

466

043
28

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
BIBLIOTECA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE CIENCIAS

LOS 320209
500

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE CIENCIAS
20-9-78
603

"ESTUDIO LOCAL DE SINGULARIDADES DE SUPERFICIES
SOBRE CUERPOS BASE DE CARACTERÍSTICA ARBITRARIA"

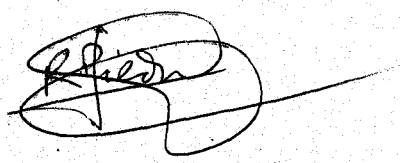
V° B°

EL DIRECTOR DE LA MEMORIA



PROF. DR. D. JOSE L. VICENTE CORDOBA

Memoria para optar al grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas
realizada por Ramón Piedra Sánchez.
Sevilla, septiembre 1978



La presente memoria ha sido realizada en el Departamento de Algebra y Fundamentos de la Universidad de Sevilla, bajo la dirección de D. José L. Vicente Córdoba, a quien expreso mi mayor agradecimiento. Su labor no se ha reducido a dirigir este trabajo, sino que, simultáneamente, se ha esforzado en formarme como investigador. Su ayuda, en el plano científico y humano, ha sido constante, y sin ella no hubiera salido a la luz esta memoria.

Tengo que agradecer también el apoyo y aliento que siempre tuve en los demás compañeros del Departamento, y de mis padres, que nunca dejaron de animarme en el estudio.

A Mercedes.

I N D I C E

INTRODUCCION.

CAPITULO 1°.- REVISION DE RESULTADOS CONOCIDOS Y LEMAS TECNICOS.-

- 1.1.-Explosiones formales de un anillo local noetheriano.....1
- 1.2.-Transformados cuadráticos y monoidales de una variedad algebroide lisa de dimensión 3.....6
- 1.3.-Transformados cuadráticos y monoidales de una SAS.....13
- 1.4.-Resolución de singularidades de SAS.....23
- 1.5.-Teoremas de estructura de caminos estacionarios.....28

CAPITULO 2°.- TEORIA LOCAL DE DESINGULARIZACION EN CARACTERISTICA $q \geq 0$.-

- 2.1.-Teorema I de desingularización de SAS.....32
- 2.2.-Caminos estacionarios de SAS (característica $q \geq 0$).....44
- 2.3.-Teoremas de estructura de caminos estacionarios (característica $q \geq 0$).....61

CAPITULO 3°.- SUCESIONES ADMISIBLES DE EXPLOSIONES. TEOREMA DE FINITUD.-

- Introducción.....75
- 3.1.-Caso en que el cono tangente no se reduce a un plano único.....77
- 3.2.-Curvas permitidas en transformados cuadráticos.....83
- 3.3.-Caso en que el cono tangente se reduce a un plano único.....103

BIBLIOGRAFIA.....116

INTRODUCCION

La presente memoria versa sobre singularidades de superficies en característica positiva. El interés del tema es patente: la resolución de singularidades de variedades algebraicas sobre cuerpos base de característica positiva es uno de los grandes problemas que quedan abiertos. De otro lado está el problema de la equisingularidad, del cual hay muy poco hecho en característica positiva.

Esta memoria no se refiere específicamente ni a resolución de singularidades ni a equisingularidad, sino a ambas en conjunto, ya que no es posible delimitar una frontera neta entre ambos problemas. La idea, como el título indica, es realizar un estudio local de las singularidades de las superficies con la doble intención de:

- 1°) Sentar las bases para la resolución local de singularidades.
- 2°) Estudiar la equisingularidad.

Vamos a ir precisando y definiendo términos. Lo que se hace en esta memoria es presentar los elementos básicos constitutivos de un útil o herramienta local que permita la resolución local de singularidades y que pudiera admitir, eventualmente, un proceso de globalización. Esta herramienta es el árbol de una singularidad. En este trabajo no llegamos a definir este concepto, pues quedan aún muchos problemas por resolver antes de poderlo hacer, sino que salvamos el primer escollo que se presenta en su estudio con nuestro resultado fundamental: el teorema de finitud de las sucesiones admisibles de explosiones.

Es bien conocido que las singularidades de una superficie algebraica en el espacio proyectivo se pueden resolver. Hay una demostración de este hecho en unas notas multicopiadas que circulan de mano en mano, sobre unas lecciones de Hironaka en el Bowdoin College en las que se resuelve este problema. Nuestro punto de vista es completamente distinto: dado un punto singular cero-dimensional de una superficie algebraica, estudiar su evolución en todas las posibles sucesiones de explosiones de esa

superficie, con centro conteniendo a ese punto, y que verifiquen unas ciertas condiciones de razonabilidad. (Este calificativo de "razonables" será aclarado más adelante. Baste por ahora decir que el estudio de todas las posibles explosiones de un punto no conduce a nada práctico, por haber demasiadas cosas en cuestión). ¿Por qué elegir las superficies para nuestro estudio? Daremos algunas razones:

- a) Es un caso particular lo suficientemente sencillo para ser manejable y lo suficientemente complicado como para que, hechos que se estudian en ellas, sean generalizables a dimensión mayor. Dentro del estudio de las singularidades hay ejemplos palpables de teoremas dados para superficies cuya generalización a dimensiones superiores es relativamente fácil (c.f., por ejemplo, Sanchez Giralda-[5], en el que se generalizan los teoremas sobre caminos estacionarios de [3], por el mismo autor).
- b) Sabemos muchas cosas sobre la resolución de singularidades de superficies. Por tanto, si nuestros métodos valen, tenemos un excelente banco de prueba para ellos.
- c) Las superficies constituyen el siguiente caso de equisingularidad a estudiar, y del cual poco hay hecho. No olvidemos que no hay que perder de vista la equisingularidad.

¿Qué es el árbol de la singularidad de una superficie?
 ¿Para qué sirve? ¿Cómo se maneja? Vamos a exponer brevemente la respuesta a estas preguntas en el caso de característica cero, que es donde se conoce algo más del tema gracias a los trabajos de Sánchez Giralda y a los más recientes de J.M.Aroca y J.L.Vicente. Posteriormente indicaremos cómo es la situación en característica positiva y enmarcaremos nuestro trabajo en ella.

Partimos de una filosofía: la equisingularidad es un problema puntual, y las técnicas puntuales son susceptibles de aceptar un proceso de globalización en orden a la resolución de singularidades. De acuerdo con esto, vamos a trabajar con superficies algebroides singulares, reducidas, no necesariamente irreducibles, sumergidas en un espacio de di-

mensión 3 (abreviadamente, superficies algebroides). En principio supondremos el cuerpo base algebraicamente cerrado de característica cero.

Definición.- Sea S una superficie algebroides. Llamaremos árbol de la singularidad de S a una sucesión $\{N_i\}_{i \in \mathbb{Z}_0}$ de conjuntos de superficies

algebroides, llamados niveles del árbol, definido recurrentemente así:

a) $N_0 = S$.

b) Construido el nivel i -ésimo, el nivel N_{i+1} se compone:

(b-1) De todos los transformados monoidales formales posibles de todas las superficies N_i que tengan centros permitidos de dimensión 1.

(b-2) De todos los transformados cuadráticos formales de todas las superficies de N_i que no tengan centros permitidos de dimensión 1.

Un camino en el árbol de S es una sucesión $\{S_i\}_{i \in \mathbb{Z}_0}$ de superficies

algebroides tales que:

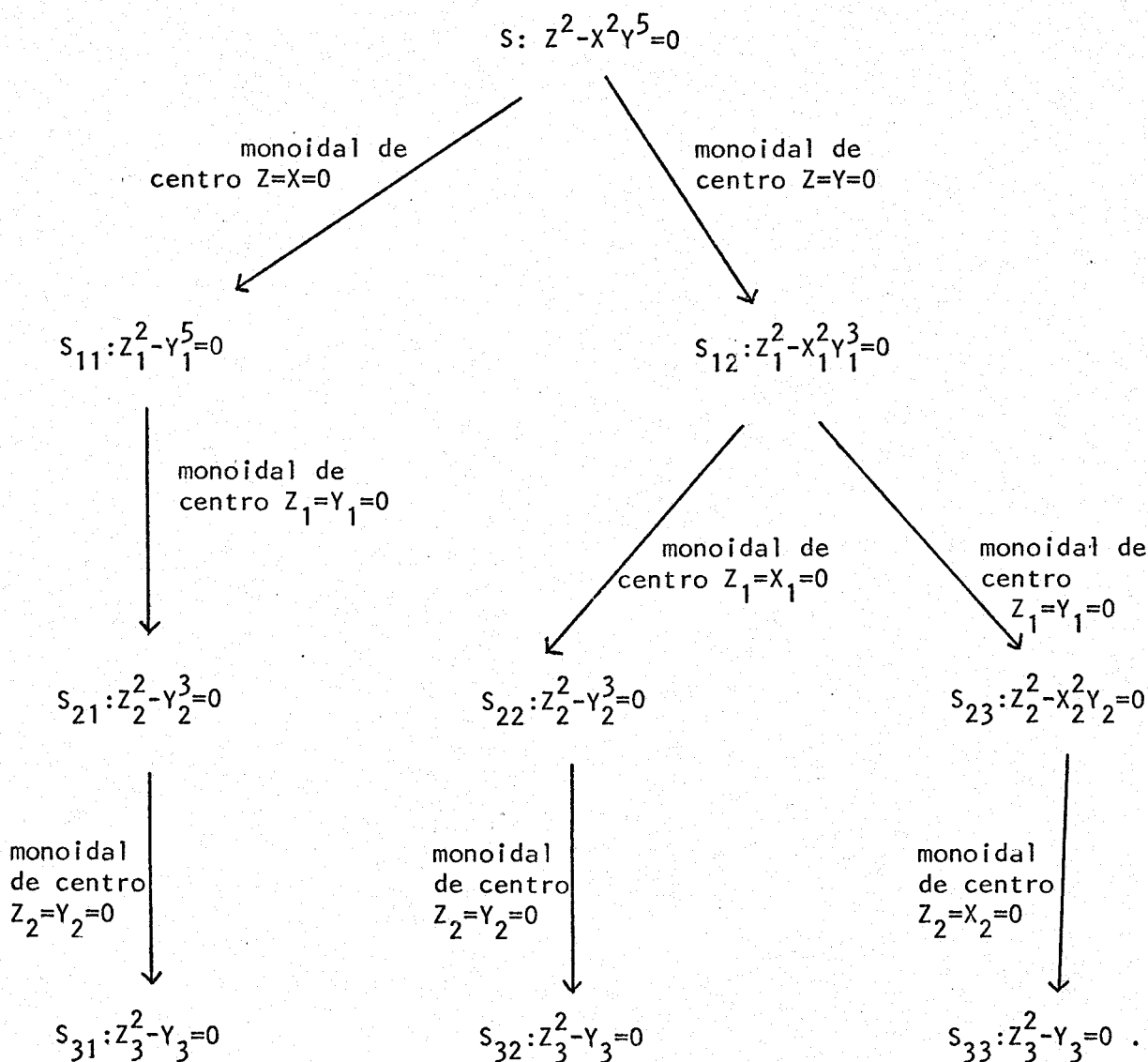
a) $S_0 = S$

b) $\forall i \geq 1, S_i$ es un explotado formal de S_{i-1}

En otras palabras, los caminos de un árbol son sucesiones de explotados formales de una superficie S siguiendo la regla de "explotar siempre con un centro permitido de la mayor dimensión posible". Tales sucesiones de explosiones (o tales caminos) se llaman en esta memoria sucesiones admisibles de explosiones, para seguir la terminología clásica. El problema aquí es dar teoremas que permitan "recortar" el árbol hasta convertirlo en algo finito y manejable. En característica cero tenemos varios de ellos. En característica positiva sólo tenemos los que se dan en esta memoria.

Antes de continuar daremos un ejemplo de árbol de la singularidad de una superficie, que sirva de aclaración a lo expuesto.

Sea S la superficie algebroide de ecuación $Z^2 - X^2Y^5 = 0$. Los cuatro primeros niveles del árbol de S son:



Los siguientes niveles del árbol están todos constituidos por superficies lisas.

¿Cuál es la estructura del árbol de la singularidad de una superficie S ? Comencemos estudiando el caso en que S posea curvas permitidas; sean éstas C_1, C_2, \dots, C_q . Para cada C_i , la sección genérica de S transversal a C_i está unívocamente determinada (c.f. Zariski [7]) y, por tanto, lo está el primer exponente característico de esta sección, al que designaremos por $m(C_i)$. Poniendo

$$m = \sum_{i=1}^q m(C_i),$$

se tiene que los $m+1$ primeros niveles del árbol de S (salvo el primero), están constituidos por transformados monoidales formales. El nivel N_m está constituido todo él por superficies de multiplicidad inferior a la de S o bien por superficies de multiplicidad igual a la de S y sin curvas permitidas.

Si S no tiene curvas permitidas, hay un teorema potentísimo de Aroca-Vicente basado en resultados de Zariski-[7], que es absolutamente específico de característica cero, y que permite recortar grandemente el árbol, como veremos. Vamos a comentarlo. Consideremos la superficie S , de la que suponemos que no tiene curvas permitidas; los infinitos transformados cuadráticos de S pueden ser considerados como una familia algebraica de superficies algebroides, con el divisor excepcional de S como espacio de parámetros. El teorema dice entonces que las fibras genéricas de esta familia (es decir, las fibras en los puntos genéricos de cada una de las componentes irreducibles del divisor excepcional), tienen una singularidad de tipo dimensional 1 (cf. Zariski, loc.cit.). Recuérdese que una singularidad de una superficie es de tipo dimensional 1 si el lugar singular es una curva permitida y si existe una sección de la superficie transversal al lugar singular que es equisingular a la sección genérica. Dicho en otras palabras, una superficie tiene una singularidad de tipo dimensional 1 si su lugar singular es una curva permitida, y si su singularidad puede ser resuelta por transformaciones monoidales de la misma manera (i.e., con la misma sucesión de multiplicidades) que la sección genérica transversal al lugar singular.

El resultado anterior recorta el árbol enormemente. ¿Por qué? La explicación es fácil. Partiendo de S , ese resultado significa que todos los transformados cuadráticos de S , salvo un número finito, pueden ser clasificados en un número finito de paquetes tales que las superficies de cada paquete tienen una singularidad equirresoluble por monoidales (en un número finito, claro). Entonces estudiar el árbol es estudiar ese número finito de superficies de excepción, puesto que de las otras ya se conoce

todo.

Hemos dicho antes que este teorema es específico de característica cero. La razón es que se apoya en el criterio de equisingularidad por discriminantes de Zariski-[7]: Una superficie tiene una singularidad de tipo dimensional 1 si y sólo si existe un sistema de coordenadas y una proyección de esa superficie sobre un plano cuyo lugar crítico (discriminante=0) es liso. Naturalmente el criterio de equisingularidad por discriminantes es absolutamente falso en característica positiva, y no hay nada descubierto sobre este tema.

¿Qué sería deseable dar como teorema de finitud de un árbol? La respuesta es fácil: Dada una superficie S y su árbol $\{N_i\}_{i \in \mathbb{Z}_0}$ existe un $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que, $\forall i \geq m$, el nivel N_i está constituido por superficies lisas. En característica cero tenemos la "mitad" de este teorema de finitud con el resultado anterior. La otra mitad no es difícil: consiste en una ingeniosa interpretación del teorema de finitud de sucesiones admisibles de explosiones, que en característica cero se conoce desde Zariski-[6]. Y esto es así, porque según el resultado anterior, lo que tenemos que dar es un teorema de finitud de sucesiones de superficies de excepción provinientes las unas de las otras.

En característica positiva, la situación es justamente la inversa de la presente. No sabemos demostrar, por el momento, y, ni siquiera tenemos una pista, el resultado de que los transformados cuadráticos de una superficie se puedan clasificar en paquetes equirresolubles por monoïdales. El problema está en que necesitamos un criterio algebraico singularidad de tipo dimensional 1 para sustituir al discriminante en característica cero. En cambio aquí sí que conocemos el teorema de finitud de sucesiones admisibles de explosiones, pues éste es el resultado principal de esta memoria. Ni que decir tiene que este teorema de finitud es infinitamente más complicado que en característica cero y que la complicación viene, como siempre, en el caso en que la multiplicidad de la superficie

es un múltiplo de la característica del cuerpo base. El caso en que esto no ocurre difiere técnicamente, que no conceptualmente, del caso de característica cero. Así, se puede encontrar en esta memoria, como caso particular, el teorema de finitud de Zariski-[6] para característica cero, demostrándose sólo en las propiedades geométricas de las explosiones, sin necesidad de recurrir a la uniformización de valoraciones.

Esta es la situación del estudio local de las singularidades de superficies en característica positiva, y éste es el marco en el que se encuadra la presente memoria. Pasamos ahora a detallar los principales resultados y técnicas usadas en ella. Para terminología, notaciones y resultados previos, nos hemos basado fuertemente en Sánchez-Giralda [3].

Esta memoria consta de tres capítulos, el primero de ellos reservado a una revisión de resultados conocidos y lemas técnicos.

La sección 1.1 se reduce, básicamente, a las definiciones clásicas de explosión global, local y formal de un anillo local noetheriano.

En la sección 1.2 pasamos ya al caso de una variedad algebroides X lisa, de dimensión 3 sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, obteniéndose que todos los transformados cuadráticos locales y monoidales locales (con centros permitidos de dimensión 1) de X son lisos, de dimensión 3, y todos los transformados cuadráticos y monoidales formales son isomorfos a X (teor.2).

En la sección 1.3 entramos ya de lleno en las variedades que nos interesan, las superficies algebroides (SAS). Dotamos de ecuaciones a estas SAS, llegando a las muy conocidas ecuaciones de las transformaciones cuadráticas y monoidales formales.

El párrafo siguiente comienza con un resumen de resultados puntuales sobre resolución de singularidades, que se encuentran en Sánchez Giralda-[3] y Romo-[2]. En el primero se trata de SAS sobre

cuerpos de característica cero y en el segundo de hipersuperficies sobre cuerpos de característica arbitraria. La situación es la siguiente:

Sea X una superficie algebraica en el espacio proyectivo de dimensión 3 sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado y de característica cero. Sea $x \in X$ un punto cerrado. Consideremos la fibra $\mathcal{O}_{X,x}$ del haz estructural de X , y $S = \text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x})$, que es una superficie algebroides. Sea $\pi: X' \rightarrow X$ la explosión global de X con centro x y x' un punto tal que $\pi(x') = x$; entonces $S' = \text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{X',x'})$ es un transformado cuadrático formal de S .

Así, las cadenas de transformados cuadráticos de una SAS pueden interpretarse como sucesiones de puntos que van uno sobre el anterior, en una sucesión de explosiones de la superficie algebraica X .

El resultado de los autores antes citados, a que hacíamos alusión, se puede resumir en el siguiente:

Teorema 1.- Sea X una superficie algebraica en el espacio proyectivo tridimensional (resp. para Romo-[2], una hipersuperficie en el espacio proyectivo n -dimensional) sobre un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica cero (resp. arbitraria). Sea x un punto cerrado de X ; entonces, existe una sucesión finita de transformaciones cuadráticas globales de X :

$$X_r \xrightarrow{\pi_r} X_{r-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\pi_1} X_0 = X,$$

con centros respectivos $\{x_i\}_{i=0, \dots, r-1}$, donde $x_0 = x$, $\pi_i(x_i) = x_{i-1}$ y un punto $x_r \in X_r$ con $\pi_r(x_r) = x_{r-1}$, que es un punto simple de X_r .

El resultado algebroides que se encuentra en las referencias citadas dice así:

Teorema 1'.- Dada una superficie algebroides (resp., hipersuperficie algebroides) S , existe una sucesión finita S_0, S_1, \dots, S_r de SAS (resp. hipersup. algebroides), tales que:

$$1^\circ) S_0 = S.$$

$$2^\circ) \forall i=1, \dots, r, S_i \text{ es una transformada cuadrática formal de } S_{i-1}.$$

$$3^\circ) S_r \text{ es lisa.}$$

Precisamente, nuestro primer párrafo del segundo capítulo lo dedicamos a dar una demostración más clara de este resultado, para el caso de superficies algebroides sobre cuerpos base de característica arbitraria. El caso "fácil", cuando el cono tangente no se reduce a un plano único, se resuelve (prop.2) eligiendo un punto del divisor excepcional que tenga menor multiplicidad que la de la superficie, y localizando en él la explosión del origen. La transformada cuadrática formal en ese punto ya rebaja la multiplicidad.

El caso difícil, cuando el plano tangente es un plano único, no lo es tanto si la característica del cuerpo es cero, o bien, si es positiva y no divide a la multiplicidad (prop.6). Entonces, se puede preparar la ecuación de la superficie,

$$f(X, Y, Z) = Z^p + a_{p-1}(X, Y)Z^{p-1} + \dots + a_1(X, Y)Z + a_0(X, Y) = 0$$

en $k[[X, Y, Z]]$, de forma inicial Z^p , de tal manera que $a_{p-1}(X, Y) = 0$. Así, después de un número finito de transformaciones cuadráticas se consigue, o bien reducir la multiplicidad, o bien, si ésta se mantiene, la forma inicial deja de ser potencia de una forma lineal.

No se puede hacer la misma preparación cuando la característica es positiva y divide a la multiplicidad. Entonces un ingenioso estudio del diagrama de Newton, usando el hecho de que la superficie es reducida, concluye el teorema.

Como vemos, este resultado dista aún de lo que pretendíamos, el teorema de finitud de las sucesiones admisibles, pues quedan todavía preguntas importantísimas por contestar, por ejemplo, ¿qué se puede decir sobre la totalidad de los puntos de X_r que van sobre x_0 mediante la composición $\pi_0 \pi_1 \dots \pi_r$? Y aun cuando se pudiera afirmar que todos

ellos son puntos simples (lo que no ocurre salvo contados casos), ¿que sucede con el resto de las singularidades de X ?

Observemos que con este teorema, lo que se ha probado es que existe un camino en un cierto árbol de la singularidad de S , constituido exclusivamente por transformaciones cuadráticas, en el que las superficies singulares son un número finito. Sobre los demás caminos no se dice nada.

Nuestra sección 1.4 concluye con un lema técnico (teor.5) que afirma que si una SAS tiene un cono tangente reducido a un plano único y con un punto singular aislado, toda transformada cuadrática formal tiene un lugar singular que sólo puede ser, o el vacío, o un punto, o una curva lisa (por tanto, irreducible).

En los trabajos [3] y [4] de Sánchez Giralda se da un paso más en el estudio de ese árbol constituido por transformados cuadráticos formales. En ellos se estudia la estructura de los caminos de multiplicidad constante, que él llama caminos estacionarios, en el caso de característica cero. Se prueba en [3] que, si el cono tangente a una SAS no es un único plano, la superficie admite, a lo más, un único camino estacionario, según que la superficie tenga o no una curva permitida.

Para cualquier superficie algebroide, en [4] se prueba que, dado un camino estacionario, en un número infinito de niveles las explosiones del origen se localizan en puntos correspondientes a direcciones tangentes a curvas permitidas.

Estos resultados resumidos se encuentran en la última sección de nuestro capítulo primero.

El capítulo segundo, en sus apartados 2.2 y 2.3, está dedicado a generalizar todos estos resultados a característica positiva. Dado que las curvas permitidas son difíciles de detectar, a no ser las que tienen ideales de la forma (Z, X) y (Z, Y) , en la sección 2.2 tratamos de simplificar lo máximo posible los caminos estacionarios. El caso

difícil (el otro no tiene interés reseñarlo aquí), es cuando el camino estacionario está constituido por etapas de transformaciones cuadráticas en puntos de primera coordenada no nula, y etapas de transformaciones cuadráticas en puntos de primera coordenada nula, ambas en un número infinito.

Mediante una conveniente preparación del camino estacionario, se consigue (lema 9) que:

- a) Si $0 = q$ ($=\text{car } k$), o bien $q > 0$ y $q \nmid p$ ($=$ multiplicidad de la SAS), las transformaciones cuadráticas de las etapas impares, se hacen en puntos del tipo $(1, \beta, 0)$, conservándose la forma inicial Z^P .
- b) Si $q > 0$ y $q \mid p$, las transformaciones cuadráticas de las etapas impares son totalmente generales, y la forma inicial puede ser del tipo $(Z+aX)^P$ ($a \in k - \{0\}$).
- c) En cualquier caso, las transformaciones cuadráticas de las etapas pares se hacen todas en $(0, 1, 0)$.

En la sección 2.3, hemos generalizado a característica positiva el siguiente

Teorema.-(teor.11).- Sea S una SAS, $\{(S_i, P_i)\}_{i \in Z_0}$ un camino estacionario para S . Existe un subconjunto infinito I de Z_0 con las propiedades siguientes:

- a) Para cada $i \in I$, S_i posee una curva permitida C_i .
- b) Para cada $i \in I$, la recta tangente a la superficie determinada por P_i es tangente a C_i .

La demostración se apoya, de nuevo, en el diagrama de Newton D de la ecuación de D , dividiendo éste en cuatro zonas (véase la fig. de la pag. 68). Primero se prueba (lema 9) que, después de un número finito de explosiones, en la zona F_1 no hay puntos y que esta condición es estable para las sucesivas transformaciones. A continuación se demuestra (lema 10) que en la zona F_2 no hay puntos, cuando no los hay

en F_1 . En suma, después de un número finito de etapas, la curva (Z, X) es permitida, luego las infinitas explosiones de las siguientes etapas pares (de transformaciones cuadráticas en $(0,1,0)$) verifican el teorema.

Entramos ya en el último capítulo de nuestra memoria, en el que se estudian las sucesiones admisibles de explosiones y el teorema de finitud que enunciamos del modo que sigue:

Teorema.- Sea S una SAS sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado y de característica $q \geq 0$, sea $\{S_i\}_{i \in \mathbb{Z}_0}$ una sucesión admisible de explosiones para S . Se tiene que:

- a) Si el cono tangente a S no es un plano único, entonces existe un entero n tal que, $\forall i \geq n$, S_i es lisa.
- b) Si el cono tangente a S es un plano único y S tiene un punto singular aislado, la conclusión del apartado anterior sigue siendo válida.

El primer apartado se demuestra en la sección 3.1 (prop. 3). Si la superficie S tiene una curva permitida (recuérdese que a lo más había una), las explosiones con centro esta curva ya rebajan la multiplicidad. Si por el contrario S no contiene curvas permitidas, no hay caminos estacionarios para S , y en ninguna superficie de la sucesión S_i puede haber curvas permitidas. Por tanto la multiplicidad decrece.

El caso difícil es cuando el cono tangente a todas las superficies de la sucesión es un plano único. La dificultad estriba en que pueden aparecer curvas permitidas después de transformaciones cuadráticas.

La sección 3.2 es un laborioso estudio de la forma que pueden tener los ideales de las curvas permitidas que aparecen luego de una explosión en el origen de una superficie S . Se prueba, entre otros, un resultado que afirma que las únicas curvas que pueden aparecer por una transformación cuadrática en $(1,0,0)$ son las de ideales (Z, X) y $(Z, X+b(Y))$, con $b(Y) \in k[[Y]]$ y $\underline{o}(b(Y)) \geq 2$, y además, si aparece una del

segundo tipo, aparece también la primera (teor. 3 y prop. 5). Más aun, esto último implica la existencia en el lugar singular de la superficie inicial S , de una curva singular (prop. 6).

Aquí, la hipótesis de que la primera superficie S_0 de la sucesión admisible tiene un punto singular aislado, nos permite desechar el caso anterior, es decir, que la única curva permitida que puede aparecer por transformaciones cuadráticas en $(1,0,0)$ es la de ideal (Z,X) , y por simetría, después de una transformación cuadrática en $(0,1,0)$, la de ideal (Z,Y) .

Esta es una hipótesis restrictiva pero, desde el punto de vista de la desingularización, no lo es tanto. En efecto, para desingularizar una superficie algebraica, lo primero que se hace, clásicamente, es reducir su lugar singular a un número finito de puntos, pasando al normalizado (cf. por ejemplo, Zariski-[6]). Por tanto no es exagerado añadir esta hipótesis.

Todo esto nos ha simplificado el problema porque ya sabemos que la sucesión admisible se obtiene mediante las siguientes operaciones:

- 1) Transformaciones cuadráticas en $(1,0,0)$ (mediante un cambio de coordenadas que transforme un punto $(1,\beta,\gamma)$ en el $(1,0,0)$) y en $(0,1,0)$.
- 2) Transformaciones monoidales en (Z,X) y (Z,Y) .

Si se aborda ahora el problema desde el mismo punto de vista que tomamos en la sección 2.1, nos encontramos con una diferencia sustancial, por culpa de las transformaciones monoidales, y es que, después de este tipo, podemos llegar a una forma inicial potencia de una forma lineal, distinta de Z^p , que nos complica la situación.

Ejemplo.- En un cuerpo de característica 2,

$$Z^2 + X^4 + X^2Y^2 + X^{10}Y = 0$$

↓
monoidal con
centro $Z=X=0$

$$Z^2 + X^2 + Y^2 + X^8Y = (Z+X+Y)^2 + X^8Y = 0$$

Pero en este ejemplo vemos que, si en la superficie inicial, hacemos el cambio de coordenadas de ecuaciones

$$(1) \quad \begin{cases} X = X' \\ Y = Y' \\ Z = Z' - X'^2 - X'Y' \end{cases},$$

ya no se plantea la dificultad.

¡Este es el camino!. La dificultad se obvia por este método, preparando la superficie inicial. En este caso, trabajamos con una proyección estereográfica del diagrama de Newton desde el punto $(0,0,p)$, definimos el polígono de Newton de esta proyección, y realizamos una "preparación" de los vértices de este polígono mediante cambios de coordenadas como el del tipo (1). Esto es posible con un número finito de cambios (lema 7).

Esta preparación nos garantiza que la forma inicial de unas ecuaciones de las superficies S_i es, si se conserva la multiplicidad, de la forma Z^P (lema 13). Además esta preparación de los vértices sólo se pierde cuando hay explosiones en $(1, \beta, 0)$, $(\beta \neq 0)$, y en este caso, el vértice más a la izquierda sigue preparado.

La demostración propiamente dicha del teorema de finitud, es ya un simple juego; basta observar la evolución del vértice antes citado (de mínima abcisa), obteniéndose que, en algún momento, este vértice, procede de la proyección de puntos del diagrama de Newton que representan monomios de grado menor que p . Esto concluye nuestra memoria.

Bibliografía que se cita en esta Introducción.-

- [1] H.HIRONAKA: "Desingularization of Excellent Surfaces". Bowdoin College, 1967. (Notes by Bruce Bennett). Sin publicar.
- [2] C.ROMO: "Resolución de singularidades de variedades algebraicas sobre un cuerpo de característica cualquiera". Tesis de doctorado. Madrid 1976.
- [3] T.SANCHEZ GIRALDA: "Teoría de singularidades de superficies algebraicas".

des sumergidas". Tesis de doctorado. Madrid 1976.

- [4] -----: "Problemas de finitud y caminos estacionarios en la teoría de singularidades de superficies algebroides sumergidas". A publicar en las actas de la R.A.M.E. Málaga 1976.
- [5] -----: "Caracterisation des variétés permises d'une hypersurface algebroïde". Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris. 1977.
- [6] O.ZARISKI : "Reduction of the singularities of algebraic three-dimensional varieties". Ann. of Math., vol. 45 .1944.
- [7] ----- : "Studies in equisingularity II". American Journal of Math., vol. 87. 1965.

CAPITULO PRIMERO

REVISION DE RESULTADOS CONOCIDOS Y LEMAS TECNICOS

SECCION 1.1.- EXPLOSIONES FORMALES DE UN ANILLO LOCAL NOETHERIANO.-

Situación 1.- Sea A un anillo local noetheriano, M su ideal maximal, e $I \subset M$ un ideal arbitrario. Sea $B = \bigoplus_{n \geq 0} I^n$, que es una A -álgebra graduada de tipo finito, y si $I = (f_1, \dots, f_m)A$, entonces $B = A[f_1, \dots, f_m]$ (nótese que cada f_i como elemento de A es de grado 0, y como elemento de I es de grado 1).

