zeta_{L_p(\mu),clm}(\beta) \leq \frac{(\beta^p + (1-\beta^q)^{p-1})^{1/p}}{(1-\beta^q)^{1/q}} \qquad \text{si } p \neq 1$$

$$\zeta_{L_1(\mu),clm}(\beta) \leq 1+\beta.$$

Considerando la sucesión

$$f_n = \beta^q \frac{1}{\mu(\Omega_1)^{1/p}} \chi_{\Omega_1} + \beta(1-\beta^q)^{1/p} \frac{1}{\mu(\Omega_n)^{1/p}} \chi_{\Omega_n}$$

se obtiene la igualdad para $p \neq 1$. Si $p = 1$, considerando

$$f_n = \beta \left(\frac{a}{\mu(\Omega_1)} \chi_{\Omega_1} + \frac{1-a}{\mu(\Omega_n)} \chi_{\Omega_n} \right)$$

con $a \in (0,1)$ arbitrario, obtenemos

$$\zeta_{L_1(\mu),clm}(\beta) \geq 1 + \frac{\beta(1-a)}{1-\beta a}.$$

Haciendo tender a hacia 0, tenemos $\zeta_{L_1(\mu),clm}(\beta) \geq 1+\beta$, de donde se deduce la igualdad.

4. Es un caso particular de (3) porque, cuando $\Omega = \mathbb{N}$ y μ es la medida cardinal definida sobre los subconjuntos de $\mathbb{N}$, la convergencia local en medida es equivalente a la convergencia débil para sucesiones acotadas en ℓ_p con $p > 1$.

5. Sea $\{x_n\} \subset B_\beta$ una sucesión débilmente convergente a x (lo cual implica $\liminf_n \|x_n - x\| \leq \beta$, porque c_0 satisface la propiedad de Opial no estricta). Tomando una subsucesión, si fuera necesario, podemos suponer que

$$\operatorname{sop}(x_n - x) \cap \operatorname{sop}(x-y) = \emptyset$$

donde para cada $x = (x^k)$ denotamos $\operatorname{sop} x = \{k : \ x^k \neq 0\}$. Así pues, se tiene

$$\liminf_n \|x_n - y\| = \liminf_n \|x_n - x + x - y\| =$$

$$= \text{máx}(\liminf_n \|x_n - x\|, \|x - y\|) \leq \text{máx}(\beta, 1 - \|x\|).$$

Por tanto,

$$\zeta_{c_o}(\beta) \leq \frac{\text{máx}(\beta, 1 - \|x\|)}{1 - \|x\|} \leq \text{máx}\left(\frac{\beta}{1-\beta}, 1\right).$$

Considerando la sucesión $x_n = \beta(e_1 + e_n)$ se obtiene la igualdad.

6. Sea $\{x_n\} \subset B_\beta$ una sucesión débilmente convergente a x (lo cual implica $\liminf_n \|x_n - x\|_{p,\infty} \leq \beta$, porque $\ell_{p,\infty}$ satisface la propiedad de Opial no estricta). Tomando una subsucesión, si fuera necesario, podemos suponer que

$$\text{sop}\,(x_n - x) \cap \text{sop}\,(x - y) = \emptyset.$$

Usando (2.1) podemos deducir

$$\liminf_n \|x_n - y\|_{p,\infty}^p = \text{máx}\left\{\liminf_n \|(x_n - y)^+\|_p^p, \liminf_n \|(x_n - y)^-\|_p^p\right\} =$$

$$= \text{máx}\left\{\liminf_n \|(x_n - x)^+ + (x - y)^+\|_p^p, \liminf_n \|(x_n - x)^- + (x - y)^-\|_p^p\right\} =$$

$$= \text{máx}\left\{\liminf_n \|(x_n - x)^+\|_p^p + \|(x - y)^+\|_p^p, \liminf_n \|(x_n - x)^-\|_p^p + \|(x - y)^-\|_p^p\right\} \leq$$

$$\leq \liminf_n \|x_n - x\|_{p,\infty}^p + \|x - y\|_{p,\infty}^p \leq \beta^p + (1 - \|x\|_{p,\infty})^p.$$

Por tanto obtenemos

$$\zeta_{\ell_{p,\infty}}(\beta) \leq \left(\frac{\beta^p}{(1-\beta)^p} + 1\right)^{1/p}$$

y este valor se alcanza para $x_n = \beta(e_1 - e_n)$.

■

2.2. Algunas propiedades del módulo universal infinito-dimensional

Estudiamos a continuación algunas propiedades básicas del nuevo módulo, tales como crecimiento, convexidad, continuidad respecto de su variable y continuidad respecto de la distancia de Banach-Mazur. El siguiente resultado es obvio:

Proposición 2.2.1. *La función* $\zeta_{X,\tau}(\cdot)$ *es creciente.*

Nótese que, en general, $\zeta_{X,\tau}(\cdot)$ no es estrictamente creciente. Basta considerar, por ejemplo, un espacio de Banach X con la propiedad de Schur o $X = c_0$ (ver Teorema 2.1.1).

El módulo de convexidad no es necesariamente una función convexa (ver [64] o [40] Ejemplo 5.8). Sin embargo, como veremos en la siguiente proposición, este nuevo módulo sí es convexo.

Proposición 2.2.2. $\zeta_{X,\tau}(\cdot)$ *es una función convexa y, por tanto, es continua en* $(0,1)$.

Demostración: Consideremos $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$ y $0 < t < 1$. Hay que demostrar

$$\zeta_{X,\tau}(t\beta_1 + (1-t)\beta_2) \leq t\zeta_{X,\tau}(\beta_1) + (1-t)\zeta_{X,\tau}(\beta_2).$$

Sea $\{x_n\} \subset B_{t\beta_1+(1-t)\beta_2}$ tal que $\tau-\text{lím}_n\, x_n = x$ con $\text{lím inf}_n \|x_n - x\| \leq t\beta_1 + (1-t)\beta_2$ e $y = x/\|x\|$. Basta encontrar dos sucesiones $\{x_n^1\} \subset B_{\beta_1}$, $\{x_n^2\} \subset B_{\beta_2}$ tales que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\|x_n - y\|}{1-\|x\|} \leq t \liminf_n \frac{\|x_n^1 - y^1\|}{1 - \|x^1\|} + (1-t) \liminf_n \frac{\|x_n^2 - y^2\|}{1-\|x^2\|}.$$

Consideremos para $i = 1, 2$

$$x_n^i = \frac{\beta_i}{t\beta_1 + (1-t)\beta_2} x_n \ \xrightarrow{\tau}\ \frac{\beta_i}{t\beta_1 + (1-t)\beta_2} x = x^i \qquad y^i = \frac{x^i}{\|x^i\|} = \frac{x}{\|x\|} = y.$$

Usando la convexidad de la norma, tenemos la siguiente desigualdad

$$\frac{\|x_n - y\|}{1-\|x\|} \leq \frac{t\|x_n^1 - y^1\| + (1-t)\|x_n^2 - y^2\|}{t(1-\|x^1\|) + (1-t)(1-\|x^2\|)}.$$

Por otra parte, si consideramos

$$z_n = \lambda x^2 + (1-\lambda)x_n^2 = \mu y + (1-\mu)x_n^1$$

con

$$\lambda = \frac{1-\frac{\beta_1}{\beta_2}}{1-\|x^1\|} \in (0,1) \qquad \text{y} \qquad \mu = \frac{1-\frac{\beta_1}{\beta_2}}{1-\|x^1\|}\|x^2\| \in (0,1)$$

tenemos

$$\|z_n - y\| = (1-\mu)\|x_n^1 - y\|$$

$$x^2 = (1-\mu)x^1 + \mu y \Rightarrow 1 - \|x^2\| = (1-\mu)(1-\|x^1\|).$$

Además, usando que la norma es convexa y τ-slsc, obtenemos

$$\liminf_n \|z_n - y\| \leq \lambda\|x^2 - y\| + (1-\lambda)\liminf_n \|x_n^2 - y\| \leq \liminf_n \|x_n^2 - y\|$$

de donde deducimos

$$\liminf_n \frac{\|x_n^1 - y\|}{1-\|x^1\|} = \liminf_n \frac{\|z_n - y\|}{1-\|x^2\|} \leq \liminf_n \frac{\|x_n^2 - y\|}{1-\|x^2\|}.$$

Así pues, aplicando la siguiente desigualdad

$$\frac{ta + (1-t)c}{tb + (1-t)d} \leq t\frac{a}{b} + (1-t)\frac{c}{d}$$

que es cierta para $0 < t \leq 1$ y $a, b, c, d > 0$ con $b \geq d$ y $a/b \leq c/d$ ([8], Lema 1.3), obtenemos la desigualdad deseada. ■

Este resultado de continuidad será usado para obtener la siguiente relación entre el módulo ζ y el módulo de cuadratura ξ, según la cual este nuevo módulo es un refinamiento del anterior.

Teorema 2.2.1. *$\zeta_{X,\tau}(\beta) \leq \xi_X(\beta)$ para cualquier $\beta \in (0,1)$.*

Demostración: Sea $\{x_n\}$ una sucesión en B_β τ-convergente a $x \neq 0$ con $\liminf_n \|x_n - x\| \leq \beta$. Sea $\gamma > 1$ arbitrario y $z_n \in [x_n, \gamma y]$ tal que $\|z_n\| = 1$.

Existe $\lambda_n \in (0,1)$ tal que $z_n = \lambda_n \gamma y + (1-\lambda_n)x_n$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\{\lambda_n\}$ es convergente hacia algún λ. Así pues, obtenemos $\|\lambda\gamma y + (1-\lambda)x\| \leq 1$, que implica

$$\|x\| \left| \frac{\lambda\gamma}{\|x\|} + 1 - \lambda \right| \leq 1$$

de donde deducimos

$$\lambda(\gamma - \|x\|) \leq 1 - \|x\|,$$

y, por tanto,

$$1 - \lambda \geq \frac{\gamma - 1}{\gamma - \|x\|}.$$

Sea $c < 1$ arbitrario. Para n suficientemente grande ($n > n_0(c,\gamma)$) tenemos

$$1 - \lambda_n \geq c\frac{\gamma - 1}{\gamma - \|x\|}.$$

Así,

$$\xi_X(\beta) \geq \frac{\|\gamma y - z_n\|}{\gamma - 1} = \frac{(1-\lambda_n)\|\gamma y - x_n\|}{\gamma - 1} \geq c\frac{\|\gamma y - x_n\|}{\gamma - \|x\|}.$$

Por consiguiente,

$$\xi_X(\beta) \geq c \liminf_n \frac{\|\gamma y - x_n\|}{\gamma - \|x\|} = c \liminf_n \frac{\left\| y - \frac{x_n}{\gamma} \right\|}{1 - \frac{\|x\|}{\gamma}}.$$

Tomando supremo obtenemos $\xi_X(\beta) \geq c\,\zeta_{X,\tau}(\beta/\gamma)$. Como $\zeta_{X,\tau}(\cdot)$ es continua y c es arbitrario, haciendo tender γ a 1^+, se obtiene $\xi_X(\beta) \geq \zeta_{X,\tau}(\beta)$. ■

Nótese que, en el caso del espacio de sucesiones ℓ_2 con la topología débil, la estimación es óptima ya que, como vimos en el Teorema 2.1.1, $\zeta_{\ell_2}(\beta) = \xi_{\ell_2}(\beta)$ para todo $\beta \in (0,1)$.

A continuación estudiamos la continuidad del módulo ζ respecto de la distancia de Banach-Mazur.

Teorema 2.2.2. *Sean X e Y dos espacios de Banach isomorfos cuya distancia de Banach-Mazur es menor que $1+\delta$ con $\delta \leq 1$. Entonces, para cada $\beta \in (0,1)$, se tiene*

$$|\zeta_{X,\tau}(\beta) - \zeta_{Y,\tau}(\beta)| \leq \frac{2\delta}{(1-\beta)^2}.$$

Demostración: Como X e Y son espacios de Banach isomorfos con $d(X,Y) < 1+\delta$, podemos considerar X e Y como el mismo espacio vectorial dotado con dos normas equivalentes, $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ respectivamente, tales que

$$\|x\| \leq |||x||| \leq (1+\delta)\|x\|$$

para cada $x \in X$. Sea $\{x_n\} \subset B_X(0,\beta)$ una sucesión tal que $x_n \xrightarrow{\tau} x$ con $\liminf_n \|x_n - x\| \leq \beta$ e $y = x/\|x\|$. Consideremos la sucesión $x_n' = \frac{1}{1+\delta} x_n \in B_Y(0,\beta)$ que es τ-convergente a $x' = \frac{1}{1+\delta} x$ con $\liminf_n |||x_n' - x'||| \leq \beta$. Para $y' = \frac{x'}{|||x'|||} = \frac{x}{|||x|||}$ se tiene

$$\|x_n - y\| - |||x_n' - y'||| \leq |||x_n - y||| - |||x_n' - y'||| \leq |||x_n - y - x_n' + y'||| \leq$$

$$\leq |||x_n - x_n'||| + |||y' - y||| = |||x_n||| \left|1 - \frac{1}{1+\delta}\right| + |||x||| \left|\frac{1}{|||x|||} - \frac{1}{\|x\|}\right| \leq$$

$$\leq |||x_n||| \frac{\delta}{1+\delta} + \frac{|||x|||}{\|x\|} - 1 \leq \beta\delta + \delta = \delta(1+\beta).$$

Por otra parte

$$1 - |||x'||| \leq 1 - \frac{1}{1+\delta}\|x\| = 1 - \|x\| + \frac{\delta}{1+\delta}\|x\| \leq 1 - \|x\| + \frac{\beta\delta}{1+\delta}.$$

Así pues,

$$\frac{\|x_n - y\|}{1 - \|x\|} - \frac{|||x_n' - y'|||}{1 - |||x'|||} \leq$$

$$\leq \frac{\|x_n - y\|}{1 - \|x\|} - \frac{\|x_n - y\| - \delta(1+\beta)}{1 - \|x\| + \frac{\beta\delta}{1+\delta}} =$$

$$= \frac{\|x_n - y\| \frac{\beta\delta}{1+\delta} + \delta(1+\beta)(1 - \|x\|)}{(1 - \|x\|)\left(1 - \|x\| + \frac{\beta\delta}{1+\delta}\right)} \leq$$

$$\leq \frac{\|x_n - y\|}{1-\|x\|}\frac{\frac{\beta\delta}{1+\delta}}{1-\|x\|} + \frac{\delta(1+\beta)}{1-\|x\|} \leq$$

$$\leq \frac{1+\beta}{1-\beta}\frac{\frac{\beta\delta}{1+\delta}}{1-\beta} + \frac{\delta(1+\beta)}{1-\beta} =$$

$$= \frac{(1+\beta)\frac{\beta\delta}{1+\delta} + \delta(1+\beta)(1-\beta)}{(1-\beta)^2} =$$

$$= \frac{\beta^2\left(\frac{\delta}{1+\delta} - \delta\right) + \beta\frac{\delta}{1+\delta} + \delta}{(1-\beta)^2} \leq$$

$$\leq \frac{\beta\frac{\delta}{1+\delta} + \delta}{(1-\beta)^2} \leq \frac{2\delta}{(1-\beta)^2}$$

lo cual implica

$$\frac{|||x_n' - y'|||}{1-|||x'|||} \geq \frac{\|x_n - y\|}{1-\|x\|} - \frac{2\delta}{(1-\beta)^2}.$$

Por tanto,

$$\zeta_{Y,\tau}(\beta) \geq \zeta_{X,\tau}(\beta) - \frac{2\delta}{(1-\beta)^2}.$$

Un argumento simétrico prueba que $\zeta_{X,\tau}(\beta) \geq \zeta_{Y,\tau}(\beta) - 2\delta/(1-\beta)^2$. ∎

2.3. Relación del módulo infinito-dimensional con las propiedades de τ-casi convexidad uniforme y τ-casi suavidad uniforme

En esta sección vamos a mostrar caracterizaciones de los espacios τ-casi uniformemente convexos y τ-casi uniformemente suaves, dadas a través del módulo infinito-dimensional, análogas a las caracterizaciones de los espacios uniformemente convexos y uniformemente suaves obtenidas por Benítez, Przeslawski y Yost [8] a través del módulo de cuadratura.

La caracterización de los espacios casi uniformemente convexos se deducirá como consecuencia de los siguientes lemas en los que estudiamos la relación entre el módulo ζ y la característica de τ-NUC del espacio.

Lema 2.3.1. *Para cualquier $\beta \in (0,1)$, se tiene*

$$\zeta_{X,\tau}(\beta) \geq \frac{(\beta/2)\Delta_{0,\tau}(X) + \beta - 1}{1-\beta}.$$

Demostración: Si $\Delta_{0,\tau}(X) = 0$, la desigualdad es obvia. Si $\Delta_{0,\tau}(X) > 0$, sea $0 < c < \Delta_{0,\tau}(X)$. Para cualquier $\eta > 0$ existe una sucesión $\{z_n\}$ en B_X τ-convergente a z, tal que $\|z_n - z\| \geq c$ y $\|z\| \geq 1-\eta$. Consideremos la sucesión $x_n = \frac{\beta}{2}(z_n + z) \in B_\beta$ que es τ-convergente a $x = \beta z$ con $\liminf_n \|x_n - x\| \leq \beta$. Sea $y = x/\|x\| = z/\|z\|$, entonces se tiene

$$\|x_n - y\| \geq \|x_n - x\| - \|x - y\| \geq \frac{\beta}{2}c + \|x\| - 1 \geq \frac{\beta}{2}c + \beta(1-\eta) - 1.$$

Por tanto,

$$\frac{\|x_n - y\|}{1 - \|x\|} \geq \frac{(\beta/2)c + \beta(1-\eta) - 1}{1 - \beta(1-\eta)}.$$

Haciendo tender $\eta \to 0$ y luego $c \to \Delta_{0,\tau}(X)$, obtenemos la desigualdad establecida. ■

Cuando el espacio satisface la propiedad de Opial no estricta con respecto a τ, la estimación anterior puede mejorarse como mostramos en el siguiente lema.

Lema 2.3.2. *Si X satisface la propiedad de Opial no estricta con respecto a τ, entonces para cualquier $\beta \in (0,1)$*

$$\zeta_{X,\tau}(\beta) \geq \frac{\beta\Delta_{0,\tau}(X)}{1-\beta}.$$

Demostración: Usando los argumentos de la prueba del lema anterior y considerando la sucesión $x_n = \beta z_n \in B_\beta$ que es τ-convergente a $x = \beta z$ con $\liminf_n \|x_n - x\| \leq \beta$, se obtiene la desigualdad del enunciado. ■

En ([8], Teorema 2.5) Benítez, Przeslawski y Yost probaron que

$$\lim_{\beta\to 1}(1-\beta)\xi_X(\beta) = \varepsilon_0(X).$$

En el siguiente lema mostramos que hay una relación similar entre el módulo infinito-dimensional y la característica de τ-NUC en los espacios que verifican la propiedad de Opial no estricta.

Lema 2.3.3.

$$1/2\Delta_{0,\tau}(X) \leq \liminf_{\beta\to 1}(1-\beta)\zeta_{X,\tau}(\beta) \leq \limsup_{\beta\to 1}(1-\beta)\zeta_{X,\tau}(\beta) \leq \Delta_{0,\tau}(X).$$

En particular, si X satisface la propiedad de Opial no estricta con respecto a τ, entonces

$$\lim_{\beta\to 1}(1-\beta)\zeta_{X,\tau}(\beta) = \Delta_{0,\tau}(X).$$

Demostración: Del Lema 2.3.1 deducimos que

$$\liminf_{\beta\to 1}(1-\beta)\zeta_{X,\tau}(\beta) \geq 1/2\Delta_{0,\tau}(X).$$

En particular, si X satisface la propiedad de Opial no estricta, del Lema 2.3.2 se deduce que $\liminf_{\beta\to 1}(1-\beta)\zeta_{X,\tau}(\beta) \geq \Delta_{0,\tau}(X)$.
Para probar la otra desigualdad, consideramos cualquier sucesión $\{x_n\}$ en B_β τ-convergente a x con $\liminf_n \|x_n - x\| \leq \beta$. Sea $y = x/\|x\|$, tomando una subsucesión, si fuera necesario, podemos suponer que existen los siguientes límites $\lim_n \|x_n - y\|$, $\lim_n \|x_n\| = \alpha \leq \beta$ y $\lim_n \|x_n - x\| = \epsilon \leq \beta$. Para $\eta \in (0, 1-\beta)$ arbitrario, podemos suponer que $|\|x_n - x\| - \epsilon| < \eta$ y $|\|x_n\| - \alpha| < \eta$ para cada n natural. Elegimos $p \in (0,1)$ y definimos para $\beta \in (0,1)$

$$r_p(\beta) = \sup\left\{\epsilon \geq 0 : \Delta_{X,\tau}(\epsilon) < (1-\beta)^p\right\}.$$

Es fácil ver que $r_p(\cdot)$ es una función no creciente. Veamos que

$$\lim_{\beta\to 1^-} r_p(\beta) \leq \Delta_{0,\tau}(X).$$

De lo contrario, existiría un número c tal que $r_p(\beta) > c > \Delta_{0,\tau}(X)$ para cualquier $\beta < 1$. Si elegimos $\varepsilon(\beta) \in (c, r_p(\beta))$ tal que $\Delta_{X,\tau}(\varepsilon(\beta)) < (1-\beta)^p$, obtenemos $\Delta_{X,\tau}(c) \leq (1-\beta)^p$ para cualquier $\beta < 1$, lo que implica $\Delta_{X,\tau}(c) = 0$ que está en contradicción con $c > \Delta_{0,\tau}(X)$.
Tenemos las siguientes desigualdades

$$\|x\| \leq (\alpha+\eta)\left(1 - \Delta_{X,\tau}\left(\frac{\epsilon}{\alpha+\eta}\right)\right) \leq (\alpha+\eta)(1-\Delta_{X,\tau}(\epsilon))$$

$$\|x_n - y\| \leq \|x_n - x\| + \|x - y\| \leq \epsilon + \eta + 1 - \|x\|$$

que implica

$$\frac{\|x_n - y\|}{1 - \|x\|} \leq \frac{\epsilon+\eta}{1-\|x\|} + 1.$$

Si $\epsilon > r_p(\beta)$, entonces $\Delta_{X,\tau}(\epsilon) \geq (1-\beta)^p$ y

$$\frac{\|x_n - y\|}{1 - \|x\|} \leq \frac{\beta+\eta}{1-(\beta+\eta)(1-(1-\beta)^p)} + 1.$$

Si $\epsilon \leq r_p(\beta)$, tenemos

$$\frac{\|x_n - y\|}{1 - \|x\|} \leq \frac{r_p(\beta)+\eta}{1-\beta} + 1.$$

En ambos casos, como η es arbitrario, se obtiene

$$\limsup_{\beta\to 1}(1-\beta)\zeta_{X,,\tau}(\beta) \leq$$

$$\leq \max\left\{\limsup_{\beta\to 1}(1-\beta)\frac{\beta}{1-\beta+\beta(1-\beta)^p} + 1 - \beta, \limsup_{\beta\to 1} r_p(\beta) + 1 - \beta\right\} \leq$$

$$\leq \max\left\{0, \limsup_{\beta\to 1} r_p(\beta)\right\} \leq \Delta_{0,\tau}(X).$$

■

Como consecuencia del Lema 2.3.3 se deduce el siguiente resultado que muestra que el comportamiento del módulo ζ para valores de β próximos a 1 está relacionado con la casi convexidad uniforme.

