ASPECTOS COMPUTACIONALES DEL POLINOMIO DE BERNSTEIN-SATO DE UNA SINGULARIDAD

Adolfo Rendón Rodríguez de Molina

ASPECTOS COMPUTACIONALES DEL POLINOMIO DE BERNSTEIN-SATO DE UNA SINGULARIDAD

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA

Adolfo Rendón Rodríguez de Molina

Trabajo Fin de Máster presentado como parte de los requisitos para la obtención del título de Máster en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Dirigido por:

Luis Narváez Macarro

2 Julio, 2021

Índice general

Abstract

The Bernstein-Sato polynomial or the b-function is an important invariant in singularity theory. It is closely related to differentials operators. This polynomial has very useful properties and applications in differents fields of mathematics. It was introduced in the early 1970s simultaneously, but under different scopes, by Joseph Bernstein and Mikio Sato.

The purpose of this Master Thesis Dissertation is an update and an overview of the main tools and results on which the algorithmic study of b-function is based. In addition, we study some of the most efficient algorithms for computing b-functions to date, implemented in algebraic systems such as `Singular/Plural` or `Risa/Asir`.

Introducción

El polinomio de Bernstein-Sato asociado a un polinomio en varias variables con coeficientes en un cuerpo de característica 0, también conocido como la b-función global, es un polinomio univariante estrechamente relacionado con los operadores diferenciales.

Su origen se debe, de manera simultánea, a Mikio Sato y Joseph Bernstein. Mikio Sato introdujo a principios de 1970 las $a-$, $b-$ y $c-$ funciones asociadas a los espacios vectoriales prehomogéneos, los cuales tienen muchas aplicaciones en la Geometría, Teoría de Números, Análisis y Teoría de Representaciones [39]. Joseph Bernstein, de manera simultánea, definió el polinomio de Bernstein como parte de la construcción de prolongaciones meromorfas de distribuciones [5, 6]. Además probó que todo polinomio en varias variables con coeficientes en un cuerpo de característica 0 no constante tiene asociado un polinomio de Bernstein no nulo.

Hoy en día, se define usualmente al polinomio de Bernstein-Sato de un germen de función holomorfa o regular f sobre $\mathbb{C}$, como el polinomio mónico $b_f(s)$ en $\mathbb{C}[s]$ no nulo de menor grado para el cual existe un operador diferencial $P(s)$ con coeficientes gérmenes de funciones holomorfas o regulares satisfaciendo la denominada ecuación funcional de Bernstein

$$b_f(s)f^s = P(s)f^{s+1}.$$

Como ya hemos comentado, Bernstein probó la existencia de dicho polinomio no nulo cuando f es un polinomio en varias variables con coeficientes sobre un cuerpo de característica 0. Además este resultado ha sido, posteriormente, extendido por Björk [7] a anillos de series formales y por Masaki Kashiwara a anillos de series convergentes [18]. Una prueba unificada se puede encontrar en [27].

Teóricamente se conocen muchos resultados que envuelven al polinomio de Bernstein-Sato, como, por ejemplo, que dicho polinomio tiene todas su raíces racionales negativas, resultado que fué probado por Masaki Kashiwara [18]. A pesar de todos los resultados conocidos sobre dicho polinomio, aunque existen algoritmos para calcular el polinomio de Bernstein-Sato de forma efectiva (basados en el cálculo de bases de Gröbner), distan mucho de ser eficientes cuando tratamos polinomios en varias variables con un grado relativamente alto. El primer algoritmo para el cálculo del polinomio de Bernstein-Sato asociado a un polinomio no nulo arbitrario se implementó en 1997 por Toshinori Oaku [32–34]. Desde entonces se han ido implementando nuevos algoritmos más eficaces para su cálculo. Estos algoritmos principalmente se basan en la ecuación funcional de Bernstein anterior, en el siguiente sentido:

$$(b_f(s) - P(s)f)f^s = 0.$$

Lo que se usa entonces, es que $b_f(s) \in I = \mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s) + A_n[s]\langle f \rangle$, donde $\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s)$ se denomina el ideal anulador s-paramétrico de f^s y $A_n[s]\langle f \rangle$ es el ideal generado por f sobre $A_n \otimes K[s]$, con A_n denotando el n-ésimo álgebra de Weyl.
Para obtener finalmente el polinomio de Bernstein Sato $b_f(s) \in K[s]$ se calcula la intersección $\langle b_f(s) \rangle = I \cap K[s]$, mediante bases de Gröbner con un orden de eliminación adecuado para la variable s.
Para el cálculo del ideal anulador s-paramétrico se usa la idea de Malgrange, aunque los algoritmos conocidos para el cálculo de dicho ideal son muy complejos.
El objetivo principal de este trabajo es estudiar los resultados que hacen posible el cálculo algorítmico del polinomio de Bernstein-Sato o b-función global siguiendo la idea de Malgrange, y recopilar algunos de los algoritmos más eficaces para el cálculo de dicho polinomio. Para este estudio de los algoritmos conocidos usaremos principalmente los sistemas de Álgebra Computacional `Singular/Plural` y `Risa/Asir`.

Comenzaremos la presente memoria con un capítulo en el que estudiaremos el concepto de G-álgebras [20]. Veremos que estas G-álgebras admiten una buena teoría de bases de Gröbner, lo que hará posible posteriormente el estudio del cálculo de la b-función sobre ellas. Como aportación, probaremos que el anillo de operadores logarítmicos respecto de un “divisor libre”, del cual se conoce que es una Poincaré–Birkhoff–Witt-álgebra [10], es a su vez una G-álgebra, lo cual lo dota de esta buena teoría de bases de Gröbner. Por último, estudiaremos las filtraciones sobre G-álgebras y la dimensión Gel'fand-Kirillov proporcionando así la definición de holonomicidad de un módulo sobre una G-álgebra.

El Capítulo dos se va a dividir en seis partes. En la primera estudiaremos la b-función global desde otro punto de vista al usual, mediante vectores de pesos e ideales iniciales [1].
En la segunda parte, demostraremos que la definición de la b-función global por medio

de los vectores de pesos y del ideal de Malgrange coincide con el polinomio mónico de la intersección $I \cap K[s]$ [1]. Es decir, que la definición de la primera parte de la b-función coincide con la definición usual.
En la tercera parte, veremos que estos resultados, que en un principio se basarán sobre un único polinomio no nulo, se pueden extender a un conjunto de polinomios $f_1, \ldots, f_q \in K[x_1, \ldots, x_n]$, dándonos así el concepto de ideales de Bernstein-Sato [40], para los cuales se pueden extender de la misma forma los resultados conocidos para el caso de un único polinomio en los algoritmos para el cálculo de los ideales de Bernstein-Sato.
En la cuarta parte, estudiaremos el problema de calcular del ideal anulador s-paramétrico mediante métodos conocidos como el de Oaku-Takayama [32] ó el de Briançon-Maisonobe [8]. Viendo este último con más detalle gracias a los resultados de Viktor Levandovskyy sobre preimágenes de ideales en álgebras no conmutativas [19]. También, sin entrar en mucho en profundidad, veremos una pequeña comparativa de complejidad entre estos dos algoritmos [15]
En la quinta parte, estudiaremos el problema de la intersección de un ideal con una subálgebra principal de manera teórica y algorítmica, viendo que este problema se puede traducir en el problema de encontrar el polinomio mínimo de un endomorfismo. También veremos los primeros algoritmos para el cálculo de la b-función global y de los ideales de Bernstein-Sato usando los resultados de los temas anteriores.
En la sexta parte, dejaremos de lado el problema del cálculo de la b-función en su totalidad para centrarnos en un problema mucho menos complejo computacionalmente. Veremos cómo comprobar cuándo un número racional es raíz del polinomio de Bernstein-Sato o b-función global y cómo calcular su multiplicidad en caso de ser raíz de manera teórica y algorítmica [22]. También estudiaremos brevemente el concepto de b-función reducida $\tilde{b}_f(s)$ y comentaremos cómo se podrían reducir todos los algoritmos vistos anteriormente para el cálculo de la b-función reducida

En el Capítulo tres, vamos a centrarnos en un caso más genérico del cálculo de la b-función. Se va a estudiar el mismo problema que en los temas anteriores pero añadiendo unas nuevas variables como parámetros $\{u_1, \ldots, u_m\}$. Es decir, el objetivo de esta sección va a ser calcular la b-función global asociada a un polinomio cuyos coeficientes dependen de los parámetros $u_1, \ldots, u_n$, es decir, $f \in R_u = K[u_1, \ldots, u_m][x_1, \ldots, x_n]$ o de un conjunto de polinomios $f_1, \ldots, f_q \in R_u$ mediante el uso de Recubrimientos de Gröbner o Sistemas Exhautivos de Gröbner.
Los recubrimientos de Gröbner se han estudiado sobre todo sobre ideales paramétricos polinomiales, en este tema veremos la extensión de los resultados de Kapur-Sun-Wang para el cálculo de estos recubrimientos de Gröbner sobre G-álgebras [17]. Tam-

bién veremos que, con el uso de estos recubrimientos, se pueden considerar algoritmos para verificar raíces racionales de la b-función asociada a un polinomio paramétrico al igual que se hacía en la sección seis del capítulo 2. Veremos también varios ejemplos en los cuales podremos comprobar que estos algoritmos tienen una complejidad computacional enorme.

1 G-álgebras y PBW-álgebras

Sea K un cuerpo. Diremos que A es una K-álgebra (**asociativa, unitaria**) si A es un anillo (conteniendo el elemento unidad 1_A) el cual es un K-espacio vectorial, tal que el K-producto es compatible con el producto en A de la siguiente forma: $(x \cdot a)b = x \cdot ab = a(x \cdot b)$ para todo $a, b \in A$, $x \in K$.

Si A no es el espacio vectorial nulo sobre K, entonces el producto por el elemento unidad $1 = 1_A \in A$ también debe ser no nulo. Luego podemos ver K como subanillo de A mediante $x \mapsto x \cdot 1_A$. De esta forma, la condición anterior se puede leer como $xab = axb$ para todo $a, b \in A$ y $x \in K$, que es equivalente a $xa = ax$ para todo $a \in A$, $x \in K$. Es decir, K está contenido en el **centro** $\mathcal{Z}(A) = \{z \in A \mid az = za$ para todo $a \in A\}$, de A.

A lo largo del texto trabajaremos con K-álgebras asociativas y unitarias, a las cuales nos referiremos, a veces, simplemente como álgebras ó K-álgebras.
Sea K un cuerpo y $x_1, ..., x_n$ un conjunto de n variables. Sea $T = T_n = K\langle x_1, ..., x_n\rangle$ la K-álgebra asociativa libre generada por $\{x_1, ..., x_n\}$, la cual se puede escribir como el álgebra tensorial $T(V)$, donde V es el K-espacio vectorial de base $x_1, ..., x_n$. Este álgebra tiene la siguiente propiedad universal: Dada cualquier K-álgebra R y unos elementos $r_1, ..., r_n \in R$, existe un único homomorfismo de K-álgebras $T \to R$ definido por $x_i \mapsto r_i$.

Llamaremos **monomios** en T a los elementos que forman el conjunto de todas las palabras en $\{x_1, ..., x_n\}$. Es decir:

$$\mathcal{M}(T) = \{x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \cdots x_{i_m}^{\alpha_m} \mid 1 \leq i_1, ..., i_m \leq n, \text{ con } m, \alpha_i \geq 0 \text{ para todo } i\}.$$

Notar que $\mathcal{M}(T)$ es una K-base de T. En particular, $\mathcal{M}(T)$ es un **monoide libre**, es decir, un semigrupo con elemento neutro 1.

El conjunto de los **monomios estándar** (ó de forma estándar) se define como el conjunto:

$$\mathcal{M}_S(T) = \{x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \cdots x_{i_m}^{\alpha_m} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n, \text{ con } m, \alpha_i \geq 0 \text{ para todo } i\}.$$

Donde, de esta forma, tenemos una ordenación en las variables. Cualquier K-álgebra asociativa A generada por n elementos es isomorfa a T_n/I para algún ideal bilátero $I \subset T_n$. Normalmente escribiremos $A = T_n/I = T/I$ para notar dicho isomorfismo. Si las clases de monomios estándar forman una K-base de una K-álgebra asociativa $A = T/I$, diremos que A tiene una **base PBW** (base de a Poincaré–Birkhoff–Witt) en las variables $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Definición 1.1. *Sea Γ un conjunto finitamente generado. Diremos que un orden $\prec$ sobre M es un* ***orden total****, si para todo $m, m' \in \Gamma$ con $m \neq m'$, se tiene que $m \prec m'$, ó que $m' \prec m$.*

Un orden total $\prec$ sobre Γ se dice que es un ***buen orden*** *si todo subconjunto no vacío de Γ tiene siempre un elemento mínimo respecto de $\prec$. Es decir, para todo $H \subset \Gamma$, existe un $h \in H$ con $h \prec h'$ para cualquier $h' \in H$.*

Definición 1.2. *Sea T una K-álgebra (asociativa y unitaria) y sea $\prec$ un buen orden sobre el conjunto de monomios de T, ($\mathcal{M}(T)$, el cual sabemos que es un monoide libre). Entonces diremos que $\prec$ es un* ***orden monomial*** *si es compatible con el producto. Es decir, si para todo $f, g \in \mathcal{M}(T)$ se tiene:*

(1) $f \prec g$ implica que $p \cdot f \cdot p' \prec p \cdot g \cdot p'$ para cualesquiera $p, p' \in \mathcal{M}(T)$.

(2) Si $f = p \cdot g \cdot p'$ y $f \neq g$, entonces $g \prec f$.

Ejemplo: Un ejemplo clásico, es el orden lexicográfico sobre $T = K\langle x_1, \dots, x_n\rangle$, por ejemplo, sujeto a $x_n \prec x_{n-1} \prec \dots \prec x_1$. Entonces, si m, m' son dos monomios en $\mathcal{M}(T)$, podemos encontrar la mayor subpalabra común a ambos monomios a la izquierda M, tal que $m = Mw$, $m' = Mw'$, y en caso de no existir, se toma $M = 1$. De esta forma, $m \prec m'$ sí y sólo si $w \prec w'$ sí y sólo si el primer símbolo x_i de w es menor que el primer símbolo x_j de w', sí y sólo si $x_i \prec x_j$, sí y sólo si $j < i$.

Definición 1.3. *Dado un orden monomial $\prec$ sobre el conjunto de monomios de una K-álgebra libre (asociativa y unitaria) T, cualquier $f \in T \setminus \{0\}$ se puede escribir de manera única como $f = c \cdot m + f'$, donde $c \in K^*$ y $m' \prec m$ para cualquier término no nulo $c'm'$ de f'. Se define entonces*

$$lm(f) = m, \text{ el } \textbf{monomio líder} \text{ de } f,$$

$$lc(f) = c, \text{ el } \textbf{\textit{coeficiente líder}} \text{ de } f.$$

*Para un subconjunto $G \subset T$, se define el **ideal líder** de G como el ideal bilátero*

$$L(G) = \langle \{\ lm(g) \mid g \in G \setminus \{0\}\} \rangle \subseteq T.$$

Ejemplo: Sea $T = K\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ y $\prec$ el orden lexicográfico anterior. Tomemos $f = 2x_1^2x_3^2 + x_2^2x_1 + x_1$, entonces $f = c \cdot m + f'$ donde $c = 2$, $m = x_1^2x_3^2$ y $f' = x_1x_2^2 + x$ es lo restante de f.

Definición 1.4. *Sea $\prec$ un orden monomial sobre $\mathcal{M}(T)$ fijado. Diremos que un subconjunto $G \subset I$ es una **base de Gröbner** de I con respecto de $\prec$ si $L(G) = L(I)$.*

Definición 1.5. *Sean $m, m' \in \mathcal{M}(T)$ dos monomios. Diremos que m **divide** a m' si existen $p, q \in \mathcal{M}(T)$ tales que $m' = p \cdot m \cdot q$.*
*Un conjunto $G \subseteq T$ se dice **minimal**, si para todo $g_1, g_2 \in G$ se tiene que $lm(g_1)$ y $lm(g_2)$ no se dividen entre sí.*

Definición 1.6. *Sea $\mathcal{G}$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de T ordenados por el cardinal de dichos subconjuntos. Una **forma normal** (a la izquierda y a la derecha) sobre T, es una aplicación*

$$NF : T \times \mathcal{G} \to T, \qquad (f, G) \mapsto NF(f, G)$$

satisfaciendo las siguientes condiciones para todo $f \in T$ y $G \in \mathcal{G}$.
(i) $NF(0, G) = 0$,
(ii) Si $NF(f, G) \neq 0$, entonces $lm(NF(f, G)) \notin L(G)$.
(iii) $(f - NF(f, G)) \in \langle G \rangle$.

Algoritmo 1.1. `NF`(f, G)
Input: $f \in T = K\langle x_1, ..., x_n \rangle$, $G \in \mathcal{G}$.
Output: $h \in T$, una forma normal de f respecto de G.
BEGIN
$h \to f$
$G_h \to \{g \in G \mid \mathrm{lm}(g) | \mathrm{lm}(h)\}$
while $((h \neq 0)$ **and** $(G_h \neq \emptyset))$ **do**
  Elegir cualquier $g \in G_h$
  Calcular $l, r \in \mathcal{M}(T)$ tal que $\mathrm{lm}(h) = l \cdot \mathrm{lm}(g) \cdot r$
  $h \leftarrow h - \frac{lc(h)}{lc(g)} \cdot l \cdot g \cdot r$

end-while
return h
END

Podemos observar que en cada elección arbitraria de $g \in G_h$ puede hacer que nos salga una forma normal distinta.

Proposición 1.1. El algoritmo `NF` aplicado sobre $f \in T$ y $G \in \mathcal{G}$ termina y devuelve una forma normal de f respecto de G.

Demostración. Comenzando en $h_0 = f$, en el i-ésimo paso del bucle **while** se calcula h_i. Por construcción, es claro que $\mathrm{lm}(h_i) \prec \mathrm{lm}(h_{i-1})$. Luego obtenemos una sucesión estrictamente decreciente $\mathrm{lm}(h_0) > \mathrm{lm}(h_1) > \ldots > \mathrm{lm}(h_i) > \ldots$ de los monomios líderes de los respectivos h_i. Por tanto, como $\prec$ es un buen orden, el conjunto que forma dicha sucesión tiene un mínimo, que es donde el algoritmo termina.

Supongamos que este mínimo se alcanza en el paso m del bucle. Sea $h = h_m \neq 0$ y sean l_i, r_i los monomios correspondientes a las distintas elecciones de $g_i \in G$ en cada paso del bucle anterior al paso m-ésimo. Volviendo atrás mediante sustituciones, obtenemos la siguiente expresión de h

$$h = f - \sum_{i=1}^{m-1} l_i g_i r_i,$$

tal que $\mathrm{lm}(f) = \mathrm{lm}(l_1 g_1 r_1) > \mathrm{lm}(l_i g_i r_i) > \mathrm{lm}(h_m)$. Además, por construcción del algoritmo, $G_h = \emptyset$ en el paso m-ésimo, (ya que $h \neq 0$). Luego $\mathrm{lm}(g) \notin \mathrm{L}(G)$. De donde se deduce que devuelve una forma normal de f respecto de G con cualquier elección que estemos haciendo de los g_i. ∎

Sea $T = K\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ la K-álgebra libre (asociativa y unitaria) generada por $x_1, \ldots, x_n$, y $\prec$ un orden monomial fijado sobre $\mathcal{M}(T)$. Para un m fijado, se define el conjunto de índices $\mathcal{U}_m := \{(i_1, \ldots, i_m) \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq n\}$. Supongamos que existen dos conjuntos $C = \{c_{ij}\} \subset K^*$ y $D = \{d_{ij}\} \subset T$, donde $(i,j) \in \mathcal{U}_2$, tales que podemos construir el conjunto $F := \{f_{ij} \mid (i,j) \in \mathcal{U}_2\}$ verificando:

$$f_{ji} = x_j x_i - c_{ij} \cdot x_i x_j - d_{ij},$$
$$\mathrm{lm}(f_{ji}) = x_j x_i \text{ y } \mathrm{lm}(d_{ij}) \prec x_i x_j.$$

Además, vamos a suponer que los polinomios d_{ij} están ya dados en monomios estándar. En caso de que un polinomio d_{ij} no esté dado en monomios estándar se puede hacer una simplificación para reducirlo a monomios estándar de la siguiente forma.

Supongamos que tomamos $\prec$ un buen orden sobre $\mathcal{M}(T)$ con $x_n \prec \ldots \prec x_1$, entonces $x_{n-1}x_n \prec x_{n-2}x_n \prec x_{n-2}x_{n-1} \prec \ldots \prec x_1x_2$. De esta forma $d_{n-1,n}$ consiste únicamente en monomios estándar. El siguiente, $d_{n-2,n}$ únicamente tiene a x_nx_{n-1} aparte de los monomios estándar, pero podemos reemplazar x_nx_{n-1} con $c_{n-1,n}x_{n-1}x_n + d_{n-1,n}$ y así obtener un $d'_{n-2,n}$ que únicamente contiene monomios estándar. Además, como $\operatorname{lm}(f_{ji}) = x_jx_i$ y $\operatorname{lm}(d_{ij}) \prec x_ix_j$, este proceso de ir sustituyendo terminará en un número finito de pasos y obtendremos $F := F'$, un conjunto donde cada d'_{ij} está únicamente dado en monomios estándar.

Sea entonces $I = \langle F \rangle \subset T$ el ideal bilátero generado por F después de la simplificación a dicho conjunto, (es decir, los d_{ij} únicamente están representados en monomios estándar).

Definición 1.7. *Sea $T = K\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ la K-álgebra libre (asociativa y unitaria) generada por $x_1, \ldots, x_n$ y sea $I = \langle F \rangle$ el ideal bilátero generado por el conjunto F anterior. Se definen los* ***elementos de no degeneración*** *para $(i, j, k) \in \mathcal{U}_3$ como*

$$\mathcal{NDC}_{ijk} = c_{ik}c_{jk} \cdot d_{ij}x_k - x_kd_{ij} + c_{jk} \cdot x_jd_{ik} - c_{ij} \cdot d_{ik}x_j + d_{jk}x_i - c_{ij}c_{ik} \cdot x_id_{jk} \in T.$$

Teorema 1.1 (PBW Theorem [20]). *Supongamos que existe un conjunto $F = \{f_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\} \subset T = K\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, como en el caso anterior, tal que*

$$f_{ji} = x_jx_i - c_{ij} \cdot x_ix_j - d_{ij}, \text{ para todo } j > i, \text{ con } c_{ij} \in K^*, d_{ij} \in T.$$

Sea el ideal bilátero $I = \langle F \rangle$ y supongamos que existe un buen orden $\prec$ sobre $\mathcal{M}(T)$, tal que $\operatorname{lm}(f_{ji}) = x_jx_i$ y $\operatorname{lm}(d_{ij}) \prec x_ix_j$. Entonces son equivalentes:

(i) F es una base de Gröbner de I respecto de $\prec$,

(ii) Para cualquier forma normal NF sobre T, se tiene que NF $(\mathcal{NDC}_{ijk}, F) = 0$ para todo $(i, j, k) \in \mathcal{U}_3$,

(iii) La K-álgebra $A = T/I$ tiene una base de Poincairé-Birkhoff-Witt (PBW) con respecto a $x_1, \ldots, x_n$.

1.1 G-álgebras

En las condiciones del teorema anterior, tenemos $A = T/I$ una K-álgebra con una base de PBW, la cual sabemos que es el conjunto de monomios estándar de T. Por ello, vamos a llamar de la misma forma, **monomios** de A, a los elementos de la base PBW de A. Vamos a denotar al conjunto de monomios de A por $\mathcal{M}(A)$ los cuales además, gracias a la existencia de la base PBW se pueden identificar con $\mathbb{N}^n$ mediante

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \mapsto (\alpha_1, ..., \alpha_n) = \alpha.$$

Definición 1.8. *Sea $<$ un buen orden total sobre $\mathbb{N}^n$ y sea A una K-álgebra asociativa con una base PBW.*

- *Un orden $\prec$ $(=<)$ se dice que es un **orden monomial sobre** A si se verifican las siguientes condiciones:*
  - *Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, si $\alpha < \beta$, entonces $x^\alpha \prec x^\beta$,*
  - *Para cada $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$ tales que $x^\alpha \prec x^\beta$ se tiene $x^{\alpha+\gamma} \prec x^{\beta+\gamma}$.*

- *Cualquier $f \in A \setminus \{0\}$ se puede escribir de forma única como $f = c_\alpha x^\alpha + f'$, con $c_\alpha \in K^*$ y $x^{\alpha'} \prec x^\alpha$ para cualquier término no nulo $c' x^{\alpha'}$ de f'. Definimos*

$$\begin{aligned} \mathrm{lm}_\prec(f) &:= x^\alpha && \text{, el \textbf{monomio líder} de } f, \\ \mathrm{lc}_\prec(f) &:= c_\alpha && \text{, el \textbf{coeficiente líder} de } f, \\ \mathrm{le}_\prec(f) &:= \alpha && \text{, el \textbf{exponente líder} de } f \text{ y} \\ \mathrm{lt}_\prec(f) &:= c_\alpha x^\alpha && \text{, el \textbf{término líder} de } f. \end{aligned}$$

Esta definición prácticamente se basa en la identificación de cualquier monomio $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ en A, debido a la existencia de una PBW base en A, por $(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \alpha$. A lo largo del texto escribiremos $\mathrm{lm}_\prec$ y lm de manera idéntica en caso de que no halla confusión.

Definición 1.9. *Sea K un cuerpo, $T = K\langle x_1, ..., x_n\rangle$ e I un ideal bilátero de T, generado por los elementos*

$$x_j x_i - c_{ij} \cdot x_i x_j - d_{ij}, \; 1 \leq i < j \leq n,$$

*donde $c_{ij} \in K^*$ y todo $d_{ij} \in T$ es un polinomio que únicamente contiene monomios estándar de T. Una K-álgebra $A = T/I$ se dice que es una **G-álgebra**, si se verifican*

las siguientes condiciones:
• ***Condición de orden:*** *existe un orden monomial* $\prec$ *sobre* $\mathbb{N}^n$*, tal que* $lm(d_{ij}) \prec x_i x_j$ *para todo* $i < j$*.*
• ***Condición de no degeneración anulada:*** $\mathcal{NDC}_{ijk} = 0$ *para todo* $1 \leq i < j < k \leq n$ *y para los conjuntos* $C = \{c_{ij}\} \subset K^*$ *y* $D = \{d_{ij}\} \subset A$*.*

Por el *PBW Theorem* 1.1 tenemos que cualquier G-álgebra tiene una base de PBW debido a que sus elementos de no degeneración son todos nulos.
Como consecuencia directa de este resultado, al igual que antes, obtenemos que cualquier elemento no nulo f de una G-álgebra A se puede escribir de forma única en términos de la PBW-base canónica:

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0} c_\alpha x^\alpha,\ c_\alpha \in K^* \text{ y } x^\alpha \in \mathcal{M}(A).$$

Definición 1.10. *Definimos el* ***grado total*** *de* f*:*

$$\deg(f) := \text{máx}_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}\{|\alpha| : c_\alpha \neq 0\}.$$

Donde $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$*.*
Y, dado un vector $0 \neq w \in \mathbb{R}^n$*, definimos el* ***grado total ponderado*** *de* f *con respecto al vector de pesos* w *a:*

$$\deg_w(f) := \text{máx}_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}\left\{\sum_{i=1}^{n} w_i \alpha_i | c_\alpha \neq 0\right\}.$$

Por convenio, $\deg(0) := \deg_w(0) := -\infty$.

Volveremos a estas definiciones más adelante cuando hablemos de filtraciones con respecto a vectores de peso.

Definición 1.11. *Sea* A *una* G*-álgebra en* n *variables sujeta a ciertas relaciones dadas por un conjunto* F *como en la definición 1.9, entonces:*
- *Si todo* $d_{ij} = 0$*, diremos que es un álgebra* ***quasi-conmutativa***
- *Si todo* $c_{ij} = 1$*, estaremos tratando un álgebra* ***de tipo Lie****.*
- *Si todo* $c_{ij} = 1$ *y* $d_{ij} = 0$*, entonces es un* ***álgebra conmutativa****.*

Observación 1.1. Si A es una G-álgebra en n variables sujeta a unas relaciones dadas por un conjunto F como en la definición 1.9. Notar que podemos escribirla de manera equivalente mediante la forma:

$$A = K\langle x_1, ..., x_n | \{x_j x_i = c_{ij} \cdot x_i x_j + d_{ij}, 1 \leq i < j \leq n\}\rangle, \text{ donde } c_{ij} \in K^*, d_{ij} \in A.$$

Las G-álgebras que tratemos las notaremos de esta forma a lo largo del texto.

Ejemplos: (1) Un caso peculiar de G-álgebra que vamos a tratar durante todo el texto, es la n-ésima álgebra de Weyl, la cual se suele denotar por A_n y viene dada por:

$$A_n = K\langle x, \partial_x\rangle := K\langle x_1, ..., x_n, \partial_1, ..., \partial_n | \{\partial_j x_i = x_i \partial_j + \delta_{ij} \text{ para } 1 \leq i, j \leq n\}\rangle$$

Donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Las relaciones entre el conjunto de variables $\{x_i\}$ entre sí, y entre el conjunto de variables $\{\partial_i\}$ entre sí, son conmutativas y normalmente omitiremos la escritura de las relaciones conmutativas.
En este caso tenemos que $d_{ij} = \delta_{ij}$ y $c_{ij} = 1$ para todo $1 \leq i, j \leq n$, siempre que tratemos las relaciones no conmutativas, ya que en el caso de las relaciones no conmutativas tenemos que $c_{ij} = 1$ y que $d_{ij} = 0$ siempre. Luego tomando un orden monomial de la forma $x_n \prec ... \prec x_1 \prec \partial_n \prec ... \prec \partial_1$ es claro que $\mathrm{lm}(d_{ij}) \prec x_i \partial_j$.
Además, con un pequeño abuso de notación, denotando $x_k := \partial_k$ para $n+1 \leq k \leq 2n$, como los $c_{ij} = 1$ siempre, entonces se tiene que

$$\mathcal{NDC}_{ijk} = d_{ij}x_k - x_k d_{ij} + x_j d_{ik} - d_{ik} x_j + d_{jk} x_i - x_i d_{jk}, \text{ para todo } 1 \leq i < j < k \leq 2n.$$

Y como $d_{lr} \in \{0, 1\}$ en cualquier situación, entonces podemos escribir el término anterior para todo $1 \leq i < j < k \leq 2n$ de la forma

$$\mathcal{NDC}_{ijk} = (d_{ij} - d_{ij})x_k + (d_{ik} - d_{ik})x_j + x_i(d_{jk} - d_{jk}),$$

de donde se concluye la condición de no degeneración anulada.

En este caso, las relaciones no conmutativas obtenidas son del tipo Lie y por tanto la comprobación de la condición de no degeneración anulada no tiene complicación. Sin embargo, hay casos donde esta comprobación se vuelve muy costosa. Aunque para ello podemos usar `Singular` de la siguiente forma:

1. Construcción del álgebra no conmutativa.

```
ring A = 0,(x1,x2,x3,d1,d2,d3),dp;
matrix D[6][6];
```

```
D[1,4]=1; D[2,5]=1; D[3,6]=1;
ncalgebra (1,D);
```

Donde `x1,x2,x3,d1,d2,d3`, son las variables y `dp` es el orden lexicográfico inverso. D es la matriz que representa los elementos d_{ij} y el 1 representa la matriz unidad C que daría los elementos c_{ij} (son todos 1). El comando `ncalgebra` construye el álgebra no conmutativa usando las matrices C y D como los conjuntos $\{c_{ij}\}$ y $\{d_{ij}\}$ vistos anteriormente.
Ahora podemos ver las propiedades de este álgebra llamándola directamente en el comando de `Singular`.

```
A;
==>
//   characteristic : 0
//   number of vars : 6
//       block   1 : ordering dp
//                 : names    x1 x2 x3 d1 d2 d3
//       block   2 : ordering C
//   noncommutative relations:
//   d1x1=x1d1+1
//   d2x2=x2d2+1
//   d3x3=x3d3+1
```

2. Comprobación de la condición de no degeneración anulada.

```
LIB "nctools.lib";
ideal N = ndcond();
N;
==>
N[1]=0
```

Para usar el comando `ncond` hay que importar la librería `"nctools.lib"` [24]. Este comando calcula el conjunto de todos los elementos de no degeneración y, por tanto, si el ideal generado por dicho conjunto es nulo, quiere decir que se verifica la condición de no degeneración anulada. Por lo tanto, dicho comando es una herramienta muy útil para comprobar si estamos trabajando sobre una G-álgebra.