Tenemos así, el siguiente diagrama de homomorfismos

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & B \\ \downarrow n & & \\ A/I & & \end{array}$$

que induce el diagrama de morfismos de esquemas siguiente

$$\begin{array}{ccc} \pi: \text{Proj}(B) & \longrightarrow & \text{Spec}(A) \\ & & \uparrow \\ & & V(I) = \text{Spec}(A/I). \end{array}$$

Definición 2.- El morfismo $\pi: \text{Proj}(B) \longrightarrow \text{Spec}(A)$ se denomina explosión global de A con centro I , y se dice que $\text{Proj}(B) (= \text{Bl}_I(A))$, como lo denotaremos en lo sucesivo), es el explotado global de A con centro I .

En particular, si $I \in \text{Spec}(A)$, la explosión se dice una transformación monoidal global de A con centro I , y en el caso en que $I = M$, la transformación cuadrática global de A .

El esquema $Bl_I(A)$ puede ser recubierto por un número finito de esquemas afines

$$(1) \quad Bl_I(A) = \bigcup_{i=1}^m \text{Spec}(B_{(f_i)}) \cong \bigcup_{i=1}^m D_+(f_i), \text{ (cf. [7] 2.3.6)}$$

donde $B_{(f_i)} = (B_{f_i})_0$, es decir, la parte homogénea de grado cero del anillo de fracciones $B_{f_i} = S^{-1}B$ con $S = \{1, f_i, f_i^2, \dots\}$, graduado de la forma natural, en grados positivos y negativos.

De otro lado, el homomorfismo graduado de grado 0

$$\psi : B \longrightarrow \text{gr}_I(A) = \bigoplus_{q \geq 0} I^q / I^{q+1},$$

que a cada elemento $x \in B$ homogéneo de grado q hace corresponder el elemento $x + I^{q+1}$, induce una inmersión cerrada

$$\text{Proj}(\text{gr}_I(A)) \hookrightarrow Bl_I(A),$$

cuya imagen es justamente $\pi^{-1}(V(I))$. Así, como (A/I) -esquemas

$$\pi^{-1}(V(I)) \cong \text{Proj}(\text{gr}_I(A)),$$

y usualmente se identificarán ambos, vía este isomorfismo. Este subesquema de $\text{Proj}(B)$ es un divisor, cuya ecuación local en $D_+(f_i)$ es $f_i=0$.

De este hecho y de (1) se puede deducir inmediateamente que el morfismo

$$\pi \Big|_{Bl_I(A) - \pi^{-1}(V(I))} : Bl_I(A) - \pi^{-1}(V(I)) \longrightarrow \text{Spec}(A) - V(I)$$

es un isomorfismo.

Definición 3.- Al subesquema $\text{Proj}(\text{gr}_I(A))$ de $Bl_I(A)$ se denomina divisor excepcional de $\text{Spec}(A)$.

A continuación definiremos y caracterizaremos el concepto de transformado estricto de un ideal J de A por la explosión global π . Para ello, construyamos

$$B' = \bigoplus_{n \geq 0} (I^n \cap J),$$

que es un ideal homogéneo de B y que determina un ideal coherente sobre $B_{I_1}(A)$, que denotaremos por \tilde{J} . Este haz, se obtiene mediante el "recollement" (cf. [6] 0.3.3.1) de los haces de ideales \tilde{J}_i , $i=1, \dots, m$, sobre las piezas afines $D_+(f_i)$ de $B_{I_1}(A)$, asociados a los ideales de $B_{(f_i)}$

$$J_i = \left\{ \frac{a}{f_i^r} \mid a \in J \cap I^r, a \notin I^{r+1} \right\}, \quad i=1, \dots, m.$$

Con esta notación damos la siguiente

Definición 4.- Se llama transformado estricto del ideal J por la explosión global π al ideal \tilde{J} . Al subesquema cerrado Z' de $B_{I_1}(A)$ determinado por \tilde{J} , se le denomina transformado estricto por π del esquema afín $Z = \text{Spec}(A/J) \subset \text{Spec}(A)$.

Se obtiene una caracterización de este transformado estricto en [13] 1.1.8, dada por

$$Z' = \text{Proj} \left(\bigoplus_{n \geq 0} (I / J \cap I)^n \right) = B_{I_1(A/J)}(A/J),$$

y se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Z' & \hookrightarrow & B_{I_1}(A) \\ \downarrow \pi|_{Z'} & & \downarrow \pi \\ V(J) & \hookrightarrow & \text{Spec}(A) \end{array}$$

Más aun, en Cor.1.1.10 (loc. cit.), se demuestra que Z' es el subesquema cerrado más pequeño de $B_{I_1}(A)$ que contiene a $\pi^{-1}(V(J) - V(I))$, (cf. también [12] prop. 2.3.4.).

Definición 5.- Un explotado local de A con centro I , será una fibra del

haz estructural de $B_{I_1}(A)$ en un punto cerrado de $\pi^{-1}(M)$. Un explotado formal de A con centro I será la complección respecto de su ideal maximal, de un explotado local de A con centro I . (Análogo significado se dará a una transformación monoidal o cuadrática, local y formal).

Definiremos ahora unos conceptos que usaremos también - ampliamente a lo largo de esta memoria.

Situación 6.- Sea A un anillo local, M su ideal maximal, J un ideal de A y $G = \text{gr}_M(A)$. Designaremos por J_0 al ideal homogéneo de G generado por el conjunto $\{ \text{In}_M(a) , a \in J \}$, donde por $\text{In}_M(a)$ representamos a la forma inicial de $a \in J$ para la filtración $\{ M^n \}_{n \geq 0}$. Designaremos por $\underline{o}_M(a)$ al grado del elemento a en dicha filtración, i.e.

$$a \in M^{\underline{o}_M(a)} - M^{\underline{o}_M(a) + 1}$$

Definición 7.- En la situación anterior, una base M-standard de J es un conjunto $\{f_1, \dots, f_r\}$ de elementos de J tales que, si $\xi_i = \text{In}_M(f_i)$, $i=1, \dots, r$, entonces el conjunto $\{ \xi_1, \dots, \xi_r \}$ es un sistema minimal de generadores homogéneos de J_0 .

Es fácil ver que si $\{f_1, \dots, f_r\}$ es una base M-standard de J , entonces $J = (f_1, \dots, f_r)$ (cf. [8] cap. II lema 6).

Definición 8.- Sea $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, se dice que \mathfrak{p} es permitido en A , si se verifican las dos condiciones siguientes:

- 1) A/\mathfrak{p} es regular.
- 2) $\text{gr}_{\mathfrak{p}}(A)$ es libre sobre A/\mathfrak{p} .

En [8] Cap II, Prop. 1 y Teor. 2, se demuestra el importante resultado que sigue, que nos da una caracterización de ideales permitidos.

Teorema 9.- Sea \mathcal{O} un anillo local con ideal maximal \mathfrak{m} tal que existe un anillo local regular A y un ideal J de A tal que $\mathcal{O} = A/J$ (por supuesto, $\mathfrak{m} = M/J$, donde M es el ideal maximal de A). Sea $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O})$ y $P \in \text{Spec}(A)$ tal que $\mathfrak{p} = P/J$. Las condiciones siguientes son equivalentes:

- 1) \mathfrak{p} es permitido en \mathcal{O} .
- 2) Existe una base M -standard (f_1, \dots, f_r) de J tal que

$$\underline{\omega}_{\mathfrak{p}}(f_i) = \underline{\omega}_M(f_i), \quad \forall i=1, \dots, r.$$

Definición 10.- Una transformación monoidal de un anillo local A con centro \mathfrak{p} se dice permitida, si \mathfrak{p} es permitido en A .

Nótese que las transformaciones cuadráticas son siempre permitidas ya que A/M es un cuerpo, y por tanto M es permitido en A .

SECCION 1.2 TRANSFORMADOS CUADRATICOS Y MONOIDALES DE UNA VARIEDAD ALGEBROIDE

LISA.-

En lo que sigue, k será un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica $\neq 0$.

Definición 1.- Una variedad algebroide X sobre k es el espectro de un anillo local noetheriano completo A , sin elementos nilpotentes, con k como cuerpo de coeficientes. Se dirá que X es lisa, si A es regular; en otro caso, se dirá que X es singular.

Dada una variedad algebroide $X = \text{Spec}(A)$, y una subvariedad $Y \subset X$, de ideal $I \subset A$, se llamará explotado (global, local o formal) de X con centro Y , a $\text{Spec}(A')$ donde A' es el explotado (global, local o formal resp.) de A y centro I .

En esta sección y en la que sigue dotaremos de coordenadas a una variedad algebroide de dimensión 3 (i.e. $\dim A = 3$), y obtendremos propiedades de los transformados cuadráticos y monoidales de X . En concreto, en esta sección probaremos dos teoremas, uno relativo a transformados cuadráticos y otro a monoidales.

Teorema 2.- ([13] teor.1.2.8).- Sea $X = \text{Spec}(A)$ una variedad algebroide lisa de dimensión 3. Se verifican las propiedades siguientes:

(2-1) Todo transformado cuadrático local de A es regular, de dimensión 3 y tiene k como cuerpo de coeficientes.

(2-2) Todos los transformados cuadráticos formales de A son isomorfos a A .

Demostración.- Al ser A local noetheriano regular y completo, de dimensión 3, se le puede identificar con un anillo de series formales en tres variables sobre k , digamos $A = k[[Z_1, Z_2, Z_3]]$ y sea $M = (Z_1, Z_2, Z_3)$ su ideal maximal.

Si $B = \bigoplus_{n \geq 0} M^n$, sabemos que B , como A -álgebra graduada, se puede identificar con

$$A[x_1, x_2, x_3] = A[X_1, X_2, X_3] / \sigma,$$

donde

$$\sigma = (Z_1 X_2 - Z_2 X_1, Z_1 X_3 - Z_3 X_1, Z_2 X_3 - Z_3 X_2),$$

(cf. [13] prop. 1.2.2).

Por tanto, la explosión del anillo A con centro M es

$$\pi : \text{Bl}_M(A) = \text{Proj}(A[x_1, x_2, x_3]) \longrightarrow \text{Spec}(A),$$

donde el divisor excepcional es $\pi^{-1}(M) = \text{Proj}(gr_M(A))$. Por ser A local regular de dimensión 3, se tiene que $gr_M(A) \cong k[y_1, y_2, y_3]$, donde y_1, y_2 e y_3 son variables independientes sobre k (cf. [2] teor. 11.22). Luego

$$\pi^{-1}(M) = \text{Proj}(k[y_1, y_2, y_3]) = \mathbb{P}_k^2 \text{ (plano proyectivo sobre } k).$$

Nos interesa calcular el transformado cuadrático local de A . Para ello, tomamos un punto $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{P}_k^2$ en el que se puede suponer $\alpha \neq 0$ sin pérdida de generalidad, y cuyo ideal en $\text{Proj}(k[y_1, y_2, y_3])$ es

$$P' = (\alpha y_2 - \beta y_1, \alpha y_3 - \gamma y_1, \beta y_3 - \gamma y_2).$$

Ahora bien, si $\alpha \neq 0$, es claro que también

$$P' = (\alpha y_2 - \beta y_1, \alpha y_3 - \gamma y_1).$$

La contracción de P' mediante el homomorfismo

$$\psi : B \longrightarrow gr_M(A),$$

definido por

$$\begin{cases} \varphi(a) = a + M & \forall a \in A \\ \varphi(x_i) = y_i & i=1,2,3, \end{cases}$$

(que subordina la inclusión de $\text{Proj}(\text{gr}_M(A))$ en $\text{Bl}_M(A)$), es el ideal

$$P = (\alpha x_2 - \beta x_1, \alpha x_3 - \gamma x_1, z_1, z_2, z_3)$$

(cf. por ejemplo [13] lema 1.2.4).

La cuestión se reduce a obtener la fibra del haz estructural de $\text{Proj}(B)$ en el punto P . Como $\alpha \neq 0$, entonces $P \in D_+(x_1)$. Así,

en el homeomorfismo natural de $D_+(x_1)$ sobre $\text{Spec}(B_{(x_1)}) = \text{Spec}(A[\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}])$

al ideal P corresponde el ideal

$$P_0 = (\frac{x_2}{x_1} - \frac{\beta}{\alpha}, \frac{x_3}{x_1} - \frac{\gamma}{\alpha}, z_1, z_2, z_3).$$

Se trata, pues, de estudiar el anillo local

$$A[\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}]_{P_0} = (\frac{x_2}{x_1} - \frac{\beta}{\alpha}, \frac{x_3}{x_1} - \frac{\gamma}{\alpha}, z_1, z_2, z_3).$$

Se considera para ello, el epimorfismo natural:

$$\sigma : A[T_2, T_3] \longrightarrow A[\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}],$$

donde T_2 y T_3 son indeterminadas sobre A ; se comprueba que

$$\ker \sigma = (z_1 T_2 - z_2, z_1 T_3 - z_3) A[T_2, T_3].$$

Además,

$$P_1 = \sigma^{-1}(P_0) = (T_2 - \frac{\beta}{\alpha}, T_3 - \frac{\gamma}{\alpha}, z_1, z_2, z_3) A[T_2, T_3].$$

Luego,

$$A[\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}]_{P_0} \cong \left[A[T_2, T_3] / \ker \sigma \right]_{P_1} \cong \left[A[T_2, T_3] / \ker \sigma \right]_{P_1} \cong \left[A[T_2, T_3] / \ker \sigma \right]_{P_1} \cong \left[A[T_2, T_3] / \ker \sigma \right]_{P_1}$$

Ahora bien, se tiene la siguiente cadena de resultados que concluye el teorema:

1) $A[T_2, T_3]$ es un anillo de Cohen-Macaulay (cf. [10] teor.31), de dimensión 5.

2) P_1 es un ideal maximal engendrado por 5 elementos.

3) Por tanto $A[T_2, T_3]_{P_1}$ es un anillo local regular de dimensión 5.

(cf. [16] Teor.28 Cap.VII §12).

4) También $P_1 = (T_2 - \frac{\beta}{\alpha}, T_3 - \frac{\gamma}{\alpha}, Z_1, Z_1 T_2 - Z_2, Z_1 T_3 - Z_3)$.

5) $A[T_2, T_3]_{P_1} / \ker \sigma \cdot A[T_2, T_3]_{P_1}$ es un anillo local regular de dimen-

sión 3, (cf. [16] teor.26 Cap.VII §11), en el que $\{T_2 - \frac{\beta}{\alpha}, T_3 - \frac{\gamma}{\alpha}, Z_1\}$

es un sistema regular de parámetros.

6) Es obvio que el anillo de coordenadas del transformado cuadrático local de X tiene a k como cuerpo de coeficientes, es regular y no necesariamente completo.

7) Al completar se obtiene evidentemente, que todos los anillos de coordenadas de los transformados cuadráticos formales de X son isomorfos a A .

-----o0o-----

Vamos ahora a obtener un resultado análogo para transformaciones monoidales locales y formales de A con centros permitidos de dimensión 1. Se verifica el siguiente

Teorema 3.- Sea $X = \text{Spec}(A)$ una variedad algebroide lisa de dimensión 3. Sea $I \subset A$ un ideal permitido de dimensión 1. Se verifican las propiedades siguientes:

(3-1) Todo transformado monoidal local de A con centro I es regular, de dimensión 3 y tiene a k como cuerpo de coeficientes.

(3-2) Todos los transformados monoidales formales de A con centro I son isomorfos a A .

Demostración.- Podemos suponer $A = k[[Z_1, Z_2, Z_3]]$ y designar por M al ideal maximal de A ; podemos suponer también $I = (Z_1, Z_2)A$. Designaremos por $\Pi: B_{I_1}(A) \longrightarrow \text{Spec}(A)$ a la explosión global de A con centro I .

Sea $B = \bigoplus_{n \geq 0} I^n$, que se puede identificar con la A -álgebra graduada

$$A[x_1, x_2] = A[x_1, x_2] / \alpha$$

donde x_1 y x_2 son indeterminadas sobre A , y $\alpha = (z_1 x_2 - z_2 x_1) A[x_1, x_2]$.

Por otra parte se tiene que

$$\text{gr}_1(A) = \bigoplus_{n \geq 0} (I^n / I^{n+1}) = (A/I) [z_1 + I^2, z_2 + I^2] \cong (A/I) [Y_1, Y_2]$$

donde Y_1 e Y_2 son indeterminadas sobre A/I ya que

$$0 = \sum_{i_1+i_2=p} (a_{i_1 i_2} + 1) (z_1 + I^2)^{i_1} (z_2 + I^2)^{i_2} = \sum_{i_1+i_2=p} a_{i_1 i_2} z_1^{i_1} z_2^{i_2} + I^{p+1}$$

implica que $a_{i_1 i_2} \in I$, $\forall i_1, i_2$, o lo que es lo mismo $a_{i_1 i_2} + 1 = 0$.

Un punto cerrado de $\pi^{-1}(M)$ será un ideal primo homogéneo de $\text{gr}_1(A)$ distinto del $(z_3 + I, Y_1, Y_2)$ y maximal para estas condiciones. Sea P un ideal de esta forma; debe ser $P \cap (A/I) = (z_3 + I)$, luego $(z_3 + I) \cdot (A/I)[Y_1, Y_2] \subset P$. Pero como

$$(A/I) / (z_3 + I)(A/I) = (A/I) / (M/I) \cong A/M \cong k,$$

entonces

$$(A/I)[Y_1, Y_2] / (z_3 + I) \cdot (A/I)[Y_1, Y_2] \cong k[Y_1, Y_2].$$

Así el ideal P , que contiene a $(z_3 + I) \cdot (A/I)[Y_1, Y_2]$, se amplía, mediante el homomorfismo natural $\text{gr}_1(A) \longrightarrow k[Y_1, Y_2]$, a un ideal de éste último, que es un punto cerrado de $\text{Proj}(k[Y_1, Y_2])$. Esta ampliación es necesariamente de la forma $(a_1 Y_2 - a_2 Y_1)$ con $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$, luego

$$P = (z_3 + I, a_1 Y_2 - a_2 Y_1).$$

El ideal P' de B contraído de P mediante el homomorfismo

$$\varphi : A[x_1, x_2] \longrightarrow (A/I)[Y_1, Y_2],$$

definido por

$$\begin{cases} \psi(a) = a + 1, & \text{si } a \in A, \\ \psi(x_i) = Y_i, & i=1,2. \end{cases}$$

(que induce la inclusión de $\text{Proj}(\text{gr}_1(A))$ en $\text{Proj}(B)$), es

$$P' = (a_1x_2 - a_2x_1, Z_1, Z_2, Z_3).$$

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer $a_1 \neq 0$; entonces $P' \in D_+(x_1)$.

Así, mediante el homeomorfismo canónico de $D_+(x_1)$ sobre $\text{Spec}(B_{(x_1)}) = \text{Spec}(A \left[\frac{x_2}{x_1} \right])$, al punto P' corresponde el ideal primo P_0 de $A \left[\frac{x_2}{x_1} \right]$

dado por

$$P_0 = \left(\frac{x_2}{x_1} - \frac{a_2}{a_1}, Z_1, Z_2, Z_3 \right)$$

Queda, pues, por probar que $A \left[\frac{x_2}{x_1} \right]_{P_0}$ es un anillo local regular de dimen-

sión 3, con k como cuerpo de coeficientes.

Para ello, igual que en el teorema 2, se considera el epimorfismo natural $\sigma: A[T_2] \longrightarrow A \left[\frac{x_2}{x_1} \right]$ donde T_2 es una indeterminada sobre A , cuyo núcleo es $\ker \sigma = (Z_1T_2 - Z_2)$, y

$$P_1 = \sigma^{-1}(P_0) = \left(T_2 - \frac{a_2}{a_1}, Z_1, Z_2, Z_3 \right).$$

Entonces

$$(1) \quad A \left[\frac{x_2}{x_1} \right]_{P_0} \cong \left[A[T_2] / \ker \sigma \right]_{P_1 / \ker \sigma} \cong \left[A[T_2]_{P_1} \right] / \ker \sigma \cdot A[T_2]_{P_1}$$

Luego se tienen los siguientes hechos, que prueban el teorema:

- 1) $A[T_2]$ es un anillo de Cohen-Macaulay de dimensión 4.
- 2) P_1 es un ideal maximal engendrado por 4 elementos.
- 3) Por tanto $A[T_2]_{P_1}$ es un anillo local regular de dimensión 4.

4) Teniendo en cuenta (1), se tiene que $A \left[\frac{x_2}{x_1} \right]_{P_0}$ es un anillo local re-

gular de dimensión 3, por ser $P_1 = (T_2 - \frac{a_2}{a_1}, Z_1 T_2 - Z_2, Z_1, Z_3)$, y

que contiene a k como cuerpo de coeficientes.

c.q.d.

SECCION 1.3.-TRANSFORMADOS CUADRATICOS Y MONOIDALES DE UNA SUPERFICIE ALGEBROIDE SUMERGIDA.-

Definición 1.- Una superficie algebroides S, sumergida, (SAS) sobre k, es el espectro de un anillo local noetheriano completo \hat{D} , con k como cuerpo de coeficientes, de dimensión 2 y dimensión de inmersión no superior a 3. Se dirá que S es irreducible, si \hat{D} es un dominio de integridad, y se dirá que S es reducida, si el nilradical de \hat{D} es el (0). (Se supondrá siempre que el ideal (0) de \hat{D} es puro.

Usualmente se operará con superficies algebroides singulares. Así, salvo mención en caso contrario, se supondrá siempre:

Nota 2.- Sea $S = \text{Spec}(\hat{D})$ una SAS y $\mathfrak{m} \subset \hat{D}$ el ideal maximal, entonces $\mathfrak{m} = (x_1, x_2, x_3)$ por ser $\dim. \text{inm. } \hat{D} = 3$. Así, considerando el k-homomorfismo suprayectivo local $\psi: k[[z_1, z_2, z_3]] \longrightarrow \hat{D}$ definido por $\psi(z_i) = x_i, i=1,2,3$, se tiene que

$$\hat{D} \approx k[[z_1, z_2, z_3]] / \mathfrak{a}$$

donde \mathfrak{a} es un ideal principal de $k[[z_1, z_2, z_3]]$ ya que $\text{alt } \mathfrak{a} = 1$, por ser $k[[z_1, z_2, z_3]]$ de Cohen-Macaulay y $\dim \hat{D} = 2$.

Sea $\mathfrak{a} = (f(z_1, z_2, z_3))$; en este caso, diremos que $f(z_1, z_2, z_3) = 0$ es la ecuación de S relativa a la inmersión de esquemas

afines determinada por φ . En adelante, identificaremos los anillos \mathbb{D} y $k[[Z_1, Z_2, Z_3]] / (f(Z_1, Z_2, Z_3))$, cuando operemos con la misma inmersión.

Nuestro propósito en esta sección es calcular las ecuaciones de los transformados cuadráticos y monoidales formales de S .

Nota 3. - Sean $A = k[[Z_1, Z_2, Z_3]]$, $M = (Z_1, Z_2, Z_3)A$, $B = \bigoplus_{n \geq 0} M^n$ y

$B' = \bigoplus_{n \geq 0} \pi^n$. Se tiene que B (resp. B') es una A -álgebra (resp. \mathbb{D} -álgebra) graduada, engendrada por tres elementos de grado 1. Así, si $\{X_1, X_2, X_3\}$ son indeterminadas, se tienen epimorfismos

$$\begin{array}{ccc} A[X_1, X_2, X_3] & \longrightarrow & B \\ \mathbb{D}[X_1, X_2, X_3] & \longrightarrow & B' \end{array} .$$

Designemos por x_i (resp. \bar{x}_i), $i=1,2,3$, a la imagen de X_i en el primer (resp. segundo) epimorfismo; se tiene entonces que

$$B = A[x_1, x_2, x_3] \quad , \quad B' = \mathbb{D}[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3]$$

De otro lado, el epimorfismo

$$\lambda' : A[X_1, X_2, X_3] \longrightarrow \mathbb{D}[X_1, X_2, X_3]$$

que reduce los coeficientes módulo (f) induce un epimorfismo $\lambda : B \longrightarrow B'$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A[X_1, X_2, X_3] & \xrightarrow{\lambda'} & \mathbb{D}[X_1, X_2, X_3] \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\lambda} & B' \end{array}$$

es conmutativo.

Vamos a determinar el núcleo de λ ; para ello se procederá como sigue. Sea $\nu = \underline{\nu}_M(f)$; para cada entero p , $1 \leq p \leq \nu$, se reordenará f en la forma

$$f(Z_1, Z_2, Z_3) = \sum_{i_1+i_2+i_3=p} a_{i_1 i_2 i_3} (Z_1, Z_2, Z_3) Z_1^{i_1} Z_2^{i_2} Z_3^{i_3}$$

y, cuando esté así escrita, se la designará por $f_p(Z_1, Z_2, Z_3)$. Es importante notar que, para p fijo, esta reordenación de f se puede hacer de varias maneras. Pongamos en el caso anterior,

$$f_p(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i_1+i_2+i_3=p} a_{i_1 i_2 i_3} (Z_1, Z_2, Z_3) x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}$$

con estas notaciones es muy fácil comprobar que

$$\ker \lambda = (f(Z_1, Z_2, Z_3), f_1(x_1, x_2, x_3), \dots, f_\nu(x_1, x_2, x_3)) B$$

y que la ambigüedad en la forma de escribir cada $f_i(x_1, x_2, x_3)$ no tiene relevancia alguna.

Nota 4.- Si $x_1 \notin \sqrt{\ker \lambda}$ el homomorfismo λ se puede extender, de manera natural a un homomorfismo $\bar{\lambda}: B_{x_1} \longrightarrow B'_{x_1}$ graduado de grado cero.

A su vez $\bar{\lambda}$ se restringe a un homomorfismo $\lambda_0: B_{(x_1)} \longrightarrow B'_{(x_1)}$

que es un epimorfismo de núcleo

$$\ker \lambda_0 = \left(\frac{f}{1}, \frac{f_1(x_1, x_2, x_3)}{x_1}, \frac{f_2(x_1, x_2, x_3)}{x_1^2}, \dots, \frac{f_\nu(x_1, x_2, x_3)}{x_1^\nu} \right)$$

y, teniendo en cuenta que $Z_1 x_j - Z_j x_1 = 0$, $j=2,3$, es

$$\ker \lambda_0 = \left(\frac{f_\nu(x_1, x_2, x_3)}{x_1^\nu} \right).$$

Se tiene pues:

$$B'_{(x_1)} = \mathcal{D} \left[\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1}, \frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_1} \right] \approx A \left[\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1} \right] / \left(\frac{f_\nu(x_1, x_2, x_3)}{x_1^\nu} \right) = B_{(x_1)} / \left(\frac{f_\nu(x_1, x_2, x_3)}{x_1^\nu} \right)$$

Nota 5.- El homomorfismo $\lambda: B \longrightarrow B'$ de la nota anterior, induce una inmersión cerrada de esquemas

$$\phi: \text{Proj}(B') \hookrightarrow \text{Proj}(B)$$

y se tiene $\text{Spec}(B'_{(x_1)}) = \text{Proj}(B') \cap \text{Spec}(B_{(x_1)})$.

De otro lado, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Proj}(B') & \xrightarrow{\phi} & \text{Proj}(B) \\ \downarrow \bar{\pi} & & \downarrow \pi \\ \text{Spec}(\bar{D}) & \xrightarrow{\quad} & \text{Spec}(A) \end{array},$$

donde π y $\bar{\pi}$ son las transformaciones cuadráticas globales de A y \bar{D} respectivamente. En consecuencia $\bar{\pi}^{-1}(\pi \nu) = \pi^{-1}(M) \cap \text{Proj}(B')$.

De otro lado,

$$\bar{\pi}^{-1}(\pi \nu) = \text{Proj}(\text{gr}_{\pi \nu}(\bar{D})) = \text{Proj}(k[Z_1, Z_2, Z_3] / (\bar{f}))$$

donde \bar{f} es la forma inicial ordinaria de f . Así; $\bar{\pi}^{-1}(\pi \nu)$ es una curva en el plano proyectivo.

Sea $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{P}_k^2$ un punto cerrado de $\bar{\pi}^{-1}(\pi \nu)$;

sin pérdida de generalidad se puede suponer $\alpha \neq 0$, con lo cual su ideal en B' pertenece a $D_+(\bar{x}_1)$. De manera análoga a lo visto en § 1.2, al punto (α, β, γ) corresponde en

$$\text{Spec}(B'_{(\bar{x}_1)}) = \text{Spec}\left(\bar{D}\left[\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1}, \frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_1}\right]\right)$$

el ideal

$$P_1 = \left(\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1} - \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_1} - \frac{\gamma}{\alpha}, Z_1, Z_2, Z_3\right).$$

Nota 6.- Por otra parte, se comprueba fácilmente (cf. por ejemplo [13] prop. 1.3.14) que

$$A\left[\frac{Z_2}{Z_1}, \frac{Z_3}{Z_1}\right] \cong A\left[\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right],$$

identificándolos, queda $P = \lambda_0^{-1}(P_1) = \left(\frac{Z_2}{Z_1} - \frac{\beta}{\alpha}, \frac{Z_3}{Z_1} - \frac{\gamma}{\alpha}, Z_1\right)$ y

$$\bar{D}\left[\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1}, \frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_1}\right] \cong \frac{A\left[\frac{Z_2}{Z_1}, \frac{Z_3}{Z_1}\right]}{\left(\frac{f_{\nu}(Z_1, Z_2, Z_3)}{Z_1^{\nu}}\right)}$$

Entonces el anillo de coordenadas del transformado cuadrático local es

$$\mathcal{O} \left[\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1}, \frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_1} \right]_{P_1} \approx \frac{A \left[\frac{z_2}{z_1}, \frac{z_3}{z_1} \right]_P}{\left(\frac{f(z_1, z_2, z_3)}{z_1} \right) \cdot A \left[\frac{z_2}{z_1}, \frac{z_3}{z_1} \right]_P}$$

Vimos en la sección anterior que $A \left[\frac{z_2}{z_1}, \frac{z_3}{z_1} \right]_P$ es un anillo local regular

de dimensión 3 que tiene a $\left\{ z_1, \frac{z_2}{z_1} - \frac{\beta}{\alpha}, \frac{z_3}{z_1} - \frac{\gamma}{\alpha} \right\}$ como un sistema regular de parámetros; por tanto podemos hacer la identificación

$$A \left[\frac{z_2}{z_1}, \frac{z_3}{z_1} \right]_P = k[[z'_1, z'_2, z'_3]]$$

$$\text{con } z'_1 = z_1, \quad z'_2 = \frac{z_2}{z_1} - \frac{\beta}{\alpha}, \quad z'_3 = \frac{z_3}{z_1} - \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Entonces si ponemos $f(z_1, z_2, z_3) = \sum_{p \geq \nu} f'_p(z_1, z_2, z_3)$ donde $f'_p(z_1, z_2, z_3)$

es bien una forma de grado p , bien cero, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{f(z_1, z_2, z_3)}{z_1^\nu} &= \sum_{p \geq \nu} \frac{f'_p(z_1, z_1(z'_2 + \frac{\beta}{\alpha}), z_1(z'_3 + \frac{\gamma}{\alpha}))}{z_1^\nu} = \\ &= f'_\nu(1, z'_2 + \frac{\beta}{\alpha}, z'_3 + \frac{\gamma}{\alpha}) + z'_1 f'_{\nu+1}(1, z'_2 + \frac{\beta}{\alpha}, z'_3 + \frac{\gamma}{\alpha}) + \dots = f'(z'_1, z'_2, z'_3). \end{aligned}$$

En suma, el transformado cuadrático formal del anillo de la superficie S es

$$S' = \text{Spec} \left(\frac{k[[z'_1, z'_2, z'_3]]}{(f'(z'_1, z'_2, z'_3))} \right).$$

Nótese que para que $f'(z'_1, z'_2, z'_3)$ no sea unidad, es necesario y suficiente que $f'_\nu(1, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}) = 0$, o lo que es lo mismo, que $f'_\nu(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. Entonces los puntos del divisor excepcional, están en correspondencia biunívoca con los ceros de $f'_\nu(z_1, z_2, z_3)$, forma inicial de $f(z_1, z_2, z_3)$.

A la ecuación $f'(Z_1', Z_2', Z_3') = 0$, la llamaremos ecuación transformada cuadrática de la $f(Z_1, Z_2, Z_3) = 0$ por la explosión $\pi_{(\alpha, \beta, \gamma)}^{(1)}$.