Teorema 2.3.1. *Un espacio de Banach X es τ-NUC si y sólo si X es reflexivo y*

$$\lim_{\beta\to 1}(1-\beta)\zeta_{X,\tau}(\beta) = 0.$$

En el siguiente teorema mostramos que el comportamiento del módulo ζ para valores de β próximos a 0 está relacionado con la casi suavidad uniforme.

Teorema 2.3.2. *Un espacio de Banach X es τ-NUS si y sólo si*

$$\zeta'_{X,\tau}(0) = \lim_{\beta\to 0}\frac{\zeta_{X,\tau}(\beta)-1}{\beta} = 0.$$

Demostración: Suponemos que X es τ-NUS. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario y $\eta = \eta(\epsilon)$ dado por la definición de τ-NUS. Tomamos $\beta < \eta/(1+\eta)$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en B_β τ-convergente a x con $\liminf_n \|x_n - x\| \leq \beta < \eta$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existe $\lim_n \|y - x_n\|$ y $\lim_n \|x - x_n\|/(1-\|x\|) =: t$, siendo $y = x/\|x\|$. Entonces, tenemos

$$\|y - x_n\| = \|y-x\|\left\|\frac{y-x}{\|y-x\|} + \frac{x-x_n}{\|y-x\|}\right\| =$$

$$= (1-\|x\|)\left\|\frac{y-x}{\|y-x\|} + \frac{\|x-x_n\|}{1-\|x\|}\frac{x-x_n}{\|x-x_n\|}\right\| \leq$$

$$\leq (1-\|x\|)\left\|\frac{y-x}{\|y-x\|} + t\frac{x-x_n}{\|x-x_n\|}\right\| + (1-\|x\|)\left|t - \frac{\|x-x_n\|}{1-\|x\|}\right|.$$

Como

$$t = \lim_n \frac{\|x-x_n\|}{1-\|x\|} \leq \frac{\beta}{1-\beta} < \eta,$$

tenemos

$$\|y-x_n\| \leq (1-\|x\|)(1+\epsilon t) + (1-\|x\|)\left|t - \frac{\|x-x_n\|}{1-\|x\|}\right| \leq$$

$$\leq (1-\|x\|)\left(1 + \frac{\epsilon\beta}{1-\beta} + \left|t - \frac{\|x-x_n\|}{1-\|x\|}\right|\right)$$

para infinitos n. Así pues

$$\zeta_{X,\tau}(\beta) \leq 1 + \frac{\epsilon\beta}{1-\beta}$$

que implica

$$0 \leq \frac{\zeta_{X,\tau}(\beta)-1}{\beta} \leq \frac{\epsilon}{1-\beta} \qquad \text{para } \beta < \frac{\eta}{1+\eta}.$$

Por tanto

$$0 \leq \liminf_{\beta\to 0} \frac{\zeta_{X,\tau}(\beta)-1}{\beta} \leq \limsup_{\beta\to 0} \frac{\zeta_{X,\tau}(\beta)-1}{\beta} \leq \epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario, se obtiene $\zeta'_{X,\tau}(0) = 0$.

Recíprocamente, supongamos que X no es τ-NUS. Entonces existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para cada $\eta > 0$ existe $t \in (0,\eta)$ y una sucesión τ-nula $\{u_n\}$ en B_X cumpliendo $\|u_1 + tu_n\| > 1 + \epsilon_0 t$ para todo n natural. Sea $\eta > 0$ arbitrario y $a = \beta\epsilon_0/2$ con β suficientemente pequeño tal que $t = a/(1-a)$. Consideremos la sucesión $x_n = a(u_1 - u_n)/\|u_1\|$ que es τ-convergente a $au_1/\|u_1\| =: x$. Como

$$1 + \epsilon_0 \frac{a}{1-a} < \left\| u_1 + \frac{a}{1-a} u_n \right\| \leq \|u_1\| + \frac{a}{1-a}$$

y $a/(1-a) < 1$ obtenemos

$$\|u_1\| \geq 1 + (\epsilon_0 - 1)\frac{a}{1-a} > \epsilon_0.$$

Así, $\|x_n\| \leq 2a/\epsilon_0 = \beta$, $\liminf_n \|x_n - x\| \leq \beta$ y para $y = x/\|x\| = u_1/\|u_1\|$ se tiene

$$\|y - x_n\| = \|y-x\| \left\| \frac{y-x}{\|y-x\|} + \frac{x-x_n}{\|y-x\|} \right\| = \|y-x\| \left\| \frac{u_1}{\|u_1\|} + \frac{a}{1-a}\frac{u_n}{\|u_1\|} \right\| \geq$$

$$\geq \frac{\|y-x\|}{\|u_1\|}\left(1 + \epsilon_0 \frac{a}{1-a}\right) \geq (1 - \|x\|)\left(1 + \epsilon_0\frac{a}{1-a}\right).$$

Por tanto,

$$\zeta_{X,\tau}(\beta) \geq 1 + \epsilon_0 \frac{a}{1-a}$$

que implica

$$\frac{\zeta_{X,\tau}(\beta)-1}{\beta} \geq \frac{\epsilon_0^2}{2 - \beta\epsilon_0}$$

y

$$\liminf_{\beta \to 0} \frac{\zeta_{X,\tau}(\beta) - 1}{\beta} \geq \frac{\epsilon_0^2}{2} > 0.$$

■

Observación 2.3.1. En 1997 S. Prus [75] define la clase de los espacios de Banach UNC (uniformly noncreasy), que contiene todos los espacios uniformemente convexos y uniformemente suaves. Más tarde, en 2001, J. García-Falset, E. Llorens-Fuster y E.M. Mazcuñán Navarro [37] dan una generalización de dicha noción definiendo la propiedad de ser r-UNC (r-uniformly noncreasy) con $r \in (0, 2]$. Sería, pues, interesante obtener una caracterización de los espacios de Banach que son UNC o r-UNC a través del módulo de cuadratura ξ.

Recientemente, S. Prus y M. Szczepanik [77] han definido la clase de los espacios de Banach NUNC (nearly uniformly noncreasy), una generalización con carácter infinito-dimensional, que contiene todos los espacios casi uniformemente convexos y casi uniformemente suaves. Por eso, de igual modo, sería interesante caracterizar, mediante el módulo infinito-dimensional ζ, los espacios de Banach que cumplen la propiedad NUNC.

2.4. Aplicaciones del módulo universal infinito-dimensional en Teoría del Punto Fijo

Comenzamos la sección dando una cota inferior para el coeficiente $\tau CS(X)$ en función del módulo $\zeta_{X,\tau}(\cdot)$, que se usará para obtener una condición suficiente para que un espacio de Banach X tenga τ-estructura normal uniforme y, por consiguiente, la τ-propiedad del punto fijo.

Proposición 2.4.1.

$$\tau CS(X) \geq \sup_{\beta\in(0,1)} \frac{1+\beta-\zeta_{X,\tau}(\beta)+\sqrt{(\zeta_{X,\tau}(\beta)-1-\beta)^2+4\beta\zeta_{X,\tau}(\beta)}}{2}.$$

Demostración: Denotemos $t = \tau CS(X)$. Para cualquier $\eta > 0$ existe una sucesión τ-nula $\{z_n\}$ en S_X tal que $t \leq \lim_{n,m;n\neq m} \|z_n - z_m\| < t+\eta$. Elegimos $k \in \mathbb{N}$ tal que $t-\eta \leq \|z_n - z_k\| \leq t+\eta$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cualquier $\beta \in (0,1)$ consideramos la sucesión $x_n = \beta(z_k - z_n)/(t+\eta) \in B_\beta$ que es τ-convergente a $\beta z_k/(t+\eta) =: x$ con $\liminf_n \|x_n - x\| \leq \beta$. Entonces, para $y = x/\|x\| = z_k$ se tiene

$$\frac{\|x_n - y\|}{1-\|x\|} \geq \frac{\|z_n\| - \left(1-\frac{\beta}{t+\eta}\right)\|z_k - z_n\|}{1-\frac{\beta}{t+\eta}} \geq \frac{1-\left(1-\frac{\beta}{t+\eta}\right)(t+\eta)}{1-\frac{\beta}{t+\eta}}.$$

Haciendo tender $\eta \to 0$ se obtiene

$$\zeta_{X,\tau}(\beta) \geq \frac{t(1+\beta-t)}{t-\beta} \text{ para cada } \beta \in (0,1)$$

que es equivalente a la desigualdad del enunciado. ■

Observación 2.4.1. La cota obtenida para $\tau CS(X)$ no es óptima. De hecho, para $X = \ell_1$ se obtiene

$$2 = WCS(X) \geq \sup_{\beta\in(0,1)} \frac{1+\beta-\zeta_X(\beta)+\sqrt{(\zeta_X(\beta)-1-\beta)^2+4\beta\zeta_X(\beta)}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

y para $X = \ell_2$, mediante cálculos elementales, la estimación obtenida es

$$\sqrt{2} = WCS(X) \geq \sup_{\beta\in(0,1)} \frac{1+\beta-\zeta_X(\beta)+\sqrt{(\zeta_X(\beta)-1-\beta)^2+4\beta\zeta_X(\beta)}}{2} \approx 1{,}25.$$

Sin embargo, para $X = c_0$ se da la igualdad

$$WCS(X) = 1 = \sup_{\beta\in(0,1)} \frac{1+\beta-\zeta_X(\beta)+\sqrt{(\zeta_X(\beta)-1-\beta)^2+4\beta\zeta_X(\beta)}}{2}.$$

Como consecuencia de la anterior proposición y teniendo en cuenta la Proposición 1.1.1 y el Teorema 1.2.2 se obtiene una condición suficiente para que un espacio de Banach X tenga τ-UNS y τ-FPP.

Corolario 2.4.1. *Sea τ una topología lineal sobre X tal que la norma es τ-slsc y cada conjunto τ-secuencialmente compacto es separable. Si*

$$\zeta_{X,\tau}(\beta) < \frac{\beta}{1-\beta} \qquad \text{para algún } \beta \in (0,1),$$

en particular si $\liminf_{\beta\to 1}(1-\beta)\zeta_{X,\tau}(\beta) < 1$*, entonces X tiene τ-UNS y, por tanto, τ-FPP.*

Observación 2.4.2. La estimación obtenida en el Corolario 2.4.1 no es óptima. Por ejemplo, el espacio $X = (\mathbb{R} \oplus l_2)_\infty$ satisface

$$\zeta_X(\beta) \geq \frac{\beta}{1-\beta}$$

para cada $\beta \in (0,1)$ y $WCS(X) = \sqrt{2}$. Además, como $\zeta_{X,\tau}(\beta) \geq 1$, la condición del corolario sólo puede cumplirse para $\beta > 2/3$. Este hecho no nos sorprende porque hemos probado que el "buen" comportamiento de ζ para β próximo a cero está relacionado con la casi suavidad uniforme (Teorema 2.3.2) y dicha propiedad no implica τ- estructura normal (ver [4]).

Por otra parte, no podemos esperar que la estimación $\zeta_{X,\tau}(\beta) < 1/(1-\beta)$ para algún β garantice τ-estructura normal uniforme como sucedía con el módulo finito-dimensional ξ ([8], Proposición 2.9). De hecho, el espacio $X = c_0$ cumple $\zeta_X(\beta) = \beta/(1-\beta) < 1/(1-\beta)$ para $\beta \in (1/2, 1)$ (ver Teorema 2.1.1) y, sin embargo, c_0 no tiene estructura normal débil.

Hasta ahora, el módulo infinito-dimensional nos ha permitido obtener resultados de punto fijo a través de condiciones que garantizan τ-estructura normal. Finalmente, damos una condición suficiente para que un espacio de Banach X tenga τ-FPP en ausencia de τ-NS, usando el coeficiente $R_\tau(X)$.

Teorema 2.4.1. *Si* $\zeta_{X,\tau}(\beta) < 1+\beta$ *para algún* $\beta \in (0,1)$*, en particular si* $\zeta'_{X,\tau}(0) < 1$*, entonces* $R_\tau(X) < 2$*.*

Demostración: Supongamos que $R_\tau(X) = 2$. Sea $\eta > 0$ arbitrario, entonces existe una sucesión τ-nula $\{u_n\}$ en B_X y $u \in B_X$ tal que $\liminf_n \|u_n + u\| > 2 - \eta$. Podemos suponer que $\|u_n + u\| > 2 - \eta$ para todo n. Así pues, $\|u_n\| > 1 - \eta$ para todo n y $\|u\| > 1-\eta$. Sea $w = \lambda u_n + (1-\lambda)u$ con $\lambda \in (0, 1/2]$ (la prueba es similar para $\lambda \in (1/2, 1)$, intercambiando u_n y u). Entonces $(u_n + u)/2 = \mu u_n + (1-\mu)w$ con $\mu = (1-2\lambda)/2(1-\lambda) \leq 1/2$ y, por tanto,

$$\frac{2-\eta}{2} < \frac{\|u_n + u\|}{2} \leq \mu + (1-\mu)\|w\| = \mu(1 - \|w\|) + \|w\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}(1-\|w\|) + \|w\| = \frac{1}{2}(1+\|w\|)$$

que implica $\|w\| \geq 1-\eta$. Sean ahora $\lambda, \mu \in (0, +\infty)$ entonces se tiene

$$\|\lambda u_n + \mu u\| = (\lambda+\mu)\left\|\frac{\lambda}{\lambda+\mu}u_n + \frac{\mu}{\lambda+\mu}u\right\| \geq (\lambda+\mu)(1-\eta).$$

Por tanto, hemos probado que $\|\lambda u_n + \mu u\| \geq (\lambda+\mu)(1-\eta)$ para cada $\lambda, \mu \in (0, +\infty)$ y cada n natural.

Consideremos la sucesión

$$x_n = \beta\left(\frac{1}{1+a}u - \frac{a}{1+a}u_n\right) \overset{\tau}{\to} \frac{\beta}{1+a}u = x$$

con $a > 0$ arbitrario. Para $y = x/\|x\| = u/\|u\|$ tenemos

$$\|y - x_n\| = \left\|\left(\frac{1}{\|u\|} - \frac{\beta}{1+a}\right)u + \frac{\beta a}{1+a}u_n\right\| \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{\|u\|} - \frac{\beta}{1+a} + \frac{\beta a}{1+a}\right)(1-\eta) \geq \left(1 - \frac{\beta}{1+a} + \frac{\beta a}{1+a}\right)(1-\eta)$$

$$\|x\| = \frac{\beta}{1+a}\|u\| > \frac{\beta}{1+a}(1-\eta).$$

Por tanto
$$\frac{\|x_n - y\|}{1-\|x\|} \geq \frac{\left(1-\frac{\beta}{1+a}+\frac{\beta a}{1+a}\right)(1-\eta)}{1-\frac{\beta}{1+a}(1-\eta)}.$$
Haciendo tender $\eta \to 0$ y $a \to \infty$, deducimos que $\zeta_{X,\tau}(\beta) \geq 1+\beta$ para cualquier $\beta \in (0,1)$. ■

Como consecuencia del teorema anterior y del Teorema 1.2.3, se obtiene el siguiente resultado de punto fijo.

Corolario 2.4.2. *Sea τ una topología lineal sobre X tal que las funciones de tipo τ-nulo son τ-slsc y cada conjunto τ-secuencialmente compacto es τ-compacto. Si $\zeta_{X,\tau}(\beta) < 1+\beta$ para algún $\beta \in (0,1)$, entonces X tiene la τ-FPP.*

Observación 2.4.3.

1. El recíproco del Corolario 2.4.2 no es cierto. Por ejemplo, $X = L_1(\mu)$ cumple la clm-FPP (ver [46]) y, sin embargo, en el Teorema 2.1.1 vimos que $\zeta_{X,clm}(\beta) = 1+\beta$ para todo $\beta \in (0,1)$.

2. La estimación del Corolario 2.4.2 no da nuevos resultados de punto fijo para β próximo a 1. De hecho, si $\beta \geq (-1+\sqrt{5})/2$ se tiene
$$\frac{\beta}{1-\beta} \geq 1+\beta.$$
En este sentido, podemos decir que el Corolario 2.4.1 es útil para β próximo a 1 y el Corolario 2.4.2 para β próximo a 0. Sería interesante obtener resultados de punto fijo mediante el módulo $\zeta_{X,\tau}(\beta)$ para valores intermedios de β en espacios en los que $\tau CS(X) = 1$ y $R_\tau(X) = 2$.

Como consecuencia del Teorema 2.4.1 podemos obtener el siguiente resultado que relaciona el módulo infinito-dimensional con el módulo de τ-casi suavidad uniforme.

Corolario 2.4.3. *Si $\zeta_{X,\tau}(\beta) < 1+\beta$ para algún $\beta \in (0,1)$, en particular si $\zeta'_{X,\tau}(0) < 1$, entonces $b'_{X,\tau}(0) < 1$, donde $b_{X,\tau}(\cdot)$ denota el módulo de τ-casi suavidad uniforme de X.*

Demostración: Sea $0 < t < 1$, $x \in B_X$ y $\{x_n\}$ una sucesión τ-nula en B_X. Entonces, se tiene

$$\liminf_n \|x + tx_n\| \leq t \liminf_n \|x + x_n\| + 1 - t \leq tR_\tau(X) + 1 - t,$$

que implica

$$b'_{X,\tau}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{b_{X,\tau}(t)}{t} \leq R_\tau(X) - 1.$$

Si $\zeta_{X,\tau}(\beta) < 1 + \beta$ para algún $\beta \in (0,1)$, entonces $R_\tau(X) < 2$ y, como consecuencia de la desigualdad anterior, se deduce que $b'_{X,\tau}(0) < 1$. ■

2.5. Estimaciones del módulo universal infinito-dimensional en los espacios de Orlicz

En la Sección 2.1 se obtuvo el valor del módulo infinito-dimensional en los espacios $L_p(\mu)$ con respecto a la topología de la convergencia local en medida, poniéndose de manifiesto el importante papel desempeñado por las funciones convexas $t \mapsto t^p$ que los definen. Pues bien, siendo los espacios de Orlicz una generalización natural de los espacios $L_p(\mu)$, nuestro objetivo en esta sección es obtener una estimación del módulo infinito-dimensional en dichos espacios.

Para comenzar daremos algunas nociones y resultados básicos sobre espacios de Orlicz que nos serán de utilidad y que pueden encontrarse con más detalle en [63] y [46].

Definición 2.5.1. *Una* función de Orlicz *es una función $\Phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ que es convexa, continua, creciente, tal que $\Phi(0) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = +\infty$.*
Si $\Phi(x) = 0$ para algún $x > 0$, se dice que Φ es degenerada.
Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Una función de Orlicz Φ se dice que verifica la Δ_2-condición de regularidad si existe $K > 0$ tal que $\Phi(2x) \leq K\Phi(x)$ para $x \geq 0$ si $\mu(\Omega) = +\infty$ o bien $\Phi(2x) \leq K\Phi(x)$ para $x \geq x_0 \in (0, +\infty)$ si $\mu(\Omega) < +\infty$.

Independientemente de la medida de Ω, diremos que una función de Orlicz Φ satisface la Δ_2-condición si existe $K > 0$ tal que $\Phi(2x) \leq K\Phi(x)$ para cada $x \geq 0$. Si Φ es una función finita, Φ satisface la Δ_2-condición si y sólo si

$$\limsup_{x\to 0} \frac{\Phi(2x)}{\Phi(x)} < +\infty \quad y \quad \limsup_{x\to +\infty} \frac{\Phi(2x)}{\Phi(x)} < +\infty.$$

Definición 2.5.2. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y Φ una función de Orlicz.*

1. *El conjunto de todas las funciones medibles $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ tales que*

$$\int_\Omega \Phi(\rho|f|)d\mu < +\infty \quad \text{para algún } \rho > 0$$

   con la norma

$$N_\Phi(f) = \inf \left\{ \rho > 0 : \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f|}{\rho}\right) d\mu \leq 1 \right\}$$

   es un espacio de Banach al que se denomina espacio de Orlicz *$L_\Phi(\mu)$.*

2. *El subconjunto $H_\Phi(\mu)$ formado por todas aquellas funciones medibles $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ tales que*

$$\int_\Omega \Phi(\rho|f|)d\mu < +\infty \quad \text{para cada } \rho > 0$$

   es un subespacio de $L_\Phi(\mu)$, que coincide con $L_\Phi(\mu)$ cuando Φ es Δ_2-regular.

En lo que sigue vamos a suponer que (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida σ-finita y Φ es una función de Orlicz no degenerada finita cumpliendo la Δ_2-condición. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\Phi(1) = 1$. De hecho, si $\Phi(1) \neq 1$, definimos $\lambda_0 = \Phi^{-1}(1)$ y consideramos la aplicación $\Phi_1(x) = \Phi(\lambda_0 x)$. Es sencillo comprobar que Φ_1 es una función de Orlicz no degenerada, que satisface la Δ_2-condición y $\Phi_1(1) = 1$. A lo largo de esta sección, para simplificar la notación, vamos a denotar Φ^{-1} por Ψ y escribiremos $I_\Phi(f)$ en lugar de $\int_\Omega \Phi(|f|)d\mu$ si dicha integral está bien definida.

