Ecuaciones en Derivadas Parciales con difusión no local

Inmaculada Benítez Berral

Curso 2020/2021

Tutorizado por:
Dra. María Ángeles Rodríguez Bellido
Dr. Antonio Suárez Fernández
Dpto. Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

Facultad de Matemáticas

Máster Universitario en Matemáticas
Trabajo de Fin de Máster

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer a mis tutores, Antonio y María Ángeles, por haber tenido tanta paciencia conmigo y por haberme dedicado tanto tiempo. A continuación, a todo el personal docente que me ha enseñado a lo largo de mi vida.

Agradecer a familiares y a todos los que quiero llamar familia, que me tranquilizaron y motivaron a avanzar cuando, en ocasiones, sentía que todo pesaba demasiado. Por último, pero no por ello menos importante, gracias a todos los que han pasado por mi vida en algún momento y decidieron dejar huella en la persona que soy a día de hoy.

Aprendí que, con apoyo, todo es posible. Gracias por haber hecho posible este trabajo.

Abstract

In the present work we make a theoretical study of Partial Differential Equations with non-local diffusion, paying major attention on models coming from population dynamics. For this purpose we will discuss the following topics: initially, the deduction of the problem. Later, a study of the problem in the linear case and another study of the problem in the non-linear case. We follow studying the associated eigenvalue problem. Finally, we study the associated stationary problem, using the sub-supersolution method to study the existence of solution, and we finish applying this method to the logistic equation.

Resumen

En el presente trabajo hacemos un estudio teórico de Ecuaciones en Derivadas Parciales con difusión no local, prestando mayor atención a modelos que provienen de la dinámica de poblaciones. Para este propósito trataremos los siguientes temas: inicialmente, la deducción del problema. Posteriormente, un estudio del problema en el caso lineal y otro estudio en el caso no lineal. Seguimos con un estudio del problema de autovalores asociado. Finalmente, hacemos un estudio del problema estacionario asociado, usando el método de sub-supersolución para estudiar la existencia de solución y terminaremos aplicando este método a la ecuación logística.

Índice general

1. Introducción **1**
1.1. Deducción del problema 1
1.2. Interpretación del problema 4
1.3. Resumen del trabajo 5

2. Caso lineal **9**
2.1. Existencia y unicidad del problema 11
2.2. Principios del máximo 12
2.3. Comportamiento asintótico de la solución del problema con difusión no local 20
2.3.1. Comportamiento asintótico 20

3. Caso no lineal **29**
3.1. Existencia, unicidad y positividad de la solución con término de reacción globalmente lipschitziano 29
3.1.1. Principios del máximo 35
3.1.2. Resultados de positividad de la solución 39
3.2. Existencia, unicidad y positividad de la solución con término de reacción localmente lipschitziano 41
3.2.1. Existencia de una única solución 47
3.2.2. Principios del máximo 50
3.2.3. Resultados de positividad de la solución 50

4. Estudio del problema de autovalores **53**
4.1. Algunos resultados previos 53
4.2. Caracterización del primer autovalor 54
4.3. Monotonía y continuidad del primer autovalor respecto al dominio 57

5. Estudio del problema estacionario **59**
5.1. Aplicación: problema estacionario con ecuación logística 62

A. Espacios de Banach **69**

B. Espacios de Hilbert **73**

C. Espacios métricos de medida **75**

D. Operadores **77**

Referencias **83**

Capítulo 1

Introducción

La difusión es el proceso mediante el cual la materia se esparce de una parte del sistema a otra [23]. En el caso de la dinámica de población, la difusión podría venir dada, entre otras cosas, por la inmigración y la emigración. Además, tenemos que tener en cuenta que las poblaciones se ven afectadas por la natalidad y la mortandad, que podemos tratar como una fuente y sumidero, respectivamente.

1.1. Deducción del problema

Para la deducción del problema nos centramos en las referencias [18] y [23]. Supongamos que estamos en un hábitat $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ acotado y consideramos una especie habitando esta región, suponemos que podemos modelar la población de este entorno por una función $u(x,t)$ que es la densidad en la posición x y en el tiempo t. Para facilitar la notación, vamos a suponer que estamos en dimensión 1 en espacio, esto es, $N = 1$, y después generalizaremos para dimensión mayor. Además suponemos que Ω es de la forma $[-M, M]$. Tratamos de encontrar la velocidad a la que se propaga la población, esto es, $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Discretizamos en espacio y tiempo, para ello, dividimos el hábitat en intervalos de longitud Δx y el tiempo en intervalos de longitud Δt. Discretizamos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(i,t) \simeq \frac{u(i, t + \Delta t) - u(i,t)}{\Delta t}. \tag{1.1}$$

Suponemos que la velocidad a la que los individuos se mueven de un sitio i a otro j es constante. Entonces el número total de individuos que abandonan el sitio i para ir al sitio j debe ser proporcional a la población en el intervalo i, que es $u(i,t)\Delta x$; el tamaño del sitio de llegada, j, que es Δx; y la cantidad de tiempo en el que se mide el tránsito, Δt. Entonces el número total de individuos que abandonan el sitio i en el intervalo de tiempo $[t, t+\Delta t]$ es

$$\sum_{\substack{j=-M \\ j\neq i}}^{M} J(j,i)u(i,t)(\Delta x)^2\Delta t, \tag{1.2}$$

donde $J(j,i)$ es la constante de proporcionalidad. Durante este intervalo de tiempo, el número de llegadas al sitio i desde cualquier otro sitio es

$$\sum_{\substack{j=-M \\ j\neq i}}^{M} J(i,j)u(j,t)(\Delta x)^2\Delta t. \tag{1.3}$$

Sea ahora $f(i, u(i,t))$ la tasa de reproducción neta, es decir, la función $f : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una fuente o sumidero, dependiendo del signo, el cual a su vez depende de la tasa de natalidad y de la de mortandad. En caso de que la natalidad sea mayor a la mortandad, entonces el signo de f será positivo y se tratará de una fuente, en caso contrario, el signo de f será negativo y será por tanto un sumidero. Entonces el número de nuevos individuos en el sitio i es

$$f(i, u(i,t))\Delta x\Delta t. \tag{1.4}$$

Combinando las ecuaciones (1.2)-(1.4), llegamos a que la población total en el sitio i y en el instante $t+\Delta t$ es

$$u(i,t+\Delta t)\Delta x = u(i,t)\Delta x + \sum_{\substack{j=-M \\ j\neq i}}^{M} J(i,j)u(j,t)(\Delta x)^2\Delta t -$$

$$- \sum_{\substack{j=-M \\ j\neq i}}^{M} J(j,i)u(i,t)(\Delta x)^2\Delta t + f(i,u(i,t))\Delta x\Delta t.$$

Dividiendo esta última igualdad entre Δx, nos queda la ecuación

$$u(i,t+\Delta t) = u(i,t) + \sum_{\substack{j=-M \\ j\neq i}}^{M} J(i,j)u(j,t)\Delta x\Delta t -$$

$$- \sum_{\substack{j=-M \\ j\neq i}}^{M} J(j,i)u(i,t)\Delta x\Delta t + f(i,u(i,t))\Delta t.$$

Por último, dividimos esta útima expresión por Δt, quedando

$$\begin{aligned}\frac{u(i,t+\Delta t)-u(i,t)}{\Delta t} &= \sum_{\substack{j=-M\\ j\neq i}}^{M} J(i,j)u(j,t)\Delta x - \\ &- \sum_{\substack{j=-M\\ j\neq i}}^{M} J(j,i)u(i,t)\Delta x + f(i,u(i,t)).\end{aligned} \tag{1.5}$$

Al hacer la discretización, buscamos que $\Delta t \to 0$ y $\Delta x \to 0$. Por tanto, tomando límite en (1.5) y teniendo en cuenta que

$$\sum_{\substack{j=-M\\ j\neq i}}^{M} J(j,i)u(i,t)\Delta x \simeq \int_\Omega J(y,x)u(x,t)dx,$$

llegamos a la ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \int_\Omega \left[J(x,y)u(y,t) - J(y,x)u(x,t)\right]\, dy + f(x,u(x,t)). \tag{1.6}$$

La función $J(x,y)$ representa la densidad de probabilidad de llegar al sitio x desde el sitio y, entonces $J:\Omega\times\Omega\to\mathbb{R}$ es una función positiva, simétrica y además

$$\int_\Omega J(x,y)\, dy = \int_\Omega J(y,x)\, dy = 1. \tag{1.7}$$

En consecuencia, podemos escribir la ecuación (1.6) como

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \int_\Omega J(x,y)u(y,t)\, dy - u(x,t) + f(x,u(x,t)). \tag{1.8}$$

Generalizando la ecuación a una dimensión N cualquiera y añadiendo condiciones iniciales y condiciones de contorno, nos queda el siguiente problema en derivadas parciales:

$$\begin{cases} u_t - \displaystyle\int_\Omega J(x,y)u(y,t)\, dy + u(x,t) = f(x,u) & x\in\Omega, t>0,\\ u(x,t) = 0 & x\notin\Omega, t>0,\\ u(x,0) = u_0(x) & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1.9}$$

donde $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ es un dominio acotado y regular, $J:\Omega\times\Omega\to\mathbb{R}$ es una función positiva que satisface (1.7), $u_0:\Omega\to\mathbb{R}$ es una función dada y $f:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una aplicación continua. Además, estamos denotando $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$.

1.2. Interpretación del problema

Como la integral es sobre Ω, estamos asumiendo que ningún individuo entra o sale del hábitat. La condición inicial, $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$ nos indica la densidad de población que se encontraba en el instante de tiempo inicial. La condición de contorno $u(x,t) = 0, x \notin \Omega, t > 0$ nos apunta a que el dominio fuera de Ω es hostil, es decir, cualquier individuo que salga del hábitat muere instantáneamente [1]. La condición de contorno de este problema es similar a la condición de contorno tipo Dirichlet homogéneo, en cambio, a diferencia de éste, la condición de la ecuación (1.9) no obliga que la solución u tenga que valer 0 en la frontera de Ω. Esta condición es la que hace posible que

$$\int_{\mathbb{R}^N} J(x,y)u(y,t)\ dy = \int_{\Omega} J(x,y)u(y,t)\ dy,$$

por tanto, estamos modelando el caso en el que los individuos se extinguen cuando abandonan el hábitat.

Cabe destacar que existe una estrecha relación entre este problema y la teoría de probabilidad. En este problema trabajamos con una función de densidad J. Es fácil ver que es una función de densidad ya que por definición J es positiva y además cumple (1.7). Por otro lado, en nuestro problema (1.9), la función $f(x,u)$ es el término de reacción.

Los autores de [1], [10] y [16], suponen que J solo depende de la distancia entre el sitio x y el sitio y, es decir, $|x-y|$ y, tratan J como una función que depende de $x-y$. Trabajan entonces con la convolución de J y u, $(J*u)(x)$. Quedando el problema

$$\begin{cases} u_t = (J*u)(x) - u(x,t) + f(x,u(x)), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \notin \Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Para tratar más en profundidad las propiedades del producto de convolución, puede verse [5].

1.3. Resumen del trabajo

En este trabajo, tomaremos $J = J(x, y)$. En el Capítulo 2 estudiamos el problema lineal

$$\begin{cases} u_t = \displaystyle\int_\Omega J(x,y)u(y,t)\, dy - u(x,t), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.10}$$

Comenzamos viendo que la solución trivial es el único punto fijo del problema (1.10). A continuación, para hacer el estudio de la existencia y unicidad de la solución de (1.10), introducimos la definición de espacio métrico de medida, que utilizaremos a lo largo de todo el capítulo. Podemos consultar el Apéndice C para recordar algunas definiciones importantes como la de espacio métrico, σ-álgebra y medida.

Además, en este capítulo, introducimos los Principios del Máximo, tanto Débil como Fuerte, incluyendo definiciones y propiedades importantes del soporte esencial, $P(f)$, que serán necesarias para la demostración del Principio del Máximo Fuerte. Los Principios del Máximo, nos dan la positividad de la solución del problema (1.10). En el caso del Principio del Máximo Fuerte, la positividad de la solución es estricta y para ello necesitamos que J cumpla la siguiente condición

$$J(x,y) > 0, \quad \forall x, y \in \Omega \text{ tales que } d(x,y) < R, \text{ para algún } R > 0. \tag{1.11}$$

En último lugar, estudiaremos el comportamiento asintótico de las soluciones cuando hacemos tender el tiempo a infinito. Para esto, es necesario recuperar algunos resultados sobre operadores, que pueden verse en el Apéndice D. Usando la proyección de Riesz probamos que la solución tiende a una constante por la primera autofunción. Asimismo, también quedará probado que la proyección de Riesz y la de Hilbert son iguales. Este estudio nos lleva a notar algunas similitudes entre la ecuación de (1.10) y la ecuación del calor, $u_t - \Delta u = f$, como que ambas tienen Principio del Máximo Fuerte y Débil aunque, a diferencia de la ecuación del calor, en el caso del Principio del Máximo Fuerte para la ecuación de (1.10), necesitamos la condición (1.11).

En el Capítulo 3 consideramos la ecuación de reacción-difusión no local y trabajamos con el problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = M(u)(x,t) + f(x,u), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t_0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.12}$$

donde $M(u)(x,t) = \int_\Omega J(x,y)u(y,t)\,dy - u(x,t)$. En este capítulo, repasaremos los conceptos de función globalmente y localmente lipschitziana, ya que para estudiar el problema (1.12), vamos a distinguir dos casos: si f es globalmente lipschitziana o f es localmente lipschitziana. Además, para poder realizar este análisis, definimos el operador Nemitcky asociado a f, F, para expresar el problema (1.12) con f globalmente lipschitziana como

$$\begin{cases} u_t(x,t) = M(u)(x,t) + F(u)(x,t), & x \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.13}$$

Veremos que existe una única solución $u \in \mathcal{C}^1((-\infty,+\infty), X)$ de (1.13) para cada dato inicial u_0 y que ésta viene dada por

$$u(\cdot,t) = e^{Mt}u_0 + \int_0^t e^{M(t-s)}F(u)(\cdot,s)\,ds.$$

Posteriormente, estudiamos el Principio del Máximo Débil y el Principio del Máximo Fuerte. Para este último, es necesario suponer que J cumple (1.11). Además, en ambos resultados estamos bajo la hipótesis de que existe $\beta > 0$ tal que $F + \beta I$ es creciente. Gracias a esto, tenemos que las correspondientes soluciones del problema (1.13) con datos iniciales u_1 y u_2, en caso de existir, preservan el orden. Esto quiere decir que si $u_1 \geq u_2$ y denotamos por $u^i(t)$ a la solución del problema (1.13) con dato inicial $u_i(x)$ para $i = 1, 2$, entonces $u^1(t) \geq u^2(t)$. El Principio del Máximo Fuerte, nos indica que esta desigualdad es estricta si $u_1 \neq u_2$. A continuación, veremos resultados de positividad de la solución.

Por otro lado, en el caso de que f sea localmente lipschitziana, para el estudio de existencia de solución, recurriremos al argumento de sub y supersoluciones. Además, en este caso, tenemos que suponer que existe una cota superior para $f(\cdot,s)s$ para todo s para deducir los Principios del Máximo Débil y Fuerte. Llegamos así a la misma conclusión que en el caso en el que f era globalmente lipschitziana, es decir, se conserva el orden de las soluciones habiendo sido dados dos datos iniciales ordenados. Además, en este capítulo, probamos las propiedades de monotonía del término no lineal del problema (1.13). De estos tres últimos resultados mencionados no daremos las demostraciones detalladas, ya que se deducen de manera inmediata como consecuencia del siguiente resultado que sí demostraremos que nos indica que la solución u del problema (1.12) es una solución del problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = M(u)(x,t) + F_k(u)(x,t), & (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

A su vez, como en el caso globalmente lipschitziana, tenemos resultados de positividad de la solución. Este comportamiento de la solución es consecuencia del resultado anteriormente mencionado.

Posteriormente, en el Capítulo 4, realizamos un estudio del problema de autovalores

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega J(x,y)u(y,t)\,dy - u(x) = -\lambda u(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \notin \Omega, \end{cases}$$

en el cual hallamos tres caracterizaciones del primer autovalor, $\lambda_1(\Omega)$, que es simple, único y verifica $0 < \lambda_1(\Omega) < 1$. Además podemos estimar $\lambda_1(\Omega)$ por

$$\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega A^2(x)\,dx\right)^{1/2} \leq 1 - \lambda_1(\Omega) \leq \left(\sup_{y\in\Omega}\left(\int_\Omega A(x)J(x,y)\,dx\right)\right)^{1/2},$$

donde $A(x) = \displaystyle\int_\Omega J(x,y)\,dy$, y $|\Omega|$ denota la medida de Ω.

A continuación estudiamos su monotonía, observando que el primer autovalor es decreciente con respecto del dominio, dicho de otra manera, si $\Omega_1 \subset \Omega_2$ entonces $\lambda_1(\Omega_1) > \lambda_1(\Omega_2)$. Seguidamente, veremos un resultado, que no probaremos ya que escapa del objetivo de este trabajo, que prueba que el primer autovalor es diferenciable respecto a una pequeña perturbación del dominio, ya que necesitamos usar el carácter continuo de esta aplicación en el Capítulo 5.

Concluimos este trabajo en el Capítulo 5, con un estudio del problema estacionario

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega J(x,y)u(y)\,dy - u(x) + f(x,u) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \notin \Omega, \end{cases} \tag{1.14}$$

donde, primero, determinaremos un Principio del Máximo para ecuaciones estacionarias. Veremos también que existe una solución de (1.14) suponiendo la existencia de sub-supersoluciones. Finalmente, aplicaremos el método de sub-supersoluciones para estudiar la existencia de solución del problema estacionario con ecuación logística $f(x,u) = \gamma u - b(x)u^2$,

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega J(x,y)u(y)\,dy - u(x) + \gamma u - b(x)u^2 = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \notin \Omega. \end{cases} \tag{1.15}$$

Para ello, comenzamos probando la unicidad de solución del problema (1.15) a partir de un resultado que nos proporciona una cota de una solución de (1.14) si tenemos una familia de supersoluciones. Además, veremos que (1.15) tiene una solución positiva si y solo si $\gamma > \lambda_1(\Omega)$ y esta solución se encuentra en el intervalo

$$\left(\frac{\gamma - 1}{b(x)}, \frac{\gamma}{\text{ínf}_{x \in \Omega} b(x)} \right).$$

Seguidamente y para culminar este trabajo, estudiaremos el problema (1.15) en el caso de haber un refugio, esto es cuando $b(x) = 0$ en un subdominio de Ω. Con este estudio veremos que el problema (1.15) tiene una única solución, que es positiva, si y solo si el parámetro γ se encuentra en el intervalo $(\lambda_1(\Omega), \lambda_1(\Omega_0))$, donde Ω_0 es el refugio.

Capítulo 2

Estudio del problema en el caso lineal

En este capítulo vamos a realizar un estudio completo del problema (1.9) en el caso de que no haya fuentes ni sumideros, esto es $f(x,u) = 0$. Vamos a analizar el siguiente problema

$$\begin{cases} u_t = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} J(x,y)u(y,t)\,dy - u(x,t), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \notin \Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

para ello nos centraremos en el Capítulo 2 de [1] y el Capítulo 3 de [23].

Comenzamos estudiando los puntos de equilibrio del problema (2.1). Sea u una solución estacionaria de (2.1). Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^N} J(x,y)u(y)\,dy - u(x) = \int_\Omega J(x,y)u(y)\,dy - u(x) = \\ &= \int_\Omega J(x,y)(u(y)-u(x))\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} J(x,y)(u(y)-u(x))\,dy, \end{aligned}$$

para $x \in \Omega$. Además, la condición de contorno indica que $u(x) = 0$ para $x \notin \Omega$. Por tanto, para cada $x \in \mathbb{R}^N$,

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} J(x,y)u(y)\,dy.$$

Veamos que esta ecuación junto con la condición de contorno implica que $u \equiv 0$. Para ello, razonamos por reducción al absurdo, suponiendo que

$u(x) \neq 0$. En consecuencia

$$u^2(x) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} J(x,y)u(y)\, dy \right) u(x).$$

Integrando esta última igualdad en $\mathbb{R}^N$ se sigue

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u^2(x)\, dx = & \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} J(x,y)u(y)\, dy \right] u(x)\, dx = \\ = & \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} J(x,y)u(y)u(x)\, dy\, dx. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} J(x,y) \left(u(y)u(x) - u^2(x) \right)\, dx\, dy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} J(x,y) \left(u(y) - u(x) \right)^2\, dx\, dy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(y) \equiv u(x),\ x \in \mathbb{R}^N \Rightarrow u \equiv \text{cte !!!}$$

Por tanto, la solución trivial es el único punto fijo del problema.

