



# **LAS CONJETURAS DE TAIT**

**Jesús Baena Gómez**





# **LAS CONJETURAS DE TAIT**

Jesús Baena Gómez

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de  
Máster Universitario en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

Marithania Silvero Casanova



# Índice general

<b>Abstract</b>	<b>1</b>
<b>Resumen</b>	<b>2</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>7</b>
2.1. Nudos y enlaces . . . . .	7
2.2. Diagramas . . . . .	9
2.3. Movimientos de Reidemeister . . . . .	16
2.4. Invariantes . . . . .	18
<b>3. Polinomio de Jones</b>	<b>21</b>
<b>4. Primera conjetura de Tait</b>	<b>35</b>
4.1. Igualdad en el número de cruces de los diagramas alternantes . . . . .	35
4.2. Prueba de la Primera conjetura de Tait . . . . .	42
<b>5. Segunda conjetura de Tait</b>	<b>47</b>
5.1. Superficies de Seifert de un enlace y signatura . . . . .	47

**II** LAS CONJETURAS DE TAIT

5.2. Matriz de Goeritz . . . . .	59
5.3. Matrices de tipo especial . . . . .	65
5.4. Prueba de la Segunda conjetura de Tait . . . . .	67
<b>6. Tercera conjetura de Tait</b>	<b>73</b>
6.1. Conceptos y resultados previos . . . . .	74
6.2. Prueba de la Tercera conjetura de Tait . . . . .	80
<b>Bibliografía</b>	<b>83</b>

# Abstract

In the late 19th century, Peter Guthrie Tait asserted three properties of alternating link diagrams, which are known today as Tait's conjectures. These assertions remained open for about 100 years until the discovery of a new link invariant, the Jones polynomial, in 1985.

In 1986, L. H. Kauffman, K. Murasugi and M. B. Thistlethwaite gave, independently, the proof of the Tait's First conjecture. Also in the same year, Tait's Second conjecture was proven independently by Murasugi and Thistlethwaite. Finally, in 1993, W. Menasco and Thistlethwaite proved the Tait's Third conjecture.

In 2017, J. E. Greene gave the first geometric proof of the Tait's Second conjecture. Using his work, in 2020, the first geometric proof of the Tait's Third conjecture was given by T. Kindred.

In this work we present a proof for each of the Tait's conjectures. The exposition is based on Kauffman's proof of the Tait's First conjecture, Murasugi's proof of the Tait's Second conjecture and Kindred's proof of the Tait's Third conjecture.

# Resumen

A finales del siglo XIX, Peter Guthrie Tait conjeturó tres propiedades que debían cumplir los diagramas alternantes, que pasaron a conocerse como las Conjeturas de Tait. Estas afirmaciones estuvieron sin demostrar durante aproximadamente 100 años, hasta el descubrimiento de un nuevo invariante de enlace, el polinomio de Jones, en 1985.

En 1986, L. H. Kauffman, K. Murasugi y M. B. Thistlethwaite probaron, de manera independiente, la Primera conjetura de Tait. En ese mismo año, Murasugi y Thistlethwaite probaron, también de manera independiente, la Segunda conjetura de Tait. Finalmente, la Tercera conjetura de Tait fue probada en 1993 por W. Menasco y Thistlethwaite.

En 2017, J. E. Greene dio la primera prueba totalmente geométrica de la Segunda conjetura. Usando este trabajo, T. Kindred demostró también de manera completamente geométrica la Tercera conjetura de Tait.

En este trabajo se muestran las pruebas de las conjeturas de Tait (hoy convertidas en teoremas). Para ello, nos basaremos en la prueba de Kauffman de la Primera conjetura de Tait, la prueba de Murasugi de la Segunda conjetura de Tait y la prueba de Kindred de la Tercera conjetura de Tait.



# 1 | Introducción

Le teoría de nudos es el campo de la topología que estudia los nudos matemáticos, y tiene aplicaciones en otras áreas como la biología, donde se usa para el análisis del ADN. Un nudo es un subconjunto de puntos en  $\mathbb{R}^3$  (o en la 3-esfera  $S^3$ ) homeomorfo a la circunferencia  $S^1$ . También se consideran los enlaces, que son uniones disjuntas de nudos (en particular, todo nudo es un enlace). En ocasiones, en lugar de trabajar directamente con los enlaces, se usan diagramas. Un diagrama es una proyección regular en el plano de un enlace, donde se indica en cada punto doble qué arco es el superior y cuál es el inferior (Figura 1.1). En la teoría de nudos, el problema principal consiste en determinar si dos enlaces dados son equivalentes, esto es, si existe una isotopía ambiente que transforme uno en el otro.



Figura 1.1: Nudo trébol (a) y un diagrama suyo (b).

La teoría de nudos tiene su origen a finales del siglo XIX, cuando el matemático y físico escocés William Thomson (Lord Kelvin) conjeturó que los átomos eran vórtices anudados en una sustancia llamada éter, donde cada átomo se correspondía con un tipo de nudo distinto. En respuesta a esta idea, el matemático y físico escocés Peter Guthrie Tait realizó el primer intento de clasificarlos, siendo este el inicio de la teoría de nudos. A pesar de que la teoría de Kelvin fue eventualmente rechazada junto con la idea del éter, Tait continuó con su investigación y la teoría de nudos continuó desarrollándose como una teoría matemática.

Tait, en colaboración con Thomas Kirkman, avanzaron en el problema de la enumeración de los nudos. Para ello, usaron los grafos, que eran objetos más estudiados en aquella época. Kirkman había realizado una clasificación de los grafos hasta cierto número de aristas. Tait usó esta clasificación y asoció un nudo a cada grafo, con la idea de obtener así todos los nudos. El procedimiento que usó se describe a continuación.

Dado un grafo, se asocia a cada arista un cruce, de manera que si recorremos la arista en cualquier sentido, el arco superior del cruce queda siempre a la izquierda. Una vez asignados todos los cruces, unimos los arcos respetando el dibujo del grafo. Un ejemplo lo podemos ver en la Figura 1.2. Sin embargo, mediante este procedimiento no obtenemos todos los nudos, ya que este método solo genera diagramas alternantes (esto es, al recorrer el diagrama, recorreremos los cruces alternando entre ir por el arco superior e ir por el arco inferior). Usando este método, Tait consiguió clasificar los nudos alternantes hasta 10 cruces [17, 18, 19]. Posteriormente y de manera independiente, Charles Newton Little consiguió enumerar todos los nudos de hasta 10 cruces, incluyendo alternantes y no alternantes.

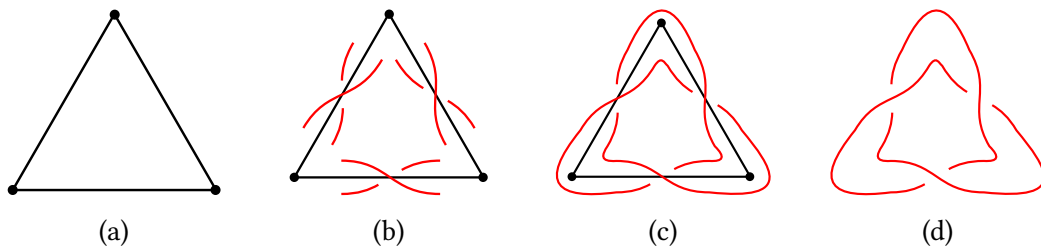


Figura 1.2: Procedimiento para obtener el diagrama de un nudo alternante a partir de un grafo. En este ejemplo se obtiene el nudo trébol.

La clasificación hecha por Tait y Little era casi perfecta. No había ninguna omisión y solo contenía una repetición, la cual fue descubierta en 1973 por Ken Perko. Se trataba de dos diagramas de 10 cruces que representaban el mismo nudo. Estos dos diagramas se conocen como el par de Perko [13].

En 1976, Dale Rolfsen hizo una tabla de nudos de hasta los 10 cruces usando la clasificación que hicieron Tait y Little [15]. Introdujo también una nomenclatura es la que usamos hoy en día. A cada nudo se le asocia una etiqueta de la forma  $c_n$ , donde  $c$  es el menor número de cruces tomado de entre todos los diagramas del nudo (este valor recibe el nombre de número de cruce), y  $n$  es un índice que le da un orden entre todos los nudos con el mismo número de cruce. Por ejemplo, el nudo trébol tiene la etiqueta  $3_1$ . Esta tabla, al está basada en el trabajo de Tait y Little, contiene el par de Perko, etiquetados como  $10_{161}$  y  $10_{162}$ .

Uno de los problemas a la hora de crear las tablas de nudos es comprobar que no aparezcan diagramas distintos que representen el mismo nudo. Para poder identificar estas repeticiones, Tait introdujo tres principios básicos que se conocen en la actualidad como las Conjeturas de Tait, tema principal de este trabajo, y las cuales estuvieron sin demostrar durante aproximadamente 100 años. A pesar de que ya están demostradas y, por tanto, son teoremas, se les sigue llamando conjeturas por razones históricas. A continuación enunciamos estas tres conjeturas.

**| Conjetura 1 (Primera conjetura de Tait).** *Un diagrama alternante, reducido y conexo de un enlace tiene el menor número posible de cruces de entre todos los diagramas que representan ese enlace.*

**| Conjetura 2 (Segunda conjetura de Tait).** *Dos diagramas alternantes, reducidos y conexos que representan un mismo enlace tienen la misma contorsión.*

**| Conjetura 3 (Tercera conjetura de Tait).** *Dos diagramas alternantes, reducidos y conexos de un mismo enlace primo están relacionados por un número finito de flypes.*

Como hemos mencionado antes, el problema principal de la teoría de nudos consiste en determinar si dos enlaces dados son equivalentes. En 1927, Kurt Werner Friedrich Reidemeister demostró que dos diagramas representan el mismo enlace si y solo si están relacionados por una sucesión finita de transformaciones conocidas como movimientos de Reidemeister [14]. Sin embargo, este resultado no da una solución práctica al problema de equivalencia. No obstante, existen otras formas de ver que dos diagramas no representan el mismo enlace como, por ejemplo, los invariantes, que son funciones cuyo valor depende solo de la clase de equivalencia del enlace. Un tipo de invariante son los invariantes polinómicos. El primer invariante de este tipo fue el polinomio de Alexander [1], descubierto por James Waddell Alexander en 1928.

En 1984, Vaughan Jones descubre un nuevo invariante polinómico, conocido como polinomio de Jones [6]. Se trata de un polinomio de Laurent en una variable con coeficientes enteros. Su descubrimiento supuso una revolución en la teoría de nudos.

Al poco tiempo de descubrirse el polinomio de Jones, se demostraron la Primera y la Segunda conjetura de Tait, usando propiedades de este. La Primera conjetura de Tait fue probada de manera independiente en 1986 por Louis Kauffman [7], Kunio Murasugi [11] y Morwen Thistlethwaite [20]. La Segunda conjetura de Tait fue demostrada también en 1986 y de manera independiente por Kunio Murasugi [12] y Morwen Thistlethwaite [21]. Para la demostración de la Tercera conjetura, sin embargo, tuvieron que pasar más años. Fue demostrada conjuntamente por William Menasco y Morwen Thistlethwaite en 1993 [9]. En la demostración, además de usar propiedades

del polinomio de Jones, se usan propiedades del polinomio de Kauffman y propiedades de las superficies que se obtienen al aplicar una coloración de ajedrez a un diagrama. Ninguna de estas pruebas es completamente geométrica. De hecho, en [9] Menasco y Thistlethwaite dejan abierta en su artículo la pregunta de si existe tal prueba para la Tercera conjetura de Tait.

En 2017, Joshua Greene demuestra de manera completamente geométrica la Segunda conjetura de Tait y la invarianza del número de cruces de los diagramas alternates, conexos y reducidos [5]. Usando el trabajo de Greene, Thomas Kindred prueba en 2020, también de forma completamente geométrica, la Tercera conjetura de Tait [8], respondiendo así a la pregunta planteada por Menasco y Thistlethwaite. Sin embargo, a pesar de que la Primera conjetura de Tait fue la primera en demostrarse, todavía no existe a día de hoy una prueba completamente geométrica de esta.

El objetivo de este trabajo es presentar una prueba de las Conjeturas de Tait. En el Capítulo 2 explicaremos los conceptos básicos en la teoría de nudos, mientras que en el Capítulo 3 nos centraremos en el polinomio de Jones, el cual fue esencial para la demostración de las conjeturas. El contenido de estos capítulos iniciales está tomado principalmente de [2]. Los siguientes tres capítulos (Capítulo 4, Capítulo 5 y Capítulo 6) están centrados en las demostraciones de las Conjeturas de Tait. Para la demostración de la Primera conjetura de Tait nos basaremos en la prueba de Kauffman [7], mientras que para la Segunda nos basaremos en la de Murasugi [12]. Para la Tercera conjetura de Tait, en lugar de tomar la demostración original dada por Menasco y Thistlethwaite, nos basaremos en la de Kindred [8].

Además, se han completado algunas pruebas. Por ejemplo, se han demostrado los resultados relacionados con el polinomio de Jones (Proposición 3.14, Teorema 3.16), y se han escrito los detalles de algunas pruebas que se dejaban indicados, como ocurre en la demostración de la Segunda conjetura de Tait. También se han añadido ejemplos para ilustrar definiciones y resultados. Todos los dibujos han sido realizados con Inkscape.

## 2 | Preliminares

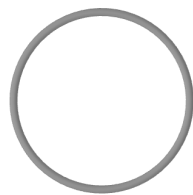
En este capítulo trataremos las ideas básicas que usaremos en el resto del trabajo. Para ello, hemos consultado [2] y [7].

### 2.1 Nudos y enlaces

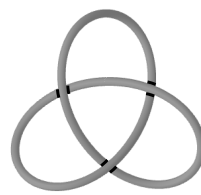
La teoría de nudos es el campo de la topología que estudia los nudos matemáticos. La idea intuitiva de nudo matemático es una cuerda sin grosor anudada y en la que pegamos posteriormente los extremos entre sí.

**Definición 2.1.** *Un nudo  $K \subset \mathbb{R}^3$  es un subconjunto de puntos homeomorfo a la circunferencia  $S^1$ .*

En la Figura 2.1 se pueden apreciar algunos ejemplos de nudos.



(a) Nudo trivial.



(b) Nudo trébol.

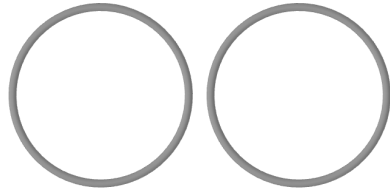
Figura 2.1

Podemos generalizar la idea de nudo y considerar colecciones de estos.

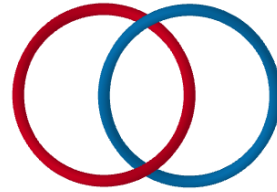
**Definición 2.2.** *Un enlace es una unión disjunta finita de nudos:  $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ . Cada nudo  $K_i$  se llama componente del enlace. El número de componentes de un enlace,  $n$ , se llama multiplicidad del enlace y lo denotamos  $\mu(L)$ .*

En particular, los nudos son enlaces de una única componente.

En la Figura 2.2 podemos observar el enlace trivial de 2 componentes y el enlace de Hopf. Llamamos a un enlace trivial si todas sus componentes son nudos triviales y no están enlazadas dos a dos. El enlace de Hopf no es trivial.



(a) Enlace trivial de 2 componentes.



(b) Enlace de Hopf.

Figura 2.2

Queremos que los enlaces sean flexibles. Si podemos deformar un enlace en otro, entonces decimos que esos enlaces son equivalentes. Un primer enfoque para modelar esta deformación es mediante una homotopía  $h : X \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde  $X \subset \mathbb{R}^3$  e  $I = [0, 1]$ . Denotamos por  $h_t : X \times \{t\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  a la restricción de  $h$  al nivel  $t \in I$ . El problema de definir así la relación de equivalencia es que un nudo podría pasar a través de sí mismo y, entonces, todos los nudos serían equivalentes entre sí, pues cada nudo sería equivalente a la circunferencia  $S^1$ . Para solucionar esto, debemos imponer que  $h_t$  sea biyectiva para todo  $t \in I$ . Es decir, que sea una isotopía.

Aún así, esto tampoco es suficiente, pues todos los nudos son isotópicos a una circunferencia. Para comprenderlo, podemos imaginar el nudo como una cuerda la cual estiramos, haciendo la parte anudada cada vez más pequeña, hasta que se convierte en un punto y desaparece. Esto lo podemos ver en la Figura 2.3.

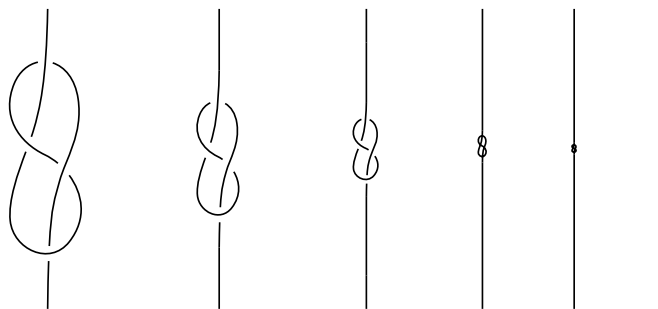


Figura 2.3: Todos los nudos mostrados son isotópicos.

Para solucionar esto, exigimos que la isotopía deforme también el espacio  $X$  consigo. Esta idea queda recogida en el concepto de isotopía ambiente. Esto es, una isotopía

que actúa sobre todo el espacio, en lugar de solo sobre el nudo.

**| Definición 2.3.** *Dos enlaces  $L_1$  y  $L_2$  son equivalentes si existe una isotopía ambiente  $h : \mathbb{R}^3 \times [0, 1]$  tal que  $h(L_1, 0) = L_1$  y  $h(L_1, 1) = L_2$ .*

Ser ambiente isotópico es una relación de equivalencia. Cada clase de equivalencia recibe el nombre de tipo de enlace. Abusando de la terminología, aplicamos la palabra enlace para hacer referencia también a toda una clase de equivalencia. Por ejemplo, al decir que dos enlaces son distintos, queremos decir que son de distinto tipo, es decir, que pertenecen a distintas clases de equivalencias.

## 2.2 Diagramas

Los enlaces son objetos en  $\mathbb{R}^3$ . En ocasiones, para visualizarlos y manipularlos es conveniente proyectarlos en el plano. Sin embargo, una proyección no nos da la información suficiente para recrear el enlace, pues perdemos información sobre la altura de este en los puntos dobles. Esto lo podemos observar en la Figura 2.4. Tenemos que modificar la proyección para añadir esa información que nos falta y poder recrear el enlace. Esto es lo que se conoce como diagrama.

Para representar enlaces, hay proyecciones que tienen mejores propiedades que otras. Si  $L$  es un enlace y  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una proyección de este, decimos que un punto  $x \in \pi(L)$  es regular si su preimagen es única, y singular en caso contrario. Si  $|\pi^{-1}(x)| = 2$  entonces decimos que  $x$  es un punto doble. Para que la proyección sea lo más clara posible, estamos interesados en aquellas que tienen un número finito de puntos singulares. Es decir, aquellas en las que todos los puntos singulares están aislados. Además, queremos evitar puntos de tangencia y puntos singulares de orden mayor o igual a 3.

Decimos que una proyección es regular si tiene un número finito de puntos singulares y todos ellos son puntos dobles con direcciones transversas. Este tipo de proyecciones son las que nos interesan. En la Figura 2.4 podemos ver un ejemplo.

Como ya hemos comentado antes, dado una proyección regular, no podemos recrear el enlace original. En los puntos dobles no hay información suficiente para saber qué arcos van ‘por arriba’ o ‘por debajo’. Si una proyección tiene  $n$  puntos dobles, potencialmente podemos construir  $2^n$  enlaces, según la elección de qué arco va ‘por arriba’ o ‘por debajo’ en cada punto doble (aunque algunos de estos enlaces podrían

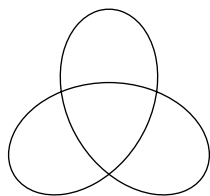
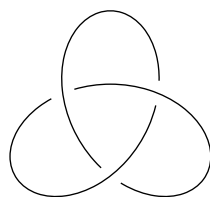


Figura 2.4: Proyección regular de algún nudo.

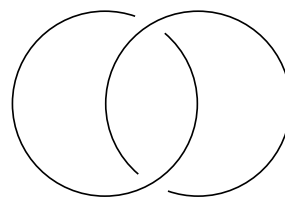
repetir tipo entre sí). Si en la proyección indicamos de alguna manera qué arco pasa por encima de cuál en cada punto de intersección, entonces podemos recuperar el enlace original. Los diagramas son proyecciones que tienen esta información.

**Definición 2.4.** *Un diagrama de un enlace  $L$  es la imagen de una proyección regular de  $L$  que tiene información relativa a la altura en cada uno de los puntos dobles. Esta información la representamos mediante una discontinuidad en el arco que está más lejos del punto de proyección. Los puntos dobles se llaman cruces en el diagrama.*

En la Figura 2.5 se muestra un diagrama del nudo trébol y del enlace de Hopf, mostrados en la Figura 2.1b y la Figura 2.2b, respectivamente.



(a) Nudo trébol.



(b) Enlace de Hopf.

Figura 2.5: Ejemplos de diagramas.

Resulta evidente que todo enlace puede representarse por un diagrama. De hecho, todo enlace tiene asociados infinitos diagramas, según el punto de proyección y la forma en que el enlace esté embebido en  $\mathbb{R}^3$ . Algunos ejemplos de diagramas del nudo trivial los podemos ver en la Figura 2.6. El hecho de que un enlace pueda tener infinitos diagramas nos lleva a la definición de diagramas equivalentes.

**Definición 2.5.** *Dos diagramas son equivalentes si representan enlaces equivalentes.*

Los diagramas pueden agruparse en familias, según algunas propiedades. Algunas familias de diagramas dan lugar a familias de enlaces. A continuación definimos algunas de estas familias.



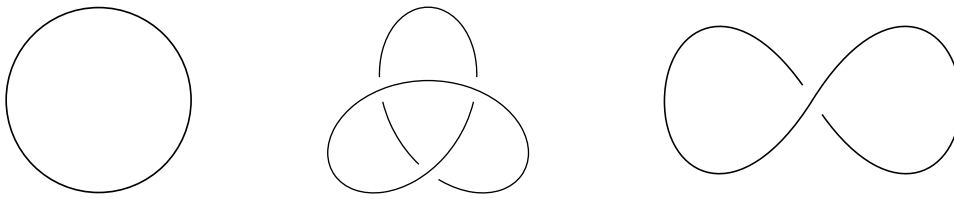


Figura 2.6: Distintos diagramas del nudo trivial.

**Definición 2.6.** *Un diagrama es conexo si su proyección asociada es conexa. Un diagrama no conexo se dice que es separado. Un enlace es separado si existe un diagrama separado que lo representa.*

Un ejemplo de enlace separado es el enlace trivial de dos componentes. En la Figura 2.7 podemos ver dos diagramas de este enlace, uno de ellos conexo y el otro separado.

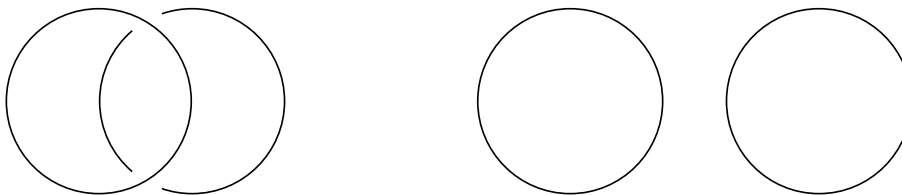


Figura 2.7: Diagramas del enlace trivial de dos componentes.