En [46] se define una función $a(\cdot)$ (inspirada en la función de expansión definida por T. Domínguez Benavides y R.J. Rodríguez en [33]) que permite obtener información sobre la norma de una función $f \in L_\Phi(\mu)$ a través de la integral que define dicha norma. Recordamos a continuación su definición y propiedades fundamentales.

Proposición 2.5.1. [46] *La función $a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida como*

$$a(\delta) = \operatorname{ínf}\left\{\frac{\Psi(t)}{\Psi(\delta t)} : t > 0\right\}$$

satisface las siguientes propiedades:

1. *$a(\cdot)$ es una función decreciente, continua a la izquierda y $\lim_{\delta\to 1^-} a(\delta) = 1$.*

2. *$a(\delta) > 1$ si $\delta < 1$.*

3. *$a(\delta\delta') \geq a(\delta)a(\delta')$ si $\delta, \delta' \in (0, +\infty)$. En particular, $a(\cdot)$ es estrictamente decreciente.*

4. *$\lim_{\delta\to 0} a(\delta) = +\infty$.*

5. *Si $\delta, s \in (0, +\infty)$, entonces $\Phi(s/a(\delta)) \geq \delta\Phi(s)$.*

6. *Si $f \in L_\Phi(\mu)$ y $I_\Phi(f) \leq \delta$, entonces $N_\Phi(f) \leq 1/a(\delta)$.*

En [46] también se define la función $a^{-1}(\cdot)$ similar a la definida en [33], como vemos en la siguiente proposición.

Proposición 2.5.2. *La función $a^{-1} : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ definida por*

$$a^{-1}(\theta) = \sup\{\delta > 0 : a(\delta) > \theta\}$$

satisface las siguientes propiedades:

1. *$a^{-1}(a(\delta)) = \delta$ para cualquier $\delta \in (0, +\infty)$.*

2. *$a(a^{-1}(\theta)) \geq \theta$ para cualquier $\theta \in (0, +\infty)$.*

3. $a^{-1}(\theta\theta') \geq a^{-1}(\theta)a^{-1}(\theta')$ *para cada* $\theta, \theta' \in (0, +\infty)$.

4. $\Phi(s/\theta) \geq a^{-1}(\theta)\Phi(s)$ *para cada* $\theta, s \in (0, +\infty)$.

Inspirados por las definiciones anteriores definimos las siguientes funciones (que serán de utilidad para estimar el valor del módulo infinito-dimensional en los espacios de Orlicz) y estudiamos sus propiedades fundamentales.

Proposición 2.5.3. *La función* $b : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$b(\delta) = \sup\left\{\frac{\Psi(t)}{\Psi(\delta t)} : t > 0\right\}$$

satisface las siguientes propiedades:

1. $b(\delta) \in [1, 1/\delta]$ *si* $\delta \in (0, 1]$.

2. $b(\cdot)$ *es una función decreciente.*

3. $b(\cdot)$ *es una función continua a la derecha.*

4. $b(1) = 1$.

5. $b(\delta) > 1$ *si* $\delta < 1$.

6. $\lim_{\delta \to 0} b(\delta) = +\infty$.

7. $\Phi(s/b(\delta)) \leq \delta\Phi(s)$ *para cada* $\delta, s \in (0, +\infty)$.

8. *Si* $f \in L_\Phi(\mu)$ *y* $I_\Phi(f) \geq \delta$, *entonces* $N_\Phi(f) \geq 1/b(\delta)$.

9. $b(\delta\delta') \leq b(\delta)b(\delta')$ *para cada* $\delta, \delta' \in (0, 1]$.

Demostración:

1. Sea $\delta \in (0,1]$. Como $\Psi(\cdot)$ es creciente y cóncava, $\Psi(t) \geq \Psi(\delta t) \geq \delta\Psi(t)$ para todo $t > 0$. En consecuencia
$$1 \leq \frac{\Psi(t)}{\Psi(\delta t)} \leq \frac{1}{\delta} \qquad \text{para todo } t > 0$$
y, por tanto, $1 \leq b(\delta) \leq 1/\delta$.

2. Sean $0 < \delta_1 < \delta_2$. Como $\Psi(\cdot)$ es estrictamente creciente, se tiene $\Psi(\delta_1 t) < \Psi(\delta_2 t)$ para todo $t > 0$ y, por tanto,
$$\frac{\Psi(t)}{\Psi(\delta_1 t)} > \frac{\Psi(t)}{\Psi(\delta_2 t)} \quad \text{para todo } t > 0,$$
que implica $b(\delta_1) \geq b(\delta_2)$.

3. Sea $\delta_0 \in (0, +\infty)$. Sea $l = \lim_{\delta \to \delta_0^+} b(\delta)$. Como $b(\cdot)$ es decreciente, se tiene que $l \leq b(\delta_0)$. Por otra parte, para todo $\delta > \delta_0$ y $t > 0$ se tiene
$$\frac{\Psi(t)}{\Psi(\delta t)} \leq b(\delta) \leq l.$$
Así, la continuidad de $\Psi(\cdot)$ implica que
$$\frac{\Psi(t)}{\Psi(\delta_0 t)} \leq l \quad \text{para todo } t > 0$$
y, por tanto, $b(\delta_0) \leq l$.

4. Obvio.

5. Sea $\delta < 1$. Por la Proposición 2.5.1(2), se tiene $a(\delta) > 1$. Como $b(\delta) \geq a(\delta)$, se tiene que $b(\delta) > 1$.

6. Como $\lim_{\delta \to 0} a(\delta) = +\infty$ y $b(\delta) \geq a(\delta)$ para todo $\delta \in (0, +\infty)$, deducimos que $\lim_{\delta \to 0} b(\delta) = +\infty$.

7. Si $s = 0$ la desigualdad es obvia, teniendo en cuenta que $\Phi(0) = 0$. Sea $s \in (0, +\infty)$. Entonces para $t = \Phi(s) \in (0, +\infty)$ se tiene

$$b(\delta) \geq \frac{\Psi(t)}{\Psi(\delta t)} = \frac{s}{\Psi(\delta\Phi(s))}$$

que implica $\Psi(\delta\Phi(s)) \geq s/b(\delta)$ y, por tanto, $\Phi(s/b(\delta)) \leq \delta\Phi(s)$.

8. Supongamos que $I_\Phi(f) \geq \delta$. Aplicando la propiedad (7) obtenemos

$$\int_\Omega \Phi(b(\delta)|f|)d\mu \geq \frac{1}{\delta}\int_\Omega \Phi(|f|)d\mu = \frac{1}{\delta}I_\Phi(f) \geq 1,$$

de donde se deduce $N_\Phi(f) \geq 1/b(\delta)$.

9. Sean $\delta, \delta' \in (0, 1]$.

$$b(\delta\delta') = \sup\left\{\frac{\Psi(t)}{\Psi(\delta\delta' t)} : t > 0\right\} = \sup\left\{\frac{\Psi(t)}{\Psi(\delta t)}\frac{\Psi(\delta t)}{\Psi(\delta\delta' t)} : t > 0\right\} \leq$$

$$\leq \sup\left\{\frac{\Psi(t)}{\Psi(\delta t)} : t > 0\right\} \sup\left\{\frac{\Psi(\delta t)}{\Psi(\delta\delta' t)} : t > 0\right\} \leq$$

$$\leq b(\delta)\sup\left\{\frac{\Psi(t)}{\Psi(\delta' t)} : t > 0\right\} = b(\delta)b(\delta').$$

■

Proposición 2.5.4. *La función $b^{-1} : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ definida por*

$$b^{-1}(\theta) = \sup\{\delta > 0 : b(\delta) > \theta\}$$

satisface las siguientes propiedades:

1. *$b^{-1}(b(\delta)) = \delta$ para todo $\delta \in (0, +\infty)$.*

2. *$b(b^{-1}(\theta)) \leq \theta$ para cualquier $\theta \in (0, +\infty)$.*

3. *$a^{-1}(\theta) \leq b^{-1}(\theta)$ para cada $\theta \in (0, +\infty)$.*

4. $b^{-1}(\theta) \leq 1/\theta$ *si* $\theta \in [1, +\infty)$.

5. $\Phi(s/\theta) \leq b^{-1}(\theta)\Phi(s)$ *para* $s, \theta \in (0, +\infty)$.

6. $b^{-1}(\theta\theta') \leq b^{-1}(\theta)b^{-1}(\theta')$ *para* $\theta, \theta' \in (0, +\infty)$.

Demostración: Las propiedades (1), (2) y (3) son obvias.

4. Sea $\theta \in [1, +\infty)$. Si $\delta > 1$, entonces $b(\delta) \leq b(1) = 1 \leq \theta$. Sea $\delta \in (0, 1]$ tal que $b(\delta) > \theta$. Entonces, aplicando la Proposición 2.5.3(1), sabemos que $b(\delta) \leq 1/\delta$, por tanto se tiene que $1/\delta > \theta$. Así pues, $b^{-1}(\theta) \leq 1/\theta$.

5. Sean $s, \theta \in (0, +\infty)$. Sea $\delta = b^{-1}(\theta) \in (0, +\infty)$, entonces aplicando la Proposición 2.5.3(7) y la propiedad (2) tenemos
$$b^{-1}(\theta)\Phi(s) \geq \Phi\left(\frac{s}{b(b^{-1}(\theta))}\right) \geq \Phi\left(\frac{s}{\theta}\right).$$

6. Sean $\theta, \theta' \in (0, +\infty)$. Sean $\delta = b^{-1}(\theta)$, $\delta' = b^{-1}(\theta')$. Entonces, se tiene
$$b(b^{-1}(\theta)b^{-1}(\theta')) \leq b(b^{-1}(\theta))b(b^{-1}(\theta')) \leq \theta\theta'.$$
Como $b^{-1}(\cdot)$ es decreciente, obtenemos $b^{-1}(\theta)b^{-1}(\theta') \geq b^{-1}(\theta\theta')$.

■

En la Sección 2.1 vimos que el módulo infinito-dimensional de cualquier espacio de Banach verifica $\zeta_{X,\tau}(\beta) \leq 1/(1-\beta)$ para todo $\beta \in (0, 1)$. En el siguiente teorema vamos a mostrar que dicha estimación puede mejorarse en el caso de los espacios de Orlicz $L_\Phi(\mu)$ con la topología de la convergencia local en medida.

Teorema 2.5.1. *Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida* σ*-finita y* Φ *una función de Orlicz no degenerada que satisface la* Δ_2*-condición y* $\Phi(1) = 1$. *Entonces, para cada* $\beta \in (0, 1)$*, se tiene*
$$\zeta_{L_\Phi(\mu),clm}(\beta) \leq \sup_{A \in (0,\beta)} \frac{1 + \frac{\beta}{1-A}}{a\left(b^{-1}\left(\frac{1+\beta-A}{\beta}\right)\left(1 - a^{-1}\left(\frac{\beta}{A}\right)\right) + b^{-1}\left(\frac{1+\beta-A}{1-A}\right)\right)}.$$

Demostración: Sea $\{f_n\} \subset B_\beta$ una sucesión clm-convergente a f con $\liminf_n N_\Phi(f_n - f) \leq \beta$ y $g = f/N_\Phi(f)$. Para simplificar la notación, denotamos $A = N_\Phi(f)$. Entonces $I_\Phi(f/A) = 1$ y, por tanto,

$$I_\Phi\left(\frac{f}{\beta}\right) \geq a^{-1}\left(\frac{\beta}{A}\right) I_\Phi\left(\frac{f}{A}\right) = a^{-1}\left(\frac{\beta}{A}\right).$$

Como $\{f_n - f\}$ es clm-nula, usando ([46], Lema 4.5) podemos suponer que

$$\operatorname{sop}(f_n - f) \cap \operatorname{sop} f = \emptyset.$$

Así pues, obtenemos las siguientes desigualdades

$$1 \geq I_\Phi\left(\frac{f_n}{\beta}\right) = I_\Phi\left(\frac{f_n - f}{\beta}\right) + I_\Phi\left(\frac{f}{\beta}\right) \geq I_\Phi\left(\frac{f_n - f}{\beta}\right) + a^{-1}\left(\frac{\beta}{A}\right)$$

$$I_\Phi\left(\frac{f_n - f}{1+\beta-A}\right) \leq b^{-1}\left(\frac{1+\beta-A}{\beta}\right) I_\Phi\left(\frac{f_n - f}{\beta}\right) \leq$$

$$\leq b^{-1}\left(\frac{1+\beta-A}{\beta}\right)\left(1 - a^{-1}\left(\frac{\beta}{A}\right)\right)$$

$$I_\Phi\left(\frac{f-g}{1+\beta-A}\right) \leq b^{-1}\left(\frac{1+\beta-A}{1-A}\right) I_\Phi\left(\frac{f-g}{1-A}\right) = b^{-1}\left(\frac{1+\beta-A}{1-A}\right).$$

Por consiguiente, como $\operatorname{sop}(f_n - f) \cap \operatorname{sop}(f-g) = \emptyset$, tenemos

$$I_\Phi\left(\frac{f_n - g}{1+\beta-A}\right) = I_\Phi\left(\frac{f_n - f}{1+\beta-A}\right) + I_\Phi\left(\frac{f-g}{1+\beta-A}\right) \leq$$

$$\leq b^{-1}\left(\frac{1+\beta-A}{\beta}\right)\left(1 - a^{-1}\left(\frac{\beta}{A}\right)\right) + b^{-1}\left(\frac{1+\beta-A}{1-A}\right).$$

Usando la Proposición 2.5.1(6) obtenemos

$$N_\Phi(f_n - f) \leq \frac{1+\beta-A}{a\left(b^{-1}\left(\frac{1+\beta-A}{\beta}\right)\left(1 - a^{-1}\left(\frac{\beta}{A}\right)\right) + b^{-1}\left(\frac{1+\beta-A}{1-A}\right)\right)}.$$

Por tanto,

$$\frac{N_\Phi(f_n - g)}{1 - N_\Phi(f)} \leq \frac{1+\beta-A}{(1-A)a\left(b^{-1}\left(\frac{1+\beta-A}{\beta}\right)\left(1 - a^{-1}\left(\frac{\beta}{A}\right)\right) + b^{-1}\left(\frac{1+\beta-A}{1-A}\right)\right)}$$

y de ahí podemos deducir la estimación deseada. ∎

Observación 2.5.1. 1. La estimación obtenida mejora la cota $1/(1-\beta)$.

2. En los espacios $L_p(\mu)$ con la topología de la convergencia local en medida y en los espacios ℓ_p con la topología débil ($1 < p < +\infty$) la estimation es óptima, ya que en dichos espacios se tiene $\Phi(x) = x^p$, $\Psi(t) = t^{1/p}$,

$$a(\delta) = b(\delta) = \frac{1}{\delta^{1/p}} \text{ para cada } \delta > 0$$

$$a^{-1}(\theta) = b^{-1}(\theta) = \frac{1}{\theta^p} \text{ para cada } \theta > 0$$

y mediante cálculos elementales se obtiene

$$\sup_{A\in(0,\beta)} \frac{1+\frac{\beta}{1-A}}{a\left(b^{-1}\left(\frac{1+\beta-A}{\beta}\right)\left(1-a^{-1}\left(\frac{\beta}{A}\right)\right)+b^{-1}\left(\frac{1+\beta-A}{1-A}\right)\right)} =$$

$$= \frac{(\beta^p + (1-\beta^q)^{p-1})^{1/p}}{(1-\beta^q)^{1/q}} = \zeta_{L_p(\mu),clm}(\beta) = \zeta_{\ell_p}(\beta).$$

Capítulo 3

Teoremas de Punto Fijo para Aplicaciones Multivaluadas No Expansivas

En 1969 S.B. Nadler [69] extendió el Principio de Contracción de Banach para aplicaciones multivaluadas contractivas en espacios métricos completos. Desde entonces algunos otros teoremas de punto fijo clásicos para aplicaciones univaluadas también han podido ser extendidos para aplicaciones multivaluadas (ver Sección 1.3). Sin embargo, muchos problemas permanecen abiertos, por ejemplo, se desconoce si es posible extender el conocido Teorema de Kirk [49], es decir, ¿tienen la propiedad del punto fijo (FPP) para aplicaciones multivaluadas no expansivas los espacios de Banach reflexivos con estructura normal?

Como hay diversas propiedades geométricas de los espacios de Banach que implican reflexividad y estructura normal (ver Sección 1.1), es natural considerar el siguiente problema: ¿Dichas propiedades implican la FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas?

En particular, sería interesante determinar si los espacios casi uniformemente convexos y los espacios uniformemente suaves cumplen la FPP para aplicaciones multivaluadas. Estas cuestiones fueron formuladas explícitamente por H.K. Xu en 2000 (ver [82], Problemas Abiertos).

En 2004 T. Domínguez Benavides y P. Lorenzo [32] resolvieron el problema de los espacios casi uniformemente convexos al probar que cada aplicación $T : C \to KC(C)$ no expansiva con valores compactos y convexos tiene un punto fijo, siendo C un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach X tal que $\varepsilon_\beta(X) < 1$ (ver Teorema 1.3.6). En este capítulo vamos a probar que los espacios uniformemente suaves cumplen también la FPP para aplicaciones multivaluadas. Más aún, probaremos dicho resultado para la clase de los espacios de Banach X que cumplen $\rho'_X(0) < 1/2$, que incluye a los espacios uniformemente suaves (recuérdese que X es uniformemente suave si y sólo si $\rho'_X(0) = 0$). Damos así una respuesta afirmativa al Problema Abierto 1 planteado por H.K. Xu en [82].

En la Sección 3.1 se define una condición que será nuestra principal herramienta para garantizar la existencia de punto fijo: la $(\mathrm{DL})_\alpha$-condición con respecto a una topología τ ($\tau(\mathrm{DL})_\alpha$-condición). Se prueba que dicha condición implica τ-estructura normal y la τ-propiedad del punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas. A partir de aquí, nuestro objetivo será mostrar que ciertas propiedades que implican algún tipo de estructura normal también garantizan que el espacio cumple la $\tau(\mathrm{DL})_\alpha$-condición y, por tanto, la τ-FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas.

En la Sección 3.2 usaremos el módulo de cuadratura para obtener un resultado de punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas. Concretamente, veremos que la condición $\xi_X(\beta) < 1/(1-\beta)$ para algún $\beta \in (0,1)$, que implica estructura normal uniforme, también implica la $(\mathrm{DL})_\alpha$-condición (esto es, la $(\mathrm{DL})_\alpha$-condición con respecto a la topología débil). Como consecuencia se deduce que la condición $\rho'_X(0) < 1/2$ implica la $(\mathrm{DL})_\alpha$-condición y, por tanto, la propiedad del punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas.

En la Sección 3.3 presentamos tres condiciones equivalentes en las que intervienen el módulo infinito-dimensional, la característica de τ-casi convexidad uniforme y el módulo de Opial, que implican τ-estructura normal uniforme y probamos que las mismas condiciones también implican la $\tau(\mathrm{DL})_\alpha$-condición y, por tanto, la τ-FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas. En particular se prueba que la característica de convexidad no compacta $\varepsilon_{\beta,\tau}(X)$ puede ser reemplazada en ([32], Teorema 3.5) por la característica $\Delta_{0,\tau}(X)$ (que es menor que $\varepsilon_{\beta,\tau}(X)$), con objeto de obtener un mejor resultado de punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas. Además, mostramos un ejemplo de un espacio X tal que $\Delta_{0,\tau}(X) < 1$ pero $\varepsilon_{\beta,\tau}(X) \geq 1$.

En la Sección 3.4 estudiamos la permanencia bajo renormamiento de las propiedades anteriores que implican la $\tau(\mathrm{DL})_\alpha$-condición y deducimos resultados de estabilidad para la τ-FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas. Cabe resaltar que, en algunos casos particulares, las cotas obtenidas para la τ-FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas coinciden con las cotas de τ-estructura normal uniforme.

En la Sección 3.5 mostramos algunos resultados de punto fijo para aplicaciones multivaluadas cuyo rango no está contenido en su dominio. Para ello, lo primero que hacemos es probar que, bajo ciertas condiciones adicionales, la $\tau(\mathrm{DL})_\alpha$-condición también implica la τ-propiedad del punto fijo para este tipo de aplicaciones. A continuación aplicamos dicho resultado con el fin de generalizar algunos resultados conocidos para aplicaciones multivaluadas cuyo rango no está contenido en su dominio. En particular, mejoramos algunos resultados dados en [31] y [20], evitando la hipótesis de separabilidad.

3.1. La $(\mathrm{DL})_\alpha$-condición con respecto a una topología τ

S. Dhompongsa, A. Kaewcharoen y A. Kaewkhao [20] observaron que la principal herramienta usada en [30] y [32] para obtener resultados de punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas, es una relación entre el radio de Chebyshev del centro asintótico de una sucesión acotada y el radio asintótico de dicha sucesión.

Dicha relación da lugar a un método iterativo que reduce en cada paso el valor del radio de Chebyshev para una cadena de centros asintóticos. Como consecuencia de tal observación, en [20] definen la condición de Domínguez-Lorenzo ((DL)-condición) y prueban que dicha condición implica estructura normal débil y la existencia de punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas.

En [27] generalizamos la (DL)-condición para una topología lineal τ tal que los conjuntos τ-secuencialmente compactos son τ-compactos y las funciones de tipo τ-nulo son τ-secuencialmente semicontinuas inferiormente (τ-slsc).

Definición 3.1.1. *Un espacio de Banach X verifica la (DL)-condición con respecto a una topología τ (τ(DL)-condición) si existe $\lambda \in [0,1)$ tal que para cada subconjunto τ-secuencialmente compacto y convexo C de X y para cada sucesión acotada $\{x_n\}$ en C regular con respecto a C, se tiene*

$$r_C(A(C,\{x_n\})) \leq \lambda r(C,\{x_n\}).$$

Usando los argumentos que aparecen en ([32], Teorema 3.5), probamos en [27] que la τ(DL)-condición implica la τ-FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas con valores compactos y convexos.