(2) Otro ejemplo claro de G-álgebra, es el anillo de polinomios $K[x_1, ..., x_n]$, el cual es simplemente la K-álgebra generada por las variables $x_1, ..., x_n$ con las relaciones

conmutativas entre ellas. Es conocido que el anillo de polinomios es un A_n-módulo a la izquierda, simple y de torsión que podemos identificar con $A_n/\langle\partial_1,\ldots,\partial_n\rangle$. Donde $\langle\partial_1,\ldots,\partial_n\rangle$ es el ideal a la izquierda generado por los operadores diferenciales $\partial_1,\ldots,\partial_n$ en A_n. En este caso, el anillo de polinomios es una G-álgebra conmutativa ya que los coeficientes $c_{ij}=1$ y los $d_{ij}=0$.

Lema 1.1. Sea $A=K\langle x_1,\ldots,x_n|R_A\rangle$ y $B=K\langle y_1,\ldots,y_m|R_B\rangle$ dos G-álgebras cuyas variables están sujetas a los conjuntos de relaciones R_A y R_B respectivamente. Entonces

$$A\otimes_K B\cong K\langle x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m \mid R_A\cup R_B\cup\{y_jx_i=x_iy_j \mid 1\le i\le n, 1\le j\le m\}\rangle$$

es también una G-álgebra [20].

Corolario 1.1. El n-ésimo álgebra de Weyl A_n se puede considerar como el producto tensorial de n copias del álgebra de Weyl A_1. Es decir, $A_n\cong\bigotimes_{i=1}^{n}{}_K A_1$ [20].

Proposición 1.2 ([20]). Sea A una G-álgebra en n variables, entonces tenemos las siguientes propiedades:

- A tiene una base PBW.
- A es Noetheriano a la izquierda y a la derecha.
- A es un dominio de integridad.

1.2 El anillo de operadores diferenciales logarítmicos respecto de un divisor libre visto como G-álgebra

Definición 1.12. *Sea $f\in K[x_1,\ldots,x_n]$. Diremos que f es un **divisor libre** si el módulo de las derivaciones logarítmicas*

$$\mathcal{D}er(\log f)=\{\delta=\textstyle\sum_i a_i\partial_{x_i}\mid a_i\in K[x_1,\ldots,x_n],\ \delta(f)\in(f)\},$$

es un módulo libre (necesariamente de rango n) sobre el anillo $K[x_1,\ldots,x_n]$.

El objetivo de esta sección es probar que, dado un divisor libre $f\in K[x_1,\ldots,x_n]$, el módulo de las derivaciones logarítmicas $\mathcal{D}\mathrm{er}(\log f)$ es una G-álgebra. Para ello se puede probar que una base del subanillo del álgebra de Weyl generado por $K[x_1, ..., x_n]$ y por $\mathcal{D}\mathrm{er}(\log f)$ ($\mathcal{V}_f = K[x_1, ..., x_n]\langle \delta_1, ..., \delta_n \rangle$) viene dada por $\{\delta_1, ..., \delta_n\}$ (Teor. 2.1.4 [10]), donde se verifican las siguientes relaciones:

$$[\delta_i, \delta_j] = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{ij} \delta_k \quad (1)$$

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \partial_{x_j} \quad (2)$$

$$\delta_i x_j = x_j \delta_i + \delta_i(x_j) = x_j \delta_i + a_{ij} \quad (3)$$

Donde los $\alpha_k^{ij} \in K[x_1, ..., x_n]$ y los $a_{ij} \in K[x_1, ..., x_n]$ son los que determinan cada δ_i:

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

A esta matriz $A = (a_{ij})$, se la denomina matriz de Saito y verifica que $\det(A) = k \cdot f$, para algún $k \in K \setminus \{0\}$.

Debido a las condiciones (3) y (1), se tiene que la base $\{x_1, ..., x_n, \delta_1, ..., \delta_n\}$ es una PBW-base de $\mathcal{D}\mathrm{er}(\log f)$. Veamos que en particular dicha base lo dota de estructura de G-álgebra.

En ([11], Remark 3, pág. 138) ya se sugiere la posibilidad de que los anillos de operadores diferenciales logarítmicos admitan una buena teoría de bases de Gröbner. En particular, al probar que es G-álgebra podremos usar la teoría de bases de Gröbner sobre G-álgebras que veremos en la siguiente sección.

Denotemos al conjunto de variables $\{x_1, ..., x_n, \delta_1, ..., \delta_n\}$ por $\{x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{2n}\}$. Entonces los conjuntos $C = \{c_{ij}\} \in K^*$ y $D = \{d_{ij}\} \in \mathcal{V}_f$ tal que $(i, j) \in \mathcal{U}_2 := \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq 2n\}$ de la definición de G-álgebra 1.9, vienen dados por:

$c_{ij} = 1$, para todo $(i, j) \in \mathcal{U}_2$,

$d_{ij} = 0$, para $(i, j) \in \mathcal{U}_2$ con $j \leq n$ (variables conmutativas), (a)

$d_{ij} = a_{i,j-n}$, para $(i, j) \in \mathcal{U}_2$ con $i \leq n$ y (b)

$d_{ij} = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{i-n,j-n} x_{k+n}$, para $(i, j) \in \mathcal{U}_2$ con $i > n$. (c)

1.2.1 Condición de orden

Hay que probar que existe un orden monomial $\prec$ sobre la base estándar de monomios $\mathcal{M}(\{x_1, ..., x_{2n}\})$, tal que $\mathrm{lm}(d_{ij}) \prec x_i x_j$ para todo $(i, j) \in \mathcal{V}_2$.
Cada una de las posibilidades de los elementos d_{ij} nos proporciona condiciones sobre el orden monomial buscado.
• Los elementos d_{ij} dados en (a) no proporcionan ninguna condición sobre dicho orden.
• Los elementos d_{ij} dados en (b) son polinomios $a_{ij} \in K[x_1, ..., x_n]$ de grado total arbitrario, pero finito. Se tiene que verificar:

$$\mathrm{lm}(a_{ij}) \prec x_i x_j = x_i \delta_{j-n}$$

Por tanto, basta tomar un orden monomial basado en pesos, el cual le dé un peso lo suficientemente grande a la variable $\delta_{j-n} = x_j$ para que el producto $x_i x_j$ sea mayor, con respecto a dicho orden, que el monomio líder de a_{ij}, que será un monomio en las variables $\{x_1, ..., x_n\}$ de grado arbitrario.
• Los elementos d_{ij} dados en (c) son combinaciones con coeficientes en $K[x_1, ..., x_n]$ de las variables $x_{n+1}, ..., x_{2n}$. Por tanto, para que se verifique

$$\mathrm{lm}(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{ij} x_{k+n}) \prec x_i x_j = \delta_{i-n} \delta_{j-n}$$

Debemos de dar un peso lo suficientemente grande a x_i y x_j para que su producto sea mayor, respecto de dicho orden, que cualquiera de las variables x_{k+n}, para $k = 1, ..., n$, por separado.

1.2.2 Condición de no degeneración anulada

Como los elementos $c_{ij} = 1$ para todo $(i, j) \in \mathcal{V}_2$, los elementos de no degeneración del álgebra vienen dados por:

$$\mathcal{NDC}_{ijk} = d_{ij} x_k - x_k d_{ij} + x_j d_{ik} - d_{ik} x_j + d_{jk} x_i - x_i d_{jk}, \text{ con } (i, j, k) \in \mathcal{V}_3.$$

Además, usando de nuevo que $c_{ij} = 1$ para todo $(i, j) \in \mathcal{V}_2$, se tiene que $x_j x_i = x_i x_j + d_{ij}$ y por lo tanto $d_{ij} = [x_j, x_i]$. Luego los elementos de no degeneración son de la forma:

$$\mathcal{NDC}_{ijk} = [x_j, x_i]x_k - x_k[x_j, x_i] + x_j[x_k, x_i] - [x_k, x_i]x_j + [x_k, x_j]x_i - x_i[x_k, x_j] = [[x_j, x_i], x_k] + [x_j, [x_k, x_i]] + [[x_k, x_j], x_i] = [x_i, [x_j, x_k]] + [x_j, [x_k, x_i]] + [x_k, [x_i, x_j]] = 0$$

Debido a la identidad de Jacobi.

$\boxed{\textbf{Ejemplos:}}$ (1) Sea $f = x_1^2 - x_2^3$ y sea $D \subset \mathbb{C}^2$ el divisor libre definido por la ecuación polinomial aterior, la cual es cuasi-homogénea con respecto al vector de pesos $(w_1, w_2) = (3, 2)$ respecto de las variables (x_1, x_2). Se tiene que D es libre y, como ya hemos visto, una base global de $\mathcal{D}\mathrm{er}(\log D)$ viene dada por $\{\delta_2, \delta_2\}$, donde:

$$\delta_1 = 3x_1\partial_{x_1} + 2x_2\partial_{x_2},$$
$$\delta_2 = 3x_2^2\partial_{x_1} + 2x_1\partial_{x_2} \text{ y}$$
$$\delta_1(f) = 6f,\ \delta_2(f) = 0,\ [\delta_1, \delta_2] = \delta_2. \text{ Es decir } \delta_2\delta_1 = \delta_1\delta_2 - \delta_2.$$

Entonces, tomando la PBW-base $\{x_1, x_2, \delta_1, \delta_2\}$ como ya mencionamos antes, los conjuntos $C = \{c_{ij}\}$ y $D = \{d_{ij}\}$ se pueden representar con las matrices:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3x_1 & 3x_2^2 \\ 0 & 0 & 2x_2 & 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Para que se verifique la condición de orden, podemos tomar un orden monomial por pesos que dé el peso 1 a las variables x_1, x_2 y el peso 3 a las variables δ_1,δ_2.

```
> ring r = 0,(x1,x2,d1,d2),(wp(1,1,3,3));
> matrix D[4][4];
> D[1,3]=3*x1;
> D[2,3]=2*x2;
> D[1,4]=3*x2^2;
> D[2,4]=2*x1;
> D[3,4]=-d2;
> ncalgebra(1,D);
> r;
// coefficients: QQ
// number of vars : 4
//        block   1 : ordering wp
//                  : names    x1 x2 d1 d2
//                  : weights   1  1  3  3
//        block   2 : ordering C
// noncommutative relations:
//    d1x1=x1*d1+3*x1
//    d2x1=x1*d2+3*x2^2
//    d1x2=x2*d1+2*x2
//    d2x2=x2*d2+2*x1
//    d2d1=d1*d2-d2
> ideal N = ndcond();
> N;
N[1]=0
```

(2) En la misma línea del ejemplo anterior, sea $f = x_1^4 + x_2^5 + x_2^4 x_1$ y sea $D \subset \mathbb{C}^2$ el divisor libre definido por la ecuación polinomial anterior. Se tiene que una base de $\mathcal{D}er(\log D)$ viene dada por $\{\delta_1, \delta_2\}$, donde:

$$\begin{gathered}\delta_1 = (16x_1^2 + 20x_1x_2)\partial_{x_1} + (12x_1x_2 + 16x_2^2)\partial_{x_2} \\ \delta_2 = (16x_1x_2^2 + 4x_2^3 - 125x_1x_2)\partial_{x_1} + (12x_2^3 - 4x_1^2 + 5x_1x_2 - 100x_2^2)\partial_{x_2} \quad \text{con} \\ [\delta_2, \delta_1] = -(-12x_2^2 + 5x_1 + 175x_2)\delta_1 - (20x_1 + 28x_2)\delta_2\end{gathered}$$

De nuevo, realizando el mismo proceso en Singular, obtenemos:

```
> ring r = 0,(x,y,d1,d2),(wp(1,1,3,3));
>  matrix D[4][4];
> D[1,3]=16*x^2+20*x*y;
> D[2,3]=12*x*y+16*y^2;
> D[1,4]=16*x*y^2+4*y^3-125*x*y;
> D[2,4]=12*y^3-4*x^2+5*x*y-100*y^2;
> D[3,4]=-(-12*y^2+5*x+175*y)*d1-(20*x+28*y)*d2;
> ncalgebra(1,D);
> r;
// coefficients: QQ
// number of vars : 4
//        block   1 : ordering wp
//                  : names    x y d1 d2
//                  : weights   1  1  3  3
//        block   2 : ordering C
// noncommutative relations:
//    d1x=x*d1+16*x^2+20*x*y
//    d2x=x*d2+16*x*y^2+4*y^3-125*x*y
//    d1y=y*d1+12*x*y+16*y^2
//    d2y=y*d2+12*y^3-4*x^2+5*x*y-100*y^2
//    d2d1=d1*d2+12*y^2*d1-5*x*d1-175*y*d1-20*x*d2-28*y*d2
> ideal N = ndcond();
> N;
N[1]=0
```

Notar que aquí hemos usado también un orden monomial por pesos `wp(1,1,3,3)` que dá el peso 1 a x e y, y el peso 3 a δ_1, δ_2 para que se verifique la **condición de orden** (1.9).

1.3 Bases de Gröbner en G-álgebras

Definición 1.13. *Sea $A = K\langle x_1, \dots, x_n | \{x_j x_i = c_{ij} x_i x_j + d_{ij}$ para $1 \leq i < j \leq n\}\rangle$ una G-álgebra. Sean m, m' dos monomios en A. Pongamos que $m = x^\alpha$ y $m' = x^\beta$. Diremos que m **divide** a m', denotado por $m|m'$, si $\alpha_i \leq \beta_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.*

En el caso en que A sea conmutativo, existe un $p \in \mathcal{M}(A)$ tal que $m' = p \cdot m$. En caso contrario, el sentido de esta definición es que m' es reducible a la izquierda por m. Es decir, que existe un $c \in K \setminus \{0\}$, $p \in \mathcal{A}$ y $r \in A$ tales que $\mathrm{lm}(r) \prec m$ y $m' = c \cdot p \cdot m + r$.

Ejemplo: Por ejemplo tomemos los vectores *exponentes* $\alpha = (1,1)$, $\beta = (2,2)$ de $\mathbb{N}^2$. Supongamos que A es una G-álgebra generada por dos elementos $\{x, \partial\}$ cuyas relaciones están por determinar. Entonces tenemos que $m_1 := x\partial | x^2\partial^2 := m_2$, pero la división de uno por el otro depende de las relaciones entre los generadores de la G-álgebra:

- Si $A = K[x, \partial]$ el anillo de polinomios conmutativo en dos variables, entonces tenemos que $m_2 = x\partial m_1$.
- Si $A = A_2 = K\langle x, \partial \mid \partial x = x\partial + 1\rangle$, entonces $m_2 = \partial \cdot m_1 - \partial$.

Se puede extender la definición de un orden monomial al caso de un módulo libre a la izquierda $A^r = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_r$, donde e_i es el vector de r entradas, cuya i-ésima entrada es un uno y las demás son nulas. Como cualquier e_i conmuta con todos los elementos de A, A^r es un bimódulo libre.

Definición 1.14. *Diremos que $x^\alpha e_i \in A^r$ es un* ***monomio en la componente*** *i. De esta forma:*

$$\mathcal{M}(A^r) := \{x^\alpha e_i \mid \alpha \in \mathbb{N}^n, 1 \le i \le r\} \cong \{1, \ldots, r\} \times \mathbb{N}^n.$$

Si tenemos un monomio $x^\alpha e_i$ en la componente i en A^r, es conveniente su representación en forma vectorial $\overline{\alpha} = (i, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{1, \ldots, r\} \times \mathbb{N}^n$, donde la primera entrada denota qué componente envuelve el monomio.

Definición 1.15. *Sea $\prec$ un orden monomial sobre A. Un* ***orden monomial (modular)*** *sobre A^r es un orden total $\prec_m$ en el conjunto de monomios $\mathcal{M}(A^r)$, tal que se verifican las siguientes condiciones para cualesquiera $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$ y $1 \le i, j \le r$.*

(i) Si $x^\alpha e_i \prec_m x^\beta e_j$, entonces $x^{\alpha+\gamma} e_i \prec_m x^{\beta+\gamma} e_j$.

(ii) Si $x^\alpha \prec x^\beta$, entonces $x^\alpha e_i \prec_m x^\beta e_i$.

Traducido a sus vectores exponentes, las condiciones anteriores son de la forma:

(i) Si $(i, \alpha) \prec_m (j, \beta)$, entonces $(i, \alpha + \gamma) \prec_m (j, \beta + \gamma)$,

(ii) Si $\alpha \prec \beta$, entonces $(i, \alpha) \prec_m (i, \beta)$.

Definición 1.16. *Sea $f \in A^r \setminus \{0\}$. Entonces f se puede escribir de manera única como $f = c_\alpha x^\alpha e_i + g$, donde $c_\alpha \in K^*$ y $x^\beta e_j \prec x^\alpha e_i$ para cualquier término no nulo $dx^\beta e_j$ de g. Entonces definimos*

$$\begin{aligned} \mathrm{lm}_{\prec_m}(f) &:= x^\alpha e_i && \textit{el } \textbf{\textit{monomio líder}} \textit{ de } f, \\ \mathrm{lc}_{\prec_m}(f) &:= c_\alpha && \textit{el } \textbf{\textit{coeficiente líder}} \textit{ de } f, \\ \mathrm{le}_{\prec_m}(f) &:= (i, \alpha) && \textit{el } \textbf{\textit{exponente líder}} \textit{ de } f, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} lcomp_{\prec_m}(f) &:= i \qquad \textit{la } \textbf{\textit{componente líder}} \textit{ de } f \textit{ y} \\ \mathrm{lt}_{\prec_m}(f) &:= c_\alpha x^\alpha \quad \textit{el término líder de } f. \end{aligned}$$

Cualquier orden monomial $\prec$ sobre A se puede extender de forma natural a un orden monomial sobre A^r tomando una ordenación de los e_i.
Por ejemplo, si ordenamos los e_i de la forma $e_1 < e_2 < \ldots$ entonces podemos considerar un orden monomial sobre A^r que dé más importancia a dicha ordenación de los e_i, o bien, podemos considerar un orden monomial sobre A^r que le dé más importancia al orden monomial $\prec$ de A. Estos se definen respectivamente como sigue:

$$x^\alpha e_i \prec_{POT} x^\beta e_j \iff i < j \text{ ó, si } i = j,\, x^\alpha \prec x^\beta.$$
$$x^\alpha e_i \prec_{TOP} x^\beta e_j \iff x^\alpha \prec x^\beta \text{ ó, si } x^\alpha = x^\beta,\, i < j.$$

Definición 1.17. *Sea $\prec$ un orden monomial sobre A^r, $I \subset A^r$ un submódulo a la izquierda y $G \subset I$ un subconjunto finito de I. Se dice que G es una **base de Gröbner a la izquierda** de I sí y sólo si para cualquier $f \in I \setminus \{0\}$ existe un $g \in G$ tal que $lm(g) \mid lm(f)$.*

• Sea S un subconjunto de A^r, se define el **monoide de exponentes líderes** de S como el $\mathbb{N}^n$-monoide generado por los exponentes líderes de los elementos de S. Es decir, $\mathcal{L}(S) := \langle (i,\alpha) \mid \exists s \in S, \mathrm{le}(s) = (i,\alpha) \rangle \subseteq \{1,\ldots,r\} \times \mathbb{N}^n$.

• Sea S un subconjunto de A^r, el **span de monomios líderes de** S se define como el K-espacio vectorial, generado por el conjunto $\{x^\alpha e_i \mid (i,\alpha) \in \mathcal{L}(S)\} \subset \mathcal{M}(A^r)$. Es decir, $L(S) := \langle \{x^\alpha e_i \mid (i,\alpha) \in \mathcal{L}(S)\} \rangle \subseteq A^r$.

Observación 1.2. Una definición alternativa de base de Gröbner a la izquierda es mediante $L(S)$. En las condiciones de la definición anterior, se dice que G es una base de Gröbner a la izquierda de I sí y sólo si $L(G) = L(I)$ como K-espacios vectoriales [20].

Definición 1.18. *Sea $f \in A^r$ y $S \subset A^r$ un subconjunto. Diremos que f está **reducido respecto de** S, si ningún monomio de f está contenido en $L(S)$.*
*Diremos que S es **minimal** si $0 \notin S$ y $lm(s) \notin L(S \setminus \{s\})$ para todo $s \in S$.*
*Diremos que S está **reducido**, si $0 \notin S$ y para todo $s \in S$ se verifican las siguientes condiciones:*

1. *s está reducido respecto de $S \setminus \{s\}$ y*
2. *s- $\mathrm{lt}(s)$ está reducido respecto de S.*

Esto quiere decir que para cada $s \in S$, el monomio líder de s no divide a ningún monomio de cualquier otro elemento de S.

Definición 1.19. *Sea $\mathcal{G}$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos no vacíos ordenados de A^r con respecto a un orden monomial $\prec$.*
• *Una* ***forma normal (a la izquierda)*** *sobre A^r es una aplicación*

$$NF : A^r \times \mathcal{G} \to A^r, \quad (f, G) \mapsto NF(f, G)$$

Satisfaciendo las siguientes condiciones para todo $f \in A$ y $G \in \mathcal{G}$:
(*i*) $NF(0, G) = 0$,
(*ii*) $NF(f, G) \neq 0 \implies \operatorname{lm}(NF(f, G)) \notin L(G)$.
(*iii*) $(f - NF(f, G)) \in {}_A\langle G\rangle$
Una forma normal a la izquierda NF se dice que está ***reducida*** *con respecto de $G \in \mathcal{G}$, (**forma normal reducida (a la izquierda)**), si $NF(f, G)$ está reducido con respecto a G en el sentido de la definición anterior.*

• *Sea $G = \{g_1, \dots, g_s\} \in \mathcal{G}$. Una representación de f en los elementos del A-módulo generado por G, $({}_A\langle G\rangle)$,*

$$f = \sum_{i=1}^{s} a_i g_i,\ a_i \in A,$$

satisfaciendo que $\operatorname{lm}(f) \geq \operatorname{lm}(a_i g_i)$ *para todo $i = 1, \dots, s$ tal que $a_i g_i \neq 0$, se dice que es una* ***representación estándar (a la izquierda)*** *de f con respecto a G.*

Lema 1.2. Sea $I \subset A^r$ un submódulo, $G \subseteq I$ una base de Gröbner (a la izquierda) de I y NF $(\cdot, G)$ una forma normal sobre A^r con respecto a G. Entonces se tienen los siguientes resultados:
(1) Para cualquier $f \in A^r$ tenemos que, $f \in I \iff \mathrm{NF}(f, G) = 0$.
(2) Si $J \subset A^r$ es un submódulo con $I \subset J$, entonces $L(I) = L(J) \implies I = J$.
(3) Si NF $(\cdot, G)$ es una forma normal reducida, entonces es única.

Demostración. (1) Si $\mathrm{NF}(f, G) = 0$, entonces $f \in I$. Por otro lado, si $\mathrm{NF}(f, G) \neq 0$, entonces $\operatorname{lm}(\mathrm{NF}(f, G)) \notin L(G) = L(I)$, luego $\mathrm{NF}(f, G) \notin I$, que implica $f \notin I$.

(2) Sea $f \in J$ y supongamos que $\mathrm{NF}(f, G) \neq 0$. Entonces $\operatorname{lm}(\mathrm{NF}(f, G)) \notin L(G) = L(I) = L(J)$, que es una contradicción, ya que $\mathrm{NF}(f, G) \in J$. Luego, por (1), $f \in I$ y por tanto $I = J$.

(3) Sea $f \in A^r$ y supongamos que h, h' son dos formas normales reducidas de f con respecto a G. Entonces $h - h'$ está en el A-módulo generado por G, el cual coincide con I por ser G una base de Gröbner de I. Si $h - h' \neq 0$, entonces $\operatorname{lm}(h - h') \in L(I) = L(G)$, lo que contradice el hecho de que $\operatorname{lm}(h - h')$ sea un monomio de h ó de h'. ∎

Definición 1.20. *Sean $0 \neq f, g \in A^r$ con $\mathrm{lm}(f) = x^\alpha e_i$ y $\mathrm{lm}(g) = x^\beta e_j$, respectivamente. Consideremos $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ definido de la forma $\gamma_i := \max\{\alpha_i, \beta_i\}$ para todo $1 \leq i \leq n$. Entonces definimos el s-polinomio (a la izquierda) de f y g de la forma:*

$$Spoly(f,g) := \left(x^{\gamma-\alpha} f - \frac{\mathrm{lc}(x^{\gamma-\alpha} f)}{\mathrm{lc}(x^{\gamma-\beta} g)} x^{\gamma-\beta} g\right)\delta_{ij}$$

Observación 1.3. Es fácil ver que $\mathrm{lm}(Spoly(f,g)) < \mathrm{lm}(f \cdot g)$. Si además $\mathrm{lm}(g) | \mathrm{lm}(f)$, supongamos que $\mathrm{lm}(g) = x^\beta e_i$, $\mathrm{lm}(f) = x^\alpha e_i$, entonces el s-polinomio es más sencillo:

$$Spoly(f,g) = f - \frac{\mathrm{lc}(f)}{\mathrm{lc}(x^{\alpha-\beta} g)} x^{\alpha-\beta} g.$$

Y claramente se tiene también que $\mathrm{lm}(Spoly(f,g)) < \mathrm{lm}(f)$.

El siguiente algoritmo calcula la forma normal a la izquierda de f respecto de un conjunto $G \in \mathcal{G}$ mediante el cálculo de los $Spoly$. Supondremos en los algoritmos que vienen que tenemos A una G-álgebra y un orden monomial $\prec$ sobre $\mathcal{M}(A^r)$.

Algoritmo 1.2. `LeftNormalForm`(f, G).
Input: $f \in A^r, G \in \mathcal{G}$
Output: $h \in A^r$, una forma normal a la izquierda de f con respecto a G.
BEGIN
$h \leftarrow f$
$G_h \leftarrow \{g \in G : \mathrm{lm}(g) | \mathrm{lm}(h)\}$
while $((h \neq 0)$**and** $(G_h \neq \emptyset))$ **do**
  elegir $g \in G_h$
  $h \leftarrow Spoly(h, g)$
  $G_h \leftarrow \{g \in G : \mathrm{lm}(g) | \mathrm{lm}(h)\}$
end-while
return h
END

Proposición 1.3. El algoritmo termina y devuelve la forma normal a la izquierda de $f \in A^r$ respecto del conjunto $G \in \mathcal{G}$.

Demostración. **El algoritmo termina:** sea $h_0 = f$, en el i.ésimo paso del bucle **while**, estamos calculando $h_i = Spoly(h_{i-1}, g)$. Como $\mathrm{lm}(h_i) = \mathrm{lm}(Spoly(h_{i-1}, g)) \prec \mathrm{lm}(h_{i-1})$, obtenemos, como en el algoritmo `NormalForm` del caso asociativo, un conjunto $\{\mathrm{lm}(h_i)\}$ de monomios líderes de los respectivos cálculos de h_i, donde para cada i se tiene $\mathrm{lm}(h_{i+1}) \prec \mathrm{lm}(h_i)$. Por tanto, como $\prec$ es un orden monomial y, en particular, un buen orden, este conjunto estrictamente decreciente tiene un mínimo, donde se

concluye que el algoritmo termina.
El algoritmo devuelve $NF(f, G)$: Supongamos que el mínimo se alcanza en el paso m. Sea $h = h_m$, haciendo sustituciones para volver atrás en el algoritmo podemos obtener una expresión de la forma:

$$h = f - \sum_{i=1}^{m-1} a_i g_i$$

donde a_i son simplemente términos que van apareciendo al sustituir y $g_i \in G$ son las sucesivas elecciones que se habían hecho de elementos de G_h. Donde se satisface que $\mathrm{lm}(h_m) \prec \mathrm{lm}(a_i g_i) \prec \mathrm{lm}(a_1 g_1) = \mathrm{lm}(f)$ y por construcción del algoritmo se tiene que $\mathrm{lm}(h) \notin L(G)$ si $h \neq 0$, (ya que entonces $G_h = \emptyset$), de donde se concluye el resultado. ∎

Usando la definición de forma normal reducida a la izquierda, podemos extender el algoritmo anterior de forma sencilla únicamente imponiendo condiciones para que ningún monomio de NF (f, G) esté contenido en $L(G)$. De esta forma obtendríamos la unicidad en el output debido al 1.2(3).

Algoritmo 1.3. `LeftNormalFormRed`(f, G)
Input: $f \in A^r$, $G \in \mathcal{G}$.
Output: $h \in A^r$, la forma normal reducida de f con respecto a G.
BEGIN
$h \leftarrow 0$
$g \leftarrow f$
while $(g \neq 0)$ **do**
  $g \leftarrow$ `NormalForm`(g, G)
  $h \leftarrow h + \mathrm{lc}(g)\mathrm{lm}(g)$
  $g \leftarrow g - \mathrm{lc}(g)\mathrm{lm}(g)$
end-while
return h
END

En este caso la prueba es más sencilla. Ya que cuando hacemos $g \leftarrow g - \mathrm{lc}(g)\mathrm{lm}(g)$, obviamente tenemos que $\mathrm{lm}(g - \mathrm{lc}(g)\mathrm{lm}(g)) \prec \mathrm{lm}(g)$, y por tanto se asegura la finalización del algoritmo.
Por otro lado, que devuelva la forma normal reducida de f respecto de G se tiene directamente del algoritmo anterior y de que este nuevo algoritmo recoge las condiciones que se imponen sobre la definición de forma normal reducida al hacer en cada

paso $g \leftarrow g - \mathrm{lc}(g)\mathrm{lm}(g)$.

Pasemos ahora a dar un algoritmo para el cálculo de bases de Gröbner (a la izquierda) sobre G-álgebras, el cual se basa principalmente en el algoritmo de Buchberger extendido al caso no conmutativo.

Algoritmo 1.4. `GB`$(H, \prec)$
Input: $H \in \mathcal{G}$, $\prec$ un orden monomial dado.
Output: $G \in \mathcal{G}$, una base de Gröbner (a la izquierda) del submódulo (a la izquierda) $I = {}_A\langle H\rangle \subset A^r$.
BEGIN
$G \leftarrow H$
$P \leftarrow \{(f, g) | f, g \in G\} \subset G \times G$
while $(P \neq \emptyset)$ **do**
  Elegir $(f, g) \in P$
  $P \leftarrow P \setminus \{(f, g)\}$
  $h \leftarrow$ `LeftNormalForm`$(Spoly(f, g), G)$
  if $(h \neq 0)$ **then**
    $P \leftarrow P \cup \{(h, f) | f \in G\}$
    $G \leftarrow G \cup h$
  end-if
end-while
return G
END

Lema 1.3. El algoritmo `GB`$(H, \prec)$ termina y devuelve una base de Gröbner (a la izquierda) del ideal I generado por H en A, $(I = A\langle H\rangle)$.

Demostración. **El algoritmo termina:** de la propiedad (ii) de la definición de una forma normal, $(\mathrm{NF}(f, G) \neq 0 \implies \mathrm{lm}(\mathrm{NF}(f, G)) \notin L(G))$, tenemos que si $h \neq 0$ entonces $\mathrm{lm}(h) \notin L(G)$. Por tanto, se tiene que $A\langle G\rangle \subset A\langle\{G, h\}\rangle$ y obtenemos, de esta forma, una sucesión estrictamente creciente de ideales en A. Usando que A es noetheriano 1.2, esta sucesión se estabiliza en en algún momento. Luego, después de un número finito de pasos, siempre tendremos que $\mathrm{NF}(Spoly(f, g), G) = 0$, para todo $(f, g) \in P$ y, después de otra cantidad de pasos finitos, tendremos que el conjunto P de pares será vacío. Eso concluye que el algoritmo termine.
El algoritmo devuelve una base de Gröbner del ideal (a la izquierda) $I = A\langle H\rangle$: la demostración se obtiene directamente del criterio de Buchberger extendido al caso no conmutativo, mediante el uso de una forma normal, que vamos a ver a continuación (teorema 1.2). ∎

Observación 1.4. Si en el algoritmo anterior tenemos que `LeftNormalForm` es una forma normal reducida y que H está reducido, entonces la base de Gröbner G, que obtenemos, es una base de Gröbner reducida.
Si H no está reducido, se puede aplicar después `LeftNormalForm` a $(f, G \setminus \{f\})$ para todo $f \in G$ para obtener una base de Gröbner reducida. Denotaremos por $\boxed{\texttt{RedGB}(H, \prec)}$ al proceso que primero calcula una base de Gröbner de $I = {}_A\langle H\rangle$ y después la reduce para la obtención de una base de Gröbner reducida.

