

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

52

280

23 MAYO 1997

Francisco Javier Calderón Moreno

**Operadores diferenciales logarítmicos
con respecto a un divisor libre**

por

Francisco Javier Calderón Moreno.

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA, COMPUTACIÓN, GEOMETRÍA Y
TOPOLOGÍA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

08872-1-20330

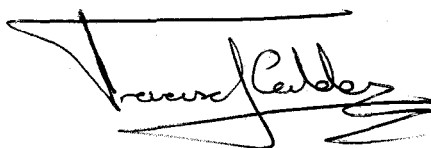
043
155

LBS 1011235

Operadores diferenciales logarítmicos con respecto a un divisor libre

MEMORIA PRESENTADA POR FRANCISCO JAVIER CALDERÓN
MORENO PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN
MATEMÁTICAS

SEVILLA, A VEINTE DE MAYO DE MIL NOVECIENTOS NOVENTA Y SIETE.



FDO.: Francisco Javier Calderón Moreno.

Departamento de Álgebra, Computación, Geometría y Topología.
Programa de Doctorado de Álgebra, Computación, Geometría y Topología.
Doctorando: Francisco Javier Calderón Moreno.
Director de tesis: Luis Narváez Macarro.

Dr. Luis Narváez Macarro.
Catedrático de Álgebra
del Departamento de Álgebra, Computación, Geometría y Topología
de la Universidad de Sevilla

CERTIFICA:

Que la presente memoria "Operadores diferenciales logarítmicos con respecto a un divisor libre" ha sido realizada bajo su dirección por Francisco Javier Calderón Moreno para optar al grado de Doctor en Matemáticas.

Sevilla, veinte de Mayo de mil novecientos noventa y siete.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'L. Narváez', with a long horizontal stroke extending to the left.

FDO.: Luis Narváez Macarro.

Agradecimientos

En primer lugar, deseo agradecer a Luis Narváez su labor de dirección y su constante apoyo durante estos últimos años. Suyas son las ideas que dieron origen a este proyecto de tesis, y él fue quien me propuso la prueba de la mayoría de los teoremas que se demuestran en esta memoria. Suya es, también, la paciencia con que atendió mis constantes consultas que siempre se vieron recompensadas con una revisión crítica y constructiva, con una formativa explicación, o con una adecuada referencia, según requiriera la consulta.

Quiero agradecer a Jose Luis Vicente los reiterados ánimos para que desarrollara una fructífera labor investigadora a la vez que el agotador trabajo docente. Le agradezco, en especial, que haya aceptado presidir el jurado de esta Tesis de Doctorado.

También quisiera mostrar mi agradecimiento

A Paco Castro, más de cinco años compartiendo el mismo despacho en armonía. Gracias por formar parte del jurado.

A Félix Gudiel, Miguel Ángel Olalla y José María Ucha, compañeros de fatigas (y de satisfacciones) en la ardua tarea de realizar una Tesis Doctoral sin descuidar las tareas docentes y a Pilar Pisón, sin los cuales habría sido mucho más solitario el esfuerzo.

Quisiera recordar a los cerca de tres mil alumnos a los que he intentado formar en las facultades de Matemáticas, Física e Informática. Con ellos aprendí que es tan difícil investigar y descubrir teoremas como saber enseñarlos.

Me quedan por citar aquí todos los matemáticos con los que he mantenido provechosas discusiones en Madrid, Valladolid, Santander, Puerto de la Cruz, Grenoble, Marsella, Sedano, Lisboa... y Sevilla. Todos ellos han conseguido recordarme por momentos el especial "encanto" de las matemáticas.

Mi agradecimiento también a los numerosos profesores que me impartieron cursos diversos, entre ellos Philippe Maisonobe y Vicente Navarro, que me honran aceptando ser miembros del tribunal que juzgara esta Tesis. A Vicente Navarro, en especial, también le agradezco, así como a Zoghman Mebkhout, David Mond, Claude Sabbah y Lê Dũng Tráng, el interés mostrado por el presente trabajo y la atención con que escucharon mis explicaciones y me hicieron sugerencias.

Por último, quiero agradecer José Luis Gómez Pardo que haya aceptado venir desde Santiago a la lectura de esta tesis.

A tres doctores antes que yo.

Índice General

Introducción	3
Antecedentes	3
Resultados originales contenidos en la memoria	4
Contenidos de esta memoria	5
1 Preliminares y notación	9
1 Operadores diferenciales	9
1.1 El anillo \mathcal{D}_X y su graduado $\mathcal{G}_{r_F}(\mathcal{D}_X)$	10
1.2 Formas holomorfas.	12
1.3 Conexiones integrables. Complejo de de Rham.	15
1.4 Equivalencia entre \mathcal{O}_X -módulos dotados de una conexión integrable y \mathcal{D}_X -módulos a izquierda.	17
1.5 Complejo de Spencer.	19
1.6 Corchete de Poisson sobre $\mathcal{G}_{r_F}(\mathcal{D}_X)$	23
2 Operadores diferenciales meromorfos.	27
2.1 El anillo $\mathcal{D}_X[*Y]$	27
2.2 Formas meromorfas.	29
2.3 Conexiones meromorfas integrables. Equivalencia con los $\mathcal{D}_X[*Y]$ -módulos a izquierda.	31
2.4 Complejo de de Rham meromorfo.	35
2.5 Complejo de Spencer meromorfo.	36
3 Conexiones logarítmicas y \mathcal{V} -filtración	40
3.1 Derivaciones y formas logarítmicas	40
3.2 Conexiones logarítmicas. Integrabilidad.	47
3.3 \mathcal{V} -filtración	49
2 Operadores logarítmicos con respecto a un divisor libre	55
1 El anillo $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$	55
1.1 El anillo \mathcal{V}_0^I en el caso libre	56
1.2 El anillo \mathcal{V}_0^I en el caso Euler-homogéneo	60
1.3 El anillo \mathcal{V}_0^I en el caso Euler-homogéneo y libre	62
1.4 El haz $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$	65
2 Complejo de de Rham logarítmico	66

2.1	Resultados previos	66
2.2	Equivalencia entre \mathcal{O}_X -módulos dotados de una conexión integrable y $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulos a izquierda.	68
2.3	Complejo de Spencer logarítmico	70
2.4	Complejo de de Rham logarítmico	74
3	Perversidad del complejo logarítmico	79
1	Relación entre el complejo de Koszul y el de Spencer logarítmico .	79
1.1	Ejemplo	86
4	Cálculos efectivos	91
1	\mathcal{V} -grado de un operador logarítmico	91
1.1	Algoritmo	92
2	Coordenadas de un operador logarítmico	93
2.1	Algoritmo	94
3	Ejemplos	95
	Bibliografía	97

Introducción

En esta memoria estudiamos la \mathcal{V} -filtración relativa a divisores libres en una variedad analítica compleja lisa de dimensión arbitraria. Más concretamente abordamos la estructura de los operadores diferenciales en el término \mathcal{V}_0 y, como aplicación, estudiamos el complejo de de Rham logarítmico correspondiente.

Los antecedentes de los resultados obtenidos en esta memoria se encuentran en:

- El trabajo [13], donde Deligne demuestra que el complejo de de Rham logarítmico respecto de un divisor con cruzamientos normales en una variedad compleja lisa (analítica o algebraica) es casiisomorfo al complejo de de Rham meromorfo o racional correspondiente.
- La teoría de K. Saito de los campos de vectores y las formas diferenciales logarítmicas respecto de divisores arbitrarios [35].
- Los resultados de Esnault-Viehweg sobre los operadores diferenciales logarítmicos respecto de cruzamientos normales [15].
- Los resultados de Castro-Mond-Narváez sobre la comparación entre los complejos de de Rham logarítmico y meromorfo respecto de divisores libres fuertemente casihomogéneos [11].
- La teoría de la \mathcal{V} -filtración de Malgrange y Kashiwara respecto de divisores lisos [28], [25].

El resultado de Deligne, unido al teorema de comparación de Grothendieck [21], permite realizar la cohomología singular (resp. la cohomología de de Rham algebraica) del complementario de un divisor con cruzamientos normales en una variedad proyectiva –o más generalmente, completa– compleja lisa, como la hipercohomología de un complejo de haces coherentes, a saber: el complejo de de Rham holomorfo logarítmico (resp. algebraico logarítmico), lo que está en la base de la definición de la filtración de Hodge.

La teoría de K. Saito de los campos y formas logarítmicos respecto de divisores arbitrarios generaliza la definición de Deligne, y contiene en particular

la importante noción de divisor libre, cuyos ejemplos principales se encuentran en ciertos arreglos de hiperplanos, y más generalmente, en los discriminantes de aplicaciones estables. Un problema natural es la comparación entre los complejos logarítmicos y meromorfos respecto de divisores arbitrarios, es decir, la generalización del resultado de Deligne. En [11] se prueba que ambos complejos son casiisomorfos si el divisor es libre y fuertemente casihomogéneo. La prueba es de naturaleza topológica y utiliza pues el teorema de Grothendieck.

En [15] se estudia la relación entre el complejo de de Rham logarítmico y el anillo de los operadores diferenciales generados por los campos logarítmicos respecto de un divisor con cruzamientos normales. Este anillo aparece emparejado con la \mathcal{V} -filtración de Malgrange y Kashiwara, lo que unido a la búsqueda de un tratamiento puramente algebraico de los resultados de [11], constituye la principal motivación del trabajo que aquí presentamos.

Resultados originales contenidos en la memoria

Enunciamos a continuación los resultados originales de esta memoria que consideramos de mayor interés. Supondremos siempre que Y representa un divisor libre dentro de una variedad analítica X .

1. El anillo de los operadores logarítmicos, i.e. el término \mathcal{V}_0 de la \mathcal{V} -filtración, es el álgebra generada por las derivaciones logarítmicas sobre el anillo de las funciones holomorfas.
2. El anillo graduado que origina la filtración natural por el orden sobre el anillo de los operadores logarítmicos coincide con el álgebra simétrica sobre las funciones holomorfas generada por las derivaciones logarítmicas.
3. El complejo de Spencer logarítmico $\mathcal{S}p^\bullet(\log Y)$ es una resolución localmente libre del anillo de las funciones holomorfas, considerado éste como módulo sobre los operadores logarítmicos. Por tanto, se verifica:
 - El complejo de de Rham logarítmico asociado a un $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulo a la izquierda \mathcal{M} es canónicamente isomorfo como complejo de haces de \mathbb{C} -espacios vectoriales al complejo $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M})$.
4. Si una base de las derivaciones logarítmicas verifica que sus símbolos forman una sucesión $\text{Gr}_F(\mathcal{D})$ -regular, el ideal generado por esos símbolos coincide con el ideal generado por los símbolos de los operadores del ideal de los operadores diferenciales generado por las derivaciones logarítmicas. En las condiciones anteriores, el complejo $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \mathcal{S}p^\bullet(\log Y)$ está concentrado en grado 0 y es holónimo. Por tanto, el complejo de de Rham logarítmico correspondiente es un haz perverso.

Como consecuencia de los resultados anteriores se obtienen estos otros resultados:

5. El anillo de los operadores logarítmicos y el anillo graduado $\mathcal{G}_{rF}(\mathcal{D}_X)$ son haces de anillos coherentes.
6. El conjunto de los módulos sobre el anillo de las funciones holomorfas y dotados de una conexión integrable coincide con el conjunto de los módulos a la izquierda sobre el anillo de los operadores logarítmicos.
7. En el caso de que X sea una superficie lisa, el complejo de de Rham logarítmico es un haz perverso.

Otros resultados originales que aparecen en esta memoria:

- Los operadores logarítmicos P se caracterizan por la siguiente condición: Los sucesivos productos corchetes con f dan potencias sucesivas de f , con f una ecuación local de Y . Es decir, $[\dots[P, f] \cdot^n, f] \in (f^n)$.
- Los símbolos $\sigma(P)$ de los operadores logarítmicos se caracterizan por la siguiente condición: Los sucesivos corchetes de Poisson con f dan potencias sucesivas de f , es decir, $\{\dots\{P, f\} \cdot^n, f\} \in (f^n)$, con f una ecuación local de Y .
- Si Y es un divisor Euler homogéneo, no necesariamente libre, el anillo de los operadores logarítmicos coincide con el anillo de polinomios sobre el campo de Euler con coeficientes en el anillo de operadores que conmutan con una ecuación de Y .
- El anillo de los operadores que conmutan con una ecuación de Y coincide con el álgebra sobre las funciones holomorfas generada por las derivaciones que anulan una ecuación de Y .
- Si el corchete de Poisson con una ecuación de Y de un polinomio en el anillo graduado $\mathcal{G}_{rF}(\mathcal{D}_X)$ es nulo, ese polinomio es el símbolo de un operador que conmuta con una ecuación de Y .

Se acompañan dos algoritmos que, aunque no aparecen implementados en esta memoria, son efectivos y, de hecho, actualmente están desarrollados en lenguaje Lisp por los profesores de este departamento Francisco Jesús Castro y José María Ucha. Estos algoritmos calculan, respectivamente, lo siguiente:

1. Dado un operador diferencial, encontrar el grado del operador por la \mathcal{V} -filtración.
2. Dado un operador diferencial logarítmico, expresarlo como polinomio en una base de las derivaciones logarítmicas, dando los coeficientes, que son funciones holomorfas.

Contenidos de esta memoria

El primer capítulo, "Preliminares y notación", contiene los conceptos básicos sobre los que trabajaremos después y se incluye para comodidad del lector y para

fijar el lenguaje utilizado en la memoria. Así, consiste en una somera introducción a la teoría de \mathcal{D} -módulos, al menos a las nociones necesarias para desarrollar los resultados que aparecen posteriormente en los siguientes capítulos. Lo hemos dividido en varias secciones para reflejar el paralelismo dentro de la propia teoría de \mathcal{D} -módulos de tres “subteorías”, que están íntimamente relacionadas:

1. Conexiones holomorfas integrables y teoría de \mathcal{D} -módulos holomorfos, que se introduce en la sección primera.
2. Conexiones meromorfas integrables y teoría de \mathcal{D} -módulos meromorfos, de la que recordamos las nociones necesarias en la sección segunda.
3. Conexiones logarítmicas integrables y antecedentes de la “teoría” de \mathcal{D} -módulos logarítmicos o $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulos, que se trata en la última sección de este primer capítulo. Ésta sección contiene los diversos conceptos y resultados que nos motivaron para intentar producir una teoría coherente de \mathcal{D} -módulos logarítmicos, todavía pendiente de desarrollar en muchas direcciones. Podemos considerar dos bloques principales:

- El primero, que trata la teoría de derivaciones y formas logarítmicas, introducida por K. Saito.
- El segundo, donde se da la noción de conexión logarítmica.
- El tercero, que trata sobre la \mathcal{V} -filtración de Kashiwara-Malgrange.

Lo dividimos así porque hasta ahora eran conceptos independientes que, aunque relacionados entre sí, nacieron de motivaciones dispares. Precisamente, uno de los principales objetivos de este trabajo es relacionar los conceptos introducidos por Saito y los introducidos por Kashiwara y Malgrange e integrarlos de una manera clara en una nueva “Teoría de \mathcal{D} -módulos logarítmicos”, o $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulos, donde $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ es el término de grado cero de la \mathcal{V} -filtración citada.

Como guía para este capítulo damos este pequeño esquema:

Operadores holomorfos	Op. meromorfos	Op. logarítmicos
$\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$	$\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X[*Y])$	$\text{Der}(\log Y)$
Ω_X^p	$\Omega_X^p[*Y]$	$\Omega_X^p(\log Y)$
Conexión (integrable)	Con. meromorfa (int.)	Con. logarítmica (int.)
$\text{Sp}(\mathcal{O}_X)$	$\text{Sp}(\mathcal{O}_X[*Y])$	$\text{Sp}(\log Y)$
\mathcal{D}_X -módulos	$\mathcal{D}_X[*Y]$ -módulos	$\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulos

El capítulo “Operadores logarítmicos con respecto a un divisor libre” contiene los resultados anunciados en [10]. Los resultados de Saito, que demuestran la utilidad de las formas logarítmicas y del complejo de de Rham logarítmico, así como los trabajos de Esnault-Viehweg ([15],[14]) para divisores con cruzamientos normales nos motivaron a estudiar el caso más general de los divisores libres, dejando abierta la posibilidad de avanzar hacia el caso general de cualquier divisor.

Este capítulo lo dividimos en dos secciones. Estas secciones tratan, respectivamente, los siguientes temas:

1. Estudio del anillo de los operadores logarítmicos, local y globalmente.
2. Estudio del complejo de de Rham logarítmico.

En la primera sección el resultado más destacable es un teorema de estructura, el teorema 1.1.1, en el que se caracteriza a los operadores logarítmicos como polinomios en las derivaciones logarítmicas. Esta caracterización nos surgió como una pregunta natural al observar el comportamiento de los operadores diferenciales respecto de las derivaciones. Por sí solo justifica que siguiéramos adelante intentando aplicaciones que desarrollen la teoría de \mathcal{D} -módulos logarítmicos. Aún más que el resultado en sí, que esperábamos, nos sorprendió el desarrollo de la prueba, puramente algebraica, pero que esconde sin la menor duda un significado geométrico, pendiente de analizar. Más adelante comentamos con más detalle los resultados intermedios.

La segunda sección está dedicada a la prueba de varias aplicaciones del teorema 1.1.1. Destacamos aquí el teorema 2.4.1, que nos da un isomorfismo entre el complejo de de Rham logarítmico y el complejo $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$. Previamente definimos el complejo de Spencer logarítmico y probamos que es una resolución de \mathcal{O}_X como $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulo a la izquierda.

Destacamos también un resultado que ilustra muy bien las posibilidades abiertas: La equivalencia entre los $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulos a la izquierda y los \mathcal{O}_X -módulos dotados de una conexión logarítmica.

En el capítulo “Perversidad del complejo logarítmico” se incluyen los últimos resultados obtenidos, fruto del estudio del complejo de de Rham logarítmico. Nuestra intención es probar la constructibilidad y/o perversidad de este complejo, empezando por el caso en que Y es libre, que hemos estudiado en esta memoria, para seguir en el futuro con el caso casi-homogéneo, conectando con el trabajo de Castro-Mond-Narváez [11]. El resultado más interesante y concreto obtenido hasta ahora consiste en una condición suficiente de perversidad del complejo de de Rham logarítmico. Esta condición, de la que se prueba con un contraejemplo que no es necesaria, se verifica en el caso de que X sea una superficie lisa.

Hemos añadido al final un último capítulo, “Cálculos efectivos”, para incluir dos algoritmos de utilidad que se deducen de manera inmediata de los resultados

que aparecen en esta memoria. Así, calculamos el grado según la \mathcal{V} -filtración de un operador diferencial cualquiera. Esto nos permite, por ejemplo, saber cuándo un operador es logarítmico. Calculamos en el segundo algoritmo la expresión de un operador logarítmico en función de las derivadas parciales. Este algoritmo repite la prueba del teorema 1.1.1, que es totalmente constructiva.

Capítulo 1

Preliminares y notación

1 Operadores diferenciales

Introducción

Esta primera sección del primer capítulo consiste en la introducción de una serie de conceptos básicos de la Teoría de \mathcal{D}_X -módulos, donde X representará siempre una variedad analítica compleja de dimensión n . Empezamos recordando la definición de las derivaciones $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$ sobre el anillo de las funciones holomorfas \mathcal{O}_X , derivaciones que generan el \mathcal{O}_X -álgebra no conmutativa \mathcal{D}_X de los operadores diferenciales holomorfos. A partir de este anillo, dotado de la filtración F^\bullet , dada por el orden natural de los operadores, se obtiene el anillo graduado conmutativo $\text{Gr}_F(\mathcal{D}_X)$. Para una introducción a estos temas puede utilizarse [18]. También [12], [3], [4], [12], [26], [30].

Recordamos a continuación el \mathcal{O}_X -módulo de las 1-formas diferenciales holomorfas Ω_X^1 , la dualidad perfecta entre las 1-formas y las derivaciones, la diferencial exterior y el complejo de de Rham. Para una introducción a estos temas se recomiendan [29], [13], [33] y [19], en las que se trata sólo el caso de anillos y módulos. Para el caso de haces y esquemas, consultar [22].

Seguimos con otra serie de definiciones íntimamente relacionadas: conexión y conexión integrable, complejo de de Rham asociado a un \mathcal{D}_X -módulo a izquierda \mathcal{M} y equivalencia entre \mathcal{O}_X -módulos dotados de una conexión integrable y \mathcal{D} -módulos a la izquierda. Hemos intentado explicar estos conceptos de manera que el lector no tenga que recurrir a la bibliografía indicada, aclarando además los detalles más difíciles de encontrar en dicha bibliografía. Terminamos en lo referente a \mathcal{D}_X -módulos con la definición del complejo de Spencer, e incluimos la prueba de que es una resolución \mathcal{D}_X -localmente libre de \mathcal{O}_X y de que verifica el isomorfismo $DR_X(\mathcal{M}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\text{Sp}^\bullet, \mathcal{M})$.

Para finalizar la primera sección, recordamos la existencia del corchete de Poisson sobre el anillo graduado $\text{Gr}_F(\mathcal{D}_X)$, corchete que viene definido de dos maneras distintas. La primera definición es puramente algebraica y proviene

exclusivamente del hecho que el graduado de \mathcal{D}_X con respecto a la filtración F^\bullet es conmutativo. La segunda tiene un significado geométrico. Enviamos $\mathcal{G}_{\Gamma F}(\mathcal{D}_X)$ en el haz de las funciones holomorfas sobre el espacio cotangente de X , que, al ser una variedad simpléctica, está dotada canónicamente de un corchete de Poisson que trasmite a $\mathcal{G}_{\Gamma F}(\mathcal{D}_X)$. Se demuestra que ambos corchetes coinciden.

1.1 El anillo \mathcal{D}_X y su graduado $\mathcal{G}_{\Gamma F}(\mathcal{D}_X)$.

Sea X una variedad analítica compleja de dimensión n . Notamos \mathcal{O}_X el haz de las funciones holomorfas sobre X . Notamos $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ al haz de los endomorfismos \mathbb{C} -lineales sobre \mathcal{O}_X . Dado un abierto U contenido en X :

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)(U) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X|U}, \mathcal{O}_{X|U}).$$

Contenidos en este haz podemos considerar dos subhaces:

1. La imagen de \mathcal{O}_X por la inclusión natural

$$i: \mathcal{O}_X \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X), \quad i(f)(g) = fg,$$

con f y g dos secciones de funciones holomorfas. Llamamos

$$\mathcal{D}_X^{(0)} = i(\mathcal{O}_X),$$

que identificaremos con \mathcal{O}_X y lo denotaremos también por $F^0\mathcal{D}_X$.

2. El conjunto $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) = \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ de las derivaciones de \mathcal{O}_X , es decir, las secciones δ de $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ tales que

$$\delta(fg) = f\delta(g) + g\delta(f),$$

para dos secciones cualesquiera f y g de \mathcal{O}_X .

Llamamos $\mathcal{D}_X^{(1)}$ al \mathcal{O}_X -módulo definido en cada abierto de X por las secciones P de $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ que, para toda sección a de $\mathcal{D}_X^{(0)}$ en ese abierto, verifican:

$$\mathcal{D}_X^{(1)} = \{P \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X), [P, a] \in \mathcal{D}_X^{(0)}, \},$$

donde el corchete de Lie $[-, -]$ representa el conmutador de dos secciones de $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$:

$$[P, Q] = PQ - QP.$$

El subhaz así definido verifica:

$$\mathcal{D}_X^{(1)} = \mathcal{D}_X^{(0)} \oplus \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) \subset \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X), \quad (1.1)$$

donde la descomposición en suma directa proviene de la evaluación en el 1 de \mathcal{O}_X de las secciones de $\mathcal{D}_X^{(1)}$, evaluación que nos proporciona una proyección de

$\mathcal{D}_X^{(1)}$ en \mathcal{O}_X . Para cualquier entero m mayor o igual que 1, se definen de manera inductiva los \mathcal{O}_X -módulos

$$\mathcal{D}_X^{(m)} = \{P \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X), [P, \mathcal{D}_X^{(0)}] \subset \mathcal{D}_X^{(m-1)}\}.$$

Estos subhaces de $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ nos definen el haz

$$\mathcal{D}_X = \cup_{m \geq 0} \mathcal{D}_X^{(m)},$$

a cuyos elementos llamamos operadores diferenciales sobre X (cf. [23, 16.8], notado allí $\text{Diff}_{X/\mathbb{C}}$). El haz \mathcal{D}_X es un haz de anillos dotado de una filtración F^\bullet , definida por:

$$F^m \mathcal{D}_X = \mathcal{D}_X^{(m)},$$

y que verifica:

$$(a) \mathcal{D}_X^{(p)} \cdot \mathcal{D}_X^{(m)} \subset \mathcal{D}_X^{(p+m)}.$$

$$(b) [P, Q] \in \mathcal{D}_X^{(m+n-1)}, \text{ siendo } P \text{ y } Q \text{ dos secciones cualesquiera de } \mathcal{D}_X^{(m)} \text{ y } \mathcal{D}_X^{(n)}, \text{ respectivamente.}$$

Para cada m mayor que 0, llamamos

$$\mathcal{G}_{r_F^m}(\mathcal{D}_X) = \frac{\mathcal{D}_X^{(m)}}{\mathcal{D}_X^{(m-1)}}.$$

En el caso $m = 0$, $\mathcal{G}_{r_F^0}(\mathcal{D}_X) = \mathcal{D}_X^{(0)}$. Podemos definir el anillo graduado

$$\mathcal{G}_{r_F}(\mathcal{D}_X) = \oplus_{m \geq 0} \mathcal{G}_{r_F^m}(\mathcal{D}_X).$$

Este anillo, a diferencia de \mathcal{D}_X , es conmutativo, gracias a la propiedad (b). Además, gracias a la identificación (ver 1.1)

$$\mathcal{G}_{r_F^1}(\mathcal{D}_X) = \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X),$$

es posible construir un morfismo canónico de \mathcal{O}_X -álgebras:

$$\alpha : \text{Sim}_{\mathcal{O}_X}(\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)) \rightarrow \mathcal{G}_{r_F}(\mathcal{D}_X).$$

A la función que a cada elemento de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ le asigna su clase en $\mathcal{G}_{r_F^m}(\mathcal{D}_X)$:

$$\mathcal{D}_X^{(m)} \rightarrow \mathcal{G}_{r_F^m}(\mathcal{D}_X),$$

de núcleo $\mathcal{D}_X^{(m-1)}$, la denotamos $\sigma_m(P)$. Cuando $P \in \mathcal{D}_X^{(m)} - \mathcal{D}_X^{(m-1)}$, a $\sigma_m(P)$ le llamamos símbolo de P y escribimos $\sigma(P)$.

Localmente, sea un punto x de X y sea $(U; x_1, \dots, x_n)$ una carta local centrada en x . Si consideramos los gérmenes de los anteriores haces en x , se verifica:

1. $\mathcal{O}_{X,x} = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\} =: \mathcal{O}$.
2. $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)_x = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{X,x} \frac{\partial}{\partial x_i} = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O} \partial_i = \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O})$.
3. $\mathcal{D}_{X,x} = \mathcal{O}_{X,x}[\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}] = \mathcal{O}[\partial_1, \dots, \partial_n] = \text{Diff}_{\mathcal{O}/\mathbb{C}}$, siguiendo la notación de [23]

Esta última igualdad proporciona otros resultados:

1. Si notamos $\xi_i = (\sigma(\frac{\partial}{\partial x_i}))_x$, se tiene

$$\mathcal{G}_{\text{rF}}(\mathcal{D}_X)_x = \mathcal{O}[\xi_1, \dots, \xi_n] = \text{Sim}_{\mathcal{O}}(\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O})).$$

De hecho:

$$\mathcal{G}_{\text{rF}}(\mathcal{D}_X)|_U \simeq \mathcal{O}_X|_U[\xi_1, \dots, \xi_n]. \quad (1.2)$$

2. El isomorfismo entre las fibras

$$\text{Sim}_{\mathcal{O}_X}(\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X))_x \rightarrow \mathcal{G}_{\text{rF}}(\mathcal{D}_X)_x$$

prueba que el morfismo anterior α es un isomorfismo de haces.

3. El haz \mathcal{D}_X es una \mathcal{O}_X -álgebra generada por el \mathcal{O}_X -módulo $\mathcal{D}_X^{(1)}$. De hecho, si $(U; x_1, \dots, x_n)$ es una carta local de X :

$$\mathcal{D}_U^{(m)} = \bigoplus_{|\alpha| \leq m} \mathcal{O}_U \cdot \underline{\partial}^\alpha,$$

$$\mathcal{D}_U = \bigoplus_{\alpha} \mathcal{O}_U \cdot \underline{\partial}^\alpha,$$

donde α es un elemento de \mathbb{N}^n , y $\underline{\partial}^\alpha$ representa a $\partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n}$, con $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Si consideramos además la coherencia de \mathcal{O}_X (cf. [9, VI.3, lema 3.2]) se deducen unas consecuencias inmediatas:

1. El anillo $\mathcal{G}_{\text{rF}}(\mathcal{D}_X)$ es coherente.
2. El anillo \mathcal{D}_X es coherente (cf. [2]).

1.2 Formas holomorfas.

Definición 1.2.1.— (cf. [29, 26], [22, 15&16], [19, II.2]). Se definen el haz Ω_X^1 de las 1-formas diferenciales sobre X y la derivación

$$d: \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1,$$

que llamaremos diferencial exterior, como el \mathcal{O}_X -módulo coherente (único salvo isomorfismo) tal que para todo \mathcal{O}_X -módulo coherente \mathcal{M} y cualquier derivación δ en $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M})$, existe un único homomorfismo \mathcal{O}_X -lineal

$$\delta' : \Omega_X^1 \rightarrow \mathcal{M},$$

tal que $\delta = \delta' \cdot d$.

Localmente, en un abierto U de x , con coordenadas (x_1, \dots, x_n) :

$$\Omega_{X,x}^1 = \left\{ \sum_{i=1}^n f_i dx_i, f_i \in \mathcal{O} \right\} = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O} dx_i,$$

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,$$

para cualquier sección f de \mathcal{O} . En particular, Ω_X^1 es un \mathcal{O}_X -módulo localmente libre de rango n . Como consecuencia inmediata de la definición, se verifica la igualdad

$$\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^1, \mathcal{O}_X),$$

identificando δ y δ' de la definición, es decir, dado $\delta \in \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$, existe un único $\delta' \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^1, \mathcal{O}_X)$ tal que $\delta = \delta' \cdot d$ y, recíprocamente, dado δ' se define un único $\delta = \delta' \cdot d$.

Al ser Ω_X^1 un \mathcal{O}_X -módulo localmente libre de rango finito, es también un módulo reflexivo y se tiene:

$$\Omega_X^1 = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X).$$

Concretamente, dada una sección $\sum_{j=1}^n g_j dx_j$ de Ω_X^1 en un abierto U de X con coordenadas (x_1, \dots, x_n) , se puede considerar como sección en el abierto U de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X)$, utilizando

$$dx_j \left(\sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = f_j,$$

siendo g_j y f_i funciones holomorfas en el abierto U . Recíprocamente, dado una sección ω de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X)$ en un abierto U , se puede considerar como forma diferencial:

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) dx_i.$$

De hecho, existe una dualidad perfecta entre $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$ y Ω_X^1 . Tenemos definida una aplicación \mathcal{O}_X -bilineal no degenerada:

$$\begin{aligned} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) \times \Omega_X^1 &\longrightarrow \mathcal{O}_X, \\ (\delta, \omega) &\longrightarrow \langle \delta, \omega \rangle. \end{aligned}$$

Localmente

$$\left\langle \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j=1}^n g_j dx_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n f_i g_i,$$

con f_i y g_j funciones holomorfas en un abierto U de X .

