Trabajo Fin de Grado

Introducción a la Teoría de Bass–Serre

José Gálvez Mateos

Departamento de Álgebra

María
Cumplido Cabello
Codirectora del trabajo

José Manuel
Higes López
Codirector del trabajo

A Chema, por estar siempre a mi lado,
a Alonso, por ser mi compañero,
a María y Jose Manuel, por ser los mejores mentores,
y sobre todo, a mis padres, por apoyarme tanto.

Resumen

En el siguiente trabajo se pretende realizar una introducción a la teoría de Bass-Serre. Ésta consiste en el estudio de grupos a través de su acción sobre objetos geométricos como son los grafos, más específicamente, los árboles.

Para ello, comenzaremos dando algunos resultados sobre teoría de grupos que necesitaremos a lo largo del desarrollo del presente escrito, construyendo la estructura de producto amalgamado, en la cual se centrarán, en esencia, nuestros resultados. A continuación, concretaremos ciertos resultados sobre teoría de grafos, comentando la estrecha relación que tienen algunos tipos de grafos con las estructuras de grupo.

Para concluir, aunaremos las estructuras antes vistas y trabajaremos con las herramientas desarrolladas el problema de los subgrupos de Artin-Tits parabólicos, dándole solución para una subclase concreta.

Abstract

In the following work we intend to make an introduction to the Bass-Serre theory. It consists of the study of groups through their action over geometric objects such as graphs, more specifically, trees.

To do this, we will begin by giving some results on group theory that we will need throughout the development of this paper, building the amalgamated product structure, on which our results will essentially focus. Next, we will specify certain results on graph theory, commenting on the close relationship that some types of graphs have with group structures.

To conclude, we are going to combine the structures seen before and we are going to use the tools we are going to use the tools we have previously developed to work on the problem of parabolic Artin-Tits subgroups, proveing it for a specific subclass of them.

Índice general

1 | Grupos y amalgamas

1.1. Grupos

Comencemos introduciendo el objeto principal de nuestro estudio, que será la estructura algebraica conocida como grupo, al igual que algunos resultados básicos que usaremos frecuentemente.

Definición (Grupo)**.** Un grupo es un par $(G, *)$, donde G es un conjunto y $* : G \times G \longrightarrow G$ es una operación binaria satisfaciendo los siguientes axiomas:

- *Asociatividad*: Para todo $g_1, g_2, g_3 \in G$ se tiene

$$(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3).$$

- *Existencia de elemento neutro*: Existe un elemento neutro $e \in G$ tal que para todo $g \in G$ se tiene que

$$g * e = e * g = g.$$

- *Existencia de elemento inverso*: Para todo $g \in G$ existe un $g' \in G$ tal que

$$g * g' = g' * g = e.$$

Cuando no haya ambigüedad, notaremos esta operación mediante una yuxtaposición, a saber, $g_1 g_2 := g_1 * g_2$. De la misma manera, denotaremos al elemento neutro por 1 y al elemento inverso de g por g^{-1}. También, haciendo un abuso de notación y salvo que se diga lo contrario, un grupo $(G, *)$ será notado por G.

Definición (Subgrupo)**.** Sea G un grupo y sea H un subconjunto de G. Diremos que H es un subgrupo de G, notado por $H \leqslant G$, si $(H, *)$ es un grupo.

Un tipo particular de subgrupos son los subgrupos normales.

Definición (Subgrupo normal)**.** Sea G un grupo y sea N un subgrupo de G. Se dice que N es un subgrupo normal de G, notado $N \trianglelefteq G$, si para todo $g \in G$ se tiene que $gN = Ng$, entendiéndose

$$gN := \{gn : n \in N\} \qquad \text{y} \qquad Ng := \{ng : n \in N\}.$$

Una vez definido el objeto algebraico a tratar, lo natural será ver las aplicaciones que preservan la estructura que hemos definido.

Definición (Homomorfismo de grupos)**.** Sean G y H dos grupos y sea $\varphi : G \longrightarrow H$ una aplicación. Diremos φ es un homomorfismo de grupos si para todo $g_1, g_2 \in G$ se tiene que

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) \in H.$$

En el caso de ser φ un homomorfismo de grupos biyectivo, diremos que es un isomorfismo de grupos.

Proposición 1.1.1 (Grupo cociente)**.** *Sea G un grupo y $H \leqslant G$. Entonces $G/H := \{gH : g \in G\}$ tiene estructura de grupo sí y solo si H es un subgrupo normal de G.*

Demostración. Supongamos que G/H tiene una estructura de grupo. Consideremos la siguiente aplicación $\psi : (G/H) \times (G/H) \longrightarrow G/H$ dada por $\psi(g_1H, g_2H) = (g_1g_2)H$, la cual describe el producto natural en G/H.

Veamos que esta aplicación solo puede estar bien definida si H es un subgrupo normal. Notemos que si $h \in H$, entonces $gH = (gh)H$. Supongamos que ψ está bien definida, entonces

$$H = (gg^{-1})H = \psi(gH, g^{-1}H) = \psi((gh)H, g^{-1}H) = (ghg^{-1})H.$$

Vemos así que necesariamente H ha de ser un subgrupo normal de G.

Supongamos ahora que H es un subgrupo normal de G. Basta probar que ψ está bien definida, o sea, que no depende del representante elegido. Sean $g_1, g_1', g_2, g_2' \in G$ tales que $g_1H = g_1'H$ y $g_2H = g_2'H$. Dadas estas igualdades, necesariamente han de existir $h_1, h_2 \in H$ tales que $g_1' = g_1h_1$ y $g_2' = g_2h_2$. Entonces

$$\psi(g_1'H, g_2'H) = (g_1'g_2')H = (g_1h_1g_2h_2)H = (g_1g_2(g_2^{-1}h_1g_2)h_2)H.$$

Como H es un subgrupo normal, entonces $g_2^{-1}h_1g_2 \in H$ implica que $g_2^{-1}h_1g_2h_2 \in H$. Por lo tanto

$$\psi(g_1'H, g_2'H) = (g_1g_2(g_2^{-1}h_1g_2)h_2)H = (g_1g_2)H = \psi(g_1H, g_2H).$$

Vemos que la imagen no depende del representante elegido, por lo que ψ está bien definida. $\square$

Pasemos a dar un nuevo punto de vista de los elementos de un grupo.

Definición (Conjunto generador)**.** Sea G un grupo y sea $S \subset G$ un subconjunto. Llamaremos subgrupo de G generado por S al menor subgrupo de G respecto de la inclusión, que contenga a S. Este será denotado por $\langle S \rangle_G$. Se dirá que S genera a G si $\langle S \rangle_G = G$.

Visto el concepto de conjunto generador, podemos introducir la noción de grupo libre.

Definición (Grupo libre)**.** Sea S un conjunto y G un grupo que contiene a S. Diremos que G está generado libremente por S si cumple la siguiente propiedad universal: Para todo grupo H y toda aplicación $\varphi : S \longrightarrow H$ existe un único homomorfismo de grupos $\widetilde{\varphi} : G \longrightarrow H$ extendiendo a φ. Esto es

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & H \\ G \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

donde $i : S \longrightarrow G$ es la inclusión. Diremos que un grupo es libre si es libremente generado por algún conjunto S.

Proposición 1.1.2 (Unicidad del grupo libre, Proposición 2.2.6 [13])**.** *Sea S un conjunto. Entonces, salvo isomorfismo, el grupo libre generado por S, si existe, es único.*

Demostración. Supongamos que existen dos grupos G_1 y G_2 generados libremente por S. Denotemos la inclusión de S a G_1 y G_2 por i_1 e i_2 respectivamente. Por ser G_1 libremente generado por S, la propiedad universal de los grupos libres nos garantiza que existe un único homomorfismo de grupos $\widetilde{\varphi}_1 : G_1 \longrightarrow G_2$ tal que $\widetilde{\varphi}_1 \circ i_1 = \varphi_1$. De manera análoga, ha de existir un único homomorfismo de grupos $\widetilde{\varphi}_2 : G_2 \longrightarrow G_1$ tal que $\widetilde{\varphi}_2 \circ i_2 = \varphi_2$.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "i_1"'] & G_2 \\ G_1 \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\varphi}_1"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "i_2"'] & G_1 \\ G_2 \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\varphi}_2"'] & \end{tikzcd}$$

Consideremos los homomorfismos $\widetilde{\varphi}_2 \circ \widetilde{\varphi}_1 : G_1 \longrightarrow G_1$ y $\widetilde{\varphi}_1 \circ \widetilde{\varphi}_2 : G_2 \longrightarrow G_2$. Estos homomorfismos hacen los diagramas

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "i_1"'] & G_1 \\ G_1 \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\varphi}_2\circ\widetilde{\varphi}_1"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "i_2"'] & G_2 \\ G_2 \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\varphi}_1\circ\widetilde{\varphi}_2"'] & \end{tikzcd}$$

conmutativos. Sea $s \in S$. Entonces

$$(\widetilde{\varphi}_2 \circ \widetilde{\varphi}_1 \circ i_1)(s) = (\widetilde{\varphi}_2 \circ \widetilde{\varphi}_1)(s) = \varphi_1(s)$$

Podemos tomar $\varphi_1 = i_S$, la aplicación inclusión de S en G_1, por lo que necesariamente se tiene que $\widetilde{\varphi}_2 \circ \widetilde{\varphi}_1 = \mathrm{id}_{G_1}$. Análogamente, se tiene que $\widetilde{\varphi}_1 \circ \widetilde{\varphi}_2 = \mathrm{id}_{G_2}$. Obtenemos dos isomorfismos de grupos, que son los únicos que extienden a la aplicación identidad, por la propiedad universal de los grupos libres. Por lo tanto, deducimos que G_1 y G_2 son iguales salvo isomorfismo. $\square$

Proposición 1.1.3 (Existencia del grupo libre, Teorema 2.2.7 [13])**.** *Sea S un conjunto. Entonces existe un grupo generado libremente por S.*

Demostración. Consideremos el conjunto $A := S \cup \hat{S}$, al que llamaremos alfabeto, donde $\hat{S} = \{\hat{s} : s \in S\}$ es una copia disjunta de S. La idea consistirá en crear palabras con los elementos de S y $\hat{S}$, donde los elementos de $\hat{S}$ hacen la función de inversos de los elementos de S.

Primero, definimos A^* como el conjunto de todas las posibles palabras de los elementos de A junto con la palabra nula 1, entendiéndose palabra por la concatenación de elementos de A. De manera más precisa, definimos una operación $A^* \times A^* \longrightarrow A^*$ tal que $(x, y) \longmapsto xy$ y pedimos que sea asociativa y que tenga por elemento neutro a 1.

Creado el conjunto A^*, consideremos el conjunto

$$F(S) := A^*/\sim$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia dada por

$$xs\hat{s}y \sim xy \ \forall x, y \in A^* \ \forall s \in S \qquad \text{y} \qquad x\hat{s}sy \sim xy \ \forall x, y \in A^* \ \forall s \in S$$

Notemos a los elementos de $F(S)$ por $[x]$ con $x \in A^*$. Consideremos ahora la operación $* : F(S) \times F(S) \longrightarrow F(S)$ dada por $[x] * [y] = [xy]$. Veamos que está bien definido. Sea $x, x', y, y' \in A^*$ tal que $[x] = [x']$ e $[y] = [y']$. Sin pérdida de generalidad podemos tomar s_1 y s_2 tal que $x' = s_1\hat{s}_1x$ e $y' = s_2\hat{s}_2y$. Entonces

$$[x'] * [y'] = [x'y'] = [s_1\hat{s}_1(xs_2\hat{s}_2y)] = [s_1\hat{s}_1xy] = [xy].$$

De manera análoga podemos tomar $\hat{s}s$, y en ambos casos pueden estar multiplicados a izquierda o a derecha. En el caso de no obtenerse directamente, lo anterior reduce la palabra, por lo que podemos obtener la segunda a partir de la primera mediante este tipo de operaciones. En consecuencia, la operación está bien definida. Veamos ahora que $(F(S), *)$ es un grupo. Notemos que $[1]$ es el elemento neutro bajo la operación $*$, y la asociatividad de la composición viene heredada de A^*. Definimos la aplicación $I : A^* \longrightarrow A^*$ definida recursivamente por

$$I(1) = 1 \qquad I(sx) = I(x)\hat{s} \qquad I(\hat{s}x) = I(x)s$$

para todo $x \in A^*$ y para todo $s \in S$. Notemos que $I(I(x)) = x$, pues si $x \in A^*$, entonces $x = s_1 \dots s_n$ con $s_1, \dots, s_n \in A$. Entonces

$$I(I(x)) = I(I(s_1 \dots s_n)) = I(I(s_2 \dots s_n)\hat{s}_1) = \cdots = I(I(s_n)\hat{s}_{n-1} \dots \hat{s}_1) = I(\hat{s}_n \dots \hat{s}_1)$$

y repitiendo el proceso

$$I(I(x)) = I(\hat{s}_n \dots \hat{s}_1) = I(\hat{s}_{n-1} \dots \hat{s}_1)s_n = \cdots = I(\hat{s}_1)s_2 \dots s_n = s_1 \dots s_n = x.$$

Notemos además que
$$[I(x)] * [x] = [I(x)x] = [\hat{s}_n \dots \hat{s}_1 s_1 \dots s_n] = [1]$$
y en consecuencia
$$[x] * [I(x)] = [I(I(x))] * [I(x)] = [I(I(x))I(x)] = [1].$$
Hemos demostrado la exitencia de elemento inverso. Se tiene, pues, que $(F(S), *)$ es un grupo. Resta probar que $F(S)$ es libremente generado por S.

Sea $i : S \longrightarrow F(S)$ la aplicación dada por $i(s) = [s]$. Por construcción, $F(S)$ está generado por $i(S)$. Consideremos un grupo G cualquiera y una aplicación $\varphi : S \longrightarrow G$. A partir de φ construimos $\varphi^* : A^* \longrightarrow G$ inductivamente tal que

$$\varphi^*(1) = 1 \qquad \varphi^*(sx) = \varphi(s)\varphi^*(x) \qquad \varphi^*(\hat{s}x) = (\varphi(s))^{-1}\varphi^*(x)$$

para todo $s \in S$ y para todo $x \in A^*$. Veamos que es compatible con la relación de equivalencia $\sim$. Sean $x, y \in A^*$ tal que $[x] = [y]$. Tomemos $s \in S$ tal que $y = s\hat{s}x$. Entonces

$$\varphi^*(y) = \varphi^*(s\hat{s}x) = \varphi(s)\varphi^*(\hat{s}x) = \varphi(s)(\varphi(s))^{-1}\varphi^*(x) = \varphi^*(x).$$

Por lo tanto, φ^* induce una aplicación $\widetilde{\varphi} : F(S) \longrightarrow G$, dada por $\widetilde{\varphi}([x]) = \varphi^*(x)$, que está bien definida y es un homomorfismo de grupos. Además, por construcción se tiene que $\widetilde{\varphi} \circ i = \varphi$, y como $i(S)$ genera a $F(S)$, el homomorfismo que hemos creado es el único posible cumpliendo esa propiedad. Falta probar que i es inyectiva para probar que $F(S)$ cumple la propiedad universal de los grupos libres.

Sean $s_1, s_2 \in S$. Consideremos la aplicación $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $\varphi(s_1) = 1$ y $\varphi(s_2) = -1$. El correspondiente homomorfismo de grupos $\widetilde{\varphi} : F(S) \longrightarrow \mathbb{Z}$ ha de satisfacer

$$\widetilde{\varphi}(i(s_1)) = \varphi(s_1) = 1 \neq -1 = \varphi(s_2) = \widetilde{\varphi}(i(s_2)).$$

En particular, $i(s_1) \neq i(s_2)$. En consecuencia, i es inyectiva. Concluimos que $F(S)$ cumple la propiedad universal de los grupos libres, y por lo tanto, es un grupo libre generado por S. □

Hemos obtenido así que, partiendo de cualquier conjunto, siempre vamos a ser capaces de obtener una estructura de grupo libre. Es claro que todo grupo no es libre, por lo que sería conveniente poder manejar de manera similar un grupo de manera más general. Esto inspira las siguientes definiciones.

Definición (Clausura normal de un conjunto)**.** Sea G un grupo y $S \subset G$ un subconjunto. Llamaremos subgrupo normal de G generado por S, notado $\langle S \rangle_G^{\triangleleft}$, al menor subgrupo normal de G con respecto a la inclusión, que contiene a S.

Definición (Generadores y relaciones)**.** Sea S un conjunto y $R \subset \left(S \cup \hat{S}\right)^*$ un subconjunto. Sea $F(S)$ el grupo libre generado por S. Llamaremos grupo generado por S con relaciones R a

$$\langle S|R \rangle := F(S)/\langle R \rangle_{F(S)}^{\triangleleft}.$$

Si G es un grupo tal que $G \cong \langle S|R \rangle$ para algún S y para cierto R, diremos que $\langle S|R \rangle$ es una presentación de G.

Veamos un ejemplo. Consideremos el grupo $(\mathbb{Z}, +)$. Es evidente que el elemento neutro es 0 y el elemento inverso de n es $-n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Notemos que dado $n \in \mathbb{Z}$, es $n = 1 + \cdots + 1$ n veces, por lo que $\mathbb{Z}$ está generado por $\{1\}$. Veamos que es un grupo libre. Sea $\varphi : \{1\} \longrightarrow G$ con G un grupo cualquiera, tal que $\varphi(1) = g \in G$. Podemos considerar el homomorfismo de grupos $\widetilde{\varphi} : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ dado por

$$\widetilde{\varphi}(n) = \underbrace{g \cdots g}_{n \text{ veces}} := g^n \qquad \widetilde{\varphi}(-n) = \underbrace{g^{-1} \cdots g^{-1}}_{n \text{ veces}} := g^{-n}$$

entendiéndose n como un entero positivo. Vemos que $\widetilde{\varphi}$ exitende a φ y de manera única, pues $\{1\}$ genera a $\mathbb{Z}$. Por lo tanto, $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo libre generado por $\{1\}$. Por ser generado por un único elemento y ser un grupo libre, tenemos
$$\mathbb{Z} \cong F(\{a\}).$$

Tomemos el subgrupo $m\mathbb{Z} = \{mz : z \in \mathbb{Z}\}$, con $m \in \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Z}$ es abeliano, todos sus subgrupos son normales, en particular $m\mathbb{Z}$. Podemos notar que $m\mathbb{Z}$ está generado por $\{m\}$, que visto como elemento de $F(\{a\})$ sería a^m. Entonces

$$\mathbb{Z}/m := \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong F(\{a\})/\langle\{a^m\}\rangle^{\triangleleft}_{F(\{a\})} = \langle a|a^m\rangle.$$

1.2. Acción de grupo

En esta sección se pretende desarrollar una de las relaciones que tienen los grupos con el resto de los objetos matemáticos: las acciones de grupo.

Definición (Categoría)**.** Una categoría $\mathcal{C}$ consta de las siguientes componentes:

- Una clase $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, cuyos elementos son llamados objetos de $\mathcal{C}$.
- Un conjunto $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ para cualquier $X, Y \in \mathrm{Ob}(X, Y)$, cuyos elementos son llamados morfismos, en este caso, morfismos de X a Y.
- Se ha de cumplir que para todo $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ se tenga una operación de composición

  $$\circ : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

  tal que $(g, f) \longmapsto g \circ f$.

Todo lo anterior ha de cumplir las siguientes condiciones:

- Para todo $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ hay un elemento $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$ cumpliendo que para todo $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, para todo $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ y $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ se tenga

  $$f \circ \mathrm{id}_X = f \qquad \text{y} \qquad \mathrm{id}_X \circ g = g.$$

  Al morfismo id_X se le llama morfismo identidad de X en la categoría $\mathcal{C}$.
- La operación de composición de morfismos ha de ser asociativa. Esto es, para todo $W, X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y para todo $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(W, X)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ y $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ se ha de tener que

  $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Pongamos un ejemplo para aclarar el concepto. La categoría **Grupos** consiste en:

- *Objetos*: Los objetos de la categoría **Grupos** serán todos los grupos.
- *Morfismos*: Para todo $G, H \in \mathrm{Ob}(\textbf{Grupos})$ el conjunto $\mathrm{Mor}_{\textbf{Grupos}}(G, H)$ será el conjunto de todos los homomorfismos de grupos de G a H.
- *Composición*: Como composición tomamos la composición usual de aplicaciones.

Definición (Isomorfismo de categorías)**.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sean $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Entonces, X e Y se dirán isomorfos en $\mathcal{C}$ si existe un $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ y $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ y $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. En este caso, diremos que f y g son isomorfismos en $\mathcal{C}$ y escribiremos $X \cong_{\mathcal{C}} Y$. Si la categoría es evidente, escribiremos simplemente $X \cong Y$.

En el caso de que $X = Y$, diremos que f y g son automorfismos. El conjunto de automorfismos de X en la categoría $\mathcal{C}$ lo notaremos por $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$.

Proposición 1.2.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sea $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Entonces $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$ tiene estructura de grupo. Es más, dado un grupo G existe una categoría $\mathcal{C}$ y un objeto $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ tal que $G \cong \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$.*

Demostración. Consideremos $\mathcal{C}$ una categoría y sea $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Primero, como la composición de morfismos en una categoría es asociativa, también lo será para los automorfismos. Sean $f, g \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$. Claramente, tanto $f \circ g$ como $g \circ f$ están en $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$ por definición, por lo que es cerrado bajo la operación de composición. Por la condición de existencia de identidad, por definición de id_X, esta actúa como la identidad. Por último, por estar $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$ formado por isomorfismos, la existencia de elementos inversos está garantizada. Deducimos que $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$ es un grupo.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría tal que solo contenga un único objeto X. Tomemos el conjunto $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X) := G$ y definimos la composición en $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$ como la operación de composición de G. Se tiene así que, en efecto, es $\mathcal{C}$ una categoría. ☐

Definición (Acción de grupo)**.** Sea G un grupo, $\mathcal{C}$ un categoría y $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Una acción de G sobre X en la categoría $\mathcal{C}$, que denotaremos por $G \circlearrowright_{\mathcal{C}} X$, es un homomorfismo de grupos $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$. Podemos ver una acción de grupo sobre X como una aplicación

$$\Psi : G \times X \longrightarrow X$$

definida como $\Psi(g, x) = f_g(x)$ para todo $g \in G$ y para todo $x \in X$, de manera que

$$f_g \circ f_h = f_{gh},$$

siendo $f_g, f_h \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ asociados a g y a h. En lo que sigue, denotaremos $g \cdot x := \Psi(g, x)$.