Con este problema estamos modelando el caso en el que los individuos fallecen al salir de la región Ω, por tanto podemos formular el problema como

$$\begin{cases} u_t = \displaystyle\int_{\Omega} J(x,y)u(y,t)\, dy - u(x,t), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

A continuación, lo reescribimos como

$$\begin{cases} u_t = M(u)(x,t), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

donde $M(u)(x,t) = \displaystyle\int_{\Omega} J(x,y)u(y,t)\, dy - u(x,t)$.

De aquí en adelante, $X = L^p(\Omega), 1 \leq p \leq +\infty$ o $X = \mathcal{C}_b(\Omega)$, hasta que se indique lo contrario, donde $\mathcal{C}_b(\Omega)$ denota el espacio formado por las funciones continuas y acotadas de Ω.

2.1. Existencia y unicidad del problema

Vamos a estudiar el problema (2.3), donde $u_0 \in X$. También definimos el operador $K_J \in \mathcal{L}(X)$ como

$$K_J(u) = \int_\Omega J(\cdot, y)u(y)\, dy,$$

por tanto, el operador $M = K_J - I \in \mathcal{L}(X)$. Además, diremos que K_J es un operador con núcleo J. Si $F \in \mathcal{L}(Y)$ entonces definimos el operador e^{Ft} en serie de Taylor como

$$e^{Ft} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^n t^n}{n!}, \text{con } t \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Por tanto $e^{Ft} \in \mathcal{L}(X)$. Asimismo, cumple la siguiente propiedad

$$e^{F(s+t)} = e^{Fs}e^{Ft}, \text{ para } s, t \in \mathbb{R}.$$

Más aún, en [21], podemos ver que e^{Ft} es un grupo uniformemente continuo y que satisface que

$$\frac{d}{dt}e^{Ft} = e^{Ft}F.$$

En la página 2 de [9], podemos encontrar el siguiente resultado:

Lema 2.1. *Sea X un espacio de Banach y sea $F \in \mathcal{L}(X)$ entonces el sistema*

$$\begin{cases} u_t = Fu(t), \\ u(0) = u_0 \in X, \end{cases} \tag{2.5}$$

tiene una única solución, $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, X)$, que viene dada por

$$u(t) = e^{Ft}u_0. \tag{2.6}$$

Demostración. Está claro que $u(t) = e^{Ft}u_0$ es solución del problema (2.5), ya que

$$u'(t) = Fe^{Ft}u_0 = Fu(t).$$

Veamos ahora la unicidad de la solución:
Sea $v(t)$ otra solución de (2.5) y sea $z(t) = e^{-Ft}v(t)$. Entonces

$$\begin{aligned} z'(t) =& - Fe^{-Ft}v(t) + e^{-Ft}v'(t) = e^{-Ft}\left(-Fv(t) + v'(t)\right) = \\ =& e^{-Ft}\left(-Fv(t) + Fv(t)\right) = 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Por otro lado,

$$z(0) = v(0) = u_0. \tag{2.8}$$

Por tanto, de (2.7) y (2.8), se sigue que $z(t) = u_0$. Pero, por cómo habíamos definido $z(t)$, se tiene

$$e^{-Ft}v(t) = u_0 \Rightarrow v(t) = e^{Ft}u_0,$$

es decir, la solución es única.

■

Definición 2.2. *Un espacio métrico de medida (X, μ, d) es un espacio métrico (X, d) con una medida Borel μ en X σ-finita, regular y completa, que asocia una medida finita y positiva a las bolas de X.*

Definición 2.3. *Sea (X, μ, d) un espacio métrico de medida. Diremos que $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, X)$ es una solución del problema (2.1) si*

$$u(x,t) = u_0(x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} J(x,y)(u(y,s) - u(x,s))\, dy\, dx, \quad x \in \Omega, t > 0$$

y

$$u(x,t) = 0, \quad x \notin \Omega, t > 0.$$

Proposición 2.4. *Sea (X, μ, d) un espacio métrico de medida. Si $K_J \in \mathcal{L}(X)$ entonces el problema (2.3) tiene una única solución $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, X)$ que viene dada por*

$$u(t) = e^{Mt}u_0,$$

donde $e^{Mt} \in \mathcal{L}(X)$.

Demostración. Como $M \in \mathcal{L}(X)$, basta aplicar el Lema 2.1 al problema (2.3) para obtener el resultado.

■

Nota 2.5. *La única solución del problema (2.3) es $u(t) = e^{Mt}u_0$. Observemos que el flujo de este problema es reversible, a diferencia de los problemas en los que la difusión viene dada por el laplaciano. Además, destacamos que la solución del problema con difusión no local depende del operador K_J.*

2.2. Principios del máximo

Suponemos que K_J es un operador con núcleo J no negativo. Consideramos el problema

$$\begin{cases} u_t = K_J(u), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.9}$$

con $u_0 \geq 0$.

Lema 2.6. *Si el dato inicial del problema* (2.9) *cumple* $u_0(x) \geq 0$ *entonces* $u(x,t) \geq 0$*, siendo* $u(x,t)$ *la solución del problema* (2.9)*.*

Demostración. Usando el Lema 2.1, se sigue que la solución del sistema anterior es $u(x,t) = e^{K_J t} u_0(x)$. Además, usando el desarrollo de Taylor de la exponencial (2.4), tenemos que la solución de (2.9) es

$$u(x,t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_J^n t^n}{n!} \right) u_0(x). \tag{2.10}$$

Como $J \geq 0$ y $u_0 \geq 0$ entonces $K_J(u_0) \geq 0$ y usando la expresión (2.10) de la solución del problema (2.9), se tiene que $u(x,t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$.

■

Proposición 2.7 (Principio del Máximo Débil)**.** *Sea* (X, μ, d) *un espacio métrico de medida y sea* $K_J \in \mathcal{L}(X)$ *un operador positivo. Sea* $u_0 \in X$ *no negativo, entonces la solución al problema* (2.3) *es no negativa para todo* $t \geq 0$*. Además, la solución es no trivial,* $u(x,t) \not\equiv 0$*, si* $u_0(x) \not\equiv 0$*.*

Demostración. Sea $v(x,t) = e^t u(x,t), t \geq 0, x \in \Omega$. Observemos que $v(x,0) = u(x,0) = u_0(x)$ para $x \in \Omega$. Además,

$$\begin{aligned} v_t(x,t) =& e^t u(x,t) + e^t u_t(x,t) = e^t \left(u(x,t) + M(u)(x,t) \right) = \\ =& e^t \left(u(x,t) + K_J(u)(x,t) - u(x,t) \right) = e^t K_J(u)(x,t). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Asimismo, como e^t no depende de y se tiene que

$$\begin{aligned} v_t(x,t) =& e^t K_J(u)(x,t) = e^t \int_\Omega J(x,y) u(y,t) \, dy = \\ =& \int_\Omega J(x,y) e^t u(y,t) \, dy = \int_\Omega J(x,y) v(y,t) \, dy = K_J(v)(x,t), \end{aligned} \tag{2.12}$$

es decir, $v(x,t) = e^t u(x,t)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = K_J(v), \\ v(0) = u_0 \geq 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Por el Lema 2.6 se tiene que la solución a este problema es no negativa. Por tanto, la solución $u(x,t) = e^{-t} v(x,t)$ del problema (2.3) también es no negativa. Además, como $v(x,t)$ es solución de (2.13), v es de la forma

$$v(x,t) = u_0 + \int_0^t K_J(v)(x,s) \, ds.$$

Como $K_J \geq 0$, se sigue que $e^t u(x,t) = v(x,t) \geq u_0$ y por tanto $u(x,t) \not\equiv 0$ si $u_0 \not\equiv 0$.

■

Antes de introducir el Principio del Máximo Fuerte, necesitamos algunos resultados y definiciones previas.

Definición 2.8. *Sean (Ω, μ, d) espacio métrico de medida y $R > 0$. Se dirá que Ω es R-conexo si para todo $y, z \in \Omega$, existen $N \in \mathbb{N}$ y $\{x_0, \dots, x_N\}$ un conjunto finito de puntos en Ω tales que $x_0 = y$, $x_N = z$ y $d(x_{i-1}, x_i) < R$, $\forall i = 1, \dots, N$.*

Proposición 2.9. *Si Ω es compacto y conexo, entonces Ω es R-conexo para cualquier $R > 0$.*

Demostración. Como Ω es compacto, dado $R > 0$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\{y_1, \dots, y_n\} \subset \Omega$ tal que

$$\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, R/4).$$

Además, para todo $i = 1, \dots, n$, se tiene que

$$B(y_i, R/4) \cap \bigcup_{j \neq i} B(y_i, R/4) \neq \emptyset,$$

ya que si no fuera así,

$$\Omega = B(y_i, R/4) \cap \bigcup_{j \neq i} B(y_i, R/4),$$

lo que contradice el hecho de que Ω sea conexo. De forma análoga, para todo $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que

$$\bigcup_{r=1}^{k} B(y_{i_r}, R/4) \cap \bigcup_{j \notin \{i_1 \dots, i_k\}} B(u_j, R/4) \neq \emptyset.$$

Probemos ahora que Ω es R-conexo para cualquier $R > 0$. Dados dos puntos $x, y \in \Omega$, consideramos $x_0 = x$ y elegimos una bola tal que $x \in B(y_{i_1}, R/4)$, por ser Ω conexo, entonces existe una bola $B(y_{i_2}, R/4)$ que corta a la bola $B(y_{i_1}, R/4)$, y elegimos $x_1 = y_{i_2}$. Si $y \in B(y_{i_2}, R/4)$, la prueba termina. En el caso contrario, $y \notin B(y_{i_2}, R/4)$, continuamos con el argumento, obteniendo un conjunto finito de puntos $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ tales que

$$x_0 = x, \quad x_{N-1} = y \quad \text{y} \quad d(x_{i-1}, x_i) < R, \forall i = 1, \dots, N,$$

donde $N \leq n$. Por tanto, Ω es R-conexo para cualquier $R > 0$.

■

Definición 2.10. *Sea* (Ω, μ, d) *un espacio métrico de medida, sea* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una función no negativa y medible. Se define el soporte esencial asociado a* f *como*

$$P(f) := \{x \in \Omega : \ \forall \delta > 0, \mu(\{y \in \Omega | \ f(y) > 0\} \cap B(x, \delta)) > 0\},$$

donde $B(x, \delta)$ *denota la bola centrada en* x *con radio* δ*.*

Proposición 2.11. *Sea* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una función medible no negativa, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $f \geq 0$ *no idénticamente nula.*
2. $\mu(P(f)) > 0$.
3. $P(f) \neq \emptyset$.

Demostración.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Supongamos que $\mu(P(f)) = 0$, entonces $\mu(P(f)^c) = \mu(\Omega \backslash P(f)) = \mu(\Omega)$. Por tanto, $f \equiv 0$ para casi todo en Ω, llegando a contradicción con 1. Concluimos entonces que $\mu(P(f)) > 0$.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Si $\mu(P(f)) > 0$, por las propiedades de las medidas, se sigue que $P(f) \neq \emptyset$.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Supongamos que $P(f) \neq \emptyset$ entonces existe $x \in \Omega$ tal que para todo $\delta > 0$,

$$\mu(\{y \in \Omega | \ f(y) > 0\} \cup B(x, \delta)) > 0.$$

Entonces existe un conjunto con medida positiva donde f es estrictamente positiva. Concluimos que f no es idénticamente nula.

■

Definición 2.12. *Sea* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *función medible no negativa. Para* $R > 0$*, denotamos* $P_R^0(f) = P(f)$ *y definimos los conjuntos abiertos*

$$P_R^n(f) = \bigcup_{x \in P_R^{n-1}(f)} B(x, R), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lema 2.13. *Sea* (Ω, μ, d) *un espacio métrico de medida y sea* J *tal que* $J \geq 0$ *no idénticamente nulo, con*

$$J(x, y) > 0 \quad \forall x, y \in \Omega, \textit{tal que } d(x, y) < R, \tag{2.14}$$

para algún $R > 0$*. Si* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *con* $f \geq 0$ *y no idénticamente nula. Entonces,*

$$P(K_J^n(f)) \supset P_R^n(f).$$

Demostración. Vamos a realizar esta demostración por inducción.

Probamos primero que $P(K_J(f)) \supset P_R^1(f)$. Como $f \geq 0$ y por la Proposición 2.11, se sigue que $\mu(P(f)) > 0$. Entonces,

$$K_J(f)(x) = \int_\Omega J(x,y)f(y)\,dy \geq \int_{P(z)} J(x,y)f(y)\,dy.$$

Por tanto, como $J(x,y)f(y) \geq 0$ y estamos integrando en un conjunto de medida no nula,

$$K_J(f)(x) > 0, \quad \forall x \in \bigcup_{y \in P_R^0(f)} B(y,R) = P_R^1(f). \tag{2.15}$$

Por otra parte, como $P_R^1(f)$ es un conjunto abierto de Ω, tenemos que, si $x \in P_R^1(f)$, entonces

$$\mu(B(x,\delta) \cap P_R^1(f)) > 0, \quad \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0. \tag{2.16}$$

De las ecuaciones (2.15) y (2.16) se deduce que

$$P(K_J(f)) \supset P_R^1(f).$$

Supongamos ahora que se cumple la inclusión para $n = l$, es decir, $P(K_J^l(f)) \supset P_R^l(f)$ y veamos que se cumple para $l+1$:

$$P(K_J^{l+1}(f)) \supset P_R^1(K_J^l(f)) = \bigcup_{x \in P(K_J^l(f))} B(x,R) \supset \bigcup_{x \in P_R^l(f)} B(x,R) = P_R^{l+1}(f).$$

Concluimos que $P(K_J^n(f)) \supset P_R^n(f)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

∎

Proposición 2.14. *En las mismas condiciones del Lema 2.13, si Ω es R-conexo y $K \subset \Omega$ compacto, entonces existe $n_0(f) \in \mathbb{N}$, tal que*

$$K \subset P(K_J^n(f)), \quad \forall n \geq n_0.$$

Demostración. Tomamos $x_0 \in P(f)$. Si se cumple que

$$\exists n_0(f) \in \mathbb{N} \text{ tal que } K \subset P_R^n(f) \quad \forall n \geq n_0, \tag{2.17}$$

entonces, usando el Lema 2.13, se sigue que $K \subset P(K_J^n(f))$ $\forall n \geq n_0$ y quedaría demostrada la proposición. Probemos entonces (2.17):

Como Ω es R-conexo, $\forall y \in \Omega$, $\exists M_y \in \mathbb{N}$ y $\{x_0, \ldots, x_{M_y}\}$ tal que

$$x_{M_y} = y \quad \text{y} \quad d(x_{i-1}, x_i) < R, \; \forall i = 1, \ldots, M_y.$$

Entonces

$$\begin{aligned} x_1 &\in B(x_0, R) = P_R^1(x_0), \\ x_2 &\in B(x_1, R) \subset P_R^2(x_0), \\ &\vdots \\ x_i &\in B(x_{i-1}, R) \subset P_R^i(x_0), \quad \forall i = 1, \ldots, M_y. \end{aligned}$$

En particular, $y \in P_R^{M_y}(x_0)$ y

$$B(y, R) \subset P_R^{M_y+1}(x_0). \tag{2.18}$$

De manera análoga, $x_0 \in P_R^{M_y}(x_0)$. Como K es compacto, $K \subset \bigcup_{y \in K} B(y, R)$.

Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, R)$. De la ecuación (2.18), se sigue que

$$\forall y_i \; \exists M_{y_i} \text{ tal que } B(y_i, R) \subset P_R^{M_{y_i}+1}(x_0).$$

Elegimos $n_0(f) = \max_{i=1,\ldots,n}(M_{y_i} + 1)$ y llegamos a que $K \subset P_R^{n_0(f)}(f)$. Entonces

$$K \subset P_R^{n(f)}(f) \subset P(K_J^n(f)), \quad \forall n \geq n_0.$$

■

Observación 2.15. *El siguiente contraejemplo muestra que si J no satisface* (2.14)*, podemos encontrar una función z_0 para la cual la Proposición 2.14 no se satisface.*
Sea $\Omega = [0, L] \subset \mathbb{R}$, con $L > 0$ y fijamos $x_0 \in [0, 1]$ y $R > 0$ tal que $(x_0 - R, x_0 + R) \subset [0, 1]$. Consideramos $J \geq 0$ definida por

$$J(x, y) = \begin{cases} 1, & \textit{si } (x, y) \in A \\ 0, & \textit{caso contrario,} \end{cases}$$

donde $A = ([0, 1] \times [0, 1]) \setminus ((x_0 - R, x_0 + R) \times (x_0 - R, x_0 + R))$ con $d(x, y) < R$. Consideramos la función $z_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \geq 0$ tal que $P(z_0) \subset [1/2, 1]$. Como $z_0(y) = 0$, $\forall y \notin [x_0, 1]$, tenemos

$$K_J(z_0)(x) = \int_{\Omega} J(x, y) z_0(y)\, dy = \int_{P(z_0)} J(x, y) z_0(y)\, dy = \int_{x_0}^{1} J(x, y) z_0(y)\, dy.$$

Además, por la definición de $J(x, y)$, para $\tilde{x} \in (x_0 - R, x_0)$ entonces

- *si* $y \in [x_0, x_0+R)$, *entonces* $(\tilde{x}, y) \in (x_0-R, x_0+R)\times(x_0-R, x_0+R) \Rightarrow J(\tilde{x}, y) = 0$
- *si* $y \in [x_0 + R, 1]$, *entonces* $d(\tilde{x}, y) > R \Rightarrow J(\tilde{x}, y) = 0$,

y para $\tilde{x} \in [0, x_0 - R]$ *e* $y \in [x_0, 1]$, $d(\tilde{x}, y) > R \Rightarrow J(\tilde{x}, y) = 0$. *Es decir, para* $\tilde{x} \in [0, x_0)$,

$$J(\tilde{x}, y) = 0, \quad \forall y \in [x_0, 1].$$

Por tanto

$$K_J(z_0)(\tilde{x}) = \int_{x_0}^{1} J(x, y)z_0(y)\, dy = 0 \quad \forall \tilde{x} \in [0, x_0).$$

Luego,

$$P(K_J(z_0)) \subset [x_0, 1].$$

Por otro lado,

$$K_J(K_J(z_0))(x) = K_J^2(z_0)(x) = \int_{x_0}^{1} J(x, y)K_J(z_0)(y)\, dy.$$

Además, hemos visto que para cualquier $\tilde{x} \in [0, x_0)$, $J(\tilde{x}, y) = 0$, $\forall y \in [x_0, 1]$. *Por tanto,*

$$P(K_J^2(z_0)) \subset [x_0, 1].$$

Iterando, llegamos a que

$$K_J(K_J^{n-1}(z_0)) = K_J^n(z_0) \subset [x_0, 1].$$

Lo que nos lleva a que $P(K_J^n(z_0)) \neq [0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.16 (Principio del Máximo Fuerte)**.** *Sean* (Ω, μ, d) *un espacio métrico de medida,* Ω *R-conexo,* $K_J \in \mathcal{L}(X)$ *y* $J \geq 0$ *con* $J(x, y) > 0$*, para todo* $x, y \in \Omega$ *tales que* $d(x, y) < R$*, para algún* $R > 0$*. Entonces para cada* $u_0 \geq 0$*, no identicamente cero, en* X*, la solución* $u(t)$ *de* (2.3) *es estrictamente positiva para todo* $t > 0$*.*

Demostración. Haciendo uso del Principio del Máximo Débil, Proposición 2.7, tenemos que $u \geq 0$ y $u \not\equiv 0$, $\forall x \in \Omega$, $\forall t > 0$. Sea $v(t) = e^t u(t)$, se tiene que el soporte esencial de v es igual al soporte esencial de u, $P(v) = P(u)$. En la demostración del Principio del Máximo Débil, hemos probado en (2.12) que $v_t(x, t) = e^t K_J(u)(x, t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$. Integrando esta última expresión en el intervalo $[s, t]$ respecto a la variable t, se tiene

$$\underbrace{\int_s^t v_r(x, r)\, dr}_{v(x,t)-v(x,s)} = \int_s^t \underbrace{e^r K_J(u)(x, r)}_{v_t(x,r)}\, dr.$$