A partir de Ω_X^1 obtenemos el \mathcal{O}_X -módulo Ω_X^p de las p -formas holomorfas sobre X :

$$\Omega_X^p = \wedge^p \Omega_X^1.$$

Localmente

$$\Omega_{X,x}^p = \left\{ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}, f_{i_1 \dots i_p} \in \mathcal{O} \right\} \simeq \mathcal{O}^{\binom{n}{p}}.$$

El conjunto de las formas holomorfas definen la \mathcal{O}_X -álgebra exterior

$$\bigoplus_{p=0}^n \Omega_X^p,$$

en la que tenemos definido el producto interno, también llamada contracción, entre formas y derivaciones de \mathcal{O}_X :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) \times \Omega_X^p &\longrightarrow \Omega_X^{p-1}. \\ (\delta, \omega) &\longmapsto \langle \delta, \omega \rangle \end{aligned}$$

Localmente

$$\langle \delta, \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p \rangle = \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \langle \delta, \alpha_i \rangle \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{i-1} \wedge \alpha_{i+1} \wedge \dots \wedge \alpha_p,$$

donde δ representa una sección de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$ y las α_i , con i entre 1 y p , secciones de Ω_X^1 .

Definición 1.2.2.— Sobre la \mathcal{O}_X -álgebra $\bigoplus_{p=0}^n \Omega_X^p$ está definido un único homomorfismo de haces de grupos aditivos d que coincida con la diferencial exterior previamente definida sobre $\Omega_X^0 = \mathcal{O}_X$ y que verifique

1. $d \circ d = 0$.

2. Para cualesquiera dos secciones $\omega_1 \in \Omega_X^p$ y $\omega_2 \in \Omega_X^q$:

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

Este homomorfismo, que llamamos diferencial exterior y notamos d , envía una p -forma diferencial en una $p+1$ -forma diferencial, y su expresión en un sistema de coordenadas $(U; x_1, \dots, x_n)$ viene dada por la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} d: \Omega_X^p &\longrightarrow \Omega_X^{p+1}, \\ \omega &\longmapsto d\omega \end{aligned}$$

$$d(g dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) = dg \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} = \sum_{i=i_1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p},$$

con g una función holomorfa.

1.3 Conexiones integrables. Complejo de De Rham.

Definición 1.3.1.— Para cada entero p entre 1 y n , tenemos definido el haz Ω_X^p de las p -formas holomorfas. Dado un \mathcal{O}_X -módulo a izquierda \mathcal{M} , notamos

$$\Omega_X^p(\mathcal{M}) = \Omega_X^p \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M},$$

para cada p . En el caso $p = 0$, $\Omega_X^0(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$. Cuando $p = 1$, tenemos un isomorfismo canónico

$$\begin{aligned} \Omega_X^1(\mathcal{M}) &= \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} = \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X), \mathcal{M}). \end{aligned}$$

Llamaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ al morfismo bilineal de \mathcal{O}_X -módulos:

$$\begin{aligned} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) \times \Omega_X^1(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathcal{M}, \\ (\delta, \omega \otimes m) &\longrightarrow \langle \delta, \omega \otimes m \rangle = \langle \delta, \omega \rangle \cdot m. \end{aligned}$$

Definición 1.3.2.— (cf. [13, 2]) Sea un \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} . Una conexión holomorfa sobre \mathcal{M} es un homomorfismo \mathbb{C} -lineal:

$$\nabla: \mathcal{M} \rightarrow \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M},$$

que verifica la identidad de Leibniz:

$$\nabla(fm) = df \cdot m + f\nabla(m),$$

donde f y m son secciones de \mathcal{O}_X y \mathcal{M} , respectivamente, y d es la diferencial exterior sobre \mathcal{O}_X .

Si δ es una derivación de \mathcal{O}_X , tenemos definida un endomorfismo \mathbb{C} -lineal sobre \mathcal{M} :

$$\begin{aligned} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) &\longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}), \\ \delta &\longmapsto \nabla_{\delta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\delta}: \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M}, \\ m &\longmapsto \langle \delta, \nabla(m) \rangle. \end{aligned}$$

Se observa que para cualesquiera δ , f y m , secciones de $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$, \mathcal{O}_X y \mathcal{M} , respectivamente, se verifica:

1. $\nabla_{f\delta}(m) = f \cdot \nabla_{\delta}(m)$.
2. $\nabla_{\delta}(fm) = \delta(f) \cdot m + f \cdot \nabla_{\delta}(m)$.

Por tanto, tener una conexión ∇ sobre \mathcal{M} es equivalente a tener un morfismo de \mathcal{O}_X -módulos

$$\nabla' : \mathcal{D}er_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$$

que verifique el equivalente a la condición de Leibniz:

$$\nabla'_\delta(fm) = \delta(f) \cdot m + f \cdot \nabla'_\delta(m).$$

Para comprobar la equivalencia entre tener definida ∇ y tener definida ∇' , basta considerar la correspondencia que a ∇' le asigna la siguiente ∇ :

$$\nabla : \mathcal{M} \rightarrow \Omega_X^1(\mathcal{M}),$$

tal que $\nabla(m)$ es el elemento de $\Omega_X^1(\mathcal{M}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{D}er_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X), \mathcal{M})$ definido como:

$$\nabla(m)(\delta) = \nabla'_\delta(m).$$

Decimos que una conexión ∇ de $\mathcal{H}om_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}, \Omega_X^1(\mathcal{M}))$ o, lo que es lo mismo, una conexión

$$\nabla \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{D}er_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X), \mathcal{H}om_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{M}))$$

es integrable si, dados dos secciones δ y δ' de derivaciones de \mathcal{O}_X , verifica

$$\nabla_{[\delta, \delta']} = [\nabla_\delta, \nabla_{\delta'}],$$

donde $[,]$ representa respectivamente el corchete de Lie en $\mathcal{D}er_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$ y el conmutador en $\mathcal{H}om_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$.

A partir de ∇ y de la diferencial exterior d , podemos construir un morfismo (\mathbb{C} -lineal)

$$\nabla^p : \Omega_X^p(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega_X^{p+1}(\mathcal{M}),$$

para todo entero p entre 1 y n . Dadas dos secciones ω y m de los haces Ω_X^p y \mathcal{M} , respectivamente:

$$\nabla^p(\omega \otimes m) = d\omega \otimes m + (-1)^p \omega \wedge \nabla(m).$$

La condición de integrabilidad es equivalente a que $\nabla^p \circ \nabla^{p-1} = 0$, para cualquier p . Por tanto, una conexión integrable ∇ sobre el \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} define un complejo de \mathcal{O}_X -módulos.

Definición 1.3.3.— Sea \mathcal{M} es un \mathcal{O}_X -módulo, y ∇ una conexión integrable sobre \mathcal{M} . Siguiendo la misma notación llamamos complejo de De Rham de \mathcal{M} , y notamos $DR_X(\mathcal{M})$, o bien $\Omega_X^\bullet(\mathcal{M})$, al complejo (de \mathbb{C} -módulos):

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\nabla} \Omega_X^1(\mathcal{M}) \xrightarrow{\nabla^1} \dots \xrightarrow{\nabla^{p-1}} \Omega_X^p(\mathcal{M}) \xrightarrow{\nabla^p} \\ \Omega_X^{p+1}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\nabla^{p+1}} \dots \xrightarrow{\nabla^{n-1}} \Omega_X^n(\mathcal{M}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

En un sistema de coordenadas locales $(U; x_1, \dots, x_n)$ la aplicación ∇^p viene definida por:

$$\begin{aligned} \nabla^p(U) : \Omega_X^p(U) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}(U) &\rightarrow \Omega_X^{p+1}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}(U) \\ \nabla^p(U)(\omega \otimes m) &= d\omega \otimes m + \sum_{i=1}^n \left((dx_i \wedge \omega) \otimes \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(m) \right). \end{aligned}$$

En el caso particular del complejo formado por los $\Omega_X^p = \Omega_X^p(\mathcal{O}_X)$, donde el \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} es el propio \mathcal{O}_X y la conexión ∇ es la diferencial exterior $d : \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1$, las aplicaciones:

$$\nabla^p : \Omega_X^p \longrightarrow \Omega_X^{p+1},$$

están definidas en un sistema local de coordenadas $(U; x_1, \dots, x_n)$ de la siguiente manera:

$$\nabla^p(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p},$$

con f una función holomorfa.

A este complejo (el complejo de De Rham de \mathcal{O}_X) le llamamos, simplemente, complejo de De Rham de X , y lo denotamos por DR_X , o bien, Ω_X^\bullet .

1.4 Equivalencia entre \mathcal{O}_X -módulos dotados de una conexión integrable y \mathcal{D}_X -módulos a izquierda.

Un \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} dotado de una conexión integrable ∇ tiene una estructura natural de \mathcal{D}_X -módulo a izquierda que extiende la estructura de \mathcal{O}_X -módulo. Dado que \mathcal{D}_X está generado por $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$ como \mathcal{O}_X -álgebra, basta definir la acción de estos elementos sobre \mathcal{M} :

$$\delta \cdot m = \nabla_{\delta}(m),$$

para cualesquiera secciones δ de $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$ y m de \mathcal{M} . Queda así definida la acción de un operador de \mathcal{D}_X sobre \mathcal{M} como producto de derivaciones:

$$\delta_1 \delta_2 \cdot m = \nabla_{\delta_1}(\nabla_{\delta_2}(m)).$$

En el caso de multiplicar por secciones f de \mathcal{O}_X no presenta problemas la definición, gracias a la propiedad de las conexiones integrables:

$$\nabla_{f\delta}(m) = f \cdot \nabla_{\delta}(m),$$

para toda sección δ de $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$. Las únicas relaciones que verifican los operadores diferenciales están generadas por:

$$\delta(f) = [\delta, f] = \delta f - f\delta,$$

$$[\delta_1, \delta_2] = \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1,$$

para cualesquiera secciones δ , δ_1 y δ_2 de $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$ y cualquier germen de función holomorfa f . Concretamente, tenemos definido un isomorfismo entre el anillo \mathcal{D}_X y el algebra tensorial sobre el \mathcal{O}_X -módulo $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$ en el que imponemos esas relaciones:

$$\frac{\mathbf{T}_{\mathcal{O}_X}(\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X))}{(\delta \otimes f = f\delta + \delta(f), \delta_1 \otimes \delta_2 - \delta_2 \otimes \delta_1 = [\delta_1, \delta_2])} \cong \mathcal{D}_X,$$

Por tanto, para probar la correcta definición de \mathcal{M} como \mathcal{D}_X -módulo, basta comprobar

$$[\delta, f] \cdot m = (\delta f - f\delta) \cdot m,$$

$$[\delta_1, \delta_2] \cdot m = (\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1) \cdot m,$$

para cualesquiera $f, \delta, \delta_1, \delta_2$ y cualquier sección m de \mathcal{M} . Comprobemoslo:

$$[\delta, f] \cdot m = \nabla_{[\delta, f]}(m) = \nabla_{\delta(f)}(m) = \delta(f)m,$$

$$(\delta f - f\delta) \cdot m = \nabla_{\delta}(fm) - f\nabla_{\delta}(m) = \delta(f)m,$$

donde la última igualdad se verifica por las propiedades de la conexión ∇ .

$$[\delta_1, \delta_2] \cdot m = \nabla_{[\delta_1, \delta_2]}(m),$$

$$(\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1) \cdot m = \nabla_{\delta_1}(\nabla_{\delta_2}(m)) - \nabla_{\delta_2}(\nabla_{\delta_1}(m)) = \nabla_{[\delta_1, \delta_2]}(m),$$

aquí utilizamos la propiedad que define una conexión como integrable.

Recíprocamente, un \mathcal{D}_X -módulo \mathcal{M} define una conexión integrable ∇ sobre el \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} . Si δ es una derivación de \mathcal{O}_X , tenemos definida un endomorfismo \mathcal{O}_X -lineal sobre \mathcal{M} :

$$\begin{array}{ccc} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) & \longrightarrow & \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}), \\ \delta & \longmapsto & \nabla_{\delta}. \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \nabla_{\delta} : \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M}, \\ m & \longmapsto & \nabla_{\delta}(m) = \delta \cdot m. \end{array}$$

Se observa que para cualesquiera δ, f y m , secciones de $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$, \mathcal{O}_X y \mathcal{M} , respectivamente, se verifica:

$$1. \nabla_{f\delta}(m) = f \cdot \nabla_{\delta}(m).$$

$$2. \nabla_{\delta}(fm) = \delta(f) \cdot m + f \cdot \nabla_{\delta}(m).$$

Por tanto, se tiene definida una conexión sobre el \mathcal{D}_X -módulo \mathcal{M} . Además, esta conexión es integrable:

$$[\nabla_{\delta}, \nabla_{\delta'}](m) = \nabla_{\delta}(\nabla_{\delta'}(m)) - \nabla_{\delta'}(\nabla_{\delta}(m)) =$$

$$= (\delta\delta' - \delta'\delta) \cdot m = \nabla_{[\delta, \delta']}(m).$$

Dado un \mathcal{D}_X -módulo \mathcal{M} , su estructura de \mathcal{D}_X -módulo define, por tanto, un complejo de De Rham de \mathcal{M} , cuya expresión en una carta local $(U; x_1, \dots, x_n)$ viene dada por las ecuaciones:

$$\nabla^p(U)(\omega \otimes m) = d\omega \otimes m + \sum_{i=1}^n \left((dx_i \wedge \omega) \otimes \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot m \right),$$

para dos secciones cualesquiera ω y m de los haces Ω_X^1 y \mathcal{M} , respectivamente.

Consideremos en particular el \mathcal{D}_X -módulo a izquierda \mathcal{O}_X , definido de manera natural:

$$P \cdot f = P(f),$$

con f función holomorfa y P operador diferencial. Por tanto, $P(f)$ es una función holomorfa. Esta estructura canónica de \mathcal{D}_X -módulo a la izquierda de \mathcal{O}_X se corresponde con la conexión integrable sobre \mathcal{O}_X definida de manera natural por la diferencial exterior ($\nabla = d$):

$$\nabla_\delta(f) = \langle \delta, df \rangle = \delta(f),$$

con δ una derivación de \mathcal{O}_X .

Nota 1.4.1.— Hemos definido el concepto de conexión “a la izquierda” para \mathcal{O}_X -módulos, y hemos visto como es equivalente una conexión “a la izquierda” integrable sobre un \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} con una estructura de \mathcal{D}_X -módulo a la izquierda sobre \mathcal{M} . Todo esto tiene sentido hacerlo para módulos a la derecha. Así, dado un \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} se define una conexión a la derecha ∇ sobre \mathcal{M} de la misma forma que antes, pero cambiando la condición de Leibniz por:

$$\nabla(fm) = df \cdot m - f\nabla(m).$$

Del mismo modo que en el caso “a la izquierda”, se define ∇_δ y conexión a la derecha integrable.

También se produce en este caso una identificación entre \mathcal{O}_X -módulos dotados de una conexión a la derecha integrable y \mathcal{D}_X -módulos a la derecha.

1.5 Complejo de Spencer.

Definición 1.5.1.— (cf. [34], [25], [26]). Llamamos complejo de Spencer de \mathcal{O}_X y notamos $Sp^\bullet(\mathcal{O}_X)$ al complejo de \mathcal{D}_X -módulos a izquierda (localmente libres de rango finito):

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{n}{\wedge} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\varepsilon_{-n}} \dots \\ \dots \xrightarrow{\varepsilon_{-p-1}} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{p}{\wedge} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\varepsilon_{-p}} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{p-1}{\wedge} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\varepsilon_{-p+1}} \dots \end{aligned}$$

$$\dots \xrightarrow{\varepsilon_{-2}} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{1}{\wedge} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\varepsilon_{-1}} \mathcal{D}_X,$$

concentrado en grados $[-n, 0]$, donde los anteriores morfismos de \mathcal{O}_X -módulos están definidos en un abierto U de X de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{-p}(P \otimes (\delta_1 \wedge \dots \wedge \delta_p)) &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} P \delta_i \otimes (\delta_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\delta}_i \wedge \dots \wedge \delta_p) + \\ &\sum_{1 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} P \otimes ([\delta_i, \delta_j] \wedge \delta_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\delta}_i \wedge \dots \wedge \widehat{\delta}_j \wedge \dots \wedge \delta_p), \quad (2 \leq p \leq n), \\ \varepsilon_{-1}(P \otimes \delta) &= P \delta, \end{aligned}$$

siendo P un operador diferencial en U , y las δ_i secciones en U de $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$.

Nota 1.5.2.— Este complejo es una resolución \mathcal{D}_X -localmente libre de \mathcal{O}_X como \mathcal{D}_X -módulo a la izquierda. Una manera de comprobarlo es trabajar en coordenadas locales $(U; x_1, \dots, x_n)$ y respecto de las bases

$$\{\partial_{j_1} \wedge \dots \wedge \partial_{j_p}, 1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n\}$$

de $\overset{p}{\wedge} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O})$, en cada punto de U , donde ∂_k representa la derivada respecto de la variable x_k ($\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$). Así, teniendo en cuenta que

$$[\partial_i, \partial_j] = 0,$$

se comprueba que localmente en cada punto de U se trata de un complejo de Koszul (cf. [7], el complejo $\mathbf{K}(\partial_1, \dots, \partial_n; \mathcal{D})$). Se concluye fácilmente el resultado que buscábamos.

Otra manera de probar el resultado es dotar al complejo $\mathcal{S}p^*(\mathcal{O}_X)$ de una filtración discreta G^* tal que el complejo graduado correspondiente sea exacto. Definimos la siguiente filtración:

$$G^k \left(\mathcal{D}_X \otimes \overset{p}{\wedge} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) \right) = F^{k-p}(\mathcal{D}_X) \otimes \overset{p}{\wedge} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X),$$

$$G^k(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X.$$

Se tiene:

$$\mathcal{G}r_G \left(\mathcal{D}_X \otimes \overset{p}{\wedge} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) \right) = \mathcal{G}r_F(\mathcal{D}_X)[-p] \otimes \overset{p}{\wedge} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X),$$

$$\mathcal{G}r_G(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X.$$

Claramente

$$\varepsilon_{-p} \left(G^k \left(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \otimes \overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log Y) \right) \right) \subset G^k \left(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \otimes \overset{p-1}{\wedge} \text{Der}(\log Y) \right),$$

$$\varepsilon_0 \left(G^k(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)) \right) \subset G^k(\mathcal{O}_X).$$

Dado que las filtraciones anteriores son compatibles con la diferencial del complejo $\mathcal{S}p^\bullet(\mathcal{O}_X)$, podemos considerar el complejo $\mathcal{G}r_G(\mathcal{S}p^\bullet(\mathcal{O}_X))$:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{G}r_F(\mathcal{D}_X)[-n] \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{n}{\wedge} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\psi^{-n}} \dots \xrightarrow{\psi^{-p-1}} \\ \mathcal{G}r_F(\mathcal{D}_X)[-p] \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{p}{\wedge} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\psi^{-p}} \mathcal{G}r_F(\mathcal{D}_X)[-p+1] \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{p-1}{\wedge} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) \\ \xrightarrow{\psi^{-p+1}} \dots \xrightarrow{\psi^{-1}} \mathcal{G}r_F(\mathcal{D}_X) \xrightarrow{\psi_0} \mathcal{O}_X \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Este complejo coincide localmente en una carta de coordenadas (x_1, \dots, x_n) con el complejo de Koszul (conmutativo) $\mathbf{K}(\xi_1, \dots, \xi_n; \mathcal{G}r_F(\mathcal{D}_X))$, siendo $\xi_i = \sigma\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$. Es, por tanto, exacto, puesto que (ver igualdad 1.2):

$$\mathcal{G}r_F(\mathcal{D}_X)|_U \simeq \mathcal{O}_{X|U}[\xi_1, \dots, \xi_n].$$

Esta última manera nos será particularmente útil más adelante cuando estudiemos el complejo de Spencer logarítmico (sección 2.3). Tenemos, por consiguiente,

$$\mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) = Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{S}p^\bullet, \mathcal{O}_X).$$

Nota 1.5.3.— Por otra parte, consideramos, para cada entero p mayor que 0, el isomorfismo de \mathcal{O}_X -módulos

$$\Phi^p : \Omega_X^p \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}_X} \left(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{p}{\wedge} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X \right),$$

definido localmente por:

$$\Phi^p(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p)(P \otimes (\delta_1 \wedge \dots \wedge \delta_p)) = P \cdot \det((\delta_j, \omega_i)_{1 \leq i, j \leq p}),$$

con ω_i y δ_j secciones de Ω_X^1 y de $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$, respectivamente, y P un operador diferencial. Estos isomorfismos Φ_p se obtienen de manera canónica a partir de la dualidad perfecta

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) \times \Omega_X^1 \longrightarrow \mathcal{O}_X,$$

considerando los isomorfismos:

$$\begin{aligned} \Omega_X^p &= \wedge^p \Omega_X^1 \cong \wedge^p Hom_{\mathcal{O}_X}(\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X) \cong \\ &Hom_{\mathcal{O}_X}(\wedge^p \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X) \cong \\ &Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \wedge^p \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X). \end{aligned}$$

El conjunto de estos Φ^p define un isomorfismo de complejos de haces de \mathbb{C} -espacios vectoriales:

$$\Omega_X^\bullet \stackrel{\Phi^\bullet}{\cong} Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{S}p^\bullet, \mathcal{O}_X).$$

Para probar que los Φ^p conmutan con las diferenciales se trabaja en las fibras, para cada punto x de Y , utilizando las expresiones respecto de las bases

$$\{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}, 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n\} \text{ de } \Omega^n \text{ y}$$

$$\{\partial_{j_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{j_p}, 1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n\} \text{ de } \bigwedge^p \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}),$$

siendo (x_1, \dots, x_n) un sistema de coordenadas centrado en x .

Más generalmente, si \mathcal{M} es un \mathcal{D}_X -módulo a izquierda, se verifica:

$$DR_X(\mathcal{M}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(S\mathcal{P}^\bullet, \mathcal{M}) = \mathbf{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}).$$

En este caso, utilizamos los isomorfismos de \mathcal{O}_X -módulos:

$$\Phi_{\mathcal{M}}^p : \Omega_X^p(\mathcal{M}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X \otimes \bigwedge^p \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X), \mathcal{M}).$$

Localmente:

$$\Phi_{\mathcal{M}}^p((\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p) \otimes m)(P \otimes (\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_p)) = P \cdot \det((\omega_i \cdot \delta_j)_{1 \leq i, j \leq p}) \cdot m,$$

con ω_i y δ_j secciones de Ω_X^1 y de $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$, respectivamente, P un operador diferencial, y m una sección de \mathcal{M} . Estos isomorfismos Φ_p se obtienen fácilmente considerando los isomorfismos canónicos:

$$\begin{aligned} \Omega_X^p(\mathcal{M}) &= \bigwedge^p \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \cong \\ &\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\bigwedge^p \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \cong \\ &\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \cong \\ &\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X), \mathcal{M}). \end{aligned}$$

El conjunto de los $\Phi_{\mathcal{M}}^p$ define un isomorfismo de complejos de haces de \mathbb{C} -espacios vectoriales:

$$DR_X(\mathcal{M}) \stackrel{\Phi_{\mathcal{M}}^\bullet}{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(S\mathcal{P}^\bullet, \mathcal{M}).$$

La prueba de los dos isomorfismos que acabamos de ver es casi idéntica. Para comodidad del lector, detallaremos más adelante el isomorfismo equivalente en el caso meromorfo:

$$\Omega_X^\bullet[\star Y](\mathcal{D}_X[\star Y]) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}_X[\star Y]}(S\mathcal{P}^\bullet[\star Y], \mathcal{D}_X[\star Y]).$$

En este caso la prueba es prácticamente la misma que las que acabamos de comentar (ver Proposición 2.5.4).

1.6 Corchete de Poisson sobre $\mathcal{G}_{rF}(\mathcal{D}_X)$.

Sobre el anillo graduado $\mathcal{G}_{rF}(\mathcal{D}_X)$ tenemos definido el producto corchete inducido por la filtración sobre \mathcal{D}_X dada por el grado de los operadores, ya que el anillo graduado $\mathcal{G}_{rF}(\mathcal{D}_X)$ es conmutativo (cf. [16]). Para los elementos homogéneos de $\mathcal{G}_{rF}(\mathcal{D}_X)$ el producto está definido como:

$$\{\sigma(P), \sigma(Q)\} = \sigma([P, Q]),$$

con P, Q y $[P, Q]$ secciones de $\mathcal{D}_X^{(m)}$, $\mathcal{D}_X^{(n)}$ y $\mathcal{D}_X^{(m+n-1)}$, respectivamente.

Su expresión en unas coordenadas locales $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ es la siguiente (cf. loc. cit.):

$$\{\sigma_m(P), \sigma_n(Q)\} = \sigma_{m+n-1}([P, Q]) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma(P)}{\partial \xi_i} \frac{\partial \sigma(Q)}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma(Q)}{\partial x_i} \frac{\partial \sigma(P)}{\partial \xi_i}.$$

En general, para dos secciones f y g de $\mathcal{G}_{rF}(\mathcal{D}_X)$, no necesariamente homogéneas en las ξ , el producto corchete de f y g nos queda:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial \xi_i}.$$

El producto corchete que acabamos de definir verifica las siguientes propiedades:

1. Bilineal.
2. Antisimétrica.
3. Dadas tres secciones f, g y h de $\mathcal{G}_{rF}(\mathcal{D}_X)$:

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}.$$

La variedad simpléctica $T^*(X)$.

En esta sección daremos un recordatorio de algunas nociones sobre geometría simpléctica que necesitamos (cf. [33], [17]).

Sea x un punto de la variedad X . Denotamos por $T_x(X)$ el espacio tangente a X en x ,

$$\begin{aligned} T_x(X) &= \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathbb{C}) = \\ &= \{\delta \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathbb{C}), \delta(fg) = f \cdot \delta(g) + g \cdot \delta(f)\}, \end{aligned}$$

donde la estructura de $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo de \mathbb{C} está definida por $f \cdot a = f(x)a$, para todo $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ y todo $a \in \mathbb{C}$. Así,

$$T_x(X) = \{\delta \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathbb{C}), f(x)\delta(g) + g(x)\delta(f)\}.$$

Es un espacio vectorial complejo de dimensión n , dado un sistema de coordenadas locales (x_1, \dots, x_n) en x , una base es:

$$\{\partial_1(x), \partial_2(x), \dots, \partial_n(x)\},$$

donde $\partial_i(x)$ representa la derivada parcial respecto de la variable x_i evaluada en el punto x : $\partial_i(x)(g) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$. Al espacio vectorial dual de $T_x(X)$ lo denotamos por $T_x^*(X)$ y lo llamamos espacio cotangente en x . Denotamos por $T^*(X)$ el espacio cotangente, y llamamos π a la proyección de $T^*(X)$ en X .

$$\begin{aligned} \pi : T^*(X) &\longrightarrow X. \\ (x, \xi) &\longrightarrow x \end{aligned}$$

Si tomamos una carta $(U; x_1, \dots, x_n)$ en X , para cualquier x de U tenemos una base de $T_x^*(X)$ formada por las 1-formas $dx_1(x), \dots, dx_n(x)$:

$$\begin{aligned} dx_i : T_x(X) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \delta = \sum_{j=1}^n a_j \partial_j(x) &\longrightarrow a_i \end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos una carta en $T^*(X)$:

$$(\pi_X^{-1}(U); x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n),$$

donde las ξ_i son las coordenadas de los vectores cotangentes en la base citada. En particular, dada una función holomorfa f , definida en un abierto V contenido en U , la 1-forma $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i \in \Omega_X^1(V)$ define en cada punto x de X los vectores cotangentes de coordenadas (x, ξ_1, \dots, ξ_n) , con $\xi_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

Dado un punto $p = (x, \xi)$ de $T^*(X)$, es decir, $\pi(p) = x$ y $\xi \in T_x^*(X)$ (donde ξ representa la 1-forma $\sum \xi_i dx_i(x)$), tenemos definido el morfismo entre espacios tangentes:

$$\begin{aligned} d\pi : T_p(T^*(X)) &\longrightarrow T_x(X). \\ \sum_{i=1}^n \left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p) + b_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}(p) \right) &\mapsto \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(x) \end{aligned}$$

Para todo u de $T_p(T^*(X))$, existe un único v en $T_x(T^*(X))$ que verifique (cf. [17]):

$$\langle v, u \rangle = \langle \xi, d\pi(u) \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i.$$

Esto nos define una 1-forma canónica α_X sobre $T^*(X)$ tal que $\alpha_X(p) = v$, para todo p . Si trabajamos en las coordenadas canónicas citadas anteriormente:

$$\alpha_X = \xi_1 dx_1 + \dots + \xi_n dx_n.$$

A la 2-forma holomorfa $d\alpha_X$ se le denomina 2-forma canónica sobre $T^*(X)$. En coordenadas canónicas:

$$\sigma_X = d\alpha_X = \sum_{i=1}^n d\xi_i \wedge dx_i.$$

Claramente, para todo p de $T^*(X)$, $\sigma_X(p)$ es una forma bilineal no degenerada antisimétrica sobre $T_p(T^*(X))$. Por tanto, σ_X nos da una estructura de espacio vectorial simpléctico sobre cada $T_p(T^*(X))$.

Corchete de Poisson sobre $\mathcal{O}_{T^*(X)}$.

Acabamos de ver que, para todo p de $T^*(X)$, el espacio $T_p(T^*(X))$ es un espacio vectorial simpléctico. Partiendo de la forma simpléctica $\sigma_X(p)$ y el isomorfismo Hamiltoniano correspondiente (cf. [17]), se define de manera natural un morfismo \mathbb{C} -lineal:

$$\mathcal{H}_p : T_p^*(T^*(X)) \rightarrow T_p(T^*(X)),$$

tal que:

$$\sigma_X(p)(u \wedge \mathcal{H}_p(v)) = \langle v, u \rangle,$$

con u y v vectores de $T_p(T^*(X))$ y $T_p^*(T^*(X))$, respectivamente. Localmente, en una carta $(\pi_X^{-1}(U); x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$, con U un abierto de X :

$$\mathcal{H}_p \left(\sum_{i=1}^n \left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p) + b_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}(p) \right) \right) = \sum_{i=1}^n \left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p) - b_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}(p) \right).$$

Dado una 1-forma ω sobre $T^*(X)$, la definición de \mathcal{H}_p proporciona una derivación δ sobre $\mathcal{O}_{T^*(X)}$:

$$\sigma_X(p)(\delta(p) \wedge \mathcal{H}_p(\omega(p))) = \langle \omega(p), \delta(p) \rangle.$$

Asimismo, podemos definir, para toda 1-forma ω sobre $T^*(X)$, una derivación \mathcal{H}_ω sobre $T^*(X)$:

$$\mathcal{H}_\omega(p) = \mathcal{H}_p(\omega(p)).$$

Al morfismo de haces resultante lo denotamos por \mathcal{H} :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} : \Omega_{T^*(X)}^1 & \longrightarrow & \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{T^*(X)}) \\ \omega & \longmapsto & \mathcal{H}_\omega \end{array}$$

Trabajando en coordenadas canónicas, las 1-formas $dx_1, \dots, dx_n, d\xi_1, \dots, d\xi_n$ forman una base del $\mathcal{O}_{T^*(X)}$ -módulo $\Omega_{T^*(X)}^1$. La expresión \mathcal{H} en estas coordenadas es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \left(\sum_{i=1}^n a_i(x, \xi) dx_i + \sum_{i=1}^n b_i(x, \xi) d\xi_i \right) &= \\ &= \sum_{i=1}^n b_i(x, \xi) \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n a_i(x, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi_i}. \end{aligned}$$

Sea f una sección de $\mathcal{O}_{T^*(X)}$. Llamamos Hamiltoniano asociado a f , y notamos por \mathcal{H}_f a la derivación sobre $\mathcal{O}_{T^*(X)}$ imagen de df por \mathcal{H} :

$$\mathcal{H}_f = \mathcal{H}(df) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \in \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{T^*(X)}).$$

Dados dos funciones holomorfas sobre $T^*(X)$ definimos el corchete de Poisson de f y g como:

$$\{f, g\} = \mathcal{H}_f(g) = -\mathcal{H}_g(f).$$

Por tanto, el corchete de Poisson sobre $\mathcal{O}_{T^*(X)}$ viene definido en coordenadas locales (x, ξ) como:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial \xi_i}.$$

El anillo $\pi^{-1}(\mathcal{G}_r(\mathcal{D}_X))$ como subanillo de $\mathcal{O}_{T^*(X)}$.

