

Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Distribución de costes:
Un análisis desde la Teoría de Juegos

Autor: Gonzalo Sánchez López

Tutora: Dra. D^a Encarnación Algaba Durán

Dpto. Matemática Aplicada II
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2022



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

**Distribución de costes:
Un análisis desde la Teoría de Juegos**

Autor:

Gonzalo Sánchez López

Tutora:

Dra. D^a Encarnación Algaba Durán

Catedrática de Universidad

Dpto. Matemática Aplicada II
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla 2022

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

El secretario del Tribunal

Sevilla, 2022

A mi familia

AGRADECIMIENTOS

Hace cuatro años empecé esta andadura que va llegando a su fin. Realmente no es el fin, ni siquiera el principio del fin, pero posiblemente sea el fin del principio.

No quiero finalizar esta etapa sin agradecer a todas las personas que me han acompañado en ella sufriendo mis vaivenes.

Agradecer a Encarnación su dedicación, atención y trato mostrado desde el primer día que nos reunimos. Gracias por ayudarme, apoyarme y enseñarme un poco este trabajo de la investigación que tanto disfruta.

Agradecer a D. Darío Rodríguez Carrasco por facilitarme los datos sobre las rutas de los camiones de recogida de basuras de Jerez de la Frontera y la atención mostrada.

A mis compañeros, que han pasado a ser mis amigos y confidentes.

Quiero agradecer por último a los pilares de mi vida, mi familia. Gracias por estar siempre ahí, desde los abuelos a los titos, pero sobre todo vosotros, mamá, papá e Inés. Sin la ayuda de mi familia no habría pasado siquiera del primer año de carrera. Gracias por vuestro esfuerzo, vuestro cariño y por la educación que me habéis dado. Gracias por ser siempre vosotros.

Gonzalo Sánchez López

Jerez de la Frontera, septiembre 2022

RESUMEN

El presente Trabajo de Fin de Grado, *Distribución de costes: Un análisis desde la Teoría de Juegos*, ha sido realizado por D. Gonzalo Sánchez López, alumno de cuarto curso del Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales de la Universidad de Sevilla, bajo la dirección de la Profesora D^a Encarnación Algaba Durán.

Este estudio basa su desarrollo en la aplicación de la Teoría de Juegos al reparto de costes bajo diferentes casuísticas. La Teoría de Juegos es una disciplina matemática cuyo objeto es analizar situaciones en las que existe un conflicto entre diversos agentes. Se trata de una rama que, aún siendo relativamente moderna, ha adquirido un rol imprescindible en materias como la ingeniería, la economía, la biología, la informática o la política, entre otras. En concreto, este trabajo se centra en los juegos cooperativos, en los que se analiza las situaciones en las que los jugadores pueden colaborar entre ellos a través de la formación de coaliciones, buscando una mayor utilidad y aplicabilidad, con el objetivo de conseguir un beneficio común compartido.

El trabajo consta de 4 capítulos, como se detalla a continuación:

En el primer capítulo del trabajo se recogen las nociones terminológicas y conceptuales básicas de la Teoría de Juegos que serán necesarias para el desarrollo del mismo, así como para su correcta interpretación. Se estudiarán algunos de los conceptos de solución más relevantes de la Teoría de Juegos, como el *core*, el *nucleolus*, el valor de Shapley o el valor de Tijs, acompañados de ejemplos prácticos para facilitar su comprensión. Las resoluciones de estos ejemplos se darán a su vez de forma gráfica. A lo largo de este trabajo, la solución puntual del *nucleolus* será la que tome mayor relevancia.

El segundo capítulo tiene como eje principal el análisis de la solución de tipo puntual denominada *nucleolus*. En particular, se centra en la computación del *nucleolus*, además, se describen algunas variantes del concepto, como son el concepto de *nucleolus* normalizado, desarrollado en Grotte (1970), el *nucleolus* proporcional, estudiado en Young et al. (1980), el *nucleolus* disruptivo, analizado en Littlechild y Vaidya (1976) y en Michener et al. (1981) o el *nucleolus* de la demanda Engevall (1996). Una vez estudiadas las distintas variantes del concepto *nucleolus*, así como la computación de éstas, se analizan distintas aplicaciones en las que se asignan costes o beneficios, tratando de mostrar la influencia que tienen en las soluciones duales de los problemas. Algunos de estos ejemplos son el problema de agencias de seguros, en Lemaire (1984), el problema de conjunto de proyectos, en Krus y Bronisz (2000), el problema de producción y planificación del transporte, de Sakawa et al. (2001), el problema de mercados de electricidad, en Satyaramesh y Radhakrishn (2009), o el problema de fabricación, en Oh y Shin (2012).

En el tercer capítulo de este trabajo, se analiza el estudio del caso del reparto de costes llevado

a cabo entre las distintas gasolineras abastecidas por el depósito de Gotemburgo de la petrolera sueca Norsk Hydro, mostrando si la cooperación entre estas gasolineras es beneficiosa con el fin de reducir los costes de abastecimiento mediante el estudio de distintas soluciones de carácter puntual, el *nucleolus*, el *nucleolus* de la demanda, el valor de Shapley y el valor de Tijs. Previamente se describen distintos casos de gran relevancia en la Teoría de Juegos, como el conocido problema del aeropuerto, estudiado por Littlechild y Thompson (1977), el problema de abastecimiento de agua (o La Autoridad del Valle del Tennessee (TVA)), analizado por Parker (1943) y por Straffin et al. (1981), el desarrollo de fuentes de agua, llevado a cabo por Young et al. (1982), las inversiones en energía eléctrica, examinadas por Gately (1974) o el problema de las facturaciones de las tarifas telefónicas, por Billera et al. (1978). En todos estos ejemplos, la Teoría de Juegos intenta ofrecer una solución factible adaptada a las peculiaridades de cada situación. Asimismo, en este capítulo se analiza el importante problema del viajero (*TSP*), observando las distintas variantes de éste que podrían ser aplicadas al caso que nos ocupa en el presente trabajo para el cálculo de la función característica.

En el cuarto y último capítulo se centra en la aplicación de los conceptos estudiados en los capítulos anteriores a un caso concreto: se analizará el caso de la recogida de basuras en el municipio de Jerez de la Frontera, con el objetivo de conocer si la cooperación entre los distintos distritos de la ciudad es beneficiosa para afrontar y optimizar sus costes. Para ello es necesario contextualizar la ciudad desde un punto de vista geográfico y demográfico en sus distintas zonas, así como conocer y analizar la situación real de este servicio al ciudadano en la actualidad. Esta labor se ha llevado a cabo partiendo de los datos facilitados por la empresa encargada de la recogida de basuras, en los que se detallan datos imprescindibles para esta investigación, como los distritos en los que se divide la ciudad, las longitudes de los trayectos que componen cada una de las rutas, los camiones implicados, etc. Para la resolución del problema se toman en cuenta todas las recomendaciones estudiadas a lo largo del trabajo para el cálculo del *nucleolus*, resolviéndose la secuencia de problemas en *LINGO*. Además del *nucleolus*, se analizan otras soluciones de tipo puntual, como el valor de Shapley y el valor de Tijs.

ABSTRACT

This study bases its development on the application of Game Theory to the distribution of costs under different cases. Game Theory is a mathematical discipline whose purpose is to analyze situations where a conflict between various agents occurs. It is a scientific branch that, despite being relatively modern, has acquired an essential role in areas such as Engineering, Economics, Biology, Computer Science, or Politics, among others. Specifically, this work focuses on cooperative games, in which situations where players can collaborate with each other through the formation of coalitions are analyzed, seeking greater utility and applicability, with the aim of obtaining a shared and common benefit. The work consists of 4 chapters, as detailed below:

In the first chapter of the work, the basic terminological and conceptual notions of Game Theory that will be necessary for its development, as well as for its correct interpretation, are collected. Some of the most relevant solution concepts of Game Theory will be studied, such as the core, the nucleolus, the Shapley value or the Tijs value, together with practical examples to facilitate their understanding. The resolutions of these examples will be given graphically. Throughout this work, the punctual solution of the nucleolus will be the one that takes on the greatest relevance.

The second chapter has as its main axis the analysis of the point-type solution of the nucleolus. In particular, it focuses on the computation of the nucleolus, in addition, some variants of the concept are described, such as the concept of the normalized nucleolus, developed in Grotte (1970), the proportional nucleolus, studied in Young et al (1980), the disruptive nucleolus, analysed in Littlechild and Vaidya (1976) and in Michener et al. (1981), or the nucleolus of demand described in Engevall (1996). Once the different variants of the nucleolus concept have been studied, as well as their computation, different examples are analyzed in which costs or benefits are assigned, trying to show the influence they have on the dual solutions of the problems. Some of these examples are the problem of insurance agencies, in Lemaire (1984), the problem of a set of projects, in Krus and Bronisz (2000), the problem of production and transport planning, of Sakawa et al. (2001), the electricity markets problem, in Satyaramesh and Radhakrishn (2009), or the manufacturing problem, in Oh and Shin (2012).

In the third chapter of this work, the case study of the distribution of costs carried out between the different gas stations supplied by the Gothenburg deposit of the Swedish oil company Norsk Hydro is analysed. It shows whether the cooperation between these gas stations is beneficial in order to reduce supply costs by studying different point solutions, the nucleolus, the demand nucleolus, the Shapley value and the Tijs value. Previously, different cases of great relevance in Game Theory are described, such as the well-known airport problem, studied by Littlechild and Thompson (1977), the water supply problem

(or the Tennessee Valley Authority (TVA)), analyzed by Parker (1943) and by Straffin et al. (1981), the development of water sources, carried out by Young et al. (1982), investments in electricity, examined by Gately (1974) or the problem of billing telephone rates, by Billera et al. (1978). In all these examples, Game Theory tries to offer a feasible solution adapted to the peculiarities of each situation. Likewise, in this chapter the important traveler problem (TSP) is analyzed, observing the different variants that could be applied to the case that concerns us in the present work for the calculation of the characteristic function.

In the fourth chapter, the application of the concepts studied in the previous ones is developed and applied to a specific case: the problem of garbage collection in the city of Jerez de la Frontera will be analysed. The main aim is to know if the cooperation between the services offered in the different districts of the city is beneficial in order to face and optimize costs. For this, it is necessary to contextualize the city from a geographical and demographic point of view in its different areas, as well as to know and to analyse the current situation of this citizen service. This work has been carried out based on the data provided by the company in charge of garbage collection, which details essential data for this research, such as the districts into which the city is divided, the lengths of the routes that make up each of the routes, the trucks involved, etc. For the resolution of the linear problem, all the recommendations studied throughout the work for the calculation of the nucleolus are taken into account, solving the sequence of problems in LINGO. In addition to the nucleolus, other point-type solutions are given, such as the Shapley value and the Tijs value.

ÍNDICE

.....	1
AGRADECIMIENTOS	7
RESUMEN	9
ABSTRACT	11
ÍNDICE	14
ÍNDICE DE TABLAS	16
ÍNDICE DE FIGURAS	18
ÍNDICE DE IMÁGENES	19
1. TEORÍA DE JUEGOS COOPERATIVOS	21
1.1. Introducción	21
1.2. El conjunto de imputaciones	24
1.3. El core	26
1.4. El nucleolus	29
1.5. El valor de Shapley	31
1.6. El valor de Tijs	34
2. COMPUTACIÓN DEL NUCLEOLUS	41
2.1. Cálculo del nucleolus	42
2.1.1. Variantes del concepto nucleolus	44
2.2. Ejemplos numéricos	46
2.2.1. Ejemplo de nucleolus disruptivo y nucleolus proporcional	47
2.2.2. Ejemplo de conjunto de proyectos	49
2.2.3. Ejemplo de planificación de la producción y del transporte	50
2.2.4. Ejemplo de problema en el mercado eléctrico	51
2.2.5. Problemas de empresas manufactureras	52
2.3. Conclusiones	54
3. PROBLEMA DE LA DISTRIBUCIÓN DE COSTES EN UNA COMPAÑÍA PETROLERA	55
3.1. Motivación	56
3.2. Preliminares	59
3.3. Descripción del Problema	64
3.4. Formulación del Problema	66
3.5. Conceptos y Métodos de Resolución	70
3.6. Resultados Computacionales	72
3.7. Conclusiones	77

4.	APLICACIÓN AL SERVICIO DE RECOGIDA DE BASURAS DE JEREZ DE LA FRONTERA	79
4.1.	Planteamiento del problema	80
4.2.	Descripción y datos numéricos	81
4.3.	Resultados computacionales.....	87
4.4.	Conclusiones	93
5.	REFERENCIAS	95

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.2.1. Datos y resultados del juego sobre proyectos conjuntos.....	48
Tabla 2.2.2. Datos y resultados del juego sobre proyectos conjuntos de Krus y Bronisz (2000).....	49
Tabla 2.2.3 Datos y resultados del juego sobre transporte y planificación de la producción de Sakawa et al. (2001).....	51
Tabla 2.2.3 Datos y resultados del juego sobre la electricidad de Satyaramesh y Radhakrishna (2009).....	51
Tabla 2.2.4 Datos y resultados del juego sobre fabricación de Oh y Shin (2012).....	52
Tabla 3.6.1 Datos de clientes examinados.....	74
Tabla 3.6.2 Tipos de costes de la ruta examinada.....	74
Tabla 3.6.3 Resultados computacionales (SEK) para el juego $(N, v^{(a)})$	75
Tabla 3.6.4 Selección de valores para el juego $(N, v^{(a)})$	75
Tabla 3.6.5 Resultados computacionales (SEK) para el juego $(N, v^{(b)})$	76
Tabla 3.6.6 Resultados computacionales (SEK) para el juego $(N, v^{(b)})$	77
Tabla 4.2.1 Resumen por distritos.....	85
Tabla 4.2.2 Costes por distritos.....	86
Tabla 4.3.1 Penalización por cooperación de distritos no colindantes.....	87
Tabla 4.3.2 Valores de las distintas coaliciones del juego.....	88
Tabla 4.3.3 <i>Nucleolus</i> del juego.....	90

Tabla 4.3.4 Valor de Shapley de cada distrito.....	91
Tabla 4.3.5 Resultado de precios de utopía y mínimos derechos de cada distrito.....	92
Tabla 4.3.6 Resumen de reparto de costes en euros (€) para cada distrito.....	92

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.3.1. Conjunto de imputaciones.....	26
Figura 1.4.1. Conjunto de imputaciones y <i>core</i>	27
Figura 1.4.2. Conjunto de imputaciones y <i>core</i>	28
Figura 1.5.1. Conjunto de imputaciones, <i>core</i> y <i>nucleolus</i>	31
Figura 1.6.1. Conjunto de imputaciones y valor de Shapley.....	34
Figura 1.7.1. Conjunto de imputaciones y valor de Tijs.....	37
Figura 1.7.2. Conjunto de imputaciones, <i>core</i> , <i>nucleolus</i> , valor de Shapley y valor de Tijs.....	38
Figura 1.7.3. Conjunto de imputaciones, <i>core</i> , <i>nucleolus</i> , valor de Shapley y valor de Tijs.....	40
Figura 2.2.2. Conjunto de imputaciones y <i>nucleolus</i>	52
Figura 3.2.1. Grafos destacados.....	61
Figura 3.2.3. Contraejemplo <i>core</i> no vacío.....	62
Figura 3.2.4. Ejemplo de un <i>TSG</i> Euclídeo con <i>core</i> vacío.....	63
Figura 3.2.5. Soluciones óptimas a los <i>TSP</i> para coaliciones correspondientes a las restricciones...	63
Figura 3.4.1. Ejemplo de un juego <i>VRP</i> con <i>core</i> vacío.....	68
Figura 3.4.2. Ejemplo de transporte donde dos vehículos son menos costosos que uno.....	69
Figura 3.6.1. Vista del <i>TSP</i> examinado.....	72
Figura 3.6.2. Ejemplo de un <i>TSP</i> donde cambia el orden en el que se atiende a los clientes entre la gran coalición y una más pequeña.....	73
Figura 4.4.1. Comparativa distinta asignación de costes.....	93

ÍNDICE DE IMÁGENES

Imagen 2.2.1. Situación geográfica del problema.....	48
Imagen 3.1.1. División de grupos de municipios.....	58
Imagen 4.2.1. Distrito Sur de Jerez	82
Imagen 4.2.2. Distrito Norte de Jerez	82
Imagen 4.2.3. Distrito Este de Jerez.....	83
Imagen 4.2.4. Distrito Oeste de Jerez	83
Imagen 4.2.5. Distrito Noroeste de Jerez	84
Imagen 4.2.6. Distrito Centro de Jerez	84
Imagen 4.2.7. Demarcación territorial de los Distritos de Jerez de la Frontera	85

1. TEORÍA DE JUEGOS COOPERATIVOS

1.1. Introducción

La teoría de juegos es una disciplina matemática que tiene como objetivo analizar situaciones en las que existe un conflicto entre diversos agentes. Se trata de una rama relativamente moderna, ya que se considera que fue fundada por von Neumann (1928), a pesar de que los primeros acercamientos a la misma se dieron durante el siglo XIX con trabajos de Cournot (1838), Edgeworth (1881) y más tarde matemáticos como Zermelo (1913) y Borel (1921) ya anticipaban sus bases. Sin embargo, la gran referencia de esta disciplina es la obra *Theory of Games and Economic Behavior*, de von Neumann y Morgenstern (1944).

John von Neumann y Oskar Morgenstern establecen las bases de la Teoría de Juegos clásica. Es en ese punto cuando esta disciplina comienza a tener un reconocido prestigio y, a pesar de que el propio título de la obra revela la intencionalidad inicial de que la Teoría de Juegos fuese aplicada a cuestiones económicas, se pudo comprobar el potencial de esta para estudiar las relaciones humanas. En los años 50, Nash realizó diversas contribuciones para juegos no cooperativos y teoría del regateo. Más tarde, en los años 70, investigadores como Selten y Harsanyi desarrollan los conceptos que permitirán la aplicación de la Teoría de Juegos a economía y otras disciplinas. Las aplicaciones actuales de la misma son variadas, desde la estrategia militar al comportamiento animal, abarcando campos como ciencia política, sociología, biología o ingeniería entre otras.

La importancia de la Teoría de Juegos en la economía queda reflejada en la entrega del Premio Nobel de Economía en 1994 a Nash, Selten y Harsanyi, por sus pioneros análisis del equilibrio en la Teoría de Juegos no cooperativos, así como en el año 2005 a Aumann y Schelling, por sus contribuciones al fortalecimiento de la comprensión del conflicto y la cooperación a través de análisis de la Teoría de Juegos o en 2012 a Roth y Shapley por la teoría de repartos estables y su trabajo sobre el diseño de mercados. El Nobel de Economía 2020 no es ajeno a esta tradición, pues los aportes teóricos y aplicaciones prácticas en la teoría de juegos y subastas de Robert Wilson y Paul Milgrom realizados en los años sesenta fueron reconocidos con este premio.

Cabe distinguir dos enfoques básicos en el análisis de un juego: cooperativo y no cooperativo. En el enfoque no cooperativo prima el interés individual, ya que no se permiten acuerdos previos entre los jugadores, estudiándose las estrategias que pueden llevar a cabo cada jugador y las utilidades que se obtienen para cada combinación de estrategias. En cambio, en el enfoque cooperativo se analiza la situación en que los jugadores pueden colaborar entre ellos formando coaliciones, buscando una mayor utilidad, por lo que prima el beneficio común.

En los juegos cooperativos, como se ha comentado antes, se parte de que existe la posibilidad de que los jugadores lleguen a acuerdos vinculantes para buscar un beneficio común. Esta cooperación entre jugadores se produce mediante coaliciones, dentro de las cuales los

jugadores actuarán buscando maximizar el beneficio de su coalición. Dichas coaliciones pueden estar formadas por cualquier grupo de jugadores de cualquier tamaño. Un juego cooperativo puede considerarse más abstracto que uno no cooperativo, dado que no se modelan explícitamente las estrategias de los jugadores, sino que el juego muestra lo que cada posible coalición puede obtener mediante la cooperación.

Dentro de los juegos cooperativos se pueden encontrar situaciones en las que la utilidad obtenida al actuar como coalición puede repartirse de cualquier modo entre los jugadores que la componen, estos son los denominados *juegos de utilidad transferible* o *juegos TU* (*Transferable Utility*). Una forma de observar la utilidad obtenida es la función característica, que asigna a cada coalición un número real, asignando al conjunto vacío el valor cero.

Definición 1.1

Un juego en forma coalicional o en forma de función característica con utilidades transferibles consiste en:

- Un conjunto finito de jugadores $N = \{1, 2, \dots, n\}$.
- Una función característica, que asocia a cada coalición S de N un número real $v(S)$ (valor de la coalición), siendo $v(\emptyset) = 0$.

Por tanto, se denota a un juego TU como un par (N, v) , donde tanto N como v deben estar especificados. Al hablar de utilidad o beneficio obtenido, se puede expresar desde unidades monetarias en situaciones económicas, escaños obtenidos por un partido político o grado de adaptación de distintas especies, por ejemplo.

En general, las propiedades que tenga la función característica v correspondiente a un juego cooperativo (N, v) son las que cualifican el juego. Así ahora se mostrarán algunas definiciones que se usarán a lo largo de este trabajo.

Definición 1.2

Se dice que un juego (N, v) es monótono si $\forall S, T \subseteq N$, con $S \subseteq T$, se verifica que

$$v(S) \leq v(T).$$

Es decir, que en un juego monótono al crecer el número de jugadores de una coalición el beneficio obtenido por la misma no disminuye.

Definición 1.3

Se dice que un juego es superaditivo si $\forall S, T \subseteq N$, con $S \cap T = \emptyset$, se verifica que

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T).$$

El cumplimiento del principio de superaditividad asegura que el beneficio obtenido por la unión de dos coaliciones sin elementos en común ha de ser mayor al obtenido si ambas coaliciones hubieran actuado por separado.

Si la desigualdad de la definición anterior se da en sentido opuesto se dice que el juego es subaditivo.

Definición 1.4

Se dice que un juego es convexo si $\forall S, T \subseteq N$, se verifica que

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T).$$

Inecuación que también puede expresarse como

$$v(S) + v(T) - v(S \cap T) \leq v(S \cup T).$$

Se puede observar que la convexidad no es más que una generalización de la propiedad de superaditividad a todas las coaliciones, sean disjuntas o no. El beneficio de dos coaliciones por separado menos el beneficio obtenido por aquellos jugadores que pertenecen a ambas coaliciones es siempre menor que el beneficio de las dos coaliciones trabajando unidas.

Definición 1.5

Se dice que un juego es 0-normalizado si se verifica que:

$$v(\{i\}) = 0, \forall i \in N.$$

Un juego 0-normalizado muestra que no es beneficioso para un jugador no cooperar con ningún otro. En caso de tener un juego que no lo sea, se puede obtener su 0-normalización definiendo la siguiente función característica:

$$v_0(S) = v(S) - \sum_{i \in S} v(\{i\}), \forall S \subseteq N.$$

Se mostrará ahora un ejemplo de juego cooperativo basándonos en los juegos de bancarrota. Estos juegos, desde que fueron introducidos por O'Neill (1982), han tenido una gran importancia por su aplicabilidad a situaciones reales.

Ejemplo 1-1. *El patrimonio de una empresa que se ha declarado en quiebra se valora en $E=10000$ €. Dejando unas deudas a sus 4 acreedores de valor $d=(3000,2000,5000,8000)$. Se definirá la función característica de este juego.*

En un juego de bancarrota se cumple que la suma de deudas es mayor que el patrimonio de la empresa y cualquier coalición puede quedarse con el patrimonio de la empresa pagando las deudas a los acreedores que no forman parte de la coalición. Lo que se puede representar como:

$$0 \leq E \leq \sum_{i=1}^n d_i$$

$$v(S) = \max \left\{ 0, E - \sum_{i \in N \setminus S} d_i \right\}, \forall S \subseteq N.$$

Para nuestro caso tendremos que el juego en forma coalicional es:

$$N = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$v(\emptyset) = 0,$$

$$v(1) = 0, v(2) = 0, v(3) = 0, v(4) = 0,$$

$$v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = 0, v(1, 4) = 3000, v(2, 4) = 2000, v(3, 4) = 5000,$$

$$v(1, 2, 3) = 2000, v(1, 2, 4) = 5000, v(1, 3, 4) = 8000, v(2, 3, 4) = 7000,$$

$$v(1, 2, 3, 4) = 10000.$$

1.2. El conjunto de imputaciones

Al analizar un juego cooperativo surgen de forma inmediata dos preguntas sobre qué coaliciones se van a formar y sobre cómo se dividen las ganancias entre los jugadores.

Teniendo en cuenta que se estudiarán situaciones modeladas mediante juegos cooperativos TU. El objetivo de estos juegos será que se forme la gran coalición N y que los jugadores se repartan dicho beneficio. Queda como objeto de estudio, por tanto, el problema de distribuir el beneficio total obtenido por la gran coalición entre los n jugadores, es decir, cómo repartir $v(N)$ entre ellos.

Para esta distribución se considera un reparto o vector de pagos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ donde cada componente x_i representa la cantidad asignada al jugador i de la gran coalición N . Dado un vector de pagos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, para la suma de las cantidades asignadas a los miembros de una coalición $S \subseteq N$ se utilizará la notación:

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i.$$

De todos los vectores de pagos posibles para un $v(N)$ dado, se puede empezar a acotar para observar las asignaciones que sean realmente viables. Una condición básica para que el vector de pagos sea aceptable es que la suma de sus elementos sea igual al valor de la coalición total, es decir, que cumpla el principio de eficiencia.