**Definición 2.7.** *Un diagrama es reducible si su proyección tiene un vértice de corte. Esto significa que es posible encontrar una circunferencia en el plano del diagrama de manera que su intersección en el diagrama es, exactamente, un punto de cruce. Estos cruces reciben el nombre de cruces inútiles o ineficaces, ya que pueden eliminarse fácilmente, como podemos ver en la Figura 2.8. Un diagrama sin cruces ineficaces se llama reducido.*



Figura 2.8: Estos dos diagramas representan el mismo enlace. El cruce  $c$  es ineficaz.

**| Definición 2.8.** Decimos que un diagrama es *alternante* si, al recorrer cada componente del diagrama, recorreremos los cruces alternando entre ir por el arco superior e ir por el arco inferior. Un enlace es *alternante* si existe un diagrama alternante que lo representa.

El sentido en el que recorremos las componentes y el orden de estas no influye en determinar si un diagrama es alternante o no. Además, que un enlace tenga un diagrama no alternante no implica que el enlace no sea alternante, ya que podría existir otro diagrama que sí fuese alternante. Por ejemplo, el nudo trébol es alternante, ya que el diagrama mostrado en la Figura 2.9a es alternante, aunque tenga otros diagramas no alternantes (por ejemplo el de la Figura 2.9b).

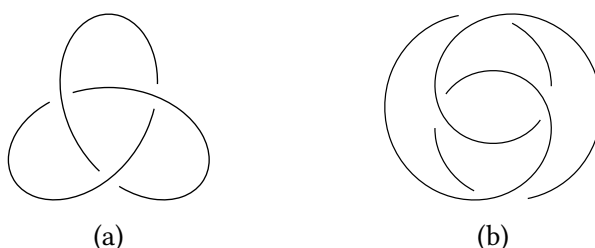


Figura 2.9: Dos diagramas representando el nudo trébol.

Los nudos (y diagramas) alternantes han sido muy estudiados y se conocen muchas de sus propiedades topológicas. El tema de este trabajo, las Conjeturas de Tait, trata propiedades de este tipo de diagramas.

Una vez hemos visto algunas familias de diagramas, vamos a definir el concepto de orientación. Los nudos y los enlaces pueden estar orientados. Para orientar un nudo, elegimos una de las dos direcciones posibles a lo largo de este. Para orientar un enlace, orientamos cada una de sus componentes. Dado un enlace orientado  $L$ , podemos invertir la orientación de cada una de sus componentes. El enlace con la orientación opuesta recibe el nombre de enlace opuesto de  $L$  y se denota por  $-L$ .

Los diagramas también pueden estar orientados, ya sea porque le demos una orientación de la misma forma que con los enlaces o porque al proyectar herede la orientación del enlace. En un diagrama orientado podemos clasificar los cruces en positivos y negativos. En un cruce positivo, si recorremos el arco superior en el sentido asignado por la orientación, el arco inferior está orientado hacia la izquierda, mientras que en uno negativo, el arco inferior está orientado a la derecha, como se muestra en la Figura 2.10. Es fácil ver que si invertimos la orientación de un diagrama, el signo de los cruces no cambia.

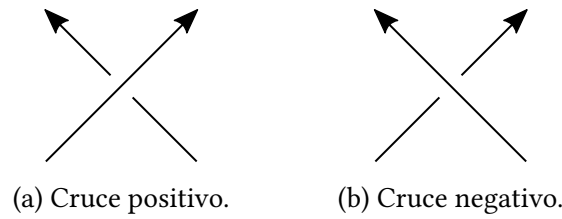


Figura 2.10

Si  $D$  es un diagrama orientado, podemos asociar a cada cruce  $c$  de  $D$  un valor entero de la siguiente forma.

$$\varepsilon(c) = \begin{cases} +1 & \text{si } c \text{ es un cruce positivo.} \\ -1 & \text{si } c \text{ es un cruce negativo.} \end{cases}$$

A partir de esta asignación de valores, podemos definir la contorsión (o *writhe*) de  $D$ .

**Definición 2.9.** Sea  $D$  un diagrama orientado. La contorsión de  $D$ ,  $w(D)$ , se define como

$$w(D) = \sum_{c \in D} \varepsilon(c),$$

donde  $c \in D$  significa 'c es un cruce de  $D$ '.

Es decir, la contorsión de un diagrama  $D$  se calcula como la diferencia entre el número de cruces positivos y el número de cruces negativos de  $D$ . Se puede ver que este valor depende del diagrama que usemos para representar un enlace. Por ejemplo, en la Figura 2.6 aparecen tres diagramas del nudo trivial, pero la contorsión del diagrama de la izquierda es 0, el del diagrama del centro es  $-1$  y el del diagrama de la derecha es 1.

Volviendo a las familias de diagramas, podemos definir nuevas familias a partir de los diagramas orientados. A continuación definimos los diagramas positivos y negativos.

**Definición 2.10.** Si en un diagrama orientado todos los cruces son positivos, decimos que el diagrama es positivo. Un enlace orientado es positivo si existe un diagrama positivo que lo representa. De manera similar, si en un diagrama orientado todos los cruces son negativos, decimos que el diagrama es negativo, y un enlace es negativo si existe un diagrama negativo que lo representa.

Por ejemplo, el nudo trébol de la Figura 2.11a es un enlace negativo.

Definimos a continuación la familia de diagramas descendentes y ascendentes.

**Definición 2.11.** *Un diagrama de un nudo es descendente si es posible elegir un punto inicial y una orientación tal que si recorremos el diagrama partiendo del punto inicial siguiendo la orientación elegida, cada vez que pasamos por un cruce por primera vez, lo hacemos recorriendo el arco superior. Para diagramas de enlaces, hay que elegir un punto inicial y una orientación para cada componente. Las componentes se recorren según un orden asignado. De manera similar, un diagrama es ascendente si cada vez que pasamos por un cruce por primera vez, lo hacemos recorriendo el arco inferior.*

En la Figura 2.11b podemos ver un ejemplo de diagrama descendente. Sin embargo, estas familias de diagramas no dan lugar a nuevas familias de enlaces, como podemos ver por el siguiente resultado.

**Lema 2.12.** Un diagrama descendente o ascendente representa el enlace trivial.

**Demostración.** Sea  $D$  un diagrama descendente de un nudo  $K$ . Por definición, existe un punto inicial  $p$  en  $D$  y una orientación satisfaciendo las condiciones de la Definición 2.4. Si consideramos el punto correspondiente a  $p$  en  $K$ , podemos tirar de él hacia arriba, deformando el nudo y levantándolo. Cuando lo hayamos levantado por completo, todos los cruces habrán desaparecido, quedando el nudo trivial. Si en lugar de un nudo tenemos un enlace, la idea es similar. En este caso, tenemos que levantar las componentes según el orden asignado en la definición.

La demostración para diagramas ascendentes es análoga. |

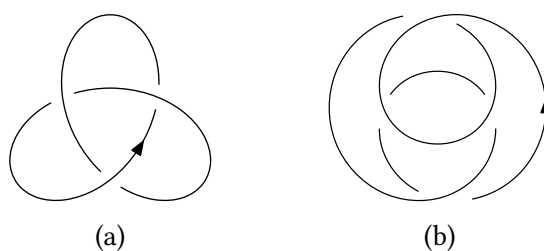


Figura 2.11: A la izquierda, un diagrama negativo. A la derecha, un diagrama descendente, que representa el nudo trivial. La flecha de este indica el punto inicial y el sentido en el que hay que recorrer el diagrama.

A continuación definimos algunas simetrías topológicas.

**Definición 2.13.** *Dado un diagrama  $D$  de un enlace  $L$ , podemos construir un nuevo diagrama  $D^*$  reflejando cada cruce de  $D$ . Esto es, para cada cruce de  $D$ , hacer que el arco*

superior pase a ser el arco inferior y viceversa. El enlace representado por  $D^*$  es  $L^*$ , la imagen especular de  $L$ .

Si  $L$  no es equivalente a  $L^*$  decimos que  $L$  es quiral, mientras que si  $L$  es equivalente a  $L^*$  decimos que  $L$  es aquiral. En la Figura 2.12 podemos ver un diagrama del nudo trébol y su imagen especular. Se puede probar que el nudo trébol es quiral usando, por ejemplo, el polinomio de Jones, introducido en el Capítulo 3.

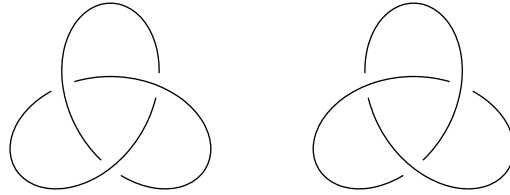


Figura 2.12: Diagramas del nudo trébol y su imagen especular.

Al enlace obtenido al tomar el opuesto de la imagen especular de  $L$ ,  $-L^*$ , lo llamamos inverso de  $L$ .

Para acabar esta sección, veamos dos operaciones entre diagramas: la unión disjunta y la suma conexa.

**Definición 2.14.** Sea  $L$  un enlace separado y  $D$  un diagrama separado de  $L$ . Sean  $D_1, \dots, D_n$  las componentes conexas de  $D$ . Entonces, decimos que  $L$  es unión disjunta de  $L_1, \dots, L_n$ , donde  $L_i$  es el enlace correspondiente a  $D_i$ . En tal caso, escribimos  $L = L_1 \sqcup \dots \sqcup L_n$

**Definición 2.15.** Sean  $K_1$  y  $K_2$  dos nudos orientados y sean  $D_1$  y  $D_2$  diagramas orientados de  $K_1$  y  $K_2$ , respectivamente. Tomamos la unión disjunta  $D_1 \sqcup D_2$ , y elegimos un arco de cada diagrama  $D_i$ . Eliminamos un segmento de cada arco y unimos los diagramas de la única forma compatible con la orientación, obteniendo un nuevo diagrama  $D$ . El diagrama  $D$  es la suma conexa de  $D_1$  y  $D_2$  y se denota por  $D = D_1 \# D_2$ .

El nudo  $K$  correspondiente a  $D$  es la suma conexa de  $K_1$  y  $K_2$ , y se denota por  $K = K_1 \# K_2$ .

Algunas observaciones de la suma conexa:

- Esta operación está bien definida si la hacemos sobre nudos orientados, pues solo hay una forma posible de unirlos que sea compatible con la orientación. Además, el nudo resultante no depende del arco elegido en cada diagrama. En la Figura 2.13 podemos ver un ejemplo de suma conexa.

- Si hacemos esta operación sobre nudos no orientados, entonces no está bien definida. Hay dos formas posibles de unir los nudos, pudiendo dar nudos distintos en cada caso. En la Figura 2.14 podemos ver un ejemplo.
- Si en lugar de nudos tomamos enlaces, la suma conexa, en general, no está bien definida. Si los enlaces tienen dos o más componentes, tenemos que especificar qué componentes quedan conectadas al hacer la suma conexa. El enlace resultante puede variar según las componentes elegidas.

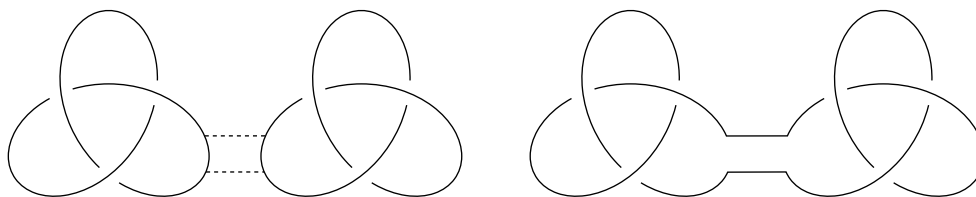


Figura 2.13: Construcción de la suma conexa de dos nudos trébol. A la izquierda, los dos nudos trébol con el rectángulo que los une (línea discontinua). A la derecha, la suma conexa de ambos nudos.

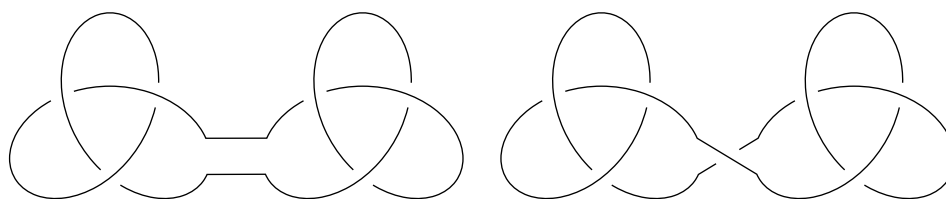


Figura 2.14: Las dos formas posibles de construir la suma conexa de dos tréboles de mano izquierda.

El elemento neutro de esta operación es el nudo trivial.

**Definición 2.16.** *Un nudo es primo si no se puede descomponer como suma conexa de nudos no triviales. De manera similar, un enlace es primo si no se puede descomponer como suma conexa de enlaces distintos al nudo trivial.*

## 2.3 Movimientos de Reidemeister

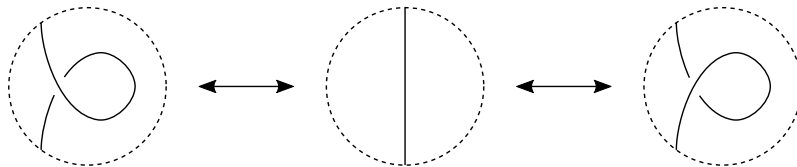
El problema principal en teoría de nudos es determinar si dos enlaces son equivalentes. Si tenemos diagramas de estos enlaces, el problema se traduce en ver si los diagramas son equivalentes. En 1927 Kurt Reidemeister da una solución teórica a este problema.

Un movimiento es un cambio localizado en un diagrama. Indicamos mediante una circunferencia discontinua la parte del diagrama donde tiene lugar el movimiento. Fuera de esta no realizamos ninguna modificación al diagrama, o, dicho de otro modo, las únicas partes del diagrama que intervienen en el movimiento son las indicadas en el dibujo. Un movimiento lo representamos mediante dos circunferencias, y este consiste en reemplazar el fragmento de diagrama de una circunferencia por el de la otra.

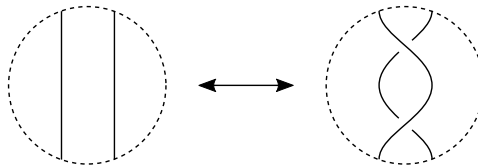
A continuación definimos los movimientos de Reidemeister. Estos movimientos preservan el tipo de enlace.

**| Definición 2.17.** *Los movimientos de Reidemeister son los siguientes:*

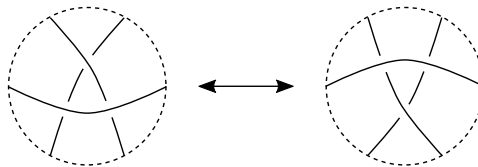
- *Movimiento tipo 1 (R1).*



- *Movimiento tipo 2 (R2).*



- *Movimiento tipo 3 (R3).*



Estos movimientos son muy importantes, ya que se corresponden con el concepto de isotopía ambiente de los enlaces en  $\mathbb{R}^3$ , como recoge el siguiente resultado [14].

**| Teorema 2.18 (Teorema de Reidemeister).** *Dos diagramas son equivalentes si y solo si existe una sucesión finita de movimientos de Reidemeister que transforma uno en el otro.*

Esto da una respuesta teórica al problema de equivalencia. Sin embargo, llevar a la práctica este resultado puede no ser práctico, ya que el número de movimientos necesarios para transformar un diagrama en otro diagrama equivalente dado puede ser muy alto. Además, si los diagramas de los que partimos representan enlaces distintos, buscar sucesiones de movimientos que lleven un diagrama en otro no nos sirve para dar una respuesta al problema de equivalencia de diagramas. Supongamos que tenemos dos diagramas  $D_1$  y  $D_2$ , fijamos un entero positivo  $n$  y comprobamos todas las combinaciones posibles de  $n$  movimientos para intentar transformar  $D_1$  en  $D_2$ . Si encontramos una sucesión que lleve  $D_1$  en  $D_2$ , entonces podemos asegurar que son equivalentes. Sin embargo, si no encontramos ninguna, no podemos asegurar que no lo sean, ya que es posible que sí sean equivalentes pero se requiera más de  $n$  movimientos.

Sin embargo, tenemos otras formas de ver que dos diagramas no representan el mismo enlace. Una de ellas es mediante el concepto de invariante, que estudiaremos en la siguiente sección. Como podremos ver, los movimientos de Reidemeister serán muy útiles para definir invariantes.

## 2.4 Invariantes

Una parte muy importante de la teoría de nudos es el estudio de invariantes. Como hemos comentado anteriormente, la importancia de los invariantes radica en que nos permiten determinar que dos enlaces no son equivalentes. En esta sección daremos algunos ejemplos y, en la siguiente, estudiaremos un invariante de gran importancia: el polinomio de Jones. Este fue el primer invariante polinómico que permitió distinguir la quiralidad de muchos enlaces. Además, las Conjeturas de Tait, tema principal de este trabajo, se demostraron usando propiedades de este polinomio.

Empecemos dando la definición de invariante.

**| Definición 2.19.** *Un invariante de enlace es una función del conjunto de los enlaces a otro conjunto de forma que dos enlaces equivalentes tienen la misma imagen.*

Muchos invariantes están relacionados con propiedades geométricas o topológicas del enlace y miden la complejidad de este de varias maneras. Una forma sencilla de definir invariantes (aunque esto no quiere decir que sean fáciles de calcular) es minimizar una propiedad numérica. Algunos ejemplos simples son la multiplicidad del enlace,  $\mu(L)$ , que es el número de componentes de  $L$ ; o el número de desanudamiento,



$u(L)$ , que es el menor número de veces que un enlace  $L$  debe cruzarse consigo mismo para convertirse en el enlace trivial.

Como ya hemos visto, el problema de equivalencia en enlaces se puede traducir al problema de equivalencia en diagramas. Luego resulta natural usar estos últimos para definir invariantes. Uno de los más importantes y que usaremos más adelante en este trabajo es el número de cruce.

**Definición 2.20.** *El número de cruce de un enlace  $L$ ,  $c(L)$ , es el mínimo número de cruces tomado entre todos los diagramas que representan  $L$ . Si denotamos  $c(D)$  al número de cruces de un diagrama  $D$ , entonces*

$$c(L) = \min\{c(D) : D \text{ es diagrama de } L.\}$$

El Teorema 2.18 nos decía que dos diagramas son equivalentes si y solo si existe una sucesión finita de movimientos de Reidemeister que transforman uno en el otro. Este resultado permite construir nuevos invariantes. Imaginemos que tenemos una función definida sobre diagramas. Entonces, si queremos ver si es un invariante, solo tenemos que comprobar si dicha función es invariante al aplicar cada uno de los movimientos de Reidemeister.

**Definición 2.21.** *Sea  $D$  un diagrama orientado de un enlace con dos componentes,  $K_1 \cup K_2$ , y sea  $D_i$  la componente de  $D$  correspondiente a  $K_i$ . El número de enlace de  $D_1$  y  $D_2$  se define como*

$$lk(D_1, D_2) = \frac{1}{2} \sum_{c \in D_1 \cap D_2} \varepsilon(c),$$

donde el sumatorio recorre todos los cruces que involucran un arco de  $D_1$  y un arco de  $D_2$ .

Por ejemplo, si consideramos el enlace de dos componentes mostrado en la Figura 2.15, podemos ver que hay cuatro cruces que involucran un arco de cada componente, y todos son positivos, luego el número de enlace de las dos componentes es 2.

Intuitivamente, el número de enlace representa el número de veces que una componente se enreda alrededor de la otra. De la definición se deduce que es una función simétrica:  $lk(D_1, D_2) = lk(D_2, D_1)$ .

**Proposición 2.22.** El número de enlace es un invariante de enlaces orientados.

**Demostración.** Para el cálculo del número de enlace no tenemos en cuenta los cruces de una componente consigo misma, luego los movimientos de Reidemeister de tipo 1 no

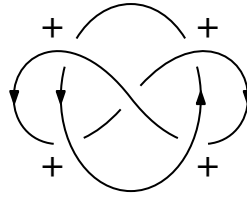


Figura 2.15

afectan al valor. Si en un movimiento de tipo 2 los dos segmentos son de componentes distintas, el movimiento añade o elimina dos cruces de distinto signo, luego el número de enlace no cambia su valor. Si los dos segmentos son de la misma componente tampoco se modifica el valor, ya que no tenemos en cuenta los cruces de una componente consigo misma. Los movimientos de tipo 3 solo cambian la posición relativa de los cruces, manteniendo el número de cruces y sus signos. Luego este movimiento tampoco cambia el número de enlace. |

Al ser el número de enlace un invariante del enlace orientado  $K_1 \cup K_2$ , podemos escribir  $lk(K_1, K_2)$ . Para enlaces con más de dos componentes también podemos definir el número de enlace. Para ello, tomamos la suma de los números de enlace de cada pareja de componentes, esto es:

**| Definición 2.23.** Sea  $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$  un enlace de  $n$  componentes. El número de enlace de  $L$ ,  $lk(L)$ , se define como

$$lk(L) = \sum_{i < j} lk(K_i, K_j).$$

### 3 | Polinomio de Jones

Los polinomios también son útiles a la hora de definir invariantes. El primer invariante polinómico fue el polinomio de Alexander [1], descubierto por James Waddell Alexander en 1928. Durante mucho tiempo fue el único invariante de este tipo que se conocía.

En 1984 Vaughan Jones, mientras trabajaba en cómo construir representaciones de grupos de trenzas en sus álgebras de von Neumann, descubrió un nuevo invariante polinómico, conocido como polinomio de Jones [6]. Se trata de un polinomio de Laurent con coeficientes enteros. Su descubrimiento supuso una revolución en la teoría de nudos, y en 1990 Jones recibió la medalla Fields por ello. Fue el primer invariante polinómico que permitía distinguir la quiralidad del nudo trébol. Además, permitió la demostración de las Conjeturas de Tait.

En esta sección estudiaremos el polinomio de Jones. La definición que se presenta fue dada por Louis Kauffman [7].

En primer lugar, asociamos un polinomio,  $\langle D \rangle$ , a cada diagrama  $D$  no orientado. El corchete  $\langle D \rangle$  se define como el único polinomio de  $\mathbb{Z}[A, B; \delta]$  que satisface las siguiente reglas:

1.  $\langle \bigcirc \rangle = 1$ , donde  $\bigcirc$  denota al diagrama sin cruces del nudo trivial.
2.  $\langle D \sqcup \bigcirc \rangle = \delta \langle D \rangle$ , donde  $D$  es no vacío y  $D \sqcup \bigcirc$  denota la unión disjunta de  $D$  y  $\bigcirc$ .
3.  $\langle \diagdown \rangle = A \langle \curvearrowright \rangle + B \langle \rangle \langle \rangle$ , donde  $\diagdown$ ,  $\curvearrowright$  y  $\rangle \langle$  representan tres diagramas que solo difieren localmente en la manera en la que se indica.

**Ejemplo 3.1.** Sea el diagrama del enlace de Hopf mostrado en la Figura 3.1. A continuación calculamos  $\langle D \rangle$ . Si lo desarrollamos como un árbol tenemos:

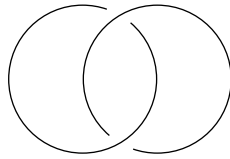
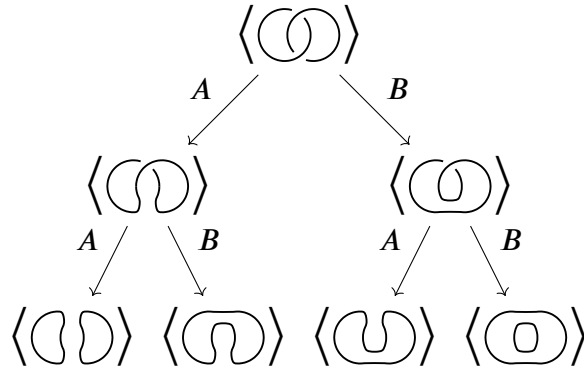


Figura 3.1: Diagrama del enlace de Hopf.