Teorema 3.1.1. ([27], Teorema 7) *Sea C un subconjunto no vacío, cerrado, acotado, convexo, τ-secuencialmente compacto y separable de X y $T : C \to KC(C)$ una aplicación no expansiva. Si X satisface la τ(DL)-condición, entonces T tiene un punto fijo.*

Cuando τ es la topología débil y C es un subconjunto convexo y débil compacto de X, la condición de separabilidad no es necesaria. En efecto, cuando T es una aplicación cuyo rango está contenido en su dominio podemos construir un subconjunto T-invariante, separable, cerrado y convexo $\tilde{C}$ de C de la siguiente manera (ver [40] y [54]). Sea $x_0 \in C$, basta considerar

$$\tilde{C} := \overline{\cup_n C_n}$$

con

$$C_0 := \{x_0\}$$

$$C_n := \overline{co}(C_{n-1} \cup TC_{n-1}) \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Teniendo en cuenta que los conjuntos convexos y cerrados en norma son débilmente cerrados, se deduce que $\tilde{C}$ es también débil compacto.
Sin embargo, cuando τ es una topología arbitraria, los conjuntos convexos y cerrados en norma no son, en general, τ-cerrados (por ejemplo, cuando τ es la topología débil estrella, los conjuntos convexos y cerrados en norma no son w^*-cerrados). A pesar de ello, en el caso de una topología arbitraria, veremos a continuación que la hipótesis de separabilidad puede evitarse si usamos ultra redes en lugar de sucesiones. Por esta razón vamos a introducir la $\tau(\mathrm{DL})_\alpha$-condición modificando ligeramente la definición de la τ(DL)-condición considerando ultra redes en lugar de sucesiones.

A lo largo de este capítulo vamos a trabajar con centros asintóticos. Sabemos que los centros asintóticos son conjuntos que pueden ser vacíos. No obstante, en el siguiente lema veremos que, bajo ciertas condiciones, tendremos garantizado que los centros asintóticos con los que vamos a trabajar son no vacíos. Recordemos que si $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ es una red acotada en norma y τ-nula en X, la función de tipo τ-nulo asociada a $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ se define como $\Phi_{\{x_\alpha\}}(x) = \limsup_\alpha \|x_\alpha - x\|$.

Lema 3.1.1. *1. Sea τ una topología lineal sobre X tal que las funciones de tipo τ-nulo son τ-semicontinuas inferiormente (τ-lsc), esto es, $\Phi^{-1}((-\infty, a])$ es τ-cerrado para todo $a \in \mathbb{R}$. Sea C un subconjunto de X no vacío y τ-compacto y $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ una red acotada en C τ-convergente a un punto x. Entonces $A(C, \{x_\alpha\})$ es no vacío y τ-compacto.*

2. Sea τ una topología lineal sobre X tal que los conjuntos τ-secuencialmente compactos son τ-compactos y las funciones de tipo τ-nulo son τ-secuencialmente semicontinuas inferiormente (τ-slsc), esto es, $\Phi(y) \le \liminf_n \Phi(y_n)$ para cada sucesión $\{y_n\}$ τ-convergente a un punto $y \in X$. Sea C un subconjunto de X

no vacío y τ-secuencialmente compacto y $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ una red acotada en C τ-convergente a un punto x. Entonces $A(C, \{x_\alpha\})$ es no vacío y τ-compacto.

Demostración: Denotemos $r = r(C, \{x_\alpha\})$ y

$$A_m = \left\{ z \in C : \limsup_\alpha \|x_\alpha - z\| \leq r + \frac{1}{m} \right\} \quad \text{para } m \in \mathbb{N}.$$

Es obvio que $A(C, \{x_\alpha\}) = \bigcap_{m=1}^\infty A_m$ y $A_m \neq \emptyset$ para cada m. Además, vamos a probar que A_m es τ-compacto para cada m en ambos casos.

1. Como la función de tipo τ-nulo $\Phi_{\{x_\alpha - x\}}(\cdot)$ es τ-lsc, se tiene que

$$\Phi^{-1}_{\{x_\alpha - x\}}\left((-\infty, r + 1/m]\right)$$

   es τ-cerrado. Así pues, A_m es τ-cerrado y, por tanto, τ-compacto.

2. Sea $\{y_n\}$ una sucesión en A_m τ-convergente a un punto y. Entonces $y \in C$. Usando que las funciones de tipo τ-nulo son τ-slsc, se tiene

$$\limsup_\alpha \|x_\alpha - y\| \leq \liminf_n \limsup_\alpha \|x_\alpha - y_n\| \leq r + \frac{1}{m},$$

   lo cual implica que $y \in A_m$. Así pues, A_m es τ-secuencialmente cerrado y, por tanto, A_m es τ-secuencialmente compacto y τ-compacto.

Como C es τ-compacto y $\{A_m\}_m$ es una familia de subconjuntos τ-compactos de C con la propiedad de intersección finita, entonces $\bigcap_{m=1}^\infty A_m \neq \emptyset$ y, por tanto, A es no vacío y τ-compacto. ■

Así pues, con el fin de asegurar que los centros asintóticos de las redes con las que vamos a trabajar son no vacíos, a lo largo de esta sección X será un espacio de Banach y τ una topología lineal sobre X tal que o bien las funciones de tipo τ-nulo son τ-lsc o bien los conjuntos τ-secuencialmente compactos son τ-compactos y las funciones de tipo τ-nulo son τ-slsc.

Definición 3.1.2. *Se dice que un espacio de Banach X verifica la (DL)$_\alpha$-condición con respecto a la topología τ (τ(DL)$_\alpha$-condición) si existe $\lambda \in [0,1)$ tal que para cada subconjunto τ-compacto y convexo C de X y para cada ultra red acotada $\{x_\alpha\}$ en C se tiene*

$$r_C(A(C,\{x_\alpha\})) \leq \lambda r(C,\{x_\alpha\}).$$

Cuando τ es la topología débil escribimos (DL)$_\alpha$-condición en lugar de w(DL)$_\alpha$-condición para simplificar la notación.

En la siguiente proposición vamos a ver que, bajo ciertas condiciones adicionales, la τ(DL)$_\alpha$-condición es más fuerte que la τ(DL)-condición.

Proposición 3.1.1. *Sea X un espacio de Banach tal que cada subconjunto τ-secuencialmente compacto es separable y τ-compacto. Si X verifica la τ(DL)$_\alpha$-condición, entonces X verifica la τ(DL)-condición.*

Demostración: Sea C un subconjunto τ-secuencialmente compacto y convexo de X y $\{x_n\}$ una sucesión acotada en C que es regular con respecto a C. Sea $\{n_\alpha\}$ una subred universal de la sucesión de números naturales $\{n\}$, entonces

$$\lim_n \|x_n - x\| = \lim_\alpha \|x_{n_\alpha} - x\|$$

para cada $x \in C$, lo cual implica

$$r(C,\{x_n\}) = r(C,\{x_{n_\alpha}\}) \ \text{ y } \ A(C,\{x_n\}) = A(C,\{x_{n_\alpha}\}).$$

Como X verifica la τ(DL)$_\alpha$-condición, se tiene

$$r_C(A(C,\{x_n\})) = r_C(A(C,\{x_{n_\alpha}\})) \leq \lambda r(C,\{x_{n_\alpha}\}) = \lambda r(C,\{x_n\})$$

para algún $\lambda \in [0,1)$. ■

A continuación vamos a probar que la τ(DL)$_\alpha$-condición implica τ-estructura normal. Nótese que este resultado puede deducirse como consecuencia de la proposición anterior y del hecho de que la τ(DL)-condición implica τ-estructura normal (ver [27], Teorema 3). No obstante, incluimos la prueba aquí.

Teorema 3.1.2. *Sea X un espacio de Banach tal que cada subconjunto τ-secuencialmente compacto es separable y τ-compacto. Si X satisface la $\tau(DL)_\alpha$-condición, entonces X tiene τ-NS.*

Demostración: Supongamos que X no tiene τ-NS. Entonces, existe un subconjunto acotado, convexo, τ-secuencialmente compacto y diametral C de X y una sucesión $\{x_n\}$ en C tal que

$$\lim_n \|x_n - x\| = \operatorname{diam}(\{x_n\}) > 0$$

para cada $x \in C$ ([76], Proposición 5.3). Sea $\{n_\alpha\}$ una subred universal de la sucesión de números naturales $\{n\}$, entonces

$$\lim_\alpha \|x_{n_\alpha} - x\| = \lim_n \|x_n - x\| = \operatorname{diam}(\{x_n\})$$

para cada $x \in C$, lo cual implica que

$$r(C, \{x_{n_\alpha}\}) = r(C, \{x_n\}) = \operatorname{diam}(\{x_n\})$$

$$A(C, \{x_{n_\alpha}\}) = A(C, \{x_n\}) = C$$

$$r_C(A(C, \{x_{n_\alpha}\})) = r_C(C) = \operatorname{diam}(C).$$

Como X verifica la $\tau(\mathrm{DL})_\alpha$-condición, existe $\lambda \in [0, 1)$ tal que

$$\operatorname{diam}(C) = r_C(A(C, \{x_{n_\alpha}\})) \leq \lambda r(C, \{x_{n_\alpha}\}) = \lambda \operatorname{diam}(\{x_n\}) < \operatorname{diam}(C)$$

que es una contradicción.

■

Vamos a ver a continuación que la $\tau(\mathrm{DL})_\alpha$-condición implica la τ-propiedad del punto fijo para aplicaciones no expansivas con valores compactos y convexos. Para ello necesitamos el siguiente resultado previo.

Teorema 3.1.3. ([80], Teorema 3) *Sea C un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Banach X, $T : C \to KC(C)$ una contracción multivaluada y D un subconjunto acotado, cerrado y convexo de C. Si $Tx \cap \overline{I_D(x)} \neq \emptyset$ para cada $x \in D$, entonces T tiene un punto fijo en D.*

En [31] T. Domínguez Benavides y P. Lorenzo dieron un resultado de punto fijo para aplicaciones cuyo rango no está contenido en su dominio, usando una relación entre el radio de Chebyshev del centro asintótico de una ultra red y el radio asintótico de dicha ultra red. Usando un procedimiento inductivo análogo al seguido en la prueba de ([31], Teorema 3.4) vamos a probar el siguiente resultado que constituye la pieza clave del capítulo.

Teorema 3.1.4. *Sea C un subconjunto no vacío, τ-compacto, cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach X y $T : C \to KC(C)$ una aplicación no expansiva. Si X verifica la τ(DL)$_\alpha$-condición, entonces T tiene un punto fijo.*

Demostración: Fijado $x_0 \in C$, para cada $n \geq 1$ definimos $T_n : C \to KC(C)$ por

$$T_n x = \frac{1}{n}x_0 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)Tx, \quad x \in C.$$

Como T_n es $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$-contractiva, existe un punto fijo x_n de T_n. Por tanto, tenemos una sucesión $\{x_n\} \subset C$ tal que $\lim_n d(x_n, Tx_n) = 0$. Sea $\{n_\alpha\}$ una subred universal de la sucesión de números naturales $\{n\}$.

Denotamos $A = A(C, \{x_{n_\alpha}\})$. Comenzamos probando que

$$Tx \cap A \neq \emptyset \ \text{ for every } x \in A.$$

De hecho, la compacidad de Tx_{n_α} implica que, para cada n_α, podemos tomar $y_{n_\alpha} \in Tx_{n_\alpha}$ tal que

$$\|x_{n_\alpha} - y_{n_\alpha}\| = d(x_{n_\alpha}, Tx_{n_\alpha}).$$

Como Tx es compacto, para cada $x \in A$, podemos encontrar $z_{n_\alpha} \in Tx$ tal que

$$\|y_{n_\alpha} - z_{n_\alpha}\| = d(y_{n_\alpha}, Tx) \leq H(Tx_{n_\alpha}, Tx) \leq \|x_{n_\alpha} - x\|.$$

Sea $z = \lim_\alpha z_{n_\alpha} \in Tx$, entonces se tiene

$$\lim_\alpha \|x_{n_\alpha} - z\| = \lim_\alpha \|y_{n_\alpha} - z_{n_\alpha}\| \leq \lim_\alpha \|x_{n_\alpha} - x\| = r(C, \{x_{n_\alpha}\}).$$

Así pues, $z \in Tx \cap A$. Por tanto, la aplicación $T : A \to KC(C)$ es no expansiva y verifica $Tx \cap A \neq \emptyset$ para cada $x \in A$. Más aún, como X cumple la $\tau(\mathrm{DL})_\alpha$-condición, se obtiene

$$r_C(A) \leq \lambda r(C, \{x_{n_\alpha}\})$$

para algún $\lambda < 1$.

Fijado $x_1 \in A$, para cada $n \geq 1$ consideramos la contracción $T_n^1 : A \to KC(C)$ definida por

$$T_n^1 x = \frac{1}{n} x_1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) Tx, \quad x \in A.$$

Como T_n^1 es $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$-contractiva y $T_n^1 x \cap A \neq \emptyset$ para cada $x \in A$, del Teorema 3.1.3, se deduce que T_n^1 tiene un punto fijo $x_n^1 \in A$. Así, $\lim_n d(x_n^1, Tx_n^1) = 0$. Igual que antes podemos probar que $Tx \cap A_1 \neq \emptyset$ para cada $x \in A_1 := A(C, \{x_{n_\alpha}^1\})$ y

$$r_C(A_1) \leq \lambda r(C, \{x_{n_\alpha}^1\}) \leq \lambda r_C(A).$$

Por inducción, para cada número natural $m \geq 1$ podemos encontrar una sucesión $\{x_n^m\}_n$ en $A_{m-1} := A(C, \{x_{n_\alpha}^{m-1}\})$ tal que $\lim_n d(x_n^m, Tx_n^m) = 0$. Considerando la ultra red $\{x_{n_\alpha}^m\}_\alpha$ construimos el conjunto $A_m := A(C, \{x_{n_\alpha}^m\})$ y deducimos que

$$r_C(A_m) \leq \lambda^m r_C(A).$$

Elegimos $x_m \in A_m$. Vamos a probar que $\{x_m\}_m$ es una sucesión de Cauchy. Para cada $m \geq 1$ y para cualquier n_α, se tiene

$$\|x_{m-1} - x_m\| \leq \|x_{m-1} - x_{n_\alpha}^m\| + \|x_{n_\alpha}^m - x_m\| \leq \mathrm{diam}(A_{m-1}) + \|x_{n_\alpha}^m - x_m\|.$$

Tomando límite obtenemos

$$\|x_{m-1} - x_m\| \leq \mathrm{diam}(A_{m-1}) + \lim_\alpha \|x_{n_\alpha}^m - x_m\| = \mathrm{diam}(A_{m-1}) + r(C, \{x_{n_\alpha}^m\}) \leq$$

$$\leq 2r_C(A_{m-1}) + r_C(A_{m-1}) = 3r_C(A_{m-1}) \leq 3\lambda^{m-1} r_C(A).$$

Como $\lambda < 1$, concluimos que $\{x_m\}_m$ es una sucesión de Cauchy y, por tanto, existe $x \in C$ tal que $\{x_m\}$ converge a x. Veamos que x es un punto fijo de T. Como T es no expansiva, para cada $m \geq 1$ se tiene

$$d(x_m, Tx_m) \leq \|x_m - x_{n_\alpha}^m\| + d(x_{n_\alpha}^m, Tx_{n_\alpha}^m) + H(Tx_{n_\alpha}^m, Tx_m) \leq$$

$$\leq 2\|x_m - x_{n_\alpha}^m\| + d(x_{n_\alpha}^m, Tx_{n_\alpha}^m).$$

Tomando límite, se obtiene

$$d(x_m, Tx_m) \leq 2 \lim_\alpha \|x_m - x_{n_\alpha}^m\| \leq 2\lambda^{m-1} r_C(A).$$

Finalmente, tomando límite cuando $m \to \infty$, se deduce que $\lim_m d(x_m, Tx_m) = 0$. La continuidad de T implica que $d(x, Tx) = 0$, es decir, x es un punto fijo de T. ■

Si τ es la topología débil y C es un subconjunto convexo y débil compacto de X, entonces C es también cerrado en norma, por lo que esta condición no es necesaria. Sin embargo, si τ es una topología arbitraria sobre X y C es un subconjunto τ-compacto y convexo de X, C no es necesariamente cerrado en norma.

3.2. Suavidad uniforme y resultados de punto fijo para aplicaciones multivaluadas no-expansivas

En esta sección vamos a mostrar algunas condiciones que implican la $(DL)_\alpha$-condición, esto es, la $(DL)_\alpha$-condición con respecto a la topología débil. A lo largo de esta sección τ será la topología débil, puesto que las condiciones con las que vamos a trabajar implican reflexividad.

En primer lugar, mostramos una condición dada a través del módulo de cuadratura que implica la $(\mathrm{DL})_\alpha$-condición. Para ello vamos a usar la siguiente definición equivalente del módulo de cuadratura dada por C. Benítez, K. Przeslawski y D. Yost en [8].

Definición 3.2.1. ([8], Lema 1.2) *Sea X un espacio normado. Para cada $\beta \in [0,1)$, el* módulo de cuadratura *se define como*

$$\xi_X(\beta) = \sup_{v,w\in S_X} \frac{\|v-\beta w\|}{1-\beta N_+(v,w)}$$

donde $N_+(v,w)$ denota la derivada unidireccional de la norma en v en la dirección w dada por

$$N_+(v,w) = \lim_{\lambda\downarrow 0} \frac{\|v+\lambda w\|-\|v\|}{\lambda}.$$

En la Sección 1.1 recordamos que el comportamiento de este módulo bidimensional está estrechamente relacionado con la geometría de X. En particular, $\xi_X(\cdot)$ nos dice si X es uniformemente suave, uniformemente convexo, uniformemente no cuadrado o prehilbertiano. Además, este módulo también da una condición suficiente para que un espacio tenga estructura normal uniforme como muestra la siguiente proposición.

Proposición 3.2.1. ([8], Proposición 2.9) *Si $\xi_X(\beta) < 1/(1-\beta)$ para algún $\beta \in (0,1)$, entonces X tiene estructura normal uniforme.*

Vamos a probar que esta condición que garantiza UNS también implica la $(\mathrm{DL})_\alpha$-condición. En la demostración usaremos técnicas de ultrapotencias. Por ello, previamente vamos a recordar algunos conceptos y notaciones relativos a la técnica de ultrapotencias. Se puede encontrar una exposición más detallada en ([53], Capítulo 6) y ([1], Capítulo 1).

Sea I un conjunto no vacío. Un filtro $\mathcal{F}$ sobre I es una familia no vacía de subconjuntos de I ($\mathcal{F} \subseteq 2^I$) que satisface las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{F}$ es cerrada bajo intersecciones finitas, es decir, si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.

2. $\mathcal{F}$ es cerrada al tomar superconjuntos, es decir, si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$ entonces $B \in \mathcal{F}$.

Diremos que $\mathcal{F}$ es un filtro propio si es distinto de 2^I, o equivalentemente, $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I es un filtro propio sobre I que es maximal con respecto a la ordenación de los filtros propios de I dada por la inclusión: es decir, si $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es un filtro propio sobre I, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{U}$.

Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es no trivial (o libre) si y sólo si no contiene ningún subconjunto finito.

Recordemos el concepto de convergencia en un ultrafiltro. Sea X un espacio topológico de Hausdorff y $\{x_i\}_{i \in I}$ una colección de elementos de X, siendo I un conjunto de índices. Consideremos un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I. Decimos que $\{x_i\}_{i \in I}$ converge a $x \in X$ sobre $\mathcal{U}$ si $\{i \in I : x_i \in N\} \in \mathcal{U}$ para cada entorno N de x. El límite en $\mathcal{U}$ es único y se denotará por

$$\lim_{\mathcal{U}} x_i = x.$$

Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no trivial sobre $\mathbb{N}$ y $\{x_n\}$ converge a x en la topología del espacio X, entonces $\{x_n\}$ converge a x con respecto al ultrafiltro $\mathcal{U}$, es decir, $\lim_{\mathcal{U}} x_n = x$ ([1], Proposición 2.2).

Una colección no vacía $\mathcal{B}$ de subconjuntos no vacíos de I es un filtro base para algún filtro sobre I si y sólo si

$$\text{si } C_1, C_2 \in \mathcal{B} \text{ entonces } C_3 \subset C_1 \cap C_2 \text{ para algún } C_3 \in \mathcal{B},$$

en cuyo caso el filtro generado por $\mathcal{B}$ consta de todos los superconjuntos de elementos de $\mathcal{B}$.

Sea $\mathcal{D}$ un conjunto dirigido. Sea $\mathcal{B} = \{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ donde $A_\alpha := \{\beta \in \mathcal{D} : \beta \geq \alpha\}$. Entonces $\mathcal{B}$ es un filtro base para un filtro sobre $\mathcal{D}$. En efecto, si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{D}$, entonces existe $\alpha_3 \in \mathcal{D}$ tal que $\alpha_1 \leq \alpha_3$, $\alpha_2 \leq \alpha_3$. Así pues, $A_{\alpha_3} \subset A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2}$.

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro que contiene el filtro generado por $\mathcal{B}$. Sea $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ una red en un conjunto X. Si $\text{lím}_\alpha x_\alpha$ existe, entonces $\text{lím}_{\mathcal{U}} x_\alpha = \text{lím}_\alpha x_\alpha$. En efecto, si suponemos que $\text{lím}_\alpha x_\alpha = x$, entonces para cada entorno V de x existe $\alpha_0 \in \mathcal{D}$ tal que $x_\alpha \in V$ para cada $\alpha \geq \alpha_0$. Por tanto, para cada entorno V de x existe $\alpha_0 \in \mathcal{D}$ tal que $A_{\alpha_0} \subset \{\alpha \in \mathcal{D} : x_\alpha \in V\}$, lo cual implica que $\{\alpha \in \mathcal{D} : x_\alpha \in V\} \in \mathcal{U}$ para cada entorno V de x, es decir, $\text{lím}_{\mathcal{U}} x_\alpha = x$.

Recordamos ahora la definición de ultrapotencia de un espacio de Banach. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto índice I. La ultrapotencia $X_{\mathcal{U}}$ de X sobre $\mathcal{U}$ se define como el espacio cociente de

$$\ell_\infty(X) := \left\{ \{x_i\}_{i\in I} : \|\{x_i\}_{i\in I}\|_\infty := \sup_{i\in I} \|x_i\| < \infty \right\}.$$

por el subespacio lineal cerrado de $\ell_\infty(X)$

$$\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(X) := \left\{ \{x_i\}_{i\in I} \in \ell_\infty(X) : \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| = 0 \right\}.$$

La norma cociente sobre $X_{\mathcal{U}}$ viene dada por

$$\|\{x_i\}_{\mathcal{U}}\|_{\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\|,$$

donde $\{x_i\}_{\mathcal{U}}$ es la clase de equivalencia de $\{x_i\}_{i\in I}$.