Teorema 1.2. *Sea A una G-álgebra, $I \subseteq A^r$ un submódulo (a la izquierda) y $G = \{g_1, ..., g_l\} \subseteq I$ un subconjunto. Sea NF$(\cdot, G)$ una forma normal sobre A con respecto de G. Entonces son equivalentes:*

(1) G es una base de Gröbner de I.

(2) NF$(f, G) = 0$ para todo $f \in I$.

(3) Cada $f \in I$ tiene una representación estándar con respecto a G. Es decir, existen $a_1, ..., a_l \in A$ tales que f se puede escribir de la forma $f = \sum_{i=1}^{l} a_i g_i$. Donde $\mathrm{lm}(a_i g_i) \prec f$ y $a_i g_i \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq l$.

(4) Criterio de Buchberger: NF (Spoly $(g_i, g_j), G) = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq l$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2), se sigue directamente del lema de Diamond [4].
(2) $\Rightarrow$ (3), se tiene de las definiciones correspondientes.
(3) $\Rightarrow$ (1), vemos que si f tiene una representación estandar con respecto a G, entonces $\mathrm{lm}(f)$ debe aparecer como monomio líder de $a_i g_i$ para algún $i = 1, ..., l$. Esto significa que $\mathrm{lm}(g_i) | \mathrm{lm}(f)$, luego G es una base de Gröbner de I.
(3) $\Rightarrow$ (4), sea $h =$`NormalForm`$(Spoly(f_i, f_j), G) \in I$. Entonces por hipótesis, si $h \neq 0$, tenemos que $\mathrm{lm}(h) \in L(G)$, lo que contradice la propiedad (iii) de NF 1.19.
(4) $\Rightarrow$ (1), se prueba de manera equivalente al criterio de Buchberger del caso conmutativo.

En particular, este último criterio es muy útil para la construcción de bases de Gröbner y se puede agudizar un poco más cuando los respectivos g_i y g_j verifican que sus monomios líderes no tienen factores en común.

Lema 1.4 ([23]). Sea A una G-álgebra de Lie y sean $f, g \in A$. Si $\mathrm{lm}(f)$ y $\mathrm{lm}(g)$ no tienen factores en común, entonces $Spoly(f, g)$ se reduce a $[f, g] := fg - gf$ con respecto al conjunto $\{f, g\}$.

A diferencia que ocurre en el caso conmutativo, en las G-álgebras no conmutativas puede ocurrir que no podamos eliminar ciertas variables debido a que no exista un orden de eliminación apropiado para la eliminación de dichas variables. Por ello, vamos a definir el concepto de G-álgebra admisible para diferenciar cuándo se pueden eliminar ciertas variables.

Definición 1.21. *Sea $A = K\langle x_1, ..., x_n \mid \{x_j x_i = c_{ij} x_i x_j + d_{ij}$ para $1 \leq i < j \leq n\}\rangle$ una G-álgebra. Consideremos la subálgebra A_r, generada por el subconjunto de variables $\{x_{r+1}, ..., x_n\}$ de $\{x_1, ..., x_n\}$ para algún $r \geq 1$ sujetas a las relaciones de A (que envuelvan a las variables consideradas). Entonces diremos que A_r es un **álgebra admisible** si d_{ij} son polinomios en $x_{r+1}, ..., x_n$ para $r + 1 \leq i < j \leq n$. Entonces, A_r es cerrada bajo el producto heredado de A, por lo que es una G-álgebra.*

Definición 1.22. *Sea A una G-álgebra en n variables, generada por $\{x_1, ..., x_n\}$ tal que $\{x_{r+1}, ..., x_n\}$ genera una sub-G-álgebra admisible $B \subset A$. Diremos que un orden $\prec$ sobre A es un **orden de eliminación para** $x_1, ..., x_r$, si para todo $f \in A$, tal que $\mathrm{lm}(f) \in B$ implica que $f \in B$. Si, además $x_1, ..., x_r$ genera también una sub-G-álgebra admisible C, diremos también que $\prec$ es un orden de eliminación para C.*

- *Si $\prec$ es un orden de eliminación para las variables $x_r, ..., x_n$ que además verifica $\mathrm{lm}(d_{ij}) \prec x_i x_j$ para todo $i < j$ diremos que $\prec$ es un **orden de eliminación admisible**.*

Lema 1.5. Sea A una G-álgebra como en la definición anterior, $I \subseteq A$ un ideal, $B = K\langle x_{r+1}, ..., x_n \mid x_j x_i = c_{ij} x_i x_j + d_{ij}\rangle$ una sub-G-álgebra admisible de A. Si $S = \{f_1, ..., f_m\}$ es una base de Gröbner de I, entonces $S \cap B$ es una base de Gröbner de $I \cap B$.

Demostración. Dado $x^\alpha \in L(I)$, por definición de base de Gröbner, existe un $f \in I$ tal que $\mathrm{lm}(f) = x^\alpha$. Como $\prec$ es un orden de eliminación para las variables $x_1, ..., x_r$ y $\mathrm{lm}(f) \in \mathcal{M}(B)$, por la definición anterior se tiene que $f \in B$. Por tanto, $L(I) \cap B$ es igual a:

$$\bigoplus\{Kx^\alpha \mid \exists f \in I, \mathrm{lm}(f) = x^\alpha\} \cap B = \bigoplus\{Kx^\alpha \mid \exists f \in I \cap B, \mathrm{lm}(f) = x^\alpha\}.$$

Pero esto último es $L(I \cap B)$. Por tanto, $L(S) \cap B = L(I) \cap B = L(I \cap B) = L(S \cap B)$, y de aquí se concluye que $S \cap B$ es una base de Gröbner de $I \cap B$ (1.2).

Cuando decimos de eliminar un conjunto de variables $x_1, ..., x_r$ de un ideal I, en realidad, queremos decir que estamos calculando la intersección del ideal I con la subálgebra admisible A_r.
Aunque puede ocurrir que no exista un orden de eliminación admisible para un cierto subconjunto de variables sobre una G-álgebra. En cambio, en álgebras conmutativas siempre existe un orden de eliminación, por ejemplo, el orden lexicográfico.

Ejemplo: Supongamos que tenemos la G-álgebra generada por $\{e, f, h, a\}$ tal que $[f, e] = -h$, $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$. Tomando el orden lexicográfico total, denotado en `Singular` por `Dp`, se puede comprobar de manera sencilla que se trata de una G-álgebra. Es claro que a conmuta con las demás variables, por tanto podemos eliminar dicha variable. En `Singular` se procedería como sigue:

```
ring r = 0,(e,f,h,a),Dp;
matrix d[4][4];
d[1,2]=-h; d[1,3]=2e; d[2,3]=-2f;
ncalgebra(1,D);
poly p = 4ef+h^2-2h-a;
ideal I = e^3, f^3, h^3-4h, p;
eliminate(I,a)
==>
//   _[1] = h^3-4h
//   _[2] = fh^2-2fh
//   _[3] = f^3
//   _[4] = eh^2+2eh
//   _[5] = 2efh-h^2-2h
//   _[6] = e^3
```

Por otra parte, se puede observar que no es posible eliminar la variable h, ya que $[f, e] = -h$ y por tanto el correspondiente $d_{12} = -h \notin \{e, f, a\}$. Es decir, no estaríamos sobre un álgebra admisible 1.21. Esta vez en `Singular`, si intentáramos eliminarla con el proceso anterior tendríamos el siguiente mensaje de error.

```
eliminate(I,h)
==>
? no elimination is possible: subalgebra is not admissible
? error occurred in or before STDIN line 71: ‘eliminate(I,h);‘
```

El algoritmo `eliminate(ideal I, subálgebra S)`, implementado en `Singular/Plural`, trabaja siguiendo los siguientes pasos:

1. Comprueba cuando S es un subálgebra admisible 1.21, en caso de que no lo sea envía el mensaje de error del ejemplo anterior;

2. En caso de ser admisible, elige de manera heurística un orden de eliminación $\prec_S$ respecto de las variables a eliminar;

3. Comprueba cuando $\prec_S$ es un orden de eliminación **admisible** 1.22;

4. Calcula una base de Gröbner de I con respecto de $\prec_S$;
5. Elimina todos los elementos de dicha base de Gröbner tales que sus monomios líderes tengan otras variables fuera de S.
Una vez realizado este proceso, se puede reducir un poco la salida mediante el cálculo de una base de Gröbner reducida.

En el texto vamos a trabajar mucho sobre el álgebra de Weyl $A_n = K\langle x, \partial_x \mid \{\partial_{x_j} x_i = x_i\partial_{x_j} + \delta_{ij}$ para $1 \leq i < j \leq n\}\rangle$, de la cual sabemos que es una G-álgebra. Además es fácil ver que el orden lexicográfico es un orden admisible sobre A_n.

1.4 Filtraciones y propiedades de G-álgebras

Recordemos el concepto de holonomicidad de un D-módulo y algunas propiedades de los anillos graduados.

Definición 1.23. *Un anillo o álgebra A se dice **filtrado** si para todo entero $i \geq 0$, existe un subespacio F_i tal que se verifica:*
(1) $F_i \subseteq F_j$ para $i \leq j$, $1 \in F_0$,
(2) $F_i \cdot F_j \subseteq F_{i+j}$ y
(3) $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$.
*Al conjunto $\mathcal{F} = \{F_i \mid i \geq 0\}$ se le denomina **filtración** de A. Es usual definirlo para todo $i \in \mathbb{Z}$ imponiendo que $F_i = \emptyset$ para $i < 0$.*

Definición 1.24. *Un anillo o álgebra A se dice que es **graduado**, si existe una familia $G = \{G_i \mid i \geq 0\}$ de subgrupos del grupo aditivo de A tales que*
(1) $G_i \cdot G_j \subseteq G_{i+j}$ para todo $i, j \geq 0$ y
(2) $R = \bigoplus_{i\geq 0} G_i$
*A la familia G se la llama **graduado** de A.*

Observación 1.5. Cualquier anillo graduado $R = \oplus_{i\geq 0} G_i$ tiene una filtración natural $\mathcal{F} = \{F_i \mid i \geq 0\}$, definida mediante $F_i = \oplus_{h\leq i} G_i$.
Por otro lado, si tenemos R un anillo filtrado por una filtración $\mathcal{F} = \{F_i \mid i \geq 0\}$. Construimos un anillo graduado $gr^{\mathcal{F}}(R)$, mediante dicha filtración haciendo:

$$G_i := F_i/F_{i-1} \text{ para cada } i \geq 0, \quad \text{y construimos } gr^{\mathcal{F}}(R) := \oplus_{i\geq 0} G_i.$$

Definición 1.25. *Dada una filtración $\mathcal{F} = \{F_i \mid i \geq 0\}$ de A, el* ***anillo graduado asociado*** *(resp. álgera graduada asociada) al anillo filtrado (resp. álgebra filtrada) A viene definido por*

$$gr^{\mathcal{F}}(A) = \bigoplus_{i \geq 0} G_i \quad \text{donde } G_i = F_i / F_{i-1} \text{ y } F_{-1} := 0,$$

con el producto dado por el producto de clases $(a_i + F_{i-1}) \cdot (a_j + F_{j-1}) = a_i a_j + F_{i+j-1}$.

Ejemplos: Consideramos el espacio vectorial en $K[x_1, ..., x_n]$ de los elementos que tienen grado total (1.10) a lo sumo k, es decir:

$$F_k := \{P \in K[x_1, ..., x_n] \mid \deg(P) \leq k\}.$$

Entonces $F_k = \{0\}$ para $k < 0$ ya que $\deg(0) = -\infty$ por convenio y 0 es el único polinomio que tiene grado total negativo. Se puede probar fácilmente que $\mathcal{F} = \{F_k \mid k \geq 0\}$ verifica las propiedades de filtración sobre $K[x_1, ..., x_n]$, la cual se denomina **filtración del grado total**.

Esta filtración se puede ver también en el álgebra de Weyl y dota de interesantes propiedades a su anillo graduado. Es decir, tomando A_n el álgebra de Weyl en las n variables $x_1, ..., x_n$, podemos considerar la llamada filtración de Bernstein $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, donde B_k se define como el conjunto de todos los operadores de A_n de grado total menor o igual a k. Y obtener, mediante dicha filtración, su anillo graduado correspondiente, $S_n = gr^{\mathcal{B}}(A_n)$, del cual se puede probar que es isomorfo al anillo de polinomios en $2n$ variables, resultado que dota de grandes propiedades a dicho graduado [13]. En particular, se tiene que $B_0 = K$ y que una base como K-espacio vectorial de B_1 viene dada por $\{1, x_1, ..., x_n, \partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n}\}$. Es más, una base de B_k consta de un número de elementos determinado por el número de soluciones no negativas de la ecuación $\alpha_1 + ... + \alpha_n + \beta_1 + ... + \beta_n \leq k$. Este número se obtiene fácilmente por combinatoria y es $\binom{2n+k}{k}$. Número del cual se conoce que tiene una gran importancia en el concepto de dimensión de un A_n-módulo [13].

Teorema 1.3. *[26] Sea A un anillo o álgebra filtrado respecto de una filtración $\mathcal{F}$, y $G = gr^{\mathcal{F}}(A)$ su anillo graduado. Entonces*

(1) Si $gr^F(A)$ es Noetheriano a la izquierda (resp. derecha), entonces A es Noetheriano a la izquierda (resp. derecha).

(2) Si $gr^F(A)$ no tiene divisores de cero, entonces A tampoco tiene divisores de cero.

Como mencionábamos en el ejemplo anterior, como $gr^{\mathcal{B}}(A_n) \cong K[x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n]$, se verifican las condiciones del resultado anterior para el álgebra de Weyl.

1.4.1 Filtraciones asociadas a vectores de peso

Muchos algoritmos dentro de anillos de operadores diferenciales utilizan los denominados vectores de peso para construir un orden de eliminación apropiado, ya que al contrario que ocurre en el caso conmutativo, (por ejemplo, el orden lexicográfico siempre es de eliminación), en el caso no conmutativo puede ocurrir que no exista un orden monomial de eliminación admisible.

Definición 1.26. • *Un **vector de pesos** es un vector de componentes enteras no negativas $w = (w_1, ..., w_n)$. Sobre el álgebra de Weyl usaremos la notación $(u, v) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ para referirnos a que las variables $x_1, ..., x_n$ tienen el vector de pesos u y las variables $\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n}$ tienen los de v*

• *Sea A una G-álgebra y w un vector de pesos. Diremos que $\prec_w$ es un **orden graduado de pesos** sobre A, si hay un vector de pesos w y algún orden monomial $\prec$ sobre A tal que*

$$\alpha \prec_w \beta \iff \sum_{i=1}^{n} w_i a_i \prec \sum_{i=1}^{n} w_i b_i \text{ ó, si } \sum_{i=1}^{n} w_i a_i = \sum_{i=1}^{n} w_i b_i, \text{ entonces } \alpha \prec \beta.$$

Donde $\alpha = (a_1, ..., a_n)$ y $\beta = (b_1, ..., b_n)$.

Para un monomio x^α sobre la base de monomios $\mathcal{M}(x_1, ..., x_n)$ de una G-álgebra A, definimos una **función graduada de pesos** sobre A respecto de un vector de pesos w, como una aplicación:

$$\deg_w(x^\alpha) := w_1\alpha_1 + \cdots w_n\alpha_n.$$

Extendemos esta definición para cualquier operador $P \in A$, como $\deg_w(P) = \deg_w(\mathrm{lm}(P))$, y pondremos que $\deg_w(x^\alpha) = 0 \iff \alpha = \overline{0}$.

Lema 1.6. $\deg_w(PQ) = \deg_w(P) + \deg_w(Q)$.

Demostración. Sobre los monomios líderes tendríamos

$$\deg(x^\alpha x^\beta) = \deg(x^{\alpha+\beta}) = \sum_{i=1}^{n} w_i(\alpha_i + \beta_i) = \deg_w(x^\alpha) + \deg_w(x^\beta)$$

Luego usando que $\mathrm{lm}(PQ) = \mathrm{lm}(P)\mathrm{lm}(Q)$, tenemos que

$$\deg_w(PQ) = \deg_w(\mathrm{lm}(\mathrm{lm}(P)\mathrm{lm}(Q))) = \deg_w(\mathrm{lm}(Q)\mathrm{lm}(Q)) = \deg_w(P) + \deg_w(Q).$$

∎

Ejemplo: Tomando un vector de pesos (u, v) para el álgebra de Weyl, podemos definir el conjunto $V_i := \{P \in A_n \mid \deg_{(u,v)}(P) \leq m\}$ de todos los operadores de A_n cuyo grado total con respecto al vector de pesos (u, v) sea a lo sumo i. Entonces $V := \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ es una filtración sobre A_n, denominada la V-filtración con respecto del vector de pesos (u, v).

Este ejemplo anterior se puede generalizar un poco más a una G-álgebra cualquiera. Sea A una G-álgebra cualquiera, sea w un vector de pesos sobre las variables de A y sea F_k el K-espacio vectorial generado por $\{m \in \mathcal{M}(A) \mid \deg_w(m) \leq n\}$. De esta forma, $F_0 = K$,

$$F_i \subseteq F_j \subseteq A, \text{ para todo } i \leq j \quad \text{y } A = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i.$$

Luego usando el lema 1.6, tenemos que $F_i \cdot F_j \subseteq F_{i+j}$ para todo $0 \leq i < j$. Como sabemos, $G_i = F_i/F_{i-1}$ es el conjunto de todos los elementos homogeneizados de grado total ponderado igual a i en A, con $G_0 = F_0 = K$. Tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.7. Supongamos que tenemos un G-álgebra A tal que para cada $i < j$ se tiene que $\deg_w(d_{ij}) < \deg_w(x_i x_j) = w_i + w_j$. Denotemos por $\overline{x}$ a la clase de x_i cociente F_{i-1}. Es decir, $\overline{x}_i = x_i + F_{i-1}$. Entonces

$$gr^{\deg_w}(A) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} G_i = K\langle \overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n \mid \overline{x}_j \overline{x}_i = c_{ij} \overline{x}_i \overline{x}_j \text{ para } i < j\}$$

Es decir, en este caso $gr^{\deg_w}(A)$ es isomorfo a un álgebra cuasi-homogénea en n variables. Luego usando el teorema (Jacobson) 1.3, tenemos que A es un dominio Noetheriano.

La demostración de este resultado se tiene directamente de la hipótesis $\deg_w(d_{ij}) < \deg_w(x_i x_j)$ ya que

$$\overline{x}_j\overline{x}_i = (x_j + F_{j-1})(x_i + F_{i-1}) = (c_{ij}x_ix_j + d_{ij}) + F_{i+j-1} = c_{ij}\overline{x}_i\overline{x}_j \text{ , para } 1 \le i < j \le n$$

En particular, volviendo al caso del álgebra de Weyl A_n, la filtración de Bernstein $B_k = \{m \in \mathcal{M}(A_n) \mid \deg_{(1,\dots,1)}(m) \le k\}$. Donde $\deg_{(1,\dots,1)}(m)$ denota también al grado total de un operador que definimos anteriormente. Entonces, como el álgebra de Weyl es una G-álgebra donde los $c_{ij} \in \{0,1\}$ para todo $i,j = 1,\dots,2n$, entonces, por el resultado anterior, se verifica que $gr^{\deg_{(1,\dots,1)}}(A_n) = gr^{\mathcal{B}}(A_n) \cong K[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n]$ como ya mencionábamos anteriormente.

1.4.2 Dimensión de Gel'fand-Kirillov

En teoría de D-módulos y en particular en el álgebra de Weyl, un concepto muy importante es el de la dimensión de un A_n-módulo. Gracias a este concepto se puede definir la propiedad de holonomicidad de un A_n-módulo, que tiene que ver con que dicha dimensión sea "la menor posible".

La dimensión de un A_n-módulo M, usualmente se define como el grado del polinomio de Hilbert de M. Se conoce que la dimensión de Gel'Fand-Kirillov coincide con dicha definición de dimensión de un A_n-módulo y, por tanto, sirve para probar la famosa desigualdad de Bernstein, la cual establece que la dimensión de un A_n-módulo es como mínimo n. Esto permite dar la definición de un A_n-módulo holónomo, como comentábamos antes, por tener dimensión mínima.

Definición 1.27. *Sea A un anillo filtrado con una filtración $\mathcal{F} = \{F_i \mid i \ge 0\}$. Una **filtración** de un A-módulo (a la izquierda) M, es una familia de conjuntos $\{M_i \mid i \ge 0\}$ tal que*

(1) $M_i \subseteq M_j$ para todo $i < j$,
(2) $F_iM_j \subseteq M_{i+j}$ para todo $i, j \ge 0$, y
(3) $M = \cup_{i\ge 0} M_i$.

*Un modulo con una filtración se dirá que es un **módulo filtrado**. Al igual que en la definción de filtración sobre un anillo, es usual tomar $i \in \mathbb{Z}$ e imponer que $M_i = \emptyset$ para $i < 0$.*

De la misma forma que hemos hecho para un anillo con una filtración, se puede definir el módulo graduado asociado al módulo filtrado M respecto de la filtración $\mathcal{F} = \{M_i \mid i \ge 0\}$, como $gr^{\mathcal{F}}(M) = \bigoplus_{i\ge 0} M_i/M_{i-1}$.

Definición 1.28. *Sea A una K-álgebra con una filtración $A' = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ y M un A-módulo a la izquierda con una filtración $M' = \{M_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.*

Diremos que A' es una filtración ***estándar*** *si $A_i = A_1^i$ para todo i y que es una filtración de* ***dimensión finita*** *si $A_0 = K$ y $\dim_K(A_i) < \infty$ para todo i.*
De la misma forma, diremos que M' es ***estándar*** *si $M_i = A_i M_0$ para todo i, y que es de* ***dimensión finita*** *si $\dim_K(M_i) < \infty$ para todo i.*

Ejemplo: Por ejemplo, la filtración de Bernstein sobre el álgebra de Weyl es una filtración estándar y de dimensión finita. Pasa lo mismo con la filtración del grado total que vimos anteriormente, sobre $K[x_1, ..., x_n]$. En la cual se puede hacer algo similar a lo que se hizo en el álgebra de Weyl.
Consideramos $V^i := \{P \in K[x_1, ..., x_n] \mid \deg_{(1,...,1)}(P) = i\}$ y pongamos $V := V^1$. Claramente, $F := \{F_i \mid i \geq 0\}$ es una filtración estándar, donde $F_0 := V^0 = K$ y $F_i := \bigoplus_{k=0}^{i} V^k$ para $i > 0$. Además $\{x_1, ..., x_n\}$ es una base como K-espacio vectorial de V y en general $\{x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \mid i_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n} i_k = i\}$ es una base como K-espacio vectorial de V^i. Por tanto, al igual que vimos anteriormente, $\dim_K(V_i) = \binom{i+n}{n}$ que es igual al número de soluciones no negativas de la ecuación $i_1 + \cdots + i_n = i$.

Observación 1.6. Sea R una K-álgebra asociativa finitamente generada. Entonces existe un K-espacio vectorial de dimensión finita $V \subseteq R$ tal que R está generado por V como K-álgebra. Este V induce una filtración estándar de dimensión finita $\{R_i \mid i \geq 0\}$ sobre R de la forma $R_0 := V^0 := K$ y $R_i := \sum_{j=0}^{i} V^j$.
Si M es un R-módulo (a la izquierda) finitamente generado, entonces existe un subespacio M_0 tal que $M = RM_0$. Entonces M tiene una filtración inducida por la de R de la forma $\{M_i \mid i \geq 0\}$ con $M_i := M_0 R_i$ para cada $i > 0$.

Definición 1.29. *Sea $\{R_i \mid i \geq 0\}$ y $\{M_i \mid i \geq 0\}$ filtraciones sobre R y M como en la observación anterior. Entonces la* ***dimensión de Gel'fand-Kirillov*** *de R se define*

$$GKdim(R) = \limsup_{i\to\infty} log_i(\dim_K(R_i)) = \limsup_{i\to\infty} \frac{\ln(\dim_K(R_i))}{\ln(i)}.$$

Y definimos la ***dimensión de Gel'fand-Kirillov*** *de M por*

$$GKdim(M) = \limsup_{i\to\infty} \; log_i(\dim_K(M_i)) = \limsup_{i\to\infty} \frac{\ln(\dim_K(M_i))}{\ln(i)}.$$

Se puede probar de manera fácil que la dimensión así definida no depende de la elección de la filtración [13].

Teorema 1.4. *Sea A una G-álgebra en n variables. Entonces $GKdim(A) = n$. En particular, $GKdim(A_n) = 2n$ y $GKdim(K[x_1, ..., x_n]) = n$ [1].*

Teorema 1.5. ***(Desigualdad de Bernstein).*** *Sea M un A_n-módulo. Entonces GKdim$(M) \geq n$.*

La demostración de este resultado se puede encontrar en [13]. Con la que directamente podemos definir la holonomicidad de un A_n-módulo. Aunque esta definición se puede generalizar a un A-módulo M sobre un álgebra A.

Definición 1.30. *Sea M un A_n-módulo (a la izquierda), diremos que M es* ***holónomo****, si GKdim$(M) = n$.*
Sea $I \subseteq A_n$ un ideal (a la izquierda), diremos que I es holónomo, si A_n/I es holónomo como A_n-módulo.

• Sea A una G-álgebra en las n variables $x_1, ..., x_n$. Ya hemos visto que entonces A tiene una PBW-base ($\mathcal{M}(x_1, ..., x_n)$) y que, por tanto, cualquier elemento P de A se puede escribir de la forma $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha x^\alpha$. De esta forma podemos considerar el isomorfismo de espacios vectoriales

$$\psi : A \to K[x_1, ..., x_n], \; x^\alpha \mapsto x^\alpha.$$

Por ejemplo, en el álgebra de Weyl, sabemos que un operador diferencial $P \in A_n$ lo podemos escribir de la forma

$$P = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial_x^\beta.$$

Por tanto, dicho isomorfismo, el cual es muy conocido, está definido por $\psi(x_i) = x_i$ y $\psi(\partial_{x_i}) = \xi_i$, donde aquí hemos hecho el cambio de notación a ξ_i para simbolizarlos como variables conmutativas.
En estas condiciones se tiene el siguiente resultado, con el cual se puede resolver el problema de calcular la dimensión de Gel'fand Kirillov en el caso no conmutativo, mediante la dimensión de Krull en el caso conmutativo.

Teorema 1.6. *Sea A una G-álgebra en n variables $x_1, ..., x_n$, $I \subseteq A$ un ideal y $M = A/I$ visto como A-módulo. Consideramos el isomorfismo de espacios vectoriales anterior. Entonces GKdim$(M) = \dim_K(K[x_1, ..., x_n]/\psi(L(I)))$, donde $L(I)$ es el span de monomios líderes de I que definíamos anteriormente [9].*

2 | *b*-función global

Esta sección se va a subdividir en seis partes. En la primera estudiaremos la definición de la b-función global desde un punto de vista algorítmico, usando el ideal de Malgrange y los vectores de peso.

En la segunda parte, demostraremos el resultado de la existencia del polinomio de Bernstein-Sato por medio de resultados conocidos del ideal de Malgrange.

En la tercera parte, veremos que estos resultados, que en un principio se basarán sobre un único polinomio, se pueden extender a un conjunto de polinomios $f_1, \ldots, f_q \in K[x_1, \ldots, x_n]$, dándonos así el concepto de ideales de Bernstein-Sato.

En la cuarta parte, estudiaremos el problema de calcular del ideal anulador s-paramétrico mediante métodos conocidos como el de Oaku-Takayama ó el de Brianςon-Maisonobe. Viendo este último con más detalle gracias a los resultados de Viktor Levandovskyy sobre preimágenes.

En la quinta parte, estudiaremos el problema de la intersección de un ideal con una subálgebra principal de manera teórica y algorítmica, viendo que este problema se traduce en el problema de encontrar el polinomio mínimo de un endomorfismo. También veremos los primeros algoritmos para el cálculo de la b-función global y de los ideales de Bernstein-Sato usando los resultados de los temas anteriores.

En la sexta parte, dejaremos de lado el problema del cálculo de la b-función en su totalidad para centrarnos en un problema mucho menos complejo computacionalmente. Veremos cómo comprobar cuando un número racional es raíz del polinomio de Bernstein-Sato o b-función global y cómo calcular su multiplicidad en caso de ser raíz de manera teórica y algorítmica [22].

2.1 b-función global con respecto a vectores de peso

Definición 2.1. *Sea $0 \neq w \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Para cualquier operador no nulo $P = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta \in A_n$ definimos la* ***forma inicial*** *de P con respecto al vector de pesos $(-w, w)$ como:*

$$in_{(-w,w)}(P) := \sum_{\alpha,\beta\,:\,-w\alpha+w\beta=\deg_{(-w,w)}(P)} c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta.$$

Esta definición se extiende de forma natural a un conjunto de operadores (resp. a un ideal generado por los operadores) $Q = \{P_1, \dots, P_l\} \subseteq A_n$ y se denomina la ***forma inicial*** *del conjunto Q con respecto a $(-w, w)$ (resp. la forma normal del ideal generado por el conjunto de operadores Q con respecto a $(-w, w)$).*

$$in_{(-w,w)}(Q) = \{in_{(-w,w)}(P_i) \mid i = 1, \dots, l\}.$$

Definición 2.2. *Sea $0 \neq w \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ e $I \subseteq A_n$ un ideal. Consideremos $s := \sum_{i=1}^n w_i x_i \partial_i$. Definimos la b-función global asociada al ideal I con respecto al vector de pesos w por ser el generador mónico de la intersección $\langle b_{I,w}(s)\rangle := in_{(-w,w)}(I) \cap K[s]$.*

Teorema 2.1. *La b-función global asociada a un ideal holónomo $I \subseteq A_n$ con respecto a un vector de pesos $w \neq 0$ cualquiera es no nula.*

Observación 2.1. Antes de pasar a la prueba de este resultado, vamos a estudiar cómo calcular de manera algorítmica la b-función global de un ideal I con respecto del vector de pesos w.
Siguiendo su definición, el cálculo se puede realizar en dos pasos:

1. Calcular el ideal inicial I' de I con respecto a w.
2. Calcular la intersección de I' con el subálgebra $K[s]$.

Veamos primero el cálculo del ideal inicial asociado a un ideal cualquiera I. Por otro lado, veremos también cómo calcular la intersección de un ideal a la izquierda con un subálgebra generada por un elemento s en la sección 2.5.

Estudiaremos la prueba del resultado 2.1 en la sección 2.5, cuando hablemos del problema de la intersección.

2.1.1 Cálculo del ideal inicial

Para el cálculo del ideal inicial, el método de la homogeneización por pesos es un método muy efectivo. Una referencia de resultados sobre homogeneización en operadores diferenciales es [12].

Sean $\mu, \nu \in \mathbb{R}^n_{>0}$. El K-álgebra asociativa $(A_n)^{(h)}_{(\mu,\nu)}$ es un G-álgebra en las variables $x_1, \dots, x_n, \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}, h$ cuyas relaciones son conmutativas salvo para $\partial_{x_j} x_i = x_i \partial_{x_j} + \delta_{ij} h^{\mu_i+\nu_j}$. Es decir, tenemos la G-álgebra:

$$(A_n)^{(h)}_{(\mu,\nu)} := K\langle x_1, \dots, x_n, \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}, h \mid \{\partial_{x_j} x_i = x_i \partial_{x_j} + \delta_{ij} h^{\mu_i+\nu_j}\}\rangle$$

la cual se llama el n-ésimo álgebra de Weyl **homogeneizado** con respecto del vector de pesos $(\mu, \nu, 1)$, que denotaremos simplemente (μ, ν). Es decir, las variables x_i y ∂_{x_i} toman los pesos μ_i y ν_i respectivamente, para $i = 1, \dots, n$, en cambio h toma el peso 1. Notar que, a diferencia que definimos sobre el álgebra de Weyl ($(u, v) \in \mathbb{R}^{2n}$), ahora tomamos pesos de homogeneización $\mu, \nu \in \mathbb{R}^n_{>0}$. Además, notar que la relación $\partial_{x_i} x_i = x_i \partial_{x_i} + h^{\mu_i+\nu_i}$ en $(A_n)^{(h)}_{(\mu,\nu)}$ es homogénea de grado $\mu_i+\nu_i$, el cual es estrictamente positivo, mientras que la relación $\partial_{x_i} x_i = x_i \partial_{x_i} + 1$ en A_n es homogénea de grado cero.
Una vez definida el álgebra homogeneizada, estudiemos la homogeneización de los elementos y los órdenes homogeneizados sobre estos.