Como $v_t(x,r) \geq 0$, $\forall r \geq 0$, se tiene que $\int_s^t v_r(r)\, dr \geq 0$ y por tanto

$$v(x,t) = v(x,s) + \int_s^t v_r(x,r)\, dr \geq v(x,s) \quad \forall t \geq s \geq 0. \tag{2.19}$$

En consecuencia, $P(v(s)) \subset P(v(t))$, $\forall t \geq s$. Por otro lado, $e^t u(x,t) \geq e^s u(x,s)$, puesto que $v(x,t) = e^t u(x,t)$ y $v(x,t) \geq v(x,s)$. En consecuencia,

$$u(x,t) \geq e^{s-t} u(x,s). \tag{2.20}$$

Esto conlleva que $P(u(t)) \supset P(u(s))$, $\forall t \geq s$. Ahora bien, de la ecuación (2.19), se deduce que

$$v|_D(x,t) = v|_D(x,s) + \int_s^t \left(e^r K_J(u)(x,r)\right)\big|_D\, dr, \quad \forall D \subset \Omega. \tag{2.21}$$

De aquí se sigue que

$$P(u(x,t)) \cap D = P(v(x,t)) \cap D \supset P(v(x,s)) \cap D \supset P(K_J(u)(x,r)) \cap D, \tag{2.22}$$

para todo $r \in [s,t]$, puesto que $P(u(x,t)) \supset P(u(x,s))$, $\forall t \geq s$. Además, aplicando el Lema 2.13 a $u(x,s)$, se sigue que

$$P(K_J(u)(x,r)) \supset P(K_J(u(s))) \supset P_R^1(u(s)) = \bigcup_{y \in P(u(s))} B(y,R),\ \forall r \in [s,t]. \tag{2.23}$$

Por tanto, de (2.22) y (2.23), se deduce que

$$P(u(t)) \cap D \supset P(K_J(u)(r)) \cap D \supset \bigcup_{x \in P(u(s))} B(x,R) \cap D. \tag{2.24}$$

Consideremos ahora el conjunto $D = P_R^1(u(s))$, entonces

$$P(u(t)) \cap D = P(u(t)) \cap P_R^1(u(s)) = P(u(t)) \cap \bigcup_{x \in P(u(s))} B(x,R) = P(u(t)).$$

De aquí y de la expresión (2.24) se sigue que

$$P(u(t)) \supset \bigcup_{x \in P(u(s))} B(x,R) \cap D = P_R^1(u(s)). \tag{2.25}$$

Es decir, el soporte esencial de la solución en el instante de tiempo t, contiene las bolas de radio R centradas en los puntos en el soporte esencial de la solución en el instante de tiempo $s < t$. Fijado t, sea $K \subset P^n(u_0)$, por la

Proposición 2.14, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset P_R^n(u_0)$ para todo $n \geq n_0$. Consideramos la siguiente sucesión

$$t_0 = 0, t_1 = \frac{t}{n}, t_2 = \frac{2t}{n}, \dots, t_{n-1} = \frac{(n-1)t}{n}, t_n = \frac{nt}{n} = t.$$

Por lo tanto, por (2.25), se sigue que

$$P(u(t)) \supset P_R^1(u(t_{n-1})) \supset P_R^2(u(t_{n-2})) \supset \cdots \supset P_R^n(u(t_0)) \supset K.$$

Es decir, $u(t) > 0$, $\forall t > 0$ para cada $K \subset \Omega$ compacto. Podemos concluir entonces que $u(t) > 0$ en Ω, para todo $t > 0$, ya que podemos tomar Ω como unión finita de compactos.

■

Además, la solución del problema (2.3) viene dada por

$$u(x,t) = e^t v(x,t),$$

con $v(x,t)$ solución de (2.13). Entonces la regularidad de la solución u es igual a la regularidad del dato inicial u_0.

2.3. Comportamiento asintótico de la solución del problema con difusión no local

Definición 2.17. *Sea $0 < p < +\infty$, se define el exponente conjugado de p a $0 < q < +\infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

2.3.1. Comportamiento asintótico

El siguiente Teorema, que podemos encontrar en [12], nos ayudará a probar que el operador $K_J - I$ tiene al menos un autovalor, viendo que el operador es compacto y autoadjunto[1].

Teorema 2.18. *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador compacto y autoadjunto, entonces al menos uno de los escalares $\|T\|$ ó $-\|T\|$ es un autovalor para el operador T.*

Con lo cual, gracias al Teorema 2.18, bastaría estudiar si el operador $K_J - I$ es compacto y autoadjunto para ver que tiene autovalores.

[1] Puede verse la definición de operador autoadjunto en el Apéndice D.

Lema 2.19.

1. *El operador K_J es autoadjunto.*
2. *El operador $M = K_J - I$ es autoadjunto.*

Demostración.

1. Sean $u, v \in X$, entonces

$$\begin{aligned}(u, K_J(v)) =& \left(u, \int_\Omega J(x,y)v(y)\, dy\right) = \int_\Omega \left(\int_\Omega J(x,y)v(y)\, dy\right) u(x)\, dx = \\ =& \int_\Omega \left(\int_\Omega J(x,y)u(x)\, dx\right) v(y)\, dy = \left(\int_\Omega J(x,y)u(x)\, dx, v\right) = \\ =&(K_J(u), v).\end{aligned}$$

   Por lo tanto, K_J es autoadjunto.

2. Sean $u, v \in X$, entonces

$$(u, M(v)) = (u, (K_J - I)(v)) = (u, K_J(v)) - (u, v),$$

   usando aquí el apartado 1, se llega a que

$$(u, M(v)) = (K_J(u), v) - (u, v) = ((K_J - I)(u), v)\,.$$

   Por lo tanto, $K_J - I$ es autoadjunto.

∎

Proposición 2.20. *Para $1 \leq p_1, p_2 \leq +\infty$, si $J \in L^{p_2}(\Omega, L^{q_1}(\Omega))$, entonces $K_J \in \mathcal{L}(L^{p_1}(\Omega), L^{p_2}(\Omega))$, la aplicación $J \mapsto K_J$ es lineal y continua, y*

$$\|K_J\|_{\mathcal{L}(L^{p_1}(\Omega),L^{p_2}(\Omega))} \leq \|J\|_{L^{p_2}(\Omega,L^{q_1}(\Omega))},$$

donde q_1 es el exponente conjugado de p_1.

Demostración. Por la desigualdad de Hölder, para $1 \leq p_1 \leq +\infty$ y $1 \leq p_2 < +\infty$,

$$\begin{aligned}\|K_J(u)\|^{p_2}_{L^{p_2}(\Omega)} =& \int_\Omega |K_J(u)(x)|^{p_2}\, dx = \int_\Omega \left|\int_\Omega J(x,y)u(y)\, dy\right|^{p_2} dx \leq \\ \leq&\|u\|^{p_2}_{L^{p_1}(\Omega)} \int_\Omega \|J(x,\cdot)\|^{p_2}_{L^{q_1}(\Omega)}\, dx = \|u\|^{p_2}_{L^{p_1}(\Omega)}\|J\|^{p_2}_{L^{p_2}(\Omega,L^{q_1}(\Omega))}.\end{aligned}$$

Para $p_2 = +\infty$ y $1 \leq p_1 \leq +\infty$, para cada $x \in \Omega$,

$$|K_J(u)(x)| = \left|\int_\Omega J(x,y)u(y)\, dy\right| \leq \|u\|_{L^{p_1}(\Omega)}\|J(x,\cdot)\|_{L^{q_1}(\Omega)}. \tag{2.26}$$

Tomando supremo en (2.26) en Ω, se tiene

$$\begin{aligned}\|K_J(u)\|_{L^\infty(\Omega)} =&\sup_{x\in\Omega}|K_J(u)(x)| \leq \\ \leq&\|u\|_{L^{p_1}(\Omega)}\sup_{x\in\Omega)}\|J(x,\cdot)\|_{L^{q_1}(\Omega)} = \|u\|_{L^{p_1}(\Omega)}\|J\|_{L^\infty(\Omega,L^{q_1}(\Omega))}.\end{aligned}$$

■

Lema 2.21. *Para $1 \leq p_1 \leq +\infty$ y $1 \leq p_2 < +\infty$, sea (Ω,μ) un espacio de medida, entonces cualquier función $H \in L^{p_2}(\Omega, L^{q_1}(\Omega))$ se puede aproximar por funciones de variables separables en $L^{p_2}(\Omega, L^{q_1}(\Omega))$, donde q_1 es el exponente conjugado de p_1.*

Puede verse la prueba del Lema 2.21 en la página 20 de [23].

Lema 2.22. *Sean X, Y dos espacios de Banach y $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una serie de operadores de rango finito, con $T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$, y sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \to 0$, cuando $n \to +\infty$. Entonces T es compacto.*

Podemos encontrar la demostración del Lema 2.22 en la página 157 de [6].

Lema 2.23. *Para $1 \leq p_1 \leq +\infty$ y $1 \leq p_2 < +\infty$, si $J \in L^{p_2}(\Omega, L^{q_1}(\Omega))$ entonces $K_J \in \mathcal{L}(L^{p_1}(\Omega), L^{p_2}(\Omega))$ es compacto, donde q_1 es el exponente conjugado de p_1.*

Demostración. Como $J \in L^{p_2}(\Omega, L^{q_1}(\Omega))$, por el Lema 2.21 existen $M(n) \in \mathbb{N}$, $f_j^n \in L^{p_2}(\Omega), g_j^n \in L^{q_1}(\Omega)$ con $j = 1,\ldots,M(n)$, tales que $J(x,y)$ se puede aproximar por funciones de variables separables en $L^{p_2}(\Omega, L^{q_1}(\Omega))$,

$$J^n(x,y) = \sum_{j=1}^{M(n)} f_j^n(x)g_j^n(y),$$

tal que $\|J - J^n\|_{L^{p_2}(\Omega,L^{q_1}(\Omega))} \to 0$ cuando $n \to +\infty$.

Definimos ahora el operador

$$K_J^n(u)(x) = K_{J^n}(u)(x) = \sum_{j=1}^{M(n)} f_j^n(x)\int_\Omega g_j^n(y)u(y)\,dy.$$

Veamos que K_J^n converge al operador $K_J(u)(x)$. Como $K_J - K_J^n = K_{J-J^n}$, y por la Proposición 2.20, tenemos que

$$\|K_J - K_j^n\|_{\mathcal{L}(L^{p_1}(\Omega),L^{p_2}(\Omega))} \leq \|J - J^n\|_{L^{p_2}(\Omega,L^{q_1}(\Omega))}$$

Por el Lema 2.21, tenemos que $\|J - J^n\|_{L^{p_2}(\Omega, L^{q_1}(\Omega))} \to 0$ cuando $n \to +\infty$. Luego, hemos probado que

$$\|K_J - K_J^n\|_{\mathcal{L}(L^{p_1}(\Omega), L^{p_2}(\Omega))} \to 0 \text{ cuando } n \to +\infty.$$

Por último, aplicando el Lema 2.22 al operador $K_J \in \mathcal{L}(L^{p_1}(\Omega), L^{p_2}(\Omega))$ es compacto.

■

Por tanto, el operador $K_J - I$ es compacto, por ser diferencia de dos operadores compactos. Esto implica que el operador $K_J - I$ tiene autovalores y podemos proseguir con el estudio.

Definición 2.24. *Sea $\{\lambda_n\}$ la sucesión de autovalores de $K_J - I$, tales que $\lambda_1 \geq \lambda_2 > \dots$. Diremos que λ_1 es el primer autovalor de $K_J - I$ y denotaremos a su autofunción asociada por Φ_1.*

Consideramos el problema (2.3). Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.25. *Sea (Ω, μ, d) un espacio métrico de medida, con Ω compacto y conexo. Sea $K_J \in \mathcal{L}(L^1(\Omega), \mathcal{C}_b(\Omega))$ compacto y sea $J(x, y)$ tal que*

$$J(x, y) = J(y, x) > 0, \ \forall x, y \in \Omega \text{ tales que } d(x, y) < R, \text{ para algún } R > 0.$$

Entonces la solución u de (2.3) satisface la condición

$$\lim_{t \to \infty} \|e^{-\lambda_1 t} u(t) - C\Phi_1\|_X = 0,$$

donde

$$C = \frac{\int_\Omega u_0(x)\Phi_1(x)\, dx}{\int_\Omega \Phi_1(x)^2\, dx},$$

y Φ_1 es la autofunción asociada al primer autovalor λ_1 de $K_J - I$. Además, $\Phi_1 \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ y $\Phi_1 \in \mathcal{C}_b(\Omega) \cap L^1(\Omega)$, con q exponente conjugado de p.

Antes de hacer la demostración de esta proposición necesitamos los siguientes resultados previos, cuyas demostraciones se encuentran detalladas en [23].

Proposición 2.26. *Sea (Ω, μ, d) un espacio métrico de medida, con $\mu(\Omega) < +\infty$.*

1. *Para $1 \leq p_0 < p_1 < +\infty$, si $K \in \mathcal{L}(L^{p_1}(\Omega), L^{p_1}(\Omega))$ y $K \in \mathcal{L}(L^{p_0}(\Omega), L^{p_0}(\Omega))$ es compacto entonces $K \in \mathcal{L}(L^p(\Omega), L^p(\Omega))$, $\forall p \in [p_0, p_1]$, y $\sigma_{L^p}(K)$ es independiente de p.*

2. *Para* $1 \leq p_0 < p_1 \leq +\infty$, *si* $K \in \mathcal{L}(L^{p_0}(\Omega), L^{p_1}(\Omega))$ *es compacto, entonces* $K \in \mathcal{L}(L^p(\Omega), L^p(\Omega))$, $\quad \forall p \in [p_0, p_1]$, *y* $\sigma_{L^p}(K)$ *es independiente de* p.

3. *Para* $1 \leq p_0 \leq +\infty$, *si* $K \in \mathcal{L}(L^{p_0}(\Omega), \mathcal{C}_b(\Omega))$ *es compacto y* $X = \mathcal{C}_b(\Omega)$ *o* $X = L^r(\Omega)$ *con* $r \in [p_0 + \infty]$, *entonces* $K \in \mathcal{L}(X)$, *y* $\sigma_X(K)$ *es independiente de* X.

Proposición 2.27. *Sea* (Ω, μ, d) *un espacio métrico de medida, con* $\mu(\Omega) < +\infty$. *Suponemos que* $K_J \in \mathcal{L}(L^{p_0}(\Omega), \mathcal{C}(\Omega))$ *es compacto, y* $p_0 \leq 2$. *Sea* $X = L^p(\Omega)$, *con* $p \in [p_0, +\infty]$, *o* $X = \mathcal{C}_b(\Omega)$, *y* J *satisface que*

$$J(x, y) = J(y, x).$$

Entonces $K_J \in \mathcal{L}(X)$ *y* $\sigma_X(K_J) \setminus \{0\}$ *es una sucesión de autovalores de multiplicidad finita, independiente de* X, *que converge a* 0.

Proposición 2.28. *Sea* (Ω, μ, d) *un espacio métrico de medida, con* Ω *compacto y conexo. Supongamos que* J *satisface que*

$$J(x, y) = J(y, x)$$

y

$$J(x, y) > 0, \quad \forall x, y \in \Omega \text{ tal que } d(x, y) < R, \text{ para algún } R > 0,$$

y $K_J \in \mathcal{L}(L^p(\Omega), \mathcal{C}_b(\Omega))$, *con* $1 \leq p \leq +\infty$, *es compacto. Entonces* $K_J \in \mathcal{L}(\mathcal{C}_b(\Omega), \mathcal{C}_b(\Omega))$ *es compacto, el radio espectral* $\rho_{\mathcal{C}_b(\Omega)}(K_J)$ *es un autovalor positivo simple, y su autofunción asociada es estrictamente positiva.*

Proposición 2.29. *Sea* (Ω, μ, d) *un espacio métrico de medida. Sea* $X = L^p(\Omega)$ *o* $X = \mathcal{C}_b(\Omega)$. *Si* $K \in \mathcal{L}(X)$ *es compacto, entonces*

$$\sigma(K - I) = \{-1\} \cup \{\mu_n\}_{n=1}^{M}, \text{ con } M \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}.$$

Si $M = +\infty$, *entonces* $\{\mu_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *es una sucesión de autovalores de* $K - I$ *con multiplicidad finita.*

Definición 2.30. *Sea* F *un operador lineal y acotado en el espacio de Banach* Y.

1. *Diremos que un conjunto* σ_1 *es la parte aislada de* $\sigma(F)$ *si* σ_1 *y* $\sigma_2 := \sigma(F) \setminus \sigma_1$ *son subconjuntos cerrados de* $\sigma(F)$.

2. *Si σ_1 es la parte aislada de $\sigma(F)$, definimos la proyección de Riesz de F correspondiente a la parte aislada σ_1 como*

$$Q_{\sigma_1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda I - F)^{-1}\, d\lambda,$$

donde $\lambda \in \rho(F)$ y Γ está formada por una cantidad finita de curvas de Jordan alrededor de σ_1 rectificables y orientadas positivamente tales que separan σ_1 de σ_2.

Nota 2.31. *Observemos que Q_{σ_1} es una proyección, ya que $Q^2_{\sigma_1} = Q_{\sigma_1}$. Podemos encontrar la prueba de esta nota en el Apéndice D.*

Proposición 2.32. *Sea (Ω, μ, d) un espacio métrico de medida. Para $1 \leq p_0 < p_1 \leq +\infty$, con $2 \in [p_0, p_1]$. Supongamos que $F \in \mathcal{L}(X)$ es autoadjunto en $L^2(\Omega)$, el espectro de F, $\sigma_X(F)$, es independiente de X, y el primer autovalor asociado a F, λ_1 es simple y aislado, con autofunción asociada $\Phi_1 \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, para $p \in [p_0, p_1]$, si $X = L^p(\Omega)$, o $\Phi_1 \in \mathcal{C}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ si $X = \mathcal{C}_b(\Omega)$, y $\|\Phi_1\|_{L^2(\Omega)} = 1$, donde q es el exponente conjugado de p.*
Si $\sigma_1 = \{\lambda_1\}$, y Γ es la curva que sólo envuelve λ_1, entonces para $u \in X$,

$$Q_{\sigma_1}(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda I - F)^{-1} u\, d\lambda = \int_\Omega u(x)\Phi_1(x)\, dx \Phi_1 =$$

$$= (u, \Phi_1)\Phi_1 =: P_{\sigma_1}(u),$$

donde Q_{σ_1} es la proyección de Riesz y P_{σ_1} es la proyección de Hilbert sobre el espacio generado por las autofunciones asociadas a σ_1. Para profundizar más en la proyección de Riesz y de Hilbert, ver [23] y capítulo 1 de [17].

Teorema 2.33. *Sea $F \in \mathcal{L}(Y)$ y sea $\sigma(F)$ la unión disjunta de dos subconjuntos cerrados σ_1 y σ_2, con $\delta_2 < Re(\sigma_1) \leq \delta_1$, $Re(\sigma_2) \leq \delta_2$, con $\delta_2 < \delta_1$. Entonces la solución de*

$$\begin{cases} u_t(t) = F(u)(t), & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0 \in Y, \end{cases}$$

cumple

$$\lim_{t\to\infty} \|e^{-\mu t}(u(t) - Q_{\sigma_1}(u)(t))\|_Y = 0, \quad \forall \mu > \delta_2.$$

Proposición 2.34. *Sea σ una parte aislada de $\sigma(F)$, entonces*

$$e^{Ft} \circ Q_\sigma = Q_\sigma \circ e^{Ft} = e^{F_1 t},$$

donde $F_1 = F|_{ImQ_\sigma}$, donde ImQ_σ denota la imagen de Q_σ.

