THÉMATA. REVISTA DE FILOSOFÍA. Núm. 19, 1998, págs. 41-58.

LA DEFINICIÓN DE LOS NUMERALES DE FREGE

Enrique F. Bocardo. Universidad de Sevilla

Resumen: El objetivo de este trabajo es delinear el camino que Frege siguió hasta llegar a la definición del número. El material que se presenta ha sido organizado de tal manera que eventualmente se llegue a comprender la respuesta a la pregunta: ¿qué es lo que significan realmente los números? El trabajo ha sido dividido en seis parágrafos. En el primero se introduce los tres principios que Frege utilizó a lo largo de sus investigaciones. En los parágrafos segundo, tercero y cuarto se ha presentado el aparato conceptual de Frege. En el quinto se presenta lo que Frege consideraba el análisis adecuado de las sentencias en las que intervienen los numerales y finalmente en el sexto se presenta la definición canónica de número.

Abstract: The aim of this paper is to show how Frege arrives eventually at the definition of number. The whole material has been organized as to provide an answer to the question: what do number-words (numerals) really mean? The paper has been divided into six paragraphs. In the first one, the three principles set forth by Frege in his investigations are properly introduced. The second, third and fourth paragraphs are mainly devoted to the description of Frege's conceptual apparatus. In paragraph fith the appropriate analysis of the sentences wherein numeber-words occur is purpoted, and in the last one, Frege's definition of number is finally presented.

En 1874 Frege publicó una breve reseña de un libro de texto sobre aritmética llamado *Die Elemente der Aritmetik* compuesto por H. Seeger. En su reseña, Frege se quejaba fundamentalmente de dos insuficiencias que a su juicio adolecía el libro: la primera era que al libro le faltaba claras definiciones de los conceptos básicos de la aritmética, y la segunda consistía en que las proposiciones básicas de la aritmética se dejaban todas «apiñadas entre si y sin la menor prueba»[1]. Diez años más tarde Frege presentaba en los *Fundamentos de la Aritmética* la primera definición en la historia del pensamiento del número natural y explicaba la verdad de las proposiciones de la aritmética sobre proposiciones estrictamente lógicas.

Según parece Frege nunca llegó a poner seriamente en dudas la verdad de las proposiciones de la aritmética. De lo que se trataba era de explicar por qué eran efectivamente verdaderas: en qué residía la verdad que todo el mundo parece que asumía cuando se trataba de saber por qué, por ejemplo, 2+2= 4 es un proposición verdadera. Probablemente fue Frege el primero en la historia del pensamiento humano en preguntarse y responder con cierto éxito en qué consistía la verdad de las proposiciones de la aritmética [2]. Frege consideró a la lógica como la ciencia cuyos principios no necesitan de ulterior justificación; así que le pareció el modelo más fiable que podía utilizar para explicar por qué las proposiciones de la aritmética son verdaderas: son verdaderas porque su verdad es lógica[3].

De entrada el programa de Frege requería un lenguaje que le permitiese entender las proposiciones de la aritmética en los mismos términos en los que se entiende las proposiciones de la lógica. Si lo que se demuestra en último extremo es que la verdad de la aritmética es la misma que la verdad de la lógica, entonces debe de existir un lenguaje en el que sea posible ver la identidad semántica que guardan unas con las otras. Frege sabía que en la aritmética se tenía que demostrar la verdad de algunos teoremas. En estos casos la verdad de ciertas proposiciones se siguen de otras, de acuerdo a un conjunto de reglas de inferencias. Así que una de las características básicas que el lenguaje tenía que reunir era que fuera capaz de exhibir la estructura lógica que entra en juego cuando se trata de demostrar que una proposición se sigue como conclusión a partir de otras.

Inicialmente pensó que el lenguaje ordinario podía proporcionar el tipo de estructura que estaba buscando; se ve obligado a admitir, sin embargo, que el lenguaje natural «no se encuentra gobernado por reglas lógicas de tal manera que la sola adherencia a la gramática garantice la corrección del proceso del argumento»[4]. Para empezar el lenguaje ordinario demostraba ser ineficaz a la hora de saber si ha o no ha habido algún error en la demostración, y en segundo lugar no contaba con un grupo definido de reglas de inferencias a las que poder invocar para zanjar las dudas, que surjan para aceptar o rechazar una inferencia[5]. Seguramente para evitar estas dos dificultades iniciales, creó hacia 1879 una notación conceptual, es decir, un lenguaje formal de pensamiento puro elaborado siguiendo como modelo el lenguaje de la aritmética. El objetivo esencial del lenguaje era «verificar de la manera más efectiva la validez de las cadenas de razonamiento y exponer cada presuposición que tienda a pasar de largo subrepticiamente»[6].

Gracias a este lenguaje, Frege es capaz de demostrar que la identidad semántica entre la verdad de la aritmética y la de la lógica. Los enunciados que pertenecen a la notación conceptual se encuentran completamente libre del tipo de ambigüedades que normalmente se hallan en el lenguaje ordinario. Los símbolos que forman parte del lenguaje están diseñados para representar los constituyentes que entran a formar parte en cada una de las proposiciones de la aritmética. Por consiguiente el programa de Frege ha proporcionar cuando menos tres explicaciones. Una consiste en ofrecer una definición lógica de los números enteros positivos, que eventualmente se puede extender a otros tipos de números. Definir lógicamente qué es un número significa demostrar que los enunciados de la aritmética se pueden reducir a enunciados de la notación conceptual, de la *Begriffsschrift*, es decir enunciados cuyos únicos contenidos son lógicos. La idea era que una vez que se encuentre el correspondiente enunciado formal que traduzca una proposición de la aritmética, se podría dilucidar de qué manera la ocurrencia de un numeral en el enunciado contribuía al sentido completo de la proposición que expresaba en enunciado. La segunda es que tiene que demostrar que la relación que se establece entre dos números de la serie de los enteros positivos debe de ser una relación lógica; es decir, debe de demostrar que la relación de sucesión es una relación lógica. Finalmente, ha de proporcionar una demostración lógica de que la serie de los números enteros positivos es infinita. En otras palabras, ha de demostrar que el enunciado «no existe el último número en la serie de los números positivos» es equivalente a otro que sea estrictamente lógico, y que además se sigue de él según un conjunto de reglas de inferencias que hacen que el argumento en el que se demuestre sea considerado formalmente verdadero y válido.