Una vez definida la acción de un grupo, hay ciertos conjuntos que nos resultarán de gran interés, los cuales se obtienen a partir de éstas acciones.

Definición (Órbita)**.** Sea G un grupo y sea X un conjunto tal que $G \circlearrowright X$. Para cada $x \in X$, llamaremos órbita de x bajo la acción de G al conjunto

$$G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\}.$$

De la misma manera, podemos considerar el conjunto cociente de X dado por la acción de G como

$$G \backslash X = \{G \cdot x : x \in X\}$$

que es el conjunto de todas las órbitas.

Definición (Estabilizador)**.** Sea G un grupo y sea X un conjunto tal que $G \circlearrowright X$. Dado un $x \in X$, se define el estabilizador de x por la acción de G como

$$G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}.$$

Proposición 1.2.2. *Dado un grupo G y un conjunto X tal que $G \circlearrowright X$, se tiene que para todo $x \in G$ es $G_x \leqslant G$.*

Demostración. Notemos que $1 \in G_x$ para cualquier $x \in X$. Además, dados $g, h \in G_x$ se tiene que

$$gh \cdot x = g \cdot x = x$$

por lo que $gh \in G_x$. Por último, la existencia de elemento inverso se obtiene por la definición de acción de grupo, ya que asociamos cada elemento de G con un automorfismo. En consecuencia, $G_x \leqslant G$ para todo $x \in X$. ☐

Definición (Conjunto de puntos fijos)**.** Dado un grupo G y un conjunto X tal que $G \circlearrowright X$, sea $g \in G$. Llamaremos conjunto de puntos fijos de g respecto de la acción de G sobre X a

$$X^g = \{x \in X : g \cdot x = x\}.$$

Definición (Acción libre)**.** Dado un grupo G y un conjunto X tal que $G \circlearrowright X$, diremos que la acción de G sobre X es libre si para todo $x \in X$ se tiene que $G_x = \{1\}$.

Veamos un ejemplo para aclarar todos los conceptos. Consideremos $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ la circunferencia unidad y tomemos un $\alpha \in \mathbb{R}$. Podemos crear una acción $\mathbb{Z} \circlearrowright S^1$ de manera que dado $n \in \mathbb{Z}$ y $z \in S^1$, definimos

$$n \cdot z := e^{2\pi i \alpha n} z.$$

Es sencillo comprobar que, en efecto, es una acción de grupo que está bien definida para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ y, además, que la acción tiene propiedades distintas dependiendo del α tomado. Veamos la forma de las órbitas. Fijemos $z \in S^1$. Entonces

$$\mathbb{Z} \cdot z = \{n \cdot z : n \in \mathbb{Z}\} = \left\{e^{2\pi i \alpha n} z : n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Supongamos $\alpha \in \mathbb{Q}$, entonces existen $p, q \in \mathbb{Z}$, con $q \neq 0$, tal que $\alpha = \frac{p}{q}$. Entonces existe un número finito de elementos en la órbita, pues

$$q \cdot z = e^{2\pi i \alpha q} z = e^{2\pi i p} z = z = 0 \cdot z.$$

Vemos así que el conjunto es finito, es más, tiene q elementos. Pasemos a ver los estabilizadores.

$$\mathbb{Z}_z = \{n \in \mathbb{Z} : n \cdot z = z\}.$$

Por lo antes visto, se tiene que $n \cdot z = z \Leftrightarrow n = qk$ con $k \in \mathbb{Z}$. Esto es, $\mathbb{Z}_z = q\mathbb{Z}$.

En el caso $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, no puede existir $n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ tal que $n \cdot z = z$, puesto que si existiese habría un $n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ tal que $n\alpha \in \mathbb{Z}$, lo cual es absurdo, pues α es irracional. En consecuencia, $\mathbb{Z}_z = \{0\}$. Por el mismo razonamiento se puede deducir que $\mathbb{Z} \cdot z = S^1$, obteniéndose así que la acción es libre.

1.3. Amalgamas

Pasamos a construir una estructura conocida como amalgama. Para ello, necesitaremos ciertas definiciones previas. En lo que sigue, todo homomorfismo se entenderá por homomorfismo de grupos.

Definición (Límite directo). Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos y, para cada par (i, j), sea F_{ij} un conjunto de homomorfismos de G_i a G_j. Supongamos que existe un grupo G y una familia de homomorfismos $\{f_i\}_{i \in I}$ tal que $f_i : G_i \longrightarrow G$ para cada $i \in I$, cumpliendo que $f_j \circ f = f_i$ para todo $f \in F_{ij}$, y siendo universal; es decir, si H es un grupo y $\{h_i\}_{i \in I}$ es una familia de homomorfismos tal que $h_i : G_i \longrightarrow H$ cumpliendo $h_j \circ f = h_i$ para todo $f \in F_{ij}$, entonces existe un único homomorfismo $h : G \longrightarrow H$ tal que $h_i = h \circ f_i$. Entonces diremos que G es el límite directo de la familia $\{G_i\}_{i \in I}$ respecto de los homomorfismos F_{ij}, y lo notaremos por $G := \varinjlim G_i$.

Esto puede entenderse mejor con el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
G_i \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, "f_i"] \arrow[drr, bend left, "h_i"] & & \\
& G \arrow[r, dashed, "h"] & H \\
G_j \arrow[ur, "f_j"'] \arrow[urr, bend right, "h_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.3.1 (Existencia y unicidad del límite directo). *Dada una familia de grupos $\{G_i\}_{i \in I}$ y unos conjuntos F_{ij} como los antes definidos, entonces existe su límite directo y es único salvo isomorfismo.*

Demostración. Para comprobar la existencia, construyamos el grupo por medio de generadores y relaciones. Sea $G_i \cong \langle S_i | R_i \rangle$ para todo grupo de $\{G_i\}$. Consideremos el grupo G como

$$G \cong \left\langle \bigsqcup_{i \in I} S_i \,\middle|\, \left(\bigsqcup_{i \in I} R_i \right) \cup \left(\bigsqcup_{i,j \in I} R_{ij} \right) \right\rangle$$

donde

$$R_{ij} = \left\{ xy^{-1} : x \in G_i, y \in G_j \text{ e } y = f(x) \text{ para algún } f \in F_{ij} \right\}$$

si $i \neq j$ o vacío en caso contrario.

Tomando como familia de homomorfismos la inclusión $s_i : G_i \hookrightarrow G$, podemos observar que G es el límite directo deseado, pues dado $(i,j) \in I \times I$ y tomando $f \in F_{ij}$ y $x \in G_i$ se tiene que $s_i(x) = (s_j \circ f)(x)$ por las relaciones en R_{ij}. Notemos además que, por la manera en la que se ha definido G, para todo $i \in I$ se tiene que $G_i \leqslant G$, pues este contiene todos sus generadores y sus relaciones.

Sea H un grupo y $\{\gamma_i\}_{i\in I}$ una familia de homomorfismos tal que $\gamma_i : G_i \longrightarrow H$ cumpliendo que para todo $f \in F_{ij}$ se tiene que $\gamma_j \circ f = \gamma_i$. Consideremos $\gamma : G \longrightarrow H$ definido como $\gamma_{|G_i} = \gamma_i$. Este homomorfismo está bien definido, pues los generadores de G son la unión disjunta de los generadores de cada G_i, y por construcción tenemos que $\gamma_i = \gamma \circ s_i$ para todo $i \in I$. Veamos que γ es único. Supongamos que existe otro homomorfismo $\gamma' : G \longrightarrow H$ cumpliendo las mismas propiedades que γ. Entonces para todo $i \in I$ se tiene que

$$\gamma_i = \gamma \circ s_i = \gamma' \circ s_i \Leftrightarrow \gamma = \gamma'.$$

Esto prueba la universalidad de G.

Veamos por último que G es único salvo isomorfismo. Para ello, supongamos que existen dos límites directos, por ejemplo, G con los homomorfismos $\{f_i\}_{i\in I}$ y G' con los homomorfismos $\{f_i'\}_{i\in I}$. Haciendo uso de la universalidad del límite directo, ha de existir un único homomorfismo $h : G \longrightarrow G'$ cumpliendo que $h \circ f_i = f_i'$ para todo $i \in I$. De manera análoga, ha de existir un único homomorfismo $h' : G' \longrightarrow G$ cumpliendo que $h' \circ f_i' = f_i$ para todo $i \in I$. Tenemos así que

$$f_i' = h \circ f_i = h \circ h' \circ f_i' \ \forall i \in I \Leftrightarrow h \circ h' = \mathrm{id}_{G'};$$

$$f_i = h' \circ f_i' = h' \circ h \circ f_i \ \forall i \in I \Leftrightarrow h' \circ h = \mathrm{id}_G.$$

Esto es, $G \cong G'$. □

Definición (Producto amalgamado)**.** Sea A un grupo, $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos y un conjunto $\{f_i\}_{i\in I}$ de homomorfismos inyectivos $f_i : A \longrightarrow G_i$. Llamaremos producto amalgamado de $\{G_i\}_{i\in I}$ respecto de A al límite directo de $\{A\} \cup \{G_i\}_{i\in A}$ respecto de los homomorfismos $\{f_i\}_{i\in I}$, y lo notaremos por $*_A G_i$. En caso de ser $A = \{1\}$, diremos que el producto es libre.

De nuevo, podemos observarlo mejor en el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & G_i \arrow[dr, bend left, "s_i"] & \\
A \arrow[ur, bend left, "f_i"] \arrow[dr, bend right, "f_j"'] & & *_A G_i \\
 & G_j \arrow[ur, bend right, "s_j"'] &
\end{tikzcd}$$

siendo $s_i : G_i \longrightarrow *_A G_i$ los homomorfismos canónicos para todo $i \in I$, es decir, homomorfismos inyectivos.

Veamos una construcción explícita de los productos amalgamados mediante generadores y relaciones. Consideremos cada $G_i \cong \langle S_i | R_i \rangle$. Siguiendo la construcción hecha en la Proposición 1.3.1, podemos obtener una presentación explícita del producto amalgamado de $\{G_i\}_{i\in I}$ antes dados, respecto a un grupo A:

$$*_A G_i \cong \left\langle \bigsqcup_{i\in I} S_i \,\middle|\, \left(\bigsqcup_{i\in I} R_i \right) \cup \left(\bigsqcup_{i,j\in I} \{ f_i(a) = f_j(a) \ \forall a \in A \text{ si } i \neq j \} \right) \right\rangle.$$

Construida la estructura de producto amalgamado, profundizaremos en las palabras que pueden ser formadas en dicha estructura.

Definición (Palabra reducida)**.** Sea A un grupo y $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos tales que $*_A G_i$ es un producto amalgamado. Para cada $i \in I$, elegimos un conjunto W_i de representantes de las clases laterales a la derecha de G_i mód A tal que $1 \in W_i$. Consideremos $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_n)$, con $n \geqslant 1$, una secuencia de elementos de I satisfaciendo que para todo $1 \leqslant m \leqslant n-1$ se tiene $i_m \neq i_{m+1}$. Llamaremos palabra reducida de tipo $\mathbf{i}$ a cualquier familia

$$m = (a; s_1, s_2, \dots, s_n)$$

con $a \in A_i$, $s_1 \in W_{i_1}, \dots, s_n \in W_{i_n}$ y $s_j \neq 1$ para todo j.

Teorema 1.3.1 (Teorema de estructura del producto amalgamado, Teorema 1, pg. 3 [16])**.** *Sea $G = *_A G_i$, h el homomorfismo canónico de A a G, y h_i el homomorfismo canónico de G_i a G para todo $i \in I$. Entonces, usando la notación anterior, para todo $g \in G$ existe una secuencia $\mathbf{i}$ satisfaciendo las condiciones anteriores, y una palabra reducida $m = (a; s_1, \dots, s_n)$ de tipo $\mathbf{i}$ tal que*

$$g = h(a)h_{i_1}(s_1)\cdots h_{i_n}(s_n)$$

de manera que tanto m como $\mathbf{i}$ son únicas.

Demostración. Consideremos $X_{\mathbf{i}}$ el conjunto de las palabras reducidas de tipo $\mathbf{i}$ y sea

$$X = \bigsqcup_{\mathbf{i}} X_{\mathbf{i}}.$$

La idea de la prueba se basa en hacer actuar G sobre X y ver que la acción inducida en A no depende del tipo de la palabra reducida, o sea, de $\mathbf{i}$. Notemos que, por la propiedad universal de G, este queda totalmente determinado por cada grupo G_i, por lo que será suficiente hacer actuar cada grupo G_i sobre X.

Fijemos un $r \in I$ y sea Y_r el conjunto de las palabras reducidas de la forma $(1; s_1, \dots, s_n)$, cumpliendo $i_1 \neq r$. Consideramos las aplicaciones $\psi_r : A \times Y_r \longrightarrow X$, dada por

$$\psi_r(a, (1; s_1, \dots, s_n)) = (a; s_1, \dots, s_n),$$

y $\varphi_r : A \times (W_r \backslash \{1\}) \times Y_r \longrightarrow X$, dada por

$$\varphi_r(a, s, (1; s_1, \dots, s_n)) = (a; s, s_1, \dots, s_n)$$

Estas aplicaciones están bien definidas por la definición de Y_r . Hemos obtenido así una biyección entre $(A \times Y_i) \cup (A \times (W_i \backslash \{1\}) \times Y_i)$ y X, pues $\mathrm{Im}(\psi_r)$ son todas las palabras reducidas tal que $i_1 \neq r$ mientras que $\mathrm{Im}(\varphi_r)$ son todas las que $i_1 = r$. Ahora, considerando la aplicación $\xi_r : A \times W_r \longrightarrow G_r$ definida como $\xi_r(a, s) = as$ obtenemos una biyección, pues W_r son representantes de las clases a la derecha sobre A. En consecuencia, podemos identificar $A \cup (A \times (W_r \backslash \{1\}))$ con G_r, y por ende, como $(A \times Y_r) \cup (A \times (W_r \backslash \{1\}) \times Y_r) \cong X$, obtenemos una biyección

$$\vartheta_r : G_r \times Y_r \longrightarrow X$$

heredada de ξ_r, de ψ_r y de φ_r.

Pasemos a efectuar la acción de grupo. Definimos la acción $G_r \circlearrowright (G_r \times Y_r)$ tal que, dado $g' \in G_r$ y $(g, y) \in G_r \times Y_r$ se tiene

$$g' \cdot (g, y) := (g'g, y).$$

Como solo altera los elementos de G_r operándolos con otros elementos de G_r, por ser éstos grupos, la acción está bien definida. Ahora, como $G_r \times Y_r \cong X$ por ϑ_r, se induce una acción de G_r sobre X. Notemos que, si nos restringimos a A, dado $a' \in A$ y $(a; s_1, \dots, s_n) \in A \times Y_r$, se tiene que

$$a' \cdot (a; s_1, \dots, s_n) = (a'a; s_1, \dots, s_n).$$

Es inmediato observar que esta acción no depende de r.

Una vez construida una acción de cada G_r sobre X, se tiene una acción de G sobre X heredada de cada G_r mediante h_r. Es más, si $m = (a; s_1, \dots, s_n)$ es una palabra reducida y g es su imagen en G mediante los homomorfismos h y los h_i (a saber, $g = h(a)h_{i_1}(s_1)\cdots h_{i_n}(s_n)$), se tiene que $g \cdot (1; \varnothing)$ es el mismo m. Veamos esto. Tomemos m y su respectivo g como antes, y consideremos $g \cdot (1; \varnothing)$. Como cada h_i es un homomorfismo inyectivo, podemos identificar cada $h_{i_n}(s_n)$ con s_n, por lo que

$$g \cdot (1; \varnothing) = (h(a)h_{i_1}(s_1) \cdots h_{i_n}(s_n)) \cdot (1; \varnothing) = \big(h(a)h_{i_1}(s_1) \cdots h_{i_{n-1}}(s_{n-1})\big) \cdot (1; s_n) =$$

$$= \big(h(a)h_{i_1}(s_1) \cdots h_{i_{n-2}}(s_{n-2})\big) \cdot (1; s_{n-1}, s_n) = \cdots = h(a) \cdot (1; s_1, \ldots, s_n) = m.$$

Sea $\alpha : G \longrightarrow X$ dada por $\alpha(g) = g \cdot (1; \varnothing)$ y $\beta : X \longrightarrow G$ dada por

$$\beta(a; s_1, \ldots, s_n) = h(a)h_{i_1}(s_1) \cdots h_{i_n}(s_n).$$

Así, si tomamos $(a; s_1, \ldots, s_n) \in X$ se tiene que

$$(\alpha \circ \beta)(a; s_1, \ldots, s_n) = \alpha\left(h(a)h_{i_1}(s_1) \cdots h_{i_n}(s_n)\right) = (a; s_1, \ldots, s_n).$$

Se deduce que $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_X$. Veamos que β es inyectiva. Por reducción al absurdo, supongamos que no lo es. Entonces existen $\delta_1, \delta_2 \in X$ palabras reducidas distintas tales que $\beta(\delta_1) = \beta(\delta_2)$. Entonces

$$\delta_1 = \mathrm{id}_X(\delta_1) = (\alpha \circ \beta)(\delta_1) = (\alpha \circ \beta)(\delta_2) = \mathrm{id}_X(\delta_2) = \delta_2.$$

Esto es absurdo, pues supusimos que dichos elementos eran distintos. Se deduce así que β es inyectiva, y en consecuencia, se tiene que la descomposición es única. Nos queda probar la unicidad de las palabras reducidas. Esto es equivalente a probar que $G \cong X$. Primero, por ser β inyectiva se tiene que $X \cong \beta(X) \subseteq G$. Por otra parte, por la acción antes definida, es claro que $G_r \cdot X \subseteq X$ para todo $r \in I$, en tanto que una palabra reducida es mandada a otra. En consecuencia, $G \cdot X \subseteq X$. Se deduce pues que $G \cong X$, pues la palabra trivial está en X. □

Corolario 1.3.1 (Teorema 2, pg. 4 [16]). *En uso de la notación del teorema anterior, consideremos $\mathcal{I}$ el conjunto de todas las posibles sucesiones de elementos de I, tales que dado un $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathcal{I}$ cumpla que $i_m \neq i_{m+1}$ para todo $1 \leqslant m \leqslant n-1$. Dado un $\mathbf{j} \in \mathcal{I}$, definimos $\widetilde{G}_{\mathbf{j}}$ como el conjunto dado por el cociente de $(G_{i_1} \backslash A) \times \cdots \times (G_{i_n} \backslash A)$ bajo la acción de A^{n-1}, definida por*

$$(a_1, \ldots, a_{n-1}) \cdot (g_1, \ldots, g_n) := \left(g_1 a_1^{-1}, a_1 g_2 a_2^{-1}, \ldots, a_{n-2} g_{n-1} a_{n-1}^{-1}, a_{n-1} g_n\right).$$

Entonces existe una biyección entre

$$A \sqcup \left(\bigsqcup_{\mathbf{j} \in \mathcal{I}} \widetilde{G}_{\mathbf{j}}\right) \longrightarrow *_A G_i$$

heredada de h y los h_i.

Demostración. Dado $\mathbf{j} = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathcal{I}$, definamos $G_{\mathbf{j}} := (G_{i_1} \backslash A) \times \cdots \times (G_{i_n} \backslash A)$. Así, podemos definir $\psi_{\mathbf{j}} : G_{\mathbf{j}} \longrightarrow *_A G_i$ dado por

$$\psi_{\mathbf{j}}(g_1, \ldots, g_n) = h_{i_1}(g_1) \cdots h_{i_n}(g_n)$$

el cual nos induce una aplicación $\widetilde{\psi}_{\mathbf{j}} : \widetilde{G}_{\mathbf{j}} \longrightarrow *_A G_i$ pasando al cociente. Veamos que esta aplicación está bien definida. Sean $(g_1, \ldots, g_n)$ y $(r_1, \ldots, r_n)$ dos representantes de un mismo elemento de $\widetilde{G}_{\mathbf{j}}$. Entonces, existe un $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in A^{n-1}$ de manera que

$$(g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}, g_n) = \left(r_1 a_1^{-1}, a_1 r_2 a_2^{-1}, \ldots, a_{n-2} r_{n-1} a_{n-1}^{-1}, a_{n-1} r_n\right).$$

Por lo tanto, si denotamos $[g_1, \ldots, g_n]$ a la clase del elemento $(g_1, \ldots, g_n)$, tenemos

$$\widetilde{\psi}_{\mathbf{j}}([g_1, \ldots, g_n]) = \psi_{\mathbf{j}}(g_1, \ldots, g_n) = h_{i_1}(g_1) \cdots h_{i_n}(g_n) =$$

$$= h_{i_1}(r_1 a_1^{-1}) h_{i_2}(a_1 r_2 a_2^{-1}) \cdots h_{i_{n-1}}(a_{n-2} r_{n-1} a_{n-1}^{-1}) h_{i_n}(a_{n-1} r_n).$$

Notemos que por la estructura de producto amalgamado, si $q \in A$, entonces $h_{i_k}(q) = h_{i_t}(q)$ para todo $k, t \in I$. Por ello, tenemos

$$h_{i_1}(r_1 a_1^{-1}) h_{i_2}(a_1 r_2 a_2^{-1}) = h_{i_1}(r_1) h_{i_1}(a_1)^{-1} h_{i_2}(a_1) h_{i_2}(r_2) h_{i_2}(a_2^{-1}) = h_{i_1}(r_1) h_{i_2}(r_2) h_{i_2}(a_2^{-1}).$$

Si se prosigue de esta manera, se obtiene que

$$h_{i_1}(g_1) \cdots h_{i_n}(g_n) = h_{i_1}(r_1) \cdots h_{i_n}(r_n) = \psi_{\mathbf{j}}(r_1, \ldots, r_n) = \widetilde{\psi}_{\mathbf{j}}([r_1, \ldots, r_n])$$

Probamos así que $\widetilde{\psi}_{\mathbf{j}}$ está bien definida.