Siguiendo con la misma notación, consideramos en $T^*(X)$ un sistema de coordenadas locales $(\pi_X^{-1}(U); x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$. Tomamos la derivación radial ρ_X sobre $T^*(X)$, cuya expresión en coordenadas canónicas es:

$$\rho_X = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}.$$

En el haz $\mathcal{O}_{T^*(X)}$ de las funciones holomorfas sobre $T^*(X)$ tenemos definido para cualquier entero $m \geq 0$ el conjunto de las funciones homogéneas de grado m respecto a la variables ξ_i :

$$\mathcal{O}_{T^*(X)}(m) = \{f \in \mathcal{O}_{T^*(X)}, \rho_X(f) = mf\}.$$

Así se construye un subanillo graduado dentro de $\mathcal{O}_{T^*(X)}$:

$$\mathcal{O}_{[T^*(X)]} = \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{O}_{T^*(X)}(m).$$

Este anillo verifica el isomorfismo:

$$\mathcal{G}_r(\mathcal{D}_X) \simeq \pi_*(\mathcal{O}_{[T^*(X)]}),$$

que se construye de manera natural a partir del siguiente isomorfismo de \mathcal{O}_X -módulos $(\pi_*(\mathcal{O}_{T^*(X)}(0)) = \mathcal{O})$:

$$\begin{aligned} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) &\longrightarrow \pi_*(\mathcal{O}_{T^*(X)}(1)), \\ \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i} &\longrightarrow \pi_*(\sum_{i=1}^n f_i \xi_i). \end{aligned}$$

Podemos así considerar el anillo $\pi^{-1}(\mathcal{G}_r(\mathcal{D}_X))$ como un subanillo de $\mathcal{O}_{T^*(X)}$ (cf. [3], [18]), por tanto, la fibra de $\mathcal{G}_r(\mathcal{D}_X)$ en un punto $\pi(p)$ es un subanillo de la fibra en p de $\mathcal{O}_{T^*(X)}$. Usando coordenadas locales centradas en $\pi(p)$:

$$\mathcal{G}_r(\mathcal{D}_X)_{\pi(p)} = \mathcal{O}[\xi_1, \dots, \xi_n],$$

$$\mathcal{O}_{T^*(X)}_p = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n, \xi_1 - \xi_1(p), \dots, \xi_n - \xi_n(p)\}.$$

De esta forma, tenemos definido sobre $\mathcal{G}_r(\mathcal{D}_X)$ el corchete de Poisson heredado de $\mathcal{O}_{T^*(X)}$, que es el mismo que vimos que tenía definido de manera natural por su estructura de anillo graduado conmutativo.

2 Operadores diferenciales meromorfos.

Introducción

Esta segunda sección consiste en una introducción a la teoría de $\mathcal{D}_X[\star Y]$ -módulos, donde X sigue siendo una variedad analítica compleja de dimensión n , e Y representará siempre una hipersuperficie en X . Así, definimos los conceptos de operador diferencial meromorfo a lo largo de Y , (operadores que forman el anillo $\mathcal{D}_X[\star Y]$), de derivación sobre las funciones meromorfas a lo largo de Y , y de 1-forma diferencial meromorfa a lo largo de Y . Estas últimas forman el módulo $\Omega_X^1[\star Y]$ sobre el anillo $\mathcal{O}_X[\star Y]$ de las funciones meromorfas a lo largo de Y , módulo que es el dual del módulo de las derivaciones meromorfas. Continuamos, siguiendo la estructura de la primera sección, con otra serie de definiciones relacionadas entre sí: conexión meromorfa a lo largo de Y , conexión integrable meromorfa a lo largo de Y , complejo de de Rham meromorfo asociado a un $\mathcal{D}_X[\star Y]$ -módulo a izquierda \mathcal{M} y equivalencia entre $\mathcal{O}_X[\star Y]$ -módulos dotados de una conexión integrable y $\mathcal{D}_X[\star Y]$ -módulos a la izquierda. Para terminar, recordamos la definición del complejo de Spencer meromorfo, del que probamos que es una resolución $\mathcal{D}_X[\star Y]$ -localmente libre de $\mathcal{O}_X[\star Y]$ y que verifica el isomorfismo

$$\Omega_X^\bullet[\star Y](\mathcal{D}_X[\star Y]) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X[\star Y]}(\mathcal{S}p^\bullet[\star Y], \mathcal{D}_X[\star Y]).$$

En esta sección, ante la falta de bibliografía de fácil acceso, hemos sido especialmente cuidadosos en presentar las definiciones y resultados. En particular, el último isomorfismo citado se desarrolla con detalle para comodidad del lector, pues será utilizado de forma importante más tarde.

2.1 El anillo $\mathcal{D}_X[\star Y]$.

Sea Y una hipersuperficie de X de ideal \mathcal{I} . Para cada abierto U de X :

$$\mathcal{I}(U) = \{F \in \mathcal{O}_X(U), F(p) = 0, \forall p \in Y \cap U\}.$$

Localmente en un punto x de X :

$$I = \mathcal{I}_x = (f)\mathcal{O},$$

con f un germen reducido de función holomorfa en x que se anula en todos los puntos de Y en un entorno de x .

Llamamos $\mathcal{O}_X[\star Y]$ al \mathcal{O}_X -álgebra de las funciones meromorfas con polos a lo largo de Y . Localmente, en un punto x de X :

$$\mathcal{O}_X[\star Y]_x = \{f^{-i}g, g \in \mathcal{O}, i \in \mathbb{N}\} = \mathcal{O}[f^{-1}].$$

El \mathcal{O}_X -álgebra $\mathcal{O}_X[\star Y]$ es un haz coherente de anillos. Esto se comprueba observando que, localmente en cada punto x , tenemos una identificación:

$$\mathcal{O}_X[\star Y]|_U \simeq \frac{\mathcal{O}_U[T]}{(fT - 1)},$$

con U entorno abierto de x . La coherencia de $\mathcal{O}_X[T]$ implica la de $\mathcal{O}_X[\star Y]$ (cf. [9], [24]). Llamemos U al abierto complementario de Y en X . Sea la inmersión abierta:

$$j: U \hookrightarrow X.$$

Denotaremos por $\mathcal{D}_X[\star Y]$ al subhaz de anillos de $j_*j^{-1}\mathcal{D}_X$ formado por aquellos operadores con singularidades meromorfas a lo largo de Y , i.e.:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_X[\star Y]_x &= \{P \in (j_*j^{-1}\mathcal{D}_X)_x \mid \exists m \in \mathbb{N}, f^m P \in \mathcal{D}_{X,x}\} = \\ &= \{P \in (j_*j^{-1}\mathcal{D}_X)_x \mid \exists n \in \mathbb{N}, Pf^n \in \mathcal{D}_{X,x}\}. \end{aligned}$$

El haz de anillos $\mathcal{D}_X[\star Y]$ se obtiene pues localizando \mathcal{D}_X en el “subhaz multiplicativamente cerrado” de las ecuaciones locales de Y . Claramente dicho subhaz verifica las condiciones de Ore (cf. [16], [39]).

Se tiene pues un isomorfismo de $(\mathcal{O}_X[\star Y], \mathcal{D}_X)$ -bimódulos (respectivamente $(\mathcal{D}_X, \mathcal{O}_X[\star Y])$ -bimódulos):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_X[\star Y] &= \mathcal{O}_X[\star Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X. \\ (\text{resp. } \mathcal{D}_X[\star Y] &= \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X[\star Y]). \end{aligned}$$

En un punto x de coordenadas locales $(U; x_1, \dots, x_n)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_X[\star Y]_x &= \mathcal{O}[f^{-1}] \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D} = \mathcal{O}[f^{-1}] \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right], \\ (\text{resp. } \mathcal{D}_X[\star Y]_x &= \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}[f^{-1}]). \end{aligned}$$

Nota 2.1.1.— Si \mathcal{M} es un \mathcal{O}_X -módulo a la izquierda notamos $\mathcal{M}[\star Y]$ el $\mathcal{O}_X[\star Y]$ -módulo a la izquierda:

$$\mathcal{M}[\star Y] := \mathcal{O}_X[\star Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}.$$

Nota 2.1.2.— En el caso particular de que \mathcal{M} sea un \mathcal{D}_X -módulo a la izquierda, como tal está dotado de una conexión integrable

$$\nabla: \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}).$$

Utilizando esta conexión, podemos dotar a $\mathcal{M}[\star Y]$ de una conexión integrable:

$$\nabla': \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}[\star Y]),$$

definida como $\nabla'_\delta(f^{-k}m) = -kf^{-k-1}\delta(f)m + f^{-k}\nabla_\delta(m)$. Por tanto, $\mathcal{M}[\star Y]$ tiene definida una estructura canónica de \mathcal{D}_X -módulo a la izquierda.

Nota 2.1.3.— Aunque, en general, trabajaremos con módulos a la izquierda, en el caso de los módulos a derecha se puede tratar de manera muy similar. Si \mathcal{M} es un \mathcal{O}_X -módulo a la derecha (\mathcal{D}_X -módulo a la derecha), notamos $\mathcal{M}[\star Y]$ el $\mathcal{O}_X[\star Y]$ -módulo a la derecha (\mathcal{D}_X -módulo a la derecha):

$$\mathcal{M}[\star Y] := \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X[\star Y].$$

2.2 Formas meromorfas.

Definición 2.2.1.— Tenemos definido el $\mathcal{O}_X[\star Y]$ -módulo de las 1-formas diferenciales meromorfas con polos a lo largo de Y :

$$\Omega_X^1(\mathcal{O}_X[\star Y]) = \mathcal{O}_X[\star Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1.$$

Este $\mathcal{O}_X[\star Y]$ -módulo se puede definir también de manera análoga a como definíamos las 1-formas diferenciales holomorfas, basta sustituir en la definición el anillo \mathcal{O}_X por el anillo $\mathcal{O}_X[\star Y]$, y obtenemos por tanto un $\mathcal{O}_X[\star Y]$ -módulo, que notaremos $\Omega_X^1[\star Y]$, y una diferencial exterior, que notaremos d , y que extiende a la definida para Ω_X^1 (cf. [29]):

$$\Omega_X^1[\star Y] = \Omega_X^1(\mathcal{O}_X[\star Y]) = \mathcal{O}_X[\star Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1,$$

$$d : \mathcal{O}_X[\star Y] \rightarrow \Omega_X^1[\star Y].$$

Si trabajamos en un sistema de coordenadas:

$$\Omega_X^1[\star Y]_x = \left\{ \sum_{i=1}^n f_i dx_i, f_i \in \mathcal{O}[f^{-1}] \right\} = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}[f^{-1}] dx_i,$$

$$dg = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i,$$

para cualquier sección $g \in \mathcal{O}[f^{-1}]$. En particular, $\Omega_X^1[\star Y]$ es un $\mathcal{O}_X[\star Y]$ -módulo localmente libre de rango n . Del mismo modo que en el caso holomorfo se tiene una identificación:

$$\text{Derc}(\mathcal{O}_X[\star Y]) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X[\star Y]}(\Omega_X^1[\star Y], \mathcal{O}_X[\star Y]) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^1, \mathcal{O}_X[\star Y]).$$

Por tanto, $\text{Derc}(\mathcal{O}_X[\star Y])$ también es un $\mathcal{O}_X[\star Y]$ -módulo a izquierda localmente libre de rango n :

$$\text{Derc}(\mathcal{O}_X[\star Y])_x = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_X[\star Y]_x \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

En consecuencia,

$$\text{Der}_C(\mathcal{O}_X[\star Y]) = \mathcal{O}_X[\star Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \text{Der}_C(\mathcal{O}_X).$$

Por lo cual, se verifica:

$$\begin{aligned} \Omega_X^1[\star Y] &= \mathcal{O}_X[\star Y] \otimes \Omega_X^1 = \\ &= \mathcal{O}_X[\star Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\text{Der}_C(\mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X) = \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_X[\star Y]}(\text{Der}_C(\mathcal{O}_X[\star Y]), \mathcal{O}_X[\star Y]). \end{aligned}$$

Así, de la misma manera que en el caso holomorfo, tenemos definida una aplicación $\mathcal{O}_X[\star Y]$ -bilineal:

$$\begin{array}{ccc} \text{Der}_C(\mathcal{O}_X[\star Y]) \times \Omega_X^1[\star Y] & \longrightarrow & \mathcal{O}_X[\star Y]. \\ (\delta, \omega) & \longmapsto & \langle \delta \cdot \omega \rangle \end{array}$$

Trabajando en coordenadas locales

$$\left\langle \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j=1}^n g_j dx_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n f_i g_i,$$

con f_i y g_j secciones de funciones meromorfas con polos a lo largo de Y .

Definición 2.2.2.— A partir de $\Omega_X^1[\star Y]$ obtenemos el $\mathcal{O}_X[\star Y]$ -módulo $\Omega_X^p[\star Y]$ de las p -formas meromorfas con polos a lo largo de Y sobre X :

$$\Omega_X^p[\star Y] = \wedge^p \Omega_X^1[\star Y].$$

Se tiene

$$\Omega_X^p[\star Y] = \mathcal{O}_X[\star Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^p.$$

Localmente

$$\begin{aligned} \Omega_X^p[\star Y]_x &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \mathcal{O}_X[\star Y]_x dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \mathcal{O}[f^{-1}] dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \simeq \mathcal{O}[f^{-1}]^{\binom{n}{p}}, \end{aligned}$$

notaremos $\Omega^p[f^{-1}]$. El conjunto de las formas meromorfas definen la $\mathcal{O}_X[\star Y]$ -álgebra exterior

$$\bigoplus_{p=0}^n \Omega_X^p[\star Y],$$

en la que tenemos definido la contracción o producto interno por las derivaciones de $\mathcal{O}_X[\star Y]$:

$$\begin{array}{ccc} \text{Der}_C(\mathcal{O}_X[\star Y]) \times \Omega_X^p[\star Y] & \longrightarrow & \Omega_X^{p-1}[\star Y]. \\ (\delta, \omega) & \longrightarrow & \langle \delta, \omega \rangle \end{array}$$

Localmente

$$\langle \delta, \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \rangle = \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \langle \delta, \alpha_i \rangle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{i-1} \wedge \alpha_{i+1} \wedge \cdots \wedge \alpha_p,$$

con δ sección de una derivación de $\mathcal{O}_X[\star Y]$, y las α_i sección de una 1-forma meromorfa con polos a lo largo de Y .

Sobre $\bigoplus_{p=0}^n \Omega_X^p[\star Y]$ está definido un único homomorfismo de haces de grupos aditivos d que coincida con la diferencial exterior previamente definida sobre $\Omega_X^0[\star Y] = \mathcal{O}_X[\star Y]$ y que verifique

- $d \circ d = 0$.
- Para cualesquiera $\omega_1 \in \Omega_X^p[\star Y]$ y $\omega_2 \in \Omega_X^q[\star Y]$:

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

Este homomorfismo, que llamamos diferencial exterior y notamos d , envía una p -forma diferencial meromorfa en una $p+1$ -forma diferencial meromorfa, y su expresión en un sistema de coordenadas $(U; x_1, \dots, x_n)$ viene dada por la siguiente fórmula:

$$d: \begin{array}{ccc} \Omega_X^p[\star Y] & \longrightarrow & \Omega_X^{p+1}[\star Y], \\ \omega & \longrightarrow & d\omega \end{array}$$

$$d(g dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p) = dg \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p,$$

donde g es una sección de $\mathcal{O}_X[\star Y]$.

2.3 Conexiones meromorfas integrables. Equivalencia con los $\mathcal{D}_X[\star Y]$ -módulos a izquierda.

Para cada entero p entre 1 y n , tenemos definido el haz $\Omega_X^p[\star Y]$ de las p -formas meromorfas con polos a lo largo de Y . Dado un $\mathcal{O}_X[\star Y]$ -módulo a izquierda \mathcal{M} , notamos para cada entero p entre 1 y n :

$$\Omega_X^p[\star Y](\mathcal{M}) = \Omega_X^p[\star Y] \otimes_{\mathcal{O}_X[\star Y]} \mathcal{M} = \Omega_X^p[\star Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}.$$

En el caso $p = 0$, tenemos $\Omega_X^0[\star Y](\mathcal{M}) = \mathcal{M}$. Cuando $p = 1$, tenemos un isomorfismo canónico

$$\begin{aligned} \Omega_X^1[\star Y](\mathcal{M}) &= \Omega_X^1[\star Y] \otimes_{\mathcal{O}_X[\star Y]} \mathcal{M} = \\ \text{Hom}_{\mathcal{O}_X[\star Y]}(\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X[\star Y]), \mathcal{O}_X[\star Y]) \otimes_{\mathcal{O}_X[\star Y]} \mathcal{M} &= \end{aligned}$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X[*Y]}(\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X[*Y]), \mathcal{M}).$$

Definición 2.3.1.— Sea un $\mathcal{O}_X[*Y]$ -módulo \mathcal{M} . Una conexión meromorfa a lo largo de Y sobre \mathcal{M} es un homomorfismo \mathbb{C} -lineal ∇ :

$$\nabla : \mathcal{M} \rightarrow \Omega_X^1[*Y] \otimes_{\mathcal{O}_X[*Y]} \mathcal{M},$$

que verifica la identidad de Leibniz:

$$\nabla(gm) = dg \cdot m + g\nabla(m),$$

donde g y m son secciones de $\mathcal{O}_X[*Y]$ y \mathcal{M} , respectivamente, y d es la diferencial exterior sobre $\mathcal{O}_X[*Y]$.

Si δ es una derivación de $\mathcal{O}_X[*Y]$, tenemos definida un endomorfismo \mathbb{C} -lineal sobre \mathcal{M} :

$$\begin{array}{ccc} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X[*Y]) & \longrightarrow & \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}), \\ \delta & \longmapsto & \nabla_{\delta}. \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \nabla_{\delta} : \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M}, \\ m & \longmapsto & \langle \nabla(m), \delta \rangle. \end{array}$$

Se observa que para cualesquiera δ , f y m , secciones de $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X[*Y])$, $\mathcal{O}_X[*Y]$ y \mathcal{M} , respectivamente, se verifica:

1. $\nabla_{g\delta}(m) = g \cdot \nabla_{\delta}(m)$.
2. $\nabla_{\delta}(gm) = \delta(g) \cdot m + g \cdot \nabla_{\delta}(m)$.

Por tanto, tener una conexión meromorfa ∇ a lo largo de Y sobre \mathcal{M} es equivalente a tener un morfismo $\mathcal{O}_X[*Y]$ -lineal ∇' :

$$\nabla' : \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X[*Y]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{M}),$$

que verifique el equivalente a la condición de Leibniz:

$$\nabla_{\delta}(gm) = \delta(g) \cdot m + g \cdot \nabla_{\delta}(m).$$

Para comprobar la equivalencia entre tener definida ∇ y tener definida ∇' , basta considerar la correspondencia que a ∇' le asigna la siguiente ∇ :

$$\nabla : \mathcal{M} \rightarrow \Omega_X^1[*Y](\mathcal{M}),$$

tal que $\nabla(m)$ es el elemento de

$$\Omega_X^1[*Y](\mathcal{M}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X[*Y]}(\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X[*Y]), \mathcal{M})$$

definido como:

$$\nabla(m)(\delta) = \nabla_{\delta}(m).$$

Decimos que una conexión meromorfa $\nabla \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}, \Omega_X^1[*Y](\mathcal{M}))$ o, lo que es lo mismo, un morfismo

$$\nabla \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X[*Y]}(\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X[*Y]), \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{M}))$$

es integrable si, dados dos derivaciones δ y δ' de $\mathcal{O}_X[*Y]$, verifica:

$$\nabla_{[\delta, \delta']} = [\nabla_{\delta}, \nabla_{\delta'}],$$

donde $[,]$ representa el conmutador en $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ y el corchete de Lie en $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X[*Y])$.

Un $\mathcal{O}_X[*Y]$ -módulo a izquierda \mathcal{M} dotado de una conexión meromorfa integrable ∇ tiene una estructura natural de $\mathcal{D}_X[*Y]$ -módulo a izquierda. Dado que $\mathcal{D}_X[*Y]$ está generado por $\mathcal{O}_X[*Y]$ y $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X[*Y])$ como $\mathcal{O}_X[*Y]$ -álgebra, basta definir la acción de estos elementos sobre \mathcal{M} :

$$\delta \cdot m = \nabla_{\delta}(m),$$

para dos secciones cualesquiera $\delta \in \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X[*Y])$ y $m \in \mathcal{M}$. Queda así definida la acción de un operador de $\mathcal{D}_X[*Y]$ sobre \mathcal{M} como producto de derivaciones:

$$\delta_1 \delta_2 \cdot m = \nabla_{\delta_1}(\nabla_{\delta_2}(m)).$$

En el caso de multiplicar por secciones f de $\mathcal{O}_X[*Y]$ no presenta problemas la definición, gracias a la propiedad de las conexiones integrables:

$$\nabla_{f\delta}(m) = f \cdot \nabla_{\delta}(m),$$

para toda sección δ de $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X[*Y])$. Las únicas relaciones que verifican los operadores diferenciales están generadas por:

$$\delta(f) = [\delta, f] = \delta f - f\delta,$$

$$[\delta_1, \delta_2] = \delta_1 \delta_2 - \delta_2 \delta_1,$$

para cualesquiera secciones δ, δ_1 y δ_2 de $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X[*Y])$ y cualquier germen de función meromorfa f . Concretamente, tenemos definido un isomorfismo entre el anillo $\mathcal{D}_X[*Y]$ y el algebra tensorial sobre el $\mathcal{O}_X[*Y]$ -módulo $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X[*Y])$ en el que imponemos esas relaciones:

$$\frac{\mathbf{T}_{\mathcal{O}_X[*Y]}(\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X[*Y]))}{(\delta \otimes f = f\delta + \delta(f), \delta_1 \otimes \delta_2 - \delta_2 \otimes \delta_1 = [\delta_1, \delta_2])} \cong \mathcal{D}_X[*Y].$$

Por tanto, para probar la correcta definición de \mathcal{M} como $\mathcal{D}_X[*Y]$ -módulo, basta comprobar

$$[\delta, f] \cdot m = (\delta f - f\delta) \cdot m,$$

$$[\delta_1, \delta_2] \cdot m = (\delta_1 \delta_2 - \delta_2 \delta_1) \cdot m,$$

para cualesquiera $f, \delta, \delta_1, \delta_2$ y cualquier sección m de \mathcal{M} . Comprobemoslo:

$$[\delta, f] \cdot m = \nabla_{[\delta, f]}(m) = \nabla_{\delta(f)}(m) = \delta(f)m,$$

$$(\delta f - f\delta) \cdot m = \nabla_{\delta}(fm) - f\nabla_{\delta}(m) = \delta(f)m,$$

donde la última igualdad se verifica por las propiedades de la conexión ∇ .

$$[\delta_1, \delta_2] \cdot m = \nabla_{[\delta_1, \delta_2]}(m),$$

$$(\delta_1 \delta_2 - \delta_2 \delta_1) \cdot m = \nabla_{\delta_1}(\nabla_{\delta_2}(m)) - \nabla_{\delta_2}(\nabla_{\delta_1}(m)) = \nabla_{[\delta_1, \delta_2]}(m),$$

aquí utilizamos la propiedad que define una conexión meromorfa como integrable. Recíprocamente, un $\mathcal{D}_X[\star Y]$ -módulo \mathcal{M} define una conexión meromorfa integrable ∇ sobre el $\mathcal{O}_X[\star Y]$ -módulo \mathcal{M} . Si δ es una derivación de $\mathcal{O}_X[\star Y]$, tenemos definida un endomorfismo $\mathcal{O}_X[\star Y]$ -lineal sobre \mathcal{M} :

$$\begin{array}{ccc} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X[\star Y]) & \longrightarrow & \text{End}_{\mathcal{O}_X[\star Y]}(\mathcal{M}), \\ \delta & \mapsto & \nabla_{\delta}. \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \nabla_{\delta}: \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M}, \\ m & \mapsto & \nabla_{\delta}(m) = \delta \cdot m. \end{array}$$

Se observa que para cualesquiera δ, f y m , secciones de $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X[\star Y])$, $\mathcal{O}_X[\star Y]$ y \mathcal{M} , respectivamente, se verifica:

1. $\nabla_{f\delta}(m) = f \cdot \nabla_{\delta}(m)$.
2. $\nabla_{\delta}(fm) = \delta(f) \cdot m + f \cdot \nabla_{\delta}(m)$.

Por tanto, se tiene definida una conexión meromorfa sobre el $\mathcal{D}_X[\star Y]$ -módulo \mathcal{M} . Además, esta conexión es integrable:

$$\begin{aligned} [\nabla_{\delta}, \nabla_{\delta'}](m) &= \nabla_{\delta}(\nabla_{\delta'}(m)) - \nabla_{\delta'}(\nabla_{\delta}(m)) = \\ &= (\delta\delta' - \delta'\delta) \cdot m = \nabla_{[\delta, \delta']}(m). \end{aligned}$$

Nota 2.3.2.— Dada una conexión ∇ sobre un \mathcal{O}_X -módulo a la izquierda \mathcal{M} :

$$\nabla: \mathcal{M} \rightarrow \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M},$$

podemos definir sobre $\mathcal{M}[\star Y]$ una única conexión meromorfa a lo largo de Y , conexión que notaremos por $\nabla[\star Y]$, tal que extienda ∇ , es decir, tal que haga conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \nabla: \mathcal{M} & \longrightarrow & \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \nabla[\star Y]: \mathcal{M}[\star Y] & \longrightarrow & \Omega_X^1[\star Y] \otimes_{\mathcal{O}_X[\star Y]} \mathcal{M}[\star Y] \end{array}$$

Es claro que $\nabla[\star Y]$ queda definida localmente de la siguiente manera:

$$\nabla[\star Y](g \otimes m) = g \otimes \nabla(m),$$

donde m es una sección de \mathcal{M} , g es sección de una función meromorfa a lo largo de Y , y hemos identificado:

$$\Omega_X^1[\star Y] \otimes_{\mathcal{O}_X[\star Y]} \mathcal{M}[\star Y] = \Omega_X^1[\star Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$$

Se comprueba que las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) La conexión ∇ es integrable.
- (b) La conexión meromorfa $\nabla[\star Y]$ es integrable.

De hecho, esta conexión meromorfa $\nabla[\star Y]$ sobre $\mathcal{M}[\star Y]$ es la misma conexión que la conexión integrable ∇' sobre $\mathcal{M}[\star Y]$ que definimos en la nota 2.1.2, para comprobarlo basta identificar:

$$\Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X[\star Y]} \mathcal{M}[\star Y] = \Omega_X^1[\star Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}.$$

Nota 2.3.3.— En el caso de $\mathcal{D}_X[\star Y]$ -módulos a derecha, también se produce una identificación entre una estructura de $\mathcal{D}_X[\star Y]$ -módulo a la derecha sobre un $\mathcal{O}_X[\star Y]$ -módulo \mathcal{M} y una conexión meromorfa “a la derecha” integrable sobre el $\mathcal{O}_X[\star Y]$ -módulo \mathcal{M} . Así, dado un $\mathcal{O}_X[\star Y]$ -módulo \mathcal{M} se define una conexión meromorfa a la derecha ∇ sobre \mathcal{M} de la misma forma que antes, pero cambiando la condición de Leibniz por:

$$\nabla(fm) = df \cdot m - f\nabla(m).$$

Del mismo modo que en el caso “a la izquierda”, se define ∇_δ y conexión a la derecha integrable.

2.4 Complejo de De Rham meromorfo.

Consideremos un $\mathcal{D}_X[\star Y]$ -módulo a la izquierda \mathcal{M} . La conexión integrable ∇ definida de manera natural en \mathcal{M} por su estructura de $\mathcal{D}_X[\star Y]$ -módulo nos da un morfismo $\mathcal{O}_X[\star Y]$ -lineal

$$d^0 : \mathcal{M} \rightarrow \Omega_X^1[\star Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M},$$

tal que $d^0(m)$ es la sección de $\Omega_X^1[\star Y](\mathcal{M}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X[\star Y]}(\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X[\star Y]), \mathcal{M})$ definida como:

$$d^0(m)(\delta) = \nabla_\delta(m).$$

A partir de d^0 y de la diferencial exterior d , podemos construir un morfismo (\mathbb{C} -lineal)

$$d^p : \Omega_X^p[\star Y](\mathcal{M}) \rightarrow \Omega_X^{p+1}[\star Y](\mathcal{M}),$$

para todo entero p entre 1 y n . Dadas dos secciones ω de $\Omega_X^p[\star Y]$ y m de \mathcal{M} :

$$d^p(\omega \otimes m) = d\omega \otimes m + (-1)^p \omega \wedge d^0(m).$$

La condición de integrabilidad implica que $d^p \circ d^{p-1} = 0$, para cualquier p .

Definición 2.4.1.— Si \mathcal{M} es un $\mathcal{D}_X[\star Y]$ -módulo a izquierda, llamamos complejo de De Rham meromorfo de \mathcal{M} , y notamos $\Omega_X^\bullet[\star Y](\mathcal{M})$, al complejo (de \mathbb{C} -módulos):

$$0 \rightarrow \Omega_X^0[\star Y](\mathcal{M}) \xrightarrow{d^0} \Omega_X^1[\star Y](\mathcal{M}) \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{p-1}} \Omega_X^p[\star Y](\mathcal{M}) \xrightarrow{d^p} \\ \Omega_X^{p+1}[\star Y](\mathcal{M}) \xrightarrow{d^{p+1}} \dots \xrightarrow{d^{n-1}} \Omega_X^n[\star Y](\mathcal{M}) \rightarrow 0.$$

En un sistema de coordenadas locales $(U; x_1, \dots, x_n)$ la aplicación d^p viene definida por:

$$d^p(U) : \Omega_X^p[\star Y](U) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}(U) \rightarrow \Omega_X^{p+1}[\star Y](U) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}(U)$$

$$d^p(U)(\omega \otimes m) = d\omega \otimes m + \sum_{j=1}^n \left((dx_j \wedge \omega) \otimes \frac{\partial}{\partial x_j} m \right),$$

con ω y m secciones en el abierto U de $\Omega_X^p[\star Y]$ y \mathcal{M} , respectivamente. En el caso particular de que partamos de un elemento $\omega = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ de la base de $\Omega^p[f^{-1}]$ como $\mathcal{O}[f^{-1}]$ -módulo, obtenemos:

$$d^p((dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) \otimes m) = \sum_{j=1}^n (dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) \otimes \frac{\partial}{\partial x_j} m.$$

2.5 Complejo de Spencer meromorfo.

Definición 2.5.1.— Notaremos $\mathcal{S}p^\bullet[\star Y]$ el complejo de Spencer meromorfo, dado por :

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_X[\star Y] \otimes_{\mathcal{O}_X[\star Y]} \overset{n}{\wedge} \text{Derc}(\mathcal{O}_X[\star Y]) \xrightarrow{\varphi^{-n}} \dots \\ \dots \xrightarrow{\varphi^{-p-1}} \mathcal{D}_X[\star Y] \otimes_{\mathcal{O}_X[\star Y]} \overset{p}{\wedge} \text{Derc}(\mathcal{O}_X[\star Y]) \xrightarrow{\varphi^{-p}} \\ \mathcal{D}_X[\star Y] \otimes_{\mathcal{O}_X[\star Y]} \overset{p-1}{\wedge} \text{Derc}(\mathcal{O}_X[\star Y]) \xrightarrow{\varphi^{-p+1}} \dots \\ \dots \xrightarrow{\varphi^{-2}} \mathcal{D}_X[\star Y] \otimes_{\mathcal{O}_X[\star Y]} \overset{1}{\wedge} \text{Derc}(\mathcal{O}_X[\star Y]) \xrightarrow{\varphi^{-1}} \mathcal{D}_X[\star Y] \xrightarrow{\varphi^0} \mathcal{O}[\star Y] \rightarrow 0,$$

siendo la expresión de las anteriores aplicaciones en un abierto U de X la siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi_{-p}(P \otimes \delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_p) &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} P \delta_i \otimes \delta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\delta}_i \wedge \cdots \wedge \delta_p + \\ & \sum_{1 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} P \otimes [\delta_i, \delta_j] \wedge \delta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\delta}_i \wedge \cdots \wedge \widehat{\delta}_j \wedge \cdots \wedge \delta_p \quad (2 \leq p \leq n). \\ \varphi_{-1}(P \otimes \delta) &= P\delta, \\ \varphi_0(P) &= P(1), \end{aligned}$$

con P sección en U de un operador diferencial meromorfo, y las δ_i secciones en U de $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X[*Y])$.