El objetivo de mi trabajo es exhibir el proceso que siguió Frege hasta llegar a la definición de los números enteros positivos. He seguido esencialmente las indicaciones que nos proporciona en los *Fundamentos de Aritmética.* Ha habido, no obstante, algunas alteraciones que se pueden justificar: hacia 1884 Frege no había elaborado todavía las nociones semánticas más esenciales de su lenguaje lógico; de manera que si uno tuviera que seguir solamente las indicaciones de la *Grundlagen*, no llegaríamos a comprender por completo la estrategia ni los pasos del todo el proceso. Así que me ha parecido dedicar buena parte del trabajo a exponer cuando menos las nociones fundamentales de semántica que Frege elaboró entre 1891 y 1903, muy posteriores a la publicación de los *Fundamentos de la Aritmética.*

He dividido mi trabajo en seis parágrafos. Creo que en alguna medida, cada uno de ellos contribuye a que al final podemos resolver la siguiente cuestión: ¿Qué significan los numerales?. En cada parágrafo he ido introduciendo las nociones, que he considerado más oportunas hasta que comprendamos la brillante respuesta que da Frege a esa pregunta. En el primer parágrafo presento los tres principios que asumió Frege en su investigación. He añadido por mi cuenta uno más, que, aunque Frege no lo hubiera definido como principio, lo utilizó cuando menos en algunas ocasiones. Lo he llamado el principio de composición y me parece que arroja cierta luz a la hora de entender los numerales. El segundo, tercero y cuarto parágrafo los he dedicado a describir lo que podríamos considerar el aparato conceptual de Frege; usando este aparato presento el parágrafo cinco el análisis de los enunciados en los que intervienen palabras que expresan números (numerales); finalmente en el sexto expongo la definición que Frege ofrece de número. Le he añadido una breve presentación de la paradoja que le presentó Russell a Frege y que según parece destruyó el trabajo al que se había dedicado en los veinte últimos años de su vida. El golpetuvo que haber sido irresistible y debió de servir para que Frege pensara que su trabajo habría resultado totalmente en vano.

1. Empezaré por dar una explicación más o menos informal de la respuesta que da Frege a la cuestión: ¿Qué significan los numerales, las palabras que utilizamos para referirnos a los números? Es decir, ¿a qué clase de cosas nos referimos, si es que nos referimos a algo, cuando empleamos en nuestro lenguaje palabras que se refieren a números? Las utilizamos a diario y están casi permanentemente en nuestra mente; pero nunca antes nos habíamos preguntado por su significado. Frege se sirvió de tres principios fundamentales para lograr su tarea[7]:

1º) Separar tan claramente como sea posible lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo.

2º) Cuando preguntemos por lo que significa una palabra, deberemos de preguntar por el contexto particular en el que esa palabra ocurre.

3º) Mantener la distinción entre concepto y objeto.

Hay un cuarto principio, que me gustaría añadir, que si bien no se formuló expresamente en la *Grundlagen,* creo que nos ayudará a abrir el camino hasta comprender la cuestión. Se llama el principio de composición y lo podemos enunciar así:

4°) Tanto el significado (el objeto que una palabra denota) como su sentido (lo que la palabra expresa y es entendido por cada hablante particular de la lengua en la se usa esa palabra) de un enunciado complejo son funciones de los significados y sentidos de las palabras que componen el enunciado completo[8].

Ya que estamos interesados en investigar la respuesta de Frege a la cuestión: ¿Qué significan los numerales?, parece oportuno que dediquemos un tiempo a explicar de qué manera los cuatro principios que hemos enumerado contribuyen a esclarecer la definición de número.

El primer principio parece expresar el deliberado y notorio interés de separar la lógica de cualquier relación con elementos subjetivos y psicológicos. Algo es objetivo, al menos en el sentido en que lo entiende Frege, cuándo su existencia no depende de nuestra configuración mental. Frege estaba convencido que los elementos que integran la lógica, como la verdad o la mentira, una proposición y las conectivas lógicas, que definían el vocabulario de la notación conceptual eran todas ellas objetos, que eran entidades que existían en cada ámbito respectivo: el ámbito de las funciones, los sentidos y las denotaciones.

Los pensamientos, aquello que una proposición expresa y que es entendido por el hablante de la lengua en la que emplea la proposición es una entidad, que existe ahí afuera, con independencia del hecho psicológico de pensarlo: «un pensamiento no le pertenece particularmente a la persona que lo piensa, como así lo hace una idea con la persona que la tiene»[9]. No necesitamos volver a repasar uno a uno cada uno de los argumentos, que Frege elabora en contra de la interpretación psicológica de la lógica. El hecho de que aún hoy tengamos ciertas precauciones en considerar los numerales como representaciones mentales, se debe en buena medida a la devastadora crítica que Frege sometió las tesis psicológicas en la primera parte de la *Grundlagen.*

De acuerdo al segundo principio, cuando preguntamos lo que significan los numerales, deberíamos de tener en cuenta el contexto de la proposición en la que tales palabras ocurren. Con frecuencia reprocha que el que no seamos capaces de hacernos una idea de lo que significa una palabra no es una razón para creer que esa palabra no significa nada[10]. De hecho, si se consideran sus razones no es ni siquiera una razón en absoluto para pensar así. Frege quería que cualquier cosa que pudieran ser los números deberían de ser ante todo algo objetivo, que tenga existencia con independencia de nuestro pensamiento, algo que sea definido en términos puramente lógicos.

Estaba convencido que la tendencia a considerar el significado de una palabra como una entidad psicológica o como una idea se debía esencialmente a considerar aisladamente a la palabra, a fijarse solo en ella y no tomar en consideración el contexto de la proposición en la que aparece. Al introducir el segundo principio apoyamos la verdad del primero. El segundo principio nos marca el terreno hacia donde hay que mirar para descubrir el sentido de las palabras que queremos comprender. Nos advierte que es dentro de una proposición, y no aisladamente, en donde tiene sentido preguntarse por le significado de una palabra y en particular de los numerales, cuyo significado es el que esperamos dilucidar. Las proposiciones, en consecuencia, son las que se deben de considerar como las unidades básicas de nuestro análisis.

La mayor parte de los enunciados en los que intervienen los numerales parecen responder a la pregunta[11]: ¿Cuántos? ¿Cuánto mide esa puerta? ¿Cuánto se tarda en ir de tal a tal sitio? Así pues será la respuesta a cada de esas preguntas y a otras muchas de su estilo, las proposiciones que habría que considerar para averiguar el sentido de los numerales. Utilizando el segundo principio, Frege enfoca la atención a aquella clase de proposiciones que responden en términos de numerales a la pregunta: ¿Cuántos?