Definición 2.3. *Para un operador $P = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial_x^\beta \in A_n$ definimos la **homogeneización con respecto a** μ, ν de P por:*

$$H_{(\mu,\nu)}(P) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} h^{\deg_{(\mu,\nu)}(P) - (\mu\alpha+\nu\beta)} x^\alpha \partial_x^\beta \in (A_n)^{(h)}_{(\mu,\nu)}.$$

Esta definición se extiende de forma natural a un conjunto de operadores y por tanto, a un ideal generado por un conjunto finito de operadores. Aquí $\deg_{(\mu,\nu)}(P)$ denota el grado total de P respecto a los pesos μ, ν para x, ∂ y de peso 1 para h (1.10).

Definición 2.4. *Sea $\prec$ un orden monomial en A_n. Definimos el **orden homogeneizado** asociado a $\prec$ en $(A_n)^{(h)}_{(\mu,\nu)}$, denotado por $\prec^{(h)}$; tomando $h \prec^{(h)} x_i$, $h \prec^{(h)} \partial_{x_i}$ para todo $i = 1, \dots, n$, y*

$$\begin{array}{lll} P \prec^{(h)} Q & si & \deg_{(\mu,\nu)}(P) < \deg_{(\mu,\nu)}(Q) \\ & ó & \deg_{(\mu,\nu)}(P) = \deg_{(\mu,\nu)}(Q) \text{ y } P_{|_{h=1}} \prec Q_{|_{h=1}}. \end{array}$$

Teorema 2.2. *Sea F un subconjunto finito de A_n y $\prec$ un orden monomial. Si $G^{(h)}$ es una base de Gröbner de $\langle H_{(\mu,\nu)}(F)\rangle$ con respecto a $\prec^{(h)}$, entonces $G^{(h)}_{|_{h=1}}$ es una base de Gröbner de $\langle F\rangle$ con respecto a $\prec$.*

Demostración. Para cualquier $f \in \langle F\rangle$ con $\mathrm{lm}_{\prec(h)}(H_{(\mu,\nu)}(f)) = x^\alpha \partial^\beta h^\lambda$, existe $g^{(h)} \in G^{(h)}$ con $\mathrm{lm}_{\prec(h)}(g^{(h)} = x^\gamma \partial^\delta h^k$ que satisface $\mathrm{lm}_{\prec(h)}(g^{(h)}) \mid \mathrm{lm}_{\prec(h)}(H_{(\mu,\nu)}(f))$, debido a que $G^{(h)}$ es base de Gröbner (1.17). Como $H_{(\mu,\nu)}(f)$ es (μ,ν)-homogéneo, $\deg_{(\mu,\nu)}(m) = \mu\alpha + \nu\beta + \lambda$ para todos los monomios m de $H_{(\mu,\nu)}(f)$, por lo que, de acuerdo con la definición de $\prec^{(h)}$, se tiene que $m_{|_{h=1}} \prec x^\alpha\partial^\beta$. Entonces

$$\mathrm{lm}(g^{(h)})_{|_{h=1}} = x^\gamma\partial^\delta \mid x^\alpha\partial^\beta = \mathrm{lm}(H_{(\mu,\nu)}(f))_{|_{h=1}} = \mathrm{lm}(f),$$

Lo que termina la prueba. ∎

Teorema 2.3. *Sea I un ideal en A_n, $\prec$ un orden monomial sobre A_n y $\prec_{(\mu,\nu)}$ el orden monomial definido por*

$$\begin{aligned} x^\alpha\partial^\beta \prec_{(\mu,\nu)} x^\gamma\partial^\delta \quad & \textit{si} \quad \mu\alpha+\nu\beta < \mu\gamma+\nu\delta \\ \textit{ó} \quad & \mu\alpha+\nu\beta = \mu\gamma+\nu\delta \quad \textit{y} \quad x^\alpha\partial^\beta \prec x^\gamma\partial^\delta. \end{aligned}$$

Si $G^{(h)}$ es una base de Gröbner de $H_{(\mu,\nu)}(I)$ con respecto de $\prec^{(h)}_{(\mu,\nu)}$, entonces $in_{(\mu,\nu)}(G^{(h)}_{|_{h=1}})$ es una base de Gröbner de $in_{(\mu,\nu)}(I)$ con respecto a $\prec$.

Demostración. Los conceptos de forma inicial con respecto a (u,v) y de orden homogeneizado son compatibles en el siguiente sentido: Sea $P \in (A_n)^{(h)}_{(\mu,\nu)}$, (μ,ν)–homogéneo. Entonces por definición de los órdenes anteriores:

$$\mathrm{lm}_{\prec^{(h)}_{(u,v)}}(P) = \mathrm{lm}_{\prec_{(u,v)}}(P_{|_{h=1}}) = \mathrm{lm}_{\prec}(\mathrm{in}_{(u,v)}(P_{|_{h=1}}))$$

Sea $f' \in \mathrm{in}_{(u,v)}(I)$, (u,v)–homogéneo. Entonces existe algún $f \in I$ tal que $f' = \mathrm{in}_{(u,v)}(f)$. Como $G^{(h)}$ es una base de Gröbner con respecto al orden $\prec^{(h)}_{(u,v)}$, también existe algún $g \in G^{(h)}$, (μ,ν)–homogéneo satisfaciendo

$$\mathrm{lm}_{\prec}(\mathrm{in}_{(u,v)}(g)) = \mathrm{lm}_{\prec^{(h)}_{(u,v)}}(g) \mid \mathrm{lm}_{\prec^{(h)}_{(u,v)}}(H_{(\mu,\nu)}(f)) = \mathrm{lm}_{\prec}(\mathrm{in}_{(u,v)}(f)) = \mathrm{lm}_{\prec}(f'),$$

de donde se concluye la prueba. ∎

Gracias a estos resultados y por la definición de ideal inicial, se puede construir un algoritmo para el cálculo del ideal inicial de un ideal a la izquierda I con respecto de un vector de pesos $w \neq 0$.

Algoritmo 2.1. `InitialIdeal`$(I, \prec, u, v, \mu, \nu)$
Input: $I \subset A_n$, $\prec$ un orden global sobre A_n, $0 \neq (u, v) \in \mathbb{R}^{2n}$ un vector de pesos, $\mu, \nu \in \mathbb{R}^n_{>0}$ vector de pesos para homogeneización.
Output: G, una base de Gröbner de $\text{in}_{(u,v)}(I)$ con respecto a $\prec$.
BEGIN
$\prec^{(h)}_{(u,v)} \leftarrow$ el orden monomial del teorema 2.3
$G^{(h)} \leftarrow$ Una base de Gröbner de $H_{(\mu,\nu)}(I)$ con respecto a $\prec^{(h)}_{(u,v)}$
$G \leftarrow G^{(h)}_{|_{h=1}}$
return $\text{in}_{(u,v)}(G)$
END

2.1.2 b-función global respecto al ideal de Malgrange

Definición 2.5. *Sea $f \in K[x_1, ..., x_n]$, el ideal*

$$I_f := \langle t - f, \partial_1 + \tfrac{\partial f}{\partial_{x_1}} \partial_t, ..., \partial_n + \tfrac{\partial f}{\partial_{x_n}} \partial_t \rangle \subseteq A_n \langle t, \partial_t \rangle$$

En el $(n+1)$-ésimo álgebra de Weyl $A_{n+1} := A_n\langle t, \partial_t \rangle$, se denomina el ***ideal de Malgrange*** *asociado a f.*

Definición 2.6. *Sea $f \in K[x_1, ..., x_n]$, I_f el ideal de Malgrange de f y $w = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que el peso correspondiente a ∂_t sea 1 y a t sea -1. Entonces*

$$b_f(s) := (-1)^{\deg(b_{I_f,w})} b_{I_f,w}(-s-1)$$

Se denomina la b-función global asociado al polinomio f.

En realidad, la b-función global o el polinomio de Bernstein-Sato asociado a un polinomio f no nulo, se suele definir mediante la existencia de la ecuación funcional de Bernstein. Es decir, se prueba que para cualquier polnomio no nulo f, existe un polinomio $b(s) \in K[s]$ y un operador $P(s) \in A_n[s] = A_n \otimes_K K[s]$, satisfaciendo

$$P(s) f^{s+1} = b(s) f^s$$

y se define el polinomio de Bernstein-Sato o b-función global, como el generador mónico del ideal formado por los polinomios $b(s)$ que satisfacen la ecuación anterior para algún $P(s) \in A_n[s]$.

La prueba del resultado de la existencia de dicho polinomio sobre el anillo de polinomios, se prueba principalmente mediante resultados de holonomicidad [13].

Probaremos en la siguiente sección 2.4, que la b-función global asociada a f de la definición 2.6 coincide con la definición del generador mónico del ideal formado por los polinomios $b(s)$ que satisfacen la ecuación funcional de Bernstein-Sato. Es decir, se puede probar que ambas definiciones son equivalentes.

2.2 El ideal de Malgrange y existencia del polinomio de Bernstein-Sato

Sea $f \in K[x] := K[x_1, ..., x_n]$ y sea s una nueva variable. Consideramos el $(n+1)$-ésima álgebra de Weyl $A_{n+1} = A_n\langle t, \partial_t\rangle$ con los nuevos generadores t y ∂_t. Consideramos el anillo conmutativo $K[x,s]_f$ y el $K[x,s]_f$-módulo libre de rango 1, $K[x,s]_f f^s$ generado por el símbolo f^s. El cual tiene estructura de $A_n\langle t, \partial_t\rangle$-módulo con las operaciones:

$$\begin{gathered} x_i \cdot p(x,s)f^s := x_i p(x,s)f^s, \text{ para } 1 \leq i \leq n. \\ \partial_{x_i} \cdot p(x,s)f^s = \frac{\partial p}{\partial x_i} f^s + (s)p(x,s)\frac{\partial f}{\partial x_i} f^{s+1}, \text{ para } 1 \leq i \leq n. \\ t \cdot p(x,s)f^s = p(x,s+1)f^{s+1}. \\ \partial_t \cdot p(x,s) = -sp(x,s-1)f^{s-1}. \end{gathered}$$

Para $p \in K[x,s]$ y $f^{s+j} = f^j f^s$ para $j \in \mathbb{Z}$.
Es decir, x_i actúa vía multiplicación, ∂_{x_i} mediante la derivada parcial, t actúa por $s \mapsto s+1$ y ∂_t es el producto por $-s$ y el cambio $s \mapsto s-1$.

Como mencionábamos al comienzo del capítulo 2, en este tema vamos a demostrar el siguiente resultado. Aunque antes de pasar a la prueba, vamos a estudiar ciertas propiedades del ideal de Malgrange, las cuales son fundamentales para que la definición que hemos dado en el tema anterior cobre sentido.

Teorema 2.4. *El polinomio de Bernstein-Sato $b_f(s)$ (o b-función global) asociado a f está unívocamente determinado por el polinomio de menor grado en $K[s]$ que satisface la igualdad*

$$P(s) \cdot f^{s+1} = b(s) f^s$$

Para algún operador P en el G-álgebra $A_n[s] := A_n \otimes K[s]$.

El conjunto de todos los polinomios $b(s) \in K[s]$ que verifican la ecuación anterior, constituyen un ideal en $K[s]$. Como $K[s]$ es un dominio de ideales principales, entonces dicho ideal estará representado por su generador mónico.
Como hemos mencionado, antes de pasar a la prueba del teorema anterior, veamos algunos resultados en relación al ideal de Malgrange, el cual es una de las claves para la construcción de la b-función global.

Observación 2.2. Notar que la ecuación funcional del resultado anterior es equivalente a encontrar el polinomio mónico no nulo que verifica

$$(b_f(s) - P(s)f) \cdot f^s = 0.$$

Es decir, $b_f(s) \in \mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s) + \langle f \rangle \subseteq A_n[s] = A_n \otimes_K K[s]$. Donde

$$\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s) := \{P(s) \in A_n[s] | P(s) \cdot f^s = 0\}$$

Se denomina el **ideal anulador s-paramétrico** de f^s. Donde la operación $P(s) \cdot f^s$ es la acción que ya hemos definido al comienzo de este tema para las variables x y ∂_x, con la nueva acción de s que actúa simplemente por el producto conmutativo de s.

Definición 2.7. *Se define el* ***Ideal de Malgrange*** *asociado a un polinomio $f \in K[x]$ como el ideal generado por los elementos*

$$t - f \quad y \quad \partial_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial_{x_i}} \partial_t, \text{ para } i = 1, \dots, n$$

en el $(n+1)$-ésimo álgebra de Weyl $A_n\langle t, \partial_t \rangle$.

Definición 2.8. *El ideal anulador de f^s en $A_n\langle t, \partial_t \rangle$ se define por el conjunto*

$$Ann_{A_n\langle t,\partial_t \rangle} := \{P \in A_n\langle t, \partial_t \rangle \mid P \cdot f^s = 0\}$$

Donde el producto $P \cdot f^s$ está determinado por los productos definidos al comienzo de la sección.

Observación 2.3. Es fácil comprobar que dicho conjunto es un ideal a la izquierda en $A_n\langle t, \partial_t \rangle$, ya que $f^s \in K[x,s]f^s$ y $K[x,s]f^s$ es un $A_n\langle t, \partial_t \rangle$-módulo con las operaciones ya mencionadas.

Nuestro objetivo ahora es probar que el ideal de Malgrange I_f coincide con $\mathrm{Ann}_{A_n\langle t,\partial_t\rangle}(f^s)$ mediante propiedades importantes que verifica el ideal de Malgrange. Una vez hecho esto, veremos que también hay una relación fuerte entre el ideal anulador s-paramétrico y el ideal de Malgrange, la cual se debe principalmente a cierta aplicación $(t\partial_t \mapsto -s-1)$ que veremos más adelante. Con todo ello podremos pasar a la prueba del resultado 2.4.

Lema 2.1. Sea I_f el ideal de Malgrange asociado a un polinomio $f \in K[x_1, ..., x_n]$. Es decir,

$$I_f = \langle t - f, \partial_{x_1} + \frac{\partial f}{\partial_{x_1}}\partial_t, ..., \partial_{x_n} + \frac{\partial f}{\partial_{x_n}}\partial_t \rangle.$$

Escojamos un orden monomial $\prec$ tal que, $\mathrm{lm}(t-f) = t$ y $\mathrm{lm}(\partial_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial_{x_i}}\partial_t) = \partial_{x_i}$. Entonces los generadores del ideal de Malgrange forman, por si mismos, una base de Gröbner del ideal I_f respecto del orden monomial $\prec$.

Demostración. Para probar el resultado, vamos a usar el criterio de Buchberger (G es base de Gröbner de I si y sólo si $\mathrm{NF}(f, G) = 0$ para todo $f \in I$, 1.2). Para ello, usamos el lema 1.4:

$$Spoly(t - f, \partial_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial_{x_i}}\partial_t) \text{ se reduce por } I_f \text{ a } [t - f, \partial_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial_{x_i}}\partial_t], \text{ y}$$
$$Spoly(\partial_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial_{x_i}}\partial_t, \partial_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial_{x_i}}\partial_t) \text{ se reduce por } I_f \text{ a } [\partial_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial_{x_i}}\partial_t, \partial_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial_{x_i}}\partial_t].$$

Donde

$$[t-f, \partial_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial_{x_i}}\partial_t] = t\frac{\partial f}{\partial_{x_i}}\partial_t - \frac{\partial f}{\partial_{x_i}}\partial_t t - f\partial_{x_i} + \partial_{x_i} f = [t, \partial_t]\frac{\partial f}{\partial_{x_i}} + [\partial_{x_i}, f] = \frac{\partial f}{\partial_{x_i}} + [\partial_{x_i}, f] = 0$$
$$[\partial_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial_{x_i}}\partial_t, \partial_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial_{x_i}}\partial_t] = \frac{\partial f}{\partial_{x_i}}\partial_t\partial_{x_j} - \partial_{x_j}\frac{\partial f}{\partial_{x_i}}\partial_t + \partial_{x_i}\frac{\partial f}{\partial_{x_j}}\partial_t - \frac{\partial f}{\partial_{x_j}}\partial_t\partial_{x_i} =$$
$$-[\partial_{x_j}, \frac{\partial f}{\partial_{x_i}}]\partial_t + [\partial_{x_i}, \frac{\partial f}{\partial_{x_i}}]\partial_t = 0.$$

Las últimas igualdades a 0, se deben a que en el álgebra de Weyl, si $P \in A_n$ entonces $[\partial_{x_i}, P] = \frac{\partial P}{\partial_{x_i}}$, (ver Corolario 1.25, [1]). Entonces, por el criterio de Buchberger, que mencionamos antes, se concluye el resultado. ∎

Teorema 2.5. *El ideal de Malgrange I_f es holónomo en $A_n\langle t, \partial_t\rangle$.*

Demostración. Usando el lema anterior, tomamos el orden monomial anterior para que se verifique que los generadores de I_f forman una base de Gröbner. De esta forma, tenemos que $L(I_f) = \langle t, \partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n}\rangle$ con respecto a dicho orden monomial.
Por otro lado, para el cálculo de la dimensión de Gel'fand-Kirillov de I_f usamos el teorema 1.6:

$$\text{GKdim}(I_f) = \text{GKdim}(A_n\langle t, \partial_t\rangle / I_f) =$$
$$\dim_K(K[x_1, ..., x_n, \partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n}, t, \partial_t] / \langle t, \partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n}\rangle) = \dim_K(K[x_1, ..., x_n, \partial_t]) = n + 1.$$

Por tanto I_f es holónomo en $A_n\langle t, \partial_t\rangle$. ∎

Corolario 2.1. El ideal de Malgrange I_f es un ideal propio.

Demostración. Sabemos que A_n y $A_{n+1} = A_n\langle t, \partial_t\rangle$ son ambas G-álgebras, luego tenemos que $\text{GKdim}(A_n) = 2n$ y que $2(n+1) = \text{GKdim}(A_n\langle t, \partial_t\rangle)$ (1.4). Por otro lado, usando el resultado anterior (2.5), tenemos que

$$\text{GKdim}(I_f) = n + 1 < 2(n+1) = \text{GKdim}(A_n\langle t, \partial_t\rangle).$$

De donde se concluye que sea un ideal propio. ∎

Teorema 2.6. *El ideal de Malgrange I_f es un ideal maximal (a la izquierda).*

Demostración. Tomando el orden monomial $\prec$ que tomábamos en el lema 2.1, teníamos que $L(I_f) = \langle t, \partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n}\rangle$. Supongamos que I_f no es un ideal maximal. Entonces existe un ideal J, no trivial, que contiene a I_f. Sea G una base de Gröbner del ideal J respecto del orden monomial $\prec$ tal que contenga entre sus generadores a los elementos de I_f. Es decir, $G = \langle I_f\rangle \cup P$, donde $P = \{p_1, ..., p_m\}$ es un conjunto de elementos nuevos, $m \geq 1$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\text{lm}(p_i) \in \langle x, \partial_t\rangle$. Entonces, usando el teorema 1.6 tenemos que

$$\text{GKdim}(A_n\langle t, \partial_t\rangle / J) = \dim_K(K[x, \partial_x, t, \partial_t] / \psi(L(G))) = \dim_K(K[x, \partial_t] / L(P)) <$$
$$\dim_K(K[x, \partial_t]) = n + 1.$$

Que contradice la desigualdad de Bernstein (1.5). ∎

Lema 2.2. El ideal de Malgrange I_f coincide con $\mathrm{Ann}_{A_n\langle t,\partial_t\rangle}(f^s)$.

Demostración. En primer lugar, tenemos que

$$(t-f)\cdot f^s = f^{s+1} - f f^s = 0 \text{ y}$$
$$(\partial_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial_{x_i}})\cdot f^s = s\frac{\partial f}{\partial x_i} f^{s-1} - \frac{\partial f}{\partial_{x_i}} s f^{s-1} = 0.$$

Por lo que $I_f \subseteq \mathrm{Ann}_{A_n\langle t,\partial_t\rangle}(f^s)$. Como $1\cdot f^s \neq 0$, $\mathrm{Ann}_{A_n\langle t,\partial_t\rangle}$ es un ideal propio. Por lo que usando que I_f es maximal 2.6, concluimos que debe ser $I_f = \mathrm{Ann}_{A_n\langle t,\partial_t\rangle}(f^s)$. ∎

Teorema 2.7. *El anulador s-paramétrico, $Ann_{A_n[s]}(f^s)$ coincide con $(I_f \cap A_n[t\partial_t])_{|_{t\partial_t=-s-1}}$. Donde I_f denota el ideal de Malgrange de la definición 2.7 y $A_n[t\partial_t]$ es una subálgebra de $A_n\langle t,\partial_t\rangle$.*

Demostración. Consideramos el isomorfismo entre K-álgebras $A_n[s]$ y $A_n[t\partial_t]$ definido por $s \mapsto -t\partial_t - 1$ (transformación de Mellin).
Usando las operaciones que vimos al principio de la sección, tenemos que en el subálgebra $A_n[t\partial_t]$

$$t\partial_t \cdot g(x,s)f^{j+s} = t\cdot(-sg(x,s-1)f^{s+j-1}) = -(s+1)g(x,s)f^{s+j}$$

Por tanto,

$$(-t\partial_t - 1)\cdot g(x,s)f^{s+j} = (s+1)g(x,s)f^{s+j} - g(x,s)f^{s+j} = sg(x,s)f^{s+j}.$$

Luego, la operación en $A_n[t\partial_t]$ es compatible con la definida sobre $A_n[s]$ y aplicando el inverso del isomorfismo anterior de la forma $t\partial_t \mapsto -s-1$, junto con que el ideal de Malgrange I_f coincide con el ideal $\mathrm{Ann}_{A_n\langle t,\partial_t\rangle}(f^s)$, a la siguiente ecuación

$$\mathrm{Ann}_{A_n[t\partial_t]}(f^s) = \mathrm{Ann}_{A_n\langle t,\partial_t\rangle}(f^s) \cap A_n[t\partial_t] = I_f \cap A_n[t\partial_t],$$

concluimos que $\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s) = (I_f \cap A_n[t\partial_t])_{|_{t\partial_t=-s-1}}$ ∎

Por último, antes de pasar con la prueba del teorema 2.4, vamos a estudiar un resultado relacionado con las operaciones dentro del álgebra de Weyl entre sus operadores para hacer más clara la prueba de dicho resultado.

Proposición 2.1. [1] Sea A_n y sea $\theta_i := x_i\partial_{x_i}$ para cualquier $i = 1,\dots,n$. Entonces para cualquier $m \in \mathbb{N}$, tenemos la igualdad

$$x_i^m \partial_{x_i}^m = \prod_{k=0}^{m-1} (\theta_i - k)$$

Demostración. $\boxed{\textbf{Prueba del teorema 2.4:}}$
Siguiendo la observación 2.2, tenemos que la ecuación del enunciado es equivalente a que

$$(b_f(s) - P(s)f) \cdot f^s = 0.$$

Es decir, $b_f(s) - P(s)f \in \mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s)$, para algún operador $P(s) \in A_n[s]$. Ahora bien, si usamos la equivalencia del teorema 2.7, tenemos que

$$b_f(-t\partial_t - 1) - P(-t\partial_t - 1)f \in I_f.$$

Donde la notación $P(-t\partial_t - 1)$ es simplemente $P_{|_{s=-t\partial_t-1}}$. Como además tenemos que $t - f \in I_f$ y, por lo tanto, $-(t - f) \in I_f$, se sigue que

$$b_f(-t\partial_t - 1) - P(-t\partial_t - 1)f + P(-t\partial_t - 1)(-t + f) = b_f(-t\partial_t - 1) - P(-t\partial_t - 1)t \in I_f,$$

lo cual implica, por la definición del ideal inicial, que

$$\mathrm{in}_{(-w,w)}(b_f(-t\partial_t - 1) - P(-t\partial_t - 1)t) \in \mathrm{in}_{(-w,w)}(I_f),$$

para $w = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{N}^{n+1}$. Por tanto, como $\deg_{(-w,w)}((t\partial_t)^k) = -k + k = 0$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, tenemos que

$$0 = \deg_{(-w,w)}(b_f(-t\partial_t - 1)) = \deg_{(-w,w)}(P(-t\partial_t - 1)) > \deg_{(-w,w)}(P(-t\partial_t - 1)t) = -1.$$

Esta última igualdad se tiene de que $\deg_{(-w,w)}(P(-t\partial_t - 1) \cdot t) = \deg_{(-w,w)}(P(-t\partial_t - 1)) + \deg_{(-w,w)}(t) = -1$. Luego concluimos que $b_f(-t\partial_t - 1) \in \mathrm{in}_{(-w,w)}(I_f) \cap K[t\partial_t]$. Es decir, $b_f(s)$ es un múltiplo del polinomio de la b-función asociada a f 2.6.
Por otro lado, si $b_f(s)$ es un múltiplo de la b-función global asociada a f, entonces $b_f(-t\partial_t - 1) \in \mathrm{in}_{(-w,w)}(I_f) \cap K[t\partial_t]$, $w = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{N}^{n+1}$, por definición (2.6). Entonces existe algún $P \in A_n\langle t, \partial_t\rangle$ tal que $b_f(-t\partial_t - 1) + P \in I_f$ e $\mathrm{in}_{(-w,w)}(b_f(-t\partial_t - 1) + P) = b_f(-t\partial_t - 1)$. Ahora bien, como $\deg_{(-w,w)}(b_f(-t\partial_t - 1)) = 0$, esto quiere decir que t divide a cada monomio de P, ya que en caso contrario $\deg_{(-w,w)}(P) \geq$

$\deg_{(-w,w)}(b_f(-t\partial_t - 1))$, lo que contradice que la forma inicial sea la anterior. Dicho de otra forma, cualquier monomio de P que sea divisible por ∂_t^l para algún $l \in \mathbb{N}$, entonces es divisible por t^k para cierto $l+1 \leq k \in \mathbb{N}$. Entonces sacando factor común t, podemos escribir P de la forma

$$P = \Big(\sum_{\alpha,\beta,k,l} c_{\alpha\beta kl} x^\alpha \partial_x^\beta t^k \partial_t^l\Big) t = \Big(\sum_{\alpha,\beta,k,l} c_{\alpha\beta kl} x^\alpha \partial_x^\beta t^{k-l} t^l \partial_t^l\Big) t =_* \\ \Big(\sum_{\alpha,\beta,k,l} c_{\alpha\beta kl} x^\alpha \partial_x^\beta t^{k-l} \Big(\prod_{k=0}^{l-1} (t\partial_t - k)\Big)\Big) t.$$

Donde en $(=_*)$ hemos usado la proposición anterior (prop. 2.1) tomando $\theta_t = t\partial_t$. Por otro lado, como $t - f \in I_f = \mathrm{Ann}_{A_n\langle t,\partial_t\rangle}(f^s)$ (2.2), haciendo este cálculo en $A_n\langle t, \partial_t\rangle / \mathrm{Ann}_{A_n\langle t,\partial_t\rangle(f^s)}$, podemos tomar $t = f$ (como clases de equivalencia). Por tanto se tiene que

$$0 + (\mathrm{Ann}_{A_n\langle t,\partial_t\rangle}(f^s)) = (b_f(-t\partial_t - 1) + P) + (\mathrm{Ann}_{A_n\langle t,\partial_t\rangle}(f^s)) = \\ \Big(b_f(-t\partial_t - 1) + \Big(\sum_{\alpha,\beta,k,l} c_{\alpha\beta kl} x^\alpha \partial_x^\beta f^{k-l} \Big(\prod_{i=0}^{l-1} (t\partial_t - i)\Big)\Big) f\Big) + (\mathrm{Ann}_{A_n\langle t,\partial_t\rangle}(f^s))$$

El representante de la última clase de equivalencia anterior es, en particular, un elemento de $A_n[t\partial_t]$ y $k - l > 0$ en cualquier término no nulo. Aplicando ahora el isomorfismo $t\partial_t \mapsto -s - 1$, tenemos que

$$0 + (\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s)) = \Big(b_f(s) + \Big(\sum_{\alpha,\beta,k,l} c_{\alpha\beta kl} x^\alpha \partial_x^\beta f^{k-l} \Big(\prod_{i=0}^{l-1} (-s - 1 - i)\Big)\Big) f\Big) + \\ (\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s)).$$

Donde aquí hemos usado el teorema 2.7. Tomando entonces

$$P := -\sum_{\alpha,\beta,k,l} c_{\alpha\beta kl} x^\alpha \partial_x^\beta f^{k-l} \Big(\prod_{i=0}^{l-1} (-s - 1 - i)\Big),$$

tenemos que se verifica $b_f(s) - P \cdot f \in \mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s)$. ∎

La razón por la que se sustituye s por $-s-1$ en la definición del polinomio de Bernstein-Sato o b-función global toma más sentido ahora, simplemente es por el isomorfismo $t\partial_t \mapsto -s - 1$ donde, por definición, la s "sería" el $-t\partial_t$.

2.3 Ideales de Bernstein-Sato

En esta sección vamos a generalizar el caso de la b-función global asociada a un único polinomio f, al caso de tomar un número finito de polinomios $f_1, ..., f_q \in K[x_1, ..., x_n]$. Sea entonces $q \geq 1$ entero y las nuevas variables $s := (s_1, ..., s_q)$. Sea $A_n[s]$ el G-álgebra definida por $A_n[s] := A_n \otimes_K K[s_1, ..., s_q]$, que es, básicamente $K\langle s, x, \partial_x : Q'_W \rangle$, donde las relaciones Q'_W vienen definidas por:

$$Q'_W = Q_W \cup \{s_j s_i = s_i s_j, s_i x_l = x_l s_i, s_i \partial_l = \partial_l s_i | 1 \leq i \leq j \leq q, 1 \leq l \leq n\}.$$

Y donde Q_W son las relaciones ya vistas entre las variables del álgebra de Weyl A_n.
Sean $f_1, ..., f_q \in K[x_1, ..., x_n]$ polinomios no nulos. Vamos a denotar $F := f_1 \cdots f_q$ y por $F^s := f_1^{s_1} \cdots f_q^{s_q}$. Al igual que hacíamos en el caso $q = 1$, consideramos el $K[s, x_1, ..., x_n]_F$-módulo, $K[s, x_1, ..., x_n]_F F^s$, libre de rango 1, generado por F^s.
Que tiene estructura de $A_n[s]$-módulo definida de forma natural por:

$$\partial_{x_i} \cdot (gF^s) = \left(\frac{\partial g}{\partial_{x_i}} + g \sum_{j=1}^{q} s_j \frac{\partial f_j}{\partial_{x_i}} f_j^{-1}\right) F^s,$$

para todo $i = 1, ..., n$ y $g \in K[s, x_1, ..., x_n]_F$.

Definición 2.9. *Sean $f_1, ..., f_q \in K[x_1, ..., x_n] \setminus \{0\}$. El ideal generado por los polinomios $b(s) \in K[s]$, para los cuales existe un operador diferencial $P(s) \in A_n[s]$ satisfaciendo la igualdad*

$$b(s)F^s = P(s)FF^s,$$

se denomina el ideal de Bernstein-Sato asociado a $f_1, ..., f_q$. que denotaremos por I_B. Igualmente, se definen los otros ideales de Bernstein-Sato I_{B_j} y I_Σ de la forma

$$I_{B_j} = \{b(s) \in K[s] \mid b(s)F^s \in A_n[s]f_j F^s\}, \textit{ para } 1 \leq j \leq q \textit{ y}$$
$$I_\Sigma = \{b(s) \in K[s] \mid b(s)F^s \in \sum_{k=1}^{q} A_n[s] f_k F^s\}.$$

La prueba de que $I_B \neq 0$ para $q = 1$ es el teorema de la existencia del polinomio de Bernstein-Sato, el cual ya hemos probado y se puede extender de manera sencilla para un $q > 1$. Tendríamos por tanto el siguiente resultado.

Teorema 2.8. *[40] Sean* $f_1, \ldots, f_q \in K[x_1, \ldots, x_n]$*, para* $q > 1$*. Entonces* $I_B \neq 0$*.*

Al igual que en el tema anterior se puede probar dicho resultado con la construcción del ideal de Malgrange asociado a $F = f_1 \cdots f_q$.
Sean las nuevas variables $= (t_1, \ldots, t_q)$ y consideremos $A_n\langle t, \partial_t\rangle$ el $(n+q)$-ésimo álgebra de Weyl.