Nota 2.5.2.— Se tiene un isomorfismo de complejos de $\mathcal{D}_X[*Y]$ -módulos a la izquierda:

$$\mathcal{O}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{S}p^* \cong \mathcal{S}p^*[*Y].$$

Para comprobarlo basta tener en cuenta las identificaciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{O}_X[*Y]} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X[*Y]) &= \\ \mathcal{D}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{O}_X[*Y]} \mathcal{O}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) &= \\ \mathcal{D}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) &= \\ \mathcal{O}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X). \end{aligned}$$

Nota 2.5.3.— Se verifican las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} DR_X(\mathcal{O}_X[*Y]) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{S}p^*(\mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X[*Y]) = \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}_X[*Y]}(\mathcal{D}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{S}p^*(\mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X[*Y]) &= \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}_X[*Y]}(\mathcal{S}p^*[*Y], \mathcal{O}_X[*Y]) &= \\ \text{RHom}_{\mathcal{D}_X[*Y]}(\mathcal{O}_X[*Y], \mathcal{O}_X[*Y]). \end{aligned}$$

Proposición 2.5.4.— Existe un isomorfismo natural de complejos de haces de \mathbb{C} -espacios vectoriales:

$$\Phi^* : \Omega_X^*[*Y](\mathcal{D}_X[*Y]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}_X[*Y]}(\mathcal{S}p^*[*Y], \mathcal{D}_X[*Y]).$$

Nota 2.5.5.— Esta prueba es la misma que en el caso

$$\Omega_X^* \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{S}p^*, \mathcal{O}_X),$$

y ahora la detallaremos.

Prueba: Para cada $p \geq 0$, consideramos el isomorfismo de $\mathcal{O}_X[\star Y]$ -módulos definido por:

$$\Phi^p : \Omega_X^p[\star Y](\mathcal{D}_X[\star Y]) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}_X[\star Y]} \left(\mathcal{D}_X[\star Y] \otimes \bigwedge^p \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X), \mathcal{D}_X[\star Y] \right),$$

$$\Phi^p((\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p) \otimes Q)(P \otimes (\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_p)) = P \cdot \det((\omega_i \cdot \delta_j)_{1 \leq i, j \leq p}) \cdot Q.$$

Para probar que los Φ^p conmutan con las diferenciales procederemos en las fibras para cada $x \in Y$ utilizando las expresiones respecto de las bases

$$\{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}, 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n\} \text{ de } \Omega_X^p[\star f] \text{ y}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{j_p}}, 1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n \right\} \text{ de } \bigwedge^p \text{Der}(\mathcal{O}),$$

siendo (x_1, \dots, x_n) un sistema de coordenadas centrado en x . Veamos como actúan sobre estas bases los morfismos implicados:

$$d^p : \Omega_X^p[\star Y](\mathcal{D}_X[\star Y]) \longrightarrow \Omega_X^{p+1}[\star Y](\mathcal{D}_X[\star Y])$$

$$d^p((dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) \otimes P) = \sum_{i_0=1}^n \left((dx_{i_0} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_0}} P \right).$$

$$\varphi_{-p} : \mathcal{S}p^{-(p+1)}[\star Y] \longrightarrow \mathcal{S}p^{-p}[\star Y]$$

$$\begin{aligned} & \varphi_{-p} \left(Q \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{j_{p+1}}} \right) \right) = \\ & = \sum_{k=1}^{p+1} \left((-1)^{k-1} Q \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \widehat{\frac{\partial}{\partial x_{j_k}}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{j_{p+1}}} \right) \right) \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\Lambda^p : \text{Hom}_{\mathcal{D}_X[\star Y]} (\mathcal{S}p^{-p}[\star Y], \mathcal{D}_X[\star Y]) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}_X[\star Y]} (\mathcal{S}p^{-(p+1)}[\star Y], \mathcal{D}_X[\star Y])$$

$$\alpha \rightarrow \Lambda^p(\alpha)$$

$$\begin{aligned} & \Lambda^p(\alpha) \left(Q \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{j_{p+1}}} \right) \right) = \\ & = \sum_{k=1}^{p+1} \left((-1)^{k-1} Q \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \cdot \alpha \left(1 \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \widehat{\frac{\partial}{\partial x_{j_k}}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{j_{p+1}}} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Tenemos que comprobar que:

$$\Phi^{p+1} d^p((dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) \otimes P) = \Lambda^p \Phi^p((dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) \otimes P).$$

Estos son elementos de $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X[\star Y]}(\mathcal{S}p^{-(p+1)}[\star Y], \mathcal{D}_X[\star Y])$. Para comprobar que son iguales, calculamos la imagen de los elementos

$$Q \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{j_{p+1}}} \right), \quad (1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_{p+1}).$$

$$\begin{aligned} & \Phi^{p+1} d^p((dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) \otimes P) \left(Q \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{j_{p+1}}} \right) \right) = \\ &= \sum_{i_0=1}^n \Phi^{p+1} \left((dx_{i_0} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_0}} P \right) \left(Q \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{j_{p+1}}} \right) \right) = \\ &= \sum_{i_0=1}^n Q \cdot \det \left(\left\langle dx_{i_h} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{j_t}} \right\rangle_{1 \leq h-1, t \leq p+1} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_{i_0}} P \end{aligned}$$

Todos los posibles determinantes son nulos salvo en el caso en que los conjuntos $\{i_0, i_1, \dots, i_p\}$ y $\{j_1, \dots, j_{p+1}\}$ sean el mismo. Por tanto, sólo nos queda un posible determinante no nulo. Si desarrollamos este último determinante por la primera fila, suponiendo que $i_0 = j_k$, nos queda:

$$\begin{aligned} & \Phi^{p+1} d^p((dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) \otimes P) \left(Q \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{j_{p+1}}} \right) \right) = \\ &= Q \cdot \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} P \cdot (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

($i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_{k-1} = j_{k-1}, i_0 = j_k, i_k = j_{k+1}, \dots, i_p = j_{p+1}$), ya que en cualquier otro caso nos da como imagen el elemento nulo.

Comprobemos ahora la imagen por el otro morfismo:

$$\begin{aligned} & \Lambda^p \Phi^p((dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) \otimes P) \left(Q \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{j_{p+1}}} \right) \right) = \\ & \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k-1} Q \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \cdot \Phi^p(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \otimes P) \left(1 \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{j_{p+1}}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{p+1} Q \cdot \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \det \left(\left\langle dx_{i_h} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{j_t}} \right\rangle_{1 \leq h \leq p, 1 \leq t \leq p+1, t \neq k} \right) \cdot P = \\ &= Q \cdot \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} P \cdot (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

En la última igualdad suponemos que $\{i_1, \dots, i_p\}$ y $\{j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_{p+1}\}$ son el mismo conjunto, ya que en otro caso, nos daría el elemento nulo.

Tenemos, por tanto, el isomorfismo buscado:

$$\Phi^\bullet : \Omega_X^\bullet[\star Y](\mathcal{D}_X[\star Y]) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X[\star Y]}(\mathcal{S}p^\bullet[\star Y], \mathcal{D}_X[\star Y]).$$

□

3 Conexiones logarítmicas y \mathcal{V} -filtración

La tercera sección del primer capítulo se estructura en tres subsecciones. En la primera, “**Derivaciones y formas logarítmicas**”, tratamos con detalle los conceptos de derivación logarítmica a lo largo de Y , forma logarítmica a lo largo de Y , divisor libre y campo de Euler, y detallamos algunos resultados fundamentales para nuestro trabajo posterior, como la dualidad entre derivaciones logarítmicas y formas logarítmicas o el Criterio de Saito. A pesar de que prácticamente todo lo contenido en esta sección se puede encontrar en el artículo de Kyoji Saito [35], hemos decidido incluirlo por comodidad del lector para poder explicitar claramente cuáles son los resultados que utilizamos y para demostrar con todo detalle estos resultados. En la segunda sección, definimos a partir de las formas logarítmicas, y de una manera completamente análoga a los casos holomorfo y meromorfo, los conceptos de conexión logarítmica, conexión logarítmica integrable y complejo de de Rham logarítmico.

Por último, la tercera subsección, “ **\mathcal{V} -filtración**”, está dedicada al estudio de la \mathcal{V} -filtración sobre \mathcal{D}_X relativa a Y , concepto introducido por Kashiwara y Malgrange ([25], [28]). Se da una expresión explícita de los elementos de la \mathcal{V} -filtración en los casos en que Y sea una variedad lisa o un divisor con cruzamientos normales. Para el desarrollo posterior del trabajo resaltamos el resultado que conecta la \mathcal{V} -filtración y, en especial, el término 0-ésimo de la filtración, esto es, el anillo $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ de los “operadores diferenciales logarítmicos”, con las derivaciones logarítmicas: la suma directa de estas últimas con las funciones holomorfas constituye el conjunto de los operadores logarítmicos de grado uno. Más aún, el \mathcal{O}_X -álgebra simétrica de las derivaciones logarítmicas se envía canónicamente en el anillo graduado de $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ por la filtración F^\bullet dada por el orden de los operadores. Esta similitud evidente con el caso de las derivaciones holomorfas y el anillo de los operadores diferenciales, nos llevó a intentar probar los resultados que aparecen en el capítulo 2 y que justifican claramente el interés y la necesidad de considerar una teoría de $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulos o “ \mathcal{D}_X -módulos logarítmicos”.

Seguiremos con la misma notación. En particular, Y es una hipersuperficie de X de ideal \mathcal{I} .

3.1 Derivaciones y formas logarítmicas

Definición 3.1.1.— [35] Un campo de vectores δ o, equivalentemente, una sección de $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$, definido sobre el abierto U de X se dice que es un campo de vectores (o derivación) con polos logarítmicos a lo largo de Y o, sencillamente, un campo de vectores logarítmico si verifica una de las dos siguientes condiciones, que son equivalentes:

1. En cada punto liso x de $Y \cap U$, el vector tangente $\delta_x(x)$ es tangente a Y en

el punto x .

2. Para cualquier punto x de $Y \cap U$, $\delta_x(\mathcal{I}_x)$ está contenido en el ideal \mathcal{I}_x (En el caso de que $I = \mathcal{I}_x = (f)$, basta con que $\delta_x(f)$ pertenezca a $(f)\mathcal{O}$).

Al conjunto de las derivaciones logarítmicas lo denotamos por $\text{Der}(\log Y)$. El conjunto $\text{Der}(\log Y)$ es un \mathcal{O}_X -submódulo de $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$ definido en cada abierto U de X como:

$$\text{Der}(\log Y)(U) = \{\delta \in \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)(U), \delta|_V(\mathcal{I}|_V) \subset \mathcal{I}|_V\},$$

Para cualquier abierto V contenido en U . Denotamos por $\text{Der}(\log I)$ ($I = \mathcal{I}_x$) al conjunto:

$$\text{Der}(\log I) = \{\delta \in \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}), \delta(I) \subset I\}.$$

En el caso en que $I = (f)$, lo notamos $\text{Der}(\log f)$. Si $(U; x_1, \dots, x_n)$ es un sistema de coordenadas en x :

$$\text{Der}(\log f) = \{\delta, \delta(f) \in (f)\} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \in (f) \right\}.$$

Por definición, $\text{Der}(\log Y)$ es un \mathcal{O}_X -submódulo coherente de $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$, que verifica claramente:

$$\text{Der}(\log Y)_x = \text{Der}(\log f_x).$$

Una forma de comprobar la coherencia del \mathcal{O}_X -módulo $\text{Der}(\log Y)$ es tomar, cada punto x de X , una carta local $(U; x_1, \dots, x_n)$ de X en la que Y este definido por la función holomorfa f de $\mathcal{O}_X(U)$:

$$\mathcal{I}|_U = \mathcal{O}_U(f),$$

e identificar en el abierto U el haz de las derivaciones logarítmicas con el \mathcal{O}_U -módulo de las sicigias de las derivadas parciales respecto de las x_i y la propia f :

$$\text{Der}(\log Y)|_U(V) = \mathcal{R}(f_{x_1}, \dots, f_{x_n}, f),$$

donde f_{x_i} representa la derivada parcial respecto a x_i , $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. El haz $\text{Der}(\log Y)$ es también una subálgebra de Lie de $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$, puesto que se verifica

$$[\delta_1, \delta_2] = \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1 \in \text{Der}(\log Y)(U),$$

con δ_1 y δ_2 dos secciones de $\text{Der}(\log Y)$ en el abierto U .

Definición 3.1.2.— [35] Decimos que una q -forma meromorfa $\omega \in \Omega_X^q[\star Y](U)$ es una q -forma logarítmica a lo largo de Y en el abierto U o, sencillamente, una q -forma logarítmica, si para todo punto $x \in U$, con Y definido en x por $\mathcal{I}_x = I = (f)$, se verifica cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

1. $f\omega$ y $df \wedge \omega$ son holomorfas en x , es decir, $f\omega \in \Omega^q$ y $df \wedge \omega \in \Omega^{q+1}$.
2. $f\omega$ y $fd\omega$ son holomorfas en x .

Al conjunto de las q -formas logarítmicas a lo largo de Y en U lo denotamos por $\Omega_X^q(\log Y)(U)$:

$$\Omega_X^q(\log Y)(U) = \{\omega \in \Omega_X^q[*Y](U), \forall x \in U, f\omega_x \in \Omega^q, df \wedge \omega_x \in \Omega^{q+1}\}.$$

Esta definición nos da un \mathcal{O}_X -módulo coherente $\Omega_X^q(\log Y)$, cuyas fibras son:

$$\Omega_X^q(\log Y)_x = \{\omega \in \Omega_X^q[*f], f\omega \in \Omega^q, df \wedge \omega \in \Omega^{q+1}\},$$

este conjunto lo denotamos por $\Omega^q(\log f)$.

En el caso de las 1-formas logarítmicas, si trabajamos en un sistema de coordenadas $(U; x_1, \dots, x_n)$, nos queda:

$$\Omega^1(\log f) = \left\{ \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n b_i dx_i, b_i \frac{\partial f}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial f}{\partial x_i} \in (f) \right\}.$$

Si restringimos la diferencial exterior d de las q -formas meromorfas con polos a lo largo de Y al subhaz de las q -formas logarítmicas se verifica:

$$d : \Omega_X^q(\log Y) \rightarrow \Omega_X^{q+1}(\log Y).$$

Dada una sección ω de $\Omega_X^q(\log Y)$ en un abierto en el que \mathcal{I} esté generado por f , como

$$\begin{aligned} d(f\omega) &= df \wedge \omega + f d\omega, \\ d(df \wedge \omega) &= -df \wedge d\omega, \end{aligned}$$

se deduce de inmediato el resultado.

Definición 3.1.3.— [35] El conjunto de las formas logarítmicas a lo largo de Y definen un subcomplejo del complejo de De Rham meromorfo a lo largo de Y , complejo que se obtiene al restringir la diferencial exterior de las q -formas meromorfas a las q -formas logarítmicas. Este complejo se denomina complejo de De Rham logarítmico y se denota por $\Omega_X^\bullet(\log Y)$:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1(\log Y) \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow \Omega_X^p(\log Y) \xrightarrow{d} \Omega_X^{p+1}(\log Y) \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_X^n(\log Y),$$

donde d es la diferencial exterior usual.

Si restringimos la aplicación

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Omega_X^1[*Y] \times \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X[*Y]) \longrightarrow \mathcal{O}_X[*Y]$$

a los haces $\Omega_X^1(\log Y)$ y $\mathcal{D}er(\log Y)$, tenemos definido un morfismo \mathcal{O}_X -bilineal de \mathcal{O}_X -módulos:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}er(\log Y) \times \Omega_X^1(\log Y) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X, \\ (\delta, \omega) & \longrightarrow & \langle \delta, \omega \rangle \end{array}$$

Para comprobarlo basta observar que en cada punto $x \in X$, $\langle \delta, \omega \rangle_x \in \mathcal{O}$, para todo $\delta \in \mathcal{D}er(\log f)$ y $\omega \in \Omega^1(\log f)$.

Sean

$$\delta = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \omega = \sum_{j=1}^n b_j dx_j,$$

con

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = af, \quad b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - b_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = b_{ij}f,$$

con $a, b_{ij} \in \mathcal{O}$ ($1 \leq i, j \leq n$).

$$\langle \delta, \omega \rangle_x = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k} \langle \delta, \omega \rangle_x &= \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} a_i b_i = \frac{1}{f} \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} b_k + f \sum_{i=1}^n b_{ik} a_i \right) = \\ &= ab_k + \sum_{i=1}^n b_{ik} a_i. \end{aligned}$$

Por tanto, $\langle \delta, \omega \rangle_x \in \mathcal{O}$, puesto que hemos probado que lo es en todo punto de cualquier entorno de x en el que este definido, salvo en los p tales que

$$f(p) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0.$$

Tenemos, en consecuencia, las contenciones:

$$\Omega_X^1(\log Y) \subset \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{D}er(\log Y), \mathcal{O}_X),$$

$$\mathcal{D}er(\log Y) \subset \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^1(\log Y), \mathcal{O}_X).$$

Lema 3.1.4.— [35] Existe una dualidad perfecta entre $\Omega_X^1(\log Y)$ y $\mathcal{D}er(\log Y)$ definida por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Prueba: Para ello, nos basta comprobar la otra contención en cada fibra de los haces. Puesto que

$$\Omega_X^1(\log Y)_x = \Omega^1(\log f),$$

$$\mathcal{D}er(\log Y)_x = \mathcal{D}er(\log f),$$

y

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^1(\log Y), \mathcal{O}_X)_x \subset \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\Omega^1(\log f), \mathcal{O}),$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\text{Der}(\log Y), \mathcal{O}_X)_x \subset \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\text{Der}(\log f), \mathcal{O}),$$

sólo nos resta comprobar que

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\Omega^1(\log f), \mathcal{O}) \subset \Omega^1(\log f),$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\text{Der}(\log f), \mathcal{O}) \subset \text{Der}(\log f).$$

Consideremos las inclusiones

$$\Omega^1 \subset \Omega^1(\log f) \subset \frac{1}{f}\Omega^1,$$

$$f\text{Der}_{\mathcal{C}}(\mathcal{O}) \subset \text{Der}(\log f) \subset \text{Der}_{\mathcal{C}}(\mathcal{O}).$$

Pasando al dual de un \mathcal{O} -módulo ($\text{Hom}_{\mathcal{O}}(-, \mathcal{O})$), obtenemos:

$$\text{Der}_{\mathcal{C}}(\mathcal{O}) \supset \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\Omega^1(\log f), \mathcal{O}) \supset f\text{Der}_{\mathcal{C}}(\mathcal{O}),$$

$$\frac{1}{f}\Omega^1 \supset \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\text{Der}(\log f), \mathcal{O}) \supset \Omega^1.$$

Sea $\delta \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\Omega^1(\log f), \mathcal{O}) \subset \text{Der}_{\mathcal{C}}(\mathcal{O})$,

$$\langle \delta, \frac{df}{f} \rangle = \frac{\delta(f)}{f}$$

es una función holomorfa, y

$$\delta(f) = f \langle \delta, \frac{df}{f} \rangle$$

es una función holomorfa múltiplo de f . Por tanto, $\delta \in \text{Der}(\log f)$.

Sea ahora un elemento ω de

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\text{Der}(\log f), \mathcal{O}) \subset \frac{1}{f}\Omega^1.$$

Operamos ω con elementos δ_{ij} de $\text{Der}(\log f)$. Para ello, utilizaremos su expresión en un sistema de coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$\omega = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i, \quad \delta_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$\langle \delta_{ij}, \omega \rangle = \frac{1}{f} \left(a_j \frac{\partial f}{\partial x_i} - a_i \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \in \mathcal{O},$$

para i y j entre 1 y n . Por tanto,

$$df \wedge \omega = \frac{1}{f} \sum_{i,j} \left(a_j \frac{\partial f}{\partial x_i} - a_i \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j \in \mathcal{O},$$

y ω pertenece a $\Omega^1(\log f)$.

□

Corolario 3.1.5.— [35] Los módulos $\Omega^1(\log f)$ y $\text{Der}(\log f)$ son \mathcal{O} -módulos coherentes reflexivos. En particular, cuando $n = \dim_{\mathbb{C}} X = 2$, $\Omega_X^1(\log Y)$ y $\text{Der}(\log Y)$ son \mathcal{O}_X -módulos localmente libres.

En general, los haces $\text{Der}(\log Y)$ y $\Omega_X^1(\log Y)$ no son localmente libres. Esto nos lleva a recordar el siguiente criterio de caracterización.

Definición 3.1.6.— [35] Diremos que Y es libre en x , o bien que I es un ideal libre de \mathcal{O} , si $\text{Der}(\log I)$ es un \mathcal{O} -módulo libre (de rango n). Si $f \in \mathcal{O}$, diremos que f es libre si el ideal $I = (f)$ lo es. Diremos que Y es libre si lo es en todo punto x . En este caso, $\text{Der}(\log Y)$ es un \mathcal{O}_X -módulo localmente libre de rango n .

Proposición 3.1.7.— [35, Criterio de Saito].

El \mathcal{O} -módulo $\text{Der}(\log f)$ es libre si y sólo si existen n elementos $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ en $\text{Der}(\log f)$ con $\delta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(z) \frac{\partial}{\partial z_j}$ ($i = 1, \dots, n$), siendo $(z_1, z_2, \dots, z_n) = z$ un sistema de coordenadas de X centrada en x , tales que el determinante $\det(a_{ij}) = af$, con a unidad en \mathcal{O} . Además, en este caso, $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ es una base de $\text{Der}(\log f)$.

Prueba: Supongamos que $\text{Der}(\log f)$ es \mathcal{O} -libre. Como $\text{Der}(\log Y)$ es coherente, existe un entorno U de x tal que $\text{Der}(\log Y)|_U$ es un \mathcal{O}_X -módulo libre. Consideremos una base $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ de $\text{Der}(\log Y)|_U$.

$$\delta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(z) \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad \det(a_{ij}(z)) = af, \quad \text{con } a \in \mathcal{O}(U).$$

Para ver que la función $\det(a_{ij}(z))$ es múltiplo de f basta considerar que en cualquier punto y de Y , los vectores $\delta_1(y), \dots, \delta_n(y)$ son tangentes a la variedad Y , de dimensión $n - 1$, y, por tanto, son linealmente independiente. Veamos ahora que a es unidad en \mathcal{O} . En los puntos de $U - Y$, $\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\}$ es una base de $\text{Der}(\log f)$, y en los puntos lisos de $U \cap Y$ puedo elegir como base a $\{z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\}$, donde z_1 es una ecuación local de Y . Por tanto, a no se anula en ningún punto de U .

Supongamos ahora que tenemos un conjunto de campos de vectores logarítmicos en x :

$$\delta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(z) \frac{\partial}{\partial z_j} \quad (i = 1, \dots, n), \quad \det(a_{ij}(z)) = f.$$

Sea δ un elemento de $\text{Der}(\log f)$, $\delta = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Se verifica:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1n} \\ b_1 & \cdots & b_n \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c_i f,$$

con $c_i \in \mathcal{O}$, por la misma razón por la que el determinante $\det(a_{ij})$ es múltiplo de f . Tenemos, por tanto,

$$\delta = \sum_{i=1}^n c_i \delta_i.$$

□

Definición 3.1.8.— (cf. [1]) Decimos que un campo de vectores $E \in \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O})$ es un campo de Euler para f si verifica que $E(f) = f$. Si un tal E existe, diremos que f es Euler-homogéneo.

Nota 3.1.9.— Llamaremos Θ_f al \mathcal{O} -submódulo de las derivaciones que anulan f . Claramente Θ_f es una subálgebra de Lie de $\text{Der}(\log f)$. Obsérvese que, fijado un sistema de coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) , Θ_f se identifica al \mathcal{O} -módulo de las sicigias de las derivadas parciales $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$.

Lema 3.1.10.— Sea $f \in \mathcal{O}$. Supongamos que existe un campo de Euler E para f . Entonces $\text{Der}(\log f)$ se descompone en una suma directa:

$$\text{Der}(\log f) = \Theta_f \oplus \mathcal{O}E.$$

Si además, f es libre, se tiene que Θ_f es también libre de rango $n-1$ y, por tanto, cualquier base de Θ_f , $\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n-1}\}$ ($\chi_i(f) = 0$, $i = 1, \dots, n-1$), nos da una base $\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n-1}, E\}$ del \mathcal{O} -módulo $\text{Der}(\log f)$.

Prueba: Sea δ un elemento de $\text{Der}(\log f)$, con $\delta f = af$, con $a \in \mathcal{O}$. Consideremos $\delta' = \delta - aE \in \Theta_f$:

$$\delta = \delta' + aE \in \Theta_f \oplus \mathcal{O}E.$$

Veamos que $\Theta_f \cap \mathcal{O}E = \{0\}$. Sea $\delta \in \Theta_f \cap \mathcal{O}E$:

$$\delta(f) = 0 = aE(f) = af,$$

por tanto, $a = 0$ y $\delta = aE = 0$.

□

3.2 Conexiones logarítmicas. Integrabilidad.

Tenemos definido el haz $\Omega_X^p(\log Y)$ de las q -formas logarítmicas a lo largo de Y , para cada entero positivo q menor o igual que n . Dado un \mathcal{O}_X -módulo a izquierda \mathcal{M} , notamos

$$\Omega_X^q(\log Y)(\mathcal{M}) = \Omega_X^q(\log Y) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M},$$

para cada q . En el caso $q = 0$, $\Omega_X^0(\log Y)(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$. Cuando $q = 1$, tenemos un isomorfismo canónico

$$\begin{aligned} \Omega_X^1(\log Y)(\mathcal{M}) &= \Omega_X^1(\log Y) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \cong \\ &\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\text{Der}(\log Y), \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \cong \\ &\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\text{Der}(\log Y), \mathcal{M}). \end{aligned}$$

Definición 3.2.1.— (cf. [13]) Sea un \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} . Una conexión logarítmica a lo largo de Y sobre \mathcal{M} es un homomorfismo \mathbb{C} -lineal ∇ :

$$\nabla: \mathcal{M} \rightarrow \Omega_X^1(\log Y)(\mathcal{M}),$$

que verifica la identidad de Leibniz:

$$\nabla(hm) = dh \cdot m + h\nabla(m),$$

donde h y m son secciones de \mathcal{O}_X y \mathcal{M} , respectivamente, y d es la diferencial exterior sobre \mathcal{O}_X .

Si δ es una derivación logarítmica a lo largo de Y , tenemos definida un endomorfismo \mathbb{C} -lineal sobre \mathcal{M} :

$$\begin{array}{ccc} \text{Der}(\log Y) & \longrightarrow & \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}), \\ \delta & \mapsto & \nabla_{\delta}. \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \nabla_{\delta}: \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M}, \\ m & \mapsto & \langle \delta, \nabla(m) \rangle. \end{array}$$

Se observa que para cualesquiera δ , h y m , secciones de $\text{Der}(\log Y)$, \mathcal{O}_X y \mathcal{M} , respectivamente, se verifica:

1. $\nabla_{f\delta}(m) = f \cdot \nabla_{\delta}(m)$.
2. $\nabla_{\delta}(fm) = \delta(f) \cdot m + f \cdot \nabla_{\delta}(m)$.

Por tanto, tener una conexión logarítmica ∇ sobre \mathcal{M} es equivalente a tener un morfismo de \mathcal{O}_X -módulos

$$\nabla': \text{Der}(\log Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$$

que verifique el equivalente a la condición de Leibniz:

$$\nabla'_\delta(fm) = \delta(f) \cdot m + f \cdot \nabla'_\delta(m).$$

Para comprobar la equivalencia entre tener definida ∇ y tener definida ∇' , basta considerar la correspondencia que a ∇' le asigna la siguiente ∇ :

$$\nabla : \mathcal{M} \rightarrow \Omega_X^1(\log Y)(\mathcal{M}),$$

tal que $\nabla(m)$ es el elemento de $\Omega_X^1(\log Y)(\mathcal{M}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\text{Der}(\log Y), \mathcal{M})$ definido como:

$$\nabla(m)(\delta) = \nabla'_\delta(m).$$

Decimos que una conexión logarítmica ∇ de $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}, \Omega_X^1(\log Y)(\mathcal{M}))$ o, lo que es lo mismo, una conexión logarítmica

$$\nabla \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\text{Der}(\log Y), \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{M}))$$

es integrable si, dados dos secciones δ y δ' de derivaciones logarítmicas, verifica:

$$\nabla_{[\delta, \delta']} = [\nabla_\delta, \nabla_{\delta'}],$$

donde $[,]$ representa respectivamente el corchete de Lie en $\text{Der}(\log Y)$ y el conmutador en $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$.

A partir de ∇ y de la diferencial exterior d , podemos construir un morfismo (\mathbb{C} -lineal)

$$\nabla^q : \Omega_X^q(\log Y)(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega_X^{q+1}(\log Y)(\mathcal{M}),$$

para todo entero q entre 1 y n . Dadas dos secciones ω y m de los haces $\Omega_X^p(\log Y)$ y \mathcal{M} , respectivamente:

$$\nabla^q(\omega \otimes m) = d\omega \otimes m + (-1)^q \omega \wedge \nabla(m).$$

La condición de integrabilidad es equivalente a que $\nabla^q \circ \nabla^{q-1} = 0$, para cualquier q . Por tanto, una conexión logarítmica integrable ∇ sobre el \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} define un complejo de \mathcal{O}_X -módulos.

Definición 3.2.2.— Sea \mathcal{M} es un \mathcal{O}_X -módulo, y ∇ una conexión logarítmica con polos a lo largo de Y integrable sobre \mathcal{M} . Siguiendo la misma notación llamamos complejo de De Rham logarítmico de \mathcal{M} , y notamos $\Omega_X^\bullet(\log Y)(\mathcal{M})$, al complejo (de \mathbb{C} -módulos):

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\nabla} \Omega_X^1(\log Y)(\mathcal{M}) \xrightarrow{\nabla^1} \dots \xrightarrow{\nabla^{q-1}} \Omega_X^q(\log Y)(\mathcal{M}) \xrightarrow{\nabla^q} \Omega_X^{q+1}(\log Y)(\mathcal{M}) \xrightarrow{\nabla^{q+1}} \dots \xrightarrow{\nabla^{n-1}} \Omega_X^n(\log Y)(\mathcal{M}) \rightarrow 0.$$

En el caso particular del complejo formado por los $\Omega_X^q(\log Y) = \Omega_X^q(\log Y)(\mathcal{O}_X)$, donde el \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} es el propio \mathcal{O}_X y la conexión logarítmica ∇ es la diferencial exterior $d : \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1(\log Y)$, las aplicaciones:

$$\nabla^q : \Omega_X^q(\log Y) \rightarrow \Omega_X^{q+1}(\log Y),$$

definen el complejo de De Rham logarítmico (definición 3.1.3).

3.3 \mathcal{V} -filtración

Partiendo de una hipersuperficie lisa Y en una variedad X , Malgrange y Kashiwara ([28], [25]) definieron la \mathcal{V} -filtración sobre \mathcal{D}_X relativa a Y . Dicha definición puede generalizarse de manera obvia al caso en que Y sea una hipersuperficie arbitraria. Llamaremos \mathcal{V} -filtración relativa a Y (de ideal \mathcal{I}), o simplemente, \mathcal{V} -filtración a la filtración sobre \mathcal{D}_X definida, para cada entero k , como:

$$\mathcal{V}_k^Y(\mathcal{D}_X) = \{P \in \mathcal{D}_X, P(\mathcal{I}^j) \subset \mathcal{I}^{j-k}, \forall j \in \mathbb{Z}\},$$

donde interpretamos que $\mathcal{I}^p = \mathcal{O}_X$ cuando p es menor o igual que 0. Es decir, en el caso de que k sea positivo, los operadores diferenciales P de $\mathcal{V}_k^Y(\mathcal{D}_X)$ son los operadores P de \mathcal{D}_X tales que, para todo entero j mayor o igual que k , verifican $P(\mathcal{I}^j) \subset \mathcal{I}^{j-k}$. Y en el caso en que k sea negativo, los operadores P de $\mathcal{V}_k^Y(\mathcal{D}_X)$ son los operadores P de \mathcal{D}_X tales que, para todo entero j mayor o igual que cero, verifican $P(\mathcal{I}^j) \subset \mathcal{I}^{j-k}$.