Con el fin de ofrecer un análisis correcto de estos enunciados, debemos tener a nuestra disposición cierto aparato conceptual, que nos permita identificar en términos estrictamente lógicos los constituyentes de los enunciados que responden a la cuestión ¿cuántos? Se espera que eventualmente lleguemos a comprender de qué estamos hablando cuando hablamos de los numerales; tarea que utilizando el cuarto principio se supone que nos indicará la particular contribución que las numerales realicen al sentido completo de la proposición en la que intervienen. El método que Frege propone para analizar los enunciados de los numerales se basa, a su vez, en la distinción que trazó entre concepto y objeto, que es el contenido del tercer principio.

2. La distinción entre concepto y objeto estaba en cierta manera presente, aunque algo confusa, en el primer libro de Frege[12]. Pero la distinción no se hizo clara y bien delimitada hasta 1891 en *Función y Concepto* y 1892 con *Concepto y Objeto* . Como Frege mismo sugiere, la distinción entre concepto y objeto es final, no tiene sentido esperar que una palabra se puede descomponer en algo más que no sea o un objeto o un concepto[13]. Son como los elementos en química, que no se pueden descomponer en otros más elementales. La conclusión es que todo enunciado se puede analizar como si consistiera en dos unidades irreducibles: el objeto y el concepto. De hecho lo que hace posible que un enunciado sea capaz de expresar una proposición con sentido depende en última instancia de que un objeto satisfaga a un concepto.

Frege también apela a algunos elementos del lenguaje para ilustrar la diferencia entre objeto y concepto; la ilustración, tiene buen cuidado en advertir Frege, sólo se ha de entender a manera de sugerencia, y no como una definición literal. Intuitivamente el concepto correspondería a lo que en la gramática tradicional se reconocía como predicado; la cualidad que se le atribuía a algo. El objeto, por su parte, correspondería al sujeto, no tanto como agente de la acción, sino como aquella entidad que tiene cierta cualidad[14].

Lo cierto es que la distinción entre objeto y concepto no parece que sea por completo arbitraria y contamos en el lenguaje con alguna evidencia para mantenerla[15]. Los conceptos son entidades esencialmente predicativas; han de ser -como asimismo lo sostiene Frege- complementadas por algo, son fundamentalmente «insaturados». Los objetos, sin embargo, aparecen caracterizados como entidades completas en sí misma, son saturados y complementan al concepto; saturan -por así decirlo- al concepto; ocupan el lugar que tiene vacío el concepto.

La distinción entre concepto y objeto es esencial, como sugerí más arriba, para entender el problema básico del lenguaje: ¿qué es lo que hace posible que una proposición sea capaz de expresar un pensamiento y tenga sentido en el lenguaje? Probablemente el patrón que Frege estaba siguiendo fuera la noción de función tal y como se entiende en el análisis matemático. Intuitivamente una función es una regla que me dice qué clase de operación (y) tengo que hacer con una variable (x), para obtener otro valor. Por ejemplo: $y = 2x+4$ es una función; nos dice que hemos de coger del dominio de los valores de la variable x, un argumento, multiplicarlo por 2 y después añadirle 4. Cuando $x = 0$, la función $y = 4$. Para que la expresión «$2x + 4$» pueda convertirse en un enunciado, es decir, para que sea capaz de expresar verdadera o falsamente una proposición, es preciso sustituir a x por algún número. Frege se fijó en esta peculiar características de las funciones para caracterizar la semántica de sus proposiciones. La manera de entender la saturación de un concepto por medio de objeto, tiene bastante que ver con la manera en que entendemos que x es un argumento de una cierta función. La variable x de la función, como el concepto, refleja la necesidad de ser reemplazada por un argumento, para que sea capaz de conseguir algún valor; de lo contrario no dice nada[16].

El valor de una función es el resultado de haber realizado con la variable x una cierta operación, a saber: aquella que es expresada por la propia función. Paralelamente el valor de un enunciado es un valor verdad: o lo verdadero o lo falso. Al menos a una de esas entidades se refieren los enunciados cuando la parte saturada, el objeto, satura a la parte insaturada, el concepto. A modo de ilustración consideremos, para empezar, la siguiente proposición:

(1) El número 2 es un número primo.

Podemos dividir a la proposición que expresa el enunciado (1) en dos partes: una, la expresión *El número* 2 y otra, *número primo*. Si borrásemos de (1) la expresión *El número* 2, nos quedaríamos con:

(2) . . . es un número primo.

En realidad no expresamos en (2) ninguna proposición. No decimos nada que podamos saber con certeza si es verdadero o falso. Al escribir los puntos suspensivos queremos dar a entender que hay un espacio vacío, o que un espacio vacío pone de manifiesto el carácter insaturado del concepto *ser un número primo*.

Conversamente el sentido de la expresión *El número* 2 no dice nada que tenga sentido decir que sea verdadero o falso. Simplemente denota una cierta entidad que llamamos número 2. Los objetos han de estar vinculados con los concepto por medio de una cadena. Si escribimos:

(3) El número 2 es un . . .

tampoco llegamos a convenir pensamiento alguno. Los objetos por sí mismos son incapaces de denotar un valor de verdad a menos que saturen verdadera o falsamente a un concepto. Cuando afirmamos que el número 2 es un número primo, estamos proporcionando la cadena adecuada para que un objeto sea capaz de saturar a un concepto. Al rellenar los puntos suspensivos de el enunciado (2) completamos la parte incompleta del enunciado. Entendemos el sentido del enunciado (1); es decir somos capaces de saber si es o no verdadero. Lo que hacemos en el enunciado (1) es afirmar verdaderamente que un cierto objeto, el número 2, cae dentro del concepto de *ser un número primo.*

Podríamos haber elegido cualquier otro objeto, por ejemplo, Napoleón; y en ese caso habríamos obtenido la proposición: Napoleón es un número primo, que denotaría lo falso. En realidad los enunciados que es capaz de generar (2) cambiarán de valor de verdad conforme los valores caigan o no dentro del concepto *número primo.*

La sustitución de los diversos valores en el lugar de los argumento del concepto no es el único procedimiento que tenemos a nuestra disposición para completar el sentido de una función proposicional como la que expresa (2). Frege admite otra posibilidad: permitir que los conceptos puedan caer dentro del alcance de otros conceptos. Lo que significa que podemos crear entre conceptos mismos el mismo tipo de vínculo o hilazón, aunque de naturaleza diferente, que proporcionábamos entre un objeto y el concepto[17].

Añadiendo palabras como: «todos», «algunos», «algún», «existen» o «no existen» a los conceptos para indicar cuántos y si hay o no hay objetos, que caigan dentro del concepto hacemos esencialmente dos cosas: primera, completar el sentido del enunciado y segunda, proporcionar una hilazón por la cual el concepto cae dentro del dominio de otro concepto. Supongamos que añadimos «algunos» al esquema (2), obtenemos entonces:

(4) Algunos números son números primos.

