

CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS ESCOLARES EN EDUCACIÓN PRIMARIA



Grado en Educación Primaria

Autora: María Dolores Rodríguez Galante

Tutora: Verónica Martín Molina

Modalidad: Investigación en el ámbito de la educación y/o formación

Resumen

En esta investigación se analizan 3 libros de texto de matemáticas de Educación Primaria de la editorial SM, en concreto, los libros de 1º, 2º y 3º, para identificar todos los problemas aritméticos escolares que aparecen en ellos. Se clasifican todos los problemas en problemas de 1 etapa, problemas de 2 etapas y otros problemas. También se clasifican todos los problemas de 1 y 2 etapas según el tipo al que pertenecen y se especifican sus cantidades.

Las tareas de investigación propuestas en este trabajo de fin de grado tienen relación con la asignatura obligatoria “Didáctica de Matemáticas para maestros” del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Sevilla. Asimismo, está relacionado con algunas de las líneas de investigación de los profesores del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de dicha universidad.

Palabras clave: matemáticas, escuela primaria, solución de problemas, libros de texto, clasificación de problemas.

Abstract

In the present study, three mathematical textbooks for Primary Education from SM publishers (specifically, those textbooks from the first, second and third year) are analyzed, in order to identify all the word problems that appear on them. Those problems are classified into one-step problems, two-step problems and other problems. Furthermore, all the one-step and two-step problems are further analyzed and classified into the subcategories and their quantity are specified.

The tasks proposed in this Final Degree Project have to do with the compulsory course “Mathematics Education for Teachers” from the Degree in Primary Education from the University of Seville. Thus, it is related to some research lines of the professors from the Department of Didactics of Mathematics of that university.

Key words: mathematics, elementary school, problem solving, textbooks, problem classification.

ÍNDICE

| | |
|--|----|
| 1. Introducción y justificación | 4 |
| 2. Marco teórico..... | 4 |
| 2.1. La resolución de problemas | 4 |
| 2.2. Clasificación de los problemas aritméticos escolares..... | 5 |
| 2.3. Clasificación de problemas aritméticos escolares de una etapa..... | 6 |
| 2.3.1. Clasificación de los problemas aritméticos escolares de una etapa de estructura aditiva | 6 |
| 2.3.2. Clasificación de los problemas aritméticos escolares de una etapa de estructura multiplicativa..... | 10 |
| 2.4. Clasificación de los problemas aritméticos escolares de dos etapas..... | 12 |
| 2.5. Análisis de los libros de texto | 15 |
| 3. Objetivos..... | 16 |
| 4. Metodología de la investigación..... | 16 |
| 5. Resultados..... | 29 |
| 5.1. Libro de 1° curso de Educación Primaria | 30 |
| 5.2. Libro de 2° curso de Educación Primaria | 31 |
| 5.3. Libro de 3° curso de Educación Primaria | 32 |
| 6. Discusión y conclusiones..... | 32 |
| 7. Referencias bibliográficas | 36 |

1. Introducción y justificación

La resolución de problemas debe ser una fuente de producción de conocimiento y un sitio donde usar y demostrar cómo se puede usar dicho conocimiento en nuevas situaciones (Puig y Cerdán, 1988). La importancia de la resolución de problemas queda reflejada en la Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía. En dicha orden, el primer bloque de contenidos matemáticos en todos los ciclos de Educación Primaria es el de “Procesos, métodos y actitudes matemáticas”, en el que uno de los contenidos fundamentales es la resolución de problemas de la vida cotidiana que sean aritméticos, es decir, que sean problemas en los que aparezcan una o más de las cuatro operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división). Otro de los contenidos a trabajar en dicho bloque de “Procesos, métodos y actitudes matemáticas” es el de las diversas estrategias de resolución de problemas, para lo que es necesario que los estudiantes de Educación Primaria puedan enfrentarse a una diversidad de problemas.

Los libros de texto pueden ser considerados, entre otros, como una colección de problemas a resolver (González Astudillo y Sierra, 2004). Sin embargo, en ocasiones los libros de textos disponibles cuentan con poca variedad de problemas aritméticos. Por ejemplo, un análisis de libros de cuarto de Educación Primaria mostró que había problemas aritméticos de dos etapas de todos los tipos estudiados, pero que predominaban los más fáciles (Ngonde-Ernesto y Gavilán-Izquierdo, 2019).

Esto motiva que nos planteemos la necesidad de estudiar los tipos de problemas aritméticos existentes en los libros de textos de matemáticas de Educación Primaria. Para ello, proponemos identificar primero todos los problemas que aparezcan en diferentes libros de texto.

2. Marco teórico

2.1. La resolución de problemas

La resolución de problemas forma parte del aprendizaje necesario para el alumnado de Educación Primaria, como aparece en la Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía. Esta orden agrupa las áreas de conocimiento en tres bloques de asignaturas: troncales, específicas y

de libre configuración autonómica, de acuerdo con lo dispuesto en el artículo 10 del Decreto 97/2015, de 3 de marzo. La asignatura de matemáticas es troncal.

En esta orden, en la asignatura de matemáticas, encontramos cinco bloques de contenidos: bloque 1: “procesos, métodos y actitudes matemáticas, bloque 2: “números”, bloque 3: “medida”, bloque 4: “geometría” y bloque 5: “estadística y probabilidad”. Los problemas, y su respectiva resolución, pertenecen al bloque 1 en los tres ciclos de la Educación Primaria. Se encuentran en el primer bloque con la intención de ejercer de columna vertebral del resto de bloques. Se llevan a cabo tareas como identificar problemas de la vida cotidiana, reconocer los datos y relaciones relevantes, formar conjeturas, desarrollar estrategias de resolución, comprobar resultados, organizar y comunicar los resultados, son procesos comunes aplicables a todos los campos de las matemáticas.

Este bloque 1 persigue una doble finalidad. En primer lugar, otorgar atención a las operaciones, las medidas y los cálculos, que adquieren sentido cuando se utilizan en la resolución de problemas. Dicha resolución además de un contenido, es un método. En segundo lugar, se pretende que el alumnado sea capaz de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales.

Dicha resolución de problemas se enfoca en generar significados en el contexto físico del alumnado basándose en los primeros niveles de la aritmética. La resolución de problemas no solo consiste en realizar operaciones, sino en obtener una comprensión significativa de todo el proceso: asignar significado a los símbolos matemáticos (números, signos de operaciones), aprender a realizar las operaciones aritméticas y resolver los problemas, donde se generan conocimientos relacionados con las actitudes y los procedimientos matemáticos.

2.2. Clasificación de los problemas aritméticos escolares

Los problemas que tienen lugar en esta etapa de la educación son los problemas aritméticos escolares (PAE), los cuales proporcionan unas cantidades conocidas y a partir de las mismas se pide que se averigüen otras cantidades. En Puig y Cerdán (1988) se les denomina problemas aritméticos elementales verbales (PAEV).

Para Puig y Cerdán (1988), dichos problemas se dividen en dos: en los problemas aritméticos de una etapa y problemas aritméticos de más de una etapa, necesitando realizar una operación matemática para resolver los problemas de una etapa y más de una operación matemática para resolver los problemas de más de una etapa.

Esta clasificación es similar a la que realizan Castro et al. (1998), que los dividen en problemas simples y problemas compuestos. Para estos autores, un problema simple contiene solo una relación entre sus datos numéricos, es decir, se necesita una operación matemática para resolverlo. Sin embargo, los problemas compuestos, que contienen más relaciones matemáticas, deben ser resueltos con más de una operación matemática, bien empleando al menos dos operaciones diferentes o la misma operación en al menos dos ocasiones.

A continuación, se presentan las clasificaciones de los problemas aritméticos escolares de una etapa y de dos etapas. Dichos tipos de problemas son los que aparecen en los primeros cursos de la Educación Primaria y por tanto son sobre los que se va a investigar en este proyecto. Las clasificaciones de problemas de tres o más etapas no van a estudiarse en esta investigación.

2.3. Clasificación de problemas aritméticos escolares de una etapa

Tal y como aparece en el estudio de Puig y Cerdán (1988), los problemas aritméticos escolares de una etapa son los primeros que aparecen en el currículo escolar de matemática, por lo que son los primeros con los que se relaciona el alumnado.

Los PAE de una etapa pueden ser de estructura aditiva o de estructura multiplicativa. Todos tienen una parte informativa que suele contener dos datos y una parte de pregunta donde se encuentra la incógnita.

2.3.1. Clasificación de los problemas aritméticos escolares de una etapa de estructura aditiva

Los PAE de una etapa de estructura aditiva se pueden clasificar de varias formas según recogen los autores Puig y Cerdán (1988).

Por un lado, tenemos clasificaciones centradas en palabras, donde el enunciado nos informa con palabras clave la operación aritmética que debemos realizar para resolverlo:

- Palabras de terminología matemática: repartir o dividir, etc.
- Palabras como verbos: ganar, perder, etc.
- Palabras que expresan relación: tener más o tener menos, etc.

Por otro lado, encontramos la clasificación que se centra en el análisis global del enunciado, que a su vez se divide en tres partes: componente sintáctico, estructura lógica subyacente y componente semántico. Esta clasificación es propuesta por Nesher en 1982 en su publicación *Levels of Description in the Analysis of Addition and Subtraction Word Problems* de como se citó en (Puig y Cerdán, 1988).