Por otra parte, si también $\beta \neq 0$ en el punto (α, β, γ) , al considerar la pieza afín $D_+(\bar{x}_2)$ de $\text{Bl}_m(\square)$, obtenemos otro transformado cuadrático formal, mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} Z_1' &= \frac{Z_1}{Z_2} - \frac{\alpha}{\beta} \\ Z_2' &= Z_2 \\ Z_3' &= \frac{Z_3}{Z_2} - \frac{\gamma}{\beta} \end{aligned} ,$$

de forma que este transformado cuadrático formal es

$$S'' = \text{Spec} \left(\frac{k[[Z_1', Z_2', Z_3']]}{(f'(Z_1', Z_2', Z_3'))} \right) ,$$

donde ahora

$$f'(Z_1', Z_2', Z_3') = f'_\nu \left(Z_1' + \frac{\alpha}{\beta}, 1, Z_3' + \frac{\gamma}{\beta} \right) + f'_{\nu+1} \left(Z_1' + \frac{\alpha}{\beta}, 1, Z_3' + \frac{\gamma}{\beta} \right) Z_2' + \dots$$

a la que se llama ecuación transformada cuadrática de $f(Z_1, Z_2, Z_3) = 0$ por la explosión $\pi_{(\alpha, \beta, \gamma)}^{(2)}$. Obviamente S' y S'' son isomorfos como esquemas afines.

La transformación $\pi_{(\alpha, \beta, \gamma)}^{(3)}$ se haría de un modo análogo.

Situación 7.- Sean $A = k[[Z_1, Z_2, Z_3]]$, \mathfrak{M} su ideal maximal, $f(Z_1, Z_2, Z_3) \in A$, $\square = A / (f(Z_1, Z_2, Z_3))$ y $\mathfrak{O}_{\mathfrak{M}}(f) = \mathfrak{V}$. Si $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\square)$ es de dimensión uno y permitido en \square , se puede siempre suponer, mediante un cambio de coordenadas, que $\mathfrak{p} = (Z_1, Z_2) / (f)$ donde $f \in (Z_1, Z_2)^{\mathfrak{V}}$. Pongamos $I = (Z_1, Z_2)A$. Pretendemos construir los transformados monoidales formales de \square con centro el ideal permitido \mathfrak{p} .

Nota 8.- Sean $B = \bigoplus_{n \geq 0} I^n$ y $B' = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{p}^n$; entonces, de forma análoga a la nota 3, tenemos que $B = A[x_1, x_2]$, $B' = \square[\bar{x}_1, \bar{x}_2]$ y un homomorfis-

mo $\lambda: B \rightarrow B'$ definido por

$$\begin{cases} \lambda(a) = a + (f) & \forall a \in A \\ \lambda(x_i) = (\bar{x}_i), & i=1,2 \end{cases}$$

Como $f \in I^{\nu}$ se puede reordenar, para $p, 1 \leq p \leq \nu$, en la forma.

$$f(z_1, z_2, z_3) = \sum_{i_1+i_2=p} f_{i_1 i_2}(z_1, z_2, z_3) z_1^{i_1} z_2^{i_2} .$$

Así pondremos

$$f_p(x_1, x_2) = \sum_{i_1+i_2=p} f_{i_1 i_2}(z_1, z_2, z_3) x_1^{i_1} x_2^{i_2} .$$

Se ve fácilmente, entonces, que

$$\ker \lambda = (f, f_1(x_1, x_2), \dots, f_{\nu}(x_1, x_2)) B .$$

Nota 9.- Si $x_1 \notin \sqrt{\ker \lambda}$ el homomorfismo λ se puede extender, de manera natural, a un homomorfismo

$$\bar{\lambda}: B_{x_1} \longrightarrow B'_{\bar{x}_1} .$$

A su vez $\bar{\lambda}$ se restringe a un homomorfismo

$$\lambda_0: B_{(x_1)} \longrightarrow B'_{(\bar{x}_1)}$$

que es suprayectivo y de núcleo

$$\ker \lambda_0 = \left(\frac{f}{1}, \frac{f_1(x_1, x_2)}{x_1}, \frac{f_2(x_1, x_2)}{x_1^2}, \dots, \frac{f_{\nu}(x_1, x_2)}{x_1} \right) .$$

Pero, puesto que $Z_1 x_2 - Z_2 x_1 = 0$, se tiene que

$$\ker \lambda_0 = \left(\frac{f_{\nu}(x_1, x_2)}{x_1^{\nu}} \right) .$$

Así se tiene que

$$D \left[\begin{array}{c} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \end{array} \right] \approx \frac{A \left[\begin{array}{c} x_2 \\ x_1 \end{array} \right]}{\left(\frac{f_{\nu}(x_1, x_2)}{x_1^{\nu}} \right)}$$

Nota 10.- El homomorfismo $\lambda: B \rightarrow B'$ de la nota anterior, induce una

inmersión cerrada de esquemas $\phi : \text{Proj}(B') \hookrightarrow \text{Proj}(B)$, de tal modo que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Proj}(B') & \xrightarrow{\phi} & \text{Proj}(B) \\ \downarrow \bar{\pi} & & \downarrow \pi \\ \text{Spec}(\bar{U}) & \xrightarrow{\quad} & \text{Spec}(A) \end{array}$$

es conmutativo, siendo $\bar{\pi}$ y π las transformaciones monoidales globales de A y \bar{U} con centros I y \mathfrak{p} respectivamente. Se tiene además que

$$\bar{\pi}^{-1}(V(\mathfrak{p})) = \text{Proj}(B') \cap \pi^{-1}(V(I)).$$

Según vimos en la § 1.2, a un punto del divisor excepcional de $\text{Spec}(A)$ le correspondía un ideal de $(A/I)[Y_1, Y_2]$ de la forma

$$P' = (Z_3 + I, a_1 Y_2 - a_2 Y_1)$$

donde $a_i \in k$ ($i=1,2$), (supongamos $a_1 \neq 0$).

También en la sección 1.2, al ideal P' le corresponde en $B_{(x_1)}$ el ideal

$$P_0 = \left(\frac{x_2}{x_1} - \frac{a_2}{a_1}, Z_1, Z_2, Z_3 \right),$$

que a su vez se transforma en $P'_0 = \lambda_0(P_0)$ de $B'_{(x_1)}$, siendo

$$P'_0 = \left(\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1} - \frac{a_2}{a_1}, Z_1, Z_3 \right).$$

Nótese que

$$\text{gr}_{\mathfrak{p}}(\bar{U}) \simeq \frac{\text{gr}_1(A)}{(f'_v(Y_1, Y_2, Z_3+I))},$$

donde por $f'_v(Z_1, Z_2, Z_3)$ representamos ahora los términos de $f(Z_1, Z_2, Z_3)$ cuyos exponentes de Z_1 y Z_2 suman v exactamente, y para que P' sea un pto de $\text{Proj}(\text{gr}_{\mathfrak{p}}(\bar{U}))$ debe cumplirse que $P' \supset (f'_v(Y_1, Y_2, Z_3+I))$, es decir, que $f'_v(a_1, a_2, 0) = 0$.

Nota 11.- Como en la Nota 6 se tiene que $A \begin{bmatrix} Z_2 \\ Z_1 \end{bmatrix}$ es isomorfo a $A \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$,

identificándolos, se tiene que $P_0 = \left(\frac{Z_2}{Z_1} - \frac{a_2}{a_1}, Z_1, Z_2, Z_3 \right)$ y que

$$\mathcal{O} \begin{bmatrix} \overline{x_2} \\ \overline{x_1} \end{bmatrix}_{P_0} \approx \frac{A \begin{bmatrix} z_2 \\ z_1 \end{bmatrix}_{P_0}}{\left(\frac{f(z_1, z_2, z_3)}{z_1^v} \right) \cdot A \begin{bmatrix} z_2 \\ z_1 \end{bmatrix}_{P_0}}$$

Pero según vimos en la sección 1.2, $A \begin{bmatrix} z_2 \\ z_1 \end{bmatrix}_{P_0}$ es un anillo local regular

de dimensión 3, siendo $\left\{ \frac{z_2}{z_1} - \frac{a_2}{a_1}, z_1, z_3 \right\}$ un sistema regular de parámetros.

Por tanto, completando, podemos hacer la siguiente identificación

$$\widehat{A \begin{bmatrix} z_2 \\ z_1 \end{bmatrix}_{P_0}} = k[[z_1', z_2', z_3']],$$

haciendo $z_1' = z_1$, $z_2' = \frac{z_2}{z_1} - \frac{a_2}{a_1}$, $z_3' = z_3$.

En suma, un transformado monoidal de la superficie S es

$$S' = \text{Spec} \left(\frac{k[[z_1', z_2', z_3']]}{\left(f'(z_1', z_2', z_3') \right)} \right)$$

donde

$$f'(z_1', z_2', z_3') = \frac{f(z_1', z_1'(z_2' + \frac{a_2}{a_1}), z_3')}{z_1'^v} = 0$$

se dice la ecuación transformada monoidal de la $f(z_1, z_2, z_3) = 0$ en el punto (a_1, a_2) del divisor excepcional.

Por último, con vista a aplicar sucesivas transformaciones cuadráticas y monoidales formales a una superficie algebroide reducida, tendremos en cuenta los siguientes resultados:

Proposición 12.- (Cf. 13 prop. 1.3.19). - Si \mathcal{O} es un anillo local noetheriano, cuyo nilradical es (0) , entonces todo transf. cuadrático formal de \mathcal{O} tiene también como nilradical el (0) .

El resultado análogo para transformaciones monoidales

también es cierto, y su demostración no varía esencialmente de la dada para la proposición anterior en la referencia citada.

Terminología 13.- a) En lo que sigue, salvo que se haga mención expresa, siempre que se hable de superficies algebroides sumergidas, se sobreentenderán reducidas.

b) Cuando se mencionen transformaciones cuadráticas y monoidales, sin especificar nada, nos referiremos siempre a transformaciones cuadráticas y monoidales formales.

c) También diremos transf. cuadrática en el punto P , para señalar que la explosión con centro el origen se ha localizado en el ideal de P .

SECCION 1.4.- RESOLUCION DE SINGULARIDADES DE SUPERFICIES ALGEBROIDES SUMER-
GIDAS.-

En este apartado pretendemos resumir, brevemente, unos resultados puntuales sobre resolución de singularidades, que se encuentran en [13] y [12]. En el primero se trata de SAS sobre cuerpos de característica cero y en el segundo de hipersuperficies algebroides sobre cuerpos de característica arbitraria.

Situación 1.- Sea X una superficie algebraica en el espacio proyectivo de dimensión 3 sobre k y $x \in X$ un punto cerrado. Consideremos la fibra $\mathcal{O}_{X,x}$ del haz estructural de X , y el completado $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$, cuyo espectro es una SAS sobre k .

Sea $\pi_x : X' \longrightarrow X$ la explosión de X con centro x ; se sabe que π_x induce un isomorfismo

$$\pi_x \Big|_{X' - \pi_x^{-1}(x)} : X' - \pi_x^{-1}(x) \longrightarrow X - \{x\} ,$$

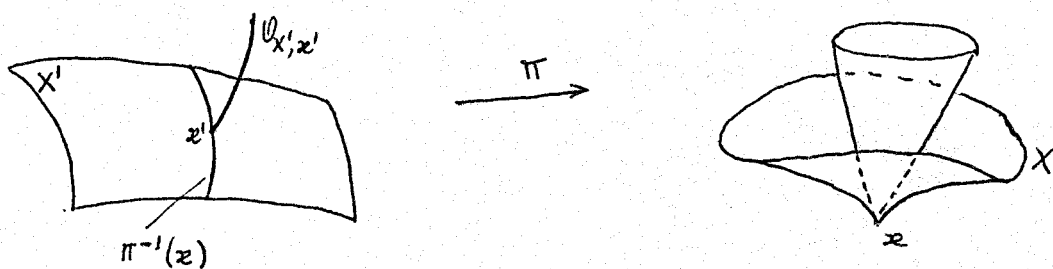
y además que $\pi_x^{-1}(x)$ es un divisor en X' , el divisor excepcional, cuyos puntos estan en correspondencia biunívoca natural con las direcciones tangentes a X en el punto x (cono tangente de X en el punto x). Esto nos permite dar una interpretación geométrica de las transformaciones

cuadráticas de superficies algebroides, a saber:

Sea $x' \in \pi_x^{-1}(x)$ un punto del divisor excepcional de $S = \text{Spec}(\mathbb{D})$; entonces la superficie algebroides $S' = \text{Spec}(\mathbb{D}')$, con $\mathbb{D}' = \widehat{\mathcal{O}}_{X', x'}$ es la transformada cuadrática de S en aquel punto del divisor excepcional, que corresponde la misma dirección tangente a X en x a la que corresponde x' .

Así, los transformados cuadráticos de S , son la colección de superficies algebroides

$$\{ S_{x'} = \text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{X', x'}) \mid x' \in \pi_x^{-1}(x) \} .$$



La situación con las transformaciones monoidales de X , con centros permitidos es, salvando las distancias impuestas por la mayor dimensión del centro de explosión, análoga a la anterior.

Así, las cadenas de transformados cuadráticos (o monoidales) de una superficie algebroides se pueden interpretar como sucesiones de puntos que van cada uno sobre el anterior, en una sucesión de explosiones permitidas (de centros permitidos) de la superficie algebraica X .

En resumen, en un proceso de resolución de singularidades de X , hay una contrapartida puntual, i.e. algebroides, que formará parte de nuestro estudio.

En esta situación, podemos exponer los resultados a que nos referíamos al principio de esta sección de [12] y [13].

En [13] Cap II, § 2, se demuestra un resultado que se resumiría en el siguiente

Teorema 1.- Sea X una superficie algebraica en el espacio proyectivo tridimensional sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado y de caracterís-

tica cero, y x un punto de X de dimensión cero. Entonces existe una sucesión finita de transformaciones cuadráticas globales de X

$$X_r \xrightarrow{\Pi_r} X_{r-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\Pi_1} X_0 = X$$

con centros respectivos $\{x_i\}_{i=0, \dots, r-1}$, donde $x_0 = x$, $\Pi_i(x_i) = x_{i-1}$, y un punto $x_r \in X_r$, con $\Pi_r(x_r) = x_{r-1}$, que es un punto no singular de X_r .

El enunciado, equivalente algebroide, que se encuentra en la citada referencia, dice así

Teorema 1'.- (de desingularización de una superficie algebroide).- Dada una SAS S , existe una sucesión finita S_0, S_1, \dots, S_r de SAS, tales que:

- 1°) $S_0 = S$.
- 2°) $\forall i=1, \dots, r$, S_i es una transformada cuadrática de S_{i-1} .
- 3°) S_r es lisa.

En [12] Cap III, se generaliza el teorema anterior a hipersuperficies sobre cuerpos de característica arbitraria. Este era el objetivo central de [12] que podría, en lenguaje usual, expresarse como sigue:

Teorema 2.- Sea X una hipersuperficie algebraica del espacio proyectivo n -dimensional, sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado de característica arbitraria. Existe una sucesión finita de transformaciones cuadráticas

de X , $X_r \xrightarrow{\Pi_r} X_{r-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\Pi_1} X_0 = X$, con centros respectivos $\{x_i\}_{i=0, \dots, r-1}$, $x_0 = x$, $\Pi_i(x_i) = x_{i-1}$ y un punto $x_r \in X_r$ con $\Pi_r(x_r) = x_{r-1}$ tal que x_r es un punto no singular de X_r .

Omitimos el enunciado algebroide de [12] ya que es clara su redacción. Consideramos que la demostración dada en [12] puede hacerse más clara y brevemente para nuestro caso de superficies, por ello dedicaremos en el capítulo 2° de nuestra memoria unas pocas páginas para probar este teorema.

En los dos trabajos [12] y [13], en las demostraciones de estos teoremas, se opera por recurrencia. Por tanto, basta probar que, dada una superficie algebroide, después de un número finito de transformaciones cuadráticas, la superficie algebroide ha reducido su multiplicidad.

A la vista de estos resultados, el problema que nos interesa estudiar, la resolución de singularidades de X , no puede decirse que está resuelto. Más aun, quedan preguntas importantísimas por contestar, por ejemplo, ¿qué se puede decir sobre la totalidad de los puntos de X_r que van sobre x_0 mediante la composición $\pi_r \cdot \pi_{r-1} \cdots \pi_1$? Y aun cuando se pudiera afirmar que todos ellos son puntos simples (lo que no ocurre salvo en contados casos) ¿qué sucede con el resto de las singularidades de X ? Nuestro trabajo está orientado a contestar en parte a estas preguntas.

Por último, daremos un teorema, que usaremos más adelante, y que da importante información acerca de la evolución de las subvariedades singulares de una SAS.

Definición 3.- Se llama lugar singular de una SAS $S = \text{Spec}(\mathcal{O})$, y se representa por $\text{Sing}(S)$, al subconjunto de S definido por

$$\text{Sing}(S) = \{ p \in S = \text{Spec}(\mathcal{O}) \mid \mathcal{O}_p \text{ no es regular} \}.$$

En estas circunstancias se tiene el siguiente

Teorema 4.- ([10] teor.74) $\text{Sing}(S)$ es cerrado en $S = \text{Spec}(\mathcal{O})$.

Teorema 5.- Sea S una SAS cuyo cono tangente se reduce a un único plano y que tiene un punto singular aislado. Entonces, para cualquier transformada cuadrática S' de S , se verifica que el lugar singular de S' es el vacío, un punto, o una curva lisa (por tanto irreducible).

Demostración.- Sea $S = \text{Spec}(\mathcal{O})$ y π el ideal maximal de \mathcal{O} . Sea

$\pi: \text{Bl}_{\pi}(\mathcal{O}) \longrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O})$ la transformación cuadrática global de \mathcal{O} .

Se sabe que π induce un isomorfismo

$$\pi \Big|_{\text{Bl}_{\pi}(\mathcal{O}) - \pi^{-1}(\pi)} : \text{Bl}_{\pi}(\mathcal{O}) - \pi^{-1}(\pi) \longrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}) - \{\pi\}$$

y como $\text{Sing}(S) = \{\pi\}$, está claro que

$$\text{Sing}(Bl_{\pi}(\mathcal{D})) \subset \pi^{-1}(\pi)$$

el divisor excepcional. Pero $\text{Sing}(Bl_{\pi}(\mathcal{D}))$ es cerrado en $Bl_{\pi}(\mathcal{D})$ y $\pi^{-1}(\pi)$ es una recta proyectiva, por tanto $\text{Sing}(Bl_{\pi}(\mathcal{D}))$ es, bien el vacío, bien un número finito de puntos, bien $\pi^{-1}(\pi)$. Como los transformados cuadráticos de \mathcal{D} son los completados (y compleción conserva multiplicidad) de las fibras del haz estructural de $Bl_{\pi}(\mathcal{D})$ en los puntos cerrados de $\pi^{-1}(\pi)$, se tiene el teorema.

SECCION 1.5.- TEOREMAS DE ESTRUCTURA DE LOS CAMINOS ESTACIONARIOS DE SAS
(CARACTERISTICA CERO).-

En la memoria [13] Cap III y en [14], se da un paso más en los problemas que planteábamos en la sección anterior. En los citados trabajos, se estudia la estructura de las cadenas de transformaciones cuadráticas que no reducen la multiplicidad de una SAS sobre cuerpos algebraicamente cerrados y de característica cero (es bien conocida la existencia de estas cadenas). En ellos se demuestra que, en algún paso de la cadena, (y por ende, en infinitos) la transformación cuadrática se hace en puntos correspondientes a direcciones tgs. a curvas permitidas de la SAS.

Escuétamente resumimos estos resultados.

Definición 1.- Sea S una SAS, un camino estacionario para S , es una sucesión de pares $\{(S_i, P_i)\}_{i \in \mathbb{Z}_0}$ verificando:

- 1) $\forall i \in \mathbb{Z}_0$, S_i es una SAS y P_i es un punto del divisor excepcional de S_i .
- 2) $S_0 = S$ y $\forall i \in \mathbb{Z}_0$, S_{i+1} es la transformada cuadrática de S_i en P_i .
- 3) Todas las superficies S_i , $\forall i \in \mathbb{Z}_0$, poseen la misma multiplicidad.

Más aun, se da una definición de camino estacionario de-

pendiente de las ecuaciones de la superficie:

Definición 2.- Sea S una SAS y $f(X,Y,Z) = 0$ una ecuación de S con $f(X,Y,Z) \in k[[X,Y,Z]]$. Un camino estacionario para la ecuación $f(X,Y,Z)=0$ de S es una sucesión de pares $\{f^{(i)}(X_i, Y_i, Z_i), P_i\}_{i \in Z_0}$ más una

aplicación $\sigma: Z_0 \longrightarrow \{1,2,3\}$ de tal manera que:

- 1) $\forall i \in Z_0$, $f^{(i)}(X_i, Y_i, Z_i) \in k[[X_i, Y_i, Z_i]]$ y P_i es punto cerrado de \mathbb{P}_k^2 que anula a la forma inicial de $f^{(i)}(X_i, Y_i, Z_i)$ (i.e., P_i es un punto del divisor excepcional de S_i).
- 2) $f^{(0)}(X_0, Y_0, Z_0) = f(X, Y, Z)$ siendo $X_0=X$, $Y_0=Y$, $Z_0=Z$.
- 3) $\forall i \in Z_0$, la coordenada de P_i que ocupa el lugar $\sigma(i)$ es no nula.
- 4) $\forall i \in Z_0$, $f^{(i+1)}(X_{i+1}, Y_{i+1}, Z_{i+1}) = 0$ es la ecuación transformada cuadrática de $f^{(i)}(X_i, Y_i, Z_i) = 0$ por $\prod_{P_i}^{(\sigma(i))}$.
- 5) Todas las series $f^{(i)}(X_i, Y_i, Z_i)$ poseen el mismo orden.

Se establece una relación de equivalencia para caminos estacionarios de ecuaciones de una misma superficie, de un modo natural: se dice que dos caminos estacionarios para ecuaciones son equivalentes, si existe un cambio de coordenadas que transforma una ecuación en otra y que se prolonga del mismo modo a los demás pasos del camino. Así se demuestra en [13] teor.3.1.10 que, existe una correspondencia biunívoca entre caminos estacionarios para una superficie S (def.1) y clases de equivalencia de caminos estacionarios para ecuaciones de S (def.2).

Existe una clase distinguida de caminos estacionarios, que juega un papel importante, la de aquellos caminos estacionarios en los que $P_i = P$, $\forall i \in Z_0$, a los que se llama puntos estacionarios. Nos encontramos así, con un primer teorema de estructura, que liga los puntos estacionarios con las curvas permitidas (correspondientes a ideales permitidos de dimensión 1). El enunciado es el siguiente:

Teorema 3.-([13] teor.3.2.7)..- Sea S una SAS, se verifican las siguientes propiedades:

- 1) Existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de clases de equivalencia de caminos estacionarios para ecuaciones de S que contienen a un punto estacionario y el conjunto de curvas permitidas de S .
- 2) La correspondencia anterior verifica lo siguiente: si

$$\mathcal{C} = \left[\sigma, \{ f^{(i)}(x_i, y_i, z_i), P_i \} \quad i \in Z_0 \right]$$

es un camino estacionario equivalente a un punto, para la ecuación $f^{(0)}(x_0, y_0, z_0) = 0$ de S , entonces:

- a) La curva de S en $\mathbb{D} = \frac{k[[x_0, y_0, z_0]]}{(f^{(0)}(x_0, y_0, z_0))}$

correspondiente por 1) a la clase de equivalencia de \mathcal{C} , es tangente a la recta tangente a la superficie determinada por P_0 .

- b) $\forall i > 0$, llamando

$$S_i = \text{Spec} \left(\frac{k[[x_i, y_i, z_i]]}{(f^{(i)}(x_i, y_i, z_i))} \right),$$

la curva de S_i correspondiente por 1) a la clase del camino estacionario

$$\mathcal{C}_i = \left[\sigma', \{ f^{(j)}(x_j, y_j, z_j), P_j \} \quad j \geq i \right],$$

$\sigma' = \sigma|_{Z_0 - \{0, 1, \dots, i-1\}}$, es tangente a la recta tangente a la superficie determinada por P_i .

Dos resultados importantes relativos a superficies cuyo cono tangente no se reduce a un plano único, se obtienen más adelante. El primero consiste en demostrar que una tal superficie, contiene a lo más un camino estacionario, y en caso de que exista éste, la clase de caminos estacionarios para ecuaciones correspondiente, contiene un punto estacionario (cf. [13] teor.3.3.8).

El segundo, abundando en esta última posibilidad, des-

cribe la estructura geométrica de estas superficies. El enunciado es como sigue:

Teorema 4.- ([13] teor.3.3.10).- Sea S una SAS cuyo cono tangente no consta de un plano único; supongamos que S posee un camino estacionario, y sea C la curva permitida contenida en S , correspondiente. Entonces S es unión finita de superficies S_1, S_2, \dots, S_t , $t > 1$, que verifican:

- 1) Todas las superficies S_i poseen un plano tangente único.
- 2) Los planos tangentes a las S_i son distintos dos a dos.
- 3) La curva C está contenida en cada S_i con multiplicidad igual a la de S_i ; en otras palabras, cada S_i posee un punto estacionario para una ecuación de S_i .

Por último, en [14] teor.11 del mismo autor, se demuestra el resultado al que hacíamos referencia al comienzo de esta sección, a saber,

Teorema 5.- Sea S una SAS, $\{(S_i, P_i)\}_{i \in Z_0}$ un camino estacionario para S . Existe un subconjunto infinito $I \subset Z_0$ con las propiedades siguientes:

- 1) $\forall i \in I$, S_i contiene una curva C_i permitida.
- 2) $\forall i \in I$, la recta tangente a la superficie determinada por P_i , es tangente a C_i .

CAPITULO SEGUNDO

TEORIA LOCAL DE DESINGULARIZACION EN CARACTERISTICA ARBITRARIA

SECCION 2.1.- TEOREMA I DE DESINGULARIZACION DE UN SAS.-

Como indicábamos en la sección 1.4 de nuestra memoria, comenzamos este capítulo dando una prueba de un cierto teorema de desingularización de hipersuperficies algebroides sumergidas, sobre un cuerpo de característica $q \geq 0$ de [12] Cap. III, en el caso de superficies.

Teorema 1.- Dada una SAS S , existe una sucesión finita S_0, S_1, \dots, S_r de SAS tales que

1°) $S_0 = S$.

2°) $\forall i=1, \dots, r, S_i$ es una transformada cuadrática de S_{i-1} .

3°) S_r es lisa.

Observación 1.- Sea $\mathcal{O} = k[[X, Y, Z]] / (f(X, Y, Z))$ el anillo de coordenadas de S , siendo $f(X, Y, Z) = 0$ una ecuación de S y k un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica $q \geq 0$; sea $p \geq 2$ la multiplicidad de S .

Para "preparar" convenientemente la serie $f(X, Y, Z)$ usamos el conocido procedimiento que sigue:

a) Elegir un punto $(\alpha, \beta, 1) \in k^3$ tal que $f_p(X, Y, Z)$, forma inicial de $f(X, Y, Z)$, no se anule en ese punto (es siempre posible, gracias a que k es algebraicamente cerrado y por tanto infinito). Definimos el cambio de coordenadas

$$X = X' + \alpha Z'$$

$$Y = Y' + \beta Z'$$

$$Z = Z' ;$$

entonces, llamando $f'(X', Y', Z') = f(X' + \alpha Z', Y' + \beta Z', Z')$, tenemos que $\underline{0}(f'(X', Y', Z')) = p$ y $f'_p(0, 0, Z') = f_p(\alpha, \beta, 1) \cdot Z'^p \neq 0$.

b) En estas condiciones, se puede aplicar el Teorema - Preparatorio de Weierstrass ([16] Cap. VII §1 Teor. 5) con lo que podemos tomar

(1) $f'(X', Y', Z') = Z'^p + a_{p-1}(X', Y')Z'^{p-1} + \dots + a_1(X', Y')Z' + a_0(X', Y')$
con $a_i(X', Y') \in k[[X', Y']]$ y $\underline{0}(a_i(X', Y')) \geq p-i$, $\forall i=0, 1, \dots, p-1$, estando $f'(X', Y', Z')$ definido salvo producto por una unidad, que obviamente no afecta al anillo de coordenadas

$$\square \approx k[[X', Y', Z']] / (f'(X', Y', Z')) .$$

Por consiguiente, a partir de este momento, supondremos siempre que el anillo de coordenadas de una SAS no necesariamente reducida, es

$$\square = k[[X, Y, Z]] / (f(X, Y, Z)) ,$$

donde $f(X, Y, Z)$ tiene la forma expresada en (1).

Proposición 2.- Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado de característica $q \geq 0$; sea S una SAS sobre k y tal que su cono tangente no se reduzca a un plano único. Entonces, existe una transformada cuadrática S_1 de S cuya multiplicidad es estrictamente menor que la de S .

Demostración.- Sea $f(X, Y, Z) = 0$ una ecuación de S donde

$$f(X, Y, Z) = Z^p + a_{p-1}(X, Y)Z^{p-1} + \dots + a_1(X, Y)Z + a_0(X, Y) ,$$

con $a_i(X, Y) \in k[[X, Y]]$, $\text{ord}(a_i(X, Y)) \geq p-i$, $\forall i=0, 1, \dots, p-1$ y $p \geq 2$ ya que se supone que S no es lisa. Se escribirá también $f(X, Y, Z)$ en la forma

$$f(X, Y, Z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_{p+i}(X, Y, Z)$$

donde $f_{p+i}(X, Y, Z)$ es, o bien cero, o bien un polinomio homogéneo de grado $p+i$.

Se verifica que no todos los puntos del divisor excepcional tienen multiplicidad p , porque si la tuvieran, el divisor excepcional sería una única recta contada p veces, o bien pasando al espacio afín, el cono tangente sería un plano único contado p veces, contra la hipótesis (la demostración de esta afirmación es análoga a la que se realizará en el lema 1 de la §3.1).

Sea $P = (\alpha', \beta', \gamma')$ un punto del divisor excepcional de multiplicidad $r < p$. Puesto que $f_p(0, 0, Z) = Z^p$, debe ser

$(\alpha', \beta') \neq (0, 0)$, pudiéndose así suponer $\alpha' \neq 0$ sin pérdida de generalidad. Entonces P tendrá coordenadas $(1, \beta, \gamma)$.

El transformado cuadrático S_1 de S en P , se obtiene mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} X &= X_1 \\ Y &= X_1(Y_1 + \beta) \\ Z &= X_1(Z_1 + \gamma) \end{aligned}$$

Así la ecuación de S_1 es

$$(2) \quad f^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1) = \sum_{i=0}^{\infty} X_1^i f_{p+i}(1, Y_1 + \beta, Z_1 + \gamma) = 0.$$

Nos fijamos en el primer sumando $f_p(1, Y_1 + \beta, Z_1 + \gamma)$ de (2), que igualado a cero representa una curva en el plano afín que pasa por $(0, 0)$, al ser $f_p(1, \beta, \gamma) = 0$. Más aun, la multiplicidad de $(1, \beta, \gamma)$ en el divisor excepcional es la multiplicidad del origen en la curva afín

de ecuación $f_p(1, Y_1 + \beta, Z_1 + \gamma) = 0$. Pero ésto quiere decir que este polinomio tiene orden $r < p$; además, ningún monomio de grado r de aquí puede anularse con alguno de los demás sumandos de (2), porque los sumandos $f_{p+i}(1, Y_1 + \beta, Z_1 + \gamma)$ con $i > 0$, van multiplicados por X_1^i que no está $f_p(1, Y_1 + \beta, Z_1 + \gamma)$.

Esto prueba que la multiplicidad de S_1 , es menor o igual que r , y por tanto inferior a la de S , lo que demuestra la proposición.

Observación 3. - Para el caso en el cono tangente se reduzca a un plano único, el problema reviste un poco más de dificultad, debiendo diferenciar dos casos, dependiendo de que la característica del cuerpo divida o no a la multiplicidad de la superficie.

En cualquier caso, por ser el divisor excepcional una única recta proyectiva, prepararemos la superficie S dada del siguiente modo:

Como siempre, sea $f(X, Y, Z) = 0$ una ecuación de S en $k[[X, Y, Z]]$ con

$$(3) \quad f(X, Y, Z) = Z^p + a_{p-1}(X, Y)Z^{p-1} + \dots + a_1(X, Y)Z + a_0(X, Y),$$

y $a_i(X, Y) \in k[[X, Y]]$, $\underline{0}(a_i(X, Y)) \geq p-i$, $\forall i=0, 1, \dots, p-1$, y también

$$(4) \quad f(X, Y, Z) = \sum_{i \geq 0} f_{p+i}(X, Y, Z),$$

donde para todo $i \geq 0$, $f_{p+i}(X, Y, Z)$ es, o bien cero, o bien una forma de

grado $p+i$. Se tiene por hipótesis que $f_p(X, Y, Z) = (Z + aX + bY)^p$,

siendo $a, b \in k$. Entonces efectuamos el cambio de coordenadas dado por

$$(5) \quad \begin{aligned} X' &= X \\ Y' &= Y \\ Z' &= Z + aX + bY, \end{aligned}$$

con el que la forma inicial de la serie transformada es Z'^p . Este cambio, además conserva la forma de Weierstrass de $f(X, Y, Z)$.