Definición 1.6

El conjunto de preimputaciones de un juego (N, v) es el conjunto de todos los repartos eficientes:

$$PI(N, v) = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N) \right\}.$$

Otra consideración a tener en cuenta es que ningún jugador aceptará un beneficio inferior al

que obtendría si no participase en ninguna coalición, lo que recibe el nombre de principio de racionalidad individual.

Definición 1.7

El conjunto de imputaciones de un juego (N, v) es el conjunto de preimputaciones que, además, verifican el principio de racionalidad individual:

$$I(N, v) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in PI(N, v) : x_i \geq v(\{i\}), \text{ para } i = 1, 2, \dots, n\} = \\ = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N), x_i \geq v(\{i\}), \text{ para } i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Ejemplo 1-2. *Tres industrias del sector químico reciben el suministro de combustibles de una misma empresa. El coste del transporte que le supone a cada una de las industrias se estima en 50, 30 y 50 miles de euros anuales (m€). En las últimas negociaciones, la empresa suministradora les ofrece la opción de realizar repartos conjuntos, de forma que puedan conseguir cierto ahorro. Si A y B son suministradas conjuntamente les costaría 60 m€, si cooperan A y C el gasto en transporte sería 100 m€ y en caso de que lo hicieran B y C le supondría 70 m€. Por último, si las tres industrias son suministradas conjuntamente el gasto se elevaría a 105 m€.*

Nombrando A = jugador 1, B = jugador 2 y C=jugador 3, se tiene que:

$$v(1) = 50, v(2) = 30, v(3) = 50, \\ v(1, 2) = 60, v(1, 3) = 100, v(2, 3) = 70, \\ v(1, 2, 3) = 105.$$

La función característica del juego de costes sería:

En este ejemplo, los jugadores (industrias) buscan minimizar costes, lo cual se traduce en maximizar el ahorro, por lo que se reformulará el problema de forma que la función característica muestre beneficios.

$$b(S) = \sum_{i=1}^N v(i) - v(S). \\ N = \{1, 2, 3\} \\ b(\emptyset) = 0, \\ b(1) = b(2) = b(3) = 0, \\ b(1, 2) = 50 + 30 - 60 = 20, b(1, 3) = 0, b(2, 3) = 10, \\ b(1, 2, 3) = 25.$$

Se observa que la mejor opción será que las 3 industrias cooperen, queda preguntar cómo deberían repartirse tal beneficio Comprobando el conjunto de imputaciones se pueden acotar

las opciones.

$$I(N, b) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 25, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}.$$

Para juegos de 3 jugadores se acostumbra a realizar una representación plana del conjunto de imputaciones, que es un triángulo equilátero contenido en el plano de eficiencia. Para este caso el conjunto de imputaciones será el que se presenta a continuación, con el uso de la librería *TUGlab* (*Transferable Utility Games laboratory*) en Matlab Mirás y Sánchez (2008):

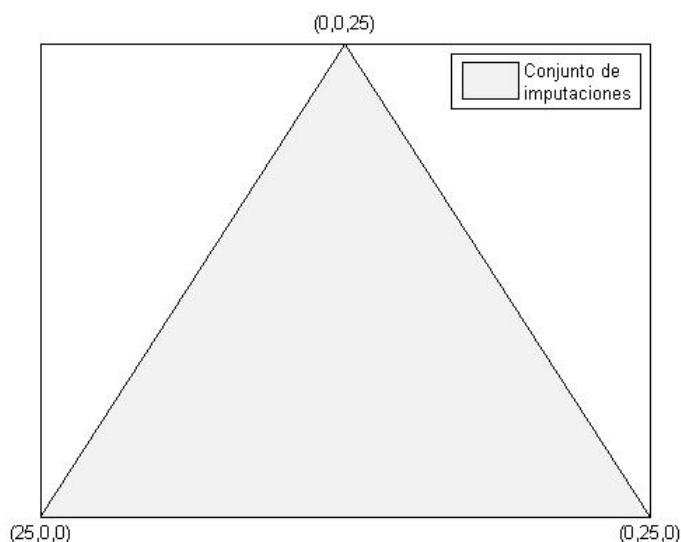


Figura 1.3.1. Conjunto de imputaciones

1.3. El core

En la sección anterior se presentaron las primeras acotaciones a los posibles vectores de pagos de un juego cooperativo. A pesar de ello, no se han aportado aún criterios para realizar una elección final, para lo que se hará uso de las soluciones o conceptos de solución, que pueden ser de tipo conjunto o puntual. Una solución tipo conjunto establece criterios para descartar ciertos vectores de pagos del conjunto de imputaciones. Estas pueden seleccionar uno, un número finito, un número infinito, o incluso ningún vector de pagos.

Uno de los conceptos de solución tipo conjunto más importantes es el *core*. Se trata de un concepto de solución introducido por Gillies (1953), aunque fue Edgeworth (1881) su precursor. El *core* es un subconjunto del conjunto de imputaciones que cumplen el principio de racionalidad coalicional, es decir, que a cada coalición $S \subseteq N$ se le debe asignar, al menos, lo que obtendría por sí misma. Se trata de las asignaciones que podrían constituir acuerdos de distribución estables, ya que ninguna coalición tendría incentivos para impedir la formación de una coalición mayor.

A modo de simplificación se denota por $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$, $v(i) = v(\{i\})$, respectivamente.

Definición 1.8

El *core* de un juego (N, v) es el siguiente conjunto de vectores de pagos:

$$C(N, v) = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N), x(S) \geq v(S), \text{ para todo } S \subseteq N \right\}.$$

Se puede demostrar que siendo (N, v) un juego cooperativo, $C(N, v)$ es cerrado, acotado y convexo.

Ejemplo 1-3. Considerando el juego del ejemplo anterior. Determinar su *core*.

Se parte de la función característica del juego:

$$N = \{1, 2, 3\}$$

$$b(\emptyset) = 0,$$

$$b(1) = b(2) = b(3) = 0,$$

$$b(1, 2) = 20, b(1, 3) = 0, b(2, 3) = 10,$$

$$b(1, 2, 3) = 25.$$

Al principio de eficiencia que se aplica para el conjunto de imputaciones se debe añadir el principio de racionalidad coalicional, obteniendo el conjunto:

$$C(N, b) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 25, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 20, x_1 + x_3 \geq 0, x_2 + x_3 \geq 10 \right\}.$$

A continuación, su representación usando la librería *TUGlab*:

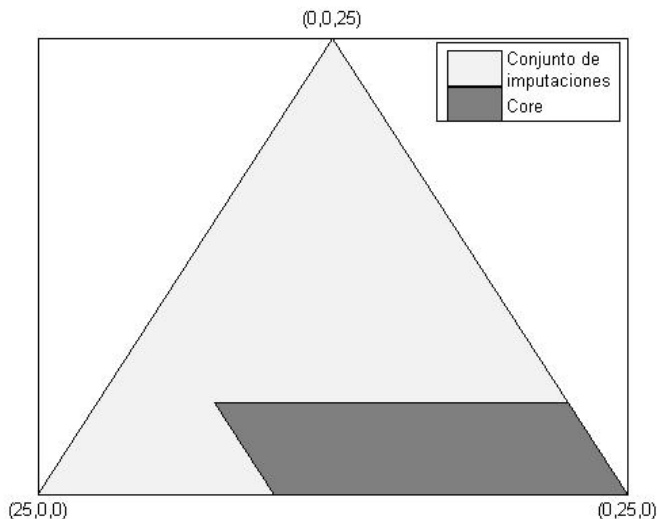


Figura 1.4.1. Conjunto de imputaciones y *core*

Se puede observar que en este caso se obtiene un *core* que representa un conjunto finito de vectores de pago. Pero se pueden tener casos en los que el *core* sea un único punto o incluso que sea un conjunto vacío. Se supone que los costes del ejemplo anterior han variado y el juego vendría representado por:

$$N = \{1, 2, 3\}$$

$$b(\emptyset) = 0,$$

$$b(1) = b(2) = b(3) = 0,$$

$$b(1, 2) = 20, b(1, 3) = 10, b(2, 3) = 20,$$

$$b(1, 2, 3) = 25.$$

Entonces el *core* del juego (N, b) será:

$$C(N, b) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 25, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 20, x_1 + x_3 \geq 10, x_2 + x_3 \geq 20\}.$$

Dando lugar a una solución puntual: $C(N, b) = (5, 15, 5)$.

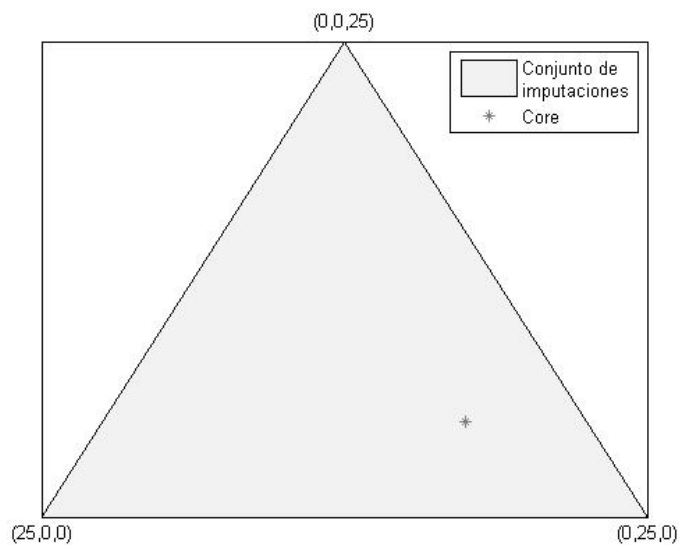


Figura 1.4.2. Conjunto de imputaciones y *core*

En el caso de que el juego presentara la siguiente forma coalicional:

$$N = \{1, 2, 3\}$$

$$b(\emptyset) = 0,$$

$$b(1) = b(2) = b(3) = 0,$$

$$b(1, 2) = 20, b(1, 3) = 15, b(2, 3) = 20,$$

$$b(1, 2, 3) = 25.$$

Se tendrá que el *core* del juego es:

$$C(N, b) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 25, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 20, x_1 + x_3 \geq 15, x_2 + x_3 \geq 20\}.$$

Se puede observar claramente que, si antes se tenía una solución puntual, en este caso, *core* vacío.

1.4. El *nucleolus*

Se abordarán ahora ciertos conceptos de solución tipo puntual, es decir, se establecen criterios que debe cumplir la solución, de forma que se garantiza la existencia y unicidad de esta. Por tanto, se obtendrá un único vector de pagos, a diferencia de lo que ocurría con los conceptos de solución tipo conjunto.

El primer concepto de solución tipo puntual que se estudiará será el *nucleolus*. Según Snijders (1995) el *nucleolus* está completamente caracterizado por varias propiedades: unicidad, covarianza y una nueva propiedad de juego reducido. Fue introducido por Schmeidler (1969) y se trata de un concepto de solución que existe y es único siempre que se cumpla que el conjunto de imputaciones sea no vacío. Esto elimina uno de los problemas que podía plantear el *core*, ya que podía obtenerse un conjunto vacío o uno demasiado amplio.

Este concepto será abordado desde el punto de vista computacional en el Capítulo 2 de esta memoria.

Para introducir formalmente el *nucleolus* serán presentados algunos conceptos necesarios previamente a su desarrollo.

Definición 1.9

El exceso de una coalición S con respecto a una distribución de pagos eficiente x es:

$$e(S, x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i = v(S) - x(S).$$

Es decir, el exceso de una coalición es la diferencia entre el valor de esa coalición y el beneficio obtenido por dicha coalición dado el reparto x . Representa la ganancia (pérdida si el exceso es negativo) que obtendría la coalición si no acepta el vector de pagos x . Por tanto, cuanto más negativos sean los excesos de las coaliciones, más satisfechas estarán las mismas.

Definición 1.10

Para cada $x \in PI(N, v)$, se define el vector de excesos como el siguiente vector:

$$\varepsilon(x) = (e(S, x))_{S \in N} = (\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \dots, \varepsilon_{2^n}(x)),$$

donde

$$\varepsilon_k(x) \geq \varepsilon_{k+1}(x), \forall k = 1, 2, \dots, 2^n - 1.$$

Se puede observar que el vector de excesos no es más que los excesos para cada coalición dado un vector de pagos ordenados en orden decreciente. Esta ordenación está motivada por el uso del orden lexicográfico a la hora de comparar vectores, mediante el cual se irán comparando en orden las componentes de cada vector.

Definición 1.11

Se define el orden lexicográfico \leq_L como:

- Se dirá que $\varepsilon(x) <_L \varepsilon(x')$ si existe $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$, tal que

$$\varepsilon_i(x) = \varepsilon_i(x'), 1 \leq i < k,$$

$$\varepsilon_k(x) < \varepsilon_k(x').$$

- Se dirá que $\varepsilon(x) \leq_L \varepsilon(x')$ si $\varepsilon(x) = \varepsilon(x')$ ó $\varepsilon(x) <_L \varepsilon(x')$.

Por tanto, si se desea comparar dos vectores de excesos según el orden lexicográfico, se observan las dos primeras componentes. Si la primera componente de un vector es menor que la del otro entonces el primer vector es menor que el segundo según el orden lexicográfico. Si ambas componentes son iguales, se comparan las segundas componentes de cada vector y así sucesivamente.

Con los conceptos definidos previamente se introduce el *nucleolus* de un juego como los repartos que minimizan según el orden lexicográfico los vectores de excesos sobre el conjunto de imputaciones.

Definición 1.12

El *nucleolus* de un juego (N, v) es el conjunto $\eta(N, v)$ definido de la siguiente forma:

$$\eta(N, v) = \{x \in I(N, v) : \varepsilon(x) \leq_L \varepsilon(y), \forall y \in I(N, v)\}.$$

Se puede observar que el *nucleolus* es aquella imputación que hace que las quejas de las coaliciones sean lo más pequeñas posibles, la que minimiza la insatisfacción de estas. Los vectores de excesos están ordenados en orden decreciente y se comparan según el orden lexicográfico, por lo que se da más importancia a las coaliciones con mayor exceso. Por tanto, se debe concretar que el *nucleolus* es aquella imputación que minimiza la máxima insatisfacción, buscando que el grado de conformidad de la coalición sea lo mayor posible.

El propio Schmeidler (1969) enunciaba que para cualquier juego esencial (juego cuyo conjunto de imputaciones es no vacío) se verifica que el *nucleolus* existe y es único. Además, se puede demostrar que, si el *core* del juego es no vacío, el *nucleolus* pertenece al mismo.

Ejemplo 1-4. Siguiendo con el juego del ejemplo anterior, se representa su *nucleolus*

El juego en forma característica es:

$$N = \{1, 2, 3\}$$

$$b(\emptyset) = 0,$$

$$b(1) = b(2) = b(3) = 0,$$

$$b(1, 2) = 20, b(1, 3) = 0, b(2, 3) = 10,$$

$$b(1, 2, 3) = 25.$$

Quedando tras de la forma en que se muestra en la Figura 1.5.1.

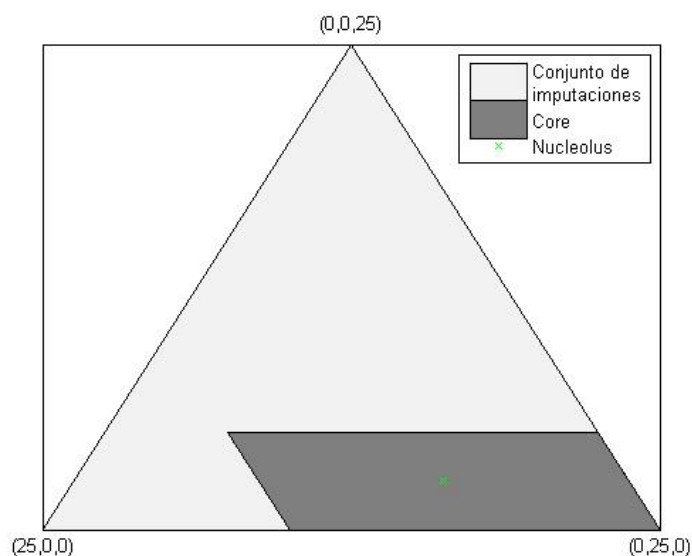


Figura 1.5.1. Conjunto de imputaciones, core y Nucleolus

1.5. El valor de Shapley

El valor de Shapley es uno de los conceptos de solución puntual con más repercusión en la literatura, fue introducido por Shapley (1953). En Algaba et al. (2019) se pueden encontrar una actualización sobre resultados teóricos y aplicaciones sobre este interesante valor. Probablemente es el concepto de solución para juegos cooperativos más utilizado, lo que puede deberse a sus dos ventajas: el hecho de proporcionar un único valor y la simplicidad que conlleva la linealidad de su fórmula de cálculo.

Shapley partió de 4 axiomas o propiedades que, en su opinión, debería cumplir el reparto de pagos óptimo de un juego cooperativo, y demostró que solamente existe un vector de pagos que los cumpla. La función de asignación de pagos debe cumplir:

Axioma 1. Eficiencia. La función debe distribuir el pago total entre los jugadores. Es decir,

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(N, v) = v(N).$$

Axioma 2. Simetría. Se dice que dos jugadores i y j son simétricos si $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$, para todo S con $i, j \notin S$. Si dos jugadores son simétricos, la función de asignación de pagos les dará el mismo valor:

$$\phi_i(N, v) = \phi_j(N, v).$$

Axioma 3. Tratamiento del jugador pasivo. Se dice que un jugador es pasivo cuando se cumple $v(S) = v(S \setminus \{i\}) + v(\{i\})$, para toda S con i perteneciente a S . Por tanto, como un jugador pasivo no aporta un beneficio extra al resto de jugadores no debe recibir ningún pago adicional:

$$\phi_i(N, v) = v(\{i\}).$$

Axioma 4. Aditividad. Dados dos juegos cualesquiera (N, v_1) y (N, v_2) debe cumplirse:

$$\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2).$$

Teorema 1.13

Existe un único vector de pagos que satisface las propiedades de eficiencia, simetría, jugador pasivo y aditividad y es el valor de Shapley. Este vector de pagos $\phi(N, v) = (\phi_1(N, v), \phi_2(N, v), \dots, \phi_n(N, v))$ asigna a cada jugador:

$$\phi_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v(S) - v(S \setminus \{i\})].$$

Siendo $s = |S|$, el número de jugadores que hay en la coalición S .

La demostración de este teorema se encuentra en Shapley (1953). Se puede observar que al valor de Shapley no se le exige que cumpla el principio de racionalidad coalicional, por lo que se trata de un concepto de solución independiente del *core*. Asimismo, de su propia definición se manifiesta que el valor de Shapley está determinado de forma exclusiva por la función característica del juego.

Una forma de interpretar el valor de Shapley es la siguiente: si los jugadores se unen a la gran coalición de uno en uno, se sabe que hay $n!$ secuencias posibles. Se asume entonces que la probabilidad de cualquier secuencia en particular es $1/n!$, de forma que cuando el jugador i aparece y encuentra $S \setminus \{i\}$ jugadores su contribución a la coalición S es $v(S) - v(S \setminus \{i\})$. El valor de Shapley es la contribución marginal esperada de cada jugador a las posibles secuencias de formación de la gran coalición, suponiendo que ésta puede formarse, de forma equiprobable, en todos los órdenes posibles.

Una consideración interesante es determinar si para un juego dado el valor de Shapley se encuentra contenido en el *core* del juego. En tal caso el valor de Shapley cumpliría el principio de racionalidad coalicional además de seguir satisfaciendo las cuatro propiedades que lo caracterizan. Shapley (1971) demuestra que el *core* de un juego convexo es la envoltura convexa de los vectores de contribuciones marginales (el denominado conjunto de Weber). Dado que el valor de Shapley es el promedio de los vectores de contribuciones marginales, para un juego convexo éste se hallará en el *core*.

Teorema 1.14: Sea (N, v) un juego convexo. Entonces $\phi(N, v) \in C(N, v)$, es decir, el valor de Shapley se encuentra dentro del *core*.

Ejemplo 1-5. Partiendo del ejemplo utilizado hasta ahora, se calculará el valor de Shapley de este.

$$N = \{1, 2, 3\},$$

$$b(\emptyset) = 0,$$

$$b(1) = b(2) = b(3) = 0,$$

$$b(1, 2) = 20, b(1, 3) = 0, b(2, 3) = 10,$$

$$b(1, 2, 3) = 25.$$

Para calcular el valor de Shapley del juego:

$$q(s) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}, \quad 1 \leq s \leq 3, \quad n = 3.$$

$$q(1) = \frac{0!2!}{3!} = \frac{1}{3}, \quad q(2) = \frac{1!1!}{3!} = \frac{1}{6}, \quad q(3) = \frac{2!0!}{3!} = \frac{1}{3}.$$

El pago esperado para cada jugador será:

$$\phi_1(N, b) = q(1)[b(1) - b(\emptyset)] + q(2)[b(1, 2) - b(2)] + q(2)[b(1, 3) - b(3)] + q(3)[b(1, 2, 3) - b(2, 3)],$$

$$\phi_2(N, b) = q(1)[b(2) - b(\emptyset)] + q(2)[b(1, 2) - b(1)] + q(2)[b(2, 3) - b(3)] + q(3)[b(1, 2, 3) - b(1, 3)],$$

$$\phi_3(N, b) = q(1)[b(3) - b(\emptyset)] + q(2)[b(1, 3) - b(1)] + q(2)[b(2, 3) - b(2)] + q(3)[b(1, 2, 3) - b(1, 2)].$$

Introduciendo los valores se obtiene: $\phi(N, b) = (8.33, 13.33, 3.33)$.

Representado sobre el conjunto de imputaciones del juego:

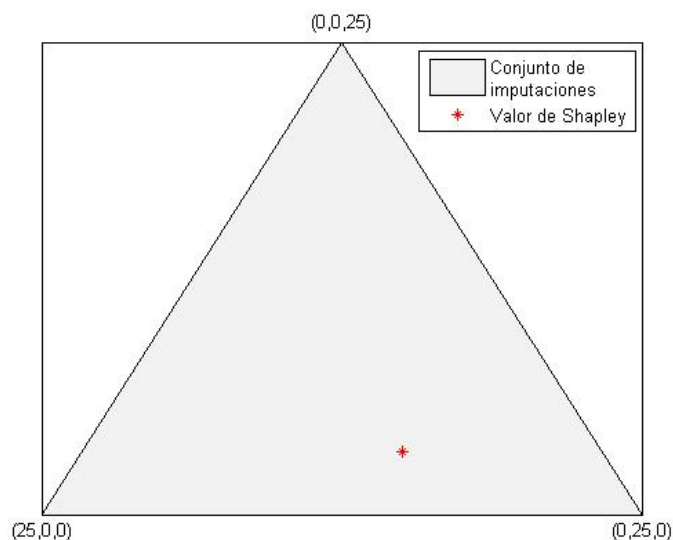


Figura 1.6.1. Conjunto de imputaciones y valor de Shapley

1.6. El valor de Tijs

El valor de Tijs (τ -value) es otro concepto de solución de tipo puntual introducido por Tijs (1981) para juegos cuasi-equilibrados o de compromiso admisible. El valor de Tijs intenta conseguir un compromiso entre los mínimos y máximos pagos que puede recibir cada jugador. Por tanto, para presentarlo han de definirse dichas cotas a los pagos de los jugadores.

La cota superior de un jugador, llamada pago de utopía, representa lo máximo que dicho jugador podría pedir al entrar en la gran coalición. Este valor coincidirá con su contribución marginal a la misma, dado que si exigiera un pago mayor la gran coalición decidiría no tenerlo en cuenta.

Cuando se forma una coalición, se puede considerar la cota inferior de un jugador como el valor que le queda al mismo si al resto de jugadores se les asignara sus pagos de utopía. Por tanto, cabe esperar que cada jugador pueda asegurarse el máximo de las cantidades que así obtendría en cada coalición a la que pertenece, a lo que se llama mínimo derecho de un jugador.

Definición 1.15

Dado un juego (N, v) se define:

- El pago de utopía del jugador i como el valor $M_i(N, v) = v(N) - v(N \setminus \{i\})$.
- La cota inferior o mínimo derecho del jugador i como el valor

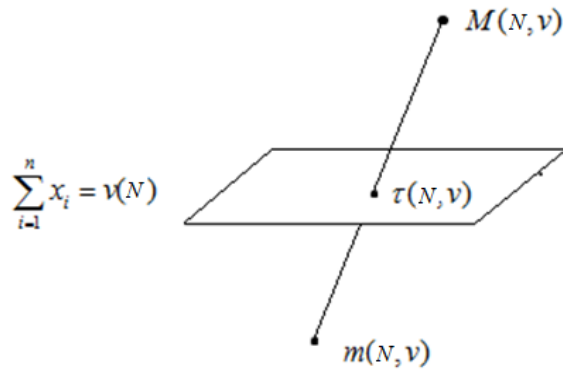
$$m_i(N, v) = \max \left\{ v(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} M_j(N, v) \right\}, \forall S \subseteq N, i \in S.$$

Definición 1.16

Un juego (N, v) es llamado cuasi-equilibrado, o de compromiso admisible, si cumple:

1. $m(N, v) \leq M(N, v)$.
2. $\sum_{i=1}^n m_i(N, v) \leq v(N) \leq \sum_{i=1}^n M_i(N, v)$.

El propio Tijs define el valor de Tijs de una forma gráfica. Afirma que para cada conjunto de vectores contenidos en el segmento de recta que va desde $m(N, v)$ hasta $M(N, v)$ existe un único vector de pagos cuya suma de coordenadas es igual a $v(N)$. Es decir, que el valor de Tijs es la intersección del segmento de recta que va desde $m(N, v)$ hasta $M(N, v)$ con el plano que implica la condición de eficiencia.