Elijamos ahora los conjuntos de representantes W_r para todo $r \in I$ como en el teorema anterior. Entonces por el Teorema de estructura del producto amalgamado existe una única palabra reducida $m = (a; s_1, \ldots, s_n)$ tal que

$$\widetilde{\psi}_{\mathbf{j}}([g_1, \ldots, g_n]) = h(a) h_{i_1}(s_1) \cdots h_{i_n}(s_n)$$

donde $a \in A$ y $s_w \in W_{i_w} \backslash \{1\}$. Así, definimos la aplicación

$$\Psi : A \sqcup \left(\bigsqcup_{\mathbf{j} \in \mathcal{I}} \widetilde{G}_{\mathbf{j}} \right) \longrightarrow *_A G_i$$

definida como $\Psi_{|\widetilde{G}_{\mathbf{j}}} = \widetilde{\psi}_{\mathbf{j}}$ y $\Psi_{|A} = h$. Por la unicidad de la palabra reducida, Ψ es inyectiva. Veamos la sobreyectividad. Sea $g \in *_A G_i$. De nuevo, por el Teorema de estructura del producto amalgamado existe una única secuencia $\mathbf{k} = (j_1, \ldots, j_m)$ y una única palabra reducida $z = (a; s_1, \ldots, s_m)$ tal que $g = h(a) h_{j_1}(s_1) \cdots h_{j_m}(s_m)$. Si consideramos la aplicación inversa $g \longmapsto [s_1 a^{-1}, a s_2 a^{-1}, \ldots, a s_{n-1} a^{-1}, a s_n]$ si $\mathbf{k} \neq \emptyset$, y $g \longmapsto a$ si $\mathbf{k} = \emptyset$, vemos que Ψ es sobreyectiva, y en consecuencia, es una biyección. $\square$

Proposición 1.3.2 (Proposición 3, pg. 6 [16])**.** *Sea $*_A G_i$ un producto amalgamado. Para todo $i \in I$, sea $H_i \leqslant G_i$. Supongamos que $B = A \cap H_i$ no depende de i. Entonces el homomorfismo $*_B H_i \longrightarrow *_A G_i$, inducido por las inclusiones $H_i \hookrightarrow G_i$, es inyectivo.*

Demostración. Notemos que, debido a que B no depende de i, se tiene que $B \leqslant H_i$ para todo $i \in I$. Por ello, para cada $i \in I$, tomamos un conjunto Z_i de representantes de clases a la derecha de H_i mód B. Además, por definición se tiene que $B \leqslant A$, y en consecuencia podemos extender cada conjunto Z_i a otro conjunto W_i de representantes de clases a la derecha, en este caso, de G_i mód A. Tomando la aplicación $\gamma_i : Z_i \longrightarrow W_i$ inducida por la inclusión $H_i \hookrightarrow G_i$ para todo $i \in I$, podemos identificar cada clase lateral de Z_i en W_i de manera inyectiva, y en consecuencia, toda palabra reducida de $*_B H_i$ resulta en una palabra reducida de $*_A G_i$, que ha de ser única por la inyectividad de cada γ_i. Se tiene así la inyectividad de la aplicación $*_B H_i \longrightarrow *_A G_i$. $\square$

Hemos desarrollado así todas las construcciones, en lo que a grupos se refiere, que nos serán necesarias para introducir la teoría de Bass-Serre.

Como aplicación importante de las construcciones por productos amalgamados, tenemos las conocidas como *extensiones HNN*, en honor a sus creadores Graham Higman, Bernhard Hermann Neumann y Hanna Neumann. Supongamos G un grupo, $A \leqslant G$ y $\vartheta : A \longrightarrow G$ un homomorfismo inyectivo. Se llama extensión HNN de G por A respecto de ϑ al grupo $G_{A,\vartheta}$ tal que contiene a G y un elemento s de manera que $\vartheta(a) = s a s^{-1}$ para todo $a \in A$.

Este grupo puede construirse como sigue. Consideremos el grupo $\mathbb{Z} \cong F(\{s\})$ y construimos $G' = G * \mathbb{Z}$. Consideremos el subgrupo N de G' generado por

$$\left\{ s a s^{-1} \vartheta(a)^{-1} : a \in A \right\},$$

que es normal en G'. Si tomamos $G_{A,\vartheta} := G'/N$, podemos ver que, si $G \cong \langle S | R \rangle$, entonces

$$G_{A,\vartheta} := G'/N \cong \langle S \sqcup \{s\} | R \rangle / N \cong \left\langle S \sqcup \{s\} | R \cup \left\{ s a s^{-1} \vartheta(a)^{-1} : a \in A \right\} \right\rangle$$

Obtenemos así el grupo deseado.

2 | Grafos, árboles y acciones de grupo

2.1. Grafos. Árboles

Introduzcamos el segundo objeto de nuestro estudio: los árboles. Éstos nos permitirán relacionar las estructuras de grupos con ciertas propiedades topológicas. Así, comenzaremos con algunas definiciones para fijar notación.

Definición (Grafo)**.** Consideremos X e Y dos conjuntos y dos aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \times X \\ y & \longmapsto & (o(y), t(y)) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Y \\ y & \longmapsto & \overline{y} \end{array}$$

que satisfacen que para todo $y \in Y$ se tiene que $\overline{\overline{y}} = y$, $\overline{y} \neq y$ y $o(y) = t(\overline{y})$. Llamaremos grafo Γ a todo par (X, Y) cumpliendo estas propiedades. Denotaremos $X = \mathrm{vert}(\Gamma)$, nombrados como vértices, y a $Y = \mathrm{arist}(\Gamma)$, nombrados como aristas.

Definición (Subgrafo)**.** Dado un grafo Γ, diremos que Ψ es un subgrafo de Γ si existen dos conjuntos $\mathrm{vert}(\Psi) \subseteq \mathrm{vert}(\Gamma)$ y $\mathrm{arist}(\Psi) \subseteq \mathrm{arist}(\Gamma)$ tal que el par $(\mathrm{vert}(\Psi), \mathrm{arist}(\Psi))$ es un grafo.

Definición (Grafo conexo)**.** Diremos que un grafo Γ es conexo si dados $v_1, v_2 \in \mathrm{vert}(\Gamma)$ cualesquiera existe una sucesión de vértices $\{w_1, \ldots, w_n\} \subset \mathrm{vert}(\Gamma)$ con $w_1 = v_1$ y $w_n = v_2$ de manera que exista una sucesión de aristas $\{y_1, \ldots, y_{n-1}\} \subset \mathrm{arist}(\Gamma)$ tal que $o(y_1) = w_1$, $t(y_{n-1}) = w_n$ y $t(t_i) = o(y_{i+1})$ para todo $1 \leqslant i \leqslant n-1$. A los subgrafos conexos maximales bajo la relación de inclusión se les llamará componentes conexas del grafo.

Definición (Orientación)**.** Llamaremos orientación de un grafo Γ a un subconjunto Y_+ de $Y = \mathrm{arist}(\Gamma)$ de manera que $Y = Y_+ \sqcup \overline{Y}_+$, donde $\overline{Y}_+$ es una copia de Y_+. Diremos que un grafo está orientado si hemos fijado sobre éste una orientación.

Definición (Homomorfismo de grafos)**.** Sean Γ y Ψ dos grafos. Diremos que una aplicación $\varphi : \Gamma \longrightarrow \Psi$ es un homomorfismo de grafos si $\varphi(\mathrm{vert}(\Gamma)) \subseteq \mathrm{vert}(\Psi)$ y si dada un $y \in \mathrm{arist}(\Gamma)$ existe $y' \in \mathrm{arist}(\Psi)$ tal que $o(y') = \varphi(o(y))$ y $t(y') = \varphi(t(y))$.

Definición (Realización de un grafo)**.** Sea Γ un grafo. Sea T el espacio topológico dado por

$$T = \mathrm{vert}(\Gamma) \sqcup (\mathrm{arist}(\Gamma) \times [0, 1])$$

dotado de la topología discreta. Consideremos $\sim$ como la relación de equivalencia en T cumpliendo que $(y, t) \sim (\overline{y}, 1 - t)$, $(y, 0) \sim o(y)$ y $(y, 1) \sim t(y)$ para todo $y \in \mathrm{arist}(\Gamma)$ y para todo $t \in [0, 1]$. Entonces, llamaremos realización del grafo Γ a

$$\mathrm{real}(\Gamma) := T/\sim .$$

Una vez definido el concepto de grafo abstracto como su realización topológica, podemos considerar una visualización de esta realización mediante diagramas, los cuales resultan de gran utilidad. Estos diagramas se representarán de la siguiente forma: los elementos llamados vértices serán representados como puntos, mientras que los elementos llamados aristas serán los segmentos uniendo $o(y)$ y $t(y)$ vistos en T, donde $y \in \mathrm{arist}(\Gamma)$. En el caso de ser un grafo orientado, de manera adicional podemos añadir una flecha en la arista para indicar el sentido de la orientación.

Por ejemplo, consideremos el grafo Γ dado por los vértices

$$\mathrm{vert}(\Gamma) = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$$

y las aristas

$$\mathrm{arist}(\Gamma) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, \overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}, \overline{v_4}, \overline{v_5}, \overline{v_6}\}$$

de manera que

$$\begin{array}{cccccc} o(v_1) = A_1 & t(v_1) = A_1 & o(v_2) = A_2 & t(v_2) = A_1 & o(v_3) = A_1 & t(v_3) = A_2 \\ o(v_4) = A_2 & t(v_4) = A_3 & o(v_5) = A_4 & t(v_5) = A_3 & o(v_6) = A_3 & t(v_6) = A_5. \end{array}$$

Entonces, un diagrama de su realización será

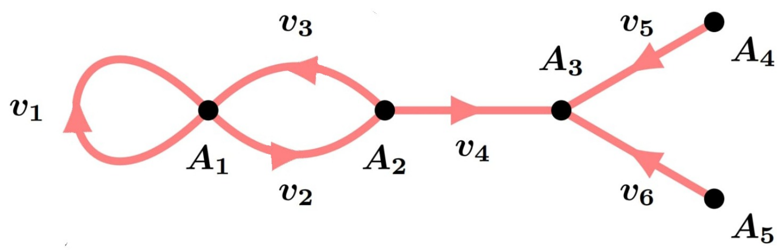


Figura 2.1: Diagrama del ejemplo anterior.

Definidos los grafos, pondremos nombres a algunos que nos resultarán relevantes.

Definición (Camino)**.** Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Llamaremos camino de longitud n al grafo orientado Cam_n dado por $\mathrm{vert}(\mathrm{Cam}_n) = \{0, \ldots, n\}$ y $\mathrm{arist}(\mathrm{Cam}_n) = \{y_i, \overline{y}_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$ donde $o(y_i) = i-1$ y $t(y_i) = i$, cuya orientación será $\mathrm{arist}(\mathrm{Cam}_n)_+ = \{y_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$. A Cam_1 le llamaremos segmento. El diagrama de un camino de longitud n puede verse en la siguiente figura.

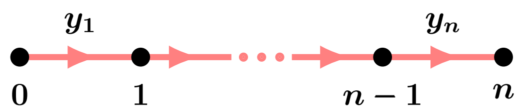


Figura 2.2: Diagrama de un camino.

Definición (Ciclo)**.** Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Llamaremos ciclo de longitud n al grafo orientado Ciclo_n dado por $\mathrm{vert}(\mathrm{Ciclo}_n) = \{0, \ldots, n-1\}$ y $\mathrm{arist}(\mathrm{Ciclo}_n) = \{y_i, \overline{y}_i : i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$ donde $o(y_i) = i-1$ y $t(y_i) = i$ si $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ mientras que $o(y_0) = n-1$ y $t(y_0) = 0$. A Ciclo_0 le llamaremos lazo. El diagrama del ciclo de longitud n puede verse en la siguiente figura.

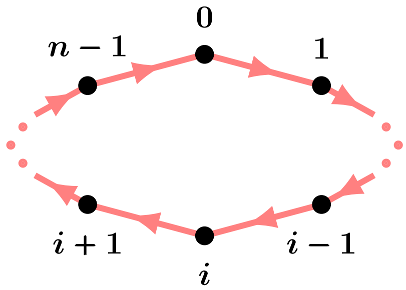


Figura 2.3: Diagrama de un ciclo.

Definición (Grafo de Cayley de un grupo G)**.** Sea G un grupo y sea $S \subseteq G$. Llamaremos grafo de Cayley de G respecto de S, notado como $\Gamma(G,S)$, al grafo orientado tal que

$$\operatorname{vert}(\Gamma(G,S)) = G \qquad \text{y} \qquad \operatorname{arist}(\Gamma(G,S)) = (G \times S) \cup (G \times S^{-1})$$

entendiéndose $S^{-1} = \{s^{-1} : s \in S\}$, tomando como orientación $\operatorname{arist}(\Gamma(G,S))_+ = G \times S$, y teniendo relaciones tales que para todo $(g,s) \in \operatorname{arist}(\Gamma(G,S))$ se tenga que $o(g,s) = g$ y $t(g,s) = gs$.

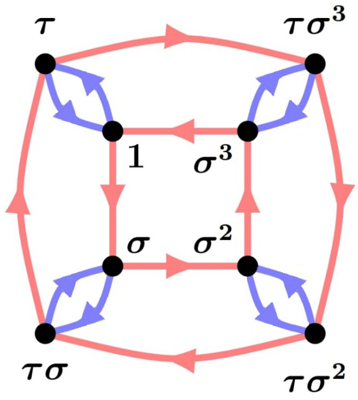


Figura 2.4: Grafo $\Gamma\left(D_4, \{\sigma,\tau\}\right)$, siendo $D_4 \cong \left\langle \sigma,\tau | \sigma^4, \tau^2, (\tau\sigma)^2 \right\rangle$.

Proposición 2.1.1 (Propiedades del grafo de Cayley)**.** *Sea G un grupo, $S \subseteq G$ un subconjunto y $\Gamma(G,S) = \Gamma$ el grafo de Cayley de G respecto de S. Entonces:*

1. *Γ es conexo si y solo si S genera a G.*
2. *Γ contiene al menos un lazo si y solo si $1 \in S$.*

Demostración. Veamos 1). Supongamos que Γ es conexo. Entonces, por definición, para todo par de vértices existe un subgrafo isomorfo a un camino que tiene al primer vértice por vértice inicial y al segundo por vértice final. En particular, el vértice 1 de Γ ha de estar conectado a cualquier otro vértice $g \in G$. Esto es, para todo $g \in G$ existen una serie de $s_1, \ldots, s_n \in S$ tal que $1 \cdot s_1 \cdots s_n = g$, por lo que S es un conjunto generador de G. De manera análoga, si suponemos que S genera a G entonces todo elemento $g \in G$ puede expresarse como $g = s_1 \cdots s_n$ con cada $s_i \in S$, por lo que todo vértice está conectado al vértice 1, y por ende, Γ es conexo.

Pasemos a 2). Es evidente que si $1 \in S$ entonces Γ contiene un lazo (de hecho, todo vértice del grafo tendría uno). Supongamos que Γ tiene un lazo en $g \in G$. Entonces existe un $s \in S$ tal que $gs = g$, lo cual ocurre si y solo si $s = 1$. $\square$

Definición (Árbol)**.** Llamaremos árbol a todo grafo no vacío, conexo y sin ciclos.

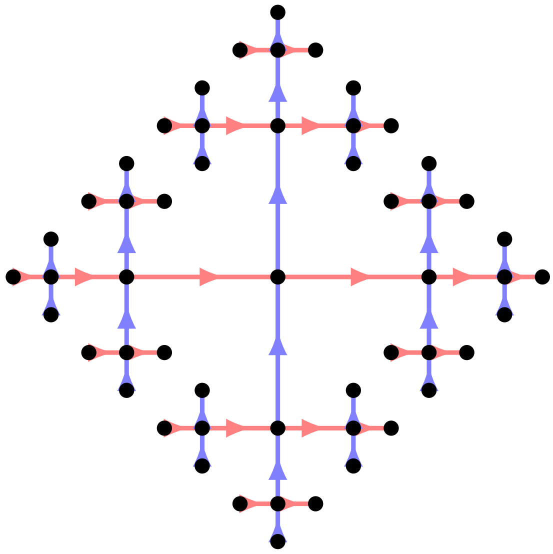


Figura 2.5: Diagrama de un árbol.

Definición (Geodésica)**.** Dado un árbol, se llamará geodésica a un subgrafo de éste isomorfo a un camino.

Proposición 2.1.2. *Sea T un árbol. Entonces, dados $P, Q \in \mathrm{vert}(T)$ existe una única geodésica que comienza en P y termina en Q.*

Demostración. Primero, notemos que todo árbol es un grafo conexo, por lo que dados P, Q dos vértices del árbol, siempre va a existir al menos una geodésica. Veamos la unicidad. Si $P = Q$ es obvio. Si $P \neq Q$, supongamos que existen dos geodésicas α_1 y α_2 uniendo P y Q. Por ser geodésicas, ambas son subgrafos de T isomorfos a un camino. Consideremos

$$\varphi : \mathrm{Cam}_n \longrightarrow \alpha_1 \subset T \qquad y \qquad \psi : \mathrm{Cam}_m \longrightarrow \alpha_2 \subset T$$

los isomorfismos asociados a las geodésicas. Es claro que $\varphi(0) = P = \psi(0)$, y de manera análoga $\varphi(n) = Q = \psi(m)$. Si

$$(\alpha_1 \cap \alpha_2) \backslash \{P, Q\} = \varnothing$$

entonces existe un camino comenzando en P, que pasa por Q y otro camino que parte de Q vuelve a P. En consecuencia, T contiene un ciclo, lo cual es absurdo, pues T es un árbol. En el caso de que

$$(\alpha_1 \cap \alpha_2) \backslash \{P, Q\} \neq \varnothing.$$

Tomemos $k = \mathrm{mín}\{i : \varphi(i) \neq \psi(i)\}$ y sean

$$r_1 = \mathrm{mín}\{j_1 : \varphi(j_1) \in \alpha_2 \backslash \{P, Q\}, k < j_1\} \qquad \text{y} \qquad r_2 = \mathrm{mín}\{j_2 : \psi(j_2) \in \alpha_1 \backslash \{P, Q\}, k < j_2\}.$$

Es claro que $k > 0$, $r_1 < n$ y $r_2 < m$. Además $\varphi(k-1) = \psi(k-1)$ y $\varphi(r_1) = \psi(r_2)$. Entonces, existe un camino que parte de $\varphi(k-1)$ y llega hasta $\varphi(r_1) = \psi(r_2)$, y otro camino que parte de $\psi(r_2)$ y llega hasta $\psi(k-1) = \varphi(k-1)$, siendo ambos disjuntos salvo en esos dos vértices. Esto es absurdo, pues, de nuevo, obtenemos un ciclo, y no puede ocurrir porque T es un árbol. Deducimos que dichas constantes no pueden existir, por lo que ambas geodésicas han de ser la misma. □

Definición (Distancia geodésica)**.** Sea T un árbol, $P, Q \in \mathrm{vert}(T)$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que Cam_n el camino isomorfo a la geodésica de P y Q. Llamaremos longitud geodésica entre P y Q a

$$l(P, Q) = n.$$

Si $l(P, Q) = 1$ diremos que son adyacentes.

Proposición 2.1.3. *La distancia geodésica está bien definida y es una distancia.*

Demostración. Sea $l : \mathrm{vert}(T) \times \mathrm{vert}(T) \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ definida como la distancia geodésica. Gracias a la Proposición 2.1.2 sabemos que la geodésica es única, por lo que l está bien definida. Veamos que es una distancia:

- Por tomar valores en $\mathbb{N} \cup \{0\}$ es claro que $l(P,Q) \geqslant 0$, teniéndose que $l(P,Q) = 0$ si y solo si $P = Q$.
- La simetría se tiene porque la geodésica entre P y Q es la misma que entre Q y P, por lo que $l(P,Q) = l(Q,P)$.
- Veamos por último la desigualdad triangular. Consideremos P, Q, R vértices distintos de T. Si Q es un vértice de la geodésica entre P y R, la desigualdad es trivial (se tendría que $l(P,R) = l(P,Q) + l(Q,R)$). Si Q no pertenece a la geodésica que une P y R, tenemos de nuevo dos opciones. Si las geodésicas que unen P con Q y P con R solo tienen como vértice común a P, entonces estamos en la situación anterior, esto es $l(Q,R) = l(Q,P) + l(P,R)$. En el caso de tener más de un vértice en común, sea S el último vértice común en las geodésicas, comenzando desde P. Entonces, es claro que

  $$l(P,Q) = l(P,S) + l(S,Q) \qquad l(P,R) = l(P,S) + l(S,R) \qquad l(Q,R) = l(Q,S) + l(S,R)$$

  y en consecuencia

  $$l(P,R) = l(P,S) + l(S,R) \leqslant l(P,S) + l(S,R) + l(Q,S) + l(S,Q) = l(P,Q) + l(Q,R).$$

□

Definición (Sistema inverso)**.** Sea T un árbol y $P \in \mathrm{vert}(T)$. Consideremos los conjuntos

$$X_n := \{Q \in \mathrm{vert}(T) : l(P,Q) = n\}$$

y definimos la aplicación $f_n : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ que manda $Q \in X_n$ al único vértice en X_{n-1} al que es adyacente. Llamaremos sistema inverso de un árbol en un vértice P a los conjuntos previos $\{X_n\}$ y sus respectivas aplicaciones $\{f_n\}$.

$$\cdots \xrightarrow{f_{n+1}} X_n \xrightarrow{f_n} X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_2} X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 = \{P\}.$$

Notemos que todo sistema inverso determina completamente un árbol, pues todo árbol tiene un sistema inverso por definición, y dado un sistema inverso, gracias a las aplicaciones $\{f_n\}$ conocemos sus adyacencias, de manera que podemos reconstruir el árbol.

Hasta ahora, hemos definido los conceptos de grafo, viendo algunos de sus tipos. Nuestro interés se centrará principalmente en el estudio de los árboles, tanto de manera algebraica como de forma topológica mediante su realización. Éstos tienen una propiedad topológica fundamental.

Definición (Homotopía)**.** Sean X e Y espacios topológicos, y sean $f, g : X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones continuas. Una homotopía entre f y g es una aplicación continua $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ cumpliendo que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$. Si existe una homotopía entre f y g diremos que son homotópicas.

Diremos que X e Y son homotópicamente equivalentes si existen al menos dos aplicaciones $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow X$ tales que $f \circ g$ es homotópica a id_Y y $g \circ f$ es homotópica a id_X. Si X es homotópicamente equivalente al espacio topológico formado por un solo punto diremos que X es contráctil.

Proposición 2.1.4. *La realización de un árbol es contráctil.*

Demostración. Sea T un árbol. Fijemos $P \in \mathrm{vert}(T)$ y consideremos $\{X_n\}$ y $\{f_n\}$ el sistema inverso de T en P. Sea $Q \in X_1$ y sea $\eta(P,Q)$ la geodésica entre P y Q. Es claro que $\mathrm{real}(\eta(P,Q)) \cong [0,1]$. Definimos $f : [0,1] \longrightarrow \{0\}$ donde $f(x) = 0$, y $g : \{0\} \longrightarrow [0,1]$ donde $g(0) = 0$. Notemos que $(f \circ g)(0) = 0 = \mathrm{id}_{\{0\}}(0)$

y por otro lado, $(g \circ f)(x) = 0$. Considerando la homotopía $H(x,t) = t(g \circ f)(x) + (1-t)\mathrm{id}_{[0,1]}(x)$, observamos que $(g \circ f)$ es homotópica a $\mathrm{id}_{[0,1]}$. Deducimos así que $\mathrm{real}(\eta(P,Q))$ es contráctil.