Por las reglas 1 y 2,

$$\langle \text{C} \rangle = \langle \text{C}' \rangle = 1, \quad \langle \text{C}_1 \rangle = \langle \text{C}'_2 \rangle = \delta.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \langle \text{Hopf} \rangle &= A^2 \langle \text{C}_1 \rangle + AB \langle \text{C} \rangle + AB \langle \text{C}' \rangle + B^2 \langle \text{C}'_2 \rangle \\ &= A^2 \delta + AB + AB + B^2 \delta \\ &= A^2 \delta + 2AB + B^2 \delta. \end{aligned}$$

A continuación vemos cómo ajustar  $A$ ,  $B$  y  $\delta$  para convertir a  $\langle D \rangle$  en invariante por los movimientos de Reidemeister de tipo 2 y 3.

Para que sea invariante por los movimientos de Reidemeister de tipo 2, hay que imponer  $\langle \overline{D} \rangle = \langle \rangle \langle \rangle$ . Aplicando las reglas del corchete obtenemos:

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\bigcirc} \rangle &= A \langle \overline{\bigcirc} \rangle + B \langle \overline{\bigcirc} \rangle \\
&= A [A \langle \overline{\bigcirc} \rangle + B \langle \overline{\bigcirc} \rangle] + B [A \langle \overline{\bigcirc} \rangle + B \langle \overline{\bigcirc} \rangle] \\
&= (A^2 + B^2) \langle \overline{\bigcirc} \rangle + AB \langle \overline{\bigcirc} \rangle + BA \langle \overline{\bigcirc} \rangle \\
&= (A^2 + B^2) \langle \overline{\bigcirc} \rangle + AB\delta \langle \overline{\bigcirc} \rangle + BA \langle \overline{\bigcirc} \rangle \\
&= (A^2 + AB\delta + B^2) \langle \overline{\bigcirc} \rangle + BA \langle \overline{\bigcirc} \rangle
\end{aligned}$$

Si imponemos que  $\langle \overline{\bigcirc} \rangle = \langle \overline{\bigcirc} \rangle$  para que sea invariante por los movimientos de tipo 2, llegamos a las siguientes relaciones:

- 1)  $BA = 1$ .
- 2)  $A^2 + AB\delta + B^2 = 0$

De 1) concluimos que

$$B = A^{-1}.$$

Sustituyendo en 2) obtenemos

$$A^2 + AB\delta + B^2 = A^2 + \delta + A^{-2} = 0,$$

y, por tanto,

$$\delta = -A^2 - A^{-2}.$$

Luego haciendo  $B = A^{-1}$  y  $\delta = -A^2 - A^{-2}$ , el corchete es invariante por movimientos de Reidemeister de tipo 2.

Veamos ahora que la invarianza por movimientos de Reidemeister de tipo 2 implica también la invarianza por movimientos de tipo 3, es decir, que  $\langle \overline{\bigcirc} \rangle = \langle \overline{\bigcirc} \rangle$ .

Por un lado, tenemos que

$$\langle \overline{\bigcirc} \rangle = A \langle \overline{\bigcirc} \rangle + B \langle \overline{\bigcirc} \rangle$$

Por el otro, como el corchete es invariante por movimientos de tipo 2,

$$\langle \overline{\bigcirc} \rangle = \langle \overline{\bigcirc} \rangle = \langle \overline{\bigcirc} \rangle$$

Luego,

$$\left\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right\rangle = A \left\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} \right\rangle + B \left\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right\rangle = A \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \right\rangle + B \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right\rangle$$

Es decir, es invariante por movimientos de Reidemeister de tipo 3.

Hemos probado el siguiente resultado.

**Proposición 3.2.** El corchete es invariante por los movimientos de Reidemeister de tipo 2 y 3 si elegimos  $B = A^{-1}$  y  $\delta = -A^2 - A^{-2}$ .

A partir de ahora, y salvo que se especifique lo contrario, los valores de  $B$  y  $\delta$  son los indicados anteriormente. Con esta asignación de valores, se define el corchete de Kauffman.

**Definición 3.3.** Sea  $D$  un diagrama no orientado. El corchete de Kauffman de  $D$ ,  $\langle D \rangle$ , se define como el único polinomio en  $\mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$  que satisface las siguientes condiciones:

1.  $\langle \bigcirc \rangle = 1$ .
2.  $\langle D \sqcup \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2})\langle D \rangle$ .
3.  $\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle = A \langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \rangle + A^{-1} \langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle$ .

**Ejemplo 3.4.** En el Ejemplo 3.1 calculamos que  $\langle \bigcirc \bigcirc \rangle = A^2\delta + 2AB + B^2\delta$ . Si hacemos  $B = A^{-1}$  y  $\delta = -A^2 - A^{-2}$  obtenemos que

$$\begin{aligned} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle &= A^2(-A^2 - A^{-2}) + 2AA^{-1} + A^{-2}(-A^2 - A^{-2}) \\ &= -A^4 - 1 + 2 - 1 - A^{-4} = -A^4 - A^{-4}. \end{aligned}$$

El corchete de Kauffman es invariante por los movimientos de Reidemeister de tipo 2 y 3. Sin embargo, no es un invariante de enlace, ya que, como veremos en la Observación 3.10, no es invariante por los movimientos de Reidemeister de tipo 1.

**Definición 3.5.** Fijándonos en la regla 3 de la definición del corchete de Kauffman, llamamos suavizado de tipo  $A$  al proceso de pasar del diagrama original al diagrama del corchete que multiplica a  $A$ . De manera similar, llamamos suavizado de tipo  $B$  a pasar del diagrama original al diagrama del corchete que multiplica a  $B = A^{-1}$ .

En la Figura 3.2 se muestran los dos tipos de suavizados. A partir de los suavizados podemos definir el concepto de estado de un diagrama.

**Definición 3.6.** Los estados de un diagrama  $D$  con  $c$  cruces son las  $2^c$  configuraciones de círculos posibles al aplicar suavizados a cada cruce de  $D$ .

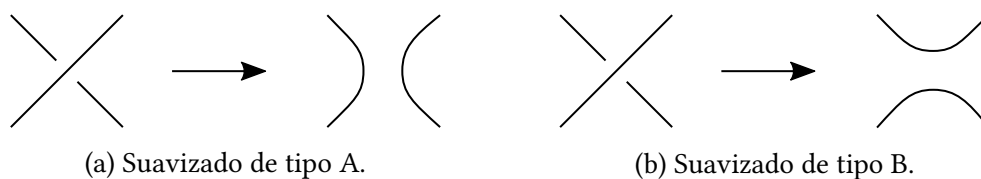


Figura 3.2

El corchete de Kauffman de un diagrama  $D$  lo podemos expresar en función de los estados de  $D$ . Para calcular  $\langle D \rangle$ , debemos aplicar la regla 3 de Definición 3.3 a cada uno de los cruces de  $D$ . Esto lo podemos visualizar como un grafo árbol, donde el vértice raíz es  $\langle D \rangle$  y cada vez que aplicamos la regla 3 a un cruce obtenemos dos nuevas ramas, una por cada tipo de suavizado. Al final, después de aplicar la regla 3 a todos los cruces, obtenemos que cada hoja del árbol es el corchete de Kauffman de cada uno de los posibles estados  $S$  de  $D$ .

Claramente, los estados  $S$  no tienen cruces. Sea  $|S|$  el número de componentes conexas que obtenemos en el estado  $S$ . Por las reglas 1 y 2 tenemos que  $\langle S \rangle = \delta^{|S|-1}$ . Por la regla 3, si para cada estado  $S$  multiplicamos  $\langle S \rangle$  por tantas  $A$ 's y  $B$ 's como suavizados de estos tipos hayamos hecho para llegar a  $S$ , entonces  $\langle D \rangle$  es la suma de estos valores. Estas ideas las podemos recoger en los siguientes resultados.

**Definición 3.7.** Sea  $D$  un diagrama y  $S$  un estado de  $D$  donde se han realizado  $a$  suavizados de tipo A y  $b$  suavizados de tipo B. Definimos  $\langle D|S \rangle$  por la siguiente fórmula:

$$\langle D|S \rangle = A^{a-b}.$$

**Proposición 3.8.** Sea  $|S|$  al número de componentes conexas que obtenemos en el estado  $S$ . Tenemos que la contribución de  $S$  a  $\langle D \rangle$  viene dada por

$$\langle D|S \rangle \delta^{|S|-1} = A^{a-b} (-A^2 - A^{-2})^{|S|-1},$$

y, por tanto, tenemos que

$$\langle D \rangle = \sum_S \langle D|S \rangle \delta^{|S|-1},$$

donde el sumatorio es sobre todos los posibles estados de  $D$ .

**Ejemplo 3.9.** Calculamos el corchete de Kauffman del enlace de Hopf según la fórmula anterior. Sea  $D$  el diagrama del enlace de Hopf mostrado en la Figura 3.3.

Denotamos por  $S_{ij}$ , con  $i, j = \{A, B\}$ , al estado correspondiente a aplicar un suavizado de tipo  $i$  al cruce inferior de  $D$  y un suavizado de tipo  $j$  al cruce superior de  $D$ .

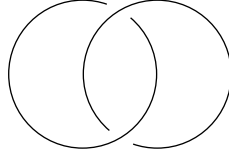


Figura 3.3: Diagrama del enlace de Hopf.

Tenemos que  $S_{AA}$  el estado correspondiente a aplicar suavizados de tipo A a los dos cruces de  $D$ . La configuración de círculos correspondiente es  $\left( \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} \right)$ . Luego

$$\langle D|S_{AA} \rangle \delta^{|S_{AA}|-1} = A^2(-A^2 - A^{-2})^{2-1} = A^2(-A^2 - A^{-2}) = -A^4 - 1.$$

De manera análoga lo hacemos con los demás estados. La configuración de círculos correspondiente a  $S_{AB}$  es  $\left( \begin{array}{c} \circ \\ \cup \end{array} \right)$ :

$$\langle D|S_{AB} \rangle \delta^{|S_{AB}|-1} = A^{1-1}(-A^2 - A^{-2})^{1-1} = 1.$$

La configuración de círculos correspondiente a  $S_{BA}$  es  $\left( \begin{array}{c} \cup \\ \circ \end{array} \right)$ :

$$\langle D|S_{BA} \rangle \delta^{|S_{BA}|-1} = A^{1-1}(-A^2 - A^{-2})^{1-1} = 1.$$

La configuración de círculos correspondiente a  $S_{BB}$  es  $\left( \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} \right)$ :

$$\langle D|S_{BB} \rangle \delta^{|S_{BB}|-1} = A^{-2}(-A^2 - A^{-2})^{2-1} = A^{-2}(-A^2 - A^{-2}) = -1 - A^{-4}.$$

Por tanto,

$$\langle \left( \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} \right) \rangle = \sum_S \langle D|S \rangle \delta^{|S|-1} = -A^4 - 1 + 1 + 1 - 1 - A^{-4} = -A^4 - A^{-4}.$$

Este resultado coincide con el que obtuvimos en el Ejemplo 3.4.

**Observación 3.10.** El corchete de Kauffman no es invariante por movimientos de tipo 1. Veamos cómo se comporta bajo cada una de las variantes de este tipo de movimiento. En el primer caso, que llamaremos movimientos tipo 1.a, tenemos:

$$\begin{aligned} \langle \left( \begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right) \rangle &= A \langle \left( \begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right) \rangle + A^{-1} \langle \left( \begin{array}{c} \cup \\ \circ \end{array} \right) \rangle \\ &= A \left\langle \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right\rangle + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) \left\langle \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right\rangle \\ &= -A^{-3} \left\langle \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right\rangle \end{aligned}$$



El segundo caso (tipo 1.b) se puede hacer de manera análoga. Obtenemos:

$$\langle \textcircled{\curvearrowright} \rangle = -A^3 \langle \text{---} \mid \text{---} \rangle$$

Luego,

$$-A^3 \langle \textcircled{\curvearrowleft} \rangle = \langle \text{---} \mid \text{---} \rangle = -A^{-3} \langle \textcircled{\curvearrowright} \rangle$$

Observamos que cuando aplicamos a un diagrama orientado  $D$  un movimiento de tipo 1.a, el valor de la contorsión disminuye en 1, mientras que si aplicamos uno del tipo 1.b, aumenta en 1. Por tanto, si al corchete  $\langle D \rangle$  lo multiplicamos por  $(-A)^{-3w(D)}$ , tenemos que es invariante por movimientos de este tipo.

**| Definición 3.11.** *El polinomio de Jones de un diagrama orientado  $D$  se define como:*

$$V(D) = (-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle.$$

**| Teorema 3.12.** *El polinomio de Jones es un invariante de enlace.*

*Demostración.* Veamos primero que  $V(D)$  es invariante por los movimientos R2 y R3. Para ello, como tenemos que  $\langle D \rangle$  es invariante por estos movimientos, basta probarlo para la contorsión:

- La contorsión es invariante por movimientos R2, ya que si hacemos un movimiento de este tipo estamos añadiendo o quitando un cruce positivo y uno negativo, por lo que la contorsión permanece constante.
- Si hacemos un movimiento R3, mantenemos los cruces y su signo, luego la contorsión también permanece constante.

Luego la contorsión es invariante por los movimientos de Reidemeister de tipo 2 y 3 y, por tanto, por la Proposición 3.2,  $V(D)$  también.

Queda ver que es invariante por los movimientos R1. Si hacemos un movimiento de tipo 1.a, el valor de  $w(D)$  disminuye en 1, (esto es,  $w(\textcircled{\curvearrowright}) = w(\text{---} \mid \text{---}) - 1$ ). Además, como hemos visto antes, el corchete se comporta bajo movimientos de tipo 1.a de la siguiente forma:  $\langle \textcircled{\curvearrowright} \rangle = -A^{-3} \langle \text{---} \mid \text{---} \rangle$ . Luego,

$$\begin{aligned} V(\textcircled{\curvearrowright}) &= (-A)^{-3w(\textcircled{\curvearrowright})} \langle \textcircled{\curvearrowright} \rangle \\ &= (-A)^{-3[w(\text{---} \mid \text{---})-1]} (-A^{-3}) \langle \text{---} \mid \text{---} \rangle \\ &= (-A)^{-3w(\text{---} \mid \text{---})+3} (-A)^{-3} \langle \text{---} \mid \text{---} \rangle \\ &= (-A)^{-3w(\text{---} \mid \text{---})} \langle \text{---} \mid \text{---} \rangle \\ &= V(\text{---} \mid \text{---}). \end{aligned}$$

Es decir, es invariante por movimientos de tipo 1.a. De manera similar podemos demostrar que es invariante por movimientos de tipo 1.b, usando que  $w(\curvearrowright) = w(\left| \right|) + 1$  y  $\langle \curvearrowright \rangle = -A^3 \langle \left| \right| \rangle$ . Por tanto,  $V(D)$  es invariante por movimientos de Reidemeister de tipo 1.

Luego el polinomio de Jones es invariante por los movimientos de Reidemeister y, por tanto, es un invariante de enlace. |

Como el polinomio de Jones es un invariante de enlace, podemos escribir  $V(L)$ .

A continuación damos un ejemplo de cómo calcular el polinomio de Jones de un nudo.

*Ejemplo 3.13.* Sea  $K$  el nudo trébol y sea  $D$  el diagrama de  $K$  mostrado en la Figura 3.4.

En primer lugar, calculamos el corchete de Kauffman de  $D$ :

$$\begin{aligned}
\langle \text{Diagrama} \rangle &= A \langle \text{Diagrama 1} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagrama 2} \rangle \\
&= A [A \langle \text{Diagrama 3} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagrama 4} \rangle] + A^{-1} [A \langle \text{Diagrama 5} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagrama 6} \rangle] \\
&= A [A [A \langle \text{Diagrama 7} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagrama 8} \rangle] + A^{-1} [A \langle \text{Diagrama 9} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagrama 10} \rangle]] + \\
&\quad + A^{-1} [A [A \langle \text{Diagrama 11} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagrama 12} \rangle] + A^{-1} [A \langle \text{Diagrama 13} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagrama 14} \rangle]] \\
&= A^3 \langle \text{Diagrama 7} \rangle + A \langle \text{Diagrama 8} \rangle + A \langle \text{Diagrama 9} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagrama 10} \rangle + \\
&\quad + A \langle \text{Diagrama 11} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagrama 12} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagrama 13} \rangle + A^{-3} \langle \text{Diagrama 14} \rangle \\
&= A^3(-A^2 - A^{-2})^2 + A(-A^2 - A^{-2}) + A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1} + \\
&\quad + A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1} + A^{-1} + A^{-3}(-A^2 - A^{-2}) \\
&= A^3(-A^2 - A^{-2})^2 + 3A(-A^2 - A^{-2}) + 3A^{-1} + A^{-3}(-A^2 - A^{-2}) \\
&= A^3(A^4 + 2 + A^{-4}) + 3A(-A^2 - A^{-2}) + 3A^{-1} + A^{-3}(-A^2 - A^{-2}) \\
&= A^7 + 2A^3 + A^{-1} - 3A^3 - 3A^{-1} + 3A^{-1} - A^{-1} - A^{-5} \\
&= A^7 - A^3 - A^{-5}.
\end{aligned}$$

Ahora calculamos  $V(L)$ . Para ello, necesitamos su contorsión. Si observamos la

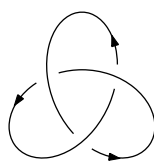


Figura 3.4: Diagrama del nudo trébol

Figura 3.4, podemos ver que  $w(D) = -3$ , pues  $D$  tiene 3 cruces negativos. Luego,

$$\begin{aligned} V(L) &= (-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle \\ &= -A^9(A^7 - A^3 - A^{-5}) \\ &= -A^{16} + A^{12} + A^4 \end{aligned}$$

**Proposición 3.14.** El polinomio de Jones cumple las siguientes propiedades:

1.  $V(-L) = V(L)$ .
2.  $V(L^*)(A) = V(L)(A^{-1})$ .

**Demostración.** 1. Sea  $L$  un enlace y  $D$  un diagrama de  $L$ . Por un lado,  $\langle D \rangle = \langle -D \rangle$ , pues el corchete de Kauffman no tiene en cuenta la orientación. Por el otro, cuando invertimos la orientación del enlace, el signo de los cruces no se ve alterado. Luego  $w(D) = w(-D)$ . Por tanto,

$$V(-L) = (-A)^{-3w(-D)} \langle -D \rangle = (-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle = V(L).$$

2. Sea  $L$  un enlace,  $D$  un diagrama de  $L$  y  $D^*$  el diagrama especular a  $D$  y, por tanto, diagrama de  $L^*$ . Por un lado, si a un diagrama  $D$  le hacemos su imagen especular  $D^*$ , invertimos los signos de los cruces (se puede ver en Figura 2.10), luego  $w(D^*) = -w(D)$ . Por el otro, al hacer  $D^*$ , los cruces  $\searrow \swarrow$  pasan a  $\swarrow \searrow$ , y viceversa. Luego los suavizados tipo A en  $D$  pasan a ser de tipo B en  $D^*$  y viceversa, luego  $\langle D \rangle = \langle D^* \rangle|_{A=A^{-1}}$ . Uniendo estos dos hechos, tenemos que  $V(L^*)(A) = V(L)(A^{-1})$ . |

**Corolario 3.15.** El polinomio de Jones del nudo trébol no es simétrico y, por tanto, la propiedad 2 de la Proposición 3.14 implica que el nudo trébol es quirál.

Para finalizar esta sección, veamos el siguiente resultado [7, Teorema 2.8].

**Teorema 3.16.** Sea  $J(L) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$  el polinomio obtenido a partir de  $V(L)$  al hacer el cambio de variable  $t = A^{-4}$ , es decir,  $J(L) = V(L)|_{t=A^{-4}}$ . Se tiene que  $J(L)$  cumple la siguiente relación:

$$t^{-1} J \left( \begin{array}{c} \swarrow \searrow \\ \searrow \swarrow \end{array} \right) - t J \left( \begin{array}{c} \swarrow \swarrow \\ \searrow \searrow \end{array} \right) = (t^{1/2} - t^{-1/2}) J \left( \begin{array}{c} \swarrow \swarrow \\ \swarrow \swarrow \end{array} \right), \quad (3.1)$$

donde  $\nearrow, \searrow$  y  $\curvearrowright$  representan tres diagramas que solo difieren en un entorno en la manera en la que se indica. Este tipo de relaciones que relacionan el valor de un invariante evaluado en 3 diagramas idénticos salvo en un entorno de un cruce se llaman relaciones de madeja.

**Demostración.** Por definición del corchete de Kauffman, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \nearrow \rangle &= A \langle \curvearrowright \rangle + A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle \\ \langle \searrow \rangle &= A^{-1} \langle \curvearrowright \rangle + A \langle \rangle \langle \rangle \end{aligned}$$

Multiplicando la primera relación por  $A$  y la segunda por  $A^{-1}$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} A \langle \nearrow \rangle &= A^2 \langle \curvearrowright \rangle + \langle \rangle \langle \rangle \\ A^{-1} \langle \searrow \rangle &= A^{-2} \langle \curvearrowright \rangle + \langle \rangle \langle \rangle \end{aligned}$$

Luego, si las restamos, llegamos a

$$A \langle \nearrow \rangle - A^{-1} \langle \searrow \rangle = (A^2 - A^{-2}) \langle \curvearrowright \rangle \tag{3.2}$$

Estos diagramas se pueden orientar de manera consistente entre ellos de manera que podamos comparar sus contorsiones. Tenemos que

$$w(\nearrow) - 1 = w(\curvearrowright) = w(\searrow) + 1 \tag{3.3}$$

Además, de la definición del polinomio de Jones (Definición 3.11) obtenemos

$$\langle D \rangle = (-A)^{3w(D)} V(D)$$

Sustituyendo esto en la Ecuación 3.2:

$$A(-A)^{3w(\nearrow)} V(\nearrow) - A^{-1}(-A)^{3w(\searrow)} V(\searrow) = (A^2 - A^{-2})(-A)^{3w(\curvearrowright)} V(\curvearrowright)$$

Teniendo en cuenta la Ecuación 3.3, podemos dividir ambos lados de la ecuación por  $(-A)^{3w(\curvearrowright)}$ , y obtenemos:

$$A(-A)^3 V(\nearrow) - A^{-1}(-A)^{-3} V(\searrow) = (A^2 - A^{-2}) V(\curvearrowright)$$

Simplificando:

$$-A^4 V(\nearrow) + A^{-4} V(\searrow) = (A^2 - A^{-2}) V(\curvearrowright)$$

Haciendo el cambio de variable  $t^{-1} = A^4$ , obtenemos:

$$-t^{-1}J(\text{cruz}) + tJ(\text{cruz}) = (t^{-1/2} - t^{1/2})J(\text{curva})$$

Por último, multiplicamos por  $-1$  a ambos lados de la igualdad y obtenemos la relación de madeja del polinomio de Jones mostrada en el enunciado:

$$t^{-1}J(\text{cruz}) - tJ(\text{cruz}) = (t^{1/2} - t^{-1/2})J(\text{curva}). \quad \color{red}{|}$$

Si imponemos que el polinomio de Jones del nudo trivial sea 1, la relación de madeja del Teorema 3.16 determina, de manera única, el polinomio de Jones  $J(L)$ .

*Ejemplo 3.17.* En el Ejemplo 3.13 calculamos el polinomio de Jones del nudo trébol de la Figura 3.4. A continuación lo vamos a calcular usando la relación de madeja anterior (Ecuación 3.1) y que el polinomio de Jones del nudo trivial es 1.