Definición 1.17

Sea un juego de compromiso admisible (N, v) se define el valor de Tijs como:

$$\tau(N, v) = m(N, v) + \alpha(M(N, v) - m(N, v)).$$

Con $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{i \in J} \tau_i(N, v) = v(N)$.

Al igual que el valor de Shapley, al valor de Tijs tampoco se le exige racionalidad coalicional, por lo que no tiene por qué pertenecer al *core*. En cambio, el valor de Tijs presenta las siguientes propiedades cuya demostración pueden encontrarse en Tijs (1981).

Teorema 1.18: Para un juego de compromiso admisible (N, v) el valor de Tijs presenta las siguientes propiedades:

- Racionalidad individual. Para cada jugador i la asignación del valor de Tijs será al menos igual a lo que podría conseguir por sí mismo.

$$\tau_i(N, v) \geq v\{i\}.$$

- Eficiencia. El valor de Tijs debe distribuir el valor total entre los jugadores:

$$\sum_{i=1}^n \tau_i(N, v) = v(N).$$

- Simetría. Para dos jugadores simétricos i y j el valor de Tijs les asignará el mismo valor:

$$\tau_i(N, v) = \tau_j(N, v).$$

- Jugador pasivo. Ya se vio que un jugador es pasivo cuando se cumple $v(S) = v(S \setminus \{i\}) + v(\{i\})$, para toda S con $i \in S$. Al no aportar ningún beneficio extra a la coalición, el valor de Tijs no le asigna beneficio alguno.

- S-i para toda S:

$\tau_i(N, v) = 0$ si el jugador i es pasivo.

- S-equivalencia. Para un juego $(N, k \cdot v + c)$, con $k \in (0, \infty)$ y $c \in \mathbb{R}^n$:

$$\tau(N, k \cdot v + c) = k \cdot \tau(N, v) + c.$$

- Continuidad. $\tau(N, v)$ es una función continua.

Posteriormente el propio Tijs (1987) realiza una caracterización axiomática del valor de Tijs, presentando y demostrando el siguiente teorema:

Teorema 1.19: Sea (N, v) un juego de compromiso admisible. El valor de Tijs es el único vector de pagos de (N, v) que satisfice los axiomas de eficiencia, proporcionalidad restringida y la propiedad de mínimo derecho.

- Proporcionalidad restringida. El reparto debe ser proporcional al pago de utopía $M(N, v)$ siempre que el mínimo derecho $m(N, v)$ sea nulo.
- Mínimo derecho. Una regla de reparto satisface la propiedad de mínimo derecho si:

$$\tau(N, v) = m(N, v) + \tau(N, v - m(N, v)).$$

Ejemplo 1-6. Siguiendo con el juego del Ejemplo 1-2, se calculará ahora su valor de Tijs

Se parte del juego:

$$N = \{1, 2, 3\}$$

$$b(\emptyset) = 0,$$

$$b(1) = b(2) = b(3) = 0,$$

$$b(1, 2) = 20, b(1, 3) = 0, b(2, 3) = 10,$$

$$b(1, 2, 3) = 25.$$

Lo primero que ha de realizarse es calcular los pagos de utopía de cada jugador:

$$M_i(N, b) = b(N) - b(N \setminus \{i\}),$$

$$M_1(N, b) = b(1, 2, 3) - b(2, 3),$$

$$M_2(N, b) = b(1, 2, 3) - b(1, 3),$$

$$M_3(N, b) = b(1, 2, 3) - b(1, 2).$$

Se obtiene $M(N, b) = (15, 25, 5)$, y ahora para calcular el mínimo derecho:

$$m_i(N,b) = \max \left\{ b(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} M_j(N,b) \right\}, \forall S \subseteq N, i \in S.$$

$$m_1(N,b) = \max \{ b(1) - b(\emptyset), b(1,2) - M_2(N,b), b(1,3) - M_3(N,b), b(1,2,3) - M_2(N,b) - M_3(N,b) \},$$

$$m_2(N,b) = \max \{ b(2) - b(\emptyset), b(1,2) - M_1(N,b), b(2,3) - M_3(N,b), b(1,2,3) - M_1(N,b) - M_3(N,b) \},$$

$$m_3(N,b) = \max \{ b(3) - b(\emptyset), b(1,3) - M_1(N,b), b(2,3) - M_2(N,b), b(1,2,3) - M_1(N,b) - M_2(N,b) \}.$$

Realizando los cálculos se tiene que: $m(N,b) = (0,5,0)$.

Puesto que $\tau(N,b) = m(N,b) + \alpha(M(N,b) - m(N,b))$ se debe obtener α de modo que el valor de Tijs cumpla el principio de eficiencia:

$$\begin{aligned} \tau(N,b) &= (0,5,0) + \alpha((15,25,5) - (0,5,0)) = (0,5,0) + \alpha(15,20,5), \\ 5 + \alpha(15 + 20 + 5) &= 25 \rightarrow \alpha = 0.5. \end{aligned}$$

De modo que el valor de Tijs obtenido es $\tau(N,b) = (7.5,15,2.5)$.

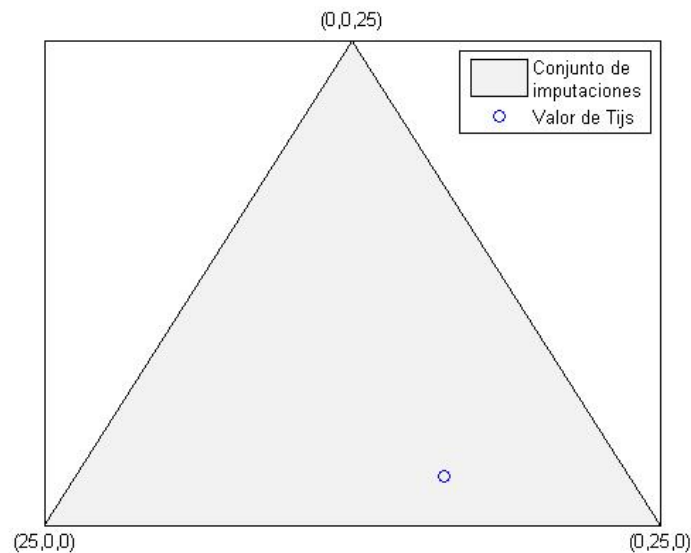


Figura 1.7.1. Conjunto de imputaciones y valor de Tijs

Se representan ahora todos los conceptos de solución obtenidos para este problema:

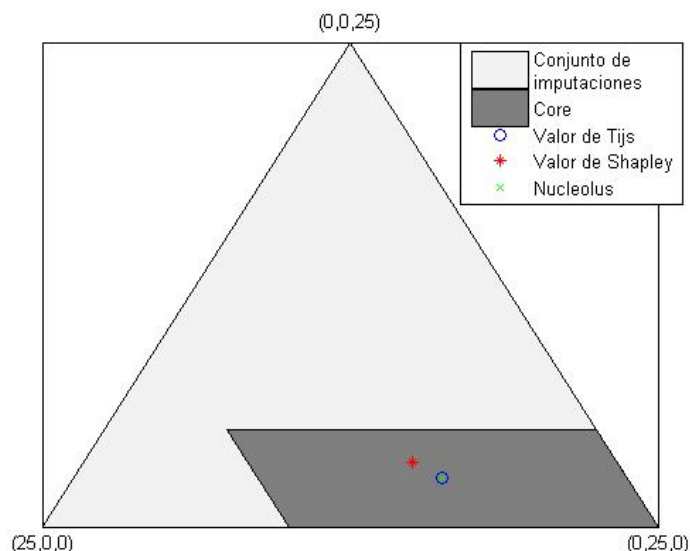


Figura 1.7.2. Conjunto de imputaciones, core, *nucleolus*, valor de Shapley y valor de Tijs

Se puede observar que en este caso los tres conceptos de solución puntuales se encuentran dentro del *core*. Cada uno de los conceptos de solución impone ciertos criterios a la hora de elegir el reparto adecuado, sin embargo, para este juego los valores obtenidos no se alejan mucho, de hecho, el *nucleolus* y el valor de Tijs proporcionan la misma solución.

Se muestra ahora un ejemplo del juego del paso del ganado, presentado en Shapley (1967), en el que se calcularán los conceptos de solución anteriormente presentados:

Ejemplo 1-7. *Un ganadero quiere vender unas reses en el mercado a un precio de 1000 \$. Para acceder al mismo debe cruzar por los terrenos de al menos uno de sus dos vecinos, que pueden negarse a permitirle el paso. Esto es, el ganadero necesita la ayuda de al menos uno de sus vecinos para realizar la venta y obtener el beneficio esperado.*

Sea el ganadero el jugador 1 y sus vecinos los jugadores 2 y 3, la forma coalicional del juego será:

$$\begin{aligned}
 N &= \{1, 2, 3\}, \\
 b(\emptyset) &= 0, \\
 b(1) &= b(2) = b(3) = 0, \\
 b(1, 2) &= b(1, 3) = 1000, \quad b(2, 3) = 0,
 \end{aligned}$$

$$b(1,2,3) = 1000.$$

El conjunto de imputaciones será el conjunto de vectores de pago que cumplan el principio de eficiencia y el principio de racionalidad individual:

$$I(N,b) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1000, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}.$$

Mientras que para obtener el *core* se añade el principio de racionalidad coalicional:

$$C(N,b) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 1000, \\ x_1 + x_2 \geq 1000, x_1 + x_3 \geq 1000, x_2 + x_3 \geq 0 \end{array} \right\}.$$

En este caso particular se observa que se tiene un *core* de tipo puntual $C(N,b) = (1000,0,0)$. Dado que el *nucleolus* siempre está contenido en el *core*, en este caso, coincidirán en dicho punto, lo que se puede comprobar mediante el uso de la librería *TuGlab* donde se obtiene: $\eta(N,b) = (1000,0,0)$.

Para obtener el valor de Shapley se seguiría el mismo procedimiento que en el problema de reparto de costes, variando el valor de la función característica v . Para este juego se obtiene $\phi(N,b) = (666.67, 166.67, 166.67)$.

Al igual que en el ejemplo anterior, para calcular el valor de Tijs se comenzará por obtener los pagos de utopía y el mínimo derecho de los jugadores:

$$M_i(N,b) = b(N) - b(N \setminus \{i\}),$$

$$m_i(N,b) = \max \left\{ b(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} M_j(N,b) \right\}, \forall S \subseteq N, i \in S.$$

Lo que da lugar a $M(N,b) = (1000,0,0)$ y $m(N,b) = (1000,0,0)$.

Puesto que $\tau(N,b) = m(N,b) + \alpha(M(N,b) - m(N,b))$ se comprueba directamente que se trata de un juego en el que $\alpha = 0$, y, por tanto, $\tau(N,b) = (1000,0,0)$.

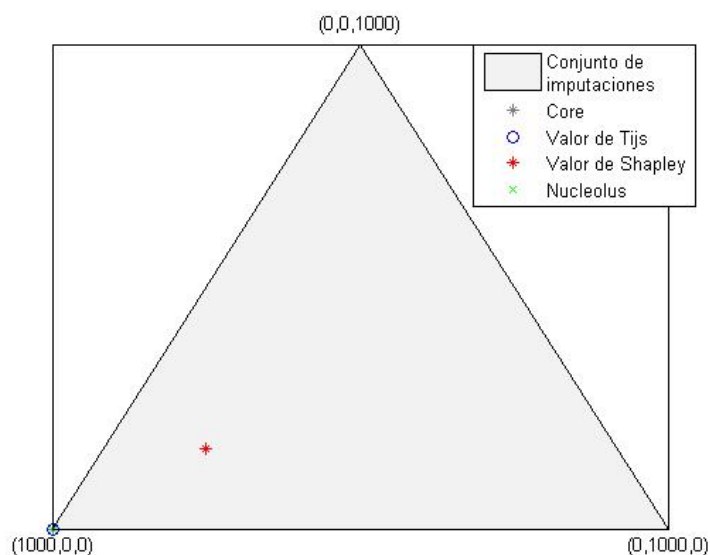


Figura 1.7.3. Conjunto de imputaciones, core, *nucleolus*, valor de Shapley y valor de Tijs

En este caso, se puede observar que tanto el *core*, el *nucleolus* y el valor de Tijs realizan un mismo reparto, asignándole toda la ganancia al ganadero, mientras que el valor de Shapley asigna a ambos vecinos un mismo beneficio. En principio, no se puede decir que un concepto de solución sea mejor que otro, cada uno aplica ciertos criterios que podrán tener mayor o menor sentido en función del tipo de problema que se trate.

2. COMPUTACIÓN DEL *NUCLEOLUS*

Una vez estudiadas las nociones básicas de la Teoría de Juegos, este capítulo se centra en el estudio de una de las soluciones de tipo puntual que se han tratado anteriormente: el *nucleolus*.

En esta parte del trabajo se lleva a cabo la descripción de cómo se debe computar el *nucleolus*, en particular, en aclarar cómo se puede usar la programación lineal y la dualidad para calcularlo correctamente. Para ello, se usan estudios de distintos autores como Fromen (1997) o Guajardo y Jörnsten (2015), en los que se describe la secuencia de problemas lineales que hay que resolver, así como el tratamiento que hay que darles a las soluciones duales de estos problemas. Además de ello, se estudian nuevas variantes relativas al concepto del *nucleolus*, en Grotte (1970), Lemaire (1984), Michener et al. (1981) o Littlechild y Vaidya (1976).

El cálculo del *nucleolus* se debe hacer de forma precisa; se debe tener en cuenta que un programa lineal pueda tener múltiples soluciones, y, a su vez, no se debe descuidar el uso de las soluciones duales como fuente valiosa de información. El hecho de que estos detalles sean de tal relevancia denota la importancia de hacer hincapié en el cálculo e interpretación de las soluciones obtenidas. Para ello, se muestran diversos ejemplos en los que se estudiarán de forma más concreta algunos aspectos y detalles de gran importancia que afectan a las soluciones de los problemas. Entre ellos, se tratarán algunos como el problema de las agencias de seguros en Lemaire (1984), el conjunto de proyectos en Krus y Bronisz (2000), la producción y la planificación del transporte en Sakawa et al. (2001), los mercados de electricidad en Satyaramesh y Radhakrishn (2009) o los problemas de fabricación en Oh y Shin (2012).

Este capítulo se divide en secciones, formadas por el siguiente contenido:

En la Sección 1 de este capítulo se desarrolla la forma en la que se computa el *nucleolus*, además de describirse algunas variantes del concepto, como son el concepto de *nucleolus* normalizado, desarrollado en Grotte (1970), el *nucleolus* proporcional, desarrollado en Young et al (1980), el *nucleolus* disruptivo, desarrollado en Littlechild y Vaidya (1976) y en Michener et al. (1981) o el *nucleolus* de la demanda Engevall (1996).

En la Sección 2 de este capítulo se va a tratar la notación a usar, para posteriormente mostrar una secuencia de problemas lineales propuestos en estudios como Fromen (1997) o Guajardo y Jörnsten (2015), que harán posible calcular de forma precisa el *nucleolus*. A su vez se muestra la importancia que tiene la dualidad de las soluciones que se obtienen en la secuencia de problemas lineales.

Una vez estudiada la forma de realizarse la computación del *nucleolus*, y de las otras variantes referentes a él en la Sección 2, la Sección 3 incluye otros ejemplos de los

problemas lineales que aparecen, resueltos mediante su programación en *LINGO*. De igual forma, se representan gráficamente mediante el uso de la librería *TuGlab* en Matlab.

2.1. Cálculo del *nucleolus*

Para comenzar la computación del *nucleolus* se empieza definiendo la notación que se va a usar en ella:

Se recuerda que $N = \{1, \dots, n\}$ es el conjunto de jugadores. La función característica como v en la que se asigna a cada coalición S contenido N el coste de la coalición S . Se toma el exceso de coalición S en x como $\varepsilon(x, S) = v(S) - \sum_{j \in S} x_j$.

Para calcular el *nucleolus*, se considera primero el siguiente modelo de programación lineal (de ahora en adelante denominado P), que busca una preimputación $x = (x_1, \dots, x_n)$ que maximiza el exceso mínimo ε entre todas las coaliciones.

(P)

$$\begin{aligned} & \max \varepsilon_1 & (2.1) \\ \text{s.a.} \quad & \varepsilon_1 + \sum_{j \in S} x_j \leq v(S), \quad \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset, & (2.2) \end{aligned}$$

$$\sum_{j \in N} x_j = v(N), \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_1 \in \mathbb{R}, x_j \in \mathbb{R}, \quad \forall j \in N. \quad (2.4)$$

En el modelo arriba mostrado, la función objetivo (2.1) maximiza ε_1 . Las restricciones (2.2) imponen que tal ε_1 no puede ser mayor que el exceso de cualquier coalición. De esta forma con (2.1) y (2.2) juntos se proporciona que ε sea exactamente igual al exceso mínimo. La restricción (2.3) es la condición de eficiencia, que establece que el coste de la gran coalición $v(N)$ se divide entre sus jugadores según la asignación x . Las restricciones (2.4) establecen la naturaleza de las variables.

Sea $y_1(S)$ la variable dual asociada a la restricción $x(S) + \varepsilon_1 \leq v(S)$, y sea $Y^1(i)$ la variable dual asociada a $x_i \leq v(i)$. Además, sea (Y^1, y_1) una solución dual óptima de P_1 . Si P_1 tiene una solución (primal) única (x^*, ε_1^*) , entonces x^* es el *nucleolus* del juego.

Las desigualdades ($p_1 \geq 1$) de tipo (2.1), incluyendo la variable ε_1 , son vinculantes y activas y tienen una solución dual estrictamente positiva correspondiente ($y_1^*(S) > 0$).

Estas restricciones definen los primeros elementos p_1 del vector de exceso lexicográficamente más pequeño $\theta(x)$, con los excesos $v(S) - x(S)$ dispuestos en orden creciente. Si la solución (x^*, ε_1^*) no es única, al menos el elemento p_{1+1} tiene que ser encontrado resolviendo otro programa lineal P_2 , donde las restricciones vinculantes y activas en la solución óptima P_1 son fijas:

(P₂)

$$\begin{aligned}
 & \max \varepsilon_2 \\
 & \text{s.a. } x_i \leq v(i), \quad i \in N, \\
 & x(S) + \varepsilon_2 \leq v(S), \quad S \in \{S \subseteq N \mid y_1^*(S) = 0\}, \\
 & x(S) + \varepsilon_1^* \leq v(S), \quad S \in \{S \subseteq N \mid y_1^*(S) > 0\}, \\
 & x(N) = v(N).
 \end{aligned}$$

Si P_2 tiene solución única (x^*, ε_2^*) , entonces x^* es el *nucleolus* del juego. Si P_2 no tiene solución única, hay que resolver otro problema, P_3 . El problema P_3 está construido de forma similar a P_2 .

Este problema se puede generalizar de la siguiente forma:

$$\max \varepsilon_k \tag{2.5}$$

$$\text{s.a. } \varepsilon_k + \sum_{j \in S} x_j \leq v(S), \quad \forall S \subseteq N : S \notin \mathcal{F}_k, \tag{2.6}$$

$$\varepsilon_i + \sum_{j \in S} x_j \leq v(S), \quad \forall S \in F_i, \quad i \in \{1, \dots, k-1\}, \tag{2.7}$$

$$\sum_{j \in N} x_j \leq v(N), \tag{2.8}$$

$$\varepsilon_k \in \mathbb{R}, \quad x_j \in \mathbb{R}, \quad \forall j \in N. \tag{2.9}$$

El conjunto F_i es el conjunto de todas las coaliciones para las cuales la restricción en exceso (2.6) se satisface con signo de igualdad para todas las soluciones del i -ésimo problema lineal. Por tanto, el exceso de las coaliciones en F_i debe fijarse a ε_i en el k -ésimo problema lineal en las series, para todo $k > i$, como se expresa en la restricción (2.7). El conjunto \mathcal{F}_k es simplemente la unión de todas las coaliciones para las que se ha fijado su exceso en un problema lineal anterior en la secuencia, es decir, $\mathcal{F}_k = \bigcup_{i < k} F_i$. Nótese que al definir $\mathcal{F}_1 = \emptyset$ y omitiendo las restricciones (2.7) para $k = 1$, se recupera el problema P inicial. La solución de P no es necesariamente única, puede ocurrir que más de una asignación x nos lleve al valor objetivo óptimo. Además, una solución de P proporciona una asignación que maximiza el exceso más bajo, pero no necesariamente el segundo o cualquier exceso más bajo subsiguiente.

Una cuestión clave a la hora de la resolución de los problemas es cómo encontrar el conjunto F_i , y aquí es donde la programación lineal dual juega un papel relevante. El dual de P , al que se hace referencia como modelo D , se muestra a continuación:

(D)

$$\min \sum v(S) \cdot y_s \quad (2.10)$$

$$s.a. \sum_{S \in K \setminus N} y_s = 1, \quad (2.11)$$

$$\sum_{S \in K: j \in S} y_s = 0, \quad \forall j \in N, \quad (2.12)$$

$$y_s \geq 0 \quad \forall S \in 2^n \setminus N, \quad y_N \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

Desde la teoría de la dualidad, cuando el valor óptimo de una variable dual es positivo, la restricción de desigualdad asociada a esta variable debe cumplirse con igualdad en cualquier solución óptima de P . Por tanto, dada una solución de P , el conjunto F_i puede estar formado por todas las coaliciones S para las cuales y_s sea positivo en la solución correspondiente a D . En el caso de que el problema primal fuese de minimizar el exceso, el conjunto F_i estaría formado por todas las coaliciones S para las cuales y_s sea negativo en la solución correspondiente a D . Análogamente, para un k general, el conjunto F_k puede estar formado por todas las coaliciones tales que la variable dual asociada a la restricción (3.6) sea positiva en la correspondiente solución óptima al problema dual del k -ésimo.

Para encontrar el *nucleolus*, el proceso de solución continúa hasta k donde el problema lineal tenga solución única. A más tardar, tal solución única se obtendrá cuando las restricciones (2.7) y (2.8) definan un sistema de n ecuaciones lineales independientes. El *nucleolus* requiere que x no solo sea un preimputación, sino también debe satisfacer la restricción de racionalidad individual $x_j \leq v(\{j\})$, $\forall j \in N$. Esto se puede agregar explícitamente como una restricción en el problema lineal para juegos cuyo *core* puede ser vacío. Además, es interesante fijarse como para juegos con *core* no vacío, el valor objetivo óptimo no es negativo para todos los problemas lineales en la secuencia, por lo que se puede declarar $\varepsilon_k > 0$, en lugar de $\varepsilon_k \in \mathbb{R}$.

2.1.1. Variantes del concepto *nucleolus*

Paralelamente a la computación del *nucleolus*, es de interés comentar algunas variantes nuevas en las que se destaca la variedad de opciones y de recursos que ofrece esta solución.

Nucleolus normalizado:

Uno de los conceptos más interesantes a estudiar se describe en Grotte (1970): el concepto de *nucleolus* normalizado (*nucleolus débil* presentado por Young *et al.* (1982) o *nucleolus per cápita* Young (1985)). Este se define de la misma forma que el *nucleolus*, excepto que los excesos $\varepsilon(x,S)$ se dividen por la cardinalidad (tamaño) de la coalición, es decir, $\varepsilon^N(x,S) = \varepsilon(x,S)/|S|$.

El efecto del *nucleolus* normalizado afecta, en general, en que las grandes coaliciones ganarán en importancia, ya que las restricciones correspondientes serán vinculantes.

El *nucleolus* normalizado está sujeto a algunas críticas axiomáticas defendidas por Shapley (1981) y por Young (1985) o Young et al. (1982). La idea detrás de estas críticas es que, al formular un juego, toda la información relevante del juego (N, v) debe incluirse en la definición de este, es decir, en la definición de la función característica $v(S)$. Estas críticas también son extrapolables al *nucleolus* de la demanda. El *nucleolus* normalizado o *nucleolus* débil puede implicar pagos a socios de *dummies*: socios que debido al aislamiento (geográfico, por ejemplo), no contribuyen en nada al ahorro de costes de cualquier coalición. El principio ficticio dice que los socios que no aportan nada al ahorro deben ir solos. El *nucleolus* normalizado o *nucleolus* débil viola este principio.

Nucleolus de la demanda:

Otro concepto interesante a destacar en la computación del *nucleolus* es el concepto del *nucleolus* de la demanda, que se define de la misma forma que el *nucleolus*, pero utilizando el exceso de $\varepsilon^D(x, S)$ en lugar de $\varepsilon(x, S)$, donde $\varepsilon^D(x, S)$ es el exceso $\varepsilon(x, S)$ multiplicado por la demanda total de la coalición: $\varepsilon^D(x, S) = \varepsilon(x, S) \cdot \sum_{i \in S} D_i$.

El efecto que tiene el *nucleolus* de la demanda sobre la asignación de costes es que la importancia de las coaliciones que tienen una gran demanda se reduce al calcular el *nucleolus*. Se puede asignar una porción más grande del coste total a los clientes que participan en coaliciones con una gran demanda que a los que participan con menos demanda.

Además del *nucleolus* normalizado y del *nucleolus* de la demanda, existen otros conceptos destacables. En Lemaire (1984) se hace referencia a otros conceptos de importancia referentes al *nucleolus*: el *nucleolus* proporcional y el *nucleolus* disruptivo.