La proposición que expresa el enunciado (4) dice algo sobre el concepto del primer nivel *ser un número primo*, a saber: que tiene ciertos objetos que le saturan, o lo que es lo mismo que no es vacío. Por lo mismo, si el enunciado (4) denota la verdad, entonces el concepto *ser un número primo*, tal y como lo entiende Frege, tiene la propiedad de tener cuando menos uno o dos objetos que caen bajo su dominio. La propiedad, sin embargo, de tener objetos que caigan bajo él mismo no es exclusiva del concepto *ser número primo*. Por consiguiente, el concepto *ser un número primo* puede ser considerado, por su parte, como un argumento propio que puede tener el concepto de segundo nivel «algunos». Teniendo en cuenta que el valor del enunciado que resulta al sustituir el concepto *ser número primo* por otro de primer orden en el enunciado (4) es siempre un valor de verdad, podemos considerar la expresión algunos como una concepto de segundo orden. A fin de verlo más claramente, supongamos que sustituimos la expresión *ser un número primo* por el concepto de primer orden *ser anfibio con pelos*. El valor de verdad del enunciado resultante es, por lo tanto, lo falso: no hay ningún objeto que sea anfibio y tenga pelos.

3. Que un determinado concepto caiga bajo el dominio de otro parece sugerir la posibilidad lógica de organizar los conceptos en una jerarquía de ordenes. La cuestión surge tanto más fácilmente en cuanto advirtamos que la diferencia entre conceptos de primer y segundo orden parece que está justificada por la existencia de dos tipos diferentes de argumentos: uno el de los objetos y el otro el de los conceptos de

primer orden. Los lugares para tomar objetos como argumentos propios no pueden admitir a conceptos y viceversa: los lugares que han de ser ocupados por conceptos de primer orden no pueden ser ocupados por objetos[18].

Antes de ofrecer una breve descripción de la jerarquía, necesitamos introducir algunos cambios en nuestra terminología. Definimos un concepto como una función cuyos valores resultantes son siempre valores de verdad[19]. Claramente todo concepto es una función. Sentada la aclaración, podemos distinguir entre los siguientes tipos de argumentos[20]:

-argumentos de tipo 1: objetos

-argumentos de tipo 2: funciones de un argumento de primer orden

-argumentos de tipo 3: funciones de dos argumentos de primer orden.

En general, una función de dos argumentos que tiene como valores una valor de verdad es siempre una relación[21]. Por cada tipo de argumento, podemos distinguir, a su vez, tres lugares diferentes para argumentos, a saber:

-lugares para argumentos de tipo 1, en el que intervienen solo los nombres de objetos;

-lugares para argumentos de tipo 2, que admiten nombres de conceptos de primer orden y funciones del mismo orden de un argumento;

-lugares para argumento de tipo 3, que admiten nombres de funciones de primer orden y relaciones del mismo orden con dos argumentos[22].

Utilizando la clasificación anterior, podemos ahora considerar la composición de la jerarquía de funciones:

-Funciones de un argumento, que admiten como argumentos del tipo 1. Forman las funciones de primer orden con una lugar para argumentos de tipo 1. Cuando el valor de verdad de esas funciones es siempre o lo verdadero o lo falso, Frege las considera conceptos de primer orden.

-Funciones de dos argumentos, que admiten argumentos de tipo 1. También son funciones de primer orden, ya que sus lugares para los argumentos admiten solamente argumentos de tipo 1. Una relación es, por consiguiente, una función de primer orden con dos argumentos, cuyo valor es siempre un valor de verdad.

-Funciones de segundo orden con argumentos del tipo 2. Son funciones de un argumento, que admiten a funciones de un argumento como argumentos.

-Funciones de dos argumentos de tipo 2. Son funciones de dos argumentos, que admiten como valores a funciones de primer orden con un argumento.

-Funciones de segundo orden con un argumento de tipo 3. Son funciones de un argumento, que admiten como argumentos funciones o relaciones de primer orden con dos argumentos.

-Funciones de tercer orden de un argumento de tipo 2. Son funciones de un argumento, que tienen como argumentos funciones de segundo orden con argumentos que pertenecen al tipo 2.

Para completar el aparato conceptual del lenguaje necesitamos contar con dos nuevos elementos adicionales: la extensión de un concepto y el curso de valores de una función determinada. La importancia de estos dos elementos la consideraremos en su momento, en particular cuando presentemos en el último parágrafo la definición de número natural. En cualquier caso, no debemos menospreciar el hecho de que Frege considerase necesario la introducción de la notación para indicar el curso de valores de una función como «como una de las aportaciones más importantes que el mismo ha hecho en la *Begriffsschirft*»[23].

Si dos conceptos tienen el mismo valor para el mismo argumento, entonces, señala Frege, han de tener la misma extensión[24]. Tomando lo último como una definición, podemos considerar la extensión de un determinado concepto F, como la clase de pares ordenados (x, y), de manera que y sea el valor de verdad que resulta cuando se considera todas aquellas xs que caen dentro del concepto F[25]. La expresión ef(e) es la que Frege introduce en la notación conceptual para representar la extensión de un determinado concepto F. Por ejemplo, si representásemos con la letra F el concepto de *ser un número primo*, ef(e) debería de representar una clase que contiene como elementos pares ordenados como:

(2, la verdad)
(3, la verdad)
(4, lo falso)
(5, la verdad)
etc. . .

La extensión del concepto *ser un número primo* estaría determinada por el valor de verdad de todas las xs que caen dentro del concepto F. Así mismo deberíamos de añadir que el significado (la referencia o denotación) de la palabra que expresa un concepto es un concepto. Frege creía, probablemente de buena fe, que los conceptos son objetos que existen con independencia de que sean o no pensados o comprendidos por nuestra mente. Una asunción, que demostrará haber sido fatal y con desastrosas consecuencias para el proyecto logicista de Frege. Asimismo Frege supuso que las extensiones de los conceptos también deberían de ser consideradas como objetos genuinos, completos en sí mismo.

El segundo elemento que tenemos que explicar es el del curso de los valores de una función. Por necesidades de la exposición, nos limitaremos estrictamente a considerar relaciones de primer orden con dos argumentos de tipo 1. En este caso hablaremos de la extensión de una relación antes que de un doble curso de valores. Con el objeto de ilustrar la extensión de una relación, consideremos como ejemplo la siguiente relación:

(5) 2 es menor que 3

Según la hemos definido, una relación es un función de primer orden con dos argumentos del tipo 1, cuyos valores son siempre o lo verdadero o lo falso. Como ya hemos notado, el objeto, cualquiera que sea, denotado por 2 cae dentro del concepto *ser un número primo*, si y solo si el enunciado (1) denota lo verdadero. Podemos ahora decir que el objeto denotado por «2» se encuentra en la relación de ser menor con el objeto denotado por «3», si y solo si el enunciado (5) denota también la verdad. Supongamos ahora que eliminamos del enunciado (5) el nombre denotado por «2», obtendríamos en ese caso:

(6) . . . .es menor que 3

El concepto que expresa la expresión en (6) es de primer orden con un argumento, cuya extensión viene determinada por todos aquellos pares ordenados de la forma:

(1, la verdad)
(0, la verdad)
(5, lo falso)
etc. . .