Por todo ésto, podemos suponer de partida, que la serie

inicial $f(X,Y,Z)$ tiene la forma (3) pero ahora con el $\underline{a}_i(X,Y) > p-i$ para cada $i=0,1,\dots,p-1$.

Consideremos el espacio ordinario R^3 dotado de un sistema de coordenadas ortogonales $\{x,y,z\}$. Vamos a definir, dentro de él, unos ciertos subconjuntos que se usarán continuamente a lo largo de este trabajo.

Definición 4.- Dada una no unidad arbitraria $g(X,Y,Z) \in k[[X,Y,Z]]$ llamaremos diagrama de Newton D de la serie g, al conjunto

$$D = \left\{ (a,b,c) \in Z^3 \mid X^a Y^b Z^c \text{ es un monomio con coeficiente no nulo en } g \right\}.$$

Definición 5.- Dada una no unidad arbitraria $g(X,Y,Z) \in k[[X,Y,Z]]$ llamaremos diagrama de Newton D_j de la serie g correspondiente a Z^j , al conjunto

$$D_j = \left\{ (a,b) \in Z^2 \mid X^a Y^b Z^j \text{ es un monomio con coeficiente no nulo en } g \right\}.$$

Por consiguiente D_j se obtiene a partir de D , cortándolo por el plano $z=j$; este D_j será llamado también el nivel j del diagrama D .

Nos interesa estudiar la evolución de los puntos del diagrama de Newton D de la serie $f(X,Y,Z)$ por transformaciones cuadráticas. Nótese que por este tipo de explosiones en puntos de la forma $(\alpha, \beta, 0)$, los distintos niveles de D no se mezclan, es decir, si un punto está en un D_j , después de la transformación citada, da lugar a puntos que están en D_j .

Proposición 6.- Sea S una SAS de multiplicidad $p \geq 2$, sobre un cuerpo k de característica $q \geq 0$, y supongamos que el cono tangente a S está formado por un plano único. Supongamos además, que una de las dos condiciones siguientes se verifica:

(i) $q=0$

(ii) Si $q > 0$, entonces $q \nmid p$.

Entonces, la multiplicidad de S puede ser disminuida por aplicación sucesiva de un número finito de transformaciones cuadráticas.

Demostración.- Sea $f(X,Y,Z) = 0$ una ecuación de S con

$$f(X,Y,Z) = Z^p + a_{p-1}(X,Y)Z^{p-1} + \dots + a_1(X,Y)Z + a_0(X,Y)$$

y $a_i(X,Y) \in k[[X,Y]]$, $\underline{v}(a_i(X,Y)) > p-i$, $i=0,1,\dots,p-1$, según la observación anterior.

Por las hipótesis impuestas a q y p , está garantizada la existencia en k de $1/p$, luego se puede efectuar el cambio de coordenadas

$$(6) \quad \begin{aligned} X &= X' \\ Y &= Y' \\ Z &= Z' - \frac{1}{p} a_{p-1}(X',Y') \end{aligned}$$

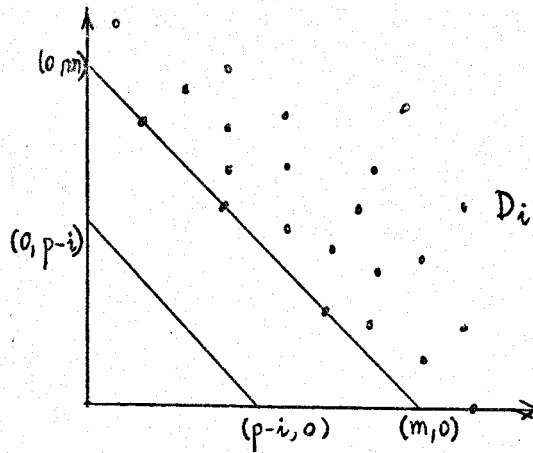
Obsérvese que, con este cambio, se conserva la forma de Weierstrass de f y además se anula el coeficiente del término en Z^{p-1} , quedando f en la forma

$$(7) \quad f'(X',Y',Z') = Z'^p + b_{p-2}(X',Y')Z'^{p-2} + \dots + b_1(X',Y')Z' + b_0(X',Y'),$$

con $\underline{v}(b_i(X',Y')) > p-i$, $i=0,\dots,p-2$, por ser $\underline{v}(a_{p-1}(X,Y)) > 1$.

Podemos así suponer, que la ecuación $f(X,Y,Z) = 0$, de partida, tiene la forma (7), sin términos en Z^{p-1} , es decir, el nivel $p-1$ del diagrama D de $f(X,Y,Z)$ es vacío.

Al menos alguno de los D_0, D_1, \dots, D_{p-2} debe ser no vacío, digamos D_i ; ya que hemos supuesto que la superficie es reducida, y por consiguiente, su ecuación no puede ser $Z^p = 0$. Nos centramos en el diagrama D_i , correspondiente a Z^i , y sea $a_i(X,Y)$ su coeficiente, con $\underline{v}(a_i(X,Y)) = m > p-i$; llamemos $f_m(X,Y)$ a la forma inicial de $a_i(X,Y)$.



Como $f_m(X, Y) \neq 0$ y k es infinito, sea $(1, \beta) \in k^2$ un punto tal que sea $f_m(1, \beta) \neq 0$; consideremos la transformación cuadrática $\Pi^{(1)}$ en el punto $(1, \beta, 0)$ del divisor excepcional.

Nos ponemos en el peor de los casos de que, después de esta explosión, en los diagramas distintos de D_i , no aparezca ningún término de grado menor o igual que p , (distinto de Z_1^p); ya que, entonces:

a) Si apareciese un término de grado menor que p , se habría concluido el teorema, porque se reduce la multiplicidad.

b) Si apareciesen términos de grado p (distintos de Z_1^p), se obtendría una forma inicial que sería potencia de una forma lineal, ya que en este caso, por las hipótesis impuestas a q y p , deberían aparecer términos con Z_1^{p-1} en esta forma inicial, del todo imposible por ser D_{p-1} vacío.

Nos queda así, el caso en que la forma inicial sigue siendo Z_1^p . Estudiemos la evolución de D_i después de la transformación cuadrática de ecuaciones:

$$(8) \quad \begin{aligned} X &= X_1 \\ Y &= X_1(Y_1 + \beta) \\ Z &= X_1 Z_1 \end{aligned}$$

Entonces los términos de $f_m(X, Y)Z^i$ se transforman en

$$\frac{f_m(X_1, X_1(Y_1 + \beta), X_1 Z_1)}{X_1^p} = X_1^{m-p+i} f_m(1, Y_1 + \beta) Z_1^i = X_1^{m-p+i} f_m(1, \beta) Z_1^i +$$

+ [términos de grado superior] .

Se tiene que $f_m(1, \beta) \neq 0$, luego el punto $(m-p+i, 0)$ aparece efectivamente en el diagrama D_i después de la explosión, ya que los únicos puntos del nivel i de D con primera coordenada $m-p+i$, proceden de $f_m(X, Y)$. De este modo, si $b_i(X_1, Y_1)$ es el nuevo coeficiente de Z_1^i se tiene que

$$\underline{0}(b_i(X_1, Y_1)) = m-p+i < m$$

Este proceso se puede repetir si $m-(p-i) > p-i$ (en otro caso está concluida la proposición), ya que la forma inicial sigue siendo Z_1^p . Es claro entonces que si

$$n = \text{parte entera} \left(\frac{m}{p-i} \right) ,$$

después de n explosiones de este tipo, la multiplicidad se habrá reducido. Obsérvese que si $m=n(p-i)$ en la explosión $(n-1)$ -ésima, se obtiene una forma inicial que no es potencia de una forma lineal; en este caso la proposición 2 garantiza que, después de una transformación cuadrática, se disminuye la multiplicidad. Esto concluye la prueba de la proposición.

Observación 7.- Nos queda estudiar el caso en que $q > 0$ y $q \nmid p$, en el que no es posible hacer la sustitución (6) de la proposición anterior.

Sea $p = vq^r$, con $q \nmid v$ y $r > 0$; entonces en el desarrollo de Newton de la potencia p -ésima de un binomio, se tiene que

$$(a + b)^p = (a + b)^{vq^r} = (a^q + b^q)^v ,$$

luego los únicos exponentes que aparecen efectivamente en el desarrollo de $(a + b)^p$, están en el conjunto de números enteros

$$N_q = \{ p=vq^r , (v-1)q^r , \dots , q^r , 0 \} .$$

Es obvio entonces que, los exponentes que aparecen efectivamente al desarrollar $(a + b + c)^p$, están también en N_q .

Proposición 8.- Sea S una SAS de multiplicidad $p \geq 2$ sobre k , de característica $q > 0$, y siendo $p = vq^r$, $q \nmid v$ y $r > 0$. Si el cono tangente a S está formado por un plano único, entonces, la multiplicidad de S puede ser disminuida por aplicación sucesiva de un número finito de transformaciones cuadráticas.

Demostración.- Como siempre supongamos $f(X,Y,Z) = 0$ una ecuación de S en $k[[X,Y,Z]]$, con f en la forma de Weierstrass y de forma inicial Z^p . Como vamos a aplicar a S una sucesión de transformaciones cuadráticas, supondremos que la ecuación de cada transformada de esta sucesión, tiene una forma inicial que es potencia de una forma lineal, porque en caso contrario, la proposición es automáticamente cierta en el paso siguiente.

Consideremos el diagrama de Newton D de $f(X,Y,Z)$ y tendremos en cuenta varias posibilidades.

Caso 1.- Existe algún nivel j en D no vacío, con $j \in \mathbb{N}_q$. Supondremos que j es el mayor (o más alto) entre los que cumplen estas condiciones, centrándonos entonces en este nivel j de D .

Al igual que hicimos en la proposición anterior, sea $a_j(X,Y)$ el coeficiente de Z^j , con $\underline{0}(a_j(X,Y)) = m > p-j$ y llamemos $f_m(X,Y)$ a la forma inicial de $a_j(X,Y)$.

Como $f_m(X,Y) \neq 0$ y k es infinito, sea $(1, \beta)$ un punto tal que $f_m(1, \beta) \neq 0$; consideremos la transformación cuadrática $\pi^{(1)}$ en el punto $(1, \beta, 0)$ del divisor excepcional. Entonces los monomios de $f_m(X,Y)Z^j$ se transforman en

$$x_1^{m-p+j} f_m(1, \beta) z_1^j + [\text{términos de grado superior}].$$

Luego el punto $(m-p+j, 0)$ aparece en D_j después de la explosión. Si $m-p+j < p$, hemos terminado la demostración; supongamos pues, que esto no se verifica.

Al contrario que en la proposición anterior, ahora la forma inicial no tiene porqué conservarse, pudiendo en general ser de la forma $(Z_1 + aX_1)^p$. Tenemos que efectuar una segunda explosión, esta vez ya en un punto $(1, \beta, \gamma)$, de manera que $(1, \beta)$ no anule a la forma inicial del coeficiente de Z_1^j y reiterar el proceso descrito. Lo único que tenemos que probar es que los puntos $(m-(p-j), 0)$, $(m-2(p-j), 0)$, ..., del nivel j , no se cancelan después de explosiones $\Pi^{(1)}$ en puntos del tipo $(1, \beta, \gamma)$.

Ahora bien, la única posibilidad de simplificación de los puntos antes citados, sería con términos procedentes de niveles más altos, digamos $i > j$, al desarrollar términos del tipo $(Z + \gamma)^i$. Pero esto es imposible ya que los niveles más altos que j son de N_q y por tanto, según la observación 7, en el desarrollo de términos como el anterior, sólo aparecen exponentes de Z que están en N_q .

En suma, después de $n = \text{parte entera}(\frac{m}{p-j})$ explosiones, la multiplicidad se ha reducido.

Caso 2. - Los niveles no vacíos de D son de N_q .

Por ser S reducida, existen monomios con coeficiente no nulo en $f(X, Y, Z)$ de la forma $X^a Y^b Z^j$ con $(a, b) \notin Z_q^r \times Z_q^r$, más aun - deben existir monomios de la forma anterior con $(a, b) \notin Z_q \times Z_q$, ya que en otro caso, f sería una potencia q -ésima de otra serie.

Consideremos los monomios de esta forma que están en el más alto nivel de D , y de ellos, los de menor grado. Supongamos que el monomio $\alpha X^a Y^b Z^j$ ($\alpha \neq 0$) verifica estas condiciones. Caben dos posibilidades:

Subcaso 2.1. - $a + b \notin Z_q$.

En este caso consideremos la forma $f_{a+b}(X, Y) \neq 0$ de grado $a+b$ del coeficiente $a_j(X, Y)$ de Z^j . Sea $(1, \beta)$ un punto de k^2

tal que $f_{a+b}(1, \beta) \neq 0$; entonces consideremos la transformación cuadrática $\Pi^{(1)}$ en el punto $(1, \beta, 0)$ del divisor excepcional.

Mediante esta explosión, los términos de $f_{a+b}(X, Y)Z^j$, se transforman en

$$X_1^{a+b+j-p} f_{a+b}(1, \beta) Z_1^j + [\text{términos de grado superior}].$$

Así el punto $(a+b-(p-j), 0)$ del nivel j después de la explosión, no puede cancelarse, y está en las mismas condiciones que el punto (a, b) de partida.

Como en el caso 1, surge la posibilidad de que la forma inicial no sea Z_1^p sino una del tipo $(Z_1 + a_1 X_1)^p$; entonces no podrían hacerse explosiones en puntos del tipo $(1, \beta, 0)$, sino del más general $(1, \beta, \gamma)$. Aun en este caso, de transformaciones cuadráticas en puntos $(1, \beta, \gamma)$ del divisor excepcional, los puntos $(a+b-(p-j), 0)$, $(a+b-2(p-j), 0)$, ..., del nivel j no pueden cancelarse con otros de niveles más altos porque todos éstos, tienen componentes enteras de Z_q . La demostración se concluye ya fácilmente en este caso.

Subcaso 2.2.- $a + b \in Z_q$.

Aplicando una transformación cuadrática en el punto $(1, 0, 0)$ del divisor excepcional, el monomio fijado $\alpha X^a Y^b Z^j$ se transforma en el $\alpha X_1^{a+b+j-p} Y_1^b Z_1^j$, que está en las condiciones del subcaso 2.1

si $a+b+j-p+b+j > p$ y la forma inicial es Z_1^p . En los otros casos:

2.2.1) Si $a+b+j-p+b+j = p$, se llega a contradicción con que $(a, b) \notin Z_q \times Z_q$

2.2.2) Si $a+b+j-p+b+j < p$, se habría concluido la demostración.

2.2.3) Si la forma inicial es del tipo $(Z_1 + a_1 X_1)^p$ entonces realizando en $k[[X, Y, Z]]$ el cambio de coordenadas

$$X = X'$$

$$Y = Y'$$

$$Z = Z' - a_1 X'^2$$

resuelve la cuestión, porque da lugar, después de la explosión en $(1,0,0)$ a una forma inicial del tipo Z_1^P , dejando todas las demás condiciones invariables.

Esto concluye la demostración de la proposición.

Con un proceso de recurrencia, las proposiciones 2, 6 y 8, constituyen una prueba del teorema I que enunciábamos al comienzo de la sección.

SECCION 2.2.-CAMINOS ESTACIONARIOS DE SAS (CARACTERISTICA ARBITRARIA).-

Hemos de hacer constar en primer lugar, que los resultados relativos a caminos estacionarios de [13] que resumíamos en la sección 1.5, son perfectamente válidos para característica $q \geq 0$, siendo las demostraciones dadas allí, trasladables a SAS sobre cuerpos de cualquier característica, excepción hecha de la Prop.3.3.2 y los corolarios 3.3.3 y 3.3.4, en los que se hace uso de la fórmula de Taylor. Sin embargo los obstáculos son fácilmente salvables, y todos los resultados salvo aquellos 3, válidos en general. Precisamente en el Cap. III § 3.1 lema 1, damos una demostración de aquellos resultados, válida para cualquier característica.

Nuestro propósito en esta sección es estudiar la forma de los caminos estacionarios para el caso de característica arbitraria.

Situación inicial.- Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado, de característica $q \geq 0$. Se considera una serie $f'(X', Y', Z') \in k[[X', Y', Z']]$ de orden $p > 1$, sin factores múltiples, cuya forma inicial sea Z'^p y escrita en la forma de Weierstrass, .i.e.,

$$f'(X', Y', Z') = Z'^p + a'_{p-1}(X', Y')Z'^{p-1} + \dots + a'_1(X', Y')Z' + a'_0(X', Y'),$$

con $a'_i(X', Y') \in k[[X', Y']]$ y $\underline{v}(a'_i(X', Y')) > p-i$, $\forall i=0, 1, \dots, p-1$.

Se supondrá, además, que si i) $q=0$, o bien ii) $q > 0$ y $q \nmid p$, entonces $a'_{p-1}(X', Y') = 0$. Esto se consigue, como vimos en la sección anterior, -

mediante el cambio de coordenadas:

$$X' = X''$$

$$Y' = Y''$$

$$Z' = Z'' - \frac{1}{p} a_{p-1}'(X'', Y'')$$

Pretendemos, en la línea de [14], profundizar en la estructura de los caminos estacionarios. Por tanto, supondremos dado un camino estacionario

$$\mathcal{C}' = \left[\sigma', \left\{ f^{(i)}(X_i', Y_i', Z_i'), P_i' \right\} i \in Z_0 \right]$$

para la ecuación $f'(X', Y', Z') = 0$ de la superficie

$$S = \text{Spec} \left(k[[X', Y', Z']] / (f'(X', Y', Z')) \right),$$

con las siguientes propiedades:

- 1) $\text{im } \sigma' = \{1, 2\}$, sin pérdida de generalidad, por [13] lema 3.1.9.
- 2) Todas las superficies algebroides

$$S_i = \text{Spec} \left(k[[X_i', Y_i', Z_i']] / (f^{(i)}(X_i', Y_i', Z_i')) \right),$$

tienen un cono tangente reducido a un plano único, ya que en otro caso, la estructura es bien conocida (cf. teor. 4 § 1.5).

- 3) \mathcal{C}' no es equivalente a un punto estacionario, pues en este caso, se ha probado que las explosiones se realizan en el punto correspondiente a la dirección tangente a una curva permitida (cf. teor. 3 § 1.5).

Intercambiando las variables X_0' e Y_0' , si fuera preciso, podemos suponer que la primera coordenada de P_0' , es no nula. Se verifica entonces, el siguiente

Lema 1.- Los puntos P_i' del camino estacionario \mathcal{C}' no tienen todos su primera coordenada distinta de cero.

Demostración.- Supongamos lo contrario, y consideremos el camino estacionario para S , $\{(S_i, P_i')\}_{i \in Z_0}$, correspondiente a la clase de equiva-

lencia que contiene a \mathcal{C}' . Como vimos en la sección 1.3, el transformado cuadrático de una superficie algebroide, está biunívocamente determinado por el punto del divisor excepcional en el que se hace la explosión.

Por consiguiente, si consideramos el camino estacionario

$$\mathcal{C}'' = \left[\sigma'', \left\{ f''^{(i)}(X''_i, Y''_i, Z''_i), P''_i \right\} \quad i \in Z_0 \right]$$

con $P''_i = P'_i$ para todo $i \in Z_0$, $\text{im } \sigma'' = \{1\}$ y $f''^{(0)}(X''_0, Y''_0, Z''_0) = f'^{(0)}(X'_0, Y'_0, Z'_0)$ si $X''_0 = X'_0$, $Y''_0 = Y'_0$ y $Z''_0 = Z'_0$, se tiene que el camino \mathcal{C}'' es equivalente a \mathcal{C}' .

Por otra parte, en [13] teor.3.2.3, se demuestra, que en este caso, en que $\text{im } \sigma'' = \{1\}$, se tiene que \mathcal{C}'' , y por tanto \mathcal{C}' , es equivalente a un punto estacionario contra lo supuesto.

Observación 2.- Por los argumentos utilizados en este lema 1, supondremos que siempre que la primera coordenada de P'_i sea distinta de cero, $\sigma'(i)=1$, es decir, la transformación cuadrática correspondiente es $\pi^{(1)}$ en el punto P'_i , abreviadamente diremos que esta explosión es del tipo 1. En cambio, cuando la primera coordenada sea cero, entonces $\sigma'(i)=2$, y diremos que la explosión es del tipo 2.

Como hemos supuesto que P'_0 tiene la primera coordenada no nula, en general, las n_1 primeras transformaciones cuadráticas de son del tipo 1, con $n_1 \in \mathbb{Z}_+$ y la (n_1+1) -ésima será del tipo 2. A estas n_1 explosiones del tipo 1, las llamaremos primera etapa del camino estacionario.

Lema 3.- Existe un camino estacionario \mathcal{C} para una ecuación de S , con la forma de Weierstrass, equivalente a \mathcal{C}' , tal que verifica las siguientes propiedades:

(3-a) Las n_1 primeras transformaciones cuadráticas de \mathcal{C} se hacen en el punto $(1,0,0)$.

- (3-b) A partir de la n_1 -ésima explosión los dos caminos \mathcal{C} y \mathcal{C}' coinciden.
- (3-c) La forma inicial de las n_1 primeras ecuaciones de \mathcal{C} es del tipo Z^p (eventualmente, $(Z + aX)^p$, con $a \neq 0$, en la n_1 -ésima si $q > 0$ y $q \nmid p$) manteniéndose en su caso, la no existencia de puntos en el nivel $p-1$ de los diagramas de Newton de aquellas.

Demostración.- Para probar el lema debemos considerar dos casos:

Caso 1.- ($q=0$ o $q > 0$ y $q \nmid p$).- Hemos supuesto que entonces, la ecuación inicial $f^{(0)}(x_0', y_0', z_0')$ no contiene términos en $z_0'^{p-1}$.

El P_0' es de la forma $(1, \beta_0', 0)$, por tanto, al efectuar la transformación cuadrática del tipo 1 en el punto P_0' , la ecuación transformada no contiene términos en $z_1'^{p-1}$, (los niveles del diagrama de Newton no se "mezclan", en el sentido de que los puntos de un nivel, se transforman en puntos del mismo nivel).

Como por hipótesis la forma inicial de $f^{(1)}(x_1', y_1', z_1')$ es potencia de una forma lineal, ésta debe ser $z_1'^p$, ya que en otro caso habría términos con $z_1'^{p-1}$. Este razonamiento se extiende por recurrencia a toda la primera etapa.

Por otro lado, pongamos $P_i' = (1, \beta_i', 0) \quad \forall i=0, \dots, n_1-1$, y construyamos el camino \mathcal{C} definiendo previamente el siguiente cambio de coordenadas en $k[[x_0', y_0', z_0']]$

$$(1) \quad \begin{cases} x_0' = x_0 \\ y_0' = y_0 + \sum_{j=0}^{n_1-1} \beta_j' x_0^{j+1} \\ z_0' = z_0 \end{cases}$$

La nueva ecuación $f^{(0)}(x_0, y_0, z_0) = 0$ conserva la forma de Weierstrass, la forma inicial y la no existencia de puntos en el nivel $p-1$ de su diagrama. El punto $P_0' = (1, \beta_0', 0)$ se transforma mediante el cambio ante-

rior en el punto $P_0 = (1,0,0)$.

El cambio de coordenadas (1), se prolonga a un cambio de coordenadas en $k[[X'_1, Y'_1, Z'_1]]$, con las ecuaciones siguientes

a) Si $n_1=1$

$$\begin{cases} X'_1 = X_1 \\ Y'_1 = Y_1 \\ Z'_1 = Z_1 \end{cases}$$

b) Si $n_1 > 1$

$$\begin{cases} X'_1 = X_1 \\ Y'_1 = Y_1 + \sum_{j=1}^{n_1-1} \beta_j^1 X_1^j \\ Z'_1 = Z_1 \end{cases} .$$

Este cambio transforma el punto $P'_1 = (1, \beta_1^1, 0)$ en el $P_1 = (1,0,0)$, y en ambos casos, la nueva ecuación $f^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1) = 0$ conserva la forma de Weierstrass, la forma inicial y la no existencia de términos en Z_1^{p-1} ; además se comprueba fácilmente que $f^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1) = 0$ es la ecuación transformada cuadrática de $f^{(0)}(X_0, Y_0, Z_0) = 0$ en el punto P_0 .

Sea ahora $i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i < n_1$, y supongamos que se ha definido el cambio de coordenadas en $k[[X'_i, Y'_i, Z'_i]]$ siguiente

$$\begin{cases} X'_i = X_i \\ Y'_i = Y_i + \sum_{j=i}^{n_1-1} \beta_j^i X_i^{j-(i-1)} \\ Z'_i = Z_i \end{cases} ;$$

entonces, este cambio transforma el punto $P'_i = (1, \beta_i^i, 0)$ en el punto $P_i = (1,0,0)$ y si $f^{(i)}(X_i, Y_i, Z_i) = 0$ es la nueva ecuación, ésta con-

serva la forma de Weierstrass, la forma inicial y la ausencia de términos en Z_i^{p-1} .

El cambio anterior se prolonga a un nuevo cambio de coordenadas en $k[[X_{i+1}^!, Y_{i+1}^!, Z_{i+1}^!]]$ de ecuaciones

a) Si $n_1 = i+1$

$$\begin{cases} X_{i+1}^! = X_{i+1} \\ Y_{i+1}^! = Y_{i+1} \\ Z_{i+1}^! = Z_{i+1} \end{cases} .$$

b) Si $n_1 > i+1$

$$\begin{cases} X_{i+1}^! = X_{i+1} \\ Y_{i+1}^! = Y_{i+1} + \sum_{j=i+1}^{n_1-1} \beta_j^! X_{i+1}^{j-i} \\ Z_{i+1}^! = Z_{i+1} \end{cases} .$$

Este cambio transforma el punto $P_{i+1}^! = (1, \beta_{i+1}^!, 0)$ en el $P_{i+1} = (1, 0, 0)$,

y en ambos casos la nueva ecuación $f^{(i+1)}(X_{i+1}^!, Y_{i+1}^!, Z_{i+1}^!) = 0$ conserva

las características que nos interesan de $f^{(i+1)}(X_{i+1}^!, Y_{i+1}^!, Z_{i+1}^!) = 0$.

También se tiene que $f^{(i+1)}(X_{i+1}^!, Y_{i+1}^!, Z_{i+1}^!) = 0$ es la ecuación transformada cuadrática en el punto $P_i = (1, 0, 0)$ de $f^{(i)}(X_i, Y_i, Z_i) = 0$.

Al final de las n_1 primeras transformaciones cuadráticas de $C^!$, el cambio inducido de (1) en $k[[X_{n_1}^!, Y_{n_1}^!, Z_{n_1}^!]]$ es la identidad, i.e.

$$\begin{cases} X_{n_1}^! = X_{n_1} \\ Y_{n_1}^! = Y_{n_1} \\ Z_{n_1}^! = Z_{n_1} \end{cases} .$$

Hemos obtenido así un camino estacionario \mathcal{C} para la ecuación $f^{(0)}(x_0, y_0, z_0) = 0$ de S ,

$$\mathcal{C} = \left[\sigma, \left\{ f^{(i)}(x_i, y_i, z_i), P_i \right\}_{i \in Z_0} \right]$$

sin más que trasladar, a partir de la (n_1+1) -ésima transformación cuadrática, las ecuaciones y los puntos de \mathcal{C}' a \mathcal{C} , con lo que queda probado el lema para este caso.

Caso 2.-($q > 0$ y $q \mid p$).- Aquí la situación se complica con respecto al caso anterior, al no poder garantizar que la forma inicial de la serie $f^{(0)}(x'_0, y'_0, z'_0)$, que es Z_0^p , se conserva a lo largo de la primera etapa.

Por ejemplo, consideremos en característica 2, la superficie de ecuación

$$z_0'^2 + x_0'^4 + x_0' y_0'^3 = 0,$$

que es reducida. El transformado cuadrático de la superficie en $(1, 0, 0)$, tiene de ecuación

$$z_1'^2 + x_1'^2 + x_1'^2 y_1'^3 = (z_1' + x_1')^2 + x_1'^2 y_1'^3 = 0;$$

por tanto, si se pretende hacer una segunda transformación cuadrática del tipo 1, el punto debe ser de la forma $(1, \beta, -1)$.

Se tendrá, en general, $P_0' = (1, \beta_0', 0)$, y si $n_1 > 1$, $P_i' = (1, \beta_i', \gamma_i')$ $\forall i=1, \dots, n_1-1$. Consideremos entonces el cambio de coordenadas en $k[[x_0', y_0', z_0']]$ dado por

$$(2) \quad \begin{cases} x_0' = x_0 \\ y_0' = y_0 + \sum_{j=0}^{n_1-1} \beta_j x_0^{j+1} \\ z_0' = z_0 + \sum_{j=0}^{n_1-1} \gamma_j x_0^{j+1} \end{cases} \quad (\text{tomando } \gamma_0' = 0),$$

que transforma el punto P_0' en el $P_0 = (1, 0, 0)$, conserva la forma de

Weierstrass y la forma inicial de $f^{(0)}(x_0, y_0, z_0)$ en la nueva ecuación $f^{(0)}(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Exactamente igual que en el caso anterior, este cambio se prolonga a un cambio de coordenadas en $k[[x_1, y_1, z_1]]$ de modo que lleva $f^{(1)}(x_1, y_1, z_1)$ a $f^{(1)}(x_1, y_1, z_1)$, que es la serie transformada cuadrática de $f^{(0)}(x_0, y_0, z_0)$ en el punto $(1, 0, 0)$.

Se obtiene así un camino estacionario para la ecuación $f^{(0)}(x_0, y_0, z_0) = 0$ de S ,

$$\mathcal{L} = \left[\sigma, \{ f^{(i)}(x_i, y_i, z_i), P_i \}_{i \in Z_0} \right]$$

tal que verifica las siguientes propiedades:

- a) $P_0 = P_1 = \dots = P_{n_1-1} = (1, 0, 0)$.
- b) La forma de Weierstrass se conserva a lo largo de la primera etapa.
- c) \mathcal{L} coincide con \mathcal{L}' a partir de la explosión n_1 -ésima.

Para concluir la prueba del lema nos queda observar cómo es la forma inicial en la primera etapa de \mathcal{L} . Recordemos que la forma inicial de $f^{(0)}(x_0, y_0, z_0)$ es Z_0^P . Por transformaciones cuadráticas podría alterarse y ser, después de i explosiones:

$$(3) \quad (Z_i + ax_i + by_i)^P$$

para un cierto i , $1 \leq i \leq n_1 - 1$. Pero si $b \neq 0$, en $f^{(i)}(x_i, y_i, z_i)$ habrá algún término y_i^P con coeficiente no nulo, que claramente no puede aparecer por primera vez después de una transformación cuadrática en $(1, 0, 0)$. Luego $b=0$.

Si en (3) fuese $a \neq 0$, el punto $(1, 0, 0)$ de la explosión siguiente no podría ser un punto del divisor excepcional, con lo que se deduce que, sólo en la última transformación de la primera etapa, puede ser la forma inicial del tipo $(Z_{n_1} + ax_{n_1})^P$ con $a \in k - \{0\}$.

c.q.d.

Observación 4.- A partir de este momento nos centraremos en el camino estacionario \mathcal{C} . Este camino continuaría con una segunda tanda de explosiones del tipo 2, como indica el lema 1, que puede ser finita o infinita. Llamamos segunda etapa a este proceso de transformaciones de tipo 2 que sigue a la primera etapa.

En el caso de una segunda etapa infinita, o en el más general, de que, a partir de un momento, todas las explosiones sean, bien del tipo 1, bien del tipo 2, nuestro estudio del camino estacionario estaría concluido con el siguiente

Teorema 5.- Sea

$$\mathcal{C} = \left[\sigma, \{f^{(i)}(x_i, y_i, z_i), P_i\} \quad i \in Z_0 \right]$$

un camino estacionario para la ecuación $f^{(0)}(x_0, y_0, z_0) = 0$ de S , tal que existe un $n_0 \in Z_+$ que verifica que, si $\sigma^i = \sigma|_{Z_0 - \{0, 1, \dots, n_0 - 1\}}$, entonces $\text{im } \sigma^i = 1$ o bien $\text{im } \sigma^i = 2$.