Podemos ahora probar el resultado de la Proposición 2.25:

Demostración. De la Proposición 2.26 se tiene que $\sigma_X(K_J)$ es independiente de X. Además, como $J(x,y) = J(y,x)$, por la Proposición 2.27, sabemos que $\sigma(K)\setminus\{0\}$ es una sucesión real de autovalores $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de multiplicidad finita que converge a 0. Por otro lado, se satisface la hipótesis de la Proposición 2.28, por tanto el primer autovalor, $\lambda_1 = \rho(K_J)$, es un autovalor simple aislado y su autofunción asociada, $\Phi_1 \in \mathcal{C}_b(\Omega)$, es positiva. Como el espectro no depende de X, tenemos que $\Phi_1 \in X$ y, en particular, $\Phi_1 \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, y $\Phi_1 \in \mathcal{C}_b(\Omega) \cap L^1(\Omega)$.

Gracias a la Proposición 2.29, sabemos que el espectro, $\sigma_X(K_J - I)\setminus\{-1\}$, es una sucesión de autovalores reales $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} - 1$, de multiplicidad finita que converge a -1.

Ahora, consideramos $\sigma_1 = \{\lambda_1\}$ y $\sigma_2 = \{\lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots\} \cup \{-1\}$, y sea Φ_1 una autofunción positiva asociada a λ_1. Como $J(x,y) = J(y,x)$, usando el Lema 2.19, $K - I$ es autoadjunto en $L^2(\Omega)$, entonces podemos aplicar la Proposición 2.32. Entonces, se sigue que

$$Q_{\sigma_1}(u_0) = P_{\sigma_1}(u_0) = C\Phi_1,$$

donde

$$C = \frac{\int_\Omega u_0(x)\Phi_1(x)\,dx}{\int_\Omega \Phi_1(x)^2\,dx}.$$

Además, para $u_0 \in X$ gracias al Teorema 2.33, la solución de (2.3) satisface

$$\lim_{t\to+\infty} \|e^{-\lambda_1 t}(u(t) - Q_{\sigma_1}(u)(t)\|_X = 0. \tag{2.27}$$

Como $u(x,t) = e^{(K_J-I)t}u_0(x)$, $P_{\sigma_1} = Q_{\sigma_1}$, y por la Proposición 2.34 se sigue que

$$P_{\sigma_1}(u)(x,t) = P_{\sigma_1}(e^{(K_J-I)t}u_0(x))(x,t) = e^{(K_J-I)t}P_{\sigma_1}(u_0)(x). \tag{2.28}$$

Por otro lado, como $P_{\sigma_1}(u_0)(x) = C\Phi_1$, entonces

$$e^{(K_J-I)t}P_{\sigma_1}(u_0)(x) = e^{(K_J-I)t}C\Phi_1. \tag{2.29}$$

Además, Φ_1 es una autofunción asociada a λ_1 y $e^{(K_J-I)t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(K_J - I)^n t^n}{n!}$, entonces

$$\begin{aligned} e^{(K_J-I)t}\Phi_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(K_J-I)^n t^n}{n!}\Phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(K_J-I)^n \Phi_1 t^n}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^n \Phi_1 t^n}{n!} = e^{\lambda_1 t}\Phi_1. \end{aligned} \tag{2.30}$$

De (2.28)-(2.30) se deduce que

$$P_{\sigma_1}(u)(x,t) = Ce^{\lambda_1 t}\Phi_1(x). \tag{2.31}$$

Y por (2.27) y (2.31)

$$\lim_{t\to\infty} \|e^{-\lambda_1 t}u(t) - C\Phi_1\|_X = 0.$$

■

Capítulo 3

Estudio del problema en el caso no lineal

En este capítulo seguimos trabajando con (Ω, μ, d) espacio métrico de medida, $X = L^p(\Omega)$, con $1 \leq p \leq +\infty$, o $X = \mathcal{C}_b(\Omega)$, y el operador $K_J \in \mathcal{L}(X)$. Consideramos el problema no lineal con reacción local

$$\begin{cases} u_t(x,t) = M(u)(x,t) + f(x,u), & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x,t_0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $M(u)(x,t) = (K_J - I)(u)(x,t) = \displaystyle\int_\Omega J(x,y)u(y,t)\ dy - u(x,t)$ y $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es el término de reacción local, y $u_0 \in X$. Haremos un estudio de existencia, unicidad y positividad de la solución del problema (3.1) en el caso en el que f sea globalmente lipschitziana o f sea localmente lipschitziana.

3.1. Existencia, unicidad y positividad de la solución con término de reacción globalmente lipschitziano

Antes de comenzar, recordemos la definición de globalmente lipschitziana:

Definición 3.1. *Diremos que la función $g : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es globalmente lipschitziana en Ω si existe una constante $L > 0$ tal que*

$$|g(x) - g(y)| \leq L\|x - y\|_{\mathbb{R}^N}, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Al valor L se le llama constante de Lipschitz para g en Ω.

A continuación definimos el operador de Nemitcky y veremos sus propiedades, las cuales se encuentran detalladas en el Apéndice B de [23].

Definición 3.2. *Se define el operador Nemitcky asociado a* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *como el operador* $F : X \to X$ *definido por*

$$F(u)(x) = f(x, u(x)),$$

con $u \in X$.

Definición 3.3. *Un operador* $F \in \mathcal{L}(X)$ *es creciente si dados* $y_1, y_2 \in Y$ *tales que* $y_1 \geq y_2$ *entonces* $F(y_1) \geq F(y_2)$.

Lema 3.4. *Sea* $F : X \to X$ *el operador Nemitcky asociado a la función*

$$\begin{aligned} f : \Omega \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x, s) &\mapsto f(x, s) \end{aligned}$$

1. *Si* f *es creciente respecto a la variable* $s \in \mathbb{R}$, *entonces* F *es creciente.*
2. *Si* f *es globalmente lipschitziana en la variable* $s \in \mathbb{R}$, *entonces* F *es globalmente lipschitziana.*
3. *Si* f *es globalmente lipschitziana en la variable* $s \in \mathbb{R}$, *entonces para una constante* $\beta > L_f$, *donde* L_f *es la constante Lipschitz de* f, *entonces* $f(x, s) + \beta s$ *es creciente, es decir, para todo* $s, t \in \mathbb{R}$ *tal que* $s \geq t$ *se tiene*
$$f(x, s) + \beta s \geq f(x, t) + \beta t, \quad \forall x \in \Omega.$$

Demostración.

1. Como la función f es creciente en la segunda varible, se tiene
$$f(x, s) - f(x, t) \geq 0, \text{ para } s, t \in \mathbb{R} \text{ tal que } s \geq t, \forall x \in \Omega.$$
Consideramos $u, v \in X$, con $u \geq v$, entonces
$$F(u)(x) - F(v)(x) = f(x, u(x)) - f(x, v(x)) \geq 0, \forall x \in \Omega.$$
Por lo tanto, F es creciente.

2. Como f es globalmente lipchitziana,
$$\exists L_f \in \mathbb{R} \text{ tal que } \forall s, t \in \mathbb{R}\ |f(x, s) - f(x, t)| \leq L_f |s - t|, \ \forall x \in \Omega.$$

Probemos que F es globalmente lipschitziana en $X = L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < +\infty$. Sean $u, v \in L^p(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|F(u) - F(v)\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |F(u)(x) - F(v)(x)|^p \, dx \right)^{1/p} = \\
&= \left(\int_\Omega |f(x, u(x)) - f(x, v(x))|^p \, dx \right)^{1/p} \leq \\
&\leq \left(\int_\Omega L_f^p |u(x) - v(x)|^p \, dx \right)^{1/p} = L_f \|u - v\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Con lo cual, F es globalmente lipschitziana en $L^p(\Omega)$, con $1 \leq p < +\infty$. Veamos ahora que F es globalmente lipschitziana en X, siendo $X = L^\infty(\Omega)$ o $X = \mathcal{C}_b(\Omega)$. Sean $u, v \in X$, entonces

$$\begin{aligned}
\|F(u) - F(v)\|_X =& \sup_{x \in \Omega} |F(u)(x) - F(v)(x)| = \\
=& \sup_{x \in \Omega} |f(x, u(x)) - f(x, v(x))| \leq \\
\leq& \sup_{x \in \Omega} L_f |u(x) - v(x)| = L_f \|u - v\|_X.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, F es globalmente lipschitziana en X.

3. Como f es globalmente lipschitziana,

$$|f(x, s) - f(x, t)| \leq L_f |s - t|,$$

entonces para $s \geq t$,

$$-L_f(s - t) \leq f(x, s) - f(x, t) \leq L_f(s - t).$$

Elegimos $\beta > L_f$, lo que implica que

$$\begin{aligned}
(f(x, s) + \beta s) - (f(x, t) + \beta t) =& f(x, s) - f(x, t) + \beta(s - t) \geq \\
\geq& - L_f(s - t) + \beta(s - t) = \\
=& (\beta - L_f)(s - t) \geq 0.
\end{aligned}$$

■

Definición 3.5. *Se dice que una solución, u, del problema* (3.1) *es fuerte si u satisface la ecuación para casi todo $x \in \Omega$.*

Teorema 3.6. *Sea Y un espacio de Banach, supongamos que el operador $H : Y \to Y$ genera un semigrupo en Y, que lo denotamos por e^{Ht}. Consideramos el problema*

$$\begin{cases} u_t(t) = H(u)(t) + g(t), t > t_0 \\ u(t_0) = u_0 \in Y. \end{cases} \tag{3.2}$$

Supongamos que $g \in \mathcal{C}([t_0, t_1], Y), u_0 \in \mathcal{D}(H)$, donde $\mathcal{D}(H)$ es el espacio de funciones infinitamente derivables en H y de soporte compacto en H, y u es una solución de (3.2) *que viene dada por*

$$u(t) = e^{-H(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-H(t-s)}g(s)\, ds.$$

Además, supongamos que

1. *O bien, $g \in \mathcal{C}([t_0, t_1], \mathcal{D}(H))$;*

2. *O bien, $g \in \mathcal{C}^1([t_0, t_1], Y)$.*

Entonces $u \in \mathcal{C}^1([t_0, t_1], Y) \cap \mathcal{C}([t_0, t_1], \mathcal{D}(H))$, y es una solución fuerte de (3.2) *en Y.*

La demostración de este teorema puede encontrarse en la Sección 4.2 (página 109) de [21].
Expresamos ahora el problema (3.2) dependiendo del operador Nemitcky, F, asociado a f:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = M(u)(x,t) + F(u)(x,t), & x \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

Como estamos en el caso de que f es globalmente lipschitziana, por el Lema 3.4, se sigue que el operador F también es globalmente lipschitziano.

Lema 3.7. *Sea $S \in \mathcal{L}(Y)$ un operador tal que $-\delta \leq Re(\sigma(S)) \leq \delta$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe una constante $C_0 = C_0(\varepsilon)$ tal que*

$$\|e^{St}\|_{\mathcal{L}(Y)} \leq C_0 e^{(\delta+\varepsilon)|t|} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Usando la Definición D.11, se sigue que

$$e^{St} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t}(\lambda I - S)^{-1}\, d\lambda.$$

Para cada curva Γ orientada positivamente, se tiene que

$$-\delta-\varepsilon \leq \mathrm{Re}(\lambda) \leq \delta+\varepsilon, \quad \forall \lambda \in \Gamma,$$

entonces para $t \geq 0$

$$\|e^{St}\|_{\mathcal{L}(Y)} = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t}(\lambda I - S)^{-1}\, d\lambda \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma e^{\mathrm{Re}(\lambda) t} |(\lambda I - S)^{-1}|\, d\lambda \leq C_0 e^{(\delta+\varepsilon)t}$$

y, de manera análoga, para $t < 0$,

$$\|e^{St}\|_{\mathcal{L}(Y)} \leq C_0 e^{-(\delta+\varepsilon)t}.$$

Por tanto,

$$\|e^{St}\|_{\mathcal{L}(Y)} \leq C_0 e^{(\delta+\varepsilon)|t|} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

■

Proposición 3.8. *Sea $M \in \mathcal{L}(X)$ y sea $F : X \to X$ globalmente lipschitziana. Entonces el problema* (3.3) *tiene una única solución global $u \in \mathcal{C}^1((-\infty,+\infty), X)$, para cada $u_0 \in X$, con*

$$u(\cdot,t) = e^{Mt}u_0 + \int_0^t e^{M(t-s)} F(u)(\cdot,s)\, ds. \tag{3.4}$$

Demostración. Definimos

$$\mathcal{F}(u) := e^{Mt}u_0 + \int_0^t e^{M(t-s)} F(u)(\cdot,s)\, ds$$

y fijamos $T > 0$. Buscamos ahora los puntos fijos de $\mathcal{F}$ en el espacio métrico $\mathcal{C}([-T,T],X)$, que es completo para la norma del supremo.

Veamos primero que $\mathcal{F} : \mathcal{C}([-T,T],X) \to \mathcal{C}([-T,T],X)$. Sea $u \in \mathcal{C}([-T,T],X)$, entonces, como F es globalmente lipschitziana, $F(u) \in \mathcal{C}([-T,T],X)$. Ahora bien, como $M = K_J - I \in \mathcal{L}(X)$, se tiene que

$$-\|M\|_{\mathcal{L}(X)} < |\sigma(M)| < \|M\|_{\mathcal{L}(X)},$$

entonces por el Lema 3.7, existen $a, C \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que

$$\|e^{Mt}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ce^{a|t|}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Usando esta desigualdad y teniendo en cuenta que $F(u) \in \mathcal{C}([-T,T],X)$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(u)(t)\|_X &\leq \|e^{Mt}u_0\|_X + \left\| \int_0^t e^{M(t-s)} F(u)(\cdot,s)\, ds \right\|_X \leq \\
&\leq \|e^{Mt}u_0\|_X + \left| \int_0^t \|e^{M(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X)} \|F(u)(s)\|_X\, ds \right| \leq \\
&\leq Ce^{a|t|}\|u_0\|_X + \left| \int_0^t Ce^{a|t-s|} \|F(u)(s)\|_X\, ds \right| \leq \\
&\leq Ce^{a|t|}\|u_0\|_X + C|t|e^{a|t|} \sup_{s\in[-|t|,|t|]} \|F(u)(s)\|_X.
\end{aligned}$$

Es decir, $\mathcal{F}(u)(t) \in X$.

Veamos ahora que $\mathcal{F}$ es continua en tiempo, para ello fijamos $t \in [-T,T]$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(u)(t+\varepsilon) = e^{M\varepsilon}\mathcal{F}(u)(t) + \int_t^{t+\varepsilon} e^{M(t+\varepsilon-s)} F(u)(\cdot,s)\, ds.$$

Luego

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{F}(u)(t+\varepsilon) - \mathcal{F}(u)(t)\|_X \leq \|(e^{M\varepsilon} - I)\mathcal{F}(u)(t)\|_X + \\
&+ \int_t^{t+\varepsilon} \|e^{M(t+\varepsilon-s)}\|_{\mathcal{L}(X)} \|F(u)(\cdot,s)\|_X\, ds \\
&\leq \|(e^{M\varepsilon} - I)\mathcal{F}(u)(t)\|_X + \int_t^{t+\varepsilon} Ce^{a|t+\varepsilon-s|} \|F(u)(s)\|_X\, ds.
\end{aligned}$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$, se sigue la continuidad de $\mathcal{F}$, ya que

$$\|(e^{M\varepsilon} - I)\mathcal{F}(u)(t)\|_X \to 0 \text{ cuando } \varepsilon \to 0$$

y

$$\int_t^{t+\varepsilon} Ce^{a|t+\varepsilon-s|} \|F(u)(s)\|_X\, ds \to 0 \text{ cuando } \varepsilon \to 0,$$

ya que $F(u) \in \mathcal{C}([-T,T],X)$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ lleva $\mathcal{C}([-T,T],X)$ en él mismo.

A continuación probemos que $\mathcal{F}$ es una contracción en $\mathcal{C}([-T,T],X)$ si T es lo suficientemente pequeño. Sean $u_1, u_2 \in \mathcal{C}([-T,T],X)$ y $t \in [-T,T]$, entonces

$$\|\mathcal{F}(u_1)(t) - \mathcal{F}(u_2)(t)\|_X \leq \left| \int_0^t \|e^{M(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X)} \|F(u_1)(\cdot,s) - F(u_2)(\cdot,s)\|_X\, ds \right|,$$

usando ahora que F globalmente lipschitziana y que se cumple la desigualdad (3.5), se tiene

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(u_1)(t) - \mathcal{F}(u_2)(t)\|_X \leq & L_F \left| \int_0^t \|e^{M(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X)} \|u_1(s) - u_2(s)\|_X \, ds \right| \leq \\ \leq & CL_F \left| \int_0^t e^{a|t-s|} \|u_1(s) - u_2(s)\|_X \, ds \right| \leq \\ \leq & CL_F |t| e^{a|t|} \sup_{s \in -|t|,|t|} \|u_1(s) - u_2(s)\|_X \leq \\ \leq & CL_F T e^{aT} \sup_{s \in -|t|,|t|} \|u_1(s) - u_2(s)\|_X\end{aligned}$$

ya que estamos tomando T suficientemente pequeño, podemos tomarlo tal que $CL_F|T|e^{a|T|} < 1$. Por tanto, $\mathcal{F}$ es una contracción y tiene un único punto fijo.

Como T no depende de u_0, si consideramos el mismo problema pero esta vez con el dato inicial $u(x, T)$, entonces existe una única solución para todo $t \in [0, 2T]$. Si también consideramos el mismo problema pero con dato inicial $u(x, -T)$, llegamos a que existe una única solución para todo $t \in [-2T, 0]$. Por la unicidad de la solución, tenemos que existe una única solución, u, para todo $t \in [-2T, 2T]$. Repitiendo este argumento, se tiene que existe una única solución $u \in \mathcal{C}^1((-\infty, +\infty), X)$ y que satisface (3.4).

■

Con este resultado queda probada la existencia y unicidad de solución del problema (3.3).

3.1.1. Principios del máximo

Proposición 3.9 (Principio del Máximo Débil)**.** *Sea* $M = K_J - I \in \mathcal{L}(X)$*,* J *no negativa,* $F : X \to X$ *globalmente lipschitziana. Supongamos que existe una constante* $\beta > 0$ *tal que* $F + \beta I$ *es creciente. Si* $u_0, u_1 \in X$ *satisface que* $u_0 \geq u_1$ *entonces*

$$u^0(t) \geq u^1(t), \text{ para todo } t \geq 0,$$

donde estamos denotando por $u^i(t)$ *a la solución de* (3.3) *con dato inicial* u_i*, para* $i = 1, 2$*.*

Demostración. Podemos reescribir la ecuación del problema (3.3), $u_t(x, t) = M(u)(x, t) + F(u)(x, t)$, sumando y restando $\beta u(x, t)$, como

$$u_t(x, t) = M(u)(x, t) - \beta u(x, t) + F(u)(x, t) + \beta u(x, t).$$

Por la Proposición 3.8, $u^i(t)$ es el único punto fijo de

$$\mathcal{F}_i(u)(t) = e^{(M-\beta I)t}u_i + \int_0^t e^{(M-\beta I)(t-s)}(F(u)(s) + \beta u(s))\, ds. \tag{3.6}$$

en $\mathcal{C}([-T,T],X)$. Tomamos la siguiente iteración en espacio

$$\begin{cases} u_1^i(t) = u_i, \\ u_{n+1}^i(t) = \mathcal{F}_i(u_n^i)(t), \quad \forall n \geq 1, \quad \text{para } 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Entonces $u_n^i(t)$ converge a $u^i(t)$ en $\mathcal{C}([-T,T],X)$. Además, $u_1^0(t) \geq u_1^1(t)$, para todo $t \geq 0$, ya que $u^0 \geq u^1$. Por otro lado,

$$u_2^i(t) = \mathcal{F}_i(u_1^i)(t) = e^{(M-\beta I)t}u_i + \int_0^t e^{(M-\beta I)(t-s)}(F(u_i) + \beta u_i)\, ds.$$

Además, como J es no negativa, el operador K_J es positivo. Asimismo, como $\beta + 1 > 0$, el operador $S_M := M - \beta I = K_J - (\beta+1)I$ cumple la hipótesis del Principio del Máximo Débil en el caso lineal, Proposición 2.7. Entonces, como $u_0 \geq u_1$, se tiene

$$e^{S_M t}u_0 \geq e^{S_M t}u_1, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.7}$$

También, como $F + \beta I$ es creciente y por el Principio del Máximo Débil en el caso lineal, Proposición 2.7, resulta para todo $t \in [0,T]$ y $s \in [0,t]$,

$$e^{S_M(t-s)}(F(u_0) + \beta u_0) \geq e^{S_M(t-s)}(F(u_1) + \beta u_1). \tag{3.8}$$

Integrando (3.8) en $[0,t]$ y sumando la expresión (3.7), se tiene que $u_2^0(t) \geq u_2^1(t)$ para todo $t \in [0,T]$. Iterando este argumento, llegamos a que

$$u_n^0(t) \geq u_n^1(t), \quad \forall t \in [0,T], \text{ para cada } n \geq 1,$$

y como $u_n^i(t) \to u^i(t)$ cuando $n \to +\infty$ en $\mathcal{C}([-T,T],X)$, se tiene que $u^0(t) \geq u^1(t)$, para todo $t \in [0,T]$.