Llamar la atención sobre el siguiente hecho: si hubiéramos elegido cualquier otro número que no hubiera sido el 3, habríamos obtenido otra extensión; de hecho lo mismo se puede decir de cualquier otro argumento. Llamemos al argumento por el que se pone a 3 en (6) el argumento c, y utilicemos la letra c para representar el lugar que hemos dejado vacío en (6). En ese caso al escribir e(e es menor que c) representamos un concepto cuyo valor es siempre una extensión para cada uno de los argumentos c. La extensión de este concepto, por consiguiente, consistirá en la clase de pares ordenados ((x, y), z) tal que, z es el valor de verdad de la relación *ser menor* que cuando toma como argumentos las x y las yes correspondientes.

Las extensiones, por lo demás, tienen cuando menos tres características que nos gustaría resaltar:

(i) Que a todo concepto, F, de primer orden le corresponde un cierto objeto ef(e), que guarda con F la relación de ser su extensión.

(ii) Que la identidad entre extensiones de conceptos la proporciona la ley V de la *Grundgesetze*[26], según la cual, si los mismos objetos caen bajo dos conceptos, entonces los conceptos tienen la misma extensión y conversamente, si dos conceptos tienen la misma extensión, entonces los mismos objetos caen bajo de cada uno de ellos.

(iii) La extensión de un concepto es un objeto genuino; es decir, que la extensión de un concepto es un argumento de tipo 1 y que, en consecuencia, puede convertirse en argumento propio de cualquier función de primer orden.

4. Por lo que llevamos dicho, hemos de admitir que nuestro aparato conceptual consta de dos elementos: objetos y funciones. Las funciones son insaturadas, necesitan ser complementadas con un objeto. Complementar a una función significa que la función adquiere un cierto valor para un tipo de argumento dado[27]. Nos referimos y designamos a los números con funciones, si el significado o la denotación de la función se convierte en un número, como resultado de la operación que se realiza con el argumento. Pero el rango de valores de una función no está restringido sólo a los números. También podemos designar valores de verdad con las funciones. Un pensamiento, aquello que la proposición expresa, es el sentido de un valor de verdad. El sentido de la proposición, tal y como lo entiende Frege, está relacionado con seguir las instrucciones que nos proporciona la comprensión del sentido, saber a dónde hay que mirar para averiguar, si el resultado del sentido nos lleva a descubrir la verdad o lo falso, *tertium non datur*. Por ejemplo, las proposiciones: «2 + 2 = 4» y «5 - 3 = 2» expresan un sentido diferente, pero se refieren a la misma entidad, a saber: la verdad. Un nombre y una proposición, que Frege la trata como el nombre

de un valor de verdad, expresa su sentido y se refiere a su denotación o significado[28].

Todo lo que no sea una función ha de ser un objeto[29]. El signo lingüístico de un objeto es un nombre propio. Contaremos también como nombres propios de objetos todas aquellas expresiones lingüísticas que siguen después del artículo determinado «el»[30]. Por ejemplo, enunciados como «el hombre más alto del mundo» o «el número de habitantes de Chicago» son consideradas asimismo como nombres de objetos. Como los objetos mismos, los nombres también los considera Frege saturados[31]. En consecuencia, ningún nombre es alguna vez representado en la *Be griffsschirft* con un signo que indique que tiene un lugar libre para algún argumento. Los valores de verdad: la verdad y la falsedad, las extensiones de los conceptos, los cursos de las funciones y las extensiones de las relaciones son considerados todos ellos objetos; lo mismo, como tendremos ocasión de comprobar, se consideran también los números.

Combinando los dos elementos de nuestro aparato conceptual podemos re-escribir en un enunciado de la *Begriffsschirft* (que llamaremos enunciados **b**) cualquier enunciado que pertenezca a la aritmética y en último extremo cualquier enunciado del que tenga sentido preguntar si tiene o no tiene un valor de verdad. Observemos por lo demás que:

(i) Sea cual sea la complejidad a la que pueda llegar un enunciado determinado, el correspondiente enunciado **b** no puede superar la complejidad mayor que la de tercer orden.

(ii) Cada enunciado **b** ha sido formulado según las dos maneras básicas que tenemos a nuestra disposición para completar el sentido de una proposición, a saber: o bien la saturación de una función por un objeto, o bien que una función caiga en el dominio de los argumentos de otra función, como ocurría en el caso de los cuantificadores. En consecuencia cada enunciado **b** expresará un pensamiento, ya que las dos condiciones básicas quedan siempre garantizadas.

(iii) Si asumimos que cada nombre de función pertenece a la jerarquía que expusimos en el parágrafo 3 tiene una denotación, entonces cada enunciado **b** que así haya sido formulado tendrá también una denotación. De hecho, lo que tendríamos que asumir es que los signos de los nombres propios siempre denotan un objeto y que el de los nombres de las funciones por lo mismo siempre tendrían una denotación[32].

(iv) En consecuencia, el pensamiento expresado por cada enunciado **b** conducirá al que lo comprenda al objeto que representa el valor de verdad que resulte: o la verdad o la falsedad. Puesto que nuestros nombres primitivos tienen siempre denotación y ya que cada enunciado **b** está compuesto por un número finito de combinaciones de estos nombres primitivos, el pensamiento expresado por el enunciado **b**, es decir su sentido, nos proporcionará las condiciones bajo las cuales el enunciado **b** en cuestión designa la verdad o lo falso[33]. Por consiguiente, cada enunciado **b** habría de ser considerado como un nombre propio que denota un valor de verdad.

(v) Finalmente, tanto el sentido como la denotación de cada enunciado **b** es una función de cada uno de los sentidos y denotaciones de las palabras que ocurren en él.

5. Consideremos ahora un enunciado en el que ocurran palabras de numerales. Si fuéramos capaces de exhibir un enunciado **b** correspondiente, también podríamos

exhibir cuales son los constituyentes que intervienen en el enunciado. No necesitamos indicar que uno de los constituyentes serán los numerales que ocurran en él. De acuerdo al principio de composición, el sentido de un numeral es su particular contribución a la expresión completa del pensamiento. Sabemos, no obstante, que el sentido de un enunciado **b** en donde ocurre un numeral expresa las condiciones que hacen posible que tal enunciado denote una valor de verdad: o lo verdadero o lo falso; en consecuencia, habría que identificar la función particular que lleva a cabo el numeral cuando el enunciado expresa un pensamiento.