La relación de madeja nos da una regla recursiva para calcular el polinomio de Jones. Nosotros ilustramos esta regla mediante un árbol de resolución. Además, indicamos con una circunferencia roja la zona del diagrama sobre la que estamos aplicando las transformaciones indicadas en la relación de madeja.

Primero calculamos el polinomio de Jones del enlace trivial de dos componentes, que denotaremos por  $L$ . Este valor nos hará falta para calcular el polinomio de Jones del nudo trébol. Para ello, usamos el diagrama  $D'$  de  $L$  que se muestra en la Figura 3.5.

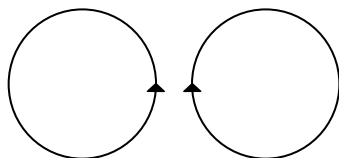


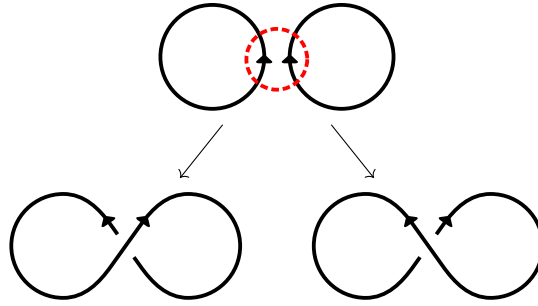
Figura 3.5: Diagrama separado del enlace trivial de dos componentes.

Este diagrama no tiene cruces. Luego usamos

$$J(\text{curva}) = \frac{t^{-1}J(\text{cruz}) - tJ(\text{cruz})}{t^{1/2} - t^{-1/2}}, \quad (3.4)$$

que se ha obtenido al despejar  $J(\text{curva})$  de la relación madeja.

Aplicamos las transformaciones indicadas al diagrama:



En ambos casos obtenemos un diagrama que representa al nudo trivial, luego  $J(\text{diagrama}) = 1 = J(\text{diagrama})$  en la Ecuación 3.4. Por tanto,

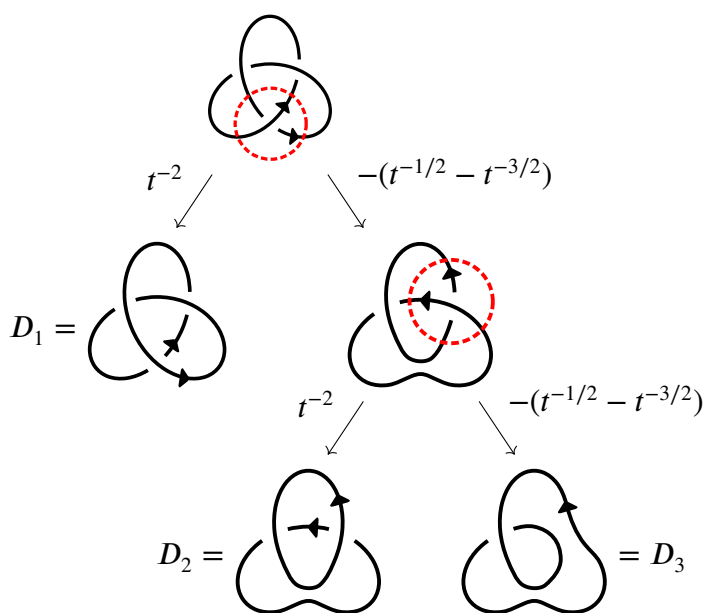
$$\begin{aligned}
 J(L) = J(\text{diagrama}) &= \frac{t^{-1}J(\text{diagrama}) - tJ(\text{diagrama})}{(t^{1/2} - t^{-1/2})} = \frac{t^{-1} - t}{t^{1/2} - t^{-1/2}} \\
 &= \frac{(t^{-1} - t)(t^{1/2} + t^{-1/2})}{t - t^{-1}} = -t^{1/2} - t^{-1/2}.
 \end{aligned}$$

A continuación calculamos el polinomio de Jones del nudo trébol. Sea  $K$  dicho nudo y sea  $D$  el diagrama de  $K$  mostrado en la Figura 3.4. Para el calculo de  $J(K)$  usamos

$$J(\text{diagrama}) = t^{-2}J(\text{diagrama}) - (t^{-1/2} - t^{-3/2})J(\text{diagrama}),$$

que se ha obtenido de despejar  $J(\text{diagrama})$  de la relación madeja.

Aplicamos las transformaciones indicadas al diagrama.



Los diagramas  $D_1$  y  $D_3$  representan al nudo trivial, luego los polinomios de Jones correspondientes son 1. El diagrama  $D_2$  representa al enlace trivial de dos componentes, cuyo polinomio de Jones es  $-t^{1/2} - t^{-1/2}$ , como calculamos anteriormente. Lo calculamos en el caso en el que las dos componentes estaban orientadas en sentidos contrarios, mientras que en este caso las dos componentes tienen la misma orientación. Esto no supone ningún problema, ya que ambos son equivalentes y, por tanto, tienen el mismo polinomio de Jones. El polinomio de Jones del nudo trébol  $K$  es el siguiente.

$$\begin{aligned}
 J(K) &= t^{-2} - (t^{-1/2} - t^{-3/2}) [t^{-2}(-t^{1/2} - t^{-1/2}) - (t^{-1/2} - t^{-3/2})] \\
 &= t^{-2} - (t^{-1/2} - t^{-3/2})(-t^{-3/2} - t^{-5/2} - t^{-1/2} + t^{-3/2}) \\
 &= t^{-2} - (t^{-1/2} - t^{-3/2})(-t^{-5/2} - t^{-1/2}) \\
 &= t^{-2} + t^{-3} + t^{-1} - t^{-4} - t^{-2} \\
 &= t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}.
 \end{aligned}$$

En el Ejemplo 3.13 obtuvimos que el polinomio de Jones del nudo trébol es  $V(K) = -A^{16} + A^{12} + A^4$ . Si hacemos el cambio de variable  $t = A^{-4}$  podemos ver que ambos resultados coinciden y, por tanto, el Teorema 3.16 se cumple.

$$V(K)|_{t=A^{-4}} = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}.$$





## 4 | Primera conjetura de Tait

Esta sección está dedicada a la Primera conjetura de Tait, la cual establece la minimalidad del número de cruces de los diagramas alternantes, reducidos y conexos. Fue probada de manera independiente en 1986 por Louis H. Kauffman [7], Kunio Murasugi [11] y Morwen Thistlethwaite [20]. Para la demostración, en los tres artículos se usan propiedades del polinomio de Jones. Nosotros nos centraremos en la prueba dada por Kauffman. La conjetura es la siguiente:

**| Conjetura 1 (Primera conjetura de Tait).** *Un diagrama alternante, reducido y conexo de un enlace tiene el menor número posible de cruces de entre todos los diagramas que representan ese enlace.*

Es decir, si  $D$  es un diagrama alternante, reducido y conexo de un enlace  $L$ , entonces  $c(L) = c(D)$ , donde  $c(L)$  es el número de cruce de  $L$  (Definición 2.20) y  $c(D)$  es el número de cruces de  $D$ .

### 4.1 Igualdad en el número de cruces de los diagramas alternantes

Antes de demostrar la Conjetura 1, veamos que dos diagramas alternantes, reducidos y conexos de un enlace alternante tienen el mismo número de cruces. Para ello, primero es necesario definir el siguiente concepto relacionado con los diagramas.

**| Definición 4.1.** *Las regiones de un diagrama conexo  $D$  son las regiones en las que queda dividido el plano al considerar la proyección subyacente de  $D$  (esto es, eliminamos la información de la altura en cada cruce).*

**Ejemplo 4.2.** El diagrama del nudo trebol que se muestra en la Figura 4.1 tiene cinco regiones, las cuales se indican mediante las etiquetas  $R_i$ .

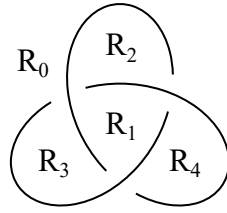


Figura 4.1: Regiones de un diagrama del nudo trébol.

Tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 4.3.** Sea  $D$  un diagrama conexo con  $c$  cruces. Supongamos que  $D$  divide al plano en  $f$  regiones. Entonces  $f = c + 2$ .

**Demostración.** Para  $c = 0$  tenemos que los únicos diagramas conexos sin cruces son los equivalentes a una circunferencia. Luego  $f = 2$  y, por tanto, la fórmula se cumple.

Dado un diagrama  $D$  con  $c$  cruces y que divide al plano en  $f$  regiones, consideramos el grafo  $G_D$  obtenido al considerar la proyección subyacente de  $D$ . Los vértices de  $G_D$  se corresponden con los cruces de  $D$ , mientras que las aristas de  $G_D$  se corresponden con los arcos de  $D$  que van de un cruce a otro. Claramente, el número de vértices de  $G_D$  es  $c$  y el número de caras en que  $G_D$  divide al plano es  $f$ . Además,  $G_D$  es conexo y plano, luego su característica de Euler es 2. Es decir,

$$c - E + f = 2,$$

donde  $E$  es el número de aristas del grafo.

Además, todos los vértices de  $G_D$  tienen grado 4, luego

$$E = \frac{1}{2} \sum_v \deg(v) = 2c,$$

donde el sumatorio es en los vértices del grafo.

Uniendo estos dos resultados, tenemos que

$$c - E + f = 2 \Rightarrow c - (2c) + f = 2 \Rightarrow f = c + 2,$$

como se quería probar. |

A continuación, asignamos las etiquetas W (white) y B (black) a las regiones adyacentes a cada cruce de un diagrama como se muestra en la Figura 4.2. Las etiquetas

B se corresponden con las regiones que se fusionarían al hacer un suavizado tipo A en el cruce (Figura 3.2a), mientras que las etiquetas W se corresponden con las regiones que se fusionarían al hacer un suavizado tipo B (Figura 3.2b). Esta forma de etiquetar las regiones la llamaremos coloreado local de ajedrez.

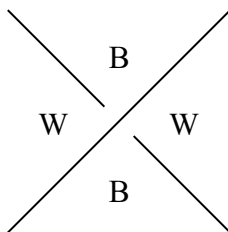


Figura 4.2: Etiquetas de cruce.

*Ejemplo 4.4.* En la Figura 4.3 se muestra un diagrama del nudo trébol al que se le ha aplicado un coloreado local de ajedrez.

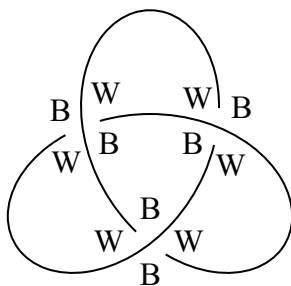


Figura 4.3: Ejemplo de coloreado local de ajedrez.

En el Ejemplo 4.4, cada región tiene asignada una única etiqueta. Esto no ocurre siempre. En general, si tomamos un diagrama  $D$  cualquiera y asignamos a cada cruce estas etiquetas, puede haber regiones que tengan asignadas etiquetas de distinto tipo.

*Proposición 4.5.* Sea  $D$  un diagrama alternante y conexo al que se le ha aplicado una coloración local de ajedrez. Entonces, cada región tiene asignada una única etiqueta. Además, dos regiones adyacentes tienen asignadas etiquetas distintas.

*Demostración.* Damos una idea de la demostración. Si en una región tomamos dos cruces consecutivos e imponemos que cada uno etiquete a la región con una etiqueta distinta, obtenemos un diagrama no alternante, como podemos observar en la Figura 4.4. Además, en los diagramas alternantes y conexos las regiones están etiquetadas como si fuese un tablero de ajedrez (Figura 4.5). |

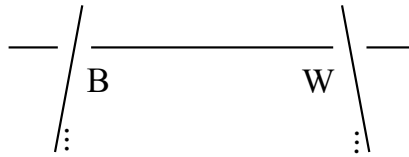


Figura 4.4

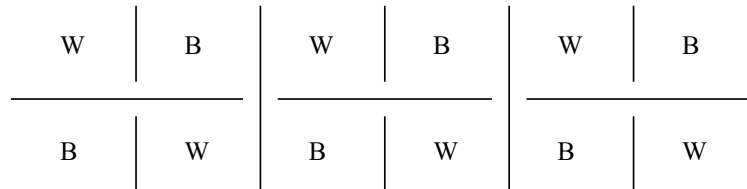


Figura 4.5: Si recorremos un diagrama alternante conexo, veríamos que las etiquetas se van alternando como si fuese un tablero de ajedrez.

Usando esta asignación de etiquetas a las regiones de un diagrama  $D$  alternante y conexo, podemos calcular de forma sencilla el mayor y el menor grado del corchete de Kauffman de  $D$ . El siguiente resultado nos indica cuáles son estos valores.

**Proposición 4.6.** Sea  $D$  un diagrama alternante, conexo y reducido de un enlace. Etiquetamos las regiones de cada cruce de  $D$  como indica la Figura 4.2. Entonces,

$$\text{máx deg}\langle D \rangle = c + 2(|W| - 1),$$

$$\text{mín deg}\langle D \rangle = -c - 2(|B| - 1),$$

donde  $c$  es el número de cruces de  $D$ ,  $|W|$  es el número de regiones etiquetadas con  $W$ , y  $|B|$  es el número de regiones etiquetadas con  $B$ .

**Demostración.** Sea  $S_B$  el estado correspondiente a suavizar todos los cruces de  $D$  con un suavizado de tipo  $B$ .

Por un lado, como solo hemos hecho suavizados tipo  $B$ , tenemos que  $\langle D | S_B \rangle = B^c$  (Definición 3.7). Por otro, como hacer un suavizado tipo  $B$  fusiona las regiones  $W$  correspondientes, si solo hacemos suavizados de este tipo, todas las regiones  $W$  se fusionarán en una. Además, como no se han unido regiones  $B$ , su número sigue siendo el inicial. Por tanto, al aplicar suavizados tipo  $B$  a todos los cruces, obtenemos tantos círculos como regiones  $B$  había en un principio. Luego, por la Proposición 3.8, el estado  $S_B$  aporta a  $\langle D \rangle$  los siguientes términos:

$$B^c \delta^{|B|-1} = A^{-c} (-A^2 - A^{-2})^{|B|-1}.$$

De estos, el término de menor grado es

$$A^{-c}(-A^{-2})^{|B|-1} = (-1)^{|B|-1} A^{-c-2(|B|-1)}.$$

Queda demostrar que no hay ningún otro término en  $\langle D \rangle$  de menor o igual grado que este. Para ello, sea  $S$  cualquier otro estado de  $D$  distinto a  $S_B$ . Tenemos que a partir de  $S_B$  podemos obtener  $S$  cambiando algunos suavizados tipo B por suavizados tipo A. Luego existe una sucesión de estados

$$S_B = S_0, S_1, \dots, S_n = S$$

tal que  $S_i$  se obtiene a partir de  $S_{i-1}$  cambiando un suavizado de tipo B por un suavizado de tipo A, con  $i = 1, \dots, n$ . Por tanto, tenemos que

$$\langle D|S_i \rangle = A^2 \langle D|S_{i-1} \rangle.$$

Además, como  $S_i$  se obtiene a partir de  $S_{i-1}$  cambiando el suavizado de un único cruce, el número de componentes conexas difiere como mucho en 1, sumando o restando (Figura 4.6). Como  $\delta = -A^2 - A^{-2}$ , tenemos que el menor grado de  $\delta^{|S_i|}$  difiere como mucho en 2 respecto al de  $\delta^{|S_{i-1}|}$ . Luego el menor grado que aporta  $S_i$  es mayor o igual que el que aporta  $S_{i-1}$  (la igualdad se da si el número de componentes conexas aumenta en uno).

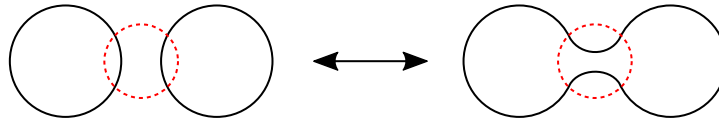


Figura 4.6: Al cambiar el tipo de suavizado, el número de componentes conexas difiere en 1, sumando o restando. En rojo se indica la región del diagrama sobre la que se ha aplicado los distintos tipos de suavizado.

Hasta ahora tenemos que el menor grado que aporta  $S_B$  es menor o igual que el grado de cualquier otro término de  $\langle D \rangle$ . Puede ocurrir que haya otros estados que aporten términos con el mismo grado y se anulen entre ellos, y, por tanto, el polinomio resultante tenga grado mínimo mayor. Veamos que esto es imposible.

Para ello, tenemos que ver que el grado que aporta  $S_1$  es estrictamente mayor que el que aporta  $S_0 = S_B$ . Esto ocurre ya que, como  $D$  es reducido, el número de componentes conexas de  $S_1$  disminuye en 1 respecto al de  $S_0$ . Lo demostramos por reducción al absurdo. Supongamos que partimos del estado  $S_B$ . Como solo hemos aplicado suavizados de tipo B, todas las regiones  $W$  de  $D$  se han unido en una y, además,  $S_B$  tiene

tantas componentes conexas como regiones B tiene  $D$ . Supongamos también que en  $S_B$  intercambiamos el suavizado de tipo B de un cruce por un suavizado de tipo A. Localmente, cambiar en un cruce un suavizado de tipo B por uno de tipo A separa dos regiones W y une dos regiones B. Luego, para que el número de componentes conexas aumente en lugar de disminuir al hacer este cambio, debe ocurrir que las dos regiones B realmente sean la misma (Figura 4.7). Esto solo puede ocurrir si es un cruce ineficaz, cosa que es imposible pues  $D$  es reducido.

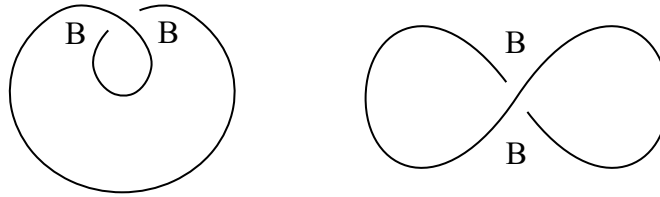


Figura 4.7: Las regiones B de estos cruces ineficaces son la misma región.

Por tanto, el menor grado que aporta  $S_B$  es estrictamente menor que el grado de cualquier otro término de  $\langle D \rangle$ . Luego  $(-1)^{|B|-1} A^{-c-2(|B|-1)}$  es el término de menor grado y, por tanto,  $\text{mín deg}\langle D \rangle = -c - 2(|B| - 1)$ .

De manera similar, se puede demostrar que si hacemos suavizados de tipo A en todos los cruces de  $D$ , obtenemos el término de mayor grado de todas las combinaciones posibles de suavizados, y su valor es  $c + 2(|W| - 1)$ . |

**Observación 4.7.** Las igualdades obtenidas en la Proposición 4.6 las podemos expresar sin depender de la coloración. Sea  $S_A$  el estado correspondiente a suavizar todos los cruces de  $D$  con un suavizado de tipo A. El número de regiones blancas coincide con el número de círculos en el estado  $S_A$ . Es decir, si denotamos por  $|S_A|$  al número de círculos de  $S_A$ , entonces  $|W| = |S_A|$ . De manera similar, llegamos a que  $|B| = |S_B|$ , donde  $S_B$  el estado correspondiente a suavizar todos los cruces de  $D$  con un suavizado de tipo B. Luego las igualdades se pueden escribir como

$$\text{máx deg}\langle D \rangle = c + 2(|S_A| - 1),$$

$$\text{mín deg}\langle D \rangle = -c - 2(|S_B| - 1).$$

La Proposición 4.6 nos lleva al siguiente resultado:

**Teorema 4.8.** *Dos diagramas alternantes, reducidos y conexos de un mismo enlace alternante tienen el mismo número de cruces.*

*Demostración.* Dado un diagrama  $D'$ , Definimos

$$\text{ancho}\langle D' \rangle = \text{máx deg}\langle D' \rangle - \text{mín deg}\langle D' \rangle.$$

Sea  $D$  un diagrama alternante, reducido y conexo, donde hemos asignado las etiquetas  $W$  y  $B$  como se indica en la Figura 4.2. Usando la Proposición 4.6, obtenemos que

$$\begin{aligned} \text{ancho}\langle D \rangle &= \text{máx deg}\langle D \rangle - \text{mín deg}\langle D \rangle \\ &= c + 2(|W| - 1) - [-c - 2(|B| - 1)] \\ &= 2c + 2(|W| + |B|) - 4, \end{aligned}$$

donde  $V$  es el número de cruces,  $|W|$  el número de regiones etiquetadas con  $W$  y  $|B|$  el número de regiones etiquetadas con  $B$ .

Se cumple que  $|W| + |B|$  es el número de regiones en las que el diagrama  $D$  divide al plano, luego usando la Proposición 4.3 obtenemos que  $|W| + |B| = 2 + c$ . Sustituyendo en la expresión anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \text{ancho}\langle D \rangle &= 2c + 2(|W| + |B|) - 4 \\ &= 2c + 2(c + 2) - 4 \\ &= 4c. \end{aligned}$$

Calculemos ahora el ancho del polinomio de Jones. Por definición, tenemos que  $V(D) = (-A)^{-3w(D)}\langle D \rangle$ . Luego

$$\begin{aligned} \text{ancho}V(D) &= \text{máx deg} V(D) - \text{mín deg} V(D) \\ &= [-3w(D) + \text{máx deg}\langle D \rangle] - [-3w(D) + \text{mín deg}\langle D \rangle] \\ &= \text{máx deg}\langle D \rangle - \text{mín deg}\langle D \rangle = \text{ancho}\langle D \rangle = 4c. \end{aligned} \tag{4.1}$$

$V(D)$  es un invariante, luego  $\text{ancho}V(D)$  también lo es. Como  $\text{ancho}V(D) = 4c$ , tenemos que  $c$ , que es el número de cruces de un diagrama alternante, reducido y conexo es también un invariante. Por tanto, dos diagramas alternantes, reducidos y conexos de un mismo enlace alternante tienen el mismo número de cruces. |

Observemos que para obtener estas igualdades es necesario exigir que el diagrama sea reducido, alternante y conexo, pues en la demostración se usa la Proposición 4.6.

## 4.2 Prueba de la Primera conjetura de Tait

A continuación vemos cómo se pueden generalizar los resultados vistos en la sección anterior (Proposición 4.6 y Teorema 4.8) a un diagrama conexo cualquiera. Para ello, es necesario el siguiente lema, conocido como el Lema del estado dual.

**Lema 4.9 (Lema del estado dual).** Sea  $D$  un diagrama conexo y  $S$  un estado de  $D$ . Sea  $\hat{S}$  el estado obtenido a partir de  $S$  intercambiando todos los suavizados tipo A por suavizados tipo B, y viceversa. A  $\hat{S}$  lo llamamos estado dual de  $S$ . Entonces,

$$|S| + |\hat{S}| \leq R,$$

donde  $R$  es el número de regiones de  $D$  y  $|S|$  y  $|\hat{S}|$  el número de círculos obtenidos al suavizar  $D$  siguiendo las etiquetas de los estados de  $S$  y  $\hat{S}$ , respectivamente.

**Demostración.** Procedamos por inducción en el número de cruces  $c$ . El caso  $c = 0$  lo podemos ver fácilmente. El diagrama es equivalente a una circunferencia, luego  $|S| = |\hat{S}| = 1$  y  $R = 2$  y, por tanto, se cumple la desigualdad.