Por inducción, tenemos pues que $\mathrm{real}(T)$ es homotópicamente equivalente a $\mathrm{real}(T_1)$, siendo T_1 el árbol cuyo sistema inverso viene dado como

$$\cdots \xrightarrow{f_4} X_3 \xrightarrow{f_3} X_2 \xrightarrow{F_2} X_0 = \{P\}$$

donde $F_2(Q) = P$. Consideremos T_r el árbol dado por el sistema inverso en P

$$\cdots \xrightarrow{f_{r+3}} X_{r+2} \xrightarrow{f_{r+2}} X_{r+1} \xrightarrow{F_{r+1}} X_0 = \{P\}$$

donde $F_{r+1}(Q) = P$. Por inducción observamos que $\mathrm{real}(T)$ es homotópicamente equivalente a $\mathrm{real}(T_r)$ para todo $r \in \mathbb{N}$. Tomemos ahora el subárbol $T(n)$ de T dado por el sistema inverso

$$X_n \xrightarrow{f_n} X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_2} X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 = \{P\}.$$

Por lo anterior visto, $\mathrm{real}(T(n))$ es contrácil para todo $n \in \mathbb{N}$, y además

$$T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T(n).$$

Si T es finito, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T = T(n_0)$, por lo que $\mathrm{real}(T)$ sería contráctil. Supongamos que T no es finito, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $T(n) \subsetneq T(n+1)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos una aplicación

$$r_n : \mathrm{real}(T(n)) \longrightarrow \mathrm{real}(T(n-1))$$

de forma que $r_{n|\mathrm{real}(T(n-1))} = \mathrm{id}_{\mathrm{real}(T(n-1))}$ y tal que para toda arista $y \in \mathrm{arist}(T(n) \backslash T(n-1))$ se tenga que $r_n(\mathrm{real}(y)) = \{\mathrm{real}(o(y))\}$, asumiendo que $o(y) \in \mathrm{vert}(T(n-1))$. Razonando de la misma manera que al inicio de la prueba, se deduce que r_n es homotópica a $\mathrm{id}_{\mathrm{real}(T(n))}$. Sea

$$H_n : \mathrm{real}(T(n)) \times [0,1] \longrightarrow \mathrm{real}(T(n-1))$$

la homotopía tal que $H_n(\bullet, 0) = \mathrm{id}_{|\mathrm{real}(T(n))}$ y $H_n(\bullet, 1) = r_n$. Por construcción, podemos ver que $H_{n|\mathrm{real}(T(n-1))}(\bullet, 1) = H_{n-1}(\bullet, 0)$. Tomemos

$$I_n = \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^n}\right]$$

y consideremos

$$H : \mathrm{real}(T) \times [0,1] \longrightarrow \mathrm{real}(P)$$

definida como

$$H(\bullet, t) = \begin{cases} H_n\left(\bullet, 2^n(t-1) + 2\right) \text{ si } t \in I_n. \end{cases}$$

Podemos apreciar que

$$[0,1] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n,$$

y

$$0 \leqslant 2^n(t-1) + 2 \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant t \leqslant 1 - \frac{1}{2^n},$$

por lo que H está bien definida. Por otro lado, H es contínua, pues $H^{-1}(\mathrm{real}(P)) = \mathrm{real}(T) \times [0,1]$, que es cerrado. En consecuencia, H es una homotopía que hace que $\mathrm{real}(T)$ y $\mathrm{real}(P)$ sean homotópicamente equivalentes, y por lo tanto, se tiene que $\mathrm{real}(T)$ es contráctil. □

2.2. Subárboles de un grafo

Definición (Árbol maximal)**.** Sea Γ un grafo conexo no vacío. Sea A el conjunto formado por los subgrafos de Γ que son árboles. Llamaremos árbol maximal de Γ a cualquier elemento maximal de A respecto de la inclusión.

Proposición 2.2.1. *Dado Γ un grafo conexo no vacío, siempre existe al menos un árbol maximal y este está bien definido.*

Demostración. Consideremos A el conjunto de los subárboles de Γ de la definición. Notemos que A respecto de la inclusión es un conjunto parcialmente ordenado, y cualquier cadena ordenada de A tiene un elemento que lo acota superiormente, pues están contenidos en Γ. Por el Lema de Zorn[1], el conjunto A tiene al menos un elemento maximal, probándose así que dicho elemento existe y está bien definido. $\square$

Proposición 2.2.2. *Sea Γ un grafo conexo no vacío y sea T un árbol maximal de este. Entonces se tiene que* $\mathrm{vert}(T) = \mathrm{vert}(\Gamma)$.

Demostración. Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos pues que T no contiene todos los vértices de Γ. Sea $v \in \mathrm{vert}(\Gamma)\backslash\mathrm{vert}(T)$ un vértice adyacente a algún vértice de T, el cual siempre existe debido a que Γ es conexo. Creamos un árbol T' que definido por $\mathrm{vert}(T') = \mathrm{vert}(T) \cup \{v\}$ y $\mathrm{arist}(T') = \mathrm{arist}(T) \cup \{y, \overline{y}\}$ con y una arista uniendo v con algún vértice de T que sea adyacente en Γ. Es evidente que T' es un árbol de manera que T está contenido en T'. Esto es absurdo, pues T es elemento maximal. Se deduce que $\mathrm{vert}(T) = \mathrm{vert}(\Gamma)$. $\square$

Pasemos al ámbito topológico. En la sección anterior vimos que la realización de un árbol es contráctil. Veamos qué ocurre cuando contraemos subárboles de un grafo conexo no vacío.

Sea Γ un grafo conexo no vacío y sea T el subgrafo de Γ formado por la unión disjunta de árboles T_i para ciertos $i \in I$. Sabemos que para todo $i \in I$, $\mathrm{real}(T_i)$ es contrácil, por lo que será homotópicamente equivalente a cualquiera de sus vértices. Nuestro objetivo será definir un grafo cociente Γ/T de manera que $\mathrm{real}(\Gamma/T)$ sea el espacio cociente de $\mathrm{real}(\Gamma)$ identificando cada $\mathrm{real}(T_i)$ con un punto.

Sea $\mathrm{vert}(\Gamma/T) := \mathrm{vert}(\Gamma)/\sim$ donde $\sim$ es una relación de equivalencia dada, para cada $i \in I$, por

$$v \sim w \;\Leftrightarrow\; v, w \in \mathrm{vert}(T_i).$$

Sea v_i la clase de equivalencia de $\mathrm{vert}(T_i)$ para todo $i \in I$. Tomamos ahora $\mathrm{arist}(\Gamma/T) := \mathrm{arist}(\Gamma)\backslash\mathrm{arist}(T)$, de manera que si $y \in \mathrm{arist}(\Gamma/T)$ tal que $o(y)$ ó $t(y)$ es un vértice de $\mathrm{vert}(T_i)$ para algún $i \in I$, entonces le asociamos el representante v_i. Hemos construido así un grafo que tiene las propiedades deseadas.

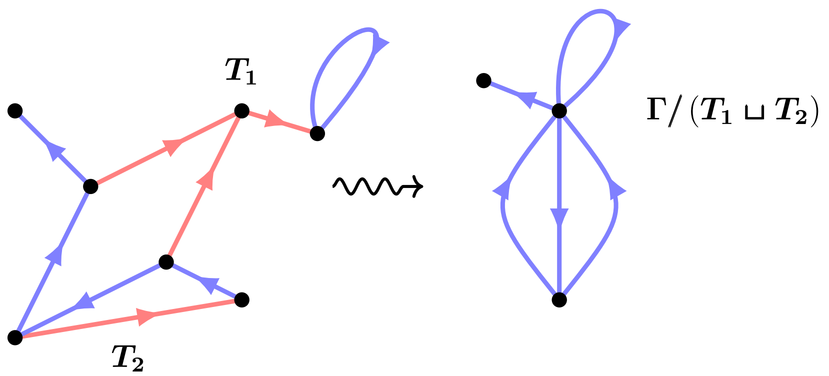


Figura 2.6: Diagrama de un grafo cociente, siendo el grafo de la izquierda Γ.

[1]El Lema de Zorn nos dice que dado un conjunto $(X, \preccurlyeq)$ parcialmente ordenado y no vacío, si toda cadena está acotada superiormente, entonces existe un elemento maximal. Se puede consultar con más detalle este lema como su demostración en [11], en el capítulo dedicado a dicho lema.

Vista esta construcción, nuestro objetivo se centrará en deducir a qué espacio topológico es homotópicamente equivalente un grafo. Para ello necesitaremos las siguientes definiciones.

Definición (Propiedad de Extensión de Homotopía)**.** Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un subespacio topológico. Diremos que el par (X, A) tiene la propiedad de extensión de homotopía si dada una homotopía $H : A \times [0,1] \longrightarrow Y$, siendo Y un espacio topológico, y una aplicación continua $F : X \times \{0\} \longrightarrow Y$ cumpliendo que $F_{|A} = H(x, 0)$, existe una extensión de F a una homotopía $\widetilde{F} : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ de manera que $\widetilde{F}_{|A}(x,t) = H(x,t)$.

Podemos visualizarlo con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A \times [0,1] \arrow[d, "i"] \arrow[dr, bend left, "H"] & \\
A \times \{0\} \arrow[ur, bend left, "i"] \arrow[dr, bend right, "i"'] & X \times [0,1] \arrow[r, dashed, "\widetilde{F}"] & Y \\
 & X \times \{0\} \arrow[u, "i"'] \arrow[ur, bend right, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

Siendo i la inclusión correspondiente.

Lema 2.2.1. *Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subespacio cerrado de X. Entonces el par (X, A) tiene la propiedad de extensión de homotopía si y solo si existe una aplicación continua*

$$r : X \times [0,1] \longrightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times [0,1])$$

tal que $r_{|(X\times\{0\})\cup(A\times[0,1])} = \mathrm{id}_{|(X\times\{0\})\cup(A\times[0,1])}$[2].

Demostración. Supongamos que el par (X, A) tiene la propiedad de extensión de homotopía. Tomemos la aplicación identidad

$$\mathrm{id} : (X \times \{0\}) \cup (A \times [0,1]) \longrightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times [0,1]).$$

Entonces esta extiende a una aplicación $r : X \times [0,1] \longrightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times [0,1])$ de manera que restringida a $(X \times \{0\}) \cup (A \times [0,1])$ es la identidad.

Supongamos que existe un aplicación continua $r : X \times [0,1] \longrightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times [0,1])$ tal que $r_{|(X\times\{0\})\cup(A\times[0,1])} = \mathrm{id}_{|(X\times\{0\})\cup(A\times[0,1])}$. Si tomamos dos aplicaciones continuas $\varphi : X \times \{0\} \longrightarrow Y$ y $\psi : A \times [0,1] \longrightarrow Y$ tal que $\varphi(a, 0) = \psi(a, 0)$ para todo $a \in A$, pueden combinarse en una aplicación

$$F : (X \times \{0\}) \cup (A \times [0,1]) \longrightarrow Y$$

la cual es continua, por serlo en los conjuntos cerrados $X \times \{0\}$ y $A \times [0,1]$. Entonces, la aplicación $F \circ r : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ es una extensión de a $X \times [0,1]$ de ψ, y en consecuencia, el par (X, A) tiene la propiedad de extensión de homotopía. $\square$

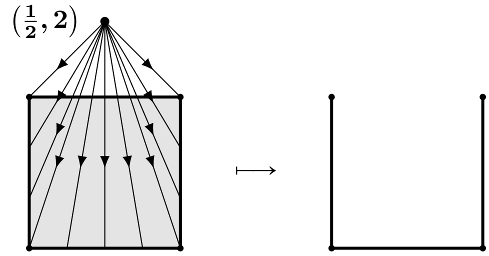
La siguiente prueba es una modificación de la Proposición 0.16 [12].

Proposición 2.2.3. *Sea Γ un grafo conexo no vacío y Ψ un subgrafo de Γ. Entonces el par $(\mathrm{real}(\Gamma), \mathrm{real}(\Psi))$ tiene la propiedad de extensión de homotopía.*

Demostración. Vamos a usar el Lema 2.2.1. Para ello, vamos a construir una retracción. Primero, notemos que para cada $y \in \mathrm{arist}(\Gamma)$ es $\mathrm{real}(y) \cong [0,1]$. Ahora, construimos una aplicación $\varphi : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0,1\} \times [0,1])$ que sea una retracción radial desde el punto $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, de manera que

$$\varphi_{|([0,1]\times\{0\})\cup(\{0,1\}\times[0,1])} = \mathrm{id}_{|([0,1]\times\{0\})\cup(\{0,1\}\times[0,1])}.$$

[2]Las hipótesis de este resultado se pueden relajar para cualquier A no necesariamente cerrado. Se puede encontrar una prueba de ello en [12], página 533. Este resultado aparece en la página 14 de este mismo libro.



Podemos notar que la anterior retracción es una proyección de $[0,1] \times [0,1]$ sobre el borde sin el segmento superior, o sea, $(\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0,1\})$. Es más, esta aplicación es continua, pues la preimagen de todo cerrado es un cerrado. Debido que $\mathrm{real}(y) \cong [0,1]$, se tiene que $\mathrm{real}(y) \times [0,1] \cong [0,1] \times [0,1]$. Sea $\psi_y : \mathrm{real}(y) \times [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$ el homeomorfismo anterior, podemos construir la aplicación

$$(\psi_y)^{-1}_{|([0,1]\times\{0\})\cup(\{0,1\}\times[0,1])} \circ \varphi \circ \psi_y : \mathrm{real}(y) \times [0,1] \longrightarrow (\mathrm{real}(y) \times \{0\}) \cup (\{\mathrm{real}(o(y)), \mathrm{real}(t(y))\} \times [0,1]) .$$

Llamemos a la aplicación anterior r_y. Podemos notar que r_y se comporta como la identidad sobre el conjunto $(\mathrm{real}(y) \times \{0\}) \cup (\{\mathrm{real}(o(y)), \mathrm{real}(t(y))\} \times [0,1])$ y por ser composición de aplicaciones continuas, r_y es continua para todo $y \in \mathrm{arist}(\Gamma)$. Tomando ahora un conjunto arbitrario $A \subseteq \mathrm{arist}(\Gamma)$, podemos crear una aplicación

$$r_A : \bigcup_{y \in A} \mathrm{real}(y) \times [0,1] \longrightarrow \left(\bigcup_{y \in A} \mathrm{real}(y) \times \{0\} \right) \cup \left(\bigcup_{y \in A} \{\mathrm{real}(o(y)), \mathrm{real}(t(y))\} \times [0,1] \right)$$

concatenando aplicaciones r_y para cada arista de A. Es claro que esta aplicación es continua y está bien definida, pues dos aplicaciones r_{y_1} y r_{y_2}, a lo más, coinciden en conjuntos de la forma $\mathrm{real}(v) \times [0,1]$, donde v ha de ser un extremo de ambas aristas, y como en dichos conjuntos se comporta como la identidad, se concluye que está bien definida.

Ahora, dado $v \in \mathrm{vert}(\Gamma)$ construimos $s_v : \mathrm{real}(v) \times [0,1] \longrightarrow \mathrm{real}(v) \times \{0\}$, definida de la manera obvia. Dado Λ es un subgrafo de Γ cualquiera, podemos construir una aplicación s_Λ definida como

$$s_\Lambda : (\mathrm{real}(\Lambda) \times \{0\}) \cup \left(\bigcup_{v \in \mathrm{vert}(\Lambda)} \mathrm{real}(v) \times [0,1] \right) \to \mathrm{real}(\Lambda) \times \{0\},$$

de manera que para cada vértice v de Λ se aplica s_v y para todo punto x de $\mathrm{real}(\Lambda)$ que no provenga de un vértice, sea $s_\Lambda(x) = (x, 0)$. De nuevo, esta aplicación es continua y está bien definida, pues dos vértices distintos se retraen a vértices distintos. En consecuencia, dado Ψ un subgrafo de Γ, tomando

$$r := s_{\Gamma \setminus \Psi} \circ r_{\mathrm{arist}(\Gamma) \setminus \mathrm{arist}(\Psi)}$$

obtenemos una aplicación continua

$$r : \mathrm{real}(\Gamma) \times [0,1] \longrightarrow (\mathrm{real}(\Gamma) \times \{0\}) \cup (\mathrm{real}(\Psi) \times [0,1]) ,$$

donde $r_{|(\mathrm{real}(\Gamma)\times\{0\})\cup(\mathrm{real}(\Psi)\times[0,1])} = \mathrm{id}_{|(\mathrm{real}(\Gamma)\times\{0\})\cup(\mathrm{real}(\Psi)\times[0,1])}$. Haciendo uso del Lema 2.2.1, vemos que el par $(\mathrm{real}(\Gamma), \mathrm{real}(\Psi))$ tiene la propiedad de extensión de homotopía. □

Proposición 2.2.4 (Proposición 13, Sección 2.3 [16]). *Sea Γ un grafo conexo no vacío y $T = \bigsqcup_{i \in I} T_i$ una unión disjunta de subárboles de Γ. Entonces la proyección canónica $\pi : \mathrm{real}(\Gamma) \longrightarrow \mathrm{real}(\Gamma/T)$ hace que estos espacios sean homotópicamente equivalentes.*

Demostración. Notemos que, por la definición de realización, se tiene que

$$\mathrm{real}(T) = \mathrm{real}\left(\bigsqcup_{i \in I} T_i \right) = \bigsqcup_{i \in I} \mathrm{real}(T_i).$$

Ahora, gracias a la Proposición 2.1.4 sabemos que la realización de un árbol es contráctil. Entonces, podemos considerar para cada $i \in I$ una homotopía $h_i : \mathrm{real}(T_i) \times [0,1] \longrightarrow \mathrm{real}(T_i)$ de manera que $h_i(x,0) = \mathrm{id}_{\mathrm{real}(T)}$ y $h_i(x,1)$ sea un punto de $\mathrm{real}(T_i)$, y en consecuencia, tenemos una homotopía

$$h : \mathrm{real}(T) \times [0,1] \longrightarrow \mathrm{real}(T)$$

tal que $h(x,t) = h_i(x,t)$ si $x \in \mathrm{real}(T_i)$.

Ahora, T es un subgrafo de Γ, por lo que, gracias a la Proposición 2.2.3, el par $(\mathrm{real}(\Gamma), \mathrm{real}(T))$ tiene la propiedad de extensión de homotopía. Así, existe una homotopía $H : \mathrm{real}(\Gamma) \times [0,1] \longrightarrow \mathrm{real}(\Gamma)$ tal que $H(x,0) = \mathrm{id}_{\mathrm{real}(\Gamma)}$ y $H_{|\mathrm{real}(T)} = h$. Consideremos la proyección canónica $\pi : \mathrm{real}(\Gamma) \longrightarrow \mathrm{real}(\Gamma/T)$. Entonces, existe una aplicación $f : \mathrm{real}(\Gamma/T) \longrightarrow \mathrm{real}(\Gamma)$ tal que $H(x,1) = (f \circ \pi)(x)$, que es homotópica a $H(x,0) = \mathrm{id}_{\mathrm{real}(\Gamma)}(x)$ por construcción.

Veamos que $\pi \circ f$ es homotópica a $\mathrm{id}_{\mathrm{real}(\Gamma/T)}$. Consideremos la homotopía $H' : \mathrm{real}(\Gamma/T) \times [0,1] \longrightarrow \mathrm{real}(\Gamma/T)$ creada mediante H pasando al cociente. Entonces, en $t = 1$ obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{real}(\Gamma) \arrow[r, "H(\cdot,1)"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{real}(\Gamma) \arrow[d, "\pi"] \\
\mathrm{real}(\Gamma/T) \arrow[r, "H'(\cdot,1)"'] \arrow[ur, "f"] & \mathrm{real}(\Gamma/T)
\end{tikzcd}$$

Por lo anterior visto, el triángulo superior conmuta, pues $H(x,1) = (f \circ \pi)(x)$. Ahora, por ser π sobreyectiva y estar definida H' a partir de H, el triángulo inferior también conmuta, y en consecuencia, $H'(x,1) = (\pi \circ f)(x)$. Pero como $H'(x,0) = (\pi \circ H)(x,0) = (\pi \circ \mathrm{id}_{\mathrm{real}(\Gamma)})(x) = \mathrm{id}_{\mathrm{real}(\Gamma/T)}(x)$ y esta aplicación es homotópica a $H'(\cdot,1)$ por serlo $H(\cdot,0)$ a $H(\cdot,1)$, se tiene que $\pi \circ f$ es homotópica a $\mathrm{id}_{\mathrm{real}(\Gamma/T)}$. Obtenemos así que $\mathrm{real}(\Gamma)$ y $\mathrm{real}(\Gamma/T)$ son homotópicamente equivalentes. $\square$

Corolario 2.2.1 (Corolario 1, Sección 2.3 [16])**.** *Sea Γ un grafo conexo no vacío. Entonces $\mathrm{real}(\Gamma)$ es homotópicamente equivalente a*

$$\bigvee_{i\in I} S_i^1 = \left\{ \bigcup_{i\in I} S_i^1 : S_i^1 = S^1 \text{ y } \exists!\ x \text{ tal que } \forall i,j \in I \text{ con } i \neq j \text{ se tiene que } S_i^1 \cap S_j^1 = \{x\} \right\}$$

para cierto I, y donde S^1 es una circunferencia. Es más, $\mathrm{real}(\Gamma)$ es un árbol si y solo si es contráctil.