El componente sintáctico se basa en la forma en que aparecen sus datos, el tamaño del enunciado, es decir, en la estructura superficial del problema y otros aspectos similares. La estructura lógica subyacente consiste en fijarse en el orden y la relación entre las partes del problema.

Por último, el componente semántico, que es el que usaremos para clasificar los PAE de una etapa en esta investigación, que se centra en si el problema es estático o dinámico, y en si es de comparación o no. En la Tabla 1, se muestran los cuatro tipos de problemas de la clasificación semántica de los problemas aritméticos escolares de una etapa de estructura aditiva (Puig y Cerdán, 1988).

Tabla 1

Clasificación de PAE de una etapa de estructura aditiva según el componente semántico (Puig y Cerdán, 1988)

| | Comparación | Sin comparación |
|----------|-------------|-----------------|
| Estático | Comparación | Combinar |
| Dinámico | Igualar | Cambio |

Los problemas de cambio son dinámicos, tienen una secuencia temporal donde su cantidad inicial se transforma en otra cantidad final, bien sea por aumento o por disminución. Cuentan con tres cantidades: cantidad inicial, cantidad de cambio y cantidad final.

Los problemas de aumento, llamados también de cambio-juntar, son aquellos cuya cantidad inicial es menor que su cantidad final y los problemas de cambio-separar son aquellas cuya cantidad inicial es mayor que su cantidad final.

Hay seis tipos de problemas de cambio, dependiendo de si son de cambio-juntar o cambio-separar y de dónde se encuentre su incógnita: en la cantidad inicial, en la cantidad de cambio o en la cantidad final. A continuación, veremos ejemplos de los 6 tipos de problemas de cambio:

- Estaba en la planta 6º y subí 9. ¿En qué planta me encuentro?

Es un problema de cambio-juntar porque la cantidad inicial crece. La cantidad inicial es 6º planta, la cantidad de cambio 9 plantas y la cantidad final es la incógnita, que es la planta en la que me encuentro.

- Me como 4 chicles de los 10 que tengo. ¿Cuántos chicles me quedan?

Es un problema de cambio-separar porque la cantidad inicial disminuye. La cantidad inicial son 10 chicles, la cantidad de cambio son 4 chicles y la cantidad final es la incógnita, que son los chicles que me quedan.

- Tenía 4 magdalenas y compré más hasta tener 21. ¿Cuántas magdalenas he comprado?

Es un problema de cambio-juntar porque la cantidad inicial aumenta. La cantidad inicial son 4 magdalenas, la cantidad de cambio es la incógnita, que es el número de magdalenas que compré, y la cantidad final son 21 magdalenas.

- Estaba en la planta número 20 y ahora estoy en la 10. ¿Cuántas plantas he bajado?

Es un problema de cambio-separar porque la cantidad inicial disminuye. La cantidad inicial es la planta 20, la cantidad de cambio es la incógnita, que es el número de plantas que he bajado y la cantidad final es la planta 10.

- Jugando he ganado 5 cartas y ahora tengo 17 cartas. ¿Cuántas cartas tenía antes de empezar a jugar?

Es un problema de cambio-juntar porque la cantidad inicial crece. La cantidad inicial es la incógnita (las cartas iniciales), la cantidad de cambio 5 cartas y la cantidad final 17 cartas.

- Jugando he perdido 15 cartas y ahora me quedan 3. ¿Cuántas cartas tenía antes de empezar?

Es un problema de cambio-separar porque la cantidad inicial decrece. La cantidad inicial es la incógnita (las cartas iniciales), la cantidad de cambio 15 cartas y la cantidad final 3 cartas.

Por otro lado, los problemas de combinar son estáticos y describen una relación entre dos partes disjuntas que no tienen elementos en común y que forman un conjunto. Las dos cantidades disjuntas se llaman “parte” y el conjunto que forman al juntarlas se denomina “todo”.

Hay dos tipos de problemas de combinar: los que tienen la incógnita en una parte o los que tienen la incógnita en el todo.

Un ejemplo de problema de combinar con la incógnita en una parte:

- Roberto tiene en su frutería una caja con 32 fresas y algunas cerezas. En total tiene 50 frutas. ¿Cuántas cerezas tiene?

Una parte son 32 fresas, otra parte es la incógnita, que es el número de cerezas, y el todo son las frutas totales.

Un ejemplo de problema de combinar con la incógnita en el todo:

- En una clase hay 15 niños y 17 niñas. ¿Cuántos alumnos y alumnas hay en total?

Una parte son los 15 niños, otra parte son las 17 niñas y la incógnita es el todo, que es el número de alumnos y alumnas en total.

En tercer lugar, tenemos los problemas de comparar, que son estáticos y realizan una comparación entre dos cantidades. La comparación puede darse en más o en menos. Sus cantidades son: cantidad de referencia, cantidad comparada y cantidad de diferencia.

A continuación, se citan ejemplos de problemas de comparar. Hay 6 tipos, dependiendo de cuál de las tres cantidades es la incógnita y de si la comparación es en más o en menos:

- Tengo 12 mochilas y tú tienes 15. ¿Cuántas mochilas tienes tú más que yo?

Realiza una comparación en más. La cantidad de referencia son 12 mochilas, la cantidad comparada son 15 mochilas y la cantidad de diferencia es la incógnita.

- Lucía tiene 50 céntimos. Juan tiene 25. ¿Cuántos céntimos tiene Juan menos que Lucía?

Realiza una comparación en menos. La cantidad de referencia son 50 céntimos, la cantidad comparada son 25 céntimos y la cantidad de diferencia es la incógnita.

- Roberto tiene 15 euros. Marta tiene 6 euros más que él. ¿Cuánto dinero tiene Marta?

Realiza una comparación en más. La cantidad de referencia son 15 euros, la cantidad comparada es la incógnita y la cantidad de diferencia son 6 euros.

- Si tengo 10 cromos y mi vecino tiene 5 menos. ¿Cuántos cromos tiene él?

La comparación se realiza en menos. La cantidad de referencia son 10 cromos, la cantidad comparada es la incógnita y la cantidad de diferencia son 5 cromos.

- Mi abuela tiene 15 galletas y tiene 6 galletas más que mi abuelo. ¿Cuántas galletas tiene mi abuelo?

Realiza una comparación en más. La cantidad de referencia es la incógnita, la cantidad comparada son 15 galletas y la cantidad de diferencia son 6 galletas.

- Rubén tiene 20 euros y tiene 5 menos que su amigo. ¿Cuántos euros tiene su amigo?

Realiza una comparación en menos. La cantidad de referencia es la incógnita, la cantidad comparada son 20 euros y la cantidad de diferencia son 5 euros.

Por último, se encuentran los problemas de igualar, híbridos entre un problema de comparación y un problema de cambio. En ellos hay comparación y se requiere un cambio

para igualar las cantidades proporcionadas. Las comparaciones son comparativas de igualdad como, por ejemplo, tantos como.

Sus cantidades son las mismas que en los problemas de comparar: cantidad de referencia, cantidad comparada y cantidad de diferencia.

Algunos ejemplos de problemas de igualar:

- La maestra tiene 12 cromos e Irene tiene 5. ¿Cuántos cromos más necesita Irene para tener los mismos que la maestra?

Problema de igualación con aumento. La cantidad de referencia son 12 cromos, la cantidad comparada con 5 cromos y la cantidad de diferencia es la incógnita.

- Tengo 10 canicas. Tú tienes 3 canicas. ¿Cuántas canicas tengo que perder para tener tantas como tú?

Problema de igualación con disminución. La cantidad de referencia son 3 canicas, la cantidad comparada con 10 canicas y la cantidad de diferencia es la incógnita.

- Julia tiene 15 euros. Si Rocío ganara 8 euros, tendría los mismos que Julia. ¿Cuántos euros tiene Rocío?

Problema de igualación con aumento. La cantidad de referencia son 15 euros, la cantidad comparada es la incógnita y la cantidad de diferencia son 8 euros.

- Matías tiene 5 bicicletas. Si Julia perdiera 1 bicicleta, tendría las mismas bicicletas que Matías. ¿Cuántas bicicletas tiene Julia?

Problema de igualación con disminución. La cantidad de referencia son 5 bicicletas, la cantidad comparada es la incógnita y la cantidad de diferencia son 1 bicicleta.

- Tengo 5 euros. Si me dan un euro, tendré los mismos que mi hermana. ¿Cuántos euros tiene mi hermana?

Problema de igualación con aumento. La cantidad de referencia es la incógnita, la cantidad comparada son 5 euros y la cantidad de diferencia es 1 euro.

- Izan tiene 6 fotos. Si pierde 3 fotos, tendrá las mismas que Juan. ¿Cuántas fotos tiene Juan?

Problema de igualación con disminución. La cantidad de referencia es la incógnita, la cantidad comparada son 6 fotos y la cantidad de diferencia es 3 fotos.

2.3.2. Clasificación de los problemas aritméticos escolares de una etapa de estructura multiplicativa

Veremos a continuación cómo se clasifican los PAE de una etapa de estructura multiplicativa. Para ello, veremos primero los tipos de cantidades que aparecen en estos

según Schwartz, citado por Quintero (1986). Existen tres tipos de cantidades, que son: cantidad extensiva (CE), cantidad intensiva (CI) y los cuantificadores (C).