Supongamos ahora que la desigualdad se cumple para todos los diagramas conexos con menos de  $c$  cruces, y sea  $D$  un diagrama conexo con  $c$  cruces. Sean  $D'$  y  $D''$  dos diagramas que se obtienen de  $D$  al suavizar un cruce  $c$  en las dos maneras posibles mientras el resto permanece sin cambios. Estos dos diagramas tienen  $c - 1$  cruces. Como  $D$  es conexo,  $D'$  o  $D''$  es conexo. Puede ocurrir que los dos sean conexos y, de hecho, el caso en el que solo uno sea conexo ocurre cuando  $c$  es un cruce ineficaz. Esto se muestra en la Figura 4.8. Si aplicamos un tipo de suavizado al cruce ineficaz  $c$  obtenemos un diagrama conexo, mientras que si aplicamos el otro tipo de suavizado, obtenemos un diagrama separado. En cambio, si  $c$  no fuese ineficaz, quiere decir que existe otra región del diagrama además del cruce  $c$  que une las regiones L y R, por lo que, independientemente del tipo de suavizado aplicado a  $c$ , el diagrama seguiría siendo conexo por esa otra región.

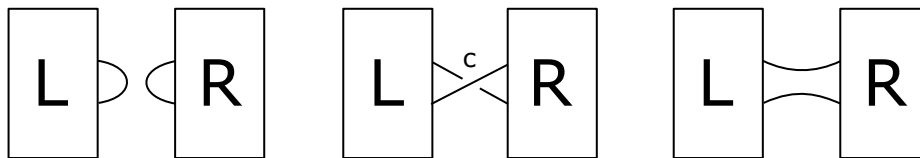


Figura 4.8: En el centro, un diagrama con un cruce ineficaz  $c$ . A la izquierda y a la derecha el diagrama que se obtiene al aplicar a  $c$  un suavizado de tipo A y de tipo B, respectivamente.



Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $D'$  es conexo, y aplicamos la hipótesis de inducción a este diagrama.

Sea  $S$  un estado de  $D$  tal que en  $c$  se ha realizado el mismo tipo de suavizado que hicimos en  $D$  para obtener  $D'$ , y sea  $\hat{S}$  el estado dual de  $S$ . A partir de  $S$ , construimos un estado  $S'$  de  $D'$  del siguiente modo: en cada cruce de  $D'$  hacemos el mismo tipo de suavizado que hay en  $S$ . Por construcción, tenemos que  $S$  y  $S'$  tienen el mismo número de componentes conexas, es decir,  $|S| = |S'|$ . Sea  $\hat{S}'$  el estado dual de  $S'$ .

Por inducción, como  $S'$  y  $\hat{S}'$  son estados de un diagrama con  $c - 1$  cruces, tenemos que  $|S'| + |\hat{S}'| \leq R'$ , donde  $R'$  es el número de regiones de  $D'$ . Como  $D'$  tiene un cruce menos que  $D$ , usando la Proposición 4.3, obtenemos que  $R' = R - 1$ .

Por otra parte, por la construcción de  $S'$ , tenemos que  $\hat{S}$  y  $\hat{S}'$  tienen el mismo tipo de suavizado en cada cruce excepto en el cruce  $c$ . Por tanto,  $\hat{S}'$  tiene, como mucho, una componente menos que  $\hat{S}$ . Es decir,

$$|\hat{S}'| + 1 \geq |\hat{S}| \quad (4.2)$$

A partir de la hipótesis de inducción, y usando que  $|S| = |S'|$  y  $R' = R - 1$ , obtenemos que

$$|S'| + |\hat{S}'| \leq R' \Rightarrow |S| + |\hat{S}'| \leq R - 1 \Rightarrow |S| + |\hat{S}'| + 1 \leq R,$$

y, por tanto, teniendo en cuenta la Ecuación 4.2,

$$R \geq |S| + |\hat{S}'| + 1 \geq |S| + |\hat{S}|,$$

como se quería probar. |

Si repetimos ahora la prueba de la Proposición 4.6 pero tomando ahora un diagrama  $D$  conexo cualquiera, obtenemos las siguientes desigualdades:

$$\text{máx deg}\langle D \rangle \leq c + 2(|S_A| - 1) \quad (4.3)$$

$$\text{mín deg}\langle D \rangle \geq -c - 2(|S_B| - 1), \quad (4.4)$$

donde  $c$  es el número de cruces de  $D$ ,  $S_A$  es el estado correspondiente a aplicar suavizados de tipo A a todos los cruces y  $S_B$  es el estado correspondiente a aplicar suavizados tipo B a todos los cruces. En esta ocasión obtenemos desigualdades en lugar de igualdades ya que  $D$  puede no ser reducido. Por tanto, no podemos asegurar que el mayor

grado que aporta el estado  $S_A$  sea mayor estricto que todos los grados de los demás términos. Luego puede haber otros estados que aporten términos con este mismo grado y, al sumar los términos en  $\langle D \rangle$ , se anulen, dando un polinomio de grado menor, como ocurre en el Ejemplo 4.10. Algo similar ocurre con la segunda desigualdad.

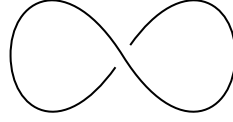


Figura 4.9: Diagrama no reducido del nudo trivial.

**Ejemplo 4.10.** Sea  $D$  el diagrama mostrado en la Figura 4.9, el cual es no reducido. Sean  $S_a$  y  $S_b$  los estados correspondientes a aplicar un suavizado de tipo A y un suavizado de tipo B al único cruce de  $D$ , respectivamente. Estos estados son los siguientes:

$$S_a : \text{diagrama de un cruce suavizado tipo A}, \quad S_b : \text{diagrama de dos círculos separados}.$$

Las aportaciones de  $S_a$  y  $S_b$  a  $\langle D \rangle$  son

$$\begin{aligned} \langle D|S_a \rangle \delta^{|S_a|-1} &= A, \\ \langle D|S_b \rangle \delta^{|S_b|-1} &= B\delta = A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) = -A - A^{-3}. \end{aligned}$$

Podemos ver que  $S_a$  aporta el término de mayor grado. Sin embargo,  $S_b$  también aporta un término del mismo grado (como  $D$  es no reducido, no podemos asegurar esto no ocurra). Al sumar ambas aportaciones para calcular  $\langle D \rangle$ , estos términos se anulan y obtenemos un polinomio de menor grado:

$$\langle D \rangle = \sum_S \langle D|S \rangle \delta^{|S|-1} = A - A - A^{-3} = -A^{-3}.$$

Tenemos el siguiente resultado, el cual generaliza la Ecuación 4.1.

**Proposición 4.11.** Sea  $D$  un diagrama conexo con  $c$  cruces. Entonces

$$\text{ancho}V(D) \leq 4c.$$

**Demostración.** Calculemos el ancho del polinomio de Jones usando las desigualdades mostradas en la Ecuación 4.3 y la Ecuación 4.4, obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{ancho}V(D) &= \text{ancho}\langle D \rangle = \text{máx deg}\langle D \rangle - \text{mín deg}\langle D \rangle \\ &\leq c + 2(|S_A| - 1) - (-c - 2(|S_B| - 1)) \\ &= 2c + 2(|S_A| + |S_B|) - 4. \end{aligned}$$

Ahora bien,  $S_B$  es el estado dual de  $S_A$ , luego, por el Lema 4.9,

$$\text{ancho}V(D) \leq 2c + 2(|S_A| + |S_B|) - 4 \leq 2c + 2R - 4,$$

donde  $R$  es el número de regiones de  $D$ . Usando ahora la Proposición 4.3, llegamos a

$$\text{ancho}V(D) \leq 2c + 2R - 4 = 2c + 2(c + 2) - 4 = 4c,$$

como se quería probar. |

Una vez vistos los resultados anteriores, estamos preparados para demostrar la Primera conjetura de Tait.

**| Teorema 1 (Primera conjetura de Tait).** *Un diagrama alternante, reducido y conexo de un enlace tiene el menor número posible de cruces de entre todos los diagramas que representan ese enlace.*

*Demostración.* Sea  $L$  es un enlace. Sean  $D$  y  $D'$  dos diagramas de  $L$ , tal que  $D'$  es conexo y  $D$  es conexo, alternante y reducido. Sean  $c$  y  $c'$  el número de cruces de  $D$  y  $D'$ , respectivamente. Con  $D'$  obtenemos la desigualdad  $\text{ancho}V(L) \leq 4c'$  (Proposición 4.11), pero con  $D$  obtenemos la igualdad  $\text{ancho}V(D) = 4c$  (Ecuación 4.1). Por tanto, como  $V(L)$  es un invariante, tenemos que  $c \leq c'$ . Es decir, un diagrama alternante, reducido y conexo de un enlace tiene el menor número posible de cruces de entre todos los diagramas de ese enlace. |

Para acabar esta sección, enunciamos el siguiente resultado. La demostración se puede consultar en [11].

**| Teorema 4.12.** *Sea  $D$  un diagrama conexo, no alternante, primo, que representa un enlace alternante  $L$ . Entonces  $D$  no es minimal en el número de cruces.*

Esto es,  $c(L) < c(D)$ , donde  $c(L)$  es el número de cruce de  $L$  (Definición 2.20) y  $c(D)$  es el número de cruces de  $D$ . La condición de primalidad es necesaria para que se cumpla este resultado. En el Ejemplo 4.13 mostramos un caso de nudo alternante, primo para el que existe un diagrama no alternante con el menor número de cruces.

**Ejemplo 4.13.** Sea  $K$  la suma conexa de dos nudos trébol como se indica en la Figura 4.10. Denotamos por  $D$  al diagrama mostrado en la Figura 4.10b.

Este nudo es alternante. En la Figura 4.11 mostramos un diagrama alternante  $D'$  que lo representa. La transformación para llevar  $D$  a  $D'$  la podemos ver de la siguiente forma: la región izquierda de  $D$  correspondiente a uno de los nudos trébol permanece

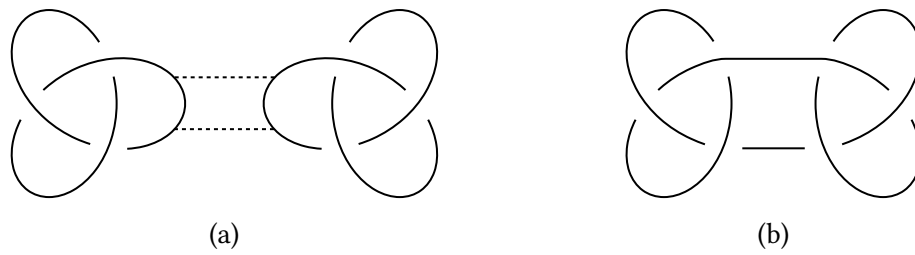


Figura 4.10: Diagrama del nudo  $K$  (b). Se ha obtenido al realizar la suma conexas de dos nudos trébol como se indica en (a).

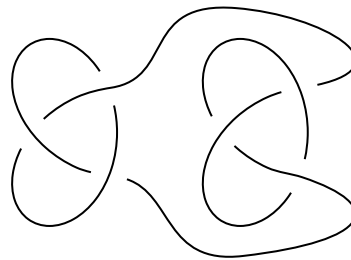


Figura 4.11: Diagrama alternante de  $K$ .

sin cambios, mientras que la región izquierda la reflejamos respecto un eje vertical del plano.

El diagrama  $D'$  tiene 6 cruces. Además es alternante, conexo y reducido, luego por la Primera conjetura de Tait (Teorema 1),  $D'$  es minimal en el número de cruces. Sin embargo, el diagrama  $D$  es no alternante y también tiene 6 cruces. Este resultado no entra en conflicto con el Teorema 4.12, pues  $D$  no es primo.

## 5 | Segunda conjetura de Tait

Esta sección está dedicada a la Segunda conjetura de Tait, la cual nos dice que la contorsión es un invariante de diagramas alternantes, reducidos y conexos que representan un mismo enlace. Fue probada de manera independiente en 1986 por Kunio Murasugi [12] y por Morwen Thistlethwaite [21]. Ambas pruebas usan métodos distintos. En la demostración de Murasugi se usan propiedades del polinomio de Jones y de la signatura, un invariante de enlace, para relacionar estos dos con la contorsión. En la prueba de Thistlethwaite, en cambio, se usan propiedades del polinomio en dos variables de Kauffman. Nosotros nos centraremos en la que dio Murasugi. La conjetura es la siguiente:

**| Conjetura 2 (Segunda conjetura de Tait).** *Dos diagramas alternantes, reducidos y conexos que representan un mismo enlace tienen la misma contorsión.*

En los siguientes apartados definiremos los conceptos que son necesarios para poder demostrar la Segunda conjetura de Tait, como la signatura y la matriz de Goeritz.

### 5.1 Superficies de Seifert de un enlace y signatura

Primero veremos cómo, dado un enlace  $L$ , construir una superficie orientable cuya frontera sea  $L$  y cómo construir un invariante a partir de esta superficie. Este invariante lo llamaremos signatura. Se omiten las pruebas de algunos resultados. Para más detalle, se puede consultar [2, capítulos 5 y 6].

**| Teorema 5.1 (Teorema de Seifert [16]).** *Todo enlace es la frontera de una superficie orientable.*

**Demostración.** Sea  $L$  un enlace. Si no está orientado, le damos una orientación. Sea  $D$  un diagrama de  $L$ . Podemos suponer que  $D$  se encuentra en el plano  $xy$  de  $\mathbb{R}^3$ .

El primer paso para construir la superficie es suavizar los cruces del diagrama. Esto es, en un pequeño entorno de cada cruce eliminamos el cruce y reconectamos los extremos sueltos en la única forma posible que sea compatible con la orientación, tal y como se muestra en la Figura 5.1. Obsérvese que el suavizado depende únicamente de la orientación de los arcos, no del signo del cruce (es decir, da igual qué arco va por encima). Esto se representa con un círculo en el punto de cruce.



Figura 5.1: En (a) se muestra un cruce sin suavizar y en (b) el mismo cruce suavizado.

Una vez hayamos suavizado todos los cruces, obtenemos un conjunto de circunferencias orientadas en el plano, sin ningún cruce entre ellas. Además, algunas de estas circunferencias pueden contener otras circunferencias. El siguiente paso es asignar a cada circunferencia  $\lambda$  un valor  $h(\lambda)$ , que corresponde al número de circunferencias que contienen a  $\lambda$ . La idea es usar estos valores como una función altura.

Para cada circunferencia  $\lambda$ , tomamos un disco  $\Delta$  en el plano  $z = h(\lambda)$  tal que, si consideramos la proyección  $\pi(x, y, z) = (x, y, 0)$ , su frontera  $\partial\Delta$  se proyecta en  $\lambda$  (esto es,  $\pi(\partial\Delta) = \lambda$ ). Todos los discos se encuentran en el semiespacio superior de  $\mathbb{R}^3$  y, si los miramos desde arriba, la frontera de cada disco es visible. Los discos heredan la orientación de las circunferencias. Sus caras pueden colorearse de dos colores según la orientación. Si la frontera de un disco está orientada en el sentido antihorario cuando lo miramos desde arriba, entonces la cara superior de ese disco la coloreamos de rojo y la inferior de azul. En caso contrario, la superior la coloreamos de azul y la inferior de rojo.

Para terminar de construir la superficie, hace falta pegar pequeñas bandas en los lugares correspondientes a cada cruce. Estas bandas hacen medio giro sobre sí mismas. El sentido de este giro se elige en función del cruce correspondiente, como podemos observar en la Figura 5.2.

Hemos generado una superficie cuya frontera es  $L$ . Falta probar que es orientable. Para ello, veamos que las bandas admiten una coloración que sea compatible con la que ya hemos dado a los discos.

Como podemos ver en Figura 5.1, cuando suavizamos un cruce obtenemos dos

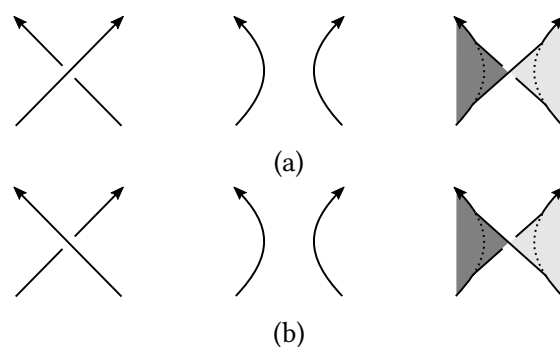


Figura 5.2: A la izquierda, los cruces sin suavizar. En el centro, los cruces suavizados. A la derecha, la superficie una vez se ha pegado la banda.

arcos orientados en el mismo sentido (en el caso de la figura, hacia arriba). Si hacemos que cada arco forme parte de una circunferencia distinta, pueden ocurrir dos casos: o bien las dos circunferencias están orientadas en el mismo sentido y, por tanto, una contenida en la otra, o bien las dos circunferencias tienen distinta orientación y, por tanto, ninguna contiene a la otra.

Si esto lo trasladamos a la superficie, como las bandas provienen de cruces, tenemos que o bien una banda une dos discos que se encuentran a la misma altura y poseen orientaciones opuestas, o bien une dos discos cuya altura difiere en 1 y tienen la misma orientación. En el primer caso, como los discos tienen orientaciones opuestas, sus caras superiores poseen colores distintos, luego los colores se pueden extender a la banda sin problemas gracias a que este hace un medio giro. En el segundo caso, los dos discos poseen el mismo color en sus caras superiores, pero como la altura entre ellos difiere en 1, tenemos que la banda une la cara superior de un disco con la cara superior del otro y, por tanto, los colores también se pueden extender naturalmente a la banda sin ningún problema.

Por tanto, tenemos que la superficie posee dos caras y es orientable. |

**Definición 5.2.** *Una superficie de Seifert es una superficie orientable cuya frontera es un enlace.*

Por ejemplo, las superficies obtenidas mediante el algoritmo descrito en la prueba del Teorema 5.1, llamado algoritmo de Seifert, son superficies de Seifert.

**Ejemplo 5.3.** Sea  $D$  el diagrama orientado del nudo  $8_{16}$  mostrado en la Figura 5.3. A continuación construimos una superficie de Seifert de  $D$  aplicando el algoritmo de Seifert.

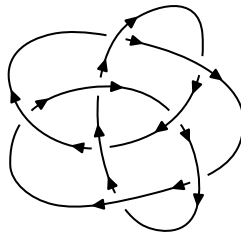


Figura 5.3: Diagrama del nudo  $8_{16}$ .

Al suavizar los cruces obtenemos la configuración de circunferencias orientadas que se muestra en la Figura 5.4a. La circunferencia exterior se corresponde con un disco a altura 0, la intermedia con un disco a altura 1 y la interior con un disco a altura 2. Además, estos discos están orientados en el sentido horario, luego coloreamos sus caras superiores de azul (Figura 5.4b).

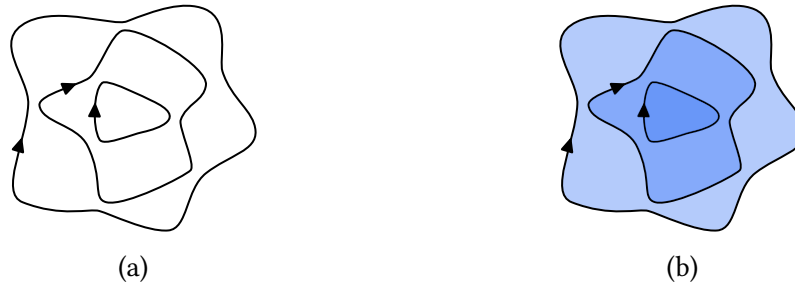


Figura 5.4: Circunferencias que se obtienen al suavizar los cruces de  $D$  (a) y los discos correspondientes (b).

Finalmente, pegamos bandas en los lugares correspondientes a cada cruce. Estas bandas hacen medio giro sobre sí mismas. El sentido de este giro se elige en función del cruce correspondiente. La superficie de Seifert obtenida se muestra en la Figura 5.5.

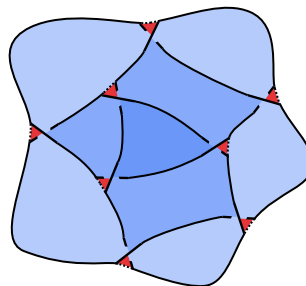


Figura 5.5: Superficie obtenida al aplicar el algoritmo de Seifert al diagrama  $D$ .



Nosotros estamos interesados en superficies conexas. Observemos que si el diagrama no es conexo, entonces la superficie obtenida tampoco es conexa. Esto no nos supone ningún problema, ya que de cualquier enlace podemos obtener un diagrama conexo reubicando las componentes si es necesario. También es posible conectar dos superficies conexas mediante una operación de pegado de tubos (Definición 5.12) sin alterar el borde de las superficies. Por ello, en adelante asumimos que las superficies de Seifert son conexas.

Sea  $S$  una superficie de Seifert obtenida a partir de un enlace. Queremos ahora calcular su primer grupo de homología,  $H_1(S)$ . Para calcular  $H_1(S)$ , primero construimos un grafo  $G_S$  a partir de la superficie  $S$ . Este grafo se conoce como grafo de Seifert.

**Definición 5.4.** *Sea  $D$  un diagrama y sea  $S = S_D$  la superficie obtenida al aplicar el algoritmo de Seifert a  $D$ . Se define el grafo de Seifert asociado a  $S$ ,  $G_S$ , como el grafo obtenido al aplicar el siguiente procedimiento:*

1. Asociamos un vértice a cada disco de  $S$ .
2. Por cada rectángulo que una dos discos en  $S$ , añadimos una arista que conecte los dos vértices correspondientes.

Como  $S_D$  es conexa, tenemos que  $G_S$  también lo es.

**Teorema 5.5.** *La superficie  $S$  colapsa al grafo  $G_S$  y, por tanto,*

$$H_1(S) \cong H_1(G_S).$$

Luego, para encontrar una base de  $H_1(S)$ , podemos usar el siguiente método:

1. Construimos el grafo de Seifert asociado a  $S$ ,  $G_S$ .
2. Elegimos un árbol maximal  $T$  de  $G_S$ .
3. Para cada arista  $e \in (G_S - T)$ , el grafo  $T \cup e$  contiene un único ciclo. El conjunto de estos ciclos forma una base de  $H_1(G_S)$  y, por tanto, de  $H_1(S)$ .

Dada una base de  $H_1(S)$ , podemos construir lo que se conoce como matriz de Seifert. Para ello, primero engrosamos la superficie  $S$  de la siguiente forma. Recordemos que  $S$  tiene dos caras, que llamaremos positiva y negativa. Sin pérdida de generalidad, asumimos que la cara positiva es la cara coloreada de rojo. Sea

$$b : S \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

un homeomorfismo tal que  $b(S \times \{0\}) = S$  y  $b(S \times \{1\})$  se encuentre sobre la cara positiva de  $S$ . Cualquier subconjunto  $X \subset S$  se puede ‘levantar’ de la superficie mediante el homeomorfismo  $b$  hacia las dos caras. Denotamos  $X^+ = b(X \times \{1\})$ .

Estamos interesados en levantar los ciclos de la superficie  $S$ . Para ello, basta hacerlo para los elementos de la base de  $H_1(S)$ . Sea entonces  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base de  $H_1(S)$ . Si tomamos dos elementos  $e_i$  y  $e_j$  de la base, estos se pueden intersectar. Sin embargo, si levantamos uno de ellos, esto ya no es posible. Podemos definir la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \Theta : H_1(S) \times H_1(S) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (e_i, e_j) &\mapsto lk(e_i, e_j^+). \end{aligned}$$

La matriz de Seifert se define a partir de estos pares del siguiente modo.

