Universidad de Sevilla

Máster Universitario en Matemáticas

# Soluciones para juegos en contextos formales

Autor

*Juan Carlos Rodríguez Gómez*

Tutores

Don Andrés Jiménez Losada
Don Manuel Ordóñez Sánchez

Dpto. de Matemática Aplicada II
Escuela Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla 2021

# Agradecimientos

Transmitir mi más sincero agradecimiento a todos aquellos que me han ayudado a lo largo de esta etapa y han colaborado en esta investigación.

En primer lugar, a mis tutores, Andrés Jiménez y Manuel Ordóñez, por su ayuda en la planificación, información y organización en este Trabajo de Fin de Máster.

En segundo lugar, a mi familia, que han estado a lo largo de toda mi carrera apoyándome en todo momento y animándome a seguir adelante.

También, expresar mi más sentido agradecimiento a la Universidad de Sevilla y a la Facultad de Matemáticas, por acogerme dentro de sus aulas y hacerme sentir como en casa. Después de este período de investigación escribo este apartado de agradecimientos para finalizar mi TFM. Sin duda, ha sido un período de aprendizaje científico y personal.

Desarrollar este estudio ha tenido un gran impacto en mi persona y es por eso que me gustaría agradecer a todas aquellas personas que me han apoyado durante este proceso.

A todos ellos, mil gracias.

# Índice general

Introducción General . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

**1. Juegos cooperativos** **10**

1.1. Juegos de utilidad transferible . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10

1.2. El Core y conceptos relacionados . . . . . . . . . . . . . . . . . 13

1.3. El valor de Shapley . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25

1.4. Juegos convexos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30

1.5. Algunas Aplicaciones de los Juegos TU . . . . . . . . . . . . . 32

**2. Juegos cooperativos en contextos formales** **40**

2.1. Contextos formales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 40

2.2. Juegos en contextos formales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44

2.3. El valor de Shapley para juegos sobre contextos formales . . . 48

2.4. El core de un juego de conceptos . . . . . . . . . . . . . . . . . 60

**3. Valores de compromiso en contextos formales** **72**

3.1. Valores de compromisos clásicos . . . . . . . . . . . . . . . . . 73

3.2. Contextos regulares . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 77

3.3. $\tau$-Valores . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 82

3.4. $\chi$-Valores . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 88

3.5. Comparativa de los valores de compromiso . . . . . . . . . . . 98

3.6. Axiomatizaciones y el Core . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99

# Introducción General

En la teoría de juegos cooperativos, asumimos que los jugadores se comportan de tal forma que ya no solo sus estrategias están orientadas a conseguir sus propios objetivos de manera unilateral, maximizando sus beneficios (o minimizando sus costes). Por el contrario, están dispuestos a cooperar entre ellos para poder así conseguir más de lo que pueden conseguir de manera individual. La principal cuestión es, una vez que han cooperado, ¿cómo se pueden repartir los beneficios entre ellos de manera racional y justa?. Este estudio se centra en esa cuestión, donde los jugadores van a formar distintos subgrupos, a los que llamaremos *coaliciones*, con unos beneficios que cada coalición puede conseguir, sin tener en cuenta lo que otros jugadores hagan fuera de ella.

El conjunto de jugadores se denota por $N := \{1, ..., n\}$. Para cada $S \subset N$, nos referimos a $S$ como una coalición, siendo $|S|$ el número de jugadores en $S$. A la coalición $N$ se le llama la *gran coalición*.

Centraremos el estudio en los *juegos de utilidad transferible* y en los conceptos de soluciones. Siendo un concepto solución aquél en el que el reparto que se asigna a cada jugador es eficiente, es decir, la suma de las asignaciones que se dan a cada jugador es igual a la asignación que obtiene la gran coalición. Además tiene que ser racionalmente individual; cada jugador no puede obtener menos de lo que pueden obtener por sí mismo. Estos dos axiomas dan lugar al conjunto de soluciones llamado *conjunto de imputación*. A este último concepto de solución se le añade el concepto de racionalidad coalicional, que consiste en que al conjunto de imputación se le exige que cada coalición que se forma en el juego también debe cumplir la racionalidad individual. Llegando al concepto de solución llamado *core*. En este estudio se demostraran los conceptos de solución anteriormente mencionados así como sus axiomas de caracterización. Introduciremos el concepto de juegos cooperativos en contextos formales y retículo de conceptos. De esta clase de juegos, nace un nuevo concepto de solución, el cual se denomina, *valores de compromisos*. Presentaremos el estudio del $\tau$-Valor y el $\chi$-Valor, tanto en los juegos clásicos como su aplicación en los juegos en contextos formales. Se estudiaran distintas formulaciones dependiendo del punto de vista de la estructura del retículo que forma el juego, así como su axiomática.

Un contexto formal de un juego cooperativo es aquel al que a cada jugador se le asigna un handicap, es decir, un atributo o varios, que le hace menos atractivo a la hora de unirse a una coalición. Un contexto formal se representa con la tabla de asignaciones, una tabla donde están representados todos los jugadores y todos los handicap posibles. En esta tabla se le asigna un 1 si el jugador $i$ posee el handicap o un 0 en caso contrario. De la tabla de incidencia obtenemos el retículo de conceptos, que simplemente es una representación gráfica en forma de retículo, donde se representan las distintas coaliciones que se van formando, desde el bottom, que es la parte más inferior del retículo (aquí se encuentran los jugadores que poseen todos los handicaps) hasta el top , en la parte superior, que es donde está representada la gran coalición (la cual no posee ningún handicap). Este tipo de juegos en contextos formales se presenta por primera vez en el articulo *Games on concept lattices: Shapley value and core* (2014 [21])

En el primer capitulo se introduce los juegos cooperativos de utilidad transferible, así como el concepto solución dado por Shapley y el core. En esta sección estudiaremos problemas de negociación coalicional. En uno de tales problemas, un conjunto de jugadores, que dispone de mecanismos para tomar acuerdos vinculantes, debe decidir cómo repartirse los beneficios de su cooperación. A diferencia de lo que ocurría en los problemas de negociación simple, ahora no es necesaria la unanimidad para que un reparto sea adoptado, sino que puede haber algunos grupos de jugadores capaces de forzar determinados repartos. También supondremos que los beneficios generados por los grupos de jugadores (a los que denominamos coaliciones) pueden repartirse libremente entre ellos. Por eso, en realidad, trataremos con problemas de negociación coalicional con *utilidad transferible*. Para caracterizar uno de tales problemas usaremos los llamados juego cooperativos con utilidad transferible (abreviadamente *juegos TU*). Las diferentes coaliciones que se pueden formar entre los jugadores en $N$ pueden exigir ciertas asignaciones. El problema es decidir como los beneficios generados por la cooperación de los jugadores pueden ser repartidos entre ellos. Dada una coalición $S$ denotamos por $v(S)$ las posibles asignaciones $x \in \mathbb{R}^S$ de utilidad para los jugadores si la coalición se forma. Si $x \in v(S)$ entonces que la utilidad sea transferible significa que todas las posibles asignaciones que se pueden obtener de $x$ por transferencia de utilidades entre los jugadores en $S$ también pertenecen a $v(S)$. Por lo tanto, $v(S)$ puede ser caracterizado por un único número, dado por $\max_{x \in v(S)} \sum_{i \in S} x_i$, es decir, la suma del máximo que cada jugador puede conseguir. A este número $v(S)$ se le llama *valor* de la coalición $S$, como el beneficio que puede generar. Sea $G^N$ la clase de juegos TU con $n$ jugadores. Estudiaremos dos aplicaciones de gran utilidad en este tipo de juegos. En el segundo capítulo se introduce los juegos en contextos formales y el retículo de conceptos. Para este tipo de juegos también estudiaremos el valor de Shapley y el core. En el tercer capítulo se hace una breve introducción de los valores de compromiso en juegos cooperativos de utilidad transferible. Se define que es un contexto regular y un algoritmo para la regularización de contextos. La aportación de este estudio recae en una nueva visión en el campo de los juegos de utilidad transferible en contextos formales, en especial, sus valores de compromiso ($\tau$-Valor y $\chi$-Valor) así como su axiomática.

# Capítulo 1

# Juegos cooperativos

## 1.1. Juegos de utilidad transferible

Los juegos cooperativos de utilidad transferible describen situaciones donde un grupo de agentes cooperan para obtener un beneficio común dado por un único pago para el grupo que debe repartirse entre ellos de forma razonable. Para ello se conocen los beneficios que obtendrían las posibles subcoaliciones de agentes.

**Definición 1.1.1.** *Un juego TU es un par* $(N, v)$*, donde* $N = \{1, ..., n\}$ *es el conjunto de jugadores y* $v : 2^N \to \mathbb{R}$ *es la función característica del juego. Por convención,* $v(\emptyset) := 0$*.*

Dada una coalición $S \subset N$, $v(s)$ representa los beneficios que se pueden asegurar los jugadores de S, independientemente de cómo actúe el resto de jugadores. Por simplicidad, identificaremos $(N, v)$ con su función característica de $v$. El conjunto de juegos sobre $N$ se denotará por $G^N$.

**Ejemplo 1.1.1**.- (*Reparto de un millón*). Una persona deja una herencia de un millón de euros a tres herederos, con la condición de que al menos dos de ellos lleguen a un acuerdo sobre cómo efectuar el reparto; si tal acuerdo no es alcanzado, el millón se donará a una institución benéfica. Esta situación se puede representar como el juego $(N, v)$ tal que $N = \{1, 2, 3\}$, $v(1) = v(2) = v(3) = 0$ y $v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = v(N) = 1$.

**Ejemplo 1.1.2**.- (*El juego del guante*). Tres jugadores están dispuestos a repartirse los beneficios derivados de la venta de un par de guantes. El jugador uno tiene un guante izquierdo y los jugadores dos y tres tienen un guante derecho cada uno. Un par de guantes se puede vender por una centena de euros. Esta situación se puede representar como el juego $(N, v)$ con $N = \{1, 2, 3\}, v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0$ y $v(12) = v(13) = v(N) = 1$.

**Ejemplo 1.1.3**.- (*El Parlamento de Aragón, 1991*). Este ejemplo muestra que los juegos TU pueden ser utilizados para describir problemas de negociación coalicional en el que los jugadores negocian con algo más abstracto que el dinero. Consideramos el Parlamento de Aragón surgido de las elecciones de mayo de 1991, cuya composición era: PSOE (Partido Socialista Obrero Español) 30 diputados, PP (Partido Popular) 17 diputados, PAR (Partido Aragones Regionalista) 17 diputados, e IU (Izquierda Unida) 3 diputados. Medir el poder de los diferentes partidos en un Parlamento es una cuestión de gran interés. Obsérvese que, en cierto sentido, medir el poder es lo mismo que asignar de modo razonable una fracción del poder total. Así pues, un Parlamento puede representarse como un juego TU en el que un grupo de jugadores (los partidos) tratan de repartirse el poder. Como las decisiones más relevantes en un Parlamento se toman usando la regla de la mayoría simple, diremos que una coalición tiene todo el poder si dispone más de la mitad de los votos, 34 en este ejemplo. Por tanto, este Parlamento se puede representar como el juego $(N, v)$tal que $N = \{1, 2, 3, 4\}$ $(1 = PSOE,\ 2 = PP,\ 3 = PAR,\ 4 = IU)$, $v(S) = 1$ si existe $T \in \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ con $T \subset S$ y $v(S) = 0$ en otro caso. Nótese que para indicar que $S$ tiene todo el poder hacemos $v(S) = 1$.

**Ejemplo 1.1.4**.- (*La profesora visitante*). Tres grupos de investigación pertenecientes a las universidades de Amsterdam (grupo uno), Glasgow (grupo dos) y Sevilla (grupo tres) planean invitar a una profesora de la Universidad de Oregon a impartir un curso de forma que la profesora visitará Amsterdam, Glasgow y Sevilla en el mismo viaje. Los grupos quieren repartir el coste de tal viaje. Con ese propósito, se ha estimado el coste en euros de los viajes correspondientes a las visitas a las posibles coaliciones de grupos: $c(1) = 1500$, $c(2) = 1600$, $c(3) = 1900$, $c(12) = 1600$, $c(13) = 2900$, $c(23) = 3000$, y $c(N) = 3000$ (para cada $S$, $c(S)$ indica el coste del viaje para visitar a los grupos de $S$). Tomando $N = \{1, 2, 3\}$, obtenemos el juego $(N, c)$. Obsérvese que $(N, c)$ es un juego TU de los denominados *juegos de coste*, en el sentido de que, para cada $S$, $c(S)$ representa los costes asociados a esa coalición y no los beneficios que genera. El *juego de ahorro* asociado a esta situación, que nos da los beneficios que genera cada coalición, es $(N, v)$ donde, para cada $S \subset N$,

$$v(S) = \sum_{i \in S} c(i) - c(S)$$

Por lo tanto, $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(12) = 1500$, $v(13) = 500$, $v(23) = 500$ y $v(N) = 2000$.

Los ejemplos anteriores muestran que un amplio espectro de situaciones se pueden describir usando juegos TU. Veamos ahora una clase de juegos TU especialmente importante.

**Definición 1.1.2.** *Un juego-TU $v \in G^N$ es superaditivo si, para cada par de coaliciones $S, T \subset N$, con $S \cap T \neq \emptyset$, se tiene que*

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$$

Denotamos por $SG^N$ el conjunto de juegos TU de $G^N$ que son superaditivos. Obsérvese que en un juego superaditivo los jugadores tienen auténticos incentivos para la cooperación, en el sentido de que la unión de dos grupos disjuntos cualesquiera no provoca na disminución de los beneficios. De hecho, la teoría de los juegos TU se ha desarrollado principalmente para los jegos superaditivos, aunque por simplicidad se presente para la clase completa $G^N$. Notemos que los juegos de los ejemplos anteriores son todos superaditivos con excepción del juego $c$ del ejemplo de *la profesora visitante*.

El objetivo principal de la teoría de juegos TU es proponer, para cada juego TU, una asignación o un conjunto de asignaciones que pueda ser aceptado por todos los jugadores involucrados en el problema. Un primer enfoque para alcanzar este objetivo está basado en la idea de *estabilidad*: se trata de encontrar un conjunto de asignaciones que sea estable, en el sentido de que cabe esperar que el acuerdo finalmente adoptado por los jugadores sea un elemento de dicho conjunto. Éste es el enfoque subyacente, por ejemplo, en el *core* (Guillies,1953 [2]), los *conjuntos estables* (von Neumanny Morgenstern, 1944 [3]) y el *conjunto de negociación* (Aumann y Maschler, 1964 [5]). En la mayoría de los casos, el cómputo de los juegos estables es muy complicado ya que hay juegos con infinitos conjuntos estables. En contraposición, hay juegos para los cuales no existen conjuntos estables (Lucas [4]). El segundo enfoque está basado en la idea de *ecuanimidad*: trata de proponer para cada juego TU un reparto ecuánime que sea aceptable para los jugadores. Éste es el enfoque subyacente, por ejemplo, en el *valor de Shapley* (Shapley, 1953 [7]), el *nucleolo* (Schmeidler, 1969 [10]), el $\tau - value$ (Tijs, 1981 [11]) y el $\chi - value$ (Bergantiños y Massó [12]). En este estudio sólo trataremos el valor de Shapley, el $\tau - value$ y el $\chi - value$ desde el enfoque de la teoría algebraica de conjuntos parcialmente ordenados y retículos.

## 1.2. El Core y conceptos relacionados

En esta sección estudiamos el más importante de los conceptos relacionados con la idea de estabilidad: el core. Para un juego $v \in G^N$, el core es un subconjunto del conjunto de imputaciones, donde una imputación es una división de $v(N)$ entre todos los jugadores de forma que ningún jugador $i$ reciba menos que $v(i)$, la cantidad que puede garantizarse por sí mismo.

Cada vector $x = (x_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^n$ se denomina *asignación* o *vector de pago*, ya que la coordenada $x_i$ representa el pago al jugador $i$. Una asignación $x$ es *eficiente* si distribuye exactamente el valor de la coalición $N$ entre los jugadores, es decir,

$$\sum_{i\in N} x_i = v(N)$$

La mayoría de los conceptos de solución propuestos para juegos cooperativos requieren que los vectores de pago eficientes cumplan el llamado *principio de individualidad racional* que exige que el pago a cada jugador $i$ mediante el vector de pago $x$ sea al menos la cantidad que el jugador puede obtener por sí mismo en el juego; esto es para todo $i \in N$

$$x_i \geq v(\{i\})$$

El *conjunto de imputaciones* de un juego TU, $I(v)$, consiste en todas las asignaciones eficientes e individualmente racionales.

**Definición 1.2.1.** *Sea $v \in G^N$. El conjunto de imputaciones de $v$, $I(v)$, se define como:*

$$I(v) := \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i\in N} x_i = v(N) \ \textit{y para cada}\ i \in N, x_i \geq v(i) \right\}$$

El conjunto de imputaciones de un juego superaditivo es siempre no vacío. La racionalidad individual de la asignación en $I(v)$ asegura que ningún jugador deseará salir de la coalición en $I(v)$, ya que no puede conseguir un mayor beneficio por sí mismo. Aunque puede darse el caso que una coalición de jugadores en $I(v)$ no sea racional. Por ello se define el core, donde se impone la racionalidad coalicional de las asignaciones de $I(v)$. Dado un $v \in G^N$, una asignación $x \in \mathbb{R}^N$ es coalicionalmente racional si, para cada $S \subseteq N$ , el vector de pago $x$ verifique

$$\sum_{i\in S} x_i \geq v(S)$$

El conjunto constituido por todos los vectores de pago eficientes que satisfacen estas desigualdades da lugar al concepto solución denominado *core* del juego $v$.

**Definición 1.2.2.** *Sea $v \in G^N$. El core de $v, C(v)$, se define como:*

$$C(v) := \left\{ x \in I(v) : \text{ para cada } S \subset N, \sum_{i\in S} x_i \geq v(S) \right\}$$

El *core* fue introducido por Gillies [2] en 1953 y se considera un concepto muy natural de solución, aunque tiene el inconveniente de que, en muchos casos, es vacío. Para la clase de juegos convexos se puede afirmar que éste es no vacío; no obstante, aún cuando el core sea no vacío, podría ser pequeño para conseguir dar soluciones razonables a ciertos juegos. Esto conduce a la consideración de otros conceptos solución.

Desde el inicio de la teoría de juegos, se han propuestos muchos conceptos de solución. En 1944, von Neumann y Morgenstern [3] introdujeron el concepto de conjunto estable. Los conjuntos estables son descritos en términos de una relación entre imputaciones llamada dominación, y por tanto, requieren que el conjunto de imputaciones sea no vacío.

**Definición 1.2.3.** *Sea $v \in G^N$ un juego TU y sean $S \in 2^N \setminus \emptyset$ y $x, y \in I(v)$. Se dice que $x$* domina *a $y$ a través de $S$ si se cumple:*

1. *$x_i > y_i$, para todo $i \in S$.*
2. *$\sum_{i\in S} x_i \leq v(S)$.*

Se dice que $x$ *domina a* a $y$ si existe una coalición $T \in 2^N \setminus \emptyset$ tal que $x$ domina a $y$ a través de $T$. Se dice que $x$ *es no dominada* si no existe $z \in I(v)$ tal que

$z$ domina a $x$.

Obsérvese que $x$ domina a $y$ a través de $S$ cuando todos los jugadores de $S$ prefieren $x$ a $y$, además, $x$ es alcanzable para $S$, en el sentido de que la cantidad total propuesta por $x$ para los jugadores de $S$ no es superior a la cantidad que los jugadores de $S$ pueden garantizarse por sí mismos. Por tanto, si $x$ domina a $y$, existe alguna coalición con interés y capacidad de vetar $y$. En definitiva, para que una imputación sea realmente estable debe ser no dominada. Esto es lo que le ocurre a las imputaciones del core, tal como se muestra en el resultado siguiente.

**Proposición 1.2.1.** *Sea $v \in G^N$ un juego TU.*

1. *Si $x \in C(v)$, entonces $x$ es no dominada.*
2. *Si, además, $v \in SG^N$, entonces se tiene que $C(v) = \{x \in I(v) : x \text{es no dominada}\}$.*

*Demostración.* Probemos la primera afirmación. Supongamos que $x \in C(v)$ y existe $y \in I(v)$ y una coalición no vacía $S \subset N$ tales que $y$ domina a $x$ a través de $S$. Entonces

$$v(S) \geq \sum_{i \in S} y_i > \sum_{i \in S} x_i \geq v(S),$$

lo cual es una contradicción. Veamos ahora 2). Sea $x$ una imputación no dominada de $v$ y supongamos que no pertenece a $C(v)$. En tal caso existe $S \subset N$ tal que $\sum_{i \in S} x_i < v(S)$. Definamos $y \in \mathbb{R}^N$ del siguiente modo:

$$y_i = \begin{cases} x_i + \frac{v(S) - \sum_{j \in S} x_j}{|S|} & \text{si } i \in S, \\ \\ v(i) + \frac{v(N) - v(S) - \sum_{j \in N \setminus S} v(j)}{|N \setminus S|} & \text{si } i \in N \setminus S. \end{cases}$$

Como $v$ es superaditivo, $y \in I(v)$. Además, $y$ domina a $x$ a través de $S$, lo cual es una contradicción.

■

A continuación veremos varios ejemplos para ilustrar el concepto del core. El primero muestra un juego TU que no es superaditivo y que tiene una imputación no dominada que, sin embargo, no pertenece a su core. Los demás estudian los cores de los ejemplos tratados en la sección anterior.

**Ejemplo 1.2.1**.- Sea el juego $(N, v)$ tal que $N = \{1, 2, 3\}$, $v(1) = v(2) = 0$, $v(3) = 1$, $v(12) = 2$, $v(13) = v(23) = 1$, $v(N) = 2$. Obsérvese que $v(N) < v(12) + v(3)$ y que por tanto, $v$ no es superaditivo. Por otro lado, $C(v) = \emptyset$ y $(1, 0, 1)$ es una imputación no dominada.

En este caso, la coalición $S$ prefiere la distribución $x$ sobre la $y$ porque cada miembro de $S$ obtiene más, y $S$ no sobrepasa su valor con esta imputación.

**Ejemplo 1.2.2**.- Es fácil ver que el core del juego del reparto del millón es vacío, a pesar de que es un juego superaditivo. Esto quiere decir que la situación de negociación descrita por este juego es fuertemente inestable.

**Ejemplo 1.2.3**.- El core del juego del guante es el conjunto unitario $\{(1, 0, 0)\}$. Puede parecer extraño que el único elemento del core de este juego asigne todos los beneficios al poseedor del guante singular. Sin embargo, $(1, 0, 0)$ es la única imputación del juego no dominada, es decir, estable. La interpretación que se puede hacer de este resultado es que el precio de los guantes derechos en el mercado se hace cero ya que hay un exceso de oferta de tales guantes.

**Ejemplo 1.2.4**.- Está claro que el core del juego de ahorro $v$ asociado al problema de la profesora visitante está dado por

$$C(v) = \{x \in I(v) : x_1 + x_2 \geq 1500,\ x_1 + x_3 \geq 500,\ x_2 + x_3 \geq 500\},$$

que es un conjunto no vacío. En la Figura 1.1 representamos los hiperplanos que delimitan $I(v)$ y $C(v)$. A la vista de esto es fácil comprobar que

$$C(v) = conv\{(1500, 0, 500), (1500, 500, 0), (500, 1500, 0), (0, 1500, 500)\}.$$

En la Figura 1.2 representamos $C(v)$ y sus puntos extremos. De hecho, lo que está representando en los dos dibujos de la Figura son $I(v)$ y $C(v)$ como subconjuntos del hiperplano eficiente, que está dado por $\{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N)\}$.