Consideramos ahora la solución del problema (3.3) con dato inicial en el instante de tiempo T, $u^i(T)$. Entonces, como el dato inicial cumple que $u^0(T) \geq u^1(T)$, argumentando como antes, se tiene que

$$u^0(t) \geq u^1(t) \quad \forall t \in [T, 2T].$$

Por lo tanto, $u^0(t) \geq u^1(t)$ para todo $t \in [0,2T]$. Repitiendo este argumento, concluimos que

$$u^0(t) \geq u^1(t), \quad \forall t \geq 0.$$

■

Proposición 3.10 (Principio del Máximo Fuerte). *Sea $M = K_J - I \in \mathcal{L}(X)$, J no negativa, $F : X \to X$ globalmente lipschitziana. Supongamos que existe una constante $\beta > 0$ tal que $F + \beta I$ es creciente. Sean $u_0, u_1 \in X$ tales que $u_0 \geq u_1$, $u_0 \neq u_1$ y J cumple*

$$J(x,y) > 0 \text{ para todo } x, y \in \Omega \text{ tales que } d(x,y) < R, \tag{3.9}$$

para algún $R > 0$, y Ω es R-conexo. Entonces

$$u^0(t) > u^1(t), \text{ para todo } t > 0,$$

donde estamos denotando por $u^i(t)$ a la solución de (3.3) con dato inicial u_i, para $i = 1, 2$.

Demostración. Como en la demostración de la Proposición 3.9, llamamos $S_M := M - \beta I$. Mediante la Proposición 3.8, sabemos que si $u^i(t)$ es solución del problema (3.3) con dato inicial u_i, entonces $u^i(t)$ viene dada por (3.4). Además, J satisface (3.9), misma condición que en el Principio de Máximo Fuerte en el caso lineal (Proposición 2.16), por este motivo se deduce

$$e^{S_M t} u_0 = e^{(K_J - (\beta+1)I)t} u_0 > e^{(K_J - (\beta+1)I)t} u_1 = e^{S_M t} u_1, \quad \forall t > 0.$$

Por otro lado, también se tiene

$$\int_0^t e^{S_M(t-s)} (F(u^0)(x,s) + \beta u^0(x,s))\, ds \geq \int_0^t e^{S_M(t-s)} (F(u^1)(x,s) + \beta u^1(x,s))\, ds,$$

para todo $t > 0$. Por tanto, $u^0(t) > u^1(t)$, $\forall t > 0$.

■

Gracias a estas dos últimas proposiciones, hemos visto que dados dos datos iniciales ordenados, las correspondientes soluciones, siempre que existan, conservan el orden. Con el siguiente resultado, probamos las propiedades de monotonía del término no lineal del problema (3.3).

Proposición 3.11. *Sean $M \in \mathcal{L}(X)$, J operador no negativo, $F_i : X \to X$ operador globalmente lipschitziano para $i = 1, 2$. Supongamos también que existe una constante $\beta > 0$ tal que $F_i + \beta I$ es creciente para $i = 1, 2$ y $F_1 \geq F_2$. Entonces*

$$u^1(t) \geq u^2(t), \quad t \geq 0,$$

donde $u^i(t)$ es la solución del problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = M(u)(x,t) + F_i(u)(x,t), & x \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

con $u_0 \in X$. Además, si Ω es R-conexo y J satisface (3.9), entonces

$$u^1(t) > u^2(t), \quad \forall t > 0.$$

Demostración. Denotamos $S_M := M - \beta I$. Fijado $T \geq 0$, sabemos que $u^i(t)$ es el único punto fijo de

$$\mathcal{F}_i(u)(t) = e^{S_M t} u_0 + \int_0^t e^{S_M(t-s)}(F_i(u)(s) + \beta u(s))\, ds \tag{3.11}$$

en $\mathcal{C}([-T,T],X)$. Consideramos la sucesión

$$\begin{cases} u_1(\cdot,t) = u_0(\cdot), \\ u^i_{n+1}(\cdot,t) = \mathcal{F}_i(u^i_n)(t), \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Observemos que $u^i_n \to u^i(\cdot,t)$ en $\mathcal{C}([-T,T],X)$. Entonces

$$u^i_2(t) = \mathcal{F}(u^i_1)(\cdot,t) = e^{S_M t} u_0 + \int_0^1 e^{S_M(t-s)}(F_i(u_0) + \beta u_0)\, ds.$$

Como $F_1 + \beta I \geq F_2 + \beta I$, y por el Principio del Máximo Débil, Proposición 2.7, se tiene

$$e^{S_M(t-s)}(F_1(u_0) + \beta u_0) \geq e^{S_M(t-s)}(F_2(u_0) + \beta u_0), \quad \forall t \geq 0, \forall s \in [0,t].$$

Por lo tanto, $u^1_2(t) \geq u^2_2(t)$, $\forall t \in [0,T]$. Repitiendo este argumento, se sigue que

$$u^1_n(x,t) \geq u^2_n(x,t), \quad \forall \in [0,T], \text{ para cada } n \geq 1.$$

Usando que $u^i_n(t) \to u^i(t)$, llegamos a que

$$u^1(t) \geq u^2(t), \quad \forall t \in [0,T].$$

Consideramos ahora la solución de (3.10) pero con dato inicial $\tilde{u}^i_0(T) = u^i(x,T)$, entonces argumentando de igual manera que antes, y teniendo en cuenta que el dato inicial está ordenado, se deduce que $\tilde{u}^1(t) \geq \tilde{u}^2(t), \forall t \in [T, 2T]$, pero como la solución de (3.10) es única, entonces las soluciones $u^i(\cdot,t)$ están ordenadas para todo $t \in [0,2T]$. Repitiendo este argumento, concluimos que

$$u^1(t) \geq u^2(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{3.12}$$

Probamos ahora la segunda parte de este resultado:
La solución $u^i(t)$ de (3.10) viene dada por

$$u^i(t) = e^{S_M t} u_0 + \int_0^t e^{S_M(t-s)}(F_i(u^i)(s) + \beta u^i(s))\, ds.$$

Como $F_1 + \beta I$ es creciente, $F_1 \geq F_2$ y teniendo en cuenta (3.12), se sigue que

$$(F_1(u^1)(x,t)+\beta u^1(x,t)) \geq (F_1(u^2)(x,t)+\beta u^2(x,s)) \geq (F_2(u^2)(x,t)+\beta u^2(x,t)),$$

para todo $t \geq 0$. Por tanto, por el Principio del Máximo Fuerte en el caso lineal, Proposición 2.16, se tiene

$$e^{S_M t}(F_1(u^1)(x,s) + \beta u^1(x,s)) > e^{S_M t}(F_2(u^2)(x,s) + \beta u^2(x,s)), \forall t > 0.$$

Esta última expresión implica que

$$\int_0^t e^{S_M(t-s)}(F_1(u^1)(x,s)+\beta u^1(x,s))\, ds > \int_0^t e^{S_M(t-s)}(F_2(u^2)(x,s)+\beta u^2(x,s))\, ds,$$

para todo $t > 0$. Por lo tanto,

$$u^1(t) > u^2(t), \quad \forall t > 0.$$

■

3.1.2. Resultados de positividad de la solución

Proposición 3.12 (Positividad débil). *Supongamos que $M \in \mathcal{L}(X)$, J es no negativo, $F : X \to X$ es globalmente lipschitziana y existe una constante $\beta > 0$ tal que $F + \beta I$ es creciente y $F(0) \geq 0$. Si $u_0 \in X$, con $u_0 \geq 0$, no idénticamente cero, entonces*

$$u(t, u_0) \geq 0, \quad \forall t \geq 0,$$

donde u es la solución de (3.3).

Demostración. Denotamos por $S_M := M - \beta I$. Sea $u(t)$ solución del problema (3.3). Entonces, por la Proposición 3.8, se tiene que $u(t)$ es el único punto fijo de

$$\mathcal{F}(u)(t) = e^{S_M t}u_0 + \int_0^t e^{S_M(t-s)}(F(u)(\cdot, s) + \beta u(s))\, ds. \tag{3.13}$$

Fijado $T \geq 0$, consideramos la siguiente sucesión:

$$\begin{cases} u_1(x,t) = u_0(x), \\ u_{n+1}(\cdot, t) = \mathcal{F}(u_n)(t), \quad \forall n \geq 1, \forall 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Se tiene que $u_n(\cdot, t) \to u(\cdot, t)$ cuando $n \to +\infty$ en $\mathcal{C}([-T, T], X)$, luego

$$u_2(t) = \mathcal{F}(u_1)(t) = e^{S_M t}u_0 + \int_0^1 e^{S_M(t-s)}(F(u_0) + \beta u_0)\, ds.$$

Como en la demostración de la Proposición 3.9, estamos en las hipótesis de la Proposición 2.7, por lo tanto

$$e^{S_M t}u_0 \geq 0, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.14}$$

Además, como $F(0) \geq 0$, $\beta > 0$ y $F(\cdot) + \beta I$ es creciente, entonces $F(u) + \beta u \geq 0$ para todo $u \geq 0$. Por tanto, se tiene

$$e^{S_M(t-s)}(F(u_0) + \beta u_0) \geq 0, \quad \forall t \in [0,T], \forall s \in [0,t]. \tag{3.15}$$

Haciendo uso de (3.14) y (3.15), $u_2(t) \geq 0$ para todo $t \in [0,T]$. Repitiendo este argumento, se tiene que $u_n(t) \geq 0$, $\forall t \in [0,T]$. Como $u_n(t) \to u(t)$ cuando $n \to +\infty$ para cada $n \geq 1$, entonces $u(t) \geq 0$ en $\mathcal{C}([-T,T],X)$, $\forall t \in [0,T]$.

Consideramos de nuevo el mismo problema pero en esta ocasión, con dato inicial $u(x,T)$, entonces, argumentando como antes, la solución a este problema es no negativa para todo $t \in [T,2T]$. Por la unicidad de la solución, se tiene que $u(t) \geq 0$ para todo $t \in [0,2T]$. Repitiendo esta argumento, concluimos que la solución, $u(t)$, del problema (3.3) es no negativa, $u(t) \geq 0$, para todo $t \geq 0$.

■

Proposición 3.13 (Positividad fuerte)**.** *Sean $M \in \mathcal{L}(X)$, J no negativo, $F : X \to X$ operador globalmente lipschitziano y Ω R-conexo. Supongamos que existe una constante $\beta > 0$ tal que $F + \beta I$ es creciente y $F(0) \geq 0$. Sea $u_0 \in X$ tal que $u_0 \geq 0$ no idénticamente cero. Si J satisface* (3.9)*, entonces*

$$u(t,u_0) > 0, \quad \forall t > 0.$$

Demostración. Denotamos $S_M := M - \beta I$. Sabemos que la solución del probema (3.3) es el punto fijo de

$$\mathcal{F}(u)(t) = e^{S_M t}u_0 + \int_0^t e^{S_M(t-s)}(F(u)(\cdot,s) + \beta u(s))\, ds. \tag{3.16}$$

Además, como J satisface la hipótesis del Principio del Máximo Fuerte en el caso lineal, Proposición 2.16, se tiene que

$$e^{S_M t}u_0 > 0, \quad \forall t > 0. \tag{3.17}$$

Asimismo, como $u \geq 0$ para todo $t \geq 0$, y $(F + \beta I)(u) \geq 0$ para todo $u \geq 0$, por la Proposición 2.16, también se tiene

$$\int_0^1 e^{S_M(t-s)}(F(u)(x,s) + \beta u(x,s))\, ds \geq 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.18}$$

Por tanto, de (3.17) y (3.18), se tiene que $u(t) > 0$ para todo $t > 0$.

■

3.2. Existencia, unicidad y positividad de la solución con término de reacción localmente lipschitziano

Como en la Sección 3.1, comenzamos recordando la definición de localmente lipschitziana:

Definición 3.14. *Se dice que la función* $g : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *es localmente lipschitziana en* Ω *si* Ω *es abierto y para todo* $z \in \Omega$*, existe* $\varepsilon(z) > 0$ *tal que*

$$B(z, \varepsilon(z)) \subset \Omega, \exists L(z) \ : \ |g(x) - g(y)| \leq L(z)\|x - y\|_{\mathbb{R}^N}, \quad \forall x, y \in B(z, \varepsilon(z)).$$

A continuación, para trabajar con el problema (3.1) con término de reacción, f, localmente lipschitziano, introducimos el siguiente problema auxiliar

$$\begin{cases} u_t(x,t) = (K_J - I)(u)(x,t) + f_k(x, u(x,t)), & (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.19}$$

donde, fijado $k > 0$, $f_k : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función globalmente lipschitziana definida por

$$f_k(x,u) = f(x,u) \quad \text{para } |u| \leq k, \forall x \in \Omega. \tag{3.20}$$

Podemos ahora hacer uso del operador de Nemitcky, que vimos en la Sección 3.1, Definición 3.2 y reescribir este problema auxiliar como

$$\begin{cases} u_t(x,t) = M(u)(x,t) + F_k(u)(x,t), & (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.21}$$

donde $F_k : X \to X$ es el operador de Nemitcky asociado a f_k. Denotamos a la solución del problema (3.21) por $u_k(t, u_0) = F_k(t)u_0$. A este problema, podemos aplicarle todo lo visto en la Sección 3.1. Por tanto, tenemos que F_k es un operador globalmente lipschitziano, luego existe una única solución del problema (3.21).

Definición 3.15. *Se dice que* $\underline{u}, \overline{u} \in \mathcal{C}([a,b], X)$ *son, respectivamente, subsolución y supersolución de* (3.3) *si* $\underline{u} \leq \overline{u}$ *en* $[a,b]$ *y*

$$\underline{u}(t) \leq e^{M(t-s)}\underline{u}(s) + \int_s^t e^{M(t-s)} F(\underline{u})(r)\, dr,$$

$$\overline{u}(t) \geq e^{M(t-s)}\overline{u}(s) + \int_s^t e^{M(t-s)} F(\overline{u})(r)\, dr.$$

Proposición 3.16. *Sea $M = K_J - I \in \mathcal{L}$, J no negativo, $F : X \to X$ globalmente lipchitziana y supongamos que existe una constante $\beta > 0$ tal que $F + \beta I$ es creciente. Sea $u(t, u_0)$ la solución de* (3.3) *con dato inicial $u_0 \in X$, y sea $\overline{u}(t)$ una supersolución de* (3.3) *en* $[0, T]$. *Si $\overline{u}(0) \geq u_0$, entonces*

$$\overline{u}(t) \geq u(t, u_0), \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.22}$$

Demostración. Denotamos $S_M := M - \beta I$. Sea $u(t)$ solución del problema (3.3) entonces es solución fuerte y es el único punto fijo de

$$\mathcal{F}(u)(t) = e^{S_M t} u_0 + \int_0^t e^{S_M (t-s)} (F(u)(\cdot, s) + \beta u(s))\, ds$$

en $\mathcal{C}([0, \varepsilon], X)$, donde ε es suficientemente pequeño. Elegimos $\rho \leq \text{mín}\{\varepsilon, T\}$, entonces $\overline{u}(t) \in X$ existe para todo $t \in [0, \rho]$. Está claro que, por definición de supersolución, $\overline{u}$ satisface

$$\overline{u}(t) \geq \mathcal{F}(\overline{u})(t), \quad \forall t \in [0, \rho]. \tag{3.23}$$

Consideramos la siguiente sucesión

$$\begin{cases} u_1(t) = \overline{u}(t), \\ u_{n+1}(\cdot, t) = \mathcal{F}(u_n)(\cdot, t), \quad \forall n \geq 1. \end{cases} \tag{3.24}$$

Entonces $u_n(t)$ converge a $u(t)$ en $\mathcal{C}([0, \rho], X)$.

A continuación vamos a probar por inducción que

$$\overline{u} \geq u_n, \ \forall n, \text{ en casi todo } \mathcal{C}([0, \rho], X). \tag{3.25}$$

Como $u_1 = \overline{u}$, entonces $\overline{u} \geq u_1 = \overline{u}$ y por tanto se cumple (3.25) para $n = 1$. Además, por definición de supersolución se tiene que

$$\overline{u}(t) \geq \mathcal{F}(\overline{u}) = \mathcal{F}(u_1) = u_2,$$

y, por lo tanto, la desigualdad (3.25) se cumple para $n = 2$.
Supongamos ahora que se cumple (3.25) para $n = k$, es decir,

$$\overline{u} \geq u_k, \text{ en casi todo } \mathcal{C}([0, \rho], X). \tag{3.26}$$

Probemos que entonces se sigue cumpliendo para $k + 1$. Por el Principio del Máximo Débil, Proposición 3.9, se tiene que $\mathcal{F}$ es creciente en $\mathcal{C}([0, \rho], X)$ y de las ecuaciones (3.23), (3.24) y (3.26), se tiene

$$\overline{u} \geq \mathcal{F}(\overline{u}) \geq \mathcal{F}(u_k) = u_{k+1}, \ \forall t \in [0, \rho]. \tag{3.27}$$

Queda probado (3.25). Además, $u_n(x,t)$ converge a $u(x,t)$ en $\mathcal{C}([0,\rho],X)$. Entonces se sigue que

$$\overline{u}(t) \geq u(t,u_0), \quad \forall t \in [0,\rho].$$

Si tomamos ahora $\tilde{\rho} \leq T$, entonces existe la supersolución $\overline{u}(t)$ para todo $t \in [\rho,\tilde{\rho}]$, con $\tilde{\rho} \leq 2\varepsilon$. Consideramos de nuevo el problema (3.3), esta vez con dato inicial $\tilde{u}_0(\rho) = u(\cdot,\rho)$, entonces $\tilde{u}(t)$ es el único punto fijo de

$$\mathcal{F}(\tilde{u})(t) = e^{S_M(t-\rho)}\tilde{u}(\cdot,\rho) + \int_\rho^t e^{S_M(t-s)}(F(\tilde{u}(\cdot,s) + \beta\tilde{u}(\cdot,s))\,ds$$

en $\mathcal{C}([\rho,\tilde{\rho}],X)$ y la supersolución satisface por definición que $\overline{u}(t) \geq \mathcal{F}(\overline{u}(t))$. Siguiendo el mismo argumento de antes, se tiene que

$$\overline{u}(t) \geq \tilde{u}(t,\tilde{u}_0), \quad \forall t \in [\rho,\tilde{\rho}].$$

Por la unicidad de la solución del problema (3.3), se sigue que

$$\overline{u}(t) \geq u(t,u_0), \quad \forall t \in [0,\tilde{\rho}].$$

Continuando este argumento, se prueba (3.22).

■

Nota 3.17. *Se obtiene un resultado análogo para subsoluciones, con las desigualdades cambiadas:*
Proposición: *En las hipótesis de la Proposición 3.16, si* $\overline{u}(0) \leq u_0$*, entonces*

$$\overline{u}(t) \leq u(t,u_0), \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.28}$$

Para el siguiente resultado, es conveniente recordar dos resultados importantes del estudio de las ecuaciones diferenciales:

Teorema 3.18 (Teorema de Peano)**.** *Sea A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, con $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua y*

$$y'(x) = f(x,y(x))$$

una ecuación diferencial de primer orden definida en A, entonces cada problema de valores iniciales

$$y(x_0) = y_0,$$

con $(x_0,y_0) \in A$ tiene una solución local, $y : B \to \mathbb{R}$, donde B es un entorno de x_0.