Una cantidad extensiva (CE) es una cantidad existente de algo, por ejemplo, número de mesas o número de personas. Una cantidad intensiva (CI), que también puede denominarse razón, es aquella que relaciona dos cantidades extensivas, por ejemplo, número de alumnos por mesa o número de personas por grupo. Los cuantificadores son números que indican la cantidad de repeticiones, como tres veces más, cuatro veces el número de, etc.

Los PAE de una etapa de estructura multiplicativa, según Carpenter et al. (1999), se dividen en tres categorías: problemas de agrupamiento y reparto (llamados de razón o asimétricos por otros autores), de comparación multiplicativa y problemas simétricos.

Los problemas de agrupamiento tienen la estructura $CI \times CE = CE$ y pueden ser de multiplicación o de división, que a su vez se subdividen en problemas de división-reparto o de división-medida.

Ejemplos de problemas de razón:

- Compró 8 cromos a 3 euros el cromo. ¿Cuánto me cuestan los 8 cromos?

Es un problema de razón, de multiplicación. Presenta la estructura $CE \times CI = \text{¿}CE\text{?}$

- Con 50 fotos he hecho 5 montones iguales. ¿Cuántas fotos he puesto en cada montón?

En un problema de razón, de división-reparto, con la estructura $CE \times \text{¿}CI\text{?} = CE$.

- ¿Cuántos montones iguales puedo hacer con 50 fotos repartiéndolas de 5 en 5?

Es un problema de razón, de división-medida, con la estructura $\text{¿}CE\text{?} \times CI = CE$.

Los problemas de comparación multiplicativa tienen la estructura $c \times CE = CE$ e igualmente pueden ser de multiplicación o de dos tipos de división.

Ejemplos de problemas de comparación multiplicativa:

- Un patinete normal vale 15 euros. Otro eléctrico cuesta tres veces más. ¿Cuánto vale el patinete eléctrico?

Es un problema de comparación multiplicativa, de multiplicación, con la estructura $c \times CE = \text{¿}CE\text{?}$

- Un patinete eléctrico cuesta 45 euros, tres veces más que uno normal. ¿Cuánto cuesta el patinete normal?

Es un problema de comparación multiplicativa, de división, con la estructura $c \times \text{¿}CE\text{?} = CE$.

- Un patinete eléctrico cuesta 45 euros. Otro patinete normal cuesta 15 euros. ¿Cuántas veces vale más el patinete eléctrico que el normal?

Es un problema de comparación multiplicativa, de división, con la estructura $\frac{c}{x} \times CE = CE$.

Finalmente, los problemas simétricos, donde las cantidades juegan papeles equivalentes y cuya estructura es $CE \times CE = CE$, pueden ser de multiplicación y de un solo tipo de división. Estos problemas pueden ser de áreas, de combinatoria y de matrices, aunque esos últimos no son muy comunes.

Ejemplos de problemas simétricos de área:

- Hemos plantado en el huerto del colegio una superficie de forma rectangular que mide 10 metros de ancho por 12 metros de largo. ¿Cuántos metros cuadrados mide el cultivo?

Es un problema simétrico, de área, de multiplicación. Su estructura es $CE \times CE = \frac{CE}{?}$

- Hemos plantado en el patio del colegio una superficie de una forma rectangular. Tiene suficiente espacio para que el cultivo tenga 10 metros de longitud de uno de sus lados. ¿Cómo debe ser la otra dimensión del rectángulo para que el tamaño del cultivo sea de 80 metros cuadrados?

Es un problema simétrico, de área, de división, con la estructura $CE \times \frac{CE}{?} = CE$.

- Rocío tiene 6 pantalones distintos y 7 tops de diferentes colores. ¿De cuántas maneras distintas podrá vestirse combinando los pantalones con los tops?

Es un problema simétrico, de combinatoria, de multiplicación, con la estructura $CE \times CE = \frac{CE}{?}$

- Si Rocío se ha podido vestir de 42 formas distintas combinando 6 pantalones distintos que tiene con sus diferentes tops. ¿Cuántos tops tiene?

Es un problema simétrico, de combinatoria, de división. Su estructura es $CE \times \frac{CE}{?} = CE$.

2.4. Clasificación de los problemas aritméticos escolares de dos etapas

A parte de los PAE de una etapa, encontramos los PAE de dos etapas, que son aquellos que necesitan ser resueltos con dos operaciones aritméticas. Las dificultades que se encuentran son las operaciones que hay que seleccionar para resolver el problema, el orden de las mismas y los datos que hay que seleccionar para cada operación aritmética. Es por ello por lo que son varios los criterios que hay para clasificar los PAE de dos etapas: las operaciones aritméticas necesarias para resolver la incógnita, los esquemas

que tienen lugar en el problema y las categorías semánticas de cada etapa, entre otros (Nesher y Hershkovitz, 1994).

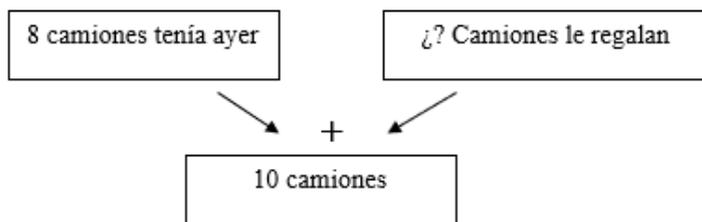
En este TFG, nos centramos en la clasificación de PAE de 2 etapas según los esquemas compuestos que subyacen en el problema (Nesher y Hershkovitz, 1994). Los problemas de una etapa tienen asociados esquemas elementales en los que se relacionan tres cantidades (dos datos e incógnita). Por ejemplo:

- María tiene 10 camiones de juguete y ayer tenía 8. ¿Cuántos camiones le han regalado?

El esquema elemental de este problema de cambio-juntar aparece en la Figura 1.

Figura 1

Esquema elemental de un problema de estructura aditiva

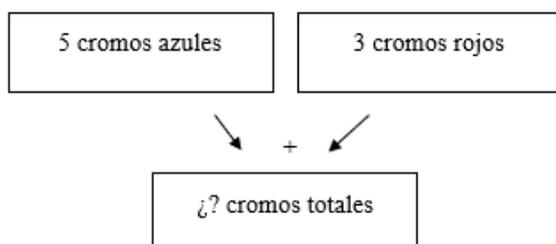


- Roberto tiene 5 cromos de color azul y 3 cromos de color rojo. ¿Cuántos cromos tiene en total?

El esquema elemental de este problema de combinar aparece en la Figura 2.

Figura 2

Esquema elemental de un problema de estructura aditiva



Sin embargo, los problemas de dos etapas tienen dos esquemas elementales que están relacionados a su vez entre sí, por lo que forman esquemas compuestos, que pueden ser

de tres tipos: esquema jerárquico, esquema comparten el todo y esquema comparten una parte:

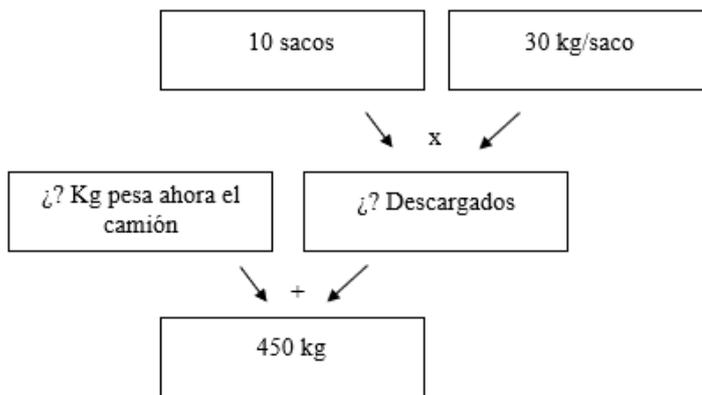
- Los esquemas jerárquicos son aquellos donde el todo de uno de los esquemas es una parte del otro esquema. Por ejemplo:

Un camión va cargado con 450 kg de plátanos. En una frutería descarga 10 sacos de 30 kg cada uno. ¿Cuánto pesa ahora la carga del camión?

El esquema de este problema de 2 etapas aparece en la Figura 3.

Figura 3

Problema de 2 etapas con esquema subyacente jerárquico



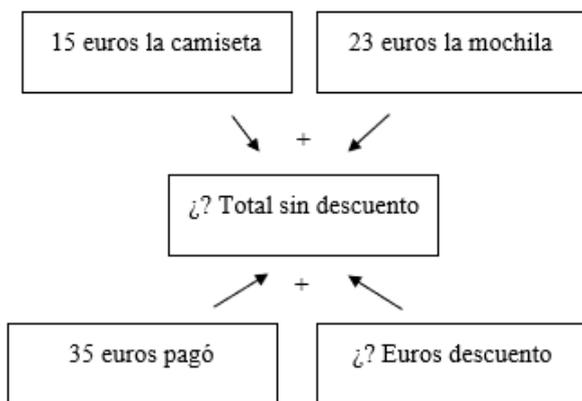
- Los esquemas comparten el todo son los que tienen el todo en común. Por ejemplo:

Ayer Tomás compró una camiseta de 15 euros y una mochila de 23 euros. Le hicieron un descuento y en total pagó 35 euros. ¿Cuánto le descontaron?

El esquema de este problema de 2 etapas aparece en la Figura 4.