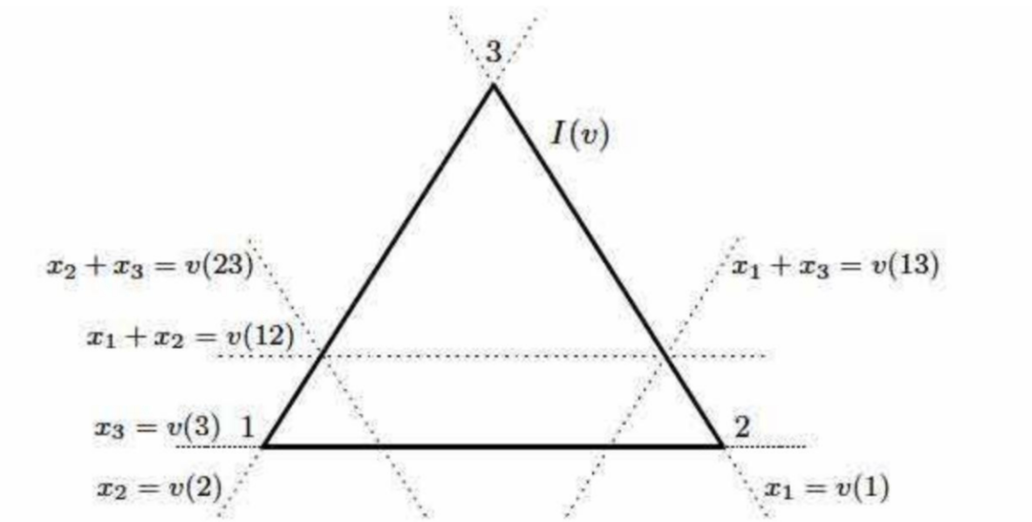



Figura 1.1: El core del juego de la profesora visitante. Hiperplano asociados a $I(v)$ y $C(v)$

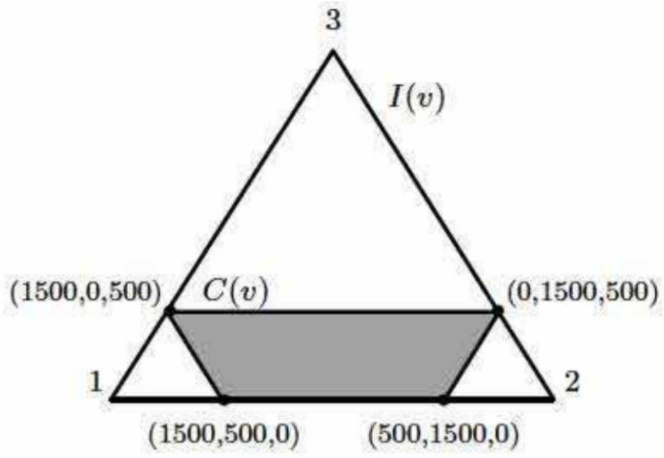



Figura 1.2: El core del juego de la profesora visitante. El conjunto $C(v)$ y sus puntos extremos

Antes de analizar el juego asociado al Parlamento de Aragón vamos a introducir algunos conceptos y resultados.

**Definición 1.2.4.** *Un juego $v \in G^N$ se denomina* simple *si:*

1. *Para toda $S \subset N$, $v(S) = 0$, o $v(S) = 1$.*

2. *$v(N) = 1$*

3. *$v$ es un juego monótono, esto es, $v(S) \leq v(T)$ para cualquiera $S, T \subset N$ con $S \subseteq T$.*

Se denotará por $S(N)$ el conjunto de los juegos simples con conjunto de jugadores $N$. Para un juego simple $(N, v)$ y una coalición $S \subset N$, se dice que $S$ es *ganadora* si $v(S) = 1$; en caso contrario, se dice que $S$ es *perdedora*. Se denotará por $W$ el conjunto de todas las coaliciones ganadoras, es decir, $W = \{S \subset N : v(S) = 1\}$. Es evidente que $N$ es un elemento de $W$ y que si $S \in W$ y $S \subset T$, entonces $T \in W$. Una coalición ganadora es *minimal* si no contiene a ninguna otra coalición ganadora. Se denotará por $W^m$ el conjunto de todas las coaliciones ganadoras minimales, es decir,

$$W^m = \{S \in W : v(T) = 0,\ \forall T \subset S \text{ con } T \neq S\}$$

Nótese que un juego simple puede caracterizarse dando el conjunto de coaliciones ganadoras, o también, dando el conjunto de coaliciones ganadoras minimales.

**Definición 1.2.5.** *Sea $v \in S^N$ un juego simple. Se dice que $i \in N$ es un jugador* veto *de $v(N \setminus i) = 0$.*

**Proposición 1.2.2.** *Sea $v \in S^N$ un juego simple. Entonces $C(v) \neq \emptyset$ si y solo si el conjunto $V$ de jugadores veto es no vacío. Además, si $C(v) \neq \emptyset$ entonces*

$$C(v) = \{x \in I(v) : x_i = 0\ \forall i \in N \setminus V\}.$$

*Demostración.* Supongamos que $C(v) \neq \emptyset$ y que $V = \emptyset$. Tomemos $x \in C(v)$. Entonces, para todo $i \in N,\ x_i = 0$ puesto que

$$0 = v(N) - v(N \setminus \{i\}) \geq \sum_{j \in N} x_j - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j = x_i \geq 0.$$

Esto es obviamente imposible. Recíprocamente, supongamos que $V$ es un conjunto no vacío y consideremos el conjunto no vacío

$$\{x \in I(v) : x_i = 0\ \forall i \in N \setminus V\}.$$

Es inmediato comprobar que este conjunto es $C(v)$.

■

**Ejemplo 1.2.5**.- En virtud de los resultados anteriores y teniendo en cuenta que el juego asociado al Parlamento de Aragón es un juego simple con un conjunto vacío de jugadores veto, está claro que su core es vacío.

Hemos visto que hay situaciones de negociación coalicional que son altamente inestables y, por ello, tienen un core vacío. A continuación proporcionamos una condición necesaria y suficiente para el carácter no vacío del core de un juego. El correspondiente resultado fue probado independientemente por Bondareva (1963) y Shapley (1967), por lo que es conocido por el teorema de Bondareva-Shapley.

**Definición 1.2.6.** *Una familia de coaliciones* $F \subset 2^N \setminus \{\emptyset\}$ *se denomina* equilibrada *si existe una familia asociada de números reales positivos (denominados* coeficientes equilibrantes*)* $\{y_S : S \in F\}$ *tal que, para todo* $i \in N$,

$$\sum_{S \in F, i \in S} y_S = 1$$

**Definición 1.2.7.** *Un juego* $v \in G^N$ *se denomina equilibrado si, para cualquier familia de coaliciones equilibrada* $F$ *con coeficientes equilibrantes* $\{y_s : S \in F\}$, *se tiene que*

$$\sum_{S \in F} y_S v(S) \leq v(N).$$

El hecho de que $(N, v)$ sea equilibrado viene a significar que las coaliciones "intermedias" no tienen demasiado poder. Por ello, el carácter equilibrado de un juego parece estar relacionado con la estabilidad de la situación de negociación coalicional descrito por dicho juego. Esto es precisamente lo que afirma el teorema de Bondareva-Shapley.

**Teorema 1.2.1** (Teorema de Bondareva-Shapley)**.** *Sea* $v \in G^N$ *un juego TU. Entonces* $C(v) \neq \emptyset$ *si y solo si* $v$ *es equilibrado.*

*Demostración.* La demostración del resultado anterior hace uso de nociones básicas de dualidad en programación lineal. Supongamos que $C(v) \neq \emptyset$. Sean $x \in C(v)$ y $F$ una familia de coaliciones equilibradas con coeficientes equilibrantes $\{y_S : S \in F\}$. Entonces,

$$\sum_{S\in F} y_S v(S) \leq \sum_{S\in F}\sum_{i\in S} y_S x_i = \sum_{i\in N}(x_i \sum_{S\in F, i\in S} y_S) = \sum_{i\in N} x_i = v(N).$$

Recíprocamente, supongamos que $v$ es equilibrado y consideremos el siguiente problema de programación lineal (P):

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \sum_{i\in N} x_i \\ \\ \text{sujeto a} & \sum_{i\in S} x_i \geq v(S) \quad \forall S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}. \end{array}$$

Nótese que $C(v) \neq \emptyset$ si y solo si existe $\overline{x}$ una solución óptima de (P) con $\sum_{i\in N} \overline{x}_i = v(N)$. El dual (P) es el siguiente problema de programación lineal (D):

$$\begin{array}{lll} \text{maximizar} & \sum_{S\in 2^T\setminus\{\emptyset\}} y_S v(S) & \\ \\ \text{sujeto a} & \sum_{S\in 2^T\setminus\{\emptyset\}, i\in S} y_S = 1 & \forall i \in N, \\ \\ & y_S \geq 0 & \forall S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}. \end{array}$$

Claramente, (D) tiene, al menos, una solución óptima $\overline{y}$, ya que el conjunto de soluciones factibles es no vacío y compacto, y su función objetivo es continua. Definamos ahora

$$\overline{F} = \{S \subset N : \overline{y}_S > 0\}.$$

Obviamente $\overline{F}$ es una familia equilibrada con coeficientes equilibrantes $\{\overline{y}_S : S \in F\}$. Como (D) tiene una solución óptima entonces, por el teorema de dualidad,(P) tiene también una solución óptima $\overline{x}$ y, además,

$$\sum_{i \in N} \overline{x}_i = \sum_{S \in 2^T \setminus \{\emptyset\}} \overline{y}_S v(S).$$

Como $v$ es equilibrado y $\overline{x}$ es una solución óptima de (P)

$$v(N) \leq \sum_{i \in N} \overline{x}_i = \sum_{S \in 2^T \setminus \{\emptyset\}} \overline{y}_S v(S) \leq v(N)$$

por lo que $v(N) = \sum_{i \in N} \overline{x}_i$.

■

Otro concepto de solución es el llamado conjunto de negociación, propuesto por Aumann y Maschler [5]. Este conjunto es una extensión del core y está unido a los procesos de negociación ya que, en ellos se tiene en cuenta las posibles acciones y respuestas hechas por las coaliciones. Actualmente hay varias versiones del conjunto de negociación, pero aquí se considera la más clásica.

Si $x$ es una imputación para un juego $v$, una *objeción* de un jugador $i \in N$ contra otro jugador $j \in N$ con respecto a la imputación $x$ es un par $(y, S)$ donde $S \subset N$ es una coalición que contiene al jugador $i$ pero no al $j$, y el vector $y \in \mathbb{R}^{|S|}$ satisface

$$y(S) = V(S) \quad \text{y además} \quad y_k > x_k \quad \text{para cada } k \in S.$$

Una *contraobjeción* a la objeción $(y, S)$ es un par $(z, T)$ donde $T \subset N$ es una coalición conteniendo al jugador $j$ pero no al jugador $i$, y el vector $z \in \mathbb{R}^{|T|}$

verifica que

$$z(T) = v(T) \quad \text{y, además,} \begin{cases} z_k \geq x_k & \text{para } k \in T \setminus S, \\ z_k \geq y_k & \text{para } k \in T \cap S. \end{cases}$$

Una objeción esta *justificada* si no existe contraobjeción. El *conjunto de negociación de Aumann y Maschler* es el conjunto de todas las imputaciones $x$ para las cuales no existen objeciones justificadas respecto de $x$.

En 1978, Weber [6] propuso como concepto de solución un conjunto que contiene al core, y es más fácil de computar. Además, este conjunto es siempre no vacío. La definición de conjunto de Weber se basa en los vectores de contribución marginal.

Se suponen ordenados los jugadores en un juego $(N, v)$ y se tienen en cuenta todos los posibles órdenes del conjunto de jugadores; es decir, se considera el conjunto $\Pi_n$ de todas las permutaciones de $N$. Para cada orden $\pi \in \Pi_n$ se define el *vector de contribución marginal* $a^\pi(v) \in \mathbb{R}^n$ como la preimputación cuyas coordenadas satisfacen

$$a_i^\pi(v) = v(\pi^i \cup \{i\}) - v(\pi^i) \quad \forall i \in N,$$

donde $\pi^i$ es el conjunto de los predecesores del jugador $i$ en el orden $\pi$. El vector $a^\pi(v)$ asigna a cada jugador su contribución marginal en el orden $\pi$.

El *conjunto de Weber* del juego $v$ es la envoltura convexa de los vectores de contribución marginal; esto es

$$Weber(v) = conv\{a^\pi(v) : \pi \in \Pi_n\}.$$

En la mayoría de los casos, los conceptos de solución citados no asignan al juego una única distribución, sino un conjunto de distribuciones. También se han definido soluciones que asignan a cada juego un único vector de pago que son los llamados valores. Entre estos valores, el más conocido es el valor de Shapley, introducido en 1953 por Shapley [7] que se presenta en la siguiente sección.

## 1.3. El valor de Shapley

El valor de Shapley [7] es la regla más importante de asignación. La aproximación de Shapley es axiomática; su intención es proponer, para cada juego TU,una asignación que sea un compromiso aceptable para los jugadores. Para ello llamó *valor* a cualquier aplicación $\varphi : G^N \to \mathbb{R}^N$ y enunció algunas propiedades que un valor debería cumplir. Finalmente probó que estas propiedades caracterizan un único valor y encontró una expresión explícita para el mismo. Este valor se conoce hoy en día como el valor de Shapley. A continuación presentamos una colección de propiedades que caracterizan el valor de Shapley; para ello, debemos dar una definición previa.

**Definición 1.3.1.** *Sea $v \in G^N$ un juego TU.*

1. *Decimos que $i \in N$ es un* jugador nulo *de $v$ si, para cada $S \subset N$, $v(S \cup \{i\}) = v(S)$.*
2. *Dos jugadores $i, j \in N$ se denominan* simétricos *en $v$ si, para cualquier coalición $S \subset N \setminus \{i, j\}$, se tiene que $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$.*

Sea $\varphi$ un valor y consideramos las siguientes propiedades que se deben satisfacer.

- **Eficiencia:** $\varphi$ satisface eficiencia si, para todo $v \in G^N$,

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$$

.

- **Jugador Nulo:** $\varphi$ satisface la propiedad de jugador nulo si, para todo

$v \in G^N$ y para todo $i \in N$ jugador nulo de $v$, se tiene que $\varphi_i(v) = 0$.

- **Simetría:** $\varphi$ satisface simetría si, para todo $v \in G^N$ y para todo par de jugadores $i, j \in N$ simétricos en $v$, se tiene que $\varphi_i(v) = \varphi_j(v)$.

- **Aditividad:** $\varphi$ satisface aditividad si, para todo par de juegos $v, w \in G^N$, $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$.

La propiedad eficiencia requiere que $\varphi$ asigne el valor de la gran coalición, $v(N)$, entre los jugadores. La propiedad jugador nulo dice que los jugadores que su contribución es cero en cualquier coalición, i.e., que no generan ningún beneficio, no deben recibir nada. La propiedad simetría pregunta a $\varphi$ si trata a los jugadores de manera igualitaria. Finalmente, aditividad es el único axioma controvertido. La aditividad es básicamente un requerimiento técnico que, aunque no está conectado con la idea de ecuanimidad, tampoco parece ir en contra de tal idea. A continuación probamos que estas cuatro propiedades caracterizan el valor de Shapley.

**Teorema 1.3.1.** *Existe un único valor* $\Phi : G^N \to \mathbb{R}^N$ *que satisface eficiencia, propiedad de jugador nulo, simetría y aditividad. Este valor, denominado valor de Shapley, está dado por*

$$\Phi_i(v) := \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

*para todo* $v \in G^N$ *y todo* $i \in N$*, donde* $s$ *y* $n$ *denotan los cardinales de* $S$ *y* $N$*, respectivamente.*

*Demostración.* Es inmediato probar que $\Phi$ satisface las propiedades de jugador nulo y aditividad. Para comprobar que satisface eficiencia consideremos $v \in G^N$ y notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in N} \Phi_i(v) &= \sum_{i\in N} \sum_{S\subset N\setminus\{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S\cup\{i\}) - v(S)) \\
&= \sum_{i\in N} \sum_{S\subset N\setminus\{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S\cup\{i\}) - \sum_{i\in N} \sum_{S\subset N\setminus\{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} v(S) \\
&= \sum_{S\subset N} s\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} v(S) - \sum_{S\subset N, S\neq N} (n-s)\frac{s!(n-s-1)!}{n!} v(S) \\
&= v(N).
\end{aligned}$$

Para probar que $\Phi$ satisface simetría consideremos $v \in G^N$ e $i, j \in N$ simétricos en $v$ y notemos que

$$\begin{aligned}
\Phi_i(v) - \Phi_j(v) &= \sum_{S\subset N\setminus\{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S\cup\{i\}) - v(S)) \\
&- \sum_{S\subset N\setminus\{j\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S\cup\{j\}) - v(S)) \\
&= \sum_{S\subset N\setminus\{i\}, j\in S} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S\cup\{i\}) - v(S)) \\
&- \sum_{S\subset N\setminus\{j\}, i\in S} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S\cup\{j\}) - v(S)) \\
&= \sum_{S\subset N\setminus\{i,j\}} \frac{(s+1)!(n-s-2)!}{n!}(v(S\cup\{i\}) - v(S\cup\{j\})) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\Phi$ satisface las propiedades requeridas. Veamos ahora que es el único valor que las satisface. Para cada coalición no vacía $S \subset N$, definimos el juego $u^S \in G^N$ por[1]

$$u^S(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \subseteq T, \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Tengamos en cuenta que cada $v \in G^N$ se puede ver como un vector

$$(v(S))_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \in \mathbb{R}^{2^n - 1}$$

con lo que $G^N$ es un espacio vectorial de dimensión $2^n - 1$. Veamos que $U^N = \{u^S : S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}\}$ es una base de dicho espacio vectorial. Para demostrarlo, es suficiente probar que $U^N$ es un conjunto de vectores linealmente independientes. En efecto, sea $\sum_{S \in 2^T \setminus \{\emptyset\}} \alpha_S u^S = 0$ ($\alpha_S \in \mathbb{R}$ para todo $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$) y supongamos que existe $T \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ con $\alpha_T \neq 0$. Asumamos sin pérdida de generalidad que no existe $\overline{T} \subset T$, con $\overline{T} \neq T$, tal que $\alpha_T \neq 0$. Pero entonces $\sum_{S \in 2^T \setminus \{\emptyset\}} \alpha_S u^S(T) = \alpha_T$ lo cual no es posible. Esto prueba que $U^N$ es una base. Tomemos ahora un valor $\varphi$ que cumpla eficiencia, la propiedad de jugador nulo y simetría. Claramente,para cada $i \in N$, cada coalición no vacía $S \subset N$ y cada $\alpha_S \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\varphi_i(\alpha_S u^S) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_S}{|S|} & \text{si } i \in S, \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para acabar, basta tener en cuenta que, como $\varphi$ también cumple aditividad, $\varphi$ está unívocamente determinado ya que $U^N$ es una base de $G^N$.

$\blacksquare$

[1] Un juego definido de esta forma se denomina usualmente *juego de unanimidad de la coalición* S.

En el valor de Shapley, cada jugador consigue una media ponderada de las contribuciones que él hace a cada una de las diferentes coaliciones. La fórmula se puede interpretar como si la gran coalición se formara en una habitación, en la que los jugadores van entrando en la habitación de manera secuencial, de uno en uno. Cuando un jugador $i$ entra, consigue su contribución de las coaliciones de jugadores que ya están dentro (i.e., si esta coalición es $S$, consigue $v(S \cup \{i\}) - v(S)$). El orden de los jugadores se decide de forma aleatoria, con todos los $n!$ ordenes posibles, siendo todos ellos equiprobables.

Por último habría que indicar que existen otros conceptos de solución como son el *núcleo* (Davis y Maschler [8]), el *prenúcleo* (Maschler, Peleg y Shapley [9]), el *nucleolus* (Schmeidler [10]), el $\tau - value$ (Tijs [11]) y por ultimo el $\chi - value$ (Bergantiños y Massó [12]) entre otros.

A continuación calcularemos la propuesta del valor de Shapley en los ejemplos tratados en este capitulo.

**Ejemplo 1.3.1**.- En el juegos del reparto de un millón no hay jugadores nulos y, además, todos los jugadores son simétricos. Por lo tanto, su valor de Shapley es $(1/3, 1/3, 1/3)$. El core de este juego es vacío, con lo que su valor de Shapley no pertenece al core.

**Ejemplo 1.3.2**.- La tabla siguiente recoge los cálculos para la obtención del valor de Shapley del juego del guante.

| $\pi$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 123 | 0 | 1 | 0 |
| 132 | 0 | 0 | 1 |
| 213 | 1 | 0 | 0 |
| 231 | 1 | 0 | 0 |
| 312 | 1 | 0 | 0 |
| 321 | 1 | 0 | 0 |
| $\Phi$ | 2/3 | 1/6 | 1/6 |

En la tabla se calculan los vectores de contribuciones marginales para los distintos órdenes de llegada de los jugadores y, al promediar, se obtiene el valor de Shapley del juego, que resulta se $(2/3, 1/6, 1/6)$. Nótese que el único punto del core de este juego era $(1, 0, 0)$.

Este ejemplo muestra que el valor de Shapley de un juego puede estar fuera del núcleo, aún cuando éste sea no vacío. Shapley (1971 [1]) presenta una clase de juegos para los cuales el valor de Shapley siempre pertenece al core. Es la clase de juegos convexos, que definimos en la siguiente sección.

## 1.4. Juegos convexos

Esta sección está dedicada al estudio de la clase de *juegos convexos*, introducido por Shapley (1971 [1]). Estos juegos tienen varias propiedades interesantes; probablemente la más importante es que el valor de Shapley siempre es un elemento del core en esta clase de juegos.

**Definición 1.4.1.** *Un juego-TU $v \in G^N$ es convexo si, para cada $i \in N$ y cada par $S, T \subset N \setminus \{i\}$ con $S \subset T$,*

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T)$$

Se puede observar que todo juego convexo es superaditivo. Vamos a estudiar dos propiedades importantes: primero, el core de un juego convexo es siempre no vacío y segundo, el valor de Shapley de un juego conexo siempre es un elemento del core. Usaremos los vectores de distribución marginales. Sea $\Pi_n$ el conjunto de permutaciones de los elementos en N y, para cada $\pi \in \Pi_n$, sea $P^\pi(i)$ el conjunto de jugadores que preceden a $i$ bajo el orden dado por $\pi$, i.e., $j \in P^\pi(i)$ si y solo si $\pi^j < \pi^i$.

**Definición 1.4.2.** *Sea $v \in G^N$ un juego-TU. Sea $\pi \in \Pi_n$. El vector de contribuciones marginales asociado con $\pi, m^\pi(v) \in \mathbb{R}^N$, se define, para $i \in N$, por*

$$m_i^\pi(v) := v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i))$$

La envoltura convexa de los vectores de contribución marginal es comúnmente conocido como *conjunto de Weber*, formalmente introducido como concepto de solución por Weber ([6]). Es fácil de ver que el valor de Shapley es equivalente a

$$\Phi_i(v) := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} m_i^\pi(v)$$

.

A continuación presentamos el resultado más importante para los juegos convexos. Este relaciona juegos convexos, vectores marginales y el core.

**Teorema 1.4.1.** *Sea $v \in G^N$. Los siguientes resultados son equivalentes:*

*i) El juego $v$ es convexo.*

*ii) Para cada $\pi \in \Pi(N), m^\pi(v) \in core(v)$.*

*iii) core(v) = conv$\{m^\pi(v) : \pi \in \Pi(N)\}$, i.e., el core y el conjunto de Weber coinciden.*

**Corolario 1.4.1.** *Sea $v \in G^N$ un juego convexo. Entonces $\Phi(v) \in C(v)$*

**Ejemplo 1.4.1**.- En el juego asociado al Parlamento de Aragón, IU es un jugador nulo y los demás partidos son jugadores simétricos. Por tanto, su valor de Shapley es $(1/3, 1/3, 1/3, 0)$.

**Ejemplo 1.4.2**.- Las dos tablas siguientes recogen los cálculos para la obtención del valor de Shapley del juego de ahorro y del juego de coste asociados al problema de la profesora visitante.

El valor de Shapley del primero de estos juegos, el de ahorro, viene dado por

| $\pi$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 123 | 0 | 1500 | 500 |
| 132 | 0 | 1500 | 500 |
| 213 | 1500 | 0 | 500 |
| 231 | 1500 | 0 | 500 |
| 312 | 500 | 1500 | 0 |
| 321 | 1500 | 500 | 0 |
| $\Phi$ | 5000/6 | 5000/6 | 2000/6 |

| $\pi$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 123 | 1500 | 100 | 1400 |
| 132 | 1500 | 100 | 1400 |
| 213 | 0 | 1600 | 1400 |
| 231 | 0 | 1600 | 1400 |
| 312 | 1000 | 100 | 1900 |
| 321 | 0 | 1100 | 1900 |
| $\Phi$ | 4000/6 | 4600/6 | 9400/6 |

$\Phi(v) = (5000/6, 5000/6, 2000/6)$. De acuerdo con esta asignación de ahorros, los jugadores deben pagar $(4000/6, 4600/6, 9400/6)$. Este último vector es precisamente $\Phi(c)$. Para explicar este resltado, notemos que

$$
\begin{aligned}
\Phi_i(v) &= \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S \cup \{i\}) - v(S)) \\
&= \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(c(S) - c(S \cup \{i\}) + c(i)) \\
&= c(i) - \Phi_i(c).
\end{aligned}
$$

Finalmente, es claro que $\Phi(v) \in C(v)$. De hecho, $v$ es un juego convexo.