Nucleolus proporcional:

Referente al *nucleolus* proporcional, desarrollado en Young et al. (1980): El *nucleolus* proporcional se obtiene cuando el exceso se define por la fórmula:

$$\varepsilon(x, S) = \frac{v(S) - \sum_{i \in S} x_i}{v(S)} ;$$

en lugar de otorgar la misma cantidad a cada coalición de N , se otorga un subsidio proporcional a $v(S)$. Para ello hay que resolver el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned} & \max s \\ & \sum_{i \in S} x_i \leq v(S)(1 - s), \quad \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset, S \neq N, \\ & \sum_{i \in N} x_i = v(N), \quad x_i \geq 0, \quad \forall i. \end{aligned}$$

Nucleolus disruptivo:

En el caso del *nucleolus* disruptivo, desarrollado por Littlechild y Vaidya (1976) y por Michener et al. (1981): Para cada asignación x , se define la propensión a interrumpir para la coalición S como la proporción entre lo que $N \setminus S$ y S perderían si se abandonara x .

$$d(x, S) = \frac{v(N \setminus S) - \sum_{i \in N \setminus S} x_i}{v(S) - \sum_{i \in S} x_i}.$$

El *nucleolus* disruptivo se calcula como el *nucleolus*, reemplazando $\varepsilon(x, S)$ por $d(x, S)$: sea $z(x)$ el vector cuyas componentes son las $d(x, S)$, $\forall S \neq \emptyset, N$, en orden creciente. Ordenando lexicográficamente las $z(x)$, su primer elemento es el *nucleolus* disruptivo.

2.2. Ejemplos numéricos

Una vez se ha determinado cómo se debe computar el *nucleolus*, se dispone a presentar distintos ejemplos donde se pondrá en práctica lo mencionado anteriormente. De esta forma, se recalca en ellos el estudio de las soluciones, mostrando la relevancia de tener que resolver todos los problemas de la secuencia y no solo el primero de ellos, así como la importancia de las soluciones duales.

El primero de los ejemplos es un problema propuesto en Young et al (1980) donde se abordarán los conceptos de *nucleolus* disruptivo y *nucleolus* proporcional. Se toman ejemplos de distintos autores como Oh y Shin (2012), Satyaramesh y Radhakrishna (2009), Sakawa et al. (2001), Krus y Bronisz (2000) o Lemaire (1984), de los que se usan los valores de la función característica de cada uno de ellos para ser resueltos mediante la programación en *LINGO* de los distintos problemas lineales que hacen falta para dicha resolución.

Antes de mostrar los ejemplos, se debe tener en cuenta que en algunos contextos la función característica v se define como un beneficio en lugar de un coste, y el exceso como una medida de insatisfacción en lugar de satisfacción. Se prefiere adoptar la perspectiva de costes en la función característica como se hará en capítulos siguientes, ya que la mayoría del reciente interés por los juegos cooperativos en Investigación Operativa proviene de los problemas de costes compartidos en la logística.

La notación que será usada es la siguiente:

- $b(S)$: para referirse a la función característica de juegos donde los jugadores

comparten beneficios en lugar de costes.

- $v(S) = -b(S)$: los modelos de programación lineal para estos juegos siguen siendo los mismos descritos en la sección anterior.

En los problemas donde los jugadores comparten beneficios, el problema lineal se formulará en forma de minimizar el exceso, como se muestra abajo. Esto tiene sentido ya que el exceso como su propia definición muestra, indica el beneficio que obtiene la coalición menos el beneficio que obtendría cooperando. Así, lo que se busca es que el exceso sea lo mínimo posible, buscando que el grado de conformidad de la coalición sea lo mayor posible.

$$\begin{aligned}
 & \min \varepsilon_k \\
 \text{s.a. } & \varepsilon_k + \sum_{j \in S} x_j \geq b(S), \quad \forall S \subseteq N: S \notin \mathcal{F}_k, \\
 & \varepsilon_i + \sum_{j \in S} x_j \geq b(S), \quad \forall S \in F_i, i \in \{1, \dots, k-1\}, \\
 & \sum_{j \in N} x_j \geq b(N), \\
 & \varepsilon_k \in \mathbb{R}, x_j \in \mathbb{R}, \quad \forall j \in N.
 \end{aligned}$$

Esto a su vez repercute en el problema dual y sus soluciones. Cuando el problema es de maximizar y lo que se están asignando son costes, la solución del problema dual que se incluye en el conjunto F_i es aquella que es positiva. Por lo contrario, cuando el problema es de minimizar y se están asignado beneficios, la solución dual que pasa al conjunto F_i es aquella que es negativa.

2.2.1. Ejemplo de *nucleolus* disruptivo y *nucleolus* proporcional

Se abordará un ejemplo presentado en Lemaire (1984) donde se mostrará el cálculo de ambas variantes del *nucleolus*.

Durante la primera semana de abril de 1983, tres conductores belgas se vieron involucrados en un accidente en Yugoslavia. En la siguiente tabla se muestran los datos relativos a este problema:

Asegurado	Compañía	Sitio del accidente	Importe reclamado
J ₁	1	Ljubljana	300
J ₂	2	Karlovac	1000
J ₃	3	Bistrica	200

Las tres empresas involucradas necesitan un estudio de daños de los coches. Las tres compañías tienen el mismo corresponsal en Belgrado, la oficina de tasación Y .

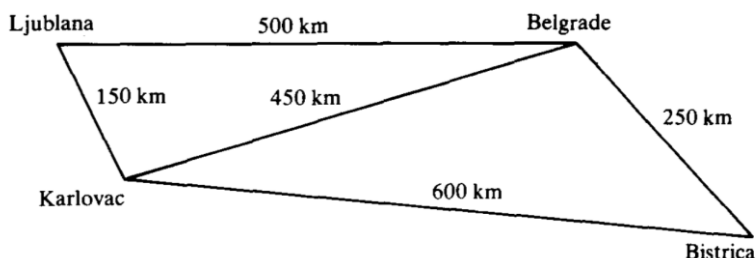


Imagen 2.2.1. Situación geográfica del problema (Lemaire, 1984)

Al observar la ubicación de las tres reclamaciones en el mapa, Y se da cuenta de que es mucho más barato (en kilometraje total), buscar a un experto para un viaje de ida y vuelta, que regrese a Belgrado después de cada evaluación.

Para el caso especial de este ejemplo de tres personas, existe una expresión para el cálculo del *nucleolus* disruptivo que se estudia en Lemaire (1984).

$$x_i = CM(i) + \frac{v(i) - CM(i)}{\sum_{j=1}^3 [v(j) - CM(j)]} \cdot \left[v(N) - \sum_{k=1}^3 CM(k) \right],$$

donde $CM(i)$ es el kilometraje adicional que se debe conducir si $\{i\}$ se considera la última reclamación si ya se unió al grupo $N \setminus \{i\}$.

De esta forma, en la Tabla 2.2.1, la primera y segunda columna de la tabla muestran un índice $c \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$ que se usa para referirse a cada coalición y a los jugadores que las conforman. Las siguientes columnas muestran la solución del *nucleolus* (η), la solución del *nucleolus* proporcional (PN) y la solución del *nucleolus* disruptivo (DN).

Tabla 2.2.1. Datos y resultados del juego sobre proyectos conjuntos

c	S	$v(S)$	η	PN	DN
1	{1}	1000	600	1000	600
2	{2}	900	450	0	450
3	{3}	500	450	500	450
4	{1,2}	1100			
5	{1,3}	1500			
6	{2,3}	1300			
7	{1,2,3}	1500			

Si analizamos la solución del *nucleolus* proporcional, se observa como todo el beneficio de la cooperación va al segundo jugador, que saca el máximo partido de su derecho de veto; sin él, de hecho, los jugadores 1 y 3 no pueden lograr ningún ahorro.

2.2.2. Ejemplo de conjunto de proyectos

El siguiente ejemplo que se trata es un problema desarrollado en Krus y Bronisz (2000) en el que se considera un juego cooperativo donde diferentes agentes están interesados en la implementación de un proyecto. El documento trata un problema de asignación de costes en el caso de un proyecto. Hay un conjunto de agentes económicos (autoridades, sujetos económicos) interesados en la implementación del proyecto. El proyecto puede ser implementado independientemente por los agentes particulares o en otro caso el proyecto puede ser implementado conjuntamente creándose coaliciones entre los agentes.

Se tiene en cuenta que la solución del problema puede no ser única, además de mostrar la importancia de la utilidad de la solución dual en la implementación del algoritmo. Estos autores remiten a Christensen et al. (1996) quienes de hecho incorporan la información de los valores duales en el proceso de solución.

La función característica de este ejemplo se muestra en la tercera columna de la Tabla 2.2.2. La primera y segunda columna de la tabla muestran un índice $c \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$ que se usa para referirse a cada coalición y a los jugadores que las conforman. Las siguientes tres columnas muestran la solución del *nucleolus* (η) que ha sido calculada y comprobada en este trabajo mediante programación en *LINGO*, y el vector de excesos en orden no decreciente junto con el índice de cada coalición en este vector.

Tabla 2.2.2. Datos y resultados del juego sobre proyectos conjuntos

c	S	$b(S)$	x	c	ε
1	{1}	0.00	0.75	3	0.18
2	{2}	0.00	0.48	12	0.18
3	{3}	0.00	0.18	11	0.39
4	{4}	0.00	0.47	13	0.39
5	{1,2}	0.68		14	0.39
6	{1,3}	0.24		8	0.40
7	{1,4}	0.75		9	0.45
8	{2,3}	0.26		4	0.47
9	{2,4}	0.51		7	0.48
10	{3,4}	0.07		2	0.48
11	{1,2,3}	1.03		5	0.56
12	{1,2,4}	1.53		10	0.58
13	{1,3,4}	1.02		6	0.69
14	{2,3,4}	0.75		1	0.75
15	{1,2,3,4}	1.89			

El valor objetivo óptimo a este modelo es $\varepsilon_1 = 0.18$. En esta primera iteración, saturan las restricciones asociadas a las coaliciones número 3 y 12, es, por tanto, que se define $F_1 = \{3, 12\}$, quedando determinado el valor único para $x_3 = 0.18$.

Al resolver el segundo problema lineal correspondiente en la secuencia, se obtiene $\varepsilon_2 = 0.38667$ y valores duales óptimos negativos y_{11} , y_{13} e y_{14} siendo estas las restricciones que saturan. Fijando el exceso de estas tres coaliciones a ε_2 y usando la condición de eficiencia y la asignación para x_3 obtenida anteriormente, se encuentra la asignación única $\eta = (0.75, 0.48, 0.18, 0.47)$, que es el *nucleolus* de este juego. En *nucleolus* en este caso se encuentra con solamente dos iteraciones en la secuencia de problemas

2.2.3. Ejemplo de planificación de la producción y del transporte

El siguiente ejemplo es un caso real abordado por Sakawa et al. (2001) donde se trata un problema de planificación de la producción y el transporte a partir de una situación concreta de un fabricante de materiales de vivienda. En este problema los bienes son múltiples y se producen en varios centros de producción existentes (fábricas), siendo demandados en regiones en las que existen las fábricas y en las que el fabricante quiere suministrar productos a todos los clientes. En este problema, los autores no tienen en cuenta la ubicación de las instalaciones ni la distribución a los clientes, sino que consideran un problema para determinar un plan óptimo de producción y transporte de forma que el coste total de producción y transporte se minimice bajo condiciones de la capacidad de producción y la demanda de cada región.

En este caso, los autores reconocen la utilidad de resolver una secuencia de programas lineales para el cálculo del *nucleolus*. Además de esto, hacen comentarios acerca de la solución óptima en el dual, en la que se pueden identificar cuales se deben cumplir con igualdad examinando las restricciones al resolver los problemas lineales. Sakawa et al. (2001) presentan datos para un juego de 5 jugadores, donde cada jugador representa una ciudad o base de ventas en la red del fabricante. La función característica de este juego, así como la solución x se muestran en la Tabla 2.2.3. Para calcular el *nucleolus* η , se resuelve el primer problema lineal en la secuencia y se encuentra una solución donde quedan cinco coaliciones con el exceso más bajo $\varepsilon_1 = 0.034$, pero solo tres variables duales óptimas son distintas de cero (y_{16} , y_{21} e y_{30}).

Entonces, definiendo $F_1 = \{16, 21, 30\}$ y ejecutando el segundo problema lineal, la solución que se obtiene tiene dos variables duales óptimas distintas a cero (y_9 e y_{26}). Fijando el exceso de estas dos coaliciones, junto con el exceso de las tres coaliciones anteriores y la restricción de eficiencia, se define un sistema de ecuaciones cuya única solución es el *nucleolus*.

Tabla 2.2.3. Datos y resultados del juego sobre transporte y planificación de la producción de Sakawa et al. (2001)

c	S	$b(S)$	x	c	ε
1	{1}	0.060	0.1650	16	0.034
2	{2}	0.168	0.3205	21	0.034
3	{3}	0.030	0.0845	30	0.034
4	{4}	0.249	0.3745	9	0.039
5	{5}	0.000	0.0555	26	0.039
6	{1,2}	0.378		25	0.042
7	{1,3}	0.144		28	0.042
8	{1,4}	0.408		15	0.044
9	{1,5}	0.182		29	0.046
10	{2,3}	0.337		20	0.050
11	{2,4}	0.538		27	0.053
12	{2,5}	0.279		3	0.055
13	{3,4}	0.383		5	0.056
14	{3,5}	0.083		18	0.056
15	{4,5}	0.386		14	0.057
16	{1,2,3}	0.536		10	0.068
17	{1,2,4}	0.747		22	0.074
18	{1,2,5}	0.485		13	0.076
19	{1,3,4}	0.546		19	0.078
20	{1,3,5}	0.255		23	0.082
21	{1,4,5}	0.561		24	0.083
22	{2,3,4}	0.706		12	0.097
23	{2,3,5}	0.379		1	0.105
24	{2,4,5}	0.668		7	0.106
25	{3,4,5}	0.473		6	0.108
26	{1,2,3,4}	0.906		17	0.113
27	{1,2,3,5}	0.573		4	0.126
28	{1,2,4,5}	0.874		8	0.132
29	{1,3,4,5}	0.634		2	0.153
30	{2,3,4,5}	0.801		11	0.157
31	{1,2,3,4,5}	1.000			

La función característica de este juego se da con tres dígitos decimales y las asignaciones con seis decimales ya que pequeñas perturbaciones de $b(S)$ tienen efectos relativamente bajos en el *nucleolus* del juego $\eta = (0.165, 0.3205, 0.0845, 0.3745, 0.0555)$.

2.2.4. Ejemplo de problema en el mercado eléctrico

Satyaramesh y Radhakrishna (2009) presentan un juego cooperativo para asignar las pérdidas transaccionales en un problema de mercados de electricidad. En un primer estudio del caso, utilizan un conjunto de datos del sistema de prueba de IEEE 14-buses. La función característica de este sistema se muestra en la Tabla 2.2.4. En la solución que se obtiene de la aplicación en *LINGO* de la secuencia de problemas lineales, se tiene que, para el primer problema lineal, las variables duales con valores distintos a 0 son y_3 e y_4 . De esta forma queda que $\varepsilon_1=1.3695$. Se define $F_1 = \{3, 4\}$, el valor de x_3 es fijo. En la

segunda iteración, el problema lineal aporta el resultado de $\varepsilon_2=1.8143$, quedando esta vez como fijos los valores de x_1 y x_2 y teniendo entonces el resultado de la imputación.

Tabla 2.2.4. Datos y resultados del juego sobre la electricidad de Satyaramesh y Radhakrishna (2009)

c	S	$b(S)$	x	c	ε
1	{1}	1.275	3.0893	3	1.3695
2	{2}	3.471	5.2853	4	1.3695
3	{3}	1.466	2.8355	1	1.8143
4	{1,2}	7.005		2	1.8143
5	{1,3}	4.081		5	1.8437
6	{2,3}	5.672		6	2.4488
7	{1,2,3}	11.210			

Gráficamente se puede ver reflejado en la siguiente figura:

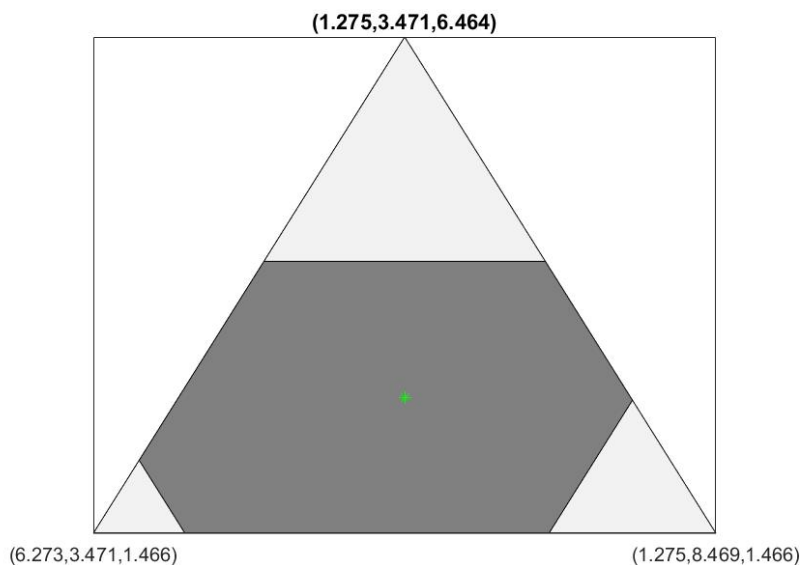


Figura 2.2.2. Representación del Conjunto de imputaciones y del *nucleolus*

2.2.5. Problemas de empresas manufactureras

Oh y Shin (2012) abordan un problema de costes compartidos en fabricación centrada en la red. Se considera un grupo de socios comerciales que debaten si invertir conjuntamente en una puerta de enlace semántica común. Aunque pueden llegar a un acuerdo y construir juntos un portal semántico común, cada uno puede ser servido a un nivel diferente, dependiendo de su tamaño de ontología y la frecuencia de las solicitudes de transformación de datos. Por ejemplo, las empresas como Boeing o GM deben ser atendidas en un nivel altamente específico porque es probable que sean nodos centrales

de la alianza centrada en la red. Esto implica que pueden ser los mayores beneficiarios de la puerta de enlace semántica en comparación con los otros socios pequeños.

En concreto en este ejemplo, se supone que tres socios comerciales, C_1 , C_2 y C_3 , están debatiendo si construir una puerta semántica común de enlace para intercambiar mensajes heterogéneos de forma fluida. Por ejemplo, sin una puerta de enlace semántica, C_1 se enfrenta a un coste de 375144 € por año en para lograr intercambiar datos heterogéneos con C_2 y C_3 . Sin embargo, si C_1 y C_2 están de acuerdo en construir una puerta de enlace semántica en conjunto, C_1 y C_2 pueden pagar solo 568232 € por año en total. Además, cuando C_1 , C_2 y C_3 acuerdan construir una puerta de enlace semántica común, el coste anual para administrar datos heterogéneos entre C_1 , C_2 y C_3 es de 772500 € en total por año. Por tanto, la construcción de una puerta de enlace común semántica para C_1 , C_2 y C_3 , claramente tiene sentido desde el punto de vista económico, ya que ahorrará 59163€ por año. El problema restante es cómo asignar los costos conjuntos a cada socio comercial individual.

En este caso, se produce un reparto de costes, lo que conlleva que la función objetivo sea de maximizar y que las soluciones duales que pasen al conjunto F_i sean las positivas. Se calcula el *nucleolus* usando la función característica que se muestra en la Tabla 2.2.5 donde se recogen las distintas combinaciones de costes en función de si se construye la puerta semántica o no.

En la solución que se obtiene mediante programación en *LINGO* se tiene que, para el primer problema lineal, y_3 e y_4 son las únicas variables duales con valores positivos, quedando el exceso definido como $\varepsilon_1 = 3485.5$. Se define, por tanto, $F_1 = \{3, 4\}$ y se resuelve el segundo problema lineal quedando ahora como positivas las variables duales y_5 e y_6 y siendo el exceso de $\varepsilon_2 = 11606.3$. Es necesario realizar una última iteración donde se obtiene $\varepsilon_3 = 12228.8$. De esta forma se obtiene la solución del *nucleolus* de este juego $\eta = (331695.3, 233051.3, 207753.5)$.

Tabla 2.2.5. Datos y resultados del juego sobre fabricación de Oh y Shin (2012)

c	S	$v(S)$	x	c	ε
1	{1}	375144	331695.3	3	3485.5
2	{2}	245280	233051.3	4	3485.5
3	{3}	211239	207753.5	5	11606.3
4	{1,2}	568232		6	11606.3
5	{1,3}	551055		2	12228.8
6	{2,3}	452411		1	43448.8
7	{1,2,3}	772500			

2.3. Conclusiones

En los ejemplos que se han estudiado a lo largo de este capítulo se han dado las nociones necesarias para afrontar problemas en los que sea conveniente realizar la computación del *nucleolus* y de las variantes de este concepto.

Se han analizado ejemplos de distintos autores, y el cómputo del *nucleolus* se ha llevado a cabo mediante la programación en *LINGO* de la secuencia de problemas lineales. Además, el uso de la librería *TUGlab*, ha permitido completar su estudio gráficamente. Se muestra la gran importancia que tiene la resolución de los problemas duales, así como de sus soluciones en la secuencia de problemas lineales. Estos irán definiendo los distintos conjuntos de los que se desarrollarán las restricciones del problema lineal.

Además, se puede apreciar la gran variedad de problemas que es posible tratar desde la perspectiva de la Teoría de Juegos en muy diversos ámbitos de estudio.

3. PROBLEMA DE LA DISTRIBUCIÓN DE COSTES EN UNA COMPAÑÍA PETROLERA

Una vez estudiado cómo abordar el cómputo del *nucleolus*, se procede a analizar el problema planteado en Engevall et al. (1998), acerca del reparto de costes en una compañía petrolera, donde se utilizarán de forma concreta las nociones de computación vistas anteriormente.

En este capítulo, concretamente, se va a tratar un problema que surge de la planificación de la distribución en el departamento de logística de una empresa de petróleo sueca. Se considerará una ruta específica donde los costes totales de distribución serán repartidos entre los clientes a los que se le suministra. El problema está formulado como un problema del viajero en donde los métodos para resolver los problemas de distribución están basados en diferentes conceptos de la teoría de juegos cooperativos, como el *nucleolus*, el *nucleolus* de la demanda, el valor de Shapley y el valor de Tijs.

En la Sección 1 se realizará una introducción del objeto de estudio tomando ejemplos de interés, como son el problema sobre las tarifas telefónicas desarrollado por Billera et al. (1978), el problema de distribución de ganancias con agentes económicos estudiado en Gately (1974), el problema de la distribución de costes conjuntos en proyectos de abastecimiento de agua entre los usuarios, analizado en Young et al. (1982) y el problema sobre las distintas tasas de aterrizaje de aeronaves llevado a cabo en Littlechild y Thompson (1977).

En la Sección 2 de este capítulo se presentará la terminología básica utilizada; además, se va a tratar la importancia de la ciudad de origen. Se estudiará el desarrollo del problema del viajero (*TSP*), del que se obtiene el valor de la función característica para la computación de las soluciones de tipo puntual que se verán en capítulos siguientes. Además, se desarrollarán varios ejemplos incluidos en Tamir (1989), en Dror (1990) y en Engevall (1996).

La Sección 3 incluye una descripción de la situación de planificación de la distribución en *Norsk Hydro* en la que se muestra la asiduidad de los repartos, así como las distintas responsabilidades a la hora de solicitar el abastecimiento; todo ello se completa con definiciones de los diferentes tipos de costes de distribución. Para los transportistas, la incertidumbre sobre los tiempos y los costes de los viajes son aspectos omnipresentes en el ruteo de vehículos y su programación; por tanto, un retraso imprevisto causa un impacto sustancial en los costes. Los transportistas a menudo desean saber qué enlaces son críticos y qué rutas y horarios tienen menos riesgo en términos de costes, por lo que proponer un enfoque de teoría de juegos para determinar la confiabilidad de la red de transporte con respecto a las probabilidades de fallo es totalmente factible (Bell, 2004).

En la Sección 4 se formula matemáticamente el problema de la asignación del coste total de distribución entre los clientes como dos juegos diferentes del agente viajero; así, se hace una

breve discusión sobre qué clase de problema es el que va a ser abordado, mostrando las distintas variedades que hay en los problemas de este tipo. Se analizan varios ejemplos que se desarrollan en Gothe-Lundgren et al. (1996) y en Engevall (1996).

A su vez, en la Sección 5 se estudian una serie de problemas lineales para calcular el *nucleolus* en concordancia con el Capítulo 2 y se complementa con ejemplos de Tijs (1981).

En la Sección 6, se muestran los resultados computacionales de diferentes conceptos de solución para *Norsk Hydro* que se han obtenido mediante la programación en *LINGO* de los problemas lineales asociados. Finalmente, una sección de conclusiones sobre los resultados anteriores es presentada.

3.1. Motivación

Los métodos de asignación de costes son necesarios cuando se quiere dividir un coste común entre diversos usuarios o ítems. Un ejemplo relacionado con el problema que se comenta es cuando numerosos usuarios cooperan para dar lugar a economías de escala, y, por tanto, usar o beneficiarse de un servicio común. Así, el coste de proveer el servicio será asignado a los distintos usuarios. En la práctica, la asignación de los costes se puede dar de muchas formas, por ejemplo, usando el método empírico, contabilidad por actividad o teoría de juegos cooperativos. Algunos ejemplos relevantes dentro de la distribución de costes usando la teoría de juegos cooperativos son el conocido problema del aeropuerto estudiado por Littlechild y Thompson (1977), el problema de abastecimiento de agua (o La Autoridad del Valle del Tennessee (TVA)), que fue estudiado por Parker (1943) y por Straffin et al. (1981), el desarrollo de fuentes de agua, desarrollado por Young et al. (1982), las inversiones en energía eléctrica, tratado por Gately (1974) o el problema de las facturaciones de las tarifas telefónicas (Billera et al., 1978).