Análogamente, disponemos de la \mathcal{V} -filtración inducida sobre \mathcal{D} , definida para cada entero k por:

$$\mathcal{V}_k^I(\mathcal{D}) = \{P \in \mathcal{D}, P(I^j) \subset I^{j-k}, \forall j \in \mathbb{Z}\},$$

donde interpretamos que $I^p = \mathcal{O}$ cuando p es menor o igual que 0. En el caso en que $I = (f)$, notaremos también $\mathcal{V}_k^I(\mathcal{D}) = \mathcal{V}_k^f(\mathcal{D})$.

Se tiene:

$$\text{Der}(\log Y) = \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) \cap \mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X),$$

$$\text{Der}(\log I) = \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}) \cap \mathcal{V}_0^I(\mathcal{D}).$$

$$\mathcal{O}_X \oplus \text{Der}(\log Y) = \mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \cap F^1 \mathcal{D}_X = F^1(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)),$$

$$\mathcal{O} \oplus \text{Der}(\log I) = \mathcal{V}_0^I(\mathcal{D}) \cap F^1 \mathcal{D} = F^1(\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})).$$

Nota 3.3.1.— Las inclusiones

$$\text{Der}(\log Y) = \text{Gr}_F^1(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)) \subset \text{Gr}_F(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)),$$

$$\text{Der}(\log I) = \text{Gr}_F^1(\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})) \subset \text{Gr}_F(\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D}))$$

que acabamos de ver nos proporcionan unos morfismos graduados canónicos de álgebras graduadas (en el primer caso \mathcal{O}_X -álgebras y en el segundo \mathcal{O} -álgebras):

$$\kappa : \text{Sim}_{\mathcal{O}_X}(\text{Der}(\log Y)) \longrightarrow \text{Gr}_F(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)),$$

$$\kappa_x : \text{Sim}_{\mathcal{O}}(\text{Der}(\log I)) \longrightarrow \text{Gr}_F(\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})).$$

Veremos más adelante (ver corolario 1.1.6) que ambos morfismos graduados son isomorfismos.

Nota 3.3.2.— Observamos que la definición de los $\mathcal{V}_k^I(\mathcal{D})$ verifica:

1. $\mathcal{V}_k^f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{V}_{k+1}^f(\mathcal{D})$.
2. $\cup_k \mathcal{V}_k^f(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. De hecho, si el orden natural de un operador $P \in \mathcal{D}$ es t , se tiene que $P \in \mathcal{V}_t^f(\mathcal{D})$.
3. $\mathcal{V}_k^f(\mathcal{D}) \cdot \mathcal{V}_m^f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{V}_{k+m}^f(\mathcal{D})$.

La primera inclusión es inmediata, al igual que la tercera. Veamos que para todo operador diferencial P de \mathcal{D} , existe algún k tal que P está en algún $\mathcal{V}_k^f(\mathcal{D})$: Sea t el orden de P , $P \in F^t(\mathcal{D}_X)$. Podemos ver P como una suma de productos de t derivaciones que, al aplicar cada una por separado a un múltiplo de una potencia de f , sólo disminuye esa potencia en una unidad a lo sumo:

$$P(\alpha f^{h+t}) = \sum \delta_1 \cdots \delta_t(\alpha f^{h+t}) \in (f^h),$$

con α en \mathcal{O} y las δ_i derivaciones de \mathcal{O} . Por tanto, se verifica que P pertenece a $\mathcal{V}_t^f(\mathcal{D})$.

Nota 3.3.3.— Llamaremos \mathcal{V}^f -grado de un operador $P \in \mathcal{D}$ al grado de P asociado a la \mathcal{V}^f -filtración: $\mathcal{V}^f\text{-grado}(P) = \min\{k, P \in \mathcal{V}_k^f(\mathcal{D})\}$. En el anexo 1 daremos un algoritmo para calcular este \mathcal{V}^f -grado.

Demostramos ahora algunos resultados que utilizaremos mas adelante.

Lema 3.3.4.— Dados dos enteros cualesquiera m y k , se verifica:

- (a) Si un operador P pertenece a $\mathcal{V}_k^f(\mathcal{D})$, entonces $[P, f]$ pertenece a $\mathcal{V}_{k-1}^f(\mathcal{D})$. Recíprocamente, si k es un entero mayor o igual que 0, y el operador producto corchete $[P, f]$ pertenece a $\mathcal{V}_{k-1}^f(\mathcal{D})$, entonces P pertenece a $\mathcal{V}_k^f(\mathcal{D})$. En particular, si P conmuta con f , se verifica que $P \in \mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$.
- (b) Sea un entero m mayor o igual que 0. Un operador P pertenece a $\mathcal{V}_k^f(\mathcal{D})$ si y sólo si al multiplicarlo a la izquierda por f^m , el producto pertenece a $\mathcal{V}_{k-m}^f(\mathcal{D})$.

Prueba: Probaremos primero el apartado a). Consideremos un operador P de $\mathcal{V}_k^f(\mathcal{D})$. Se tiene:

$$[P, f](\alpha f^j) = Pf(\alpha f^j) - fP(\alpha f^j) = P(\alpha f^{j+1}) - fP(\alpha f^j),$$

para todo α de \mathcal{O} y para todo j mayor o igual que 0. Así, si k es negativo, tenemos que, para todo j mayor que 0, $[P, f](\alpha f^j) \in (f^{j-k+1})$, y si k es positivo tenemos que para todo j mayor que k , $[P, f](\alpha f^j) \in (f^{j-k+1})$. Por tanto, $[P, f]$ pertenece a $\mathcal{V}_{k-1}^f(\mathcal{D})$.

Consideremos ahora P con $[P, f]$ en $\mathcal{V}_{k-1}^f(\mathcal{D})$ Probaremos por inducción en j que, para todo α en \mathcal{O} y para todo j mayor o igual que k , $P(\alpha f^j)$ es múltiplo de f^{j-k} .

Para j igual que k (aquí utilizamos que k es mayor que 0) $P(\alpha f^k)$ es una función holomorfa. Sea ahora un j mayor que k , tenemos

$$P(\alpha f^j) = P f(\alpha f^{j-1}) = [P, f](\alpha f^{j-1}) + f P(\alpha f^{j-1}).$$

Por hipótesis de inducción, $P(\alpha f^{j-1})$ es múltiplo de f^{j-1-k} , y sabemos que $[P, f](\alpha f^{j-1})$ es múltiplo de (f^{j-k}) . Por tanto, $P \in \mathcal{V}_k^f(\mathcal{D})$.

Para el apartado b) basta considerar que $P(\alpha f^t)$ es siempre una función holomorfa. En consecuencia, $f^j P(\alpha^t)$ es un elemento de (f^j) , y tenemos:

$$P(\alpha f^t) \in (f^{t-m}) \Leftrightarrow f^k P(\alpha f^t) \in (f^{t-m+k}).$$

□

Lema 3.3.5.— Se tienen los siguientes asertos:

- (a) Si $P \in \mathcal{D}$ es tal que $P(\alpha)$ está en el ideal de \mathcal{O} generado por (f^m) , para todo elemento α de \mathcal{O} , entonces P pertenece al ideal a la derecha de \mathcal{D} generado por f^m .
- (b) Para cualquier entero m mayor o igual que 0, $\mathcal{V}_{-m}^I(\mathcal{D})$ es el ideal bilátero de $\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})$ generado por f^m .

Prueba: Para el apartado (a), escribimos el operador diferencial P como polinomio en las derivadas parciales:

$$P = \sum_{|\beta| \leq d} a_\beta \partial_\beta,$$

donde $\beta = (i_1, \dots, i_n) \subset \mathbb{N}^n$, ∂_β representa a $\frac{\partial}{\partial x_1}^{i_1} \frac{\partial}{\partial x_2}^{i_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_n}^{i_n}$ y $a_{i_1 \dots i_n}$ pertenece a \mathcal{O} . Hemos de probar que a_β está en (f^m) . Veámoslo por inducción en $|\beta| = \sum_{k=1}^n i_k$.

Si $|\beta| = 0$, entonces $\beta = (0, \dots, 0)$ y $a_{0 \dots 0} = P(1)$ es múltiplo de f^m .

Supongamos que

$$a_\beta = f^m a'_\beta$$

cuando $|\beta| \leq q-1$, y consideremos un multiíndice α con $|\alpha| = q$. Se tiene

$$P = f^m Q + \sum_{|\beta| \geq q} a_\beta \partial_\beta,$$

de donde:

$$a_\beta = P(x^\beta) - f^m Q(x^\beta) \in (f^m).$$

Para probar (b), basta aplicar (a) y demostrar que $f^m \mathcal{V}_0^I(\mathcal{D}) = \mathcal{V}_0^I(\mathcal{D}) f^m$. Probaremos por inducción sobre d que

$$F^d (f^m \mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})) = F^d (\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D}) f^m).$$

El resultado es inmediato para $d = 0$.

Supongamos que

$$F^d (f^m \mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})) = F^d (\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D}) f^m).$$

Dado $Q \in F^{d+1} (\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D}))$, se tiene

$$f^m Q - Q f^m = [f^m, Q] \in F^d (\mathcal{V}_{-m}^I(\mathcal{D})) = F^d (f^m \mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})) = F^d (\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D}) f^m),$$

y de aquí

$$F^{d+1} (f^m \mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})) = F^{d+1} (\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D}) f^m).$$

□

Corolario 3.3.6.— La filtración definida por los $\mathcal{V}_m^I(\mathcal{D})$ es una filtración separada, es decir:

$$\bigcap_m \mathcal{V}_m^I(\mathcal{D}) = (0).$$

Prueba: Es una consecuencia inmediata del apartado 2) del lema anterior, puesto que:

$$\bigcap_{m \leq 0} \mathcal{V}_m^I(\mathcal{D}) = \bigcap_{m \leq 0} f^m \mathcal{V}_0^I(\mathcal{D}) = (0).$$

□

Nota 3.3.7.— En el caso de que Y sea una subvariedad lisa de X , conocemos bien los elementos P de los distintos $\mathcal{V}_m^I(\mathcal{D})$ de la filtración. Suponiendo que x_1 es una ecuación local de Y , (en ese caso x_1 está en $\mathcal{V}_{-1}^I(\mathcal{D})$, y $\frac{\partial}{\partial x_1}$ pertenece a $\mathcal{V}_1^I(\mathcal{D})$), tenemos:

1. $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ es un subanillo de \mathcal{D}_X que contiene a \mathcal{D}_Y . De hecho,

$$\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D}) = \mathcal{O}[x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}].$$

$$\frac{\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})}{\mathcal{V}_{-1}^I(\mathcal{D})} \simeq (\mathcal{D}_Y)_x [x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}].$$

2. Para cualquier número natural m , $\mathcal{V}_{-m}^I(\mathcal{D})$ es el ideal a la derecha de $\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})$ generado por x_1^m .

$$\mathcal{V}_{-m}^Y(\mathcal{D}_X) = \mathcal{I}^m \mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X),$$

$$\mathcal{V}_{-m}^I(\mathcal{D}) = \mathcal{I}^m \mathcal{V}_0^I(\mathcal{D}).$$

3. Para cualquier número natural m , un elemento P de $\mathcal{V}_m^I(\mathcal{D})$ se puede expresar como un sumatorio en la forma:

$$P = \sum_{i=0}^m \sum_{|\alpha|=i} \partial_\alpha Q_\alpha,$$

donde $\alpha = (0, i_2, i_3, \dots, i_n) \subset \mathbb{N}^n$, ∂_α representa a $\frac{\partial}{\partial x_2}^{i_2} \frac{\partial}{\partial x_3}^{i_3} \dots \frac{\partial}{\partial x_n}^{i_n}$ y los Q_α son operadores de $\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})$.

En el caso más general de que Y sea un divisor de X con cruzamientos normales, conocemos también los elementos P de los distintos $\mathcal{V}_m^I(\mathcal{D})$ de la filtración. Suponiendo que x_{t+1}, \dots, x_n es un sistema de coordenadas en Y , es decir, $f = x_1 \cdots x_t$ es una ecuación local de Y ($I = (f)$), tenemos:

1. $\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D}_X)$ es un subanillo de \mathcal{D}_X que contiene a \mathcal{D}_Y . De hecho,

$$\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D}) = \mathcal{O}[x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, x_t \frac{\partial}{\partial x_t}, \frac{\partial}{\partial x_{t+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}].$$

$$\frac{\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})}{\mathcal{V}_{-1}^I(\mathcal{D})} \simeq (\mathcal{D}_Y)_x [x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, x_t \frac{\partial}{\partial x_t}].$$

2. Para cualquier número natural m , $\mathcal{V}_{-m}^I(\mathcal{D})$ es el ideal a la derecha de $\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})$ generado por I^m :

$$\mathcal{V}_{-m}^I(\mathcal{D}) = I^m \mathcal{V}_0^I(\mathcal{D}).$$

3. Para cualquier número natural m , un elemento P de $\mathcal{V}_m^I(\mathcal{D})$ se puede expresar como un sumatorio en la forma:

$$P = \sum_{i=0}^m \sum_{|\alpha|=i} \frac{\partial}{\partial x_{t+1}}^{\alpha_{t+1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}^{\alpha_n} Q_i,$$

con $\alpha = (0, \dots, 0, \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_n)$ y los Q_i operadores de $\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})$.

Capítulo 2

Operadores logarítmicos con respecto a un divisor libre

Hemos visto cómo en el caso en que Y sea un divisor de X con cruzamientos normales, al calcular el haz $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$, obtenemos también los otros $\mathcal{V}_k^Y(\mathcal{D}_X)$ de la filtración. A los operadores de $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$, y a los de su fibra $\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})$, los llamamos operadores diferenciales logarítmicos a lo largo de Y , o simplemente, operadores logarítmicos. En la próxima sección, nos centramos en el estudio del referente básico de nuestro trabajo, esto es, el haz $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ de los operadores logarítmicos.

1 El anillo $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$

Introducción

Comentaremos brevemente los resultados contenidos en esta sección. Estudiamos primero el anillo $\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})$, que coincide con la fibra en un punto de Y del anillo $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$. Un operador logarítmico P se caracteriza porque si efectuamos n veces sucesivas su producto corchete con f , obtenemos un múltiplo de f^n . Esta caracterización de todo operador logarítmico P se transmite a su símbolo, que verifica que sus sucesivos corchetes de Poisson con f son múltiplos sucesivos de f . Esta propiedad nos permite expresar $\sigma(P)$ como un polinomio en los símbolos de una base de las derivaciones logarítmicas, y de aquí se deduce de manera inmediata que P es un polinomio en la base de las derivaciones (teorema 1.1.1 del capítulo 1). Una consecuencia inmediata de estos resultados es la existencia de un isomorfismo entre el álgebra simétrica sobre el \mathcal{O} -módulo de las derivaciones logarítmicas y el anillo graduado $\text{Gr}_F(\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D}))$.

Dedicamos un apartado al estudio particular del caso en que Y es Euler homogéneo, en el que se demuestra la utilidad de un campo de Euler E (que aplicado a f dé f), pues podemos expresar cualquier operador logarítmico como polinomio

en E con coeficientes operadores que conmuten con f . Aplicamos este resultado, que es general (con Y no necesariamente libre) al caso en que Y es libre y obtenemos una nueva prueba del teorema 1.1.1. Para ello demostramos que los operadores que conmutan con f son polinomios en las derivaciones que anulan f , que, a su vez, corresponden a las sicigias entre las derivadas parciales de f .

Terminamos la sección demostrando la coherencia del haz $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$, así como la del haz $\mathcal{G}_{rF}(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X))$, coherencia que obtenemos como consecuencia de que éste último haz coincida con el álgebra simétrica sobre el \mathcal{O}_X -módulo de las derivaciones logarítmicas.

1.1 El anillo \mathcal{V}_0^I en el caso libre

Vamos a tratar el caso en que Y es divisor libre, estudiando la estructura de las fibras $\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})$. Consideraremos siempre un ideal libre $I = (f)$ de \mathcal{O} de rango n . Si $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ es una base de $\text{Der}(\log f)$, los operadores diferenciales de la \mathcal{O} -subálgebra \mathcal{B} de \mathcal{D} generada por $\text{Der}(\log f)$ se escriben en la forma

$$P = \sum \beta_{i_1 \dots i_n} \delta_1^{i_1} \delta_2^{i_2} \dots \delta_n^{i_n}.$$

Esto es consecuencia de que $\text{Der}(\log f)$ es una subálgebra de Lie de $\text{Der}_{\mathcal{C}}(\mathcal{O})$. De hecho, como los símbolos $\sigma(\delta_i) \in \text{Gr}_F(\mathcal{D}) \simeq \mathcal{O}[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]$ ($i = 1, \dots, n$) son algebraicamente independientes sobre \mathcal{O} , la escritura anterior es única. Esto justifica la notación

$$\mathcal{B} = \mathcal{O}[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n].$$

Análogamente, si $\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n-1}\}$ es una base de Θ_f (ver nota 3.1.9 del capítulo 1), la \mathcal{O} -subálgebra de \mathcal{D} generada por Θ_f se notará por $\mathcal{O}[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n-1}]$, y sus elementos se escriben de manera única como sumatorio en la base de Θ_f

$$\sum \beta_{i_1 \dots i_{n-1}} \chi_1^{i_1} \chi_2^{i_2} \dots \chi_{n-1}^{i_{n-1}}.$$

Podemos enunciar ahora el teorema principal de esta sección:

Teorema 1.1.1.— El anillo de los operadores logarítmicos es la \mathcal{O} -subálgebra de \mathcal{D} generada por las derivaciones logarítmicas. Concretamente, si $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ es una base de $\text{Der}(\log f)$, entonces

$$\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D}) = \mathcal{O}[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n].$$

Antes de probar el teorema demostraremos una serie de resultados previos.

Proposición 1.1.2.— Notamos $\{ , \}$ el corchete de Poisson en el anillo graduado $\text{Gr}_F(\mathcal{D})$ y consideramos una base $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ de $\text{Der}(\log f)$. Sea un polinomio

R_0 de $\text{Gr}_F(\mathcal{D})$ homogéneo de grado d tal que existen otros polinomios R_k en $\text{Gr}_F(\mathcal{D})$, con k entre 1 y d , homogéneos de grado $d - k$ y que verifican

$$\{R_k, f\} = fR_{k+1}, \quad (0 \leq k < d) \quad (2.1)$$

(Diremos que R_0 verifica la propiedad 2.1 para R_1, R_2, \dots, R_d). Entonces existen unos polinomios H_j^k en $\text{Gr}_F(\mathcal{D})$, homogéneos de grado $d - k - 1$, con j entre 1 y n y k entre 1 y $d - 1$, tales que:

- a) $R_k = \sum_{j=1}^n H_j^k \sigma(\delta_j)$, donde $\sigma(\delta_j)$ denota el símbolo principal de δ_j .
- b) $\{H_j^k, f\} = fH_j^{k+1}$ ($1 \leq j \leq n$, $0 \leq k < d - 1$). Es decir, H_j^k verifica la propiedad 2.1 para $H_j^{k+1}, \dots, H_j^{d-1}$.

Prueba: Sea $A = (\alpha_i^j)$ la matriz cuadrada formada por los coeficientes de los elementos de la base $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ de $\text{Der}(\log f)$ respecto de $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$:

$$\delta_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i^j \frac{\partial}{\partial x_i} = \underline{\alpha}^j \bullet \underline{\partial}^t,$$

con j entre 1 y n , y donde escribimos $\underline{\partial}$ en vez de $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$. Consideramos el anillo $\mathcal{O}_{2n} = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_2, \xi_1, \dots, \xi_n\}$. Gracias al criterio de Saito, sabemos que el conjunto

$$\{\delta_1, \dots, \delta_n, \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}\}$$

es una base del \mathcal{O}_{2n} -módulo $\text{Der}_{\mathcal{O}_{2n}}(\log f)$. Por tanto, como para todo k entre 0 y d , se tiene

$$(f) \ni \{R_k, f\} = \sum_{i=1}^n (R_k)_{\xi_i} f_{x_i},$$

donde f_{x_i} representa a $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ y $(R_k)_{\xi_i}$ representa a $\frac{\partial R_k}{\partial \xi_i}$, entonces existen unos polinomios homogéneos G_j^k en $\text{Gr}_F(\mathcal{D})$ de grado $d - k - 1$, con j entre 1 y n , y k entre 1 y $d - 1$, tales que

$$((R_k)_{\xi_1}, (R_k)_{\xi_2}, \dots, (R_k)_{\xi_n}) = \sum_{j=1}^n G_j^k \underline{\alpha}^j.$$

Utilizando la relación de Euler

$$R_k = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^n (R_k)_{\xi_i} \xi_i$$

y como $\sigma(\delta_i) = \underline{\alpha}^i \bullet \underline{\xi}^t$, tenemos

$$R_k = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n G_j^k \alpha_i^j \xi_i = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^n G_j^k \sigma(\delta_j).$$

Por el criterio de Saito, el determinante de la matriz A es de la forma $g = uf$, con $u \in \mathcal{O}$ unidad [SAI]. Sea la matriz $B = (b_{ij}) = \text{Adj}(A)^t$. Se verifica:

$$((R_k)_{\xi_1}, (R_k)_{\xi_2}, \dots, (R_k)_{\xi_n}) = (G_1^k, G_2^k, \dots, G_n^k) A,$$

de donde

$$((R_k)_{\xi_1}, (R_k)_{\xi_2}, \dots, (R_k)_{\xi_n}) B = g (G_1^k, G_2^k, \dots, G_n^k).$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} g\{G_j^k, f\} &= \{gG_j^k, f\} = \sum_{i=1}^n f_{x_i} \frac{\partial(gG_j^k)}{\partial \xi_i} = \\ &= \sum_{i=1}^n f_{x_i} \sum_{l=1}^n \frac{\partial(R_k)_{\xi_l}}{\partial \xi_i} b_{lj} = \sum_{l=1}^n b_{lj} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 R_k}{\partial \xi_l \partial \xi_i} f_{x_i} = \\ &= \sum_{l=1}^n b_{lj} \frac{\partial(\{R_k, f\})}{\partial \xi_l} = f \sum_{l=1}^n b_{lj} \frac{\partial R_{k+1}}{\partial \xi_l} = f \sum b_{lj} (R_{k+1})_{\xi_l} = \\ &= f \sum_{l=1}^n b_{lj} \sum_{p=1}^n G_p^{k+1} \alpha_l^p = f \sum_{p=1}^n G_p^{k+1} \sum_{l=1}^n b_{lj} \alpha_l^p = \\ &= fgG_j^{k+1}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\{G_j^k, f\} = fG_j^{k+1},$$

con k variando entre 0 y $d-2$, y j entre 0 y n . Concluimos tomando $H_j^k = \frac{1}{d} G_j^k$ para $j = 1, \dots, n$, y $k = 0, \dots, d-1$. \square

Proposición 1.1.3.— Sea $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ una base de $\text{Der}(\log f)$. Entonces, si un polinomio R_0 de $\text{Gr}_F(\mathcal{D})$ es homogéneo y verifica la condición 2.1 de la proposición anterior, podemos encontrar un operador diferencial Q en $\mathcal{O}[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n]$ tal que R_0 sea el símbolo de Q .

Prueba: Procederemos por inducción en el grado de R_0 . Si $R_0 \in \mathcal{O}$, es obvio. Suponemos que el resultado es cierto si R_0 es de grado menor que d . Sea ahora R_0 de grado d tal que verifica 2.1. Por la proposición anterior existen n polinomios H_j^0 homogéneos de grado $d-1$ tales que:

$$R_0 = \sum_{j=1}^n H_j^0 \sigma(\delta_j), \quad H_j^0 \text{ verifican 2.1 } (j = 1, \dots, n).$$

Por la hipótesis de inducción, existen $Q_j \in \mathcal{O}[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n]$ que verifican $H_j^0 = \sigma(Q_j)$. Por tanto,

$$R_0 = \sum_{i=1}^n \sigma(Q_i) \sigma(\delta_i) = \sum_{i=1}^n \sigma(Q_i \delta_i) = \sigma\left(\sum_{i=1}^n Q_i \delta_i\right) = \sigma(Q)$$

y $Q = \sum_{i=1}^n Q_i \delta_i \in \mathcal{O}[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n]$. \square

Nota 1.1.4.— De hecho, el argumento anterior prueba que si R_0 verifica 2.1, entonces R_0 es un polinomio de $\mathcal{O}[\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_n)]$.

Prueba del teorema 1.1.1 : La inclusión $\mathcal{O}[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n] \subseteq \mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})$ es clara. Probaremos la otra contención por inducción en el grado de $P_0 \in \mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})$. Si P_0 es de grado cero, entonces es una función holomorfa y el resultado es obvio. Suponemos que el resultado es cierto para todo $Q \in F^{d-1}(\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D}))$. Sea $P_0 \in F^d(\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D}))$. Sabemos que

$$[P_0, f] = fP_1,$$

con $P_1 \in \mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})$. Así, tenemos unos P_k , con k entre 0 y d , tales que

$$[P_k, f] = fP_{k+1}.$$

Si tomamos $R_k = \sigma(P_k)$, obtenemos

$$\{R_k, f\} = \{\sigma(P_k), f\} = \sigma([P_k, f]) = f\sigma(P_{k+1}) = fR_{k+1}.$$

Por la proposición anterior, existe Q en $\mathcal{O}[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n]$ de grado d tal que $\sigma(P_0) = \sigma(Q)$. Como $P_0 - Q$ tiene grado $d-1$ en $\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})$, aplicamos la hipótesis de inducción a $P_0 - Q$ y obtenemos

$$P_0 = P_0 - Q + Q \in \mathcal{O}[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n],$$

como queríamos demostrar. \square

Nota 1.1.5.— Obtenemos, como consecuencia inmediata del teorema (ver nota anterior), un isomorfismo

$$\text{Gr}_F(\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})) \cong \mathcal{O}[\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_n)].$$

Corolario 1.1.6.— Para cada punto x de Y , el morfismo canónico (ver nota 3.3.1 del capítulo 1)

$$\kappa_x : \text{Sim}_{\mathcal{O}}(\text{Der}(\log f)) \longrightarrow \text{Gr}_F(\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D}))$$

es un isomorfismo de \mathcal{O} -álgebras graduadas.

Prueba: Sea $x \in X$ y $f \in \mathcal{O}$ una ecuación local reducida de Y en un entorno de x . Por ser Y libre

$$\text{Der}(\log f) = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}\delta_i,$$

con $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ base de $\text{Der}(\log f)$.

Tenemos, por tanto,

$$\text{Der}(\log f) \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}\sigma(\delta_i).$$

Así, observamos que el álgebra simétrica del \mathcal{O} -módulo $\text{Der}(\log f)$ es isomorfa a un anillo de polinomios

$$\text{Sim}_{\mathcal{O}}(\text{Der}(\log f)) \cong \mathcal{O}[T_1, \dots, T_n],$$

donde hacemos corresponder la variable T_i con $\sigma(\delta_i)$ ($i = 1, \dots, n$).

Por otra parte, tenemos la inclusión:

$$\text{Der}(\log f) \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}\sigma(\delta_i) = \text{Gr}_F^1(\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})) \subset \text{Gr}_F(\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})),$$

donde $\sigma(\delta_i)$ es la imagen de δ_i por el morfismo κ_x . Como consecuencia del teorema 1.1.1 obtenemos un isomorfismo de \mathcal{O} -álgebras graduadas (ver nota 1.1.5):

$$\text{Gr}_F(\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})) \cong \mathcal{O}[\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_n)].$$

Concluimos, por tanto, que el morfismo κ_x es un isomorfismo. □

1.2 El anillo \mathcal{V}_0^I en el caso Euler-homogéneo

Trataremos aquí el caso particular en que Y sea un divisor Euler-homogéneo (no necesariamente libre). Vamos a probar un resultado que posteriormente nos permitirá simplificar la prueba del teorema de caracterización de $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ en el caso en que Y sea libre y Euler-homogéneo.

Proposición 1.2.1.— Sea $f \in \mathcal{O}$ y sea $E \in \text{Der}(\log f)$ un campo de Euler para f . Si $P \in F^d \mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})$, entonces existen unos $P_i \in F^{d-i} \mathcal{D}$ únicos tales que:

a) $P = \sum_{i=0}^d P_i E^i$.

b) $[P_i, f] = 0$ ($i = 0, \dots, d$) (esto implica que P_i pertenece a $\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})$).

Prueba: Haremos la demostración por inducción en el grado de P . Si P es de grado 0, el resultado es obvio. Suponemos que el resultado es cierto para todo operador Q de $\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})$ de grado menor que d . Tomamos un operador P de grado d en $\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D})$. Como

$$[P, f] \in F^{d-1}(\mathcal{V}_{-1}^I(\mathcal{D})),$$

el lema 3.3.5 del capítulo 1 nos garantiza la existencia de un operador logarítmico Q de grado $d-1$ que verifique $[P, f] = fQ$. Por la hipótesis de inducción, existen unos únicos Q_i de grado $d-1-i$ en (\mathcal{D}) tales que

$$Q = \sum_{i=0}^{d-1} Q_i E^i \quad \text{y} \quad [Q_i, f] = 0.$$

Consideramos ahora los operadores

$$R_k = [E^k, f] = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} f E^i,$$

y la relación matricial

$$(R_1, \dots, R_d)^t = fA(E^0, E, \dots, E^{d-1})^t,$$

donde $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$, con $a_{ij} = 0$ ($i < j$), $a_{ij} = \binom{i}{j-1}$ ($i \geq j$). Definimos

$$(P_1, \dots, P_d) := (Q_0, \dots, Q_{d-1})A^{-1}.$$

Claramente $[P_i, f] = 0$ y $P_i \in F^{d-i}\mathcal{D}$. Tomamos

$$P_0 := P - \sum_{i=1}^d P_i E^i \in F^d \mathcal{D}.$$

Como

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^d P_i E^i, f \right] &= \sum_{i=1}^d P_i [E^i, f] = (P_1, \dots, P_d)(R_1, \dots, R_d)^t = \\ &= (P_1, \dots, P_d) fA(E^0, E, \dots, E^{d-1})^t = \\ &= (Q_0, \dots, Q_{d-1}) f(E^0, E, \dots, E^{d-1})^t = \\ &= fQ = [P, f], \end{aligned}$$

deducimos que $[P_0, f] = 0$ y $P = \sum_{i=0}^d P_i E^i$. Veamos ahora la unicidad de los P_i . Si

$$P = \sum_{i=0}^d P_i E^i = \sum_{i=0}^d P'_i E^i,$$

con $P'_i \in F^{d-i}(\mathcal{D})$ y $[P'_i, f] = 0$ ($i = 0, \dots, d$), tenemos

$$\sum_{i=0}^d P_i [E^i, f] = \sum_{i=0}^d P'_i [E^i, f],$$

de donde

$$(P_1, \dots, P_d) fA(E^0, \dots, E^{d-1})^t = (P'_1, \dots, P'_d) fA(E^0, \dots, E^{d-1})^t,$$

y gracias a la hipótesis de inducción (unicidad)

$$P_i = P'_i \quad (i = 1, \dots, d).$$

Por tanto, $P_0 = P'_0$. □

Nota 1.2.2.— Definimos

$$\mathcal{W}_0^f(\mathcal{D}) := \{P \in \mathcal{D}, [P, f] = 0\}.$$

Este conjunto es un subanillo de $\mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$. En el caso de que f sea Euler-homogéneo, la proposición anterior nos permite ver $\mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$ como un anillo “torcido” de polinomios (cf. [27]):

$$\mathcal{V}_0^f(\mathcal{D}) = \mathcal{W}_0^f(\mathcal{D})[E].$$

1.3 El anillo \mathcal{V}_0^f en el caso Euler-homogéneo y libre

En esta subsección precisaremos los resultados precedentes en el caso en el que f es Euler-homogéneo (además de libre).