En estas condiciones, existe una curva C permitida en

$$S_{n_0} = \text{Spec} \left(\frac{k[[x_{n_0}, y_{n_0}, z_{n_0}]]}{(f^{(n_0)}(x_{n_0}, y_{n_0}, z_{n_0}))} \right)$$

que es tangente a la rectatangente correspondiente al punto P_{n_0} .

Demostración.- Es inmediata considerando el camino estacionario

$$\mathcal{C}_{n_0} = \left[\sigma^i, \{f^{(i)}(x_i, y_i, z_i), P_i\} \quad i \in n_0 \right]$$

para la ecuación $f^{(n_0)}(x_{n_0}, y_{n_0}, z_{n_0}) = 0$ de S_{n_0} , que es equivalente a un punto estacionario para una ecuación de S_{n_0} por [13] teor.3.2.3.

Basta aplicar el teor. 3 de la sección 1.5 para obtener lo deseado.

Corolario 6.- En la situación del teorema 6, para todo $i > n_0$, si

$$S_i = \text{Spec} \left(\frac{k[[X_i, Y_i, Z_i]]}{(f^{(i)}(X_i, Y_i, Z_i))} \right),$$

existe una curva permitida C_i en S_i , verificando las condiciones del teorema, i.e., tangente a la recta tangente determinada por P_i .

Después de este teorema, podemos suponer que en la 2a. etapa de \mathcal{C} , las transformaciones cuadráticas de tipo 2, son en número finito, digamos $n_2 - n_1$.

Lema 7.- Las transformaciones cuadráticas de la segunda etapa de \mathcal{C} ; se efectúan todas en el punto $(0,1,0)$, y la forma inicial que hay en el comienzo de la segunda etapa, permanece sin cambios a lo largo de toda ella.

Demostración.- Recordemos que en lema 3, obtuvimos que, al final de la primera etapa de \mathcal{C} , la forma inicial era de uno de los dos tipos siguientes

$$(3) \quad z_{n_1}^P \quad \text{o} \quad (z_{n_1} + ax_{n_1})^P \quad (a \neq 0).$$

En cualquier caso, como la primera explosión de segunda etapa se hace en un punto con primera coordenada cero, para anular a cualquiera de las formas iniciales de (3), debe ser también la tercera componente nula. Luego el punto correspondiente a la primera explosión es $(0,1,0)$.

De otro lado, por transformaciones cuadráticas en $(0,1,0)$, la forma inicial (3) no varía. En efecto, como hemos supuesto que la forma inicial es siempre potencia de una forma lineal, si hubiera alguna variación con respecto a (3), debería aparecer, después de una explosión, un término en X^P o en Y^P , y ésto es imposible. En el caso de X^P la razón es clara, y en el caso de Y^P también, porque si se ha obtenido este término después de i transformaciones cuadráticas ($i \geq 1$) en $(0,1,0)$, se tendría que éste, procedería de uno de $f^{(n_1)}(X_{n_1}, Y_{n_1}, Z_{n_1})$ que sería de la forma $bY_{n_1}^{(i+1)P}$ ($b \neq 0$), y ésto es claramente imposible, ya que todos

los monomios de esta serie, salvo posiblemente algunos de la forma inicial, son divisibles por X_{n_1} .

c.q.d.

Observación 8.- Por el teorema 5, debemos suponer que las explosiones del tipo 1 y del tipo 2, se van alternando sucesivamente, dividiendo así el camino estacionario \mathcal{C} en etapas; las etapas impares están formadas por transformaciones cuadráticas del tipo 1 y las etapas pares por transformaciones del tipo 2, ambas en número finito, digamos $n_3 - n_2$ para la tercera etapa, $n_4 - n_3$ para la cuarta, y así sucesivamente.

El lema anterior se puede generalizar para las etapas pares, y otros resultados más se obtienen en el siguiente

Lema 9.- Para el camino estacionario \mathcal{C} se verifican las siguientes propiedades:

- (9-a) Si $q=0$ o $q>0$ y $q \nmid p$, las transformaciones cuadráticas de las etapas impares, se hacen en puntos del tipo $(1, \beta, 0)$, conservándose la forma inicial Z^p y la no existencia de términos en Z^{p-1} .
- (9-b) Si $q>0$ y $q \mid p$, las transformaciones cuadráticas de las etapas impares son totalmente generales.
- (9-c) En cualquier caso las transformaciones cuadráticas de las etapas pares, se hacen todas en el punto $(0, 1, 0)$.

Demostración.- (Por comodidad no precisaremos los subíndices de las variables, siempre que no haya lugar a confusión).

Para probar (9-a) supongamos que $q=0$ o que $q>0$ y $q \nmid p$. Supongamos probado que al final de una etapa par, digamos $2i$ ($i \geq 1$) la forma inicial es Z^p ; entonces el primer punto de la etapa $(2i+1)$ -ésima debe ser, forzosamente, de la forma $(1, \beta, 0)$.

A lo largo de esta etapa la forma inicial, podría pasar a ser del tipo

$$(Z + aX + bY)^p,$$

pero Y^p no puede aparecer por explosiones del tipo 1, y si fuese $a \neq 0$,

aparecería un término en Z^{p-1} que no puede proceder de explosiones en $(1, \beta, 0)$, si antes no existiese. Por tanto, la forma inicial es Z^p ; las explosiones son en puntos del tipo $(1, \beta, 0)$ y no hay puntos en los niveles $p-1$, en ningún momento de esta etapa.

Si $q > 0$ y $q \mid p$, la forma inicial después de una etapa par, puede ser $(Z + aX)^p$ con $a \neq 0$, de ahí que los puntos de la etapa impar siguiente, puedan ser del tipo $(1, \beta, \gamma)$. Pero nótese que Y^p no puede aparecer por explosiones del tipo 1, por tanto la forma inicial, se conserva del tipo (3) del lema anterior.

(9-c) se demuestra de un modo análogo al lema 7, dado que la forma inicial es como en (3). Además es claro que al final de una etapa par, la forma inicial es Z^p si $q=0$ o si $q > 0$ y $q \nmid p$, como era requerido en (9-a).

c.q.d.

Cabría pensar una simplificación de las etapas impares de un modo análogo al de las pares, esto es. pensar que se puede encontrar un camino equivalente a \mathcal{C} de forma que las explosiones en las etapas impares se hagan en un punto único, digamos $(1, 0, 0)$, o incluso en el $(0, 1, 0)$. Pero en general esto no es posible, como se comprobará en el ejemplo que daremos más adelante.

Observación 10.- Designaremos por $\pi_P^1 : k[[X, Y, Z]] \longrightarrow k[[X_1, Y_1, Z_1]]$, al k -homomorfismo dado por las ecuaciones de la explosión $\pi^{(1)}$ en el punto P , i.e., si $P = (1, \beta, \gamma)$

$$\pi_P^1(X) = X_1$$

$$\pi_P^1(Y) = X_1(Y_1 + \beta)$$

$$\pi_P^1(Z) = X_1(Z_1 + \gamma).$$

Análogo significado daremos a π_P^2 y π_P^3 .

En estas condiciones, en [13] Cap. III § 1, se tiene el siguiente

Lema 11.- Si un cambio de coordenadas φ transforma el punto P en el P' , entonces existe un único cambio de coordenadas $\Psi: k[[X_1, Y_1, Z_1]] \rightarrow k[[X'_1, Y'_1, Z'_1]]$ de modo que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} k[[X, Y, Z]] & \xrightarrow{\varphi} & k[[X', Y', Z']] \\ \downarrow \pi_P^i & & \downarrow \pi_{P'}^j \\ k[[X_1, Y_1, Z_1]] & \xrightarrow{\Psi} & k[[X'_1, Y'_1, Z'_1]] \end{array}$$

es conmutativo, donde $i, j \in \{1, 2, 3\}$ son tales que P y P' tienen sus coordenadas i -ésima y j -ésima respectivamente, no nulas.

Ejemplo 12.- Sea la superficie de ecuación $Z_0^2 + X_0^6 = 0$, sobre un cuerpo de característica cero, y un camino estacionario para esta ecuación, cuyas primeras explosiones son como siguen:

$$\begin{array}{ccccccc} Z_0^2 + X_0^6 & \xleftarrow{\pi_{(1,0,0)}^{(1)}} & Z_1^2 + X_1^4 & \xleftarrow{\pi_{(0,1,0)}^{(2)}} & Z_2^2 + X_2^4 Y_2^2 & \xleftarrow{\pi_{(1,1,0)}^{(1)}} & \\ & & & & & & \\ & \xleftarrow{\pi_{(1,1,0)}^{(1)}} & Z_3^2 + X_3^4 (Y_3 + 1)^2 & \xleftarrow{\pi_{(0,1,0)}^{(2)}} & \dots & & \end{array}$$

y a partir de aquí se van alternando las explosiones en $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$.

Nuestro problema es demostrar que no es posible encontrar un cambio de coordenadas $\varphi_0: k[[X_0, Y_0, Z_0]] \rightarrow k[[X'_0, Y'_0, Z'_0]]$, que al prolongarse "hacia abajo", esto es, al considerar los cambios de coordenadas inducidos φ_1 y φ_2 , tales que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} k[[X_0, Y_0, Z_0]] & \xrightarrow{\varphi_0} & k[[X'_0, Y'_0, Z'_0]] \\ \downarrow \pi_{(1,0,0)}^1 & \parallel & \downarrow \pi_{(1,0,0)}^1 \\ k[[X_1, Y_1, Z_1]] & \xrightarrow{\varphi_1} & k[[X'_1, Y'_1, Z'_1]] \\ \downarrow \pi_{(0,1,0)}^2 & \parallel & \downarrow \pi_{(0,1,0)}^2 \\ k[[X_2, Y_2, Z_2]] & \xrightarrow{\varphi_2} & k[[X'_2, Y'_2, Z'_2]] \end{array}$$

sean conmutativos, entonces el cambio de coordenadas φ_2 transforme el punto $(1,1,0)$ en el punto $(1,0,0)$ o en el $(0,1,0)$. (Nótese que habría que considerar también el caso en que la segunda explosión del nuevo camino fuese en el punto $(1,0,0)$, i.e., en el diagrama II, el homomorfismo de la derecha, fuese $\pi^1_{(1,0,0)}$. Pero un estudio análogo al que sigue, anula esta posibilidad).

En efecto, supongamos las ecuaciones de φ_1 siguientes:

$$\varphi_1(x_1) = b_{11}x'_1 + b_{12}y'_1 + b_{13}z'_1 + [\text{términos de grado mayor que 1}]$$

$$\varphi_1(y_1) = b_{21}x'_1 + b_{22}y'_1 + b_{23}z'_1 + [\text{términos de grado mayor que 1}]$$

$$\varphi_1(z_1) = b_{31}x'_1 + b_{32}y'_1 + b_{33}z'_1 + [\text{términos de grado mayor que 1}]$$

siendo

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Como φ_1 transforma el punto $(0,1,0)$ en el $(0,1,0)$, debe ser

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y se tiene que $b_{12} = b_{32} = 0$ y $b_{22} = 1$. Ahora bien, según el lema anterior, las ecuaciones de φ_2 son

$$\varphi_2(x_2) = \frac{\pi^2_{(0,1,0)} \varphi_1(x_1)}{\varphi_2(y_2)}, \quad \varphi_2(y_2) = \pi^2_{(0,1,0)} \varphi_1(y_1),$$

$$\varphi_2(z_2) = \frac{\pi^2_{(0,1,0)} \varphi_1(z_1)}{\varphi_2(y_2)}$$

Llamando t_1 , t_2 y t_3 a los coeficientes de Y_1^2 en $\varphi_1(X_1)$, $\varphi_1(Y_1)$ y $\varphi_1(Z_1)$ respectivamente, queda

$$\begin{aligned}\varphi_2(Y_2) &= b_{21}X_2^1Y_2^1 + Y_2^1 + b_{23}Y_2^1Z_2^1 + t_2Y_2^1 + \left[\text{términos de grado mayor que 2} \right] = \\ &= Y_2^1(1 + b_{21}X_2^1 + t_2Y_2^1 + b_{23}Z_2^1 + \left[\text{términos de grado mayor que 1} \right]),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(X_2) &= \frac{b_{11}X_2^1 + b_{13}Z_2^1 + t_1Y_2^1 + \left[\text{términos de grado mayor que 1} \right]}{1 + b_{21}X_2^1 + t_2Y_2^1 + b_{23}Z_2^1 + \left[\text{términ. de grado mayor q. 1} \right]} = \\ &= b_{11}X_2^1 + t_1Y_2^1 + b_{13}Z_2^1 + \left[\text{términos de grado mayor que 1} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(Z_2) &= \frac{b_{31}X_2^1 + t_3Y_2^1 + b_{33}Z_2^1 + \left[\text{términos de grado mayor que 1} \right]}{1 + b_{21}X_2^1 + t_2Y_2^1 + b_{23}Z_2^1 + \left[\text{términ. grado mayor que 1} \right]} = \\ &= b_{31}X_2^1 + t_3Y_2^1 + b_{33}Z_2^1 + \left[\text{términos de grado mayor que 1} \right].\end{aligned}$$

Ahora bien, si φ_2 transforma el punto $(1,1,0)$ en el punto (α, β, γ) , debe ser

$$\begin{pmatrix} b_{11} & t_1 & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ b_{31} & t_3 & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto (α, β, γ) no puede ser $(1,0,0)$. ¿Puede ser $(0,1,0)$?

Para responder afirmativamente, en principio, tiene que ser $t_1 = t_3 = 0$; pero, con estos datos, vamos a demostrar la imposibilidad apoyándonos en la conmutatividad del diagrama I y II anterior. En efecto, si

$$\varphi_0(X_0) = a_{11}X_0^1 + a_{12}Y_0^1 + a_{13}Z_0^1 + \left[\text{términos de grado superior a 1} \right],$$

$$\varphi_0(Y_0) = a_{21}X_0^1 + a_{22}Y_0^1 + a_{23}Z_0^1 + \left[\text{términos de grado superior a 1} \right],$$

$$\varphi_0(Z_0) = a_{31}X_0^1 + a_{32}Y_0^1 + a_{33}Z_0^1 + \left[\text{términos de grado superior a 1} \right],$$

como φ_0 transforma $(1,0,0)$ en $(1,0,0)$, debe ser $a_{11} = 1$, $a_{21} = a_{31} = 0$.

Por la referida conmutatividad, debe ser

$$\pi_{(1,0,0)}^1 \cdot \varphi_0(x_0) = \varphi_1 \cdot \pi_{(1,0,0)}^1(x_0) = \varphi_1(x_1) = b_{11}x_1' + b_{13}z_1' + y_1'^2 + \dots$$

y esto es imposible porque, el monomio $y_1'^2$ no puede aparecer por el homomorfismo $\pi_{(1,0,0)}^1$.

En resumen el camino estacionario \mathcal{L} no podemos hacerlo más simple en el sentido que hemos visto.

Observación 13.- No podemos perder de vista nuestro objetivo, que es encontrar las explosiones que se realizan en puntos correspondientes a direcciones tangentes a curvas permitidas de la superficie, y éstas son mucho más fácilmente detectables cuando las transformaciones son en puntos correspondientes a las direcciones de los ejes. Esta es la razón de nuestro interés por conseguir los puntos $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$ en el camino estacionario en cuestión.

El lema 3 va a ser una herramienta muy útil en las manipulaciones que haremos al camino \mathcal{L} . En efecto, las operaciones que realizaremos para conocer su estructura, son las siguientes:

- a) La primera y segunda etapa no se modificarán.
b) Si no todos los puntos de la tercera etapa son el $(1,0,0)$, y llamamos

\mathcal{L}_3 al camino \mathcal{L} considerado a partir de la tercera etapa, es decir

$$\mathcal{L}_3 = \left[\sigma', \{f^{(i)}(x_i, y_i, z_i), p_i\} \quad i \geq n_2 \right],$$

con $\sigma' = \sigma|_Z - \{0, 1, \dots, n_2-1\}$, para la ecuación $f^{(n_2)}(x_{n_2}, y_{n_2}, z_{n_2}) = 0$,

de S_{n_2} , entonces, construimos un camino estacionario \mathcal{L}_3'' de modo que

- 1) Las $n_3 - n_2$ primeras transformaciones cuadráticas de \mathcal{L}_3'' , se hacen en el punto $(1,0,0)$.
- 2) A partir de éstas, los dos caminos \mathcal{L}_3 y \mathcal{L}_3'' coinciden.

Estas operaciones son posibles, gracias al lema 3 aplicado a \mathcal{L}_3 .

Si, en cambio, todos los puntos de la tercera etapa de

\mathcal{C} son el $(1,0,0)$, no haríamos ninguna modificación.

De este modo hemos conseguido, en general, un camino estacionario que es equivalente a \mathcal{C} si se excluyen de éste las dos primeras etapas y que tiene su primera etapa (tercera de \mathcal{C}), de transformaciones cuadráticas en $(1,0,0)$.

c) Este proceso, lo repetimos cuando sea necesario, en las etapas impares, esto es, cuando en una de ellas no todas las explosiones sean en $(1,0,0)$, obteniendo así un camino estacionario equivalente a \mathcal{C} desde esa etapa en adelante, de modo que en ella los puntos donde se localiza la explosión sean el ya citado $(1,0,0)$, y el resto de las etapas coincidiendo con \mathcal{C} .

SECCION 2.3.- TEOREMAS DE ESTRUCTURA DE CAMINOS ESTACIONARIOS DE SAS (CARAC-
RISTICA ARBITRARIA).-

En la sección anterior, hemos simplificado lo máximo posible el camino estacionario dado, al objeto de conocer las curvas permitidas de la superficie, y las explosiones que se realizan en puntos correspondientes a direcciones tangentes a ellas.

Operaremos, de nuevo, con los diagramas de Newton de los sucesivos transformados de la superficie inicial, y estudiaremos su evolución, con respecto a las operaciones indicadas en la Observación 13 de la sección anterior. Los lemas obtenidos en esa sección nos inducen a distinguir los dos casos en que la característica del cuerpo divida o no a la multiplicidad de la superficie.

Observación 1.- Según la sección anterior, se puede suponer una SAS S de ecuación $f^{(0)}(x_0, y_0, z_0) = 0$ en $k[[x_0, y_0, z_0]]$, escrita en la forma

$$f^{(0)}(x_0, y_0, z_0) = z_0^p + a_{p-1}(x_0, y_0)z_0^{p-1} + \dots + a_1(x_0, y_0)z + a_0(x_0, y_0),$$

con $a_i(x_0, y_0) \in k[[x_0, y_0]]$, $\text{ord}(a_i(x_0, y_0)) \geq p-i$, $\forall i=0, 1, \dots, p-1$.

Si $q=0$ o $q>0$ y $q \nmid p$, se supone que $a_{p-1}(x_0, y_0) = 0$.

Sea \mathcal{C} un camino estacionario para la ecuación dada de

S

$$c = \left[\sigma, \left\{ f^{(i)}(x_i, y_i, z_i), p_i \right\}_{i \in Z_0} \right]$$

Y $\{n_k\}_{k \in Z_+}$ una sucesión creciente de números naturales, de tal modo que:

a) Las formas iniciales de $f^{(i)}(x_i, y_i, z_i)$ son:

$$(a-1) z_i^p, \forall i \in Z_0, \text{ si } q=0 \text{ o } q>0 \text{ y } q \nmid p.$$

$$(a-2) (z_i + a_i x_i)^p, \forall i \in Z_0, \text{ con } a_0 = a_1 = \dots = a_{n_1-1} = 0 \text{ si } q>0 \text{ y } q \mid p.$$

$$b) P_0 = P_1 = \dots = P_{n_1-1} = (1, 0, 0).$$

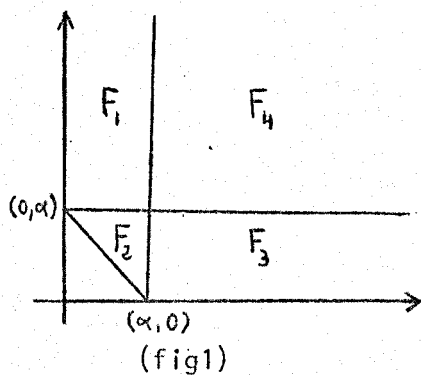
$$c) \text{ Si } k \text{ es impar } P_{n_k} = P_{n_k+1} = \dots = P_{n_{k+1}-1} = (0, 1, 0)$$

$$d) \text{ Si } k \text{ es par } (n_k) = (n_{k+1}) = \dots = (n_{k+1}-1) = 1.$$

Caso I ($q=0$ o $q>0$ y $q \nmid p$).

Notación 2.- Fijemos un $j \in Z$, $0 \leq j < p-1$ arbitrario tal que el nivel j (notado D_j) del diagrama de Newton D de $f^{(0)}(x_0, y_0, z_0)$ no sea vacío. Estudiaremos la evolución de este nivel j al aplicarle las operaciones que hemos descrito en la sección anterior, es decir, explosiones en $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y cambios de coordenadas del tipo (1) del lema 3 § 2.2.

LLamando $\alpha = p-j$, fraccionemos el D_j de cualquier serie $f^{(i)}(x_i, y_i, z_i)$ en cuatro zonas (véase fig.1).



$$F_1 = \{ (a, b) \in D_j \mid a < \alpha, b \geq \alpha \}$$

$$F_2 = \{ (a, b) \in D_j \mid a < \alpha, b < \alpha \}$$

$$F_3 = \{ (a, b) \in D_j \mid a \geq \alpha, b < \alpha \}$$

$$F_4 = \{ (a, b) \in D_j \mid a \geq \alpha, b \geq \alpha \}.$$

Nótese que por la condición (a-1) impuesta al camino, para todo $(a, b) \in D_j$ es $a+b > \alpha$.

Observación 3.-

a) Las transformaciones cuadráticas en el punto $(1,0,0)$, transforman monomios en monomios del siguiente modo:

$$x_i^a y_i^b z_i^j \longrightarrow x_{i+1}^{a+b+j-p} y_{i+1}^b z_{i+1}^j$$

por tanto, un punto (a,b) de D_j se transforma en el $(a+b-\alpha, b)$.

Así (fig.2):

- Los puntos F_1 y F_4 se mueven a la derecha ($b > \alpha$),
o se quedan fijos ($b = \alpha$).
- Los puntos de F_2 y F_3 se mueven a la izquierda ($b < \alpha$).

b) Las transformaciones cuadráticas en el punto $(0,1,0)$, transforman monomios en monomios del siguiente modo:

$$x_i^a y_i^b z_i^j \longrightarrow x_{i+1}^a y_{i+1}^{a+b+j-p} z_{i+1}^j,$$

por tanto, un punto (a,b) de D_j se transforma en el $(a, b+a-\alpha)$.

Así (fig.3) :

- Los puntos de F_1 y F_2 se mueven hacia abajo ($a < \alpha$).
- Los puntos de F_3 y F_4 se mueven hacia arriba ($a > \alpha$)
o se quedan fijos ($a = \alpha$).

c) Los cambios de coordenadas del tipo (1) del lema 3 § 2.2, transforman el monomio $x_i^a y_i^b z_i^j$ en $x_i^a (y_i + \sum_{l=0}^n \beta_l x_i^{l+1})^b z_i^j$, luego un punto (a,b) de D_j , se transforma (fig.4) en una serie de puntos de D_j , del triángulo determinado por los puntos (a,b) , $(a+b,0)$ y $(a+b(n+1),0)$.

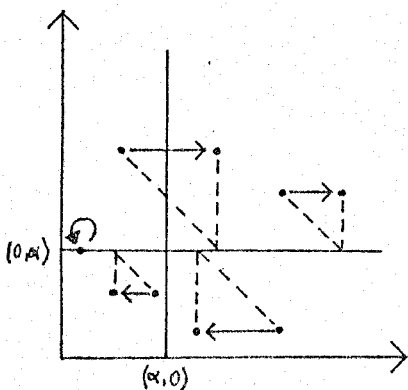


fig. 2

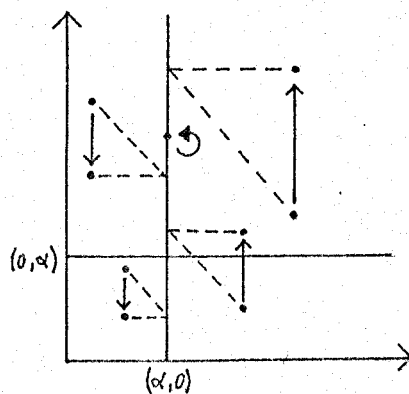


fig. 3

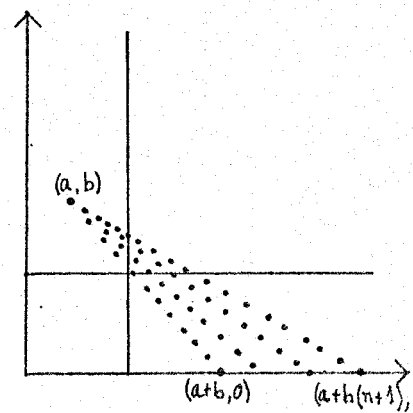


fig. 4

Lema 4.- Dado un $j \in Z_0$, $0 \leq j < p-1$ fijo, después de un número finito de las operaciones anteriormente descritas, en la zona $F_1 \subset D_j$ correspondiente, no hay puntos. Más aun, esta condición es estable para las sucesivas operaciones.

Demostración.- Refiriéndonos siempre al nivel D_j , supongamos que $F_1 \neq \emptyset$ y sea

$$v_0 = \min \{ a \mid (a,b) \in F_1 \} .$$

Durante la primera etapa de nuestras operaciones, explosiones en $(1,0,0)$, todos los puntos de F_1 se corren hacia la derecha, conservando la ordenada, salvo los que tienen ordenada igual a α que quedan fijos. Durante la segunda etapa, explosiones en $(0,1,0)$, todos los puntos de F_1 se corren hacia abajo, conservando su abcisa. De aquí resulta evidente que, después de estas dos etapas, si aún es $F_1 \neq \emptyset$ y si

$$v_1 = \min \{ a \mid (a,b) \in F_1 \} ,$$

entonces es

$$v_1 > v_0 .$$

Ahora bien, si eventualmene hay que realizar un cambio de coordenadas del tipo (1) ya descrito, es claro que, después de este cambio, sigue siendo

$$v_1 = \min \{ a \mid (a,b) \in F_1 \} ,$$

porque los puntos en que se alcanza este mínimo son incancelables al no tener ninguno situado a su izquierda.

Ahora ya queda claro que, después de un número finito de operaciones (etapas y cambios de coordenadas), no quedan ya puntos en F_1 .

Ahora bien, esta condición es estable, es decir, si en un momento del proceso no hay puntos en F_1 , no los puede haber después. En efecto:

a) Por explosiones en $(1,0,0)$ no pueden entrar puntos en F_1 , pues los que están por encima de la recta $b = \alpha$ se corren hacia la derecha, y

los que están en ella, permanecen fijos.

- b) Por explosiones en $(0,1,0)$ no pueden entrar puntos en F_1 pues estas explosiones mueven los puntos a abcisa constante.
- c) Por los cambios de coordenadas que usamos, tampoco pueden entrar puntos en F_1 , pues un cambio de coordenadas de éstos abre cada punto en un abanico hacia la derecha y hacia abajo.

Esto prueba el lema.

Lema 5.- Fijado un $j \in Z_0$, $0 \leq j < p-1$, después de un número finito de operaciones, en la zona $F_2 \subset D_j$ correspondiente, no hay puntos. Y esta condición es estable para las sucesivas operaciones.

Demostración.- Por el lema anterior, sabemos que, después de un número finito de operaciones, no hay puntos en el $F_1 \subset D_j$ correspondiente, y que esta condición es estable. Lo que demostraremos es que a partir de este momento no hay puntos en F_2 .

En efecto, supongamos que los hubiera y sea

$$m_0 = \min \{ a+b \mid (a,b) \in F_2 \}$$

(al número $a+b$ le llamaremos orden del punto (a,b)). Vamos a estudiar cómo evoluciona este mínimo con las operaciones que estamos efectuando. Así se tiene:

- a) Explosiones en $(1,0,0)$: Estas explosiones hacen que los puntos de F_2 se corran hacia la izquierda, a ordenada constante y, por tanto, que disminuyan estrictamente su orden. Al final de una etapa de estas explosiones, si ponemos

$$m_1 = \min \{ a+b \mid (a,b) \in F_2 \}$$

es

$$m_1 < m_0$$

- b) Explosiones en $(0,1,0)$: Estas explosiones hacen que los puntos de F_2 se corran hacia abajo, a abcisa constante y, por tanto, que disminuyan estrictamente su orden. Al final de una etapa de estas explosiones, si

ponemos

$$m_2 = \min \{ a+b \mid (a,b) \in F_2 \}$$

es

$$m_2 < m_1 .$$

c) Cambios de coordenadas: De todos los puntos de F_2 que verifiquen que su orden es mínimo, elegimos el (a,b) tal que su abcisa sea mínima. Este punto no puede cancelarse por el cambio de coordenadas, porque de ser así, se cancelaría con uno procedente de (a_1, b_1) tal que

$$a_1 + b_1 \leq m_2 \quad \text{y} \quad a_1 \leq a .$$

Pero la elección de (a,b) y la no existencia de puntos en F_1 imposibilita esta anulación.

Igualmente, no es posible por el cambio de coordenadas, obtener un punto en F_2 cuyo orden sea menor que m_2 , ya que todo punto (a_1, b_1) da lugar a puntos del conjunto

$$\{ (u,w) \mid u \geq a_1, \quad w \leq b_1 \quad \text{y} \quad u+w \geq a_1 + b_1 \} ,$$

según hemos visto en la Observación 3.

En resumen, si una vez que $F_1 = \emptyset$ suponemos que $F_2 \neq \emptyset$ y continuamos efectuando nuestras operaciones, los puntos de F_2 disminuyen su orden estrictamente. Como el número de explosiones es infinito en el camino ℓ , después de un número finito de operaciones, para algún $(a,b) \in F_2$ es $a+b \leq \alpha$. La desigualdad estricta es imposible, porque el monomio correspondiente tendría grado menor que p . La igualdad indicaría un monomio de grado p , que en el caso de $q=0$ o $q>0$ y $q \nmid p$, es imposible porque la forma inicial de todos los $f^{(i)}(x_i, y_i, z_i)$ es z_i^p .

Por esto, hemos llegado a una contradicción, no puede haber puntos en F_2 , después de que no los haya en F_1 . Además se ha probado que en ningún otro momento del camino, puede haber puntos en F_2 , porque no lo habrá en F_1 según el lema anterior.

Con estos lemas, podemos enunciar el siguiente

Teorema 6.- Sea

$$\mathcal{C} = \left[\sigma, \left\{ f^{(i)}(x_i, y_i, z_i), P_i \right\}_{i \in Z_0} \right]$$

un camino estacionario para la ecuación $f^{(0)}(x_0, y_0, z_0) = 0$ de la SAS

$$S_0 = \text{Spec} \left(k[[x_0, y_0, z_0]] / (f^{(0)}(x_0, y_0, z_0)) \right),$$

de multiplicidad p . Sea $q = \text{car } k = 0$ o $q > 0$ y $q \nmid p$, de modo que no existe ningún entero positivo tal que a partir de él, todas las explosiones sean del mismo tipo. Entonces, existe un $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que para todo $j \geq n_0$ y $\sigma(j) = 2$, existe una curva permitida C en

$$S_j = \text{Spec} \left(k[[x_j, y_j, z_j]] / (f^{(j)}(x_j, y_j, z_j)) \right)$$

que es tangente a la recta tangente determinada por P_j .

Demostración.- Estamos en las condiciones de los dos últimos lemas, por consiguiente, tenemos un camino equivalente a \mathcal{C} (salvo un número finito de etapas) de modo que en este nuevo camino, para todo i

$$f^{(i)}(x_i, y_i, z_i) \in (x_i, z_i)^p.$$

En efecto, por los lemas anteriores, para cada nivel j del diagrama D , existe un t_j tal que a partir de la etapa t_j se tiene

$$\forall (a, b) \in D_j \Rightarrow a \geq \alpha = p - j \Rightarrow a + j \geq p \Rightarrow x^a y^b z^j \in (x, z)^p.$$

Escogiendo el mayor de los t_j ($0 \leq j < p$), se tiene lo que pretendíamos. Pero (x_i, z_i) es una curva permitida en S_i por el Teorema 9 de la sección 1.1, luego las explosiones de las etapas pares verifican el teorema, a partir de un determinado momento. Este resultado se traslada al camino dado \mathcal{C} , vía la equivalencia de caminos estacionarios para ecuaciones, con lo que se concluye el teorema.