Figura 4

Problema de 2 etapas con esquema subyacente comparten el todo



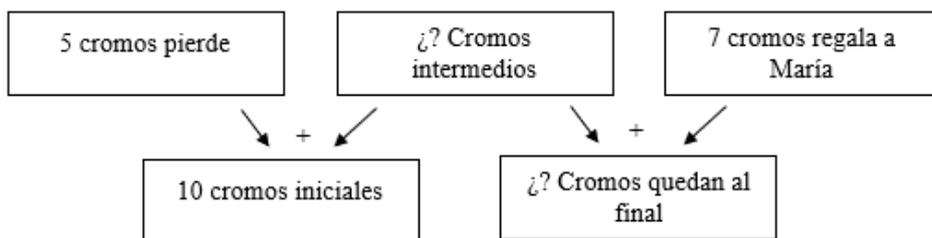
Por último, los esquemas comparten una parte tienen lugar cuando los dos esquemas tienen una parte en común. Por ejemplo:

- Raúl tiene 10 cromos. Jugando pierde 5 cromos, pero María le regala 7 cromos. ¿Cuántos cromos le quedan?

El esquema de este problema de 2 etapas aparece en la Figura 5.

Figura 5

Problema de 2 etapas con esquema subyacente comparten una parte



2.5. Análisis de los libros de texto

Los libros de texto son una herramienta fundamental en la educación, es un recurso utilizado tanto por docentes como por alumnos y alumnas para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje en todos los niveles educativos, desde la Educación Infantil hasta niveles superiores, delimitando los objetivos de aprendizaje. Este material contiene un registro de actividades y ejercicios que deben cumplimentarse y, de esta manera, afianzar los contenidos impartidos en clase (Ngonde Ernesto, y Gavilán Izquierdo, 2019).

En la mayoría de los libros de texto, aparecen problemas matemáticos, en concreto, problemas aritméticos escolares, bien de una etapa, los cuales necesitan una operación para ser resueltos, o bien de dos etapas, aquellos que necesitan dos operaciones para ser

resuelto. Es fundamental revisar los libros de texto de matemáticas de Educación Primaria para conocer el número de problemas aritméticos escolares que se encuentran en cada libro de cada curso de Educación Primaria, clasificarlos y determinar si la cantidad encontrada es equitativa en cada tipo de problema y si son adecuados para la edad de los estudiantes a los que van dirigidos.

3. Objetivos

Este trabajo de fin de grado tiene como objetivo:

- Analizar los libros de textos de matemáticas de los cursos 1º, 2º y 3º de Educación Primaria de la editorial SM para identificar los problemas aritméticos escolares.
- Clasificar los problemas aritméticos escolares de una y dos etapas que aparecen en dichos libros de texto.
- Realizar un análisis de los problemas que se recogen en los libros de textos, para averiguar los tipos de problemas que se presentan con más frecuencia y los tipos que aparecen menos.

4. Metodología de la investigación

La metodología de esta investigación constó de varios pasos. En primer lugar, realicé un estudio a fondo de las distintas clasificaciones de problemas aritméticos escolares que existen gracias a investigaciones anteriores en el área de Didáctica de las Matemáticas. Consecutivamente, estudié qué editoriales son las más utilizadas actualmente y seleccioné una de ellas. Las editoriales más estudiadas actualmente en los colegios de Educación Primaria son Santillana, SM, Vicens-Vives y Anaya. En esta investigación se utiliza la editorial SM porque es la que se utiliza en el colegio en el que realicé las prácticas, y el que me ha proporcionado el material para poder llevar a cabo la investigación.

A continuación, analicé los libros de texto de los 3 cursos de Educación Primaria de dicha editorial para localizar todos los problemas aritméticos escolares y clasificarlos según las categorías presentadas en el marco teórico.

El orden que seguí fue por cursos, empezando por el libro de 1º de Educación Primaria, siguiendo por el de 2º, así consecutivamente hasta terminar con el libro de 3º curso. El proceso consistió en analizar dichos libros y recoger, mediante capturas de pantalla, todos los problemas de cada libro en un archivo, referenciando la página en la que aparece cada

problema. Dichos problemas se clasificaron después en problemas de una etapa, problemas de dos etapas y otros problemas; tanto la página correspondiente.

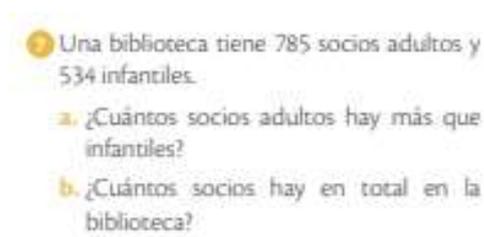
Una vez que tenía clasificados los problemas de los 3 libros en problemas de una etapa, problema de dos etapas y otros problemas, empecé a analizar más en profundidad los problemas los archivos de cada libro de texto. Comenzando por el libro de primero de Educación Primaria, analicé los problemas de una etapa según el criterio semántico para determinar a qué categoría pertenecía y explicité cuáles eran sus cantidades. Asimismo, analicé los problemas de dos etapas según sus esquemas compuestos subyacentes y explicité cuáles eran sus cantidades. Del mismo modo, si en algún problema había que añadir alguna peculiaridad del mismo, lo añadía debajo de dicho problema y de su clasificación.

En la clasificación de los problemas, hay que destacar que un mismo problema, en ocasiones, puede resolverse con una, dos o más operaciones, dependiendo de la manera que se elija para resolverlo. En esta investigación, los problemas se han clasificado teniendo en cuenta el mínimo número de operaciones posibles para ser resueltos, es decir, si un problema puede resolverse con una o dos operaciones, se ha pensado la manera de resolverlo con una operación y se ha clasificado como problema de una etapa; si un problema puede resolverse con dos o tres operaciones, se ha pensado la forma de resolverlo con dos operaciones y se ha clasificado como problema de dos etapas, y así sucesivamente.

En los libros de los diferentes cursos, tienen lugar problemas que traen consigo varias preguntas, en este caso, se han clasificado pregunta por pregunta y del mismo ejercicio han salido varios problemas, como es el caso en la Figura 6.

Figura 6

Ejemplo de problema que trae consigo varias preguntas (Aranzubía et al., 2018, p. 33)



Este ejercicio contiene dos PAE de 1 etapa cada uno. Uno consistiría en los datos con la pregunta a y el otro en los datos con la pregunta b.

El PAE que aparece en primer lugar es de estructura aditiva, en concreto, de comparar porque aparece una comparación entre dos cantidades. Se establece una comparación en más. Las cantidades son:

Cantidad de referencia: 534 socios infantiles.

Cantidad comparada: 785 socios adultos.

Cantidad de diferencia: incógnita (hay 251 socios adultos más que infantiles).

El PAE que aparece en segundo lugar es de estructura aditiva, en concreto, de combinar porque se describe una relación entre tres conjuntos: dos partes que conforman un conjunto total, que es el todo. Las cantidades son:

Parte: 785 socios adultos.

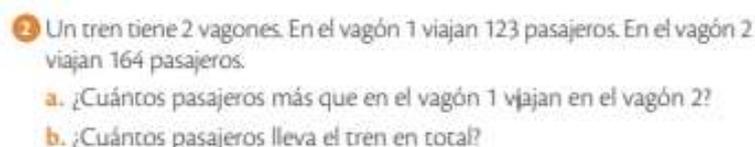
Parte: 534 socios infantiles.

Todo: incógnita (1319 socios hay en total en la biblioteca).

Otro ejemplo de problema que contiene varias preguntas lo encontramos en la Figura 7.

Figura 7

Ejemplo de problema que trae consigo varias preguntas (Aranzubía et al., 2018, p. 41)

- 
- 2 Un tren tiene 2 vagones. En el vagón 1 viajan 123 pasajeros. En el vagón 2 viajan 164 pasajeros.
- ¿Cuántos pasajeros más que en el vagón 1 viajan en el vagón 2?
 - ¿Cuántos pasajeros lleva el tren en total?

En este ejercicio encontramos dos PAE de 1 etapa, uno haciendo referencia a los datos junto a la primera pregunta y otro haciendo referencia a los datos junto a la segunda pregunta.

El PAE que aparece en primer lugar es de estructura aditiva, en concreto, de comparar porque aparece una comparación entre dos cantidades. Se establece una comparación en más. Las cantidades son:

Cantidad de referencia: 164 pasajeros viajan en el vagón 2.

Cantidad comparada: 123 pasajeros viajan en el vagón 1.

Cantidad de diferencia: incógnita (40 pasajeros más viajan en el segundo vagón).

El PAE que aparece en segundo lugar es de estructura aditiva, en concreto, de combinar porque se describe una relación entre tres conjuntos: dos partes que conforman un conjunto total, que es el todo. Las cantidades son:

Parte: 164 pasajeros viajan en el segundo vagón

Parte: 123 pasajeros viajan en el primer vagón

Todo: incógnita (287 pasajeros que lleva el tren en total)

Hay que tener en cuenta que algunos de los problemas traen comparaciones matemáticas de dos o más cantidades. En esta investigación, dichas comparaciones no han sido consideradas como una operación, sino que se han considerado como una tarea extra del problema, como aparece en la Figura 8.

Figura 8

Ejemplo de problema que contiene comparaciones matemáticas (Bernabeu Ruiz, Garín Muñoz, Modrego Tejada, Morales et al., 2018, p. 107)

• En Bosqueclaro han nacido 294 ardillas en marzo y 209 ardillas en abril.
¿Han nacido más de 500 ardillas en total?
→ Sí, han nacido más de 500.

| | | | |
|-------|---|---|---|
| 1 | 1 | | |
| 2 | 9 | 4 | |
| + | 2 | 0 | 9 |
| <hr/> | | | |
| 5 | 0 | 3 | |

Es un problema de estructura aditiva, en concreto, de combinar porque se describe una relación entre tres conjuntos: dos partes que conforman un conjunto total, que es el todo.