Teorema 1.3.1.— Si $E \in \text{Der}(\log f)$ es un campo de Euler para f y el conjunto de campos $\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n-1}\}$ es una base de Θ_f , entonces el anillo $\mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$ está generado, como \mathcal{O} -álgebra, por $\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n-1}, E\}$, i.e.:

$$\mathcal{V}_0^f(\mathcal{D}) = \mathcal{O}[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n-1}, E].$$

Este teorema es una consecuencia inmediata de la relación (ver nota 1.2.2 del capítulo 2)

$$\mathcal{V}_0^f(\mathcal{D}) = \mathcal{W}_0^f(\mathcal{D})[E]$$

y de la proposición siguiente:

Proposición 1.3.2.— El anillo $\mathcal{W}_0^f(\mathcal{D})$ es la \mathcal{O} -subálgebra de \mathcal{D} generada por Θ_f . Concretamente, si $\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n-1}\}$ es una base de Θ_f , entonces

$$\mathcal{W}_0^f(\mathcal{D}) = \mathcal{O}[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n-1}].$$

Demostremos antes una serie de resultados previos.

Proposición 1.3.3.— Notaremos $\{ , \}$ el corchete de Poisson en $\text{Gr}_F(\mathcal{D})$, $\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n-1}\}$ una base de Θ_f y E un campo de Euler para f . Dado un polinomio $F \in \text{Gr}_F(\mathcal{D})$ homogéneo de grado d tal que $\{F, f\} = 0$, existen unos polinomios $H_j \in \text{Gr}_F(\mathcal{D})$ homogéneos de grado $d - 1$ tales que:

- a) $F = \sum_{j=1}^{n-1} H_j \sigma(\chi_j)$, donde $\sigma(\chi_j)$ denota el símbolo principal de χ_j .
- b) $\{H_j, f\} = 0$ ($j = 1, \dots, n - 1$).

Prueba: Sea $A = (\alpha_i^j)$ la matriz cuadrada formada por los coeficientes de los elementos de la base $\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n-1}, E\}$ de $\text{Der}(\log f)$ respecto de $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$:

$$\chi_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i^j \frac{\partial}{\partial x_i} = \underline{\alpha}^j \bullet \underline{\delta}^t, \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$E = \sum_{i=1}^n \alpha_i^n \frac{\partial}{\partial x_i} = \underline{\alpha}^n \bullet \underline{\delta}^t,$$

donde $\underline{\delta}^t$ representa el vector $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})^t$. El conjunto $\{\underline{\alpha}^1, \underline{\alpha}^2, \dots, \underline{\alpha}^{n-1}\}$ es una base de las \mathcal{O} -sicigias de las derivadas parciales $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$. Como $\mathcal{O}[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]$ es plano (de hecho, libre) sobre \mathcal{O} , entonces $\{\underline{\alpha}^1, \underline{\alpha}^2, \dots, \underline{\alpha}^{n-1}\}$ es también una base de las $\mathcal{O}[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]$ -sicigias de $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$.

Por tanto, como

$$0 = \{F, f\} = \sum_{i=1}^n F_{\xi_i} f_{x_i},$$

deducimos la existencia de unos polinomios homogéneos H'_j en $\text{Gr}_F(\mathcal{D})$ de grado $d-1$, con j entre 1 y $n-1$, tales que

$$(F_{\xi_1}, F_{\xi_2}, \dots, F_{\xi_n}) = \sum_{j=1}^{n-1} H'_j \underline{\alpha}^j, \quad (F_{\xi_i} = \frac{\partial F}{\partial \xi_i}),$$

donde F_{ξ_i} representa la derivada parcial de F respecto de la variable ξ_i . Utilizando la relación de Euler

$$F = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^n F_{\xi_k} \xi_k$$

y la igualdad $\sigma(\chi_i) = \underline{\alpha}^i \bullet \underline{\xi}^t$, obtenemos

$$F = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} H'_j \alpha_k^j \xi_k = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{n-1} H'_j \sigma(\chi_j).$$

Por el criterio de Saito, el determinante de la matriz A es de la forma $g = uf$, con u unidad en \mathcal{O} [Saito]. Sea la matriz $B = (b_{ij}) = \text{Adj}(A)^t$. Se verifica:

$$(F_{\xi_1}, F_{\xi_2}, \dots, F_{\xi_n}) = (H'_1, H'_2, \dots, H'_{n-1}, 0)A,$$

de donde

$$(F_{\xi_1}, F_{\xi_2}, \dots, F_{\xi_n})B = g(H'_1, H'_2, \dots, H'_{n-1}, 0).$$

Ahora bien:

$$g\{H'_k, f\} = \{gH'_k, f\} = \sum_{i=1}^n f_{x_i} \frac{\partial(gH'_k)}{\partial \xi_i} =$$

$$\sum_{i=1}^n f_{x_i} \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_{\xi_j}}{\partial \xi_i} b_{jk} = \sum_{j=1}^n b_{jk} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_i \partial \xi_j} f_{x_i} =$$

$$\sum_{j=1}^n b_{jk} \frac{\partial(\{F, f\})}{\partial \xi_j} = 0,$$

de donde $\{H'_k, f\} = 0$ con $k = 1, \dots, n-1$. Concluimos tomando $H_j = \frac{1}{d} H'_j$ para $j = 1, \dots, n-1$. \square

Proposición 1.3.4.— Sea $\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n-1}\}$ una base de Θ_f . Entonces, si un polinomio F de $\text{Gr}_F(\mathcal{D})$ es homogéneo y tal que $\{F, f\} = 0$, podemos encontrar un operador Q de $\mathcal{O}[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n-1}]$ que verifique $F = \sigma(Q)$.

Prueba: Procederemos por inducción en el grado de F . Si el grado de F es 0, entonces $F \in \mathcal{O}$ y el resultado es obvio. Suponemos que el resultado es cierto si F es de grado menor que d . Sea ahora F de grado d con $\{F, f\} = 0$. Por el lema anterior existen $n-1$ polinomios H_j homogéneos de grado $d-1$ tales que:

$$F = \sum_{i=1}^{n-1} H_j \sigma(\chi_j), \quad \{H_j, f\} = 0 \quad (j = 1, \dots, n-1).$$

Por la hipótesis de inducción, existen $Q_j \in \mathcal{O}[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n-1}]$ que verifican $H_j = \sigma(Q_j)$. Por tanto:

$$F = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(Q_i) \sigma(\chi_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(Q_i \chi_i) = \sigma\left(\sum_{i=1}^{n-1} Q_i \chi_i\right) = \sigma(Q)$$

y $Q = \sum_{i=1}^{n-1} Q_i \chi_i \in \mathcal{O}[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n-1}]$. \square

Nota 1.3.5.— De hecho, el argumento anterior prueba que si $\{F, f\} = 0$, entonces $F \in \mathcal{O}[\sigma(\chi_1), \dots, \sigma(\chi_{n-1})]$.

Prueba de la proposición 1.3.2 : La inclusión de $\mathcal{O}[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n-1}]$ en $\mathcal{W}_0^f(\mathcal{D})$ es clara. Sea P un elemento de $\mathcal{W}_0^f(\mathcal{D})$. Probaremos por inducción en el grado de P que P está en $\mathcal{O}[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n-1}]$. Si P es de grado 0, entonces

$$P \in F^0(\mathcal{W}_0^f(\mathcal{D})) = \mathcal{O}$$

y el resultado es obvio. Suponemos que el resultado es cierto para todo

$$Q \in F^{d-1}(\mathcal{W}_0^f(\mathcal{D})).$$

Sea $P \in F^d(\mathcal{W}_0^f(\mathcal{D}))$. Sabemos que $[P, f] = 0$. En particular,

$$\{\sigma(P), f\} = \sigma([P, f]) = 0.$$

Por la proposición anterior, existe $Q \in \mathcal{O}[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n-1}]$ de grado d tal que $\sigma(P) = \sigma(Q)$. Como $P - Q \in F^{d-1}(\mathcal{W}_0^f(\mathcal{D}))$, aplicamos la hipótesis de inducción a $P - Q$ y tenemos

$$P = P - Q + Q \in \mathcal{O}[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n-1}].$$

□

1.4 El haz $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$

Consideramos el haz $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$, con Y libre. En este haz, como subhaz que es de \mathcal{D}_X , tenemos definida la filtración por el grado de los operadores. En particular, si observamos los operadores de grado 1, tenemos una descomposición canónica:

$$\begin{aligned} F^1(\mathcal{D}_X) &= \mathcal{O}_X \oplus \text{Der}(\mathcal{O}_X), \text{ con } F^0(\mathcal{D}_X) = \mathcal{O}_X, \\ F^1(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)) &= \mathcal{O}_X \oplus \text{Der}(\log Y), \text{ con } F^0(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)) = \mathcal{O}_X. \end{aligned}$$

Por tanto, $\text{Der}(\log Y)$ se identifica con $\mathcal{G}r_F^1(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X))$.

Teorema 1.4.1.— Existe un isomorfismo canónico de \mathcal{O}_X -álgebras graduadas entre el álgebra simétrica asociada al haz $\text{Der}(\log Y)$ y el haz $\mathcal{G}r_F(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X))$.

$$\text{Sim}_{\mathcal{O}_X}(\text{Der}(\log Y)) \cong \mathcal{G}r_F(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)).$$

Prueba: La inclusión

$$\text{Der}(\log Y) = \mathcal{G}r_F^1(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)) \subset \mathcal{G}r_F(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X))$$

que acabamos de ver nos proporciona un morfismo graduado canónico de \mathcal{O}_X -álgebras graduadas (ver nota 3.3.1 del capítulo 1):

$$\kappa : \text{Sim}_{\mathcal{O}_X}(\text{Der}(\log Y)) \longrightarrow \mathcal{G}r_F(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)),$$

cuya fibra en cada punto x de Y coincide con el morfismo graduado canónico de $\mathcal{O}_{X,x}$ -álgebras graduadas

$$\kappa_x : \text{Sim}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\text{Der}(\log f)) \longrightarrow \text{Gr}_F(\mathcal{V}_0^f(\mathcal{D}_{X,x})),$$

donde $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ el germen en x de un generador del ideal de Y . Ahora bien, hemos visto en el corolario 1.1.6 del capítulo 2 que dicho morfismo es un isomorfismo. Por tanto, κ es también un isomorfismo. □

Corolario 1.4.2.— $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ es un haz de anillos coherente.

Prueba: Utilizando el teorema 9.16 de [BJO] (pag. 83), nos basta probar que $\mathcal{G}r_F(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X))$ es coherente, pero este haz es localmente isomorfo al anillo de polinomios $\mathcal{O}_X[T_1, \dots, T_n]$, que es coherente ([B-S], lemma 3.2, VI, pg. 205). □

2 Complejo de de Rham logarítmico

Esta sección comienza con una serie de resultados preliminares, entre ellos que la localización de los anillos $\mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$ y \mathcal{D} por el conjunto de las potencias de f produce el mismo $\mathcal{O}[f^{-1}]$ -módulo. Continuamos con la equivalencia entre $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulos y \mathcal{O}_X -módulos dotados de una conexión logarítmica integrable. El siguiente apartado lo dedicamos al complejo de Spencer logarítmico. Definimos este complejo de Spencer logarítmico a semejanza del complejo de Spencer y probamos que es una resolución de \mathcal{O}_X como $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulo a la izquierda. Terminamos el apartado explicitando los isomorfismos de complejos que nos dan las relaciones entre los distintos complejos de Spencer (holomorfo, logarítmico y meromorfo).

Acabamos la sección y el capítulo dos dando un isomorfismo de complejos entre el complejo de de Rham logarítmico asociado a un $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulo \mathcal{M} y el complejo $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M})$.

2.1 Resultados previos

Siguiendo con la misma notación, llamaremos X a una variedad analítica compleja de dimensión n e Y a una hipersuperficie libre de X .

Precisamos algunos resultados que nos serán de utilidad mas adelante, incluyendo la definición explícita de varios isomorfismos que usaremos cuando sea necesario.

Lema 2.1.1.— Dado cualquier operador logarítmico $P \in \mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$, donde $f \in \mathcal{O}$ es un generador del ideal de Y , se verifica que, para todo entero p , existe un operador logarítmico $Q \in \mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$ y un entero k tales que $f^{-p}P = Qf^{-k}$.

Prueba: Probaremos el resultado por inducción en el grado del operador. Si P es de grado 0 y, por tanto, está en $\mathcal{O}[f^{-1}]$, es claro que $f^{-p}P = Pf^{-p}$. Sea ahora P de grado d , y consideramos el operador logarítmico $[P, f^p]$, de grado $d - 1$. Por la hipótesis de inducción, existe un entero m tal que:

$$[P, f^{-p}]f^m \in \mathcal{V}_0^f(\mathcal{D}).$$

Sea k el mayor de los dos enteros m y p . Se verifica:

$$f^{-p}Pf^k = Pf^{k-p} - [P, f^{-p}]f^k \in \mathcal{V}_0^f(\mathcal{D}).$$

Esto prueba el resultado, tomamos $Q = Pf^{k-p} - [P, f^{-p}]f^k$. □

Nota 2.1.2.— Dado un operador Q de $\mathcal{D}_X[\star Y]_x$, siempre podemos encontrar un entero m mayor que 0 tal que $f^pQ \in \mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$. Es decir, para todo operador diferencial meromorfo Q , existe un entero p y un operador logarítmico Q' tales que podemos escribir:

$$Q = f^{-p}Q'.$$

Nota 2.1.3.— Damos a continuación algunos isomorfismos que nos serán de utilidad:

1. Las inclusiones $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X), \mathcal{O}_X[*Y] \subset \mathcal{D}_X[*Y]$ proporcionan unos isomorfismos de $(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X), \mathcal{O}_X[*Y])$ -módulos:

$$\mathcal{O}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_X[*Y] \xleftarrow{\sim} \mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X[*Y],$$

localmente:

$$af^{-k} \otimes P = af^{-k}P = aQ \otimes f^{-p},$$

con P y Q operadores logarítmicos tales que $f^{-k}P = Qf^{-p}$. Acabamos de ver en el último lema como se obtiene Q a partir de P . Análogamente, se puede obtener P a partir de Q . Por otra parte, la nota previa nos aclara como un operador diferencial meromorfo se puede expresar como producto de una función meromorfa y un operador logarítmico.

2. El morfismo

$$\alpha : \mathcal{D}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X[*Y],$$

de expresión en coordenadas locales:

$$\alpha(P \otimes a) = P(a), \quad x \in Y,$$

es un isomorfismo de $\mathcal{D}_X[*Y]$ -módulos a la izquierda. Para comprobarlo, basta componer los isomorfismos:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \mathcal{O}_X &\cong \mathcal{O}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \mathcal{O}_X \cong \\ &\cong \mathcal{O}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X[*Y], \end{aligned}$$

donde la estructura de $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulo de $\mathcal{O}_X[*Y]$ viene definida por:

$$P \cdot g = P(g),$$

con P un operador logarítmico y g una sección de $\mathcal{O}_X[*Y]$.

3. El morfismo

$$\rho : \mathcal{D}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \mathcal{D}_X[*Y] \rightarrow \mathcal{D}_X[*Y],$$

de expresión local:

$$\rho(P \otimes Q) = PQ, \quad x \in Y,$$

es un isomorfismo de $\mathcal{D}_X[*Y]$ -bimódulos. Este morfismo se obtiene de componer los siguientes isomorfismos:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \mathcal{D}_X[*Y] &\cong \\ \mathcal{O}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \mathcal{D}_X[*Y] &\cong \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X[*Y] &\cong \\ \mathcal{O}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) &\cong \\ \mathcal{O}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) &\cong \mathcal{D}_X[*Y], \end{aligned}$$

donde el isomorfismo $\mathcal{O}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X[*Y] \cong \mathcal{O}_X[*Y]$ hace corresponder (localmente) al producto tensorial $g_1 \otimes g_2$ la función meromorfa $g_1 g_2$.

2.2 Equivalencia entre \mathcal{O}_X -módulos dotados de una conexión integrable y $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulos a izquierda.

Un \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} dotado de una conexión logarítmica integrable ∇ tiene una estructura natural de $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulo a izquierda que extiende la estructura de \mathcal{O}_X -módulo. Dado que $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ está generado por $\text{Der}(\log Y)$ como \mathcal{O}_X -álgebra (ver teorema 1.1.1 del capítulo 1), basta definir la acción de estos elementos sobre \mathcal{M} :

$$\delta \cdot m = \nabla_\delta(m),$$

para cualesquiera secciones δ de $\text{Der}(\log Y)$ y m de \mathcal{M} . Queda así definida la acción de un operador de $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ sobre \mathcal{M} como producto de derivaciones:

$$\delta_1 \delta_2 \cdot m = \nabla_{\delta_1}(\nabla_{\delta_2}(m)).$$

En el caso de multiplicar por secciones g de \mathcal{O}_X no presenta problemas la definición, gracias a la propiedad de las conexiones logarítmicas integrables:

$$\nabla_{g\delta}(m) = g \cdot \nabla_\delta(m),$$

para toda sección δ de $\text{Der}(\log Y)$. Las únicas relaciones que verifican los operadores diferenciales logarítmicos están generadas por:

$$\delta(f) = [\delta, f] = \delta f - f\delta,$$

$$[\delta_1, \delta_2] = \delta_1 \delta_2 - \delta_2 \delta_1,$$

para cualesquiera secciones δ, δ_1 y δ_2 de $\text{Der}(\log Y)$ y cualquier germen de función holomorfa g . Concretamente, tenemos definido un isomorfismo entre el anillo $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ y el algebra tensorial sobre el \mathcal{O}_X -módulo $\text{Der}(\log Y)$ en el que imponemos esas relaciones:

$$\frac{\mathbf{T}_{\mathcal{O}_X}(\text{Der}(\log Y))}{(\delta \otimes f = f\delta + \delta(f), \delta_1 \otimes \delta_2 - \delta_2 \otimes \delta_1 = [\delta_1, \delta_2])} \cong \mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X).$$

Por tanto, para probar la correcta definición de \mathcal{M} como $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulo, basta comprobar

$$[\delta, g] \cdot m = (\delta g - g\delta) \cdot m,$$

$$[\delta_1, \delta_2] \cdot m = (\delta_1 \delta_2 - \delta_2 \delta_1) \cdot m,$$

para cualesquiera $g, \delta, \delta_1, \delta_2$ y cualquier sección m de \mathcal{M} . Comprobémoslo:

$$[\delta, g] \cdot m = \nabla_{[\delta, g]}(m) = \nabla_{\delta(g)}(m) = \delta(g)m,$$

$$(\delta g - g \delta) \cdot m = \nabla_{\delta}(gm) - g \nabla_{\delta}(m) = \delta(g)m,$$

donde la última igualdad se verifica por las propiedades de la conexión ∇ .

$$[\delta_1, \delta_2] \cdot m = \nabla_{[\delta_1, \delta_2]}(m),$$

$$(\delta_1 \delta_2 - \delta_2 \delta_1) \cdot m = \nabla_{\delta_1}(\nabla_{\delta_2}(m)) - \nabla_{\delta_2}(\nabla_{\delta_1}(m)) = \nabla_{[\delta_1, \delta_2]}(m),$$

aquí utilizamos la propiedad que define una conexión como integrable.

Recíprocamente, un $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulo \mathcal{M} define una conexión logarítmica integrable ∇ sobre el \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} . Si δ es una derivación logarítmica, tenemos definida un endomorfismo \mathcal{O}_X -lineal sobre \mathcal{M} :

$$\begin{array}{ccc} \text{Der}(\log Y) & \longrightarrow & \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}), \\ \delta & \mapsto & \nabla_{\delta}. \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \nabla_{\delta}: \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M}, \\ m & \mapsto & \nabla_{\delta}(m) = \delta \cdot m. \end{array}$$

Se observa que para cualesquiera δ, g y m , secciones de $\text{Der}(\log Y)$, \mathcal{O}_X y \mathcal{M} , respectivamente, se verifica:

1. $\nabla_{g\delta}(m) = g \cdot \nabla_{\delta}(m)$.
2. $\nabla_{\delta}(gm) = \delta(g) \cdot m + g \cdot \nabla_{\delta}(m)$.

Por tanto, se tiene definida una conexión logarítmica sobre el $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulo \mathcal{M} . Además, esta conexión logarítmica es integrable:

$$\begin{aligned} [\nabla_{\delta}, \nabla_{\delta'}](m) &= \nabla_{\delta}(\nabla_{\delta'}(m)) - \nabla_{\delta'}(\nabla_{\delta}(m)) = \\ &= (\delta\delta' - \delta'\delta) \cdot m = \nabla_{[\delta, \delta']}(m). \end{aligned}$$

Dado un $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulo \mathcal{M} , su estructura de $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulo define, por tanto, un complejo de De Rham logarítmico de \mathcal{M} , cuya expresión en una carta local $(U; x_1, \dots, x_n)$ viene dada por las ecuaciones:

$$\nabla^p(U)(\omega \otimes m) = d\omega \otimes m + \sum_{i=1}^n \left(dx_i \wedge \omega \otimes \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot m \right),$$

para dos secciones cualesquiera ω y m de los haces $\Omega_X^1(\log Y)$ y \mathcal{M} , respectivamente.

Consideremos en particular el $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulo a izquierda \mathcal{O}_X , definido de manera natural:

$$P \cdot g = P(g),$$

con g función holomorfa y P operador logarítmico. Por tanto, $P(g)$ es una función holomorfa.

Esta estructura canónica de $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulo a la izquierda de \mathcal{O}_X se corresponde con la conexión integrable sobre \mathcal{O}_X definida de manera natural por la diferencial exterior ($\nabla = d$):

$$\nabla_\delta(g) = \langle \delta, dg \rangle = \delta(g),$$

con δ una derivación logarítmica.

2.3 Complejo de Spencer logarítmico

Recordemos el complejo de Spencer para \mathcal{D}_X -módulos (en este caso el \mathcal{D}_X -módulo \mathcal{O}).

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{n}{\wedge} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\varepsilon_{-n}} \dots \xrightarrow{\varepsilon_{-2}} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{1}{\wedge} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\varepsilon_{-1}} \mathcal{D}_X,$$

concentrado en grado $[-n, 0]$, con

$$\varepsilon_{-p}(P \otimes (\delta_1 \wedge \dots \wedge \delta_p)) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} P \delta_i \otimes (\delta_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\delta}_i \wedge \dots \wedge \delta_p) +$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} P \otimes ([\delta_i, \delta_j] \wedge \delta_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\delta}_i \wedge \dots \wedge \widehat{\delta}_j \wedge \dots \wedge \delta_p), \quad (2 \leq p \leq n).$$

$$\varepsilon_{-1}(P \otimes \delta) = P\delta.$$

Este complejo es una resolución de \mathcal{O}_X como \mathcal{D}_X -módulo a la izquierda (ver sección 1.5). Observamos que \mathcal{D}_X es el \mathcal{O}_X -álgebra generada por los elementos del \mathcal{O}_X -módulo localmente libre $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$.

Hemos probado (teorema 1.1.1 del capítulo 2) que $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ es la \mathcal{O}_X -álgebra localmente libre generada por los elementos del \mathcal{O}_X -módulo localmente libre $\text{Der}(\log Y)$ y, como consecuencia, que tenemos un isomorfismo (ver teorema 1.4.1 del capítulo 2):

$$\text{Sim}_{\mathcal{O}_X}(\text{Der}(\log Y)) \cong \mathcal{G}_{\text{TF}}(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)).$$

Esto nos permite construir una resolución de \mathcal{O}_X como $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulo, resolución que extiende la resolución de Spencer que acabamos de ver, y que generaliza la dada por Esnault y Viehweg [15] para el caso en que Y sea con cruzamientos normales.

Definición 2.3.1.— Llamamos complejo de Spencer logarítmico, y lo notaremos $\mathcal{S}p^\bullet(\log Y)$, al complejo:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log Y) \xrightarrow{\varepsilon_{-n}} \dots \\ \dots \xrightarrow{\varepsilon_{-p-1}} \mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log Y) \xrightarrow{\varepsilon_{-p}} \mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{p-1}{\wedge} \text{Der}(\log Y) \xrightarrow{\varepsilon_{-p+1}} \dots \\ \dots \xrightarrow{\varepsilon_{-2}} \mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{1}{\wedge} \text{Der}(\log Y) \xrightarrow{\varepsilon_{-1}} \mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \varepsilon_{-p}(P \otimes (\delta_1 \wedge \dots \wedge \delta_p)) &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} P \delta_i \otimes (\delta_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\delta}_i \wedge \dots \wedge \delta_p) + \\ &\sum_{1 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} P \otimes ([\delta_i, \delta_j] \wedge \delta_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\delta}_i \wedge \dots \wedge \widehat{\delta}_j \wedge \dots \wedge \delta_p), \quad (2 \leq p \leq n). \\ \varepsilon_{-1}(P \otimes \delta) &= P \delta. \end{aligned}$$

Este complejo de $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulos podemos ampliarlo con

$$\varepsilon_0 : \mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \rightarrow \mathcal{O}_X, \quad \varepsilon_0(P) = P(1).$$

Al complejo ampliado lo notaremos $\widetilde{\mathcal{S}p}^\bullet(\log Y)$.

Teorema 2.3.2.— El complejo $\mathcal{S}p^\bullet(\log Y)$ es una resolución localmente libre de \mathcal{O}_X como $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulo a la izquierda.

Prueba: Para demostrar que $\widetilde{\mathcal{S}p}^\bullet(\log Y)$ es exacto, lo dotamos de una filtración discreta G^\bullet tal que el complejo graduado correspondiente sea exacto (cf. [2, lemma 3.16]). Definimos la siguiente filtración:

$$\begin{aligned} G^k \left(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \otimes \overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log Y) \right) &= F^{k-p} \left(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \right) \otimes \overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log Y), \\ G^k(\mathcal{O}_X) &= \mathcal{O}_X. \end{aligned}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}r_G \left(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \otimes \overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log Y) \right) &= \mathcal{G}r_F \left(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \right) [-p] \otimes \overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log Y), \\ \mathcal{G}r_G(\mathcal{O}_X) &= \mathcal{O}_X. \end{aligned}$$

Claramente

$$\begin{aligned} \varepsilon_{-p} \left(G^k \left(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \otimes \overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log Y) \right) \right) &\subset G^k \left(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \otimes \overset{p-1}{\wedge} \text{Der}(\log Y) \right), \\ \varepsilon_0 \left(G^k(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)) \right) &\subset G^k(\mathcal{O}_X). \end{aligned}$$

Dado que las filtraciones anteriores son compatibles con la diferencial del complejo $\tilde{S}p^\bullet(\log Y)$, podemos considerar el complejo $\mathcal{G}_{r_G}(\tilde{S}p^\bullet(\log Y))$:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{G}_{r_F}(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X))[-n] \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{n}{\wedge} \text{Der}(\log Y) \xrightarrow{\psi^{-n}} \dots \\ \dots \xrightarrow{\psi^{-p-1}} \mathcal{G}_{r_F}(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X))[-p] \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log Y) \xrightarrow{\psi^{-p}} \\ \xrightarrow{\psi^{-p}} \mathcal{G}_{r_F}(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X))[-p+1] \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{p-1}{\wedge} \text{Der}(\log Y) \xrightarrow{\psi^{-p+1}} \dots \\ \dots \xrightarrow{\psi^{-2}} \mathcal{G}_{r_F}(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X))[-1] \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{1}{\wedge} \text{Der}(\log Y) \xrightarrow{\psi^{-1}} \mathcal{G}_{r_F}(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)) \xrightarrow{\psi_0} \mathcal{O}_X \rightarrow 0, \end{aligned}$$

donde la expresión local de las diferenciales viene definida por:

$$\psi_{-p}(G \otimes \delta_{j_1} \wedge \dots \wedge \delta_{j_p}) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} G \sigma(\delta_{j_i}) \otimes \delta_{j_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\delta_{j_i}} \wedge \dots \wedge \delta_{j_p}, \quad (2 \leq p \leq n).$$

$$\psi_{-1}(G \otimes \delta_i) = G \sigma(\delta_i), \quad \psi_0(G) = G_0.$$

Siendo $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ una base (local) de $\text{Der}(\log Y)$.

Este complejo coincide con el complejo de Koszul del anillo

$$\mathcal{G}_{r_F}(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)) \cong \text{Sim}_{\mathcal{O}_X}(\text{Der}(\log Y))$$

respecto de la sucesión $\mathcal{G}_{r_F}(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X))$ -regular $\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_n)$ en $\mathcal{G}_{r_F}(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X))$. Es, por tanto, exacto. \square

Proposición 2.3.3.— Se tienen unos isomorfismos de complejos de $\mathcal{D}_X[\star Y]$ -módulos:

$$(a) \quad \mathcal{D}_X[\star Y] \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} Sp^\bullet \cong Sp^\bullet[\star Y].$$

$$(b) \quad \mathcal{D}_X[\star Y] \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} Sp^\bullet(\log Y) \cong Sp^\bullet[\star Y].$$

Prueba: (a) Como Sp^\bullet es un subcomplejo de \mathcal{D}_X -módulos de $Sp^\bullet[\star Y]$, el complejo $\mathcal{D}_X[\star Y] \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} Sp^\bullet$ lo es de $\mathcal{D}_X[\star Y] \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} Sp^\bullet[\star Y]$, (ver apartado 1 de la nota 2.1.3 del capítulo 2). Ahora bien, de acuerdo con el tercer isomorfismo de la nota 2.1.3 del capítulo 2, este último complejo se identifica con $Sp^\bullet[\star Y]$. Tenemos pues un morfismo inyectivo de complejos

$$\mathcal{D}_X[\star Y] \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} Sp^\bullet \longrightarrow Sp^\bullet[\star Y],$$

definido en cada grado localmente por:

$$P \otimes Q \otimes \delta_1 \wedge \dots \wedge \delta_p \rightarrow PQ \otimes (\delta_1 \wedge \dots \wedge \delta_p).$$

Este morfismo es claramente sobreyectivo y, por tanto, isomorfismo.