**Definición 5.6.** Sea  $D$  un diagrama y sea  $S = S_D$  la superficie obtenida al aplicar el algoritmo de Seifert a  $D$ . Sea  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base de  $H_1(S)$ . Se define la matriz de Seifert  $M$  como

$$(a_{i,j}) = \Theta(e_i, e_j) = lk(e_i, e_j^+).$$

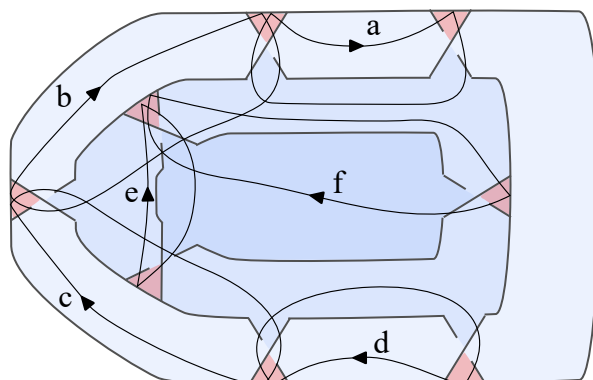
La matriz de Seifert no es un invariante de enlace. Depende del diagrama escogido (pues la superficie  $S$  depende del diagrama) y de la base de  $H_1(S)$  elegida. Una matriz de Seifert  $M$  es la matriz de la aplicación  $\Theta$  definida anteriormente, luego un cambio de la base se refleja en la matriz de Seifert por una transformación de congruencia de la forma  $M \rightarrow P^T M P$ , donde  $P \in GL(n, \mathbb{Z})$  es una matriz invertible con entradas enteras.

**Ejemplo 5.7.** En el Ejemplo 5.3 construimos una superficie de Seifert  $S$  del nudo  $8_{16}$ . En la Figura 5.6 mostramos esa misma superficie, donde indicamos una base de  $H_1(S)$ .

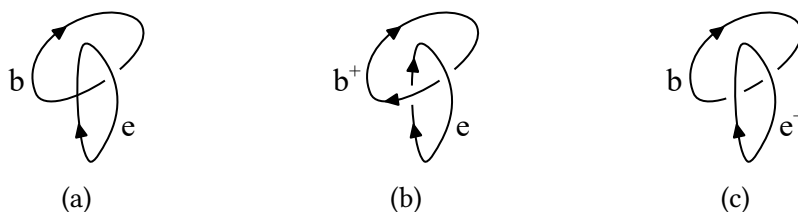
Calculemos la matriz de Seifert  $M$  correspondiente a esta base. Indicamos cómo se calculan algunas de las entradas. Primero observamos que algunos generadores no se cruzan como, por ejemplo,  $a$  y  $c$ . Luego  $lk(a, c^+) = lk(c, a^+) = 0$ . Esto se aplica también a los pares  $(a, d)$ ,  $(a, f)$ ,  $(b, d)$ ,  $(d, e)$  y  $(d, f)$ , entre otros.

Además,  $e$  y  $f$  se encuentran en la parte superior de la superficie, mientras que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  en la inferior. Luego los ciclos  $e^+$  y  $f^+$  se levantan lejos de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ . Por tanto, los números de enlace correspondientes de  $e^+$  y  $f^+$  con  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son cero.

A continuación consideramos algunos de los casos restantes. El resto se calcula análogamente. En la Figura 5.7a se muestra como se cruzan los ciclos  $b$  y  $e$ . Podemos

Figura 5.6: Superficie de Seifert para el nudo  $8_{16}$ .

observar en la superficie que  $b$  pasa por debajo de una de las bandas por donde pasa  $e$ . Esto se corresponde con el cruce en el diagrama que tiene la altura indicada, pues tanto  $b$  como  $b^+$  van a pasar por debajo de  $e$  en ese punto. Además, los dos ciclos tienen un punto de intersección, que se muestra en el diagrama como un cruce sin indicar la altura. El ciclo que se levante será el que pase por arriba en ese punto (Figura 5.7b y Figura 5.7c). Teniendo esto en cuenta,  $lk(b, e^+) = 0$ , como mencionamos anteriormente, y  $lk(e, b^+) = -1$ .

Figura 5.7: Ciclos  $b$  y  $e$ .

Si dos ciclos pasan por la misma banda, hacemos que uno vaya por el borde inferior y el otro por el borde superior. En la Figura 5.8 se muestra el caso  $(a, b)$ , donde hacemos que  $a$  vaya por el borde superior y  $b$  por el inferior. Tenemos que  $lk(a, b^+) = -1$  y  $lk(b, a^+) = 0$ .

Por último, en la Figura 5.9 se muestra el caso de  $a$  consigo mismo. La idea es similar. Consideramos dos copias de  $a$  y, por cada banda por la que pase, hacemos que uno vaya por el borde superior y el otro por el borde inferior. Hemos elegido que si un ciclo va por el borde superior en una banda, en la otra va por el borde inferior. En este caso en particular, esta elección evita intersecciones entre las dos copias de  $a$ . Tenemos que  $lk(a, a^+) = 1$ .

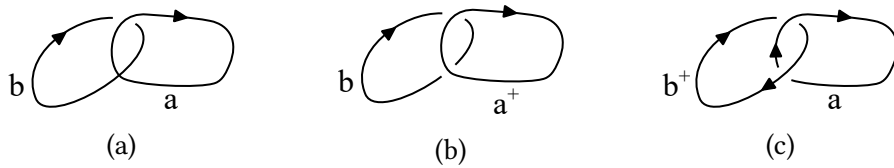


Figura 5.8: Ciclos  $a$  y  $b$ .

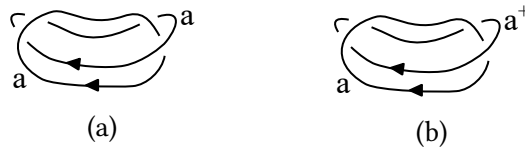


Figura 5.9: Ciclo  $a$  consigo mismo.

La matriz de Seifert  $M$  es la siguiente:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 & a^+ & b^+ & c^+ & d^+ & e^+ & f^+ \\
 a & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 b & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 c & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
 d & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 e & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
 f & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

Aunque la matriz de Seifert no es un invariante de enlace, la podemos usar para definir un nuevo invariante. Para ello, definamos primero el concepto de signatura de una matriz.

**Definición 5.8.** La signatura de una matriz  $M$ ,  $\sigma(M)$ , se define como

$$\sigma(M) = p - n,$$

donde  $p$  es el número de autovalores positivos y  $n$  es el número de autovalores negativos, contando la multiplicidad en ambos casos.

A partir de la signatura de una matriz podemos definir la signatura de un diagrama.

**Definición 5.9.** Sea  $D$  un diagrama de un enlace  $L$  y  $M$  una matriz de Seifert obtenida a partir de  $D$ . La signatura de  $D$ ,  $\sigma(D)$ , se define como la signatura de  $M + M^T$ . Es decir,

$$\sigma(D) = \sigma(M + M^T),$$

donde  $M^T$  es la matriz traspuesta de  $M$ .

La matriz  $M$  depende de la base de  $H_1(S_D)$  elegida, por lo que la signatura de un diagrama podría depender de esta base. El siguiente resultado nos asegura que la signatura está bien definida.

**| Teorema 5.10 (Ley de Inercia de Sylvester).** *Dos matrices simétricas reales son congruentes si y solo si tienen el mismo número de autovalores positivos, negativos y ceros.*

Es decir, la congruencia preserva la signatura de una matriz.

**Proposición 5.11.** *La signatura de un diagrama no depende de la base de  $H_1(S_D)$  elegida.*

**Demostración.** Para ver que la signatura de un diagrama no depende de la base elegida, veamos que es invariante por cambios de base. Para ello, como un cambio de base se refleja en la matriz de Seifert por una transformación de congruencia, veamos que es invariante por transformaciones de este tipo.

Sea  $D$  un diagrama de un enlace  $L$  y  $M$  una matriz de Seifert obtenida a partir de  $D$ . Supongamos que a  $M$  le aplicamos una transformación de congruencia, obteniendo  $N = P^T M P$ . Hay que ver que  $\sigma(M + M^T) = \sigma(N + N^T)$ . Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} N + N^T &= P^T M P + (P^T M P)^T \\ &= P^T M P + P^T M^T (P^T)^T \\ &= P^T M P + P^T M^T P \\ &= P^T (M + M^T) P. \end{aligned}$$

Luego si a  $M$  le aplicamos una transformación de congruencia, a  $M + M^T$  se le aplica la misma transformación. Como  $M + M^T$  es simétrica, por la Ley de Inercia de Sylvester, tenemos que  $\sigma(M + M^T)$  es invariante bajo transformaciones de congruencia de  $M$ . Luego la signatura de  $D$ ,  $\sigma(M + M^T)$ , no depende de la base de  $H_1(S_D)$  elegida. |

Nuestro objetivo ahora es ver que la signatura es un invariante de enlace. Daremos una idea de la demostración, sin entrar en detalle. Primero, dada una superficie, necesitamos definir una operación sobre ella, que llamaremos pegado de tubos.

**| Definición 5.12.** *Sea  $S$  una superficie. El procedimiento para pegar un tubo  $A = S^1 \times [0, 1]$  en  $S$  es el siguiente:*

1. *Tomamos dos discos disjuntos,  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$ , en  $S$ .*

2. Eliminamos el interior de  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$ .
3. Identificamos los extremos del tubo  $A$  con  $\partial\Delta_1$  y  $\partial\Delta_2$ . Si  $S$  es orientable, se identifica de manera que sea compatible con la orientación.

El proceso inverso a esta operación lo llamaremos eliminación de tubos. A partir del pegado de tubos, podemos definir una equivalencia entre superficies de Seifert obtenidas a partir de un enlace.

**| Definición 5.13.** Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos enlaces, y sean  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies de Seifert asociadas a  $L_1$  y  $L_2$ , respectivamente. Decimos que  $S_1$  y  $S_2$  son  $S$ -equivalentes si una se puede transformar en la otra mediante una sucesión de isotopías ambientes y pegado o eliminación de tubos.

Obtenemos el siguiente resultado sobre superficies  $S$ -equivalentes ([2], Teorema 5.5.1)

**| Teorema 5.14.** Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies tales que  $\partial S_1$  y  $\partial S_2$  son enlaces equivalentes. Entonces  $S_1$  y  $S_2$  son  $S$ -equivalentes.

Es decir, si  $S_1$  y  $S_2$  son dos superficies de Seifert obtenidas a partir de un mismo enlace, entonces podemos transformar una en la otra mediante una sucesión de isotopías ambiente y pegado o eliminación de tubos. Luego, si obtenemos alguna propiedad de las matrices de Seifert que sea invariante bajo estas operaciones, entonces hemos obtenido un invariante de enlace.

**| Definición 5.15.** Dos matrices cuadradas  $M_1$  y  $M_2$  son  $S$ -equivalentes si  $M_1$  se puede transformar en  $M_2$  mediante una serie de operaciones que se definen a continuación:

1. Congruencia:  $M \rightarrow P^T M P$ , donde  $P$  es una matriz invertible con entradas enteras.
2. Ampliación:

$$M \rightarrow \begin{pmatrix} & & * & 0 \\ & M & \vdots & \vdots \\ & & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad M \rightarrow \begin{pmatrix} & & 0 & 0 \\ & M & \vdots & \vdots \\ & & 0 & 0 \\ * & \dots & * & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde los asteriscos indican enteros desconocidos.

3. Reducción: la operación inversa de ampliación.

Realizar estas operaciones en una matriz de Seifert equivalen a las operaciones de S-equivalencia en superficies. Las operaciones de ampliación y reducción se corresponden con el pegado y eliminación de tubos. Por otra parte,  $M \rightarrow P^T M P$  tiene que ver con el cambio de base. Luego tenemos el siguiente resultado.

**| Teorema 5.16.** *Si dos superficies son S-equivalentes, entonces sus correspondientes matrices de Seifert son S-equivalentes.*

Por tanto, para ver que la signatura es invariante de enlace vamos a ver que es invariante bajo S-equivalencia.

**| Teorema 5.17.** *Sea  $L$  un enlace,  $S$  una superficie de Seifert de  $L$  y  $M$  una matriz de Seifert de  $S$ . Entonces,  $\sigma(M + M^T)$  es un invariante de enlace que notamos  $\sigma(L)$ .*

**Demostración.** Tenemos que ver que si aplicamos transformaciones de congruencia y operaciones de ampliación y reducción a  $M$ , entonces  $\sigma(M + M^T)$  es invariante.

La invarianza por transformaciones de congruencia ya está probada en la demostración de la Proposición 5.11.

Para la segunda parte, por la forma de las matrices de ampliación de la Definición 5.15, si a  $M$  le aplicamos una ampliación tenemos que la matriz ampliada de  $M + M^T$  tiene la siguiente forma:

$$N + N^T = \begin{pmatrix} & & * & 0 \\ & M + M^T & \vdots & \vdots \\ & & * & 0 \\ * & \dots & * & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los valores mostrados por asteriscos los podemos hacer cero mediante transformaciones de congruencia (pues equivale a un cambio de base). Al aplicar una transformación de congruencia a  $N + N^T$ , también le aplicamos otra a la submatriz  $M + M^T$ . Por la Ley de Inercia de Sylvester,  $\sigma(N + N^T)$  y  $\sigma(M + M^T)$  son invariantes por estas transformaciones. Una vez hayamos hecho cero los asteriscos, la signatura de la matriz es la suma de las signaturas de los dos bloques diagonales. El bloque  $2 \times 2$  de abajo a la derecha tiene signatura cero (sus autovalores son 1 y  $-1$ ). Luego

$$\sigma(N + N^T) = \sigma(M + M^T) + \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma(M + M^T)$$

Por tanto, la signatura es invariante por operaciones de ampliación y reducción.

Luego la signatura es un invariante de enlace. |

Finalmente, un resultado que nos permite calcular la signatura de una forma práctica.

**| Teorema 5.18 ([2, Lema 6.8.1]).** Sea  $A$  una matriz simétrica  $n \times n$ . Entonces existe una secuencia  $\Delta_0 = 1, \Delta_1, \dots, \Delta_n$  de menores principales de  $A$  que satisfacen las siguientes condiciones:

1.  $\Delta_i$  es un menor principal de  $\Delta_{i+1}$ , con  $i = 1, \dots, n - 1$ .
2. No hay dos matrices consecutivas  $\Delta_i$  y  $\Delta_{i+1}$  que sean ambas no invertibles.

Entonces, la signatura de  $A$  se puede calcular de la siguiente forma:

$$\sigma(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \text{signo}(\det \Delta_i \cdot \det \Delta_{i+1}),$$

donde

$$\text{signo}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

**Ejemplo 5.19.** En el Ejemplo 5.7 calculamos la matriz de Seifert  $M$  de una superficie de Seifert para el nudo  $K = 8_{16}$ . Recordemos la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculemos a partir de  $M$  la signatura de  $K$ . La matriz  $M + M^T$  es la siguiente:

$$M + M^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene 4 autovalores positivos y 2 negativos. Luego la signatura de  $K$  es  $\sigma(K) = 2$ .



Calculemos la signatura por el método del Teorema 5.18. La secuencia de menores principales es la siguiente:

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = (2), \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_6 = M + M^T.$$

Sus determinantes son:

$$\det \Delta_0 = 1, \quad \det \Delta_1 = 2, \quad \det \Delta_2 = 3, \quad \det \Delta_3 = 4,$$

$$\det \Delta_4 = 5, \quad \det \Delta_5 = -14, \quad \det \Delta_6 = 35.$$

Luego,

$$\text{signo}(\det \Delta_0 \det \Delta_1) = 1, \quad \text{signo}(\det \Delta_1 \det \Delta_2) = 1, \quad \text{signo}(\det \Delta_2 \det \Delta_3) = 1,$$

$$\text{signo}(\det \Delta_3 \det \Delta_4) = 1, \quad \text{signo}(\det \Delta_4 \det \Delta_5) = -1, \quad \text{signo}(\det \Delta_5 \det \Delta_6) = -1.$$

Por tanto,

$$\sigma(K) = 1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1 = 2.$$

Este valor coincide con el calculado anteriormente.

## 5.2 Matriz de Goeritz

En esta sección definiremos a partir del diagrama de un enlace una nueva matriz, llamada de Goeritz. Además, veremos un resultado que nos dice cómo relacionar la signatura de un enlace con la signatura de esta matriz; la demostración se puede consultar en [4].

Sea  $D$  un diagrama de un enlace  $L$ . Para poder definir la matriz de Goeritz, primero debemos dar a las regiones de  $D$  un coloreado de ajedrez.

**Definición 5.20.** Un coloreado de ajedrez consiste en colorear cada región de  $D$  de color blanco o de color negro, de manera que dos regiones adyacentes tengan colores distintos.

En la Figura 5.10 podemos ver un ejemplo.

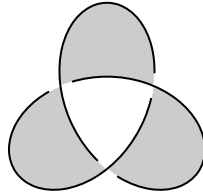


Figura 5.10: Coloreado de ajedrez de un diagrama del nudo trébol.

Cuando aplicamos una coloración de ajedrez a un diagrama  $D$ , podemos clasificar los cruces en dos tipos. Decimos que un cruce es  $\eta$ -positivo si al recorrer el arco superior, las zonas coloreadas de negro quedan abajo a la derecha y arriba a la izquierda. En caso contrario, decimos que el cruce es  $\eta$ -negativo. La Figura 5.11 ilustra esta definición.

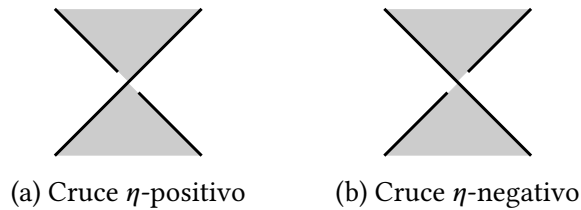


Figura 5.11

Podemos asignar a cada cruce  $c$  de  $D$  un valor de incidencia de la siguiente forma.

$$\eta(c) = \begin{cases} +1 & \text{si } c \text{ es } \eta\text{-positivo,} \\ -1 & \text{si } c \text{ es } \eta\text{-negativo.} \end{cases}$$

Un resultado relacionado con esta clasificación de los cruces es el siguiente.

**Proposición 5.21.** Sea  $D$  un diagrama alternante y conexo. Aplicamos a  $D$  una coloración de ajedrez. Entonces, o bien todos sus cruces son  $\eta$ -positivos, o bien todos sus cruces son  $\eta$ -negativos.

**Demostración.** Lo demostramos por reducción al absurdo. Supongamos que en un diagrama  $D$  alternante y conexo al que se le aplicó una coloración de ajedrez tiene

al menos un cruce  $\eta$ -positivo y al menos un cruce  $\eta$ -negativo. Como  $D$  es conexo, entonces debe haber dos cruces adyacentes tales que uno es  $\eta$ -positivo y el otro es  $\eta$ -negativo. Sean  $c_{\eta+}$  y  $c_{\eta-}$  estos cruces, respectivamente. Por cruces adyacentes nos referimos a que si consideramos el grafo correspondiente a la proyección subyacente de  $D$ , entonces los vértices correspondientes son adyacentes.

Al ser  $c_{\eta+}$  y  $c_{\eta-}$  adyacentes, al menos debe existir una región  $r$  de  $D$  tal que  $c_{\eta+}$  y  $c_{\eta-}$  sean incidentes a  $r$ . Además, como hemos fijado de qué tipo es cada cruce, el color de  $r$  indica qué arco de cada cruce es el superior. Como uno es  $\eta$ -positivo y el otro es  $\eta$ -negativo, el arco que los une, o bien es superior en los dos cruces, o bien es inferior en los dos, como se muestra en la Figura 5.12. |

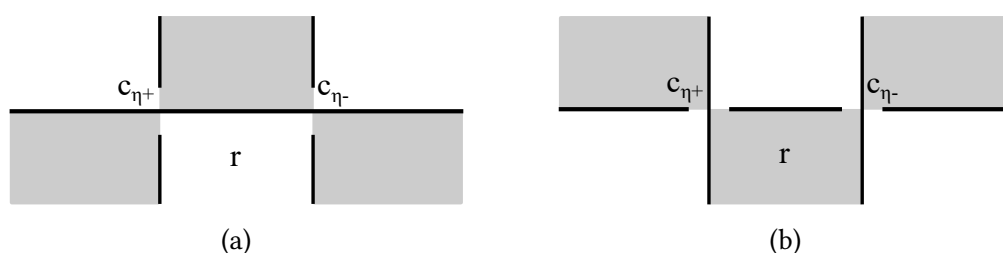


Figura 5.12: Si un cruce  $\eta$ -positivo es adyacente a un cruce  $\eta$ -negativo, entonces el diagrama no es alternante.

**Observación 5.22.** Si el diagrama  $D$  no fuera conexo, entonces podría haber cruces  $\eta$ -positivos y cruces  $\eta$ -negativos en  $D$ . Sin embargo, en cada componente conexa todos los cruces o bien son  $\eta$ -positivos o bien son  $\eta$ -negativos.

A continuación definimos la matriz de Goeritz, introducida por Lebrecht Goeritz en [3].

**Definición 5.23.** Sea  $L$  un enlace y  $D$  un diagrama de  $L$ . Consideramos un coloreado de ajedrez para las regiones de  $D$ . Denotamos a las regiones blancas por  $X_0, \dots, X_n$ . Se define la matriz  $G' = (g_{i,j})$ , para  $i, j = 0, \dots, n$ , como

$$g_{i,j} = \begin{cases} -\sum \eta(c) & \text{sumado sobre los cruces } c \text{ incidentes a } X_i \text{ y } X_j, \text{ si } i \neq j, \\ -\sum_{\substack{k=0, \dots, n \\ k \neq i}} g_{i,k} & \text{si } i = j. \end{cases}$$

La matriz de Goeritz  $G$  asociada a  $D$  es la matriz que se obtiene a partir de  $G'$  eliminando la fila y columna 0. Es decir,

$$G = (g_{i,j}), \quad i, j = 1, \dots, n$$

La matriz  $G$  depende de la proyección de  $L$  usada, de la coloración y de la ordenación de las zonas blancas. La convención de Goeritz era asignar a la región no acotada de  $D$  el color blanco y numerar esta región como  $X_0$ .

*Ejemplo 5.24.* Sea  $D$  el diagrama del nudo ocho mostrado en la Figura 5.13, al cual se le ha aplicado una coloración de ajedrez y se han numerado las regiones blancas. Calculemos la matriz de Goeritz  $G$  de  $D$ .

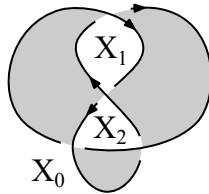


Figura 5.13: Diagrama del nudo ocho.

Primero hay que calcular la matriz  $G'$  asociada. Observemos que todos los cruces son  $\eta$ -positivos. Calculemos las entradas no diagonales de  $G'$ . Las regiones  $X_0$  y  $X_2$  tienen dos cruces incidentes. Como estos cruces son  $\eta$ -positivos, tenemos que  $a_{0,2} = a_{2,0} = -2$ . El resto de entradas no diagonales las calculamos de manera similar. Obtenemos:

$$G' = \begin{pmatrix} a_{0,0} & -1 & -2 \\ -1 & a_{1,1} & -1 \\ -2 & -1 & a_{2,2} \end{pmatrix}.$$

A continuación calculamos las entradas diagonales. El valor de cada entrada diagonal es la suma de los demás elementos de su fila correspondiente, pero cambiada de signo. Por tanto,

$$G' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por último, la matriz de Goeritz  $G$  asociada a  $D$  es la matriz que se obtiene a partir de  $G'$  eliminando la fila y columna 0. Obtenemos:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, si tomamos un diagrama orientado, entonces podemos hacer otra clasificación de los cruces. Si los dos arcos están orientados hacia una zona blanca,

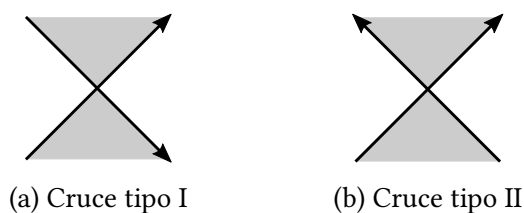


Figura 5.14: Esta clasificación es independiente de qué arco es el superior, por lo que no lo indicamos.

entonces decimos que son de tipo I, mientras que si están orientados hacia una zona negra, entonces son de tipo II. En la Figura 5.14 lo podemos ver ilustrado.