Definición 2.10. *Definimos, de igual forma que en la sección anterior, el ideal de Malgrange asociado a* F*, que denotaremos por* I_F*, como el ideal generado por los operadores*

$$t_j - f_j, \text{ para } j = 1, \ldots, q \quad y \quad \partial_{x_i} + \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial f_k}{\partial_{x_i}} \partial_{t_k}, \text{ para } i = 1, \ldots, n.$$

Entonces se pueden generalizar los mismos resultados que hemos probado para $q = 1$, y calcular el ideal anulador s-paramétrico de F^s de la forma

$$\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(F^s) = (I_F \cap A_n[t_1\partial_{t_1}, \ldots, t_q\partial_{t_q}])_{|_{t_j\partial_{t_j} = -s_j - 1}}.$$

Como podemos observar, para el cálculo de la b-función y de los ideales de Bernstein-Sato mediante este método, es imprescindible el cálculo del ideal anulador s-paramétrico de f^s (resp. F^s).

2.4 El ideal anulador s-paramétrico

Los dos algoritmos que vamos a estudiar para el cálculo del ideal anulador s-paramétrico asociado a F van a ser, el algoritmo de Oaku y Takayama [32], y el algoritmo de Briançon y Maisonobe [8]. Posterior a estos algoritmos, procederemos a estudiar brevemente la complejidad de los mismos.

2.4.1 Oaku y Takayama

El algoritmo de Oaku y Takayama ([34], [35], [37]) utiliza homogeneización en el álgebra de Weyl (para más detalle ver [12]). Con la notación $t = (t_1, \ldots, t_q)$, $\partial_t = (\partial_{t_1}, \ldots, \partial_{t_q})$ y $A_{n+q} := A_n \otimes_K A_q(K[t_1, \ldots, t_q])$, Consideramos $A_n \otimes K[t_1\partial_{t_1}, \ldots, t_q\partial_{t_q}] =$

$K\langle x, \partial_x\rangle[t_1\partial_{t_1}, ..., t_n\partial_{t_n}] \subset A_{n+q}$. El algoritmo basa todos sus cálculos sobre el álgebra de Weyl. Se toma el ideal de Malgrange que definimos anteriormente como:

$$I'_F = \langle \{t_j - f_j, \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial f_k}{\partial_{x_i}}\partial_{t_k} + \partial_{x_i} \mid i = 1, ..., n, j = 1, ..., k\}\rangle$$

Y se aplican los siguientes pasos:

1) Se calcula $J' = I'_F \cap K[t_1\partial_{t_1}, ..., t_n\partial_{t_n}]\langle x, \partial_x\rangle$.
2) Se toma $J'' = \mathrm{Ann}_{A_n[s]}(F^s)$, donde J'' denota el ideal generado por los generadores de J' después de reemplazar $t_i\partial_{t_i} \mapsto -s_i - 1$.
3) Se calcula $B = (\langle G\rangle \cap \langle f_1, ..., f_q\rangle) \cap K[s]$, donde G es una base de Gröbner de J'' con respecto a un orden de eliminación para $\{x_i\} \cup \{\partial_{x_i}\}$.

Para el cálculo de $I'_F \cap K[t_1\partial_{t_1}, ..., t_q\partial_{t_q}]\langle x, \partial_x\rangle$ se introducen unas nuevas variables conmutativas u_j, v_j para $1 \leq j \leq q$ es decir, se consideran $2n + 4q$ variables en total. Entonces el cálculo de dicha intersección se realiza mediante la eliminación de estas nuevas variables del siguiente ideal sobre $H := A_{n+q} \otimes K[u_1, ..., u_q, v_1, ..., v_q]$.

$$I_{F_{(u,v)}} = \langle \{t_j - u_j f_j, \partial_{x_i} + \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} u_k \partial_{t_k}, 1 - u_j v_j \mid j = 1, ..., q, i = 1, ..., n\}\rangle.$$

De esta forma, si fijamos un j con $1 \leq j \leq q$, tenemos que los generadores del ideal de Malgrange I'_F son homogéneos con respecto de los siguientes pesos:

x_i, ∂_{x_i} $(i = 1, ..., n)$	peso 0,
t_j, ∂_{t_j}	pesos -1,1 respectivamente,
u_j, v_j	pesos -1,1 respectivamente,
$t_k, \partial_{t_k}, u_k, v_k$ $(k \neq j)$	peso 0.

Algoritmo 2.2. [35] `sAnnOT`$(f_1, ..., f_q, \prec_{u,v})$
Input: $f_1, ..., f_q \in K[x_1, ..., x_n]$, $\prec_{u,v}$ un orden monomial de eliminación para las variables $u = (u_1, ..., u_q)$ y $v = (v_1, ..., v_q)$ sobre $A_n[u, v] = A_n \otimes_K K[u_1, ..., u_q, v_1, ..., v_q]$.
Output: Un conjunto generador de $\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s)$.
BEGIN

$I \leftarrow \langle \{t_j - u_j f_j, \partial_{x_i} + \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} u_k \partial_{x_k}, 1 - u_j v_j \mid i = 1, ..., n, j = 1, ..., q\}\rangle$

$G \leftarrow \mathtt{GB}(I, \prec_{u,v})$

$\{P_1, ..., P_l\} \leftarrow G \cap A_{n+q} \qquad (A_{n+q} = A_n\langle t, \partial_t \rangle)$
$G_0(s_1, ..., s_q) \leftarrow \emptyset$
for $i = 1, ..., l$ **do**
  Elegir $Q_i \in A_n[s]$ y $v_{i_1}, ..., v_{i_q} \in \mathbb{Z}$ tal que: $\quad S_{1,v_{i_1}} \cdots S_{q,v_{i_q}} P_i = Q_i(x, \partial_x, t_1\partial_{t_1}, ..., t_q\partial_{t_q})$,
  donde $S_{j,v} := \partial_{t_j}^v$ si $v > 0$, y $S_{j,v} := t_j^{-1}$ en caso contrario.
  $G_0(s_1, ..., s_q) \leftarrow G_0(s_1, ..., s_q) \cup \{Q_i(x, \partial_x, s_1, ..., s_q)\}$
end-for
return $G_0(-s_1 - 1, ..., -s_q - 1)$
END

La demostración de que este algoritmo termina y devuelve un conjunto generador del ideal anulador s-paramétrico de F, se puede encontrar en [35].

2.4.2 Briançon y Maisonobe

En este algoritmo se considera el G-álgebra $S = K\langle s_1, ..., s_q, \partial_{t_1}, ..., \partial_{t_q} : \partial_{t_j} s_k = s_k \partial_{t_j} - \delta_{jk}\partial_{t_j} \rangle$ y $B = A_n \otimes_K S$.
consideramos el $K[s, x_1, ..., x_n]_F$-módulo libre de rango 1, $M = K[s, x_1, ..., x_n]_F F^s$, generado por el símbolo F^s.
M tiene estructura natural de $A_n[s]$ módulo, la cual se extiende a una estructura de S-módulo con la operación de s_k vía producto y con

$$\partial_{t_j} \cdot a(s_1, ..., s_q, x_1, ..., x_n)F^s = -s_j a(s_1, ..., s_j - 1, ..., s_q, x_1, ..., x_n) f_j^{-1} F^s$$

Entonces se considera el ideal generado por los siguientes elementos en $A_n \otimes_K S$:

$$\partial_{x_i} + \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial f_k}{\partial_{x_i}} \partial_{t_k}, \text{ para todo } i = 1, .., n \quad \text{y} \quad s_j + f_j \partial_{t_j}, \text{ para todo } j = 1, ..., q.$$

Briançon y Maisonobe probaron en [8] el siguiente resultado.

Teorema 2.9. *El ideal anulador s-paramétrico de F^s, $Ann_{A_n[s]}(F^s)$, coincide con la intersección del ideal generado por los elementos anteriores en B, con $A_n[s]$. Es decir, si notamos por I al ideal generado por los elementos anteriores en B, entonces $Ann_{A_n[s]}(F^s) = I \cap A_n[s]$.*

Por tanto, para el cálculo del ideal anulador s-paramétrico bastaba calcular dicha intersección por medio de bases de Gröbner con un orden de eliminación para las variables $\{\partial_{t_j}\}$ sobre B.

Hay una prueba de este algoritmo que está puramente basada en álgebra computacional y se debe a Daniel Andres, Viktor Levandovskyy y Jorge Martín-Morales [2]. En dicha prueba se usa el concepto de preimagen de un ideal a la izquierda mediante un homomorfismo de G-álgebras [21].

Teorema 2.10. ***(Preimagen de un ideal a la izquierda, Levandovskyy [21]).*** *Sean A, B G-álgebras de tipo Lie, dadas por $K\langle x_1, \ldots, x_n : Q_A\rangle$ y $K\langle y_1, \ldots, y_m : Q_B\rangle$ respectivamente, donde los conjuntos de relaciones R_A y R_B son como en la definición 1.11 de G-álgebras de Lie. Sea $\phi : A \to B$ un homomorfismo de K-álgebras. Definimos I_ϕ como el (A, A)-bimódulo (módulo a la izquierda y a la derecha),*

$$I_\phi = \langle\{x_i - \phi(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\}\rangle \subset A \otimes_K B.$$

Supongamos que existe un orden de eliminación $\prec$ para B sobre $A \otimes_K B$, tal que

$$\operatorname{lm}(y_j\phi(x_i) - \phi(x_i)y_j) \prec x_i y_j, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n \text{ y } 1 \leq j \leq m.$$

Entonces tenemos los siguientes resultados.

(1) Se define $A \otimes_K^\phi B$ como el K-álgebra generada por $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$ sujeta al conjunto de relaciones compuestas por R_A, R_B y $\{y_j x_i - x_i y_j - y_j\phi(x_i) + \phi(x_i)y_j\}$. Entonces $A \otimes_K^\phi B$ es un G-álgebra del tipo Lie.

(2) Sea $J \subset B$ un ideal a la izquierda, entonces

$$\phi^{-1}(J) = (I_\phi + J) \cap A \subset A \otimes_K^\phi B \cap A$$

Además, este cálculo se puede realizar mediante eliminación.

La siguiente proposición es una reformulación del teorema anterior, adoptada a la situación, que se encuentra a menudo en el contexto de D-módulos.

Proposición 2.2. Sean A_1, B_1, C G-álgebras de tipo Lie y $\varphi : A_1 \to B_1$ un homomorfismo de K-álgebras. Consideremos los siguientes datos:

$$A = C \otimes_K A_1, \quad B = C \otimes_K B_1, \quad \phi = 1_C \otimes \varphi : A \to B,$$
$$E = A \otimes_K^\phi B, \quad E' = C \otimes_K (A_1 \otimes_K^\varphi B_1).$$

Entonces $A \subset E' \subset E$ y para un ideal a la izquierda $J \subset B$ tenemos:

(1) $(EI_\varphi + EJ) \cap E' = E'I_\varphi + E'J$.

(2) $\phi^{-1}(J) = (E'I_\varphi + E'J) \cap A$.

Además, esta segunda intersección se puede calcular mediante bases de Gröbner, siempre que exista un orden de eliminación para B_1 sobre E' compatible con la estructura de G-álgebra de E'.

Las pruebas de estos resultados se pueden encontrar en (Levandovskyy 2006) y usualmente dentro de las demostraciones se suele usar el criterio del producto generalizado (ver lema 1.4), [23].

Volviendo al teorema 2.9, vamos a estudiar su demostración por medio del método de preimagen de un ideal a la izquierda.

Tomemos $A := A_n[s] = A_n \otimes_K K[s]$ y $B := A_{n+q} = A_n\langle t, \partial_t\rangle = K\langle t_j, \partial_{t_j}, x_i, \partial_{x_i} \mid \partial_{x_i}x_i = x_i\partial_{x_i} + 1, \partial_{t_j}t_j = t_j\partial_{t_j} + 1\rangle$.

Entonces, en las notaciones de la proposición 2.2, $C = A_n$, $A_1 = K[s]$, $B_1 = A_q = K\langle t, \partial_t \mid \partial_{t_j}t_j = t_j\partial_{t_j} + 1\rangle$ y $A = C \otimes A_1$, $B = C \otimes B_1$. Consideremos, de nuevo, la transformación algebraica de Mellin [38] $\varphi : A_1 \to B_1$, dada por $s_j \mapsto -t_j\partial_{t_j} - 1$.

Entonces $I_\varphi = \langle\{t_j\partial_{t_j} + s_j + 1\}\rangle \subset A_1 \otimes_K^\varphi B_1 =: E'$. Como $[t_k, s_j] = \delta_{jk}t_j$ y $[\partial_{t_k}, s_j] = -\delta_{jk}\partial_{t_j}$, las condiciones de orden del teorema 2.10 toman la forma $t_j \prec s_jt_j$, $\partial_{t_j} \prec s_j\partial_{t_j}$, que se satisfacen si y sólo si $1 \leq t_j, \partial_{t_j}, s_j$.

Por la porposición 2.2, para cualquier $L \subset B$, $\phi^{-1}(L) = (I_\phi + L) \cap A$. Por tanto,

$$I_\phi + L = \langle\{t_j - f_j, \partial_{x_i} + \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial f_k}{\partial_{x_i}}\partial_{t_k}, t_j\partial_{t_j} + s_j + 1 \mid j = 1, \ldots, q \text{ y } i = 1, \ldots, n\}\rangle =$$
$$\langle\{t_j - f_j, \partial_{x_i} + \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial f_k}{\partial_{x_i}}\partial_{t_k}, t_j\partial_{t_j} + s_j \mid j = 1, \ldots, q \text{ y } i = 1, \ldots, n\}\rangle$$

debido a que $t_j\partial_{t_j} + s_j + 1$ se puede reducir a

$$t_j\partial_{t_j} + s_j + 1 - \partial_{t_j} \cdot (t_j - f_j) = f_j\partial_{t_j} + s_j \in I_\phi + L.$$

Lema 2.3. Consideremos un orden $\prec_T$, que satisfaga $\{t_j\} >> \{x_i\}$, $\{\partial_{x_i}, s_j\} >> \{x_i, \partial_{t_j}\}$. Y sean

$$g_i := \partial_{x_i} + \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial f_k}{\partial_{x_i}}\partial_{t_k}, \quad S_1 := \{t_j - f_j, g_i\}, \quad S_2 := S_1 \cup \{s_j + f_j\partial_{t_j}\} \subset E'.$$

Entonces S_1 y S_2 son bases de Gröbner con respecto del orden $\prec_T$.

Demostración. Hay tres principales generadores, por tanto tendremos que considerar el algoritmo de Buchberger sobre las 6 posibles parejas entre estos generadores. Debido a las propiedades del orden, para cada pareja podemos aplicar el criterio del producto generalizado 1.4 y así, simplemente necesitamos calcular el producto de corchetes de estas parejas.

1. $[t_j - f_j, t_k - f_k] = 0$.
2. Para los pares (g_j, g_k) tenemos que

$$\sum_{i=1}^{q} \partial_{t_i}[\partial_{x_j}, \frac{\partial f_i}{\partial_{x_k}}] + \sum_{i=1}^{q} \partial_{t_i}[\frac{\partial f_i}{\partial_{x_j}}, \partial_{x_k}] = \sum_{i=1}^{p} \partial_{t_i}([\partial_{x_j}, \frac{\partial f_i}{\partial_{x_k}}] - [\partial_{x_k}, \frac{\partial f_i}{\partial_{x_j}}]).$$

   Como $[\partial_{x_j}, \frac{\partial f_i}{\partial_{x_k}}] = \frac{\partial^2 f_i}{\partial_{x_j}\partial_{x_k}} = [\partial_{x_k}, \frac{\partial f_i}{\partial_{x_j}}]$, entonces $Spoly(g_i, g_k)$ se reduce a cero.
3. Para pares mixtos $(t_k - f_k, g_j)$ tenemos que

$$[t_k - f_k, g_j] = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial f_i}{\partial_{x_j}}[t_k, \partial_{t_i}] - [f_k, \partial_{x_i}] = 0.$$

   Luego S_1 es una base de Gröbner a la izquierda. Ahora, para ver que S_2 es también una base de Gröbner, aparece un nuevo generador, luego hay que comprobar, usando el criterio del producto generalizado, las tres nuevas parejas posibles.
4. $[t_k - f_k, s_j + f_j\partial_{t_j}] = [t_k, s_j] + f_j[t_k, \partial_{t_j}] - [f_k, s_j] - [f_k, f_j\partial_{t_j}] = \delta_{jk}(t_k - f_j)$, que claramente se reduce a cero con respecto S_2, (debido a que tanto $t_k - f_k$ como $t_j - f_j$, están en S_2).
5. $[s_j + f_j\partial_{t_j}, s_k + f_k\partial_{t_k}] = f_k[s_j, \partial_{t_k}] - f_j[s_k, \partial_{t_j}] = 0$.
6. Por último veamos $[s_j + f_j\partial_{t_j}, g_k]$.

$$[s_j + f_j\partial_{t_j}, \partial_{x_k} + \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial f_i}{\partial_{x_k}}\partial_{t_i}] = [s_j.\partial_{x_k}] + \partial_{t_j}[f_j, \partial_{x_k}] + \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial f_i}{\partial_{x_k}}[s_j, \partial_{t_i}] + [f_j\partial_{t_j}, \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial f_i}{\partial_{x_k}}\partial_{t_i}]$$
$$= \frac{\partial f_j}{\partial_{x_k}}\partial_{t_j} - [\partial_{x_k}, f_j]\partial_{t_j} = 0.$$

Por tanto, S_2 es una base de Gröbner. ∎

Queremos eliminar las variables $\{t_j\}$ y $\{\partial_{t_j}\}$ de $I_\phi + L$. Como acabamos de ver, usando un orden de eliminación para $\{t_j\}$ tenemos que S_2 es una base de Gröbner de $I_\phi + L$. Entonces, el ideal después de la eliminación está generado por $S_3 := S_2 \setminus \{t_i - f_i\}$. Entonces basta proceder a eliminar el conjunto de variables $\{\partial_{t_j}\}$ de S_3, que es exactamente lo que se tiene en el teorema 2.9 [8]. El siguiente algoritmo se basa en dicho teorema.

Algoritmo 2.3. $\texttt{sAnnfsBM}(f_1, ..., f_q, \prec_{\partial_t})$
Input: $f \in K[x_1, ..., x_n]$, $\prec_{\partial_t}$ un orden de eliminación para $\{\partial_{t_1}, ..., \partial_{t_q}\}$.
Output: $\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(F^s) \subseteq A_n[s]$.
BEGIN
$I \leftarrow \langle \{s_j + f_j\partial_{t_j}, \partial_{x_i} + \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial f_k}{\partial_{x_i}}\partial_{t_k} \mid i = 1, ..., n \; j = 1, ..., q\}\rangle$
$G \leftarrow \texttt{GB}(I, \prec_{\partial_t})$
$J \leftarrow G \cap A_n[s_1, ..., s_q]$
return J
END

Con respecto a la complejidad de dichos algoritmos, se puede probar que el segundo, debido a Briançon y Maisonobe, es más eficiente que el primero de Oaku y Takayama, [15]. En esta referencia el resultado principal es el siguiente.

Teorema 2.11. *Dados $f_1, ..., f_q \in K[x]$, el cálculo del ideal anulador s-paramétrico $\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(F^s)$ en el algoritmo de Briançon y Maisonobe se puede reducir al cálculo de las sicigias de los generadores $\sum_{k=1}^{q} \frac{\partial f_k}{\partial_{x_i}}\partial_{t_k} + \partial_{x_i}$ en el álgebra de Weyl $A_n[\partial_{t_1}, ..., \partial_{t_q}]$.*

Es decir, se traduce en encontrar unos generadores del submódulo libre (a la izquierda) de $(A_n[\partial_{t_1}, ..., \partial_{t_n}])^n$ formado por los $(P_1, ..., P_n) \in (A_n[\partial_{t_1}, ..., \partial_{t_n}])^n$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{\partial f_k}{\partial_{x_i}}\partial_{t_k} + \partial_{x_i} \right) = 0.$$

Gracias a este resultado, la cota superior de la complejidad del cálculo del ideal anulador s-paramétrico es básicamente la complejidad del cálculo de una base de Gröbner en el álgebra de Weyl con $2n + q$ variables, mientras que en el algoritmo de Oaku y Takayama se consideran $2n + 4q$ variables. En realidad se conoce que el cálculo del ideal anulador s-paramétrico es de complejidad doble exponencial (con respecto al número de variables y al grado total de los generadores del ideal), pero gracias a este resultado, el segundo algoritmo tiene una pequeña ventaja frente al primero debido al menor número de variables.

En la referencia [15] se pueden encontrar también tablas comparativas de ambos algoritmos, en los cuales podemos observar que esta pequeña diferencia en el número de variables hace los cálculos mucho más amenos.

2.5 Intersección de un ideal con un subálgebra principal y algoritmos para el cálculo de la b-función global e ideales de Bernstein-Sato mediante el ideal anulador s-paramétrico

Volviendo al teorema 2.4, se puede obtener el siguiente resultado.

Corolario 2.2. En las condiciones del teorema 2.4, tenemos los siguientes resultados.

(1). $P(s)f - b_f(s) \in \mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s)$ y $b_f(s) \in \mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s) + \langle f \rangle$.

(2). $P \notin \mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^{s+1})$.

(3). $\frac{\partial f}{\partial_{x_i}} P(s) - b'_f(s)\partial_{x_i} \in \mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^{s+1})$, donde $b'_f(s) = \frac{b_f(s)}{s+1}$.

Antes de pasar con la prueba de este corolario, observar que en el tercer punto de dicho resultado, estamos afirmando que $s = -1$ es es una raíz del polinomio de Bernstein-Sato.

Lema 2.4. Para un polinomio no constante f, el factor $s + 1 \in K[s]$ divide a $b_f(s)$ y por tanto, $b_f(s)$ es no nulo.

Demostración. Sustituyendo s por -1 en la ecuación de Bernstein-Sato del teorema 2.4, tenemos que

$$P(x, \partial_x, -1) = b_f(-1)f^{-1}.$$

Por tanto, tenemos a la izquierda un elemento de A_n y a la derecha una función racional. Por tanto ambas expresiones han de ser constantes. Como f no es constante, tampoco lo es f^{-1}. Luego debe ocurrir que $b_f(-1) = 0$. ❙

Demostración. (**Prueba del corolario 2.2**).

(1). Que $P(s)f - b_f(s) \in \mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s)$ es parte de la prueba del teorema 2.4 y que

$b_f(s) \in \mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s) + \langle f \rangle$ se tiene directamente de lo primero.

(2). La ecuación funcional de Bernstein-Sato (2.4) nos asegura que $P \cdot f^{s+1} = b_f(s)f^s \neq 0$, por tanto $P \notin \mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^{s+1})$.

(3). Usando de nuevo la ecuación funcional del teorema 2.4 y que $b_f(s) = (s+1)b'_f(s)$ (2.4), tenemos que

$$P \cdot f^{s+1} = b_f(s)f^s = (s+1)b'_f(s)f^s \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x_i}} = (\partial_{x_i} \cdot f^{s+1})b'_f(s)\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x_i}}.$$

Luego, $\frac{\partial f}{\partial_{x_i}} P \cdot f^{s+1} = b'_f(s)\partial_{x_i} \cdot f^{s+1}$ y por tanto, $\frac{\partial f}{\partial_{x_i}} P - b'_f(s)\partial_{x_i} \in \mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^{s+1})$.

Observación 2.4. Podemos observar del punto (1) del corolario 2.2 y de la propia definición de la b-función global 2.6 que $b_f(s)$ está en $(\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s) + \langle f \rangle) \cap K[s]$. Es más, como $K[s]$ es un dominio de ideales principales, el ideal generado por los elementos que están en dicha intersección, (verificando la ecuación funcional), que fácilmente se puede comprobar que forman un ideal, tiene un único generador mónico. Este generador mónico es la b-función global asociada a f y usualmente se suele definir de esta forma en vez de en la forma que se ha definido en 2.6.

Gracias a todo esto, vamos a poder calcular de manera algorítmica la b-función asociada a un polinomio (resp. a un conjunto de polinomios) realizando los siguientes pasos:

1. Calcular una base de Gröbner G de $\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s) + \langle f \rangle$, mediante los algoritmos ya conocidos 2.4.
2. Calcular la intersección de G con el subálgebra $K[s]$.

El primer paso, que se basa en el cálculo del ideal anulador s-paramétrico asociado a f, ya lo hemos estudiado en el tema anterior. Falta entonces estudiar el problema de la **intersección** de un ideal a la izquierda con una subálgebra.

Supongamos que A es un K-álgebra asociativa. Nuestro objetivo es, dado un ideal a la izquierda $J \subset A$, calcular la intersección de J con el subálgebra $K[s]$, donde s va a ser un elemento de $A \setminus K$. Básicamente, buscamos el polinomio mónico $b \in A$ tal que

$$\langle b \rangle = J \cap K[s].$$

Supondremos también que siempre existe un orden monomial sobre A tal que J tiene una base de Gröbner G. De esta forma, pueden ocasionarse diferentes situaciones:

1. Ningún elemento de $\mathrm{lm}(G)$ divide a $\mathrm{lm}(s^k)$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$.
2. Existe un elemento en G cuyo monomio líder divide a $\mathrm{lm}(s^k)$, para algún $k \in \mathbb{N}$. En estas condiciones, tenemos las siguientes posibles situaciones.
    - 2.1. $J \cdot s \subset J$ y $\dim_K(\mathrm{End}_A(A/I)) < \infty$.
    - 2.2. No se tiene alguna de las dos condiciones de 2.1.
        - 2.2.1. La intersección es cero.
        - 2.2.2. La intersección no es cero.

Estudiemos primero el caso 1.

Lema 2.5. Si no existe $g \in G$ tal que $\mathrm{lm}(g)$ divida a $\mathrm{lm}(s^k)$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$, entonces $J \cap K[s] = \{0\}$.

Demostración. Supongamos que tenemos $0 \neq b \in J \cap K[s]$. Entonces $\mathrm{lm}(b) = \mathrm{lm}(s^k)$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Como $b \in J$, existe un $g \in G$ tal que $\mathrm{lm}(g)$ divide a $\mathrm{lm}(b) = \mathrm{lm}(s^k)$. ∎

En la segunda situación, no podemos decir si la intersección es nula o no. Para entender esto, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Consideremos $K[x, y]$ y $J = \langle y^2 + x \rangle$. Entonces $J \cap K[y] = \{0\}$, mientras que $\{y^2 + x\}$ es una base de Gröbner de J para cualquier orden monomial, y por tanto, tomando un orden monomial que verifique $y >> x$, tenemos que $\mathrm{lm}(y^2 + x) = y^2$ que divide a y^k para cualquier $k \geq 2$ par.

Lema 2.6. Si tenemos $J \cdot s \subset J$ y $\dim_K(\mathrm{End}_A(A/J)) < \infty$. Entonces $J \cap K[s] \neq \{0\}$.

Demostración. Consideremos la aplicación producto a a la derecha con s como aplicación, $(\cdot s) : A/J \to A/J$, que es un endomorfismo de A-módulos bien definido en A/J, ya que si $a - a' \in J$, entonces $(a - a')s \in J \cdot s \subset J$, por hipótesis para cualesquiera $a, a' \in A$. Como $\mathrm{End}_A(A/J)$ tiene dimensión finita, entonces el álgebra lineal nos asegura que existe un polinomio mínimo μ asociado a dicho endomorfismo. Es más μ es el generador mónico de $J \cap K[s]$, ya que, como es polinomio mínimo asociado a dicho endomorfismo se tiene que $\mu(s) = 0$ en A/J y por tanto $\mu(s) \in J \cap K[s]$, y además $\deg(\mu)$ es mínimo por definición. ∎

Observación 2.5. En el caso en que A sea el álgebra de Weyl, se conoce que si A/J es un A_n-módulo holónomo, entonces se tiene que $\dim_K(\mathrm{End}_A(A/J)) < \infty$.

De esta forma, hemos reducido el problema de calcular la intersección de un ideal con una subálgebra generada por un elemento a un problema de álgebra lineal, el

problema de encontrar el polinomio mínimo de un endomorfismo.
el siguiente algoritmo calcula la intersección de un ideal a la izquierda $J \subset A$ con $K[s]$ para un elemento $s \in A$, basándose en el problema de encontrar el polinomio mínimo del endomorfismo $(\cdot s)$.

Algoritmo 2.4. `PrincipalIntersect`(s, J)
Input: $s \in A$, $J \subset A$ un ideal a la izquierda tal que $J \cap K[s] \neq \{0\}$.
Output: $b \in K[s]$ el generador mónico de la intersección $J \cap K[s]$.
BEGIN
$G \leftarrow$`GB`(J) (asumiendo que existe)
$i \leftarrow 1$
if existen $a_0, ..., a_{i-1} \in K$ tal que

$$\mathrm{NF}\,(s^i, G) + \sum_{j=0}^{i-1} a_j\, \mathrm{NF}\,(s^j, G) = 0 \quad \textbf{then}$$

return $$b \leftarrow s^i + \sum_{j=0}^{i-1} a_j s^j$$

else
$i \leftarrow i + 1$
end-if
END

Notar que $\mathrm{NF}\,(s^i, G) + \sum_{j=0}^{i-1} a_j\, \mathrm{NF}\,(s^j, G) = 0$ es equivalente a que $s^+ \sum_{j=0}^{i-1} a_j s^j \in J$, el algoritmo busca un polinomio mónico en $K[s]$ que también esté en J. Podemos observar que este proceso de búsqueda se realiza aumentando de uno en uno el grado a través de las potencias de s hasta encontrar la dependencia lineal. De esta forma, se asegura que el algoritmo devuelva el polinomio de grado **mínimo**. Desde el principio se ha supuesto que $J \cap K[s] \neq \{0\}$, ya que, en caso contrario, este algoritmo no termina.

Este algoritmo ha sido implementado en la librería `"bfun.lib"` de `Singular` por Daniel Andrés y Viktor Levandovskyy [3] mediante el **procedure** `pIntersect(poly s, ideal I, list #)`. Su función es calcular la intersección del ideal I con la subálgebra $K[s]$, donde s es un polinomio. Por otro lado, por defecto, la lista $\# = \emptyset$, pero en caso contrario, si se dá un $m > 0$ en la lista, entonces se busca el generador mónico de dicha intersección con a lo sumo grado m.
Esto está bien definido ya que como comentábamos antes, el algoritmo va de menos a más, aumentando el grado del posible generador mónico, por tanto ese m dado sería

la cota superior del mismo.

Ahora que se ha estudiado el problema de la intersección, se puede construir un algoritmo para el cálculo del polinomio de Bernstein-Sato, a través del cálculo del ideal anulador s-paramétrico como se comentó en 2.4.

Algoritmo 2.5. `bfctAnn`$(f, \prec_{\partial_t}, \prec_s)$
Input: $f \in K[x_1, ..., x_n]$, $\prec_{\partial_t}$ orden de eliminación para las variables de ∂_t, $\prec_s$ orden de eliminación para las variables de s.
Output: El polinomio de Bernstein-Sato $b_f(s) \in K[s]$ asociado a f.
BEGIN
$I \leftarrow \mathrm{sAnnfsBM}(f, \prec_{\partial_t})$
$G \leftarrow \mathtt{GB}(I + \langle f \rangle, \prec_s)$
$b_f(s) \leftarrow \mathtt{PrincipalIntersect}(s, G)$
return $b_f(s)$
END

Debido al corolario 2.2(1) y a la definición del polinomio de Bernstein-Sato, tenemos que $b_f(s)$ es un elemento de $\langle G\rangle \cap K[s]$. Por otro lado, el algoritmo `PrincipalIntersect` devuelve el polinomio mínimo de dicha intersección, el cual sabemos que coincide con el ideal de Bernstein-Sato (2.4). Por lo tanto, este algoritmo termina y devuelve el polinomio de Bernstein-Sato asociado a f.

Este algoritmo se puede mejorar considerando las derivadas parciales de f respecto de las variables $x_1, ..., x_n$. Es decir, añadiendo las derivadas parciales de f a $\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s)+ \langle f, \rangle$. Este resultado es conocido y su demostración se puede encontrar en [1].

Lema 2.7. Sea $f \in K[x_1, ..., x_n]$. Entonces se tienen los siguientes resultados:

(1). Tenemos que $f\partial_{x_i} - s\frac{\partial f}{\partial_{x_i}} \in \mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s)$ para todo $1 \le i \le n$.

(2). $\left(\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s) + \langle f, \frac{\partial f}{\partial_{x_i}}, ..., \frac{\partial f}{\partial_{x_n}}\rangle\right) \cap K[s] = \langle \frac{b_f(s)}{s+1} \rangle$.