Identificaremos cada elemento $x \in X$ con la clase de equivalencia $\{x_i\}_{\mathcal{U}}$, donde $x_i = x$ para todo $i \in I$.

Cualquier ultrapotencia de un espacio de Banach X es finitamente representable en X (ver [53], Proposición 2.10), es decir, para cualquier $\epsilon > 0$ y cualquier subespacio finito-dimensional M de $X_{\mathcal{U}}$, existe un subespacio N de X con la misma dimensión y una aplicación lineal $T : M \to N$ tal que

$$(1 - \epsilon)\|x\| \leq \|Tx\| \leq (1 + \epsilon)\|x\|$$

para cada $x \in M$. Así, $X_{\mathcal{U}}$ hereda las propiedades locales de X, es decir, aquellas propiedades que sólo dependen de los subespacios finito-dimensionales de X. Por ejemplo, como el módulo de cuadratura tiene carácter bidimensional, se tiene

$$\xi_X(\cdot) = \xi_{X_{\mathcal{U}}}(\cdot).$$

Tras este recordatorio sobre ultra-métodos, estamos ya preparados para probar la siguiente desigualdad que relaciona el radio de Chebyshev del centro asintótico de una ultra red y el radio asintótico, a través del módulo de cuadratura.

Proposición 3.2.2. *Sea C un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach reflexivo X y sea $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ una ultra red en C. Entonces, para cada $\beta \in (0,1)$ se tiene*

$$r_C(A(C, \{x_\alpha\})) \leq (1-\beta)\xi_X(\beta) r(C, \{x_\alpha\}).$$

Demostración: Denotemos $r = r(C, \{x_\alpha\})$ y $A = A(C, \{x_\alpha\})$. Como C es débil compacto, la ultra red $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{D}}$ es débilmente convergente a un punto $x \in C$. Además, $\lim_{\alpha \in \mathcal{D}} \|x_\alpha - x\|$ existe para cada $x \in C$.

Sea $z_1 \in A$ fijo y sea $z \in A$ arbitrario. Entonces se tiene $\lim_\alpha \|x_\alpha - z\| = \lim_\alpha \|x_\alpha - z_1\| = r$.

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no trivial sobre el conjunto $\mathcal{D}$ conteniendo el filtro generado por $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ con $B_\alpha = \{\beta \in \mathcal{D} : \beta \geq \alpha\}$. En la ultrapotencia $X_\mathcal{U}$ de X consideramos

$$\tilde{v} = \frac{1}{r}\{x_\alpha - z\}_\mathcal{U} \in S_{X_\mathcal{U}} \qquad \tilde{w} = \frac{1}{r}\{x_\alpha - z_1\}_\mathcal{U} \in S_{X_\mathcal{U}}.$$

Entonces, se tiene

$$\|\tilde{v} - \beta\tilde{w}\|_\mathcal{U} = \frac{1}{r}\lim_\mathcal{U} \|x_\alpha - z - \beta(x_\alpha - z_1)\| =$$

$$= \frac{1}{r}\lim_\alpha \left\| x_\alpha - z - \frac{m-1}{m}\beta(x_\alpha - z_1) - \frac{1}{m}\beta(x_\alpha - z_1)\right\| \geq$$

$$\geq \frac{1}{r}\lim_\alpha \left\| \left(1 - \frac{m-1}{m}\beta\right) x_\alpha + \frac{m-1}{m}\beta z_1 - z\right\| - \frac{1}{r}\frac{\beta}{m}\lim_\alpha \|x_\alpha - z_1\| \geq$$

$$\geq \frac{1}{r}\left\| \left(1 - \frac{m-1}{m}\beta\right) x + \frac{m-1}{m}\beta z_1 - z\right\| - \frac{\beta}{m}.$$

Por otra parte,

$$\frac{1}{1+\lambda} z + \frac{\lambda}{1+\lambda} z_1 \in A \quad \text{para cada } \lambda > 0,$$

y por tanto se tiene

$$\|\tilde{v} + \lambda \tilde{w}\|_{\mathcal{U}} = \frac{1}{r} \lim_{\mathcal{U}} \|x_\alpha - z + \lambda(x_\alpha - z_1)\| =$$

$$= \frac{1}{r} \lim_{\alpha} (1+\lambda) \left\| x_\alpha - \left(\frac{1}{1+\lambda} z + \frac{\lambda}{1+\lambda} z_1 \right) \right\| = 1 + \lambda.$$

Así pues, obtenemos $N_+(\tilde{v}, \tilde{w}) = 1$.

Por tanto, se deduce

$$\xi_{X_{\mathcal{U}}}(\beta) \geq \frac{\|\tilde{v} - \beta \tilde{w}\|_{\mathcal{U}}}{1 - \beta N_+(\tilde{v}, \tilde{w})} \geq \frac{\frac{1}{r} \left\| \left(1 - \frac{m-1}{m}\beta\right) x + \frac{m-1}{m}\beta z_1 - z \right\| - \frac{\beta}{m}}{1 - \beta}.$$

Como $X_{\mathcal{U}}$ es finitamente representable en X, se tiene $\xi_X(\beta) = \xi_{X_{\mathcal{U}}}(\beta)$ para todo β y, por tanto,

$$\left\| \left(1 - \frac{m-1}{m}\beta\right) x + \frac{m-1}{m}\beta z_1 - z \right\| \leq \left((1-\beta)\xi_X(\beta) + \frac{\beta}{m} \right) r$$

para cada $z \in A$. Así,

$$\sup_{z \in A} \left\| \left(1 - \frac{m-1}{m}\beta\right) x + \frac{m-1}{m}\beta z_1 - z \right\| \leq \left((1-\beta)\xi_X(\beta) + \frac{\beta}{m} \right) r.$$

Como

$$\left(1 - \frac{m-1}{m}\beta\right) x + \frac{m-1}{m}\beta z_1 \in C,$$

deducimos

$$r_C(A) \leq \left((1-\beta)\xi_X(\beta) + \frac{\beta}{m} \right) r.$$

Esta última desigualdad es cierta para cada $m \geq 1$, de donde obtenemos la desigualdad del enunciado. ■

La condición $\xi_X(\beta) < \frac{1}{1-\beta}$ para algún $\beta \in (0,1)$, implica que el espacio es reflexivo. Por tanto, como consecuencia de la Proposición 3.2.2 y del Teorema 3.1.4, se obtiene la siguiente condición suficiente para que un espacio de Banach X tenga la FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas.

Corolario 3.2.1. *Sea C un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach X tal que*

$$\xi_X(\beta) < \frac{1}{1-\beta} \quad \textit{para algún } \beta \in (0,1).$$

Sea $T : C \to KC(C)$ una aplicación no expansiva. Entonces T tiene un punto fijo.

Observación 3.2.1. En la Sección 3.1 mostramos que si C es un subconjunto convexo y débil compacto de un espacio de Banach X que verifica la (DL)-condición, entonces toda aplicación no expansiva $T : C \to KC(C)$ tiene un punto fijo, porque en tal caso podíamos suponer que C es separable. Por tanto, podríamos haber obtenido el resultado del Corolario 3.2.1 usando sucesiones en lugar de ultra redes en la Proposición 3.2.2. Sin embargo, necesitaremos la desigualdad de la Proposición 3.2.2 (para ultra redes) para deducir el Teorema 3.5.4, que da una generalización del Corolario 3.2.1 para aplicaciones cuyo rango no está contenido en su dominio.

En ([8], Teorema 2.4) C. Benítez, K. Przeslawski y D. Yost probaron que

$$(1-\beta)\xi_X(\beta) \leq 2\rho_X(\beta) + 1 - \beta \quad \text{para todo } \beta \in (0,1),$$

donde $\rho_X(\cdot)$ denota el módulo de suavidad de X definido por

$$\rho_X(\beta) = \sup\left\{\frac{1}{2}\left(\|x+\beta y\| + \|x-\beta y\|\right) - 1 : x, y \in B_X\right\}.$$

Recordamos que X es uniformemente suave si y sólo si $\rho'_X(0) = 0$. Usando la desigualdad anterior y la Proposición 3.2.1, deducimos que si $\rho'_X(0) < 1/2$ (lo cual es equivalente a $\rho_X(\beta) < \beta/2$ para algún β, porque $\rho_X(\beta)/\beta$ es estrictamente creciente) entonces X tiene estructura normal uniforme. Como consecuencia del Corolario 3.2.1 y teniendo en cuenta la desigualdad anterior dada en ([8], Teorema 2.4), se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 3.2.2. *Sea C un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach X tal que $\rho'_X(0) < 1/2$, y $T : C \to KC(C)$ una aplicación no expansiva. Entonces T tiene un punto fijo.*

En particular, se deduce que los espacios de Banach uniformemente suaves tienen la propiedad del punto fijo para aplicaciones no expansivas con valores compactos y convexos. Consecuentemente, damos una respuesta afirmativa al Problema Abierto 1 que aparece en [82] sobre la existencia de punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas definidas en un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach uniformemente suave.

3.3. Otras condiciones geométricas implicando la FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas

La ventaja que el módulo de cuadratura tiene sobre otros módulos definidos con anterioridad (como el módulo de suavidad uniforme, el módulo de Clarkson, etc.) es poder "medir"simultáneamente la suavidad y la convexidad del espacio, en lugar de hacerlo independientemente. Este módulo, al igual que la convexidad y suavidad uniforme, tiene un carácter finito-dimensional, esto es, sólo depende de los subespacios de dimensión finita del espacio considerado. En la Sección 2.1 definimos un nuevo módulo infinito-dimensional $\zeta_{X,\tau}(\cdot)$ y probamos que dicho módulo podía ser considerado simultáneamente como una medida de τ-casi convexidad uniforme y τ-casi suavidad uniforme (ver Teorema 2.3.1 y Teorema 2.3.2). También vimos que el módulo infinito-dimensional daba una condición suficiente para que un espacio tuviera τ-estructura normal uniforme (ver Corolario 2.4.1). En esta sección vamos a mostrar que la misma condición que garantiza τ-UNS también implica la τ-FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas. Este hecho se deducirá como consecuencia de la equivalencia entre dicha condición dada a través del módulo infinito-dimensional, una condición en función de la característica de τ-casi convexidad uniforme y una condición en función del módulo de Opial que implica la

$\tau(\mathrm{DL})_\alpha$-condición.

Proposición 3.3.1. *Sea X un espacio de Banach y τ una topología lineal sobre X tal que la norma es τ-slsc. Entonces*

$$\Delta_{0,\tau}(X) < 1 \quad \textit{si y sólo si} \quad \zeta_{X,\tau}(\beta) < \frac{\beta}{1-\beta} \quad \textit{para algún } \beta \in (0,1).$$

Demostración: Nótese que, como $\zeta_{X,\tau}(\beta) \geq 1$, la desigualdad $\zeta_X(\beta) < \beta/(1-\beta)$ sólo puede cumplirse para $\beta > 1/2$.

Usando la desigualdad que aparece en el Lema 2.3.3, se deduce que $\Delta_{0,\tau}(X) < 1$ implica $\zeta_{X,\tau}(\beta) < \beta/(1-\beta)$ para algún $\beta \in (0,1)$.

Para probar la otra implicación, supongamos que $\Delta_{0,\tau}(X) \geq 1$. Entonces $\Delta_{X,\tau}(\epsilon) = 0$ para cada $\epsilon < 1$. Sea $\eta > 0$ arbitrario. Existe una sucesión $\{x_n\} \subset B_X$ τ-convergente a un punto x tal que $\liminf_n \|x_n - x\| \geq \epsilon$ y $1 - \|x\| < \eta$. Tomando una subsucesión, si fuera necesario, podemos suponer que existe $\lim_n \|x_n - x\| = l \geq \epsilon$. Consideremos la sucesión

$$x'_n = \beta\left(\frac{\epsilon}{l}x_n + \frac{l-\epsilon}{l}x\right) \in B_\beta$$

que es τ-convergente a $\beta x = x'$ con $\lim_n \|x'_n - x'\| \leq \beta$. Sea $y' = x'/\|x'\| = x/\|x\|$, entonces tenemos

$$\liminf_n \|x'_n - y'\| = \liminf_n \left\| \frac{1}{\|x\|}\frac{\epsilon}{l}(x_n - x) - \left(\frac{1}{\|x\|} - \beta\right)\left(\frac{\epsilon}{l}x_n + \frac{l-\epsilon}{l}x\right)\right\| \geq$$

$$\geq \frac{1}{\|x\|}\frac{\epsilon}{l}\lim_n \|x_n - x\| - \left(\frac{1}{\|x\|} - \beta\right)\liminf_n \left\|\frac{\epsilon}{l}x_n + \frac{l-\epsilon}{l}x\right\| \geq$$

$$\geq \frac{\epsilon}{\|x\|} - \frac{1}{\|x\|} + \beta > \beta - \frac{1-\epsilon}{1-\eta}.$$

De ahí se deduce que

$$\zeta_{X,\tau}(\beta) \geq \liminf_n \frac{\|x'_n - y'\|}{1 - \|x'\|} \geq \frac{\beta - \frac{1-\epsilon}{1-\eta}}{1 - \beta(1-\eta)}.$$

Como la última desigualdad es cierta para cada $\eta > 0$ y cada $\epsilon < 1$, se obtiene que $\zeta_{X,\tau}(\beta) \geq \beta/(1-\beta)$ para cada β. ∎

Proposición 3.3.2. *Sea X un espacio de Banach y τ una topología lineal sobre X tal que la norma es τ-slsc. Entonces,*

$$r_{X,\tau}(1) > 0 \quad \textit{si y sólo si} \quad \Delta_{X,\tau}(1^-) > 0.$$

Demostración: Supongamos que $r_{X,\tau}(1) > 0$. Sea $\epsilon < 1$ arbitrario. Para cada $\eta > 0$ existe una sucesión $\{x_n\} \subset B_X$ τ-convergente a un punto x con $\liminf_n \|x_n - x\| \geq \epsilon$ y $1 - \|x\| < \Delta_X(\epsilon) + \eta$. Consideremos la sucesión τ-nula $y_n = (x_n - x)/\epsilon$ con $\liminf_n \|y_n\| \geq 1$ e $y = x/\epsilon$. Entonces se tiene

$$\frac{1}{\epsilon} \geq \liminf_n \frac{\|x_n\|}{\epsilon} = \liminf_n \|y_n + y\| \geq 1 + r_{X,\tau}\left(\frac{\|x\|}{\epsilon}\right) \geq$$

$$\geq 1 + r_{X,\tau}\left(\frac{1 - \eta - \Delta_{X,\tau}(\epsilon)}{\epsilon}\right).$$

Como η es arbitrario, usando la continuidad de $r_{X,\tau}(\cdot)$ se obtiene

$$\frac{1}{\epsilon} \geq 1 + r_{X,\tau}\left(\frac{1 - \Delta_{X,\tau}(\epsilon)}{\epsilon}\right).$$

Si $1 - \Delta_{X,\tau}(1^-) = 1$, haciendo tender $\epsilon \to 1^-$ obtendríamos

$$0 \geq r_{X,\tau}\left(1 - \Delta_{X,\tau}(1^-)\right) = r_{X,\tau}(1)$$

que sería una contradicción. Por tanto, $\Delta_{X,\tau}(1^-) > 0$.

Recíprocamente, supongamos que $\Delta_{X,\tau}(1^-) > 0$. Sea $\eta > 0$ arbitrario. Existe una sucesión τ-nula $\{x_n\}$ con $\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \geq 1$ y $x \in X$ con $\|x\| \geq 1$ tal que

$$\liminf_{n\to\infty} \|x + x_n\| < 1 + r_{X,\tau}(1) + \eta.$$

Podemos suponer, tomando una subsucesión si fuera necesario, que $\lim_n \|x + x_n\|$ existe. Sea

$$y_n = \frac{x_n + x}{1 + r_{X,\tau}(1) + \eta}.$$

Entonces $y_n \in B_X$ para n suficientemente grande y

$$y_n \xrightarrow{\tau} \frac{x}{1 + r_{X,\tau}(1) + \eta} =: y$$

con

$$\liminf_n \|y_n - y\| = \liminf_n \frac{\|x_n\|}{1 + r_{X,\tau}(1) + \eta} \geq \frac{1}{1 + r_{X,\tau}(1) + \eta}.$$

Por tanto, se obtiene

$$\frac{1}{1 + r_{X,\tau}(1) + \eta} \leq \frac{\|x\|}{1 + r_{X,\tau}(1) + \eta} \leq 1 - \Delta_{X,\tau}\left(\frac{1}{1 + r_{X,\tau}(1) + \eta}\right).$$

Como $\eta > 0$ es arbitrario, se deduce

$$\frac{1}{1 + r_{X,\tau}(1)} \leq 1 - \Delta_{X,\tau}\left(\left(\frac{1}{1 + r_{X,\tau}(1)}\right)^-\right).$$

Si $r_{X,\tau}(1) = 0$, obtendríamos $1 \leq 1 - \Delta_{X,\tau}(1^-)$, que sería una contradicción. Por consiguiente, se concluye que $r_{X,\tau}(1) > 0$. ■

Como consecuencia de la Proposición 3.3.1 y de la Proposición 3.3.2, se deduce que las tres condiciones siguientes son equivalentes:

- $\zeta_{X,\tau}(\beta) < \beta/(1-\beta)$ para algún $\beta \in (0,1)$
- $\Delta_{0,\tau}(X) < 1$
- $r_{X,\tau}(1) > 0$.

Nótese que estas tres condiciones equivalentes implican τ-UNS. En particular, sabemos que $r_{X,\tau}(1) > 0$ implica τ-UNS, porque $\tau CS(X) \geq 1 + r_{X,\tau}(1)$ para cada espacio de Banach X ([46], Lema 2.3). Por tanto, el Corolario 2.4.1 puede deducirse fácilmente usando la equivalencia entre la condición $r_{X,\tau}(1) > 0$ y la condición $\zeta_{X,\tau}(\beta) < \beta/(1-\beta)$ para algún $\beta \in (0,1)$.

A continuación vamos a probar que la condición $r_{X,\tau}(1) > 0$ implica la τ-FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas. Consecuentemente, las tres condiciones equivalentes que implican τ-UNS también implican la τ-FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas. Previamente, vamos a estudiar la relación existente entre el radio asintótico de una sucesión y el radio asintótico de sus subredes universales.

Lema 3.3.1. *Sea C un subconjunto no vacío de un espacio de Banach X. Si $\{x_n\}$ es una sucesión acotada en C que es regular con respecto a C, entonces*

$$r(C, \{x_n\}) = r(C, \{x_{n_\alpha}\})$$

para cada subred universal $\{x_{n_\alpha}\}$ de $\{x_n\}$.

Demostración: Sea $\{x_{n_\alpha}\}$ una subred universal de $\{x_n\}$. Como

$$\lim_\alpha \|x_{n_\alpha} - x\| \leq \limsup_n \|x_n - x\|$$

para cada $x \in C$, se tiene

$$r(C, \{x_{n_\alpha}\}) \leq r(C, \{x_n\}).$$

Supongamos que $r(C, \{x_{n_\alpha}\}) < r(C, \{x_n\})$. Entonces existe $x \in C$ tal que

$$\lim_\alpha \|x_{n_\alpha} - x\| < r(C, \{x_n\}).$$

Como el límite de la subred es un punto de acumulación para la sucesión, podemos encontrar una subsucesión $\{y_n\}$ de $\{x_n\}$ tal que

$$\lim_n \|y_n - x\| = \lim_\alpha \|x_{n_\alpha} - x\|.$$

Así,

$$r(C, \{y_n\}) \leq \lim_n \|y_n - x\| < r(C, \{x_n\})$$

lo cual contradice la regularidad de $\{x_n\}$. ∎

Proposición 3.3.3. *Sea X un espacio de Banach y τ una topología lineal sobre X tal que las funciones de tipo τ-nulo son τ-lsc. Sea C un subconjunto acotado, convexo, τ-compacto y τ-secuencialmente compacto de X y $\{x_n\}$ una sucesión en C que es regular con respecto a C. Entonces*

$$r_C(A(C, \{x_{n_\alpha}\})) \leq \frac{1}{1 + r_{X,\tau}(1)} r(C, \{x_{n_\alpha}\})$$

para cada $\{x_{n_\alpha}\}$ subred universal de $\{x_n\}$.

Demostración: Sea $z \in A(C, \{x_{n_\alpha}\})$. Existe una subsucesión $\{y_n\}$ de $\{x_n\}$ tal que

$$\lim_n \|y_n - z\| = \lim_\alpha \|x_{n_\alpha} - z\| = r(C, \{x_{n_\alpha}\}) = r(C, \{x_n\}) = r(C, \{y_n\}).$$

Podemos suponer, tomando una subsucesión si fuera necesario, que $\{y_n\}$ es τ-convergente a un punto $y \in C$ y $\lim_n \|y_n - y\|$ existe. Como $\{y_n\}$ es regular con respecto a C, al pasar a una subsucesión el radio asintótico no varía. Consideremos $u = \frac{y-z}{\|y-z\|}$ con $\|u\| = 1$ y la sucesión $u_n = \frac{y_n - y}{\|y-z\|}$ que es τ-nula con $\lim_n \|u_n\| \geq 1$. En efecto, usando que la norma es τ-slsc se obtiene

$$\lim_n \|y_n - y\| \geq r(C, \{y_n\}) = \lim_n \|y_n - z\| \geq \|y - z\|$$

que implica $\lim_n \|u_n\| \geq 1$. Entonces se tiene

$$1 + r_{X,\tau}(1) \leq \liminf_n \|u_n + u\| = \lim_n \frac{\|y_n - z\|}{\|y - z\|} = \frac{r(C, \{x_{n_\alpha}\})}{\|y - z\|}$$

y se deduce la desigualdad del enunciado. ■

Como consecuencia de la Proposición 3.3.3 y usando los argumentos que aparecen en la prueba del Teorema 3.1.4, podemos probar de forma similar el siguiente resultado.

Corolario 3.3.1. *Sea X un espacio de Banach y τ una topología lineal sobre X tal que las funciones de tipo τ-nulo son τ-lsc. Sea C un subconjunto de X no vacío, convexo, cerrado, acotado, τ-compacto y τ-secuencialmente compacto. Supongamos que se cumple una de las siguientes condiciones equivalentes:*

1. $r_{X,\tau}(1) > 0$
2. $\Delta_{0,\tau}(X) < 1$
3. $\zeta_{X,\tau}(\beta) < \beta/(1-\beta)$ *para algún* $\beta \in (0,1)$.