Las cantidades son:

Parte: 294 ardillas que han nacido en marzo.

Parte: 209 ardillas han nacido en abril.

Todo: incógnita (503 ardillas que han nacido en total).

Este problema tiene una tarea extra, que consiste en comparar el número de la solución (503) con 500.

Por otra parte, hay que tener en cuenta que algunos problemas pueden clasificarse en más de una de las clasificaciones estudiadas. Cuando este era el caso, se explican cuáles son sus posibles clasificaciones, como es el caso de la Figura 9.

Figura 9

Ejemplo de problema que puede tener varias clasificaciones (Bernabeu Ruiz, Garín Muñoz, Modrego Tejada et al., 2018, p. 203)

• Un billete cuesta 18 euros. ¿Cuánto cuestan dos billetes? Resuelve y marca:

| | | |
|-----|---|---|
| | | |
| | 1 | 8 |
| (+) | 1 | 8 |
| | 3 | 6 |

26 €
 36 €
 38 €

→ Dos billetes cuestan 36 €.

Este problema puede clasificarse como problema de estructura aditiva, en concreto, de combinar porque se describe una relación entre tres conjuntos: dos partes que conforman un conjunto total. Las cantidades serían:

Parte: 18 euros de 1 billete.

Parte: 18 euros de 1 billete.

Todo: incógnita (36 euros en total).

Sin embargo, también puede clasificarse como un problema de estructura multiplicativa, en concreto, es de agrupamiento y reparto (o de razón o asimétrico), de multiplicación, con las siguientes cantidades:

Cantidad Extensiva= 2 billetes.

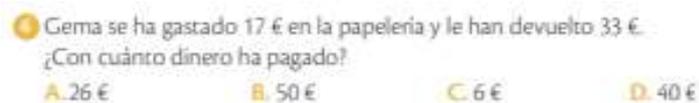
Cantidad Intensiva= 18 euros/billete.

¿Cantidad Extensiva?= incógnita (precio de dos billetes).

Otro ejemplo de problema que puede clasificarse en más de una de las clasificaciones estudiadas aparece en la Figura 10.

Figura 10

Ejemplo de problema que puede tener varias clasificaciones (Aranzubía et al., 2018, p. 37)



Es un problema de estructura aditiva, en concreto, de combinar porque se describe una relación entre tres conjuntos: dos partes que conforman un conjunto total, que es el todo. Las cantidades son:

Parte: 17 euros que ha gastado.

Parte: 33 euros le han devuelto.

Todo: incógnita (con 50 euros ha pagado).

Este problema también podría pensarse como un problema de estructura aditiva, en concreto, de cambio separar porque la cantidad inicial es mayor que la cantidad final. Las cantidades son:

Cantidad inicial: incógnita (50 euros).

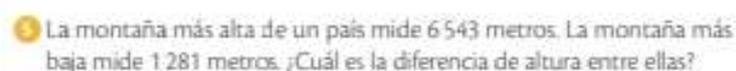
Cantidad de cambio: 17 euros.

Cantidad final: 33 euros.

Hemos encontrado algunos problemas de 1 etapa de estructura aditiva, en concreto, de comparar porque aparece una comparación entre dos cantidades, pero no se sabe realmente si la comparación es en más o en menos, como es el caso de la Figura 11.

Figura 11

Ejemplo de problema de comparar sin conocer si su comparación se realiza en más o en menos (Aranzubía et al., 2018, p. 35)



Se debe a que no preguntan por cuántos metros tiene la más alta más que la pequeña o lo contrario. Por tanto, podemos decir que la diferencia es la incógnita, pero no sabemos cuál es la cantidad de referencia y cuál la cantidad comparada, por lo que se ha analizado de la siguiente manera:

6543 metros mide la montaña más alta

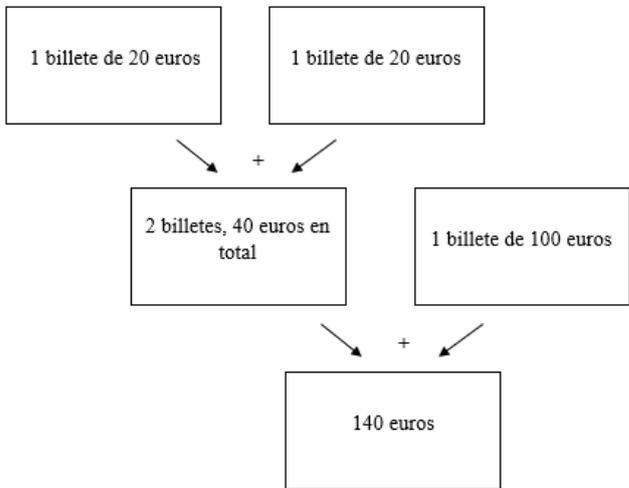
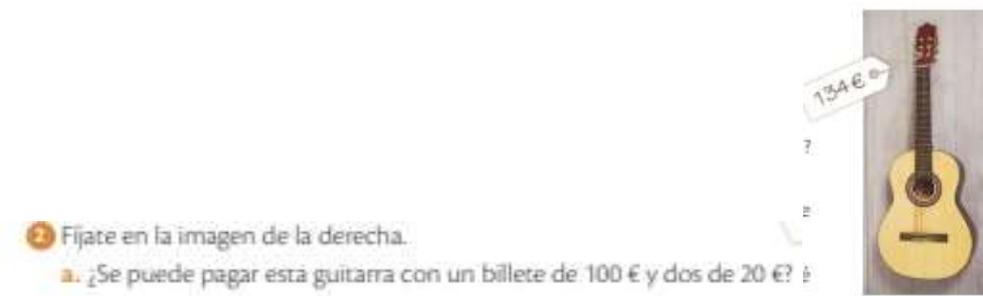
1281 metros mide la montaña más baja

incógnita (5262 metros de altura hay de diferencia entre ellas)

Del mismo modo, hay problemas de 2 etapas en los que algunas de sus operaciones pueden ser aditivas y multiplicativas, ya que las dos son válidas, como aparece en la Figura 12.

Figura 12

Ejemplo de problema con posibles operaciones aditivas y multiplicativas (Aranzubía et al., 2018, p. 143)



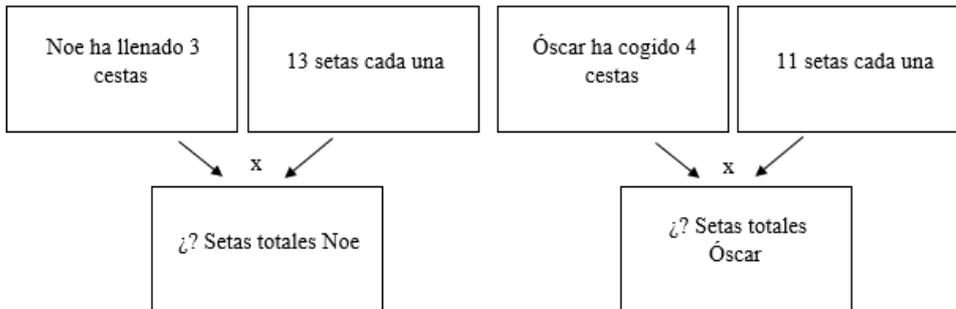
En la primera operación, en la que se suma 1 billete de 20 euros más 1 billete de 20 euros, también podría multiplicarse 20 euros por 2.

Por otro lado, encontramos problemas que no encajan con ninguna de las clasificaciones que se proponen en esta investigación, como es el caso de la Figura 13.

Figura 13

Ejemplo de problema de 2 etapas que no encaja con las clasificaciones estudiadas (Aranzubía et al., 2018, p. 63)

🟡 Noa ha llenado 3 cestas de 13 setas cada una. Óscar ha cogido 4 cestas de 11 setas cada una. ¿Quién ha recogido más setas?



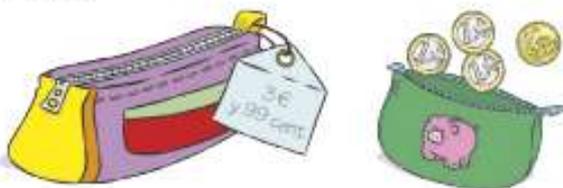
De este problema se muestran sus esquemas elementales porque no encaja con ninguna de las clasificaciones de los problemas de dos etapas estudiados en esta investigación, ya que no es un problema jerárquico, ni un problema que comparte una parte ni un problema que comparten el todo. Es de señalar que para resolver este problema haría falta además una comparación, que relacionaría ambos esquemas elementales. Al no considerar en este trabajo las comparaciones como operaciones aritméticas, ambos esquemas elementales quedan sin relación.

Otro ejemplo lo encontramos en la Figura 14.