Demostración. Dado Γ, consideremos T uno de sus árboles maximales. Por la Proposición 2.2.2 sabemos que $\mathrm{vert}(\Gamma) = \mathrm{vert}(T)$, por lo que Γ/T solo tiene un vértice y $\mathrm{arist}(\Gamma/T) = \mathrm{arist}(\Gamma)\backslash\mathrm{arist}(T)$. Ahora, debido a que solo hay un vértice, el grafo Γ/T será una unión de lazos. Es más, por definición de realización, los puntos de una arista y y su correspondiente $\overline{y}$ son los mismos. En consecuencia, $\mathrm{real}(\Gamma/T)$ será homeomorfa a $\bigvee_{i\in I} S_i^1$, donde $I = \mathrm{arist}(\Gamma/T)_+$, entendiéndose

$$\mathrm{arist}(\Gamma/T) = \mathrm{arist}(\Gamma/T)_+ \sqcup \overline{\mathrm{arist}(\Gamma/T)_+}$$

donde si $y \in \mathrm{arist}(\Gamma/T)_+$, entonces $\overline{y} \in \overline{\mathrm{arist}(\Gamma/T)_+}$. Esto es, estamos asociando la realización del vértice de Γ/T al punto común de $\bigvee_{i\in I} S_i^1$, y cada $y \in \mathrm{arist}(\Gamma/T)_+$ a un S_y^1. Por la Proposición 2.2.4, se tiene que $\mathrm{real}(\Gamma)$ es homotópicamente equivalente a $\mathrm{real}(\Gamma/T)$, que a su vez es homotópicamente equivalente a $\bigvee_{i\in I} S_i^1$.

Supongamos que Γ es un árbol. Por la Proposición 2.1.4 sabemos que $\mathrm{real}(\Gamma)$ es contráctil. Supongamos ahora que Γ es un grafo conexo no vacío y contráctil, y sea T su árbol maximal. Por lo anterior demostrado, sabemos que $\mathrm{real}(\Gamma)$ es homotópicamente equivalente a $\mathrm{real}(\Gamma/T)$, que a su vez es homotópicamente equivalente a $\bigvee_{i\in I} S_i^1$. Como $\mathrm{real}(\Gamma)$ es contrácil, necesariamente $I = \varnothing$, por lo que

$$\mathrm{arist}(\Gamma/T) = \varnothing = \mathrm{arist}(\Gamma)\backslash\mathrm{arist}(T) \Leftrightarrow \mathrm{arist}(\Gamma) = \mathrm{arist}(T).$$

Por otra parte, por ser T un árbol maximal se tiene que $\mathrm{vert}(\Gamma) = \mathrm{vert}(T)$. Deducimos que $\Gamma = T$, y en consecuencia Γ es un árbol. $\square$

3 | Teoría de Bass-Serre

3.1. Árboles y grupos libres

Desarrollados los pilares fundamentales para la comprensión de nuestro objetivo, procedemos a desarrollar la estrecha relación que une a los árboles con los grupos libres.

Definición (Inversión)**.** Sea Γ un grafo y G un grupo tal que $G \circlearrowright \Gamma$. Si existe un elemento $g \in G$ y una $y \in \text{arist}(\Gamma)$ tal que $g \cdot y = \overline{y}$, diremos que el par (g, y) es una inversión. Si no existe ninguna inversión, diremos que G actúa sobre Γ sin inversión.

Definición (Grafo cociente por una acción)**.** Sea Γ un grafo y G un grupo tal que $G \circlearrowright \Gamma$ sin inversión. Se define el grafo cociente de Γ por la acción de G, notado $G\backslash\Gamma$, como aquel grafo tal que

$$\text{vert}(G\backslash\Gamma) := G\backslash\text{vert}(\Gamma) \qquad \text{y} \qquad \text{arist}(G\backslash\Gamma) := G\backslash\text{arist}(\Gamma).$$

Notemos que, por actuar sin inversión, dado $y \in \text{arist}(\Gamma)$ y $g \in G$, se tiene que

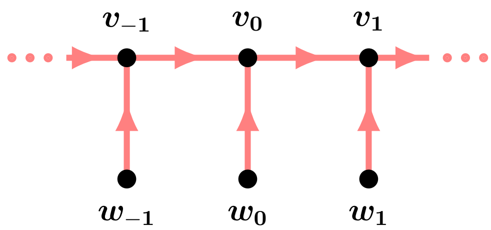
$$g \cdot y = (g \cdot o(y), g \cdot t(y)),$$

por lo que

$$G \cdot y = (G \cdot o(y), G \cdot t(y))\,.$$

En consecuencia se obtiene que $G\backslash\Gamma$ es un grafo.

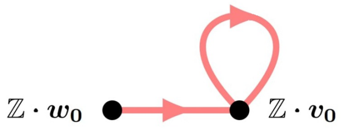
Veamos un ejemplo para aclarar el concepto de grafo cociente por la acción de un grupo. Consideremos el grafo Γ, dado por



y la acción de grupo $\mathbb{Z} \circlearrowright \Gamma$ tal que $n \cdot v_k := v_{k+n}$ y $n \cdot w_k := w_{k+n}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Podemos apreciar que la acción está bien definida y es libre, pues $n \cdot v_k = v_k$ si y solo si $n = 0$. Además, la acción también es sin inversión, pues cualquier arista de Γ es de la forma (v_k, v_{k+1}) o de la forma (w_k, v_k), y si la acción tuviese alguna inversión, tendría que existir al menos un $n \in \mathbb{Z}$ y una $y \in \text{arist}(\Gamma)$ tal que $n \cdot y = \overline{y}$. Es evidente que eso no puede ocurrir.

Como la acción del grupo es sin inversión, podemos considerar el grafo cociente por la acción. Tomemos un vértice cualquier de Γ. Si el vértice es de la forma v_k, podemos escribirlo como $k \cdot v_0$. De la misma manera, si el vértice es de la forma w_k podemos escribirlo como $k \cdot w_0$. En consecuencia, el grafo cociente tiene dos vértices, $\mathbb{Z} \cdot v_0$ y $\mathbb{Z} \cdot w_0$. Veamos las aristas. Antes vimos que podemos diferenciar las aristas de Γ en dos tipos. Si la arista es la forma (v_k, v_{k+1}), podemos reescribirla como $k \cdot (v_0, v_1)$. Además, como v_0 y v_1 están en la misma clase en el cociente, por lo que la arista en el grafo cociente será un lazo en $\mathbb{Z} \cdot v_0$.

En caso de ser de la forma (w_k, v_k), la podemos ver como $k \cdot (w_0, v_0)$, por lo que en el grafo cociente será una arista que parte de $\mathbb{Z} \cdot w_0$ y termina en $\mathbb{Z} \cdot v_0$. Obtenemos, pues, el siguiente grafo cociente:



Definición (Levantamiento)**.** Sean Γ y Ψ dos grafos. Dados $v \in \mathrm{vert}(\Gamma)$ y $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, consideremos el conjunto

$$V(v, r) := \{w \in \mathrm{vert}(\Gamma) : l(v, w) \leqslant r\}.$$

Sea Γ_v el subárbol de Γ que tiene por vértices $V(v, 1)$ y cuyas aristas son las aristas de Γ que conectan a v con los vértices de $V(v, 1) \backslash \{v\}$. Si existe un morfismo de grafos $f : \Gamma \longrightarrow \Psi$ sobreyectivo cumpliendo que para todo $v \in \mathrm{vert}(\Gamma)$ se tenga que

$$f(\Gamma_v) \cong \Gamma_v,$$

diremos que Γ es un levantamiento de Ψ.

Proposición 3.1.1 (Proposición 14, Sección 3.1 [16])**.** *Sea Γ un grafo y G un grupo tal que $G \circlearrowright \Gamma$ sin inversión. Sea T' un subárbol de $G\backslash\Gamma$. Entonces existe un subárbol T de Γ tal que T es un levantamiento de T'.*

Demostración. Sea $\pi : \Gamma \longrightarrow G\backslash\Gamma$ el morfismo de grafos que manda a cada vértice de Γ a su clase en $G\backslash\Gamma$. Es claro que este morfismo es sobreyectivo. Consideremos el conjunto A de subárboles T de Γ tales que $\pi_{|T} : T \longrightarrow T'$ es inyectivo. Como el conjunto de subárboles de Γ es un conjunto parcialmente ordenado con la relación de inclusión, y A es un subconjunto de este, A es un conjunto parcialmente ordenado con la relación de inclusión. Haciendo uso del Lema de Zorn, sea T_0 un elemento maximal de A, y sea $T_0' := \pi(T_0) \subseteq T'$.

Supongamos que $T_0' \neq T'$. Entonces, existe un $y' \in \mathrm{arist}(T')$ tal que $y' \notin \mathrm{arist}(T_0')$, y como T' es un árbol, podemos tomar y' tal que $o(y') \in \mathrm{vert}(T_0')$. Por la inyectividad y del hecho de que T' es un árbol, necesariamente $t(y') \notin \mathrm{vert}(T_0')$, puesto que en caso contrario obtendríamos un circuito, dado por la geodésica de $o(y')$ con $t(y')$ y la arista y'.

Sea $y \in \mathrm{arist}(\Gamma)$ tal que $\pi(y) = y'$. Por la definición de $G\backslash\Gamma$, para todo $g \in G$ se tiene que $\pi(y) = \pi(g \cdot y) = y'$. En consecuencia, podemos tomar sin pérdida de generalidad y tal que $o(y) \in \mathrm{vert}(T_0)$. Así, sea T_1 el grafo dado por

$$\mathrm{vert}(T_1) = \mathrm{vert}(T_0) \cup \{t(y)\} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{arist}(T_1) = \mathrm{arist}(T_0) \cup \{y, \overline{y}\}.$$

Podemos apreciar que T_1 es un árbol, pues $t(y) \notin \mathrm{vert}(T_0)$, y además, por construcción, $T_1 \in A$, pero esto es absurdo, pues T_0 es un elemento maximal respecto de la inclusión. Deducimos que $T_0' = T'$, por lo que T_0 es un levantamiento de T'. $\square$

Definición (Árbol de representantes)**.** Sea Γ un grafo conexo no vacío y G un grupo tal que $G \circlearrowright \Gamma$ sin inversión. Llamaremos árbol de representantes de Γ mód(G) a cualquier subárbol T de Γ que sea el levantamiento de un subárbol maximal en $G\backslash\Gamma$.

Proposición 3.1.2 (Proposición 15, Sección 3.2 [16])**.** *Sea G un grupo, $S \subseteq G$ un subconjunto de G y $\Gamma := \Gamma(G, S)$ el grafo generado por G respecto de S. Entonces son equivalentes:*

1. *Γ es un árbol.*

2. *G es un grupo libre con sistema generador S.*

Demostración. Supongamos que Γ es un árbol. Por la Proposición 2.1.1 sabemos que S genera a G, puesto que Γ, al ser un árbol, es conexo. Notemos que $S \cap S^{-1} = \emptyset$, pues en caso contrario existiría un $s \in S \cap S^{-1}$ tal que $s = s^{-1}$, o lo que es lo mismo, $s^2 = 1$. Entonces, dado $g \in G$ tendríamos

$$g \mapsto gs \mapsto (gs)s = gs^2 = g.$$

Obtenemos un ciclo de longitud 1, lo cual es absurdo, pues Γ es un árbol. Consideremos el grupo libre $F(S)$. Procediendo por reducción al absurdo, supongamos que G no es un grupo libremente generado por S. Tomemos el homomorfismo $\varphi : F(S) \longrightarrow G$ dado por $\varphi(s) = s$ para todo $s \in S$. Como G no es libremente generado por S, entonces existe un elemento $g \in F(S)$ no trivial tal que $\varphi(g) = 1$. Podemos elegir g de manera que

$$g = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}$$

con longitud mínima n respecto a su descomposición reducida en $F(S)$, donde $\varepsilon_i = \pm 1$ y siendo $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ si $s_i = s_{i+1}$. Supongamos que $n = 1$, se tendría que $\varphi\left(s_1^{\varepsilon_1}\right) = s_1^{\varepsilon_1} = 1$, o sea, $s_1 = 1$. Esto es absurdo, pues por la Proposición 2.1.1, Γ tendría un lazo, lo cual no se puede dar por ser un árbol. Supongamos que $n = 2$, entonces

$$\varphi\left(s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2}\right) = s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} = 1 \Leftrightarrow s_1^{\varepsilon_1} = s_2^{-\varepsilon_2}.$$

Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, entonces $s_1 = s_2$ por construcción, por lo que $S \cap S^{-1} \neq \emptyset$, lo cual, de nuevo, es absurdo. Si $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, entonces $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, por lo que obtenemos que $s_1^{\varepsilon_1} = s_2^{\varepsilon_1}$. Esto nos dice de nuevo que $s_1 = s_2$, por lo que llegamos al mismo absurdo. Deducimos que $n \geqslant 3$. Tomemos ahora $g_i = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_i^{\varepsilon_i}$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$ y sea $P_i = \varphi(g_i)$ visto como vértice de Γ. Por la minimalidad de g, todos los P_i son distintos, pues cada $g_0, \ldots, g_{n-1}$ lo son. Es más, cada P_i es adyacente a P_{i+1} y

$$P_0 = \varphi(g_0) = \varphi(1) = 1 = \varphi(g) = \varphi(g_n) = P_n.$$

En consecuencia, podemos considerar un morfismo de grafos $\psi : \mathrm{Ciclo}_n \longrightarrow \Gamma$, tal que $\psi(i) = P_i$, el cual es inyectivo por lo antes visto, pero esto es absurdo, pues Γ es un árbol. Se tiene así que $G \cong F(S)$.

Supongamos ahora que G es un grupo libre generado por S. Entonces todo elemento $g \in G$ puede ser expresado de manera única como

$$g = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}$$

de forma análoga a lo anterior. Por poder expresar cada elemento de manera única, podemos construir la aplicación $l : G \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ dada por $l(g) = n$, siendo n la longitud de su expresión anterior. Consideremos los conjuntos

$$X_0 = \{1\} \qquad \text{y} \qquad X_n = \{g \in G : l(g) = n\}.$$

Sea $f_n : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ la aplicación dada por

$$f_n(g) = f_n\left(s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}\right) = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}.$$

Generamos así un sistema inverso

$$\cdots \xrightarrow{f_{n+1}} X_n \xrightarrow{f_n} X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_2} X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 = \{1\}$$

que define de manera unívoca un árbol. Esto es, Γ es un árbol. □

Definición (Acción libre sobre un grafo)**.** Sea G un grupo y Γ un grafo tal que $G \circlearrowright \Gamma$. Diremos que G actúa de forma libre sobre Γ si la acción sobre $\mathrm{vert}(\Gamma)$ es libre y actúa sin inversión.

Teorema 3.1.1 (Teorema 4, Sección 3.3 [16])**.** *Sea G un grupo libre y Ψ un árbol tal que $G \circlearrowright \Psi$ de forma libre. Tomemos un subárbol T de representantes de Ψ $\mathrm{mód}(G)$ y una orientación $\mathrm{arist}(\Psi)_+$ preservada por la acción de G. Entonces el conjunto*

$$S = \{g \in G \backslash \{1\} : \exists y \in \mathrm{arist}(\Psi)_+ \text{ tal que } o(y) \in T \text{ y } t(y) \in g \cdot T\}$$

forma un sistema generador de G.

Demostración. Consideremos $G{\cdot}T = \{g \cdot T : g \in G\}$ y tomemos $\psi : G \longrightarrow G{\cdot}T$ definida como $\psi(g) = g{\cdot}T$. Por ser T un árbol de representantes, sabemos que el morfismo de grafos $\pi_{|T} : T \longrightarrow G\backslash\Psi$ que manda cada elemento a su clase es inyectiva, y como G actúa de forma libre, se tiene que la aplicación ψ es biyectiva. Además, por ser la acción de G libre, ψ no fija vértices. Se tiene pues que las imágenes son disjuntas a pares, esto es, dados $g, g' \in G$ distintos, se tiene $\psi(g) \cap \psi(g') = g \cdot T \cap g' \cdot T = \varnothing$. Por ello, consideremos el grafo

$$\Psi' := \Psi/\psi(G).$$

Debido a que $\psi(G)$ es una unión disjunta de árboles, el grafo Ψ' será el grafo donde cada árbol $g \cdot T$ se identificará con un único vértice. Denotamos el vértice identificado con $g \cdot T$ por $[g \cdot T]$. Gracias a la Proposición 2.2.4 y al Corolario 2.2.1 sabemos que Ψ' es un árbol, pues su realización es contráctil, por serlo la de Ψ.

Consideremos el grafo $\Gamma(G, S) =: \Gamma$, donde S es el dado en el enunciado del teorema, y construimos la aplicación $\varphi : \mathrm{vert}(\Gamma) \longrightarrow \mathrm{vert}(\Psi')$ dado por $\varphi(g) = [\psi(g)] = [g \cdot T]$. Notemos que, por construcción de Γ, se tiene que $\mathrm{vert}(\Gamma) = G$, y por lo tanto φ está bien definida. Por ser ψ una biyección, φ también lo es y por ser Ψ' un árbol, existe un único morfismo de grafos $\varphi : \Gamma \longrightarrow \Psi'$ que extiende la aplicación φ a las aristas. Tomemos $\alpha : \mathrm{vert}(\Psi') \longrightarrow \mathrm{vert}(\Gamma)$ la aplicación inversa de φ en los vértices. Nuestro objetivo será extender esta aplicación a un morfismo de grafos y ver que es un isomorfismo.

Por definición, $\mathrm{vert}(\Psi') = \mathrm{vert}(\Psi)\backslash\mathrm{vert}(\psi(G))$. Podemos dotar a Ψ' de una orientación heredada de Ψ. Nos basta definir

$$\alpha : \mathrm{arist}(\Psi')_+ \longrightarrow \mathrm{arist}(\Gamma)_+ = G \times S$$

puesto que será un morfismo de grafos orientados. Tomemos $y \in \mathrm{arist}(\Psi')_+$ tal que $o(y) = [g \cdot T]$ y $t(y) = [g' \cdot T]$. Debido a que y conecta $[g \cdot T]$ con $[g' \cdot T]$, debe de existir un $s \in S$ tal que $s = g^{-1}g'$, que además es único, por ser Ψ' un árbol. Definimos $\alpha(y) = (g, s)$. Veamos que α es sobreyectiva. Sea $y \in \mathrm{arist}(\Gamma) = G \times S$. Entonces existe un $g \in G$ y un $s \in S$ tal que $y = (g, s)$, por lo que $o(y) = g$ y $t(y) = gs$. Puesto que φ es biyectiva en los vértices, obtenemos que $\varphi(o(y)) = \varphi(g) = [g \cdot T]$ y $\varphi(t(y)) = \varphi(gs) = [(gs) \cdot T]$. Por la definición de S, los vértices $[g \cdot T]$ y $[(gs) \cdot T]$ están conectados, por lo que α es sobreyectiva.

Ahora, por ser Ψ' un árbol y por ser α es biyectiva en los vértices se tiene que α es biyectiva en las aristas. Deducimos así que Ψ' es un grafo isomorfo a Γ. Haciendo uso de la Proposición 3.1.2, debido a que Ψ' es un árbol, se tiene que S es un sistema generador de G. □

Corolario 3.1.1 (Teorema 5, Sección 3.4 [16]). *Todo subgrupo de un grupo libre es un grupo libre.*

Demostración. Sea G un grupo libre y sea $H \leqslant G$. Consideremos un árbol Ψ tal que $G \circlearrowright \Psi$ de forma libre. Como ningún elemento no trivial de G fija ningún elemento de Ψ, tampoco lo hará ningún elemento de H, por lo que H actúa de forma libre sobre Ψ. Tenemos por el Teorema 3.1.1 deducimos que H es un grupo libre. □

3.2. Árboles y amalgamas

Definición (Dominio fundamental). Sea Γ un grafo y sea G un grupo tal que $G \circlearrowright \Gamma$ sin inversión. Llamaremos dominio fundamental de Γ mód(G) a un subgrafo Ψ de de Γ tal que el morfismo de grafos $\pi : \Psi \longrightarrow G\backslash\Gamma$, que manda cada elemento a su clase, es un isomorfismo.

Proposición 3.2.1 (Proposición 17, Sección 4.1 [16]). *Sea Γ un árbol y G un grupo tal que $G \circlearrowright \Gamma$ sin inversión. Entonces, el dominio fundamental de Γ mód(G) existe sí y solo si $G\backslash\Gamma$ es un árbol.*

Demostración. Supongamos que existe Ψ un dominio fundamental de Γ mód(G). Como Γ es un árbol, en particular es conexo, por lo que $G\backslash\Gamma$ también lo es. Como Ψ es un subgrafo de Γ es conexo, pues Γ es un árbol, y por ser dominio fundamental es isomorfo a $G\backslash\Gamma$, por lo que $G\backslash\Gamma$ es un árbol.

Supongamos que $G\backslash\Gamma$ es un árbol. Por la Proposición 3.1.1 sabemos que existe un subárbol Ψ de Γ que es isomorfo a $G\backslash\Gamma$, y por lo tanto, existe un dominio fundamental de Γ. □

Lema 3.2.1 (Lema 2, Sección 4.1 [16]). *Sea Γ un grafo y G un grupo tal que $G \circlearrowright \Gamma$ sin inversión. Consideremos T el subgrafo de Γ isomorfo a un segmento de vértices P y Q, de manera que T sea el dominio fundamental de Γ $\text{mód}(G)$. Sean G_P y G_Q los estabilizadores de estos vértices. Entonces, Γ es conexo si y solo si G está generado por $G_P \cup G_Q$.*

Demostración. Sea Γ' la componente conexa de Γ que contiene a T, y sea G' el conjunto de los elementos $g \in G$ tal que $g \cdot \Gamma' = \Gamma'$. Sea también G'' el subgrupo de G generado por $G_P \cup G_Q$. Notemos que si $h \in G_P \cup G_Q$, se tiene que T y $h \cdot T$ comparten al menos un vértice común, y como Γ' es conexo, $h \cdot T \subseteq \Gamma'$. Veamos que $h \cdot \Gamma' = \Gamma'$. Debido a que $h \cdot T \subseteq \Gamma'$, es evidente que $h \cdot \Gamma' \subseteq \Gamma'$. Tomando h^{-1}, se ha de tener que $h^{-1} \cdot \Gamma' \subseteq \Gamma'$. Actuando de nuevo por h, tenemos que $\left(hh^{-1}\right) \cdot \Gamma' = \Gamma' \subseteq h \cdot \Gamma'$. Se deduce que $h \cdot \Gamma' = \Gamma'$, y en consecuencia, $G'' \subseteq G'$.