Billera et al. (1978) abordan el problema de determinar las tarifas de facturación telefónica en la Universidad de Cornell. El problema se divide en dos partes. La primera parte se refiere al problema de qué servicios (de cuatro posibles) comprar, para proporcionar llamadas de larga distancia. La segunda parte se refiere al problema de cómo cobrar a los usuarios por las llamadas. Los costes consisten en gran medida en componentes que son fijos, es decir, no varían con el uso de las líneas. Algunos de los servicios que se pueden comprar, permiten un uso máximo para un coste fijo. El coste de los otros servicios es principalmente proporcional al tiempo de uso o al tiempo de uso y distancia. El uso, especificado al máximo en algunos servicios, se acumula durante el mes. Esto significa que a principios de mes el coste marginal de una llamada es 0, mientras que al final del mes puede ser mayor que 0, si hay que comprar servicios complementarios. Sin embargo, no es razonable cobrar poco a las llamadas al principio del mes y más al final del mes. El cliente del estudio (Universidad de Cornell) requería que las tarifas cubrieran exactamente los gastos. También debían ser “justas” en el sentido de que dos llamadas realizadas al mismo destino durante el mismo período del día, deberán cobrarse igual. El juego se modela como un juego no atómico (es decir, un número infinito o grande de jugadores), donde los jugadores representan las llamadas individuales.

Gately (1974) analiza el problema de la distribución de las ganancias de la cooperación entre dos o más agentes económicos. Defiende que esta situación tiene varios contextos en el ámbito de la economía: el monopolio bilateral, la teoría de la cooperación regional y la teoría del oligopolio. En concreto se trata el análisis de la cooperación regional en la planificación de las inversiones eléctricas en los cuatro estados de la Región Eléctrica de Sur de la India (Andhra Pradesh, Kerala, Mysore y Tamil Nadu). El principal objetivo era que se pudiera llegar a un acuerdo que propiciase que todas las regiones reconocieran el beneficio de la cooperación. Lo que se intentaba resolver es el problema de la inexistente cooperación entre las distintas Juntas Estatales, ya que, aunque el Estado haya aceptado el principio de cooperación regional, las Juntas Estatales hacen sus planificaciones basándose en el principio de la autosuficiencia. De esta forma, se produce un uso no óptimo de los recursos.

Young et al. (1982) analizan diferentes métodos para asignar los costes de los proyectos de abastecimiento de agua entre los usuarios. Discuten tanto métodos proporcionales simples como conceptos de solución de la teoría de juegos cooperativos (por ejemplo, el valor de Shapley y variantes del *core*). Young et al. (1982) ejemplifican los diferentes métodos en un estudio de caso: una asociación llamada Sydvatten Company, formada por algunos municipios en Skane en el sur de Suecia, diseña un proyecto para obtener agua a través de un túnel procedente de un lago fuera de la región. Un total de 18 municipios (no sólo los que forman Sydvatten Company) pueden participar en el proyecto, los que pueden formar 262.143 coaliciones diferentes. Calcular o estimar la función característica de cada coalición sería imposible, por lo que, los 18 municipios se dividen en seis unidades independientes como se muestra en la Imagen 3.1.1. Al calcular la función característica, se tiene en cuenta que no todas las coaliciones se forman en la práctica. Para algunas coaliciones $S = S_1 \cup S_2$ la función característica se simplifica a $v(S) = v(S_1) + v(S_2)$. Young et al. (1982) muestran que, en el caso estudiado, los principios de asignación proporcionales sugeridos no cumplen con las restricciones de racionalidad individual. El método que se acaba aplicando es el *nucleolus* proporcional. Young et al. (1982) compararon el método separable *costs-remaining benefits* (SCRB) con el método simple de la distribución proporcional y métodos más sofisticados de la teoría de juegos.

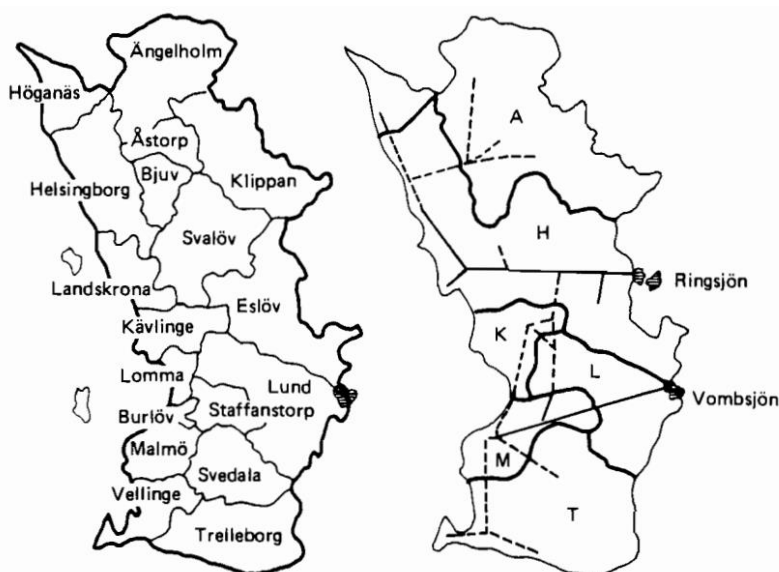


Imagen 3.1.1. División de grupos de municipios (Young, 1985)

Littlechild y Thompson (1977) presentan un caso en el que se calculan las tasas de aterrizaje de aeronaves utilizando la teoría de juegos cooperativos. Para realizar su estudio, se basan en datos del aeropuerto de Birmingham en 1968 y 1969. Llegan a la conclusión de que el tamaño de pista está justificado una vez elegido el aeropuerto, siempre que los tamaños de pista más pequeños estén justificados a su vez. En el contexto teórico del juego definen cada movimiento (despegue y aterrizaje) como un jugador, cada uno con un requisito en la pista dependiendo del tamaño de la aeronave. Littlechild y Thompson (1977) calculan tanto el beneficio como el coste de cada movimiento. Por tanto, pueden calcular el *nucleolus* para dos juegos diferentes y concluir que el *nucleolus* en el juego relativo a los beneficios está cerca del criterio de equidad I (un avión pequeño paga menos que uno grande), y el *nucleolus* en el juego de costes está cerca del criterio de equidad II (la carga de un avión más grande no excede la carga de un avión más pequeño). Littlechild y Thompson (1977) no puede calcular el valor de Shapley exactamente para el juego de beneficios, pero calculan un valor aproximado. Concluyen que el valor aproximado de Shapley para el juego de beneficios está más cerca de las cargas reales que el *nucleolus*, y que el valor de Shapley para el juego de costes es incluso más cercano a los costes reales.

El problema al que se enfrentaron Engevall et al. (1998) se basa principalmente en los costes asociados a la distribución. Se centra en la aplicación de los juegos cooperativos para resolver la planificación en Departamento Logístico de *Norsk Hydro Olje AB*. De aquí en adelante se hará referencia a *Norsk Hydro Olje AB* como *Norsk Hydro*, a efectos de simplificar la redacción y lectura, excepto cuando se pueda caer en el riesgo de confusión o malentendido. El coste total de una ruta específica será dividido (de acuerdo con algunos criterios de equidad) entre los clientes cubiertos por ese recorrido. Este problema fue formulado por Engevall et al. (1998) como un problema del agente viajero (*travelling salesman game*) y los métodos de asignación de costes basados en diferentes conceptos de la teoría de juegos cooperativos.

3.2. Preliminares

El problema que se va a tratar fue abordado por Engevall et al. (1998) formulándolo como un problema del agente viajero (*travelling salesman game (TSG)*).

El *travelling salesman game (TSG)* es uno de los problemas más famosos y conocidos de la optimización combinatoria, definiéndose de la siguiente forma:

Considere un grafo completo ponderado con un conjunto de vértices N . Se identifica un ciclo hamiltoniano de peso mínimo en el grafo, donde un ciclo hamiltoniano se define como un ciclo que cubre todos los vértices en N exactamente una vez. Con el fin de formular matemáticamente el *TSP*, se muestra la siguiente notación.

N = Conjunto de vértices.

d_{ij} = Peso del arco (i, j) .

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el arco } (i, j) \text{ es usado,} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por tanto, el *TSG* puede ser formulado como:

$$z = \min \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} d_{ij} x_{ij} \quad 3.1$$

$$s.a. \sum_{i \in N} x_{ij} = 1, \quad j \in N, \quad 3.2$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1, \quad i \in N, \quad 3.3$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad S \subseteq N, |S| \geq 2, \quad 3.4$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j \in N. \quad 3.5$$

Las restricciones (3.2) y (3.3) requieren que exactamente un arco entre y salga de cada vértice. Las desigualdades (3.4) son las desigualdades que rompen las subrutas, es decir, excluyen soluciones que contienen más de un ciclo, y (3.5) hace que la solución sea un número entero.

Una vez formulado el problema del viajero, se considera el juego de costes (N, v) .

La función característica v de un juego de costes se refiere al coste que surge cuando una coalición decide cooperar.

Un resultado (o una preimputación) x es un vector en \mathbb{R}^n tal que al jugador i se le asigna el coste x_i , y $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$. Una imputación es un resultado que satisface el requisito $x_i \leq v(\{i\})$, para todo i . Como anteriormente, para simplificar se denota por $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$, $v(i) = v(\{i\})$, respectivamente.

Como ya se ha mencionado en el Capítulo 1, un concepto de solución muy interesante para un juego cooperativo es el *core*, que fue presentado en Gillies (1959). Se recuerda que el *core* de un juego se define como aquellas imputaciones que satisfacen:

$$x(S) \leq v(S), \quad S \subseteq N, \quad 3.6$$

$$x(N) = v(N). \quad 3.7$$

La restricción (3.6) expresa que a ninguna coalición se le debe asignar un coste mayor que si la coalición actuara sola. En este sentido, una solución en el *core* es estable. La restricción (3.7) a su vez, nos muestra que el coste total $v(N)$ se distribuye entre los jugadores. En general, el *core* no consistirá en una solución única. También es posible que las restricciones (3.6) y (3.7) definan un conjunto vacío, es decir, que el *core* sea vacío. Suele ser de interés investigar si se puede garantizar que un juego tenga un *core* que sea no vacío. Una condición importante que garantiza que el *core* sea no vacío en un juego de costes es que el juego sea cóncavo, es decir, $v(S \cup T) + v(S \cap T) \leq v(S) + v(T)$, para todo $S, T \subseteq N$. Sin embargo, el *core* puede no ser vacío incluso si el juego no es cóncavo. Además, en Shapley (1967), se prueba que todos los juegos equilibrados tienen un *core* no vacío.

Referente al problema del viajero (*TSG*) se puede decir que está formulado para calcular cómo el peso total del ciclo hamiltoniano mínimo z debe dividirse, de acuerdo con algunos criterios de equidad, entre los vértices en N , es decir, $v(N) = z$. En este juego estudiado en Engevall et al. (1998), los jugadores corresponden a los vértices del grafo considerado. Además, la función característica de coste $v(S)$ se define como el peso total del ciclo hamiltoniano mínimo, cubriendo los vértices en S .

Un *TSG* con una ciudad de origen es un juego donde para cada $S \subseteq N$ se requiere que la ciudad de origen (que no es un jugador) esté incluida en el peso mínimo del ciclo Hamiltoniano. Por otro lado, Dror (1990) muestra que un *TSG* sin una ciudad de origen puede no ser subaditivo, como se puede ver en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3-1. En el Grafo de la Figura 3.2.1, se supone que las distancias de las aristas que no se muestran son muy grandes, y sean $S = \{1, 4\}$ y $T = \{2, 3\}$. Entonces $v(S) = v(T) = 2$ y $v(S \cup T) = 22$. Claramente $v(S) + v(T) = 4 \not\geq v(S \cup T) = 22$. Por tanto, el *TSP* sin una ciudad de origen en general no es subaditivo.

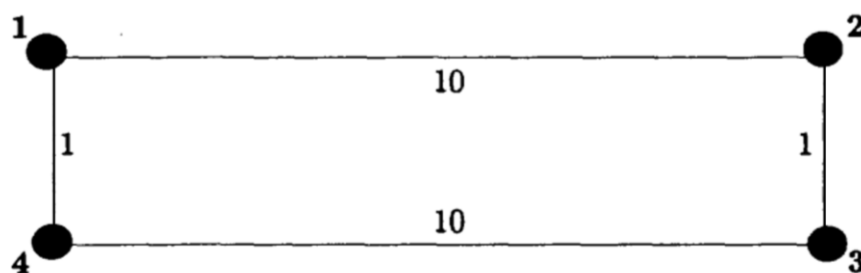


Figura 3.2.1. Un TSP sin ciudad de origen que no es subaditivo (Dror, 1990)

Dror (1990) también estudia el problema de asignación de costes para el problema del viajero (TSP). Se ha destacado la importancia de una ciudad de origen en el TSP para diseñar esquemas de asignación de costes. Esto se demuestra con un ejemplo en Engevall (1996):

Ejemplo 3-2. Para cada jugador i se tiene $v(\{i\}) = 0$. Las restricciones de racionalidad individual requieren entonces que $x_i \leq v(\{i\}) = 0$. Además, se supone que $v(N) > 0$. Entonces se requiere que $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$, lo que claramente es una contradicción. Así no hay resultado de que x esté en el *core*.

Tamir (1989) da varios ejemplos de TSG donde el *core* es vacío y da condiciones suficientes para que el *core* no sea vacío en casos especiales de TSG. También se muestra que si el grafo G de un TSG con una matriz de costes simétrica tiene como máximo 5 nodos ($|N| \leq 4$), el TSG tiene un *core* no vacío. Para dicha demostración, Tamir recurre a un resultado de Fonlupt y Naddef (1985), según el cual un TSP dado por un grafo G producirá el mismo valor para la coalición total en un determinado juego.

Kuipers (1993) extendió este resultado a ser válido para un grafo con un máximo de 6 nodos ($|N| \leq 5$). Kuipers (1993) muestra que el *core* de un TSG puede ser vacío cuando $|N| \geq 6$, además, demostró que un TSG tiene un *core* no vacío cuando $|N| \leq 5$.

Ejemplo 3-3. Tómesese el ejemplo utilizado por Tamir (1989) para demostrar que los TSG con 6 jugadores no siempre tienen *core* no vacío. El grafo del ejemplo está plasmado en la Figura 3.2.3. En este ejemplo, el coste asociado a las aristas es 1, y el coste del camino

mínimo entre los extremos para el resto.

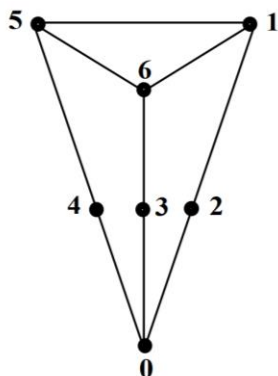


Figura 3.2.3. Contraejemplo de *core* no vacío (Tamir, 1989)

Así, el camino mínimo que visita todos los clientes es $(0, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 0)$ con un coste $v(N) = 8$. Además, $v(\{1, 2, 4, 5\}) = v(\{3, 4, 5, 6\}) = v(\{1, 2, 3, 6\}) = 5$. Se supone que el reparto $x \in \mathbb{R}^6$ pertenece al *core* del juego, entonces:

$$16 = 2 v(N) = x(\{1, 2, 4, 5\}) + x(\{3, 4, 5, 6\}) + x(\{1, 2, 3, 6\}) \leq 5 + 5 + 5 = 15,$$

es una contradicción y, por tanto, el *core* del juego es vacío.

Potters (1989), introduce una clase de matrices de costes simétricas, generando una clase de *TSG* equilibrados. Potters et al. (1992) introducen la ruta fija *TSG*. En este *TSG*, el orden en que los jugadores son atendidos sigue siendo el mismo para todas las coaliciones. Muestran que, si la matriz de coste satisface la desigualdad triangular, y la ruta fija es una ruta *TSP* de coste mínimo para la gran coalición, entonces el *core* es no vacío para la ruta fija *TSG*.

En el *TSG euclidiano*, el peso de un arco es igual a la distancia euclidiana entre los vértices. De ello se deduce que el gráfico es completo. Engevall et al. (1996) nos muestra el siguiente teorema:

Teorema 3.1. El *core* de un *TSG* Euclídeo con una ciudad de origen puede ser vacío.

Demostración

Suponga que un gran número de vértices se distribuyen en un círculo, y a lo largo tres radios, donde la ciudad de origen se encuentra en el centro del círculo. Se supone que se identifican seis coaliciones S_1, \dots, S_6 , donde S_1, S_2 y S_3 corresponden a los vértices a lo largo de cada uno de los radios, y S_4, S_5 y S_6 corresponden a partes (de forma natural) del círculo, ver Figura 3.2.4(a).



Figura 3.2.4. Ejemplo de un TSG Euclídeo con el core vacío (Engevall et al., 1996)

Un ciclo hamiltoniano de peso mínimo en la Figura 3.2.4 (a) cubre las coaliciones en el orden $S_1, S_5, S_2, S_6, S_4, S_3$, ver Figura 3.2.4 (b). Si el radio del círculo es r , el peso del ciclo es $(2\pi + 4 + 3)r - \varepsilon_0$, donde ε_0 es pequeño si los vértices están ubicados cercanos entre sí. El valor de la función característica para la gran coalición $v(N)$ es por tanto, igual a $(2\pi + 4 + 3)r - \varepsilon_0$.

Para que una solución y esté en el core, deben cumplirse las desigualdades (2.8)–(2.10):

$$y(S_1) + y(S_3) + y(S_5) + y(S_6) \leq v(\{S_1, S_3, S_5, S_6\}) = \left(\frac{4\pi}{3} + 2\right)r - \varepsilon_1, \quad 2.8$$

$$y(S_1) + y(S_2) + y(S_4) + y(S_6) \leq v(\{S_1, S_2, S_4, S_6\}) = \left(\frac{4\pi}{3} + 2\right)r - \varepsilon_2, \quad 2.9$$

$$y(S_2) + y(S_3) + y(S_4) + y(S_5) \leq v(\{S_2, S_3, S_4, S_5\}) = \left(\frac{4\pi}{3} + 2\right)r - \varepsilon_3. \quad 2.10$$

Estas restricciones se pueden ver gráficamente en la Figura 3.2.5.

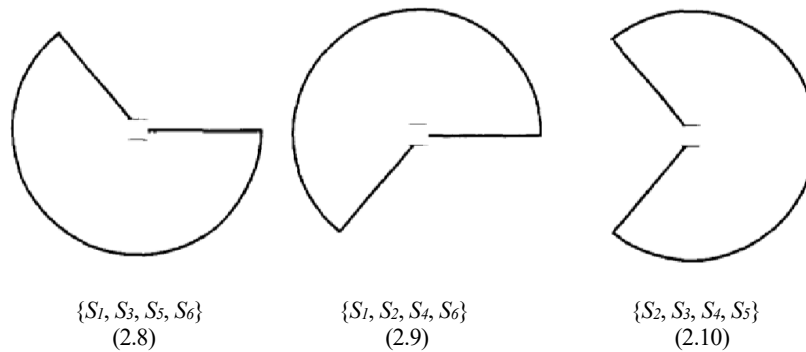


Figura 3.2.5. Soluciones óptimas a los TSP para las coaliciones correspondientes a restricciones (Engevall et al., 1996)

donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ y ε_3 son pequeños si los vértices están cerca uno del otro. Las desigualdades (2.8) – (2.10) implican que $2y(S_1) + 2y(S_2) + 2y(S_3) + 2y(S_4) + 2y(S_5) + 2y(S_6) \leq (4\pi + 6)r - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$, lo que equivale a:

$$y(N) \leq (2\pi + 3)r = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2}. \quad (1)$$

Sin embargo, para que una solución esté en el *core* también debe cumplirse que $y(N) = v(N) = (2\pi + 4 + \sqrt{3})r - \varepsilon_0$. Pero Engevall et al. (1996), muestran que esta ecuación no se satisface (para ε_i , $i = 0, 1, 2, 3$ suficientemente pequeños). Por tanto, el TSG en la Figura 3.2.4 (a) tiene un *core* vacío, y la demostración es completa.

□

3.3. Descripción del Problema

El Departamento de Logística de *Norsk Hydro Olje AB* es responsable del transporte de diferentes tipos y calidades de gasolina a los clientes de Norsk Hydro. Las operaciones diarias del Departamento de Logística se llevan a cabo en diez depósitos en el Sur de Suecia. En cada depósito, la planificación real de los recorridos, es decir, la asignación de la demanda de un cliente a un recorrido y a un camión específico se realiza mediante un transportista. El transporte de los productos lo realizan mayoritariamente empresas de transporte independientes de Norsk Hydro. El principal objetivo de la planificación es garantizar las entregas a todos los clientes a un coste mínimo.

En la práctica, puede haber muchas consideraciones a tener en cuenta para hacer que el coste sea mayor que un mínimo teórico. El objetivo general es minimizar el coste total de transporte. También se asume que el objetivo de los clientes (es decir, gasolineras) es minimizar el coste de transporte que se les asigna. La frecuencia de las entregas de gasolina a los clientes oscila normalmente entre aproximadamente una semana a unas tres veces por semana. Siempre es responsabilidad de las gasolineras realizar los pedidos de forma que no se queden sin existencias. No se tiene en cuenta que en realidad se entregan a las gasolineras dos calidades diferentes de gasolina (regular y premium). Simplemente se trata la gasolina como un solo producto. Además, la posibilidad de entrega fraccionada no se considera, es decir, a satisfacer la demanda total de un cliente mediante dos entregas.

Se supone que la matriz de distancia es simétrica. Se construye a partir de la distancia de conducción más corta posible entre cada par de clientes (y el depósito), y, por tanto, representa un gráfico completo que satisface la desigualdad triangular. Los costes de Norsk Hydro se basan en una tarifa, negociada anualmente con las empresas de transporte. La tarifa utilizada por Norsk Hydro incluye 14 tipos de camiones diferentes.

La tarifa contiene una serie de componentes diferentes para cada tipo de camión, que son tomados en cuenta cuando Norsk Hydro calcula la cantidad a pagar a las empresas de transporte. Los componentes de la tarifa utilizados para calcular el coste total de un recorrido, utilizando camión tipo k , se pueden dividir en tres categorías:

- Un coste de transporte común denotado de A_S^k que depende de la distancia total de conducción y el tipo de camión k , siendo S el conjunto de clientes atendidos en el recorrido.
- Un coste fijo que se denota por a_0^k donde o es el depósito y k el tipo de camión.
- Un coste específico del cliente a_i^k donde i se refiere a cada cliente, dependiendo de la demanda de éste y del tipo de camión k .

Estos costes se pueden transformar en una matriz de costes para un camión tipo k de la siguiente forma: Se considera el depósito como cliente 0 y se interpreta el coste fijo para cada recorrido, $a_0^k (\geq 0)$ como el coste específico-cliente del cliente 0 . Se introducen las notaciones $S^0 = S \cup 0$ y $N^0 = N \cup 0$. Sea $\sigma_{ij}^k (\geq 0)$ el coste de transporte entre clientes i y j , usando el camión tipo k (es decir, el coste total de transporte es $A_{N^0}^k = \sum_{i \in N^0} \sum_{j \in N^0} \sigma_{ij}^k x_{ij}$, donde x_{ij} se define como en la Sección 2. La matriz de costes para el camión tipo k , se denota por $C^k = (c_{ij}^k)$, pudiendo escribirse mediante la expresión $c_{ij}^k = \sigma_{ij}^k + \frac{a_i^k}{2} + \frac{a_j^k}{2}$, para todo $i, j \in N^0, i \neq j$. El coste c_{ij}^k se define como 0 , para todo $i \in N^0$.

Usando las definiciones anteriores, Engevall (1996) formula el siguiente teorema:

Teorema 3.2. La desigualdad triangular se cumple para la matriz de costes $C^k = (c_{ij}^k)$.

Demostración

El coste total se puede expresar como:

$$\sum_{i \in N^0} \sum_{j \in N^0, j \neq i} c_{ij}^k x_{ij} = \sum_{i \in N^0} \sum_{j \in N^0, j \neq i} \sigma_{ij}^k x_{ij} + \sum_{i \in N^0} \sum_{j \in N^0, j \neq i} \frac{a_i^k + a_j^k}{2} x_{ij} = A_N^k + \sum_{i \in N} a_i^k + a_0^k.$$

Dado un camión tipo k , el coste del transporte σ_{ij}^k es proporcional a la distancia entre i y j , y, por tanto, la matriz (σ_{ij}^k) satisface la desigualdad triangular ($\sigma_{im}^k \leq \sigma_{ij}^k \leq \sigma_{jm}^k$, para todo i, j y $m \in N^0$).

Entonces se tiene que:

$$c_{im}^k = \sigma_{im}^k + \frac{a_i^k}{2} + \frac{a_m^k}{2} \leq \sigma_{ij}^k + \sigma_{jm}^k + \frac{a_i^k}{2} + \frac{a_m^k}{2} \leq \sigma_{ij}^k + \frac{a_i^k}{2} + \frac{a_m^k}{2} + \sigma_{jm}^k + \frac{a_i^k}{2} + \frac{a_m^k}{2} = c_{ij}^k + c_{jm}^k,$$

para todo i, j y $m \in N^0$. Esto demuestra, por tanto, que la desigualdad triangular se satisface también para la matriz $C^k = (c_{ij}^k)$. □

La existencia de la tarifa es importante para el modelado del juego, ya que es necesaria para calcular el coste de todos los recorridos posibles. En la práctica, siempre hay una diferencia entre el coste mínimo del viaje, basado en la tarifa, y la cantidad que Norsk Hydro paga a la empresa de transporte. Una razón posible por lo que esto se produce, es que el conductor del camión puede elegir no conducir por el recorrido de coste mínimo. De hecho, los clientes asignados a un recorrido son servidos en un orden elegido por el conductor, teniendo en cuenta consideraciones especiales como ventanas de tiempo, etc. Otra razón de la diferencia es que el transportista puede elegir un camión que sea de un tamaño innecesariamente grande en comparación con la cantidad total entregada. La diferencia total entre el coste mínimo del viaje, en base a la tarifa, y la cantidad real pagada por Norsk Hydro se denomina coste restante.