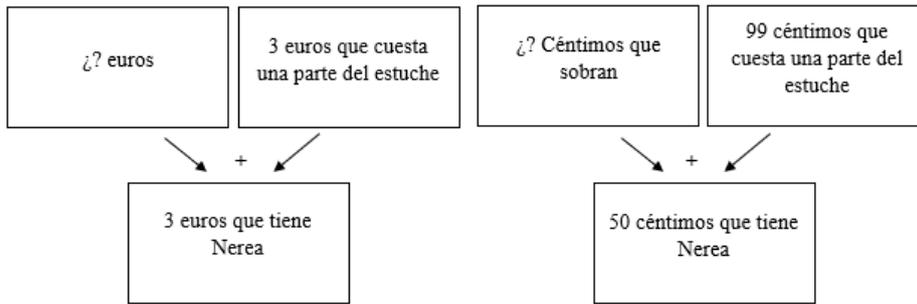
Figura 14

Ejemplo de problema de 2 etapas que no encaja con las clasificaciones estudiadas (Aranzubía et al., 2018, p. 139)

🟡 Nerea quiere comprar este estuche. En su monedero solo tiene estas monedas.



- a. ¿Cuánto dinero tiene Nerea?
- b. ¿Tiene suficiente dinero para comprar el estuche?



Al igual que el anterior, de este problema se muestran sus esquemas elementales porque no encaja con ninguna de las clasificaciones de los problemas de dos etapas estudiados en esta investigación, ya que no es un problema jerárquico, ni un problema que comparte una parte ni un problema que comparten el todo. De nuevo habría que hacer una comparación que relacionaría los esquemas elementales.

Siguiendo con los ejemplos, hemos encontrado ejercicios en los que se proponen varias opciones y una de ellas es la solución correcta, lo encontramos en la Figura 15 y en la Figura 16.

Figura 15

Ejemplo de problema donde aparecen soluciones y hay que elegir la correcta (Bernabeu Ruiz, Garín Muñoz, Modrego Tejada, Morales et al., 2018, p. 80)

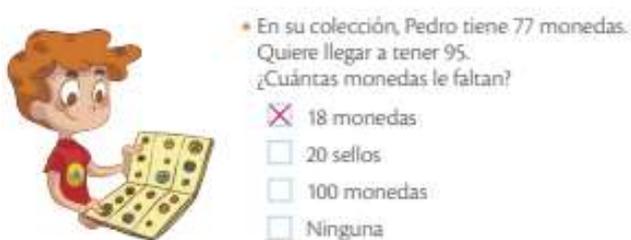
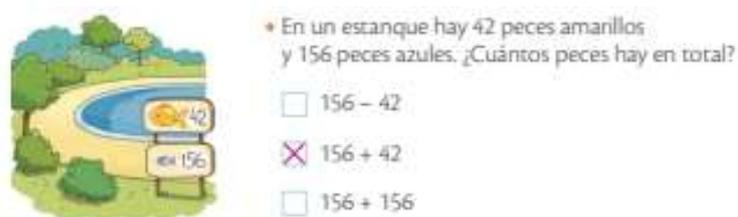


Figura 16

Ejemplo de problema donde aparecen soluciones y hay que elegir la correcta (Bernabeu Ruiz, Garín Muñoz, Modrego Tejada, Morales et al., 2018, p. 150)



También aparecen ejercicios en los que hay que descubrir qué dato falta para completar el problema y resolverlo posteriormente, como es el caso de la Figura 17 y de la Figura 18.

Figura 17

Ejemplo de problema en el que hay que identificar el dato que falta (Bernabeu Ruiz, Garín Muñoz, Modrego Tejada, Morales et al., 2018, p. 62)

Lee y elige el dato que falta para poder resolver el problema.

- Un teatro tiene 2 funciones diarias.
Por la mañana han ido 245 espectadores.
¿Cuántos espectadores han ido hoy?
- La entrada cuesta 12 €.
- Por la noche han ido 184 espectadores.



Figura 18

Ejemplo de problema en el que hay que identificar el dato que falta (Bernabeu Ruiz, Garín Muñoz, Modrego Tejada, Morales et al., 2018, p. 62)

Lee y elige el dato que falta para poder resolver el problema.

- En el puerto quedan 100 barcos. El resto ha salido a pescar.
¿Cuántos barcos caben en el puerto en total?
- Tienen vela 35 barcos.
- Han salido a pescar 68 barcos.

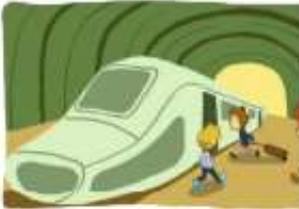
Hay ejercicios en los que hay que diferenciar qué datos son necesarios y qué datos sobran, como aparecen en la Figura 19 y en la Figura 20.

Figura 19

Ejemplo de problema donde hay que identificar los datos necesarios y los que sobran (Bernabeu Ruiz, Garín Muñoz, Modrego Tejada, Morales et al., 2018, p. 128)

¿Qué datos necesitas para resolver el problema? Rodea.

A las 10 de la mañana había 25 personas en el tren. Ahora hay 52.
¿Cuántas personas han subido al tren?



¿Qué dato sobra?
Sobra el dato de la hora (a las 10 de la mañana).

Figura 20

Ejemplo de problema donde hay que identificar los datos necesarios y los que (Bernabeu Ruiz, Garín Muñoz, Modrego Tejada, Morales et al., 2018, p. 129)

Lee y rodea el dato que no es necesario. A continuación, resuelve el problema. Utiliza el mural de resolución de problemas si lo necesitas.

En un teatro con 25 filas caben 650 espectadores. Ya han entrado 356 personas. ¿Cuántas personas más hacen falta para llenar el teatro?



Y también ejercicios donde hay que marcar la operación necesaria para resolver el problema, como aparece en la Figura 21 y en la Figura 22.

Figura 21

Ejemplo de problema donde hay que marcar la operación necesaria (Bernabeu Ruiz, Garín Muñoz, Modrego Tejada, Morales et al., 2018, p. 42)

• Anoche, Nora vio 12 estrellas con su telescopio. Antes de cenar, ya había visto 7.
¿Cuántas estrellas vio después de cenar?

Sumar Restar

Figura 22

Ejemplo de problema donde hay que marcar la operación necesaria (Bernabeu Ruiz, Garín Muñoz, Modrego Tejada, Morales et al., 2018, p. 42)

• Aitor juega con 58 marcianitos. Ha metido 35 marcianitos dentro de su nave.
¿Cuántos quedan fuera?

Sumar Restar

Asimismo, aparecieron ejercicios donde hay que ordenar los datos previamente a la resolución del problema, como ejemplo tenemos la Figura 23 y la Figura 24.

Figura 23

Ejemplo de problema donde hay que ordenar los datos del mismo (Bernabeu Ruiz, Garín Muñoz, Modrego Tejada, Morales et al., 2018, p. 198)

Numera las frases para ordenar los problemas.

- 3 ¿Cuántos niños van?
- 2 6 niños no pueden ir.
- 1 Eva ha invitado a 15 niños a su cumpleaños.

Figura 24

Ejemplo de problema donde hay que ordenar los datos del mismo (Bernabeu Ruiz, Garín Muñoz, Modrego Tejada, Morales et al., 2018, p. 198)

Numera las frases para ordenar los problemas.

- 2 Su padre tiene el triple de años.
- 1 Lorena tiene 15 años.
- 3 Calcula la edad del padre de Lorena.

Y además ejercicios donde el alumnado tiene que inventar algún dato para resolverlo, como ocurre en la Figura 25 y en la Figura 26.

Figura 25

Ejemplo de problema donde hay que inventar algún dato (Bernabeu Ruiz, Garín Muñoz, Modrego Tejada, Morales et al., 2018, p. 106)

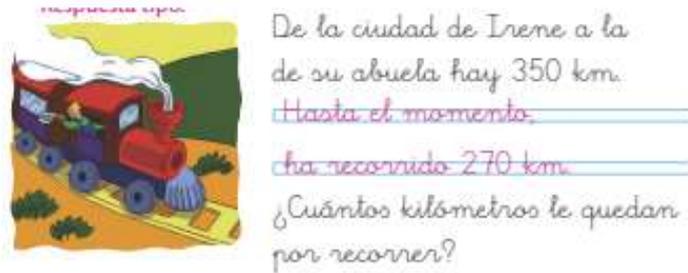


Nora guarda tapones de plástico para reciclar.
Tiene 124 azules y 170 morados.

¿Cuántos tapones tiene morados más que azules?

Figura 26

Ejemplo de problema donde hay que inventar algún dato (Bernabeu Ruiz, Garín Muñoz, Modrego Tejada, Morales et al., 2018, p. 172)



Algunos ejemplos de los problemas clasificados en la categoría de “otros problemas” son los que aparecen en la Figura 27 y en la Figura 28.

Figura 27

Ejemplo de problema de la categoría “otros problemas” (Bernabeu Ruiz, Garín Muñoz, Modrego Tejada et al., 2018, p. 213)



Este problema pertenece a esa categoría porque es de 4 etapas.

Figura 28

Ejemplo de problema de la categoría “otros problemas” (Aranzubía et al., 2018, p. 20/21)

LAS EDADES DE LOS HERMANOS

Mi hermana tiene 3 años más que yo. Mi hermano tiene 5 años más que mi hermana. Entre los tres hacemos un total de 35 años. ¿Cuál es mi edad?