En estas condiciones estaríamos justificados a explicar las condiciones bajo las cuales un enunciado **b** sobre númerales denotaría un valor de verdad. Sin embargo, como hicimos notar, más arriba, un pensamiento sólo llega a expresarse cuando un objeto cae dentro de la extensión de un concepto, o en su caso, cuando una función cae dentro de la extensión de otra función. La función que desempeña un numeral en un enunciado **b** debe de ser o bien de objeto, o bien de función. Así pues, identificar la función, que desempeña el numeral dentro del enunciado es dar el sentido que tiene el numeral en particular dentro del enunciado **b**.

Una vez que haya sido identificada la contribución del numeral en el sentido completo del enunciado **b**, estaremos en la posición de decidir cuál es su significado (denotación); es decir, la clase de entidad denotada por el numeral para que el pensamiento que expresa el enunciado se convierta en una dirección a seguir para descubrir su valor de verdad. A fin de exhibir los constituyentes que intervienen en los enunciado de numerales, es preciso mostrar:

(i) el correspondiente enunciado **b** en donde interviene el numeral,

(ii) la contribución particular del numeral en el pensamiento que expresa el enunciado **b**,

(iii) la entidad denotada por el propio numeral.

6. Unas de las intuiciones básicas que se encuentran detrás del uso común de los numerales consiste en contar. Los números sirven esencialmente para contar cosas. Con los números somos capaces de contar cosas tan diferentes como lápices, sillas, estrellas del firmamento, páginas de un libro o habitantes de Chicago. Enunciados como «Hay tres lápices en mi mesa» o «Chicago tiene cerca de cinco millones de habitantes» se utilizan normalmente para responder a la cuestiones como: ¿cuántos lápices hay en mi mesa? o ¿cuántos habitantes tiene Chicago? Desde un punto de vista estrictamente gramatical todos esos enunciado demuestran que los numerales se utilizan como adjetivos. Aparecen como propiedades de cosas como los lápices que hay en mi mesa o de los habitantes que existen en Chicago. Consideremos a continuación el siguiente enunciado:

(7) Hay tres lápices en mi mesa

Si suprimiéramos la expresión «lápices en mi mes» del enunciado (7), obtendríamos:

(8) Hay tres . . .

Si habláramos de estrellas en el firmamento o de habitantes de Chicago, el enunciado (8) sería falso, y de nuevo volvería a ser verdadero, si rellenásemos el espacio vacío de los tres puntos con la expresión «personas que acusaron a Sócrates». Para completar el sentido del enunciado (8), tenemos que proporcionarle un concepto de primer orden con argumentos de tipo 1 y así (8) abstendrá una denotación. No podemos utilizar en su lugar el nombre de un objeto, no tiene sentido -argumenta Frege- preguntar cuántos es un objeto. Los objetos en la semántica de Frege son completos en sí mismos y carecen de partes adicionales; en consecuencia cualquier pregunta acerca de cuántos son las partes de un objeto está desprovista por completo de sentido.

El análisis anterior parece sugerir que el enunciado **b** correspondiente al enunciado (8) sería:

(9) Existen algunos bs tal que F(b).

Este enunciado es un concepto de segundo orden capaz de admitir argumentos de tipo 1. Consideremos a continuación otro grupo de enunciados en los que intervengan numerales. Por ejemplo: «2 + 5 = 7», «Tres es un número primo»,etc. En estos enunciados el numeral ocurre como si fuera un nombre. De hecho, leemos los enunciados anteriores como «El número 7 es el mismo número que obtenemos al añadir el número 5 al número 2» o simplemente «El número 3 es un número primo». El primer enunciado expresaría una relación de identidad. Sabemos además que la relación de identidad es una función de primer orden con argumentos del tipo 1; en consecuencia, solo podemos completar el sentido de una relación si rellenamos sus lugares vacíos con nombres de objetos. Lo que sugiere que el correspondiente enunciado **b** del enunciado «2 + 5 = 7» sería:

(10) . . . + . . . = . . .

En donde el símbolo «+» se encuentra en lugar por una función de primer orden cuyo valor de verdad es siempre un objeto. Podemos, por consiguiente, estar justificados en concluir que los numerales son nombres de objetos. Podemos apoyar la misma conclusión si volvemos a considerar el criterio gramatical. Dijimos en el parágrafo 4 que el artículo definido «el» indicaba que la expresión que presidía era un objeto. Aplicando el mismo criterio al enunciado «el número 3 es un número primo», la expresión el número . . . tendría que denotar un objeto[35]. Así que podemos analizar el enunciado «el número 3 es un número primo» como:

(11) . . . es un número primo, en donde la expresión es un número primo constituye un concepto de primer orden con argumentos de tipo 1. En consecuencia, el enunciado (11) denotará la verdad o lo falso, si y solamente si los argumentos que rellenen sus lugares vacíos son nombres de objetos.

Del análisis de los enunciados en donde ocurren los numerales hemos derivados tres enunciados **b** diferentes, a saber: (9), (10) y (11), de manera que ahora podemos preguntarnos qué podemos sacar en claro de ellos a la hora de determinar el sentido de los numerales. El enunciado (9) representa un concepto de segundo orden. Con los conceptos de segundo orden de esta clase le atribuimos una determinada propiedad al concepto de primer orden F(b). Decir que hay cierto número de bs tales que F(b) significa asignarle al concepto de primer orden F(b) el número n, de manera que si n es número de bs que caen bajo el concepto F(b), entonces n pertenece al concepto F(b). Tomando el concepto F(b) como el sujeto real, n es solamente un elemento en el predicado[36]; lo cual nos indica que el sentido de un enunciado **b** sobre números es una afirmación acerca de un concepto de primer orden, en el que el nombre del número demuestra encontrarse en lugar de un objeto. La tesis de que los numerales demuestran ser nombres de objetos parece estar confirmada por los enunciados (10) y (11).

Sabemos, por consiguiente, que los números son nombres de objetos y que adjudicamos esos objetos a concepto de primer orden; con todo aún no hemos explicado el significado que supuestamente tienen esos números. Hemos inferido a partir de la contribución que los numerales hacen en el sentido del enunciado que son nombres de objetos; pero no hemos identificado qué clase de objetos son denotados por los numerales. Entre las cosas que hemos considerado como objetos, encontramos valores de verdad, extensiones de conceptos, cursos de valores de funciones y, presumiblemente, los diferentes objetos denotados por nombres propios lógicos.