Si consideramos los grafos

$$G'' \cdot T = \left\{g \cdot T : g \in G''\right\} \qquad \text{y} \qquad (G \backslash G'') \cdot T = \left\{g \cdot T : g \in G \backslash G''\right\}$$

cualquier grafo de $G'' \cdot T$ es disjunto con cualquier otro grafo de $(G \backslash G'') \cdot T$ en Γ. Además, la unión de todos los grafos de $G'' \cdot T$ y de $(G \backslash G'') \cdot T$ es Γ, pues T es dominio fundamental. Esto implica que $\Gamma' \subseteq G'' \cdot T$, pero $\Gamma' = g' \cdot \Gamma'$ para todo $g' \in G'$, por lo que $G' \subseteq G''$. Se deduce así que $G' = G''$. Si suponemos que Γ es conexo, se tiene que $G = G' = G''$, y por el mismo razonamiento, si supongamos que G está generado por $G_P \cup G_Q$, se tiene que Γ es conexo. □

Lema 3.2.2 (Lema 3, Sección 4.1 [16]). *En las condiciones del Lema 3.2.1, sea y la arista de T tal que $o(y) = P$ y $t(y) = Q$, y sea G_y el estabilizador de dicha arista. Entonces Γ no contiene ciclos si y solo si el homomorfismo $G_P *_{G_y} G_Q \longrightarrow G$ inducido por las inclusiones $G_P \hookrightarrow G$ y $G_Q \hookrightarrow G$ es inyectivo.*

Demostración. Primero, notemos que $G_P *_{G_y} G_Q$ está bien definido, pues $G_y = G_P \cap G_Q$. Supongamos que Γ contiene ciclos. Entonces existe un subgrafo de Γ isomorfo a Ciclo_n para cierto $n \geqslant 1$. Consideremos ese isomorfismo

$$\varphi : \text{Ciclo}_n \longrightarrow \varphi\left(\text{Ciclo}_n\right) \subset \Gamma$$

dado por $\varphi(i) = P_i$. Llamemos w_i a la arista de la imagen del ciclo tal que $o(w_i) = P_i$ y $t(w_i) = P_{i+1}$. Por actuar G sin inversión y por ser T un dominio fundamental, podemos escribir cada $w_i = h_i \cdot y_i$, donde $h_i \in G$ e y_i es y o $\overline{y}$. Si pasamos al cociente, debido a que $G \backslash \Gamma \cong T$ y este solo tiene una arista, se tiene que $\overline{y}_i = y_{i-1}$. En consecuencia, $P_i = o(y_i) = t(y_{i-1})$, y debido a que

$$h_i \cdot P_i = h_i \cdot o(y_i) = o(h_i \cdot y_i) = t(h_{i-1} \cdot y_{i-1}) = h_{i-1} \cdot t(y_{i-1}) = h_{i-1} \cdot P_i$$

deducimos que existe un $g_i \in G_{P_i}$ tal que $h_i = h_{i-1} g_i$. Además, $g_i \notin G_y$, pues $\overline{h_i \cdot y_i} \neq h_{i-1} \cdot y_{i-1}$.

Ahora, como $o(w_0) = t(w_n)$, se ha de tener que

$$h_0 \cdot P_0 = h_n \cdot P_0 = (h_{n-1} g_n) \cdot P_0 = \cdots = (h_0 g_1 \cdots g_n) \cdot P_0.$$

Esto es, $g_1 \cdots g_n \in G_{P_0}$. Se concluye que Γ contiene ciclos si y solo si podemos encontrar una secuencia de vértices $P_0, \ldots, P_n$ de Γ consecutivos y una secuencia de elementos $g_i \in G_{P_i} \backslash G_y$ tal que $g_0 \cdots g_n = 1$, pues la implicación contraria se obtiene siguiendo el mismo razonamiento de manera inversa. Gracias al Corolario 1.3.1, sabemos que $G_P *_{G_y} G_Q \longrightarrow G$ no es inyectivo bajo las condiciones anteriores. Se deduce así que Γ no contiene ciclos si y solo si $G_P *_{G_y} G_Q \longrightarrow G$ es inyectivo. □

Teorema 3.2.1 (Teorema 6, Sección 4.1 [16]). *Sea Γ un grafo y sea G un grupo tal que $G \circlearrowright \Gamma$ sin inversión. Sean P y Q dos vértices distintos y adyacentes de Γ, $\{y, \overline{y}\}$ las aristas que los unen y sea T el subgrafo de Γ tal que $\text{vert}(T) = \{P, Q\}$ y $\text{arist}(T) = \{y, \overline{y}\}$, de manera que T sea un dominio fundamental de Γ $\text{mód}(G)$. Llamemos G_P, G_Q y $G_y = G_{\overline{y}}$ a los respectivos estabilizadores de P, Q e y. Entonces, son equivalentes:*

- *Γ es un árbol.*
- *El homomorfismo $G_P *_{G_y} G_Q \longrightarrow G$ inducido por las inclusiones $G_P \hookrightarrow G$ y $G_Q \hookrightarrow G$ es un isomorfismo.*

Demostración. Supongamos que Γ es un árbol. Entonces es conexo y no tiene ciclos. Por el Lema 3.2.1 sabemos que G está generado por $G_P \cup G_Q$, y por el Lema 3.2.2, sabemos que $G_P *_{G_y} G_Q \longrightarrow G$ es inyectivo. Por último, debido que T es dominio fundamental se tiene que $T \cong G\backslash\Gamma$. Sea $g \in G$ y consideremos $g \cdot \Gamma$. Pasando al cociente, $g \cdot \Gamma$ ha de ser un subgrafo de $G\backslash\Gamma$, el cual es isomorfo a T, que es un segmento. Como los estabilizadores de los vértices de T son G_P y G_Q, y G_y el de su arista, cada elemento de $g \cdot \Gamma$ en el cociente podemos expresarlo como combinación de elementos de estos grupos, por lo que la aplicación anterior también es sobreyectiva. En consecuencia $G_P *_{G_y} G_Q \cong G$.

Supongamos que la aplicación $G_P *_{G_y} G_Q \longrightarrow G$ dada en el enunciado del teorema es un isomorfismo. Debido a que $G_y = G_P \cap G_Q$, el grupo está generado por $G_P \cup G_Q$. Gracias al Lema 3.2.1, sabemos que Γ es conexo, y por ser la aplicación anterior un isomorfismo, es inyectiva. Haciendo uso del Lema 3.2.2, Γ no contiene ciclos. Se deduce así que Γ es un árbol. □

Teorema 3.2.2 (Teorema 7, Sección 4.1 [16])**.** *Sea $G = G_1 *_A G_2$ una amalgama de dos grupos. Entonces existe un árbol Γ, único salvo isomorfismo, en el cual G actúa sin inversión y tiene a un segmento T dado por*

$$\mathrm{vert}(T) = \{P, Q\} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{arist}(T) = \{y, \overline{y}\}$$

por dominio fundamental, de manera que sus estabilizadores sean $G_1 = G_P$, $G_2 = G_Q$ y $G_y = A$.

Demostración. Consideremos el grafo Γ dado por

$$\mathrm{vert}(\Gamma) := (G/G_1) \sqcup (G/G_2) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{arist}(\Gamma) := (G/A) \sqcup \overline{(G/A)},$$

junto con las aplicaciones $o : G/A \longrightarrow G/G_1$ y $t : G/A \longrightarrow G/G_2$ dadas por $o\,(gA) = gG_1$ y por $t\,(gA) = gG_2$. Estas aplicaciones están bien definidas, pues A es subgrupo tanto de G_1 como de G_2. Podemos definir ahora una acción de G sobre Γ tal que dado $g \in G$ y $rG_i \in \mathrm{vert}(\Gamma)$ se tenga que

$$g \cdot rG_i := (gr)G_i.$$

Si consideramos $G\backslash\Gamma$ obtenemos un grafo tal que

$$\mathrm{vert}(G\backslash\Gamma) = \{1 \cdot G_1, 1 \cdot G_2\} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{arist}(G\backslash\Gamma) = \{1 \cdot A, \overline{1 \cdot A}\}.$$

Llamemos $P = G_1$, $Q = G_2$ e $y = A$, y sea T el segmento dado por estos vértices y aristas. Es evidente que $G\backslash\Gamma \cong T$ y por construcción se tiene que $G_P = G_1$, $G_Q = G_2$ y $A = G_y$. Haciendo uso del Teorema 3.2.1 se deduce que Γ es un árbol. Además, como hemos construido el árbol a partir del grupo, todo árbol cumpliendo estas características ha de ser isomorfo a Γ. □

Definición (Árbol de Bass-Serre)**.** Sea $G := G_1 *_A G_2$ un producto amalgamado. Llamaremos árbol de Bass-Serre asociado a G al árbol construido en el Teorema 3.2.2.

Estos teoremas nos dan una relación muy fuerte entre las estructuras de grupo y los árboles. Algunos de estos resultados se pueden generalizar, como por ejemplo, el Lema 3.2.1.

Lema 3.2.3 (Lema 4, Sección 4.1 [16])**.** *Sea Γ un grafo conexo no vacío y G un grupo tal que $G \circlearrowright \Gamma$ sin inversión. Consideremos T un árbol de representantes de Γ $\mathrm{mód}(G)$. Sea Y un subgrafo de Γ que contenga a T de manera que toda arista de Y tiene un extremo en T y tal que $G \cdot Y = \Gamma$.*

Para cada $y \in \mathrm{arist}(Y)$ con $o(y) \in \mathrm{vert}(T)$, sea $g_y \in G$ tal que $g_y \cdot t(y) \in \mathrm{vert}(T)$. Entonces, el grupo H generado por los elementos g_y y por los estabilizadores G_P para todo $P \in \mathrm{vert}(T)$ es igual a G.

Demostración. Debido a que G actúa sin inversión, la acción de G sobre Γ viene determinada por la acción sobre sus vértices. Por otra parte, como T es un árbol de representantes de Γ $\mathrm{mód}(G)$, se tiene que $G \cdot T = \Gamma$. Por lo tanto, nos basta probar que $H \cdot \mathrm{vert}(T) = \mathrm{vert}(\Gamma)$. Notemos que como H contiene los elementos g_y, se tiene que $\mathrm{vert}(Y) \subset H \cdot \mathrm{vert}(T)$. Veamos que $H \cdot Y = \Gamma$. Debido a que Y es un subgrafo de Γ y Γ es conexo, basta probar que dada una arista $y \in \mathrm{arist}(\Gamma)$ con $o(y) \in \mathrm{vert}(H \cdot Y)$ se tiene que $t(y) \in \mathrm{vert}(H \cdot Y)$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $o(y) \in \mathrm{vert}(T)$, pues de lo contrario, siempre nos podemos reducir a este caso actuando por elementos de H, pues $o(y) \in \mathrm{vert}(H \cdot Y)$. Como $G \cdot Y = \Gamma$, existe al menos un $g \in G$ de manera que $g \cdot y \in \mathrm{arist}(Y)$. Veamos que $g \in H$. Por como hemos tomado Y, se tiene que $o(g{\cdot}y) \in \mathrm{vert}(T)$ o $t(g{\cdot}y) \in \mathrm{vert}(T)$. Supongamos que $o(g{\cdot}y) \in \mathrm{vert}(T)$. Como $o(g{\cdot}y) = g{\cdot}o(y)$ y T es un árbol de representantes, $g \cdot o(y)$ y $o(y)$ son el mismo vértice en T. Por lo tanto $g \in G_{o(y)} \subset H$. Supongamos ahora que $t(g \cdot y) \in \mathrm{vert}(T)$. Llamemos $z = g \cdot y$. Como $t(z) \in \mathrm{vert}(T)$, entonces $o(z) \in \mathrm{vert}(T)$, por lo que existe un $g_z \in G$ tal que $g_z \cdot t(z) \in \mathrm{vert}(T)$, pues T es un subgrafo de Y. Ahora, como $g_z \cdot t(z) = (g_z g) \cdot o(y)$ y $o(y)$ están en T, de nuevo se deduce que son el mismo vértice. Por lo tanto $g_z g \in G_{o(y)}$, o lo que es lo mismo, $g \in g_z^{-1} G_{o(y)} \subset H$. En cualquier caso, hemos obtenido que $g \in H$, y por lo anterior, deducimos que $G = H$. □

Los anteriores resultados nos otorgan herramientas útiles para obtener ciertas propiedades de los grupos.

Lema 3.2.4. *Sea G un grupo y X un objeto de alguna categoría tal que $G \circlearrowright X$. Entonces para cualquier $x \in X$ y cualquier $g \in G$ se tiene que*

$$G_{g \cdot x} = g G_x g^{-1}.$$

Demostración. Tomemos $x \in X$ y $g \in G$ cualesquiera. Si $r \in G_x$, entonces $r \cdot x = x$. Entonces

$$\left(grg^{-1}\right) \cdot (g \cdot x) = g \cdot (r \cdot x) = g \cdot x,$$

por lo que $gG_xg^{-1} \subseteq G_{g \cdot x}$. Tomemos ahora $r \in G_{g \cdot x}$. Procediendo de forma análoga se obtiene

$$\left(g^{-1}rg\right) \cdot x = \left(g^{-1}r\right) \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = x.$$

Deducimos que $g^{-1}G_{g \cdot x}g \subseteq G_x$, y por lo tanto $G_{g \cdot x} \subseteq gG_xg^{-1}$. Se concluye que $G_{g \cdot x} = gG_xg^{-1}$. □

Proposición 3.2.2. *Sea H un subgrupo de $G = G_1 *_A G_2$, de manera que $H \backslash \{1\}$ no contiene ningún elemento que sea conjugado de G_1 o de G_2, entonces H es un grupo libre.*

Demostración. Sea Γ el árbol de Bass-Serre asociado a G. Haciendo uso del Lema 3.2.4, las hipótesis sobre H pueden reescribirse de manera que para todo $v \in \mathrm{vert}(\Gamma)$ se tenga que

$$H_v = H \cap G_v = \{1\},$$

pues por la construcción de T, todo vértice del árbol puede obtenerse por la acción de algún elemento de G sobre G_1 o G_2 vistos como vértices. En consecuencia, $H \circlearrowright \Gamma$ de forma libre y por ser subgrupo de G, actúa sin inversiones. Gracias al Teorema 3.1.1, H es un grupo libre. □

Definición (Subgrupo acotado)**.** Sea $G = *_A G_i$ un producto amalgamado y sea $H \leqslant G$. Diremos que H es un subgrupo acotado de G si existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $g \in H$ es $l(g) \leqslant M$, donde $l(g)$ es la longitud de la única palabra reducida de g.

Lema 3.2.5 (Teorema del punto fijo de Bruhat-Tits)**.** *Sea Γ un árbol acotado. Entonces existe un vértice o una arista que es fijada por todos sus automorfismos.*

Demostración. Si Γ es un único vértice el resultado es trivial. En caso contrario, consideremos

$$d(\Gamma) := \max_{v,w \in \mathrm{vert}(\Gamma)} \{l(v,w)\},$$

que es la mayor distancia entre dos vértices de Γ. Como Γ es acotado se tiene que $d(\Gamma) < \infty$. Sea el conjunto

$$t(\Gamma) := \left\{v \in \mathrm{vert}(\Gamma) : \left|\overline{B}(v,1) \backslash \{v\}\right| = 1\right\},$$

donde

$$\overline{B}(v,1) = \{w \in \mathrm{vert}(\Gamma) : l(v,w) \leqslant 1\},$$

esto es, la bola cerrada en Γ de radio 1 respecto a la distancia geodésica. Sea Γ_1 el subgrafo de Γ tal que $\mathrm{vert}(\Gamma_1) = \mathrm{vert}(\Gamma) \backslash t(\Gamma)$. Es evidente que Γ_1 es un árbol, pues cada elemento de $t(\Gamma)$ es adyacente a un único vértice de Γ que no puede estar en $t(\Gamma)$ por definición, por lo que es un subgrafo conexo de Γ, esto es, Γ_1 es un árbol.

Veamos que $d(\Gamma_1) = d(\Gamma) - 2$. Consideremos el conjunto

$$S(\Gamma) := \{(v, w) \in \mathrm{vert}(\Gamma) \times \mathrm{vert}(\Gamma) : l(v, w) = d(\Gamma)\}.$$

Notemos que $S(\Gamma) \subseteq t(\Gamma) \times t(\Gamma)$, pues en caso contrario, existiría un par (v, w) tal que al menos uno de sus vértices tendría más de una adyacencia, y en consecuencia la distancia $l(v, w)$ no puede ser máxima. Sea $(v, w) \in S(\Gamma)$ un par cualquiera. Por ser $l(v, w) = d(\Gamma)$, existe una geodésica en Γ isomorfa a $\mathrm{Cam}_{d(\Gamma)}$ que comienza en v y termina en w. Además, dicha geodésica no puede contener ningún vértice de $t(\Gamma)\backslash\{v.w\}$, pues tendría que pasar dos veces por un mismo vértice, ya que todo elemento de $t(\Gamma)$ solo tiene una única adyacencia. Como $\mathrm{vert}(\Gamma_1)$ no contiene vértices de $t(\Gamma)$, se tiene que dicha geodésica restringida a Γ_1 ha de ser isomorfa a $\mathrm{Cam}_{d(\Gamma)-2}$. Por la arbitrariedad de los vértices tomados, se tiene que $d(\Gamma_1) = d(\Gamma) - 2$.

Iterativamente, podemos considerar los subárboles Γ_n de Γ tales que $\mathrm{vert}(\Gamma_n) := \mathrm{vert}(\Gamma_{n-1})\backslash t(\Gamma_{n-1})$, tomándose $\Gamma_0 = \Gamma$. Por lo anterior, tenemos que

$$d(\Gamma_n) = d(\Gamma_{n-1}) - 2 = d(\Gamma) - 2n.$$

Supongamos que $d(\Gamma)$ es par. Entonces $d(\Gamma) = 2k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia

$$d(\Gamma_k) = d(\Gamma) - 2k = 0$$

y por lo tanto Γ_k es un único vértice. Por ser un vértice, este se preserva por cualquier $\varphi \in \mathrm{Aut}(\Gamma_k)$. Consideremos Γ_{k-1}. Como todo $\psi \in \mathrm{Aut}(\Gamma_{k-1})$ es una extensión de algún $\varphi \in \mathrm{Aut}(\Gamma_k)$ y tal que $\psi\left(t(\Gamma_{k-1})\right) = t(\Gamma_{k-1})$, pues han de mantenerse las adyacencias, se tiene que todo automorfismo de Γ_{k-1} fija el vértice de Γ_k. Por inducción, todo automorfismo de Γ ha de fijar el vértice de Γ_k.

Supongamos que $d(\Gamma)$ es impar. Entonces existe un $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $d(\Gamma) = 2k + 1$. Por lo tanto

$$d(\Gamma_k) = d(\Gamma) - 2k = 1$$

y en consecuencia Γ_k es un segmento. De nuevo, notamos que todo $\varphi \in \mathrm{Aut}(\Gamma_k)$ fija la arista de Γ_k. Razonando como antes, todo automorfismo de Γ fija la arista de Γ_k. □

Proposición 3.2.3. *Sea Γ un árbol y $G = G_1 *_A G_2$ un grupo tal que $G \circlearrowright \Gamma$ sin inversión. Supongamos que existe un vértice $v \in \mathrm{vert}(\Gamma)$ tal que su órbita $G \cdot v$ es un conjunto acotado de $\mathrm{vert}(\Gamma)$ respecto a la distancia geodésica. Entonces existe un vértice de Γ que queda fijado por la acción de G.*

Demostración. Consideremos el subárbol Ψ tal que $\mathrm{vert}(\Psi) = G \cdot v$. Notemos que Ψ es un árbol acotado, pues sus vértices lo son, y que $G \cdot \Psi \subseteq \Psi$ por como lo hemos tomado. Gracias al Lema 3.2.5 existe un vértice o una arista que queda fijada por la acción de G, pues este actúa por automorfismos. Como G actúa sin inversión, si G fija una arista ha de fijar sus vértices, por lo que fijaría también vértices. En cualquier caso, la acción de G fija al menos un vértice. □

Corolario 3.2.1. *Sea H un subgrupo acotado de $G = G_1 *_A G_2$. Entonces H puede escribirse como un grupo conjugado de G_1 o de G_2.*

Demostración. Sea Γ un árbol sobre el que G actúa sin inversión y cuyo dominio fundamental es un segmento. Sea T dicho dominio fundamental y llamemos $\mathrm{vert}(T) = \{P, Q\}$. Por el Teorema 3.2.2 sabemos que si $g \in G_1 \cup G_2$ se tiene que $g \cdot T \cap T$ es no vacío. Notemos que la longitud definida en la definición de subgrupo acotado es equivalente a la distancia geodésica sobre el árbol. Entonces, si H es un subgrupo acotado de G, $H \cdot P$ ha de ser un subconjunto acotado de $\mathrm{vert}(\Gamma)$ respecto a la distancia geodésica.

Consideremos Ψ el subárbol de Γ tal que $\mathrm{vert}(\Psi) = H \cdot P$. Debido a que $H \cdot P$ es acotado, Ψ es acotado y, además, $H \cdot \Psi \subseteq \Psi$ por construcción. Haciendo uso de la Proposición 3.2.3, existe un vértice v fijado por H. En consecuencia, H ha de ser un conjugado de G_1 o de G_2, como se probó en la demostración de la Proposición 3.2.2. □

Corolario 3.2.2. *Sea H un subgrupo finito de $G = G_1 *_A G_2$. Entonces H puede escribirse como un grupo conjugado de G_1 o de G_2.*

Demostración. Basta probar que todo grupo finito es acotado, lo cual es inmediato, debido a que todo elemento de un grupo finito tiene orden finito, y en consecuencia, cualquier expresión como palabra reducida de G estará acotada. □

4 | Aplicaciones

Desarrollada una introducción a la teoría de Bass-Serre, procederemos a dar una aplicación de esta. Estudiaremos el problema de intersección de subgrupos parabólicos en grupos de Artin usando teoría de Bass-Serre. Para ello, primero comprenderemos el problema y daremos solución a este para un tipo específico de grupos de Artin, dado que el problema en toda su generalidad sigue abierto.

4.1. Grupos de Artin-Tits

Pasemos a introducir los grupos de Artin-Tits y algunos de sus tipos.

Definición (Grupo de Artin-Tits)**.** Sea S un conjunto finito y para cada par de elementos $a, b \in S$ sea $m_{ab} = m_{ba} \in \{\infty\} \cup \mathbb{N} \backslash \{1\}$. Llamaremos grupo de Artin-Tits sobre el conjunto de generadores S y con relaciones m_{ab}, al grupo A_S presentado como

$$A_S \cong \left\langle S \mid \underbrace{aba\dots}_{m_{ab}} = \underbrace{bab\dots}_{m_{ab}} \; : a, b \in S \right\rangle.$$

En el caso $m_{ab} = \infty$, entenderemos que los elementos a y b no tienen relaciones. De forma usual nos referiremos a los grupos de Artin-Tits como grupos de Artin.