## 1.5. Algunas Aplicaciones de los Juegos TU

En esta sección presentamos dos aplicaciones de los juegos TU, una en el contexto de los problemas de asignación de costes y la otra en el de los modelos de la investigación operativa. Tales aplicaciones dan lugar a dos clases relevantes de juegos TU: los juegos del aeropuerto y los juegos de producción lineal.

### Juegos del Aeropuerto

Littlechild y Owen (1973 [13]) propusieron este modelo como un ejemplo donde el valor de Shapley es fácil de calcular y tiene una interpretación sencilla. Su idea surgió de los trabajos de Baker (1965 [14]) y Thompson (1971 [15]) sobre el precio que tienen que pagar las operaciones de distintos tipos de aviones, donde por operación se entiende un despegue o un aterrizaje. A continuación formalizamos el modelo.

Supongamos que hay $m$ tipos diferentes de aviones. Para cada tipo $l$, conocemos el número de operaciones, $n_l$, y los costes totales de construcción de una pista, $c_l$, asociados a ese tipo de aviones. Dado que queremos conocer lo que tiene que pagar cada operación, consideramos que cada una de ellas es un jugador; por lo tanto, $N_l$ es el conjunto de jugadores asociados con operaciones de aviones del tipo $l$. Supongamos que los tipos de aviones están ordenados con respecto a los costes, es decir, $0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_m$. Sea $N = \cup_{l=1}^{m} N_l$ el conjunto de todas las operaciones. El juego del aeropuerto asociado a este problema de reparto de costes está definido por el conjunto de jugadores $N$ y la función característica $v$ dada por

$$v(S) = -\max\{c_l : S \cap N_l \neq \emptyset\}$$

para cada $S \subset N, S \neq \emptyset$. Esta definición se basa en la consideración de que los aviones más grandes necesitan pistas más largas. El coste imputables a una coalición $S$ es el coste de una pista adecuada para que puedan realizarse todas las operaciones de $S$. Dicho coste es claramente $\max\{c_l : S \cap N_l \neq \emptyset\}$, es decir, el coste de una pista adecuada para que puedan operar en ella los aviones más grandes asociados a operaciones de $S$. Finalmente, cambiamos el signo para mantener la interpretación de la función característica en términos de beneficios y no de costes.

En los trabajos de Baker (1965 [14]) y Thompson (1971 [15]) aparece una asignación de costes que se define secuencialmente del siguiente modo. En primer lugar, el coste de construcción de una pista para operaciones de los aviones más pequeños (tipo 1) se divide igualitariamente entre el número total de operaciones correspondientes a todos los tipos de aviones. La idea que subyace en esta asignación es que todas las operaciones utilizan esta parte de la pista. A continuación, se divide igualitariamente el incremento que supone construir la pista para las operaciones del segundo tipo de aviones más pequeños entre el número total de operaciones correspondientes a aviones de tipo mayor o igual que 2. El procedimiento continúa de este modo hasta que alcanzamos el incremento que supone construir una pista adecuada para las operaciones del tipo de avión más grande. En esta caso, este incremento se divide igualitariamente entre este número de operaciones.

**Ejemplo 1.5.1**.- Consideramos que $m = 3,\ N_1 = \{1, 2\},\ N_2 = \{3, 4\},\ N_3 = \{5\}$ y los costes están dados por $c_1 = 10$, $c_2 = 25$ y $c_3 = 35$, para las operaciones de aviones de tipo 1, para las operaciones de aviones de tipo 2, y para las operaciones de aviones del tipo 3, respectivamente. Entonces, la función característica del juego del aeropuerto asociado está dada por

$$v(S) = \begin{cases} -10 & \text{si } S \subset \{1, 2\},\ S \neq \emptyset \\ \\ -25 & \text{si } S \cap N_2 \neq \emptyset,\ 5 \notin S \\ \\ -35 & \text{si } 5 \in S \end{cases}$$

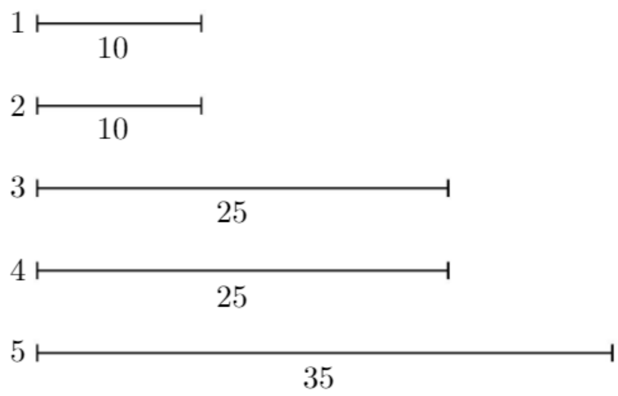
En la Figura 1.3, aparece representado el esquema secuencial de asignación.

Littlechild y Owen (1973 [13]) prueban que el esquema secuencial de asignación descrito anteriormente coincide con el valor de Shapley del juego del aeropuerto asociado.

**Teorema 1.5.1.** *Sea $(N, v)$ un juego del aeropuerto. Si denotamos por $c_0 = 0$ y para cada $i \in N$, el tipo de avión de la operación $i$ es $l_i$, entonces el valor de Shapley del juego $(N, v)$ puede obtenerse como*

$$\Phi_i(v) = \sum_{l=1}^{l_i} \frac{-(c_l - c_{l-1})}{r_l},$$

*siendo $r_l$ el número total de operaciones correspondientes a tipos de avión*




$$x_1 = -\tfrac{10}{5} = -2$$
$$x_2 = -\tfrac{10}{5} = -2$$
$$x_3 = -\tfrac{10}{5} - \tfrac{15}{3} = -7$$
$$x_4 = -\tfrac{10}{5} - \tfrac{15}{3} = -7$$
$$x_5 = -\tfrac{10}{5} - \tfrac{15}{3} - 10 = -17$$

Figura 1.3: Esquema de asignación secuencial

*con tamaño igual o superior a $l$, es decir,* $r_l = \sum_{j=l}^{m} |N_j|$.

## Juegos de producción lineal

Los juegos de producción lineal fueron introducidos en Owen (1975 [16]). Denotemos por $N$ un conjunto de fabricantes. Cada fabricante $i \in N$ dispone de cierta cantidad de $l$ materias primas, representada por el vector con componentes no negativas $c^i = (c_1^i, ..., c_l^i) \in \mathbb{R}^l$. A partir de estas materias primas, se pueden obtener $m$ productos diferentes mediante un proceso de producción lineal dado por una matriz $A$ de dimensión $l \times m$, con elementos no negativos y al menos un elemento no nulo en cada fila; el elemento $a_{jk}$ indica el número de unidades de la materia prima $j$-ésima que son necesarias para producir una unidad del producto $k$-ésimo. Cada materia prima carece de valor por sí misma. El beneficio de cada fabricante se consigue mediante la venta de los productos finales. El precio de mercado de cada producto está dado por el vector con componentes no negativas $b = (b_1, ..., b_m) \in \mathbb{R}^m$. El objetivo de cada fabricante es maximizar su beneficio. Así pues, cada fabricante $i \in N$ se enfrenta a un problema de optimización que puede formularse mediante el problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & by^t \\ \text{sujeto a} & Ay^t \leq (c^i)^t, \\ & y \geq 0. \end{array}$$

El proceso conjunto de producción puede caracterizarse por la cuaterna $(N, A, b, c)$. Supongamos que un grupo de fabricantes deciden cooperar uniendo sus materias primas y fabricando los productos en un único centro de producción. En ese caso la cantidad total de materias primas disponibles para los fabricantes de $S \subset N$ está dado por $c^S \in \mathbb{R}^l$, donde para cada materia prima $j$, $c^S_j = \sum_{i \in S} c^i_j$. En consecuencia, el beneficio que la coalición S puede conseguir está dado por el valor óptimo del problema de programación lineal $P^S$ definido como

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & by^t \\ \text{sujeto a} & Ay^t \leq (c^S)^t, \\ & y \geq 0. \end{array}$$

Esta aproximación sugiere un modo natural de asociar un juego TU a cada proceso de producción $(N, A, b, c)$. En este juego el conjunto de ugadores es $N$ y la función característica asigna, a cada coalición $S \subset N$, la ganancia $v(S)$ dada por el valor optimo del problema de programación lineal $P^S$. Nos referimos a este juego con el nombre de *juego de producción lineal*. Claramente, los juegos de producción lineal son superaditivos. Además, tienen cores no vacío tal como se prueba a continuación.

**Teorema 1.5.2.** *Para cualquier proceso de producción lineal* $(N, A, b, c)$*, el juego de producción lineal asociado tiene core no vacío.*

*Demostración.* Sea $(N, A, b, c)$ un proceso de producción lineal y sea $(N, v)$ el juego de producción lineal asociado. Vamos a encontrar un elemento de $C(v)$. Para ello utilizaremos las soluciones óptimas del problema de programación lineal dual de $P^N$, denotado por $D^N$, que está dado por

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & c^N z^t \\ \text{sujeto a} & zA \geq b, \\ & z \geq 0. \end{array}$$

Por el teorema de dualidad, el conjunto de soluciones óptimas es no vacío y el valor óptimo es $v(N)$. Sea $\overline{z}$ una solución óptima de $D^N$. Para cada $i \in N$, sea $\overline{x}_i = c^i \overline{z}^t$. Vamos a probar que $\overline{x} \in C(v)$. Sea $S \subset N$ y sea $D^S$ el problema de programación lineal dual de $P^S$. Utilizando de nuevo el teorema de dualidad, tenemos que el valor óptimo de $D^S$ es $v(S)$. Como $\overline{z}$ es factible en el problema $D^S$, se cumple que $\sum_{i \in S} \overline{x}_i = \sum_{i \in S} c^i \overline{z}^t \geq v(S)$, y $\sum_{i \in N} \overline{x}_i = \sum_{i \in N} c^i \overline{z}^t = v(N)$. Por tanto, $\overline{x} \in C(v)$.

■

El conjunto de asignaciones del core obtenidas del modo descrito anteriormente se denomina *conjunto de Owen* del juego de producción lineal. Este conjunto ha sido caracterizado en van Gellekom y otros (2000 [17]). En general, es un subconjunto propio del núcleo tal como vemos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.5.2**.- Consideremos el proceso de producción lineal $(N, A, b, c)$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = (3, 1, 8), \quad c^1 = (1, 0), \quad c^2 = (2, 2), \quad \text{y } c^3 = (0, 2).$$

El problema de programación lineal $D^N$ está dado por

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & 3z_1 + 4z_2 \\
\text{sujeto a} & z_1 + z_2 \geq 3, \\
& z_2 \geq 1, \\
& 2z_1 + 3z_2 \geq 8, \\
& z_1, z_2 \geq 0.
\end{array}
$$

El valor óptimo de este problema es 11 y el conjunto de soluciones óptimas está dado por $\{(1,2)\}$. Por tanto, $v(N) = 11$. La función característica completa de este proceso de producción lineal está dada por

$$
\begin{array}{lll}
v(1) = 0, & v(2) = 6, & v(3) = 2, \\
v(12) = 6, & v(13) = 9/2, & v(23) = 9, \\
v(N) = 11. & &
\end{array}
$$

El conjunto de Owen tiene $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ como único elemento, donde $\overline{x}_1 = (1,0)(1,2)^t = 1$, $\overline{x}_2 = (2,2)(1,2)^t = 6$, $\overline{x}_3 = (0,2)(1,2)^t = 4$. Sin embargo, el core del juego de producción lineal está dado por

$$
C(v) = conv\{(2,6,3), (0,6,5), (0,13/2,9/2), (5/2,13/2,2), (2,7,2)\}.
$$

Este juego no es convexo. Por ejemplo, considerando $S = \{3\}$, $T = \{2,3\}$ e $i = 1$ tenemos que $v(T \cup \{1\}) - v(T) = 2 < v(S \cup \{1\}) - v(S) = 5/2$. El valor de Shapley está dado por $\Phi(v) = (13/12, 19/3, 43/12)$ y está en el core.

# Capítulo 2

# Juegos cooperativos en contextos formales

## 2.1. Contextos formales

Un *retículo* es un conjunto parcialmente ordenado (poset) $(L, \preceq)$, donde $\preceq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva, tal que para cualquiera dos elementos $x, y \in L$, existe un supremo $x \vee y$, donde la unión disjunta se encuentra en un nivel superior y un ínfimo $x \wedge y$, donde la intersección seencuentra en un nivel inferior en el retículo. Si no se produce ninguna ambigüedad, el retículo se denota simplemente por $L$. El *orden dual parcial* $\preceq^\partial$ se define como $x \preceq^\partial y$ si y solo si $y \preceq x$. El dual del retículo $(L, \preceq)$ es el poset $(L, \preceq^\partial)$, denotado como $L^\partial$. En la parte superior del retículo se encuentra el top, en el cual se encuentra todas las uniones disjuntas de los elementos y en la parte inferior del retículo está el bottom, que es la intersección de los elementos. Una cadena maximal es un camino que va desde el bottom al top de un retículo.

**Definición 2.1.1.** *Un contexto es una tripleta $\mathcal{C} = (N, M, I)$, donde $N$ es un conjunto finito no vacío de objetos, $M$ es un conjunto finito de atributos, e $I : N \times M \to \{0, 1\}$ es una relación binaria definida por $I(i, a) = 1$ si* *el objeto $i \in N$ satisface el atributo $a \in M$, y 0 en otro caso. La relación binaria se puede representar como una matriz o tabla llamada la matriz de incidencia (tabla).*

**Definición 2.1.2.** *Sea $\mathcal{C} = (N, M, I)$ un contexto. El objetivo de un subconjunto de objetos $S \subset N$ se define como el conjunto de atributos satisfechos por todos los objetos de $S$:*

$$S'_{\mathcal{C}} = \{a \in M | I(i, a) = 1, \forall i \in S\}$$

*Así mismo, el alcance de cualquier conjunto de atributos $A \subseteq M$ se define como el conjunto de objetos que satisfacen todos los atributos en $A$:*

$$A'_{\mathcal{C}} = \{i \in N | I(i, a) = 1, \forall a \in A\}$$

Una propiedad básica de los objetivos y alcances es la relación

$$(S'_{\mathcal{C}})'_{\mathcal{C}} \supseteq S, \quad (A'_{\mathcal{C}})'_{\mathcal{C}} \supseteq A \quad \forall S \subseteq N, A \subseteq M$$

**Definición 2.1.3.** *Un concepto en el contexto $\mathcal{C} = (N, M, I)$ es un par $(S, A)$ con $S \subseteq N$ y $A \subseteq M$ tal que $S = A'$ y $A = S'$. Equivalentemente, $(N, \emptyset)$ si $N' = \emptyset$, o $(\emptyset, M)$ si $M' = \emptyset$.*

Denotamos por $L_{\mathcal{C}}$ al conjunto de todos los conceptos en el concepto $\mathcal{C}$, y le dotamos con un orden parcial $\leq$ definido como:

$$(S, A) \leq (T, B) \text{ si y solo si } S \subseteq T$$

(equivalentemente, si $B \supseteq A$). Luego $(L_{\mathcal{C}}, \leq)$ es un retículo, llamado el *retículo de conceptos*, con supremo e ínfimo dado por

$$(S, A) \vee (T, B) = ((S \cap T), (S \cup T)'_{\mathcal{C}})$$

$$(S, A) \wedge (T, B) = ((A \cap B)'_{\mathcal{C}}, (A \cap B))$$

Los elementos del top y el bottom del retículo de conceptos $L_{\mathcal{C}}$ son $(N, N'_{\mathcal{C}})$ y $(M'_{\mathcal{C}}, M)$ respectivamente. Se tiene en general que todo retículo finito es isomorfo a uno de conceptos.

Dado un contexto $\mathcal{C}$ y su retículo de conceptos $L_{\mathcal{C}}$, el *retículo de los alcances* $(L^N_{\mathcal{C}}, \subseteq)$ está definido por el conjunto

$$L^N_{\mathcal{C}} = \{S \subseteq N | (S, S'_{\mathcal{C}}) \in L_C\}$$

De forma similar, definimos el *retículo de los objetivos* $(L^M_{\mathcal{C}}, \subseteq)$ como el conjunto

$$L^M_{\mathcal{C}} = \{A \subseteq M | (A'_{\mathcal{C}}, A) \in L_C\}$$

Claramente, los retículos $L_{\mathcal{C}}, L^N_{\mathcal{C}}, (L^M_{\mathcal{C}})^\partial$ son isomorfos.

**Ejemplo 2.1.1**. Consideramos $N = \{1, 2, 3, 4\}, M = \{a, b, c\}$, y la tabla de incidencia dada en la Figura 2.1. Los retículos $L_{\mathcal{C}}, L^N_{\mathcal{C}}$ y $L^M_{\mathcal{C}}$ se muestran a la derecha de la tabla. Para facilitar la notación, conjuntos como $\{2, 4\}$ y $\{b, c\}$ son denotados como 24 y bc.

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| 1 | × | × | |
| 2 | | × | × |
| 3 | × | | |
| 4 | | | × |

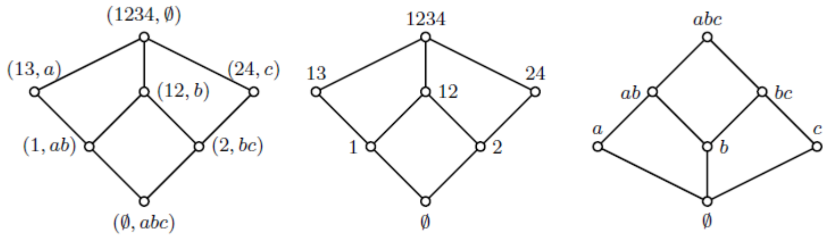



Figura 2.1: De izquierda a derecha: La tabla de incidencia de un contexto, su concepto de retículo, el retículo de los alcances, y el retículo de los objetivos.

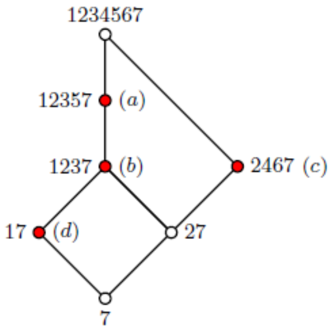
Un *sistema de clausura sobre* $N$ es una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $N$ la cual es cerrada bajo intersección y contiene a $N$, mientras un sistema *de clausura dual* es una colección cerrada para la unión y contiene al conjunto vacío. En la siguiente nota observamos varias relaciones con los retículos de conceptos de un contexto que nos serán de interés.

**Nota 2.1.1.** *(i) Cualquier retículo es isomorfo a un sistema clausura, y/o al sistema de clausura dual.*

*(ii) El retículo de los alcances de un contexto es un sistema de clausura, mientras la colección de conjuntos complementarios del retículo de los objetivos, i.e.,* $\{A \in 2^M | A^c \in L_{\mathcal{C}}^M\}$*, es un sistema de clausura dual.*

*(iii) Por el contrario, cualquier sistema de clausura* $\mathcal{F}$ *sobre* $N$ *es el retículo de alcances de algún contexto. Específicamente, el contexto más simple es* $\mathcal{C} = (N, M, I)$*, con* $M$ *el conjunto de elementos meet-irreducibles elementos de* $\mathcal{F}$*, y* $I(i, S) = 1$ *si y solo si* $i \in S$*, con* $i \in N$ *y* $S \in M$*. Los elementos meet-irreducibles son aquellos elementos que no son intersección de dos factibles, por eso se reconocen por aquellos en la estructura que sólo le sale hacia arriba una linea*

**Ejemplo 2.1.2.-** Tomamos $N = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ y el sistema de clausura representado en la Figura 2.2 (izquierda). Sus elementos meet-irreducibles son (puntos rellenos): 12357; 1237; 2467, 17, a los que denotamos $a, b, c, d$, respectivamente. La correspondiente tabla está en el medio, y el retículo contexto a la derecha de la figura.




| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | × | × | | × |
| 2 | × | × | × | |
| 3 | × | × | | |
| 4 | | | × | |
| 5 | × | | | |
| 6 | | | × | |
| 7 | × | × | × | × |

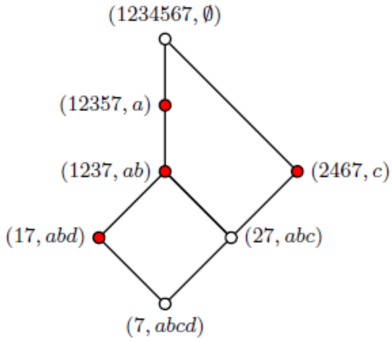



Figura 2.2: De izquierda a derecha: un sistema de clausura (elementos meet-irreducible puntos rellenos), la correspondiente tabla y retículo contexto

## 2.2. Juegos en contextos formales

Consideramos un contexto $\mathcal{C} = (N, M, I)$, y su retículo de conceptos $L_{\mathcal{C}}$. Un conjunto de jugadores en un contexto se entiende como, $\mathcal{C} = (N, M, I)$, donde $N$ es el conjunto de jugadores y $M$ son aquellos atributos que definen las propiedades a considerar para establecer relaciones entre los jugadores. Se van a tomar como coaliciones factibles aquellas que conforman conceptos. En estas situaciones estamos suponiendo que los elementos que generan las coaliciones son atributos, es decir si la coalición $S$ se forma, es debido a que los jugadores han tenido en cuenta que todos cumplen $S'_{\mathcal{C}}$, pero si eso es así, existen más jugadores que se unirán a la misma, todos los de $S''_{\mathcal{C}} \setminus S$. Por lo tanto un juego en un contexto formal se definirá como una función característica sobre los conceptos del contexto dado.

**Definición 2.2.1.** *Dado un conjunto de jugadores $N$ un juego de conceptos es un par $(\mathcal{C}, v)$ donde $\mathcal{C} = (N, M, I)$ es un contexto formal y $v : L_{\mathcal{C}} \to \mathbb{R}$ es una función característica sobre los conceptos de dicho contextos de forma que $v(S, S'_{\mathcal{C}})$ es el beneficio (costo o poder) de $S$ por verificarse $S'_{\mathcal{C}}$. Se impondrá* *que* $v(\emptyset, M) = 0$ *si* $M'_{\mathcal{C}} = \emptyset$. *El conjunto de juegos de conceptos se denotará por* CCG.

Derivamos desde $v$ dos aplicaciones $v_N : L^N_{\mathcal{C}} \to \mathbb{R}$ y $v_M : L^M_{\mathcal{C}} \to \mathbb{R}$ definidas como:

$$v_N(S) = v(S, S'_{\mathcal{C}}) - v(M'_{\mathcal{C}}, M) \quad (S \in L^N_{\mathcal{C}})$$
$$v_M(A) = v(N, N'_{\mathcal{C}}) - v(A'_{\mathcal{C}}, A) \quad (A \in L^M_{\mathcal{C}})$$

Observe que $v_N(M'_{\mathcal{C}}) = 0$ y $v_M(N'_{\mathcal{C}}) = 0$ se cumple, i.e., este conjunto de funciones desaparecen en el bottom de sus respectivos retículos, podrían ser considerados como juegos cooperativos sobre el conjunto de jugadores y sobre el conjunto de atributos respectivamente. Nosotros nos centraremos en la visión respecto de los jugadores, es decir, daremos la visión de $v$ como $v_N$.

**Ejemplo 2.2.1.-** Una aplicación inmediata del marco anterior en teoría de juegos cooperativos es: $N$ es el conjunto de jugadores, y $M$ es el conjunto de atributos que son satisfechos por los jugadores. Los atributos pueden ser visto como handicaps que los jugadores poseen, así una coalición es factible si y solo si los jugadores tienen los mismos handicaps. De hecho, si $S \subseteq N$ no está en el retículo de conceptos $L^N_{\mathcal{C}}$, entonces la coalición no es factible ya que los jugadores de $S''_{\mathcal{C}} \setminus S$ tienen los mismos handicaps, luego tienen un incentivo para unirse a $S$. De esta forma cuanto mayores una coalición menos dificultades tiene para obtener beneficio ya que su objetivo será más pequeño.