(b) Consideramos $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ como subhaz de \mathcal{O}_X -módulos de \mathcal{D}_X . Utilizando que $\overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log Y)$ es \mathcal{O}_X -libre, se tiene una inclusión

$$\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log Y) \hookrightarrow \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log Y).$$

Por otra parte, al ser Y libre, podemos enviar de manera inyectiva $\overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log Y)$ en $\overset{p}{\wedge} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$ (cf. [6, AIII 88, Corollaire]. Como \mathcal{D}_X es \mathcal{O}_X -plano, tenemos otra inclusión:

$$\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log Y) \hookrightarrow \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{p}{\wedge} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) \quad (p \geq 0).$$

Componiendo ambas inclusiones, obtenemos una nueva inclusión:

$$\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log Y) \hookrightarrow \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{p}{\wedge} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X),$$

para cada $p = 0, \dots, n$. Estas nos inducen un morfismo inyectivo de complejos de $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulos

$$\mathcal{S}p^*(\log Y) \hookrightarrow \mathcal{S}p^*.$$

Por ser $\mathcal{D}_X[*Y]$ plano sobre $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ (ver nota 2.1.3, 1. del capítulo 2), tenemos un morfismo de complejos de $\mathcal{D}_X[*Y]$ -módulos inyectivo:

$$\theta' : \mathcal{D}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \mathcal{S}p^*(\log Y) \hookrightarrow \mathcal{D}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \mathcal{S}p^*,$$

definido localmente por:

$$\theta'(P \otimes Q \otimes (\delta_1 \wedge \dots \wedge \delta_p)) = P \otimes Q \otimes (\delta_1 \wedge \dots \wedge \delta_p).$$

Este morfismo es sobreyectivo, pues dadas unas secciones locales P de $\mathcal{D}_X[*Y]$, Q de \mathcal{D}_X y $\delta_1, \dots, \delta_n$ de $\text{Der}(\mathcal{O}_X)$, se tiene:

$$P \otimes Q \otimes (\delta_1 \wedge \dots \wedge \delta_p) = \theta' \left((Pf^{-k}) \otimes Q' \otimes (f\delta_1 \wedge \dots \wedge f\delta_p) \right),$$

con k un entero mayor que 0 y Q' una sección local de $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ que verifican $f^k Q = Q' f^p$ (ver lema 2.1.1 del capítulo 2). Componiendo θ' con el isomorfismo del apartado (a), obtenemos el isomorfismo buscado

$$\mathcal{D}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \mathcal{S}p^*(\log Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}p^*[*Y],$$

de expresion local

$$P \otimes Q \otimes (\delta_1 \wedge \dots \wedge \delta_p) \mapsto PQ \otimes (\delta_1 \wedge \dots \wedge \delta_p).$$

□

2.4 Complejo de de Rham logarítmico

Tenemos definido dentro de $\Omega_X^\bullet[\star Y]$ el subcomplejo de las formas logarítmicas, que llamamos complejo de De Rham logarítmico $\Omega_X^\bullet(\log Y)$:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1(\log Y) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \Omega_X^p(\log Y) \xrightarrow{d^p} \Omega_X^{p+1}(\log Y) \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega_X^n(\log Y),$$

donde d^p es la diferencial exterior usual. Llamaremos j^\bullet al morfismo inclusión:

$$\Omega_X^\bullet(\log Y) \xrightarrow{j^\bullet} \Omega_X^\bullet[\star Y]. \quad (2.2)$$

En el caso de que Y sea libre, se verifica [35]

$$\Omega_X^p(\log Y) = \overset{p}{\wedge} \Omega_X^1(\log Y).$$

Además, podemos identificar ([35], ver lema 3.1.4 del capítulo 1) los haces

$$\Omega_X^1(\log Y) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{D}er(\log Y), \mathcal{O}_X).$$

Por otra parte, tenemos el isomorfismo natural:

$$\Omega_X^p(\log Y) \xrightarrow{\gamma^p} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X} \left(\overset{p}{\wedge} \mathcal{D}er(\log Y), \mathcal{O}_X \right),$$

donde el último isomorfismo γ^p viene dado localmente por

$$\gamma^p(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)(\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_p) = \det(\langle \omega_i, \delta_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq p},$$

siendo cada ω_i (resp. δ_j) una sección local de $\Omega_X^1(\log Y)$ (resp. $\mathcal{D}er(\log Y)$), y $\langle \omega_i, \delta_j \rangle$ indica la dualidad vista en el lema 3.1.4 y correspondiente al isomorfismo $\Omega_X^1(\log Y) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{D}er(\log Y), \mathcal{O}_X)$. Por otra parte, tenemos un isomorfismo canónico:

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X} \left(\overset{p}{\wedge} \mathcal{D}er(\log Y), \mathcal{O}_X \right) \xrightarrow{\lambda^p} \mathcal{H}om_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \left(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{p}{\wedge} \mathcal{D}er(\log Y), \mathcal{O}_X \right),$$

definido como:

$$\lambda^p(\alpha)(P \otimes \delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_p) = P(\alpha(\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_p)).$$

En definitiva, podemos construir un isomorfismo natural componiendo los anteriores. Notaremos $\psi^p = \lambda^p \circ \gamma^p$:

$$\Omega_X^p(\log Y) \xrightarrow{\psi^p} \mathcal{H}om_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \left(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \otimes \overset{p}{\wedge} \mathcal{D}er(\log Y), \mathcal{O}_X \right),$$

para p entre 0 y n . Localmente

$$\psi^p(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)(P \otimes \delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_p) = P(\det(\langle \omega_i, \delta_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq p}).$$

con las ω_i ($i = 1, \dots, n$) secciones locales de $\Omega_X^1(\log Y)$ y P un operador logarítmico.

Análogamente, si \mathcal{M} es un $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulo a la izquierda, dado un entero p entre 1 y n , tenemos definidos unos isomorfismos canónicos:

$$\gamma_{\mathcal{M}}^p : \Omega_X^p(\log Y) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X} \left(\overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log Y), \mathcal{O}_X \right),$$

que viene dado localmente por

$$\gamma_{\mathcal{M}}^p(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \otimes m)(\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_p) = \det(\langle \omega_i, \delta_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq p} \cdot m,$$

$$\lambda_{\mathcal{M}}^p : \text{Hom}_{\mathcal{O}_X} \left(\overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log Y), \mathcal{M} \right) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{V}_0^Y} \left(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log Y), \mathcal{M} \right),$$

definido localmente como

$$\lambda_{\mathcal{M}}^p(\alpha)(P \otimes \delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_p) = P \cdot \alpha(\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_p).$$

$$\psi_{\mathcal{M}}^p = \lambda_{\mathcal{M}}^p \circ \gamma_{\mathcal{M}}^p : \Omega_X^p(\log Y)(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \left(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \otimes \overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log Y), \mathcal{M} \right).$$

Localmente

$$\psi_{\mathcal{M}}^p(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \otimes m)(P \otimes \delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_p) = P \cdot \det(\langle \omega_i, \delta_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq p} \cdot m.$$

En todos los casos m representa una sección de \mathcal{M} .

Teorema 2.4.1.— Si \mathcal{M} es un $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulo a izquierda (o, lo que es lo mismo, es un \mathcal{O}_X -módulo dotado de una conexión logarítmica integrable), los complejos $\Omega_X^*(\log Y)(\mathcal{M})$ y $\text{Hom}_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)}(S^p(\log Y), \mathcal{M})$ son canónicamente isomorfos como complejos de haces de \mathbb{C} -espacios vectoriales y, por tanto, existe un casi isomorfismo en la categoría derivada:

$$\Omega_X^*(\log Y)(\mathcal{M}) \cong \mathbf{R}\text{Hom}_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}).$$

Prueba: El caso general se reduce al caso $\mathcal{M} = \mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$. Esto es posible gracias a los isomorfismos

$$\Omega_X^*(\log Y)(\mathcal{M}) \cong \Omega_X^*(\log Y)(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)) \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \mathcal{M},$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)}(S^p(\log Y), \mathcal{M}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)}(S^p(\log Y), \mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)) \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \mathcal{M}.$$

Para $\mathcal{M} = \mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$, utilizando los morfismos ψ^p anteriores, obtenemos los isomorfismos $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -lineales a derecha:

$$\phi^p = \psi_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)}^p : \Omega_X^p(\log Y)(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)}(S^{p-p}(\log Y), \mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)),$$

cuya expresión local es:

$$\phi^p((\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p) \otimes Q)(P \otimes (\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_p)) = P \cdot \det((\omega_i, \delta_j)) \cdot Q.$$

Para probar que estos isomorfismos inducen un isomorfismo de complejos nos queda demostrar que conmutan con las diferenciales de los respectivos complejos. Gracias al isomorfismo (b) de la proposición 2.3.3 del capítulo 2,

$$\mathcal{D}_X[\star Y] \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \mathcal{S}p^\bullet(\log Y) \simeq \mathcal{S}p^\bullet[\star Y],$$

obtenemos un morfismo natural de complejos de haces de $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ -módulos a derecha:

$$\tau^\bullet : \mathcal{H}om_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)}(\mathcal{S}p^\bullet(\log Y), \mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X[\star Y]}(\mathcal{S}p^\bullet[\star Y], \mathcal{D}_X[\star Y]),$$

que localmente viene definido por

$$\tau^p(\alpha)(R \otimes (\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_p)) = f^{-k} \alpha(P \otimes (f\delta_1 \wedge \cdots \wedge f\delta_p)),$$

para cada α sección local de $\mathcal{H}om_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)}(\mathcal{S}p^\bullet(\log Y), \mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X))$, R sección local de $\mathcal{D}_X[\star Y]$ y $\delta_1, \dots, \delta_p$ secciones locales de $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$, siendo P una sección local de $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ tal que $Rf^{-p} = f^{-k}P$ (ver lema 2.1.1 del capítulo 2). Estos morfismos τ^i son inyectivos, puesto que:

$$\alpha(P \otimes (\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_p)) = \tau^i(\alpha)(P \otimes (\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_p)).$$

Comprobemos ahora que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Omega_X^p(\log Y)(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)) & \xrightarrow{j^p} & \Omega_X^p[\star Y](\mathcal{D}_X[\star Y]) \\ \downarrow \phi^p & \# & \downarrow \Phi^p \\ \mathcal{H}om_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)}(\mathcal{S}p^p(\log Y), \mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)) & \xrightarrow{\tau^p} & \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X[\star Y]}(\mathcal{S}p^p[\star Y], \mathcal{D}_X[\star Y]) \end{array}$$

para cada p mayor o igual que 0, donde Φ^p son los isomorfismos definidos en la proposición 2.5.4 del capítulo 2:

$$\Phi^p : \Omega_X^p[\star Y](\mathcal{D}_X[\star Y]) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X[\star Y]}(\mathcal{D}_X[\star Y] \otimes \overset{p}{\wedge} \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X), \mathcal{D}_X[\star Y]),$$

$$\Phi^p((\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p) \otimes Q)(P \otimes (\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_p)) = P \cdot \det((\omega_i \cdot \delta_j)_{1 \leq i, j \leq p}) \cdot Q.$$

Dados $\omega_1, \dots, \omega_p$ secciones locales de $\Omega_X^1(\log Y)$, Q y R secciones locales de $\mathcal{D}_X[\star Y]$ y $\delta_1, \dots, \delta_p$ secciones locales de $\text{Der}(\mathcal{O}_X)$, se tiene

$$(\tau^p \circ \phi^p)((\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p) \otimes Q)[R \otimes (\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_p)] =$$

$$\begin{aligned}
f^{-k} \phi_p((\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p) \otimes Q)[P \otimes (f\delta_1 \wedge \cdots \wedge f\delta_p)] &= \\
f^{-k} P \cdot \det(\langle \omega_i, f\delta_j \rangle) \cdot Q &= \\
R \cdot f^{-p} \det(\langle \omega_i, f\delta_j \rangle) \cdot Q &= \\
R \cdot \det(\langle \omega_i, \delta_j \rangle) \cdot Q &= \\
\Phi^p \circ j^p((\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p) \otimes Q)[R \otimes (\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_p)], &
\end{aligned}$$

con P sección local de $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)$ tal que $Rf^{-p} = f^{-k}P$.

Ahora bien, como Φ^* , j^* y τ^* son morfismos de complejos, y τ^* es inyectivo, deducimos que los ϕ^p conmutan con las diferenciales y, por tanto, definen un isomorfismo de complejos:

$$\phi^* : \Omega_X^*(\log Y) \left(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \right) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \left(\mathcal{S}p^*(\log Y), \mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X) \right),$$

como queríamos probar. □

Nota 2.4.2.— Un caso particular de este teorema es cuando $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$, en cuyo caso tenemos que los complejos $\Omega_X^*(\log Y)$ y $\mathcal{H}om_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)}(\mathcal{S}p^*(\log Y), \mathcal{O}_X)$ son canónicamente isomorfos y, por tanto, existe un casi isomorfismo canónico:

$$\Omega_X^*(\log Y) \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X).$$

Nota 2.4.3.— Un problema clásico es la comparación entre el complejo de De Rham logarítmico y el complejo de De Rham meromorfo a lo largo de un divisor Y ,

$$\Omega_X^*[\star Y] \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X[\star Y]) \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X[\star Y]).$$

Si Y es un divisor con cruzamientos normales, un cálculo simple muestra que ambos complejos son casi isomorfos (cf. [13]). El mismo resultado es válido si Y es un divisor libre y fuertemente casi-homogéneo [11]. Como consecuencia del teorema 1.1.1 del capítulo 2, si Y es un divisor libre arbitrario, los complejos de De Rham meromorfo y logarítmico son casi-isomorfos si y solamente si:

$$0 = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X} \left(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)}^{\mathbf{L}} \mathcal{O}_X, \frac{\mathcal{O}_X[\star Y]}{\mathcal{O}_X} \right) \left(= \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \left(\mathcal{O}_X, \frac{\mathcal{O}_X[\star Y]}{\mathcal{O}_X} \right) \right).$$

Capítulo 3

Perversidad del complejo logarítmico

En este tercer capítulo empezamos aclarando la estrecha relación entre el complejo de Koszul, del que recordamos la definición, y los distintos complejos de Spencer, el holomorfo, el logarítmico, o incluso otros complejos obtenidos a partir del complejo de Spencer. Por ejemplo, $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \mathcal{S}p^\bullet(\log Y)$. Así, probamos que si los símbolos de las bases de las derivaciones logarítmicas forman una sucesión $\text{Gr}_F(\mathcal{D})$ -regular, lo cual ocurre, por ejemplo, si Y es con cruzamientos normales, entonces el complejo citado anteriormente es una resolución del módulo cociente del anillo \mathcal{D} por el ideal generado por las derivaciones logarítmicas. En esas condiciones, se verifica que el complejo de de Rham logarítmico es un haz perverso. Estas condiciones se cumplen cuando X es una superficie lisa para cualquier divisor Y . Aportamos un ejemplo de divisor libre que no cumple la condición citada de regularidad de los símbolos de las derivaciones logarítmicas y, sin embargo, verifica que el complejo de de Rham logarítmico correspondiente es un haz perverso. Por lo tanto, tenemos una condición suficiente, pero no necesaria, para que el complejo de de Rham logarítmico sea un haz perverso.

1 Relación entre el complejo de Koszul y el de Spencer logarítmico

Recordamos la definición de complejo de Koszul, puesto que es un concepto fundamental para el desarrollo del presente capítulo.

Definición 1.1.— (cf. [29], [7]) Dado un anillo conmutativo A y un conjunto de elementos $\{x_1, \dots, x_n\}$ de A , llamamos complejo de Koszul de A asociado a x_1, \dots, x_n y notamos $\mathbf{K}(x_1, \dots, x_n; A)$, al complejo:

$$Ae_{12\dots n} \xrightarrow{d_n} \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-1} \leq n} Ae_{i_1 \dots i_{n-1}} \rightarrow \dots \xrightarrow{d_p} \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} Ae_{i_1 \dots i_p} \rightarrow$$

$$\bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_{p-1} \leq n} A e_{i_1 \dots i_{p-1}} \rightarrow \dots \rightarrow A,$$

donde cada morfismo d_p está definido por

$$d_p(m e_{i_1 \dots i_p}) = \sum_{r=1}^p (-1)^{r-1} x_{i_r} m e_{i_1 \dots \widehat{i_r} \dots i_p}, \quad (1 \leq p \leq n),$$

con m un elemento de A .

Este complejo de A -módulos admite una ampliación

$$d_0 : A \rightarrow \frac{A}{A(x_1, \dots, x_n)}, \quad d_0(m) = m + A(x_1, \dots, x_n).$$

Así ampliado este complejo es exacto si y sólo si $\{x_1, \dots, x_n\}$ es una sucesión A -regular.

Nota 1.2.— En el teorema 2.3.2 del capítulo 2, se probó que, en el caso de que Y sea un divisor libre y para una cierta filtración G , el complejo $\mathcal{G}_{rG}(\tilde{S}p^\bullet(\log Y))$ coincide localmente con el complejo de Koszul del anillo

$$\mathcal{G}_{rF}(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)) \cong \text{Sim}_{\mathcal{O}_X}(\text{Der}(\log Y))$$

respecto de la sucesión formada por los símbolos de las derivaciones de una base local $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ de $\text{Der}(\log Y)$. Al ser la sucesión $\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_n)$ una sucesión $\mathcal{G}_{rF}(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X))$ -regular en $\mathcal{G}_{rF}(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X))$, gracias al teorema 1.1.1 del capítulo 2, ambos complejos son exactos. Concretamente:

$$G^k(Sp^p(\log Y)) = F^{k-p}(\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)) \otimes_{\mathcal{O}_X} \wedge^p \text{Der}(\log Y).$$

En el caso en que $\text{Der}(\log Y)$ sea \mathcal{O}_X -localmente libre, se verifica:

$$\mathcal{G}_{rG}(Sp^\bullet(\log f)) = \mathbf{K}(\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_n); \mathcal{G}_{rF}(\mathcal{V}_0^I(\mathcal{D}))),$$

siendo $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ una base cualquiera de $\text{Der}(\log Y)$ en x . En ese caso, ambos complejos son exactos.

Consideramos ahora el complejo $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} Sp^\bullet(\log Y)$:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \wedge^n \text{Der}(\log Y) \xrightarrow{\varepsilon_{-n}} \dots \\ \dots \xrightarrow{\varepsilon_{-p-1}} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \wedge^p \text{Der}(\log Y) \xrightarrow{\varepsilon_{-p}} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \wedge^{p-1} \text{Der}(\log Y) \xrightarrow{\varepsilon_{-p+1}} \dots \\ \dots \xrightarrow{\varepsilon_{-2}} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \wedge^1 \text{Der}(\log Y) \xrightarrow{\varepsilon_{-1}} \mathcal{D}_X, \end{aligned}$$

donde la expresión local de los morfismos está definida por:

$$\varepsilon_{-p}(P \otimes (\delta_1 \wedge \dots \wedge \delta_p)) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} P \delta_i \otimes (\delta_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\delta_i} \wedge \dots \wedge \delta_p) +$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} P \otimes ([\delta_i, \delta_j] \wedge \delta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\delta_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{\delta_j} \wedge \cdots \wedge \delta_p), \quad (2 \leq p \leq n).$$

$$\varepsilon_{-1}(P \otimes \delta) = P\delta.$$

Si nos centramos en el caso en que Y sea un divisor libre, podemos trabajar en cada punto x de Y con una base $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ de $\text{Der}(\log f)$, donde f es el germen de \mathcal{O} que define a Y en el punto x .

Proposición 1.3.— Si $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ es una base de $\text{Der}(\log f)$, y la sucesión $\{\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_n)\}$ es $\text{Gr}_F(\mathcal{D})$ -regular, se verifica

$$\sigma(\mathcal{D}(\delta_1, \dots, \delta_n)) = \text{Gr}_F(\mathcal{D})(\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_n)).$$

Prueba: La inclusión

$$\text{Gr}_F(\mathcal{D})(\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_n)) \subset \sigma(\mathcal{D}(\delta_1, \dots, \delta_n))$$

es clara. Sea un elemento $F = \sigma(P)$ de

$$\sigma(\mathcal{D}(\delta_1, \dots, \delta_n)),$$

con

$$P = \sum_{i=1}^n P_i \delta_i \in F^d(\mathcal{D}(\delta_1, \dots, \delta_n)) - F^{d-1}(\mathcal{D}(\delta_1, \dots, \delta_n)).$$

Probaremos por inducción que $F = \sigma(P)$ pertenece a

$$\text{Gr}_F(\mathcal{D})(\sigma_1, \dots, \sigma_n),$$

con $\sigma_i = \sigma(\delta_i)$. Lo haremos por inducción en $k_0 = \max\{\text{grado}_F(P_i), i = 1, \dots, n\}$. Como P es de grado d , k_0 es mayor o igual que $d - 1$. Si $k_0 = d - 1$, se verifica:

$$\sigma(P) = \sum_{i \in K} \sigma(P_i) \sigma_i,$$

con K el conjunto formado por los subíndices j de aquellos P_j de grado k_0 en \mathcal{D} . Suponemos el resultado cierto cuando $d - 1 \leq k_0 \leq m$ y tomamos $F = \sigma(P)$, con $P = \sum_{i=1}^n P_i \delta_i$ y $k_0 = \max\{\text{grado}_F(P_i), i = 1, \dots, n\} = m$. En este caso, pueden darse dos posibilidades:

1. $F = \sigma(P) = \sum_{i \in K} \sigma(P_i) \sigma_i \in \text{Gr}_F(\mathcal{D})(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, como queríamos probar.
2. $\sum_{i \in K} \sigma(P_i) \sigma_i = 0$.

Si ocurre esto último, al ser $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ una sucesión $\text{Gr}_F(\mathcal{D})$ -regular, si llamamos F_i a $\sigma(P_i)$ en el caso de que i esté en K y 0 en otro caso, se verifica:

$$(F_1, \dots, F_n) = \sum_{i < j} F_{ij} (0, \dots, 0, \overset{i}{\sigma_j}, 0, \dots, 0, \overset{j}{-\sigma_i}, 0, \dots, 0),$$

con F_{ij} polinomios homogéneos en $\text{Gr}_F(\mathcal{D})$ de grado $m - 1$ en las variables ξ_i . Tomamos unos operadores Q_{ij} de grado $m - 1$ en \mathcal{D} tales que $\sigma(Q_{ij}) = F_{ij}$ y definimos:

$$(Q_1, \dots, Q_n) = (P_1, \dots, P_n) - \sum_{i < j} Q_{ij} \left((0, \dots, 0, \overset{i}{\delta_j}, 0, \dots, 0, \overset{j}{-\delta_i}, 0, \dots, 0) - \underline{\alpha}_{ij} \right),$$

donde $\underline{\alpha}_{ij}$ son los vectores con n coordenadas en \mathcal{O} definidos por las relaciones:

$$[\delta_i, \delta_j] = \sum_{k=1}^n a_{ij}^k \delta_k = \underline{\alpha}_{ij} \bullet \underline{\delta},$$

con $\underline{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_n)$. Estos Q_i , de grado m en \mathcal{D} , verifican

$$\begin{aligned} (\sigma_m(Q_1), \dots, \sigma_m(Q_n)) = \\ (F_1, \dots, F_n) - \sum_{i < j} F_{ij}(0, \dots, 0, \overset{i}{\sigma_j}, 0, \dots, 0, \overset{j}{-\sigma_i}, 0, \dots, 0) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, los Q_i son de grado $m - 1$ en \mathcal{D} . Además,

$$\sum_{i=1}^n Q_i \delta_i = \sum_{i=1}^n P_i \delta_i - \sum_{i < j} Q_{ij} (\delta_i \delta_j - \delta_j \delta_i - [\delta_i, \delta_j]) = \sum_{i=1}^n P_i \delta_i = P.$$

Aplicamos la hipótesis de inducción a $F = \sigma(P)$ con $P = \sum_{i=1}^n Q_i \delta_i$ y obtenemos

$$\sigma(P) \in \text{Gr}_F(\mathcal{D})(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

□

Proposición 1.4.— Sea $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ una base de $\text{Der}(\log f)$. Si la sucesión $\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_n)$ es una sucesión $\text{Gr}_F(\mathcal{D})$ -regular en $\text{Gr}_F(\mathcal{D})$, se verifica que el complejo $\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})} \mathcal{S}p^*(\log f)$ es una resolución del cociente $\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}(\delta_1, \dots, \delta_n)}$.

Prueba: Consideremos el complejo $\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})} \mathcal{S}p^*(\log f)$. Este complejo de \mathcal{D} -módulos podemos ampliarlo con

$$\varepsilon_0 : \mathcal{D} \rightarrow \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}(\delta_1, \dots, \delta_n)}, \quad \varepsilon_0(P) = P + \mathcal{D}(\delta_1, \dots, \delta_n).$$

Notaremos $\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})} \tilde{\mathcal{S}}p^*(\log f)$ al correspondiente complejo ampliado. Para demostrar que éste complejo ampliado es exacto, lo dotamos de una filtración discreta G^\bullet tal que el complejo graduado correspondiente sea exacto (cf. [2, lemma 3.16]). Definimos la siguiente filtración:

$$G^k \left(\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}} \overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log f) \right) = F^{k-p}(\mathcal{D}) \otimes_{\mathcal{O}} \overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log f),$$

$$G^k \left(\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}(\delta_1, \dots, \delta_n)} \right) = \frac{F^k(\mathcal{D}) + \mathcal{D} \cdot (\delta_1, \dots, \delta_n)}{\mathcal{D} \cdot (\delta_1, \dots, \delta_n)}.$$

Claramente

$$\varepsilon_{-p} \left(G^k \left(\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}} \overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log f) \right) \right) \subset G^k \left(\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}} \overset{p-1}{\wedge} \text{Der}(\log f) \right),$$

$$\varepsilon_0 \left(G^k(\mathcal{D}) \right) \subset G^k \left(\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}(\delta_1, \dots, \delta_n)} \right)$$

Se tiene:

$$\text{Gr}_G \left(\mathcal{D} \otimes \overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log f) \right) = \text{Gr}_F(\mathcal{D})[-p] \otimes \overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log f),$$

y, gracias a la proposición anterior,

$$\text{Gr}_G \left(\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}(\delta_1, \dots, \delta_n)} \right) = \frac{\text{Gr}_F(\mathcal{D})}{\sigma(\mathcal{D} \cdot (\delta_1, \dots, \delta_n))} = \frac{\text{Gr}_F(\mathcal{D})}{\text{Gr}_F(\mathcal{D}) \cdot (\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_n))},$$

Dado que las filtraciones anteriores son compatibles con la diferencial del complejo $\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{V}_0^i(\mathcal{D})} \tilde{\mathcal{S}}p^*(\log f)$, podemos considerar el complejo $\text{Gr}_G \left(\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{V}_0^i(\mathcal{D})} \tilde{\mathcal{S}}p^*(\log f) \right)$:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{Gr}_F(\mathcal{D})[-n] \otimes_{\mathcal{O}} \overset{n}{\wedge} \text{Der}(\log f) \xrightarrow{\psi_{-n}} \dots \\ &\dots \xrightarrow{\psi_{-p-1}} \text{Gr}_F(\mathcal{D})[-p] \otimes_{\mathcal{O}} \overset{p}{\wedge} \text{Der}(\log f) \xrightarrow{\psi_{-p}} \\ &\xrightarrow{\psi_{-p}} \text{Gr}_F(\mathcal{D})[-p+1] \otimes_{\mathcal{O}} \overset{p-1}{\wedge} \text{Der}(\log f) \xrightarrow{\psi_{-p+1}} \dots \\ &\dots \xrightarrow{\psi_{-2}} \text{Gr}_F(\mathcal{D})[-1] \otimes_{\mathcal{O}} \overset{1}{\wedge} \text{Der}(\log f) \xrightarrow{\psi_{-1}} \\ &\text{Gr}_F(\mathcal{D}) \xrightarrow{\psi_0} \frac{\text{Gr}_F(\mathcal{D})}{\text{Gr}_F(\mathcal{D}) \cdot (\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_n))} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

donde la expresión local de las diferenciales viene definida por:

$$\psi_{-p}(G \otimes \delta_{j_1} \wedge \dots \wedge \delta_{j_p}) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} G\sigma(\delta_{j_i}) \otimes \delta_{j_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\delta_{j_i}} \wedge \dots \wedge \delta_{j_p}, \quad (2 \leq p \leq n),$$

$$\psi_{-1}(G \otimes \delta_i) = G\sigma(\delta_i),$$

$$\psi_0(G) = G + \text{Gr}_F(\mathcal{D}) \cdot (\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_n)).$$

Este complejo coincide con el complejo de Koszul del anillo $\text{Gr}_F(\mathcal{D})$ respecto de la sucesión $\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_n)$. De aquí se deduce que si la sucesión $\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_n)$ es una sucesión $\text{Gr}_F(\mathcal{D})$ -regular en $\text{Gr}_F(\mathcal{D})$, el complejo

$$\text{Gr}_G \left(\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{V}_0^i(\mathcal{D})} \tilde{\mathcal{S}}p^*(\log f) \right)$$

es exacto. Por tanto, también lo es el complejo

$$\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D})} \tilde{\mathcal{S}}p^*(\log f)$$

y $\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D})} \mathcal{S}p^*(\log f)$ es una resolución del módulo cociente $\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}(\delta_1, \dots, \delta_n)}$. \square

Corolario 1.5.— Sea un divisor libre Y . En las mismas condiciones que la proposición anterior, es decir, para todo punto x de Y , existe una base $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ de $\text{Der}(\log f)$ tal que la sucesión $\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_n)$ es una sucesión $\mathcal{G}r_F(\mathcal{D})$ -regular, entonces se verifica que el haz $\Omega_X^*(\log Y)$ es un haz perverso.

Prueba: En las mismas condiciones de la proposición anterior, el complejo $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \mathcal{S}p^*(\log Y)$ está concentrado en grado 0. Todos sus grupos de homología son nulos salvo el de grado 0, que verifica:

$$h^0(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \mathcal{S}p^*(\log f)) = \frac{\mathcal{D}_X}{\mathcal{D}_X \cdot \text{Der}(\log Y)} = \frac{\mathcal{D}_X}{\mathcal{D}_X \cdot (\delta_1, \dots, \delta_n)},$$

suponiendo que $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ es una base local de $\text{Der}(\log Y)$. Ahora bien,

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{D}_X}{\mathcal{D}_X \cdot (\delta_1, \dots, \delta_n)}$$

es un \mathcal{D}_X -módulo holónimo puesto que

$$\mathcal{G}r_F(\mathcal{E}) = \frac{\mathcal{G}r_F(\mathcal{D}_X)}{(\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_n))}$$

es de dimensión n al ser $\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_n)$ una sucesión $\mathcal{G}r_F(\mathcal{D}_X)$ -regular. Por tanto (nota 2.4.2 del capítulo 2):

$$\begin{aligned} \Omega_X^*(\log Y) &= \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)}^L \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) = \\ &= \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \mathcal{S}p^*(\log Y), \mathcal{O}_X) = \\ &= \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}\left(\frac{\mathcal{D}_X}{\mathcal{D}_X \cdot (\delta_1, \dots, \delta_n)}, \mathcal{O}_X\right) \end{aligned}$$

es un haz perverso en tanto que solución de un \mathcal{D}_X -módulo holónimo (cf. [30]). \square

Corolario 1.6.— Sea Y un divisor cualquiera en una superficie X ($\dim_{\mathbb{C}} X = 2$). Entonces $\Omega_X^*(\log Y)$ es un haz perverso.

Prueba: Sabemos que si $\dim_{\mathbb{C}} X = 2$, todos los divisores Y de X son libres [35], así que basta comprobar que se verifican las hipótesis del corolario anterior. Consideremos los símbolos $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ de una base de $\text{Der}(\log f)$, donde f es una

ecuación reducida que define a Y . Hay que comprobar que forman una sucesión $\text{Gr}_F(\mathcal{D})$ -regular. Tenemos:

$$\mathcal{D} = \mathcal{O}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right], \quad \text{Gr}_F(\mathcal{D}) = \mathcal{O}[\xi_1, \xi_2].$$

$$\delta_1 = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \sigma_1 = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2,$$

$$\delta_2 = b_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \sigma_2 = b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2,$$

donde los coeficientes a_1, a_2, b_1, b_2 están en \mathcal{O} . En este caso, que $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ sean una sucesión \mathcal{D} -regular en \mathcal{D} equivale a que sean primos entre sí. Veamos que σ_1 y σ_2 son primos entre sí. Para ello, puesto que ambos son de grado 1 en las ξ_i y no son proporcionales, basta comprobar que no tienen factores comunes en \mathcal{O} . Si esto ocurre, con $g \in \mathcal{O}$ un factor común a σ_1 y σ_2 , se verifica que a_1, a_2, b_1, b_2 serían múltiplos de g , y, por tanto el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

sería múltiplo de g^2 , lo que contradice el Criterio de Saito, a menos que g fuera una unidad en \mathcal{O} , con lo que podemos tomar una nueva base $\{\delta'_1, \delta_2\}$ de $\text{Der}(\log f)$, con

$$\delta'_1 = a'_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a'_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \sigma'_1 = a'_1 \xi_1 + a'_2 \xi_2, \quad \text{con } a_1 = ga'_1, a_2 = ga'_2.$$

Así eliminamos el factor común g de δ_1 , convirtiendo a σ'_1 y σ_2 en primos entre sí. □

Nota 1.7.— Mostraremos en el siguiente apartado un ejemplo de un divisor libre, con $n = 3$, en el que el complejo graduado

$$\text{Gr}_H(\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{V}_0(\mathcal{D})} \mathcal{S}p^*(\log f)) = K(\sigma(\delta_1), \sigma(\delta_2), \sigma(\delta_3); \text{Gr}_F(\mathcal{D}))$$

no está concentrado en grado 0 y, sin embargo, sí lo está el complejo

$$\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{V}_0(\mathcal{D})} \mathcal{S}p^*(\log f).$$

Además, en este caso se verifica que la dimensión de $\frac{\mathcal{D}_X}{\mathcal{D}_X \cdot (\delta_1, \delta_2, \delta_3)}$ es 3 y, por tanto, $\Omega(\log Y)$ es un haz perverso. Así, podemos afirmar que la regularidad de la sucesión de los símbolos de una base de $\text{Der}(\log f)$ en $\text{Gr}_F(\mathcal{D})$ no es necesaria para la perversidad del complejo de de Rham logarítmico.

Como ejemplo de la utilidad del resultado para dimensiones mayores que 2, damos a continuación un ejemplo de divisor libre, tomado de [36], que verifica las

condiciones del corolario 1.5 y verifica, por tanto, que el complejo de de Rham logarítmico correspondiente es exacto.