Teorema 3.19 (Teorema de Picard-Lindelöf)**.** *Consideramos el problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{3.29}$$

Supongamos que f es localmente lipschitziana en y, es decir, la constante Lipschitz puede ser independiente de t, y continua en t, entonces para algún $\varepsilon > 0$, existe una única solución $y(t)$ del problema (3.29) *en el intervalo* $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$*.*

Podemos ahora exponer el siguiente resultado sobre la solución del problema (3.31).

Proposición 3.20. *Sea $K_J \in \mathcal{L}(X)$, J no negativo, y supongamos que la función localmente lipschitziana, f, satisface que existen $g_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), s_0, \delta > 0$ tales que*

$$(h_0(\cdot) - 1)s^2 + f(\cdot, s)s \leq g_0(s)s \leq -\delta|s|, \quad \forall |s| > s_0, \tag{3.30}$$

donde $h_0(x) = \displaystyle\int_\Omega J(x,y)\ dy \in L^\infty(\Omega)$. Entonces existe una única solución global de (3.19) *y viene dada por*

$$u(\cdot, t) = e^{Mt}u_0 + \int_0^t e^{M(t-s)} f(\cdot, u(\cdot, s))\ ds. \tag{3.31}$$

Además, $u \in \mathcal{C}^1([0, +\infty), X)$ es una solución fuerte en X.

Demostración. Fijamos $r > s_0$. Como $g_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, el siguiente problema auxiliar tiene solución local única gracias al Teorema de Peano y al Teorema de Picard-Lindelöf:

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = g_0(v(t)) \\ v(0) = r. \end{cases} \tag{3.32}$$

Además, se tiene que v está definida para $t \geq 0$. De hecho, de la ecuación (3.30), y como $\dot{v}(t) = g_0(v(t))$, entonces $v(t)$ decrece para cada t tal que $v(t) > s_0$, y $v(t) > -s_0$ para todo $t \geq 0$. Como $v(0) = r$, y $r > s_0$, se tiene que

$$|v(t)| \leq r, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.33}$$

Consideramos la función f_k definida en (3.20), donde el dato inicial $u_0 \in X$ cumple que

$$\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq r. \tag{3.34}$$

Por la Proposición 3.8, sabemos que existe una única solución fuerte de (3.21) con dato inicial u_0, $u_k(\cdot, t, u_0) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, X)$, que viene dada por

$$u_k(\cdot, t) = e^{Mt}u_0 + \int_0^t e^{M(t-s)}F_k(u_k)(\cdot, s)\, ds.$$

Si elegimos $k = r$, como $|v(t)| \leq r$, para todo $t \geq 0$, se tiene que

$$f_k(x, v(t)) = f(x, v(t)), \quad \forall t \geq 0,\ \forall x \in \Omega.$$

De esta última igualdad y de las desigualdades que vienen dadas por (3.30) se tiene

$$(h_0(\cdot) - 1)v(t)^2 + f_k(\cdot, v(t))v(t) \leq g_0(v(t))v(t) \leq -\delta|v(t)|, \tag{3.35}$$

para todo t tal que $|v(t)| > s_0$.

Probemos ahora que v es una supersolución de (3.21). Para ello, denotamos

$$t_v := \text{ínf}\{t > 0 | v(t) = s_0\},$$

que está bien definido, puesto que v es continua y $v(0) > s_0$. Ya que $v(t)$ es independiente de la variable x, entonces $K_J(v(t)) = h_0 v(t)$. Como $v(t) > s_0$ para cada $t \in [0, t_v)$ y de la expresión (3.35), entonces para cada t_v^0 tal que $0 < t_v^0 < t_v$, se tiene que

$$K_J(v)(t) - v(t) + f_k(\cdot, v(t)) = (h_0 - 1)v(t) + f_k(\cdot, v(t)) \leq g_0(v(t)) = \dot{v}(t),$$

para todo $t \in [0, t_v^0]$. Luego, existe $g : \mathbb{R} \to X$, con $g \geq 0$ tal que

$$\dot{v}(t) = M(v)(t) + f_k(v)(t) + g(t), \text{ para } t \in [0, t_v^0].$$

Con lo cual

$$v(t) = e^{Mt}v(s) + \int_s^t e^{M(t-r)}(f_k(v)(r) + g(r))\, dr, \text{ para } t \in [0, t_v^0], s \leq t.$$

Como g es no negativa, entonces $\displaystyle\int_s^t e^{M(t-s)}g(r)\, dr \geq 0$ y por tanto

$$v(t) \geq e^{Mt}v(s) + \int_s^t e^{M(t-r)}f_k(v)(r)\, dr.$$

Es decir, v es una supersolución de (3.21) en $[0, t_v^0]$.

De manera análoga, si introducimos el problema auxiliar

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = g_0(w(t)) \\ w(0) = -r, \end{cases} \tag{3.36}$$

y argumentando de la misma manera, se tiene que existe t_w tal que para todo $0 < t_w^0 < t_w$, w es una subsolución de (3.21) en $[0, t_w^0]$, y

$$|w(t)| \leq r, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.37}$$

Elegimos ahora $T < \text{mín}\{t_v, t_w\}$, como $u_0 \in X$ satisface que $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} < r$, y $r > s_0$, entonces $v(t)$ y $w(t)$ son, respectivamente, subsoluciones y supersoluciones de (3.21) en $[0, T]$. Por tanto, por la Proposición 3.16, se deduce que

$$w(t, -r) \leq u_k(t, u_0) \leq v(t, r), \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.38}$$

Por otro lado, de las ecuaciones (3.33), (3.37) y (3.38), se tiene

$$|u_k(t, u_0)| \leq r = k \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.39}$$

Por la desigualdad (3.34) y como $r > s_0$ fijado, entonces

$$r > \text{máx}\{s_0, \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}\}.$$

Por la definición de la función f_k y por (3.39) se tiene que

$$f_k(\cdot, u_k(t)) = f(\cdot, u_k(t)).$$

Por lo tanto, $u_k(\cdot, t, u_0)$ es solución del problema (3.1), donde f es una función localmente lipschitziana, de manera que, denotamos $u(\cdot, t, u_0) = u_k(\cdot, t, u_0)$ y probamos la existencia de solución de (3.1) para todo $t \in [0, T]$, además, u es una solución fuerte de (3.1) en X, dada por (3.31), con $u \in \mathcal{C}^1([0, T], X)$, y por (3.39), tenemos que

$$|u(\cdot, t, u_0)| \leq r = k \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.40}$$

Es más, esta desigualdad se cumple para $r = \text{máx}\{s_0, \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}\}$.

Consideramos a continuación el mismo problema (3.1), con f localmente lipschitziana y con dato inicial $\tilde{u}_0(T) = u(\cdot, T, u_0)$, entonces por la ecuación (3.40), el dato inicial está acotado por r. De tal manera que, razonando como anteriormente, consideramos los problemas auxiliares (3.32) y (3.36), con $r = \max\{s_0, \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}\}$, entonces existe una solución fuerte de (3.1), $\tilde{u} \in \mathcal{C}^1([0,2T], X)$, dado por

$$u(\cdot,t) = e^{Mt}u_0 + \int_0^t e^{M(t-s)} f(\cdot, u(\cdot,s))\, ds$$

y además,

$$|u(\cdot,t,u_0)| \leq r = k, \quad \forall t \in [0,2T].$$

Repitiendo este argumento, se prueba que para cualquier $T > 0$, existe una solución fuerte, $u \in \mathcal{C}^1([0,T], X)$ de (3.1), donde f en localmente lipchitziana, que viene dada por (3.31).

Nos queda probar la unicidad de la solución. Para ello, consideramos una solución $u \in \mathcal{C}^1([0,T], X)$ del problema (3.1) con dato inicial u_0, que satisface (3.31). Como $u \in \mathcal{C}^1([0,T], X)$ entonces existe una constante $\tilde{C}$ tal que

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\in\Omega} |u(x,t,u_0)| < \tilde{C}.$$

Si elegimos $k > \tilde{C}$ entonces $f_k(\cdot, u(\cdot,t)) = f(\cdot, u(\cdot,t))$ y entonces la solución u_k de (3.21), que sabemos que es única por la Proposición 3.8 es solución de (3.1). Por tanto u y u_k coinciden. Es más, por la Proposición 3.8 sabemos que esta solución es fuerte y viene dada por (3.31). Esto prueba la unicidad de la solución.

■

3.2.1. Existencia de una única solución

Con el siguiente resultado probaremos que la solución u del problema (3.1) es una solución del problema (3.21). Por lo cual, la solución u de (3.1) satisface todas las propiedades de monotonía que ya hemos probado para el problema (3.21) y por tanto, quedan demostrados todos los resultados detallados en las Secciones 3.2.2 y 3.2.3.

Teorema 3.21. *Sea $K_J \in \mathcal{L}(X)$, $h_0 \in X$, y sea f la función localmente lipchitziana que satisface que existen $C \in \mathbb{R}_{>0}$ y $D \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tales que*

$$f(\cdot,s)s \leq Cs^2 + D|s|, \quad \forall s. \tag{3.41}$$

Entonces existe una única solución del problema (3.1) con dato inicial $u_0 \in X$ que viene dada por

$$u(\cdot,t) = e^{Mt}u_0 + \int_0^t e^{M(t-s)} f(\cdot, u(\cdot,s))\, ds. \tag{3.42}$$

Además, $u \in \mathcal{C}([0,T],X)$ *es una solución fuerte de* (3.1) *en* X *para todo* $T > 0$.

Demostración. Veamos que se cumple la desigualdad (3.41) para $(h_0-1)s+f(\cdot,s)$. Como $h_0 \in X$, y $f(\cdot,s)$ satisface (3.41), se tiene

$$\begin{aligned}((h_0-1)s+f(\cdot,s))s =&(h_0-1)s^2+f(\cdot,s)s \leq (h_0-1)s^2+Cs^2+D|s| \leq \\ \leq&(\|h_0-1\|_{L^\infty(\Omega)}+C)s^2+D|s| \leq C_1s^2+D|s|.\end{aligned} \tag{3.43}$$

Fijamos $r \in \mathbb{R}_{>0}$ e introducimos el problema auxiliar

$$\begin{cases}\dot{v}(t) = C_1v(t)+D \\ v(0) = r.\end{cases} \tag{3.44}$$

Resolvemos este sistema con ecuación diferencial lineal no homogénea por el método de variación de constantes,

$$v(t) = -\frac{D}{C_1}+e^{C_1t}\left(r+\frac{D}{C_1}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

y $v(t) \geq 0$ es creciente para todo $t \in \mathbb{R}$. Sea $T > 0$, entonces

$$0 \leq v(t) \leq v(T), \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.45}$$

Consideramos ahora el problema (3.21), donde F_k es el operador de Nemitcky asociado a f_k, y f_k está definida por (3.20). Sea $u_k(\cdot,t,u_0)$ la solución de (3.21) con dato inicial $u_0 \in X$ tal que $\|u_0\|_X \leq r$. Mediante la Proposición 3.8, sabemos que existe una única solución fuerte $u_k(\cdot,t,u_0) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},X)$ que satisface

$$u_k(\cdot,t) = e^{Mt}u_0+\int_0^t e^{M(t-s)}F_k(u_k)(\cdot,s)\,ds. \tag{3.46}$$

Elegimos k talque $k \geq v(T)$. Por la definición de f_k y (3.45) se tiene

$$f_k(x,v(t)) = f(x,v(t)), \quad \forall t \in [0,T],\ \forall x \in \Omega. \tag{3.47}$$

Por otro lado, se tiene que $K_J(v(t)) = h_0v(t)$, ya que $v(t)$ es no negativa para todo $t \in [0,T]$ y se tenía la desigualdad (3.43). Entonces

$$\begin{aligned}K_J(v)(t)-v(t)+f_k(\cdot,v(t)) =&h_0v(t)-v(t)+f_k(\cdot,v(t)) \leq \\ \leq&Cv(t)+D = \dot{v}(t), \quad \forall t \in [0,T],\end{aligned}$$

por lo tanto, v es una supersolución de (3.21) para todo $t \in [0,T]$.

De manera similar, vamos a considerar el problema auxiliar

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = C_1 v(t) - D \\ w(0) = -r, \end{cases} \tag{3.48}$$

y vamos a probar que w es una subsolución de (3.21). Observemos que $w(t) = -v(t)$ y se tiene que

$$|w(t)| < v(T) \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.49}$$

Como $w(t) \leq 0$ para todo $t \in [0,T]$, se tiene $K_J(w(t)) = h_0 w(t)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} K_J(w)(t) - w(t) + f_k(\cdot, w(t)) =& h_0 w(t) - w(t) + f_k(\cdot, w(t)) \geq \\ &\geq C_1 w(t) - D = \dot{w}(t). \end{aligned} \tag{3.50}$$

Por consiguiente, w es una subsolución de (3.21) para todo $t \in [0,T]$.

Además, de la Proposición 3.16, tenemos que

$$w(t,-r) \leq u_k(t,u_0) \leq v(t,r), \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.51}$$

De las ecuaciones (3.45), (3.49) y (3.51) se sigue que

$$|u_k(t,u_0)| \leq \text{mín}\{|v(t,r)|, |w(t,-r)|\} < v(T) \leq k \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.52}$$

Por la definición de f_k, se tiene que $f_k(\cdot, u_k(t,u_0)) = f(\cdot, u_k(t,u_0))$, con lo que $u_k(x,t,u_0)$ es una solución de (3.1), con f función localmente lipschitziana. Si denotamos $u_k(t,u_0) = u(t,u_0)$, queda probada la existencia de solución del problema (3.1) para todo $t \in [0,T]$ y, además, u es una solución fuerte en X y viene dada por (3.42).

Probemos ahora la unicidad de la solución. Para ello, consideramos una solución $u \in \mathcal{C}([0,T],X)$ del problema (3.1) con dato inicial $u_0 \in X$, que viene dada por (3.42). Como $u \in \mathcal{C}([0,T],X)$, entonces

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\in\Omega} |u(x,t,u_0)| < \tilde{C}.$$

Si elegimos $k > \tilde{C}$, entonces $f_k(\cdot, u(\cdot,t)) = f(\cdot, u(\cdot,t))$ y por tanto u_k, solución de (3.21), es una solución de (3.1). Por tanto, u y u_k coinciden. Además, por la Proposición 3.8, tenemos que la solución $u_k \in \mathcal{C}^1([0,T],X)$ es única, fuerte y viene dada por (3.42).

$\blacksquare$

3.2.2. Principios del máximo

Proposición 3.22 (Principio del Máximo Débil)**.** *Sean $K \in \mathcal{L}(X)$, J no negativa, y f función localmente lipschitziana tal que existen $C \in \mathbb{R}_{>0}$ y $D \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, tales que*

$$f(\cdot, s)s \leq Cs^2 + D|s|, \quad \forall s. \tag{3.53}$$

Si $u_0, u_1 \in X$ satisfacen que $u_0 \geq u_1$ entonces

$$u^0(t) \geq u^1(t), \quad \forall t > 0,$$

donde $u^i(t)$ es la solución del problema (3.1) *con dato inicial u_i.*

Proposición 3.23 (Principio del Máximo Fuerte)**.** *Supongamos que se cumplen las hipótesis de la Proposición 3.22 y que además, J satisface*

$$J(x, y) > 0 \text{ para todo } x, y \in \Omega, \text{ tales que } d(x, y) < R, \tag{3.54}$$

para algún $R > 0$, y supongamos que Ω es un conjunto R-conexo, entonces

$$u^0(t) > u^1(t), \quad \forall t > 0.$$

Proposición 3.24. *En las condiciones de la Proposición 3.22, si los términos no lineales f^1, f^2 satisfacen*

$$f^1 \geq f^2$$

entonces

$$u^1(t) \geq u^2(t), \quad \forall t \geq 0,$$

donde $u^i(\cdot, t)$ es la solución del problema (3.1) *con término no lineal f^i, para $i = 1, 2$.*

En particular, si J satisface (3.54) *entonces*

$$u^1(t) > u^2(t), \quad \forall t > 0.$$

Las demostraciones de los resultados expuestos en este apartado se deducen como consecuencia del Teorema 3.21 de la Sección 3.2.1.

3.2.3. Resultados de positividad de la solución

Proposición 3.25 (Positividad débil)**.** *Sean $K \in \mathcal{L}(X)$, J no negativa, y f función localmente lipschitziana tal que existen $C \in \mathbb{R}_{>0}$ y $D \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, tales que*

$$f(\cdot, s)s \leq Cs^2 + D|s|, \quad \forall s. \tag{3.55}$$

Sea $f(0) \geq 0$*, si* $u_0 \in X$*, con* $u_0 \geq 0$ *y no idénticamente nulo, entonces la solución del problema* (3.1) *con dato inicial* u_0 *es no negativa para todo* $t \geq 0$*, es decir,*

$$u(t, u_0) \geq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Proposición 3.26 (Positividad fuerte)**.** *Supongamos que se cumplen las hipótesis de la Proposición 3.25 y que, además,* J *satisface*

$$J(x, y) > 0 \text{ para todo } x, y \in \Omega, \text{ tales que } d(x, y) < R, \tag{3.56}$$

para algún $R > 0$*, y supongamos que* Ω *es un conjunto* R*-conexo, entonces*

$$u(t, u_0) > 0, \quad \forall t > 0.$$

Proposición 3.27. *En las condiciones de la Proposición 3.25, sea* $u(t, u_0)$ *una solución del problema* (3.1) *con dato inicial* $u_0 \in X$*, y sea* $\overline{u}(t)$ *una supersolución de* (3.1) *en* $[0, T]$*. Si* $\overline{u}(0) \geq u_0$*, entonces*

$$\overline{u}(t) \geq u(t, u_0), \quad \forall t \in [0, T].$$

Se tiene un resultado análogo para subsoluciones cambiando las desigualdades.

Las demostraciones de los resultados expuestos en este apartado se deducen como consecuencia del Teorema 3.21 de la Sección 3.2.1.

Capítulo 4

Estudio del problema de autovalores

En el Capítulo 2, hemos trabajado con los autovalores de $K_J - I$. En este capítulo vamos a hacer un estudio del primer autovalor del problema

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega J(x,y)u(y,t)\,dy - u(x) = -\lambda u(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \notin \Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Con lo cual, es conveniente recordar lo visto en el Capítulo 2 sobre autovalores.

Para el análisis del primer autovalor, nos basaremos en los resultados que se obtienen en [16], aunque en nuestro escrito continuaremos trabajando con $\displaystyle\int_\Omega J(x,y)u(x,t)\,dy$ en lugar de usar la convolución, con la que trabaja el autor de [16].

4.1. Algunos resultados previos

Consideramos el problema de autovalores (4.1). Definimos el operador $K_J : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, autoadjunto y compacto, como

$$K_J(u(x)) = \int_\Omega J(x,y)u(y)\,dy. \tag{4.2}$$

Lema 4.1. *λ es un autovalor de (4.1) $\Leftrightarrow$ $\mu = 1 - \lambda$ es autovalor de K_J en $L^2(\Omega)$.*

Demostración.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea λ un autovalor de (4.1), entonces

$$\int_\Omega J(x,y)u(y)\,dy - u(x) = -\lambda u(x) \Rightarrow \int_\Omega J(x,y)u(y)\,dy = \underbrace{(1-\lambda)}_{\mu}u(x).$$

Por lo tanto, $K_J(u(x)) = \mu u(x)$, es decir, μ es un autovalor de K_J.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $\mu = 1-\lambda$ autovalor de K_J, entonces $K_J(u(x)) = \mu u(x)$. Aplicando la definición de K_J se tiene

$$\int_\Omega J(x,y)u(y)\,dy = (1-\lambda)u(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\Omega J(x,y)u(y)\,dy - u(x) = -\lambda u(x). \tag{4.3}$$

Además, habíamos definido

$$K_J(u(x)) = \int_\Omega J(x,y)u(y)\,dy.$$

Por lo tanto, sustituyendo esta definición en (4.3) queda

$$K_J(u(x)) - u(x) = -\lambda u(x).$$

Concluimos entonces que λ es un autovalor de (4.1).