COMPRENDER

1. Lee el problema atentamente.
2. Responde a estas preguntas:
 - a. ¿Quién es mayor, mi hermana o yo?
 - b. ¿Es mayor mi hermano o mi hermana?
 - c. ¿Quién es el mayor? ¿Y el pequeño?
 - d. ¿Cuántos años sumamos entre los tres hermanos?
3. Completa esta tabla con las respuestas anteriores.

| | |
|--|--|
| datos del problema ¿Quiénes de manera segura? ¿Qué no cambia? | *** |
| objetivo ¿Qué tengo que averiguar? | *** |
| relaciones ¿Qué información me ayuda a conseguir el objetivo? | Entre los tres hermanos sumamos 35 años. |

4. Escribe el problema con tus palabras en tu cuaderno.
5. Puedo hacer una tabla. En ella puedo colocar todos los datos que conozco. También puedo dejar huecos para colocar los que me faltan.

| mi edad | hermana | hermano | suma | comentario |
|---------|---------|---------|------|------------|
| *** | *** | *** | *** | *** |

Si sabes la primera edad puedes averiguar la demás.

Prueba a dar un valor para la edad. Calcula el resto de edades o sumamos. Si no se cumplen las condiciones del problema prueba con otro y repite la operación.

Añade a la tabla las condiciones que deben cumplir las edades de los hermanos. Añade también la suma de las tres edades.

| mi edad | hermana (+ 3) | hermano (+ 5) | suma | comentario (la suma debe ser 35) |
|---------|------------------|------------------|------|-------------------------------------|
| 10 | 13 | 18 | 41 | no |

Comienza a dar un valor a tu edad. Por ejemplo, puedes suponer que tienes 1 año y calcular la primera fila para ver si es correcta.

| mi edad | hermana (+ 3) | hermano (+ 5) | suma | comentario (la suma debe ser 35) |
|---------|------------------|------------------|----------------|-------------------------------------|
| 1 | 1 + 3 = 4 | 4 + 5 = 9 | 1 + 4 + 9 = 14 | No es correcto 14 < 35 |

No es el resultado correcto porque las edades de los tres hermanos no suman 35. Puedes probar con el número siguiente hasta encontrar el correcto. También puedes probar con un número mayor, como 10 años.

| mi edad | hermana (+ 3) | hermano (+ 5) | suma | comentario (la suma debe ser 35) |
|---------|------------------|------------------|-------------------|-------------------------------------|
| 10 | 10 + 3 = 13 | 13 + 5 = 18 | 10 + 13 + 18 = 41 | No es correcto 41 > 35 |

RESOLVER

1. Vuelve al principio. Comprueba si la solución es válida.
2. Asegúrate de si hay una solución única o varias.
3. Lee de nuevo el objetivo. Escribe una respuesta.

Mi edad es 10 años.

En este problema se trabaja la técnica del ensayo-error, pudiendo ser un precursor al pensamiento algebraico.

5. Resultados

Se han analizado 3 libros de texto de matemáticas de Educación Primaria, de la editorial SM, en concreto, los libros de los cursos de 1º, 2º y 3º.

Todos los problemas aritméticos escolares se han clasificado en problemas de una etapa, problemas de dos etapas y otros problemas. Posteriormente, se han analizado todos los problemas de una y dos etapas para especificar de qué tipo de problema son según las clasificaciones presentadas en el marco teórico y se ha especificado cuáles son sus cantidades.

De este modo, los problemas de una etapa se clasificaron primero en problemas de estructura aditiva o multiplicativa. Los problemas de estructura aditiva se clasificaron a su vez en las siguientes categorías:

- Problemas de cambio, dentro de los cuales se ha distinguido si el problema era de juntar o de separar y cuál de las cantidades era la incógnita.
- Problemas de combinar, dentro de los cuáles se han especificado las cantidades y cuál de ellas era la incógnita.
- Problemas de comparar, dentro de los cuales se ha distinguido si la comparación se realiza en más o en menos y cuál de las cantidades era la incógnita.

- Problemas de igualar, los cuáles también se han especificado si la comparación se realiza en más o en menos y cuál de las cantidades era la incógnita.

Dentro de los problemas de estructura multiplicativa, se ha distinguido entre:

- Problemas de agrupamiento y reparto, que a su vez pueden ser de multiplicación, de división-medida y de división-reparto,
- Problemas de comparación multiplicativa, que pueden ser problemas de multiplicación, problemas de división con cantidad extensiva como incógnita y problemas de división con el cuantificador como incógnita, o
- Problemas simétricos, que se subdividen en problemas de áreas (problemas de multiplicación y problemas de división) y problemas de combinatoria (problemas de multiplicación y problemas de división).

Los problemas de dos etapas se han clasificado según su esquema compuesto subyacente, distinguiendo entre problemas con esquemas jerárquicos (donde el todo de uno de los esquemas es una parte del otro esquema), problemas con esquemas comparten el todo (son los que tienen el todo en común) y problemas comparten una parte (los dos esquemas tienen una parte en común).

A continuación, se muestran los resultados obtenidos en la clasificación de los libros de matemáticas de Educación Primaria.

5.1. Libro de 1º curso de Educación Primaria

En este libro encontramos 110 problemas de 1 etapa, 18 problemas de 2 etapas y 12 problemas clasificados en “otros problemas”, como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2

Resultados de los problemas del libro de matemáticas de 1º de Educación Primaria

| Problemas de 1 etapa | Problemas de 2 etapas | Otros problemas |
|----------------------|-----------------------|-----------------|
| 110 | 18 | 12 |

En este libro, hay 110 problemas de una etapa, en concreto, 106 de estructura aditiva y 4 de estructura multiplicativa.

Dentro de los 106 problemas de estructura aditiva, encontramos 50 problemas de cambio, 43 problemas de combinar, 12 problemas de comparar y 1 problema de igualar.

Dentro de los 4 problemas de estructura multiplicativa, todos están dentro de la clasificación de agrupamiento y reparto (o de razón o asimétricos), 2 de ellos son problemas de multiplicación y 2 de ellos son problemas de división-reparto.

Los problemas de 2 etapas son todos del mismo tipo, son los 18 problemas de esquema jerárquico.

Encontramos 12 problemas que no están dentro de las clasificaciones estudiadas y que consisten en problemas de lógica, problemas donde solo es necesario realizar comparaciones y problemas de más de 2 etapas.

5.2. Libro de 2º curso de Educación Primaria

En este libro encontramos 82 problemas de 1 etapa, 13 problemas de 2 etapas y 3 problemas clasificados en “otros problemas”, como se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3

Resultados de los problemas del libro de matemáticas de 2º de Educación Primaria

| Problemas de 1 etapa | Problemas de 2 etapas | Otros problemas |
|----------------------|-----------------------|-----------------|
| 82 | 13 | 3 |

Hemos encontrado 82 problemas de una etapa, 52 son de estructura aditiva y 30 son de estructura multiplicativa.

Los problemas de estructura aditiva son 14 de cambio, 24 de combinar, 13 de comparar y 1 de igualar.

Los problemas de estructura multiplicativa son 23 de agrupamiento y reparto de multiplicación, 6 de comparación multiplicativa de multiplicación y 1 de comparación multiplicativa de división con la cantidad extensiva como incógnita.

Los problemas de 2 etapas, 12 son de esquema jerárquico y 1 es de esquema comparten el todo.

En otros problemas, encontramos solo 3, que son problemas de más de 2 etapas.

5.3. Libro de 3º curso de Educación Primaria

En este libro encontramos 118 problemas de 1 etapa, 19 problemas de 2 etapas y 48 problemas clasificados en “otros problemas”, como se muestra en la tabla 4.

Tabla 4

Resultados de los problemas del libro de matemáticas de 3º de Educación Primaria

| Problemas de 1 etapa | Problemas de 2 etapas | Otros problemas |
|----------------------|-----------------------|-----------------|
| 118 | 19 | 48 |

En este libro encontramos 118 problemas de 1 etapa, en concreto, 45 problemas de estructura aditiva y 73 de estructura multiplicativa.

En los problemas de estructura aditiva encontramos 11 problemas de cambio, 27 problemas de combinar, 6 problemas de comparar y 1 problema de igualar.

En los problemas de estructura multiplicativa encontramos 43 problemas de agrupamiento y reparto de multiplicación, 8 problemas de agrupamiento y reparto de división-medida y 14 problemas de agrupamiento y reparto de división-reparto. También encontramos 2 problemas de comparación multiplicativa de multiplicación, 4 problemas de comparación multiplicativa de división con la cantidad extensiva como incógnita. Por último, encontramos 2 problemas simétricos de área de multiplicación.

Los problemas de 2 etapas son 14 problemas de esquema jerárquico, 1 problema de esquema comparten el todo, 1 problema de esquema de comparten una parte y 3 problemas no han sido clasificados en ninguna de las clasificaciones estudiadas en esta investigación, por lo que hemos añadido sus esquemas elementales únicamente.

En el apartado otros problemas encontramos 48 problemas, en los que se trabajan los números ordinales, la técnica del ensayo-error, las aproximaciones, las comparaciones, las fracciones, y problemas de más de 2 etapas.

6. Discusión y conclusiones

La discusión y las conclusiones se basan en los resultados obtenidos en el análisis de los diferentes libros de matemáticas analizados de Educación Primaria.

En el libro de 1º de Educación Primaria, la mayoría de los problemas de 1 etapa son de estructura aditiva y las proposiciones abiertas que subyacen al problema son canónicas, más fáciles que las proposiciones abiertas no canónicas (Carpenter y Moser, 1983), citado por (Puig y Cerdán, 1988).

En la mayoría de problemas aparecen enunciados cortos y con dibujos, haciendo referencia a las dificultades sintácticas estudiadas por (Nesher, 1982), citado por (Puig y Cerdán, 1988).