Por otra parte, tenemos que considerar que si los números son objetos, cómo vamos a distinguirlo de otros objetos. Deberíamos de contar con un criterio de individualización que nos permitiera reconocerlos como tales y distinguirlos de otros objetos. Para empezar, tengamos en cuenta que un enunciado que exprese un identidad denotaría la verdad si y solamente si el objeto denotado por el primer nombre es el mismo que el que denota el segundo nombre. No podemos, si hablamos con cierta propiedad, contar con un criterio específico en donde los objetos relacionados con la relación de identidad tengan cierta entidad como la tiene los libros, los lápices o los habitantes de Chicago. Que un enunciado como «Este libro es el mismo que el que yo estaba leyendo la otra noche» denote la verdad depende de:

(i) que los dos nombres denoten un objeto

(ii) nuestra habilidad de identificar los objetos a partir de la comprensión de sus respectivos sentidos.

(iii) nuestro reconocimiento de que los objetos nombrados por los nombres que se han usado denoten en efecto el mismo objeto.

En el caso de los libros, los objetos denotados son bastantes cotidianos. En general el criterio que podemos utilizar para identificar todos esos objetos varía una y otra vez según sea la naturaleza de los objetos que queramos identificar. Los libros no se identifican como lo hacemos con las personas y las personas no se identifican como lo hacemos con los lápices. Lo que se ha de resaltar, sin embargo, en este caso particular es que tenemos a nuestra disposición objetos a lo que normalmente se refieren nuestros nombres comunes y hace que estemos justificados en esperar encontrar un valor de verdad para los enunciados en los ocurren precisamente ese tipo de nombres.

Sin embargo, a diferencia de los objetos comunes denotados por los nombres propios y comunes, no podemos completar el sentido de un enunciado de identidad en el que los argumentos solo admiten numerales: aún no hemos resuelto la clase de entidad a la que se refieren las palabras que empleamos normalmente para referirnos a los números. Si un enunciado como «El número que pertenece a el concepto lápices en mi mesa es el mismo que el número que pertenece al concepto personas que acusaron a Sócrates» se refiere a la verdad, se supone que tenemos que ser capaces de reconocer al número 3 en ambos lados de la igualdad; y al hacerlo así identificamos al objeto denotado por el numeral 3. Solo así -sostiene Frege- cuando hemos adquirido el medio de llegar a un número determinado y de volverlo a reconocer como el mismo, estamos en disposición de asignarle al numeral su objeto correspondiente[37].

El criterio para identificar a dos números como el mismo nos lo proporciona la correspondencia biunívoca: dados dos conceptos F(a) y G(b), el número que pertenece al concepto F(a) es el mismo que el que pertenece al concepto G(b), si hay una relación T que pone en correlación biunívocamente los as que caen bajo el concepto F(a) con los bs del concepto G(b)[38].

T es una correspondencia biunívoca si:

—para cada argumento **a** existe exactamente un argumento b, tal que el valor de verdad de la relación T es la verdad; y

—para cada argumento **b** existe exactamente otro argumento a, tal que el valor de la relación T es la verdad.

Resaltar tan solo que ambas condiciones son expresadas por enunciados que hemos llamado enunciados **b**; son conceptos de segundo orden con argumentos de tipo 2. Sus espacios vacíos para argumentos son los adecuados para admitir relaciones de primer orden con dos argumentos de tipo 1. Siguiendo la sugerencia de Frege, los conceptos de segundo orden se pueden representar en cierta manera mediante conceptos de primer orden en el caso en que los conceptos que aparezcan como argumentos del primero sean representados por sus extensiones[39]. Por consiguiente, si tomamos la extensión de la relación T, rebajamos en un orden la categoría lógica del concepto. Para definir la extensión de la relación T es necesario en primer lugar definir previamente las extensiones de los conceptos F(a) y de G(b); en ese caso la relación T se mantiene entre dos objetos, a saber: entre la extensiones de los conceptos F(a) y G(b). Esta relación se convertiría entonces en el valor de verdad que toma la función que define a los conceptos F(a) y G(b) como equinuméricos[40].

Sabemos ya cuándo dos conceptos son equinuméricos; con todo, como por el momento ignoramos qué clase de objetos son denotados por los numerales, todavía no estamos justificados a utilizar con sentido los numerales como nombres de objetos. A fin de determinar el objeto, consideremos el siguiente enunciado:

(12) ef(a) T eg(b)

El concepto que expresa el enunciado (12) es una relación de primer orden cuyos argumentos son las extensiones de los conceptos F(a) y G(b). Nos dice que las extensiones de esos conceptos son numéricamente equivalentes. Si del enunciado (12) suprimimos la segunda expresión, obtenemos entonces:

(13) ef(a) T . . .

Tal enunciado representa un concepto numéricamente equivalente a F(a); precisamente la extensión de este último es denotada por los numerales que pertenecen al concepto F(a)[41]. El significado de un numeral, en consecuencia, es la extensión de un determinado concepto. La definición completa debería de ser más o menos como sigue: el número que pertenece al concepto F(a) es la extensión del concepto numéricamente equivalente al concepto F(a)[42].

Tomemos, a fin de ilustrar la clase de objetos a la que se refieren los numerales, un concepto bajo el que no caiga objeto alguno, por ejemplo: el concepto *de anfibios con pelo.* Bajo el número que pertenece a este concepto caeríam todas aquellas extensiones de conceptos que sean equinuméricas con él, es decir, todas aquellas extensiones de conceptos que sean vacíos. Así el número 0 se define como la clase cuyos miembros son las extensiones de todos aquellos conceptos, que no tienen miembros y que se encuentran entre sí manteniendo la relación de equinumerocidad.

En general, para cada concepto elegido deberá de haber un número que le pertenezca. Si tomamos la extensión de este concepto como el argumento en la relación *de ser igual en número a él*, definimos un concepto, a saber: el concepto de ser igual en número a él, cuyos argumentos son precisamente las extensiones de todos aquellos conceptos que caen bajo él. El que una extensión se convierta en un argumento propio y genuino para otro concepto no tendría que sorprendernos. Tal y como se expuso en el parágrafo 3, las extensiones de los conceptos son perfectamente admisibles como argumentos de tipo 1.

Es esta condición, sin embargo, además de la estipulación de la existencia de un objeto como extensión para cada concepto de primer orden, la que se muestra como la responsable de la aparición de la paradoja[43], que obligó a Frege a reconsiderar algunos de los postulados en los que originariamente basó su intención de fundamentar la aritmética en la lógica[44].