Volviendo al caso en el que tenemos $f_1, ..., f_q \in K[x_1, ..., x_n] \setminus \{0\}$, podemos generalizar los resultados obtenidos hasta ahora para el caso $q = 1$, y por tanto, podemos escribir los ideales de Bernstein-Sato estudiados en (2.3) de la forma:

$$I_B = (\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(F^s) + \langle f_1 f_2 \cdots f_q \rangle) \cap \mathbb{C}[s],$$
$$I_{B_j} = (\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(F^s) + \langle f_j \rangle) \cap \mathbb{C}[s],$$
$$I_{B_\Sigma} = (\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(F^s) + \langle f_1, f_2, ..., f_q \rangle) \cap \mathbb{C}[s].$$

A su vez, gracias al ideal anulador s-paramétrico de F^s, podemos generalizar el algoritmo 2.5 al caso que tengamos $f_1, ..., f_q \in K[x_1, ..., x_n]$ para un cierto entero $q > 1$.

Algoritmo 2.6. `BernsIdeal`$([f_1, ..., f_q], \prec_{\partial_t}, \prec_s)$
Input: $(f_1, ..., f_q) \in K[x_1, ..., x_n]$, $\prec_{\partial_t}$ orden monomial de eliminación para las variables de ∂_t, $\prec_s$ orden de eliminación para las variables de s.
Output: Los ideales I_B, I_{B_Σ} y I_{B_j}, para $j = 1, ..., p$.
BEGIN
$I \leftarrow$ `sAnnfsBM`$(f_1, ..., f_q, \prec_{\partial_t})$
$G_B \leftarrow$ `GB`$(I + \langle f_1 \cdots f_q \rangle, \prec_s)$
$G_{B_\Sigma} \leftarrow$ `GB`$(I + \langle f_1, ... f_q \rangle, \prec_s)$
for $j = 1, ..., q$ **do**
  $G_{B_j} \leftarrow$ `GB`$(I + \langle f_j \rangle, \prec_s)$
end-for
$I_B \leftarrow \langle G_B \cap K[s_1, ..., s_q] \rangle$
$I_{B_\Sigma} \leftarrow \langle G_{B_\Sigma} \cap K[s_1, ..., s_q] \rangle$
for $j = 1, ..., q$ **do**
  $I_{B_j} \leftarrow \langle G_{B_j} \cap K[s_1, ..., s_q] \rangle$
end-for
return $I_B, I_{B_\Sigma}, I_{B_1}, ..., I_{B_q}$.
END

Por último, volviendo a la sección 2.1, dejamos sin demostrar que la b-función global de un ideal I respecto de un vector de pesos w era no nula. Veamos la prueba de dicho resultado y, como aplicación directa, un algoritmo para el cálculo de la b-función global asociada a un ideal I respecto de un vector de pesos $\neq 0$ que se basa en los dos pasos que vimos en 2.1.

Demostración. **Prueba del teorema 2.1**.
Sea $0 \neq w \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$, $I \subset A_n$ tal que A_n/I es un módulo holónomo, $J := \mathrm{in}_{(-w,w)}(I)$ y $s := \sum_{i=1}^n w_i x_i \partial_{x_i}$. Sin pérdida de generalidad sea $0 \neq P = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta \in J$ un operador $(-w, w)$-homogéneo. Entonces para cada monomio en P, usando la regla de Leibniz, obtenemos

$$x^\alpha \partial^\beta x_i \partial_{x_i} = x^{\alpha+e_i} \partial^{\beta+e_i} + \beta_i x^\alpha \partial^\beta = (\partial_{x_i} x_i^{\alpha_i+1} - (\alpha_i + 1) x_i^{\alpha_i}) \frac{x^\alpha}{x_i^{\alpha_i}} \partial^\beta + \beta_i x^\alpha \partial^\beta =$$
$$(\partial_{x_i} x_i - (\alpha_i + 1) + \beta_i) x^\alpha \partial^\beta = (x_i \partial_{x_i} - \alpha_i + \beta_i) x^\alpha \partial^\beta.$$

Pongamos $m = -w\alpha + w\beta$ para algún término $c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta$ en P donde $c_{\alpha\beta}$ es no nulo.

Como P es $(-w, w)$-homogéneo, m no depende de la elección de este término. Por tanto,

$$P \cdot s = P \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \partial_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{\alpha,\beta} (x_i \partial_{x_i} - \alpha_i + \beta_i) c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta =$$
$$s \cdot P + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha,\beta} w_i(-\alpha_i + \beta_i) c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta = (s+m) \cdot P \in J.$$

Por lo tanto, tenemos que $J \cdot s \subset J$. Como A_n/J es holónomo (Saito et al. 2000), luego por la observación 2.5 y el lema 2.6 se tiene el resultado deseado.

Usando principalmente la observación 2.2, y los algoritmos para el cálculo del ideal inicial de un ideal I holónomo con respecto de un vector de pesos $0 \neq w$, y para el cálculo de la intersección entre un ideal y un subálgebra principal, obtenemos el siguiente algoritmo para el cálculo de la b-función global asociada a un ideal I con respecto a un vector de pesos $0 \neq w$.

Algoritmo 2.7. `bfctIdeal`(I, w)
Input: $I \subseteq A_n$ un ideal holónomo, $0 \neq w \in \mathbb{R}^n_{>0}$ un vector de pesos.
Output: $b_{I,w}(s) \in K[s]$, la b-función global de I con respecto a w.
BEGIN
$J \leftarrow$`initialIdeal`$(I, (-w, w))$ (2.1)
$s \leftarrow \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \partial_{x_i}$
$b_{I,w}(s) \leftarrow$ `principalIntersect`(s, J) (2.4)
return $b_{I,w}(s)$
END

En particular, usando la definición de la b-función global asociada a un polinomio f no nulo que se ha dado en 2.6, y usando el algoritmo anterior, se puede construir un algoritmo que calcula la b-función global asociada a un polinomio no nulo $f \in K[x_1, ..., x_n]$.

Algoritmo 2.8. `bfct`(f)
Input: $f \in K[x_1, ..., x_n] \setminus \{0\}$.
Output: $b_f(s) \in K[s]$ la b-función asociada a f (definición 2.6).
BEGIN
$I_f \leftarrow \langle t - f, \partial_{x_1} + \frac{\partial f}{\partial_{x_1}} \partial_t, ..., \partial_{x_n} + \frac{\partial f}{\partial_{x_n}} \partial_t \rangle \subseteq A_n\langle t, \partial_t \rangle$ (ideal de Malgrange 2.5)

$w \leftarrow (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ (tal que el peso de ∂_t es 1)
$b_{I,w}(s) \leftarrow \texttt{bfctIdeal}(I_f, w)$
$b_f(s) \leftarrow b_f(-s-1)$
return $b_f(s)$
END

2.6 Algoritmos para verificar raíces de la *b*-función global

En muchas ocasiones el cálculo del polinomio de Bernstein-Sato o *b*-función global es muy costoso en la mayoría de los algoritmos existentes e incluso en ocasiones no son posibles mediante algunos de ellos. Sin embargo, es conocido que el polinomio de Bernstein-Sato o *b*-función global tiene únicamente raíces racionales negativas [18], por tanto, aprovechando la racionalidad de las raíces de dicho polinomio, hay otro tipo de algoritmos más eficaces, que en vez de calcular la *b*-función en sí, verifican si un número racional dado es, o no es, raíz de la *b*-función asociada a un polinomio o a un conjunto de polinomios. Estos algoritmos han sido implementados en el sistema `Singular/Plural` por Víctor Levandovskyy y Jorge Martín Morales [22], y tienen diversas aplicaciones.
Los principales problemas a estudiar en esta sección son los siguientes:

1. Calcular una cota superior de $b_f(s)$. Es decir, encontrar un polinomio $B(s) \in K[s]$ tal que $b_f(s)|B(s)$. Pongamos:

$$B(s) = \prod_{i=1}^{d}(s-\alpha_i)^{m_i}, \text{ para ciertos } \alpha_i \in \mathbb{Q}_{<0}, i = 1, ..., d.$$

2. Comprobar cuando un α_i es raíz de $b_f(s)$.
3. En caso de ser una raíz, Calcular la multiplicidad de α_i en $b_f(s)$.

Uno se puede preguntar si, suponiendo que podemos encontrar de alguna forma una cota superior del polinomio de Bernstein-Sato, existen algoritmos para el cálculo del polinomio de Bernstein-Sato a partir de dicha cota superior.

Claramente si tenemos una cota superior $B(s) = \prod_{i=1}^{d}(s-\alpha_i)^{m_i}$ de la *b*-función $b_f(s)$, entonces $b_f(s) = \prod_{i=1}^{d}(s-\alpha_i)^{n_i}$ donde $0 \leq n_i \leq m_i$. Por tanto, si también tenemos un algoritmo que nos diga cuando α_i sea raíz de $b_f(s)$ y que, en particular, nos proporcione las multiplicidades de las que sí son raíces, se podría calcular la b-función global mediante los siguientes pasos:

1. Calcular la cota superior $B(s) = \prod_{i=1}^{d}(s-\alpha_i)^{m_i}$.
2. Verificar para todo $i = 1, \dots, d$ cuando α_i sea raíz de la b-función global.
3. En los casos afirmativos, calcular su multiplicidad n_i, y en caso contrario hacer $n_i = 0$.
4. Devolver $b_f(s) = \prod_{i=1}^{d}(s-\alpha_i)^{n_i}$.

Ahora bien, uno se puede preguntar qué es más eficiente, el cálculo de la b-función global de manera directa con alguno de los algoritmos conocidos, ó el cálculo de la b-función global por medio de verificar cada una de las raíces de una cota superior y calcular sus multiplicidades en los casos afirmativos. Esta pregunta obviamente dependerá de la eficacia de los algoritmos para verificar las raíces y de que el algoritmo para el cálculo de la cota superior nos proporcione una cota los suficientemente "cercana", para que este proceso sea eficiente, ya que así los cálculos de las multiplicidades serán más sencillos al tener esta cota superior "cercana".
El resultado principal en la que se basan los tres problemas anteriores, se debe principalmente a la igualdad que sabíamos que verificaba la b-función global:

$$\langle b_f(s)\rangle = (\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s) + \langle f\rangle) \cap K[s], \qquad (1)$$

Definición 2.11. *Sea A una G-álgebra, $I \subset A$ un ideal a la izquierda y $Z = Z(A)$ el centro de A (conjunto de elementos de A que conmutan con todos los demás elementos). Entonces se definen:*
- *Para cada $z \in Z$, el submódulo a la izquierda $(I : z) := \{v \in A \mid zv \in I\}$.*
- *Para un ideal $J \subset Z$ el submódulo $I : J$ se define como*

$$(I : J) := \{v \in A \mid zv \in I \text{ para todo } z \in J\}.$$

- *El submódulo $I : z^\infty$ se define por* $\liminf_{n\in\mathbb{N}} I : z^n$.
- *El submódulo $I : J^\infty$, llamado **saturación central** de I por J, se define como* $\liminf_{n\in\mathbb{N}} I : J^n$.

Lema 2.8. Sea $\{g_1, \dots, g_l\}$ una base de Gröbner de $J \subset Z(A)$, entonces se tiene que

$$(I : J) = \bigcap_{i=1}^{l} (I : g_i).$$

La demostración se sigue de que J es un ideal en el centro de la G-álgebra A, [19].

Teorema 2.12. *Sea A una G-álgebra cuyo centro contiene a $K[s]$. Sea $q(s) \in K[s]$ y sea $I \subset A$ un ideal a la izquierda satisfaciendo $I \cap K[s] \neq 0$. Entonces se tienen las siguientes igualdades.*

1. $(I + A\langle q(s)\rangle) \cap K[s] = I \cap K[s] + K[s]\langle q(s)\rangle$,
2. $(I : q(s)) \cap K[s] = (I \cap K[s]) : q(s)$,
3. $(I : q(s)^{\infty}) \cap K[s] = (I \cap K[s]) : q(s)^{\infty}$.

En particular, tomando $I = Ann_{A_n[s]}(f^s) + A_n[s]\langle f\rangle \subseteq A_n[s]$ en las ecuaciones anteriores, tenemos que

- $[Ann_{A_n[s]}(f^s) + A_n[s]\langle f, q(s)\rangle] \cap K[s] = \langle b_f(s), q(s)\rangle = \langle \mathbf{mcd}(b_f(s), q(s))\rangle$,
- $[(Ann_{A_n[s]}(f^s) + A_n[s]\langle f\rangle) : q(s)] \cap K[s] = \langle b_f(s)\rangle : q(s) = \langle \frac{b_f(s)}{\mathbf{mcd}(b_f(s), q(s))}\rangle$,
- $[(Ann_{A_n[s]}(f^s) + A_n[s]\langle f\rangle) : q(s)^{\infty}] \cap K[s] = \langle b_f(s)\rangle : q(s)^{\infty}$.

Donde $\mathbf{mcd}(f(s), g(s))$ denota el máximo común divisor entre dos polinomios en la variable s.

Demostración. Tomemos $0 \neq b(s)$ es un generador de $I \cap K[s]$. Supongamos que $h(s) \in (I + A\langle q(s)\rangle) \cap K[s]$. Entonces se tiene que

$$h(s) = P(s) + Q(s)q(s)$$

donde $P(s) \in I$ y $Q(s) \in A$. Sea $d(s)$ el máximo común divisor de $b(s)$ y $q(s)$. Por tanto, existen $b_1(s)$ y $q_1(s)$ tales que $d(s)b_1(s) = b(s)$ y $d(s)q_1(s) = q(s)$, y entonces $b_1(s)q(s) = q_1(s)b(s)$. Como s es una variable que conmuta con todos los elementos de A, podemos multiplicar la ecuación $h(s) = P(s) + Q(s)q(s)$ por $b_1(s)$ en ambos lados y obtener

$$b_1(s)h(s) = b_1(s)P(s) + Q(s)q_1(s)b(s) \in I.$$

Luego, $b_1(s)h(s) \in I \cap K[s] = \langle b(s)\rangle$ y por tanto $h(s) \in \langle b(s)\rangle : \langle b_1(s)\rangle = \langle d(s)\rangle = I \cap K[s] + \langle q(s)\rangle$. La otra inclusión es trivial. De igual forma se prueban la segunda y la tercera igualdad.

La segunda (resp. la tercera) parte del teorema anterior se puede usar para encontrar una cota superior de $b_f(s)$ (resp. las raíces de $b_f(s)$). Como $q(s)$ está en el centro de $A_n[s]$, los ideales cociente y saturado se pueden calcular algorítmicamente [19]. Una forma más clásica para el cálculo, aunque menos efectiva, es mediante el uso de una nueva variable conmutativa T, y la fórmula

$$I : q(s)^\infty = A_n[s,T]\langle I, 1 - Tq(s)\rangle \cap A_n[s].$$

Ejemplo: Sea $f \in \mathbb{C}[x,y]$ el polinomio $x(x^2+y^3)$. El ideal anulador s-paramétrico de f^s está generado por los operadores $P_1(s) = 3xy^2\partial_x - y^3\partial_y - 3x^2\partial_y$ y $P_2(s) = 3x\partial_x + 2y\partial_y - 9s$. Consideramos el polinomio

$$q(s) = (s+1)(s+\tfrac{5}{9})(s+\tfrac{8}{9})(s+\tfrac{10}{9})(s+\tfrac{7}{9})(s+\tfrac{11}{9})(s+\tfrac{13}{9}).$$

Calculando una base de Gröbner, se puede ver que el ideal generado por $\{P_1(s), P_2(s), f, 1-Tq(s)\}$ en $A_n[s,T]$ es el total. Es decir, la base de Gröbner reducida es $\{1\}$. Luego por el tercer punto del teorema 2.12, se deduce que $q(s)$ contiene todas las raíces de $b_f(s)$. Por lo que $q(s)$ es una cota superior de la b-función.
Con este proceso, basta comprobar que un ideal sea el anillo entero o no, para la obtención de una cota superior. Además, en el proceso de comprobar si un ideal es el anillo total o no se puede usar cualquier orden monomial, ya que simplemente hay que comprobar que la base de Gröbner calculada contenga al 1. Esto hace que el cálculo computacional pueda ser muy rápido con una buena elección del orden monomial.

Corolario 2.3. Supongamos que $P_1(s), \ldots, P_k(s)$ genera $\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$ es una raíz de $b_f(-s)$.
2. $A_n[s]\langle P_1(s), \ldots, P_k(s), f, s+\alpha\rangle \neq A_n[s]$.
3. $A_n\langle P_1(-\alpha), \ldots, P_k(-\alpha), f\rangle \neq A_n$.

Además, en tal caso, $A_n[s]\langle P_1(s), \ldots, P_k(s), f, s+\alpha\rangle \cap K[s] = K[s]\langle s+\alpha\rangle$.

Demostración. Sea $J = A_n[s]\langle P_1(s), \ldots, P_k(s), f, s+\alpha\rangle$ y $L = J \cap A_n = \langle P_1(-\alpha), \ldots, P_k(-\alpha), f\rangle$. Como tenemos que

$$J = A_n[s] \iff J \cap K[s] = K[s] \iff L = A_n, \quad \text{y que}$$
$$\mathbf{mcd}(b_f(s), s+\alpha) = 1 \iff b_f(-\alpha) \neq 0,$$

aplicando el primer punto del teorema 2.12 tomando $q(s) = s + \alpha$, obtendríamos directamente que (1) $\iff$ (2) y que (1) $\iff$ (3). ∎

Este resultado permite, una vez conocido un conjunto generador de $\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s)$, construir un algoritmo que verifique cuándo un número racional dado es raíz de la b-función global asociada a f, por medio del uso de bases de Gröbner. La demostración del algoritmo se tiene directamente del corolario anterior.

Algoritmo 2.9. `CheckRoot`$(f, \alpha, \prec)$
Input: $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$, $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$, $\prec$ un orden monomial cualquiera sobre A_n.
Output: **T** (True), si α es una raíz de $b_f(-s)$, **F** (False), en caso contrario.
BEGIN
$\langle P_1(s), \ldots, P_k(s)\rangle \leftarrow$ `sAnnfsBM`(f) (Ideal anulador s-paramétrico de f^s [2.3])
$L \leftarrow \langle P_1(-\alpha), \ldots, P_k(-\alpha), f\rangle$
$G \leftarrow$`RedGB`$(L, \prec)$ (base de Gröbner reducida de L respecto de $\prec$ [1.4])
if $(G \neq \{1\})$
  return **T**
return **F**
end-if
END

Pasamos ahora al problema de estudiar el problema de la multiplicidad de dichas raíces. Sabemos que si α es una raíz, entonces la intersección $(\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s)+\langle f, s+\alpha\rangle)\cap K[s] = K[s]\langle s+\alpha\rangle$ por el corolario 2.3. De la misma forma, usando el mismo resultado, α^2 será raíz si $(\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s) + \langle f, (s+\alpha)^2\rangle) \cap K[s] = K[s]\langle (s+\alpha)^2\rangle$. Entonces, reiterando el proceso, si la multiplicidad de α es m, obtendremos que

$$(\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s) + \langle f, (s+\alpha)^m\rangle) \cap K[s] = K[s]\langle (s+\alpha)^m\rangle, \quad \text{mientras que}$$
$$(\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s) + \langle f, (s+\alpha)^{m+1}\rangle) \cap K[s] \neq K[s]\langle (s+\alpha)^{m+1}\rangle$$

Debido a que hemos supuesto que la multiplicidad de α es m.
Luego la idea del algoritmo para el cálculo de la multiplicidad, va a residir en ir aumentando este exponente hasta que no se verifique la igualdad.

Corolario 2.4. Sea m_α la multiplicidad de α como raíz de $b_f(-s)$. Consideremos los ideales $J_i = \mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s) + \langle f, (s+\alpha)^{i+1}\rangle \subseteq A_n[s]$, $i = 0, \ldots, n$. Entonces, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. $m_\alpha > i$,
2. $J_i \cap K[s] = \langle (s+\alpha)^{i+1}\rangle$ y

3. $(s+\alpha)^i \notin J_i$.

Además si tenemos que $J_m = J_{m-1} \subsetneq \ldots \subsetneq J_1 \subsetneq J_0 \subsetneq A_n[s]$, entonces $m_\alpha = m$. En particular, si $m \leq n$, entonces $J_{m-1} = J_m = \ldots = J_n$ [36].

Demostración. (1 $\iff$ 2). Tenemos claramente que $m_\alpha > i \iff \mathbf{mcd}(b_f(s),(s+\alpha)^{i+1}) = (s+\alpha)^{i+1}$, luego tomando $q(s) = (s+\alpha)^{i+1}$ y usando el primer apartado del teorema 2.12 se tiene la equivalencia que se buscaba de la misma forma que en el corolario anterior.
(2 $\Rightarrow$ 3). Si $(s+\alpha)^i \in J_i \cap K[s]$, claramente $\langle (s+\alpha)^{i+1}\rangle \subsetneq J_i \cap K[s]$, de donde se deduce la implicación.
(3 $\Rightarrow$ 2). Supongamos que $\langle h(s)\rangle = J_i \cap K[s]$. Como $(s+\alpha)^{i+1} \in J_i \cap K[s] = \langle h(s)\rangle$, existe $j \leq i+1$ tal que $h(s) = (s+\alpha)^j$. Supongamos que $j \leq i$. Entonces $(s+\alpha)^i = (s+\alpha)^{i-j}(s+\alpha)^j = (s+\alpha)^{i-j}h(s) \in J_i$. Pero esto contradice la hipótesis (3). Por tanto debe ser $j = i+1$. ∎

Usando directamente este resultado, se puede construir un algoritmo que verifique si un número racional es raíz de la b-función global asociada a un polinomio f y que, en caso afirmativo, calcule su multiplicidad.

Algoritmo 2.10. `CheckRootMult`$(f,\alpha,\prec)$
Input: $f \in K[x_1,\ldots,x_n]$, $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$, $\prec$ un orden monomial cualquiera sobre $A_n[s]$.
Output: m_α, la multiplicidad de α como raíz de $b_f(s)$.
BEGIN
$\langle P_1(s),\ldots,P_k(s)\rangle \leftarrow$ `sAnnfsBM`(f)
for $i = 0,1,\ldots,n$ **do**
  $J \leftarrow A_n[s]\langle P_1(s),\ldots,P_k(s), f, (s+\alpha)^{i+1}\rangle$
  $G \leftarrow$ `GB`$(J,\prec)$
  $r \leftarrow$ `NormalForm`$((s+\alpha)^i, G)$ (forma normal de $(s+\alpha)^i$ respecto a G [1.2])
  if $(r = 0)$ **then**
    $m_\alpha \leftarrow i$
    return m_α
  end-if
end-for
END

En este caso, la prueba de que el algoritmo termine correctamente se debe a que la multiplicidad de una raíz de $b_f(s)$ es a lo sumo n ([36]) y al corolario anterior (2.4).

El problema de este algortimo es que en cada paso del bucle **for** calcula una base de Gröbner G_i del ideal $J = \mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s) + \langle f,(s+\alpha)^{i+1}\rangle$ y, como ya sabemos, el cálculo

de bases de Gröbner sobre anillos de operadores diferenciales es un tanto costoso en la mayoría de las ocasiones.
Debido al corolario 2.4, se puede considerar un algoritmo equivalente al anterior para el cálculo de la multiplicidad de una raíz mediante la ecuación

$$(\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s) + A_n[s]\langle f, (s+\alpha)^n\rangle) \cap K[s] = \langle (s+\alpha)^{m_\alpha}\rangle$$

Aunque este método sólo sirve cuando la multiplicidad de la raíz es próxima a n, ya que conforme se aumente el índice del exponente i, el costo computacional de las bases de Gröbner será mucho mayor. Luego si la multiplicidad es relativamente pequeña es más efectivo considerar el método del algoritmo anterior antes que el método que se sigue directamente de la ecuación anterior.

Volviendo al problema del cálculo de una base de Gröbner en cada paso del algoritmo anterior, este problema se puede solucionar usando la teoría ya conocida sobre ideales cociente e ideales saturados.

Corolario 2.5. Sea m_α la multiplicidad de α como raíz de $b_f(-s)$ y sea $I = \mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s) + \langle f\rangle$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $m_\alpha > i$.
2. $(I : (s+\alpha)^i) + A_n\langle s+\alpha\rangle \neq A_n[s]$.
3. $(I : (s+\alpha)^i)|_{s=-\alpha} \neq A_n$.

Demostración. Dado $J \subseteq A_n[s]$ un ideal, denotamos por $b_J(s)$ al generador mónico de la intersección $J \cap K[s]$. Entonces por el teorema 2.12(1), la condición 2 se satisface sí y sólo si $-\alpha$ es raíz de $b_{I:(s+\alpha)^i}(s)$. Donde este polinomio debido al teorema 2.12(2) no es otro que $\frac{b_f(s)}{\mathbf{mcd}(b_f(s),(s+\alpha)^i)}$. Debido a esto, se tiene la siguiente equivalencia

$$m_\alpha > i \iff (s+\alpha) \mid \frac{b_f(s)}{\mathbf{mcd}(b_f(s),(s+\alpha)^i)}.$$

De donde se concluye (1) $\iff$ (2). La otra equivalencia (2) $\iff$ (3), se tiene trivialmente de lo anterior sustituyendo s por $-\alpha$. ∎

Para el cálculo recursivo de $I : (s+\alpha)^i$ se usa que $s+\alpha$ está en el centro de $A_n[s]$ y por tanto

$$I : (s+\alpha) = (I \cap A_n[s]\langle s+\alpha\rangle)/(s+\alpha), \quad \text{y además}$$
$$I : (s+\alpha)^i = (I : (s+\alpha)^{i-1}) : (s+\alpha).$$

Usando esto y el resultado anterior, se puede reescribir el algoritmo anterior sustituyendo los cálculos de bases de Gröbner por cálculos de ideales cocientes. La prueba del algoritmo se obtiene directamente del corolario anterior.

Algoritmo 2.11. `CheckRootQuot`$(f, \alpha, \prec)$
Input: $f \in K[x_1, ..., x_n]$, $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$, $\prec$ un orden monomial cualquiera sobre $A_n[s]$.
Output: m_α, la multiplicidad de α como raíz de $b_f(-s)$.
BEGIN
$m \leftarrow 0$
$\langle P_1(s), ..., P_k(s)\rangle \leftarrow$ `sAnnfsBM`(f)
$I \leftarrow A_n[s]\langle P_1(s), ..., P_k(s), f\rangle$
$J \leftarrow I + A_n[s]\langle s+\alpha\rangle$
while $(G \neq \{1\})$ **do**
  $m \leftarrow m+1$
  $I \leftarrow (I : (s+\alpha))$
  $J \leftarrow I + A_n[s]\langle s+\alpha\rangle$
  $G \leftarrow$ `RedGB`$(J, \prec)$
end-while
return m
END

Observación 2.6. Como ya hemos mencionado anteriormente, se conoce que:

$$\left(\operatorname{Ann}_{A_n[s]}(f^s) + A_n[s]\langle f, \tfrac{\partial f}{\partial_{x_1}}, ..., \tfrac{\partial f}{\partial_{x_n}}\rangle\right) \cap K[s] = \langle \tfrac{b_f(s)}{s+1}\rangle =: \langle \tilde{b_f}(s)\rangle.$$

Donde a $\tilde{b_f}(s)$ se le denomina el **polinomio de Bernstein-Sato reducido** de f.
De esta forma se reduce un poco la complejidad de los algoritmos anteriores.

Ejemplo: En `Singular/Plural`, para trabajar con lo visto en esta sección, se puede importar la librería `"dmod.lib"` [25], en la cual se encuentran los comandos `checkRoot`, `checkRoot1` y `chekRoot2`.

El comando `checkRoot1` sigue principalmente el algoritmo 2.9. Es decir, dado un número racional $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$ y un polinomio $f \in K[x_1, ..., x_n]$, devuelve 1 en caso de que α sea una raíz de $b_f(-s)$ y 0 en caso contrario.

Por otro lado, el comando `checkRoot2` comprueba lo mismo que el comando anterior y después, en caso de que α sea raíz, calcula la multiplicidad de dicha raíz usando el ideal anulador s-paramétrico como hemos visto anteriormente. Es decir, dicho comando se basa en los algoritmos 2.10 y 2.11 (realiza el proceso en uno u otro dependiendo del input que se le dé al comando dentro de `Singular`).

Por último, `checkRoot` es un comando más general, que básicamente recibe por input: `(poly f, number a, [,S,eng])`, donde f es un polinomio, a es un número racional positivo (en caso de que no lo sea, este proceso devuelve un mensaje de error), `S` es una de las dos cadenas de caracteres siguientes `alg1` ó `alg2`, donde, por defecto, el algoritmo tomará `alg1`, y `eng` es el proceso de cálculos de bases de Gröbner que se usarán en el algoritmo (si `eng` $\neq 0$, entonces se usará el comando `std`, que viene de *standar basis*, para el cálculo de las bases de Gröbner, y en caso contrario, por defecto, se usará el proceso de `slimgb`). Si se ha tomado `S` $=$ `alg1` se aplicará `checkRoot`. Es decir, se comprobará únicamente si α es raíz. En caso contrario, si se toma `S` $=$ `alg2`, se procederá con `checkRoot2`, y por tanto, se calculará también la multiplicidad de α en caso de ser raíz.

• Sea $f = x^3y^2 + x^4 + y^3 \in \mathbb{C}[x, u]$. Entonces si tomamos $\alpha = \frac{17}{12}$ obtenemos:

```
ring r = 0,(x,y),dp;
poly f = x^4 + x^3y^2 + y^3;
checkRoot(f,17/12);
==> 1
```

Es decir α es raíz del polinomio de Bernstein-Sato asociado a f. En este caso el polinomio de Bernstein-Sato asociado a f no es muy costoso de calcular mediante el comando `bfct` que se encuentra en la librería `"bfun.lib"` [3]:

```
bfct(f);
[1]:
   _[1]=-7/12
   _[2]=-5/6
   _[3]=-11/12
   _[4]=-1
   _[5]=-13/12
   _[6]=-7/6
   _[7]=-17/12
[2]:
   1,1,1,1,1,1,1
```

Donde como ya hemos visto, `bfct` evaluado sobre un polinomio f, devuelve dos listas, donde en la primera se encuentran las raíces de $b_f(s)$ y en la segunda sus multiplicidades ordenadas según el orden de las raíces.

3 Recubrimientos de Gröbner en PBW-álgebras

Este capítulo se va a dividir en dos partes. En la primera, vamos a estudiar el concepto de *"Comprehensive Gröbner Systems"* (CGS) sobre las PBW-álgebras y se va a estudiar un algoritmo para el cálculo de estos, también conocidos por, recubrimientos de Gröbner sobre dichas álgebras. Y en la segunda parte, veremos sus aplicaciones sobre los ideales de Bernstein-Sato y b-funciones.
El concepto de Recubrimiento de Gröbner o sistema exhaustivo de Gröbner fue introducido por Volker Weispfenning [41] en el caso de anillos de polinomios para la resolución de sistemas de polinomios paramétricos. Desde entonces se han implementado muchos más algoritmos con ese mismo propósito. En el caso de anillos de polinomios, una referencia muy detallada de ello es la reciente [28], en la cual se implementan algoritmos en el sistema `Singular` para el cálculo de recubrimientos de Gröbner de ideales paramétricos sobre $K[x_1, ..., x_n]$ en la librería `"grbcov.lib"` [29]. De la misma forma, en el mismo anillo de polinomios, D. Kapur, Y. Sun, D. Wang [17] y Katsusuke Nabeshima [30] han implementado algoritmos muy efectivos para el cálculo de CGS.

Para este estudio del cálculo de CGS sobre PBW-álgebras se van a utilizar resultados de Katsusuke Nabeshima, Katsuyoshi Ohara y Shinichi Tajima [31], los cuales han implementado algoritmos para el cálculo de CGS en el sistema algebraico `Risa/Asir`. Estos autores han conseguido implementar dichos algoritmos mediante la extensión de los resultados de Kalkbrener [16], sobre estabilidad de bases de Gröbner bajo homomorfismos de especializaciones y la extensión de los resultados conocidos de CGS sobre anillos de polinomios, a las PBW-álgebras.