Respecto a las dificultades semánticas (Puig y Cerdán, 1988), los tipos de problemas que más se repiten son los problemas de 1 etapa, en concreto, los de estructura aditiva, sobre todo problemas de cambio, de combinar y en menor medida los de comparar. Solo aparece un problema de igualar. Aparecen en ese orden, de menor a mayor dificultad, tal y como se muestra en las conclusiones de estudios realizados por (Puig y Cerdán, 1988).

En relación a los problemas de 1 etapa de estructura multiplicativa, en el libro de 1º de Educación Primaria, aparecen problemas de agrupamiento y reparto de multiplicación y de división-reparto y no aparece ningún problema de división-medida. Esto se debe a que los problemas de división-reparto son más fáciles que los problemas de división-medida.

Por último, los problemas de 2 etapas tienen todos un esquema subyacente jerárquico (el todo de uno de los esquemas es una parte del otro esquema), que son los que tienen menor nivel de dificultad entre los problemas de 2 etapas.

En resumen, el libro de 1º de Educación Primaria de la editorial SM muestra problemas coherentes y adecuados a la edad y nivel de los alumnos, y van progresando paulatinamente en el grado de dificultad de los problemas.

En el libro de 2º de Educación Primaria, los problemas de 1 etapa de estructura aditiva, cuentan con proposiciones canónicas y no canónicas que subyacen al problema (Puig y Cerdán, 1988), ampliando de esta manera la dificultad en relación a los problemas del libro de 1º de Educación Primaria.

Los problemas en este libro cuentan con enunciados más largos, aunque siguen apareciendo muchos dibujos en la mayoría de problemas. Teniendo en cuenta al componente semántico (Puig y Cerdán, 1988), los tipos de problemas que más se repiten son los problemas de 1 etapa de estructura aditiva, en concreto, los problemas de combinar, de cambio, de comparar. Aparece solo un problema de igualar. El orden

seguido no es el mismo que en el libro de 1º de Educación Primaria, ya que hay más problemas de combinar que de cambio, aunque estos últimos suelen ser más difíciles que los de combinar (Puig y Cerdán, 1988).

Los problemas de 1 etapa de estructura multiplicativa son todos de agrupamiento y reparto de multiplicación, pero no aparece ningún problema de división-reparto ni de división-medida. Sin embargo, sí aparecen problemas de comparación multiplicativa, de multiplicación y uno de división con la cantidad extensiva como incógnita.

La mayoría de los problemas de 2 etapas tienen esquemas subyacentes del tipo jerárquico (el todo de uno de los esquemas es una parte del otro esquema) y solo aparece un problema del esquema comparten el todo (los dos esquemas tienen el todo en común). En los problemas de 2 etapas, la editorial sigue la dificultad adecuada, ya que los problemas jerárquicos son más fáciles y han introducido un problema con el esquema subyacente del tipo comparten el todo.

El libro de 2º de Educación Primaria aumenta la dificultad de los problemas, tanto en los problemas de 1 etapa como en los problemas de 2 etapas, adaptándose al alumnado al que va destinado. Por tanto, la editorial SM sigue aumentando el nivel de dificultad de cada curso, como hasta ahora. Lo que hay que destacar es que en el libro de 1º de Educación Primaria aparecen problemas de división-reparto y en el libro de 2º de Educación Primaria no.

En el libro de 3º de Educación Primaria, las proposiciones abiertas que subyacen al problema (Puig y Cerdán, 1988) son tanto canónicas como no canónicas.

En el libro de este curso, los enunciados de los problemas son más largos y cuentan con escasos dibujos respecto a las dificultades sintácticas (Puig y Cerdán, 1988).

Haciendo referencia al componente semántico (Puig y Cerdán, 1988), la mayoría de problemas de 1 etapa son de estructura multiplicativa, aunque también aparecen problemas de estructura aditiva. Entre los problemas de estructura aditiva, aparecen en el siguiente orden: problemas de combinar, de cambio, de comparar y de igualar. Predominan los problemas de 1 etapa de estructura multiplicativa, en concreto, de agrupamiento y reparto de multiplicación, y de comparación multiplicativa, tanto de multiplicación como de división con la cantidad explícita como incógnita. En este caso, ocurre como en el libro de 2º de Educación Primaria, donde hay más problemas de

combinar que de cambio. De esta manera, la dificultad es mayor ya que aparecen más problemas de combinar que de cambio (Puig y Cerdán, 1988).

Los esquemas subyacentes de los problemas de 2 etapas son la mayoría del tipo jerárquico (el todo de uno de los esquemas es una parte del otro esquema), que son los más fáciles. También aparece un problema del esquema comparten el todo (los dos esquemas tienen el todo en común) y un problema de esquema comparten una parte (los dos esquemas tienen una parte en común). En este libro aparecen los tres tipos de problemas de 2 etapas, lo que aumenta la dificultad respecto al curso anterior.

Resumiendo, en este libro aumenta la dificultad, ya que aparecen enunciados más largos, aparecen menos dibujos, tienen lugar más problemas de 1 etapa de estructura multiplicativa que de estructura aditiva y además aparecen problemas de 2 etapas de todos los tipos (jerárquico, comparten el todo y comparten una parte).

En conclusión, la editorial SM sigue de manera coherente, lógica y adecuada la progresión y dificultad de los problemas respecto a los cursos de Educación Primaria, respetando y favoreciendo la edad y nivel del alumnado, respecto al aprendizaje y las dificultades de los problemas teniendo en cuenta las proposiciones abiertas que subyacen al problema (Puig y Cerdán, 1988). Como las proposiciones abiertas canónicas son más fáciles que las no canónicas, es por ello que la editorial ha puesto muchas proposiciones abiertas canónicas en el libro de 1º de Educación Primaria, que han ido disminuyendo y mezclándose con las no canónicas en los libros de 2º y 3º de Educación Primaria.

La editorial también ha respetado las dificultades sintácticas, puesto que, siguiendo los resultados de estudios de (Nesher, 1982), citado por (Puig y Cerdán, 1988), en el libro de 1º de Educación Primaria se encuentran enunciados cortos y la mayoría de problemas cuentan con dibujos y, a medida que avanza el curso, los enunciados tienen más longitud y cada vez presentan menos dibujos.

Teniendo en cuenta las dificultades semánticas (Puig y Cerdán, 1998), en el libro de 1º de Educación Primaria se sigue el orden de dificultad mostrado en las conclusiones de los estudios (Puig y Cerdán, 1988), apareciendo problemas de cambio, seguidos en menor medida los problemas de combinar y en menor medida los problemas de comparar. En este punto es donde la editorial puede encontrarse en desigualdad con el resto de libros, ya que en los libros de 2º y 3º de Educación Primaria aparecen más problemas de combinar, seguidos por los de cambio y seguidos por los de comparar.

En los problemas de 2 etapas también encontramos concordancia en los libros de texto con los problemas propuestos, puesto que de los tres tipos existentes (esquema jerárquico, esquema comparten el todo y esquema comparten una parte), el que más aparece en los tres cursos son los problemas de esquema jerárquico, debido a que son los más fáciles, destacando que son los únicos que encontramos en el libro de 1º de Educación Primaria. En el libro de 2º de Educación Primaria los esquemas jerárquicos son la mayoría, aunque contamos con uno de comparten el todo y en el libro de 3º de Educación Primaria ocurre lo mismo, los problemas jerárquicos son la mayoría, aunque en este curso ya encontramos problemas de los tres tipos de 2 etapas.

Por último, en los apartados con otros tipos de problemas, se trabaja contenido relacionado con el curso del libro, por lo que también se respeta el ritmo, nivel y dificultad del alumnado.

7. Referencias bibliográficas

Aranzubía, V., Bernabeu Ruiz, J., Cusó Campo, M. Casacuberta Suñer, A., Garín Muñoz, M. Morales, F., Pérez Francisco, M. N., Vidal González, J. M. (2018). *Matemáticas 3 Primaria*. SM Más savia.

Bernabeu Ruiz, J., Garín Muñoz, M., Modrego Tejada, R., Ediciones, SM. (2018). *Matemáticas 1 Primaria*. SM Más savia.

Bernabeu Ruiz, J., Garín Muñoz, M., Modrego Tejada, R., Morales, F., Pérez Francisco, M, N., Vidal González, J. M. (2018). *Matemáticas 2 Primaria*. SM Más savia.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. y Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Jeinemann.

Castro, E., Rico, L., Gutiérrez, J., Tortosa, A., Segovia, I., González, E., Morcillo, N. y Fernández F. (1998). *Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada.

Gallego Mulero, R. (2018). *Los problemas aritméticos escolares: diversas clasificaciones y dificultades* [Trabajo de Fin de Grado, Universidad de Sevilla]. <https://idus.us.es/handle/11441/80650>

- González Astudillo, M. T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas: los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), 389-408.
- Nesher, P. y HersHKovitz, S. (1994). The role of schemes in two-step problems: Analysis and research findings. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 1-23.
- Ngonde-Ernesto, L. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2019). Análisis de los problemas de dos etapas en los libros de cuarto de Educación Primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 635). SEIEM.
- Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía. *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía*, 60, de 27 de marzo de 2015, pp. 9-696.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis.
- Quintero, A. H. (1986). Children's conceptual understanding of situations involving multiplication. *Arithmetic Teacher*, 33(5), 34-37.