Establezcamos el concepto C como ser una extensión que no se pertenezca a sí misma. Bajo este concepto caerán todas aquellas extensiones -tomadas como objetos- que no caigan bajo los conceptos de los que son precisamente sus extensiones. Por ejemplo, la extensión del concepto ser un ser humano será uno de los objetos que caigan dentro del concepto C, ya que su extensión no es propiamente hablando un ser humano. Y ya que a cada a cada concepto de primer orden le corresponde su extensión, también podemos hablar de la extensión que le corresponde al concepto C. Una vez más esta extensión es un objeto genuino, un argumento perfecto para cualquier concepto de primer orden. Llamemos a la extensión del concepto C cf(c) y consideremos a continuación la siguiente expresión incompleta:

(14) . . . es un C

Para cada argumento de tipo 1 que rellene el hueco de la expresión en (14), seremos capaces de decidir si el enunciado correspondiente denota o no la verdad. Supongamos que decidimos rellenar el espacio vacío con cf(c), obtendríamos entonces:

(15) cf(c) es un C

¿Qué valor de verdad denotaría el enunciado (15): la verdad o lo falso? Si fuera la verdad, cf(c)) caería bajo el concepto C y, en consecuencia, la extensión cf(c) pertenecería a sí misma y en ese caso, cf(c) no pertenecería a sí misma. Si el enunciado (15) denotara lo falso, cf(c) no caería bajo el concepto C y, por consiguiente, la extensión no pertenecería a sí misma. Por el mismo razonamiento, sin embargo, pertenece a sí misma. Obtenemos así una contradicción, el enunciado (15), que es un perfecto enunciado **b**, carecería de valor de verdad, a menos que la lógica dejara de lado el viejo principio del tercio excluso. Frege nunca llegó reponerse del devastador efecto que tuvo sobre su sistema el descubrimiento de esta contradicción por parte de Bertrand Russell y en *Las Leyes Básicas de la Aritmética* escribió: «¿Cuál debería de ser nuestra actitud frente a esto? ¿Vamos a suponer que la ley del tercio excluso deja de ser válida para las clases? ¿O vamos a suponer que hay casos en los que a un concepto que no sea excepcional no le corresponda clase alguna como su extensión?»[46].

NOTAS

1. RHS: p. 93
2. FOATH: P. 2
3. BGF: p. 103
4. OSJB: pp. 84-85
5. Ibidem p. 85
6. BGF p. 105
7. FOATH: p. x
8. GRGTZ: p. 90
9. POWRT: p. 127
Ibidem: p. 134
10. FOATH: p. 71
11. Ibidem: p. 5, nota al pie de página n. 1
12. BGF: p. 127
13. OCAO: p. 183
14. Ibidem: p. 185
15. Ibidem: p. 187
16. Ibidem p. 193
17. Ibidem p. 190
18. GRGTZ p. 77
19. Ibidem p. 36
20. Ibidem pp.77-78
21. Ibidem p.37
22. Ibidem p. 78
23. Ibidem p. 45
24. Ibidem p. 36
25. Ibidem p. xxxvii
26. Ibidem p. 95
26'. Ibidem p.44
27. Ibidem p. 34
28. Ibidem p. 35
29. Ibidem p. 36
30. FOATH p. 63: «sólo cuando se encuentra unido al artículo definido o al pronombre demostrativo se puede contar como un nombre propio de una cosa». Y también en OCAO: p. 184
31. GRGTZ: p. 37
32. Ibidem: p. 84
33. Ibidem: p. 87
34. Ibidem: p. 90
35. FPHL: pp. 262-263
36. FOATH: p. 68
37. Ibidem : p. 73
38. Propiamente hablando, una correspondencia biunívoca no es una relación; pero «relación» es según parece la palabra que utiliza Frege. Si fuera una relación, su campo o extensión estaría compuesto por el conjunto de todos los conjuntos, noción que podría dar lugar a algunas paradojas.
39. GRGTZ: p. 79
40. Ibidem: p. 99
41. Ibidem
42. Ibidem y FOATH: p. 79
43. Según parece, el responsable en último extremo de la paradoja es el criterio gramatical. Con arreglo

a este criterio somos capaces de identificar a los numerales como nombres de objetos. Si los numerales nombran objetos, sus extensiones serán objetos también, de lo contrario no estaríamos justificados a usarlos como nombres.

44. GRGTZ: p. 127
45. Ibidem: p. 128
46. GRGTZ: p. 128

Bibliografía

—Church, Alonzo [NAET]: «The Need fo Abstract Entities for Semantic Analysis». Reinpreso en J. J. Katz y J. A. Fodor (edis.): *The Structure of Language:* pp. 437-445. Englewood Cliffs, N. J., Printice Hall, 1964.

—Dummet, Michael [FPHL]: *Frege's Philosophy of Language*. Cambridge: Harvard University Press, 1981.

—Frege, Gottlob [RHS]: «Review of H. Seeger: Die Elemente der Arithmetik». In Frege: *Collected Papers on Mathematics, Logic and Philosophy*, pp. 93-94. Eidtado por Brian Mc. Guinness. Oxford: Basil Blackwell, 1984.

—[OSJB] «On the Scientific Justification of a Conceptual Notation». En *Conceptual Notation and Related Articles*, pp. 83-89. Editado y traducido al inglés por Terrel Ward Bynum. Oxford: Clarendon Press, 1972.

—[BGF] *Conceptual Notation and Related Articles.* Editado y traducido al inglés por Terrel Ward Bynum. Oxford: Clarendon Press, 1972.

—[FOATH] *Foundations of Arithmetic.* Traducido al inglés por J. L. Austin. Oxford: Basil Blackwell, 1978.

—[FAC] «Function and Concept». En Frege: *Collected Papers on Mathematics, Logic and Philosophy*, pp. 137-156. Editado por Brian Mc. Guinness. Oxford: Basil Blackwell, 1984.

—[OSAM] «On Sense and Meaning». En Frege: *Collected Papers on Mathematics, Logic and Philosophy*, pp. 137-156. Eidtado por Brian Mc. Guinness. Oxford: Basil Blackwell, 1984.

—[OCAO] «On Concept and Object». En Frege: *Collected Papers on Mathematics, Logic and Philosophy*, pp. 182-194. Eidtado por Brian Mc. Guinness. Oxford: Basil Blackwell, 1984.

—[GRGTZ] *The Basic Laws of Arithmetic.* Traducido al inglés por Montgomery Furth. Berkeley; Universtiy of California Press, 1982.

—[POWRT] *Posthumous Writings.* Editado por Hans Hermes y otros, traducido al inglés por Peter Long y Roger White. Chicago: The University of Chicago Press, 1979.

* * *

Enrique F. Bocardo
Universidad de Sevilla
Facultad de Filosofía
Avda. de S. Francisco Javier s.n.
41005 Sevilla