Combinando ambas clasificaciones, se obtienen los cuatro tipos de cruces mostrados en la Figura 5.15.

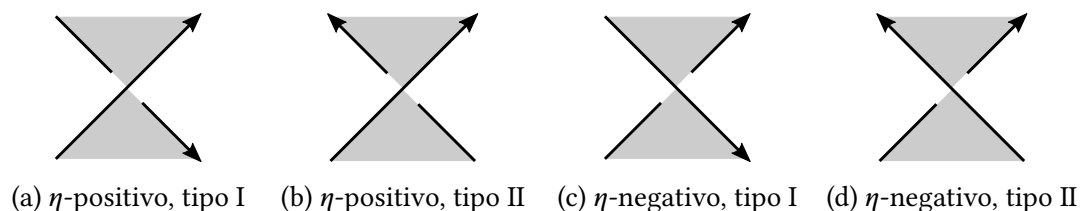


Figura 5.15

Definimos la siguiente función sobre un diagrama orientado  $D$  con un coloreado de ajedrez asignado.

$$\eta(D) = \sum_{\substack{c \in D \\ c \text{ tipo II}}} \eta(c),$$

donde el sumatorio es sobre todos los cruces de tipo II de  $D$ .

Entonces tenemos el siguiente resultado [4, Teorema 6"], que relaciona la signatura de un enlace con la signatura de la matriz de Goeritz.

**| Teorema 5.25.** *Sea  $L$  un enlace orientado y  $D$  una proyección de  $L$ . Sea  $G$  la matriz de Goeritz asociada a  $D$ . Entonces*

$$\sigma(L) = \sigma(G) - \eta(D).$$

**Observación 5.26.** Como se probó en el Teorema 5.17,  $\sigma(L)$  es un invariante de enlace. Sin embargo, tanto  $\sigma(G)$  como  $\eta(D)$  dependen de la matriz  $G$  y del diagrama  $D$  elegidos. Este resultado nos indica que la diferencia entre ambos valores,  $\sigma(G) - \eta(D)$ , sí es un invariante de enlace. Ilustramos esta observación con el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5.27.** Sea  $L$  el nudo ocho, el cual tiene signatura  $\sigma(L) = 0$ , y sean  $D_1$  y  $D_2$  los diagramas orientados de  $L$  mostrados en la Figura 5.16, a los cuales se les ha aplicado una coloración de ajedrez y se han numerado las caras coloreadas de blanco.

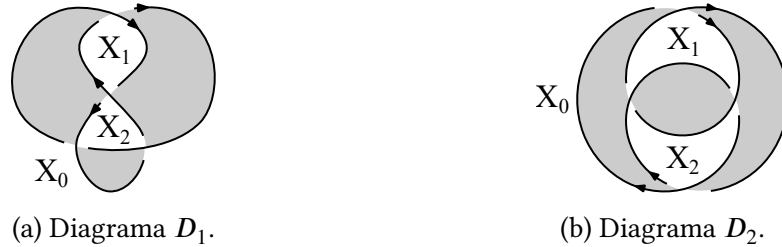


Figura 5.16: Diagramas del nudo ocho.

En el Ejemplo 5.24 calculamos la matriz de Goeritz  $G_1$  asociada a  $D_1$ :

$$G_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene dos autovalores positivos, luego  $\sigma(G_1) = 2$ . Por otra parte,  $D_1$  tiene dos cruces de tipo II: el cruce incidente a  $X_0$  y  $X_1$  y el cruce incidente a  $X_1$  y  $X_2$ . Estos cruces son  $\eta$ -positivos, luego  $\eta(D_1) = 2$ .

Calculemos la matriz de Goeritz  $G_2$  asociada a  $D_2$ . Para ello, primero calculamos la matriz  $G'_2$ . Tenemos que

$$G'_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$G_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

La matriz  $G_2$  tiene dos autovalores negativos, luego  $\sigma(G_2) = -2$ . Por otra parte,  $D_2$  tiene dos cruces de tipo II: el cruce incidente a  $X_0$  y  $X_1$  y el cruce incidente a  $X_0$  y  $X_2$ . Estos cruces son  $\eta$ -negativos, luego  $\eta(D_2) = -2$ .

Tenemos que  $\sigma(G_1) \neq \sigma(G_2)$  y  $\eta(D_1) \neq \eta(D_2)$ . Sin embargo, aunque estos valores dependan del diagrama y matriz elegida, la diferencia entre ellos coincide para ambos diagramas:

$$\begin{aligned} \sigma(G_1) - \eta(D_1) &= 2 - 2 = 0 = \sigma(L), \\ \sigma(G_2) - \eta(D_2) &= -2 - (-2) = 0 = \sigma(L). \end{aligned}$$

### 5.3 Matrices de tipo especial

Finalmente, antes de poder demostrar la Segunda conjetura de Tait, necesitamos definir el concepto de matrices de tipo especial. Los conceptos y resultados de esta sección se pueden consultar en [10, Sección 2].

**Definición 5.28.** Una matriz  $M = (a_{i,j})$  de tamaño  $n \times n$  decimos que es de tipo especial en las filas si satisface las siguientes condiciones:

1.  $a_{i,i} > 0$ ,  $a_{i,j} \leq 0$ , para  $i, j = 1, \dots, n$  e  $i \neq j$ ,
2.  $\sum_{j=1}^n a_{i,j} \geq 0$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

Si la segunda condición la cambiamos por

- \*2.  $\sum_{i=1}^n a_{i,j} \geq 0$ , para  $j = 1, \dots, n$ ,

entonces decimos que  $M$  es de tipo especial en las columnas.

**Ejemplo 5.29.** Sea  $M_1$  la siguiente matriz:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

$M_1$  es de tipo especial en las filas, pues todos los elementos diagonales son positivos, todos los elementos no diagonales son menores o iguales a cero, y

$$\begin{aligned} 5 - 1 + 0 &\geq 0, \\ -2 + 4 - 1 &\geq 0, \\ -1 - 3 + 8 &\geq 0. \end{aligned}$$

También es de tipo especial en las columnas, pues

$$\begin{aligned} 5 - 2 - 1 &\geq 0, \\ -1 + 4 - 3 &\geq 0, \\ 0 - 1 + 8 &\geq 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, sea  $M_2$  la siguiente matriz:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & 5 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$M_2$  es de tipo especial en las filas, pero no es de tipo especial en las columnas, pues la suma de los elementos de la primera columna es negativa.

Para la siguiente definición usamos el concepto de submatriz principal. Una submatriz cuadrada es principal los índices de las filas que contiene coinciden con los índices de las columnas.

**Definición 5.30.** Una matriz  $M$  de tamaño  $n \times n$  decimos que es de tipo especial fuerte en las filas si:

1. Es de tipo especial en las filas,
2. Toda submatriz principal de  $M$  tiene una fila tal que la suma de sus elementos no es cero.

De manera similar, decimos que  $M$  es de tipo especial fuerte en las columnas si:

- \*1. Es de tipo especial en las columnas,
- \*2. Toda submatriz principal de  $M$  tiene una columna tal que la suma de sus elementos no es cero.

**Ejemplo 5.31.** La matriz  $M_1$  del Ejemplo 5.29 es de tipo especial fuerte en las filas y en las columnas. La matriz  $M_2$  no es de tipo especial fuerte en las columnas, pues no es de tipo especial en las columnas. Tampoco es de tipo especial fuerte en las filas, ya que en la siguiente submatriz de  $M_2$ , la suma de los elementos de cada fila es cero.

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A partir de estas definiciones obtenemos el siguiente resultado.

**Proposición 5.32.** Sea  $M$  una matriz de tipo especial fuerte en las filas (respectivamente, columnas). Entonces todas sus submatrices principales son de tipo especial en las filas (respectivamente, columnas).

**Demostración.** Lo demostramos para el caso en el que la matriz es de tipo especial fuerte en las filas. La demostración en el caso de las columnas es análoga.

Sea  $M = (a_{i,j})$  una matriz de tamaño  $n \times n$  de tipo especial fuerte en las filas, y sea  $M_k$  una submatriz principal de  $M$  de tamaño  $k \times k$ . Veamos que se cumplen las condiciones para que  $M_k$  sea de tipo especial fuerte en las filas.



1. Todos los elementos de la diagonal de  $M$  son positivos, por lo que todos los elementos de la diagonal de  $M_k$  también lo son. De manera similar, los elementos de  $M$  que no están en la diagonal son no positivos, luego los elementos de  $M_k$  que no están en la diagonal tampoco lo son.
2. Dada una fila  $i$  de  $M$ , la suma de los elementos de esta fila es mayor o igual a cero. La fila  $i$  de  $M_k$  se ha obtenido de la fila  $i$  de  $M$  eliminado elementos que no están en la diagonal, los cuales son negativos. Por tanto, la suma de los elementos de la fila  $i$  de  $M_k$  es también mayor o igual a cero.
3. Las submatrices principales de  $M_k$  son submatrices principales de  $M$ . Como  $M$  es de tipo especial fuerte en las filas, toda submatriz principal de  $M$  tiene una fila tal que la suma de sus elementos no es cero. Luego toda submatriz principal de  $M_k$  tiene también una fila tal que la suma de sus elementos no es cero.

Por tanto,  $M_k$  es de tipo especial fuerte en las filas. |

El siguiente resultado fue demostrado por Murasugi en [10, Lema 2.4.i].

**Proposición 5.33.** Sea  $M$  una matriz de tipo especial fuerte en las filas o en las columnas. Entonces

$$\det(M) > 0.$$

De la Proposición 5.32 y la Proposición 5.33 obtenemos:

**Proposición 5.34.** Sea  $M$  una matriz de tipo especial fuerte en las filas o en las columnas. Entonces  $M$  es definida positiva.

## 5.4 Prueba de la Segunda conjetura de Tait

Una vez visto todos los resultados anteriores, ya estamos preparados para demostrar la Segunda conjetura de Tait. La demostración que mostramos a continuación está basada en la prueba de Murasugi en [12].

Recordemos el enunciado de la Segunda conjetura de Tait:

**| Teorema 2 (Segunda conjetura de Tait).** *Dos diagramas alternantes, reducidos y conexos que representan un mismo enlace tienen la misma contorsión.*

El enunciado anterior es equivalente a decir que la contorsión es un invariante de diagramas alternantes, reducidos y conexos que representan un mismo enlace. Este

enunciado es el que probaremos a continuación. Se mantiene la notación de la sección anterior.

*Demostración.* Sea  $D$  un diagrama conexo, reducido y alternante de un enlace orientado  $L$ . Sea  $c$  el número de cruces de  $D$ . Por la Proposición 4.6 y la Observación 4.7 tenemos que

$$\begin{aligned}\text{máx deg}\langle D \rangle &= c + 2(|S_A| - 1), \\ \text{mín deg}\langle D \rangle &= -c - 2(|S_B| - 1).\end{aligned}$$

Por la definición del polinomio de Jones,  $V(L) = (-A)^{-3w(D)}\langle D \rangle$ , tenemos que

$$\begin{aligned}\text{máx deg } V(L) &= -3w(D) + \text{máx deg}\langle D \rangle \\ &= -3w(D) + c + 2(|S_A| - 1), \\ \text{mín deg } V(L) &= -3w(D) + \text{mín deg}\langle D \rangle \\ &= -3w(D) - c - 2(|S_B| - 1).\end{aligned}$$

Sumando las dos igualdades llegamos a

$$\text{máx deg } V(L) + \text{mín deg } V(L) = -6w(D) + 2(|S_A| - |S_B|). \quad (5.1)$$

Por otra parte, sea  $R$  el número de regiones de  $D$ . Tenemos que  $|S_A| + |S_B| = R$ . Una forma fácil de verlo es etiquetar a las regiones de  $D$  de la misma forma que hicimos en Proposición 4.6. Como  $|S_A| = |W|$  y  $|S_B| = |B|$ , entonces  $|S_A| + |S_B| = |W| + |B| = R$ . Luego por la Proposición 4.3,

$$|S_A| + |S_B| = c + 2 \Rightarrow |S_B| = c + 2 - |S_A|.$$

Sustituyendo en la Ecuación 5.1,

$$\begin{aligned}\text{máx deg } V(L) + \text{mín deg } V(L) &= -6w(D) + 2(|S_A| - (c + 2 - |S_A|)) \\ &= -6w(D) + 4|S_A| - 2c - 4.\end{aligned} \quad (5.2)$$

Sean  $c_+$  y  $c_-$  el número de cruces positivos y negativos de  $D$ , respectivamente (Figura 2.10). Al sustituir en la Ecuación 5.2 se obtiene

$$\begin{aligned}\text{máx deg } V(L) + \text{mín deg } V(L) &= -6w(D) + 4|S_A| - 2c - 4 \\ &= -6(c_+ - c_-) + 4|S_A| - 2(c_+ + c_-) - 4 \\ &= -8c_+ + 4c_- + 4|S_A| - 4 \\ &= 4(-2c_+ + c_- + |S_A| - 1) \\ &= 4(-c_+ - (c_+ - c_-) + |S_A| - 1) \\ &= 4(-c_+ - w(D) + |S_A| - 1).\end{aligned} \quad (5.3)$$

Despejando  $w(D)$ .

$$w(D) = -\frac{1}{4} [\text{máx deg } V(L) + \text{mín deg } V(L)] + |S_A| - c_+ - 1. \quad (5.4)$$

Luego, para ver que  $w(D)$  es un invariante, hay que ver que el lado derecho de la ecuación también lo es. El polinomio de Jones es un invariante, luego

$$-\frac{1}{4} [\text{máx deg } V(L) + \text{mín deg } V(L)]$$

también lo es. Por tanto, hay que probar que  $|S_A| - c_+ - 1$  es invariante. Para ello, vamos a probar el siguiente enunciado:

**Lema 5.35.** En las condiciones anteriores,  $\sigma(L) = |S_A| - c_+ - 1$ , donde  $\sigma(L)$  es la signatura de  $L$  (Definición 5.9).

**Demostración.** Primero aplicamos una coloración de ajedrez a  $D$  y construimos la matriz de Goeritz  $G$  asociada. Por la Proposición 5.21, o bien todos sus cruces son  $\eta$ -positivos, o bien todos sus cruces son  $\eta$ -negativos. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que todos los cruces son  $\eta$ -positivos (en el caso en el que todos los cruces fuesen  $\eta$ -negativos, invertimos el coloreado y pasarían a ser  $\eta$ -positivos).

Como hemos supuesto que todos los cruces son  $\eta$ -positivos, todos los cruces son localmente como mostramos en la Figura 5.17. Si realizamos un suavizado de tipo A en un cruce, las regiones pintadas de negro se fusionan. Luego, si aplicamos suavizados de tipo A en todos los cruces, el número de circunferencias que obtenemos coincide con el número de regiones blancas de  $D$ . Es decir, el número de regiones blancas es  $|S_A|$ .

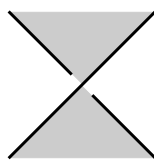


Figura 5.17

Para construir la matriz de Goeritz  $G$  (Definición 5.23), numeramos las regiones blancas de la forma  $X_i$  ( $i = 0, \dots, |S_A| - 1$ ), construimos una matriz  $G'$  donde cada fila (y columna) se corresponde con una región blanca y después eliminamos la fila y la columna cero. Luego la matriz de Goeritz  $G$  es una matriz cuadrada de tamaño  $|S_A| - 1$ . Sea  $n = |S_A| - 1$ .

Además, la matriz  $G$  tiene las siguientes propiedades (usamos la notación de la Definición 5.23):

1. Por construcción de  $G'$ , para  $i \neq j$  tenemos que  $g_{i,j} = -\sum \eta(c)$  ( $i, j = 0, \dots, n$ ) sumado sobre los cruces  $c$  incidentes a  $X_i$  y  $X_j$ . Como todos los cruces son  $\eta$ -positivos, entonces  $g_{i,j} \leq 0$ . Luego en la matriz  $G$  se cumple que

$$g_{i,j} \leq 0, \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n.$$

2. Por construcción de  $G'$  tenemos que  $g_{i,i} = -\sum_{\substack{k=0, \dots, n \\ k \neq i}} g_{i,k}$ . Como  $g_{i,j} \leq 0$  en  $G'$ , entonces  $g_{i,i} \geq 0$ . Además, como  $D$  es conexo, cada región  $X_k$  comparte al menos un cruce con otra región  $X_l$ , y como todos los cruces son  $\eta$ -positivos, esto se traduce en que en cada fila  $i$  de  $G'$  hay al menos un elemento no diagonal distinto de cero. Luego  $g_{i,i} > 0$  para  $i = 0, \dots, n$  y, por tanto, en  $G$  se cumple que

$$g_{i,i} > 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

3. Por construcción de  $G'$ , para toda fila  $i$  tenemos que la suma de sus elementos es cero. Para construir  $G$  eliminamos la fila y la columna correspondientes a  $X_0$  de  $G'$ . Luego, para toda fila  $i$  de  $G$ , si sumamos sus elementos tenemos que

$$\sum_{j=1}^n g_{i,j} = \underbrace{\sum_{j=0}^n g_{i,j}}_{=0} - \underbrace{g_{i,0}}_{\leq 0} \geq 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

4. Como  $D$  es conexo, toda submatriz principal de  $G$  tiene al menos una fila tal que la suma de sus elementos es distinta de cero. Esto lo vemos por reducción al absurdo. Supongamos que hay una submatriz principal  $A$  de  $G$  tal que, para cada fila, la suma de sus elementos es cero.

Consideramos la submatriz  $A$  como submatriz de  $G'$ . Por simplificar, supongamos que  $A$  es la submatriz formada por las primeras  $k$  filas y columnas de  $G$  (si partimos de cualquier otra submatriz, reordenando las filas y columnas podemos llegar a este caso). Primero veamos qué ocurre en  $G'$  si en una fila  $i$  de  $A$  la suma de sus elementos es cero. Como para toda fila de  $G'$  tenemos que la suma de sus elementos es cero, entonces

$$0 = \sum_{j=0}^n g_{i,j} = \underbrace{g_{i,0}}_{\leq 0} + \underbrace{\sum_{j=1}^k g_{i,j}}_{=0} + \underbrace{\sum_{j=k+1}^n g_{i,j}}_{\leq 0}$$

Luego, para que esta igualdad sea cierta, los elementos de la fila  $i$  que no pertenecen a  $A$  tienen que ser 0.

Por tanto, si para cada fila de  $A$  la suma de sus elementos es cero, tenemos que  $G'$  tiene la siguiente forma:

$$G' = \left( \begin{array}{c|ccc|ccc} * & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ \hline * & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ * & & & & & & \end{array} \right),$$

donde los asteriscos son enteros desconocidos. Como todos los cruces son  $\eta$ -positivos, esto quiere decir que las regiones blancas  $X_1, \dots, X_k$  no tienen cruces en común con las regiones  $X_0, X_{k+1}, \dots, X_n$ . Si esto ocurre quiere decir que  $D$  no es conexo. Hemos llegado a contradicción, pues hemos supuesto que  $D$  es conexo. Luego toda submatriz principal de  $G$  tiene al menos una fila tal que la suma de sus elementos es distinta de cero.

Estos cuatro puntos implican precisamente que  $G$  es una matriz de tipo especial fuerte en las filas (Definición 5.30). Por tanto, por la Proposición 5.33,  $G$  es definida positiva. Como  $G$  tiene dimensión  $n$ , entonces tiene  $n$  autovalores positivos. Por tanto, su signatura es  $\sigma(G) = n = |S_A| - 1$ .

Por otra parte, clasificamos los cruces en cruces de tipo I y tipo II. Como todos los cruces son  $\eta$ -positivos, los cruces solo pueden ser como los que mostramos en la Figura 5.18.

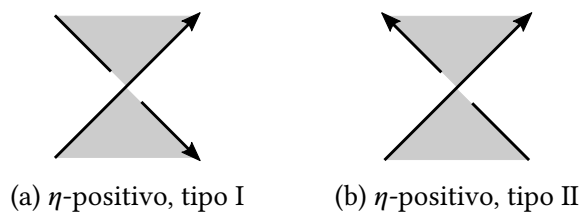


Figura 5.18

Como podemos observar, todos los cruces de tipo I son negativos mientras que todos los cruces de tipo II son positivos. Luego si calculamos  $\eta(D) = \sum_{\substack{c \in D \\ c \text{ tipo II}}} \eta(c) = c_+$ .

Por el Teorema 5.25,  $\sigma(L) = \sigma(G) - \eta(D)$ . Ya hemos calculado que  $\sigma(G) = |S_A| - 1$  y  $\eta(D) = c_+$ , luego si sustituimos

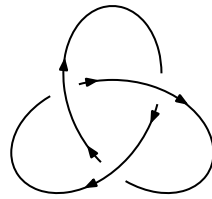
$$\sigma(L) = \sigma(G) - \eta(D) \Rightarrow \sigma(D) = |S_A| - 1 - c_+,$$

como queríamos probar. |

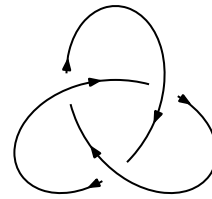
Esto completa la prueba del Teorema 2. |

La Segunda conjetura de Tait es equivalente a decir que la contorsión es un invariante de diagramas alternantes, reducidos y conexos que representan un mismo enlace. Esto proporciona un criterio para detectar la quiralidad en el caso de nudos que admitan un diagrama alternante, reducido y conexo.

*Ejemplo 5.36.* Sean  $D$  y  $D^*$  los diagramas del nudo trébol y de su imagen especular mostrados en la Figura 5.19. Tenemos que  $w(D) = -3$ , pues  $D$  tiene tres cruces negativos, mientras que  $w(D^*) = 3$ , ya que  $D^*$  tiene tres positivos. Estos diagramas son alternantes, reducidos y conexos. Luego, por la Segunda conjetura de Tait, el nudo trébol es quiral.



(a) Diagrama  $D$ .



(b) Diagrama  $D^*$ .

Figura 5.19

## 6 | Tercera conjetura de Tait

Esta sección está dedicada a la Tercera conjetura de Tait (también conocida como *flying conjecture*), la cual fue demostrada conjuntamente por William Menasco y Morwen Thistlethwaite en 1993 [9]. La prueba deriva del análisis de las superficies que se obtienen al aplicar una coloración de ajedrez a un diagrama y de las propiedades de los polinomios de Jones y de Kauffman. Esta demostración no es completamente geométrica, y los propios autores dejan abierta en su artículo la pregunta de si existe tal prueba.

En el año 2020, Thomas Kindred da la primera prueba puramente geométrica de la Tercera conjetura de Tait [8], respondiendo así a la pregunta planteada por Menasco y Thistlethwaite. Para ello usó, entre otros resultados, el trabajo de Greene, que demostró en 2017 de forma totalmente geométrica la Segunda conjetura de Tait y la invarianza del número de cruces de los diagramas alternates, conexos y reducidos [5]. Además, en este mismo artículo, Greene responde a la pregunta planteada por Ralph Fox sobre cómo caracterizar a los enlaces alternantes geoméricamente. En esta sección veremos la demostración dada por Kindred de la Tercera conjetura de Tait.

Un concepto fundamental que aparece en esta conjetura es el concepto de *flype*, definido a continuación.

**| Definición 6.1.** *Un flype es un movimiento donde el diagrama solo cambia en un entorno en la forma que muestra la Figura 6.1.*

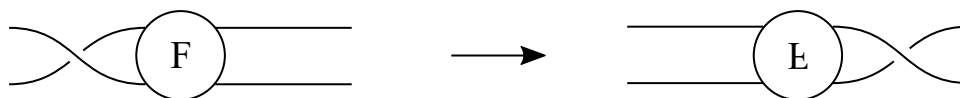


Figura 6.1: Un movimiento *flype* aplicado a un diagrama.