Caso II .(q>0 y q|p).-

El probar un resultado análogo al anterior es, en este caso, algo más complejo, dado que la forma inicial a lo largo del camino estacionario, no es Z^p , en general, y que no podemos tomar independientemente los diagramas de Newton de los coeficientes de las potencias de Z , porque ahora, los cambios de coordenadas, serán del tipo (2) del lema 3 § 2.2, donde por consiguiente, existe una interrelación entre los diversos niveles de los diagramas de Newton. Es por esto, por lo que en este caso, estudiaremos globalmente el diagrama de Newton de las series, haciendo un estudio paralelo al del caso I.

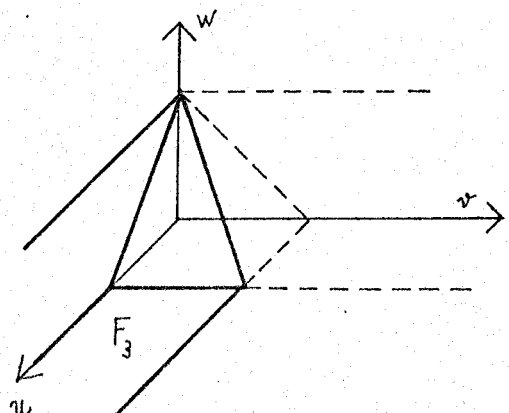
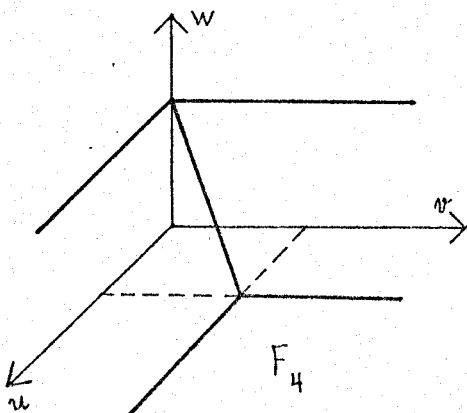
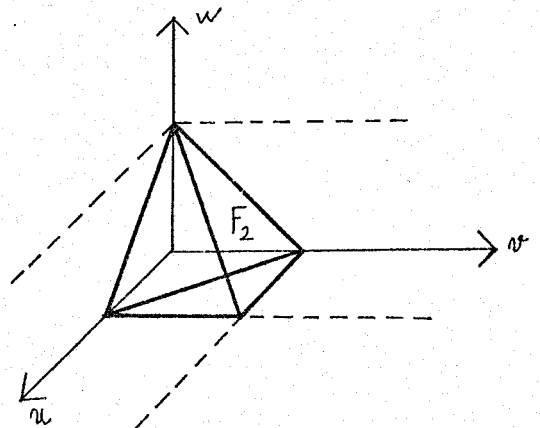
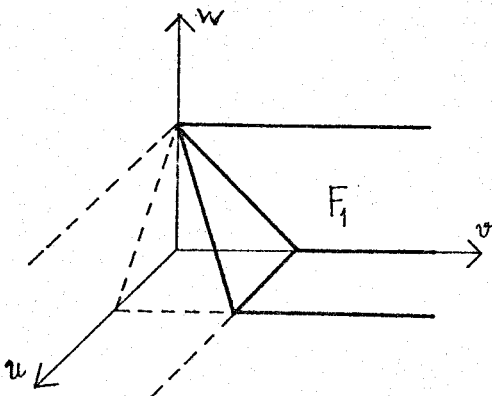
Notación 7.- En la situación de la Observación 1, el diagrama de Newton D de las sucesivas $f^{(i)}(X_i, Y_i, Z_i)$ de \mathcal{C} lo dividiremos en cuatro zonas:

$$F_1 = \{ (a,b,c) \in D \mid a+c < p, b+c \geq p \}$$

$$F_2 = \{ (a,b,c) \in D \mid a+c < p, b+c < p \}$$

$$F_3 = \{ (a,b,c) \in D \mid a+c \geq p, b+c < p \}$$

$$F_4 = \{ (a,b,c) \in D \mid a+c \geq p, b+c \geq p \}$$



Observación 8.- Estudiemos cómo evoluciona el diagrama D bajo las operaciones que realizaremos en este caso, a saber, transformaciones cuadráticas en los puntos $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$ y cambios de coordenadas del tipo (2) del lema 3 § 2.2 :

- a) Transformaciones cuadráticas en $(1,0,0)$, llevan el monomio $x_i^a y_i^b z_i^c$ al $x_{i+1}^{a+b+c-p} y_{i+1}^b z_{i+1}^c$, luego un punto (a,b,c) de D se transforma en el $(a+b+c-p, b, c)$.
- b) Transformaciones cuadráticas en $(0,1,0)$, llevan el monomio $x_i^a y_i^b z_i^c$ al $x_{i+1}^a y_{i+1}^{b+a+c-p} z_{i+1}^c$, luego un punto (a,b,c) de D se transforma en el $(a, a+b+c-p, c)$.
- c) Cambios de coordenadas del tipo indicado, transforman el monomio

$$x_i^a y_i^b z_i^c \text{ en } x_i^a (y_i + \sum_{j=0}^n \beta_j x_i^{j+1})^b (z_i + \sum_{j=0}^n \gamma_j x_i^{j+1})^c,$$

luego un punto (a,b,c) de D se transforma en una serie de puntos de la región $\{(u,v,w) \mid v \leq b, w \leq c, u+v+w \geq a+b+c\}$.

Lema 9.- Después de un número finito de operaciones, en la zona $F_1 \subset D$ correspondiente, no hay puntos. Más aun, esta condición es estable para las sucesivas operaciones.

Demostración.- Supongamos $F_1 \neq \emptyset$ y sea

$$\nu_0 = \min \{ a \mid (a,b,c) \in F_1 \}.$$

Se tiene:

- a) Por una explosión en $(1,0,0)$, cada punto $(a,b,c) \in F_1$ con $b+c > p$ se desplaza paralelamente al eje OU en el sentido de abscisas crecientes. Los puntos $(a,b,c) \in F_1$ con $b+c=p$ permanecen fijos.
- b) Por una explosión en $(0,1,0)$ cada punto (a,b,c) de la región F_1 del diagrama de Newton resultante de aplicar a $f^{(0)}$ la primera etapa, se desplaza paralelamente a OV en el sentido de ordenadas decrecientes.

Por tanto, si al final de la segunda etapa, se pone, pa-

ra la región F_1 correspondiente

$$\nu_1 = \min \{ a \mid (a,b,c) \in F_1 \} ,$$

es

$$\nu_1 > \nu_0 .$$

Ahora bien, si eventualmente hay que realizar un cambio de coordenadas del tipo (2) ya descrito, es claro que después de efectuarlo, en la región F_1 correspondiente, es

$$\nu_1 = \min \{ a \mid (a,b,c) \in F_1 \} ,$$

porque los puntos en que se alcanza ese mínimo son incancelables por el cambio y no puede aparecer ningún punto en F_1 con primera coordenada menor. Esto se justifica del siguiente modo: si apareciese un punto (u,v,w) después del cambio, en F_1 , de primera coordenada menor, entonces:

a) No puede proceder del desarrollo de uno (a',b',c') de F_1 porque

$$u \geq a' \geq \nu_1 .$$

b) No puede proceder del desarrollo de uno $(a',b',c') \in F_2 \cup F_3$ porque

$$v+w \leq b'+c' < p \implies (u,v,w) \in F_2 \cup F_3$$

c) No puede proceder del desarrollo de uno $(a',b',c') \in F_4$ porque

$$v+p > u+v+w \geq a'+b'+c' \geq b'+p \implies v > b'$$

que contradice el hecho de que $v \leq b'$.

Repitiendo el razonamiento, es claro que, después de la tercera y cuarta etapas, se obtiene un $\nu_2 > \nu_1$, que es la primera coordenada mínima de los puntos del F_1 correspondiente. Y además, después del eventual cambio de coordenadas, no aparece ningún nuevo punto en F_1 de primera coordenada menor que ν_2 .

Por consiguiente, después de un número finito de operaciones (etapas y cambios de coordenadas), no hay puntos en F_1 , ya que los puntos de F_2 , F_3 y F_4 no pueden entrar en F_1 , ni con cambios de coordenadas, por b) y c) del razonamiento anterior, ni con explosiones en

$(1,0,0)$ y $(0,1,0)$ como es fácilmente comprobable.

Esto demuestra que la situación es estable, esto es, si en F_1 no hay puntos en un momento concreto del proceso, después no los puede haber tampoco.

Lema 10.- Después de un número finito de operaciones, en la zona $F_2 \subset D$ correspondiente, no hay puntos. Esta condición es estable.

Demostración.- Por el lema anterior, sabemos que después de un número finito de operaciones, no hay puntos en la zona $F_1 \subset D$ correspondiente, y que esta condición es estable. Lo que demostraremos es que, a partir de este preciso momento, no hay puntos en F_2 .

En efecto, si hubiera puntos en F_2 se pondría.

$$\mu_0 = \min \{ a+b+c \mid (a,b,c) \in F_2 \}$$

(al número $a+b+c$ se le llamará orden del punto (a,b,c)).

Estudiemos, entonces, cómo evoluciona este mínimo ante las operaciones a realizar:

a) Explosiones en $(1,0,0)$: si $(a,b,c) \in F_2$ es tal que $a+b+c = \mu_0$, su transformado, que es $(a+b+c-p, b, c)$, verifica que

$$(a+b+c-p) + c < a+c < p \implies (a+b+c-p, b, c) \in F_2$$

y su orden es

$$(a+b+c-p) + b + c = \mu_0 + b + c - p < \mu_0.$$

Luego, si después de esta explosión existen puntos en F_2 , y si

$$\mu_1 = \min \{ a+b+c \mid (a,b,c) \in F_2 \},$$

es evidente que

$$\mu_1 < \mu_0$$

b) Explosiones en $(0,1,0)$: si $(a,b,c) \in F_2$ es tal que $a+b+c = \mu_0$, su transformado, que es $(a, a+b+c-p, c)$, verifica que

$$(a+b+c-p) + c < a+c < p \implies (a, a+b+c-p, c) \in F_2$$

y su orden es

$$(a+b+c-p) + a + c = \mu_0 + a + c - p < \mu_0 .$$

Luego, después de esta explosión, si existen puntos en F_2 y si

$$\mu_1 = \min \{ a+b+c \mid (a,b,c) \in F_2 \} ,$$

es evidente que

$$\mu_1 < \mu_0 .$$

c) Cambios de coordenadas: Sea un $(a,b,c) \in F_2$ tal que

(i) su orden es μ_0 , y

(ii) a es mínimo, entre los que verifican la anterior condición.

En la Observación 8 vimos que un punto (a',b',c') mediante este cambio se transforma en puntos del conjunto

$$\{ (u,v,w) \mid u \geq a' , v \leq b' , w \leq c' , u+v+w \geq a'+b'+c' \} .$$

Entonces:

(c-1) Si $(a',b',c') \in F_3$ se tiene que

$$(1) u+w \geq a'+b'+c'-v \geq p+b'-v \geq p$$

$$(2) v+w \leq b'+c' < p$$

por tanto $(u,v,w) \in F_3$.

(c-2) Si $(a',b',c') \in F_4$ por (1), $(u,v,w) \in F_3 \cup F_4$.

(c-3) Si $(a',b',c') \in F_2$ por (2), $(u,v,w) \in F_2 \cup F_3$.

Según estos tres resultados, si un punto (a,b,c) elegido, se cancelase después del cambio, lo sería con uno cuyo orden fuese μ_0 , de primera coordenada igual, pero, o bien la segunda coordenada, o bien la tercera, mayor, y ésto es imposible porque a es mínimo.

Por consiguiente, los (a,b,c) verificando (i) y (ii) son incancelables y no puede aparecer ninguno cuyo orden sea menor que μ_0 . Por tanto, después del cambio, existen puntos en F_2 , y si

$$\mu_1 = \min \{ a+b+c \mid (a,b,c) \in F_2 \} ,$$

se tiene que

$$\mu_1 = \mu_0 .$$

En suma, en la operación siguiente a la no existencia de puntos en F_1 , si había puntos en F_2 , y si los sigue habiendo después de esa operación, sus órdenes tienen un mínimo $\mu_1 \leq \mu_0$, alcanzándose la igualdad sólo en el caso de un cambio de coordenadas.

Por consiguiente, después de un número finito de operaciones, para algún $(a,b,c) \in F_2$, se tiene que

$$a + b + c \leq p .$$

La desigualdad estricta es obviamente imposible (se reduciría la multiplicidad), y la igualdad indicaría un monomio de grado p , por lo que pertenecería a la forma inicial, que sería, bien Z^p , bien $(Z+aX)^p$. Esto es una contradicción porque, tanto Z^p como los monomios de $(Z+aX)^p$, dan puntos en el diagrama de Newton de F_4 y no de F_2 como era (a,b,c) .

La estabilidad del lema anterior, garantiza la estabilidad de éste, ya que cuando no hay puntos en F_1 , hemos demostrado que no hay puntos en F_2 .

Con estos lemas, enunciaremos el siguiente teorema de estructura de caminos estacionarios, para el caso de característica $q > 0$ y $q \mid p = \text{multiplicidad de las SAS}$.

Teorema 11. - Sea

$$\mathcal{C} = \left[\sigma, \{ f^{(i)}(x_i, y_i, z_i), P_i \} \mid i \in Z_0 \right]$$

un camino estacionario para la ecuación $f^{(0)}(x_0, y_0, z_0) = 0$ de la SAS

$$S_0 = \text{Spec} \left(\frac{k[[x_0, y_0, z_0]]}{(f^{(0)}(x_0, y_0, z_0))} \right)$$

con $q = \text{car } k > 0$ y $q \mid p = \underline{p}(f^{(0)}(x_0, y_0, z_0))$, de modo que no existe -

ningún entero positivo tal que a partir de él todas las explosiones sean del mismo tipo. Entonces, existe un $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que para todo $j \geq n_0$ con $\sigma(j) = 2$, existe una curva permitida C en

$$S_j = \text{Spec} \left(\frac{k[[X_j, Y_j, Z_j]]}{(f^{(j)}(X_j, Y_j, Z_j))} \right)$$

que es tangente a la recta tangente determinada por P_j .

Demostración.- Es análoga a la del teorema 6, apoyándose en los dos lemas anteriores.

Con este resultado acabamos este capítulo. Nótese que hemos generalizado el teor. 11 de [14], por el que podemos afirmar que, para cualquier característica, no existen caminos estacionarios de SAS, a menos que se hagan explosiones del origen en puntos correspondientes a direcciones tangentes a curvas permitidas, y esto en un número infinito de veces.

CAPITULO TERCERO

SUCESIONES ADMISIBLES DE EXPLOSIONES. TEOREMA DE FINITUD

INTRODUCCION.-

En el capítulo anterior veíamos, como ya se apuntó, unos resultados que equivalen a decir que, dada una superficie algebraica X en un espacio proyectivo tridimensional y un punto cero-dimensional $x \in X$, existe una sucesión finita de transformaciones cuadráticas de X , la primera con centro x , la segunda con centro un punto x_1 que va sobre x ., etc,

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_n & \longrightarrow & X_{n-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_0 = X \\
 \psi & & \psi & & & & \psi & & \psi \\
 x_n & & x_{n-1} & & & & x_1 & & x_0 = x
 \end{array}$$

tal que x_n es simple.

En este capítulo, vamos a centrar la atención también, en el punto $x \in X$, pero vamos a estudiar todos los puntos que van sobre x en todas las sucesiones "admisibles" de explosiones de X . Lo ideal sería estudiar la evolución de x en todas las sucesiones posibles de explosiones de X . Pero esto es demasiado amplio y no conduce a resultados prácticos. Tenemos, pues, que restringirnos a una cierta clase de sucesiones de explosiones (restricción que es más bien tenue), a saber, las su-

cesiones que llamaremos admisibles. El resultado que vamos a demostrar - constituye, de un lado, un teorema de desingularización débil para superficies algebroides y, del otro, un primer paso esencial en la desingularización de superficies algebraicas.

Definición 1.- Sea S una SAS sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado, de característica $q > 0$. Una sucesión admisible de explosiones para S , es una sucesión $\{S_i\}_{i \in \mathbb{Z}_0}$ de SAS, verificando las siguientes condiciones:

$$1^\circ) S_0 = S$$

2°) S_{i+1} es un explotado formal de S_i con centro, bien el origen (si no hay curvas permitidas en S_i), bien una curva permitida.

El objetivo de este capítulo es probar la no existencia de sucesiones admisibles infinitas de explosiones en las que la multiplicidad sea constante y superior a 1. Este resultado se puede expresar como sigue,

Teorema de finitud de sucesiones admisibles.-

Sea S una SAS sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado, de característica $q \geq 0$, y sea $\{S_i\}_{i \in \mathbb{Z}_0}$ una sucesión admisible de explosiones para S . Se tiene que:

- Si el cono tangente a S no es un plano único, entonces existe un entero n tal que, para todo $i \geq n$, S_i es lisa.
- Si el cono tangente a S es un plano único y S tiene un punto singular aislado, la conclusión del apartado anterior sigue siendo válida.

La demostración se hará por inducción y bastará probar la existencia de un entero n tal que para todo $i \geq n$, S_i es de multiplicidad menor que la de S_0 .

SECCION 3.1.- CASO EN QUE EL CONO TANGENTE NO SE REDUCE A UN PLANO UNICO.-

Necesitamos, para este caso, un lema previo al que hacíamos referencia en la sección 2.2, porque se encuentra en [13] Cap III, pero la demostración no es generalizable a característica positiva.

Lema 1.- Sea S una SAS cuyo cono tangente no se reduzca a un plano único. Si un transformado cuadrático S_1 de S tiene multiplicidad igual a la de S , entonces se verifican las propiedades siguientes:

(1-1) El divisor excepcional de S es unión de un número finito de rectas proyectivas pasando todas por el punto en el cual se toma el transformado cuadrático y con, al menos, dos de ellas diferentes.

(1-2) El cono tangente a S_1 no se reduce a un plano único.

Demostración.- En primer lugar, analizaremos la multiplicidad de un punto en una curva en el plano proyectivo.

Sea $f_p(X, Y, Z) \in k[X, Y, Z]$ una forma de grado p , y $f_p(X, Y, Z) = 0$ la ecuación de la curva C en IP_k^2 . Sea $P = (1, \beta, \gamma)$ un punto de esa curva, i.e., $f_p(1, \beta, \gamma) = 0$; denotamos por m a la multi-

plicidad del punto P en la curva C . Entonces, m es la multiplicidad de $(1,0,0)$ en la curva de ecuación $f_p(X', Y'+\beta X', Z'+\gamma X') = 0$. Deshomogeneizando con respecto a X' , m es la multiplicidad del origen en $f_p(1, Y''+\beta, Z''+\gamma) = 0$, siendo $Y''=Y'/X'$ y $Z''=Z'/X'$.

Ahora bien, el anillo local del plano afín en el origen es

$$A = k[Y'', Z'']_{(Y'', Z'')}.$$

Como m es la multiplicidad del anillo local

$$B = \left[k[Y'', Z''] / (f_p(1, Y''+\beta, Z''+\gamma)) \right]_{(Y''+f_p(1, Y''+\beta, Z''+\gamma), Z''+f_p(1, Y''+\beta, Z''+\gamma))} = A / f_p(1, Y''+\beta, Z''+\gamma) \cdot A,$$

entonces m es el orden de $f_p(1, Y''+\beta, Z''+\gamma)$ en la filtración de A definida por su ideal maximal (cf [13] lema 3.2.4). En suma,

$$m = \text{orden de la serie } f_p(1, Y''+\beta, Z''+\gamma).$$

Volviendo a nuestro enunciado, sea $f(X, Y, Z) = 0$ una ecuación de S en $k[[X, Y, Z]]$, con $\underline{0}(f(X, Y, Z)) = p$ y escrita en la forma de Weierstrass. Además, sea

$$f(X, Y, Z) = \sum_{i=p}^{\infty} f_i(X, Y, Z),$$

donde $f_i(X, Y, Z)$ es, o bien cero, o bien una forma de grado i . Si el punto en el que se localiza la explosión es $(1, \beta, \gamma)$, entonces una ecuación de S_1 es

$$(1) \quad f^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1) = \sum_{i=p}^{\infty} X_1^{i-n} f_i(1, Y_1+\beta, Z_1+\gamma) = f_p(1, Y_1+\beta, Z_1+\gamma) + X_1 f_{p+1}(1, Y_1+\beta, Z_1+\gamma) + X_1^2 f_{p+2}(1, Y_1+\beta, Z_1+\gamma) + \dots$$

Por hipótesis $\underline{0}(f^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1)) = p$; entonces $f_p(1, Y_1+\beta, Z_1+\gamma)$ debe ser de orden p ya que:

- a) $f_p(1, Y_1 + \beta, Z_1 + \gamma)$ no puede ser cero, porque en la ecuación de S existiría el término Z^p .
- b) Los términos de (1) que no están en $f_p(1, Y_1 + \beta, Z_1 + \gamma)$ son todos divisibles por X_1 , luego no pueden cancelarse con ninguno de $f_p(1, Y_1 + \beta, Z_1 + \gamma)$.

Por lo visto anteriormente, si $f_p(1, Y_1 + \beta, Z_1 + \gamma)$ es de orden p , es porque $(1, \beta, \gamma)$ es un punto de multiplicidad p en el divisor excepcional. También es claro que $f_p(1, Y_1 + \beta, Z_1 + \gamma)$ es una forma de grado p .

Para concluir la demostración del primer apartado, mediante un cambio de coordenadas, se puede suponer que el punto de explosión es $(1, 0, 0)$. En este caso, hemos obtenido que $f_p(1, Y_1, Z_1)$ es una forma de grado p , luego $f_p(X, Y, Z)$ no depende de X , y por ser k algebraicamente cerrado, se tiene que

$$f_p(X, Y, Z) = (Z - \alpha_1 Y)(Z - \alpha_2 Y) \dots (Z - \alpha_n Y).$$

Más aun, como $f_p(X, Y, Z)$ no es potencia de una forma lineal, al menos hay dos α_i distintas entre sí. Deshaciendo el cambio anterior, se tiene el apartado 1.1.

Igual que antes, el apartado 1.2 basta probarlo para la transformación cuadrática en $(1, 0, 0)$. Si el cono tangente a S_1 se reduce a un único plano, la forma inicial de S_1 sería:

$$f_p^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1) = (Z_1 + aY_1 + bX_1)^p,$$

y teniendo en cuenta (1)

$$f_p^{(1)}(0, Y_1, Z_1) = (Z_1 + aY_1)^p = f_p(1, Y_1, Z_1)$$

que contradice lo ya probado.

Corolario 2.- Se verifican las siguientes propiedades para una SAS S cuyo cono tangente no se reduce a un plano único:

2.1) S posee un camino estacionario si y solo si S contiene una curva

permitida.

2.2) S contiene a lo más una curva permitida.

Demostración.- Es consecuencia inmediata del lema 1 y del apartado 2) del teor.3.3.8 de [13].

Estamos ya en condiciones de probar el teorema de finitud de las sucesiones admisibles de explosiones y que enunciamos en la siguiente

Proposición 3.- Sea S una SAS cuyo cono tangente no consta de un plano único; sea $\{S_i\}_{i \in \mathbb{Z}_0}$ una sucesión admisible de explosiones para S .

Existe un entero n tal que, para todo $i \geq n$, la multiplicidad de S_i es menor que la de S .

Demostración.- Distinguiremos los dos casos siguientes:

- a) S contiene una curva permitida (única por el Cor.2).
- b) S no contiene ninguna curva permitida.

Caso_a.- Supongamos que $f(X,Y,Z) = 0$ es una ecuación de S con $f(X,Y,Z) \in k[[X,Y,Z]]$ escrita en la forma de Weierstrass y $\underline{o}(f(X,Y,Z)) = p$. Podemos suponer también que la curva permitida es la de ideal (Y,Z) , sin más que hacer un cambio de coordenadas conveniente. Entonces

$$(2) \quad f(X,Y,Z) = Z^p + a_{p-1}(X,Y)YZ^{p-1} + \dots + a_1(X,Y)Y^{p-1}Z + a_0(X,Y)Y^p,$$

siendo $a_i(X,Y) \in k[[X,Y]]$ y $\underline{o}(a_i(X,Y)) \geq 0$, $\forall i=0,1,\dots,p-1$.

Por la expresión (2) para $f(X,Y,Z)$, su forma inicial es del tipo

$$(3) \quad f_p(X,Y,Z) = \sum_{j=1}^m (Z+a_jY)^{r_j}$$

donde $m > 1$, $a_j \neq a_{j'}$ para $j \neq j'$ y $\sum_{j=1}^m r_j = p$. Así pues, el divisor excepcional de S tiene un número finito de puntos para transformaciones monoidales con centro la curva permitida, que son

$$\{ (1, -a_1), \dots, (1, -a_m) \} .$$

La primera explosión de la sucesión admisible es una transformación monoidal con centro (Y, Z) , de la que se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que ha sido tomada en el punto $(1, -a_1)$, es decir, que sus ecuaciones son

$$\begin{aligned} X &= X' \\ Y &= Y' \\ Z &= Y'(Z' - a_1) . \end{aligned}$$

Escribiendo $f(X, Y, Z)$ en la forma

$$f(X, Y, Z) = \sum_{i=p}^{\infty} f_i(X, Y, Z) ,$$

se tiene que la ecuación de la transformada monoidal de S , en el punto considerado, es

$$f'(X', Y', Z') = f_p(X', 1, Z' - a_1) + \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{f_{p+1}(X', Y', Y'(Z' - a_1))}{Y'^p} .$$

Así se tiene:

i) $f_p(X', 1, Z' - a_1) = \sum_{j=1}^m (Z' - a_1 + a_j)^{r_j}$ y, claramente, este es un polinomio de orden $r_1 < p$.

ii) Ninguno de los términos del anterior polinomio puede cancelar con términos provenientes de formas de grado mayor de $f(X, Y, Z)$. En efecto, un monomio de f divisible por X da lugar a términos de f' divisibles por X' . Y un monomio de f , de grado mayor que p , no divisible por X , da lugar en f' a monomios divisibles por Y' .

Así pues, la transformada monoidal tiene multiplicidad $r_1 < p$, lo que prueba la proposición en este caso.

Caso b)..- Si S no contiene curvas permitidas, por 2.1 del corolario anterior, no existen caminos estacionarios para S , luego cualquier sucesión de transformados cuadráticos, hace descender la multiplicidad, luego de un número finito de pasos.

Además, esto implica que la sucesión admisible de explosiones dada, mientras se mantenga la multiplicidad, solo está formada por transformados cuadráticos. En efecto, supongamos que en algún momento de la sucesión, digamos en S_n , apareciese una curva permitida. Por 1.2 del lema 1, S_n tendría un cono tangente que no sería un plano único y esto indicaría, por el corolario 2, la existencia para S_n de un camino estacionario. Llegaríamos así a una contradicción con el hecho de que S no admite caminos estacionarios.

En resumen, tenemos los dos hechos siguientes:

- (i) S no admite caminos estacionarios.
- (ii) Si se mantiene la multiplicidad en la sucesión admisible de explosiones, solo hay transformados cuadráticos en ella.

Estos dos hechos garantizan la no existencia para S de sucesiones admisibles de explosiones de multiplicidad constante.

c.q.d.

SECCION 3.2.-CURVAS PERMITIDAS EN TRANSFORMADOS CUADRATICOS.-

El caso en que el cono tangente a S sea un único plano, plantea más dificultades que el caso anterior. La razón de esta dificultad estriba en la posible aparición de curvas permitidas luego de transformaciones cuadráticas, incluso en número superior a uno.

En esta sección abordaremos este problema, caracterizando las curvas permitidas que aparecen después de una transformación cuadrática en $(1,0,0)$, y si estas curvas proceden por desingularización de otras singulares de la superficie dada.

Situación 1.- Sea S una SAS sin curvas permitidas. Sea $f(X,Y,Z) = 0$ una ecuación de S , con $f(X,Y,Z) \in k[[X,Y,Z]]$ escrita en la forma de Weierstrass, y cuya forma inicial es Z^p . Supondremos también que, después de la explosión en $(1,0,0)$, el transformado cuadrático S_1 de S conserva la multiplicidad y su cono tangente es todavía un plano único. Sea

$$f^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1) = f(X_1, X_1 Y_1, X_1 Z_1) / X_1^p = 0$$

la ecuación de S_1 .

En esta situación se tiene el siguiente

Lema 2.- Si la forma inicial de $f^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1)$ es Z_1^p , se verifica:

a) El transformado S_1 sólo puede contener las curvas permitidas de ideales (Z_1, X_1) y del tipo $(Z_1 + Y_1^r u(Y_1), X_1 + Y_1^s v(Y_1))$, donde

$$(a-1) \quad s, r \geq 2$$

$$(a-2) \quad v(Y_1) \text{ es una unidad de } k[[Y_1]].$$

$$(a-3) \quad u(Y_1) \text{ es, o bien cero, o bien una unidad de } k[[Y_1]].$$

b) En el caso de que aparezca una curva permitida del segundo tipo, aparecerá también la de ideal (Z_1, X_1) .

Demostración.- Supongamos que, después de una transformación cuadrática en $(1,0,0)$, aparece en S_1 la curva permitida C de ideal

$$(1) \quad (aX_1 + bY_1 + cZ_1 + \square, a'X_1 + b'Y_1 + c'Z_1 + \square') ,$$

donde \square y \square' representan términos de grado superior a 1, y $a, b, c, a', b', c' \in k$. Por comodidad designaremos (f_1, f_2) al ideal (1), donde

$$f_1 = aX_1 + bY_1 + cZ_1 + \square$$

$$f_2 = a'X_1 + b'Y_1 + c'Z_1 + \square' .$$

Como la curva C es lisa, debe ser

$$\text{rango} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 .$$

En estas condiciones, vamos a probar, en primer lugar, que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 .$$

En efecto, debe ser

$$f^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1) = \sum_{i+j=p} h_{ij}(X_1, Y_1, Z_1) f_1^i f_2^j ,$$

donde p es la multiplicidad de S y S_1 y $h_{ij}(X_1, Y_1, Z_1) \in k[[X_1, Y_1, Z_1]]$.

Igualando las formas iniciales de ambos miembros, se tiene que

$$(2) \quad Z_1^p = \sum_{i+j=p} h_{ij}(0,0,0) (aX_1 + bY_1 + cZ_1)^i (a'X_1 + b'Y_1 + c'Z_1)^j .$$

Si fuese $b=b'=0$, el aserto estaría probado; supongamos pues que $b \neq 0$ (el otro caso, $b' \neq 0$, es simétrico). Sustituyendo en (2) las variables por $(1, -a/b, 0)$, queda

$$0 = h_{0p}(0,0,0) \left(a' - \frac{b'a}{b} \right)^p \Rightarrow \begin{cases} h_{0p}(0,0,0) = 0 \\ \text{o bien} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 \end{cases} .$$

Ahora bien, si $h_{0p}(0,0,0) = 0$, de (2) se deduce que

$$aX_1 + bY_1 + cZ_1 \mid Z_1 ,$$

lo cual es absurdo al suponer $b \neq 0$.