Consideramos la hipersuperficie de $X = \mathbb{C}^3$ definida por:

$$Y \equiv \{f = 0\}, \text{ con } f = 2^8 z^3 - 2^7 x^2 z^2 + 2^4 x^4 z + 2^4 3^2 xy^2 z - 2^2 x^3 y^2 - 3^3 y^4,$$

siendo (x, y, z) un sistema de coordenadas de \mathbb{C}^3 . Tomamos las derivaciones logarítmicas:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 6y \frac{\partial}{\partial x} + (8z - 2x^2) \frac{\partial}{\partial y} + (-xy) \frac{\partial}{\partial z}. \\ \delta_2 &= (4x^2 - 48z) \frac{\partial}{\partial x} + 12xy \frac{\partial}{\partial y} + (9y^2 - 16xz) \frac{\partial}{\partial z}. \\ \delta_3 &= 2x \frac{\partial}{\partial x} + 3y \frac{\partial}{\partial y} + 4z \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

El conjunto

$$\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$$

forma una base de $\text{Der}(\log f)$. Además el conjunto de sus símbolos

$$\{\sigma(\delta_1), \sigma(\delta_2), \sigma(\delta_3)\}$$

es una sucesión $\text{Gr}_F(\mathcal{D})$ -regular, lo que se comprueba fácilmente. Nosotros lo hemos comprobado calculando el ideal cociente del ideal generado por $\sigma(\delta_1)$ y $\sigma(\delta_2)$ por el ideal generado por $\sigma(\delta_3)$. Este cociente está contenido en el primero de los dos ideales:

$$((\sigma(\delta_1), \sigma(\delta_2)) : (\sigma(\delta_3))) \subset (\sigma(\delta_1), \sigma(\delta_2)).$$

1.1 Ejemplo

Seguiremos la notación dada en las notas anteriores.

Consideramos la hipersuperficie de $X = \mathbb{C}^3$ definida por:

$$Y \equiv \{f = 0\}, \text{ con } f = xy(x + y)(tx + y),$$

siendo (x, y, t) un sistema de coordenadas de \mathbb{C}^3 . Tomamos las derivaciones logarítmicas:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}. \\ \delta_2 &= (xt + y) \frac{\partial}{\partial t}. \\ \delta_3 &= x^2 \frac{\partial}{\partial x} - y^2 \frac{\partial}{\partial y} - t(x + y) \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

Estas derivaciones verifican:

$$\delta_1(f) = 4f; \quad \delta_2(f) = xf; \quad \delta_3(f) = (2x - 3y)f.$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ 0 & 0 & (xt + y) \\ x^2 & y^2 & t(x + y) \end{vmatrix} = f.$$

Aplicando el Criterio de Saito, obtenemos que $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ es una base de $\text{Der}(\log f)$. Además, se tiene

$$[\delta_1, \delta_2] = \delta_2, \quad [\delta_1, \delta_3] = \delta_3, \quad [\delta_2, \delta_3] = -x\delta_2.$$

Utilizando estas relaciones, construimos el complejo $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \mathcal{S}p^*(\log Y)$, ampliado con d_0 :

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{3}{\wedge} \text{Der}(\log Y) \xrightarrow{d_3} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{2}{\wedge} \text{Der}(\log Y) \xrightarrow{d_2} \\ \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \text{Der}(\log Y) \xrightarrow{d_1} \mathcal{D}_X \xrightarrow{d_0} \frac{\mathcal{D}_X}{\mathcal{D}_X(\text{Der}(\log Y))} \rightarrow 0,$$

cuyas ecuaciones vienen definidas localmente por:

$$d_3(P \otimes (\delta_1 \wedge \delta_2 \wedge \delta_3)) = P(\delta_3 - x) \otimes (\delta_1 \wedge \delta_2) - P\delta_2 \otimes (\delta_1 \wedge \delta_3) + P(\delta_1 - 2) \otimes (\delta_2 \wedge \delta_3), \\ d_2(P \otimes (\delta_i \wedge \delta_j)) = P\delta_i \otimes \delta_j - P\delta_j \otimes \delta_i - P \otimes [\delta_i, \delta_j], \\ d_1(P \otimes \delta_i) = P\delta_i, \\ d_0(P) = P + \mathcal{D}(\delta_1, \delta_2, \delta_3).$$

Este complejo nos induce el complejo graduado correspondiente:

$$\mathcal{G}r_H \left(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \tilde{\mathcal{S}}p^*(\log Y) \right).$$

Escribiremos C en vez de $\mathcal{G}r_F(\mathcal{D}_X)$ (localmente, $C = \mathbb{C}\{x, y, t\}[a, b, c]$):

$$0 \rightarrow C \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{3}{\wedge} \text{Der}(\log Y) \xrightarrow{b_3} C \otimes_{\mathcal{O}_X} \overset{2}{\wedge} \text{Der}(\log Y) \xrightarrow{b_2} \\ C \otimes_{\mathcal{O}_X} \text{Der}(\log Y) \xrightarrow{b_1} C \xrightarrow{b_0} \frac{C}{C(\sigma(\text{Der}(\log Y)))} \rightarrow 0,$$

definida localmente por:

$$b_3(P \otimes (\delta_1 \wedge \delta_2 \wedge \delta_3)) = P\sigma(\delta_3) \otimes (\delta_1 \wedge \delta_2) - P\sigma(\delta_2) \otimes (\delta_1 \wedge \delta_3) + P\sigma(\delta_1) \otimes (\delta_2 \wedge \delta_3), \\ b_2(P \otimes (\delta_i \wedge \delta_j)) = P\sigma(\delta_i) \otimes \delta_j - P\sigma(\delta_j) \otimes \delta_i, \\ b_1(P \otimes \delta_i) = P\sigma(\delta_i), \\ b_0(P) = P + C(\sigma(\delta_1), \sigma(\delta_2), \sigma(\delta_3)),$$

donde $\sigma(\delta_1) = xa + yb$, $\sigma(\delta_2) = (xt + y)c$ y $\sigma(\delta_3) = x^2a - y^2b - t(x + y)c$. A partir de aquí, escribiremos σ_1, σ_2 y σ_3 .

Observamos que este complejo coincide con el complejo $K(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; C)$ ampliado. Vamos a comprobar:

1. El complejo $\mathcal{G}r_F \left(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D}_X)} \mathcal{S}p^*(\log Y) \right)$ no está concentrado en grado cero.

2. El complejo $\mathcal{D}_X \otimes_{V_0^*(\mathcal{D}_X)} \mathcal{S}p^*(\log Y)$ está concentrado en grado cero.

Ambos complejos son exactos en los grados -2 y -3. Para comprobarlo, basta hacerlo en el complejo graduado.

$$(-2) \text{ Im } b_3 = C(\sigma_3 \otimes (\delta_1 \wedge \delta_2) - \sigma_2 \otimes (\delta_1 \wedge \delta_3) + \sigma_1 \otimes (\delta_2 \wedge \delta_3)) = \text{Ker } b_2.$$

(-3) b_3 es inyectiva.

Nos falta comprobar que:

$$1. \text{ Im } b_2 \neq \text{Ker } b_1.$$

$$2. \text{ Im } d_2 = \text{Ker } d_1.$$

1. Calculamos $\text{Ker } b_1$ o, lo que es lo mismo, el C -módulo M de las C -sicigias de $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$:

$$M = \langle (\sigma_2, -\sigma_1, 0), (\sigma_3, 0, -\sigma_1), (0, \sigma_3, -\sigma_2), (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rangle,$$

con $\alpha_1 = xac + ytb + t^2c^2 - tc^2$, $\alpha_2 = xab + yab + tac - tbc$, $\alpha_3 = ac - tbc$.

Comprobamos también que:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in M \setminus \langle (\sigma_2, -\sigma_1, 0), (\sigma_3, 0, -\sigma_1), (0, \sigma_3, -\sigma_2) \rangle.$$

Por tanto, $\alpha_1 \otimes \delta_1 + \alpha_2 \otimes \delta_2 + \alpha_3 \otimes \delta_3 \in \text{Ker } b_1 \setminus \text{Im } b_2$.

2. Probaremos que dados $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{D}$ tales que

$$P = P_1 \otimes \delta_1 + P_2 \otimes \delta_2 + P_3 \otimes \delta_3 \in \text{Ker } d_1,$$

entonces $P \in \text{Im } d_2$. Haremos la prueba por inducción en el máximo grado n de los P_i ($i = 1, 2, 3$) (podemos suponer que tienen los tres el mismo grado).

En el caso $n = 0$ es evidente.

Sean ahora P_i de grado n tales que $P_1\delta_1 + P_2\delta_2 + P_3\delta_3 = 0$. Se verifica que $\sum_{i=1}^3 \sigma(P_i)\sigma_i = 0$ y, por tanto, existen g y β_i ($i = 1, 2, 3$) tales que:

$$M \ni (\sigma(P_1), \sigma(P_2), \sigma(P_3)) = g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \beta_1(\sigma_2, -\sigma_1, 0) +$$

$$\beta_2(\sigma_3, 0, -\sigma_1) + \beta_3(0, \sigma_3, -\sigma_2).$$

A partir de los α_i construimos unos A_i , sustituyendo a, b y c por las derivaciones correspondientes. En particular, $\sigma(A_i) = \alpha_i$:

$$A_1 = x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} + yt \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t} + t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + t \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$A_2 = x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + t \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t},$$

$$A_3 = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Análogamente, podemos construir unos G_i ($i = 1, 2, 3$) a partir de los β_i , y un G a partir de g ($\sigma(G_i) = \beta$ y $\sigma(G) = g$). Calculamos ahora unos operadores diferenciales R_i :

$$(R_1, R_2, R_3) = (P_1, P_2, P_3) - G(A_1, A_2, A_3) - G_1(\delta_2, 1 - \delta_1, 0) - G_2(\delta_3, 0, 1 - \delta_1) - G_3(0, \delta_3, -x\delta_2),$$

que tienen grado estrictamente menor que n , y verifican

$$R_1\delta_1 + R_2\delta_2 + R_3\delta_3 = -gQ, \quad \text{con } Q = \sum_{i=1}^3 A_i\delta_i.$$

Si $g = 0$, aplicamos la hipótesis de inducción a los R_i , y hemos probado el resultado.

Si $g \neq 0$, tenemos $\sum_{i=1}^3 \sigma(R_i)\sigma_i = -g\sigma(Q)$. Por tanto,

$$g \in ((\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) : (\sigma(Q))) = (x, y).$$

Ahora bien,

$$x(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \langle (\sigma_2, -\sigma_1, 0), (\sigma_3, 0, -\sigma_1), (0, \sigma_3, -\sigma_2) \rangle.$$

$$y(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \langle (\sigma_2, -\sigma_1, 0), (\sigma_3, 0, -\sigma_1), (0, \sigma_3, -\sigma_2) \rangle.$$

Con lo cual

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \langle (\sigma_2, -\sigma_1, 0), (\sigma_3, 0, -\sigma_1), (0, \sigma_3, -\sigma_2) \rangle,$$

y volvemos al caso anterior ($g = 0$).

Observación: Para los cálculos con elementos de $\mathcal{G}_{r_F}(\mathcal{D}_X)$ hemos utilizado el sistema de cálculo simbólico Singular (consultar [37]). El procedimiento seguido nos ha evitado operaciones con ideales de operadores diferenciales. Para el cálculo de los R_i hemos utilizado un programa basado en Maple que nos permite multiplicar operadores diferenciales (consultar [38]).

Capítulo 4

Cálculos efectivos

1 \mathcal{V} -grado de un operador logarítmico

Sea X una variedad analítica compleja de dimensión n . Consideramos una hipersuperficie $Y \subset X$ de ideal \mathcal{I} . Notaremos $\mathcal{O} \equiv \mathcal{O}_{X,p}$ la fibra en el punto $p \in X$ del haz de las funciones analíticas en X , $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_{X,p}$ la fibra en p del haz de los operadores diferenciales sobre X , y $(f) = \mathcal{I} \equiv \mathcal{I}_{X,p}$ la fibra en p de \mathcal{I} .

Consideramos la \mathcal{V}^Y -filtración:

$$\mathcal{V}_k^Y(\mathcal{D}_X) = \{P \in \mathcal{D}_X, P(\mathcal{I}^j) \subset \mathcal{I}^{j-k}, j \in \mathbf{Z}\}, k \in \mathbf{Z}, (\mathcal{I}^t = \mathcal{O}_X \text{ si } t \leq 0),$$

que nos induce la \mathcal{V}^f -filtración en \mathcal{D} :

$$\mathcal{V}_k^I(\mathcal{D}) = \mathcal{V}_k^f(\mathcal{D}) = \{P \in \mathcal{D}, P(\mathcal{I}^j) \subset \mathcal{I}^{j-k}, j \in \mathbf{Z}\}, k \in \mathbf{Z}, (\mathcal{I}^t = \mathcal{O}_n \text{ si } t \leq 0).$$

Llamamos \mathcal{V}^f -grado de un operador $P \in \mathcal{D}$ al grado de P asociado a la \mathcal{V}^f -filtración:

$$\mathcal{V}^f\text{-grado}(P) = \min\{k, P \in \mathcal{V}_k^f(\mathcal{D})\}.$$

Vamos a construir un algoritmo para calcular este \mathcal{V}^f -grado. Para ello, usaremos los siguientes resultados, que probamos anteriormente (consultar la subsección 3.3 del capítulo 1, correspondiente a la \mathcal{V} -filtración):

Lema 3.3.4, (a).— Para cualquier entero m mayor o igual que 0, se verifica:

$$P \in \mathcal{V}_m^f(\mathcal{D}) \iff [P, f] \in \mathcal{V}_{m-1}^f(\mathcal{D}).$$

Observación: En el caso particular de que $[P, f] = 0$ ($\in \mathcal{V}_{-1}^f(\mathcal{D})$), se tiene, por tanto, que $P \in \mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$.

Lema 3.3.4, (b).— Dados dos enteros m y k , con k mayor o igual que 0, se verifica:

$$f^k P \in \mathcal{V}_{m-k}^f(\mathcal{D}) \iff P \in \mathcal{V}_m^f(\mathcal{D}).$$

Lema 3.3.5, (b).— Para cualquier entero m mayor o igual que 0, $\mathcal{V}_m^f(\mathcal{D})$ es el ideal bilátero de $\mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$ generado por f^m .

1.1 Algoritmo

Vamos a dar los sucesivos pasos que hay que seguir para, dado un operador diferencial P , obtener su grado en la \mathcal{V} -filtración.

(0) Sea $P \in \mathcal{D}$.

(a) Calculamos k y P_0 tal que $P = f^k P_0$, con $P_0 \notin f\mathcal{D}$. Para conseguirlo, se parte de la expresión (única) de P como polinomio en las derivadas parciales

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n},$$

con (x_1, \dots, x_n) una carta local en p :

$$P = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \partial^{\alpha}.$$

A partir de los $\alpha \in \mathcal{O}$, se calcula el mayor entero k tal que todos los coeficientes a_{α} que aparecen en la expresión de P son divisibles por f^k . Este es el entero k que buscamos.

(b) Por el lema 2, sabemos que

$$P = f^k P_0 \in \mathcal{V}_{m-k}^f(\mathcal{D}),$$

donde

$$P_0 \in \mathcal{V}_m^f(\mathcal{D}) \text{ y } 0 \leq m \leq n_0 = \text{grado}(P) = \text{grado}(P_0).$$

El entero m tiene que ser forzosamente positivo, gracias al lema 3, puesto que P no es divisible por f . Conservamos P_0 y k .

(1) Calculamos $[P_0, f]$. Se pueden dar tres posibilidades:

(a) $[P_0, f] = 0$. Entonces

$$P_0 \in \mathcal{V}_0^f(\mathcal{D}) \text{ y } P \in \mathcal{V}_{-k}^f(\mathcal{D}).$$

Esto termina el algoritmo en este primer caso.

(b) $[P_0, f] = fP_1$. En este caso, aplicando el lema 1, tenemos que $[P_0, f] \in \mathcal{V}_{m-1}^f(\mathcal{D})$. Gracias al lema 2, tenemos entonces que

$$P_1 \in \mathcal{V}_m^f(\mathcal{D}).$$

Conservamos $a_1 = 0$ y P_1 .

(c) $[P_0, f] = P_1 \notin f\mathcal{D}$. En este caso, aplicando el lema 1:

$$P_1 \in \mathcal{V}_{m+1}^f(\mathcal{D}).$$

Conservamos $a_1 = 1$ y P_1 , que tiene grado $n_1 < n_0$.

(2) Repetimos con $[P_1, f]$ el paso anterior, y hallamos P_2 de grado $n_2 < n_1$ y $a_2 \in \{0, 1\}$. Conservamos P_2 y $a_1 + a_2 = b_2$.

...

...

...

i+1.) Partimos de $[P_i, f]$ de grado $n_i < n_{i-1}$ y $b_i = \sum_{k=1}^i a_k$.

(a) $[P_i, f] = 0$. Entonces

$$P_i \in \mathcal{V}_0^f(\mathcal{D}) \text{ y } P \in \mathcal{V}_{-k+b_i}^f(\mathcal{D}).$$

Eso termina el algoritmo en este caso.

(b) $[P_i, f] = fP_{i+1}$. En este caso,

$$P_i \in \mathcal{V}_{m-b_i}^f(\mathcal{D}) \text{ y } P_{i+1} \in \mathcal{V}_{m-b_i}^f(\mathcal{D}).$$

Conservamos $b_{i+1} = b_i$ y P_{i+1} .

(c) $[P_i, f] = P_{i+1} \notin f\mathcal{D}$. En este caso,

$$P_i \in \mathcal{V}_{m-b_i}^f(\mathcal{D}) \text{ y } P_{i+1} \in \mathcal{V}_{m-b_i-1}^f(\mathcal{D}).$$

Conservamos $b_{i+1} = b_i + 1$ y P_{i+1} de grado $n_{i+1} < n_i$.

El algoritmo termina en un número finito de pasos. De hecho, si llegáramos al paso $n_0 + 1$ sería el último, pues $[P_{n_0}, f] = 0$, al ser P_{n_0} de grado cero ($P_{n_0} \in \mathcal{O}$). Si terminamos en el paso i , el resultado es:

$$P \in \mathcal{V}_{-k+b_i}^f(\mathcal{D}).$$

2 Coordenadas de un operador logarítmico

Hemos estudiado el anillo $\mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$, a cuyos elementos llamamos operadores diferenciales logarítmicos:

$$\mathcal{V}_0^f(\mathcal{D}) = \{P \in \mathcal{D}, P(I^j) \subset I^j, \forall j \geq 1\},$$

con $I = (f)$. Recordamos algunas de sus propiedades:

- $\mathcal{V}_{-k}^f(\mathcal{D}) = f^k \mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$, $k \geq 0$.
- $f^k \mathcal{V}_k^f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$, $k \geq 0$.
- $\mathcal{V}_0^f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{V}_k^f(\mathcal{D}) = \mathcal{V}_0^f(\mathcal{D}) \cdot \mathcal{V}_k^f(\mathcal{D})$, $k \geq 0$.
- $\mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$ es una \mathcal{O} -subálgebra de \mathcal{D} .

Si llamamos F^\bullet a la filtración natural de los operadores por el grado, se tiene que:

$$F^1(\mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})) = \mathcal{O} \oplus \text{Der}(\log f).$$

Es decir, los campos de vectores logarítmicos son los operadores de $\mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$ que tienen grado uno y no tienen término de grado cero.

Vamos a construir un algoritmo que, en el caso de que Y sea un divisor libre, nos da una expresión canónica de cualquier operador de $\mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$. Antes, enunciemos el resultado que nos permite construirlo (teorema 1.1.1 del capítulo 2):

Teorema 1.1.1.— Si $\text{Der}(\log f)$ es un \mathcal{O} -módulo libre, el anillo $\mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$ es la \mathcal{O} -subálgebra de \mathcal{D} generada por $\text{Der}(\log f)$. Concretamente, si $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ es una base de $\text{Der}(\log f)$, entonces

$$\mathcal{V}_0^f(\mathcal{D}) = \mathcal{O}[\delta_1, \dots, \delta_n].$$

Observación: En particular, si $P \in \mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$, el polinomio $\sigma(P) \in \mathcal{O}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ esta en el ideal J generado por $\{\sigma(\delta_1^{i_1} \dots \delta_n^{i_n}), \sum_{k=1}^n i_k = \text{grado}(P)\}$, (que es una base de J como \mathcal{O} -módulo).

2.1 Algoritmo

Sea Y un divisor libre en una variedad X . Mostramos un algoritmo de cálculo de la expresión local de un operador P en $\mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$ como elemento del álgebra generada por una base cualquiera $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ del \mathcal{O}_n -módulo libre de los campos de vectores logarítmicos $\text{Der}(\log f)$ en un punto $p \in X$.

1. Sea $P \in \mathcal{V}_0^f(\mathcal{D}_n)$ de grado n_1 . Tomamos $\sigma(P)$, que es un polinomio en $\mathcal{O}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ de grado n_0 . Siempre que trabajemos en el anillo de polinomios $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \subset \mathcal{O} = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$, podemos calcular ([8]) la expresión de $\sigma(P)$ como elemento del ideal J_1 , generado por

$$\{\sigma(\delta_1^{i_1} \dots \delta_n^{i_n}), \sum_{k=1}^n i_k = n_1\}, \text{ (que es una base de } J_1).$$

$$\sigma(P) = \sum_{\sum i_k = n_0} a_{i_1 \dots i_n} \sigma(\delta_1^{i_1} \dots \delta_n^{i_n}).$$

Conservamos $Q_1 = \sum \sum_{i_k = n_0} a_{i_1 \dots i_n} \delta_1^{i_1} \dots \delta_n^{i_n} \in \mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$.

2. Tomamos $P_2 = P - Q_0 \in \mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$ de grado $n_2 < n_1$. De manera análoga al paso anterior, tenemos:

$$\sigma(P_2) = \sum_{\sum i_k = n_1} a_{i_1 \dots i_n} \sigma(\delta_1^{i_1} \dots \delta_n^{i_n}).$$

Conservamos $Q_2 = \sum_{\sum i_k = n_1} a_{i_1 \dots i_n} \delta_1^{i_1} \dots \delta_n^{i_n} \in \mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$.

...

...

...

- $i+1$. Partimos de $P_{i+1} = P_i - Q_i$ de grado $n_{i+1} < n_i$. Consideramos el ideal $J_{n_{i+1}}$ de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$ generado por $\{\sigma(\delta_1^{i_1} \dots \delta_n^{i_n}), \sum_{k=1}^n i_k = n_{i+1}\}$, y calculamos $a_{i_1 \dots i_n}$, con $\sum i_k = n_{i+1}$, tales que:

$$\sigma(P) = \sum_{\sum i_k = n_{i+1}} a_{i_1 \dots i_n} \sigma(\delta_1^{i_1} \dots \delta_n^{i_n}).$$

Conservamos $Q_{i+1} = \sum_{\sum i_k = n_{i+1}} a_{i_1 \dots i_n} \delta_1^{i_1} \dots \delta_n^{i_n}$.

Este algoritmo termina en el paso t , en el que $P_t \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \subset \mathcal{O}$. Sabemos que $t-1 \leq n_1 = \text{grado}(P)$. El resultado final es

$$P = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{t-1} + P_t \in \mathcal{O}[\delta_1, \dots, \delta_n].$$

3 Ejemplos

Sea $X = \mathbb{C}^2$, $p = (0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Consideramos $I = (f) = (x^2 + y^3)$. Se verifica que f es libre, y una base de $\text{Der}(\log f)$ es $\{\delta_1, \delta_2\}$:

$$\delta_1 = 3x\partial_x + 2y\partial_y, \quad \delta_2 = 3y^2\partial_x - 2x\partial_y.$$

Vamos a estudiar el operador $P = f^2\partial_x$:

ALGORITMO 1

1. $P = f^2 P_0, P_0 = \partial_x^2$. Tenemos $k = 2$.
2. $[P_0, f] = [\partial_x^2, f] = 4x\partial_x + 2 = P_1$. Tenemos $a_1 = 1$.
3. $[P_1, f] = [4x\partial_x + 2, f] = 8x^2 = P_2$. Obtenemos $a_2 = 1$.

4. $[P_2, f] = 0$. Por tanto, $P_2 \in \mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$.

Obtenemos que $P \in \mathcal{V}_{-k+a_1+a_2}^f = \mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$.

ALGORITMO 2

1. Tenemos $P \in \mathcal{V}_0^f(\mathcal{D})$ de grado 2.

$$\sigma(P) = f^2 \xi^2 = \frac{1}{9} x^2 \sigma(\delta_1^2) + \frac{2}{9} xy \sigma(\delta_1 \delta_2) + \frac{1}{9} y^2 \sigma(\delta_2^2).$$

Nos quedamos con $Q_0 = \frac{1}{9} x^2 \delta_1^2 + \frac{2}{9} xy \delta_1 \delta_2 + \frac{1}{9} y^2 \delta_2^2$.

2. Calculamos $P_1 = P - Q_0$ de grado 1.

$$\begin{aligned} \sigma(P_1) &= \left(-x^3 - \frac{4}{3} xy^3\right) \xi_1 + \left(\frac{8}{9} x^2 y + \frac{2}{3} y^4\right) \xi_2 = \\ &= \left(-\frac{1}{3} x^2 + \frac{1}{3} y^3\right) \sigma(\delta_1) - \frac{7}{9} xy \sigma(\delta_2). \end{aligned}$$

Nos quedamos con $Q_1 = \left(-\frac{1}{3} x^2 + \frac{1}{3} y^3\right) \delta_1 - \frac{7}{9} xy \delta_2$.

3. Calculamos $P_2 = P_1 - Q_1 = 0$. De donde $P = Q_0 + Q_1$.

Como resultado final del algoritmo, obtenemos:

$$P = \frac{1}{9} x^2 \delta_1^2 + \frac{2}{9} xy \delta_1 \delta_2 + \frac{1}{9} y^2 \delta_2^2 + \left(-\frac{1}{3} x^2 + \frac{1}{3} y^3\right) \delta_1 - \frac{7}{9} xy \delta_2.$$

Bibliografía

- [1] A. G. Aleksandrov. Euler-homogeneous Singularities and Logarithmic Differential Forms. *Ann. Global Anal. Geom.*, 4, no 2:225–242, 1986.
- [2] J.E. Björk. *Rings of Differential Operators*. North Holland, Amsterdam, 1979.
- [3] J.E. Björk. *Analytic \mathcal{D} -modules and applications*. Kluwer, Amsterdam, 1994.
- [4] A. Borel. *Algebraic \mathcal{D} -modules*, volumes 2 of *Perspectives in Math*. Academic Press, Boston, 1987.
- [5] N. Bourbaki. *Algèbre Commutative, Chapitres 7*, volume 1314 of *Actualités Scientifiques et Industrielles*. Hermann, Paris, 1965.
- [6] N. Bourbaki. *Algèbre Commutative, Chapitres 3 et 4*, volume 1293 of *Actualités Scientifiques et Industrielles*. Hermann, Paris, 1967.
- [7] N. Bourbaki. *Algèbre, Chapitre 10 (Algèbre Homologique)*. Masson, Paris, 1980.
- [8] B. Buchberger. Ein algorithmisches Kriterium für die Lösbarkeit eines algebraischen Gleichungssystems. *Aequationes Math.*, 4:374–384, 1970.
- [9] C. Bănică and O. Stănăsilă. *Algebraic methods in the global theory of complex spaces*. John Wiley, New York, 1976.
- [10] F. J. Calderón Moreno. Quelques propriétés de la \mathcal{V} -filtration relative à un diviseur libre. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 323, 1:377–381, 1996.
- [11] F. J. Castro-Jiménez and D. Mond and L. Narváez-Macarro. Cohomology of the complement of a free divisor. *Transactions of the American Mathematical Society*, 348, no 8:3037–3049, 1996.
- [12] S. C. Coutinho. *A Primer of Algebraic \mathcal{D} -modules*, volume 33 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

- [13] P. Deligne. *Equations Différentielles à Points Singuliers Réguliers*, volume 163 of *Lect. Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1970.
- [14] H. Esnault and V. Schechtman and E. Viehweg. Cohomology of local systems on the complement of hyperplanes. *Invent. Math.*, 109:557–561, 1992.
- [15] H. Esnault and E. Viehweg. Logarithmic De Rham complexes and vanishing theorems. *Invent. Math.*, 86:161–194, 1986.
- [16] O. Gabber. The integrability of the characteristic variety. *Amer. J. Math.*, 75:445–468, 1981.
- [17] C. Godbillon. *Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique*. Collection Méthodes. Hermann, Paris, 1969.
- [18] J.M. Granger and Ph. Maisonobe. A basic course on differential modules. In Ph. Maisonobe and C. Sabbah, editors, *Eléments de la théorie des systèmes différentiels (vol. I)*, Summer school at CIMPA, pages 103–168, Nice, 1990. Travaux en cours, Hermann, Paris, to appear.
- [19] H. Grauert and R. Remmert. *Theory of Stein spaces*, volume 236 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer Verlag, New York, 1979.
- [20] H. Grauert and R. Remmert. *Coherent analytic sheaves*, volume 265 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer Verlag, New York, 1984.
- [21] A. Grothendieck. On the de Rham cohomology of algebraic varieties. *Publ. Math. IHES*, 29:95–105, 1966.
- [22] A. Grothendieck and J. Dieudonné. *Eléments de Géométrie Algébrique IV: Etude locale des schémas et de morphismes de schémas (Troisième Partie)*, volume 28 of *Publ. Math. IHES*. Press Univ. de France, Paris, 1966.
- [23] A. Grothendieck and J. Dieudonné. *Eléments de Géométrie Algébrique IV: Etude locale des schémas et de morphismes de schémas (Quatrième Partie)*, volume 32 of *Publ. Math. IHES*. Press Univ. de France, Paris, 1967.
- [24] R.C. Gunning and H. Rossi. *Analytic Functions of Several Complex Variables*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.
- [25] M. Kashiwara. Vanishing cycle sheaves and holonomic systems of differential equations. *Lect. Notes in Math.*, 1012:134–142, 1983.
- [26] M. Lejeune and B. Malgrange. *Séminaire Opérateurs Différentiels*. Prépublication Institut Fourier, Grenoble, 1975.

- [27] J.C. McConnell and J.C. Robson. *Noncommutative Noetherian Rings*. Pure and applied Mathematics, John Wiley & Sons, Chichester, 1987.
- [28] B. Malgrange. Le polynôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescence. *Astérisque* 101-102:233–267, 1983.
- [29] H. Matsumura. *Commutative Algebra (Second edition)*. Benjamin-Cummings Publ. Co., New York, 1980.
- [30] Z. Mebkhout. *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les \mathcal{D}_X -modules cohérents*, volume 35 of *Travaux en cours*. Hermann, Paris, 1989.
- [31] Z. Mebkhout and C. Sabbah. \mathcal{D}_X -modules et cycles évanescents. In *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les \mathcal{D}_X -modules cohérents*, volume 35 of *Travaux en cours*, pages 201–239. Hermann, Paris, 1989.
- [32] C. Năstăsescu and F. Van Oystaeyen. *Graded Ring Theory*, volume 28 of *Mathematical Library*. North Holland, Amsterdam, 1982.
- [33] F. Pham. *Singularités des systèmes de Gauss-Manin*, volume 2 of *Progress in Math*. Birkhäuser, Boston, 1979.
- [34] D. G. Quillen. *Homotopical Algebra*, volume 43 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1967.
- [35] K. Saito. Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 27:265–291, 1980.
- [36] K. Saito. On the uniformization of complements of discriminant loci. Preprint, Williams College, 1975.
- [37] G. M. Greuel, G. Pfister and H. Schoenemann. *Singular. Reference Manual, versión 0.9.2*. University of Kaiserslautern, Department of Mathematics, 1995.
- [38] M. J. Soto and J. L. Vicente. *Matemáticas con Maple*. Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1996.
- [39] B. Stenström. *Rings of quotients*, volume 217 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1975.

Francisco J. Calderón Moreno
operadores diferenciales logarítmicos con respecto a
un divisor libre

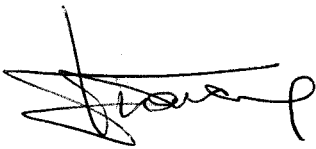
APTO COM LAUDE

Julio

97

8

Jh. Martínez



José Vicente