Una vez definido el concepto de *flype*, estamos en disposición de enunciar la Tercera conjetura de Tait:

**| Conjetura 3 (Tercera conjetura de Tait).** *Dos diagramas alternantes, reducidos y conexos de un mismo enlace primo están relacionados por un número finito de flypes.*

## 6.1 Conceptos y resultados previos

Para poder demostrar la Tercera conjetura de Tait necesitamos definir nuevos conceptos y ver algunos resultados previos. Además, necesitamos considerar los enlaces en la 3-esfera  $S^3 \cong \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ . Se omitirán las pruebas de estos resultados. Para más detalle, se puede consultar [8].

Sea  $L \subset S^3$  un enlace. Sobre este, podemos considerar un entorno tubular cerrado,  $\nu L = L \times D^2$ , donde  $D^2$  es un disco cerrado. Esto lo podemos ver en la Figura 6.2. De manera natural se define la proyección  $\pi_L : \nu L \rightarrow L$ . Además, sobre el borde de  $\nu L$ , denotado por  $\partial \nu L$ , podemos definir el concepto de meridiano. Para cada punto  $x \in L$ , su meridiano correspondiente es la circunferencia definida como  $\pi_L^{-1}(x) \cap \partial \nu L$  (Figura 6.2).

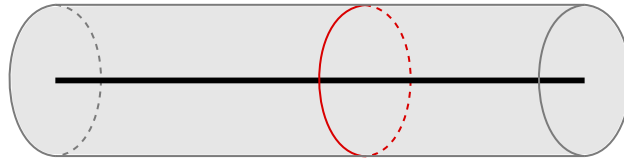


Figura 6.2: Arco de un enlace (negro) y su entorno tubular correspondiente (gris). En rojo se indica un meridiano.

Una superficie de expansión de  $L$  se puede definir como una superficie  $S$  cuya frontera  $\partial S$  es  $L$ . Como  $L \subset S^3$ , estas superficies son compactas, pero pueden ser no orientables. Por ejemplo, las superficies de Seifert, como las que obtenemos por el Teorema 5.1, son superficies de expansión orientables. Sin embargo, necesitamos dar una definición alternativa de superficie de expansión.

**| Definición 6.2.** *Sea  $L \subset S^3$  un enlace. Una superficie de expansión de  $L$  es una superficie  $S$  propiamente embebida en el exterior del enlace,  $S^3 \setminus \text{int}(\nu L)$ , tal que  $\partial S$  interseca cada meridiano de  $\partial \nu L$  transversalmente en un punto.*

Para la prueba de la Conjetura 3 estamos interesados en las dos superficies de expansión que induce una coloración de ajedrez. Sea  $D$  un diagrama de  $L$ , el cual pensamos proyectado en una 2-esfera  $S^2$ . Aplicamos a las regiones de  $D$  un coloreado



de ajedrez (Definición 5.20). Podemos entonces construir dos superficies de expansión de  $L$ , que denotamos por  $B$  y  $W$ , de manera que  $B$  se proyecta sobre las regiones negras de  $D$ ,  $W$  se proyecta sobre las regiones blancas, y  $B$  y  $W$  se cortan únicamente en arcos verticales que se proyectan en los cruces de  $D$ .

**Definición 6.3.** A las superficies  $B$  y  $W$  definidas de esta forma las llamaremos las superficies de tablero de ajedrez asociadas al diagrama  $D$ .

**Ejemplo 6.4.** Sea  $D$  el diagrama mostrado en la Figura 6.3a con la coloración de ajedrez indicada. Las superficies  $B$  y  $W$  correspondientes a esta coloración se indican sombreadas en la Figura 6.3b y la Figura 6.3c, respectivamente. La superficie  $B$  obtenida es un toro puntuado, mientras que la  $W$  es una banda de Möbius.

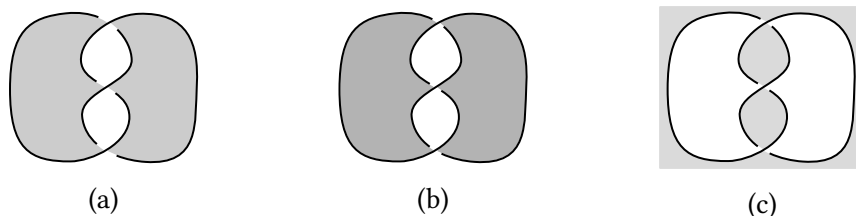


Figura 6.3: Diagrama  $D$  con una coloración de ajedrez (a). Las superficies  $B$  y  $W$  asociadas a  $D$  se muestran sombreadas en (b) y (c), respectivamente.

Dada una superficie de expansión  $S$  de un enlace  $L \subset S^3$ , podemos construir una forma bilinear y simétrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H_1(S) \times H_1(S) \rightarrow \mathbb{Z}$ , llamada par de Gordon-Litherland. Para más detalle, se puede consultar en [4, Sección 1 y 2]. La idea es similar al procedimiento que usamos en la Sección 5.1 para definir la matriz de Seifert (Definición 5.6).

Primero engrosamos la superficie. Para ello, sea  $N = S \times [-1, 1]$  un entorno cerrado de  $S$  tal que  $S \times \{0\}$  coincide con  $S$ . Definimos  $\pi : N \rightarrow S$  como la proyección natural. Sea  $\tilde{S} = S \times \{-1, 1\}$ . Si  $S$  es orientable,  $\tilde{S}$  es un recubrimiento con dos caras:  $S \times \{1\}$  y  $S \times \{-1\}$ ; mientras que si  $S$  es no orientable,  $\tilde{S}$  es un recubrimiento doble de una única cara. Denotamos  $p = \pi|_{\tilde{S}} : \tilde{S} \rightarrow S$ , la restricción de  $\pi$  a  $\tilde{S}$ .

Sean  $a, b \in H_1(S)$ , representados por las curvas cerradas  $\alpha, \beta \in S$ , respectivamente. Podemos ‘levantar’ de  $S$  dos copias de  $\beta$  aplicando  $p^{-1}$  a  $\beta$ . Si  $S$  es orientable,  $p^{-1}$  levanta una copia de  $\beta$  sobre cada cara de  $S$ , las cuales denotaremos  $\beta^+$  y  $\beta^-$ , mientras que si  $S$  es no orientable obtenemos una única curva. Definimos

$$\langle a, b \rangle = lk(\alpha, p^{-1}(\beta)).$$

En esta situación, para el cálculo de  $lk(\alpha, p^{-1}(\beta))$  no tenemos en cuenta los cruces entre las componentes de  $p^{-1}(\beta)$ . Es decir, si  $S$  es orientable, entonces  $lk(\alpha, p^{-1}(\beta)) = lk(\alpha, \beta^+) + lk(\alpha, \beta^-)$ .

A continuación definimos la matriz de Goeritz de una superficie de expansión. Esta definición es distinta a la definición de matriz de Goeritz que vimos en la Definición 5.23. Sin embargo, están muy relacionadas, pues esta nueva definición es una generalización de la inicial. Para más detalle, se puede consultar [4, Sección 2].

**Definición 6.5.** Sea  $L$  un enlace y sea  $S$  una superficie de expansión de  $L$ . Sea  $\{a_1, \dots, a_m\}$  una base de  $H_1(S)$ . La matriz  $G = (g_{ij}) \in \mathbb{Z}^{m \times m}$  que representa  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  respecto a esta base se llama matriz de Goeritz y viene dada por

$$g_{ij} = \langle a_i, a_j \rangle.$$

A continuación damos la definición de superficies de expansión definidas positivas y algunos resultados de estas. La definición y resultados para superficies definidas negativas son análogos.

**Definición 6.6.** Una superficie  $S$  de expansión es definida positiva si  $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$  para todo elemento  $\alpha \in H_1(S)$  no trivial.

El siguiente resultado nos da una definición equivalente de superficie definida positiva.

**Proposición 6.7.** Sea  $G$  una matriz de Goeritz asociada a una superficie de expansión  $S$ . Entonces  $S$  es definida positiva si y solo si todos los autovalores de  $G$  son positivos.

Ralph Fox planteó la pregunta sobre cómo caracterizar los diagramas alternantes geoméricamente. El siguiente resultado, demostrado por Greene [5, Teorema 4.1], proporciona una caracterización de los diagramas alternantes conexos, respondiendo a la pregunta de Fox.

**Proposición 6.8.** Sea  $D$  un diagrama conexo de un enlace  $L$  y sean  $B$  y  $W$  las superficies de tablero de ajedrez asociadas a  $D$ . Entonces,  $D$  es alternante si y solo si  $B$  y  $W$  son superficies definidas de signos opuestos.

Antes de continuar, aclaramos la notación que vamos a usar en las siguientes definiciones. Dados dos compactos  $X, Y \subset S^3$ , denotamos por  $X \setminus \setminus Y$  a la clausura métrica de  $X \setminus Y$ .

A continuación vamos definir el concepto de superficie esencial. Para ello, tenemos que ver primero el concepto de superficie incompresible y superficie  $\partial$ -incompresible.

**Definición 6.9.** Sea  $S$  una superficie de expansión de un enlace  $L$ .  $S$  es (geométricamente) incompresible si cualquier curva simple cerrada en  $S$  que sea la frontera de un disco en  $S^3 \setminus \setminus (S \cup \nu L)$ , también es la frontera de un disco en  $S$ .

Por ejemplo, en la Figura 6.4 podemos ver que una semiesfera es incompresible, pues todo disco (morado) cuya frontera está en la semiesfera define otro disco (verde) en la semiesfera. Un cilindro hueco, en cambio, no es incompresible. La curva que indicamos define un disco en el exterior del cilindro (morado), pero no define ninguno en el cilindro.

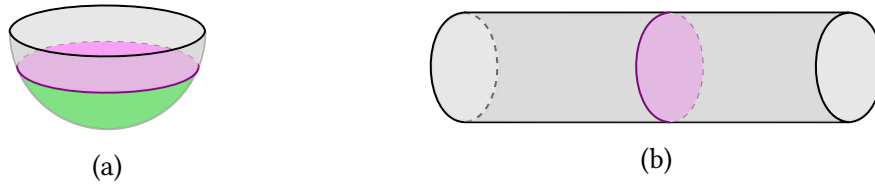


Figura 6.4: Una semiesfera es incompresible (a). Un cilindro hueco no es incompresible (b).

Para la definición de superficies  $\partial$ -incompresibles usamos el concepto de arcos  $\partial$ -paralelos. Dos arcos propiamente embebidos son paralelos si tienen los mismo extremos y existe una isotopía que fija sus extremos y lleva uno en el otro. De manera similar, si un arco está propiamente embebido en una superficie  $S$  con borde (esto es, un arco en  $S$  con sus dos extremos en el borde de  $S$ ), decimos que es  $\partial$ -paralelo si existe una isotopía que fija sus extremos y lo lleva al borde de  $F$ .

**Definición 6.10.** Sea  $S$  una superficie de expansión de  $L$ .  $S$  es  $\partial$ -incompresible si cualquier arco propiamente embebido en  $S$  que sea  $\partial$ -paralelo en  $S^3 \setminus \setminus (S \cup \nu L)$  es también  $\partial$ -paralelo en  $S$ .

Por ejemplo, en la Figura 6.5 podemos ver que una semiesfera es  $\partial$ -incompresible, ya que todo arco (morado) cuyos extremos están en la frontera lo podemos deformar en la superficie a la frontera (verde). Una banda de Möbius, en cambio, no es  $\partial$ -incompresible. El arco que indicamos en morado se puede deformar a la parte de la frontera indicada en verde, pero para ello es necesario ‘salirnos’ de la superficie.

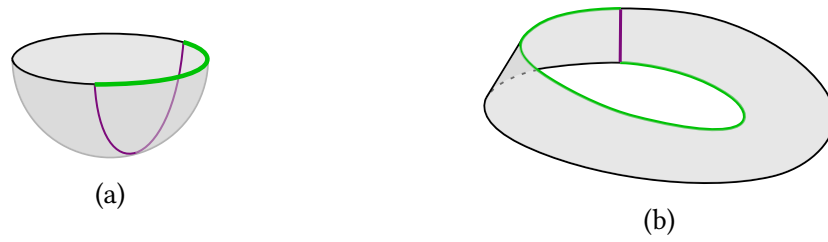


Figura 6.5: Una semiesfera es delta-incompresible (a). Una banda de Möbius no es delta-incompresible (b).

**Definición 6.11.** Una superficie de expansión de un enlace  $L$  es esencial si es incompresible y  $\partial$ -incompresible.

Por ejemplo, una semiesfera es esencial, ya que, como hemos mencionado anteriormente, es incompresible y  $\partial$ -incompresible.

**Proposición 6.12** ([8, Sección 2.3]). Un diagrama  $D$  conexo y alternante es reducido si y solo si las dos superficies de tablero de ajedrez asociadas a  $D$  son esenciales.

Necesitamos también definir una operación entre superficies de expansión, que llamaremos *plumbing*. Sea  $S$  una superficie de expansión de un enlace  $L$  no separado. Una *plumbing cap* para  $S$  es un disco  $V$  propiamente embebido en  $S^3 \setminus \setminus (S \cup \nu L)$  con las siguientes propiedades:

- La aplicación natural  $f : S^3 \setminus \setminus (S \cup \nu L) \rightarrow S^3$  se restringe a un embebimiento  $f : V \rightarrow S^3$ , y  $f(\partial V)$  es la frontera de un disco  $\hat{U} \subset S \cup \nu L$ .
- $\hat{U} \cup V$  divide a  $S^3$  en dos bolas abiertas. Sean  $Y_1$  e  $Y_2$  las clausuras de esas bolas. Entonces, ninguna subsuperficie  $S_i = S \cap Y_i$  es un disco.

El disco  $U = \hat{U} \cap S$  lo llamamos la sombra de  $V$ .

La descomposición  $S = S_1 \cup S_2$  es una descomposición mediante *plumbing* de  $S$  a lo largo de  $U$  y  $V$ , y se denota por  $S = S_1 * S_2$ . La operación inversa, en la cual se pegan  $S_1$  y  $S_2$  a lo largo de  $U$  para construir  $S$  recibe el nombre de *plumbing* generalizado o suma de Murasugi.

Si  $V$  es una *plumbing cap* para  $S$  y  $U$  es la sombra de  $V$ , entonces podemos construir otra superficie de expansión  $S' = (S \setminus U) \cup V$ . Esta operación de transformar  $S$  en  $S'$  recibe el nombre de *re-plumbing* de  $S$  a lo largo de  $U$  y  $V$ .

**| Definición 6.13.** *Dos superficies de expansión  $S$  y  $S'$  están relacionadas mediante plumbings si existe una secuencia de re-plumbings e isotopías que permiten transformar una superficie en la otra.*

Ya tenemos las definiciones que necesitamos. A continuación enunciamos los resultados que nos hacen falta para la prueba de la Tercera conjetura de Tait. El siguiente resultado se corresponde con [8, Teorema 4.11]

**| Teorema 6.14.** *Sea  $L$  un enlace primo y sean  $D$  y  $D'$  dos diagramas alternantes, reducidos y conexos de  $L$ . Sean  $B, W$  y  $B', W'$  las superficies de tablero de ajedrez asociadas a  $D$  y  $D'$ , respectivamente. Entonces, existe una sucesión finita de flypes que transforman  $D$  en  $D'$  si y solo si  $B$  está relacionada mediante plumbings con  $B'$  y  $W$  está relacionada mediante plumbings con  $W'$ .*

*Demostración.* Damos una idea de la demostración. En ella, se usa el concepto de *plumbing cap* aparente. Una *plumbing cap*  $V$  para  $B$  (respectivamente,  $W$ ) es aparente en  $D$  si la intersección  $V \cap W$  (respectivamente,  $V \cap B$ ) posee una única componente conexa.

A todo *flype* le corresponde una *plumbing cap*  $V$  aparente de la siguiente forma. Al realizar un *flype* a  $D$ , entonces a una de las superficies de tablero de ajedrez se le aplica una isotopía, mientras que a la otra se le aplica un *re-plumbing* por  $V$  y otra isotopía. Luego si  $D$  y  $D'$  están relacionados mediante *flypes*, entonces  $B$  está relacionada mediante *plumbings* con  $B'$  y  $W$  está relacionada mediante *plumbings* con  $W'$ .

La implicación contraria es similar. Si  $B$  está relacionada mediante *plumbings* con  $B'$  y  $W$  está relacionada mediante *plumbings* con  $W'$ , entonces se pueden encontrar dos sucesiones finitas de *re-plumbings* e isotopías que transforman  $B$  en  $B'$  y  $W$  en  $W'$ , de manera que cada *re-plumbing* se realiza usando una *plumbing cap* aparente, la cual tiene asociado un *flype* en el diagrama. **|**

Por otro lado, sea  $L$  un enlace primo y sea  $D$  un diagrama conexo, alternante y reducido de  $L$ . Sean  $B$  y  $W$  las superficies de tablero de ajedrez de  $D$ . Por la Proposición 6.8, una de estas superficies es definida positiva y la otra es definida negativa. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que  $B$  es definida positiva y  $W$  es definida negativa. Se tiene el siguiente resultado:

**| Teorema 6.15 ([8, Teorema 5.26]).** *Bajo las condiciones anteriores, sea  $S_+$  una superficie de expansión de  $L$  esencial y definida positiva. Entonces,  $S_+$  y  $B$  están relacionadas mediante plumbings.*

De la misma forma, sea  $S_-$  una superficie de expansión de  $L$  esencial y definida negativa. Entonces,  $S_-$  y  $W$  están relacionadas mediante *plumbings*.

En el artículo referenciado se prueba solo para el caso de superficies definidas positivas, aunque se indica que también se tiene el resultado para superficies definidas negativas.

## 6.2 Prueba de la Tercera conjetura de Tait

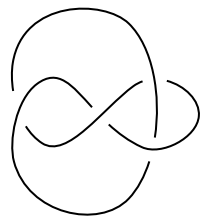
Una vez vistos los resultados anteriores, estamos preparados para demostrar la Tercera conjetura de Tait. Esta demostración está basada en la prueba de Kindred, que puede consultarse en [8, Sección 5.7].

**| Teorema 3 (Tercera conjetura de Tait).** *Dos diagramas alternantes, reducidos y conexos de un mismo enlace primo están relacionados por un número finito de flypes.*

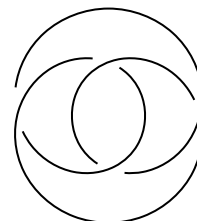
*Demostración.* Sean  $D$  y  $D'$  dos diagramas alternantes, reducidos y conexos de un enlace primo  $L$ . Sean  $B$ ,  $W$  y  $B'$ ,  $W'$  las superficies de tablero de ajedrez asociadas a  $D$  y  $D'$ , respectivamente. Como  $D$  y  $D'$  son reducidos, por la Proposición 6.12, las cuatro superficies anteriores son esenciales.

Luego, como  $B$  y  $B'$  son superficies de expansión de  $L$  y son esenciales y definidas positivas, por el Teorema 6.15 obtenemos que  $B$  y  $B'$  están relacionadas mediante *plumbings*. Análogamente, por el mismo teorema, obtenemos que  $W$  y  $W'$  también están relacionadas mediante *plumbings*. Por tanto, por el Teorema 6.14, existe una sucesión finita de *flypes* que transforman  $D$  en  $D'$ . **|**

Finalmente, veamos una aplicación de la Tercera conjetura de Tait.



(a) Diagrama  $D_1$ .



(b) Diagrama  $D_2$ .

Figura 6.6: Diagramas del nudo ocho.

**Ejemplo 6.16.** En la Figura 6.6 se muestran dos diagramas alternantes, reducidos y conexos del nudo ocho, el cual es primo. El diagrama  $D_1$  se puede transformar fácilmente en el que se muestra en la Figura 6.7a. A este diagrama le aplicamos un *flype* en la región señalada de verde, obteniendo el diagrama de la Figura 6.7b. Este diagrama es claramente el diagrama  $D_2$ . Luego para transformar  $D_1$  en  $D_2$  basta aplicar un único *flype*.

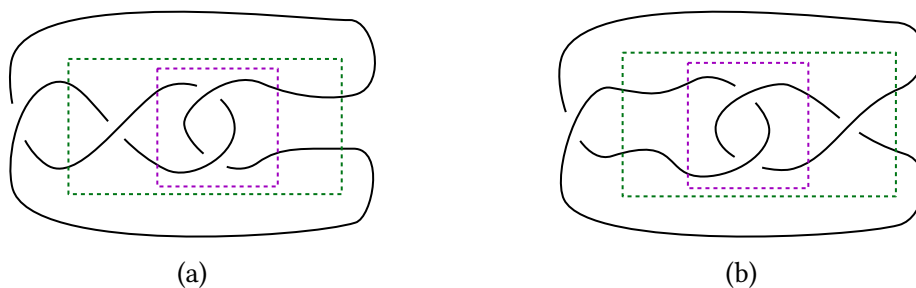


Figura 6.7: Diagrama  $D_1$  (a) antes de realizar el *flype* y después (b). En verde se indica la región sobre la que se realiza el *flype* y en morado la región que se refleja al hacerlo.





# Bibliografía

- [1] J. W. Alexander. Topological invariants of knots and links. *Transactions of the American Mathematical Society*, 30(2):275–306, 1928.
- [2] P. R. Cromwell et al. *Knots and links*. Cambridge university press, 2004.
- [3] L. Goeritz. Knoten und quadratische formen. *Mathematische Zeitschrift*, 36(1):647–654, 1933.
- [4] C. M. Gordon and R. A. Litherland. On the signature of a link. *Invent Math*, 47:53–69, 1978.
- [5] J. E. Greene. Alternating links and definite surfaces. *Duke Mathematical Journal*, 166(11):2133–2151, 2017.
- [6] V. F. Jones. A polynomial invariant for knots via von neumann algebras. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 12:103–111, 1985.
- [7] L. H. Kauffman. State models and the Jones polynomial. *Topology*, 26(3):395–407, 1987.
- [8] T. Kindred. A geometric proof of the flyping theorem. *arXiv preprint arXiv:2008.06490*, 2020.
- [9] W. Menasco and M. Thistlethwaite. The classification of alternating links. *Annals of Mathematics*, 138(1):113–171, 1993.
- [10] K. Murasugi. On alternating knots. *Osaka Mathematical Journal*, 12(2):277–303, 1960.
- [11] K. Murasugi. Jones polynomials and classical conjectures in knot theory. *Topology*, 26(2):187–194, 1987.

- [12] K. Murasugi. Jones polynomials and classical conjectures in knot theory. II. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 102, pages 317–318. Cambridge University Press, 1987.
- [13] K. A. Perko. On the classification of knots. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 45(2):262–266, 1974.
- [14] K. Reidemeister. Elementare begründung der knotentheorie. 5(1):24–32, 1927.
- [15] D. Rolfsen. *Knots and links*. Publish or Perish, 1976.
- [16] H. Seifert. Über das geschlecht von knoten. *Mathematische Annalen*, 110(1):571–592, 1935.
- [17] P. G. Tait. On knots I. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 28:145–190, 1876.
- [18] P. G. Tait. On knots II. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 32:327–342, 1884.
- [19] P. G. Tait. On knots III. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 32:493–506, 1885.
- [20] M. B. Thistlethwaite. A spanning tree expansion of the Jones polynomial. *Topology*, 26(3):297–309, 1987.
- [21] M. B. Thistlethwaite. Kauffman’s polynomial and alternating links. *Topology*, 27(3):311–318, 1988.