**Ejemplo 2.2.2.-** Los juegos sobre conceptos pueden modelar la iteracción entre vendedores y mercados. Consideramos $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ donde el agente 1 tiene la patente de un producto, y el resto de agentes quieren vender el producto en este mercado. El mercado está dividido en tres submercados $M = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, pero existen restricciones sobre que agentes pueden vender en un mercado: solamente los vendedores 4, 5 y 6 pueden vender en el mercado $\alpha$; 2, 4 y 6 pueden vender en $\beta$; y solo 3 y 5 pueden vender en $\gamma$. Además, suponemos que el agente 1 no es un vendedor. Definimos el contexto $\mathcal{C} = (N, M, I)$ para representar esta situación con la relación $I$ definida por $I(i, \alpha) = 1$ si $i$ no puede vender en el submercado $\alpha$. En la figura 2.2 tenemos la tabla de incidencia y el retículo de conceptos de $\mathcal{C}$. Definimos un juego sobre el concepto como sigue. Hacemos la suposición de que

| | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|---|
| 1 | × | × | × |
| 2 | × | | × |
| 3 | × | × | |
| 4 | | | × |
| 5 | | × | |
| 6 | | | × |

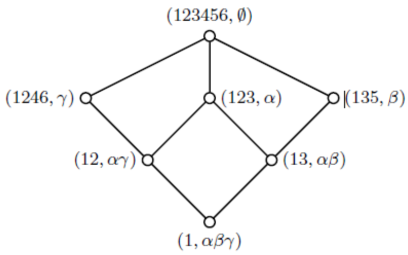



Figura 2.3: La tabla de incidencia de $\mathcal{C}$ (izquierda) y su retículo de conceptos (derecha)

(1) Los beneficios obtenidos por una coalición de vendedores depende del mercado donde pueden desarrollar su actividad.

(2) Los vendedores no pueden prohibir que otros agentes vendan el producto en ese submercado si $I$ así lo admite.

(3) Por un par $(S, A)$, representamos la situación donde $S$ es un conjunto de agentes y $A$ es el conjunto de submercados donde los agentes no pueden vender. No todos los pares $(S, A)$ son admisibles. De hecho, los agentes en $S$ no pueden vender en un submercado de $S'_{\mathcal{C}}$, así $A \supseteq S'_{\mathcal{C}}$. Además, un vendedor no tiene interés de estar en la situación donde se reduce su dominio de venta, así que $A \subseteq S'_{\mathcal{C}}$, por lo tanto $A = S'_{\mathcal{C}}$.

Por (1), llegamos a que $A'_{\mathcal{C}} = (S'_{\mathcal{C}})'_{\mathcal{C}} \supseteq S$. Ahora, (2) implica que $A'_{\mathcal{C}} = S$, finalmente $(S, A)$ debe ser un concepto. Debemos tomar por $v$ los siguientes valores (se omiten llaves y comas):

$$v(1, M) = 6, \quad v(13, \alpha\beta) = 16, \quad v(12, \alpha\gamma) = 20$$

$$v(123, \alpha) = 32, \quad v(135, \beta) = 28, \quad v(1246, \gamma) = 30, \quad v(N, \emptyset) = 60$$

El valor $v(1, M)$ representa el pago obtenido por el dueño de la patente si el producto es vendido.

Observamos en el ejemplo que las lineas 4 y 6 están duplicadas, linea 7 esta completa, y linea 3 es la intersección de las lineas 1 y 2. Sobre el retículo de conceptos, esto se corresponde respectivamente con el hecho de que 4 y 6 están siempre juntos en un concepto, 7 está siempre presente, y 3 está presente siempre y cuando 1 y 2 lo están. Estas situaciones están recogidas en las nociones de macro-jugador y jugador acompañante.

**Definición 2.2.2.** *Sea $\mathcal{C} = (N, M, I)$ un contexto para el conjunto de jugadores $N$. Una coalición $K \subseteq N, |K| > 1$, es un macro-jugador en $\mathcal{C}$ si $K \subseteq S$ o $K \cap S = \emptyset$ para cada coalición no vacía $S \in L_{\mathcal{C}}^N$. Esto es, una coalición que no se puede separar por ninguna factible.*

**Definición 2.2.3.** *Sea $\mathcal{C} = (N, M, I)$ un contexto para el conjunto de jugadores $N$. Un jugador $i \in N$ es un acompañante de $S, S \subseteq N \setminus i$, si $S \cup i \in L_{\mathcal{C}}^N$ y para todo $T \in L_{\mathcal{C}}^N$,*

$$T \ni i \text{ si y solo si } S \subseteq T$$

De la definición tenemos que un macro-jugador se representa como lineas idénticas en la tabla, mientras que un acompañante $i$ de $S$ se corresponde con la situación donde la linea $i$ es la intersección de las lineas en $S$. Las siguientes propiedades son importantes:

**Nota 2.2.1.**

*(i)* *Si* $K, K'_{\mathcal{C}}$ *son macro-jugadores maximales, entonces* $K \cap K'_{\mathcal{C}} = \emptyset$.

*(ii)* *Si* $M'_{\mathcal{C}}$ *(bottom de* $\mathcal{F}$*) es no vacío, entonces* $M'_{\mathcal{C}}$ *es un macro-jugador cuando* $|M'_{\mathcal{C}}| > 1$*, y un acompañante cuando* $|M'_{\mathcal{C}}| = 1$

*(iii)* *Cuando* $M'_{\mathcal{C}} = \emptyset$*, los átomos los cuales no son singleton son macro-jugadores, pero al contrario es falso. Precisamente, un macro-jugador* $K$ *es un átomo si y solo si* $K \in \mathcal{F}$.

*(iv)* *Si* $i$ *es un acompañante de* $\{j\}$*, entonces* $\{i, j\}$ *es un macro-jugador.*

*(v)* *Si* $i$ *y* $j$ *son acompañante de la misma coalición* $S$*, entonces* $\{i, j\}$ *es un macro-jugador.*

## 2.3. El valor de Shapley para juegos sobre contextos formales

Sea $\mathcal{C} = (N, M, I)$ un contexto y $L_{\mathcal{C}}^N$ su retículo de conceptos por jugadores. Consideramos el conjunto $CH(\mathcal{C})$ de todas las cadenas maximales, y denotamos su cardinalidad por $ch(\mathcal{C})$. Considera una cadena maximal de $L_{\mathcal{C}}^N$ con $C \in CH(\mathcal{C})$, siendo $C = M' =\subset S_1 \subset \cdots \subset S_k = N$, y un jugador $i \in N$. Denotamos por $T_C^i$ y $S_C^i$ respectivamente, al último conjunto en la secuencia $C$ que no contiene a $i$ y el primer conjunto que contiene a $i$.

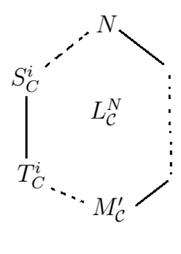



Figura 2.2: Ejemplo de cadena donde se aprecian los conjuntos $T_C^i$ y $S_C^i$.

**Definición 2.3.1.** *El valor de Shapley de $(\mathcal{C}, v)$, denotado por $\phi(\mathcal{C}, v)$, se define, para cada $i \in N$, como*

$$\phi_i(\mathcal{C}, v) = \begin{cases} \dfrac{1}{ch(\mathcal{C})} \sum_{C \in CH(\mathcal{C})} \dfrac{1}{|S_C^i \setminus T_C^i|}(v_N(S_C^i) - v_N(T_C^i)) & si\ i \notin M'_{\mathcal{C}} \\ \dfrac{v_N(M'_{\mathcal{C}})}{|M'_{\mathcal{C}}|} & cc. \end{cases}$$

Esta definición es una generalización de los valores introducidos por Faigle y Kern [18], y Bilbao y Edelman [19].

Formulamos propiedades para axiomatizar el valor de Shapley. Sea $F$ cualquier valor sobre el conjunto de juegos conceptos. Entendemos un valor para juegos de conceptos como una aplicación que obtiene un vector de $\mathbb{R}^N$ por cada juego definido en un contexto formal con un conjunto de objetos N.

Teniendo en cuenta a $v(M', M)$ como un pago separable para jugadores en $M'$, introducimos los siguientes axiomas para un valor F:

**Axioma 2.3.1** (Axioma de pago separable (SP))**.** *Si $(\mathcal{C}, v) \in CCG$ con $\mathcal{C} = (N, M, I)$ entonces se tiene:*

$$\sum_{i \in M'_{\mathcal{C}}} F_i(\mathcal{C}, v) = v(M'_{\mathcal{C}}, M)$$

Como para el valor de Shapley clásico, nos centramos en los vectores de pagos eficientes.

**Axioma 2.3.2** (Axioma de eficiencia (E))**.** *Para todo $(\mathcal{C}, v) \in CCG$ tenemos*

$$\sum_{i \in N} F_i(\mathcal{C}, v) = v(N, N'_{\mathcal{C}})$$

*Todos los agentes en un macro-jugador de un contexto son equivalentes para el retículo de conceptos, así que su valor debería ser el mismo. Equivalentes en el sentido de que si uno participa en una contribución, el otro participa en la misma y viceversa.*

**Axioma 2.3.3** (Axioma macro-jugador (MP))**.** *Si* $(\mathcal{C}, v) \in CCG$ *con* $\mathcal{C} = (N, M, I)$ *y* $K$ *es un macro-jugador en* $L_{\mathcal{C}}^{N}$*, entonces*

$$F_i(\mathcal{C}, v) = F_j(\mathcal{C}, v) \quad \forall i, j \in K$$

**Definición 2.3.2.** *Un contexto* $\mathcal{C}_2 = (N_2, M_2, I_2)$ *es concatenable a otro contexto* $\mathcal{C}_1 = (N_1, M_1, I_1)$ *si* $N_1 = (M_2)'_{\mathcal{C}_2}$ *y* $M_1 \cap M_2 = \emptyset$*. El resultado de la concatenación de los dos contextos concatenables es un nuevo contexto* $\mathcal{C}_2 * \mathcal{C}_1 = (N, M, I)$*, donde* $N = N_2, M = M_1 \cup M_2$ *y*

$$I(i,a) = \begin{cases} I_1(i,a) & si \quad i \in N_1, a \in M_1 \\ I_2(i,a) & si \quad i \in N_2 \setminus N_1, a \in M_2 \\ 1 & si \quad i \in N_1, a \in M_2 \\ 0 & si \quad i \in N_2 \setminus N_1, a \in M_1 \end{cases}$$

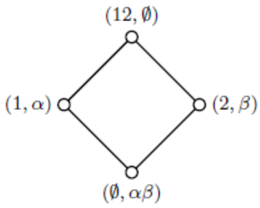
Es fácil ver que la concatenación equivale a la concatenación de sus tablas de incidencia y que $L_{\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2}$ es isomorfo a la concatenación de los retículos, concretamente es

$$\{(S, A \cup M_2) \in L_{\mathcal{C}_1}\} \cup L_{\mathcal{C}_2} \setminus \{((M_2)'_{\mathcal{C}_2}, M_2)\}$$

**Ejemplo 2.3.1.-** Consideramos $N_1 = \{1,2\}, N_2 = \{1,2,3,4,5\}, M_1 = \{\alpha, \beta\}$ y $M_2 = \{a,b,c,d\}$. Las dos tablas de incidencias y los conceptos retículos $L_{\mathcal{C}_1}, L_{\mathcal{C}_2}$ vienen dado en la Figura 2.4.

El resultado de la concatenación $\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2$ se muestra en la Figura 2.5.

| | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|
| 1 | × | |
| 2 | | × |




| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| 1 | × | × | × |
| 2 | × | × | × |
| 3 | × | | |
| 4 | | × | |
| 5 | | | × |

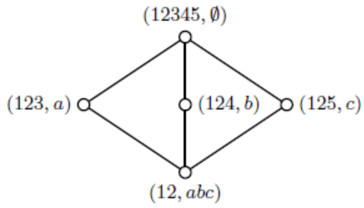



Figura 2.4: Dos contextos $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ representados por sus tablas y retículos de conceptos

| | $a$ | $b$ | $c$ | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | × | × | × | × | |
| 2 | × | × | × | | × |
| 3 | × | | | | |
| 4 | | × | | | |
| 5 | | | × | | |

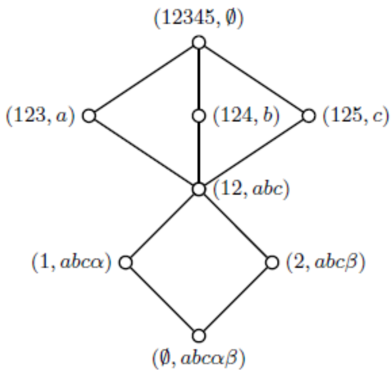



Figura 2.5: La concatenación $\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2$ de los dos contextos de la Figura 2.4

La concatenación de dos contextos no debería cambiar el pago de los jugadores.

**Axioma 2.3.4** (Axioma de concatenación (C)). *Para todo* $(\mathcal{C}_1, v_1), (\mathcal{C}_2, v_2) \in CCG$ *tal que* $\mathcal{C}_2$ *es concatenable con* $\mathcal{C}_1$, *y* $v_1(N_1, N'_{\mathcal{C}}) = v_2((M_2)'_{\mathcal{C}_2}, M_2)$, *tenemos*

$$F_i(\mathcal{C}_2 * \mathcal{C}_1, v_2 * v_1) = \begin{cases} F_i(\mathcal{C}_2, v_2) & si \quad i \in N_2 \setminus N_1 \\ F_i(\mathcal{C}_1, v_1) & si \quad i \in N_1 \end{cases}$$

*donde $v_2 * v_1$ es un juego concepto sobre $C = \mathcal{C}_2 * \mathcal{C}_1$, definido por:*

$$(v_2 * v_1)(S, A) = \begin{cases} v_2(S, A) & si \quad N_1 \subseteq S \\ v_1(S, A \setminus M_2) & cc \end{cases}$$

Sea $\mathcal{C} = (N, M, I)$ un contexto, y consideramos el conjunto de cadenas maximales $CH(\mathcal{C}) = \{C_1, ..., C_{ch(\mathcal{C})}\}$ de su retículo de conceptos por jugadores $L_{\mathcal{C}}$. La *descomposición en cadenas maximales* de $\mathcal{C}$ es una colección de contextos $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_{ch(\mathcal{C})}$ uno por cada cadena, la cual s en particular un sistema de clausura, construido siguiendo el método descrito ene punto (iii) de la Nota 2.1.1. En el siguiente ejemplo mostramos como funciona.

*Ejemplo 2.3.2.-* Continuamos con el Ejemplo 2.1.3 y la Figura 2.2. Descomponemos el contexto $\mathcal{C}$ en tres cadenas maximales $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ como se observa en la Figura 2.6.

Los contextos $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$, correspondientes a dichas cadenas son:

| $\mathcal{C}_1$ | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x | x | | x |
| 2 | x | x | | |
| 3 | x | x | | |
| 4 | | | | |
| 5 | x | | | |
| 6 | | | | |
| 7 | x | x | x | x |

| $\mathcal{C}_2$ | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x | x | | |
| 2 | x | x | | |
| 3 | x | x | x | |
| 4 | | | | |
| 5 | x | | | |
| 6 | | | | |
| 7 | x | x | x | x |

| $\mathcal{C}_3$ | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | x | x | x | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | x | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | x | |
| 7 | x | x | x | x |

**Axioma 2.3.5** (Axioma de descomposición (D)). *Sea $(\mathcal{C}, v)$ un juego de conceptos, se verifica que*

$$F(\mathcal{C}, v) = \frac{1}{ch(\mathcal{C})} \sum_{p=1}^{ch(\mathcal{C})} F(\mathcal{C}_p, v_p)$$

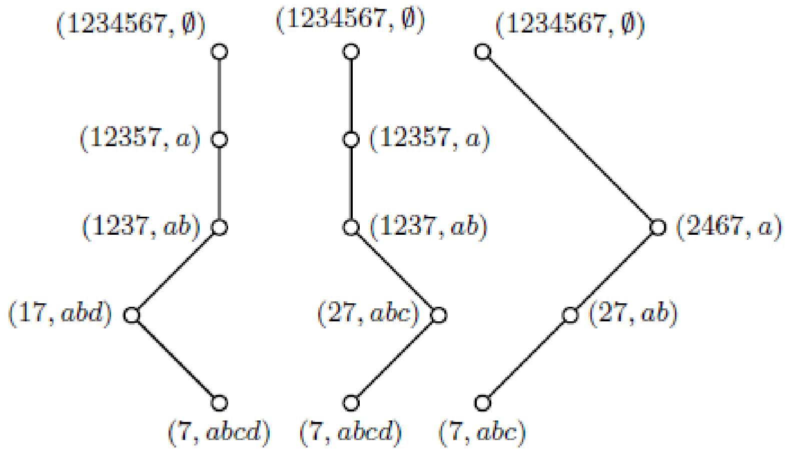



Figura 2.6: Descomposición en cadenas maximales

*donde* $\{\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_{ch(\mathcal{C})}$ *es la descomposición por cadenas maximales y con* $v_p(S, A) = v(S, A)$ *para todo* $(S, A) \in L_{\mathcal{C}_p}$ *y* $p = 1, ..., ch(\mathcal{C})$.

Demostramos ahora que el valor de Shapley satisface todos estos axiomas.

**Teorema 2.3.1.** *El valor de Shapley satisface (SP), (E), (MP),(C) y (D).*

*Demostración.* - Pagos separables: esto se satisface obviamente.

- Eficiencia: Sea $(\mathcal{C}, v) \in CCG$ con $\mathcal{C} = (N, M, I)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in N} \phi_i(\mathcal{C}, v) &= \sum_{i\in M'} \phi_i(\mathcal{C}, v) + \sum_{i\in N\setminus M'} \phi_i(\mathcal{C}, v) \\
&= v(M'_{\mathcal{C}}, M) + \frac{1}{ch(\mathcal{C})} \sum_{C\in CH(\mathcal{C})} (v(N, N'_{\mathcal{C}}) - v(M'_{\mathcal{C}}, M)) \\
&= v(N, N'_{\mathcal{C}}).
\end{aligned}$$

- Macro-jugadores: Sea $(\mathcal{C}, v) \in CCG$ y $K$ un macro-jugador en $L_{\mathcal{C}}$. Si

$K = M'_{\mathcal{C}}$, por definición, cada jugador en $K$ recibe el mismo pago con $\phi$. Suponemos ahora $K \neq M'_{\mathcal{C}}$, i.e., $K \subseteq N \setminus M'_{\mathcal{C}}$. En este caso, para cualquier $i, j \in K$ y para cada $C \in CH(\mathcal{C}), S^i_C = S^j_C$ y $T^i_C = T^j_C$. Por lo tanto, $\phi_i(\mathcal{C}, v) = \phi_j(\mathcal{C}, v)$ para cada $i, j \in K$

- Concatenación: Consideramos dos contextos concatenables $\mathcal{C}_1 = (N_1, M_1, I_1)$, $\mathcal{C}_2 = (N_2, M_2, I_2)$ con $N_1 = (M_2)'_{\mathcal{C}_2}$. Observamos que $ch(\mathcal{C}_2 * \mathcal{C}_1) = ch(\mathcal{C}_2)ch(\mathcal{C}_1)$. Si $i \in (M_1)'_{\mathcal{C}_1}$ entonces

$$\phi_i(\mathcal{C}_2 * \mathcal{C}_1, v_2 * v_1) = \frac{(v_2 * v_1)((M_1)'_{\mathcal{C}_1}, M_1 \cup M_2)}{|(M_1)'_{\mathcal{C}_1}|} = \phi_i(\mathcal{C}_1, v_1)$$

Si $i \in N_1 \setminus (M_1)'_{\mathcal{C}_1}$, entonces para cualquier cadena maximal $C$ en $\mathcal{C}_2 * \mathcal{C}_1$ la transición de $T^i_C$ a $S^i_C$ ocurre $ch(\mathcal{C}_1)$ veces como la misma transición en $C$ restringido a $\mathcal{C}_1$. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned}
&\phi_i(\mathcal{C}_2 * \mathcal{C}_1, v_2 * v_1) \\
&= \frac{1}{ch(\mathcal{C}_2 * \mathcal{C}_1)} \sum_{C \in CH(\mathcal{C}_2 * \mathcal{C}_1)} \frac{1}{|S^i_C \setminus T^i_C|} [(v_1 * v_2)(S^i_C, (S^i_C)'_{\mathcal{C}_2 * \mathcal{C}_1}) - (v_1 * v_2)(T^i_C, (T^i_C)'_{\mathcal{C}_2 * \mathcal{C}_1})] \\
&= \frac{1}{ch(\mathcal{C}_1)} \sum_{C \in CH(\mathcal{C}_1)} \frac{1}{|S^i_C \setminus T^i_C|} [v_1(S^i_C, (S^i_C)'_{\mathcal{C}_1}) - v_1(T^i_C, (T^i_C)'_{\mathcal{C}_1})] = \phi_i(\mathcal{C}_1, v_1)
\end{aligned}$$

Si $i \in N_2 \setminus N_1$, entonces para cadena maximal $C$ en $\mathcal{C}_2 * \mathcal{C}_1$ la transición de $T^i_C$ a $S^i_C$ ocurre $ch(C_2)$ veces como la misma transición en $C$ restringida a $\mathcal{C}_2$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
&\phi_i(\mathcal{C}_2 * \mathcal{C}_1, v_2 * v_1) \\
&= \frac{1}{ch(\mathcal{C}_2 * \mathcal{C}_1)} \sum_{C \in CH(\mathcal{C}_2 * \mathcal{C}_1)} \frac{1}{|S_C^i \setminus T_C^i|} [(v_1 * v_2)(S_C^i, (S_C^i)'_{\mathcal{C}_2 * \mathcal{C}_1}) - (v_1 * v_2)(T_C^i, (T_C^i)'_{\mathcal{C}_2 * \mathcal{C}_1})] \\
&= \frac{1}{ch(\mathcal{C}_2)} \sum_{C \in CH(\mathcal{C}_2)} \frac{1}{|S_C^i \setminus T_C^i|} [v_2(S_C^i, (S_C^i)'_{\mathcal{C}_2}) - v_2(T_C^i, (T_C^i)'_{\mathcal{C}_2})] = \phi_i(\mathcal{C}_2, v_2)
\end{aligned}$$

- Descomposición: Consideramos la descomposición $(C_1, ..., C_q)$ en cadenas maximales del contexto $\mathcal{C}$, para el juego $(\mathcal{C}, v)$. Por la definición de $v_p, p = 1, ..., q$, tenemos para cada jugador $i$.

$$\begin{aligned}
\phi_i(\mathcal{C}, v) &= \frac{1}{ch(\mathcal{C})} \sum_{C \in CH(\mathcal{C}} \frac{1}{|S_C^i \setminus T_C^i|} [v_N(S_C^i) - v_N(T_C^i)] \\
&= \frac{1}{ch(\mathcal{C})} \sum_{p=1}^{ch(\mathcal{C})} \frac{1}{|S_C^i \setminus T_C^i|} [v_p^N(S_{\mathcal{C}}^i) - v_p^N(T_{\mathcal{C}}^i)] \\
&= \frac{1}{ch(\mathcal{C})} \sum_{p=1}^{ch(\mathcal{C})} \phi_i(\mathcal{C}_p, v_p)
\end{aligned}$$

Finalmente, probamos que el valor de Shapley es el único valor para juegos sobre contextos formales que satisfacen los axiomas anteriores.

∎

**Teorema 2.3.2.** *El valor de Shapley es el único valor sobre juegos conceptos que satisface (SP), (E), (MP), (C) y (D).*

*Demostración.* Ya hemos probado en el Teorema 2.3.1 que el valor de Shapley satisface todos los axiomas. Solo queda demostrar la unicidad.

Sea $(\mathcal{C}, v) \in CCG$ un juego concepto con $\mathcal{C} = (N, M, I)$ con $M = \{a\}$ (contexto simple). Se tiene que $M'_{\mathcal{C}} = \{i \in N | I(i, a) = 1\}$, por lo tanto el retículo de conceptos se reduce a $\{(M'_{\mathcal{C}}, \{a\}), (N, \emptyset)\}$. En la primera opción, $|M'_{\mathcal{C}}| > 1$, $M'_{\mathcal{C}}$ es un macro-jugador, y de manera similar $N \setminus M'_{\mathcal{C}}$ es un macro-jugador también. Suponemos primero que $M'_{\mathcal{C}} = \emptyset$. El axioma (MP) impone que $F_i(\mathcal{C}, v) = F_j(\mathcal{C}, v)$ para todo $i, j \in N$, por tanto por el axioma (E), se sigue que

$$F_i(\mathcal{C}, v) = \frac{1}{|N|} v(N, \emptyset), \quad \forall i \in N$$

por lo que $F$ esté determinado de forma única por ese tipo de juego. Suponemos ahora que $M'_{\mathcal{C}}$ se reduce a un jugador, llamado $\{i\}$. El axioma (SP) impone que $F_i(\mathcal{C}, v) = v(M'_{\mathcal{C}}, M)$. Si $|M'_{\mathcal{C}}| > 1$, $\;M'_{\mathcal{C}}$ es un macro-jugador, y por el axioma de (MP), se tiene que para cada $i, j \in M'_{\mathcal{C}}, F_i(\mathcal{C}, v) = F_j(\mathcal{C}, v)$. Ahora, el axioma (SP) implica que

$$\sum_{j \in M'_{\mathcal{C}}} F_j(\mathcal{C}, v) = v(M'_{\mathcal{C}}, M)$$

luego finalmente $F_i(\mathcal{C}, v) = \dfrac{v(M'_{\mathcal{C}}, M)}{|M'_{\mathcal{C}}|}$, para todo $i \in M'_{\mathcal{C}}$. Podemos proceder de manera similar con el resto de jugadores en $N \setminus M'$: aplicando (MP) y (E) finalmente llegamos a

$$F_i(\mathcal{C}, v) = \frac{1}{|N \setminus M'_{\mathcal{C}}|} (v(N, \emptyset) - v(M'_{\mathcal{C}}, M)), \quad \forall i \in N \setminus M'_{\mathcal{C}}$$

En el segundo caso el axioma (SP) garantiza la unidad.