El coste total de un recorrido utilizando el tipo de camión k , $c_{\gamma}^k(N)$ se puede expresar como $c_{\gamma}^k(N) = A_N^k + a_0^k + \sum_{i \in N} a_i^k + \gamma$, donde γ es el *coste restante*. Engevall *et al.* (1996) desarrollan estas razones con más detalle, dando posibles formas de asignar en la práctica estos costes restantes.

3.4. Formulación del Problema

La única asignación de costes de transporte que se lleva a cabo regularmente en Norsk Hydro es la asignación de costes de entregas compartidas entre las gasolineras. En la contabilidad de los recorridos, se presenta un coste por m^3 y producto entregado. Según Engevall (1996) este coste no se utiliza operativamente por Norsk Hydro, ya que los recorridos desde un depósito pueden servir a varios mercados geográficos diferentes y la división de costes por mercados es lo más interesante para la empresa. En este apartado se hace referencia al coste por m^3 como el principio implícito en Norsk Hydro.

El problema de transporte de Norsk Hydro puede categorizarse como un Problema Probabilístico de Enrutado de Vehículos, en inglés, *Probabilistic Vehicle Routing Problem (PVRP)*. Estos problemas han sido desarrollados por diferentes autores como, por ejemplo, Jaillet y Odoni (1988), que proponen discusiones breves sobre heurísticas para resolverlos, o también Dimitris y Bertsimas (1988). Un *PVRP* se puede describir como un problema de enrutamiento de vehículos donde solo un subconjunto de los clientes tiene que ser visitado en una instancia dada del problema. Desde Norsk Hydro no se sabe con certeza qué día se reciben los pedidos de sus clientes, su problema de planificación de distribución es un *PVRP*. Si fuera responsabilidad de Norsk Hydro asegurarse de que los clientes no tuvieran rotura de stock, el problema podría verse como un Problema de Ruta de Inventario, como desarrolla Dror *et al.* (1987), donde se presentaba un procedimiento para reducir la versión a largo plazo de este problema a un problema de un solo período, que puede abordarse utilizando algoritmos de enrutamiento estándar.

Para imputar los costes reales de los viajes realizados, el coste del problema de asignación de Norsk Hydro se puede considerar como un juego correspondiente a un problema de generación de rutas para vehículos de periodos múltiples, en inglés, *Multiperiod Vehicle Routing Problem*, (*MVRP*). El *MVRP* se puede describir como el problema de asignar vehículos para satisfacer múltiples demandas de servicios que evolucionan en tiempo real. El *MVRP* no es probabilístico, ya que la demanda y la ubicación de los clientes son datos conocidos.

El *MVRP* se puede simplificar estudiando una serie de *VRP* de un solo período, por ejemplo, una serie de *VRP*, cada uno de los cuales cubre los clientes atendidos durante un día. El (período único) *VRP* a su vez se puede simplificar mediante el estudio de una serie de *TSP*, por ejemplo, los recorridos que se llevaron a cabo. En Engevall (1996) se tratan ambos juegos, tanto el *VRP* como el *TSP*. Gothe-Lundgren et al. (1996) prueban que el número de desigualdades que definen el *core* en el *VRP* pueden reducirse significativamente considerando solo coaliciones de destinos que puedan ser atendidas por un vehículo.

Gothe-Lundgren et al. (1996) muestran un ejemplo de un juego *VRP* con un *core* vacío:

Ejemplo 3-4. *Gothe-Lundgren et al. (1996): La ubicación de tres clientes y un depósito se muestran en la Figura 2.4.1. Los costes de los arcos también se dan en dicha figura. Cada cliente tiene una demanda de una unidad, y la capacidad de cada vehículo son dos unidades (se supone una oferta de al menos dos camiones). Los valores de la función característica del juego (N,v) donde $N = \{1,2,3\}$, son:*

$$v(S)=2, \quad \text{si } |S|=1,$$

$$v(S)=3.7, \quad \text{si } |S| = 2,$$

$$v(S)=2, \quad \text{en otro caso.}$$

El valor de la gran coalición corresponde, por ejemplo, a las rutas Depósito-1-2-Depósito y Depósito-3-Depósito. Debido a los roles simétricos de los tres clientes, el *nucleolus* es $\eta = (1.9, 1.9, 1.9)$. Para cualquier coalición $|S| = 2$ se tiene $\eta(S) = 3.8 \not\leq v(S)$, es decir, el *nucleolus* no cumple las desigualdades fundamentales correspondientes al principio de racionalidad individual. Dado que el *nucleolus* pertenece a cualquier *core* no vacío, se puede concluir que el *core* es vacío para este juego.

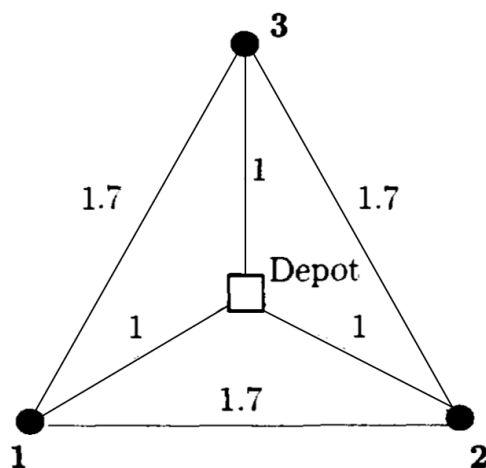


Figura 3.4.1. Ejemplo de un juego VRP con un *core* vacío. (Gothe-Lundgren et. al., 1996)

A continuación, se presenta la formulación del *TSG* (con el depósito como ciudad de origen) con el fin de calcular una asignación de costes para Norsk Hydro. Se tiene el juego cooperativo (N, v) . Aquí, N corresponde al conjunto de clientes y existen dos formas diferentes de definir la función característica $v(S)$ para una coalición S :

- Se expresa por $v(S)$ al coste mínimo del viaje que se obtiene al atender a los clientes de S por parte del camión que realmente se utilizó en el recorrido.
- Se expresa como $v(S)$ al coste mínimo asumiendo que se usa el camión menos costoso cuando se sirve a los clientes de S .

Nos referimos a estos juegos como $(N, v^{(a)})$ y $(N, v^{(b)})$ cuando la función característica se define como en (a) y (b), respectivamente. Dado que Norsk Hydro en general prefiere usar camiones grandes para entrega de gasolina, el juego $(N, v^{(a)})$ sería el más interesante desde la perspectiva de Norsk Hydro. Sin embargo, el juego $(N, v^{(b)})$ es más interesante cuando se mira la asignación de costes desde la perspectiva de los clientes, ya que estos no tienen interés en aceptar un camión más grande de lo necesario. Otro motivo para estudiar el juego $(N, v^{(b)})$ es que la demanda afecta al camión elegido y, por tanto, tiene una influencia en la solución de asignación de costes.

El juego $(N, v^{(a)})$ es de hecho un caso especial de $(N, v^{(b)})$, donde sólo hay uno tipo de camión en la flota. $(N, v^{(a)})$ es el *TSG* (estándar), mientras que el juego $(N, v^{(b)})$ se denota por la *TSG* de coste variable.

A continuación, se formula matemáticamente la función característica. Sin embargo, antes se debe destacar el siguiente aspecto importante del modelado. Dependiendo de la tarifa y la ubicación de los clientes, en general, es posible que sea menos costoso atender una coalición utilizando dos camiones pequeños en lugar de uno grande, incluso si la

demanda de todos los clientes cupiera en el camión grande. Esto ocurre cuando el aumento en el coste del transporte al usar dos camiones en lugar de uno, es menor que la disminución en los costes fijos. Para calcular el valor de la función característica de forma correcta, teniendo en cuenta las soluciones de camiones múltiples mencionadas anteriormente, una generalización de $(N, v^{(b)})$ debería formularse en el que el valor de $v(S)$ se define como la función objetivo óptima de un *VRP* con una flota heterogénea.

Esto se puede ver ejemplificado en Engevall (1996):

Ejemplo 3-5. En la Figura 3.4.2 a continuación, suponga lo siguiente: La demanda del cliente A es 2 y la demanda del cliente B es 2. Hay dos tipos de vehículos disponibles. El tipo (i) tiene una capacidad de 5 y el coste es de 5 por unidad de distancia. El tipo (ii) tiene una capacidad de 2 y el coste es de 3 por unidad de distancia. Por cada vehículo utilizado, también hay un coste fijo de 5 (independiente del vehículo). En este ejemplo, atender a los dos clientes que usan el tipo de vehículo (i) costaría 110, mientras que atenderlos usando dos vehículos de tipo (ii) costaría 82. De esta forma, se demuestra que sería más barato utilizar dos vehículos. Sin embargo, en el caso de Norsk Hydro, la tarifa es tal que no es probable que esto suceda.

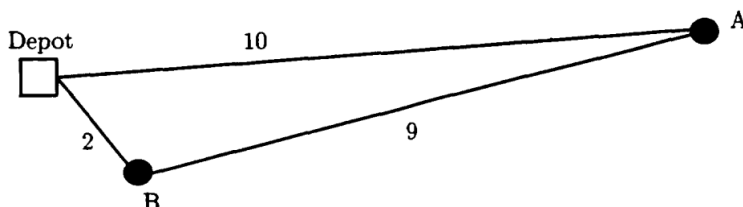


Figura 3.4.2. Ejemplo de transporte donde dos vehículos son menos costosos que uno. (Engevall , 1996)

Para definir matemáticamente la función característica se necesita la siguiente notación:

K = conjunto de camiones disponibles.

V_k = capacidad (m^3) de un camión tipo k .

D_i = demanda (m^3) de un cliente i .

c_{ij}^k = el coste la arista entre los clientes i y j , usando el camión k .

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si la arista } (i, j) \text{ es usada,} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En el juego $(N, v^{(a)})$, el tipo de camión K' se da por adelantado. En el juego $(N, v^{(b)})$, el tipo de camión para el caso de Norsk Hydro viene dado por el tipo de camión más pequeño posible, es decir. $K'(S) = \arg \min_{k \in K} \{V_k : V_k \geq \sum_{i \in S} D_i\}$, ya que siempre es menos costoso utilizar un camión pequeño que usar uno más grande para una coalición específica. Entonces, la función característica $v(S)$ para los TSGs $(N, v^{(a)})$ y $(N, v^{(b)})$ se define como el valor de la función objetivo de un TSP de la siguiente forma:

$$v(S) = \min \sum_{i \in S^0} \sum_{j \in S^0, j \neq i} c_{ij}^{K'} x_{ij}$$

sujeto a :

$$\sum_{i \in S^0} x_{ij} = 1, \quad j \in S^0,$$

$$\sum_{i \in S^0} x_{ij} = 1, \quad i \in S^0,$$

$$\sum_{i \in R} \sum_{j \in R, j \neq i} x_{ij} \leq |R| - 1, \quad R \subset S^0, |R| \geq 2,$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i, j \in S.$$

Dado que la matriz de costos C^k satisface la desigualdad triangular, se sabe que $(N, v^{(a)})$ es subaditivo, es decir, $v^{(a)}(S) + v^{(a)}(T) \geq v^{(a)}(S \cup T)$, para todo $S, T \subseteq N$. También el juego $(N, v^{(b)})$ es subaditivo.

3.5. Conceptos y Métodos de Resolución

A través de todas las restricciones que definen el *core*, el *nucleolus* se puede encontrar resolviendo la secuencia de programas lineales como se ha introducido en el capítulo anterior. En Dragan (1981), por ejemplo, se tiene como objetivo dar un nuevo algoritmo para encontrar el *nucleolus* y discutir la relación de éste con los dados por Kopelowitz (1967).

Uno de los problemas a la hora de evaluar las funciones características es que al formular un TSG, el número de evaluaciones de las funciones características se convierte en un valor muy grande cuando el número de clientes $|N|$ es elevado. Hay $2^{|N|} - 1$ coaliciones (incluyendo la gran coalición, pero excluyendo el conjunto vacío).

En este escenario, se puede aplicar un enfoque de generación de restricciones. Hallefjord et al. (1995) y otros como M. Göthe-Lundgren (1996) han presentado una aproximación de este tipo para calcular el *nucleolus*, incluso si el número de jugadores es grande. Hallefjord et al. (1995) estudian una clase de juegos cooperativos en los que los valores de la función característica se dan implícitamente. Sin embargo, en el TSG examinado en este capítulo solo hay 31 coaliciones, cada uno requiere un TSP bastante pequeño para ser resuelto. Por tanto, no es necesario aplicar un procedimiento de generación de

restricciones para calcular el *nucleolus*.

Además, para la computación de otras soluciones de carácter puntual, se destaca el valor de Tijs (Tijs, 1981). Tijs y Driessen (1986) discuten la brecha en los costes de los diferentes métodos de asignación, que prácticamente es igual a los principios de cálculo del valor de Tijs para juegos de costes.

A continuación, se analiza un ejemplo estudiado en Tijs (1981):

Ejemplo 3-6. *El juego del "guante" (N, v) para el cual el conjunto de jugadores N es dividido en dos subconjuntos disjuntos no vacíos L y R , donde los jugadores en L poseen un guante de mano izquierda y los de R un guante de mano derecha. El valor de una coalición S viene dado por $v(S) = \min \{|S \cap L|, |S \cap R|\}$.*

Se supone primero que $1 \leq |L| < |R|$. Entonces $M(N, v) = m(N, v) = 1$ para cada $i \in L$ y $M(N, v) = m(N, v) = 0$ para cada $i \in R$. Entonces $C(N, v) = M(N, v) = \tau(N, v)$. Nótese que $\tau_i(N, v) = 0$, para todo $i \in L$ y que $\tau(N, v) \in C(N, v)$. Para cada $i \in N$, $\phi_i(N, v) > 0$ y $\phi(N, v) \notin C(N, v)$. Si $|L| = |R|$, entonces $m(N, v) = (0, 0, \dots, 0)$, $M(N, v) = (1, 1, \dots, 1)$ y $\tau(N, v) = \phi(N, v) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$.

Otro ejemplo interesante estudiado en Tijs (1981) es el siguiente:

Ejemplo 3-7. *Sea (N, v) un juego de 99 personas con $v(N) = 1$, $v(S) = \frac{1}{2}$ si $\{1, 2\} \subseteq S \neq N$, $v(\{2, 3, \dots, n\}) = v(\{1, 3, \dots, n\}) = \frac{1}{4}$ y $v(S) = 0$, en caso contrario.*

Entonces $M(N, v) = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$, $m(N, v) = (0, 0, \dots, 0)$. Por tanto, queda definido como $\tau(N, v) = \frac{1}{200} (3, 3, 2, \dots, 2)$. Los jugadores 1 y 2 son poderosos en este juego, algo que no se refleja en la distribución de pagos $\tau(N, v)$. Los jugadores 1 y 2 obtienen más si el valor de Shapley fuera la distribución de pagos: $\phi(N, v) = (\frac{99}{392}, \frac{99}{392}, \frac{1}{196}, \dots, \frac{1}{196})$. Se debe tener en cuenta que $\tau(N, v) \notin C(N, v)$, porque $\tau_1(N, v) + \tau_2(N, v) < \frac{1}{2} = v\{1, 2\}$, y $\phi(N, v) \in C(N, v)$. Además, $\tau(N, v)$ es diferente al *nucleolus* de este juego, porque este se encuentra en el *core*.

Para definir el valor de Tijs, se necesita definir el coste marginal de un jugador m_i en la gran coalición: $M_i = v(N) - v(N \setminus \{i\})$. Tijs y Driessen (1986) definen una función de brecha $g(S)$ de un juego (N, v) como:

$$g(S) = \begin{cases} v(S) - \sum_{i \in S} M_i, & \text{para } S \neq \emptyset, \\ 0, & \text{para } S = \emptyset. \end{cases}$$

Usando la expresión anterior se obtiene una forma adicional de calcular el valor de Tijs complementaria a la que se muestra en el Capítulo 1 de la memoria.

La asignación según el valor de Tijs es $y_i = M_i + (w_i / \sum_{i \in N} w_i)g(N)$, donde $w_i = \min_{S | i \in S} g(S)$. El valor de Tijs se basa en las suposiciones de que para los subconjuntos $S \subseteq N$ se cumple que $v(S) \geq \sum_{i \in S} m_i$ y $\sum_{i \in N} w_i \geq g(N)$. Un inconveniente del valor de Tijs es que no se encuentra necesariamente en el *core*, incluso si el *core* no es vacío. Las axiomatizaciones del valor de Tijs son estudiadas por Driessen (1988) y Tijs (1987).

3.6. Resultados Computacionales

En Engevall et al. (1998) se examina un recorrido donde la gasolina se entrega desde el depósito de Gotemburgo (Göteborg), el segundo recorrido el 20 de septiembre de 1995 (ver Figura 3.6.1.). El recorrido involucra a cinco clientes en un bucle, con un volumen total entregado de 45.1 m³ (todas las entregas se dan en m³ y se redondean a un decimal). La longitud real del recorrido fue de 250 km, mientras que la longitud óptima fue de 239.7 km.

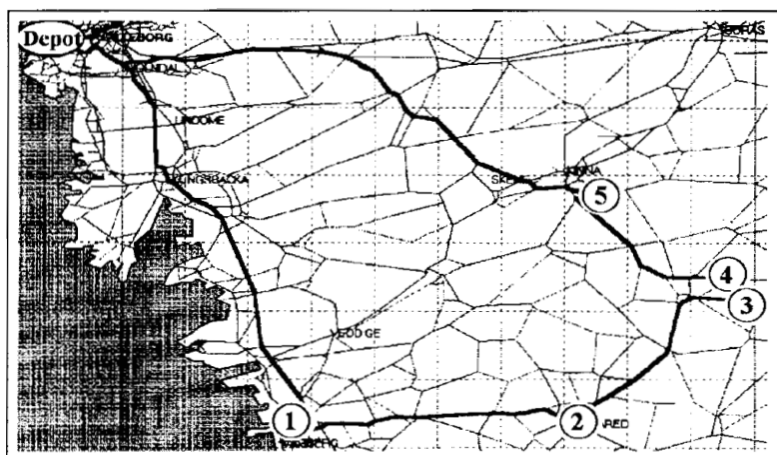


Figura 3.6.1. Vista de del TSP examinado (Engevall et al., 1998)

El motivo de elegir este recorrido es que se quiere estudiar *TSGs* que son demasiado grandes. Sin embargo, el problema no debe ser lo suficientemente pequeño como para permitir un estudio de profundidad desde perspectivas diferentes. En la mayoría de los recorridos de gasolina, se atienden entre uno y cinco clientes. Potters et al. (1992) demuestran que el *core* de un *TSG* de ruta fija es no vacío si la solución al *TSP* para la gran coalición es un ciclo hamiltoniano de peso mínimo y la matriz de costes satisface la desigualdad triangular. Se considera que el recorrido que da un orden óptimo de los clientes en cada coalición $S \subseteq N$ coincide con el orden de estos clientes en el orden óptimo de la gran coalición (si los redondeos en los cálculos se mantienen lo suficientemente pequeños). Esta propiedad no es general para los *TSP*, como demuestra Engevall (1996) en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3-8. En la red de la Figura 3.6.2, se supone que la longitud de los arcos que no se muestran son grandes y que un vehículo es suficiente para cubrir los cuatro clientes.

El orden óptimo para servir a los cuatro clientes es Depósito-A-B-C-D-Depósito. El orden óptimo en el que atender al subconjunto de clientes A, B y C es Depósito-A-C-B-Depósito. Así, el orden en que los clientes A, B y C son atendidos, es diferente en la coalición pequeña que en la más grande.

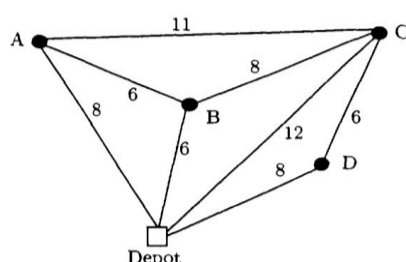


Figura 3.6.2. Ejemplo de un *TSP* donde cambia el orden en el que se atiende a los clientes entre la gran coalición y una más pequeña (Engevall, 1996)

Por tanto, $(N, v^{(a)})$ y $(N, v^{(b)})$ dan los mismos resultados que tendrían los *TSG* de ruta fija. Como se sabe que un *TSG* de ruta fija tiene un *core* no vacío, se puede concluir que el *core* del juego $(N, v^{(a)})$ es no vacío.

Las distancias (que son las distancias de conducción más cortas posibles) entre los clientes cubiertos por el recorrido considerado se presentan en la Tabla 3.6.1.

Tabla 3.6.1.

Datos de los clientes examinados (Engevall et al., 1998)

Cliente	Localización	Depósito	Distancia (km) hasta					Volumen demandado (m ³)	Coste específico del cliente (SEK)
			1	2	3	4	5		
Depósito	Gothenburg	-	76.5	101.2	95.4	93.0	69.4	-	-
1	Varberg	76.5	-	30.2	59.4	60	54.6	27.6	399.3
2	Ullared	101.2	30.2	-	32.8	33.2	47.2	3.0	79.6
3	Överlida	95.4	59.4	32.8	-	3.4	29.9	8.5	162.1
4	Mjölback	93.0	60	33.2	3.4	-	27.5	3.0	79.6
5	Öxabäck	69.4	54.6	47.2	29.9	27.5	-	3.0	79.6

Se dice que los tipos de camiones normalmente disponibles en el depósito de Gothenburg tienen las capacidades brutas de 15 m³, 35 m³, 44 m³ y 48 m³. Se define la flota con camiones que tienen estas capacidades, a excepción del camión utilizado en el recorrido, que transporta 45.1 m³ en lugar de 44 m³.

Los datos específicos de los clientes se pueden encontrar en la Tabla 3.6.1, y en la Tabla 3.6.2; donde se da el coste del recorrido dividido en las categorías mencionadas en el Apartado 3. Los datos de los costes se dan en SEK que es la abreviación de Swedish krona (moneda sueca).

Tabla 3.6.2.

Tipos de costes de la ruta examinada (Engevall et al., 1998)

Tipo de coste	Coste (SEK)	% del coste total
Coste común (A_{N^0})	2355.1	66.8
Coste fijo (a_0)	270.2	7.7
Coste específico del cliente ($\sum_{i \in N} a_i$)	800.3	22.7
Restante (γ)	101.2	2.9
Coste total (c_γ)	3526.7	100.0

En la Tabla 3.6.3 se presentan los siguientes valores para cada cliente definido como un jugador del juego ($N, v^{(a)}$): El coste marginal con respecto a la gran coalición (m_i), donde $m_i = v(N) - v(N \setminus \{i\})$, el coste independiente ($v(i)$), el coste basado en el *nucleolus*, el coste basado en el *nucleolus* menos el coste específico del cliente a_i (*Nucleolus* - a_i) y, finalmente, el coste implícito por Norsk Hydro.

La Tabla 3.6.3 da una indicación del tamaño del *core*. La diferencia entre el coste marginal (que puede interpretarse como un límite inferior para una asignación de costes en el *core*) y el coste independiente (que se puede interpretar como un límite superior) son grandes para todos los clientes. Una interpretación del resultado es que la cooperación es muy rentable.

El *nucleolus* del juego se encuentra en una iteración, es decir, solo tiene que resolverse el problema P_1 . El valor de ϵ_1^* (es decir, la “satisfacción” de las coaliciones de menor

tamaño) es 491.8. Las restricciones vinculantes en la solución son todas las coaliciones $\mathcal{M}\{i\}$.

Tabla 3.6.3.

Resultados computacionales (SEK) para el juego $(N, v^{(a)})$ (Engevall et al., 1998)

Cliente i	m_i	$v(i)$	<i>Nucleolus</i>	<i>Nucleolus</i> - a_i	Norsk Hydro
1	453.4	2172.8	945.2	545.9	2097.0
2	115.0	2338.4	606.8	527.2	227.9
3	191.6	2307.0	683.4	521.3	645.8
4	89.5	2177.2	581.3	501.7	227.9
5	118.0	1713.6	609.8	530.2	227.9

La información dada en la columna “*Nucleolus*– a_i ” de la Tabla 3.6.3 corresponde al *nucleolus* de un juego (N, \bar{v}) , en el que la función característica está definida por el coste fijo (a_0) y el coste del transporte (A_S). (N, \bar{v}) , y (N, v) se dice que son estratégicamente equivalentes (es decir, ambos tienen el mismo conjunto de jugadores N , y la función característica de un juego $v(S)$ se puede relacionar con la función característica de otro juego $\bar{v}(S)$, como $\bar{v}(S) = kv(S) + \sum_{i \in S} v_i$, para $S \subseteq N$, donde k es un número positivo y $v_i, i \in N$, son números reales arbitrarios. Todos los clientes pueden ser atendidos por un camión, y, por tanto, la demanda no tiene ninguna influencia en el juego (N, \bar{v}) . El *nucleolus* de este juego da una distribución casi equitativa entre los clientes, algo esperado dado su ubicación geográfica. Los clientes 1 y 5 obtienen un precio algo más alto (incluso estando más cerca del depósito que los demás), ya que no tienen muchas oportunidades para formar buenas coaliciones a diferencia de clientes 2, 3 y 4, que son más céntricos. También se calculan algunos otros vectores únicos de asignación de costes. En la Tabla 3.6.4 se muestra el *nucleolus*, el *nucleolus* de demanda, el valor de Shapley, el valor de Tijs y la asignación de costes implícitas por Norsk Hydro.