Así, si $a' \neq 0$ o $b' \neq 0$, debe ser $a = \lambda a'$, $b = \lambda b'$ con $\lambda \in k$; como $(f_1, f_2) = (f_1 - \lambda f_2, f_2)$, en cualquier caso, hemos probado que la curva C viene dada por un ideal de la forma:

$$(Z_1 + \square, a'X_1 + b'Y_1 + c'Z_1 + \square') .$$

Nos proponemos simplificar más aun los generadores de este ideal. Para ello, aplicamos el teorema preparatorio de Weierstrass a la serie $Z_1 + \square$, quedando

$$Z_1 + \square = u(X_1, Y_1, Z_1) (Z_1 + a(X_1, Y_1)) ,$$

donde $u(X_1, Y_1, Z_1)$ es una unidad de $k[[X_1, Y_1, Z_1]]$ y $a(X_1, Y_1) \in k[[X_1, Y_1]]$ es de orden superior a 1. De aquí se deduce que el ideal de C es también

$$(Z_1 + a(X_1, Y_1), a'X_1 + b'Y_1 + c'Z_1 + \square') ,$$

y lo designaremos por (g_1, g_2) donde

$$g_1 = Z_1 + a(X_1, Y_1)$$

$$g_2 = a'X_1 + b'Y_1 + c'Z_1 + \square' .$$

Dividiendo g_2 entre g_1 (que es regular en Z_1 de orden 1), se tiene que

$$g_2 = g_1 \cdot q(X_1, Y_1, Z_1) + a'X_1 + b'Y_1 + b(X_1, Y_1) ,$$

donde $q(X_1, Y_1, Z_1) \in k[[X_1, Y_1, Z_1]]$, $b(X_1, Y_1) \in k[[X_1, Y_1]]$ y $\underline{o}(b(X_1, Y_1)) \geq 2$.

Luego,

$$(3) \quad (g_1, g_2) = (g_1, g_2 - g_1 \cdot q(X_1, Y_1, Z_1)) = (Z_1 + a(X_1, Y_1), a'X_1 + b'Y_1 + b(X_1, Y_1))$$

Queremos probar ahora que $b' = 0$. En efecto, en caso contrario, aplicamos el teorema preparatorio de Weierstrass a la segunda serie de (3), con lo que se tiene que

$$a'X_1 + b'Y_1 + b(X_1, Y_1) = v(X_1, Y_1)(Y_1 + b(X_1)),$$

donde $v(X_1, Y_1) \in k[[X_1, Y_1]]$ es una unidad y $b(X_1) \in k[[X_1]]$ siendo

$\underline{o}(b(X_1)) \geq 1$. Por consiguiente, el ideal de C , en el caso de $b' \neq 0$, sería también

$$(Z_1 + a(X_1, Y_1), Y_1 + b(X_1)).$$

Dividiendo $a(X_1, Y_1)$ por $Y_1 + b(X_1)$, se tendría:

$$Z_1 + a(X_1, Y_1) = q'(X_1, Y_1) \cdot (Y_1 + b(X_1)) + Z_1 + a(X_1),$$

donde $q'(X_1, Y_1) \in k[[X_1, Y_1]]$, $a(X_1) \in k[[X_1]]$ y $\underline{o}(a(X_1)) \geq 2$. Con esto,

la curva C tendría de ideal

$$(Z_1 + a(X_1), Y_1 + b(X_1)).$$

Pero esto conduciría a una contradicción con las hipótesis de que en S no hay curvas permitidas. En efecto, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} k[[X, Y, Z]] & \xrightarrow{\varphi} & k[[X', Y', Z']] \\ \downarrow \pi^1_{(1,0,0)} & & \downarrow \pi^1_{(1,0,0)} \\ k[[X_1, Y_1, Z_1]] & \xrightarrow{\psi} & k[[X'_1, Y'_1, Z'_1]] \end{array}$$

donde φ y ψ son los k -isomorfismos definidos por

$$\varphi(X) = X'$$

$$\varphi(Y) = Y' - X'b(X')$$

$$\varphi(Z) = Z' - X'a(X')$$

y

$$\psi(X_1) = X'_1$$

$$\psi(Y_1) = Y_1' - b(X_1')$$

$$\psi(Z_1) = Z_1' - a(X_1') .$$

Este diagrama es claramente conmutativo, y ψ transforma $(1,0,0)$ en sí mismo. Obsérvese también que el ideal $(Z_1+a(X_1), Y_1+b(X_1))$ se transforma por ψ en el (Z_1', Y_1') ; por tanto,

$$f'^{(1)}(X_1', Y_1', Z_1') = \psi(f^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1)) \in (Z_1', Y_1')^P ,$$

es decir, en la superficie de ecuación $f'^{(1)}(X_1', Y_1', Z_1') = 0$ aparece la curva permitida de ideal (Z_1', Y_1') . Ahora bien, es fácil comprobar que esta curva aparece por una explosión en el origen en $(1,0,0)$ si y sólo si la curva de ideal (Z', Y') era permitida en la superficie de ecuación

$$f'(X', Y', Z') = (f(X, Y, Z)) = 0 .$$

Se obtiene así que la curva de S de ideal

$$(\psi^{-1}(Z'), \psi^{-1}(Y')) = (Z+Xa(X), Y+Xb(X)),$$

es permitida en S , en contra de la hipótesis.

En resumen, tenemos probado que, de aparecer en S_1 una curva permitida, ésta debe corresponder a un ideal de la forma

$$(4) \quad (Z_1+a(X_1, Y_1), X_1+b(X_1, Y_1))$$

donde $a(X_1, Y_1), b(X_1, Y_1) \in k[[X_1, Y_1]]$ y los órdenes de ambas son mayores o iguales que 2.

Aplicando el teorema preparatorio de Weierstrass a la segunda serie de (4) y dividiendo después $a(X_1, Y_1)$ por la segunda serie, tenemos que el ideal (4) es igual al

$$(5) \quad (Z_1+a(Y_1), X_1+b(Y_1)) ,$$

donde $a(Y_1), b(Y_1) \in k[[Y_1]]$ y son de órdenes mayores o iguales que 2 :

En estas condiciones, pueden ocurrir dos casos, dependiendo de que $a(Y_1)$ sea cero o no.

Caso 1.- $a(Y_1) \equiv 0$.

En primer lugar presentamos un ejemplo en el que se da este caso:

$$f(X, Y, Z) = Z^2 + (X^3 + Y^2)^2$$

$$\uparrow \Pi^{(1)}_{(1,0,0)}$$

$$f^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1) = Z_1^2 + X_1^2(X_1 + Y_1^2)^2 .$$

Obsérvese que, después de la explosión, aparecen las curvas permitidas de ideales $(Z_1, X_1 + Y_1^2)$ y (Z_1, X_1) , como afirma el apartado b) del lema que estamos probando.

Para demostrar este apartado b), en el caso de que aparezca una curva permitida de ideal $(Z_1, X_1 + b(Y_1))$, observémos en primer lugar, que $f^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1)$ se puede reordenar del modo siguiente,

$$(6) \quad f^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1) = Z_1^p + b_{p-1}(X_1, Y_1)(X_1 + b(Y_1))Z_1^{p-1} + \dots + \\ + \dots + b_1(X_1, Y_1)(X_1 + b(Y_1))^{p-1}Z_1 + b_0(X_1, Y_1)(X_1 + b(Y_1))^p ,$$

donde $b_i(X_1, Y_1) \in k[[X_1, Y_1]]$, $\forall i=0, 1, \dots, p-1$.

Fijemos un sumando cualquiera no nulo de (6),

$$(7) \quad b_i(X_1, Y_1)(X_1 + b(Y_1))^{p-i}Z_1^i ,$$

donde $0 \leq i \leq p-1$. Sea $t = \underline{v}(b(Y_1)) \geq 2$ y $dX_1^r Y_1^s$, con $d \in k - \{0\}$, el monomio de menor grado en X_1 de $b_i(X_1, Y_1)$ (considerada como serie en X_1 con coeficientes series en Y_1), que a su vez tiene menor grado en Y_1 .

En el desarrollo de (7), entonces aparece el término

$$(8) \quad dX_1^r Y_1^s b(Y_1)^{p-i} Z_1^i ,$$

y en él, el monomio no nulo

$$(9) \quad d'X_1^{r'} Y_1^{s'+t(p-i)} Z_1^i , \quad (d' \in k - \{0\})$$

que, claramente, no puede cancelar con ninguno del desarrollo de (7), y por tanto de (6).

Por otro lado, también es claro que, para que un monomio

$X_1^\alpha Y_1^\beta Z_1^\gamma$ proceda de otro por una explosión en $(1,0,0)$, es necesario y suficiente que $\alpha \geq \beta + \gamma - p$; por tanto, en (9) debe ser

$$r \geq s+t(p-i)+i-p \geq s+2(p-i)+i-p = s+p-i \geq p-i.$$

Así $X_1^{p-i} \mid b_i(X_1, Y_1)$, $\forall i=0,1,\dots,p-1$; por consiguiente, si

$$b_i(X_1, Y_1) = X_1^{p-i} b'_i(X_1, Y_1) \quad \forall i=0,1,\dots,p-1$$

se tiene que

$$\begin{aligned} f^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1) &= Z_1^p + b'_{p-1}(X_1, Y_1) X_1 (X_1 + b(Y_1)) Z_1^{p-1} + \dots + \\ &\quad + b'_1(X_1, Y_1) X_1^{p-1} (X_1 + b(Y_1))^{p-1} Z_1 + b'_0(X_1, Y_1) X_1^p (X_1 + b(Y_1))^p \end{aligned}$$

lo que indica que $f^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1) \in (Z_1, X_1)^p$ como pretendíamos probar.

Caso 2.- $a(Y_1) \neq 0$.-

Damos también aquí un ejemplo en el que esta posibilidad se presenta:

$$f(X, Y, Z) = Z^2 + 2XYZ + X^2Y^2 + X^6 + 2X^3Y^2 + Y^4 = (Z + XY)^2 + (X^3 + Y^2)^2$$

$$\begin{aligned} f^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1) &= Z_1^2 + 2X_1Y_1Z_1 + X_1^2Y_1^2 + X_1^4 + 2X_1^3Y_1^2 + X_1^2Y_1^4 = \\ &\quad \uparrow \quad \pi^{(1)}(1,0,0) \\ &= (Z_1 - Y_1^3)^2 + 2Y_1(Z_1 - Y_1^3)(X_1 + Y_1^2) + (X_1^2 + Y_1^2)(X_1 + Y_1^2)^2 = \\ &= (Z_1 + X_1Y_1)^2 + X_1^2(X_1 + Y_1^2)^2. \end{aligned}$$

En este caso, probar que si aparece una curva permitida de ideal $(Z_1 + a(Y_1), X_1 + b(Y_1))$, también aparece la de ideal (Z_1, X_1) , se presenta más complicado, porque ahora la reordenación que podemos hacer de $f^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1)$ es la siguiente

$$\begin{aligned} (10) \quad f^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1) &= Z_1^p + b_{p-1}(X_1, Y_1)(X_1 + b(Y_1))(Z_1 + a(Y_1))^{p-1} + \dots + \\ &\quad + \dots + b_1(X_1, Y_1)(X_1 + b(Y_1))^{p-1}(Z_1 + a(Y_1)) + b_0(X_1, Y_1)(X_1 + b(Y_1))^p, \end{aligned}$$

donde $b_i(x_1, y_1) \in k[[x_1, y_1]]$, $\forall i=0, \dots, p-1$.

En esta expresión los monomios que no contienen a las variables x_1 y z_1 deben cancelarse, ya que éstos no pueden aparecer por transformaciones cuadráticas en $(1, 0, 0)$; por tanto es $b(y_1) \neq 0$, y si ponemos

$$a(y_1) = y_1^r u(y_1)$$

$$b(y_1) = y_1^s v(y_1),$$

siendo $r, s \geq 2$ y $u(y_1), v(y_1)$ unidades en $k[[y_1]]$, debe ser

$$b_0(0, y_1) y_1^{sp} v(y_1)^p + b_1(0, y_1) y_1^{s(p-1)} v(y_1)^{p-1} y_1^r u(y_1) + \dots + \\ + b_{p-1}(0, y_1) y_1^s v(y_1) y_1^{r(p-1)} u(y_1)^{p-1} + y_1^{rp} u(y_1)^p = 0.$$

Esto prueba que $r \geq s$.

Dividiendo r entre s se obtiene $r = r's + t$ donde $r' \geq 1$ y $0 \leq t < s$. Sustituyendo así, en el primer generador del ideal de la curva, y_1^s por $-x_1 / v(y_1)$ queda

$$(z_1 + y_1^r u(y_1), x_1 + y_1^s v(y_1)) = (z_1 + y_1^t x_1^{r'} \left(\frac{u(y_1)}{v(y_1)^{r'}} \right), x_1 + y_1^s v(y_1)) = \\ = (z_1 + x_1^{r'} c(y_1), x_1 + y_1^s v(y_1)),$$

$$\text{con } c(y_1) = y_1^t \left(\frac{u(y_1)}{v(y_1)^{r'}} \right) \in k[[y_1]].$$

Realizando en $c(y_1)$ la misma sustitución de y_1^s por $-x_1 / v(y_1)$, - cuantas veces sea posible, el ideal toma la forma

$$(z_1 + x_1 \sum_{i \geq r'-1} x_1^i f_i(y_1), x_1 + b(y_1)),$$

donde cada $f_i(y_1)$ es un polinomio de $k[[y_1]]$, de grado menor o igual que $s-1$, o bien, abreviadamente,

$$(z_1 + x_1 g(x_1, y_1), x_1 + b(y_1)),$$

con $g(X_1, Y_1) \in k[[X_1, Y_1]]$.

En suma, la ecuación dada de S_1 , puede ser reordenada de la forma siguiente:

$$(11) \quad f^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1) = (Z_1 + X_1 g(X_1, Y_1))^p + c_{p-1}(X_1, Y_1)(X_1 + b(Y_1))(Z_1 + X_1 g(X_1, Y_1))^{p-1} \\ + \dots + c_1(X_1, Y_1)(X_1 + b(Y_1))^{p-1}(Z_1 + X_1 g(X_1, Y_1)) + c_0(X_1, Y_1)(X_1 + b(Y_1))^p$$

Queremos probar que $X_1^i \mid c_{p-i}(X_1, Y_1)$, $\forall i=1, \dots, p$, o

bien, poniendo

$$c_h(X_1, Y_1) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{hj}(Y_1) X_1^j,$$

que $c_{p-i,j}(Y_1) = 0$, $\forall i=1, \dots, p$ y $\forall j=0, 1, \dots, i-1$. Para ello haremos una doble recurrencia.

Paso 1.- $c_{p-1,0}(Y_1) = 0$.

En efecto, los términos de (11) que no contienen a X_1 y contienen a Z_1^{p-1} son

$$c_{p-1,0}(Y_1) b(Y_1) Z_1^{p-1},$$

que deben ser nulos porque no pueden proceder de una transformación cuadrática en $(1,0,0)$, luego $c_{p-1,0}(Y_1) = 0$.

Paso 2.- Supongamos que si $1 < i \leq p$, se tiene que

$$(H1) \quad \forall h \leq i-1 \quad \text{se verifica que } X_1^h \mid c_{p-h}(X_1, Y_1),$$

tenemos que probar que $X_1^i \mid c_{p-i}(X_1, Y_1)$, o lo que es lo mismo, que

$c_{p-i,j}(Y_1) = 0$, $\forall j=0, \dots, i-1$. Esto lo probaremos, a su vez, por recurrencia.

Paso 2.1.- $c_{p-i,0}(Y_1) = 0$.

En efecto, los términos de (11) que no contienen a X_1 y contienen a Z_1^{p-i} , por (H1) son:

$$c_{p-i,0}(Y_1)b(Y_1)^i Z_1^{p-i},$$

y esto debe ser cero, por no poder proceder de una explosión en $(1,0,0)$.

Así, $c_{p-i,0}(Y_1) = 0$.

Paso 2.2. - Supongamos que si es $0 < n \leq i-1$, se tiene que

(H2) $\forall m=0, \dots, n-1$ se verifica que $c_{p-i,m}(Y_1) = 0$,

tenemos que probar que $c_{p-i,n}(Y_1) = 0$. En efecto, los términos de (11)

que contienen a X_1^n y a Z_1^{p-i} no pueden proceder de sumandos anteriores

al $c_{p-i}(X_1, Y_1)(X_1 + b(Y_1))^i (Z_1 + X_1 g(X_1, Y_1))^{p-i}$, porque por (H1), estos mono-

mios, si contienen a Z_1^{p-i} , contienen a X_1^i por lo menos.

Por otra parte, por la hipótesis (H2), los términos que contienen a X_1^n y a Z_1^{p-i} son

$$X_1^n c_{p-i,n}(Y_1) b(Y_1)^i Z_1^{p-i}.$$

Pero para que estos términos procedan de una explosión en $(1,0,0)$, debe ser

$$c_{p-i,n}(Y_1) b(Y_1)^i = \text{polinomio de grado menor o igual que } i+n;$$

sin embargo, $si \geq 2i > 2i-1 \geq i+n$. Luego $c_{p-i,n}(Y_1) = 0$.

c.q.d.

Prescindiendo ahora de la hipótesis adicional del lema 2 de que la ecuación de S_1 tiene como forma inicial Z_1^p , se tiene el siguiente

Teorema 3. - En la situación 1, se verifican las siguientes propiedades:

a) El transformado cuadrático S_1 de S en $(1,0,0)$, sólo puede con-

tener las curvas permitidas de ideales (Z_1, X_1) y del tipo de

$(Z_1 + Y_1^r u(Y_1), X_1 + Y_1^s v(Y_1))$, donde:

$$(a-1) \quad s, r \geq 2$$

$$(a-2) \quad v(Y_1) \text{ es una unidad de } k[[Y_1]].$$

$$(a-3) \quad u(Y_1) \text{ es, o bien cero, o bien una unidad de } k[[Y_1]].$$

b) En el caso de que aparezca una curva permitida del segundo tipo, aparecerá también la de ideal (Z_1, X_1) .

Demostración.- En general, la forma inicial de la ecuación $f^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1) = 0$, transformada de $f(X, Y, Z) = 0$ por la explosión en $(1, 0, 0)$, es del tipo $(Z_1 + \alpha X_1)^P$, ya que hemos supuesto que es potencia de una forma lineal.

Consideremos el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} k[[X, Y, Z]] & \xrightarrow{\varphi} & k[[X', Y', Z']] \\ \downarrow \pi_{(1,0,0)}^1 & & \downarrow \pi_{(1,0,0)}^1 \\ k[[X_1, Y_1, Z_1]] & \xrightarrow{\psi} & k[[X'_1, Y'_1, Z'_1]] \end{array}$$

donde φ y ψ son los k -isomorfismos dados por

$$\begin{cases} \varphi(X) = X' \\ \varphi(Y) = Y' \\ \varphi(Z) = Z' - \alpha X'^2 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \psi(X_1) = X'_1 \\ \psi(Y_1) = Y'_1 \\ \psi(Z_1) = Z'_1 - \alpha X'^2_1 \end{cases}$$

Es claro que este diagrama es conmutativo, y que φ transforma el punto $(1, 0, 0)$ en sí mismo. Más aun, las superficies S' y S'_1 de ecuaciones respectivas $f'(X', Y', Z') = \varphi(f(X, Y, Z)) = 0$ y $f'^{(1)}(X'_1, Y'_1, Z'_1) = \psi(f^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1)) = 0$, están en las condiciones del lema 2. Por tanto, las curvas permitidas posibles en S'_1 son (Z'_1, X'_1) y del tipo $(Z'_1 + Y'^r_1 u(Y'_1), X'_1 + Y'^s_1 v(Y'_1))$.

Trasladando estos hechos a S y S_1 via φ^{-1} y ψ^{-1} ,
y teniendo en cuenta que

$$(Z_1 + X_1 + Y_1^{r'} u(Y_1), X_1 + Y_1^s v(Y_1)) = (Z_1 + Y_1^{r'} u'(Y_1), X_1 + Y_1^s v(Y_1))$$

donde $r' \geq s \geq 2$ y $u'(Y_1)$ es, bien cero, bien una unidad, se tiene probado el teorema.

Nota 4.- En el caso de una curva permitida de ideal $(Z_1 + a(Y_1), X_1 + b(Y_1))$, usando el método utilizado en la demostración del lema 2, podemos expresar aquel ideal en la forma

$$(Z_1 + \sum_{i \geq 1} X_1^i g_i(Y_1), X_1 + Y_1^s v(Y_1))$$

donde cada $g_i(Y_1)$ es un polinomio de grado menor o igual que $s-1$.

Proposición 5.- Sea S una SAS de ecuación $f(X,Y,Z) = 0$ en $k[[X,Y,Z]]$. Supongamos que el cono tangente a S es un plano único y que S no tiene curvas permitidas. Sea S_1 el transformado cuadrático de S en el punto $(1,0,0)$ y supongamos que S_1 tiene multiplicidad igual a la de S , que su cono tangente es un plano único y que tiene la curva permitida de ideal

$$(Z_1 + \sum_{i \geq 1} X_1^i g_i(Y_1), X_1 + Y_1^s v(Y_1))$$

Entonces, existe un k -isomorfismo $\psi: k[[X,Y,Z]] \longrightarrow k[[X',Y',Z']]$ que verifica:

1°) ψ transforma $(1,0,0)$ en sí mismo.

2°) Si $\Psi: k[[X_1, Y_1, Z_1]] \longrightarrow k[[X'_1, Y'_1, Z'_1]]$ es el k -isomorfismo de ecuaciones

$$\begin{cases} \Psi(X_1) = X'_1 \\ \Psi(Y_1) = Y'_1 \\ \Psi(Z_1) = Z'_1 - \sum_{i \geq 1} X_1^i g_i(Y_1) \end{cases},$$

entonces, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} k[[X, Y, Z]] & \xrightarrow{\psi} & k[[X', Y', Z']] \\ \downarrow \pi_{(1,0,0)}^1 & & \downarrow \pi_{(1,0,0)}^1 \\ k[[X_1, Y_1, Z_1]] & \xrightarrow{\Psi} & k[[X'_1, Y'_1, Z'_1]] \end{array}$$

es conmutativo. (En otras palabras, el cambio de coordenadas ψ proviene por transformación cuadrática en $(1,0,0)$, de un cambio de coordenadas).

Demostración. - La proposición será cierta si probamos que para todo $i \geq 1$

$$\text{grado}(g_i(Y_1)) \leq i+1,$$

ya que este caso es el único en que

$$X'_1 Z'_1 - \sum_{i \geq 1} X_1^{i+1} g_i(Y_1)$$

puede proceder de un elemento de $k[[X', Y', Z']]$ por $\pi_{(1,0,0)}^1$.

Para $s \leq 3$ el resultado es evidente, al ser, para cualquier $i \geq 1$, $\text{grado}(g_i(Y_1)) \leq s-1 = 2$. Por tanto supongamos, a partir de aquí que $s > 3$.

Razonemos por reducción al absurdo, suponiendo que existe un subconjunto C , no vacío, de los naturales,

$$C = \{j_1, j_2, \dots, j_t\}$$

tal que

$$a) \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_t \leq s-3, \text{ y}$$

$$b) \quad \text{grado}(g_{j_i}(Y_1)) > j_i + 1, \quad i=1, \dots, t.$$

Entonces, consideremos el k -isomorfismo $\Psi_1: k[[X_1, Y_1, Z_1]] \rightarrow k[[X'_1, Y'_1, Z'_1]]$

definido por

$$\begin{cases} \Psi_1(X_1) = X'_1 \\ \Psi_1(Y_1) = Y'_1 \\ \Psi_1(Z_1) = Z'_1 - \sum_{i \notin C} X_1^i g_i(Y_1). \end{cases}$$

Es claro que se tiene un k -isomorfismo $\varphi_1: k[[X, Y, Z]] \longrightarrow k[[X', Y', Z']]$ que lleva $(1, 0, 0)$ sobre sí mismo, y de modo que $\pi_{(1,0,0)}^1 \varphi_1 = \psi_1 \pi_{(1,0,0)}^1$.

Además el ideal

$$(Z_1 + \sum_{i \geq 1} X_1^i g_i(Y_1), X_1 + Y_1^s v(Y_1))$$

se transforma por ψ_1 en

$$(1) \quad (Z_1' + \sum_{i \in \mathbb{C}} X_1'^i g_i(Y_1'), X_1' + Y_1'^s v(Y_1')) .$$

El problema se ha trasladado, así, via φ_1 y ψ_1 , a otro igual, pero en el que el ideal permitido que aparece es el (1). Sin embargo, por comodidad de notación, continuamos usando las coordenadas X, Y, Z para la ecuación dada y X_1, Y_1, Z_1 para la ecuación transformada.

Reordenamos la ecuación $f^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1) = 0$ del modo usual,

$$(2) \quad f^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1) = (Z_1 + \sum_{i \in \mathbb{C}} X_1^i g_i(Y_1))^p + \\ + a_{p-1}(X_1, Y_1) X_1 (X_1 + Y_1^s v(Y_1)) (Z_1 + \sum_{i \in \mathbb{C}} X_1^i g_i(Y_1))^{p-1} + \dots \\ + \dots + a_1(X_1, Y_1) X_1^{p-1} (X_1 + Y_1^s v(Y_1))^{p-1} (Z_1 + \sum_{i \in \mathbb{C}} X_1^i g_i(Y_1)) + \\ + a_0(X_1, Y_1) X_1^p (X_1 + Y_1^s v(Y_1))^p = 0 ,$$

y consideremos el diagrama de Newton D correspondiente. Designemos por g_1 al grado de $g_1(Y_1)$, verificándose que

$$(3) \quad i+1 < g_1 \leq s-1 \quad \forall i \in \mathbb{C} .$$

Por otra parte, consideremos el diagrama de Newton D' de la ecuación

$$(4) \quad Z_1^p + a_{p-1}(X_1, Y_1) X_1 (X_1 + Y_1^s v(Y_1)) Z_1^{p-1} + \dots + \\ + \dots + a_1(X_1, Y_1) X_1^{p-1} (X_1 + Y_1^s v(Y_1))^{p-1} Z_1 + \\ + a_0(X_1, Y_1) X_1^p (X_1 + Y_1^s v(Y_1))^p = 0 .$$

Entonces, el diagrama D de la ecuación (2) se obtiene, a partir de D' , transformando cada punto (a,b,c) de D' , definido por un monomio no nulo $x_1^a y_1^b z_1^c$, en los puntos procedentes del desarrollo de

$$x_1^a y_1^b (z_1 + \sum_{l \in \mathbb{C}} x_1^l g_l(y_1))^c .$$

En cualquier caso, el diagrama D , por proceder de una transformación cuadrática en $(1,0,0)$, debe tener todos sus puntos (x,y,z) en el semiespacio dado por

$$(5) \quad x - y - z + p \geq 0 .$$

En esta situación, llamando $j=j_1$, se tiene que

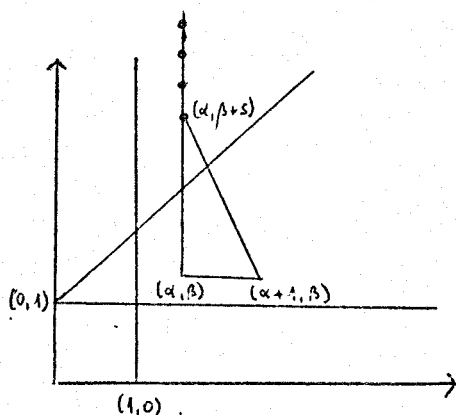
$$(6) \quad x_1^{g_j + (i-1)j} \mid a_{p-i}(x_1, y_1) x_1^i, \quad \forall i=1, \dots, p .$$

Probaremos esto por inducción en i .

Caso $i=1$.- Tenemos que probar en este caso que

$$x_1^{g_j} \mid a_{p-1}(x_1, y_1) x_1 .$$

En efecto, nos centramos en el nivel $p-1$ de D (que suponemos no vacío). Los puntos de este nivel corresponden a los puntos del nivel $p-1$ de D' , junto a los puntos del desarrollo del $(0,0,p)$ de D' (salvo en el caso en que $q > 0$ y $q \mid p$).



Más precisamente, sea (α, β) el punto correspondiente a un monomio de $a_{p-1}(x_1, y_1) x_1$ tal que α sea mínimo, y de ellos sea β la mínima ordenada, es decir, de los puntos más a la izquierda, el más bajo.

Al multiplicar por $(x_1 + y_1^s v(y_1))$, el monomio $x_1 y_1$ da lugar a los puntos de D' siguientes:

$$(\alpha+1, \beta, p-1)$$

$$(\alpha, \beta+s, p-1), (\alpha, \beta+s+1, p-1), (\alpha, \beta+s+2, p-1), \dots .$$

Entonces el punto $(\alpha, \beta+s, p-1)$ aparece efectivamente en D porque:

- a) No puede ser cancelado por ningún punto proveniente de un (α', β') de $a_{p-1}(X_1, Y_1)X_1$ en el paso de multiplicar por $(X_1 + Y_1^s v(Y_1))$, por la minimalidad de α y β .
- b) Los puntos del nivel $p-1$ de D que, eventualmente, proceden del desarrollo de

$$(Z_1 + \sum_{l \in \mathbb{C}} X_1^l g_l(Y_1))^p,$$

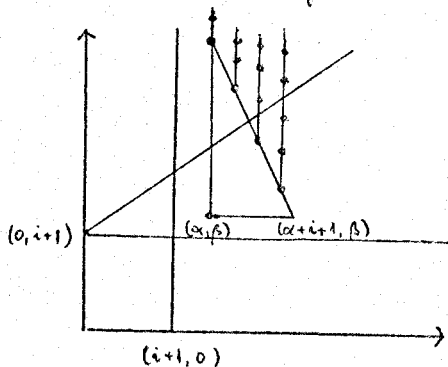
son los de $\sum_{l \in \mathbb{C}} X_1^l g_l(Y_1)$, que tienen el exponente de la Y_1 menor que s , luego no pueden cancelar con $(\alpha, \beta+s, p-1)$.

Como los puntos de D deben verificar (5), sustituyendo allí el punto $(\alpha, \beta+s, p-1)$, queda

$$\alpha - (\beta+s) - (p-1) + p \geq 0 \implies \alpha \geq \beta+s-1 \geq g_j \quad \text{por (3)}.$$

En suma $X_1^{g_j} \mid a_{p-1}(X_1, Y_1)X_1$ como pretendíamos probar.

Paso de i a $i+1$. - Escojamos un monomio $X_1^\alpha Y_1^\beta$ de entre los de $a_{p-i-1}(X_1, Y_1)X_1^{i+1}$ (que suponemos no nulo), de tal modo que α sea mínimo, y de entre ellos β sea también mínimo.



Al multiplicar por $(X_1 + Y_1^s v(Y_1))^{i+1}$ el monomio $X_1^\alpha Y_1^\beta$ da lugar, eventualmente, a los puntos del nivel $p-i-1$ de D' siguientes:

- $(\alpha+i+1, \beta, p-i-1)$
- $(\alpha+i, \beta+s, p-i-1), (\alpha+i, \beta+s+1, p-i-1) \dots$
- $(\alpha+i-1, \beta+2s, p-i-1), (\alpha+i-1, \beta+2s+1, p-i-1) \dots$
- \dots
- $(\alpha, \beta+(i+1)s, p-i-1), (\alpha, \beta+(i+1)s+1, p-i-1) \dots$

Centramos nuestra atención en el punto $(\alpha, \beta + (i+1)s, p-i-1)$ que está, con seguridad, en D' por la elección de (α, β) . Veamos que este punto está también en D , para lo que habrá que probar que no cancela con otros procedentes del cambio de z_1^{p-m} por

$$(7) \quad \left(z_1 + \sum_{l \in C} x_l^1 g_l(Y_1) \right)^{p-m} \quad \text{con } m=0, \dots, i.$$

Caso $m=0$.- Al cambiar z_1^p por (7) con $m=0$, los puntos que, eventualmente, aparecen en el nivel $p-i-1$ de D son correspondientes a monomios de

$$\left[\sum_{l \in C} x_l^1 g_l(Y_1) \right]^{i+1} z_1^{p-i-1}.$$

Pero el exponente de Y_1 de estos monomios, es siempre menor que $s(i+1)$, luego no puede cancelar con el punto prefijado anteriormente.

Caso $m \geq 0$.- Por la hipótesis de inducción, los puntos de D' del nivel $p-m$, verifican que su primera componente x , es

$$x \geq g_j + (m-1)j,$$

por ello, al cambiar z_1^{p-m} por (7), en el nivel $p-i-1$ de D aparecen, eventualmente, puntos que verifican que

$$x \geq g_j + (m-1)j + (i+1-m)j = g_j + ij.$$

Luego:

- Si $\alpha \geq g_j + ij$, ya está probado.
- Si $\alpha < g_j + ij$, no se cancela el punto $(\alpha, \beta + (i+1)s, p-i-1)$ con los procedentes de niveles superiores. Pero este punto debe estar en el semiespacio (5), luego

$$\begin{aligned} \alpha &\geq \beta + (i+1)s + p - i - 1 - p = \beta + (i+1)(s-1) \geq (i+1)(s-1) \geq \\ &\geq (i+1)g_j = g_j + ig_j > g_j + ij \quad \text{por (3)}. \end{aligned}$$

Y esto es una contradicción.