Como conclusión, $F$ está determinada de manera única para cualquier juego $(\mathcal{C}, v)$ con $\mathcal{C} = (N, \{a\}, I)$.

Consideramos ahora cualquier juego concepto $(\mathcal{C}, v)$ y su descomposición en cadenas maximales $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_{ch(\mathcal{C})}$ de $\mathcal{C}$. El axioma de descomposición implica que si $F$ está determinada de manera única sobre cada $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_{ch(\mathcal{C})}$, entonces

$F$ está determinada de manera única sobre $\mathcal{C}$. Por lo tanto consideramos ahora $\mathcal{C} = (N, M, I)$ con una única cadena $C \in CH(\mathcal{C})$, tal que $C = \{S_1, ..., S_m\}$ con $S_1 = M'_{\mathcal{C}}, S_m = N$ y $S_{p-1} \subset S_p$. Para cada $p = 2, ..., m$ definimos un atributo $a_p$, el contexto $\mathcal{C}_p = (S_p, \{a_p\}, I_p)$ donde $I_p(i, a_p) = 0$ si $i \in S_{p-1}$ y $I_p(i, a_p)$ en otro caso, y la función

$$v_p(S_p, \emptyset) = v_N(S_p), \quad v_p(S_{p-1}\{a_p\}) = v_N(S_{p-1})$$

Como $\mathcal{C}_p$ es un contexto simple, $F$ está determinado de manera única. Es fácil ver que

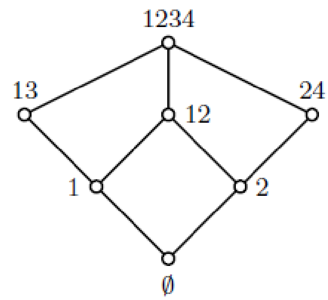
$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_m * (\mathcal{C}_{m-1} * (\cdots * (\mathcal{C}_2 * \mathcal{C}_1)))$$

$$v = v_m * (v_{m-1} * (\cdots * (v_2 * v_1)))$$

El axioma de la concatenación implica que $F$ está determinado de manera única.

■

**Ejemplo 2.3.3.-** Continuamos con el Ejemplo 2.1.1 y la Figura 2.1 que abajo repetimos .



Definimos el siguiente juego de conceptos:

| $(S,S')$ | $(1,ab)$ | $(2,bc)$ | $(13,a)$ | $(12,b)$ | $(24,c)$ | $(1234,\emptyset)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $v(S,S')$ | 10 | 20 | 50 | 40 | 40 | 100 |

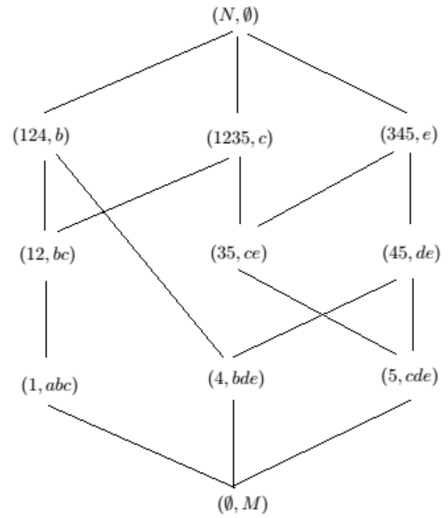
Calculamos el valor de Shapley. El retículo de conceptos se descompone en cuatro cadenas maximales.

$$\begin{aligned}
\phi_1(\mathcal{C},v) &= \frac{1}{4}\{v_N(1)+v_N(1)+[v_N(12)-v_N(2)]+\frac{1}{2}[v_N(N)-v_N(24)]\}\\
&= \frac{1}{4}(10+10+20+30) = 17.5\\
\phi_2(\mathcal{C},v) &= \frac{1}{4}\{\frac{1}{2}[v_N(N)-v_N(13)]+[v_N(12)-v_N(1)]+v_N(2)+v_N(2)\}\\
&= \frac{1}{4}(25+30+20+20) = 23.75\\
\phi_3(\mathcal{C},v) &= \frac{1}{4}\{[v_N(13)-v_N(1)]+\frac{1}{2}[v_N(N)-v_N(12)]+\frac{1}{2}[v_N(N)-v_N(12)]\\
&+\frac{1}{2}[v_N(N)-v_N(24)]\} = \frac{1}{4}(40+30+30+30) = 32.5\\
\phi_4(\mathcal{C},v) &= \frac{1}{4}\{\frac{1}{2}[v_N(N)-v_N(13)]+[v_N(N)-v_N(12)]+[v_N(24)-v_N(2)]\}\\
&= \frac{1}{4}(25+6+20) = 26.25
\end{aligned}$$

Luego el valor de Shapley para el ejemplo es:

$$\phi(\mathcal{C},v) = (17.5, 23.75, 32.5, 26.25)$$

**Ejemplo 2.3.4.-** Consideramos el contexto de la siguiente figura, donde aparece también su retículo de conceptos.




| $\mathcal{C}$ | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x | x | x | | |
| 2 | | x | x | | |
| 3 | | | x | | x |
| 4 | | x | | x | x |
| 5 | | | x | x | x |

Figura 2.7: Contexto del Ejemplo 2.3.4 y su retículo de conceptos

Damos ahora el siguiente juego sobre dichos conceptos.

| $(S,S')$ | $(1,abc)$ | $(4,bde)$ | $(5,cde)$ | $(12,bc)$ | $(35,ce)$ | $(45,de)$ | $(124,b)$ | $(1235,c)$ | $(345,e)$ | $(N,\emptyset)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v(S,S')$ | 10 | 20 | 20 | 50 | 30 | 40 | 40 | 50 | 40 | 100 |

El retículo de conceptos se descompone en siete cadenas maximales.

$$\begin{aligned}\phi_1(\mathcal{C},v) &= \frac{1}{7}\{2v_N(1) + \frac{1}{2}[v_N(124) - v_N(4)] + \frac{3}{2}[v_N(N) - v_N(345)]\\ &\quad + \frac{1}{2}[v_N(1235) - v_N(35)]\} = 18.57\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_2(\mathcal{C},v) &= \frac{1}{7}\{2[v_N(12) - v_N(1)] + \frac{1}{2}[v_N(124) - v_N(4)] + \frac{3}{2}[v_N(N) - v_N(345)]\\ &\quad + \frac{1}{2}[v_N(1235) - v_N(35)]\} = 27.14\end{aligned}$$

$$\phi_3(\mathcal{C}, v) = \frac{1}{7}\{[v_N(N) - v_N(124)] + \frac{1}{2}[v_N(1235) - v_N(12)] + 2[v_N(345) - v_N(45)] + 2[v_N(35) - v_N(5)]\} = 11.42$$

$$\phi_4(\mathcal{C}, v) = \frac{1}{7}\{[v_N(124) - v_N(12)] + 2[v_N(N) - v_N(1235)] + 2v_N(4) + [v_N(345) - v_N(35)] + [v_N(45) - v_N(5)]\} = 22.85$$

$$\phi_5(\mathcal{C}, v) = \frac{1}{7}\{[v_N(N) - v_N(124)] + \frac{1}{2}[v_N(1235) - v_N(12)] + [v_N(45) - v_N(4)] + 3v_N(5)\} = 20$$

Luego el valor de Shapley es:

$$\phi(\mathcal{C}, v)) = (18.57, 27.14, 11.42, 22.85, 20)$$

## 2.4. El core de un juego de conceptos

En esta sección se introduce el core para juegos en conceptos.

**Definición 2.4.1.** *Dado un juego $(\mathcal{C}, v)$ sobre un concepto, consideramos el core de juegos de conceptos:*

$$core(\mathcal{C}, v) = \{x \in \mathbb{R}^N | x(S) \geq v(S, S'_{\mathcal{C}}), \quad (S, S'_{\mathcal{C}}) \in L_{\mathcal{C}}, \quad x(N) = v(N, N'_{\mathcal{C}})\}$$

**Ejemplo 2.4.1.-** Continuamos del Ejemplo 2.3.3. Vemos que el conjunto $core(\mathcal{C}, v)$ es no vacío en este caso, de hecho $\phi(\mathcal{C}, v) \in core(\mathcal{C}, v)$.

$$core(\mathcal{C}, v) = \begin{cases} x_1 & \geq 10 \\ x_2 & \geq 20 \\ x_1 + x_2 & \geq 40 \\ x_1 + x_3 & \geq 50 \\ x_2 + x_4 & \geq 40 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 100 \end{cases}$$

**Ejemplo 2.4.2.-** Continuando con el Ejemplo 2.3.4 se calcula el core del juego como

$$core(v) = \begin{cases} x_1 & \geq 10 \\ x_4 & \geq 20 \\ x_5 & \geq 20 \\ x_1 + x_2 & \geq 50 \\ x_3 + x_5 & \geq 40 \\ x_4 + x_5 & \geq 40 \\ x_1 + x_2 + x_4 & \geq 40 \\ x_3 + x_4 + x_5 & \geq 40 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 & \geq 50 \\ x_1 + x_2 + x_3 x_4 + x_5 & = 100 \end{cases}$$

Se verifica que $\phi(v) \notin Core(v)$

Nos preguntamos cuando el core no esta vacío. Consideramos un juego cooperativo $(\mathcal{F}, v)$ con $N \in \mathcal{F}$. Un vector de pagos es un vector $x \in \mathbb{R}^n$. Para cualquier $S \subseteq N$, denotamos por $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ al pago total dado por $x$ a la coalición $S$. El vector de pagos es *eficiente* si $x(N) = v(N)$. El core de un juego cooperativo es el conjunto de vectores de pagos eficientes tal que ninguna coalición puede obtener un mejor pago por ellas mismas.

$$core(\mathcal{F}, v) = \{x \in \mathbb{R}^n | x(S) \geq v(S) \quad \forall S \in \mathcal{F}, \quad x(N) = v(N)\}$$

Notese que el core$(\mathcal{F}, v)$ es un poliedro convexo cerrado y acotado cuando $\mathcal{F} = 2^N$. En otro caso, el core debe ser no acotado o no puntuado, y su estudio llega a ser complejo (ver [10] y una encuesta en [16]). De la teoría de poliedros tomamos que un poliedro definido por un conjunto de inecuaciones $Ax \geq b$ es la Minkowski suma de sus partes convexas y su parte cónica (el cono de recesión), el retículo esta siendo determinado por las inecuaciones $Ax \geq 0$, y siendo además independiente de la parte derecha $\mathbf{b}$. Por lo tanto el cono de recesión del $core(\mathcal{F}, v)$ es el poliedro $core(\mathcal{F}, 0)$, el cual no depende de $v$.

Una colección $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ de conjuntos no vacíos se le llama *equilibrado* si existe pesos positivos $\lambda_S, S \in \mathcal{B}$ tal que:

$$\sum_{S \in \mathcal{B}, S \ni i} \lambda_S = 1 \quad \forall i \in N$$

Un juego $(\mathcal{F}, v)$ se dice *equilibrado* si $v(N) \geq \sum_{S \in \mathcal{B} \lambda_s v(S)}$ se cumple para cada colección balanceada $\mathcal{B}$ con sistema de pesos $(\lambda_S)_{S \in \mathcal{B}}$. Se conoce que el core no es vacío si y solo si $v$ es equilibrado [10].

Así el core de un juego sobre una subcolección $\mathcal{F}$ de $2^N$ es no vacío si y solo si el juego es equilibrado. Por tanto, el $core(v_N)$ no es vacío si y solo si $v_N$ es equilibrado, y el $core^*(v_M)$ es no vacío si y solo si $\overline{v}_M$ es equilibrado.

El caso $M'_{\mathcal{C}} \neq \emptyset$ merece algo de atención, porque entonces el $core(v_N)$ nunca está vacío. De hecho, no es difícil de ver que la única colección equilibrada en $L^N_{\mathcal{C}}$ es $\{N\}$, de donde cualquier juego sobre el retículo de los alcances es equilibrado.

Asumimos que el $core(v_N)$ es no vacío. El objetivo es estudiar la cuestión si el core no es acotado o si contiene una linea, en ese caso no es puntuado (i.e., no tiene vértices). La condición general para ser puntado es que le sistema de ecuaciones

$$x(S) = 0, \forall S \in \mathcal{F}$$

tenga al 0 como única solución (en ese caso decimos que, siguiendo a Derk y Reijnierse [8], $\mathcal{F}$ es *no degenerada*). Es fácil de ver que $\mathcal{F}$ es degenerada si existe un macro-jugador $K$ en $\mathcal{F}$, porque $\mathcal{F}$ contiene al hiperplano $x(K) = 0$. Un resultado notable en los sistemas cerrados es que el contrario también es cierto.

**Teorema 2.4.1.** *Un sistema de clausura es nodegenerado si y solo si no contiene ningún macro-jugador.*

*Demostración.* La parte *solo si* es obvia ya que la presencia de macro-jugador implica degeneración.

Suponemos que $\mathcal{F}$ es un sistema de clausura sobre $N$ con bottom $M'_{\mathcal{C}}$, el cual no tiene macro-jugador. Probamos por inducción sobre $n = |N|$ que es no degenerada. Para $n = 1$, tenemos dos opciones $\{\emptyset, \{1\}\}$ y $\{\{1\}\}$. Suponemos que es verdad hasta algún valor $n - 1$ y lo probamos para $n$.

Afirmación: existe un $i \in N$ tal que $\{i\} \in \mathcal{F}$.

Demostración de la afirmación: Como $\mathcal{F}$ no tiene macro-jugadores, sabemos que su bottom $M'_{\mathcal{C}}$ no es ni $\emptyset$ ni algún singleton. En el último caso, la afirmación está probada. Suponemos entonces que $M'_{\mathcal{C}} = \emptyset$. Entonces necesariamente, cada átomo es un singleton. De hecho, supongamos que $S$ es un átomo, con $|S| > 1$. Desde que $S$ no es un macro-jugador, existe un $T \in \mathcal{F}$ que separa a $S$, i.e., $j \in T \not\ni k$ para algún $j, k \in S$. Desde que $\mathcal{F}$ es cerrado bajo intersección, se sigue que $S \cap T \in \mathcal{F}$ y $\emptyset \neq S \cap T \subsetneq S$, una contradicción con el hecho de que $S$ es un átomo.

Consideramos entonces $(\mathcal{F} \setminus i) = \{S \subseteq N \setminus i | S \text{ o } S \cup i \in \mathcal{F}\}$ sobre $N \setminus i$, la colección de conjuntos que se obtienen de $\mathcal{F}$ eliminando $i$ en cada conjunto. Notese que $\emptyset \in (\mathcal{F} \setminus i)$. Probamos que $(\mathcal{F} \setminus i)$ es un sistema de clausura sin macro-jugadores.

- $\mathcal{F} \ni N \setminus i$: por la definición anterior.

- $(\mathcal{F} \setminus i)$ es cerrado bajo intersección: tomamos $S, S' \in (\mathcal{F} \setminus i)$. Entonces tenemos tres casos. Si $S, S'_{\mathcal{C}} \in \mathcal{F}$, entonces $S \cap S'_{\mathcal{C}} \in \mathcal{F}$ y $i \notin S \cap S'_{\mathcal{C}}$, por tanto $S \cap S'_{\mathcal{C}} \in (\mathcal{F} \setminus i)$. Si $S \in \mathcal{F}$ y $S'_{\mathcal{C}} \cup i \in \mathcal{F}$, entonces $i \notin S \cap (S'_{\mathcal{C}} \cup i) \in \mathcal{F}$, y además $S \cap (S'_{\mathcal{C}} \cup i) = S \cap S'_{\mathcal{C}} \in (\mathcal{F} \setminus i)$. Por último, si $S \cup i, S'_{\mathcal{C}} \cup i \in \mathcal{F}$, entonces $i \in (S \cup i) \cap (S'_{\mathcal{C}} \cup i) \in \mathcal{F}$, además $((S \cup i) \cap (S'_{\mathcal{C}} \cup i)) \setminus i = S \cap S'_{\mathcal{C}} \in (\mathcal{F} \setminus i)$

- $(\mathcal{F} \setminus i)$ no tiene macro-jugadores: suponemos que $K \subseteq N \setminus i$ es un $\mathcal{F}^{-i}$.Tomamos $S \in \mathcal{F}^{-i}$. Entonces o $S \cap K = \emptyset$ o $S \cup i \supseteq K$ es verdad porque $K \not\ni i$. Por tanto $K$ es un macro-jugador en $\mathcal{F}$, lo que es una contradicción.

Luego $(\mathcal{F} \setminus i)$ es un sistema cerrado sin macro-jugadores sobre $N \setminus i$, y por la hipótesis de inducción, $(\mathcal{F} \setminus i)$ es no degenerada, i.e., el sistema de ecuaciones $x(S) = 0, S \in \mathcal{F}$ tiene como única solución $x = 0$. Finalmente, observamos que el sistema $x(S) = 0, S \in \mathcal{F}$ difiere de la anterior solamente por la adición de $x_i$ en algunas lineas. Como $\{i\} \in \mathcal{F}$, la linea $x_i = 0$ ambos sistemas son equivalentes restringidos a otras variables. Además, $\mathcal{F}$ es no degenerada.

El siguiente ejemplo muestra que este resultado no se extiende a colecciones de conjuntos arbitrarios.

**Ejemplo 2.4.3.-** Tomamos $n = 5$ y la colección $\mathcal{F}$ en la Figura 2.8.

$\mathcal{F}$ no es cerrada bajo intersección pero no tiene macro-jugador. Sin embargo es degenerada (el rango es 4 y (1,-1,0,1,-1) es un vector del espacio nulo).

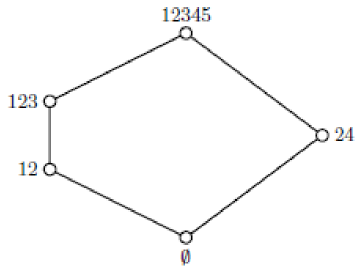



Figura 2.8: Familia $\mathcal{F}$ del ejemplo.

Volvamos a la cuestión de si el core es no acotado. El siguiente resultado nos es útil. $\blacksquare$

**Teorema 2.4.2.** *El cono de recesión de un juego sobre una colección de conjuntos $\mathcal{F}$ es un subespacio linear si y solo si $\mathcal{F} \setminus \{\emptyset, N\}$ es una colección equilibrada.*

**Corolario 2.4.1.** *El core esta acotado (equivalentemente, el cono de recesión se reduce a $\{0\}$) si y solo si $\mathcal{F}$ es no degenerada y $\mathcal{F} \setminus \{\emptyset, N\}$ es equilibrada.*

Esta situación se resume en la tabla.

| | $M'_{\mathcal{C}} = \emptyset$ | $\lvert M'_{\mathcal{C}}\rvert = 1$ | $\lvert M'_{\mathcal{C}}\rvert = 1$ |
|---|---|---|---|
| puntuado | si $\mathcal{F}$ no tiene macro-jugador | si $\mathcal{F}$ no tiene macro-jugador | no |
| acotado | si $\mathcal{F}$ equilibrado y no macro-jugador | no | no |

Tabla 1: Cuando el core de los alcances es acotado y puntuado

Para cualquier colección $\mathcal{B} \subseteq 2^N \setminus \{\emptyset\}$, su *clausura por intersección* denotada por $\overline{\mathcal{B}}$ está formada por todos los conjuntos de $\mathcal{B}$, más la intersección de cualquier familia de conjuntos de $\mathcal{B}$, siempre que la intersección sea no vacía[1]. Nótese que $\overline{(\cdot)}$ es un operador de cierre, en el sentido que $\overline{\overline{\mathcal{B}}} = \overline{\mathcal{B}}, \mathcal{B} \subseteq \overline{\mathcal{B}}$, y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$ implica que $\overline{\mathcal{B}} \subseteq \overline{\mathcal{B}'}$.

[1]Hay que tener cuidado ya que esto no significa que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo intersección, desde que $\mathcal{B}$ no contiene al conjunto vacío, a pesar que debe contener conjuntos disjuntos.

**Teorema 2.4.3.** *Suponemos $\mathcal{B}$ es una colección equilibrada sobre $N$. Entonces $\overline{\mathcal{B}}$, su clausura por intersección, es equilibrada.*

*Demostración.* Probamos el resultado por inducción sobre $|N|$. El resultado es trivialmente verdadero cuando $|N| = 1$. Suponemos que la propiedad es verdadera para todo $N$ de tamaño al menos $n$, y lo probamos para $|N| = n+1$.

Suponemos que existe un macro-jugador $K$, y sea $[k]$ un (nuevo) jugador que reemplaza a $K$. Entonces considerando $N'_{\mathcal{C}} = (N \setminus K) \cup \{[k]\}$, podemos definir una colección equilibrada desde $\mathcal{B}$ sobre $N'_{\mathcal{C}}$, y desde que $|N'_{\mathcal{C}}| < n$, el resultado se demuestra por hipótesis de inducción. Podemos además considerar en el resto de la demostración que no existes macro-jugadores. Esto implica en particular que $|\mathcal{B}| > 1$ y que ningún conjunto $S \in \mathcal{B}, |S| > 1$ el cual es disjunto con otro conjunto.

Suponemos primero que $\mathcal{B} \ni S$ tal que $S \cap T = \emptyset$ para todo $T \in \mathcal{B}, T \neq S$, con $|S| = 1$. Entonces observamos que $\mathcal{B} \setminus \{S\}$ es una colección equilibrada sobre $N \setminus S$. Por hipótesis de inducción, $\overline{\mathcal{B} \setminus \{S\}}$ es equilibrado, como $\overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{B} \setminus \{S\}} \cup \{S\}$, el resultado está probado en este caso.

Suponemos por el contrario que para cada $S \in \mathcal{B}, S$ intersecta algún $T \in \mathcal{B}$. Afirmamos que la colección $\mathcal{B}_{\cap} = \{S \cap T | S, T \in \mathcal{B}, S \neq T\}$ es equilibrada. Como la unión de colecciones equilibradas es equilibrada, (ver , e.g., Owen [17]), se tiene que $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_{\cap}$ es equilibrada sobre $N$. Aplicando el mismo procedimiento sobre $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_{\cap}$ se llega a otra colección equilibrada, y continuando de la misma forma, como es un proceso finito, se llega a $\overline{\mathcal{B}}$, probando que es equilibrada.

Demostración de la afirmación: Tomamos $(\lambda_S)_{S \in \mathcal{B}}$ cualquier sistema de pesos para $\mathcal{B}$. Para cada $i \in N$, consideramos la subcolección $\mathcal{B}^i = \{S_1, ..., S_k\}$ de $\mathcal{B}$ de conjuntos que contienen a $i$. Observese que $\mathcal{B}^i \neq \emptyset$ ya que $\mathcal{B}$ es equilibrado, y $k > 1$. De hecho, $k = 1$ da como resultado $\lambda_{S_1} = 1$. Por hipótesis, existe $T \in \mathcal{B}$ cortando a $S_1$, además existe $j \neq i, j \in T \cap S_1$, y $\sum_{T' \ni j} \lambda_{T'} = 1$ lo cual implica que $\lambda_T = 0$, lo que es imposible.