Entonces toda aplicación no expansiva $T : C \to KC(C)$ tiene un punto fijo.

En la Sección 1.3 recordamos que T. Domínguez Benavides y P. Lorenzo obtuvieron en [32] un resultado de punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas usando la característica de convexidad no compacta con respecto a la medida de separación $\varepsilon_\beta(X)$ (ver Teorema 1.3.6). Como la característica $\Delta_{0,\tau}(X)$ satisface la desigualdad $\varepsilon_{\beta,\tau}(X) \geq \Delta_{0,\tau}(X)$, el Corolario 3.3.1 mejora el Teorema 3.5 en [32]. De hecho, la clase de los espacios de Banach con $\Delta_{0,\tau}(X) < 1$ es estrictamente mayor que la de los espacios tales que $\varepsilon_{\beta,\tau}(X) < 1$. Por ejemplo, el espacio $X_m = (\ell_2, \|\cdot\|_m)$ con $m \in (0,1]$ donde

$$\|(x_n)\|_m = \text{máx}\left\{\|(x_n)\|_2, \frac{1}{m}|x_1|\right\} \quad \text{para cada } x = (x_n) \in \ell_2,$$

verifica $\varepsilon_\beta(X_m) = \sqrt{2(1-m^2)}$ y $\Delta_0(X_m) = \sqrt{1-m^2}$ (ver [81]).

3.4. La τ-FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas y su permanencia bajo renormamiento

En la Sección 3.3 presentamos algunas condiciones en función de ciertas constantes geométricas de los espacios de Banach que implican la τ-FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas. En esta sección mostramos que dichas condiciones geométricas pueden preservarse bajo renormamiento cuando la distancia de Banach-Mazur entre la norma original y la nueva norma no es demasiado grande. Esto dará lugar a resultados de estabilidad para la τ-FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas. Para medir la proximidad entre dos espacios de Banach isomorfos usaremos la distancia de Banach-Mazur definida por

$$d(X,Y) = \text{ínf}\left\{\|U\|\|U^{-1}\| : U : X \to Y, U \text{ isomorfismo}\right\}.$$

Cuando X e Y son dos espacios de Banach isomorfos tales que $d(X,Y) \leq d$, podemos suponer que Y es un renormamiento de $(X, \|\cdot\|)$ con una norma $|\cdot|$ que verifica

$\|x\| \leq |x| \leq d\|x\|$ para cada $x \in X$. Este método fue iniciado por Bynum [14] usando los coeficientes de estructura normal. De hecho, las desigualdades $d(X,Y) < N(X)$ y $d(X,Y) < WCS(X)$ implican que Y tiene UNS y que Y tiene w-UNS respectivamente. Más tarde, M.A. Japón Pineda [46] dio la siguiente generalización: Si $d(X,Y) < \tau CS(X)$ y la norma equivalente es τ-slsc, entonces Y tiene τ-UNS.

A lo largo de esta sección τ será una topología lineal sobre un espacio de Banach tal que o bien las funciones de tipo τ-nulo son τ-lsc o bien los conjuntos τ-secuencialmente compactos son τ-compactos y las funciones de tipo τ-nulo son τ-slsc. Por ejemplo, la topología débil verifica dichas condiciones. También se sabe que los conjuntos τ-secuencialmente compactos son τ-compactos cuando τ es cualquier topología métrica. Además, si X es un espacio de Banach separable y τ es una topología sobre X más débil que la topología de la norma, entonces los conjuntos τ-secuencialmente compactos son τ-compactos. En efecto, la separabilidad de X implica que el espacio es Lindelöf (es decir, de cada recubrimiento abierto de X se puede extraer un subrecubrimiento numerable) para la topología de la norma. Lo mismo es cierto para la topología τ porque es menos fina que la topología inducida por la norma. Así, los subconjuntos τ-secuencialmente compactos son numerablemente compactos y Lindelöf, y por tanto son τ-compactos.

En primer lugar vamos a estudiar la permanencia de la propiedad $\Delta_{0,\tau}(X) < 1$ bajo renormamiento.

Proposición 3.4.1. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Supongamos que $|\cdot|$ es una norma definida sobre X tal que $\|x\| \leq |x| \leq d\|x\|$ para cada $x \in X$. Sea $Y = (X, |\cdot|)$. Entonces*

$$\Delta_{Y,\tau}(\epsilon) \geq d\Delta_{X,\tau}\left(\frac{\epsilon}{d}\right) + 1 - d \quad \textit{para cada} \quad \epsilon > 0.$$

Demostración: Sea $\epsilon > 0$ y sea $\{x_n\}$ una sucesión en B_Y τ-convergente a x con $\liminf_n |x_n - x| \geq \epsilon$. Entonces, $\liminf_n \|x_n - x\| \geq \epsilon/d$ y

$$1 - |x| \geq 1 - d\|x\| = d(1 - \|x\|) + 1 - d \geq d\Delta_{X,\tau}\left(\frac{\epsilon}{d}\right) + 1 - d.$$

De ahí se deduce la desigualdad del enunciado. ∎

La proposición anterior da el siguiente resultado de estabilidad para la τ-FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas, que es una consecuencia directa del Corolario 3.3.1.

Corolario 3.4.1. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Supongamos que $|\cdot|$ es una norma definida sobre X tal que $\|x\| \leq |x| \leq d\|x\|$ para cada $x \in X$. Sea $Y = (X, |\cdot|)$. Si $\Delta_{X,\tau}\left(\frac{1^-}{d}\right) > 1 - \frac{1}{d}$, entonces $\Delta_{Y,\tau}(1^-) > 0$. Por tanto, si las funciones de tipo τ-nulo sobre Y son τ-lsc, entonces cada aplicación no expansiva $T : C \to KC(C)$ tiene un punto fijo, donde C es un subconjunto de Y no vacío, convexo, cerrado, acotado, τ-compacto y τ-secuencialmente compacto.*

En el siguiente ejemplo aplicamos el resultado anterior en el caso de los espacios de sucesiones ℓ_p con la topología débil.

Ejemplo 3.4.1. En el caso de los espacios ℓ_p $(1 < p < +\infty)$ con la topología débil se tiene $\Delta_{\ell_p,w}(\epsilon) = 1 - (1 - \epsilon^p)^{1/p}$ ([4], Nota V.1.17). Por tanto,

$$\Delta_{\ell_p,w}\left(\frac{1^-}{d}\right) > 1 - \frac{1}{d} \text{ si y sólo si } d < 2^{1/p}.$$

Nótese que la cota obtenida es cota para estructura normal (y, por tanto, teniendo en cuenta que la $(DL)_\alpha$-condición implica estructura normal débil, es también una cota para la $(DL)_\alpha$-condición).

A continuación aplicamos el Corolario 3.4.1 en el caso de los espacios E_β con la topología débil.

Ejemplo 3.4.2. Para $\beta > 1$ consideramos el espacio ℓ_2 con la norma equivalente

$$\|x\|_{2,\beta} = \text{máx}\left\{\|x\|_2, \beta\|x\|_\infty\right\}.$$

Entonces $E_\beta = (\ell_2, \|\cdot\|_{2,\beta})$ es un espacio de Banach isomorfo a ℓ_2 con $d(E_\beta, \ell_2) = \beta$ (puesto que $\|x\|_2 \leq \|x\|_{2,\beta} \leq \beta\|x\|_2$ para todo $x \in \ell_2$). Estos espacios son importantes en Teoría del Punto Fijo porque es conocido que E_β no tiene estructura normal cuando $\beta \geq \sqrt{2}$, pero E_β tiene estructura normal asintótica (y, por tanto, tiene la FPP) si $\beta < 2$. Por otra parte, E_β tiene una base monótona incondicional, por tanto, E_β tiene la FPP para cualquier $\beta > 1$ (ver [61]).

En el caso de E_β (con la topología débil) probaremos que

$$\Delta_{E_\beta,w}(\epsilon) = \max\left(0, 1 - \sqrt{\beta^2 - \epsilon^2}\right)$$

para cada $\epsilon \leq 1$. En efecto, sea $\{x_n\} \subset B_{E_\beta}$ débilmente convergente a x con $\liminf_n \|x_n - x\|_{2,\beta} \geq \epsilon$. Entonces

$$1 \geq \liminf_n \|x_n\|_2^2 = \liminf_n \|x_n - x\|_2^2 + \|x\|_2^2 \geq \frac{\epsilon^2}{\beta^2} + \frac{\|x\|_{2,\beta}^2}{\beta^2}.$$

Por tanto, se tiene $\|x\|_{2,\beta} \leq \sqrt{\beta^2 - \epsilon^2}$, lo cual implica que

$$\Delta_{E_\beta,w}(\epsilon) \geq \max\left(0, 1 - \sqrt{\beta^2 - \epsilon^2}\right).$$

Cuando $\epsilon \in [\sqrt{\beta^2 - 1}, 1]$ podemos considerar la sucesión

$$x_n = \frac{1}{\beta}\left(\sqrt{\beta^2 - \epsilon^2} e_1 + \epsilon e_n\right) \in B_{E_\beta}$$

que es débilmente convergente a

$$x = \frac{\sqrt{\beta^2 - \epsilon^2}}{\beta} e_1.$$

Como $\|x\|_{2,\beta} = \sqrt{\beta^2 - \epsilon^2}$, se tiene $\Delta_{E_\beta,w}(\epsilon) = 1 - \sqrt{\beta^2 - \epsilon^2}$.
Por otra parte, puesto que $\Delta_{E_\beta,w}(\epsilon)$ es una función creciente, se tiene que

$$\Delta_{E_\beta,w}(\epsilon) = 0 \quad \text{para cada } \epsilon \leq \sqrt{\beta^2 - 1}.$$

Así pues, para $\beta < \sqrt{2}$

$$\Delta_{E_\beta,w}\left(\frac{1^-}{d}\right) > 1 - \frac{1}{d} \quad \text{si y sólo si} \quad d < \frac{\sqrt{2}}{\beta}$$

que es también una cota para estructura normal (ver [28], Teorema 4).

Finalmente, en el siguiente ejemplo aplicamos el resultado anterior en el caso de los espacios $L_p(\mu)$ con la topología de la convergencia local en medida.

Ejemplo 3.4.3. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida positiva σ-finita. Para cada $1 \leq p < +\infty$ consideramos el espacio de Banach separable $L_p(\mu)$ con la norma usual. Sea $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ una partición σ-finita de Ω. Consideramos τ la topología generada por la métrica

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{\mu(\Omega_n)} \int_{\Omega_n} \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\, d\mu \quad \text{para } f,g \in L_p(\mu).$$

Esta topología se conoce como la *topología de la convergencia local en medida (clm)*. $L_p(\mu)$ dotado con la clm topología (que es más débil que la topología de la norma) es un espacio vectorial topológico.
Como la clm topología es metrizable, los conjuntos clm-secuencialmente compactos son clm-compactos.
Para $p > 1$ la clm topología es más fuerte que la topología débil, lo cual implica que las funciones de tipo clm-nulo son clm-lsc. Para $p = 1$ vamos a mostrar que las funciones de tipo clm-nulo sobre $(L_1(\mu), \|\cdot\|_1)$ son clm-slsc. Primero probaremos que si $\{f_\alpha\}$ es una red clm-nula en $L_1(\mu)$, entonces

$$\limsup_{\alpha} \|f_\alpha - f\|_1 = \|f\|_1 + \limsup_{\alpha} \|f_\alpha\|_1$$

para cada $f \in L_1(\mu)$. Sea $\epsilon > 0$, existe k tal que

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \int_{\Omega_n} |f| d\mu < \epsilon$$

y, como $\{f_\alpha\}$ es clm-nula, existe α_0 tal que

$$\sum_{n=1}^{k} \int_{\Omega_n} |f_\alpha| d\mu < \epsilon$$

para cada $\alpha \geq \alpha_0$. Por tanto,

$$|\|f_\alpha - f\|_1 - \|f_\alpha\|_1 - \|f\|_1| < \epsilon$$

para cada $\alpha \geq \alpha_0$, lo que prueba que

$$\limsup_\alpha \|f_\alpha - f\|_1 = \|f\|_1 + \limsup_\alpha \|f_\alpha\|_1.$$

Sea $\{g_n\}$ una sucesión en $L_1(\mu)$ clm-convergente a g. Usando el Lema de Fatou y teniendo en cuenta que cada sucesión clm-convergente tiene una subsucesión que converge al mismo límite en casi todo, se dedujo en ([46], Ejemplo 2.3) que la norma $\|\cdot\|_1$ es clm-slsc. Por tanto,

$$\limsup_\alpha \|f_\alpha - g\|_1 = \limsup_\alpha \|f_\alpha\|_1 + \|g\|_1 \leq$$

$$\leq \limsup_\alpha \|f_\alpha\|_1 + \liminf_n \|g_n\|_1 = \liminf_n \limsup_\alpha \|f_\alpha - g_n\|_1.$$

En el caso de los espacios $L_p(\mu)$ $(1 \leq p < +\infty)$, se probó en ([46], Ejemplo 2.4) que

$$\Delta_{L_p(\mu),clm}(\epsilon) = 1 - (1 - \epsilon^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Por tanto,

$$\Delta_{L_p(\mu),clm}\left(\frac{1^-}{d}\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{d^p}\right)^{\frac{1}{p}} > 1 - \frac{1}{d} \quad \text{si y sólo si} \quad d < 2^{\frac{1}{p}}.$$

En el caso particular del espacio $L_1(\mu)$, si Y es un espacio de Banach isomorfo a $L_1(\mu)$ tal que las funciones de tipo clm-nulo sobre Y son clm-slsc y $d(L_1(\mu), Y) < 2$, entonces toda aplicación no expansiva $T : C \to KC(C)$ tiene un punto fijo, donde C es un subconjunto no vacío, convexo, cerrado, acotado y clm-secuencialmente compacto de Y.

En particular cuando $\Omega = \mathbb{N}$ y μ es la medida cardinal definida en los subconjuntos de $\mathbb{N}$, para $p = 1$ la convergencia local en medida es equivalente a la convergencia débil estrella para sucesiones acotadas en ℓ_1. Así pues, obtenemos

$$\Delta_{\ell_1,w^*}\left(\frac{1^-}{d}\right) = \frac{1}{d} > 1 - \frac{1}{d} \quad \text{si y sólo si} \quad d < 2.$$

Obsérvese que éstas son también cotas para clm-UNS y w^*-UNS respectivamente, es decir, las cotas obtenidas son las máximas cotas posibles de estabilidad para clm-UNS y w^*-UNS respectivamente. De hecho, en el caso $p > 1$ (para la medida cardinal sobre $\mathbb{N}$) podemos considerar los espacios $E_{p,\beta}$ definidos como el renormamiento de ℓ_p dado por

$$\|x\|_{p,\beta} = \max\{\|x\|_p, \beta\|x\|_\infty\}.$$

Es fácil probar que $\|x\|_p \leq \|x\|_{p,\beta} \leq \beta\|x\|_p$ para cada $x \in \ell_p$, por tanto, $d(\ell_p, E_{p,\beta}) = \beta$. Sin embargo, $E_{p,\beta}$ no tiene w-UNS si $\beta \geq 2^{\frac{1}{p}}$ porque

$$WCS(E_{p,\beta}) = \begin{cases} \dfrac{2^{1/p}}{\beta} & \text{para } 1 \leq \beta < 2^{1/p} \\ 1 & \text{para } 2^{1/p} \leq \beta \end{cases}$$

Por otra parte, para $p = 1$ si consideramos el espacio de Bynum $\ell_{1,\infty}$, es decir, el espacio ℓ_1 dotado con la norma equivalente

$$\|x\|_{1,\infty} = \max\{\|x^+\|_1, \|x^-\|_1\},$$

podemos comprobar que $d(\ell_1, \ell_{1,\infty}) = 2$ (puesto que $\|x\|_{1,\infty} \leq \|x\|_1 \leq 2\|x\|_{1,\infty}$ para cada $x \in \ell_1$). Sin embargo, $\ell_{1,\infty}$ no tiene w^*-NS. Más aún, $\ell_{1,\infty}$ no cumple la w^*-FPP (ver [46], Ejemplo 1.2), por tanto ésta es la mejor cota de estabilidad para la w^*-FPP en el espacio ℓ_1.

En el siguiente ejemplo mostramos una aplicación del resultado de estabilidad obtenido para el espacio $L_1(\mu)$.

Previamente recordamos la siguiente generalización del Teorema de Lami-Dozo ([55], Teorema 3.2) dada por P. Lorenzo en [65].

Teorema 3.4.1. ([65], Teorema 3.2.2) *Sea X un espacio de Banach verificando la propiedad de Opial con respecto a una topología lineal τ dada sobre X. Supongamos que C es un subconjunto cerrado, acotado, convexo y τ-secuencialmente compacto de X y $T : C \to K(C)$ es una aplicación no expansiva, entonces T tiene un punto fijo.*

En particular podemos aplicar este teorema al espacio $L_1(\mu)$ con la clm topología porque dicho espacio verifica la propiedad uniforme de Opial con respecto a la clm topología. Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra una aplicación del resultado de estabilidad para deducir la FPP en ausencia de la propiedad de Opial.

Ejemplo 3.4.4. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida positiva σ-finita y τ la topología de la convergencia local en medida. Sea X el espacio de Banach $L_1(\mu)$ con la norma usual $\|\cdot\|_1$. Sea $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ una partición σ-finita de Ω. Para $1 < \lambda < 2$ consideramos en $L_1(\mu)$ la norma equivalente

$$|||f||| = \max\left(\|f\|_1, \lambda \sup_k \int_{\Omega_k} |f|\, d\mu\right).$$

Sea $Y = (L_1(\mu), |||\cdot|||)$. Vamos a comprobar que las funciones de tipo clm-nulo sobre Y son clm-slsc. En efecto, sea $\{f_\alpha\}$ una red clm-nula en $L_1(\mu)$. Como en el Ejemplo 3.4.3 (donde mostramos que las funciones de tipo clm-nulo sobre $(L_1(\mu), \|\cdot\|_1)$ son clm-slsc), podemos obtener que

$$\limsup_\alpha \sup_k \int_{\Omega_k} |f_\alpha - f| d\mu = \max\left(\sup_k \int_{\Omega_k} |f| d\mu, \limsup_\alpha \sup_k \int_{\Omega_k} |f_\alpha| d\mu\right)$$

para cada $f \in L_1(\mu)$. Sea $\{g_n\}$ una sucesión en $L_1(\mu)$ clm-convergente a g, entonces

$$\limsup_\alpha \sup_k \int_{\Omega_k} |f_\alpha - g| d\mu \leq \liminf_n \limsup_\alpha \sup_k \int_{\Omega_k} |f_\alpha - g_n| d\mu,$$

que implica

$$\limsup_\alpha |||f_\alpha - g||| \leq \liminf_n \limsup_\alpha |||f_\alpha - g_n|||.$$

Como $d(X,Y) = \lambda < 2$ y las funciones de tipo clm-nulo sobre Y son clm-slsc, entonces cada aplicación no expansiva $T : C \to KC(C)$ tiene un punto fijo, donde C es un subconjunto no vacío, convexo, cerrado, acotado y clm-secuencialmente compacto de Y.

Sin embargo, Y no verifica la propiedad de Opial con respecto a la clm topología. De hecho, si consideramos la sucesión clm-nula

$$f_n = \frac{1}{\mu(\Omega_n)} \chi_{\Omega_n}$$

y la función

$$f = \frac{a}{\mu(\Omega_1)}\chi_{\Omega_1} \quad \text{con } a < 1,$$

se tiene $|||f_n||| = \lambda$ y $|||f_n - f||| = \lambda$ si $1+a < \lambda$. Por tanto, Y no cumple la propiedad de Opial con respecto a la clm topología y no podemos aplicar la generalización del Teorema de Lami-Dozo.

También podemos obtener un resultado de estabilidad usando la característica $\varepsilon_{\beta,\tau}(X)$ en lugar de $\Delta_{0,\tau}(X)$. Sin embargo, en el caso de los espacios $L_p(\mu)$ veremos que este resultado es peor que el obtenido previamente usando $\Delta_{0,\tau}(X)$ (lo cual era de esperar, ya que $\Delta_{0,\tau}(X) \leq \varepsilon_{\beta,\tau}(X)$).

Vamos a estudiar la permanencia bajo renormamiento de la propiedad $\varepsilon_{\beta,\tau}(X) < 1$. La prueba es similar a la de la Proposición 3.4.1, por lo que no la incluimos.

Proposición 3.4.2. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Supongamos que $|\cdot|$ es una norma definida sobre X tal que $\|x\| \leq |x| \leq d\|x\|$ para cada $x \in X$. Sea $Y = (X, |\cdot|)$. Entonces*

$$\Delta_{Y,\beta,\tau}(\epsilon) \geq d\Delta_{X,\beta,\tau}\left(\frac{\epsilon}{d}\right) + 1 - d \quad \textit{para cada} \quad \epsilon > 0.$$

Como consecuencia de esta desigualdad se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 3.4.2. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Supongamos que $|\cdot|$ es una norma definida sobre X tal que $\|x\| \leq |x| \leq d\|x\|$ para cada $x \in X$. Sea $Y = (X, |\cdot|)$. Si $\Delta_{X,\beta,\tau}\left(\frac{1^-}{d}\right) > 1 - \frac{1}{d}$, entonces $\Delta_{Y,\beta,\tau}(1^-) > 0$. Por tanto, si las funciones de tipo τ-nulo sobre Y son τ-lsc, entonces cada aplicación no expansiva $T : C \to KC(C)$ tiene un punto fijo, siendo C un subconjunto de Y no vacío, convexo, cerrado, acotado, τ-compacto y τ-secuencialmente compacto.*

En el caso de los espacios ℓ_p y $L_p(\mu)$ con $1 < p < +\infty$, se tiene

$$\Delta_{\ell_p,\beta,w}(\epsilon) = \Delta_{L_p(\mu),\beta,clm}(\epsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\epsilon^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

([46], Ejemplo 2.4). Por tanto,

$$\Delta_{\ell_p,\beta,w}\left(\frac{1^-}{d}\right) = \Delta_{L_p(\mu),\beta,clm}\left(\frac{1^-}{d}\right) > 1 - \frac{1}{d} \text{ si y sólo si } d < \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nótese que los resultados anteriores no son resultados de estabilidad en el sentido usual de encontrar una constante k, que depende de X, tal que si X cumple cierta propiedad e Y es un espacio de Banach con $d(X,Y) < k$, entonces Y también verifica dicha propiedad. No obstante, veremos a continuación que el módulo de Opial puede darnos un resultado de estabilidad en el sentido usual. En la siguiente proposición estudiamos la permanencia de la condición $r_{X,\tau}(1) > 0$ bajo isomorfismos.