3.1 Algoritmo CGS

La notación usual que vamos a utilizar a lo largo de esta sección, va a ser la siguiente. Sea K un cuerpo de característica 0 y $\overline{K}$ una clausura algebraica del cuerpo K.
Sean $x = (x_1, ..., x_n)$ e $u = (u_1, ..., u_m)$ dos conjuntos de variables distintas. A lo largo de este capítulo vamos a basar los resultados principalmente en las siguientes dos G-álgebras:

$$A_n[u] = K[u] \otimes A_n = K[u]\langle x, \partial_x : Q\rangle \quad \text{y}$$
$$K\langle u, x, \partial_x\rangle = K\langle u, x, \partial_x : Q'\rangle.$$

Donde $Q = \{\partial_j x_i = x_i\partial_j + \delta_{ij} \mid i, j = 1, ..., n\}$, con las relaciones conmutativas ya vistas, y $Q' = \{\partial_j x_i = x_i\partial_j + \delta_{ij}, [u_k, u_l] = [u_k, x_l] = [u_k, \partial_{x_l}] = 0 \mid i, j, l = 1, ..., n, k = 1, ..., m\}$. Es decir, Q' es Q junto con las relaciones conmutativas de las variables u con todas las variables. Por tanto, como hemos estado omitiendo las relaciones conmutativas del conjunto de relaciones, escribiremos sin pérdida de generalidad $Q = Q'$. La diferencia entre estas dos G-álgebras es simplemente la forma de interpretar sus coeficientes: mientras que en $A_n[u]$ los coeficientes son polinomios en las variables $u_1, ..., u_m$, en $K\langle u, x, \partial_x : Q\rangle$ los coeficientes son elementos del cuerpo K.

El uso de la segunda G-álgebra es simplemente para el cálculo de bases de Gröbner en la primera G-álgebra. Es decir, para un conjunto H en $A_n[u]$ el cálculo de una base de Gröbner de H en $A_n[u]$, se traducirá al cálculo de una base de Gröbner de H en $K\langle u, x, \partial_x : Q\rangle$ respecto de un orden monomial por bloques, que ahora veremos lo que es. Es decir, la diferencia entre ambas G-álgebras es puramente computacional, ya que teóricamente son idénticas.

Ya hemos visto que, debido a la existencia de PBW-bases en ambas G-álgebras, existe un isomorfismo natural entre K-espacios vectoriales $\varphi : K\langle u, x, \partial_x : Q'\rangle \to K[u, x, \xi]$ definido por $\varphi(u^\gamma x^\alpha \partial_x^\beta) \mapsto u^\gamma x^\alpha \xi^\beta$. De la misma forma se define sobre $\varphi : A_n[u] \to K[u][x, \xi]$. De esta forma, podemos suponer que los operadores en ambas G-álgebras vendrán dados en su forma canónica con respecto a su PBW-álgebra.

Como hemos comentado antes, vamos a considerar un orden monomial por bloques $\prec$. Este va a ser, en particular, el orden producto de los órdenes monomiales $\prec_{x\cup\partial_x}$ y $\prec_u$. Es decir, tomaremos un orden monomial en las variables $x \cup \partial_x$ (denotado por $\prec_{x\cup\partial_x}$) y otro orden monomial sobre las variables u (denotado por $\prec_u$), y consideraremos $\prec$

$= \prec_{x\cup\partial_x} \cdot \prec_u$, que es el orden monomial que primero compara los exponentes de los monomios líderes en las variables $x \cup \partial_x$ (es decir, con respecto al orden $\prec_{x\cup\partial_x}$) y, en caso de ser idénticos, usa el segundo orden monomial sobre las variables de u.
Por ejemplo, consideraremos que en ese orden producto se verifique $u \prec \partial_x \prec x$. Para diferenciar entre la primera G-álgebra y la segunda estos órdenes monomiales, denotartemos $\prec_z$ y $\prec$ respectivamente.

De igual forma que hicimos en la sección de PWB-álgebras denotamos, dado un operador $P \in K\langle u, x, \partial_x\rangle$, por $\mathrm{lm}(P)$, $\mathrm{lc}(P)$ y $\mathrm{lt}(P)$ al monomio líder, el coeficiente líder y el término líder de P. Donde $\mathrm{lt}(P) = \mathrm{lc}(P) \cdot \mathrm{lm}(P)$. Al igual sobre $A_n[u]$, denotamos $\mathrm{lt}_z(P)$,$\mathrm{lc}_z(P)$ y $\mathrm{lm}_z(P)$. Donde aquí $P \in A_n[u]$. Como ya vimos, se pueden extender estos conceptos a conjuntos de operadores sobre las dos PBW-álgebras anteriores.

Sea I un ideal en una de las dos PBW-álgebras anteriores. Diremos que I es un ideal paramétrico considerando las variables $u_1, \dots, u_m$ como parámetros. El objetivo es, dado un ideal paramétrico, encontrar una base de Gröbner para cada valor que le damos a los parámetros de u. Es decir, dado $\overline{a} \in \overline{K}^m$, construir una base de Gröbner del ideal $I_{u=\overline{a}}$ sobre $\overline{A_n} = \overline{K}\langle x, \partial_x : Q\rangle$. Para ver esto, comencemos con la siguiente definición que detalla la notación que hemos tomado de $I_{u=\overline{a}}$.

Definición 3.1. *Para cualquier $\overline{a} \in \overline{K}^m$ definimos el homomorfismo canónico de especialización $\sigma_{\overline{a}} : K[u]\langle x, \partial_x : Q\rangle$ (resp. $K\langle u, x, \partial_x\rangle$) $\to \overline{K}\langle x, \partial_x : Q\rangle$ de la forma $p(u, x, \partial_x) \mapsto \sigma_{\overline{a}}(p(u, x, \partial_x)) = p(a, x, \partial_x)$. Es decir, como la aplicación que sustituye los parámetros $u = (u_1, \dots, u_m)$ del operador paramétrico, por los valores $\overline{a} = (a_1, \dots, a_m) \in \overline{K}^m$. Se puede extender esta definición a un ideal paramétrico $I \subseteq K[u]\langle x, \partial_x : Q\rangle$ (resp. $K\langle u, x, \partial_x\rangle$) de la forma $I_{u=\overline{a}} = \sigma_{\overline{a}}(I) := \{\sigma_{\overline{a}}(p) \mid p \in I\} \subseteq \overline{K}\langle x, \partial_x : Q\rangle$.*

Definición 3.2. *Sean $f_1, \dots, f_r \in K[u]$ un conjunto finito de polinomios. La variedad afín del conjunto de polinomios $f_1, \dots, f_r$ viene dada por:*

$$\mathcal{V}(f_1, \dots, f_r) = \{\overline{a} \in \overline{K}^m \mid f_i(\overline{a}) = 0, \forall i = 1, \dots, r\}$$

El conjunto de puntos de $\overline{K}^m$ que anulan todos los polinomios $f_1, \dots, f_r$.

Definición 3.3. *Sea X una variedad cuasi-proyectiva [14], equipada con la topología de Zariski. Diremos que un subconjunto C de X es **localmente cerrado** si $C = V \cap Z$, donde V es abierto y Z es cerrado de la topología de Zariski.*
*Diremos que un subconjunto de X es **constructible**, si es una unión finita disjunta de conjuntos localmente cerrados.*

Definición 3.4. *Llamaremos a un conjunto constructible de la forma $\mathcal{V}(g_1, \dots, g_r) \setminus \mathcal{V}(g'_1, \dots, g'_l) \subseteq \overline{K^m}$ con $g_1, \dots, g_r, g'_1, \dots, g'_l \in K[u]$, una estratificación. (Usualmente se* *denota $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2 ..., \mathbb{A}_l$ para representar los estratos, que son subconjuntos disjuntos, localmente cerrados que cubren la estratificación al completo).*

En realidad si S es un conjunto localmente cerrado, entonces existen ideales radicales I, J tales que $S = \mathcal{V}(I) \setminus \mathcal{V}(J)$, donde además estos ideales están únicamente determinados por S debido a la correspondencia unívoca entre ideales radicales y variedades. Al par (I, J) se le denomina la representación C-canónica del conjunto localmente cerrado S. (Para más detalle de la existencia de estos ideales radicales y dicha correspondencia ver: [28]).

Definición 3.5. *Sea $\prec$ un orden monomial admisible por bloques sobre $A_n[u]$. Sea $P \subseteq A_n[u]$ y $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2 ..., \mathbb{A}_l$ estratos en $\overline{K}^m$. Sean $G_1, ..., G_l$ subconjuntos de $A_n[u]$. Diremos un conjunto finito de pares $\mathcal{G} = \{(\mathbb{A}_1, G_1), ..., (\mathbb{A}_l, G_l)\}$ es un **sistema exhaustivo de Gröbner (CGS)** (o **recubrimiento de Gröbner**) sobre $\mathbb{A}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{A}_l$, de $\langle P \rangle$, si para todo $\overline{a} \in \mathbb{A}_i$, $\sigma_{\overline{a}}(G_i)$, es una base de Gröbner del ideal $\langle \sigma_{\overline{a}}(P) \rangle$ (ideal de extensión) en $\overline{K}\langle x, \partial_x : Q \rangle$, para cada $i = 1, ..., l$. Llamaremos al par $(\mathbb{A}_i, G_i)$ de $\mathcal{G}$ como el **i-ésimo segmento** de $\mathcal{G}$.*
Diremos simplemente que $\mathcal{G}$ es un sistema exhaustivo de Gröbner para $\langle P \rangle$, si tenemos que $\mathbb{A}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{A}_l = \overline{K^m}$.

Es decir, un sistema exhaustivo de Gröbner para un subconjunto $P \subseteq A_n[u]$ básicamente consiste en un conjunto finito de pares $\mathcal{G} = \{(\mathbb{A}_i, G_i) : 1 \leq i \leq l\}$ donde los $\mathbb{A}_i \subseteq \overline{K^m}$ forman una partición del espacio paramétrico $\overline{K^m}$ y son subconjuntos localmente cerrados. Y donde los G_i son bases de Gröbner del ideal extensión de P por $\sigma_{\overline{a}}$ al sustituir sus parámetros por valores dentro de la partición correspondiente.

Hay muchos algoritmos para el cálculo de un sistema exhaustivo de Gröbner. Por ejemplo, como mencionábamos al inicio de esta sección, en `SINGULAR` tenemos la librería `"grobcov.lib"` [29] donde Antonio Montes y Hans Schoenemann han implementado un algoritmo, `grobcov`(I) que calcula el recubrimiento de Gröbner de un ideal paramétrico $I \subseteq K[u][x]$.

Definición 3.6. *Dado un subconjunto $G \subset A_n[u]$, se define una **base minimal** de G como el subconjunto $F \subset \mathrm{lm}(G)$ que verifica las siguientes condiciones:*

1. *Para cada operador $g \in G$ existe un operador $m \in F$ tal que $m | g$.*
2. *Para cada par de operadores $m \neq m' \in F$, se tiene que m no divide a m' y viceversa.*

Denotaremos al conjunto F verificando las propiedades anteriores por MBlm(G).

Notar que dado un conjunto $G \subset A_n[u]$, pueden existir distintas bases minimales de G, pero en cualquier caso se tiene claramente que $\langle \mathrm{lm}(F) \rangle = \langle \mathrm{lm}(G) \rangle$.

El siguiente resultado es una extensión del teorema de Kapur-Sun-Wang [28] que, en particular, prueba la estabilidad [16] de las bases de Gröbner bajo homomorfismos de especialización en el PBW-álgebra $A_n[u] = K[u]\langle x, \partial_x : Q\rangle$.

Teorema 3.1. *Sea G una base de Gröbner de un ideal $I \subseteq A_n[u]$ con respecto a un orden monomial por bloques $\prec$ (para ciertos $\prec_{x\cup\partial_x}$ y $\prec_u$). Sean $E := G \cap K[u]$, y sea $\{m_1, \dots, m_l\}$ =MBlm$(G \setminus E)$. Pongamos que $G_i = \{f \in G \setminus E \mid \mathrm{lm}_z(f) = m_i\}$ para todo $i = 1, \dots, l$. Entonces, para todo $\overline{a} \in \mathcal{V}(E) \setminus \bigcup_{i=1}^{l} \mathcal{V}(\mathrm{lc}_z(G_i))$, se tiene que $\sigma_{\overline{a}}(G_1 \cup \cdots \cup G_l)$ es una base de Gröbner de $\sigma_{\overline{a}}(I)$ con respecto del orden monomial $\prec_{x\cup\partial_x}$ en $A_n(\overline{K}) = \overline{K}\langle x, \partial_x : Q\rangle$.*

Demostración. Para todo $\overline{a} \in \mathcal{V}(E) \setminus \bigcup_{i=1}^{l} \mathcal{V}(\mathrm{lc}(G_i))$, existe un $p_i \in G_i$ tal que $\sigma_{\overline{a}}(\mathrm{lm}(p_i)) \neq 0$ para cada $i = 1, \dots, l$. Supongamos que $G = \{g_1, \dots, g_r\}$ y que $P = \{p_1, \dots, p_l\}$. Entonces, claramente $P \subseteq G$ y MBlt(P)=MBlt$(G \setminus E) = \{m_1, \dots, m_l\}$ se mantiene. También tenemos que

$$\text{Para todo } \overline{a} \in \mathcal{V}(E) \setminus \textstyle\bigcup_{i=1}^{l} \mathcal{V}(\mathrm{lc}(G_i)),\ \sigma_{\overline{a}}(\mathrm{lm}(I)) = \mathrm{lm}(\sigma_{\overline{a}}(I)).$$

La prueba de esto se puede encontrar en [31]. Haciendo uso de esto, tenemos:

$$\begin{gathered}\mathrm{lm}(\sigma_{\overline{a}}(I)) = \langle \sigma_{\overline{a}}(\mathrm{lm}(g_1)), \dots, \sigma_{\overline{a}}(\mathrm{lm}(g_r))\rangle = \langle \mathrm{MBlm}(G \setminus E)\rangle = \\ \langle \mathrm{MBlm}(G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_l)\rangle = \langle \sigma_{\overline{a}}(\mathrm{lm}(G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_l))\rangle\end{gathered}$$

en $\overline{K}\langle x, \partial_x : Q\rangle$. Como $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_l \subset I \subset K[u]\langle x, \partial_x : Q\rangle$, es claro que $\sigma_{\overline{a}}(G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_l) \subset \sigma_{\overline{a}}(I) \subset \overline{K}\langle x, \partial_x : Q\rangle$. Por lo tanto, $\sigma_{\overline{a}}(G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_l)$ es una base de Gröbner de $\sigma_{\overline{a}}(I)$ con respecto el orden monomial $\prec_{x\cup\partial_x}$ en $\overline{K}\langle x, \partial_x : Q\rangle$. ▮

Para la construcción de un algoritmo efectivo para el cálculo de CGS, en vez de usar directamente el teorema anterior, vamos a usar el siguiente corolario, que esencialmente es el mismo que el teorema de Kapur-Sun-Wang [17]. En la referencia de [28] podemos encontrar el resultado de Kapur-Sun-Wang, seguido del algoritmo para el cálculo de un CGS, el cual es muy similar al que estudiaremos posterior al siguiente resultado.

Corolario 3.1 (Kapur-Sun-Wang). Usando la misma notación que en el teorema anterior, sea $g_i \in G_i$ y $h_i = \mathrm{lc}(g_i)$ para cada $i = 1, \dots, l$. Entonces, para todo $\overline{a} \in \mathcal{V}(E) \setminus \mathcal{V}(h_1 h_2 \cdots h_l)$, $\sigma_{\overline{a}}(\{g_1, \dots, g_l\})$ es una base de Gröbner minimal de $\sigma_{\overline{a}}(I)$ con respecto a $\prec_{x\cup\partial_x}$ en $A_n(\overline{K}) = \overline{K}\langle x, \partial_x : Q\rangle$.

Demostración. Como $\mathcal{V}(E) \setminus \mathcal{V}(h_1 h_2 \cdots h_l) \subseteq \mathcal{V}(E) \setminus (\mathcal{V}(\mathrm{lc}(G_1)) \cup \mathcal{V}(\mathrm{lc}(G_2)) \cup \ldots \cup \mathcal{V}(\mathrm{lc}(G_l))$, usando el teorema anterior

$$\langle \sigma_{\overline{a}}(\mathrm{lm}(\{g_1, g_2, \ldots, g_l\})) \rangle = \langle \sigma_{\overline{a}}(\mathrm{lm}(G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_l)) \rangle.$$

Por lo tanto, $\sigma_{\overline{a}}(\{g_1, g_2, \ldots, g_l\})$ es una base de Gröbner de $\sigma_{\overline{a}}(I)$ con respecto a $\prec_{x \cup \partial_x}$ en $\overline{K}\langle x, \partial_x : Q\rangle$. Como ningún $\mathrm{lm}(\sigma_{\overline{a}}(g_i))$ en el conjunto $\mathrm{lm}(\{\sigma_{\overline{a}}(g_1), \sigma_a(g_2), \ldots, \sigma_a(g_l)\})$ divide a otro $\mathrm{lm}(\sigma_{\overline{a}}(g_j))$ para $i \neq j$ con $i, j = 1, \ldots, l$, entonces además es una base de Gröbner minimal. ▮

Algoritmo 3.1. $\texttt{CGS}(E, N, P, \prec)$
Input: E, N subconjuntos de $K[u]$; P un subconjunto finito de $A_n[u] = K[u]\langle x, \partial_x : Q\rangle$; $\prec$ un orden monomial por bloques sobre $A_n[u]$.
Output: $\mathcal{G}$ un recubrimiento de Gröbner de $\langle P\rangle$ con respecto de $\prec$ sobre el subconjunto $\mathcal{V}(E) \setminus \mathcal{V}(N)$ de $\overline{K}^m$.
BEGIN
$\mathcal{G} \leftarrow \emptyset$;
if $\mathcal{V}(E) \setminus \mathcal{V}(N) = \emptyset$ **then** return $\mathcal{G}$; **end-if**
$G \leftarrow \texttt{GB}(P \cup E, \prec)$; (Algoritmo para el cálculo de una base de Gröbner)
if $1 \in G$ **then** return $\{(\mathcal{V}(E) \setminus \mathcal{V}(N), \{1\})\}$; **end-if**
$G' \leftarrow G \setminus ((G \cap K[u]) \cap \langle E\rangle)$;
$\{m_1, \ldots, m_l\} \leftarrow \mathrm{MBlm}(G')$; $h \leftarrow 1$;
for $i = 1, \ldots, l$ **do**
  $g_i \leftarrow$ tomar g_i de G' tal que $\mathrm{lm}(g_i) = m_i$;
  $h \leftarrow \mathrm{lc}(g_i) \cdot h$;
end-for
$h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \cdots h_r^{\alpha_r} \leftarrow \texttt{factor}(h)$;
if $(\mathcal{V}(E) \setminus \mathcal{V}(N)) \setminus \mathcal{V}(h_1 h_2 \cdots h_r) \neq \emptyset$ **then**
  $\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{G} \cup \{(\mathcal{V}(E) \setminus \mathcal{V}(N \wedge \{h_1 h_2 \cdots h_r\}), \{g_1, g_2, \ldots, g_l\})\}$;
end-if
for $i = 1, \ldots, r$ **do**
  $\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{G} \cup \texttt{CGS}(E \cup \{h_i\}, N \wedge \{h_1 h_2 \cdots h_{i-1}\}, G', \prec)$;
end-for
return($\mathcal{G}$) **END**

(Donde si $A, B \subset K[u]$, $A \wedge B = \{pq | p \in A, q \in B\}$). Y la función $\texttt{factor}(h)$ calcula la factorización de h en $K[u]$.

Este algoritmo funciona de la siguiente forma:
(1) Primero, prueba si $\mathcal{V}(E) \setminus \mathcal{V}(N)$ es vacío o no. En el caso de que sea vacío, el algoritmo termina devolviendo el conjunto vacío.
(2) Suponiendo ahora que $\mathcal{V}(E) \setminus \mathcal{V}(N) \neq \emptyset$, el algoritmo calcula una base de Gröbner, G, de $P \cup E$ con respecto a $\prec$, $\mathtt{GB}(P \cup E, \prec)$. Si $1 \in G$, entonces el algoritmo termina y devuelve $\{(\mathcal{V}(E) \setminus \mathcal{V}(N), \{1\})\}$.
(3) Si no se verifica lo anterior, entonces considera $G \cap K[u]$ que básicamente es la parte de G que contenga únicamente parámetros (se puede obtener de manera fácil ya que el orden monomial producto $\prec$, es de eliminación sobre dichos parámetros). Después obtiene $G' = G \setminus ((G \cap K[u]) \cap \langle E \rangle)$ y calcula una base minimal de G' que viene denotada por $\{m_1, ..., m_l\}$.
(4) Aquí, siguiendo el corolario anterior al algoritmo, toma ciertos elementos $g_i \in G'$ tales que $\mathrm{lm}(g_i) = m_i$, calcula el producto de todos los coeficientes líderes de estos g_i y factoriza dicho producto en $K[u]$. Es decir, en orden, calcula lo siguiente

$$\{h_1, ..., h_l\} = \{\mathrm{lc}(g_i) \mid g_i \in G' \text{ con } \mathrm{lm}(g_i) = m_i\}$$
$$h = \prod_{i=1}^{l} \mathrm{lc}(g_i)$$
$$h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \cdots h_r^{\alpha_r} = \mathtt{factor}(h)$$

Llegado a este punto, usando el corolario anterior, sabemos que para cualquier $\overline{a} \in \mathcal{V}(E) \setminus \mathcal{V}(h_1 h_2 \cdots h_r)$, $\sigma_{\overline{a}}(\{g_1, ..., g_l\})$ es una base de Gröbner minimal de $\sigma_{\overline{a}}(P)$. Por tanto como también debemos quitar el conjunto de puntos que anulan N, el algoritmo realiza la comprobación $(\mathcal{V}(E) \setminus \mathcal{V}(N)) \setminus \mathcal{V}(h_1 h_2 \cdots h_r) \neq \emptyset$. En caso de que se verifique, estamos en las condiciones de dicho corolario y por tanto añadimos el segmento $(\mathcal{V}(E) \setminus \mathcal{V}(N \wedge \{h_1 h_2 \cdots h_r\}), \{g_1, ..., g_l\})$ al Recubrimiento de Gröbner (CGS).
(5) (**Paso recursivo.**) Finalmente, el algoritmo considera los subconjuntos disjuntos restantes de $\mathcal{V}(E) \setminus \mathcal{V}(N)$. Primero, realiza de nuevo el proceso donde se cumpla $h_1 = 0$; después el segmento donde $h_2 = 0$ pero $h_1 \neq 0$, y así sucesivamente, en el paso i-ésimo, el segmento donde $h_i = 0$ y ninguno de los anteriores a h_i sea 0. Estos claramente forman una partición del conjunto total disjunta.

Teorema 3.2. *El algoritmo `CGS` termina y devuelve un recubrimiento de Gröbner de $\langle P \rangle$ sobre $\mathcal{V}(E) \setminus \mathcal{V}(N)$.*

Demostración. Usando el corolario 3.1, $(\mathcal{V}(E) \setminus \mathcal{V}(N \wedge \{h_1 h_2 \cdots h_r\}), \{g_1, ..., g_l\})$ es un segmento del recubrimiento de Gröbner. Para probar que el algoritmo termina es suficiente probar que, en cada iteración, el algoritmo sólo crea ramas finitas. En cada iteración de `CGS`, el número de elementos de $\mathrm{MBlm}(G')$ es finito. Ya que $\mathrm{lc}(g_i) \in K[u]$

para algún $g_i \in G$, donde G es una base de Gröbner reducida de $\langle P \cup E\rangle \subset A_n[u]$ y $\mathrm{lc}(g_i) \notin \langle E\rangle \subset K[u]$, y de lo contrario, $g \in G$ se puede simplificar aún más con la base de Gröbner de $\langle E\rangle$. En la siguiente llamada recursiva de CGS, el **input** $E \cup \{h_j\}$ cuyo ideal es estrictamente mayor que $\langle E\rangle$ de la anterior llamada recursiva de CGS. Por tanto, cada rama termina en un número finito de pasos.

Veamos un par de ejemplos del cálculo de recubrimientos de Gröbner mediante el procedimiento anterior. Para ello vamos a usar el algoritmo implementado en [31] en el sistema algebraico Risa/Asir. Para ello, el comando usado para la realización del proceso anterior es newcgsw1($P, U, [V, D], Ord$), que calcula un recubrimiento de Gröbner de $\langle P\rangle$ con respecto del orden Ord. (2 es el orden lexicográfico, 1 es el orden lexicográfico total y 0 es el orden lexicográfico inverso, los cuales son todos admisibles sobre el PBW-álgebra $A_n[u]$). U es una lista de parámetros, que en nuestros ejemplos van a ser $[a, b]$ y $[a, b, c]$ respectivamente. V es una lista de variables y D es una lista de los operadores diferenciales respecto de las variables de V.

Ejemplos: 1. Sea $P = \{x^2\partial_y + 2x\partial_x^2 + ax\partial_x^2, xy\partial_x^2 + by, y^2\partial_x + by^2\} \subset A_2(\mathbb{C})[a, b] = \mathbb{C}[a, b]\langle x, y, \partial_x, \partial_y\rangle$ y $\prec$ el orden monomial lexicográfico sujeto a $\partial_y \prec \partial_x \prec y \prec x$. Entonces usando el algoritmo anterior, obtenemos que un recubrimiento de Gröbner de F con respecto a $\prec$ viene dado por:

$$\begin{gathered}\{(\mathcal{V}(b) \setminus \mathcal{V}(b, a^2 + 4a + 4), \{a\partial_y + 2\partial_y, a\partial_x + 2\partial_x\}),\\ (\mathcal{V}(b, a + 2), \{y\partial_y^2 + 2\partial_y, y\partial_x, y^2\partial_y, x^2\partial_x, x^2\partial_x - 2xy\partial_y\}),\\ (\mathcal{V}(a + 2) \setminus \mathcal{V}(b, a + 2), \{by, bx^2\}),\\ (\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{V}(ba + 2b), \{1\})\}.\end{gathered}$$

Esto nos quiere decir que:
- Cuando $b = 0$ y no se anulan a la vez $b, a^2 + 4a + 4$ entonces una base de Gröbner, fijando los valores de a y b en esos parámetros, viene dada por $\{a\partial_y + 2\partial_y, a\partial_x + 2\partial_x\}$.
- Cuando $b = 0$ y $a + 2 = 0$ entonces una base de Gröbner viene dada por $\{y\partial_y^2 + 2\partial_y, y\partial_x, y^2\partial_y, x^2\partial_x, x^2\partial_x - 2xy\partial_y\}$.
- Cuando $a + 2 = 0$ y no se anulan a la vez $b, a + 2$ la base de Gröbner viene dada por $\{by, bx^2\}$.
- Por último cuando no se anula $ba + 2b = b(2 + a)$ tenemos que la base de Gröbner es $\{1\}$, como indica el paso (2) que comentábamos tras el algoritmo CGS.

Donde el comando directamente escrito en Risa/Asir para este cálculo ha sido
newcgsw1($[x^2 * dy + 2 * x * dx^2 + a * x * dx^2, x * y * dx^2 + b * y, y^2 * dx + b *$

$y^2], [a, b], [[x, y], [dx, dy]], 2);$

2. Sea $P = \{ax^2y + by\partial_y + \partial_x, 2x^2\partial_x + bxy, xy^2\partial_x + cy + \partial_x\} \subseteq A_2(\mathbb{C})[a, b, c]$ y de nuevo $\prec$ el orden lexicográfico. Entonces obtenemos:

$$\{(\mathcal{V}(a, b, c), \{\partial_x\}), (\mathcal{V}(a, b)\backslash\mathcal{V}(a, b, c), \{\partial_x, cy\}), (\mathcal{V}(b)\backslash\mathcal{V}(a, b), \{\partial_x, ay\}), (\mathbb{C}\backslash\mathcal{V}(b), \{1\})\}$$

Este ejemplo es mucho más intuitivo de ver. Lo que nos quiere decir este output es:
- Cuando los tres parámetros son nulos, el conjunto P es de la forma $\{\partial_x, 2x^2\partial_x, xy^2\partial_x + \partial_x\}$. Por lo que es claro que todos sus elementos se reducen, al calcular una base de Gröbner, a ∂_x.
- Si hacemos $a = b = 0$ y quitamos el origen, tendremos al sustituir $\{\partial_x, 2x^2\partial_x, xy^2\partial_x + cy + \partial_x\}$. Luego, en este caso, al reducir respecto de ∂_x todos los elementos, obtendremos que el último se reducirá a cy y por tanto tendremos que la base de Gröbner viene dada por $\{\partial_x, cy\}$
- Cuando sustituimos $b = 0$ y quitamos los puntos donde también ocurre $a = 0$ obtenemos que la base de Gröbner viene dada por $\{\partial_x, ay\}$.
- Por último, Cuando consideramos todos los puntos (a, b, c) con b no nulo, obtenemos que la base de Gröbner es todo el espacio.

El comando que se ha escrito directamente en `Risa/Asir` para el cálculo es
`newcgsw1(`$[a * x^2 * y + b * y * dy + dx, 2 * x^2 * dx + b * x * y, y^2 * x * dx + c * y + dx], [a, b, c], [[x, y], [dx, dy]], 2);$

Notar también que en este ejemplo se puede ver con mayor facilidad la recursión en la que se basa el algoritmo que vimos anteriormente.
Estos ejemplos calculados en `Risa/Asir` mediante el comando anterior se han computado en menos de un segundo, aunque notar que con otros ejemplos se ha tenido que finalizar la operación ya que el programa no finalizada. Lo cual indica que el coste computacional de este algoritmo es enorme.

3.2 Recubrimientos de Gröbner para el cálculo de la b-función e ideales de Bernstein-Sato

El cálculo de un recubrimiento de Gröbner de un ideal paramétrico dado, presenta varias aplicaciones directas del cálculo de las b-funciones al trabajar sobre el álgebra de Weyl con parámetros. En esta subsección vamos a usar el algoritmo para el cálculo de recubrimientos de Gröbner para calcular el ideal anulador s-paramétrico asociado a un conjunto de polinomios $f_1, \ldots, f_q \in K[u][x]$ y, posterior a ello, estudiaremos los resultados ya conocidos para el cálculo del ideal de Bernstein-Sato y el polinomio de Bernstein-Sato por medio de estos recubrimientos de Gröbner, haciendo uso del ideal anulador s-paramétrico como hemos hecho hasta ahora.

3.2.1 CGS para el cálculo del ideal anulador s-paramétrico mediante el método de Briançon y Maisonobe

Dados $f_1, \ldots, f_q$ polinomios no constantes en $K[x_1, \ldots, x_n]$, vimos en la sección 2.4.2 un método para el cálculo del ideal anulador s-paramétrico asociado a $F^s = f_1^{s_1} \cdots f_q^{s_q}$, donde $s = (s_1, \ldots, s_q)$ eran nuevas variables a considerar. Este ideal anulador lo denotábamos y definíamos de la forma:

$$\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(F^s) = \{p \in A_n[s] \mid p \cdot F^s = 0\}$$

el cual se podía calcular mediante el ideal de Malgrange generado por los elementos:

$$\begin{gathered} \partial_{x_i} + \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial f_k}{\partial_{x_i}} \partial_{t_k}, \text{ para todo } i = 1, .., n \text{ y} \\ s_j + f_j \partial_{t_j}, \text{ para todo } j = 1, \ldots, q. \end{gathered}$$

Sobre el G-álgebra $B = A_n \otimes_K K\langle s_1, \ldots, s_q, \partial_{t_1}, \ldots, \partial_{t_q} : \{\partial_{t_j} s_k = s_k \partial_{t_j} - \delta_{jk} \partial_{t_j}\}\rangle$, calculando la intersección de este ideal con $A_n[s]$. Es decir, si notamos por I al ideal generado por los elementos anteriores en B, entonces $\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(F^s) = I \cap A_n[s]$ ([8]).

Este algoritmo se puede traducir al cálculo de un recubrimiento de Gröbner sobre el ideal I con un orden de eliminación adecuado para las variables ∂_{t_i}, (como ya vimos en dicha sección, son las variables que queremos eliminar), de la siguiente forma.

Algoritmo 3.2. $\mathtt{ANN}(f_1, \ldots, f_q)$
Input: $f_1, \ldots, f_q$ polinomios paramétricos en $K[u][x]$,
Output: $\mathcal{A} = \{(E_1, N_1, G_1), (E_2, N_2, G_2), \ldots, (E_r, N_r, G_r)\}$ tal que para todo $a \in \mathcal{V}(E_i) \setminus \mathcal{V}(N_i)$, $\sigma_a(G_i)$ es una base de $\mathrm{Ann}(\sigma_a(f_1^{s_1} f_2^{s_2} \cdots f_q^{s_q}))$ para todo $i = 1, \ldots, r$.
BEGIN

$\mathcal{A} \leftarrow \emptyset$
$I \leftarrow \{s_j + f_j\partial_{t_j}, \partial_{x_i} + \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} t_k | i = 1, ..., n, j = 1, ..., q\}$
$\prec_{\{\partial_t\}} \leftarrow$ un orden de eliminación para $\{\partial_t\}$ sobre la base de monomios $\mathcal{M}(s, x, \partial_x, \partial_t)$
$\mathcal{G} \leftarrow \mathtt{CGS}(\{0\}, \{1\}, I, \prec_{\{\partial_t\}})$
while $\mathcal{G} \neq \emptyset$ **do**
    selecciona (E, N, G) de $\mathcal{G}$
    $\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{G} \setminus \{(E, N, G)\}$;
    $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A} \cup \{(E, N, G \cap A_n[s])\}$
end-while
return $\mathcal{A}$
END

Notar que en $\mathtt{CGS}(\{0\}, \{1\}, I, \prec_{\partial_t})$, estamos poniendo $E = \{0\}$ y $N = \{1\}$ ya que queremos calcularlo en todo el espacio paramétrico sin imponer condiciones. También nptar que el algoritmo CGS está en un principio definido para un conjunto $P \in A_n[u]$, pero en realidad se puede extender a una PBW-álgebra cualquiera ([31]).