■

4.2. Caracterización del primer autovalor

Teorema 4.2. *El problema* (4.1) *admite un autovalor* $\lambda_1(\Omega)$ *asociado a una autofunción positiva* $\Phi_1 \in \mathcal{C}(\Omega)$*. Además, este autovalor es simple y único, y verifica* $0 < \lambda_1(\Omega) < 1$*. Además,* $\lambda_1(\Omega)$ *se puede caracterizar por*

$$\lambda_1(\Omega) = 1 - \left(\sup_{\substack{u\in L^2(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(\int_\Omega J(x,y)u(y)\,dy\right)^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega u^2(x)\,dx} \right)^{1/2} \tag{4.4}$$

o

$$\lambda_1(\Omega) = 1 - \sup_{\substack{u\in L^2(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega\int_\Omega J(x,y)u(x)u(y)\,dy\,dx}{\displaystyle\int_\Omega u^2(x)\,dx} \tag{4.5}$$

o

$$\lambda_1(\Omega) = \frac{1}{2} \inf_{\substack{u \in L^2(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \int_\Omega J(x,y)(u(x)-u(y))^2 \, dy \, dx}{\displaystyle\int_\Omega u^2(x) \, dx}. \tag{4.6}$$

Demostración. Como K_J es autoadjunto, se sigue que $\rho(K_J) = \|K_J\|_{L^2(\Omega)}$ y existe un autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ de K_J que cumple que $|\lambda| = \|K_J\|_{L^2(\Omega)}$. El primer autovalor del problema (4.1), en Ω, viene dado por $\lambda_1(\Omega) = 1 - \|K_J\|_{L^2(\Omega)}$. Esto implica que $\lambda_1(\Omega) < 1$.

Veamos ahora que $\lambda_1(\Omega) > 0$. Para ello, usamos el Principio del Máximo. Suponemos que $\lambda_1(\Omega) \leq 0$ y sea Φ_1 la autofunción positiva asociada al autovalor $\lambda_1(\Omega)$. Entonces, como $\lambda_1(\Omega)$ es autovalor de (4.1), con autofunción asociada Φ_1,

$$J\Phi_1 - \Phi_1 = -\lambda_1(\Omega)\Phi_1, \tag{4.7}$$

pero como estamos suponiendo que $\lambda_1(\Omega) \leq 0$, entonces $-\lambda_1(\Omega)\Phi_1 \geq 0$. En cambio, el Principio del Máximo implica que $\Phi_1 \leq 0$, lo cual es imposible. Por lo tanto, $\lambda_1(\Omega) > 0$.

A continuación, vamos a deducir las caracterizaciones (4.4), (4.5) y (4.6) de $\lambda_1(\Omega)$. Como se tiene

$$\|K_J\|_{L^2(\Omega)} = \left(\sup_{\substack{u \in L^2(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\|K_J(u)\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}} \right)^{1/2} \tag{4.8}$$

y, además,

$$\|K_J\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{\substack{u \in L^2(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{|(K_J(u), u)_{L^2(\Omega)}|}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}, \tag{4.9}$$

entonces, recordando que $\lambda_1(\Omega) = 1 - \|K_J\|_{L^2(\Omega)}$, de la igualdad (4.8), se deduce (4.4), ya que

$$\|K_J\|_{L^2(\Omega)} = \left(\sup_{\substack{u \in L^2(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(\int_\Omega J(x,y)u(y) \, dy \right)^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega u^2(x) \, dx} \right)^{1/2},$$

mientras que de la igualdad (4.9), se tiene la caracterización (4.5), ya que

$$\|K_J\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{\substack{u\in L^2(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega\int_\Omega J(x,y)u(x)u(y)\,dx\,dy}{\displaystyle\int_\Omega u^2(x)\,dx}.$$

Para deducir (4.6), expandimos

$$\frac{1}{2}\frac{\displaystyle\int_\Omega\int_\Omega J(x,y)(u(x)-u(y))^2\,dy\,dx}{\displaystyle\int_\Omega u^2(x)\,dx} \tag{4.10}$$

y le aplicamos el teorema de Fubini (Ver Apéndice A).

Por tanto, la expresión (4.10) queda

$$\frac{1}{2}\frac{\displaystyle\int_\Omega\int_\Omega J(x,y)[u^2(x)+u^2(y)-2u(x)u(y)]\,dx\,dy}{\displaystyle\int_\Omega u^2(x)\,dx} \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\displaystyle\int_\Omega\left(\int_\Omega J(x,y)u^2(x)\,dy\right)\,dx + \int_\Omega\left(\int_\Omega J(x,y)u^2(y)\,dx\right)\,dy}{\displaystyle\int_\Omega u^2(x)\,dx} -$$

$$- \frac{\displaystyle\int_\Omega\int_\Omega J(x,y)u(x)u(y)\,dx\,dy}{\displaystyle\int_\Omega u^2(x)\,dx} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\displaystyle\int_\Omega u^2(x)\,dx + \int_\Omega u^2(y)\,dy}{\displaystyle\int_\Omega u^2(x)\,dx} - \frac{\displaystyle\int_\Omega\int_\Omega J(x,y)u(x)u(y)\,dx\,dy}{\displaystyle\int_\Omega u^2(x)\,dx},$$

y como el parámetro de integración es mudo, se tiene

$$\frac{1}{2}\frac{\displaystyle\int_\Omega\int_\Omega J(x,y)(u(x)-u(y))^2\,dy\,dx}{\displaystyle\int_\Omega u^2(x)\,dx} = 1 - \frac{\displaystyle\int_\Omega\int_\Omega J(x,y)u(x)u(y)\,dx\,dy}{\displaystyle\int_\Omega u^2(x)\,dx}.$$

Usando (4.5), se sigue (4.6).

■

Corolario 4.3. *Para el primer autovalor, $\lambda_1(\Omega)$, se tiene la siguiente estimación:*

$$\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega A^2(x)\,dx\right)^{1/2} \le 1-\lambda_1(\Omega) \le \left(\sup_{y\in\Omega}\left(\int_\Omega A(x)J(x,y)\,dx\right)\right)^{1/2}, \tag{4.11}$$

donde $A(x) = \displaystyle\int_\Omega J(x,y)\,dy$, y $|\Omega|$ denota la medida de Ω.

Demostración. Si tomamos $u \equiv 1$ en (4.4), se tiene

$$1-\lambda_1(\Omega) \ge \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega A^2(x)\,dx\right)^{1/2},$$

queda así probada la primera desigualdad de (4.11).

Por otro lado, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz (ver Apéndice B), se tiene

$$\int_\Omega\left(\int_\Omega J(x,y)u(y)\,dy\right)^2 dx \le \int_\Omega A(x)\left(\int_\Omega J(x,y)u^2(y)\,dy\right)\,dx.$$

Usando de nuevo el Teorema de Fubini, Teorema A.6, tenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left(\int_\Omega J(x,y)u(y)\,dy\right)^2 dx &\le \int_\Omega u^2(y)\left(\int_\Omega A(x)J(x-y)\,dx\right)\,dy \le\\ &\le \sup_{y\in\Omega}\left(\int_\Omega A(x)J(x,y)\,dx\right)\int_\Omega u^2(y)\,dy.\end{aligned}$$

Usando la caracterización (4.4) de λ_1 en esta última desigualdad, se sigue

$$(1-\lambda_1(\Omega))^2 \le \sup_{y\in\Omega}\left(\int_\Omega A(x)J(x,y)\,dx\right),$$

quedando probada la segunda desigualdad de (4.11).

■

4.3. Monotonía y continuidad del primer autovalor respecto al dominio

En el siguiente resultado se prueba la monotonía del primer autovalor respecto al dominio.

Teorema 4.4. *El primer autovalor del problema* (4.1) *en* Ω*,* $\lambda_1(\Omega)$*, es decreciente con respecto del dominio, es decir, si* $\Omega_1 \subset \Omega_2$*, entonces* $\lambda_1(\Omega_1) > \lambda_1(\Omega_2)$*.*

Demostración. Como $\Omega_1 \subset \Omega_2$, entonces $L^2(\Omega_1) \subset L^2(\Omega_2)$. Por la caracterización (4.4), tenemos que $\lambda_1(\Omega_1) \geq \lambda_1(\Omega_2)$.

Para ver que la desigualdad es estricta, suponemos que $\lambda_1(\Omega_1) = \lambda_1(\Omega_2)$, entonces tenemos una autofunción asociada, la cual es positiva en $\overline{\Omega}_1$, y nula en $\Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1$ pero esto se contradice con el Principio del Máximo Fuerte. Por lo tanto, $\lambda_1(\Omega_1) > \lambda_1(\Omega_2)$.

■

Nota 4.5. *Como hemos visto en el Teorema 4.2 que* $\lambda_1(\Omega) > 0$ *y, además,* $\lambda_1(\Omega) = 1 - \|K_J\|_{L^2(\Omega)}$*, se sigue que* $\|K_J\|_{L^2(\Omega)} < 1$*.*

En el siguiente resultado, cuya prueba puede verse en [1] y escapa del objetivo de este trabajo, se prueba que el primer autovalor es diferenciable respecto a una pequeña perturbación del dominio. En realidad, nosotros sólo usaremos en el capítulo siguiente el carácter continuo de esta aplicación.

Teorema 4.6. *Sea* $\lambda_1(\Omega)$ *el primer autovalor del problema* (4.1) *y sea*

$$\Omega_\delta = \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ d(x, \partial\Omega) < \delta\},$$

entoces $\lambda_1(\Omega_\delta)$ *es diferenciable con respecto a* δ *en* $\delta = 0$*.*

Capítulo 5

Estudio del problema estacionario

Consideramos el problema estacionario asociado a (1.9),

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega J(x,y)u(y)\,dy - u(x) + f(x,u) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \notin \Omega. \end{cases} \tag{5.1}$$

En este capítulo, vamos a realizar un estudio del problema estacionario (5.1). Para ello, nos centraremos en la referencia [15] y usaremos el método de sub-supersolución para estudiar la existencia de solución.

Definición 5.1. *Diremos que una función $\overline{u} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ es una supersolución del problema* (5.1) *si*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega J(x,y)\overline{u}(y)\,dy - \overline{u}(x) + f(x,\overline{u}) \leq 0, & x \in \Omega, \\ \overline{u}(x) \geq 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

De igual manera, diremos que $\underline{u} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ es una subsolución del problema (5.1) *si*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega J(x,y)\underline{u}(y)\,dy - \underline{u}(x) + f(x,\underline{u}) \geq 0, & x \in \Omega, \\ \underline{u}(x) \leq 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

Además, diremos que la supersolución (o subsolución) es estricta si la desigualdad se da de manera estricta.

Definición 5.2. *Sea X un espacio de Banach. Definimos el operador $M_C \in \mathcal{L}(X)$ como*

$$M_C u(x) := \int_\Omega J(x,y)u(y)\,dy - (1+C)u(x).$$

El siguiente resultado es un Principio del Máximo para ecuaciones estacionarias.

Proposición 5.3. *Sea $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $M_C u \leq 0$ en Ω y $u \geq 0$ en $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Entonces $u > 0$ o $u \equiv 0$ en $\overline{\Omega}$.*

Demostración. Sea $m = \inf\limits_{x\in\Omega} u(x)$ y supongamos que $m < 0$. Si u alcanza su mínimo en $x_0 \in \overline{\Omega}$, entonces

$$\begin{aligned} 0 = u(x_0) - m \geq & \frac{1}{1+C}\int_\Omega J(x_0,y)u(y)\,dy - m \geq \\ \geq & m\left(\frac{1}{1+C}\int_\Omega J(x_0,y)\,dy - 1\right). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Esto implica que

$$\int_\Omega J(x_0,y)\,dy \geq 1 + C,$$

lo cual es una contradicción si $C > 0$.

Por otro lado, si $C = 0$, se tiene $\int_\Omega J(x_0,y)\;dy = 1$, es decir, la bola $B(x_0,1)$ está contenida en Ω. Por tanto, el ínfimo de u no se puede alcanzar en $\partial\Omega$, y en particular u no es constante. Luego, podemos elegir x_0 tal que $u(x_0) = m$ pero $u(x) \not\equiv m$ en $B(x_0,1)$. Entonces la expresioón (5.2) queda

$$\int_\Omega J(x_0,y)(u(y) - m)\,dy = 0,$$

con lo cual, $u \equiv m$ en $B(x_0,1)$ que es una contradicción. Por lo tanto, $m \geq 0$, esto es, $u \geq 0$.

Además, si $u(x_1) = 0$ para algún $x_1 \in \overline{\Omega}$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} J(x_1,y)u(y)\,dy = 0,$$

lo que implica que $u \equiv 0$ en un entorno de x_1. Por conectividad, se llega a que $u \equiv 0$ en $\overline{\Omega}$.

∎

Nota 5.4. *De manera inmediata, del Principio del Máximo, si $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ verifica $M_C u = 0$ en Ω con $u = 0$ en $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ entonces $u \equiv 0$. Por lo tanto el problema*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega J(x,y)u(y)\,dy - (1+C)u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

admite una única solución $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ para cada $f \in L^2(\Omega)$.

En el siguiente resultado se prueba que, bajo la existencia de una sub y supersolución, existe una solución de (5.1).

Teorema 5.5. *Supongamos que f es localmente lipschitziana*[1] *con respecto de u y supongamos que existe una subsolución acotada $\underline{u}$ y una supersolución acotada $\overline{u}$ del problema (5.1) tales que $\underline{u} \le \overline{u}$ en Ω. Entonces el problema (5.1) admite una solución mínima, u_-, y una solución máxima, u_+, en el intervalo $[\underline{u}, \overline{u}]$.*

Demostración. Como f es localmente lipschitziana con respecto de u, elegimos $C > 0$ tal que $g(x,u) = f(x,u) - Cu$ es decreciente en el intervalo $[\inf_{x\in\Omega} \underline{u}, \sup_{x\in\Omega} \overline{u}]$. Sea u_1 la única solución del problema (ver Nota 5.4)

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega J(x,y)u(y)\,dy - (1+C)u(x) = g(x,\underline{u}(x)), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Veamos que $\underline{u} \le u_1 \le \overline{u}$. Se tiene, $M_C u_1 = g(x,\underline{u}) \le M_C \underline{u}$ en Ω con $u_1 \ge \underline{u}$ en $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Entonces, por el Principio del Máximo

$$u_1 \ge \underline{u}.$$

Del mismo modo, $M_C u_1 = g(x,\underline{u}) \ge g(x,\overline{u}) \ge M_C \overline{u}$ en Ω con $u_1 \le \overline{u}$ en $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ implica que

$$u_1 \le \overline{u}.$$

Sea ahora u_2 solución del problema

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega J(x,y)u(y)\,dy - (1+C)u(x) = g(x,u_1(x)), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

[1]Recordamos la definición de localmente lipschitziana en el Capítulo 3.

De manera análoga, se sigue que $\underline{u} \le u_1 \le u_2 \le \overline{u}$. Podemos iterar este proceso y definir una sucesión creciente de funciones $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\underline{u} \le u_n \le \overline{u}$ y

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega J(x,y)u_n(y)\,dy - (1+C)u_n(x) = g(x,u_{n-1}(x)), & x \in \Omega, \\ u_n = 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{5.3}$$

Si llamamos $u_-(x) := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n(x)$, por propia construcción de la sucesión, se tiene

$$\underline{u} \le u_- \le \overline{u}.$$

Además, usando el Teorema de convergencia monótona y la continuidad de g, tomando límite en (5.3) se sigue que u_- es solución de (5.1).

Veamos ahora que u_- es la solución mínima de (5.1) en $[\underline{u},\overline{u}]$. Sea u_* otra solución que verifica

$$\underline{u} \le u_* \le \overline{u}.$$

Entonces, $M_C u_* = g(x,\underline{u}) \le M_C\underline{u}$ en Ω con $u_* \ge \underline{u}$ en $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Luego, por el Principio del Máximo,

$$u_* \ge \underline{u},$$

lo que implica que

$$u_- \le u_*.$$

Con lo cual, u_- es la solución mínima.

De manera similar, construimos una sucesión decreciente de funciones $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\underline{u} \le v_n \le \overline{u}$ y $v_n \to u_+ := \operatorname{ínf}_{n\in\mathbb{N}} v_n$, que es la máxima solución del problema (5.4) en $[\underline{u},\overline{u}]$.

■

5.1. Aplicación: problema estacionario con ecuación logística

En este apartado vamos a usar el método de sub-supersolución, visto en el Teorema 5.5, para estudiar la existencia de solución del problema estacionario (5.1) con ecuación logística $f(x,u) = \gamma u(x) - b(x)u^2(x)$, con $\gamma \in \mathbb{R}$ y $b(x) > 0$. El problema queda

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega J(x,y)u(y)\,dy - u(x) + \gamma u(x) - b(x)u^2(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \notin \Omega. \end{cases} \tag{5.4}$$

Para ello, primero estudiaremos el caso en el que $b(x) > 0$ y después estudiaremos el caso en el que hay refugio, esto es, cuando $b(x) = 0$ en algún subconjunto de Ω. En este caso, γ representa la tasa de natalidad de la especie, mientras que $b(x)u^2(x)$ representa las limitaciones del medio.

El siguiente resultado nos proporciona una cota de una solución de (5.1) si tenemos una familia de supersoluciones. Será usado para probar la unicidad de solución de (5.4).

Proposición 5.6. *Sea $\{u_t\}_{t\geq t_0}$ una familia de supersoluciones estrictas y continuas de* (5.1) *tal que la función que a cada t le asocia u_t es continua con valores en $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Supongamos que u es una solución continua de* (5.1) *con $u < u_{t_1}$ en $\overline{\Omega}$ para algún $t_1 > t_0$ y que $f(x, u)$ es localmente lipschitziana en u en $x \in \overline{\Omega}$. Entonces $u \leq u_{t_0}$ en $\overline{\Omega}$.*

Demostración. Observemos que la continuidad de $u_t(x)$ con respecto de x en $\overline{\Omega}$ y $t \in [t_0, t_1]$ implica que u_t está acotada en $\overline{\Omega}$. Por tanto, por la regularidad de la función f, podemos tomar $C > 0$ tal que la función $g(x, u) = f(x, u) - Cu$ es decreciente en el intervalo

$$\left[\inf_{x\in\Omega} u(x), \sup_{t\in[t_0,t_1]} \left(\sup_{x\in\Omega} u_t(x)\right)\right].$$

Fijamos ahora $\bar{t} = \inf\{t > t_0 : u > u_t \in \overline{\Omega}\}$. Entonces $t_0 \leq t \leq t_1$, queremos probar que $\bar{t} = t_0$. Por reducción al absurdo, supongamos que $\bar{t} > t_0$. Por continuidad se tiene que $u \leq u_t$, entonces

$$M_C u = g(x, u) \geq g(x, u_{\bar{t}}) \geq M_C u_{\bar{t}}.$$

Por la Proposición 5.3 se tiene que $u \equiv v_{\bar{t}}$ o $u > u_{\bar{t}}$ en $\overline{\Omega}$. Como $u_{\bar{t}}$ es una supersolución estricta, podemos descartar la primera posibilidad. Por la continuidad de u_t en t, podemos afirmar que $u < u_t$ para $t < \bar{t}$ cercano a $\bar{t}$, lo cual contradice el hecho de que $\bar{t}$ era una ínfimo. Por tanto, $\bar{t} = t_0$ y $u \leq u_{t_0}$. ■

Teorema 5.7. *Supongamos $b(x) > 0$. Entonces el problema* (5.4) *tiene una solución positiva, u_γ, si y sólo si $\gamma > \lambda_1(\Omega)$. En este caso, $u_\gamma \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ es única. Además, para $\gamma \geq 1$ se tienen las siguientes cotas de la solución u_γ*

$$\frac{\gamma - 1}{b(x)} \leq u_\gamma \leq \frac{\gamma}{\inf\limits_{x\in\Omega} b(x)}. \tag{5.5}$$

Demostración. Comenzamos probando que si existe una solución no trivial del problema (5.4), entonces $\gamma > \lambda_1(\Omega)$. Para ello, suponemos que $u \in L^1(\Omega)$ es una solución positiva de (5.4). Sea Φ_1 una autofunción positiva asociada al autovalor $\lambda_1(\Omega)$. Multiplicando la ecuación de (5.4) por Φ_1 e integrando en Ω, se tiene

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \Phi_1(x) \int_\Omega J(x,y)u(y)\, dy\, dx - \int_\Omega u(x)\Phi_1(x)\, dx = \\ &= -\gamma \int_\Omega u(x)\Phi_1(x)\, dx + \int_\Omega b(x)u^2(x)\Phi_1\, dx.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Aplicando el Teorema de Fubini y teniendo en cuenta que Φ_1 es una autofunción asociada a $\lambda_1(\Omega)$, entonces podemos reescribir la expresión (5.6) como

$$-\lambda_1(\Omega) \int_\Omega u(y)\Phi_1(y)\, dy = -\gamma \int_\Omega u(x)\Phi_1(x)\, dx + \underbrace{\int_\Omega b(x)u^2(x)\Phi_1(x)\, dx}_{>0}.$$

Entonces

$$(\gamma - \lambda_1(\Omega)) \int_\Omega u(y)\Phi_1(y)\, dy > 0 \Rightarrow \gamma > \lambda_1(\Omega).$$

Supongamos ahora que $\gamma > \lambda_1(\Omega)$ y veamos mediante el método de sub-supersolución que existe una solución positiva de (5.4). Tomamos

$$\underline{u} = \varepsilon\Phi_1 \quad \text{y} \quad \overline{u} = M.$$

Veamos que $\underline{u}$ y $\overline{u}$ son sub-supersoluciones para ε suficientemente pequeño y M suficientemente grande. Para que $\underline{u} = \varepsilon\Phi_1$ sea subsolución, se tiene que cumplir

$$\underbrace{\int_\Omega J(x,y)\varepsilon\Phi_1\, dy - \varepsilon\Phi_1}_{=-\lambda_1(\Omega)\varepsilon\Phi_1} + \gamma\varepsilon\Phi_1 - b(x)(\varepsilon\Phi_1)^2 \geq 0.$$

Esto es equivalente a $\lambda_1(\Omega) \leq \gamma - b(x)\varepsilon\Phi_1$, o escrito de otra forma

$$b(x)\varepsilon\Phi_1 \leq \gamma - \lambda_1(\Omega),$$

lo cual es cierto siempre que ε sea lo suficientemente pequeño.