Para cada $\mathcal{B}^i$ construimos la colección de parejas de intersecciones $\mathcal{B}^i_\cap = \{S_j \cap S_l | S_j, S_l \in \mathcal{B}^i, S_j \neq S_l\}$, con los siguientes pesos

$$\lambda^i_S = \sum_{\substack{S_j, S_l \in \mathcal{B}^i \\ S_j \neq S_l \\ S_j \cap S_l = S}} \frac{\lambda_{S_j} + \lambda_{S_l}}{k-1}, \text{ para cada } S \in \mathcal{B}^i_\cap$$

Por construcción, cada $\lambda^i_S$ es positivo, y tenemos

$$\sum_{S \in \mathcal{B}^i_\cap} \lambda^i_S = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=j+1}^{k} (\lambda_{S_j} + \lambda_{S_l}) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{S_j} = 1$$

Claramente, $\mathcal{B}_\cap = \bigcup_{i \in N} \mathcal{B}^i_\cap$, sin embargo algunos conjuntos deben estar presentes en dos diferentes $\mathcal{B}^i_\cap$, posiblemente con dos ponderaciones diferentes. El ultimo paso es definir una única ponderación para cada $S \in \mathcal{B}_\cap$, manteniendo la condición de normalización. Observe que si $S$ aparece en $\mathcal{B}^i_\cap$ y $\mathcal{B}^j_\cap$, Entonces $S \supseteq \{i, j\}$. Como no existen macro-jugadores, $\{i\} \in \mathcal{B}^i_\cap$, y $\{j\} \in \mathcal{B}^j_\cap$. Se define

$$\lambda'_S = min(\lambda^i_S, \lambda^j_S)$$

,

y asumiendo que $\lambda^i_S < \lambda^j_S$, se define

$$\lambda'_{\{j\}} = \lambda^j_{\{j\}} + (\lambda^j_S - \lambda^i_S)$$

Observe que $\lambda'_S > 0, \lambda'_{\{j\}} > 0$. Reiterando este razonamiento para otros conjuntos $\lambda'_T = \lambda^i_T$ para algún $i$, el sistema de ponderaciones $(\lambda'_S)_{S \in \mathcal{B}_\cap}$ satisface $\sum\limits_{T \ni i} \lambda'_T = 1$ para todo $i \in N$.

■

**Lema 2.4.1.** *Suponemos que $\mathcal{B}$ es una colección equilibrada sobre $N$. Entonces $\overline{\mathcal{B}}$ contiene todos los singletons en $N$ si y solo si $\mathcal{B}$ no tiene macro-jugador.*

*Demostración.* $\Rightarrow$) Claro. $\Leftarrow$) Suponemos que $\mathcal{B}$ no tiene macro-jugadores y para algún $i \in N, \{i\} \notin \overline{\mathcal{B}}$. Entonces $\bigcap_{B\in\mathcal{B},B\ni i} B = S \ni S$, con $|S| > 1$. Desde que $S$ no es un macro-jugador, debe existir un $T \in \mathcal{B}$ tal que $T \not\ni i$ y $T \cap S \neq \emptyset$. Tomamos $j \in T \cap S$, y consideramos un sistema balanceado $(\lambda_B)_{B\in\mathcal{B}}$ para $\mathcal{B}$. Entonces

$$1 = \sum_{B\in\mathcal{B},B\ni i} \lambda_B < \sum_{B\in\mathcal{B},B\ni i} \lambda_B + \lambda_T \leq \sum_{B\in\mathcal{B},B\ni j} \lambda_B = 1$$

que es una contradicción.

■

Notese que $\Rightarrow$) se verifica también si $\mathcal{B}$ no es equilibrado. Una consecuencia inmediata es:

**Corolario 2.4.2.** *Si $\mathcal{B}$ es una colección equilibrada sobre $N$, entonces $\overline{\mathcal{B}}$ contiene a todos los macro-jugadores en $\mathcal{B}$ y todos los singletons en $N$ no contenidos en ningún macro-jugador.*

*Demostración.* Si no hay macro-jugadores, se aplica el Lema 2.4.1. En otro caso, reemplazar cada macro-jugador por un solo jugador y aplicar el Lema 2.4.1. ■

**Nota 2.4.1.** *(i) Si $\mathcal{B}$ es mínima equilibrada y no contiene macro-jugadores, entonces $\mathcal{B} \neq \overline{\mathcal{B}}$. Esto está claro por el Lema 2.4.1 y al hecho de que una colección equilibrada minimal tiene al menos $n$ conjuntos.*

*(ii) Nos podríamos preguntar si una versión dual del Teorema 2.4.2 existe, i.e.: Si $\mathcal{B}$ is equilibrado y $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{B}}$, entonces su abierto $\mathcal{B}^0$ (i.e., eliminando todos los conjuntos que son intersección de otros) es equilibrado.*

*Esto no es cierto como se demuestra en el siguiente ejemplo: tomamos* $N = \{1,2,3,4\}$ *y la colección equilibrada* $\mathcal{B} = \{12,23,2,134,14,34\}$ *(*$\lambda_S = \dfrac{1}{3}$ *puede ser tomado por cualquier* $S \in \mathcal{B}$*). Su clausura es*

$$\overline{\mathcal{B}} = \{12,23,2,134,14,34,1,3,14,4\}$$

*y es equilibrado por el Teorema 2.4.2. Ahora su abierto es*

$$\mathcal{B}^0 = \{12,23,134,14,34\}$$

*pero no es una colección equilibrada, como se puede ver.*

*(iii) Observar que en general* $\overline{\mathcal{B}_1} \cup \overline{\mathcal{B}_2} \subseteq \overline{\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2}$ *posiblemente con inclusión estricta (e.g., toma* $\mathcal{B}_1 = \{1,23\}$ *y* $\mathcal{B}_2 = \{12,3\}$*). Esto no es seguro porque se puede obtener cualquier colección cerrada equilibrada como unión de las colecciones equilibradas de clausura minimal.*

Llegamos al resultado final.

**Teorema 2.4.4.** *Asumimos* $M'_C = \emptyset$*. Entonces el core de cualquier juego balanceado es acotado si y solo si* $\mathcal{F}$ *no tiene macro-jugadores y* $\mathcal{F} \setminus \{\emptyset, N\}$ *se obtiene como la clausura bajo intersección de la unión de algunas colecciones equilibradas minimales sobre N, i.e.,* $\mathcal{F} \setminus \{\emptyset, N\} = \overline{\bigcup \mathcal{B}_i}$*.*

*Demostración.* $\Leftarrow$) Sabemos que la unión de colecciones equilibradas es equilibrada, por el Teorema 6, $\mathcal{F} \setminus \{\emptyset, N\}$ es equilibrada. Como no existe macro-jugadores, por el Lema 1, $\mathcal{F}$ contiene a todos los singletons, y es además no degenerada. Por lo tanto el $core(0) = \{0\}$ por el Corolario 1.

$\Rightarrow$) $core(0) = \{0\}$ si y solo si $\mathcal{F}$ es no degenerada y $\mathcal{F} \setminus \{\emptyset, N\}$ es equilibrada. Como $\mathcal{F}$ es cerrada bajo intersección, se tiene que $\mathcal{F} \setminus \{\emptyset, N\}$ es la clausura de alguna colección equilibrada $\mathcal{B}$, con $\mathcal{F} \setminus \{\emptyset, N\} \supseteq \mathcal{B} \subseteq (\mathcal{F} \setminus \{\emptyset, N\}$. Como $\mathcal{B}$ es la unión de algunas colecciones equilibradas minimales, $\mathcal{F} \setminus \{\emptyset, N\}$ tiene la forma que buscamos. Finalmente, como $\mathcal{F}$ es no degenerada, implica que

$\mathcal{F}$ no contiene ningún macro-jugador.

$\blacksquare$

Tanto el teorema como la observación (iii), nos da una idea para derivar cualquier sistema $\mathcal{F}$ cerrado bajo intersección tal que $\mathcal{F} \setminus \{\emptyset, N\}$ es equilibrado. Es suficiente para generar todas las colecciones minimales equilibradas, excepto para $N$ (ver [9] para la descripción de un algoritmo para generar colecciones minimales equilibradas), y construye todas las posibles uniones de ellos, luego toma sus clausuras bajo intersección. Esto da $\mathcal{F} \setminus \{\emptyset, N\}$.

# Capítulo 3

# Valores de compromiso en contextos formales

El problema más estudiado en la teoría de juegos cooperativos es como dividir la ganancia total de la gran coalición si todos los jugadores cooperan. Algunos conceptos de solución han sido propuestos para resolver este problema, como los ya estudiados en la sección anterior, que son el valor de Shapley, el core y el nucleolo en juegos de utilidad transferibles (TU-games).

El objetivo de este capítulo es estudiar un tipo particular de conceptos de solución, los *valores de compromiso*. Un valor de compromiso es un concepto de solución que pertenece a la combinación convexa de dos vectores, llamados vector superior e inferior. Los ejemplos mas notables de valores de compromiso son el $\tau$-valor para TU-games y la solución de Raiffa-Kalai-Smorodinsky para problemas de negociación. Vamos a centrar nuestra atención en el valor de compromiso $\tau$-valor.

Estudiaremos estos valores de compromiso en la literatura clásica así como para los juegos en contextos formales. Centramos el estudio para el caso de contextos regulares y por la regularización de contextos, se extiende al caso general. Se demostrarán ciertas propiedades de los valores de compromiso como su axiomatización para contextos de partición conceptual.

## 3.1. Valores de compromisos clásicos

Para caracterizar los valores de compromiso, definido como $\tau$-valor, la propiedad de covarianza juega un papel central. En este sentido, introducimos una familia de valores de compromiso, llamados valores de compromiso covariantes. El $\tau$-valor y el $\chi$-valor pertenecen a esta familia.

El $\tau$-valor introducido por Tijs([11]) para juegos quasi-equilibrados, es un compromiso entre dos valores, uno superior y otro inferior para un juego.

**Definición 3.1.1.** *Sea $v \in G^N$. Los vectores $M^\tau$, $m^\tau \in \mathbb{R}^N$ con coordenadas*

$$M_i^\tau(v) := v(N) - v(N \setminus i)$$

$$m_i^\tau(v) := \max_{\{S: i \in S\}} \left\{ v(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} M_j^\tau(v) \right\}$$

*Son llamados el vector superior y el vector inferior de $v$ respectivamente.*

$M_i^\tau(v)$ puede ser visto como el mayor pago que el jugador $i$ puede esperar obtener. Si quiere conseguir más, entonces puede ser una ventaja para los otros jugadores expulsarlo de la gran coalición. También se le llama el *pago utópico* del jugador $i$. El vector $m_i^\tau(v)$ representa el mínimo pago que el jugador $i$ puede garantizarse, es decir, un jugador $i$ supone que si ofrece dentro de cualquier coalición los pagos utópicos al resto de jugadores, él puede garantizarse el resto del valor de dicha coalición.

**Definición 3.1.2.** *Diremos que un juego $v \in G^N$ es quasi-equilibrado si y solo si:*

$$m^\tau(v) \leq M^\tau(v) \quad y \quad \sum_{i \in N} m_i^\tau(v) \leq v(N) \leq \sum_{i \in N} M_i^\tau(v)$$

*La clase de todos los juegos quasi-equilibrados con un conjunto de jugadores $N$ se denota por $\mathcal{QB}^N$.*

En un juego quasi-equilibrado siempre se cumple que el vector inferior es más pequeño que el vector superior. Desde un punto de vista geométrico, los vectores inferior y superior quedan uno a cada lado del hiperplano de eficiencia $\{\gamma \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^n \gamma_i = v(N)\}$. Si dibujamos un segmento entre los valores inferior y superior, el *tau*-valor sería el punto donde el segmento corta al plano.

**Definición 3.1.3.** *Para un juego $v \in \mathcal{QB}^N$, el $\tau$-valor de $v$, denotado por $\tau(v)$, es el único vector sobre la recta-segmento en $\mathcal{R}^N$ cuyos extremos son $m^\tau(v)$ y $M^\tau(v)$. Así que tenemos:*

$$\tau(v) := m^\tau(v) + \alpha(M^\tau(v) - m^\tau(v))$$

*donde $\alpha$ es tal que $\sum_{i \in N} \tau_i(v) = v(N)$*

*El $\tau$-valor esta bien definido para la clase de juegos quasi-equilibrados.*

En 1996, Bergantiños y Massó [12] introdujeron un nuevo valor de compromiso, llamado $\chi$-valor, basado en la idea del $\tau$-valor. La única diferencia radica en la forma de definir el valor superior. En el $\chi$-valor el valor superior para un jugador $i$ es la máxima contribución marginal para toda coalición $S \in N$.

En [12] se prueba que la clase anterior es la clase de juegos débilmente esenciales (un juego $v \in G^N$ se dice débilmente esencial sii $\sum_{i\in N} v(i) \leq v(N)$).

**Definición 3.1.4.** *Sea $v \in G^N$. Los vectores $M^\chi(v), m^\chi(v) \in \mathbb{R}^N$ con coordenadas*

$$M_i^\chi(v) = \max_{S:i\in S}\{v(S) - v(S \setminus \{i\})\}$$

$$m_i^\chi(v) = \max_{S:i\in S}\{v(S) - \sum_{j\in S\setminus\{i\}} M_i^\chi(v)\}$$

*Son llamados **vector superior** y el **vector inferior** de $v$ respectivamente.*

$M_i^\chi(v)$ se interpreta como el pago máximo que el jugador $i$ espera obtener.

**Proposición 3.1.1.** *El valor $x_i$ está bien definido en el conjunto de los juegos debilmente esenciales. Además, el vector inferior es siempre $v(i)$.*

**Proposición 3.1.2.** *El $\chi$-valor está bien definido sobre la clase de juegos que satisfacen*

$$m^\chi(v) \leq M^\chi(v) \quad y \quad \sum_{i\in N} m_i^\chi(v) \leq v(N) \leq \sum_{i\in N} M_i^\chi(v)$$

**Definición 3.1.5.** *Para un juego débilmente esencial $v$, el **$\chi$-valor** de $v$, $\chi(v)$, es el único vector sobre el segmento en $\mathbb{R}^N$ con extremos $m^\chi(v)$ y $M^\chi(v)$. Así tenemos que:*

$$\chi(v) := m^\chi(v) + \alpha(M^\chi(v) - m^\chi(v))$$

*donde* $\sum_{i\in N}\chi_i(v) = v(N)$.

En [20], se observa que tras analizar la literatura sobre caracterización de los valores de compromiso, la mayoría de ellos, tienen una estructura similar. Por esta razón se introduce algunas definiciones y resultados para establecer esas analogías y dar una teoría unificada. Se construye una axiomatización general para todos ellos, donde el axioma común es la covarianza.

**Definición 3.1.6.** *Una función* $\mathcal{F} : G^N \to \mathbb{R}^N$ *satisface la propiedad de covarianza si, para todo* $a \in [0,\infty]$ *y para todo* $b \in \mathbb{R}^N$,

$$\mathcal{F}(av+b) = a\mathcal{F}(v) + b$$

*para todo* $v \in G^N$ *y siendo* $b$ *un juego aditivo.*

**Proposición 3.1.3.** *Sea* $v \in G^N$, *y sea* $\mathcal{F} : G^N \to \mathbb{R}^N$ *una función que satisface la propiedad de covarianza. Entonces la función* $f : G^N \to \mathbb{R}^N$ *definida por*

$$f(v) = \max_{\{S:i\in S\}}\{v(S) - \sum_{\{j\in S\setminus\{i\}\}}\mathcal{F}_j(v)\}$$

$\forall v \in G^N$, *satisface la propiedad de covarianza.*

**Definición 3.1.7.** *Sea* $v \in G^N$, *y sea* $\mathcal{F} : G^N \to \mathbb{R}^N$ *una función que satisface la propiedad de covarianza. Se define el valor de compromiso* $\theta^{\mathcal{F}}$ *como*

$$\theta^{\mathcal{F}}(v) = f(v) + \alpha(\mathcal{F}(v) - f(v))$$

*donde $\alpha$ es tal que $\sum_{i\in N} \theta_i^{\mathcal{F}}(v) = v(N)$. $\mathcal{F}(v)$ es llamado $\theta^{\mathcal{F}}$**-vector superior** y a $f(v)$ es el $\theta^{\mathcal{F}}$**-vector inferior**.*

Es inmediato ver que que el $\tau$-valor y el $\chi$-valor son valores de compromiso en el sentido de la definición anterior.

En general, todos los valores que se definen a partir de un vector superior y otro inferior satisfaciendo covarianza, admiten una axiomatización de la siguiente forma:

- Un valor $\Psi$ para $A \subset G^N$ satisface la propiedad de *covarianza* si, $\forall v \in A, \forall a \in \mathbb{R}^N$ y $\forall \lambda > 0$, se tiene que $\Psi(\lambda v + a) = \lambda\Psi(v) + a$
- Un valor $\Psi$ para $A \subset G^N$ satisface la propiedad de $\mathcal{F}$-*proporcionalidad* si, $\forall v \in A$ tal que $f(v) = 0_n$, entonces $\Psi(v)$ es proporcional a $\mathcal{F}(v)$.
- Un valor $\Psi$ para $A \subset G^N$ satisface la propiedad de *eficiencia* si, $\forall v \in A$, se tiene que $\sum_{i\in N} \Psi_i(v) = v(N)$.

En las siguientes secciones, estudiamos algunos valores de compromiso sobre contextos formales.

## 3.2. Contextos regulares

Presentamos la familia de contextos regulares. Este tipo de contextos poseen las mejores propiedades para definir sobre ellos los valores de compromisos. La regularización de un contexto nos permite generalizar nuestro estudio también para contextos no regulares.

**Definición 3.2.1.** *Un contexto se dice regular si:*

1. *No contiene macro-atributos*

2. *No contiene macro-jugadores*

3. $N' = \emptyset$

4. $M' = \emptyset$

En los contextos regulares podremos definir fácilmente vectores superiores e inferiores. Para extender los valores definidos a contextos no regulares presentamos el siguiente algoritmo para la regularización de contextos.

## Algoritmo para la regularización de un contexto

Dado un contexto $\mathcal{C} = (N, M, I)$ no regular, se define su regularización como un nuevo contexto $\widehat{\mathcal{C}} = (\widehat{N}, \widehat{M}, \widehat{I})$, donde

- Si $M' \neq \emptyset$ se crea un atributo nuevo $a$ que no cumpla ningún jugador. Con esto nos aseguramos que el bottom de $L^N_{\widehat{\mathcal{C}}}$ es el vacío, i.e., $\widehat{M}' = \emptyset$.

- Un macro-jugador $K$ en $\mathcal{C}$, se considera como un solo jugador en $\widehat{\mathcal{C}}$, al que representamos como $i_K$. Con esto, el número de jugadores queda reducido en el nuevo contexto regularizado de la siguiente manera

$$\widehat{N} = N \setminus \bigcup_K (K \setminus i_K)$$

- Un macro-atributo $L$ en $\mathcal{C}$, se considera como un solo atributo en $\widehat{\mathcal{C}}$, al que representamos como $a_L$. El número de atributos queda reducido en el nuevo contexto regularizado de la siguiente manera

$$\widehat{M} = (M \setminus N')\setminus\Big[\bigcup_L (L \setminus a_L)\Big]$$

Para el caso que en $\mathcal{C}$ tengamos $M \neq \emptyset$ se añade a la formula anterior el atributo nuevo $a$

$$\widehat{M} = \Big[(M \setminus N') \setminus \Big[\bigcup_L (L \setminus a_L)\Big]\Big] \cup a$$

- La relación viene dada por la matriz de incidencia que no cambia.

$$\widehat{I}(i,b) = I(i,b) \quad \forall b \neq a$$

Cuando $M' \neq \emptyset$ la relación para el nuevo atributo es

$$\widehat{I}(i,a) = 0 \quad \forall i$$

Al tener el nuevo contexto $\widehat{\mathcal{C}}$ regularizado, el juego se ve modificado. Por ello se define un nuevo juego para el contexto regular.

$$(\mathcal{C}, v) \rightarrow (\widehat{\mathcal{C}}, \widehat{v})$$

**Definición 3.2.2.** *Sea $(S,A) \in \mathcal{L}_{\widehat{\mathcal{C}}}$, entonces se define el nuevo juego como*

$$\widehat{v}(S,A) = \begin{cases} v\Bigg(S \cup \Bigg[\bigcup_{K \cap S \neq \emptyset} K \setminus i_K\Bigg], (A \cup N') \cup \Bigg[\bigcup_{L \cap A \neq \emptyset} L \setminus a_L\Bigg] \cup a\Bigg) \\ \\ \widehat{v}(\emptyset, M_{\widehat{\mathcal{C}}}) = 0 \qquad \textit{solo si } M'_{\mathcal{C}} \neq \emptyset \\ \\ \end{cases}$$

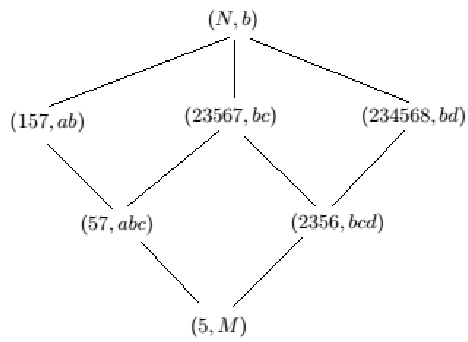
*donde $K$ es un macro-jugador, $L$ es un macro-atributo y $a$ es el nuevo atributo creado en el caso que $M'_{\mathcal{C}} \neq \emptyset$.*

En la siguiente sección presentamos cuatro valores de compromiso. Dos de ellos basados en la idea de $\tau$-valor y los otros dos basados en la idea de $\chi$-valor. Para ello, introducimos el concepto solución sobre juegos en contextos formales.

**Ejemplo 3.2.1.-** Regularización de un contexto.

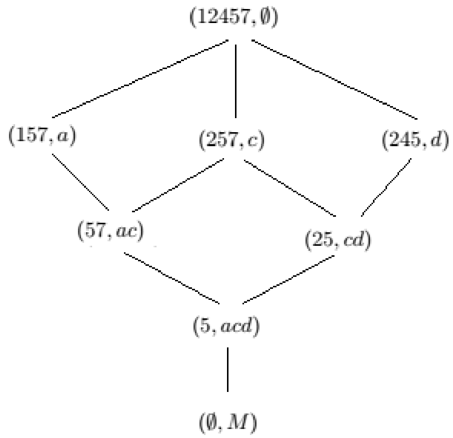
El siguiente contexto no es regular ya que $M'_{\mathcal{C}}$ no es vacío y $N'_{\mathcal{C}}$ no es vacío. Comenzamos introduciendo un nuevo atributo.

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x | x | | |
| 2 | | x | x | x |
| 3 | | x | x | x |
| 4 | | x | | x |
| 5 | x | x | x | x |
| 6 | | x | x | x |
| 7 | x | x | x | |
| 8 | | x | | x |




Existen dos macro-jugadores $K_1 = \{2, 3, 6\}$ y $K_2 = \{4, 8\}$ estos se pueden ver en la tabla ya que la intersección de sus filas es el vacío. Tratamos a los macro-jugadores como a un solo jugador quedando el nuevo contexto como sigue

| | a | c | d | e |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x | | | |
| 2 | | x | x | |
| 4 | | | x | |
| 5 | x | x | x | |
| 7 | x | x | | |




**Definición 3.2.3.** *Sea $(\mathcal{C}, v)$ un contexto no regular y sea $K$ un macro-jugador. Sea $f$ una solución sobre juegos en contextos regulares y sea $i_K$ el representante del macro-jugador. Se tiene que*

$$f_i(\mathcal{C}, v) = \begin{cases} f_i(\widehat{\mathcal{C}}, \widehat{v}) & i \notin K \\ f_{i_K}(\widehat{\mathcal{C}}, \widehat{v})/|K| & i \in K \end{cases}$$

La definición anterior es una extensión de $f$ que verifica la condición de igual tratamiento en macro-jugadores, es decir, si $K$ es un macro-jugador entonces todos sus jugadores reciben el mismo pago.

Teniendo en cuenta como se extiende una solución para contextos generales, nos centraremos en el resto del capítulo en contextos que son regulares.

# 3.3. $\tau$-Valores

Los dos primeros valores de compromiso que presentamos se basan en la idea del $\tau$-valor. Donde tenemos dos vectores uno superior y otro inferior. El vector superior mantiene el mismo significado, i.e., el mayor pago que el jugador $i$ puede esperar. En esta y en las secciones restantes representamos al vector superior como $\mathcal{Q}_i(\mathcal{C}, v)$ para diferenciarlo del vector superior presentado anteriormente. De la misma forma representamos el valor inferior como $q_i(\mathcal{C}, v)$.

Veremos que existen varias opciones para generalizar la idea de $\tau$-valor, en particular nosotros vamos a tratar con dos de ellas.

## $\tau$-Valor basado en coaliciones maximales

El primer $\tau$-valor centra su atención en las coaliciones factibles, $(S, A) \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$, que son maximales y que no contienen al jugador $i$, para el cálculo de su vector superior.

Como en el caso clásico el $\tau$-valor, para juegos quasi-equilibrados en contextos, es un compromiso entre el vector superior e inferior para un juego.