Proposición 3.4.3. *Sean X e Y espacios de Banach isomorfos. Entonces*

$$r_{X,\tau}(1) + 1 \leq d(X,Y)(r_{Y,\tau}(1) + 1).$$

Demostración: Podemos considerar X e Y como el mismo espacio vectorial dotado con dos normas equivalentes, $\|\cdot\|$ y $|\cdot|$ respectivamente, tales que

$$\|x\| \leq |x| \leq d\|x\| \text{ para cada } x \in X.$$

Sea $x \in Y$ con $|x| \geq 1$ y $\{x_n\}$ una sucesión τ-nula en Y tal que $\liminf_n |x_n| \geq 1$. Entonces, se tiene que $\|dx\| \geq 1$ y $\liminf_n \|dx_n\| \geq 1$. Por tanto,

$$r_{X,\tau}(1) + 1 \leq \liminf_n \|dx_n + dx\| \leq d \liminf_n |x_n + x|.$$

De ahí se deduce la desigualdad del enunciado. ■

Como consecuencia del Corolario 3.3.1 se obtiene el siguiente resultado de estabilidad para la τ-FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas.

Corolario 3.4.3. *Sean X e Y dos espacios de Banach isomorfos. Si $d(X,Y) < r_{X,\tau}(1)+1$, entonces $r_{Y,\tau}(1) > 0$. Por tanto, si las funciones de tipo τ-nulo sobre Y son τ-lsc, entonces cada aplicación no expansiva $T : C \to KC(C)$ tiene un punto fijo, siendo C un subconjunto de Y no vacío, convexo, cerrado, acotado, τ-compacto y τ-secuencialmente compacto.*

A continuación vamos a aplicar el Corolario 3.4.3 en el caso de los espacios ℓ_p y E_β con la topología débil y en el caso de los espacios L_p con la clm-topología.

- En el caso de los espacios ℓ_p $(1 < p < \infty)$ con la topología débil, se tiene

$$r_{\ell_p,w}(c) = (1 + c^p)^{\frac{1}{p}} - 1$$

  y, por tanto, se obtiene que si Y es un espacio de Banach isomorfo a ℓ_p tal que $d(\ell_p, Y) < 2^{\frac{1}{p}}$, entonces cada aplicación no expansiva $T : C \to KC(C)$ tiene un punto fijo, siendo C un subconjunto no vacío, convexo y débil compacto de Y. Nótese que ésta es la misma cota que obtuvimos en el Ejemplo 3.4.1.

- En el caso de los espacios E_β con la topología débil, es fácil comprobar que

$$r_{E_\beta,w}(1) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{\beta} - 1 & \text{para } \beta < \sqrt{2} \\ 0 & \text{para } \beta \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

  Así, usando el Corolario 3.4.3, de nuevo obtenemos (como en el Ejemplo 3.4.2) que si Y es un espacio de Banach isomorfo a E_β tal que $d(E_\beta, Y) < \sqrt{2}/\beta$ para algún $\beta < \sqrt{2}$, entonces cada aplicación no expansiva $T : C \to KC(C)$ tiene un punto fijo, siendo C un subconjunto no vacío, convexo y débil compacto de Y.

- En el caso de los espacios $L_p(\mu)$ con $1 \leq p < \infty$, en ([46], Example 2.3) se probó que

$$r_{L_p(\mu),clm}(c) = (1 + c^p)^{\frac{1}{p}} - 1.$$

  Por tanto, si Y es un espacio de Banach isomorfo a $L_p(\mu)$ tal que $d(L_p(\mu), Y) < 2^{\frac{1}{p}}$ (que coincide con la cota obtenida en el Ejemplo 3.4.3), entonces cada aplicación no expansiva $T : C \to KC(C)$ tiene un punto fijo, siendo C un subconjunto de Y no vacío, convexo, cerrado, acotado y clm-secuencialmente compacto.

En particular, cuando $\Omega = \mathbb{N}$ y μ es la medida cardinal definida en los subconjuntos de $\mathbb{N}$, para $p = 1$ se tiene $r_{\ell_1, w^*}(1) = r_{L_1(\mu), clm}(1) = 1$. Por consiguiente, si Y es un espacio de Banach isomorfo a ℓ_1 tal que las funciones de tipo w^*-nulo sobre Y son w^*-slsc y $d(\ell_1, Y) < 2$, entonces cada aplicación no expansiva $T : C \to KC(C)$ tiene un punto fijo, siendo C un subconjunto de Y no vacío, convexo, cerrado, acotado y clm-secuencialmente compacto.

Obsérvese que las cotas que hemos obtenido con el módulo de Opial coinciden con las que obtuvimos antes usando la característica de τ-NUC $\Delta_{0,\tau}(X)$. Esto era de esperar, ya que en la Proposición 3.3.2 se probó que la condición $r_{X,\tau}(1) > 0$ es equivalente a $\Delta_{0,\tau}(X) < 1$.

3.5. Algunos resultados de punto fijo para nonself-aplicaciones multivaluadas no expansivas

En las secciones anteriores probamos algunos resultados de punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas cuyo rango está contenido en su dominio. No obstante, podemos hacer un estudio similar para aplicaciones cuyo rango no esté contenido en su dominio (a las que llamaremos nonself-aplicaciones). El uso de ultra redes nos permitirá evitar la hipótesis de separabilidad al extender los resultados conocidos para nonself-aplicaciones.

En primer lugar vamos a demostrar que, bajo ciertas condiciones, la $\tau(\mathrm{DL})_\alpha$-condición también implica la τ-FPP para nonself-aplicaciones no expansivas. Para ello vamos a necesitar el siguiente resultado previo.

Teorema 3.5.1. ([18], Lema 11.5) *Sea C un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach X. Sea $F : C \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ semicontinua superiormente y χ-condensante con valores cerrados y convexos. Si $Fx \cap \overline{I_C(x)} \neq \emptyset$*

para todo $x \in C$, donde $I_C(x)$ denota el conjunto "hacia dentro"de x con respecto a C definido por

$$I_C(x) := \{x + \lambda(y - x) : \lambda \geq 0, y \in C\},$$

entonces F tiene un punto fijo.

Teorema 3.5.2. *Sea X un espacio de Banach y τ una topología lineal sobre X tal que las funciones de tipo τ-nulo son τ-lsc. Sea C un subconjunto no vacío, τ-compacto, cerrado, acotado y convexo de X y $T : C \to KC(X)$ una aplicación no expansiva y 1-χ-contractiva tal que $Tx \subset I_C(x)$ para cada $x \in C$. Si X verifica la $\tau(DL)_\alpha$-condición, entonces T tiene un punto fijo.*

Demostración: Fijado $x_0 \in C$, para cada $n \geq 1$, definimos $T_n : C \to KC(X)$ por

$$T_n x = \frac{1}{n} x_0 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) Tx, \quad x \in C.$$

Teniendo en cuenta que para cada $x \in C$ el conjunto $I_C(x)$ es convexo y contiene a C, es fácil ver que $T_n x \subset I_C(x)$ para todo $x \in C$. Como T es 1-χ-contractiva, entonces T_n es $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$-$\chi$-contractiva. Así, podemos aplicar el Teorema 3.5.1 para obtener un punto fijo $x_n \in C$ de T_n. Por tanto, tenemos una sucesión $\{x_n\}$ en C tal que $\lim_n d(x_n, Tx_n) = 0$. Sea $\{n_\alpha\}$ una subred universal de la sucesión de números naturales $\{n\}$. Denotemos $A = A(C, \{x_{n_\alpha}\})$. En primer lugar vamos a probar que

$$Tx \cap I_A(x) \neq \emptyset \;\text{ for every } x \in A.$$

En efecto, la compacidad de Tx_{n_α} implica que, para cada n_α, podemos tomar $y_{n_\alpha} \in Tx_{n_\alpha}$ tal que

$$\|x_{n_\alpha} - y_{n_\alpha}\| = d(x_{n_\alpha}, Tx_{n_\alpha}).$$

Como Tx es compacto, para cada $x \in A$, podemos encontrar $z_{n_\alpha} \in Tx$ tal que

$$\|y_{n_\alpha} - z_{n_\alpha}\| = d(y_{n_\alpha}, Tx) \leq H(Tx_{n_\alpha}, Tx) \leq \|x_{n_\alpha} - x\|.$$

Let $z = \text{lím}_\alpha z_{n_\alpha} \in Tx$, entonces se tiene

$$\lim_\alpha \|x_{n_\alpha} - z\| = \lim_\alpha \|y_{n_\alpha} - z_{n_\alpha}\| \leq \lim_\alpha \|x_{n_\alpha} - x\| = r(C, \{x_{n_\alpha}\}).$$

Como $z \in Tx \subset I_C(x)$, existe $\lambda \geq 0$ tal que $z = x + \lambda(v - x)$ para algún $v \in C$. Si $\lambda \leq 1$, entonces $z \in C$ y, por tanto, de la desigualdad anterior se deduce que $z \in A \subset I_A(x)$. Si $\lambda > 1$, entonces poniendo

$$v = \mu z + (1 - \mu)x \quad \text{con} \quad \mu = \frac{1}{\lambda} \in (0, 1),$$

se tiene

$$\lim_\alpha \|x_{n_\alpha} - v\| \leq \mu \lim_\alpha \|x_{n_\alpha} - z\| + (1 - \mu) \lim_\alpha \|x_{n_\alpha} - x\| \leq r(C, \{x_{n_\alpha}\})$$

que implica que $v \in A$ y, por tanto, $z \in I_A(x)$.

Así pues, la aplicación $T : A \to KC(X)$ es no expansiva, 1-χ-contractiva y verifica $Tx \cap I_A(x) \neq \emptyset$ for every $x \in A$. Además, como X cumple la $\tau(\text{DL})_\alpha$-condición, se tiene

$$r_C(A) \leq \lambda r(C, \{x_{n_\alpha}\})$$

para algún $\lambda < 1$. A partir de aquí podemos seguir la prueba como en el Teorema 3.1.4. ■

Observación 3.5.1. Hay ejemplos que muestran que la condición de no expansividad no puede evitarse en el teorema anterior (ver [30], Nota 4.4). En efecto, si B_2 es la bola unidad cerrada de ℓ_2 y $T : B_2 \to B_2$ está definida como sigue

$$T(x) = T(x_1, x_2, ...) = \left(\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, ...\right),$$

entonces T es una 1-χ-contracción sin punto fijo.

Sin embargo, no sabemos si la condición de χ-contractividad puede evitarse en el teorema anterior. No obstante, en ([65], Teorema 3.2.5) se prueba que, cuando C es un subconjunto τ-secuencialmente compacto de un espacio de Banach X separable o reflexivo cumpliendo la propiedad de Opial no estricta con respecto a una topología lineal τ, entonces cada aplicación no expansiva $T : C \to K(X)$ con $T(C)$ acotado es 1-χ-contractiva.

Nótese que $T(C)$ es un conjunto acotado siempre que C es acotado y $T : C \to CB(X)$ es una aplicación no expansiva. En efecto, si $x_0 \in C$, entonces $Tx \subset B(Tx_0, \|x - x_0\|)$ para cada $x \in C$.

A continuación vamos a aplicar el Teorema 3.5.2 con el fin de generalizar algunos resultados dados en [31] y [20].

Como consecuencia de la Proposición 3.3.3 y usando los argumentos que aparecen en la prueba del Teorema 3.5.2, podemos probar de forma similar el siguiente resultado que extiende el Corolario 3.3.1 para aplicaciones cuyo rango no está contenido en su dominio.

Teorema 3.5.3. *Sea X un espacio de Banach y τ una topología lineal sobre X tal que las funciones de tipo τ-nulo son τ-lsc. Sea C un subconjunto de X no vacío, convexo, cerrado, acotado, τ-compacto y τ-secuencialmente compacto. Supongamos que se cumple una de las siguientes condiciones equivalentes:*

1. $r_{X,\tau}(1) > 0$
2. $\Delta_{0,\tau}(X) < 1$
3. $\zeta_{X,\tau}(\beta) < \beta/(1-\beta)$ *para algún* $\beta \in (0,1)$.

Sea $T : C \to KC(X)$ una aplicación no expansiva y 1-χ-contractiva tal que $Tx \subset I_C(x)$ para cada $x \in C$. Entonces T tiene un punto fijo.

En la Sección 1.3 recordamos que T. Domínguez Benavides y P. Lorenzo obtuvieron en [31] algunos resultados de punto fijo para nonself-aplicaciones multivaluadas no expansivas usando la característica de convexidad no compacta con respecto a las medidas β y χ (ver Teorema 1.3.10 y Teorema 1.3.11). Como la característica $\Delta_{0,\tau}(X)$ verifica las siguientes desigualdades

$$\varepsilon_{\beta,\tau}(X) \geq \Delta_{0,\tau}(X) \geq \varepsilon_{\chi,\tau}(X),$$

el Teorema 3.5.3 generaliza el Teorema 3.6 en [31] para una topología arbitraria τ y elimina la hipótesis de separabilidad de él.

Teniendo en cuenta la Observación 3.5.1 podemos enunciar el siguiente corolario.

Corolario 3.5.1. *Sea X un espacio de Banach separable o reflexivo con la propiedad de Opial no estricta y τ una topología lineal sobre X tal que las funciones de tipo τ-nulo son τ-lsc. Sea C un subconjunto de X no vacío, convexo, cerrado, acotado, τ-compacto y τ-secuencialmente compacto. Supongamos que se cumple una de las siguientes condiciones equivalentes:*

1. $r_{X,\tau}(1) > 0$
2. $\Delta_{0,\tau}(X) < 1$
3. $\zeta_{X,\tau}(\beta) < \beta/(1-\beta)$ *para algún* $\beta \in (0,1)$.

Sea $T : C \to KC(X)$ una aplicación no expansiva tal que $Tx \subset I_C(x)$ para cada $x \in C$. Entonces T tiene un punto fijo.

Como $\Delta_{0,\tau}(X)$ coincide con $\varepsilon_{\chi,\tau}(X)$ cuando X verifica la propiedad de Opial no estricta con respecto a τ, este resultado generaliza el Teorema 3.7 en [31] para una topología arbitraria τ y elimina la hipótesis de separabilidad de él.

Como consecuencia de la Proposición 3.2.2 y del Teorema 3.5.2, podemos extender el Corolario 3.2.1 y el Corolario 3.2.2 para aplicaciones cuyo rango no está contenido en su dominio.

Teorema 3.5.4. *Sea C un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach X tal que*

$$\xi_X(\beta) < \frac{1}{1-\beta} \quad \textit{para algún } \beta \in (0,1).$$

Sea $T : C \to KC(X)$ una aplicación no expansiva y 1-χ-contractiva tal que $Tx \subset I_C(x)$ para cada $x \in C$. Entonces T tiene un punto fijo.

Corolario 3.5.2. *Sea C un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach X tal que $\rho'_X(0) < 1/2$. Sea $T : C \to KC(X)$ una aplicación no expansiva y 1-χ-contractiva tal que $Tx \subset I_C(x)$ para cada $x \in C$. Entonces T tiene un punto fijo.*

En ([20], Teorema 3.4) S. Dhompongsa, A. Kaewcharoen y A. Kaewkhao obtuvieron una relación entre el centro asintótico de una sucesión y la constante de James. Aquí vamos a mostrar una relación similar para redes. Previamente recordamos que un espacio de Banach X se dice que verifica la propiedad WORTH si

$$\operatorname*{lím\,sup}_n \|x_n + x\| = \operatorname*{lím\,sup}_n \|x_n - x\|$$

para cualquier $x \in X$ y cualquier sucesión débilmente nula $\{x_n\}$ en X. Es sabido que si X verifica la propiedad WORTH, entonces X verifica la propiedad de Opial no estricta [38].

Proposición 3.5.1. *Sea C un subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach reflexivo X verificando la propiedad WORTH y sea $\{x_n\}$ una sucesión en C que es regular con respecto a C. Entonces*

$$r_C(A(C, \{x_{n_\alpha}\})) \leq \frac{J(X)}{2} r(C, \{x_{n_\alpha}\})$$

para cada $\{x_{n_\alpha}\}$ subred universal de $\{x_n\}$, donde $J(X)$ denota la constante de James del espacio X definida por

$$J(X) = \sup \{\|x + y\| \wedge \|x - y\| : x, y \in B_X\}.$$

Demostración: Sea $z \in A(C, \{x_{n_\alpha}\})$. Existe una subsucesión $\{y_n\}$ de $\{x_n\}$ tal que

$$\operatorname*{lím}_n \|y_n - z\| = \operatorname*{lím}_\alpha \|x_{n_\alpha} - z\| = r(C, \{x_{n_\alpha}\}) = r(C, \{x_n\}) = r(C, \{y_n\}).$$

A partir de aquí podemos seguir la prueba como en ([20], Teorema 3.4). Podemos suponer, tomando una subsucesión si fuera necesario, que $\{y_n\}$ es débilmente convergente a un punto $y \in C$ y $\lim_n \|y_n - y\|$ existe. Como $\{y_n\}$ es regular con respecto a C, al pasar a una subsucesión no varía el radio asintótico. Denotemos $r = r(C, \{x_{n_\alpha}\})$. Como X satisface la propiedad WORTH y, por tanto, verifica la propiedad de Opial no estricta, entonces se tiene

$$r = \lim_n \|y_n - y\|$$

y

$$r = \lim_n \|y_n - z\| = \lim_n \|(y_n - y) + (y - z)\| =$$
$$= \lim_n \|(y_n - y) - (y - z)\| = \lim_n \|y_n - 2y + z\|.$$

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no trivial en $\mathbb{N}$. En la ultrapotencia $X_{\mathcal{U}}$ de X consideramos

$$\tilde{u} = \frac{1}{r}\{y_n - z\}_{\mathcal{U}} \in S_{X_{\mathcal{U}}} \quad \text{y} \quad \tilde{v} = \frac{1}{r}\{y_n - 2y + z\}_{\mathcal{U}} \in S_{X_{\mathcal{U}}}.$$

Entonces se tiene

$$\|\tilde{u} + \tilde{v}\|_{\mathcal{U}} = \frac{2}{r} \lim_{\mathcal{U}} \|y_n - y\| = \frac{2}{r} \lim_n \|y_n - y\| = 2$$

$$\|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{\mathcal{U}} = \frac{2}{r}\|y - z\|.$$

Usando que la norma es w-slsc, se obtiene

$$\|y - z\| \leq \lim_n \|y_n - z\| = r.$$

Por tanto,

$$J(X_{\mathcal{U}}) \geq \|\tilde{u} + \tilde{v}\|_{\mathcal{U}} \wedge \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{\mathcal{U}} = 2 \wedge \frac{2}{r}\|y - z\| = \frac{2}{r}\|y - z\|.$$

Como cada subespacio finito-dimensional de $X_{\mathcal{U}}$ es casi isométrico a un subespacio finito-dimensional de X ([53], Proposición 2.10), entonces $J(X) = J(X_{\mathcal{U}})$ y, por tanto, se tiene

$$J(X) \geq \frac{2}{r}\|y - z\|.$$

Como la última desigualdad es cierta para cada $z \in A(C, \{x_{n_\alpha}\})$, obtenemos la desigualdad del enunciado. ■

Usando la desigualdad anterior y los argumentos de la prueba del Teorema 3.5.2, podemos obtener el siguiente resultado que suprime la hipótesis de separabilidad del Corolario 3.6 en [20]. Previamente recordamos que un espacio de Banach X es uniformemente no cuadrado si y sólo si $J(X) < 2$. Los espacios de Banach uniformemente no cuadrados son reflexivos [45].

Teorema 3.5.5. *Sea X un espacio de Banach uniformemente no cuadrado verificando la propiedad WORTH y sea C un subconjunto no vacío, acotado, cerrado y convexo de X. Si $T : C \to KC(X)$ es una aplicación no expansiva tal que $Tx \subset I_C(x)$ para todo $x \in C$, entonces T tiene un punto fijo.*

En ([81], Teorema 6.5) A. Wiśnicki y J. Wośko obtienen el mismo resultado introduciendo la noción de ultra centro asintótico.

Apéndice A

Relación entre algunas condiciones que implican la FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas

A lo largo del Capítulo 3 se han obtenido resultados en los que se prueba que ciertas propiedades que garantizan algún tipo de estructura normal también implican la $\tau(\mathrm{DL})_\alpha$-condición y, por tanto, la τ-FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas. Dichos resultados dan respuestas parciales al problema de extender el Teorema de Kirk para aplicaciones multivaluadas y nos llevan a conjeturar que estructura normal implica la existencia de punto fijo para aplicaciones multivaluadas no expansivas. De hecho, nos planteamos si los espacios con estructura normal cumplen la (DL)-condición, propiedad definida por S. Dhompongsa, A. Kaewcharoen y A. Kaewkhao [20] usando sucesiones en lugar de redes, que implica estructura normal débil y la w-FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas. Sin embargo, en este Apéndice vamos dar un ejemplo que muestra que la (DL)-condición es estrictamente más fuerte que la estructura normal débil. Más aún, S. Dhompongsa,

T. Domínguez Benavides, A. Kaewcharoen y B. Panyanak [19] han definido recientemente una nueva propiedad para espacios de Banach llamada propiedad (D), que es más débil que la (DL)-condición y más fuerte que la estructura normal débil, y prueban que si C es un subconjunto no vacío, convexo y débil compacto de un espacio de Banach que verifica la propiedad (D) entonces toda aplicación no expansiva $T : C \to KC(C)$ tiene un punto fijo. El ejemplo que daremos muestra que la estructura normal uniforme no implica dicha propiedad (D). Por tanto, el problema de extender el Teorema de Kirk para aplicaciones multivaluadas no expansivas permanece abierto, ya que la (DL)-condición y la propiedad (D) sólo pueden dar respuestas parciales.