Con esto queda probado (6).

Al resultado final se llega obteniendo una contradicción si $C \neq \emptyset$. En efecto, en el paso de D' a D , el punto $(0, 0, p)$ de D'

da lugar al $(p_j, pg_j, 0)$ de D , que es incancelable ya que

$$p_j = j + (p-1)j < g_j + (p-1)j,$$

y los puntos que

$$a_{p-i}(X_1, Y_1) X_1^i (X_1 + Y_1^S v(Y_1))^i (Z_1 + \sum_{l \in C} X_1^l g_l(Y_1))^{p-i}, \quad i=1, \dots, p,$$

define en el nivel 0 de D verifican que, su primera coordenada x , es

$$x \geq g_j + (i-1)j + (p-i)j = g_j + (p-1)j.$$

Como el punto $(p_j, pg_j, 0)$ de D también verifica (5),

es decir $p_j - pg_j \geq 0$, se llega a una contradicción con (3).

c.q.d.

Proposición 6.- Sea S una SAS tal que, después de una transformación cuadrática en $(1, 0, 0)$, se mantiene la multiplicidad y aparecen las curvas permitidas de ideales (Z_1, X_1) y $(Z_1, X_1 + Y_1^S v(Y_1))$ en $k[[X_1, Y_1, Z_1]]$.

Entonces, en S , existe una curva de ideal $(Z, g(X, Y))$ en $k[[X, Y, Z]]$, de multiplicidad igual a la de la superficie S y singular.

Demostración.- Una ecuación de S_1 es

$$\begin{aligned} f^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1) &= Z_1^p + a_{p-1}(X_1, Y_1) X_1 (X_1 + Y_1^S v(Y_1)) Z_1^{p-1} + \dots + \\ &+ a_1(X_1, Y_1) X_1^{p-1} (X_1 + Y_1^S v(Y_1))^{p-1} Z_1 + a_0(X_1, Y_1) X_1^p (X_1 + Y_1^S v(Y_1))^p = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como la superficie es reducida, alguno de los coeficientes $a_{p-i}(X_1, Y_1)$ con $i=1, \dots, p$, debe ser no nulo. Consideremos uno cualquiera de éstos,

$$a(X_1, Y_1) = a_{p-j}(X_1, Y_1) X_1^j (X_1 + Y_1^S v(Y_1))^j \neq 0.$$

Tomando la máxima potencia X_1^{1-j} de X_1 que divida a $a_{p-j}(X_1, Y_1)$, y la máxima potencia $(X_1 + Y_1^S v(Y_1))^{m-j}$ de $(X_1 + Y_1^S v(Y_1))$ que divida a $a_{p-j}(X_1, Y_1)$, escribimos

$$a(X_1, Y_1) = a'_{p-j}(X_1, Y_1) X_1^1 (X_1 + Y_1^S v(Y_1))^m.$$

Se tiene que

$$\frac{a(X_1, Y_1)}{X_1^j} = a'_{p-j}(X_1, Y_1) (X_1 + Y_1^S v(Y_1))^m = 0$$

es la transformada cuadrática de una curva algebroide plana en el punto (1,0) de su divisor excepcional.

Ahora bien, como curvas algebroides planas irreducibles van sobre curvas algebroides planas irreducibles, mediante una transformación cuadrática, si el punto donde se localiza la explosión es un punto del divisor excepcional, o bien van sobre unidades, si no es un punto del divisor excepcional, entonces, se deduce de aquí que, existe una curva algebroide irreducible, de ecuación $g(X, Y)$ en $k[[X, Y]]$, tal que su forma inicial es Y_1^β y su transformada cuadrática en (1,0) es

$$g'(X_1, Y_1) = u(X_1, Y_1) (X_1 + Y_1^S v(Y_1)) ,$$

donde $u(X_1, Y_1)$ es una unidad en $k[[X_1, Y_1]]$.

Por tanto, la curva de ideal $(Z, g(X, Y))$ que está en la superficie S , como se comprueba fácilmente, y que tiene multiplicidad p en S , se transforma por $\pi_{(1,0,0)}^{(1)}$ en la curva de ideal - - -

$$(Z_1, X_1 + Y_1^S v(Y_1)) .$$

Queda sólo probar que la curva de ideal $(Z, g(X, Y))$ es singular.

En efecto, en caso contrario, sería $\beta = 1$, es decir en el plano XY sería $Y + \sum_{i=2} g_i(X, Y)$ siendo $g_i(X, Y) \in k[[X, Y]]$ bien cero, bien una forma de grado i ($\forall i \geq 2$). Por tanto, su transformada cuadrática en (1,0) sería:

$$Y_1 + \sum_{i=2} X_1^{i-1} g_i(1, Y_1) ,$$

llegándose a una contradicción, al tener que ser,

$$Y_1 + \sum_{i=2} X_1^{i-1} g_i(1, Y_1) = u(X_1, Y_1) (X_1 + Y_1^S v(Y_1)) .$$

En resumen, en esta sección, hemos visto que las únicas curvas permitidas que pueden aparecer después de una transformación cuadrática en $(1,0,0)$, son los ideales (Z_1, X_1) y $(Z_1, X_1 + b(Y_1))$, (eventualmente, previo cambio de coordenadas, según la proposición 5). Además, la proposición 6, demuestra que el caso en que aparezca una curva del segundo tipo, se debe a que, en la superficie anterior, existía una curva singular, de multiplicidad igual a la de la superficie.

SECCION 3.3.-CASO EN QUE EL CONO TANGENTE SE REDUCE A UN PLANO UNICO.-

Observación 1.- Sea S una SAS cuyo cono tangente se reduce a un plano único y $\{S_i\}_{i \in Z_0}$ una sucesión admisible de explosiones para S . Queremos probar que, en algún momento de la sucesión, la multiplicidad decrece. Razonaremos por reducción al absurdo y supondremos que la multiplicidad de todas las S_i es constante.

Si alguna S_i ($i \in Z_0$) tuviera un cono tangente que no fuera un plano único, estaríamos en el caso de la § 3.1, llegando a una contradicción, con lo que el teorema de finitud de sucesiones admisibles, estaría probado. Por esta razón supondremos también que, para todo $i \in Z_0$, el cono tangente a S_i está formado por un único plano.

Supondremos también que S tiene un punto singular aislado. Esta es una hipótesis restrictiva pero, desde el punto de vista de la desingularización, no lo es tanto. En efecto, para desingularizar una superficie algebraica en el espacio proyectivo lo primero que se hace, clásicamente, es reducir su lugar singular a una subvariedad de dimensión cero (por ejemplo, por paso al normalizado) (cf. [17]). Como nuestro objetivo, según hemos hecho constar anteriormente, es estudiar todas

las evoluciones posibles de puntos en la desingularización de una superficie, no es exagerado añadir esta hipótesis supletoria.

Ahora bien, como probamos en el teorema 5 de la sección 1.4, por transformaciones cuadráticas, sólo puede aparecer una curva permitida, a lo sumo. Si consideramos una ecuación $f(X,Y,Z) = 0$ de S , en $k[[X,Y,Z]]$, escrita en la forma de Weierstrass, y de forma inicial Z^p , en el caso de una transformación cuadrática en $(1,0,0)$ la curva permitida que puede aparecer es la de ideal (Z_1, X_1) . En el caso de una transformación cuadrática en $(0,1,0)$, por simetría, la curva que puede aparecer es la de ideal (Z_1, Y_1) .

El razonamiento anterior se puede repetir en cualquier momento de sucesión admisible, dado que no es posible introducir una curva singular en el lugar singular de una superficie, con las explosiones que se realizan en $\{S_i\}_{i \in Z_0}$.

Así, la estructura de la sucesión admisible de explosiones dada, será semejante a la de un camino estacionario, salvo en que, después de explosiones en $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$, puede haber un número finito de explosiones en (Z,X) y (Z,Y) respectivamente. Más concretamente, si $f(X,Y,Z) = 0$ es una ecuación de S en $k[[X,Y,Z]]$, con las condiciones ya expresadas, las operaciones que se realizarán para obtener ecuaciones de todos los S_i serán:

- a) Un cambio de variables para que la forma inicial de las sucesivas ecuaciones de los S_i , sea Z_i^p , $\forall i \in Z_0$.
- b) Explosiones del origen en los puntos $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$. En caso de explosiones en puntos de la forma $(1, \beta, 0)$, se realizarán previamente cambios de coordenadas del tipo (1) del lema 3 § 2.2, es decir:

$$(1) \quad \begin{aligned} X &= X' \\ Y &= Y' + \beta X' \\ Z &= Z' \end{aligned}$$

c) Explosiones en (Z,X) y (Z,Y) . La existencia de estas transformaciones monoidales está garantizada por los resultados de la sección 2.3.

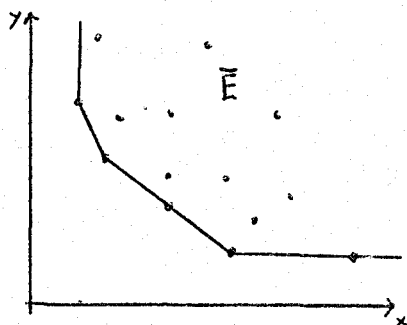
Observación 2.- En esta sección trabajaremos con la proyección "estereográfica" del diagrama de Newton D de la ecuación $f(X,Y,Z) = 0$ y de sus explotadas.

A cada punto $(a,b,c) \in D$, le hacemos corresponder el punto $(\frac{ap}{p-c}, \frac{bp}{p-c}) \in Q^2$, que es el que resulta de proyectar el punto (a,b,c) desde $(0,0,p)$ sobre el nivel 0 de D . Al conjunto de proyecciones lo llamaremos diagrama E de la ecuación $f(X,Y,Z) = 0$.

Definición 3.- Denominamos región de Newton \bar{E} correspondiente al diagrama E , a la zona del plano xy que no contiene al origen, y que está limitada por:

- La recta $x = x_0$, donde x_0 es la mínima abscisa de los puntos de E .
- La recta $y = y_0$, donde y_0 es la mínima ordenada de los puntos de E .
- Las rectas que, pasando por dos o más puntos de E , dejan a los puntos de E en distinto semiplano que el origen.

(Al polígono que definen estas rectas lo llamaremos polígono de Newton del diagrama D).



Es decir, \bar{E} es una "envolvente convexa" de E , y es obvio que el número de vértices del polígono de Newton es finito.

Estudiaremos ahora el cambio de coordenadas al que hacíamos alusión en la observación 1, para que las formas iniciales de las ecuaciones de las S_i ($\forall i \in Z_0$), sea Z_i^p . Para ello, definiremos lo que entenderemos por vértices contráctiles y contracción de vértices del polígono de Newton correspondiente a una ecuación $f(X,Y,Z) = 0$, con $f(X,Y,Z) \in k[[X,Y,Z]]$ de orden p , escrita en la forma de Weierstrass y de forma inicial Z^p .

Definición 4.- Un vértice (α, β) del polígono de Newton correspondiente a la ecuación $f(X, Y, Z) = 0$, se dice contráctil, si verifican las condiciones siguientes:

$$(4-1) \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p.$$

(4-2) Los términos de $f(X, Y, Z)$ que dan lugar a $(\alpha, \beta) \in E$ son los del desarrollo de

$$(Z - aX^{\alpha/p} Y^{\beta/p})^p,$$

donde $a \in k - \{0\}$.

Definición 5.- Si $(\alpha, \beta) \in E$ es un vértice contráctil, llamaremos contracción de este vértice, al cambio de coord. en $k[[X, Y, Z]]$ de ecuaciones (con la notación de la definición anterior):

$$(2) \quad \begin{cases} X = X' \\ Y = Y' \\ Z = Z' + aX'^{\alpha/p} Y'^{\beta/p} \end{cases}.$$

Observación 6.- Las modificaciones que experimenta E por el cambio (2), se describen por los siguientes hechos:

- El vértice (α, β) desaparece.
- Un punto cualquiera $(\gamma, \delta) \in E$ da lugar a puntos del segmento determinado por (α, β) y (γ, δ) .
- Los antiguos vértices (salvo el (α, β)) se conservan, pudiendo haber, eventualmente, nuevos vértices entre los dos que eran más próximos a (α, β) .

En el caso de que haya vértices contráctiles en el polígono de Newton de $f(X, Y, Z) = 0$ (ecuación de S), la composición de estas contracciones (que probaremos que son en número finito) es el cambio de aludido en la Observación 1.

Lema 7.- Después de un número finito de cambios de coordenadas, los vértices del polígono de Newton del diagrama resultante no son contráctiles.

Demostración.- Si no hay vértices contráctiles no hay nada que probar.

En otro caso, el procedimiento a seguir es: 1) contraer, si es necesario, el vértice de mínima abcisa, 2) contraer, si es necesario, el vértice de mínima ordenada y 3) contraer el resto de los vértices contráctiles.

Paso 1.- Supongamos que el vértice $(a,b) \in E$ de mínima abcisa es contráctil. Este vértice debe verificar que $a < p$ ya que, en caso contrario, la curva de ideal (Z,X) es permitida en S . Como $(a,b) \in Z_p \times Z_p$, debe ser $a=0$, $b=cp$ con $c \geq 2$.

Consideremos la intersección de la superficie dada con el plano $X=0$:

$$f(0,Y,Z) = Z^p + a_{p-1}(0,Y)Z^{p-1} + \dots + a_1(0,Y)Z + a_0(0,Y),$$

siendo $a_i(0,Y) \in k[[Y]]$ y $\underline{o}(a_i(0,Y)) > p-i$, $\forall i=1, \dots, p$.

-Si existe una serie $b(Y) \in k[[Y]]$ tal que $b(Y)^p = a_0(0,Y)$ y se verifique que $f(0,Y,Z) = (Z + b(Y))^p$, haciendo el cambio de coordenadas

$$\begin{cases} X = X' \\ Y = Y' \\ Z = Z' - b(Y') \end{cases}$$

queda que, el vértice de mínima abcisa del diagrama resultante no es contráctil, ya que no está en el eje y .

-Si no existe ningún $b(Y) \in k[[Y]]$ con las condiciones anteriores, está claro que, con un número finito de contracciones aparece un vértice de mínima abcisa no contráctil.

Paso 2.- Supongamos que el vértice de mínima ordenada es contráctil. Un proceso análogo al del paso 1 nos garantiza que después de un cambio de coordenadas no es contráctil.

Paso 3.- Designamos por $A = (a_0, a_1)$ y $B = (b_0, b_1)$ los vértices del polígono de Newton de mínima y máxima abcisa respectivamente, supuestos ya no contráctiles. De los hechos siguientes, se deduce el lema:

a) La región de Newton después de una contracción está estrictamente con-

tenida en la región de Newton anterior, debido a la convexidad de ambas y a la desaparición de un vértice.

b) La región de Newton siempre contiene a la región determinada por las rectas $x=a_0$, AB e $y=b_1$.

c) Los vértices contráctiles están en $Z_p \times Z_p$.

c.q.d.

Nota 8.- Obsérvese que los cambios de coordenadas del lema anterior mantienen la forma de Weierstrass de $f(X,Y,Z)$ y su forma inicial.

En adelante, supondremos que la ecuación $f(X,Y,Z) = 0$, con las condiciones anteriores, tiene un polígono de Newton con los vértices no contráctiles.

Observación 9.- Estudiaremos aquí el efecto que, sobre el polígono de Newton de la ecuación $f(X,Y,Z) = 0$, producen las explosiones en el origen en $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$, las explosiones en (Z,X) y (Z,Y) y los cambios de coordenadas del tipo (1).

9.1 Explosiones en (Z,X) .- un punto (α, β) del diagrama E de f , con $\alpha \geq p$, se transforma en el $(\alpha - p, \beta)$. Por tanto el diagrama E experimenta una traslación a la izquierda.

9.2 Explosiones en (Z,Y) .- Un punto (α, β) de E de f , con $\beta \geq p$, se transforma en $(\alpha, \beta - p)$. Por tanto, el diagrama E experimenta una traslación hacia abajo.

9.3 Transformaciones cuadráticas en $(1,0,0)$.- Se comprueba que un punto $(\alpha, \beta) \in E$ se transforma en el $(\alpha + \beta - p, \beta)$, y que puntos alineados se transforman en puntos alineados. Más concretamente, se verifican las siguientes propiedades:

a) Los puntos de E de la recta de ecuación $y = mx + n$ ($m \neq -1$), se transforman en puntos de la recta de ecuación

$$y = \frac{m}{m+1} x + \frac{n+pm}{m+1} .$$

b) Los puntos de E de la recta de ecuación $y = -x + n$ ($n \geq p$), se transforman en puntos de la recta $x = n - p$.

c) Los puntos de la recta $x = n$, se transforman en puntos de la recta $y = x + (p-n)$.

Así, una recta se transforma en otra, que corresponde a un giro en el sentido de las agujas del reloj, con centro el punto de intersección de la recta dada con la recta $y=p$; si estas rectas son paralelas, la recta dada es invariante.

Al aplicar estos resultados al polígono de Newton, se obtiene que:

- (i) Los lados de pendiente $m \leq -1$ dan lugar a rectas de pendiente positiva y no afectan por ello a la región de Newton transformada.
- (ii) Los lados de pendiente m , con $-1 < m \leq 0$, dan lugar a rectas de pendiente negativa y si $-1 < m_1 < m_2 \leq 0$ se tiene que

$$\frac{m_1}{1+m_1} < \frac{m_2}{1+m_2} \leq 0 .$$

En resumen, después de una transformación cuadrática en $(1,0,0)$, el polígono de Newton evoluciona de modo que, los vértices que son intersección de lados de pendiente $m \leq -1$ desaparecen, y los demás se mantienen como vértices.

9.4 Transformaciones cuadráticas en $(0,1,0)$.- El caso es simétrico con el anterior y se tiene que, los vértices del polígono de Newton que son intersección de lados de pendiente $m \geq -1$ desaparecen y los demás se mantienen.

9.5 Cambios de coordenadas del tipo (1).- Un punto cualquiera (α, β) del diagrama E, se transforma en puntos del segmento determinado por (α, β) y $(\alpha + \beta, 0)$. Luego el polígono de Newton resultante puede perder eventualmente, los vértices que son intersección de lados de pendiente $m \geq -1$.

Lema 10.- Sea $f(X,Y,Z) \in k[[X,Y,Z]]$ de orden p , escrita en la forma de Weierstrass y forma inicial Z^p . Entonces, después de explosiones en (Z,X) , (Z,Y) o en el origen en los puntos $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$, los

vértices del polígono de Newton resultante, son transformados de vértices del polígono de Newton de $f(X,Y,Z) = 0$.

Demostración.- En el caso de las transformaciones monoidales el lema es evidente. En el caso de una transformación cuadrática en $(1,0,0)$, hemos visto en la Observación anterior que, puntos de la recta de ecuación $y = mx + n$ ($m \neq -1$) se transforman en puntos de una recta de pendiente $\frac{m}{m+1}$.

Consideremos, entonces, un lado del polígono de Newton de ecuación dada con $0 \geq m > -1$. Sea (α, β) un punto del diagrama de Newton de f , que verificará que

$$\beta \geq m\alpha + n$$

El transformado $(\alpha + \beta^{-p}, \beta)$, verifica entonces, que

$$\beta \geq \frac{m}{m+1} (\alpha + \beta^{-p}) + \frac{n+pm}{m+1}.$$

Se deduce de aquí, que no pueden aparecer nuevos vértices, salvo los transformados de los del polígono de $f(X,Y,Z) = 0$ que no son intersección de lados de pendiente menor o igual que -1 .

Lema 11.- Sea $f(X,Y,Z) \in k[[X,Y,Z]]$ en la forma de Weierstrass, de forma inicial Z^p y de tal modo que, el polígono de Newton correspondiente tiene sus vértices no contráctiles. Se verifica que:

(11.1) Después de una explosión en (Z,X) , (Z,Y) o en el origen en los puntos $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$, los vértices del polígono de Newton resultante son no contráctiles.

(11.2) Después de un cambio de coordenadas del tipo (1), el vértice de mínima abscisa se mantiene no contráctil.

Demostración.- Consideremos un vértice cualquiera (α, β) del polígono de Newton de $f(X,Y,Z) = 0$, que no es contráctil. Aplicamos la transformación monoidal de centro (Z,X) ; entonces pueden ocurrir dos posibilidades:

a) Si $(\alpha, \beta) \notin Z^p \times Z^p$ entonces $(\alpha^{-p}, \beta) \notin Z^p \times Z^p$.

b) Si $(\alpha, \beta) \in Z^p \times Z^p$, y los términos que definen a (α^{-p}, β) en el polígono transformado son

$$(Z_1 - aX_1^{(\alpha-p)/p} Y_1^{\beta/p})^p = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} Z_1^i \left[aX_1^{(\alpha-p)/p} Y_1^{\beta/p} \right]^{p-i}$$

entonces, los términos de $f(X,Y,Z)$ que definen a (α, β) son, a fortiori,

$$(3) \quad \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} Z_1^i \left[aX_1^{\alpha/p} Y_1^{\beta/p} \right]^{p-i} = (Z - aX^{\alpha/p} Y^{\beta/p})^p,$$

que se contradice con la hipótesis de que (α, β) no es contráctil.

De otro lado, si lo que realizamos es una transformación cuadrática en $(1,0,0)$, entonces pueden ocurrir dos posibilidades:

a) Si $(\alpha, \beta) \notin Z_p \times Z_p$ se tiene que $(\alpha + \beta - p, \beta) \notin Z_p \times Z_p$.

b) Si $(\alpha, \beta) \in Z_p \times Z_p$, y los términos que definen al punto $(\alpha + \beta - p, \beta)$ en el polígono de Newton resultante son

$$(Z_1 - aX_1^{(\alpha + \beta - p)/p} Y_1^{\beta/p})^p = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} Z_1^i \left[aX_1^{(\alpha + \beta - p)/p} Y_1^{\beta/p} \right]^{p-i},$$

los términos de $f(X,Y,Z)$ que definen a (α, β) son los de (3), que se contradice con la hipótesis de que (α, β) no es contráctil.

Los casos que restan por estudiar son análogos a los ya vistos, salvo el del cambio de coordenadas. En este caso, es evidente que vértice de mínima abcisa se mantiene invariante, y por tanto no contráctil. Más aun, los vértices cuyo lado contiguo izquierdo es de pendiente $m < -1$, se mantienen también invariantes y no contráctiles.

c.q.d.

Nota 12. - En resumen, supondremos que el polígono de Newton de $f(X,Y,Z)=0$ no tiene los vértices contráctiles y que cada vez que se realice un cambio de coordenadas del tipo (1) en la sucesión admisible de explosiones $\{s_i\}_{i \in Z_0}$, se efectúa la contracción de los posibles vértices contráctiles.

En estas condiciones podemos demostrar el resultado que pretendíamos, es decir

Lema 13. - Sea $\{s_i\}_{i \in Z_0}$ una sucesión admisible de explosiones con multiplicidad estacionaria y con ecuaciones tales que los vértices de los polígonos

de Newton respectivos son no contráctiles. Entonces, la forma inicial de estas ecuaciones es Z_i^P ($\forall i \in Z_0$).

Demostración.- En caso contrario, si en un momento de la sucesión la forma inicial no es Z_i^P , sino que es $(Z_i + aX_i + bY_i)^P$, quiere decir que el polígono de Newton correspondiente, corta al semiplano $x+y \leq p$ en puntos de la recta $x+y = p$.

-Si $a \neq 0$, en $f^{(i)}(X_i, Y_i, Z_i)$ están los términos de $(Z_i + aX_i)^P$ que definen el punto $(p, 0)$ de su diagrama de Newton. Este punto tiene que ser, por ello, el vértice de máxima abcisa, que por hipótesis no es contráctil, y esto es una contradicción.

-Si $b \neq 0$, se razona igual con el vértice $(0, p)$ de mínima abcisa.

Lema 14.- En las condiciones del lema anterior, se verifica que en $\{S_i\}_{i \in Z_0}$ hay un número infinito de explosiones en (Z, Y) o de transformaciones cuadráticas en $(0, 1, 0)$.

Demostración.- En caso contrario, supongamos que hay sólo un número finito. Consideremos la sucesión $\{S_i\}_{i \geq n}$, en la que no hay ninguna explosión en (Z, Y) ni ninguna transformación cuadrática en $(0, 1, 0)$; supongamos también que S_{n+1} es el transformado cuadrático de S_n en $(1, 0, 0)$. Sea $f^{(n)}(X_n, Y_n, Z_n) = 0$ la ecuación de S_n obtenida por las transformaciones correspondientes, de la $f(X, Y, Z) = 0$ de S .

Consideremos la sucesión $\{S'_i\}_{i \geq n}$ definida por las condiciones siguientes:

a) $S'_n = S_n$.

b) Si S_{i+1} es la transformada cuadrática de S_i , entonces S'_{i+1} es la transformada cuadrática de S'_i , ($i \geq n$).

c) Si S_{i+1} es el transformado monoidal de S_i , entonces $S'_{i+1} = S'_i$.

En otras palabras, $\{S'_i\}_{i \geq n}$ es la sucesión $\{S_i\}_{i \geq n}$ obviando las transformaciones monoidales.

Tomando la ecuación $f^{(n)}(x_n, y_n, z_n) = 0$ de S'_n , la diferencia entre los diagramas E y E' de las S_i y S'_i , respectivamente, es evidentemente una traslación paralela al eje x .

Por tanto, $\{S'_i\}_{i \geq n}$ es un punto estacionario para S'_n , luego en $S'_n = S_n$ hay una curva permitida, llegando así a una contradicción conque S_{n+1} es la transformada cuadrática de S_n .

Demostración del teorema de finitud de sucesiones admisibles.-

Sea $\{S_i\}_{i \in \mathbb{Z}_0}$ una sucesión de explosiones admisibles para $S = S_0$ de multiplicidad constante. Sea $f(X, Y, Z) = 0$ una ecuación de S en $k[[X, Y, Z]]$ escrita en la forma de Weierstrass, de forma inicial Z^p y con los vértices de su diagrama E siendo no contráctiles.

Se tiene que las ecuaciones de las S_i ($\forall i \geq 0$) se obtienen a partir de $f(X, Y, Z) = 0$ por medio de las operaciones siguientes:

- 1) Transformaciones cuadráticas en $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$.
- 2) Transformaciones monoidales del tipo (Z, X) y (Z, Y) .
- 3) Cambios de coordenadas del tipo $X = X'$, $Y = Y' - \beta X'$, $Z = Z'$, seguidos de eventuales contracciones de vértices.

Consideremos el diagrama E de $f(X, Y, Z) = 0$ y fijémonos en el vértice de menor abcisa, a cuya ordenada denotaremos por m_0 , es decir,

$$m_0 = \max \{ b \mid (a, b) \text{ es un vértice de } \bar{E} \}$$

En general, considerando la región de Newton \bar{E} de la ecuación $f^{(i)}(x_i, y_i, z_i) = 0$ de S_i , sea

$$m_i = \max \{ b \mid (a, b) \text{ es un vértice de } \bar{E} \}.$$

Hemos probado en (11.2) que m_i es invariante ante un cambio de variables del tipo (1) y que tampoco varía mediante una posible contracción de vértices.

Entonces, sea $f^{(i+1)}(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}) = 0$ la ecuación de S_{i+1} obtenida a partir de $f^{(i)}(x_i, y_i, z_i) = 0$ por: a) una transformación cuadrática en $(1,0,0)$, b) una transformación cuadrática en $(0,1,0)$, c) una transformación monoidal en (z_i, x_i) , o d) una transformación monoidal en (z_i, y_i) . Estudiaremos en los casos anteriores la variación de m_{i+1} con respecto a m_i .

a) Transformación cuadrática en $(1,0,0)$. - Se tiene que $m_{i+1} \leq m_i$.

En efecto, la ordenada de los puntos de E no varía con esta explosión, entonces:

(a-1) Si el lado contíguo por la derecha al vértice de mínima abcisa,

(n_i, m_i) , era de pendiente $p_i > -1$, probamos en (9.3) de la Observación 9 que, el nuevo vértice $(n_i + m_i - p, m_i)$ sigue conservando el carácter de minimalidad de su abcisa, luego $m_{i+1} = m_i$.

(a-2) Si el lado contíguo por la derecha al vértice de mínima abcisa

(n_i, m_i) , era de pendiente $p_i \leq -1$, después de la explosión, el punto $(n_i + m_i - p, m_i)$ no es un vértice del polígono de Newton resultante. Luego el nuevo vértice de mínima abcisa, que es transformado de un antiguo vértice, tiene una ordenada menor que m_i , es decir $m_{i+1} < m_i$.

b) Transformación cuadrática en $(0,1,0)$. - Se tiene que $m_{i+1} < m_i$.

En efecto, la abcisa de los puntos de E no varía con esta explosión, y si (n_i, m_i) es el vértice de mínima abcisa ($n_i < p$), $(n_i, m_i + n_i - p)$ es el vértice de mínima abcisa en el polígono transformado.

Luego $m_{i+1} < m_i$.

c) Transformación monoidal en (Z_i, X_i) .- Es evidente que $m_{i+1} = m_i$.

d) Transformación monoidal en (Z_i, Y_i) .- Es evidente que $m_{i+1} = m_i - p < m_i$.

En definitiva, obtenemos una sucesión $\{m_i\}_{i \in Z_0}$, no creciente, asociada a $\{S_i\}_{i \in Z_0}$ que, por el lema 14, no es estacionaria, y que conduce a una contradicción con el hecho de que la multiplicidad de las S_i es p , y la forma inicial es del tipo $z_i^p, \forall i \in Z_0$.

c.q.d.

BIBLIOGRAFIA

- [1] J.M.AROCA, H.HIRONAKA, J.L.VICENTE : "The theory of the maximal contact".
Memorias de Matemáticas del Instituto Jorge Juan nº29. C.S.I.C.Madrid
1976.
- [2] M.ATIYAH, I.MCDONALD : "Introducción al Algebra Conmutativa".Ed.Reverté
1973.
- [3] B.M.BENNETT : "On the characteristic functions of a local ring".Ann. of
Math. 91. 1970.
- [4] N.BOURBAKI : "Algebre Commutative". Ed.Hermann. Paris 1964-1969.
- [5] R.GODEMENT : "Théorie des faisceaux". Ed.Hermann. Paris. 1964.
- [6] A.GROTHENDIECK, J.A.DIEUDONNE : "Eléments de Géométrie Algébrique I.
Ed. Springer Verlag. 1971.
- [7] - - - - - : "E.G.A.II:Etude globale élémentaire
de quelques classes de morphismes". Pub.Math.nº8. I.H.E.S. Paris 1961.
- [8] H.HIRONAKA : "Resolution of singularities of an algebraic variety over
a field of characteristic zero, I y II". Ann. of Math. 79. 1964.
- [9] - - - - - : "Desingularization of Excellent Surfaces". Bowdoin Colle-
ge, 1967. Notas de B.M.Bennett. Sin publicar.
- [10] H.MATSUMURA : "Commutative Algebra". Ed.Benjamin. New York 1970.
- [11] M.NAGATA: "Local rings". Ed. Interscience. 1962.
- [12] C.ROMO : "Resolución de singularidades de variedades algebroides sobre
un cuerpo de característica cualquiera". Tesis de doctorado. Madrid
1976.
- [13] T.SANCHEZ GIRALDA : "Teoría de singularidades de superficies algebroi-
des sumergidas". Tesis de doctorado. Madrid 1976.
- [14] - - - - - : "Problemas de finitud y caminos estacionarios en la
teoría de singularidades de superficies algebroides sumergidas". A pu-
blicar en las Actas de la R.A.M.E. Málaga 1976.
- [15] J.L.VICENTE : "Clasificación de singularidades de curvas algebroides
alabeadas". Monografias de Matemática del Inst.Jorge Juan nº3. C.S.I.C.
Madrid 1972.

- [16] O.ZARISKI, P.SAMUEL : "Commutative Algebra". Ed.Springer Verlag.GTM 28
1975.
- [17] O.ZARISKI: "Reduction of the singularities of algebraic three dimensional varieties". Ann. of Math. 45. 1944.

Tribunal integrado por los señores
de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral
Román Piecho Sánchez
sobre el tema "Estudio local de singularidades de superficies
sobre cuerpos base de característica arbitraria"

Se acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente
cum Laude

Sevilla, 19 de Diciembre 1.978

El Vocal,
Federico Galz

El Vocal,
Esteban

El Vocal,
José L. Vicente

El Presidente
A. Cantón

El Secretario,
José M. A.

El Decano
Piecho