3.2.2 Ideales de Bernstein-Sato y b-función reducida mediante el algoritmo CGS

Una vez calculado el ideal anulador s-paramétrico asociado a f^s (resp. a $F^s = f_1^{s_1} \cdots f_q^{s_q}$), y sabiendo que $\langle b_f(s)\rangle = (\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s) + \langle f\rangle) \cap K[s]$, (resp. para los ideales de Bernstein-Sato ver sección 2.3), podemos construir por medio del uso de recubrimientos de Gröbner un algoritmo que calcule la b-función global asociada a f, (resp. los ideales de Bernstein-Sato), de la siguiente forma.

Algoritmo 3.3. $\mathtt{ParamBS}(\{f_1, ..., f_q\}, F)$
Input: $f_1, ..., f_q$ polinomios paramétricos en $K[u][x]$; F puede ser uno de los siguientes conjuntos $\{f_1 \cdots f_q\}, \{f_1, ..., f_q\}$ ó $\{f_j\}$, (también puede ser $F = f_1$ un único polinomio).
Output: $\mathcal{P} = \{(\mathbb{A}_1, I_{B_1}), (\mathbb{A}_2, I_{B_2}), ..., (\mathbb{A}_r, I_{B_r})\}$, tal que para todo $a \in \mathbb{A}_i$, $\langle\sigma_a(I_{B_i})\rangle$ es el ideal de Bernstein-Sato asociado a $\sigma_{\overline{a}}(F)$, (en el caso $F = f_1$ correspondería con la b-función global asociada a $\sigma_{\overline{a}}(f)_1$).
BEGING
$\mathcal{P} \leftarrow \emptyset$
$\prec_{x \cup \partial_x} \leftarrow$ un orden monomial de eliminación para $x \cup \partial_x$ sobre la base de monomios

$\mathcal{M}(s, x, \partial_x)$ (Es decir, tal que $\{x, \partial_x\} >> s$)
$\mathcal{A} \leftarrow \texttt{ANN}(f_1, ..., f_q)$ (mediante el algoritmo anterior)
while $\mathcal{A} \neq \emptyset$ **do**
Seleccionar (E, N, G) de $\mathcal{A}$
$\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A} \setminus \{(E, N, G)\}$
$\mathcal{G} \leftarrow \texttt{CGS}(E, N, \langle G\rangle + \langle F\rangle, \prec_{x\cup\partial_x})$
while $\mathcal{G} \neq \emptyset$ **do**
Selecciona (E', N', G') de $\mathcal{G}$
$\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{G} \setminus \{(E', N', G')\}$
$\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{(\mathcal{V}(E') \setminus \mathcal{V}(N'), G' \cap K[s])\}$
end-while
end-while
return $\mathcal{P}$
END

Este algoritmo está implementado en el programa `Risa/Asir` mediante el siguiente comando:
• `cgs_bf_gene`$([f_1, ..., f_q], F, P, V)$. Donde $f_1, ..., f_q \in \mathbb{Q}[u][x]$ y F es $[f_1 f_2 \cdots f_q]$, $[f_i]$ para $1 \leq i \leq q$ ó $[f_1, ..., f_q]$, (añadiendo el caso en que $F = f_1$). P es una lista de los parámetros u y V es una lista de variables.

Ejemplos: 1. Sean $f_1 = x^2 + ay^2$ y $f_2 = by$ en $\mathbb{C}[a, b][x, y]$. Tomando $F = \langle f_1 \cdot f_2\rangle$ tenemos que el algoritmo anterior devuelve

$$\begin{gathered}\{(\mathcal{V}(b) \setminus \mathcal{V}(a, b), \{s_2\}, \quad (\mathcal{V}(a, b), \{s_2\},\\ (\mathcal{V}(a) \setminus \mathcal{V}(a, b), \{(-2s_2 - 2)s_1^2 + (-3s_2 - 3)s_1 - s_2 - 1\},\\ (\mathbb{C} \setminus \mathcal{V}(ab), \{(8s_2 + 8)s_1^4 + (12s_2^2 + 56s_2 + 44)s_1^3 + (6s_2^3 + 54s_2^2 + 136s_2 + 88)s_1^2 + (s_2^4 +\\ 16s_2^3 + 77s_2^2 + 138s_2 + 76)s_1 + s_2^4 + 10s_2^3 + 35s_2^2 + 50s_2 + 24)\}\end{gathered}$$

Lo cual quiere decir:
- En primer lugar, donde se anula b pero no se anulan a la vez a, b se tiene que $\langle s_2\rangle$ es el ideal de Bernstein-Sato asociado a $F = f_1 \cdot f_2$.
Podemos observar que cuando $b = 0$, se tiene que $f_2 = 0$. Lo mismo ocurre en el segundo segmento del output.
- Cuando se anula a pero no se anulan a la vez a, b se tiene que el ideal de Bernstein-Sato asociado a F viene dado por $(-2s_2 - 2)s_1^2 + (-3s_2 - 3)s_1 - s_2 - 1$.
- Por último, cuando consideramos todos los puntos (a, b) excepto aquellos tales que $ab = 0$, (como estamos sobre un cuerpo son los puntos $a = 0, b = 0$ ó $a = b = 0$) se

tiene que el ideal de Bernstein-Sato asociado a F está determinado por $(8s_2+8)s_1^4 + (12s_2^2+56s_2+44)s_1^3+(6s_2^3+54s_2^2+136s_2+88)s_1^2+(s_2^4+16s_2^3+77s_2^2+138s_2+76)s_1 + s_2^4+10s_2^3+35s_2^2+50s_2+24)$.

2. Tomemos los mismos polinomios paramétricos f_1 y f_2 pero tomemos $F = \langle f_1, f_2\rangle$. Entonces el algoritmo nos devuelve

$$\begin{gathered}\{(\mathcal{V}(b)\setminus\mathcal{V}(a,b), \{s_2, s_1^2+2s_1+1\}, \quad (\mathcal{V}(a,b), \{s_2, -2s_1^2-3s_1-1\},\\ (\mathcal{V}(a)\setminus\mathcal{V}(a,b), \{s_2+1, -2s_1^2-3s_1-1\},\\ (\mathbb{C}\setminus\mathcal{V}(ab), \{-2s_1^2+(-s_2-4)s_1-s_2-2, -4s_1^2-6s_1+s_2^2+s_2-2\}\end{gathered}$$

Como veníamos pincelando anteriormente, en el caso en que $\boxed{q=1}$ se puede proceder de manera similar considerando el ideal:

$$I_1 = \langle s + f\partial_t, \partial_{x_1} + \frac{\partial f}{\partial_{x_1}}\partial_t, \dots, \partial_{x_n} + \frac{\partial f}{\partial_{x_n}}\partial_t\rangle$$

ya que teníamos que $\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s) = I \cap A_n[s]$, donde ahora s es una única variable nueva. Además, como ya comentamos al final de la sección 2.6, es que si consideramos el ideal $J = I_1 + \langle f, \frac{\partial f}{\partial_{x_1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial_{x_n}}\rangle$, entonces tenemos que

$$J \cap K[s] = \left(\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s) + A_n[s]\langle f, \frac{\partial f}{\partial_{x_1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial_{x_n}}\rangle\right) \cap K[s] = \langle \frac{b_f(s)}{s+1}\rangle =: \langle \tilde{b_f}(s)\rangle.$$

Por tanto, basándose en el proceso anterior se puede construir un algoritmo que calcule la b-función reducida para un polinomio paramétrico f no constante de manera análoga al proceso del cálculo de ideales de Bernstein-Sato mediante el algoritmo `CGS`.

Algoritmo 3.4. `redBfunCGS`(f)
Input: $f \in K[u][x]$ un polinomio paramétrico.
Output: $\mathcal{P} = \{(\mathbb{A}_1, \tilde{b}_1(s)), \dots, (\mathbb{A}_r, \tilde{b}_r(s))\}$ tal que para cada $i = 1, \dots, r$ y $\overline{a} \in \mathbb{A}_i$, se tiene que $\tilde{b}_i(s)$ es la b-función reducida de $\sigma_{\overline{a}}(f)$.
BEGIN
$\mathcal{P} \leftarrow \emptyset$
$J \leftarrow \{f, \frac{\partial f}{\partial_{x_1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial_{x_n}}\}$
$\mathcal{A} \leftarrow$ `ANN`(f)
$\prec_{x\cup\partial_x} \leftarrow$ un orden monomial de eliminación para $x \cup \partial_x$ sobre la base de monomios

$\mathcal{M}(s, x, \partial_x)$ (Es decir, tal que $\{x, \partial_x\} >> s$)
while $\mathcal{A} \neq \emptyset$ **do**
  Seleccionar (E, N, G) de $\mathcal{A}$
  $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A} \setminus \{(E, N, G)\}$
  $\mathcal{G} \leftarrow \texttt{CGS}(E, N, \langle G \rangle + \langle J \rangle, \prec_{x \cup \partial_x})$
  while $\mathcal{G} \neq \emptyset$ **do**
    Seleccionar (E', N', G') de $\mathcal{G}$
    $\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{G} \setminus \{(E', N', G')\}$
    $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{(\mathcal{V}(E') \setminus \mathcal{V}(N'), G' \cap K[s])\}$
  end-while
end-while
return $\mathcal{P}$
END

En `Risa/Asir` podemos encontrar este algoritmo y, a su vez, un algoritmo que calcula la b-función global en su totalidad, (es decir, incluyendo la multiplicidad de la raíz $s + 1$). Este último viene dado por el comando:
`cgs_bf`(f, P, V), donde $f \in \mathbb{Q}[u][x]$ es un polinomio paramétrico, P es una lista de parámetros u y V es una lista de variables.

Ejemplos: 1. Sea $f = x^3 + axy^2 + by^3 + y^2 \subset \mathbb{Q}[a, b][x, y]$. Entonces tenemos la siguiente traducción del output que aparece en `Singular/Asir` al aplicar el comando anterior.

$$\begin{gathered}
\{(\mathcal{V}(a) \setminus \mathcal{V}(a, b), \{(s + 1)(6s + 5)(6s + 7)\}), \\
(\mathcal{V}(a, b), \{(s + 1)(6s + 5)(6s + 7)\}), \\
(\mathcal{V}(4a^3 + 27b^2) \setminus \mathcal{V}(a, b), \{(s + 1)(6s + 5)(6s + 7)\}), \\
(\mathcal{V}(b) \setminus \mathcal{V}(a, b), \{(s + 1)(6s + 5)(6s + 7)\}), \\
(\mathbb{C} \setminus \mathcal{V}(4ba^3 + 27b^3 a), \{(s + 1)(6s + 5)(6s + 7)\})\}
\end{gathered}$$

En realidad al aplicar el comando anterior, el output aparece en forma de listas de pares separadas entre sí. Por ejemplo, en el primer par aparece el estrato de la forma $[[a], [a, b]]$ y la b-función asociada a f en los puntos de dicho estrato de la forma $[[s + 1, 1], [6 * s + 5, 1], [6 * s + 7, 1]]$ donde el 1 que aparece en los tres factores anteriores es la multiplicidad de cada uno de ellos. Veamos un ejemplo en el que no siempre salga la misma b-función.

2. Sea $f = x^2y^2 + xy^3 + axy + by$. Entonces obtenemos lo siguiente.

$$\begin{gathered}\{(\mathcal{V}(b) \setminus \mathcal{V}(a,b), \{(s+1)^2\}),\\ (\mathcal{V}(a) \setminus \mathcal{V}(a,b), \{(s+1)\}),\\ (\mathcal{V}(16a^3-27b^2) \setminus \mathcal{V}(a,b), \{(s+1)^2\}),\\ (\mathcal{V}(a,b), \{(s+1)^2(2s+1)^2(4s+3)(4s+5)\}),\\ (\mathbb{C} \setminus \mathcal{V}(16ba^4-27b^3a), \{(s+1)^2\})\}\end{gathered}$$

Podemos comprobar fácilmente cuando $a = b = 0$ con el comando `bfct` en el sistema `Singular` que la b-función asociada a $f(0,0,x,y) = x^2y^2 + xy^3$ viene dada por $(s+\frac{1}{2})^2(s+\frac{3}{4})(s+1)^2(s+\frac{5}{4})$.

Notar que el cálculo de ejemplos un poco más elaborados en `Risa/Asir` por medio del comando anterior requiere de un tiempo muy elevado para su cálculo.

3.3 `CheckRoot` sobre polinomios paramétricos

Para termina este capítulo, usando los resultados teóricos de la sección 2.6 y de la anterior sección, podemos construir un algoritmo que compruebe si, dado un número racional α y un polinomio paramétrico $f \in K[u][x]$, se tenga que α es raíz de la b-función asociada a $\sigma_{\overline{a}}(f)$ para algún $\overline{a} \in \overline{K}^m$.

• Con el algoritmo `Ann`(f), (alg. 3.2), obteníamos un conjunto de tripletas $\mathcal{A} = \{(E_1,N_1,G_1),\ldots,(E_r,N_r,G_r)\}$ tal que para todo $a \in \mathcal{V}(E_i) \setminus \mathcal{V}(N_i)$ se tiene que $\sigma_a(G_i)$ es una base de Gröbner del ideal anulador s-paramétrico $\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(\sigma_a(f^s))$.

• Por otro lado, para la construcción del algoritmo `checkRoot`, (alg. 2.9), se calculaba una base del ideal anulador s-paramétrico, y con dicha base $G = \langle P_1(s),\ldots,P_k(s)\rangle$, se calculaba una base de Gröbner reducida del ideal $L = \langle f, G_{|_{s=-\alpha}}\rangle$. Una vez calculada una base de Gröbner reducida del ideal L, teníamos que si dicha base era $\{1\}$ entonces α no era una raíz y, en caso contrario, sí era raíz.

Luego uniendo estos dos puntos basta considerar para todo $i = 1,\ldots,r$, tomando $a \in \mathcal{V}(E_i) \setminus \mathcal{V}(N_i)$, los ideales $L_i = \langle \sigma_a(G_{i_{|_{s=-\alpha}}}), \sigma_a(f)\rangle$, calcular una base de Gröbner reducida M_i de dicho ideal y comprobar para cada $i = 1,\ldots,r$ si $M_i = \{1\}$.

Algoritmo 3.5. `checkRootANN`$(f,\alpha,\prec)$
Input: $f \in K[u][x]$ un polinomio paramétrico, $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$, $\prec$ un orden monomial cualquiera sobre $A_n[s]$.

Output: $H = \{\mathcal{A}, J\}$; donde $\mathcal{A} = \{(E_1, N_1, G_1), ..., (E_r, N_r, G_r)\}$ tal que se tiene que para todo $a \in \mathcal{V}(E_i) \setminus \mathcal{V}(N_i)$, $\sigma_a(G_i)$ es una base de Gröbner de $\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(\sigma_a(f^s))$ para todo $i = 1, ..., r$, y J es un conjunto de índices en $\{1, ..., r\}$, donde i aparece en J si α es una raíz de la b-función asociada a $\sigma_a(f)$ para cualquier $a \in \mathcal{V}(E_i) \setminus \mathcal{V}(N_i)$.
BEGIN
$\mathcal{A} = \{(E_1, N_1, G_1), ..., (E_r, N_r, G_r)\} \leftarrow \mathtt{ANN}(f)$
$H \leftarrow \{\mathcal{A}\}$
for $i = 1, ..., r$ **do**
  Elegir $a \in \mathcal{V}(E_i) \setminus \mathcal{V}(N_i)$
  $L_i \leftarrow \langle \sigma_a(G_{i_{|s=-\alpha}}), \sigma_a(f) \rangle$
  $G_i \leftarrow \mathtt{RedGB}(L_i, \prec)$
  if $(G_i \neq \{1\})$
    $H \leftarrow H \cup \{i\}$
  end-if
end-for
END

Ejemplo: Tomemos $f = x^3y + axy^2 + by^2 \in \mathbb{C}[a,b][x,y]$. Al calcular el ideal anulador de f^s usando el algoritmo `ANN`, el cual en `Risa/Asir` viene determinado por el comando $\mathtt{para\_ann}(f, [a,b], [x,y])$, obtenemos el siguiente resultado:

```
[3090] para_ann(F,[a,b],[x,y]);
[t*x^3+2*da*t*y*x+2*db*t*y+dy,3*t*y*x^2+da*t*y^2+dx,t*y*x^3+da*t*y^2*x+db*t*y^2+dt]
----------------
[[0],[b*a]]
[-dx*a*x^2+(-2*dy*a*y+5*a*s-dx*b)*x-3*dy*b*y+6*b*s,-3*dx*b*a*x^2+((-5*dx*a^3+9*dy*b*a)*y-18*dx*b^2)*x-10*dy*a^3*y^2+(25*a^3
*s-5*dx*b*a^2-54*dy*b^2)*y+108*b^2*s,-dx*x^3+3*dy*y*x^2-2*dx*a*y*x+dy*a*y^2-2*dx*b*y]

[[a],[b]]
[dx*x+3*dy*y-6*s,-dx*x^3+3*dy*y*x^2-2*dx*b*y]

[[b,a],[1]]
[dy*y-s,dx*x-3*dy*y]

[[b],[a^2]]
[dx*x+2*dy*y-5*s,-dx*x^3+3*dy*y*x^2-2*dx*a*y*x+dy*a*y^2]

0.2188sec + gc : 0.2813sec(0.562sec)
```

Tomemos por ejemplo la segunda terna: $(E_2, N_2, G_2) = (a, b, \{x\partial_x + 3y\partial_y - 6s, -x^3\partial_x + 3x^2y\partial_y - 2by\partial_x\})$, notar que el output en `Risa/Asir` pone los productos al revés, por ejemplo $dx * x$.
Sabemos que para cualquier $\overline{a} \in \mathcal{V}(a) \setminus \mathcal{V}(b)$ el conjunto $\sigma_{\overline{a}}(G_2)$ es una base de Gröbner del ideal anulador s-paramétrico $\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(\sigma_{\overline{a}}(f^s))$. Por tanto, siguiendo el algoritmo anterior, elegimos cualquier $\overline{a} \in \mathcal{V}(a) \setminus \mathcal{V}(b)$, (por ejemplo $a = 0$, $b = 1$), tomamos un α que queramos comprobar, (por ejemplo $\alpha = 7/6$) y calculamos una base de Gröbner reducida de $\langle \sigma_{\overline{a}}(G_{|_{s=-\alpha}}), \sigma_{\overline{a}}(f) \rangle = \langle x\partial_x + 3y\partial_y - 6(\text{-}\mathbf{7/6}), -x^3\partial_x + 3x^2y\partial_y - 2y\partial_x, x^3y + y^2 \rangle$ y obtenemos:

ideal I = xdx+3ydy+7,-x^{3}dx+3x^{2}ydy-2ydx,x^3y+y^2;
 _[1] = xdx+3ydy+7;
 _[2] = y^2;
 _[1] = xy;
 _[1] = x^2-2ydx;
 _[1] = 2ydx^2+3xydy+5x;
Que claramente es no nula. Por tanto $-7/6$ es una raíz de la b-función asociada a $\sigma_{\overline{a}}(f)$.

Si tomamos ahora $\alpha = 9/6$ obtenemos haciendo el mismo proceso:
ideal I = xdx+3ydy+9,-x^{3}dx+3x^{2}ydy-2ydx,x^3y+y^2;
 _[1] = 1;
Es decir, $-9/6$ no es una raíz de $b_{\sigma_{\overline{a}}}(f)$.

Centrándonos en el mismo ejemplo, podemos calcular un recubrimiento de Gröbner considerando s y b como dos parámetros, y así poder ver para qué valores de s se tiene que la base de Gröbner final es distinta de $\{1\}$:

```
[3108] newcgsw1([dx*x+3*dy*y-6*s,-dx*x^3+3*dy*y*x^2-2*dx*b*y,x^3*y+b*y^2],[s,b],[[x,y],[dx,dy]],2);
[[b],[b,324*s^6+1944*s^5+4815*s^4+6300*s^3+4591*s^2+1766*s+280]]
[(9*dy^2*s^2+18*dy^2*s+9*dy^2)*y^2+(-36*dy*s^3-72*dy*s^2-36*dy*s)*y+36*s^4+90*s^3+74*s^2+22*s+2,dx*x+3*dy*y-6*s,
((3*dy*s^2+6*dy*s+3*dy)*y-6*s^3-14*s^2-10*s-2)*x,(s^2+2*s+1)*x^2]

[[s+1],[1]]
[27*dy^3*y^3+189*dy^2*y^2+(-dx^3*b+276*dy)*y+60,dx*x+3*dy*y+6,(9*dy^2*y^2+30*dy*y+12)*x+dx^2*b*y,(3*dy*y+3)*x^2-
dx*b*y,y*x^3+b*y^2]

[[3*s+2],[b,3*s+2]]
[b*y,b*x]

[[3*s+4],[b,3*s+4]]
[(-dx^3*b^2+12*dy*b)*y+24*b,b*y^2,dx*x+3*dy*y+8,(3*dy*y+6)*x+dx^2*b*y,x^2-dx*b*y]

[[6*s+5],[b,6*s+5]]
[b*y,dx*x+3*dy*y+5,x^2]

[[b,6*s+7],[1]]
[3*dy^2*y^2+14*dy*y+10,dx*x+3*dy*y+7,(3*dy*y+5)*x,x^2]

[[6*s+7],[b,6*s+7]]
[(-dx^3*b^2+3*dy*b)*y+6*b,b*y^2,-b*x-dx^2*b^2*y]

[[0],[324*b*s^5+1620*b*s^4+3195*b*s^3+3105*b*s^2+1486*b*s+280*b]]
[1]

No. of segment is
8
0.07813sec + gc : 0.03125sec(154.8sec)
```

Podemos observar que los valores del parámetro s que hacen que la base de Gröbner sea distinta de $\{1\}$ son $s = -1$, $s = -2/3$, $s = -4/3$, $s = -5/6$ y $s = -7/6$. En particular, dichos valores son las raíces de la b-función asociada a $\sigma_{\overline{a}}(f)$ [31]. Es más, calculando el polinomio de Bernstein-Sato asociado a $\sigma_{(0,b)}(f) = x^3y + by^2$ mediante el algoritmo 3.3, obtenemos:

```
[[b],[1]],    [[s+1,2],[3s+1,1],[3s+1,1]]
[[0],[b]],    [[s+1,2],[3s+2,1],[3s+4,1],[6s+5,1],[6s+7,1]]
```

Como en nuestro caso $b \neq 0$, entonces viene dado por $(s+1)^2(3s+2)(3s+4)(6s+5)(6s+7)$, que claramente concuerda con los valores del parámetro s que hacían la base de Gröbner reducida distinta de $\{1\}$.
Este algoritmo se basa principalmente en el siguiente resultado.

Teorema 3.3. *Sea $f \in K[u][x]$ un polinomio paramétrico. Supongamos que aplicamos los siguientes pasos:*

1) Ejecutar $\mathtt{ANN}(f)$, (Alg. 3.2).

2) Aplicar el algoritmo $\mathtt{CGS}$, (alg. 3.1) sobre $\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s) + \langle f \rangle$ en $\mathbb{C}[s]\langle x, \partial_x \rangle$.

Entonces el output siempre será $\sqrt{b_f(s)}$ y todas las raíces de $b_f(s) = 0$ como estrato, donde $\sqrt{b_f(s)}$ es el polinomio libre de cuadrados de $b_f(s)$.

Demostración. En el paso 2 estamos aplicando el algoritmo CGS sobre $F = \mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s) + \langle f \rangle$ con respecto a un orden monomial por bloques sujeto a $s << \{x, \partial_x\}$ ($s < x_i$, $s < \partial_{x_i}$ para todo $i = 1, \ldots, n$). Como estamos considerando este único parámetro, obtendremos una única tripleta con $E = \{0\}$ y $N = \{1\}$. Como el generador de $(\mathrm{Ann}_{A_n[s]}(f^s) + \langle f \rangle) \cap \mathbb{C}[s]$ es la b-función de f y G (en el algoritmo CGS) es la base de Gröbner reducida con respecto el orden monomial por bloques, entonces $b_f(s) \in G \cap \mathbb{C}[s]$. Entonces, como $\mathrm{MBlm}(G) = \{1\}$, $(\mathbb{C} \setminus \mathcal{V}(\sqrt{b_f(s)}), \{b_f(s)\})$ es un segmento de CGS, por construcción de dicho algoritmo. Por último, como todas las raíces de $b_f(s)$ son racionales [18], la b-función $b_f(s)$ puede ser factorizada linealmente sobre $\mathbb{Q}[s]$. Por lo tanto, todas las raíces de la b-función aparecen en el estrato. ∎

Bibliografía

[1] ANDRES, D. Algorithms for the computation of sato's b-functions in algebraic d-module theory. *Diploma tesis* (2010).

[2] ANDRES, D., LEVANDOVSKYY, V., AND MARTÍN-MORALES, J. Effective methods for the computation of bernstein-sato polynomials for hypersurfaces and affine varieties.

[3] ANDRES, D., AND LEVANDOWSKYY, V. `"bfun.lib"` `https://github.com/Singular/Singular/blob/spielwiese/Singular/LIB/bfun.lib`. *A Singular 3-1-1 library for computations of applications of algebraic D-modules* (2010).

[4] BERGMAN, G. M. The diamond lemma for ring theory. *Advances in Mathematics 29*, 2 (1978), 178–218.

[5] BERNSTEIN, I. N. *Modules over a ring of differential operators: study of the fundamental solutions of equations with constant coefficients*, Funct. Anal. Appl. **5**,89-101 (1971).

[6] BERNSTEIN, J. *Modules over a ring of differential operators. An investigation of the fundamental solutions of equations with constant coefficients.*, Functional Anal. Appl., 5(2):89–101 (1971).

[7] BJÖRK, J. *Rings of differential operators.*, volume 21 of North-Holland Mathematical Library. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York (1979).

[8] BRIANÇON, J., AND MAISONOBE, P. Remarques sur l'idéal de bernstein associé à des polynômes, 2002.

[9] BUESO, J. L., GÓMEZ-TORRECILLAS, J., AND VERSCHOREN, A. Algorithmic methods in non-commutative algebra: Applications to quantum groups.

[10] Calderón-Moreno, F. J. Logarithmic differential operators and logarithmic de rham complexes relative to a free divisor. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure 32*, 5 (1999), 701–714.

[11] Calderón-Moreno, F. J., and Narváez-Macarro, L. Algebraic computation of some intersection d-modules. In *Mathematical Software - ICMS 2006* (Berlin, Heidelberg, 2006), A. Iglesias and N. Takayama, Eds., Springer Berlin Heidelberg, pp. 132–143.

[12] Castro-Jimenez, F. J., and Narváez-Macarro, L. Homogenising differential operators (`https://arxiv.org/abs/1211.1867`).

[13] Coutinho, S. C. *A Primer of Algebraic D-Modules.* London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1995.

[14] Cox, D. A., Little, J., and O'Shea, D. *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra, 3/e (Undergraduate Texts in Mathematics).* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007.

[15] Gago-Vargas, J., Hartillo-Hermoso, M., and Ucha-Enríquez, J. Comparison of theoretical complexities of two methods for computing annihilating ideals of polynomials. *Journal of Symbolic Computation 40*, 3 (2005), 1076–1086.

[16] Kalkbrener, M. On the stability of gröbner bases under specializations. *Journal of Symbolic Computation 24*, 1 (1997), 51–58.

[17] Kapur, D., and Wang, D. A new algorithm for computing comprehensive gröbner systems. pp. 29–36.

[18] Kashiwara, M. *B-functions and holonomic systems: rationality of roots of b-functions*, Invent. Math.**38**,33-35 (1976).

[19] Levandovskyy, V. On preimages of ideals in certain non–commutative algebras, 2003.

[20] Levandovskyy, V. *Non-commutative computer algebra for polynomial algebras: Gröbner bases, applications and implementation.* PhD thesis, 06 2005.

[21] Levandovskyy, V. Intersection of ideals with non-commutative subalgebras. In *Proceedings of the 2006 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation* (New York, NY, USA, 2006), ISSAC '06, Association for Computing Machinery, p. 212–219.

[22] LEVANDOVSKYY, V., AND MARTÍN-MORALES, J. Algorithms for checking rational roots of b-functions and their applications. *Journal of Algebra 352*, 1 (2012), 408–429.

[23] LEVANDOVSKYY, V., AND SCHÖNEMANN, H. Plural - a computer algebra system for noncommutative polynomial algebras. *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ISSAC* (01 2003), 176–183.

[24] LEVANDOWSKYY, V., LOBILLO, F. J., RABELO, C., AND MOTSAK, O. "nctools.lib" https://github.com/Singular/Singular/blob/spielwiese/Singular/LIB/nctools.lib. *A Singular 3-1-1 library for General tools for noncommutative algebras* (2010).

[25] LEVANDOWSKYY, V., AND MORALES, J. M. "dmod.lib" https://github.com/Singular/Singular/blob/spielwiese/Singular/LIB/dmod.lib. *A Singular 3-1-1 library for computations of applications of algebraic D-modules* (2010).

[26] MCCONNELL, J. C., AND ROBSON, J. C. Noncommutative noetherian rings. with the cooperation of l. *Graduate Studies in Mathematics 30* (2001).

[27] MEBKHOUT, Z., AND NARVÁEZ-MACARRO, L. La théorie du polynôme de bernstein-sato pour les algèbres de tate et de dwork-monsky-washnitzer. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure 4e série, 24*, 2 (1991), 227–256.

[28] MONTES, A. The gröbner cover. *Algorithms and Computation in Mathematics* (2018).

[29] MONTES, A., AND SCHOENEMANN, H. "grobcov.lib" https://github.com/Singular/Singular/blob/spielwiese/Singular/LIB/grobcov.lib. *A Singular 3-1-1 library for computations of applications of Groebner Covers* (2010).

[30] NABESHIMA, K. Stability conditions of monomial bases and comprehensive gröbner systems. In *Computer Algebra in Scientific Computing* (Berlin, Heidelberg, 2012), V. P. Gerdt, W. Koepf, E. W. Mayr, and E. V. Vorozhtsov, Eds., Springer Berlin Heidelberg, pp. 248–259.

[31] NABESHIMA, K., OHARA, K., AND TAJIMA, S. Comprehensive gröbner systems in pbw algebras, bernstein–sato ideals and holonomic d-modules. *Journal of Symbolic Computation 89* (2018), 146–170.

[32] OAKU, T. *An algorithm of computing b-functions*, Duke Math. J., 87(1):115–132 (1997).

[33] Oaku, T. *Algorithms for b-functions, restrictions, and algebraic local cohomology groups of D-modules*, Adv. in Appl. Math., 19(1):61–105 (1997).

[34] Oaku, T. Algorithms for the b-function and d-modules associated with a polynomial. *Journal of Pure and Applied Algebra 117-118* (1997), 495–518.

[35] Oaku, T., and Takayama, N. An algorithm for de rham cohomology groups of the complement of an affine variety via d-module computation, 1998.

[36] Saito, M. On microlocal b-function. *Bulletin de la Société Mathématique de France 122*, 2 (1994), 163–184.

[37] Saito, M., Sturmfels, B., and Takayama, N. *Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations,(2000), Noro: An Efficient Modular Algorithm for Computing the Global b-function(2002).*

[38] Saito, M., Takayama, N., and Sturmfels, B. Gröbner deformations of hypergeometric differential equations. *Springer, New York* (2000).

[39] Sato, M., and Shintani, T. On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces. *Annals of Mathematics 100*, 1 (1974), 131–170.

[40] Ucha, J., and Castro-Jiménez, F. On the computation of bernstein–sato ideals. *Journal of Symbolic Computation 37*, 5 (2004), 629–639.

[41] Weispfenning, V. Comprehensive gröbner bases. *Journal of Symbolic Computation 14*, 1 (1992), 1–29.