En este Apéndice vamos a trabajar con sucesiones y con la topología débil.

Definición A.0.1. ([19]) *Se dice que un espacio de Banach X verifica la propiedad (D) si existe $\lambda \in [0,1)$ tal que para cualquier subconjunto no vacío, débil compacto y convexo C de X, cualquier sucesión acotada $\{x_n\}$ en C regular y asintóticamente uniforme con respecto a C, y cualquier sucesión $\{y_n\}$ en $A(C,\{x_n\})$ regular y asintóticamente uniforme con respecto a C, se tiene*

$$r(C,\{y_n\}) \leq \lambda r(C,\{x_n\}).$$

Teorema A.0.6. ([19], Teorema 3.2) *Sea X un espacio de Banach verificando la propiedad (D). Entonces X tiene estructura normal débil.*

Teorema A.0.7. ([19], Teorema 3.5) *Sea C un subconjunto no vacío, débil compacto y convexo de un espacio de Banach X que verifica la propiedad (D). Sea $T : C \to KC(C)$ una aplicación no expansiva. Entonces T tiene un punto fijo.*

En este momento sabemos que hay varias condiciones geométricas que implican la FPP para aplicaciones multivaluadas no expansivas: la (DL)-condición, la propiedad (D), $\xi_X(\beta) < 1/(1-\beta)$ para algún β, $\zeta_X(\beta) < \beta/(1-\beta)$ para algún β, $\Delta_0(X) < 1$ y $r_X(1) > 0$. Además sabemos que todas estas propiedades implican algún tipo de estructura normal (w-NS, w-UNS o UNS). Una cuestión natural es determinar la relación exacta que existe entre dichas propiedades. Por tanto vamos a estudiar la relación existente entre las siguientes propiedades: (DL)-condición, propiedad (D), w-NS, w-UNS, UNS, $\xi_X(\beta) < 1/(1-\beta)$ para algún β, $\zeta_X(\beta) < \beta/(1-\beta)$ para algún β, $\Delta_0(X) < 1$ y $r_X(1) > 0$. En la Sección 3.3 probamos que las tres últimas condiciones son equivalentes, por tanto sólo vamos a considerar la condición $r_X(1) > 0$ como representante de las tres.

En la siguiente proposición mostramos algunas relaciones que son ya conocidas y otras relaciones que son similares a las que probamos en la Sección 3.2 y en la Sección 3.3.

Proposición A.0.2.

1. *La (DL)-condición implica la propiedad (D) que implica w-NS.*
2. *$\xi_X(\beta) < 1/(1-\beta)$ para algún $\beta \in (0,1)$ implica UNS y la (DL)-condición para los subconjuntos separables de X.*
3. *$r_X(1) > 0$ implica w-UNS y la (DL)-condición.*
4. *w-UNS implica w-NS.*
5. *w-NS no implica w-UNS.*
6. *UNS implica w-UNS.*
7. *w-UNS no implica UNS.*

Demostración:

1. De la definición se deduce fácilmente que la propiedad (D) es más débil que la (DL)-condición.

   Por otra parte, Dhompongsa et al. probaron en ([19], Teorema 3.2) que la propiedad (D) implica w-NS.

2. Benítez et al. probaron en ([8], Proposición 2.9) que $\xi_X(\beta) < 1/(1-\beta)$ para algún $\beta \in (0,1)$ implica UNS.

   Por otra parte, en la Proposición 3.2.2 probamos que $\xi_X(\beta) < 1/(1-\beta)$ para algún $\beta \in (0,1)$ implica la $(\mathrm{DL})_\alpha$-condición y observamos que, cuando C es separable, se puede obtener una desigualdad análoga usando sucesiones en lugar de ultra redes. Así pues, X verifica la (DL)-condición para subconjuntos separables de X.

3. Como $WCS(X) \geq 1 + r_X(1)$ para cada espacio de Banach X ([62], Teorema 3.2), como consecuencia se deduce que $r_X(1) > 0$ implica w-UNS.

   Por otra parte, para deducir que $r_X(1) > 0$ implica la (DL)-condición, podemos probar fácilmente una desigualdad para sucesiones similar a la obtenida en la Proposición 3.3.3. En efecto, sea C un subconjunto débil compacto y convexo de X y sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en C regular con respecto a C. Podemos suponer, tomando una subsucesión si fuera necesario, que $\{x_n\}$ es débilmente convergente a un punto $x \in C$ y que existe $\lim_n \|x_n - x\|$. Como $\{x_n\}$ es regular con respecto a C, el radio asintótico no varía al tomar una subsucesión. Sea $z \in A(C, \{x_n\})$. Consideremos $y = \frac{x-z}{\|x-z\|}$ con $\|y\| = 1$ y la sucesión $y_n = \frac{x_n - x}{\|x-z\|}$ que es débilmente nula con $\lim_n \|y_n\| \geq 1$. Entonces se tiene

   $$1 + r_X(1) \leq \liminf_n \|y_n + y\| = \liminf_n \frac{\|x_n - z\|}{\|x-z\|} \leq \frac{r(C, \{x_n\})}{\|x-z\|}$$

   de donde se deduce

   $$r_C(A(C, \{x_n\})) \leq \frac{1}{1 + r_X(1)} r(C, \{x_n\}).$$

   De esta desigualdad se deduce que X cumple la (DL)-condición cuando $r_X(1) > 0$.

4. Ver ([4], Teorema VI.3.3).

5. Ver ([4] Ejemplo VI.5): El espacio X, definido como la ℓ_2-suma directa de los espacios de sucesiones $\{\ell_n\}_{n\geq 2}$, es reflexivo y tiene estructura normal porque es un espacio de Banach uniformemente convexo en cada dirección (UCED). Sin embargo,

$$WCS(X) = \text{ínf}\{WCS(\ell_n) : n \geq 2\} = \text{ínf}\{2^{1/n} : n \geq 2\} = 1.$$

6. Es consecuencia directa de la desigualdad $N(X) \leq WCS(X)$ (ver [14]).

7. Ver ([4] Ejemplo VI.6): Sea X el espacio ℓ_2-suma directa de los espacios de sucesiones $\{\ell_{r_n}\}$ con $r_n = (1+n)/n$. Entonces $N(X) = 1$, porque

$$N(X) \leq N(\ell_{r_n}) = \text{mín}\{2^{1/r_n}, 2^{1-1/r_n}\}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, $WCS(X) = \sqrt{2}$.

■

En la siguiente proposición mostramos algunas otras relaciones existentes entre las condiciones consideradas en este apéndice.

Proposición A.0.3. *1. La (DL)-condición no implica w-UNS.*

2. UNS no implica la propiedad (D).

3. La propiedad (D) no implica la (DL)-condición.

4. $r_X(1) > 0$ *no implica UNS.*

Demostración:

1. Sea X el espacio ℓ_2-suma directa de los espacios de sucesiones $\{\ell_n\}_{n\geq 2}$. Como X es UCED, el centro asintótico de una sucesión acotada en un subconjunto no vacío, débil compacto y convexo es unitario. Por tanto X cumple la (DL)-condición. Sin embargo, en la proposición anterior vimos que $WCS(X) = 1$.

2. Sea $X = \mathbb{R} \bigoplus_\infty \ell_2 \bigoplus_\infty \ell_2$. Como $\min\{N(\mathbb{R}), N(\ell_2)\} > 1$, se deduce de [15] que $N(X) > 1$.

   Sin embargo, X no verifica la propiedad (D). En efecto, consideremos el subconjunto $C = B_X$ y la sucesión débilmente nula $x_n = (0, e_n, 0)$ en C. Como X satisface la propiedad de Opial no estricta, se tiene $r(C, \{x_n\}) = 1$ y $A(C, \{x_n\}) = B_{\mathbb{R}} \times \{0\} \times B_{\ell_2}$. Considerando la sucesión $y_n = (0, 0, e_n) \in A(C, \{x_n\})$ con $r(C, \{y_n\}) = 1$, se deduce que X no verifica la propiedad (D).

3. Sea $X = \mathbb{R} \bigoplus_\infty \ell_2$. Entonces X satisface la propiedad (D) porque el centro asintótico de cada sucesión acotada en cualquier subconjunto débil compacto y convexo es compacto. Efectivamente, sea C un subconjunto no vacío, débil compacto y convexo de X y sea $\{x_n\} = \{(u_n, v_n)\}$ una sucesión acotada en C que es regular con respecto a C. Como C es débil compacto podemos suponer, tomando una subsucesión si fuera necesario, que $\{x_n\}$ es débilmente convergente a un punto $(u, v) \in C$. Así, $u_n \to u$, $v_n \rightharpoonup v$ y podemos suponer también que existe $\lim_n \|v_n - v\|_2 =: d$. Como X verifica la propiedad de Opial no estricta, es fácil deducir que $r(C, \{x_n\}) = d$ y $A(C, \{x_n\}) = ([u-d, u+d] \times \{v\}) \cap C$ que es compacto. Entonces, para cualquier sucesión $\{y_n\}$ en $A(C, \{x_n\})$ regular con respecto a C se tiene que $r(C, \{y_n\}) = 0$ y, por tanto, X cumple la propiedad (D).

   Sin embargo, X no verifica la (DL)-condición. En efecto, consideremos el subconjunto $C = B_X$ y la sucesión débilmente nula $x_n = (0, e_n)$ en C. Entonces $r(C, \{x_n\}) = 1$, $A(C, \{x_n\}) = B_{\mathbb{R}} \times \{0\}$ y $r_C(A(C, \{x_n\})) = 1$.

4. Sea X el espacio ℓ_1. Entonces $r_X(1) > 0$. Sin embargo, X no tiene UNS.

■

Observación A.0.2. A partir de los resultados obtenidos en la Proposición A.0.2 y en la Proposición A.0.3, podemos determinar la validez o no validez de todas las posibles implicaciones entre UNS, w-UNS, w-NS, $r_X(1) > 0$, $\xi_X(\beta) < 1/(1-\beta)$ para algún β, la (DL)-condición y la propiedad (D) (ver la tabla siguiente), excepto para la siguiente implicación: no sabemos si $\xi_X(\beta) < 1/(1-\beta)$ para algún $\beta \in (0,1)$ implica $r_X(1) > 0$.

En la tabla "S" quiere decir que la condición de arriba implica la condición de la izquierda, "N" quiere decir que la condición de arriba no implica la condición de la izquierda, "?" quiere decir que no sabemos si la condición de arriba implica la condición de la izquierda y, finalmente, ξ_X quiere decir $\xi_X(\beta) < \frac{1}{1-\beta}$ para algún $\beta \in (0,1)$.

	UNS	w-**UNS**	w-**NS**	$r_X(1) > 0$	ξ_X	**(DL)**	**(D)**
UNS	**S**	**N**	**N**	**N**	**S**	**N**	**N**
w-**UNS**	**S**	**S**	**N**	**S**	**S**	**N**	**N**
w-**NS**	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**
$r_X(1) > 0$	**N**	**N**	**N**	**S**	**?**	**N**	**N**
ξ_X	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	**N**	**N**
(DL)	**N**	**N**	**N**	**S**	**S**	**S**	**N**
(D)	**N**	**N**	**N**	**S**	**S**	**S**	**S**

Bibliografía

[1] A.G. Aksoy, M.A. Khamsi, Nonstandard methods in fixed point theory, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[2] D.E. Alspach, *A fixed point free nonexpansive map*, Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981), 423-424.

[3] J.P. Aubin, H. Frankowska, Set-valued Analysis, Birkhäuser, Boston, 1990.

[4] J.M. Ayerbe, T. Domínguez, G. López, Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory, Birkhäuser, 1997.

[5] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications*, Fund. Math. 3 (1922), 133-181.

[6] J. Banás, *On modulus of noncompact convexity and its properties*, Canad. Math. Bull. 30(2) (1987), 186-192.

[7] B. Beauzamy, Introduction to Banach Spaces and Their Geometry, North-Holland, 1986.

[8] C. Benítez, K. Przeslawski, D. Yost, *A universal modulus for normed spaces*, Studia Math. 127(1) (1998), 21-46.

[9] H. Brezis, E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. 88(3) (1983), 486-490.

[10] M.S. Brodskii, P.D. Milman, *On the center of a convex set*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 59(5) (1948), 837-840.

[11] L.E.J. Brouwer, *Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. 71 (1912), 97-115.

[12] F.E. Browder, *Fixed points theorems for noncompact mappings in Hilbert spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 43 (1965), 1272-1276.

[13] F.E. Browder, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 54 (1965), 1041-1044.

[14] W.L. Bynum, *Normal structure coefficients for Banach spaces*, Pacific J. Math. 86(2) (1980), 427-435.

[15] E. Casini, P.L. Papini, *Self Jung constants and product spaces*, Sequence spaces and applications, 140-148, Narosa, New Delhi, 1999.

[16] J.A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 396-414.

[17] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 1974.

[18] K. Deimling, Multivalued Differential Equations, Walter de Gruyter, Berlin/New York, 1992.

[19] S. Dhompongsa, T. Domínguez Benavides, A. Kaewcharoen, B. Panyanak, *The Jordan-von Neumann constant and fixed points for multivalued nonexpansive mappings*, (preprint).

[20] S. Dhompongsa, A. Kaewcharoen, A. Kaewkhao, *The Domínguez-Lorenzo condition and multivalued nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal.64 (2006), 958-970.

[21] T. Domínguez Benavides, *Normal structure coefficients of* $L_p(\Omega)$, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 117A (1991), 299-303.

[22] T. Domínguez Benavides, *Modulus of nearly uniform smoothness and Lindenstrauss formulae*, Glasgow Math. J. 37 (1995), 143-153.

[23] T. Domínguez Benavides, J. García-Falset, M.A. Japón Pineda, *The* τ*-Fixed Point Property for nonexpansive mappings*, Abstr. Appl. Anal. Vol.3, Nos. 3-4 (1998), 343-362.

[24] T. Domínguez Benavides, B. Gavira, *A universal infinite-dimensional modulus for normed spaces and applications*, Nonlinear Anal. 58 (2004), 379-394.

[25] T. Domínguez Benavides, B. Gavira, *A universal infinite-dimensional modulus with applications in fixed point theory*, Proccedings of the International Conference on Fixed Point Theory and Applications, Valencia (2003), 27-40.

[26] T. Domínguez Benavides, B. Gavira, *The fixed point property for multivalued nonexpansive mappings*, (preprint).

[27] T. Domínguez Benavides, B. Gavira, *The* τ*-fixed point property for multivalued nonexpansive mappings and its permanence under renorming*, (preprint).

[28] T. Domínguez Benavides, M.A. Japón Pineda, *Stability of the Fixed Point Property for Nonexpansive Mappings in Some Classes of Spaces*, Communications on Applied Nonlinear Analysis 5 (1998), nº 2, 37-46.

[29] T. Domínguez Benavides, G. López, *Lower bounds for normal structure coefficients*, Proc. Royal Soc. Edinburgh 121A (1992), 245-252.

[30] T. Domínguez Benavides, P. Lorenzo, *Fixed point theorems for multivalued nonexpansive mappings without uniform convexity*, Abs. Appl. Anal. 2003:6 (2003), 375-386.

[31] T. Domínguez Benavides, P. Lorenzo, *Fixed point theorems for multivalued nonexpansive mappings satisfying inwardness conditions*, J. Math. Anal. Appl. 291 (2004), 100-108.

[32] T. Domínguez Benavides, P. Lorenzo, *Asymptotic centers and fixed points for multivalued nonexpansive mappings*, Annal. Univ. Mariae Curie-Sklodowska 58 (2004), 37-45.

[33] T. Domínguez Benavides, R.J. Rodríguez, *Some geometric coefficients in Orlicz sequence spaces*, Nonlinear Anal. 20 (4) (1993), 349-358.

[34] M. Edelstein, *The construction of asymptotic center with a fixed point property*, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 206-208.

[35] J. García-Falset, *S*tability and fixed points for nonexpansive mappings, Houston J. Math. 20(3) (1994), 495-506.

[36] J. García-Falset, *The fixed point property in Banach spaces with NUS-property*, J. Math. Anal. Appl. 215 (1997), 532-542.

[37] J. García-Falset, E. Llorens-Fuster, E.M. Mazcuñán Navarro, *Banach spaces which are r-uniformly noncreasy*, Nonlinear Anal. 53 (2003), 957-975.

[38] J. García-Falset and B. Sims, *Property (M) and the weak fixed point property*, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 2891-2896.

[39] K. Goebel, *On a fixed point theorem for multivalued nonexpansive mappings*, Annal. Univ. Mariae Curie-Sklodowska 29 (1975), 70-72.

[40] K. Goebel, W.A. Kirk, Topics in Metric Fixed Point Theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[41] K. Goebel, T. Sękowski, *The modulus of noncompact convexity*, Annal. Univ. Mariae Curie-Sklodowska 38 (1984), 41-48.

[42] D. Göhde, *Zum Prinzip der Kontraktiven Abbildung*, Math. Nach. 30 (1965), 251-258.

[43] J.P. Gossez, E. Lami Dozo, *Some geometric properties related to the fixed point theory for nonexpansive mappings*, Pacific J. Math. 40 (1972), 565-573.

[44] R. Huff, *Banach spaces which are nearly uniformly convex*, Rocky Mountain J. Math. 10(4) (1980), 743-749.

[45] R.C. James, *Uniformly non-square Banach spaces*, Ann. of Math. 80 (1964), 540-550.

[46] M.A. Japón Pineda, *Estabilidad de la propiedad del punto fijo para aplicaciones no expansivas*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla (1998).

[47] S. Kakutani, *Topological properties of the unit sphere of a Hilbert space*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 14 (1943), 242-245.

[48] M. Kato, L. Maligranda, Y. Takahashi, *On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces*, Studia Math. 144(3) (2001), 275-295.

[49] W.A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly 72 (1965), 1004-1006.

[50] W.A. Kirk, *An abstract fixed point theorem for nonexpansive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981), 640-642.

[51] W.A. Kirk, *Nonexpansive mappings in product spaces, set-valued mappings, and k-uniform rotundity*, Nonlinear Functional Analysis and its Applications (F.E. Browder, ed.), Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math. 45 (1986), 51-64.

[52] W.A. Kirk, S. Massa, *Remarks on asymptotic and Chebyshev centers*, Houston J. Math. 16 (1990), 357-364.

[53] W.A. Kirk, B. Sims, Handbook of Metric Fixed Point Theory, (A. Kirk and B. Sims editors) Kluwer, 2001.

[54] T. Kuczumov, S. Prus, *Asymptotic centers and fixed points of multivalued nonexpansive mappings*, Houston J. Math. 16 (1990), 465-468.

[55] E. Lami Dozo, *Multivalued nonexpansive mappings and Opial's condition*, Proc. Amer. Math. Soc. 38 (1973), 286-292.

[56] C. Lennard, *A new convexity property that implies a fixed point property for* L_1, Studia Math. 100 (1991), 95-108.

[57] T.C. Lim, *A fixed point theorem for multivalued nonexpansive mappings in a uniformly convex Banach space*, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 1123-1126.

[58] T.C. Lim, *Characterizations of normal structure*, Proc. Amer. Math. Soc. 43 (1974), 313-319.

[59] T.C. Lim, *On asymptotic centers and fixed points of nonexpansive mappings*, Can. J. Math. XXXII (1980), 421-430.

[60] T.C. Lim, *A fixed point theorem for weakly inward multivalued contractions*, J. Math. Anal. Appl. 247 (2000), 323-327.

[61] P.K. Lin, *Unconditional bases and fixed points of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math. 116 (1985), 69-76.

[62] P.K. Lin, K.K. Tan, H.K. Xu, *Demiclosedness principle and asymptotic behavior for asymptotically nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal. 24 (1995), 929-946.

[63] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Classical Banach spaces I, Springer, Berlin 1977.

[64] V.I. Liokumovich, *Existence of B-spaces with a non-convex modulus of convexity*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Math. 12 (1973), 43-49.

[65] P. Lorenzo Ramírez, *Algunos teoremas métricos del punto fijo determinísticos y aleatorios*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla (2002).

[66] E. Maluta, *Uniformly normal structure and related coefficients*, Pacific J. Math. 111(2) (1984), 357-369.

[67] E.M. Mazcuñán Navarro, *Geometría de los espacios de Banach en Teoría Métrica del Punto Fijo*, Tesis Doctoral, Valencia (2003).

[68] V.D. Milman, *Geometric theory of Banach spaces. Part II, Geometry of the unit sphere*, Rusian Math. Surveys 26 (1971), 79-163 (translation from Usp. Mat. Nauk. 26 (1971), 73-149).

[69] S.B. Nadler, *Multivalued contraction mappings*, Pacific J. Math. 30 (1969), 475-488.

[70] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 591-597.

[71] S. Prus, *A remark on a theorem of Turett*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 36 (1988), 225-227.

[72] S. Prus, *Nearly uniformly smooth Banach spaces*, Bollettino U.M.I. 3(7) (1989), 507-521.

[73] S. Prus, *Some estimates for the normal structure coefficient in Banach spaces*, Rend. Circ. Mat. Palermo XL (1991), 128-135.

[74] S. Prus, *Banach spaces with the uniform Opial property*, Nonlinear Anal. 18 (1992), 697-704.

[75] S. Prus, *Banach spaces which are uniformly noncreasy*, Nonlinear Anal. 30 (1997), 2317-2324.

[76] S. Prus, *Geometrical background of metric fixed point theory* in Handbook of Metric Fixed Point Theory (W.A. Kirk and B. Sims editors) Kluwer, 2001, p. 93-132.

[77] S. Prus, M. Szczepanik, *Nearly uniformly noncreasy Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. 307 (2005), nº 1, 255-273.

[78] B. Sims, *A class of spaces with weak normal structure*, Bull. Austral. Math. Soc. 49 (1994), 523-528.

[79] F. Sullivan, *A generalization of uniformly rotund Banach spaces*, Canad. J. Math. 31 (1979), 628-636.

[80] A. Wiśnicki, *An example of a nonexpansive mapping which is not 1-ball-contractive*, Annal. Univ. Mariae Curie-Sklodowska 59 (2005), 141-146.

[81] A. Wiśnicki, J. Wośko, *Banach ultrapowers and multivalued nonexpansive mappings*, (preprint).

[82] H.K. Xu, Metric fixed point theorey for multivalued mappings, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 389 (2000), 39 pp.

[83] H.K. Xu, *Multivalued nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear Anal. 43 (2001), 693-706.