Estos grupos deben su nombre a Emil Artin, por sus trabajos sobre los grupos de trenzas entre los años 1920 y 1940 [2], y a Jacques Tits, por generalizar los trabajos de Artin a una clase más general de grupos en los años sesenta, trabajando con estos grupos como los conocemos hoy en día [17], aunque los primeros que nombraron a estos grupos como grupos de Artin-Tits fue el grupo Bourbaki.

Uno de los grupos que nos resultarán de vital importancia son los conocidos como grupos de Coxeter.

Definición (Grupo de Coxeter)**.** Sea S un conjunto finito y sea A_S un grupo de Artin sobre el conjunto de generadores S para ciertas relaciones. Sea R_S el subgrupo de A_S generado por el conjunto $\{a^2 : a \in S\}$. Llamaremos grupo de Coxeter sobre el conjunto de generadores S al grupo W_S dado por

$$W_S \cong A_S / R_S.$$

Podemos apreciar que todo grupo de Artin tiene un grupo de Coxeter asociado. Estos grupos nos permiten dar una clasificación de los grupos de Artin en base a las relaciones entre sus elementos. Otro concepto que nos será necesario es el de subgrupo parabólico de un grupo de Artin.

Definición (Subgrupo parabólico de un grupo de Artin)**.** Sea S un conjunto finito y sea A_S un grupo de Artin sobre el conjunto S. Sea $T \subset S$ y consideremos $A_T \leqslant A_S$ el subgrupo generado por T. Llamaremos subgrupo parabólico estándar de tipo T a A_T. Llamaremos subgrupo parabólico de tipo T a cualquier conjugado de un subgrupo parabólico estándar de tipo T por elementos de A_S.

Gracias a los resultados Van der Lek dados en [18], sabemos que los subgrupos parabólicos estándar son grupos de Artin. Pasemos a ver algunos tipos de grupos de Artin.

Definición (Algunos tipos de grupos de Artin)**.** Sea S un conjunto finito y A_S un grupo de Artin sobre el conjunto S. Entonces:

- **Tipo RAAG:** Diremos que A_S es de tipo $RAAG$ (right-angled), o de ángulo recto, si para todo $a, b \in S$ se tiene que $m_{ab} \in \{2, \infty\}$.
- **Tipo esférico:** Diremos que A_S es de tipo esférico si el grupo de Coxeter W_S asociado es finito.
- **Tipo grande:** Diremos que A_S es de tipo grande si para todo $a, b \in S$ es $m_{ab} \geqslant 3$.
- **Tipo FC:** Diremos que A_S es de tipo FC (flag-complex) si para cualquier subconjunto $T \subset S$ tal que para todo $a, b \in T$ sea $m_{ab} \neq \infty$, se tiene que el subgrupo parabólico estándar A_T es de tipo esférico. Notemos que es una buena definición, pues los subgrupos parabólicos estándar son de nuevo grupos de Artin.

Cabe resaltar que, aunque hemos denotado a los grupos de Artin haciendo referencia al conjunto de sus generadores, es necesario dar las relaciones entre estos para una completa definición del grupo. Para ello, se usará una representación de estas relaciones en forma de grafo, conocido como grafo de Coxeter.

Definición (Grafo de Coxeter)**.** Sea S un conjunto finito y sea A_S un grupo de Artin sobre el conjunto S. Llamaremos grafo de Coxeter de A_S a Γ_S, a un grafo no orientado definido como $\mathrm{vert}(\Gamma_S) = S$, y cumpliendo que dados $a, b \in S$ se tenga que:

- Si $m_{ab} \neq \infty$, se unen esos dos vértices y se etiqueta la arista con m_{ab}.
- Si $m_{ab} = \infty$, no se unirán los vértices.

En lo que sigue, en caso de tener un grafo de Coxeter Γ, denotaremos al grupo de Artin que representa como A_Γ.

4.2. Problema de intersección de subgrupos parabólicos

A pesar de haber sido objeto de estudio de matemáticos alrededor del mundo por casi cien años, los grupos de Artin aun albergan gran cantidad de preguntas abiertas. Numerosas conjeturas, tales como si estos grupos son libres de torsión o no, sobre su cohomología o el problema de la palabra entre otros, siguen siendo un misterio. Puede encontrarse más información sobre algunas de estas preguntas en [9].

De entre de estas preguntas, nos centraremos en un problema en concreto, conocido como el *problema de la intersección de subgrupos parabólicos*. Este conjetura:

Dado un grupo de Artin A_S, ¿es el conjunto de sus subgrupos parabólicos estable bajo la intersección?

En el caso de restringir la pregunta solo a los subgrupos parabólicos estándar, la respuesta también resulta cierta. Esto fue probado por Harm Van der Lek en el año 1983.

Teorema 4.2.1 (Teorema de Van der Lek [18])**.** *Sea S un conjunto finito y sean $T, Q \subset S$ subconjuntos. Sea A_S un grupo de Artin sobre el conjunto S y sean $A_T, A_Q \leqslant A_S$ los subgrupos parabólicos estándar de tipo T y Q. Entonces*

$$A_T \cap A_Q \cong A_{T \cap Q}.$$

Se puede encontrar una prueba de este resultado en [18]. Grandes avances se han hecho en estos últimos años sobre esta pregunta:

- En el año 2019, el equipo formado por Bert Wiest, Juan González-Meneses, María Cumplido y Volker Gebhardt, dio un resultado positivo a esta pregunta para los grupos de Artin de tipo esférico [5], siendo los primeros en dar un resultado para el caso de subgrupos parabólicos no estándar.
- En diciembre de 2020, el equipo formado por Alexandre Martin, María Cumplido y Nikolas Vascou confirmó la pregunta para el caso de los grupos de Artin de tipo grande [6].

- En enero de 2022, el equipo formado por Luis Paris, Olga Varghese y Philip Möller extendieron los resultados de Rose Morris-Wright [14] para un caso particular de grupos de Artin de tipo FC. Probaron que la intersección de un subgrupo parabólico de un grupo de Artin de tipo FC con otro subgrupo parabólico de tipo esférico es también un subgrupo parabólico [15].
- En el artículo [1] podemos encontrar una prueba para los grupos de Artin de tipo RAAG, dada por Ashot Minasyan y Yago Antolín, apoyándose en los resultados de Andrew J. Duncan, Ilya Kazachkov y Vladimir N. Remeslenikov dados en [7].
- En los artículos [4] y [10] podemos encontrar pruebas para algunos tipos más específicos de grupos de Artin. En concreto, en [4], Martin Axel Blufstein da una generalización de los resultado dados en [6], y en [10], Thomas Haettel resuelve el problema para un tipo de grupos de Artin llamados euclídeos.

El objetivo de este capítulo es estudiar este problema para una subfamilia de grupos de Artin de tipo FC, siguiendo como referencia la tesis doctoral de Islam Foniqi [8], en la que se usa teoría de Bass-Serre para probar que para esta subfamilia (que definiremos más adelante) la intersección de subgrupos parabólicos es un subgrupo parabólico.

Definición (Subgrupo propio)**.** Sea G un grupo y sea H un subgrupo de G. Diremos que H es un subgrupo propio de G si no es ni G ni el grupo trivial.

Comencemos dando algunos resultados previos, definiendo primero qué entenderemos como grupo de Artin par.

Definición (Grupo de Artin par)**.** Diremos que un grupo de Artin A_S es par si para todo $a, b \in S$ se tiene que m_{ab} par o infinito.

Lema 4.2.1. *Sea Γ un grafo de Coxeter y A_Γ su grupo de Artin asociado. Sean Γ_1 y Γ_2 dos subgrafos de Γ tales que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$. Entonces*

$$A_\Gamma = A_{\Gamma_1} *_{A_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2}} A_{\Gamma_2}.$$

Demostración. Notemos que como $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$, se tiene que $\mathrm{vert}(\Gamma_1) \cup \mathrm{vert}(\Gamma_2) = \mathrm{vert}(\Gamma)$ y también que $\mathrm{arist}(\Gamma_1) \cup \mathrm{arist}(\Gamma_2) = \mathrm{arist}(\Gamma)$. Debido a que los vértices representan los generadores del grupo y las aristas sus relaciones, tomando R_i las relaciones que representan $\mathrm{arist}(\Gamma_i)$ con $i = 1, 2$, podemos construir

$$\begin{tikzcd}
 & A_{\Gamma_1} \cong \langle \mathrm{vert}(\Gamma_1) | R_1 \rangle \arrow[dr, bend left] & \\
A_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} \cong \langle \mathrm{vert}(\Gamma_1) \cap \mathrm{vert}(\Gamma_2) | R_1 \cap R_2 \rangle \arrow[ur, bend left] \arrow[dr, bend right] & & A_\Gamma \cong \langle \mathrm{vert}(\Gamma_1) \cup \mathrm{vert}(\Gamma_2) | R_1 \cup R_2 \rangle \\
 & A_{\Gamma_2} \cong \langle \mathrm{vert}(\Gamma_2) | R_2 \rangle \arrow[ur, bend right] &
\end{tikzcd}$$

mediante las respectivas inclusiones canónicas. Notemos que hemos abusado de notación, pues los vértices de los anteriores grafos vienen a partir de los generadores de los grupos. Por construcción, se deduce que $A_\Gamma = A_{\Gamma_1} *_{A_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2}} A_{\Gamma_2}$. □

Lema 4.2.2. *Sea Γ un árbol y G un grupo tal que $G \circlearrowright \Gamma$ sin inversión. Sean $P, Q \in$ vert(Γ) y α la geodésica que los une en Γ. Entonces, si $g \in G_P \cap G_Q$, se tiene que $g \cdot \alpha = \alpha$. De la misma manera, dadas dos aristas $y_1, y_2 \in \mathrm{arist}(\Gamma)$, si β es la geodésica que las une en Γ, entonces para todo $g \in G_{y_1} \cap G_{y_2}$ se tiene que $g \cdot \beta = \beta$.*

Demostración. Notemos que como G actúa sin inversión se tiene que $g \cdot \alpha$ es conexo para cualquier $g \in G$, pues dado cualquier $y \in \mathrm{arist}(\Gamma)$ se tiene que $g \cdot y$ es la arista que une $g \cdot o(y)$ con $g \cdot t(y)$. Sea $g \in G_P \cap G_Q$. Por reducción al absurdo supongamos que $g \cdot \alpha \neq \alpha$. Como $g \cdot \alpha$ es conexo y g fija a P y a Q, entonces $C = \alpha \cup (g \cdot \alpha)$ es un subgrafo de Γ que contiene un ciclo. Esto es absurdo, pues Γ es un árbol. Se deduce que $g \cdot \alpha = \alpha$. De manera similar se obtiene el resultado si partimos de tomar dos aristas. □

El siguiente lema nos será necesario para la demostración, pero no daré su prueba, puesto que se escapa del objetivo de este trabajo. De igual manera, puede encontrarse su demostración en [8], cuya referencia explícita se cita a continuación.

Lema 4.2.3 (Lema 4.2.7 [8])**.** *Sea S un conjunto finito y A_S un grupo de Artin par sobre S. Sean $P, Q \subseteq S$ dos subconjuntos, $r, s \in A_S$ y $A_P, A_Q \leqslant A_S$ los subgrupos de A_S generados por P y Q. Entonces existen dos elementos $g_1, g_2 \in A_S$ tales que*

$$\left(rA_Pr^{-1}\right) \cap \left(sA_Qs^{-1}\right) = \left(g_1A_{P\cap Q}g_1^{-1}\right) \cap \left(g_2A_{P\cap Q}g_2^{-1}\right).$$

Definición (Engarce y estrella)**.** Sea Γ un grafo sin lazos y $v \in \mathrm{vert}(\Gamma)$. Llamaremos engarce de v a

$$\mathrm{lk}(v) := \{w \in \mathrm{vert}(\Gamma) : (v, w) \in \mathrm{arist}(\Gamma)\}.$$

Se llamará estrella de v a $\mathrm{st}(v) := \mathrm{lk}(v) \cup \{v\}$.

Proposición 4.2.1 (Proposición 4.2.10 [8])**.** *Sea Γ un grafo de Coxeter, de manera que el grupo de Artin asociado A_Γ sea par. Sea $R \subseteq \mathrm{vert}(\Gamma)$ y $g \in A_\Gamma$. Supongamos que $A_R \cup \left(gA_Rg^{-1}\right)$ no está contenido en ningún subgrupo parabólico propio de A_Γ, y que $A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right)$ no está contenido en ningún subgrupo parabólico estándar propio de A_Γ. Entonces, para todo $v \in \mathrm{vert}(\Gamma)\backslash R$ se tiene que $R \subseteq \mathrm{lk}(v)$.*

Demostración. Para aligerar la notación, llamemos $V = \mathrm{vert}(\Gamma)$. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un $v \in V\backslash R$ tal que $R \nsubseteq \mathrm{lk}(v)$. Sea $A_{V\backslash\{v\}} \leqslant A_\Gamma$ el subgrupo generado por $V\backslash\{v\}$. Veamos que el elemento g del enunciado no puede pertenecer a $A_{V\backslash\{v\}}$. De nuevo, por reducción al absurdo supongamos que $g \in A_{V\backslash\{v\}}$, entonces $A_{V\backslash\{v\}} = gA_{V\backslash\{v\}}$. Debido a que $v \notin R$, se tiene que $R \subseteq V\backslash\{v\}$, por lo que $A_R \leqslant A_{V\backslash\{v\}}$. Además $gA_Rg^{-1} \leqslant gA_{V\backslash\{v\}}g^{-1} = A_{V\backslash\{v\}}$, pues $g \in A_{V\backslash\{v\}}$ y la conjugación es un isomorfismo de grupos. Por lo tanto $A_R \cup \left(gA_Rg^{-1}\right) \subseteq A_{V\backslash\{v\}}$, pero esto es absurdo, pues por hipótesis $A_R \cup \left(gA_Rg^{-1}\right)$ no está contenido en ningún subgrupo parabólico propio de $A_{V\backslash\{v\}}$. Se concluye que $g \notin A_{V\backslash\{v\}}$.

Consideremos Γ_1 el subgrafo de Γ que tiene por vértices $\mathrm{st}(v)$ y Γ_2 el subgrafo de Γ que tiene por vértices $V\backslash\{v\}$. Notemos que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$, y que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ corresponde con el subgrafo de Γ que tiene por vértices a $\mathrm{lk}(v)$. Haciendo uso del Lema 4.2.1 se tiene que

$$A_\Gamma = A_{\mathrm{st}(v)} *_{A_{\mathrm{lk}(v)}} A_{V\backslash\{v\}}.$$

Esto es porque $A_{\mathrm{st}(v)} = A_{\Gamma_1}$, $A_{V\backslash\{v\}} = A_{\Gamma_2}$ y $A_{\mathrm{lk}(v)} = A_{\Gamma_1\cap\Gamma_2}$. Debido a que hemos podido expresar el grupo A_Γ como un producto amalgamado, por el Teorema 3.2.2 sabemos que existe un árbol de Bass-Serre T asociado a A_Γ de manera que

$$\mathrm{vert}(T) := \left(A_\Gamma/A_{\mathrm{st}(v)}\right) \sqcup \left(A_\Gamma/A_{V\backslash\{v\}}\right) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{arist}(T) := \left(A_\Gamma/A_{\mathrm{lk}(v)}\right) \sqcup \overline{\left(A_\Gamma/A_{\mathrm{lk}(v)}\right)}.$$

Además, G actúa sobre T sin inversión y tiene por dominio fundamental un grafo isomorfo a un segmento, en el cual $A_{\mathrm{st}(v)}$ es el estabilizador de un vértice, $A_{V\backslash\{v\}}$ es el estabilizador del otro vértice y $A_{\mathrm{lk}(v)}$ es el estabilizador de la arista. Como $g \notin A_{V\backslash\{v\}}$, se tiene que $A_{V\backslash\{v\}}$ y $gA_{V\backslash\{v\}}$, vistos como vértice del árbol T, son distintos. Consideremos α la geodésica en T que une a $A_{V\backslash\{v\}}$ con $gA_{V\backslash\{v\}}$. Por construcción, sabemos que el estabilizador de $A_{V\backslash\{v\}}$ visto como vértice de T es $A_{V\backslash\{v\}}$, y por el Lema 3.2.4, el estabilizador de $gA_{V\backslash\{v\}}$ visto como vértice de T es $gA_{V\backslash\{v\}}g^{-1}$. Por el Lema 4.2.2, todo elemento de $A_{V\backslash\{v\}} \cap \left(gA_{V\backslash\{v\}}g^{-1}\right)$ estabiliza α. Como $A_R \subseteq A_{V\backslash\{v\}}$ y $gA_Rg^{-1} \subseteq gA_{V\backslash\{v\}}g^{-1}$, entonces $A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right) \subseteq A_{V\backslash\{v\}} \cap \left(gA_{V\backslash\{v\}}g^{-1}\right)$, por lo que todo elemento de $A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right)$ estabiliza α, y en particular, a cualquiera de sus aristas. Haciendo de nuevo uso del Lema 3.2.4, como toda arista de T puede conseguirse mediante una acción sobre la arista $A_{\mathrm{lk}(v)}$, por construcción, existe un cierto $h \in A_\Gamma$ tal que

$$A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right) \subseteq hA_{\mathrm{lk}(v)}h^{-1}.$$

Entonces

$$A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right) = A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right) \cap \left(hA_{\mathrm{lk}(v)}h^{-1}\right) = \left[A_R \cap \left(hA_{\mathrm{lk}(v)}h^{-1}\right)\right] \cap \left[\left(hA_Rh^{-1}\right) \cap \left(hA_{\mathrm{lk}(v)}h^{-1}\right)\right].$$

Haciendo uso del Lema 4.2.3, podemos expresar las anteriores intersecciones $A_R \cap \left(hA_{\mathrm{lk}(v)}h^{-1}\right)$ y $\left(hA_Rh^{-1}\right) \cap \left(hA_{\mathrm{lk}(v)}h^{-1}\right)$ como intersección de dos subgrupos parabólicos de tipo $R \cap \mathrm{lk}(v)$. Como supusimos que $R \nsubseteq \mathrm{lk}(v)$, se tiene que $R \cap \mathrm{lk}(v) \subsetneq R$. Por lo tanto $A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right)$ está contenido en un subgrupo parabólico de tipo $R \cap \mathrm{lk}(v)$, lo cual es absurdo por hipótesis, pues $A_{R\cap \mathrm{lk}(v)}$ es un subgrupo parabólico estándar propio de A_Γ. Deducimos así que para todo $v \in \mathrm{vert}(\Gamma)\backslash R$ se tiene que $R \subseteq \mathrm{lk}(v)$. □

Corolario 4.2.1. *Sea Γ un grafo de Coxeter, de manera que el grupo de Artin asociado A_Γ sea par. Sea $R \subseteq \mathrm{vert}(\Gamma)$ y supongamos que existen $g \in A_\Gamma$ y $v \in \mathrm{vert}(\Gamma)\backslash R$ tales que $A_{\mathrm{vert}(\Gamma)\backslash\{v\}} \neq gA_{\mathrm{vert}(\Gamma)\backslash\{v\}}$ y $R \nsubseteq \mathrm{lk}(v)$. Entonces existen $g_1, g_2, g_3, g_4 \in A_\Gamma$ tales que*

$$A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right) = \bigcap_{k=1}^{4} \left(g_kA_{\mathrm{lk}(v)\cap R}g_k^{-1}\right).$$

Demostración. La prueba se sigue de la parte final de la demostración anterior. □

Esta última proposición será la herramienta fundamental para probar el resultado principal de esta sección. El resultado se probará para la siguiente subclase de grupos de Artin.

Definición. Llamaremos $\mathcal{C}$ a la clase de grupos de Artin pares tales que su grafo de Coxeter Γ asociado es finito y para cualquier $v \in \mathrm{vert}(\Gamma)$ que pertenezca a un triángulo, toda arista conectada con v esté etiquetada por un 2.

Podemos apreciar que todo grupo de Artin de tipo RAAG está en $\mathcal{C}$. Es más, todo grupo de Artin par cuyo grafo de Coxeter no contenga triángulos está en $\mathcal{C}$. De hecho, basándonos en el Lema 3.1 de [3] se tiene que $\mathcal{C}$ es la clase de grupos de Artin pares de tipo FC.

Antes de dar la prueba del teorema principal, necesitaremos una serie de resultados previos. De nuevo, por salirse del objetivo de este documento no se proporcionarán las demostraciones de los tres primeros, aunque pueden encontrase en la referencia adjunta en cada resultado.

Definición (Subgrupo parabólico de tipo esférico)**.** Diremos que un subgrupo parabólico es de tipo esférico si es conjugado de un subgrupo parabólico estándar de tipo esférico.

Lema 4.2.4 (Teorema 3.1 [14], generalización del Teorema 9.5 de [5])**.** *Sea S un conjunto finito y A_S un grupo de Artin de tipo FC sobre S. Si P y Q son dos subgrupos parabólicos de A_S de tipo esférico, entonces $P \cap Q$ es un subgrupo parabólico de A_S de tipo esférico.*

Lema 4.2.5 (Lema 4.2.6 [8])**.** *Sea S un conjunto finito y A_S un grupo de Artin par sobre S. Sean $R, T \subseteq S$ y $g, h \in A_S$. Entonces si $gA_Rg^{-1} \subsetneq hA_Th^{-1}$ se tiene que $R \subsetneq T$.*

Lema 4.2.6 (Lema 4.4.1 [8])**.** *Sea Γ un grafo de Coxeter y A_Γ el grupo de Artin asociado. Consideremos $R \subset \mathrm{vert}(\Gamma)$ tal que A_R es un subgrupo de Artin libre y $\mathrm{vert}(\Gamma)\backslash R = \{v\}$. Entonces, para cualquier $g \in A_\Gamma$ es $A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right)$ es un subgrupo parabólico.*

Lema 4.2.7. *Sean G y H dos grupos presentados como $G \cong \langle S_G|R_G\rangle$ y $H \cong \langle S_H|R_H\rangle$. Consideremos el conjunto de relaciones $R := \{ab = ba : a \in S_G, b \in S_H\}$. Entonces*

$$G \times H \cong \langle S_G \cup S_H|R_G \cup R_H \cup R\rangle.$$

Demostración. Llamemos $T = \langle S_G \cup S_H|R_G \cup R_H \cup R\rangle$, y consideremos el homomorfismo $\varphi : T \longrightarrow G \times H$ dado por $\varphi(a) = (a, 1)$ si $a \in S_G$ y $\varphi(b) = (1, b)$ si $b \in S_H$. Por tener T los generadores y relaciones tanto de G como de H sabemos que φ es sobreyectiva, y en consecuencia $\mathrm{Im}(\varphi) = G \times H$.