Tabla 3.6.4. Selección de valores para el juego $(N, v^{(a)})$ (Engevall et al., 1998)

cliente i	<i>Nucleolus</i>	<i>Nucleolus</i> de la demanda	Valor de Shapley	Valor de Tijs	Norsk Hydro
1	945.2	1756.3	913.3	887.4	2097.0
2	606.8	263.2	716.3	676.3	227.9
3	683.4	954.1	720.0	725.6	645.8
4	581.3	228.6	609.0	616.5	227.9
5	609.8	224.3	467.9	520.8	227.9

Se puede comprobar que el *nucleolus*, el valor de Shapley y el valor de Tijs dan casi las mismas asignaciones de costes. Este hecho se explica como la propiedad de anonimato, que se cumple para los tres valores y establece que, si dos jugadores participan en las mismas condiciones, se les asigna el mismo coste. La principal diferencia entre los clientes es el tamaño de la demanda, en el que influye el coste específico del cliente a_i . Si

este coste no estuviera incluido en la definición de la función característica, los clientes participarían en condiciones casi iguales. El *nucleolus* de la demanda da como resultado una asignación de costes más cercana a la de Norsk Hydro. A los clientes con una alta demanda se les asigna un coste más alto que en el caso en el que se utiliza el concepto del *nucleolus*.

Las diferencias entre las demandas de los clientes, en general, harían esperar que tuvieran un efecto mayor en cualquier asignación de costes asociada con el juego $(N, v^{(b)})$ que en cualquier asignación de costes asociada con el juego $(N, v^{(a)})$. En la Tabla 3.6.5, se presentan los siguientes valores para cada cliente definido como jugador del juego $(N, v^{(b)})$: El coste independiente $v(i)$, el coste marginal con respecto a la gran coalición (m_i), el coste basado en el *nucleolus* y el coste implícito de Norsk Hydro. Para el cálculo del *nucleolus* en este problema han sido necesarias varias iteraciones. En la primera de ellas, las variables duales positivas son las asociadas a las coaliciones: $\{3,4,5\}$, $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3,5\}$ y $\{1,2,4,5\}$, quedando en cada una de ellas el exceso como $\epsilon_1=412.3$.

En el juego $(N, v^{(b)})$, no es posible separar los costes específicos del cliente (a_i), ya que varían con el tamaño del camión, es decir, con la demanda de cada coalición.

Tabla 3.6.5. Resultados computacionales (SEK) para el juego $(N, v^{(b)})$ (Engevall et al.,1998)

Cliente i	m_i	$v(i)$	<i>Nucleolus</i>	Norsk Hydro
1	611.4	2059.1	1143.5	2097.0
2	115.0	1902.4	647.1	227.9
3	191.6	1879.4	603.9	645.8
4	89.5	1769.8	501.8	227.9
5	118.0	1388.2	530.3	227.9

Las diferencias entre los valores de $v(i)$ y m_i en la Tabla 3.6.5 son algo menores que los de la Tabla 3.6.3 Por tanto, es interesante resaltar que, aunque el *core* parece grande, el principio de asignación de costes implícitos de Norsk Hydro da una solución que no está en el *core* del juego $(N, v^{(b)})$. Según el principio implícito de Norsk Hydro, el cliente 1 tiene que pagar 2097.0, pero el cliente 1 está solamente dispuesto a pagar como máximo 2059.1. De hecho, la solución de Norsk Hydro ni siquiera es una imputación del juego $(N, v^{(b)})$. Como era de esperar, el *nucleolus* del juego $(N, v^{(b)})$ captura parte de la diferencia de demanda entre los clientes. El cliente 2, está bastante lejos de los otros dos clientes con poca demanda (clientes 4 y 5), y, por tanto, es más difícil que el cliente 2 forme coaliciones estables.

Se calculan además algunos otros vectores únicos de asignación de costes para el juego $(N, v^{(b)})$. En la Tabla 3.6.6, el *nucleolus*, el *nucleolus* de demanda, el valor de Shapley y el valor de Tijs.

En las Tablas 3.6.4 y 3.6.6 se puede observar que, para los valores correspondientes, los clientes con una demanda baja obtienen un coste menor en el juego $(N, v^{(b)})$ que en el

juego $(N, v^{(a)})$, mientras que los clientes con una demanda alta obtienen costes más altos. El *nucleolus*, el valor de Shapley y el valor de Tijs también dan asignaciones de costes casi iguales en este juego. El *nucleolus* de demanda es el método de asignación de costes donde la demanda demuestra tener la mayor influencia. Recordando las críticas al *nucleolus* normalizado (y al *nucleolus* de la demanda) mencionadas en el Capítulo 2 de esta memoria, es recomendable buscar otras formas de tener en consideración la demanda.

Tabla 3.6.6. Resultados computacionales (SEK) para el juego $(N, v^{(b)})$ (Engevall et al., 1998)

Cliente i	<i>Nucleolus</i>	<i>Nucleolus</i> de la demanda	Valor de Shapley	Valor de Tijs
1	1143.5	1788.3	1158.9	1038.3
2	647.1	234.1	625.9	642.1
3	603.9	999.9	681.5	677.9
4	501.8	201.5	539.3	575.8
5	530.3	202.7	421.0	492.5

En el problema de asignación de costes de Norsk Hydro, los clientes podrían considerarse teniendo la posibilidad de formar coaliciones, incluidos clientes distintos de los cubiertos por el mismo recorrido. Por ejemplo, pueden ser considerados los clientes atendidos por el depósito en *Gothenburg* durante un día. En particular, los clientes con baja demanda deberían poder reducir significativamente su coste, teniendo la posibilidad de formar coaliciones con muchos otros clientes, mientras que los clientes con una alta demanda sólo pueden formar coaliciones con pocos clientes. Esto llevaría a un juego que incluye un conjunto mayor de jugadores (clientes).

3.7. Conclusiones

En este capítulo se ha abordado en profundidad un problema propuesto en Engevall et al. (1998) en el que se han podido destacar distintos conceptos como de forma práctica. Estos conceptos (VRP con *core* no vacío, TSP euclídeo, TSP sin ciudad de origen) han sido ilustrados con ejemplos de distintos trabajos que facilitan su comprensión.

De igual forma, en el cálculo de la función característica que se usa para la computación de las distintas soluciones de tipo puntual que se abordan a lo largo del capítulo, se ha desarrollado el problema referente al agente viajero, mostrando así las distintas variantes que hay de éste y las distintas opciones que se podían usar en este capítulo.

Además de esto, se han resuelto dos problemas paralelos, refiriéndose a las dos variantes que se han tomado en el cálculo de la función característica, con la que se han computado los valores del *nucleolus*, del *nucleolus* de la demanda, del valor de Shapley y del valor de Tijs. Estos valores son distintos en cada caso, abriendo la posibilidad a discusiones en torno al uso de qué función característica utilizar.

Una posible continuación del capítulo sería la de estudiar los juegos en torno a las entregas de gas, ya que las entregas de gas tienen las mismas características que los juegos de entregas de gasolina. En este caso, no sólo tendrían que ser estudiados los recorridos de entrega compartida debido a que un cliente atendido en un recorrido de entrega compartida también tiene la posibilidad de formar coaliciones con los clientes en un recorrido donde solo se entrega un producto.

4. APLICACIÓN AL SERVICIO DE RECOGIDA DE BASURAS DE JEREZ DE LA FRONTERA

En este capítulo final, se procede a dar un carácter práctico a todos los conocimientos tratados anteriormente. Es cierto que las referencias a problemas cotidianos en los demás capítulos de la memoria son amplias, siendo muchas de ellas desarrolladas en pequeños ejemplos. Aun así, se considera interesante aplicar los conocimientos en un problema cercano pudiendo de esta forma tener una visión más amplia de todo lo analizado anteriormente.

Tras haber estudiado en el Capítulo 2 de este trabajo la forma en la que se computa el *nucleolus*, así como otras variantes de este concepto, se siguen en este capítulo las mismas directrices para resolver este problema. Así, se implementa en *LINGO* el problema lineal de este caso y se resuelve obteniendo así la solución del *nucleolus*.

De esta forma, en la Sección 1 de este capítulo, se procede a la introducción del problema donde se muestran las distintas características que rodean a la recogida de basuras en la ciudad de Jerez de la Frontera, así como sus circunstancias geográficas que hacen del caso a estudiar un tema de interés. Además, se hace un análisis general de los problemas a los que hacen frente las ciudades con características urbanísticas parecidas a esta ciudad. A continuación, se delimita la aplicación bajo estudio y los objetivos que se desean obtener mediante el estudio de este ejemplo práctico.

En la Sección 2, tras un proceso de investigación y consulta, se da a conocer la flota que se hace cargo de la recogida de basuras en Jerez de la Frontera; además, se muestran las zonas en las que se divide la ciudad a la hora de la recolección, mostrándose las longitudes de las rutas a cubrir en distintas zonas, el área que se abarca, así como la población de cada distrito. Se proporcionan, por tanto, todos los datos numéricos que se obtienen en la investigación realizada del caso sobre los que se harán los estudios de ciertos conceptos de solución tipo puntual en Teoría de Juegos.

En la Sección 3, tras haber mostrado los distintos datos, se llevará a cabo el cálculo del *nucleolus*, así como de otras soluciones de tipo puntual como el valor de Shapley y el valor de Tijs. Se realizará una discusión de los resultados obtenidos, llegando a distintas conclusiones en las que se muestra si verdaderamente es factible o beneficioso para las arcas públicas hacer frente a los cambios que se proponen a la hora de la colaboración de los distintos distritos.

En la Sección 4 se mostrará una comparativa entre los valores que se obtienen en las asignaciones de costes que se han realizado, tanto del *nucleolus* como del valor de Shapley, y el valor de Tijs dando así una conclusión visual al problema que se trata.

4.1. Planteamiento del problema

Jerez de la Frontera es una ciudad ubicada en la provincia de Cádiz. Cuenta con una población en torno a los 212 mil habitantes, siendo la quinta ciudad más grande de la Comunidad Autónoma de Andalucía. A su vez, Jerez cuenta con una de las mayores superficies en cuanto a término municipal se refiere de España: esta se extiende aproximadamente en unos 1200 km².

Esta ciudad se ha extendido “horizontalmente” durante años, siendo la expansión urbana mayor que el crecimiento demográfico que ha sufrido la ciudad. Estos problemas no solo se encuentran en Jerez, sino que ha sido la tónica de los ayuntamientos y entidades privadas en muchas más localidades de nuestra geografía, impulsados por el “boom” inmobiliario que sufrió nuestro país décadas atrás. Políticas de este tipo llevan a las arcas públicas y privadas a tener que afrontar distintos problemas económicos, como pueden ser:

- La construcción o ampliación de las redes que conectan estas zonas de expansión con las ya existentes en la ciudad, implicando un alto coste o simplemente, a veces, no siendo estas ampliaciones de la calidad que se requiere.
- También requiere de la ampliación de las redes de abastecimiento: red, electricidad, gas, agua... afectando de igual forma a las empresas suministradoras de estos bienes, que en muchos casos deben afrontar grandes inversiones para llevar su suministro a estas zonas, o como pasa con las conexiones de carretera, estas a veces no llegan o no son de la calidad correcta, ya que no siempre es rentable asumir estos costes, siendo en instancia final la población quien sufre estas consecuencias.
- La extensión tan amplia afecta también a los servicios que debe suministrar la administración a los ciudadanos como pueden ser la red de transporte público o la recolección de residuos.

Todos estos problemas que se han mostrado son solamente una pequeña pincelada de las consecuencias de la expansión a lo ancho de las ciudades. A todas dificultades que afrontan ayuntamientos y empresas privadas hay que sumarle un gran número de problemas de carácter social, entre los que cabe destacar la facilidad en la segregación de la población. En este tipo de ciudades es muy común encontrar urbanizaciones cerradas separadas de los barrios donde viven personas de menor capacidad adquisitiva.

En este último capítulo el objeto de estudio girará en torno a la recogida de basuras. Como ya se ha tratado anteriormente, este es un problema económico que deben afrontar todas las administraciones locales sea cual sea su situación geográfica. Es importante volver a recalcar que no es de igual relevancia económica tener que abastecer a un término municipal de 1200km² que a uno de menor dimensión con la capacidad económica de un ayuntamiento de una ciudad de doscientos mil habitantes.

Es por esto por lo que se considera interesante poder estudiar desde la Teoría de Juegos el reparto de costes entre los distintos distritos en los que se divide la recogida de basuras en Jerez de la Frontera. Así, se tiene como principal objetivo analizar si es posible una reducción en los costes generales que asume en el consistorio en este servicio mediante la cooperación entre las distintas zonas en las que se agrupan actualmente los trayectos de recogida.

4.2. Descripción y datos numéricos

Para comenzar a abordar este problema es esencial en primer lugar conocer las características en las que se enmarca el caso.

Número de contenedores: Jerez cuenta con un número de contenedores de 2.780 para basura en masa, de los que 1.926 se encuentran en la ciudad, distribuidos por los distintos distritos y el resto en el núcleo rural. Si se cuentan los contenedores de vidrio, papel y envases, el número asciende a 5.772, que, en comparación, por ejemplo, con la ciudad de Sevilla, que cuenta con 13.452 para una población que multiplica por más de tres los habitantes en Jerez, es un indicativo del alto número de contenedores que hacen falta en Jerez para cubrir el mismo servicio. Estos datos evidencian la problemática de la gran magnitud extensiva del término municipal que comentábamos anteriormente.

En este problema no se tienen en cuenta los puntos de recogida de papel, vidrio o envases, haciendo solo referencia a la recogida de la denominada basura en masa, ubicada en los contenedores grises.

Tipo de camiones: Jerez cuenta en la actualidad con distintos tipos de camiones que se hacen cargo de este trabajo:

- Camiones de carga lateral de 25 m³.
- Camiones de recolecta trasera de 22 m³.

Esta maquinaria es la encargada de cubrir todas las zonas de la ciudad. Para este problema específico, se tomarán como iguales los camiones de carga trasera y de carga lateral, que son los principales encargados de realizar la recogida de basura, teniendo además un volumen de carga muy similar, asumiéndose así que el coste por kilómetro recorrido es el mismo en ambos.

Número y características de los distritos: La ciudad de Jerez se divide en seis distritos principales: Distritos Sur, Norte, Este, Oeste, Noreste y Centro. Este problema se va a enfocar en las rutas que cubren estos distritos, asumiéndose como una tarea muy complicada, a la vez que costosa, la de intentar cooperar con las zonas rurales. Estas zonas suelen ser difíciles de atender, por su lejanía y por las características intrínsecas de cada lugar, haciendo, por tanto, que la recogida se realice de una forma más personalizada e imposibilitando que se pudiese cooperar con las zonas de recogida comunes.

Los distintos distritos que se van a cubrir son los siguientes:

- Distrito Sur: Este distrito es uno de los más poblados de la ciudad con 34.959 habitantes, contando con la segunda extensión más amplia, 11.55 km².



Imagen 4.2.1. Distrito Sur de Jerez

- Distrito Norte: El Distrito Norte es el más extenso de los que se van a analizar. Cuenta con una superficie de 12,04 km². Aun no siendo esta zona la más poblada, contando con 28.114 habitantes, es la que más contenedores tiene. Esto se debe a que su población se extiende por el distrito casi de manera uniforme.

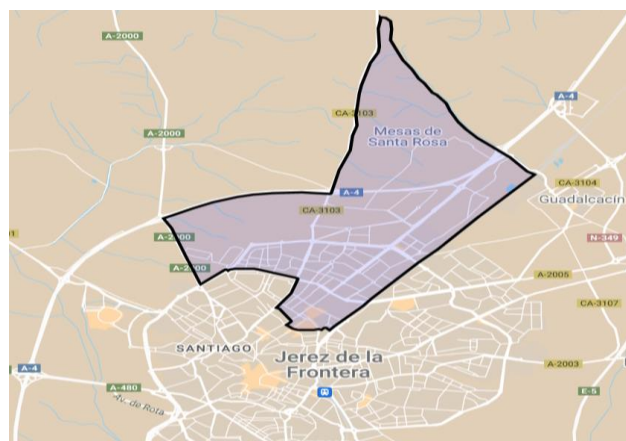


Imagen 4.2.2. Distrito Norte de Jerez

- Distrito Este: Es el distrito más poblado de Jerez. Cuenta con 39.619 habitantes que se agrupan en su mayoría en la zona Norte. Tiene una extensión de 10.7 km². El número de contenedores es inferior a los del distrito anterior debido a que, al agruparse toda la población en la zona Norte, no es necesario cubrir con el mismo número de contenedores el resto de la extensión.



Imagen 4.2.3. Distrito Este de Jerez

- Distrito Oeste: Este distrito tiene una mayor extensión que el anterior, siendo de 7.32 km². Este distrito tiene la característica de que la población se agrupa hacia el centro de la ciudad, dejando prácticamente des poblada la parte oeste. Debido a ello, con un bajo número de contenedores es posible abastecer a esta zona.



Imagen 4.2.4. Distrito Oeste de Jerez

- Distrito Noreste: Es el distrito de menor extensión junto al Distrito Centro. Tiene una alta densidad de población, ya que cuenta con un número de 32.825 habitantes que se extienden en 4.58 km².

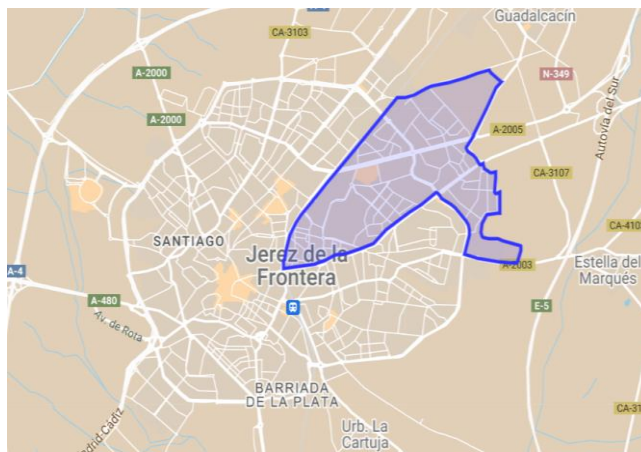


Imagen 4.2.5. Distrito Noreste de Jerez

- Distrito Centro: El distrito centro cuenta con una población de 28.686 habitantes según se recoge en el Plan Municipal de la Vivienda y Suelo, abarcando este una extensión de 2.53 km². Se puede apreciar cómo la densidad de población en este lugar es alta comparada con los demás distritos que se mostrarán a continuación.



Imagen 4.2.6. Distrito Centro de Jerez

Descritos los distintos distritos, con sus características distintivas, se muestra una imagen (Imagen 4.2.7) global de la división de la ciudad:

- Distrito Sur: Azul.
- Distrito Norte: Amarillo.
- Distrito Este: Rojo.
- Distrito Oeste: Naranja.
- Distrito Noreste: Turquesa

- Distrito Centro: Verde.

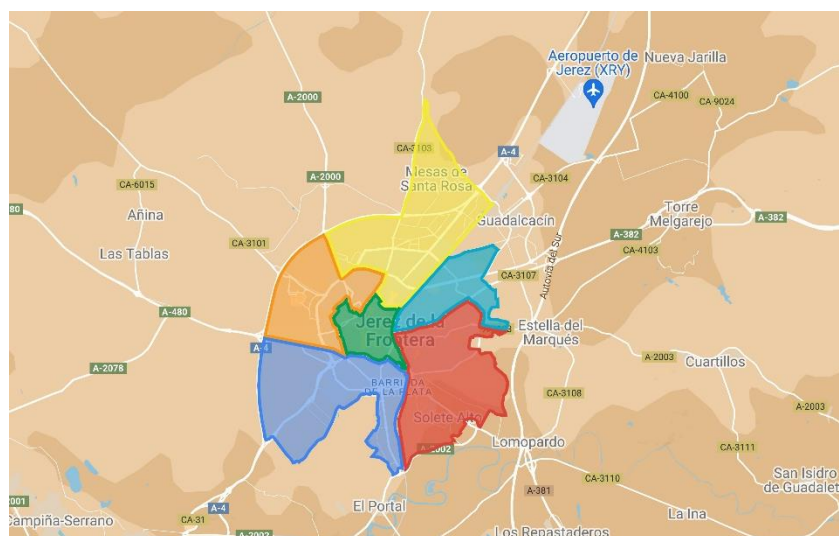


Imagen 4.2.7. Demarcación territorial de los Distritos de Jerez de la Frontera

Longitudes de las rutas: Las longitudes en kilómetros de las distintas rutas, facilitadas camiones en el mes de mayo de 2022 por el ingeniero de organización encargado del ruteo de los desde la empresa encargada de la recogida de basuras (UTE Jerez), se muestran organizadas por distritos en la Tabla 4.2.1 Además, también se añade un resumen de lo comentado anteriormente: población a la que abastece, extensión del área metropolitana en km²:

Tabla 4.2.1. Resumen por distritos

Distrito	km de rutas	Población	Km ²
1. Sur	150.89	34959	11.55
2. Norte	171.39	28114	12.04
3. Este	181.59	38619	10.7
4. Oeste	109.28	30210	7.32
5. Noreste	137.79	32825	4.58
6. Centro	91.36	28686	2.53
		193.413	48.72

Costes: Una vez que se obtienen los kilómetros recorridos en cada distrito de la ciudad, se procede a asignarles a cada uno de ellos un coste. Según la información obtenida,

generalmente las zonas son atendidas por dos camiones cada una, recorriendo los kilómetros que se muestran en la tabla anterior.

A la hora de asignar los costes, como se comentó anteriormente, los camiones de carga trasera y de carga lateral se consideran iguales en cuanto a capacidad y rendimiento, teniendo ambos una capacidad similar de carga. De esta forma a los camiones se les asigna un rendimiento de 3.3 km/litro, siendo el precio del Diesel de 2.1 €, sin incluir el descuento de 0.2€ que aplica el Estado actualmente.

Por tanto, el coste de cada ruta se calcula como el número de kilómetros que esta abastece, el rendimiento de los camiones y el precio del combustible que usa. No obstante, hay que tener en cuenta también al personal que va en los camiones como coste adicional, ya que los dos camiones que se hacen cargo de las rutas del centro de la ciudad cuentan con dos operarios más cada uno debido a que existen puntos de recogida de basuras donde la circulación y el acceso de estos vehículos de gran tamaño no es posible por las peculiares características urbanísticas de las calles de este distrito, donde se ubica el centro histórico. Queda entonces un operario por cada camión en cualquier ruta que no sea la del centro de la ciudad, y con tres operarios los camiones que abastecen la recogida del centro histórico, siendo estos el conductor más dos operarios en la parte trasera. Se establece una jornada laboral de 7 horas diarias, como se recoge en el convenio firmado por la empresa, con un coste de 15€/hora. Teniendo en cuenta todas estas variables, el coste inicial de abastecer del servicio de recogida de basura a cada distrito por separado es el que se muestra en la Tabla 4.2.2.

Tabla 4.2.2. Coste por distritos

Distrito	Coste (€)
1. Sur	306.0
2. Norte	319.1
3. Este	325.6
4. Oeste	279.5
5. Noreste	297.7
6. Centro	688.1

Como se puede observar, el hecho de que en los camiones que atienden al centro histórico vayan tres operarios en lugar de uno incide significativamente en el coste que supone abastecer a cada distrito por separado.

4.3. Resultados computacionales

Una vez mostrados los datos, se define el juego de costes como (N, v) , donde N es número de distritos que tiene la ciudad y v es la función característica del juego.

Al tener seis distritos, se cuenta con seis jugadores, lo que hace que se tenga un conjunto de 63 coaliciones distintas, cada una de ellas con un valor de $v(S)$ distinto.

La función característica de cada una de las coaliciones es la suma de cubrir los kilómetros que abarquen los distritos que en ella se encuentren, más una distancia aproximada que sea la que une a ambos distritos, sumándole a todo ello un coste por los operarios que se hacen cargo de cubrir cada zona y aplicándole un descuento por cooperar.

A la hora de cooperar, se aplica un descuento dependiendo de las cooperaciones que se realicen. Inicialmente, sin cooperación, cada distrito tiene asignado dos camiones para la recogida. En el caso de que la cooperación se dé entre dos distritos contiguos trabajarían los cuatro camiones que lo hacían al inicio, pero uno de ellos a media jornada (4 horas). En el caso de que cooperen dos distritos, pero uno de ellos sea el Distrito Centro, el camión que trabajaría a media jornada sería el que está compuesto por tres operarios. Cuando se da el caso de que cooperen tres distritos, uno de los seis camiones trabajará a media jornada (en el caso de que en esa coalición esté el Distrito Centro, el camión que trabajará a media jornada será el de los tres operarios). Cuando cooperan cuatro, cinco o los seis distritos, las coaliciones siempre se dan entre distritos contiguos, por lo que serán atendidas por los camiones iniciales trabajando uno siempre a media jornada.