**Definición 3.3.1.** *Sea $(\mathcal{C}, v) \in CCG$. Se define el vector superior $\mathcal{Q}^1(\mathcal{C}, v) \in \mathbb{R}^N$ con coordenadas*

$$\mathcal{Q}_i^1(\mathcal{C}, v) = \max_{\{S \in M_i\}} \left\{ \frac{1}{|N \setminus S|} [v(N, \emptyset) - v(S, S'_{\mathcal{C}})] \right\}$$

*Dado el vector superior, introducimos el vector inferior como $q^1(\mathcal{C}, v)$ con coordenadas*

$$q_i^1(\mathcal{C}, v) = \max_{\substack{\{S, S'_{\mathcal{C}}) \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}\} \\ \{i \in S\}}} \left\{ v(S, S'_{\mathcal{C}}) - \sum_{\{j \in S \setminus i\}} \mathcal{Q}_j^1(\mathcal{C}, v) \right\}$$

*donde* $M_{i(\mathcal{C})} = \{S \subseteq N \setminus \{i\} : (S, S'_{\mathcal{C}}) \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}},\ S \text{ maximal}\}$ *(maximal en el sentido de la contención) es el conjunto de las coaliciones maximales que no contienen a* $i$*, esto es, cualquier otro concepto* $(T, T'_{\mathcal{C}})$ *tal que* $S$ *esté contenido en* $T$*, ocurre que* $i$ *está en* $T$*.*

La interpretación del vector superior en este caso es la siguiente. Dado un jugador $i$ en el tau-valor el jugador buscaba la única contribución marginal en una coalición maximal en la estructura $2^N$. Ahora el jugador $i$ selecciona la mejor entre todas las opciones que tiene pero teniendo en cuenta que ese beneficio no es sólo para él sino que tiene que compartirlo con los jugadores de $N - S$.

La definición de quasi-equilibrado para este caso sería, siguiendo el modelo general

$$q^1(v) \leq \mathcal{Q}^1(v) \quad \text{y} \quad \sum_{i\in N} q_i^1(v) \leq v(N) \leq \sum_{i\in N} \mathcal{Q}^1(v)$$

**Definición 3.3.2.** *Para un juego* $v \in \mathcal{QB}^N$*, el* $\tau^1$*-valor de* $v$*, denotado por* $\tau^1(v)$*, es el único vector sobre la recta-segmento en* $\mathcal{R}^N$ *cuyos puntos extremos son* $q^1(v)$ *y* $\mathcal{Q}^1(v)$*. Así que tenemos:*

$$\tau^1(v) := q^1(v) + \alpha\Big(\mathcal{Q}^1(v) - q^1(v)\Big)$$

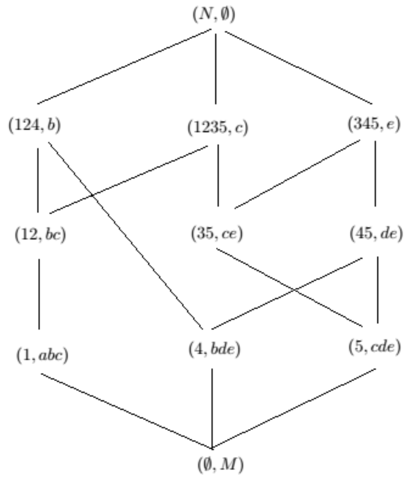
*donde* $\alpha$ *es tal que* $\sum_{i\in N} \tau_i^1(v) = v(N)$

**Ejemplo 3.3.1.-** Continuación.

Recordamos la tabla de valores asociada al retículo de conceptos:

| $(S,S')$ | $(1,abc)$ | $(4,bde)$ | $(5,cde)$ | $(12,bc)$ | $(35,ce)$ | $(45,de)$ | $(124,b)$ | $(1235,c)$ | $(345,e)$ | $(N,\emptyset)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v(S,S')$ | 10 | 20 | 20 | 50 | 30 | 40 | 40 | 50 | 40 | 100 |

| | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x | x | x | | |
| 2 | | x | x | | |
| 3 | | | x | | x |
| 4 | | x | | x | x |
| 5 | | | x | x | x |




Calculamos $q^1(v)$ y $\mathcal{Q}^1$ del juego:

$$M_1 = \{(345)\}$$
$$Q_1^1 = \max_{s\in M_1}\{\frac{1}{2}[100-40]\} = 30$$
$$M_2 = \{(345)\}$$
$$Q_2^1 = \max_{s\in M_2}\{\frac{1}{2}[100-40]\} = 30$$
$$M_3 = \{(124)\}$$
$$Q_3^1 = \max_{s\in M_3}\{\frac{1}{2}[100-40]\} = 30$$
$$M_4 = \{(1235)\}$$
$$Q_4^1 = \max_{s\in M_4}\{[100-50]\} = 50$$
$$M_5 = \{(124)\}$$
$$Q_5^1 = \max_{s\in M_5}\{\frac{1}{2}[100-40]\} = 30$$

$$q_1^1 = \text{máx}\{10, 50-30, 40-80, 50-90, 100-140\} = 20$$
$$q_2^1 = \text{máx}\{50-30, 40-80, 50-90, 100-140\} = 20$$
$$q_3^1 = \text{máx}\{30-30, 50-90, 40-80, 100-140\} = 0$$
$$q_4^1 = \text{máx}\{20, 40-30, 40-60, 40-60, 40-60, 100-120\} = 20$$
$$q_5^1 = \text{máx}\{20, 30-30, 40-50, 50-90, 40-80, 100-140\} = 20$$

Tenemos el vector superior e inferior

$$Q^1 = (30, 30, 30, 50, 30)$$

$$q^1 = (20, 20, 0, 20, 20)$$

Puede comprobarse que el juego es *quasi-equilibrado* y su tau-valor es:

$$\tau^1(v) = (22.22, 22.22, 6.66, 26.66, 22.22)$$

## $\tau$-Valor basado en particiones conceptuales maximales

En esta sección definimos que es una partición conceptual para un contexto $(\mathcal{C}, v)$.

**Definición 3.3.3.** *Sea $\mathcal{C}$ un contexto. Una partición conceptual de $S \subseteq N$ es $P = \{S_1, ..., S_r\}$ de forma que*

- $S_l \cap S_p = \emptyset \quad \forall l, p = 1, ..., r \quad l \neq p$
- $\bigcup_{p=1}^{r} S_p \subseteq S; \quad (S_p)''_{\mathcal{C}} = S$
- $\forall i \in S \setminus \bigcup_{p=1}^{r} S_p \rightarrow i''_{\mathcal{C}} \cap \left( \bigcup_{p=1}^{r} S_p \cup N \setminus S \right) \neq \emptyset$

Una partición conceptual de una coalición es una partición de dicha coalición en coaliciones que estén definidas el retículo de contextos, aunque no cubra la coalición completa, es decir, algunos jugadores de la coalición original pueden no estar presentes en la partición, debido a la estructura del retículo.

**Definición 3.3.4.** *Si $P, \widehat{P}$ son particiones conceptuales de $S$ en $\mathcal{C}$ entonces $P \preceq \widehat{P}$ si*

$$\forall \quad T \in P \Rightarrow \exists \quad \widehat{T} \in \widehat{P} \text{ con } T \subseteq \widehat{T}$$

*Sea $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(S)$ la familia de particiones conceptuales maximales de $S$ en $\mathcal{C}$.*

Con esta partición ya podemos definir los vectores superior e inferior de $(\mathcal{C}, v)$.

**Definición 3.3.5.** *Sea $(\mathcal{C}, v) \in CCG$, se define el vector superior $\mathcal{Q}_i^2(\mathcal{C}, v) \in \mathbb{R}^N$, con coordenadas*

$$\mathcal{Q}_i^2(\mathcal{C}, v) = \max_{\{P \in \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(N \setminus i)\}} \left\{ v(N, \emptyset) - \sum_{T \in P} v(T, T'_{\mathcal{C}}) \right\}$$

*Dado el vector superior, introducimos el vector inferior como$q_i^2(\mathcal{C}, v)$ con coordenadas*

$$q_i^2(\mathcal{C}, v) = \max_{\substack{\{(S, S'_{\mathcal{C}}) \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}\} \\ \{i \in S\}}} \left\{ v(S, S'_{\mathcal{C}}) - \sum_{j \in S \setminus i} \mathcal{Q}_j^2(\mathcal{C}, v) \right\}$$

*donde $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ son las particiones conceptuales maximales de $N \setminus i$.*

Un juego $(\mathcal{C}, v) \in CCG$ es quasi-equilibrado si y solo si:

$$q^2(v) \leq \mathcal{Q}^2(v) \quad \text{ y } \quad \sum_{i \in N} q_i^2(v) \leq v(N) \leq \sum_{i \in N} \mathcal{Q}^2(v)$$

Igual que para el caso clásico definimos el siguiente valor de compromiso.

**Definición 3.3.6.** *Para un juego $v \in \mathcal{QB}^N$, el $\tau^2$-valor de $v$, denotado por $\tau^2(v)$, es el único vector eficiente sobre la recta-segmento en $\mathcal{R}^N$ cuyos extremos son $q^2(v)$ y $\mathcal{Q}^2(v)$. Así que tenemos:*

$$\tau^2(v) := q^2(v) + \alpha\Bigg(\mathcal{Q}^2(v) - q^2(v)\Bigg)$$

*donde $\alpha$ es tal que $\sum_{i\in N} \tau_i^2(v) = v(N)$*

**Ejemplo 3.3.2.-**. Continuación del Ejemplo 3.3.1.

$$\mathcal{P}(N \setminus 1) = \{(345)\}$$
$$Q_1^2 = v(N) - v(345) = 100 - 40 = 60$$

$$\mathcal{P}(N \setminus 2) = \{(1)(345)\}$$
$$Q_2^2 = v(N) - v(1) - v(345) = 100 - 40 - 10 = 50$$

$$\mathcal{P}(N \setminus 3) = \{\{(5), (124)\}, \{(12), (45)\}\}$$
$$Q_3^2 = \max\{v(N) - v(5) - v(124), v(N) - v(12) - v(45)\} = 40$$

$$\mathcal{P}(N \setminus 4) = \{(1235)\}$$
$$Q_4^2 = v(N) - v(1235) = 100 - 50 = 50$$

$$\mathcal{P}(N \setminus 5) = \{(124)\}$$
$$Q_5^2 = v(N) - v(124) = 100 - 40 = 60$$

$$
\begin{aligned}
q_1^2 &= \text{máx}\{10, 50-50, 40-50-50, 50-50-40-60, \\
&\quad 100-50-40-50-60\} = 10 \\
q_2^2 &= \text{máx}\{50-60, 40-110, 50-160, 100-210\} = -10 \\
q_3^2 &= \text{máx}\{30-60, 50-170, 40-110, 100-220\} = -30 \\
q_4^2 &= \text{máx}\{20, 40-60, 40-110, 40-100, 100-210\} = 20 \\
q_5^2 &= \text{máx}\{20, 30-40, 40-50, 50-150, 40-90, 100-150\} = 20
\end{aligned}
$$

Tenemos el vector superior e inferior

$$Q^2 = (60, 50, 40, 50, 60)$$

$$q^2 = (10, -10, -30, 20, 20)$$

Puede comprobarse que el juego es *quasi-equilibrado* y su $\tau^2$-valor es:

$$\tau^2(v) = (28, 11.6, -4.8, 30.8, 34.4)$$

# 3.4. $\chi$-Valores

En esta sección definimos el $\chi$-valor para un juego sobre contextos formales. La única diferencia radica en que el vector superior de un jugador $i$ es la máxima de las contribuciones marginales.

## $\chi$-Valor basado en coaliciones maximales

**Definición 3.4.1.** *Sea $\mathcal{C} = (N, M, I)$ un contexto. Un activo simple de un jugador $i \in N$ en $\mathcal{C}$ es un par de coaliciones $(S; T)$ que satisfacen las siguientes condiciones.*

1. $(S, S'_{\mathcal{C}}), (T, T'_{\mathcal{C}}) \in L_{\mathcal{C}}$, *y*

2. $(S, S'_{\mathcal{C}}) \triangleright (T, T'_{\mathcal{C}})$ *en el retículo* $L_{\mathcal{C}}$.

*Los jugadores que apuestan por el activo simple* $(S;T)$ *son aquellos que están en* $S \setminus T$. *El conjunto de activos simples en el cual un determinado jugador* $i \in N$ *apuesta se denota por* $\mathcal{B}_i(\mathcal{C})$

**Definición 3.4.2.** *Sea* $(\mathcal{C}, v) \in CCG$, *se define el vector superior* $\mathcal{Q}_i^3(\mathcal{C}, v) \in \mathbb{R}^N$ *con coordenadas*

$$\mathcal{Q}_i^3(\mathcal{C}, v) = \max_{\{(S,T)\in\mathcal{B}_i(\mathcal{C})\}} \left\{ \frac{1}{|S \setminus T|} \left[ v(S, S'_{\mathcal{S}}) - v(T, T'_{\mathcal{C}}) \right] \right\}$$

*Dado el vector superior, introducimos el vector inferior como* $q_i^3(\mathcal{C}, v)$ *con coordenadas*

$$q_i^3(\mathcal{C}, v) = \max_{\substack{\{(S,S'_{\mathcal{C}})\in\mathcal{L}_{\mathcal{C}}\}\\ \{i\in S\}}} \left\{ v(S, S'_{\mathcal{C}}) - \sum_{j\in S\setminus i} \mathcal{Q}_j^3(\mathcal{C}, v) \right\}$$

*donde* $\mathcal{B}_i(\mathcal{C}) = \{(S,T) : (S, S'_{\mathcal{C}}) \triangleright (T, T'_{\mathcal{C}}), \quad i \in S \setminus T\}$

Diremos que un juego $(\mathcal{C}, v) \in CCG$ es quasi-equilibrado si y solo si:

$$q^3(v) \leq \mathcal{Q}^3(v) \quad \text{ y } \quad \sum_{i\in N} q_i^3(v) \leq v(N) \leq \sum_{i\in N} \mathcal{Q}^3(v)$$

Igual que para el caso clásico definimos el siguiente valor de compromiso.

**Definición 3.4.3.** *Sea* $v \in \mathcal{QB}^N$, *el* $\chi^3$*-valor de* $v$, *denotado por* $\chi^3(v)$, *es el único vector eficiente sobre la recta-segmento en* $\mathcal{R}^N$ *cuyos extremos son* $q^3(v)$ *y* $\mathcal{Q}^3(v)$. *Así que tenemos:*

$$\chi^3(v) := q^3(v) + \alpha\Big(\mathcal{Q}^3(v) - q^3(v)\Big)$$

*donde* $\alpha$ *es tal que* $\sum_{i\in N} \chi^3_i(v) = v(N)$

**Ejemplo 3.4.1.-** Continuación del Ejemplo 3.3.2.

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,\emptyset),(124,4),(1235,35),(N,345)\}$$
$$Q^3_1 = \text{máx}\{10, \frac{1}{2}[40-20], \frac{1}{2}[50-30], \frac{1}{2}[100-40]\} = 30$$

$$\mathcal{B}_2 = \{(12,1),(124,4),(1235,35),(N,345)\}$$
$$Q^3_2 = \text{máx}\{[50-10], \frac{1}{2}[40-20], \frac{1}{2}[50-30], \frac{1}{2}[100-40]\} = 40$$

$$\mathcal{B}_3 = \{(35,5),(1235,12),(345,45),(N,124)\}$$
$$Q^3_3 = \text{máx}\{[30-20], \frac{1}{2}[50-50], [40-40], \frac{1}{2}[100-40]\} = 30$$

$$\mathcal{B}_4 = \{(4,\emptyset),(45,5),(124,12),(345,35),(N,1235)\}$$
$$Q^3_4 = \text{máx}\{20, [40-20], [40-50], [40-30], [100-50]\} = 50$$

$$\mathcal{B}_5 = \{(5,\emptyset),(45,4),(1235,12),(N,124)\}$$
$$Q^3_5 = \text{máx}\{20, [40-20], \frac{1}{2}[50-50], \frac{1}{2}[100-40]\} = 30$$

$$q^3_1 = \text{máx}\{10, 50-40, 40-90, 50-100, 100-150\} = 10$$
$$q^3_2 = \text{máx}\{50-30, 40-80, 50-90, 100-140\} = 20$$
$$q^3_3 = \text{máx}\{30-30, 50-100, 40-80, 100-150\} = 0$$
$$q^3_4 = \text{máx}\{20, 40-30, 40-70, 40-60, 100-130\} = 20$$
$$q^3_5 = \text{máx}\{20, 30-30, 40-50, 50-100, 40-80, 100-150\} = 20$$

Tenemos el vector superior e inferior

$$Q^3 = (30, 40, 30, 50, 30)$$

$$q^3 = (10, 20, 0, 20, 20)$$

Se comprueba que el juego es *quasi-equilibrado* y su $\chi^3$-valor es:

$$\chi^3(v) = (15.45,\ 25.45,\ 8.18,\ 28.18,\ 22.81)$$

### $\chi$-Valor basado en particiones conceptuales maximales

**Definición 3.4.4.** *Sea $(\mathcal{C}, v) \in CCG$. Se define el vector superior $\mathcal{Q}_i^4(\mathcal{C}, v) \in \mathbb{R}^N$ con coordenadas*

$$\mathcal{Q}_i^4(\mathcal{C}, v) = \max_{\substack{(S,S'_{\mathcal{C}}) \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}} \\ i \in S}} \max_{P \in \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(S \setminus i)} \left\{ v(S, S'_{\mathcal{C}}) - \sum_{T \in P} v(T, T'_{\mathcal{C}}) \right\}$$

*Dado el vector superior, introducimos el vector inferior como $q_i^4(\mathcal{C}, v)$ con coordenadas*

$$q_i^4(\mathcal{C}, v) = \max_{\substack{(S,S'_{\mathcal{C}}) \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}} \\ i \in S}} \left\{ v(S, S'_{\mathcal{C}}) - \sum_{j \in S \setminus i} \mathcal{Q}_j^4(\mathcal{C}, v) \right\}$$

*donde $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(S \setminus \{i\})$ son las particiones conceptuales maximales contenidas en $S \setminus \{i\}$.*

Un juego $(\mathcal{C}, v) \in CCG$ es quasi-equilibrado si y solo si:

$$q^4(v) \leq \mathcal{Q}^4(v) \quad \text{y} \quad \sum_{i \in N} q_i^4(v) \leq v(N) \leq \sum_{i \in N} \mathcal{Q}^4(v)$$

Igual que para el caso clásico definimos el siguiente valor de compromiso.

**Definición 3.4.5.** *Para un juego $v \in \mathcal{QB}^N$, el $\chi^4$-valor de $v$, denotado por $\chi^4(v)$, es el único vector sobre la recta-segmento en $\mathcal{R}^N$ cuyos extremos son $q^4(v)$ y $\mathcal{Q}^4(v)$. Así que tenemos:*

$$\chi^4(v) := q^4(v) + \alpha\Big(\mathcal{Q}^4(v) - q^4(v)\Big)$$

*donde $\alpha$ es tal que $\sum_{i \in N} \chi_i^4(v) = v(N)$*

**Ejemplo 3.4.2.-** Continuación del Ejemplo 3.4.1.

$$\mathcal{P}(\{124\} \setminus \{1\}) = \{4\}$$
$$\mathcal{P}(\{1235\} \setminus \{1\}) = \{35\}$$
$$\mathcal{P}(N \setminus \{1\}) = (\{345\}, (\{4\}, \{35\}))$$
$$\text{máx}\{100 - 40, 100 - 20 - 30\} = 60$$
$$Q_1^4 = \text{máx}\{40 - 20, 50 - 30, 60\} = 60$$

---

$$\mathcal{P}(\{12\} \setminus \{2\}) = \{1\}$$
$$\mathcal{P}(\{124\} \setminus \{2\}) = (\{1\}, \{4\})$$
$$\mathcal{P}(\{1235\} \setminus \{2\}) = (\{1\}, \{35\})$$
$$\mathcal{P}(N \setminus \{2\}) = ((\{1\}, \{345\}), (\{1\}, \{4\}, \{35\}))$$
$$\text{máx}\{100 - 10 - 40, 100 - 10 - 20 - 35\} = 50$$
$$Q_2^4 = \text{máx}\{50 - 10, 40 - 10 - 20, 50 - 10 - 30, 50\} = 50$$

$$\mathcal{P}(\{35\} \setminus \{3\}) = \{5\}$$
$$\mathcal{P}(\{345\} \setminus \{3\}) = (\{45\}, (\{4\}, \{5\}))$$
$$\text{máx}\{40 - 40, 40 - 20 - 20\} = 0$$
$$\mathcal{P}(\{1235\} \setminus \{3\}) = (\{12\}, \{5\})$$
$$\mathcal{P}(N \setminus \{3\}) = ((\{5\}, \{124\}), (\{12\}, \{45\}), (\{12\}, \{4\}, \{5\}))$$
$$\text{máx}\{100 - 20 - 40, 100 - 50 - 40, 100 - 50 - 20 - 20\} = 40$$
$$Q_3^4 = \text{máx}\{30 - 20, 0, 50 - 50 - 20, 40\} = 40$$

---

$$\mathcal{P}(\{45\} \setminus \{4\}) = \{5\}$$
$$\mathcal{P}(\{124\} \setminus \{4\}) = \{12\}$$
$$\mathcal{P}(\{345\} \setminus \{4\}) = \{35\}$$
$$\mathcal{P}(N \setminus \{4\}) = (\{1235\}, (\{12\}, \{35\}))$$
$$\text{máx}\{100 - 50, 100 - 50 - 30\} = 50$$
$$Q_4^4 = \text{máx}\{40 - 20, 40 - 50, 40 - 30, 50\} = 50$$

---

$$\mathcal{P}(\{45\} \setminus \{5\}) = \{4\}$$
$$\mathcal{P}(\{345\} \setminus \{5\}) = \{4\}$$
$$\mathcal{P}(\{1235\} \setminus \{5\}) = \{12\}$$
$$\mathcal{P}(N \setminus \{5\}) = \{124\}$$
$$Q_5^4 = \text{máx}\{40 - 20, 40 - 20, 50 - 50, 100 - 40\} = 60$$

$$
\begin{aligned}
&q_1^4 = \text{máx}\{10, 50-50, 40-50-50, 50-50-40-50,\\
&\quad 100-50-40-50-60\} = 10\\
&q_2^4 = \text{máx}\{50-60, 40-60-50, 50-60-40-60,\\
&\quad 100-60-40-50-60\} = -10\\
&q_3^4 = \text{máx}\{30-50, 50-60-50-60, 40-50-60,\\
&\quad 100-60-50-50-60\} = -20\\
&q_4^4 = \text{máx}\{20, 40-60, 40-60-50, 40-40-60,\\
&\quad 100-60-50-40-60\} = 20\\
&q_5^4 = \text{máx}\{20, 30-40, 40-50, 50-60-50-40, 40-40-50,\\
&\quad 100-60-50-40-50\} = 20
\end{aligned}
$$

Tenemos el vector superior e inferior

$$Q^4 = (60, 50, 40, 50, 60)$$

$$q^4 = (10, -10, -20, 20, 20)$$

Se comprueba que el juego es *quasi-equilibrado* y su $\chi^4$-valor es:

$$\chi^4(v) = (26.67, 10, 0, 30, 33.33)$$

Presentamos un resultado importante sobre $q^3$ definido anteriormente.

**Proposición 3.4.1.** *Se verifica para el vector superior $\mathcal{Q}^3$ de un juego concepto $(\mathcal{C}, v)$ que*

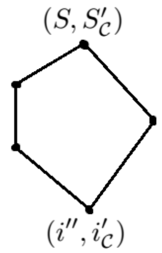
$$q_i^3 = v(i''_{\mathcal{C}}, i'_{\mathcal{C}}) - \sum_{j \in i'' \setminus i} \mathcal{Q}_j^3(\mathcal{C}, v)$$

*Demostración.* Recordamos que $q_i^3(\mathcal{C},v) = \max\limits_{\substack{(S,S'_{\mathcal{C}})\in\mathcal{L}_{\mathcal{C}}\\ i\in S}} \left\{ v(S,S'_{\mathcal{C}}) - \sum\limits_{j\in S\setminus i} \mathcal{Q}_j^3(\mathcal{C},v)\right\}$, por lo que, como $(i''_{\mathcal{C}}, i'_{\mathcal{C}}) \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}} \Rightarrow q_i^3 \geq v(i''_{\mathcal{C}}, i'_{\mathcal{C}}) - \sum\limits_{j\in i''\setminus i} Q_j^3(\mathcal{C},v)$.

Vamos a probar que $\forall (S,S'_{\mathcal{C}}) \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ con $i \in S$ ocurre que

$$v(S,S'_{\mathcal{C}}) - \sum_{\{j\in S\setminus i\}} \mathcal{Q}_j^3 \leq v(i''_{\mathcal{C}}, i'_{\mathcal{C}}) - \sum_{\{j\in i''\setminus i\}} \mathcal{Q}_j^3(\mathcal{C},v)$$

Definimos para cada $(S,S'_{\mathcal{C}})$ con $i \in S$, $h^S$ como la mínima longitud de una cadena de $(S,S'_{\mathcal{C}})$ a $(i'', i'_{\mathcal{C}})$.