Haciendo uso del Primer Teorema de Isomorfía, se tiene que $T/\ker(\varphi) \cong \mathrm{Im}(\varphi) = G \times H$. Basta probar que $\ker(\varphi) = \{1\}$. Sea $x \in \ker(\varphi)$, entonces $\varphi(x) = (1, 1)$. Por ser x un elemento de T puede ser expresado como producto de elementos en S_G y en S_H, los cuales conmutan, por lo que podemos expresar $x = x_1x_2$, donde x_1 es un producto de elementos de S_G y x_2 es un producto de elementos en S_H. Como φ es homomorfismo, se tiene que

$$\varphi(x) = \varphi(x_1x_2) = \varphi(x_1)\varphi(x_2) = (x_1, x_2) = (1, 1).$$

Deducimos que $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$, y en consecuencia $x = 1$. Se concluye que $T \cong G \times H$. □

Podemos pasar a dar el resultado principal.

Teorema 4.2.2 (Teorema 4.3.4 [8]). *Sea Γ un grafo de Coxeter tal que su grupo de Artin asociado A_Γ pertenezca a la clase $\mathcal{C}$. Entonces para todo $R \subseteq \text{vert}(\Gamma)$ y para cualquier $g \in A_\Gamma$ se tiene que $A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right)$ es un subgrupo parabólico de A_Γ.*

Demostración. Notemos que Γ, por ser grafo de Coxeter, tiene una cantidad finita de vértices, por lo que procederemos por inducción en $n = |V|$ y $m = |R|$, siendo $V = \text{vert}(\Gamma)$. Si $A_R = A_\Gamma$, el resultado es obvio, por lo que podemos suponer que A_R es un subgrupo propio de A_Γ. Veamos algunos casos particulares:

- Si $n = 1$, entonces A_Γ no puede tener relaciones, pues estas se dan para cada par de elementos, por lo que $A_\Gamma = \langle a| \ \rangle \cong \mathbb{Z}$ y el resultado es trivial, pues V no tiene subconjuntos propios.
- En el caso de que $m = 1$, por el mismo razonamiento anterior se tiene que $A_R \cong \mathbb{Z}$. Notemos que el grupo de Coxeter asociado a A_R es $W_R \cong \langle a|a^2\rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, que es finito, por lo que A_R es de tipo esférico. Por el Lema 4.2.4, $A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right)$ es un subgrupo parabólico para cualquier Γ.
- En el caso de que $n = 2$, el único subgrupo no trivial de A_Γ se tiene que cuando $m = 1$. Por el mismo razonamiento anterior se tiene que $A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right)$ es un subgrupo parabólico.

En consecuencia, podemos asumir que $n > m \geqslant 2$. En caso de que exista un $v \in V \backslash R$ tal que $R \not\subseteq \text{lk}(v)$, se presentan dos casos:

- Si $gA_{V\backslash\{v\}} = A_{V\backslash\{v\}}$, entonces $g \in A_{V\backslash\{v\}}$. Como $R \subseteq V\backslash\{v\}$, entonces tanto A_R como gA_Rg^{-1} son subgrupos parabólicos de $A_{V\backslash\{v\}}$. Veamos que $A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right)$ es un subgrupo parabólico de $A_{V\backslash\{v\}}$ por inducción en n.

  El caso base para $n = 2$ se ha probado. Consideremos ahora el grafo Γ con n vértices y tomemos como hipótesis de inducción que el resultado es cierto para todo grafo con menos de n vértices en las condiciones anteriores. Notemos que el subgrafo de Γ, el cual tiene por vértices $V\backslash\{v\}$, tiene $n-1$ vértices, por lo que el resultado en dicho árbol es cierto. Como $R \not\subseteq \text{lk}(v)$, se tiene que $R \subseteq V\backslash\{v\}$. Deducimos que $A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right)$ es un subgrupo parabólico del subgrafo de Γ que tiene por vértices $V\backslash\{v\}$, y en consecuencia, también es subgrupo parabólico de A_Γ.
- Si $gA_{V\backslash\{v\}} \neq A_{V\backslash\{v\}}$, haciendo uso del Corolario 4.2.1 sabemos que podemos escribir $A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right)$ como intersección de cuatro subgrupos parabólicos de tipo $\text{lk}(v) \cap R \subsetneq R$. Veamos que es un subgrupo parabólico. Fijado un n, procedemos por inducción en m.

  El caso base cuando $m = 1$ se ha probado. Por hipótesis de inducción, supongámoslo anterior cierto para todo R de cardinal menor o igual a $m-1$ y tomemos R con cardinal m. Como $\text{lk}(v) \cap R \subsetneq R$, es evidente que $|\text{lk}(v) \cap R| < m$. Por el Corolario 4.2.1, existen $g_1, g_2, g_3, g_4 \in A_\Gamma$ tales que

$$A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right) = \bigcap_{k=1}^{4} \left(g_k A_{\text{lk}(v)\cap R} g_k^{-1}\right).$$

  Notemos que se ha abusado de notación, pues R representa a la vez al conjunto de generadores de A_R como a un conjunto de vértices de Γ. Si llamamos $\widetilde{R} = R \cap \text{lk}(v)$, podemos reescribir las intersecciones anteriores como

$$\left[g_1 \underbrace{\left(A_{\widetilde{R}} \cap \left(\left(g_1^{-1}g_2\right) A_{\widetilde{R}} \left(g_1^{-1}g_2\right)^{-1}\right)\right)}_{W_1} g_1^{-1}\right] \cap \left[g_3 \underbrace{\left(A_{\widetilde{R}} \cap \left(\left(g_3^{-1}g_4\right) A_{\widetilde{R}} \left(g_3^{-1}g_4\right)^{-1}\right)\right)}_{W_2} g_3^{-1}\right].$$

  Haciendo uso de la hipótesis de inducción, tanto W_1 como W_2 son subgrupos parabólicos, por lo que $g_1W_1g_1^{-1}$ y $g_3W_2g_3^{-1}$ también lo serán. Supongamos que $g_1W_1g_1^{-1}$ es de tipo T_1 y que $g_3W_1g_3^{-1}$ es de tipo T_2. El Lema 4.2.3 nos asegura que $|T_1|, |T_2| < m$. De nuevo, tenemos que

$$\left(g_1W_1g_1^{-1}\right) \cap \left(g_3W_2g_3^{-1}\right) = g_1 \left[W_1 \cap \left(\left(g_1^{-1}g_3\right) W_2 \left(g_1^{-1}g_3\right)^{-1}\right)\right] g_1^{-1},$$

  por lo que, usando nuestra hipótesis de inducción, deducimos que $\left(g_1W_1g_1^{-1}\right) \cap \left(g_3W_2g_3^{-1}\right)$ es un subgrupo parabólico. En consecuencia, $A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right)$ también lo es.

Consideremos ahora el caso en el que para cualquier $v \in V \backslash R$ se cumple que $R \subseteq \mathrm{lk}(v)$. Supongamos que $V \backslash R$ tiene k componentes conexas disjuntas. Procedemos por inducción en k.

- Supongamos que $k = 1$ y sea C_1 la única componente conexa de $V \backslash R$. Si $|C_1| = 1$, entonces $V \backslash R = \{v\}$, y como $R \subseteq \mathrm{lk}(v)$, se tiene que $\mathrm{lk}(v) = R$. Si A_R es libre, haciendo uso del Lema 4.2.6 sabemos que $A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right)$ es un subgrupo parabólico. En caso de no ser A_R libre, existen al menos dos vértices $a, b \in R$ conectados por una arista de Γ, y por ser $\mathrm{lk}(v) = R$, los vértices a, b y v forman un triángulo. Puesto que A_Γ está en $\mathcal{C}$, las aristas del triángulo a, b, v están etiquetadas con un 2, y en consecuencia, esos elementos conmutan en A_Γ. Es más, como todo elemento de R está conectado con v, por el mismo razonamiento anterior v conmuta con todo elemento de R. Deducimos que $gA_Rg^{-1} = A_R$, y por lo tanto $A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right) = A_R$.

  En caso de que $|C_1| > 1$, como todo $v \in V \backslash R$ cumple que $R \subseteq \mathrm{lk}(v)$ y C_1 es conexo, todo vértice de R que conecta con C_1 está en un triángulo. En consecuencia, toda arista que conecte un vértice de R con un vértice de $V \backslash R$ está etiquetada por un 2. Haciendo uso del Lema 4.2.7, tenemos que

  $$A_\Gamma = A_R \times A_{V \backslash R},$$

  y por tanto $gA_Rg^{-1} = A_R$, pues por lo anterior podemos escribir $g = g_1g_2$ con $g_1 \in A_R$ y $g_2 \in A_{V \backslash R}$, de forma que ambos conmutan. Entonces,

  $$gA_Rg^{-1} = (g_1g_2)A_R(g_1g_2)^{-1} = g_2A_Rg_2^{-1} = A_R.$$

  Obtenemos que, $gA_Rg^{-1} = A_R$, y por lo tanto $A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right) = A_R$.

- Supongamos que $k > 1$, y sean $C_1, \ldots, C_k$ las componentes conexas de $V \backslash R$. Supongamos que al menos una de las componentes conexas no es un único vértice. Sin pérdida de generalidad, sea C_1 dicha componente conexa. Entonces $|C_1| > 1$. De nuevo, como $R \subseteq \mathrm{lk}(v)$ para todo $v \in V \backslash R$ y C_1 es una componente conexa con al menos dos vértices, existen al menos dos vértices $a, b \in C_1$ adyacentes tales que para todo $w \in R$ los vértices a, b, w forman un triángulo, y por ende, los elementos de R conmutan con los elementos de C_1. Por lo tanto, todo vértice de R es un vértice de un triángulo, y como $R \subseteq \mathrm{lk}(v)$ para todo $v \in V \backslash R$, los elementos de R conmutan con todas las componentes conexas. Por el Lema 4.2.7 podemos escribir

  $$A_\Gamma = A_R \times A_{V \backslash R},$$

  Se tiene de nuevo que $gA_Rg^{-1} = A_R$, y por lo tanto $A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right) = A_R$.

  Supongamos que A_R no es libre. Entonces, de forma análoga al caso $|C_1| = 1$, se tiene que todo $v \in V \backslash R$ pertenece a al menos un triángulo, y se puede razonar como en el caso anterior.

  Por último, supongamos que para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ se tiene que $|C_i| = 1$ y que A_R es libre. Elegimos un $v \in V \backslash R$. Notemos que $(R \cup \{v\}) \cup (V \backslash \{v\}) = V$ y $(R \cup \{v\}) \cap (V \backslash \{v\}) = R$. Haciendo uso del Lema 4.2.1, podemos expresar

  $$A_\Gamma = A_{R \cup \{v\}} *_{A_R} A_{V \backslash \{v\}},$$

  donde $A_{R \cup \{v\}}$ es el subgrupo de A_Γ dado por el subgrafo que tiene por vértices a $R \cup \{v\}$ y $A_{V \backslash \{v\}}$ es el subgrupo de A_Γ dado por el subgrafo que tiene por vértices a $V \backslash \{v\}$. Como hemos expresado A_Γ como un producto amalgamado, consideremos el árbol de Bass-Serre T asociado a esta amalgama. Sabemos que dicho árbol, único salvo isomorfismo, viene dado por

  $$\mathrm{vert}(T) := \left(A_\Gamma / A_{R \cup \{v\}}\right) \sqcup \left(A_\Gamma / A_{V \backslash \{v\}}\right) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{arist}(T) := (A_\Gamma / A_R) \sqcup \overline{(A_\Gamma / A_R)},$$

  y que su dominio fundamental es isomorfo a un segmento, que tiene por estabilizadores de sus vértices a $A_{R \cup \{v\}}$ y a $A_{V \backslash \{v\}}$, y por estabilizador de su arista a A_R. Consideremos A_R y gA_R como aristas de T. Si $A_R = gA_R$, entonces $g \in A_R$, por lo que $A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right) = A_R$. Si $A_R \neq gA_R$, entonces existe una única geodésica α en T que conecta a A_R con gA_R vistas como aristas de T.

Sean $A_R, g_1A_R, \ldots, g_{n-1}A_R, g_nA_R$ las aristas de α. Por construcción de T se tiene que los elementos $g_k^{-1}g_{k+1}$ están o en $A_{R\cup\{v\}}$ o en $A_{V\setminus\{v\}}$ para todo $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, tomando como $g_0 = 1$ y como $g_n = g$. Por otra parte, haciendo uso del Lema 3.2.4 sabemos que el estabilizador de cada g_kA_R, visto como arista, es $g_kA_Rg_k^{-1}$, visto como grupo. Haciendo uso del Lema 4.2.2, $A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right)$ estabiliza a α. Por otra parte, si un elemento estabiliza a toda la geodésica, en particular, estabiliza cada arista, por lo que

$$A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right) = \bigcap_{k=0}^{n} \left(g_kA_Rg_k^{-1}\right).$$

Notemos que podemos reescribir las intersecciones tal que

$$\left(g_kA_Rg_k^{-1}\right) \cap \left(g_{k+1}A_Rg_{k+1}^{-1}\right) = g_k\left[A_R \cap \left(\left(g_k^{-1}g_{k+1}\right)A_R\left(g_k^{-1}g_{k+1}\right)^{-1}\right)\right]g_k^{-1}.$$

Como vimos antes, $g_k^{-1}g_{k+1}$ ha de ser un elemento o de $A_{R\cup\{v\}}$ o de $A_{V\setminus\{v\}}$. Supongamos que $g_k^{-1}g_{k+1} \in A_{R\cup\{v\}}$. Como A_R es un subgrupo libre de A_Γ, también lo es como subgrupo de $A_{R\cup\{v\}}$. Además $(R \cup \{v\})\setminus R = \{v\}$. Haciendo uso del Lema 4.2.6 deducimos que

$$A_R \cap \left(\left(g_k^{-1}g_{k+1}\right)A_R\left(g_k^{-1}g_{k+1}\right)^{-1}\right)$$

es un subgrupo parabólico de $A_{R\cup\{v\}}$, y por lo tanto, de A_Γ. En consecuencia

$$\left(g_kA_Rg_k^{-1}\right) \cap \left(g_{k+1}A_Rg_{k+1}^{-1}\right)$$

también es un subgrupo parabólico de A_Γ. En el caso de que $g_k^{-1}g_{k+1} \in A_{V\setminus\{v\}}$, procedemos por inducción en $n = |V|$. Llamemos $\widetilde{g_k} := g_k^{-1}g_{k+1}$. Si $n = 2$ se ha probado al comienzo de la demostración. Supongamos como hipótesis de inducción que el resultado es cierto para todo grafo con menos de n vértices cumpliendo las condiciones anteriores. Debido a que hemos tomado $v \in V\setminus R$, es obvio que $R \subseteq V\setminus\{v\}$. Ahora, $|V\setminus\{v\}| = n-1$ y $\widetilde{g_k} \in A_{V\setminus\{v\}}$. Deducimos que $A_R \cap \left(\widetilde{g_k}A_R\widetilde{g_k}^{-1}\right)$ es un subgrupo parabólico del grupo asociado al subgrafo de Γ que tiene por vértices a $V\setminus\{v\}$, y por lo tanto, es un subgrupo parabólico de A_Γ.

Obtenemos en cualquier caso que $A_R \cap \left(\widetilde{g_k}A_R\widetilde{g_k}^{-1}\right)$ es un subgrupo parabólico. En consecuencia, se deduce por inducción en la longitud de la geodésica que $A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right)$ es un subgrupo parabólico.

Hemos cubierto todos los posibles casos, y en todos ellos se obtiene que $A_R \cap \left(gA_Rg^{-1}\right)$ es un subgrupo parabólico. □

Corolario 4.2.2 (Corolario 4.3.5 [8])**.** *Sea Γ un grafo de Coxeter tal que su grupo de Artin asociado A_Γ pertenezca a la clase $\mathcal{C}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $P_1, \ldots, P_n$ subgrupos parabólicos de A_Γ. Entonces*

$$\bigcap_{k=1}^{n} P_k$$

es un subgrupo parabólico de A_Γ.

Demostración. Procedamos por inducción. Sean $P_k = g_kA_{R_k}g_k^{-1}$ con $R_k \subseteq \mathrm{vert}(\Gamma)$ y $g_k \in A_\Gamma$ para $k = 1, \ldots, n$. Si $n = 1$ es trivial. Si $n = 2$, gracias al Lema 4.2.3, podemos expresar

$$P_1 \cap P_2 = \left(h_1A_{R_1\cap R_2}h_1^{-1}\right) \cap \left(h_2A_{R_1\cap R_2}h_2^{-1}\right) = h_1\left[A_{R_1\cap R_2} \cap \left(\left(h_1^{-1}h_2\right)A_{R_1\cap R_2}\left(h_1^{-1}h_2\right)^{-1}\right)\right]h_1^{-1}.$$

Haciendo uso del Teorema 4.2.2 sabemos que $A_{R_1\cap R_2} \cap \left(\left(h_1^{-1}h_2\right)A_{R_1\cap R_2}\left(h_1^{-1}h_2\right)^{-1}\right)$ es un subgrupo parabólico, por lo que $P_1 \cap P_2$ también lo es. Por hipótesis de inducción, supongamos el resultado cierto hasta $n-1$. Notemos que

$$\bigcap_{k=1}^{n} P_k = P_n \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} P_k\right).$$

Como $\bigcap_{k=1}^{n-1} P_k$ es un subgrupo parabólico, obtenemos de nuevo un caso análogo al de $n = 2$. Se concluye así el resultado. □

Concluimos la sección dado respuesta a la pregunta planteada al comienzo para los grupos de Artin en la clase $\mathcal{C}$.

Corolario 4.2.3 (Corolario 4.3.6 [8]). *Sea Γ un grafo de Coxeter tal que su grupo de Artin asociado A_Γ pertenezca a la clase $\mathcal{C}$. Entonces el conjunto de subgrupos parabólicos de A_Γ es estable bajo la operación de intersección.*

Demostración. Sea $\mathcal{Q}$ el conjunto de los subgrupos parabólicos de A_Γ. Notemos que $\mathcal{Q}$ es numerable, pues al ser Γ un grafo de Coxeter, $\mathrm{vert}(\Gamma)$ es finito, y por lo tanto hay una cantidad finita de subconjuntos de $\mathrm{vert}(\Gamma)$, y por tener generadores finitos, A_Γ tiene una cantidad numerable de elementos. En consecuencia, al ser los elementos de $\mathcal{Q}$ de la forma gA_Rg^{-1} con $g \in A_\Gamma$ y $R \subseteq \mathrm{vert}(\Gamma)$, se deduce que $\mathcal{Q}$ es numerable.

Consideremos I un conjunto arbitrario de índices. Queremos probar que

$$Q = \bigcap_{\substack{P_k \in \mathcal{Q} \\ k \in I}} P_k$$

es un subgrupo parabólico de A_Γ. Si I es finito, haciendo uso del Corolario 4.2.2 se tiene que Q es un subgrupo parabólico de A_Γ. Supongamos que I es infinito. Entonces, podemos asumir que $I = \mathbb{N}$. Podemos reescribir la expresión como

$$Q = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} P_k = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{i \leqslant k} P_i \right).$$

Denotemos $Q_k = \bigcap_{i \leqslant k} P_i$. Podemos apreciar que cada Q_k es intersección finita de subgrupos parabólicos, por lo que por el Corolario 4.2.2, sabemos que Q_k es un subgrupo parabólico para todo $k \in \mathbb{N}$. Podemos notar también que podemos concatenar la sucesión $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ como

$$Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq Q_3 \supseteq \cdots .$$

Como tenemos una cantidad finita de subconjuntos de $\mathrm{vert}(\Gamma)$, se tiene una cantidad finita de tipos de subgrupos parabólicos. Haciendo uso del Lema 4.2.5, si tomamos $Q_k = g_k A_{R_k} g_k^{-1}$ para cada $k \in \{1, 2, \dots\}$ se tiene que $R_{k+1} \subsetneq R_k$. Como $\mathrm{vert}(\Gamma)$ es finito la cadena se estabiliza en, a lo más, $|\mathrm{vert}(\Gamma)| + 1$ eslabones. Haciendo uso del Corolario 4.2.2 se concluye la prueba. $\square$

Bibliografía

[1] Y. Antolín and A. Minasyan, *Tits alternatives for graph products*, 2011.

[2] E. Artin, *Theory of braids*, Annals of Mathematics, 48 (1947), pp. 101–126.

[3] R. Blasco-Garcia, C. Martinez-Perez, and L. Paris, *Poly-freeness of even artin groups of fc type*, 2017.

[4] M. A. Blufstein, *Parabolic subgroups of two-dimensional artin groups and systolic-by-function complexes*, 2021.

[5] M. Cumplido, V. Gebhardt, J. González-Meneses, and B. Wiest, *On parabolic subgroups of artin–tits groups of spherical type*, Advances in Mathematics, 352 (2019), pp. 572–610.

[6] M. Cumplido, A. Martin, and N. Vaskou, *Parabolic subgroups of large-type artin groups*, 2020.

[7] A. J. Duncan, I. V. Kazachkov, and V. N. Remeslennikov, *Parabolic and quasiparabolic subgroups of free partially commutative groups*, 2007.

[8] I. Foniqi, *Results on Artin and twisted Artin groups*, PhD dissertation, Università degli Studi di Milano-Bicocca, 2020/21.

[9] E. Godelle and L. Paris, *Basic questions on Artin-Tits groups*, in Configuration Spaces, Pisa, 2012, Scuola Normale Superiore, pp. 299–311.

[10] T. Haettel, *Lattices, injective metrics and the $k(\pi, 1)$ conjecture*, 2021.

[11] P. R. Halmos, *Naive Set Theory*, Martino Fine Books, Mansfield Centre, 2011.

[12] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge; New York, 2002.

[13] C. Löh, *Geometric group theory: an introduction*, Springer Berlin Heidelberg, New York, NY, 2017.

[14] R. Morris-Wright, *Parabolic subgroups of artin groups of fc type*, 2019.

[15] P. Möller, L. Paris, and O. Varghese, *On parabolic subgroups of artin groups*, 2022.

[16] J. P. Serre, *Trees*, Springer monographs in mathematics, Springer, Berlin; New York, corr. 2nd print ed., 2003.

[17] J. Tits, *Normalisateurs de tores i. groupes de coxeter étendus*, Journal of Algebra, 4 (1966), pp. 96–116.

[18] H. van der Lek, *The homotopy type of complex hyperplane complements*, Katholieke Universiteit te Nijmegen, 1983.