Referente a las penalizaciones que se aplican, la medida de unión entre distritos se cogerá desde los extremos de los que no sean contiguos. En el caso de que estos sean contiguos, la distancia que hace de nexo entre ambos se tomará como 0. De esta forma se penalizan las coaliciones de distritos que no sean colindantes, algo que tiene sentido, ya que, que un camión cruce un distrito entero para colaborar con otro sin trabajar en los distritos por los que pasa no es eficiente. Estos sobrecostes o penalizaciones se muestran en la Tabla 4.3.1, en la que en la columna de distritos se muestran las combinaciones de los que no son colindantes y, por tanto, las uniones que sufrirán el sobrecoste.

Tabla 4.3.1. Penalización por cooperación de distritos no colindantes

Uniones	km unión	km/litro	Coste aprox. (€)
1-2	4	1.2	3.00
1-5	3	0.91	2.00
2-3	2	0.61	2.00
3-4	4	1.21	3.00
4-5	4	1.21	3.00

Mostrados los resultados de los costes de cubrir cada distrito, el sobrecoste de cubrir distritos no colindantes y los descuentos en jornadas que se dan a la hora de cooperar, se

muestra en la Tabla 4.3.2 los distintos valores que toman las coaliciones del juego, con los que se realizarán el cálculo del *nucleolus* y otras soluciones de tipo puntual. En la Tabla 4.3.2, la primera y segunda columna muestran un índice $c \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$ que se usa para referirnos a cada coalición y a los jugadores que las conforman, existiendo 63 distintas, S muestra las distintas coaliciones y $v(S)$ el valor de la función característica de cada una.

Así, el coste que se propone a la hora de la cooperación entre los distritos vigentes en la actualidad, que es la función característica para cada distrito, queda descrito en la Tabla 4.3.2.

Tabla 4.3.2. Valores de las distintas coaliciones del juego

c	S	$v(S)$	c	S	$v(S)$
1	{1}	306.0	32	{2,3,4}	868.2
2	{2}	319.1	33	{2,3,5}	883.6
3	{3}	325.6	34	{2,3,6}	1146.1
4	{4}	279.5	35	{2,4,5}	839.0
5	{5}	297.7	36	{2,4,6}	1098.7
6	{6}	688.1	37	{2,5,6}	1116.9
7	{1,2}	627.8	38	{3,4,5}	848.1
8	{1,3}	571.6	39	{3,4,6}	1107.9
9	{1,4}	525.6	40	{3,5,6}	1123.4
10	{1,5}	605.7	41	{4,5,6}	1080.0
11	{1,6}	806.2	42	{1,2,3,4}	1176.9
12	{2,3}	646.0	43	{1,2,3,5}	1192.3
13	{2,4}	538.6	44	{1,2,3,6}	1454.8
14	{2,5}	556.8	45	{1,2,4,5}	1147.6
15	{2,6}	947.2	46	{1,2,4,6}	1407.4
16	{3,4}	607.8	47	{1,2,5,6}	1425.6
17	{3,5}	563.2	48	{1,3,4,5}	1154.1
18	{3,6}	825.7	49	{1,3,4,6}	1413.9
19	{4,5}	579.9	50	{1,3,5,6}	1429.4
20	{4,6}	779.7	51	{1,4,5,6}	1386.1
21	{5,6}	797.8	52	{2,3,4,5}	1165.9
22	{1,2,3}	894.6	53	{2,3,4,6}	1428.3
23	{1,2,4}	847.3	54	{2,3,5,6}	1443.8
24	{1,2,5}	865.4	55	{2,4,5,6}	1399.1
25	{1,2,6}	1127.9	56	{3,4,5,6}	1536.3
26	{1,3,4}	853.8	57	{1,2,3,4,5}	1475.9
27	{1,3,5}	869.3	58	{1,2,3,4,6}	1735.7
28	{1,3,6}	1131.7	59	{1,2,3,5,6}	1751.1
29	{1,4,5}	825.9	60	{1,2,4,5,6}	1707.8
30	{1,4,6}	1085.7	61	{1,3,4,5,6}	1714.3
31	{1,5,6}	1105.8	62	{2,3,4,5,6}	1728.7
			63	{1,2,3,4,5,6}	2037.3

Se usa la secuencia de problemas descrita en el Capítulo 2 de este trabajo para determinar el *nucleolus*.

Se recuerda que la secuencia de problemas lineales es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \max \varepsilon_k \\
 \text{s.a. } & \varepsilon_k + \sum_{j \in S} x_j \leq v(S), \quad \forall S \subseteq N : S \notin \mathcal{F}_k, \\
 & \varepsilon_i + \sum_{j \in S} x_j \leq v(S), \quad \forall S \in F_i, i \in \{1, \dots, k-1\}, \\
 & \sum_{j \in N} x_j \leq v(N), \\
 & \varepsilon_k \in \mathbb{R}, x_j \in \mathbb{R}, \quad \forall j \in N.
 \end{aligned}$$

Una vez programadas las 63 restricciones en *LINGO* se ha encontrado el *nucleolus* del juego, y, por tanto, se obtienen los costes de cooperar que se imputan a los distritos de la ciudad.

Se ha llegado a la solución tras realizar un gran número de iteraciones. Como ya se sabe, muchas veces se da como resultado final del *nucleolus* los distintos valores que se obtienen en el primer problema lineal de la secuencia, obviando así las soluciones duales y la importancia que estas tienen.

Así, en el primer problema lineal, se obtienen como variables distintas de 0: $y_8, y_{11}, y_{13}, y_{17}$ e y_{21} , con un exceso de $\varepsilon_1 = -43.1$. Por tanto, este exceso se fija en ese valor y el conjunto F_1 pasa a ser $\{8, 11, 13, 17, 21\}$. Se procede a estudiar el siguiente problema lineal, en el que el exceso que se obtiene es de $\varepsilon_2 = -43.06$, siendo las variables duales positivas y_{14}, y_{18} e y_9 el conjunto F_2 ahora es $\{9, 14, 18\}$ y $\mathcal{F}_k = \{8, 11, 13, 17, 21, 9, 14, 18\}$. No es hasta el vigesimoprimer problema lineal cuando se fija uno de los valores de los costes de los distritos, siendo este el del Distrito Sur, en el que se obtiene un exceso de $\varepsilon_{21} = 8.383$, con un valor de $x_1 = 297.6167$.

Por tanto, se van resolviendo los distintos problemas lineales y se van obteniendo las soluciones. En la siguiente iteración, se obtiene el valor que se le asigna al Distrito Norte y al Distrito Oeste, siendo sus excesos de $\varepsilon_{22} = 8.45$ y sus valores de $x_2 = 310.65$ y de $x_4 = 271.05$. En las siguientes dos iteraciones se encuentran los valores de los distritos Noreste y Este, tomando unos valores de $x_5 = 289.21$ y de $x_3 = 317,0833$, con unos excesos respectivamente de $\varepsilon_{23} = 8.48$ y $\varepsilon_{24} = 8.52$. No es hasta la iteración número treinta cuando se encuentra el último valor de costes de los distritos. En esa iteración se fija el coste del Distrito Centro con un coste de $x_6 = 551.68$ y un exceso de $\varepsilon_{30} = 138.41$.

Siguiendo como se comenta, se obtienen estos valores de la asignación de costes referente al *nucleolus* del juego:

Tabla 4.3.3. *Nucleolus* del juego

Distrito	<i>Nucleolus</i>
1. Sur	297.61
2. Norte	310.65
3. Este	317.08
4. Oeste	271.05
5. Noreste	289.21
6. Centro	551.68

Como se puede observar, el *nucleolus* de este juego asigna una serie de costes inferiores a los costes que tienen algunos distritos si no colaborasen, aunque es cierto que algunos distritos mejoran más su situación que otros, como puede ser el Distrito Centro, todos ellos se verían beneficiados de una posible cooperación.

Una vez calculado el *nucleolus*, se dan otros valores de soluciones de carácter puntal, como puede ser el valor de Shapley del juego. El valor de Shapley es la contribución marginal esperada de cada distrito a las posibles secuencias de formación de la gran coalición, suponiendo que ésta puede formarse, de forma equiprobable, en todos los órdenes posibles. Para ello se usa la expresión que se vio en el Capítulo 1 y que ahora se recuerda:

$$\phi_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v(S) - v(S \setminus \{i\})].$$

Primero se procede a calcular la primera parte de la expresión que se denotará como q :

$$q(s) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}, 1 \leq s \leq 6, n = 6.$$

$$q(1) = \frac{0!5!}{6!} = 0.167, \quad q(2) = \frac{1!4!}{6!} = 0.033, \quad q(3) = \frac{2!3!}{6!} = 0.0167,$$

$$q(4) = \frac{3!2!}{6!} = 0.0167, \quad q(5) = \frac{4!1!}{6!} = 0.033, \quad q(6) = \frac{5!0!}{6!} = 0.167.$$

Quedando, por tanto, el valor para cada distrito como se muestra en la Tabla 4.3.4. En la tercera columna de la Tabla 4.3.4, se muestra el porcentaje del incremento que tienen los costes con la asignación del valor de Shapley comparado con el coste que asume cada distrito por él mismo.

Tabla 4.3.4. Valor de Shapley de cada distrito

Distrito	Valor de Shapley (€)	% respecto a no cooperar
1. Sur	287.74	5.97
2. Norte	307.56	3.61
3. Este	314.05	3.54
4. Oeste	268.96	3.78
5. Noreste	285.94	3.95
6. Centro	573.09	16.72

Además del valor de Shapley y del *nucleolus*, se puede calcular el valor de Tijs. Para su cálculo se utilizan las expresiones del Capítulo 1 del presente trabajo y que se muestran a continuación:

Lo primero que ha de calcularse son los precios de utopía de cada distrito:

$$M_i(N, v) = v(N) - v(N \setminus \{i\}),$$

y a continuación el mínimo derecho de cada uno de los distritos:

$$m_i(N, v) = \max \left\{ v(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} M_j(N, v) \right\}, \forall S \subseteq N, i \in S.$$

Los cálculos de ambas expresiones son realizados en Excel, resultando los valores que se muestran en la Tabla 4.3.5.

Por consiguiente, se aplica la definición $\tau(N, v) = m(N, v) + \alpha(M(N, v) - m(N, v))$, quedando:

$$\tau(N, v) = (235.4, 248.4, 254.9, 211.5, 227, 488.1) \\ + \alpha(73.33, 74.67, 74.67, 74.67, 74.67, 73.33).$$

Tabla 4.3.5. Resultado de precios de utopía y mínimos derechos de cada distrito

Distritos	M_i	m_i	$M_i - m_i$
1. Sur	308.7	235.4	73.33
2. Norte	323.1	248.4	74.67
3. Este	329.6	254.9	74.67
4. Oeste	286.2	211.5	74.67
5. Noreste	301.7	227.0	74.67
6. Centro	561.5	488.1	73.33

se calcula entonces el valor de *Alpha* sabiendo que el valor de *Tijs* debe cumplir el principio de eficiencia, quedando:

$$1665.34 + \alpha \cdot 445.33 = 2037.34, \text{ lo que proporciona un valor de } \alpha \text{ de } 0.84.$$

Una vez calculado el valor de *Alpha*, se puede dar el valor de *Tijs*:

$$\tau(N, v) = (296.61, 310.77, 317.26, 273.91, 289.39, 549.39).$$

Por tanto, se puede ver en la Tabla 4.3.6 un resumen de los valores que se han obtenido de soluciones de tipo puntual (*nucleolus*, valor de Shapley y valor de *Tijs*) para los repartos de costes entre cada uno de los distritos de Jerez.

Tabla 4.3.6. Resumen de reparto de costes en euros (€) para cada distrito

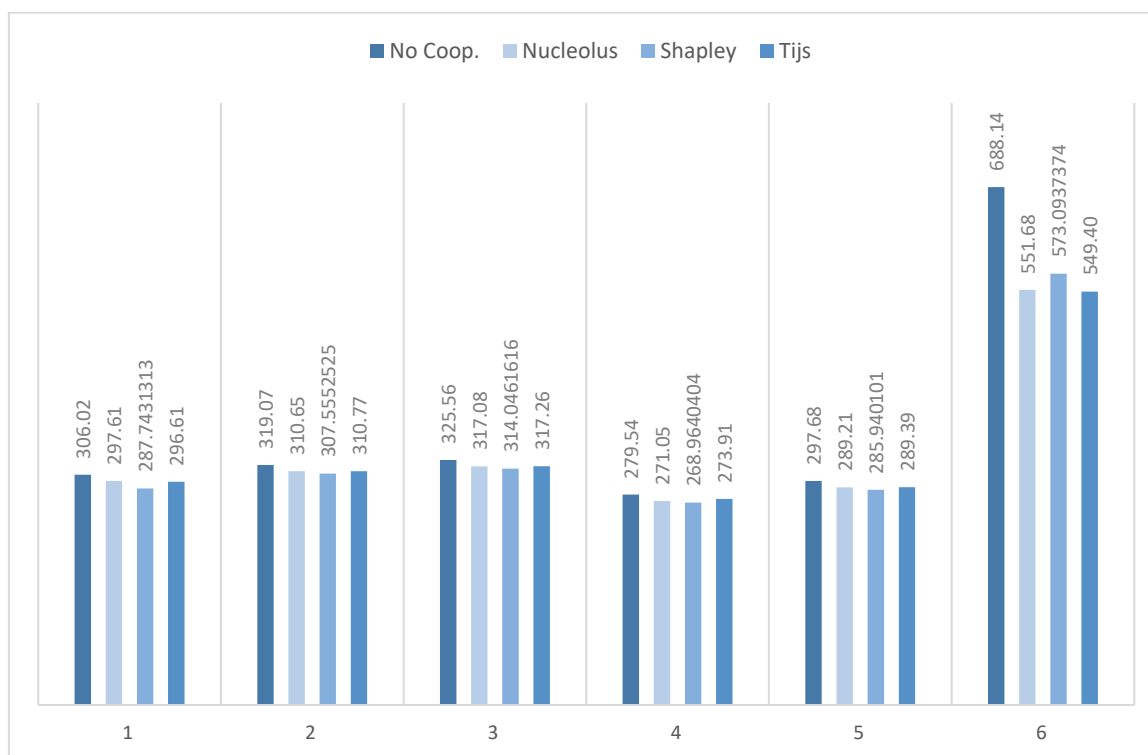
Distritos	Sin cooperación	Valor de Shapley	<i>Nucleolus</i>	Valor de <i>Tijs</i>
1. Sur	306.02	287.74	297.61	296.61
2. Norte	319.07	307.56	310.65	310.77
3. Este	325.56	314.05	317.08	317.26
4. Oeste	279.54	268.96	271.05	273.91
5. Noreste	297.68	285.94	289.21	289.39
6. Centro	688.14	573.09	551.68	549.40

4.4. Conclusiones

Una vez calculados los valores de las soluciones de tipo puntual como son el *nucleolus*, el valor de Shapley y el valor de Tijs se puede comprobar cómo la solución que se obtiene es beneficiosa para el erario público.

En la Figura 4.4.1. se muestra una comparativa de los distintos costes que asume cada distrito en función de las siguientes variables: (i) si cooperan, (ii) si se reparten los costes según el valor de Shapley, (iii) si se realiza este reparto según el *nucleolus* o (iv) si se hace el reparto en función del valor de Tijs.

Figura 4.4.1. Comparativa de distintas asignaciones de costes



Otra forma de analizar si la cooperación entre los distritos sería o no favorable, podría haber sido la del re-ruteo de los distintos caminos que siguen los camiones. Esto se descartó en una primera instancia debido al alto número de contenedores que cubren las distintas zonas de la ciudad, lo que haría al problema de muy difícil resolución, ya que como se comenta en capítulos anteriores, los problemas de viajero se convierten en problemas muy complicados cuando el número de sitios a los que hay que visitar crece, creciendo el número de las restricciones de forma exponencial.

Para problemas de este tipo se pueden realizar distintas simulaciones de diversas rutas, ofreciendo cada una de ellas un valor distinto de la función característica y, por tanto, dando lugar a distintas asignaciones de costes. Se tendría entonces un juego con múltiples escenarios.

5. REFERENCIAS

ALGABA, E., FRAGNELLI, V., SANCHEZ-SORIANO, J. (2019). Handbook of the Shapley Value. CRC Press, Taylor & Francis Group, USA.

BELL, M. G. H. (2004). Games, Heuristics, and Risk Averseness in Vehicle Routing Problems, *Journal of Urban Planning and Development*, 130, 1, 37-41.

BERTSIMAS, D. (1988). *The probabilistic vehicle routing problem*, Sloan W.P. No. 2067-88. Recuperado de <https://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/2215/SWP-2067-20061164.pdf?sequence=1>

BILLERA, L.J., HEATH, D.C., RAANAN, J. (1978). Internal telephone billing rates – a novel application of nonatomic game theory, *Operations Research*, 26(6), 956– 965.

BOREL, É. (1921). *La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris.

ÇETINER, D. (2013). Selected topics in cooperative game theory. En D. Çetiner (Ed.), *Fair revenue sharing mechanisms for strategic passenger airline alliances*, 668, 43-72. Springer Science and Business Media.

CHRISTENSEN, F., LIND, M., TIND, J. (1996). On the nucleolus of NTU-games defined by multiple objective linear programs. *Mathematical Methods of Operations Research*, 43(3), 337-352.

COURNOT, A. (1838). *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, L. Hachette.

DRAGAN, I. (1981). A procedure for finding the nucleolus of a cooperative n-person game, *Zeitschrift für Operations Research*, 25(5), 119-131.

DRIESSEN, T. (1988). *Cooperative Games, Solutions and Applications*. Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands.

DROR, M., BALL, M.O. (1987). Inventory routing: Reduction from an annual to a short-period problem, *Naval Research Logistics (NRL)*, 34(6), 891-905.

DROR, M. (1990). The traveling salesman, binpacking and the knapsack, *Applied Mathematics and Computation*, 35(2), 191-207.

EDGEWORTH, F.Y. (1881). *Mathematical psychic*. Kegan Paul & Co., Londres.

ENGEVALL, S. (1996). Cost allocation in distribution planning. Tesis de Licenciatura. Departamento de Matemáticas, Linköping Institute of Technology, Linköping

- ENGEVALL, S., GÖTHE-LUNDGREN, M., LINDBERG, P.O., P. VÄRBRAND (1996). A note on the core of the Euclidean traveling salesman game with a home city, LiTH-MAT-R-1996-24, Departamento de Matemáticas, Linköping Institute of Technology, Linköping.
- ENGEVALL, S., GÖTHE-LUNDGREN, M., LINDBERG, P.O., P. VÄRBRAND, (1998). "The traveling salesman game: An application of cost allocation in a gas and oil company," *Annals of Operations Research*, Springer, 82(0), 203-218, August.
- FONLUPT, J., NADDEF, D. (1985). The traveling salesman problem in graphs with some excluded minors. *Technical Report 557*, Université Scientifique et Médicale de Grenoble.
- FROMEN, B. (1997). Reducing the number of linear programs needed for solving the nucleolus problem of n-person game theory. *European Journal of Operational Research*, 98(3), 626–636.
- GATELY, D. (1974). Sharing the gains from regional cooperation: A game theoretic application to planning investment in electric power, *International Economic Review*, 15, 195 -208.
- GILLIES, D. B. (1953). *Some theorems on n-person games*. Tesis doctoral, Universidad de Princeton.
- GILLIES, D.B. (1959), Solutions to general non-zero-sum games, *Contributions to the Theory of Games, IV, Annals of Mathematical Studies* 40, 47-85.
- GOTHE-LUNDGREN M., JORNSTEN K., VARBRAND P. (1996). On the nucleolus of the basic vehicle routing game, *Mathematical Programming*, 72, 83-100.
- GROTTE, J.H. (1970). *Computations of and observations on the nucleolus, the normalized nucleolus and the central games*, M.Sc. Tesis, Universidad de Cornell.
- GUAJARDO, M., JÖRNSTEN, K. (2015). Common mistakes in computing the nucleolus, *European Journal of Operational Research*, Volume 241, 3, 931-935.
- HALLEFJORD, Å., HELMING, R. & JÖRNSTEN, K. (1995). Computing the nucleolus when the characteristic function is given implicitly: A constraint generation approach, *International Journal of Game Theory*, 24(4), 357-372.
- JAILLET, P., ODoni, A.R. (1988). The probabilistic vehicle routing problem. En B.L. Golden & A.A. Assad (Eds.), *Vehicle Routing: Methods and Studies, Studies in Management Science and Systems*, 16, 222-248.
- KIMMS, A., ÇETINER, D. (2012). Approximate nucleolus-based revenue sharing in airline alliances, *European Journal of Operational Research*, 220(2), 510–521.
- KOPELOWITZ, A. (1967). Computation of the kernels of simple games and the nucleolus of n-person games, *Research Memorandum No. 31*, Department of Mathematics, The Hebrew University of Jerusalem.

- KRUS, L., BRONISZ, P. (2000). Cooperative game solution concepts to a cost allocation problem, *European Journal of Operational Research*, 122(2), 258–271.
- KUIPERS, J. (1993), A note on the 5-person traveling salesman game, *Zeitschrift für Operations Research*, 38(2), 131-139.
- LEMAIRE, J. (1984). An application of game theory: cost allocation. *Astin Bulletin*, 14(1), 61-81.
- LEMAIRE, J. (1991). Cooperative game theory and its insurance applications. *Astin Bulletin*, 21(1),17-40.
- LITTLECHILD, S.C., THOMPSON, G.F. (1977). Aircraft landing fees: A game theory approach, *Bell Journal of Economics*, 8, 186–204.
- LITTLECHILD, S., VAIDJA, K. (1976). The Propensity to Disrupt and the Disruption Nucleolus of a Characteristic Function Game, *International Journal of Game Theory*, 5(2), 151-161.
- MICHENER, H., YUEN, K., SAKURAI, M. (1981) On the Comparative Accuracy of Lexicographical Solutions in Cooperative Games, *International Journal of Game Theory*, 10(2), 75-89.
- MIRÁS CALVO, M. A., SÁNCHEZ RODRÍGUEZ, E. (2008). *Juegos cooperativos con utilidad transferible usando Matlab: TUGlab*. Servicio de Publicacións da Universidade de Vigo.
- NEUMANN, J. VON (1928). Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Analen* 100(1), 295-320.
- NEUMANN, J. VON, MORGENSTERN, O. (1944). *Theory of games and economic behaviour*. Princeton University Press.
- O’NEILL, B. (1982). A problem of rights arbitration from the Talmud, *Mathematical Social Sciences* 2.
- OH, S.C., SHIN, J. (2012). A semantic e-kanban system for network-centric manufacturing: Technology, scale-free convergence, value and cost-sharing considerations, *International Journal of Production Research*, 50(19), 5292–5316.
- PARKER, T. (1943), Allocation of the Tennessee Valley Authority projects, *Transactions of the American Society of Civil Engineering* 108,174–187.
- POTTERS, J.A.M. (1989). A class of traveling salesman games, *Methods of Operation Research* 59, 263–276.
- POTTERS, J.A.M., CURIEL, I.J., TIJS, S.H. (1992), Traveling salesman games, *Mathematical programming*, 53(1), 199-211.

- SAKAWA, M., NISHIZAKI, I., UEMURA, Y. (2001). Fuzzy programming and profit and cost allocation for a production and transportation problem, *European Journal of Operational Research*, 131(1), 1-15.
- SATYARAMESH, P., RADHAKRISHNA, C. (2009). Use of cooperative game theory concepts for loss allocation in multiple transaction electricity markets, *Journal of Electrical Systems*, 5(1), 6.
- SCHMEIDLER, D. (1969). The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal of Applied Mathematics* 17, 1163-1170.
- SHAPLEY, L.S. (1953), A value for n-person games, *Contributions to the Theory of Games II, Annals of Mathematical Studies*, 28, 307-317.
- SHAPLEY, L.S. (1967), On balanced sets and cores, *Naval Res. Logist. Quart*, 14, 453 - 460.
- SHAPLEY, L.S. (1971). Cores of convex games. *International Journal of Game Theory*, 1, 11-26.
- SHAPLEY, L.S. (1981). Discussant's comments: "Equity considerations in traditional full cost allocation practices: An axiomatic perspective", *Joint Cost Allocations*, ed. S. Moriarity, Center for Economic and Management Research, 131-136.
- SNIJDERS, C. (1995). Axiomatization of the nucleolus, *Mathematics of Operation Research*, 20, 189 - 196.
- STRAFFIN, P.D., HEANEY, J.P. (1981). Game theory and the Tennessee Valley Authority, *International Journal of Game Theory*, 10, 35-43.
- TAMIR, A. (1989). On the core of a traveling salesman cost allocation game, *Operation Research Letters*, 8, 31 - 34.
- TIJS, S.H. (1987). An axiomatization of the τ -value, *Mathematical Social Sciences*, 13, 177-181.
- TIJS, S.H., DRIESSEN, T.S.H. (1986). Game theory and cost allocation problems, *Management Sciences*, 32, 1015-1028.
- TIJS, S.H. (1981). Bounds for the core and the τ -value. En O. Moeschlin and D. Pallaschke (Eds.), *Game Theory and Mathematical Economics*, North-Holland, Amsterdam, 123 -132.
- YOUNG, H.P. (1985). Methods and principles of cost allocation. En H.P. Young (Ed.), *Cost Allocation: Methods, Principles, Applications*, North-Holland, Amsterdam, 3 - 30.
- YOUNG, H.P., OKADA, N., HASHIMOTO, T. (1982). Cost allocation in water resources development, *Water Resources Research*, 18, 463 - 475.
- YOUNG, H., OKADA, N., HASHIMOTO, T. (1980). Cost Allocation in Water Resources Development. A Case Study of Sweden. 11 *ASA Research Report*, Laxenburg.

Referencias

ZERMELO, E. (1913). Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. *Fifth International Congress of Mathematicians, 2*, Cambridge University Press.