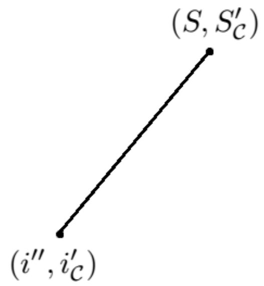

Ejemplo de $h^S = 2$

Demostramos la desigualdad anterior por inducción en $h^S$. Si $h^S = 0 \Rightarrow S = i''_{\mathcal{C}}$ y está probado. Si $h^S = 1$ entonces existe una cadena $(i'', i'_{\mathcal{C}}) < (S, S'_{\mathcal{C}})$

Se verifica que

$$v(S,S'_{\mathcal{C}}) - \sum_{j\in S\setminus i} \mathcal{Q}_j^3(\mathcal{C},v) =_{(1)} v(S,S'_{\mathcal{C}}) - \sum_{j\in S\setminus i''_{\mathcal{C}}} \mathcal{Q}_j^3(\mathcal{C},v) - \sum_{j\in i''_{\mathcal{C}}\setminus i} \mathcal{Q}_j^3(\mathcal{C},v)$$

Se tiene que $(S, i''_{\mathcal{C}}) \in \mathcal{B}_j(\mathcal{C}) \forall j \in S \setminus i''_{\mathcal{C}}$, luego




$$S \setminus i''_{\mathcal{C}} \subseteq S \setminus i$$

$$\mathcal{Q}_j^3 \geq \frac{1}{|S \setminus i''_{\mathcal{C}}|}[v(S, S'_{\mathcal{C}}) - v(i''_{\mathcal{C}}, i'_{\mathcal{C}})]$$

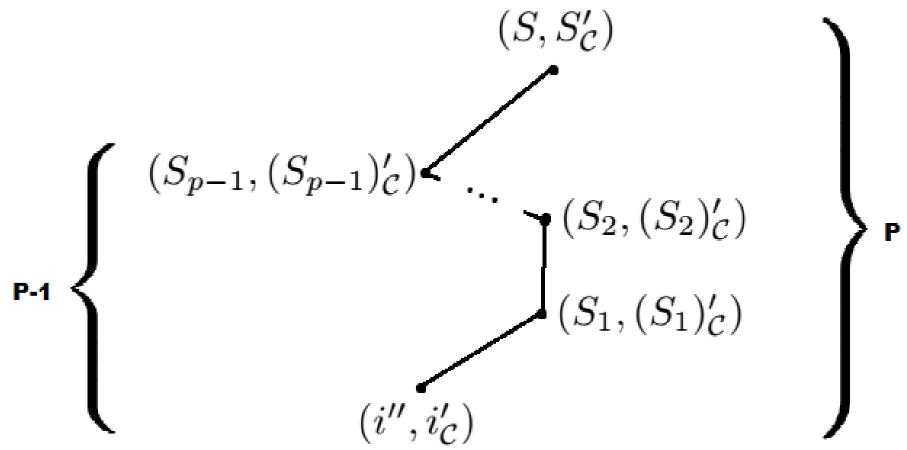
Por lo tanto

$$-\sum_{j \in S \setminus i''_{\mathcal{C}}} \mathcal{Q}_j^3 \leq v(i''_{\mathcal{C}}, i'_{\mathcal{C}}) - v(S, S'_{\mathcal{C}})$$

y la igualdad (1) queda como

$$v(S, S'_{\mathcal{C}}) - \sum_{j \in S \setminus i} \mathcal{Q}_j^3 \leq v(i''_{\mathcal{C}}, i'_{\mathcal{C}}) - \sum_{j \in i''_{\mathcal{C}} \setminus i} \mathcal{Q}_j^3$$

Supongamos cierta la desigualdad anterior con $h^S \leq p - 1$. Vamos a demostrarlo para $h^S = p$.




Para cada $j \in S \setminus S_{p-1}$ ocurre que

$$(S; S_{p-1}) \in \mathcal{B}_j(\mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{Q}_j^3(\mathcal{C}, v) \geq [v(S, S'_{\mathcal{C}}) - v(S_{p-1}, (S_{p-1})'_{\mathcal{C}})] \frac{1}{|S \setminus S_{p-1}|}$$

por lo que

$$-\sum_{j \in S \setminus S_{p-1}} \mathcal{Q}_j^3(\mathcal{C}, v) \leq v(S_{p-1}, (S_{p-1})'_{\mathcal{C}}) - v(S, S'_{\mathcal{C}})$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
v(S, S'_{\mathcal{C}}) - \sum_{j\in S\setminus i} \mathcal{Q}^3_j(\mathcal{C}, v) &= v(S, S'_{\mathcal{C}}) - \sum_{j\in S\setminus S_{p-1}} \mathcal{Q}^3_j(\mathcal{C}, v) - \sum_{j\in S_{p-1}\setminus i} \mathcal{Q}^3_j(\mathcal{C}, v) \\
&\leq v(S_{p-1}, (S_{p-1})'_{\mathcal{C}}) - \sum_{j\in S_{p-1}\setminus i} \mathcal{Q}^3_j(\mathcal{C}, v) \\
&\leq v(i''_{\mathcal{C}}, i'_{\mathcal{C}}) - \sum_{j\in i''_{\mathcal{C}}\setminus i} \mathcal{Q}^3_j(\mathcal{C}, v)
\end{aligned}
$$

La última desigualdad es cierta por inducción, ya que $h^{S_{p-1}} \leq p-1$. Observa que al menos existe una cadena de $(S_{p-1}, (S_{p-1})'_{\mathcal{C}})$ a $(i''_{\mathcal{C}}, i'_{\mathcal{C}})$ de tamaño $p-1$.

■

## 3.5. Comparativa de los valores de compromiso

En la siguiente tabla se compara los distintos valores de compromiso calculados anteriormente,

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\tau^1(v)$ | 22.22 | 22.22 | 6.66 | 26.66 | 22.22 |
| $\tau^2(v)$ | 28 | 11.6 | -4.8 | 30.8 | 34.4 |
| $\chi^3(v)$ | 15.45 | 25.45 | 8.18 | 28.18 | 22.72 |
| $\chi^4(v)$ | 26.67 | 10 | 0 | 30 | 33.33 |

Para tener una visión más global de la asignación que le correspondería a cada agente, calculamos la media aritmética de los valores de compromisos anteriormente calculados, la cual conserva las propiedades de eficiencia y racionalidad individual. La media aritmética por jugador es la siguiente:

$$(23.085, 17.3175, 2.51, 28.91, 28.1675)$$

Se aprecia que los agentes 4 y 5 obtiene aproximadamente la misma cantidad. El agente numero 1 y 2 obtiene un poco menos que los anteriores. Y el agente 3 es el que obtiene menos de todos. En diferencia con el valor de Shapley $(18.57, 27.14, 11.42, 22.85, 20)$, este último hace un reparto más equitativo. A los agentes 4 y 5 le asigna menos que los valores de compromiso, así como al agente 1. Los agentes 2 y 3 reciben más con el valor de Shapley.

## 3.6. Axiomatizaciones y el Core

**Definición 3.6.1.** *Se dice que un contexto $\mathcal{C} = (N, M, I)$ es de partición si para todo $i \in N$ ocurre que $i''_{\mathcal{C}} = \{i\}$.*

Como consecuencia todo elemento de la forma $(i, i') \in C$ para $i \in N$. También se tiene que para todo $S \in N$ existe una partición conceptual de $S$ de forma que cubre la coalición completa. En particular $S = \bigcup\limits_{\{i \in S\}} i$ es una partición conceptual, cumpliendo ese hecho.

Centraremos esta sección en contextos regulares de partición, y en particular en los valores $\tau^3(v)$ y $\chi^4(v)$.

Sea $\mathcal{C} = (N, M, I)$ un contexto de partición y sea $(C, v)$ un juego sobre dicho contexto. Definimos el vector superior asociado a este juego como

$$Q_i(C, v) = \max_{\{\mathcal{P}_m(N \setminus i)\}} [v(N, N') - \sum_{\{S_p \in \mathcal{P}_m(N \setminus i)\}} v(S_p, S'_p)].$$

Aquí lo que hacemos es reescribir $\mathcal{Q}^3$ y $\mathcal{Q}^4$ sin tener que dividir entre varios.

**Observación 3.6.1.** *Observar que como en nuestro caso tenemos la desigualdad $Q_i(C, v) \geq x_i \geq q_i(C, v)$ para todo $i \in N$, donde $x \in Core(C, v)$ podemos asegurar la existencia del $\tau$-valor.*

A continuación damos una axiomatización del $\tau$-valor. Introduciremos antes los axiomas y veremos que nuestro valor los verifica.

El primer axioma es el de eficiencia que verifica trivialmente al ser una imputación.

Introducimos a continuación la noción de covarianza.

**Definición 3.6.2.** *Sea $\mathcal{C} = (N, M, I)$ un contexto de partición y sean $(C, v)$ y $(C, w)$ dos juegos sobre dicho contexto. Diremos que estos juegos son covariantes si existe d, juego aditivo y un número real a, tal que $w(S, S') = av(S, S') + \sum_{i \in S} d_i$, para todo $S \in C$.*

Introducimos los siguientes axiomas para un valor sobre juegos de conceptos.

**Axioma 3.6.1.** *Axioma de covarianza en contextos de partición.*

*Sea $\Psi : \Gamma^{(C,P,N,M)} \to \mathbf{R}^n$ un valor sobre dicho espacio, donde $C$ es el contexto, $Pla$ partición, $N$ el número de agentes y $M$ los handicaps. Diremos que $\Psi$ verifica covarianza si para todo par de juegos covariantes $(C, v)$ y $(C, w)$ se tiene que*

$$\Psi_i(C, w) = a\Psi_i(C, v) + d_i, \quad i \in N.$$

Introducimos ahora el tercer axioma llamado de proporcionalidad.

**Axioma 3.6.2.** *Axioma de proporcionalidad para $\mathcal{Q}^3(\mathcal{Q}^4)$:*

*Sea $\mathcal{C} = (N, M, I)$ un contexto de partición y sea $(\mathcal{C}, v)$ un juego sobre conceptos. Supongamos que el vector inferior es nulo, es decir, $q^3(\mathcal{C}, v) = 0 \quad (q^4(\mathcal{C}, v) = 0)$. Diremos entonces que un valor $\Psi$ sobre $(\mathcal{C}, v)$ verifica pro-*

*porcionalidad si existe una constante c tal que* $\Psi_i(\mathcal{C}, v) = c\mathcal{Q}_i^4(\mathcal{C}, v)$ *para todo* $i \in N$.

*Para ver que nuestro valor verifica covarianza introducimos la función gap.*

**Definición 3.6.3.** . *Sea* $(\mathcal{C}, v)$ *un juego sobre conceptos. Dado un vector superior* $\mathcal{Q}(\mathcal{C}, v)$, *definimos la función gap para contextos de partición como*

$$g(S, S') = \sum_{i \in S} \mathcal{Q}_i(\mathcal{C}, v) - v(S, S')$$

*y el vector de concesión*

$$\lambda_i = \min_{(S, S'_{\mathcal{C}} \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}})} g(S, S')$$

**Proposición 3.6.1.** *Sea* $(C, v)$ *un juego sobre conceptos y* $\mathcal{Q}$ *un vector superior. Entonces* $q_i(\mathcal{C}, v) = Q_i(\mathcal{C}, v) - \lambda_i(\mathcal{C}, v)$

*Demostración.* Observar que

$$q_i(C, v) = \max_{\{S \in C,\, i \in S\}} [v(S, S') - Q(C, v)(S \backslash i)] = \max_{\{S \in C,\, i \in S\}} [Q_i(C, v) + (v(S, S') - Q(C, v)(S)] =$$

$$Q_i(C, v) + \max_{\{S \in C,\, i \in S\}} [v(S, S') - Q(C, v)(S)] = Q_i(C, v) - \min_{\{S \in C,\, i \in S\}} [Q(C, v)(S) - v(S, S')] =$$

$$Q_i(C, v) - \lambda_i(C, v).$$

■

**Proposición 3.6.2.** *Sean* $(\mathcal{C}, w)$ *y* $(\mathcal{C}, v)$ *dos juegos covariantes en contextos de partición de manera que* $w = v + d$, *donde* $d$ *es un juego aditivo. Entonces*

1. $\mathcal{Q}_i(C, w) = \mathcal{Q}(\mathcal{C}, v) + d_i$.

2. $\lambda_i(\mathcal{C}, w) = \lambda_i(\mathcal{C}, v)$.

3. $q_i(\mathcal{C}, w) = q_i(\mathcal{C}, v) + d_i$.

*Demostración.* Se prueban los puntos anteriores.

1.
$$\mathcal{Q}_i^2(C, w) = \max_{\{\mathcal{P}_m(N\setminus i)\}} [w(N, N') - \sum_{S_p \in \mathcal{P}_m(N\setminus i)} w(S_p, S_p')]$$

Observar que como $(i, i')$ es factible para todo $i \in N$ entonces $\mathcal{P}_0 = \bigcup_{i\in N\setminus i} i = N\setminus\{i\}$ es una partición de factibles que cubre a todo $N\setminus\{i\}$. Observar también que a su vez si una partición maximal no cubriese a $N \setminus \{i\}$ se le podría añadir los jugadores que no contuviese de $N \setminus \{i\}$ y así cubriría a todo el conjunto, es decir, de toda partición maximal $\mathcal{P}$ de $N \setminus \{i\}$ se pude afirmar que verifica que $\mathcal{P}_0 \preceq \mathcal{P}$. Luego cualquier partición maximal de $N \setminus \{i\}$ cubre a $N \setminus \{i\}$.

Como $w$ y $v$ son covariantes se tiene que

$$\tau_i(C, w) = \max_{\{\mathcal{P}_m(N\setminus i)\}} [w(N, N') - \sum_{S_p \in \mathcal{P}_m(N\setminus i)} w(S_p, S_p')] =$$

$$\max_{\{\mathcal{P}_m(N\setminus i)\}} [v(N, N') + d(N) - \sum_{S_p \in \mathcal{P}_m(N\setminus i)} v(S_p, S_p') - d(S_p)] =$$

$$\max_{\{\mathcal{P}_m(N\setminus i)\}} [v(N, N') - \sum_{S_p \in \mathcal{P}_m(N\setminus i)} v(S_p, S_p') + (d(N) - \sum_{S_p \in \mathcal{P}_m(N\setminus i))} d(S_p)] =$$

$$\max_{\{\mathcal{P}_m(N\setminus i)\}} [v(N, N') - \sum_{S_p \in \mathcal{P}_m(N\setminus i)} v(S_p, S_p')] + d_i = \tau_i(C, v) + d_i.$$

Esto último es debido a que $d$ es aditivo y la partición maximal cubre a $N \setminus i$.

2.

$$\lambda_i(C,w) = \min_{\{S\in C, i\in S\}} g(S,S') = \min_{\{S\in C, i\in S\}} Q(C,w)(S,S') - w(S,S') =$$

$$\min_{\{S\in C, i\in S\}} Q(C,v)(S,S') - v(S,S') + d(S) - d(S) = \lambda_i(C,v).$$

Observar que hemos usado el apartado 1 de esta proposición y la aditividad de $d$.

3. Es consecuencia directa de la proposición 2 y de los dos primeros items de esta.

■

**Teorema 3.6.1.** *El valor $\tau^2(\chi^4)$ es el único valor que verifica sobre los contextos de partición eficiencia, covarianza y $\mathcal{Q}^2(\mathcal{Q}^4)$-proporcionalidad.*

*Demostración.* La prueba de que verifica los axiomas es inmediara por definición y la proposición 3.

■

En el siguiente teorema se muestra la relación de los valores $\tau^2$ y $\chi^4$ con los vectores del core del juego de contextos.

**Teorema 3.6.2** (Acotación del Core)**.** *Si $x \in Core(\mathcal{C}, v)$ con $\mathcal{C}$ regular y de partición, entonces*

$$q^2 \leq x \leq Q^2 \text{ y } q^4 \leq x \leq Q^4$$

*Demostración.* Recordemos que $\mathcal{Q}_i^2(\mathcal{C},v) = \max\limits_{P\in\mathcal{P}_\mathcal{C}(N\setminus i)}\left\{[v(N) - \sum_{T\in P} v(T)]\right\}$

Si el $x \in Core(\mathcal{C},v)$ y $P \in \mathcal{P}_\mathcal{C}(N \setminus i) \Rightarrow x(N) = v(N, N'_\mathcal{C})$ y $x(T) \geq v(T, T'_\mathcal{C}) \quad \forall T \in P$

Por lo tanto

$$-x(T) \leq -v(T, T'_\mathcal{C}) \quad \forall T \in P$$

Así, para cualquier $P \in \mathcal{P}_\mathcal{C}(N \setminus i)$

$$Q_i^2 \geq v(N, N'_\mathcal{C}) - \sum_{T\in P} v(T, T'_\mathcal{C}) \geq x(N) - \sum_{T\in P} x(T)$$

Pero como $P \in \mathcal{P}_\mathcal{C}(N\setminus i)$ y $\mathcal{C}$ es de partición, tenemos que $\sum\limits_{T\in P} x(T) = x(N\setminus i)$. Luego

$$Q_i^2 \geq x(N) - x(N \setminus i) = x_i$$

Recordamos que

$$\mathcal{Q}_i^4(\mathcal{C},v) = \max_{S\in\mathcal{L}_\mathcal{C}} \max_{P\in\mathcal{P}_\mathcal{C}(S\setminus i)} \left\{[v(S) - \sum_{T\in P} v(T)]\right\}$$

Pero se observa que podemos tomar $(S, S'_\mathcal{C}) = (N, N'_\mathcal{C})$, luego

$$Q_i^4 \geq Q_i^2 \geq x_i$$

Por otro lado,

$$q_i^{2,4}(\mathcal{C}, v) = \max_{\substack{\{(S,S'_{\mathcal{C}})\in\mathcal{L}_{\mathcal{C}}\}\\ \{i\in S\}}} \left\{ v(S, S'_{\mathcal{C}}) - \sum_{j\in S\setminus i} \mathcal{Q}_j^{2,4}(\mathcal{C}, v) \right\}$$

Para todo $(S, S'_{\mathcal{C}}) \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ se tiene que

$$v(S, S'_{\mathcal{C}}) - \sum_{\{j\in S\setminus i\}} Q_j^{2,4} \leq x(S) - x(S \setminus i) = x_i$$

Ya que, $v(S, S'_{\mathcal{C}}) \leq x(S)$ implica que $x \in core(\mathcal{C}, v)$ y además, ya esta probado anteriormente que $-Q_i^{2,4} \leq -x_j$. Por lo tanto, $q_i^{2,4} \leq x_i$

■

**Proposición 3.6.3.** *Sea $(\mathcal{C}, v)$ un juego sobre un contexto de partición factible, entonces el vector superior $\mathcal{Q}^4(\mathcal{C}, v)$ verifica que $\mathcal{Q}^4(\mathcal{C}, v+d) = \mathcal{Q}^4(\mathcal{C}, v)+ d$ para todo juego aditivo $d$.*

*Demostración.* Sea $(\mathcal{C}, v)$ un juego sobre un contexto de partición factible y $d$ un juego aditivo sobre el contexto $(\mathcal{C}, v)$. Entonces, $\mathcal{Q}^4(\mathcal{C}, v + d) = \max\limits_{S\in\mathcal{C};i\in S} \max\limits_{\mathcal{P}\in\mathcal{P}(N\setminus i)} v(S, S') - \sum\limits_{T\in\mathcal{P}} v(T, T') + d(S, S') - \sum\limits_{T\in\mathcal{P}} d(T, T')$. Como el concepto de partición es factible la partición $\mathcal{P}$ cubre a todo $S \setminus i$, así $d(S, S') - \sum\limits_{T\in\mathcal{P}} d(T, T') = d_i$. Por lo tanto como este término no depende de la partición ni del conjunto $S$ podemos sacarlo fuera de los máximos y resultando que $\mathcal{Q}^4(\mathcal{C}, v + d) = \mathcal{Q}^4(\mathcal{C}, v) + d$.

■

En el mismo sentido probamos la siguiente proposición.

**Proposición 3.6.4.** *Sea $(\mathcal{C}, v)$ un juego sobre un contexto de partición factible, entonces el vector inferior $q^4(\mathcal{C}, v)$ verifica que $q^4(\mathcal{C}, v+d) = q^4(\mathcal{C}, v)+d$,* *para todo juego aditivo d.*

*Demostración.* Sea $(\mathcal{C}, v)$ un juego sobre un contexto de partición factible y $d$ un juego aditivo sobre el contexto $(\mathcal{C}, v)$. Entonces, $q^4(\mathcal{C}, v+d) = \max\limits_{\{(S,S')\in\mathcal{C}; i\in S\}} v(S,S') - \sum\limits_{\{j\in S\setminus i\}} \mathcal{Q}^4_j(\mathcal{C}, v+d)$. Aplicando la proposición anterior tenemos que $\sum\limits_{\{j\in S\setminus i\}} \mathcal{Q}^4_j(\mathcal{C}, v+d)$ es $\sum\limits_{\{j\in S\setminus i\}} \mathcal{Q}^4_j(\mathcal{C}, v) + d(S\setminus i)$. El resultado se obtiene entonces trivialmente. ■

**Proposición 3.6.5.** *Sea $(\mathcal{C}, v)$ un juego sobre un contexto de partición factible, por la prueba anterior tenemos que el valor $\chi^4$ verifica covarianza.*

# Bibliografía


[1] SHAPLEY, L. (1971) Cores of Convex Games, *International Journal of Game Theory*, 1,11-26.

[2] GILLIES, D.B. (1953) Some Theorem on n-Person Games, *Ph. D. Tesis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[3] VON NEUMANN, J., MORGENSTERN, O. (1944) *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[4] LUCAS, W.F. (1968) A game with no solution. *Bull. Amer. Math.Soc*, 77, 237-239.

[5] AUMANN, R., MASCHLER, M. (1964) The barganing set for cooperative games, en *Advances in Games Theory*, M. Dresher, L. Shapley, A. Tucker(eds.), Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 443-471.

[6] WEBER, R.J. (1978) Probabilistic Values for Games, en *Cowles Foundation Discussion Paper*, no. 471, Yale University, New Haven, Connecticut.

[7] SHAPLEY,L. (1953) A Value for $n$-Person Games, *Contributions to the Theory of Games*, vol. II, H.W.Khun, A.W. Tucker (eds.), Princeton, New Jersey, 307-317.

[8] DAVIS, M., MASCHLER, M. (1965) The Kernel of a cooperative game. *Naval Research Logistics Quarterly* 12, 223-259.

[9] MASCHLER, M., PELEG, B., SHAPLEY, L.S. (1972) The kernel and bargaining set for convex games. *International Journal of Game Theory*, 1,73-93.

[10] SCHMEIDLER, D. (1969) The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 17,1163-1170.

[11] TIJS, S.H. (1981) Bounds for the core and $\tau - vale$, *Game Theory and Mathematical Economics*, Eds. O. Moeschlin and D.Pallaschke North-Holland Publishing company, Amsterdam, 123-132.

[12] BERGANTIÑOS G, MASSÓ J (1996) Notes on a new compromise value: the $\chi - value$. *Optimization*, 38, 277-286.

[13] LITTLECHILD, S.C. Y OWEN, G (1973) A simple expression for the Shapley value in a special case, *Management Science*, 20, 370-372.

[14] BAKER, M.J. (1965) Runway cost impact study, Report presented to the Association of Local Transport Airline, Jackson, Missouri.

[15] THOMPSON,G.F. (1971) *Airport costs and pricing*, PhD thesis, University of Birmingham.

[16] OWEN, G (1975) On the core of linear production games, *Mathematical Programing*, 9, 358-370.

[17] van GELLEKOM, J. R.G., POTTERS, J. A. M., REIJNIERSE, J.H., ENGE, M.C. Y TIJS, S. (2000), Characterization of the Owen set of linear production processes, *Games and Economic Behavior*, 32, 139-156.

[18] U. FAIGLE AND W. KERN. (1992) The Shapley value for cooperative games under precedence constraints, Int. J. of Game Theory, 21:249–266.

[19] J.M. BILBAO AND P.H. EDELMAN. (2000) The Shapley value on convex geometries. Discrete Applied Mathematics, 103:33–40.

[20] JOAQUÍN SANCHEZ-SORIANO. (2000) A note on compromise values. Mathematical Methods of Operations Research (2000), 51:471-478.

[21] ULRICH FAIGLE, MICHAEL GRABISH, ANDRÉS JIMÉNEZ-LOSADA, MANUEL ORDOÑEZ. (2014) Games on concept lattices: Shapley value and core Documents de Travail du Center d'Economie de la Sorbone, 2014.70