Por otro lado, para que $\overline{u} = M$ sea supersolución, se tiene que cumplir que

$$\underbrace{\int_\Omega J(x,y)M\, dy - M}_{=0} + \gamma M - b(x)M^2 \leq 0$$

y esto se cumple si

$$Mb(x) \geq \gamma,$$

lo que es cierto para M suficientemente grande. Por tanto, por el método de sub-supersoluciones, existe una solución positiva del problema (5.4).

A continuación, veamos que toda solución positiva es continua en $\overline{\Omega}$. Para ello, primero probamos la cota inferior de (5.5), esto es, $\gamma - 1 \leq b(x)u$ en casi todo Ω para $\gamma > 1$. Como

$$\int_\Omega J(x,y)u(y)\ dy \geq 0,$$

se sigue de (5.4) que $(1-\gamma)u(x) - b(x)u^2(x) \leq 0$, de donde se tiene lo que queríamos probar.

Por otro lado, tenemos que

$$(1-\gamma)u + bu^2 = \int_\Omega J(\cdot,y)u(y)\ dy \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}). \tag{5.7}$$

Observemos que

$$1 - \gamma + 2bu > 1 - \gamma + bu > 0, \quad \text{en } \overline{\Omega}$$

para $\lambda_1(\Omega) < \gamma \leq 1$ y para $\gamma > 1$. Esto implica que la función $(1-\gamma)t + bt^2$ es invertible con respecto a t y por tanto, la expresión (5.7) implica que $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Probemos ahora la cota superior de (5.5). Sea $x_0 \in \overline{\Omega}$ un punto donde u alcanza su máximo. Si $b(x_0)u(x_0) > \gamma$, llegaríamos a una contradicción, ya que

$$u(x_0) < \int_\Omega J(x_0,y)u(y)\ dy \leq u(x_0)\int_\Omega J(x_0,y)\ dy \leq u(x_0).$$

Por lo cual,

$$b(x_0)u(x_0) \leq \gamma,$$

de donde se sigue la segunda desigualdad de (5.5).

El siguiente paso de esta demostración va a ser probar la unicidad de la solución. Suponemos que u, v son soluciones continuas del problema (5.4). Llamamos $v_t = tv$, veamos que es una supersolución de (5.4) para $t > 1$. Para ello, lo que tenemos que probar es

$$\int_\Omega J(x,y)tv(y)\ dy - tv(x) + \gamma tv(x) - b(x)t^2v^2(x) \leq 0,$$

pero como $t > 1$, bastaría con probar que

$$\int_\Omega J(x,y)v(y)\,dy - v(x) + \gamma v(x) - b(x)tv^2(x) \leq 0.$$

Por otro lado, como v es solución del problema (5.4), v cumple

$$\int_\Omega J(x,y)v(y)\,dy - v(x) + \gamma v(x) = b(x)v^2(x).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_\Omega J(x,y)v(y)\,dy - v(x) + \gamma v(x) - b(x)tv^2(x) =& b(x)v^2(x) - b(x)tv^2(x) = \\ =& \underbrace{(1-t)}_{<0}\underbrace{b(x)}_{>0}\underbrace{v^2(x)}_{>0} < 0.\end{aligned}$$

Es más, hemos visto que v_t es una supersolución de manera estricta, ya que la desigualdad es estricta. Debido a que v_t es continua en t y $u < v_t$ en $\overline{\Omega}$ para t grande, se sigue de la Proposición 5.6 que $u \leq v$. Argumentando de manera similar, tenemos que $v \leq u$ y por tanto, $u = v$, de donde se sigue la unicidad de la solución.

■

En el siguiente resultado, estudiamos el problema (5.4) cuando b puede ser cero en una zona de Ω, que es conocida como refugio, ya que en esa zona la población crece libremente. Observamos que la principal diferencia es que no podemos construir la supersolución como en el caso anterior.

Teorema 5.8. *Consideramos el problema* (5.4)*, con* $b(x) = 0$ *en algún subdominio de* Ω*,* Ω_0*, que denominamos refugio. Entonces el problema* (5.4) *tiene una solución positiva,* u_γ*, si y sólo si* $\lambda_1(\Omega) < \gamma < \lambda_1(\Omega_0)$*. En este caso,* u_γ*, es única.*

Demostración. Como en el Teorema 5.7, por el método de sub-supersoluciones, podemos probar que existe una solución positiva de (5.4) con refugio, si y sólo si $\gamma \in (\lambda_1(\Omega), \lambda_1(\Omega_0))$. La prueba de que si existe solución positiva, entonces $\lambda > \lambda_1(\Omega)$ es similar a la prueba anterior. Probemos ahora que $\gamma < \lambda_1(\Omega_0)$ es también una condición necesaria para la existencia. Sea Ψ_1 una autofunción asociada a $\lambda_1(\Omega_0)$. Multiplicando (5.4) por Ψ_1 e integrando en Ω_0, se tiene

$$\int_{\Omega_0}\int_\Omega J(x,y)u(y)\Psi_1(x)\,dy\,dx - \int_{\Omega_0} u(x)\Psi_1(x)\,dx = -\gamma\int_{\Omega_0} u(x)\Psi_1(x)\,dx.$$

Aplicamos el Teorema de Fubini a la primera integral de esta expresión

$$\int_{\Omega_0}\int_{\Omega} J(x,y)u(y)\Psi_1(x)\,dy\,dx = \int_{\Omega}\int_{\Omega_0} J(x,y)u(y)\Psi_1(x)\,dx\,dy =$$
$$= \int_{\Omega_0}\int_{\Omega_0} J(x,y)u(y)\Psi_1(x)\,dx\,dy + \int_{\Omega\setminus\Omega_0}\int_{\Omega_0} J(x,y)u(y)\Psi_1(x)\,dx\,dy >$$
$$> \int_{\Omega\setminus\Omega_0}\int_{\Omega_0} J(x,y)u(y)\Psi_1(x)\,dx\,dy = (1-\lambda_1(\Omega_0))\int_{\Omega_0} u(y)\Psi_1(y)\,dy.$$

Por tanto, hemos llegado a que

$$(1-\lambda_1(\Omega_0))\int_{\Omega_0} u(y)\Psi_1(y)\,dy - \int_{\Omega_0} u(x)\Psi_1(x)\,dx < -\gamma\int_{\Omega_0} u(x)\Psi_1(x)\,dx,$$

luego

$$-\lambda_1(\Omega_0)\int_{\Omega_0} u(y)\Psi_1(y)\,dy < -\gamma\int_{\Omega_0} u(x)\Psi_1(x)\,dx.$$

Podemos concluir que $\lambda_1(\Omega_0) > \gamma$.

Para probar la existencia de una solución positiva, usamos el método de sub-supersoluciones, para ello, tomamos $\underline{u} = \varepsilon\Phi_1$, siendo Φ_1 la autofunción asociada al autovalor $\lambda_1(\Omega)$ y ε lo suficientemente pequeño. Para la construcción de la supersolución $\overline{u}$, tomamos $\delta > 0$ pequeño y definimos

$$\Omega_\delta = \Omega_0 \cup \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega_0) < \delta\}.$$

Usando los Teoremas 4.4 y 4.6, se tiene $\gamma < \lambda_1(\Omega_\delta) < \lambda_1(\Omega_0)$ para δ suficientemente pequeño. Sea $\Phi_{1,\delta}$ una autofunción asociada al autovalor $\lambda_1(\Omega_\delta)$. Llamando $\Phi_{1,\delta} > 0$ en $\partial\Omega_\delta$ podemos extender $\Phi_{1,\delta}$ en Ω. Se tiene que $\overline{u} = M\Phi_{1,\delta}$ es una supersolución para M suficientemente grande. De hecho, en Ω_δ,

$$J(M\Phi_{1,\delta}) - M\Phi_{1,\delta} = -\lambda_1(\Omega_\delta)M\Phi_{1,\delta} \le -\gamma M\Phi_{1,\delta} + b(x)(M\Phi_{1,\delta})^2$$

ya que $b \ge 0$ y $\gamma < \lambda_1(\Omega_\delta)$. Por otro lado, como $b \ge b_0 > 0$ en $\Omega \setminus \Omega_\delta$, $\overline{u}$ es una supersolución siempre que

$$J\Phi_{1,\delta} - \Phi_{1,\delta} \le -\gamma\Phi_{1,\delta} + b_0 M\Phi_{1,\delta}^2,$$

en $\Omega \setminus \Omega_\delta$, que se tiene para M lo ssuficientemente grande. Por tanto, existe una solución positiva al problema (5.4).

Podemos probar la unicidad de la solución de manera análoga al caso estacionario sin refugio.

■

Apéndice A

Espacios de Banach

En este apéndice recordaremos la definición de espacios de Banach y algunas propiedades, para ello, nos hemos centrado en [4], capítulo 1 de [7] y capítulo 3 de [11].

Definición A.1. *Sea X un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Se dice que una aplicación $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ es una norma sobre X si para cualquier par de vectores $x, y \in X$, y para cualquier escalar λ, se verifican las siguientes propiedades:*

1. $\|x\| \geq 0$ *y* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Esta última propiedad es la que se conoce con el nombre de desigualdad triangular.

Se dice que el par $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado.

Definición A.2. *Un espacio de Banach es cualquier espacio normado completo respecto a la métrica inducida por la norma.*

Lema A.3. *Sean $1 < p, q < +\infty$ tales que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

es decir, p y q son exponentes conjugados. Si $x, y \geq 0$ entonces

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Demostración. Para todo $s, t \in \mathbb{R}$ y para cada $\alpha, \beta \geq 0$, con $\alpha + \beta = 1$, se tiene

$$\exp(\alpha s + \beta t) \leq \alpha e^s + \beta e^t. \tag{A.1}$$

Si $x = 0$ o $y = 0$ entonces la desigualdad de Young es trivial. Podemos suponer entonces que $x, y > 0$. Sean ahora

$$\alpha = \frac{1}{p}, \quad \beta = \frac{1}{q}, \quad s = p \log x, \quad t = q \log y,$$

sustituyendo estos valores en (A.1), se sigue que

$$xy = \exp\left(\frac{s}{p} + \frac{t}{q}\right) \leq \frac{e^s}{p} + \frac{e^t}{q} = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

■

Teorema A.4 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sea* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *y sean los exponentes conjugados* $1 < p, q < +\infty$*. Si* $f, g \geq 0$ *entonces se tiene*

$$\int_X fg \, d\mu \leq \left(\int_X f^p \, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X g^1 \, d\mu\right)^{1/q}. \tag{A.2}$$

Demostración. Definimos

$$\alpha := \left(\int_X f^p \, d\mu\right)^{1/p}, \quad \beta := \left(\int_X g^q \, d\mu\right)^{1/q}.$$

Si $\alpha = 0$, entonces $f = 0$ en casi todo punto de X y por tanto se sumple (A.2), ya que nos queda la igualdad trivial $0 = 0$. De manera análoga, si $\beta = 0$, también se cumple la desigualdad (A.2).

Si $\alpha = +\infty$ o $\beta = +\infty$, el lado derecho de (A.2) es $+\infty$ y por tanto se cumple la desigualdad de manera trivial.

Supongamos que $0 < \alpha, \beta < +\infty$. Definimos las funciones

$$u := \frac{f}{\alpha}, \quad v := \frac{g}{\beta}.$$

Entonces

$$\int_X u^p \, d\mu = \frac{1}{\alpha^p} \int_X f^p \, d\mu = 1$$

y

$$\int_X v^q \, d\mu = \frac{1}{\beta^q} \int_X g^q \, d\mu = 1$$

Aplicamos la desigualdad de Young a $u(x)$ y $v(x)$

$$u(x)v(x) \leq \frac{u(x)^p}{p} + \frac{v(x)^q}{q}. \tag{A.3}$$

Integramos (A.3) sobre X respecto a la medida μ

$$\int_X uv\ d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Por lo tanto, hemos llegado a que

$$\frac{1}{\alpha\beta}\int_X fg\ d\mu \leq 1,$$

es decir,

$$\int_X fg\ d\mu \leq \alpha\beta.$$

■

Definición A.5. *Para $1 \leq p < +\infty$, definimos el conjunto $L^p(\Omega)$ como*

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible} : \int_\Omega |f|^p\ dx < +\infty \right\}.$$

Este espacio es Banach con la norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p\ dx \right)^{1/p}.$$

Teorema A.6 (Teorema de Fubini)**.** *Sea $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Entonces se tiene*

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\ dy \right) dx = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\ dx \right) dy = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)\ dy\ dx. \tag{A.4}$$

La demostracion del Teorema de Fubini puede encontrarse en [6].

Apéndice B

Espacios de Hilbert

Para la redacción de este apéndice se ha utilizado el Capítulo 1 de [11] y el Capítulo 5 de [20].

Definición B.1. *Sea H un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Se dice que la aplicación*

$$\begin{aligned}(\cdot,\cdot): H \times H &\to \mathbb{C}\\ (x,y) &\mapsto (x,y)\end{aligned}$$

es un producto escalar si para tres vectores cualesquiera $x, y, z \in H$, y para cualesquiera dos escalares α y β, se verifican las siguientes propiedades:

$$(x,x) \geq 0 \text{ y } (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \tag{B.1a}$$

$$\overline{(x,y)} = (y,x), \tag{B.1b}$$

$$(x, \alpha y + \beta z) = \alpha(x,y) + \beta(x,z), \tag{B.1c}$$

donde, para $z \in \mathbb{C}$, denotamos por $\overline{z}$ al conjugado de z, esto es, si $z = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $\overline{z} = a - bi$.

Nota B.2. *Observemos que a partir de las condiciones* (B.1b) *y* (B.1c) *se obtiene*

$$(\alpha y + \beta z, x) = \overline{\alpha}(y,x) + \overline{\beta}(z,x).$$

Definición B.3. *Sea H un $\mathbb{C}$-espacio vectorial dotado de un producto escalar, $(\cdot,\cdot)$, se dice que $(H,(\cdot,\cdot))$ es un espacio prehilbertiano.*

Definición B.4. *Se define una norma asociada a un producto escalar $(\cdot,\cdot)$ como*

$$\|x\| := \sqrt{(x,x)}.$$

Definición B.5. *Un espacio de Hilbert es cualquier espacio prehilbertiana completo respecto a la norma asociada al producto escalar $(\cdot,\cdot)$.*

Proposición B.6 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Si X es un espacio vecctorial con producto escalar, $(\cdot,\cdot)$, asociado y si $x, y \in X$ entonces*

$$|(x,y)| \leq \|x\|\,\|y\|. \tag{B.2}$$

Demostración. En el caso $x = 0$, se tiene que $|(x,y)| = 0$. Por otra parte, $\|x\| = 0$. Queda probada así la desigualdad de Cauchy-Schwarz para $x = 0$.

Suponemos ahora que $x \neq 0$. Sea $p(\lambda) = \|\lambda x - y\|^2 \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}$, se tiene

$$p(\lambda) = \|x\|^2\lambda^2 - 2\mathrm{Re}(x,y)\lambda + \|y\|^2 \geq 0. \tag{B.3}$$

Buscamos λ que minimice la función $p(\lambda)$,

$$\frac{dp}{d\lambda} = 2\lambda\|x\|^2 - 2\mathrm{Re}(x,y) = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{1}{\|x\|^2}\mathrm{Re}(x,y) \text{ es un punto crítico.}$$

$$\frac{d^2p}{d\lambda^2}(\lambda_0) = 2\|x\|^2 > 0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{1}{\|x\|^2}\mathrm{Re}(x,y) \text{ es un mínimo.}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq p(\lambda_0) =& \frac{1}{\|x\|^2}[\mathrm{Re}(x,y)]^2 - 2\frac{1}{\|x\|^2}[\mathrm{Re}(x,y)]^2 + \|y\|^2 = \\ =& \|y\|^2 - \frac{1}{\|x\|^2}[\mathrm{Re}(x,y)]^2. \end{aligned}$$

Es decir, $\|x\|^2\|y\|^2 - [\mathrm{Re}(x,y)]^2 \geq 0 \Rightarrow \|x\|\,\|y\| \geq \mathrm{Re}(x,y)$.
Como $(x,y) \in \mathbb{C}$, podemos expresarlo como $(x,y) = e^{i\theta}|(x,y)|$, donde $\theta \in \mathbb{R}$ es el argumento de (x,y). De la desigualdad anterior, se sigue que

$$\begin{aligned} |(x,y)| =& \mathrm{Re}|(x,y)| = \mathrm{Re}\left[e^{-i\theta}(x,y)\right] = \mathrm{Re}(e^{i\theta}x,y) \leq \|e^{i\theta}x\|\,\|y\| = \\ =& |e^{i\theta}|\,\|x\|\,\|y\| = \|x\|\,\|y\|. \end{aligned}$$

Por tanto se obtiene la desigualda $\|x\|\,\|y\| \geq |(x,y)|$.

∎

Apéndice C

Espacios métricos de medida

Para la redacción de este apéndice, se ha utilizado la referencia [19].

Definición C.1. *Sea X un conjunto. Decimos que el par (X, d) es un espacio métrico si d es una distancia, esto es, una función $d : X \times X \to [0, +\infty)$ que, para todo $x, y, z \in X$, cumple las siguientes propiedades:*

1. $d(x, y) \geq 0$ *y* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Además, definimos las boles en X como $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$, donde $x \in X$ y $r > 0$.

Definición C.2. *Una colección $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X se dice que es σ-álgebra en X si $\mathcal{M}$ verifica*

1. $X \in \mathcal{M}$.
2. *Si $A \in \mathcal{M}$, entonces $A^c \in \mathcal{M}$, donde $A^c = X \setminus A$.*
3. *Si $A = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, y $A_n \in \mathcal{M}$ para $n = 1, 2, \ldots$, entonces $A \in \mathcal{M}$.*

Definición C.3. *Sea X un espacio topológico, denotamos por $\mathcal{B}$ a la menor σ-álgebra en X tal que cada conjunto abierto de X pertenece a $\mathcal{B}$.*

Definición C.4. *Una medida positiva es una función $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ definida en un σ-álgebra $\mathcal{M}$, que cumple*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n),$$

para una colección $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *disjunta de* $\mathcal{M}$.

Definición C.5. *Un espacio de medida,* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *tiene definida una medida positiva en el* σ*-álgebra,* $\mathcal{M}$*, y llamamos conjuntos medibles en* X *a los componentes de* $\mathcal{M}$.

Definición C.6.

1. *Se dice que una medida* μ *es completa si cada subconjunto de un sonjunto con medida nula es medible.*

2. *La medida* μ *definida en una* σ*-álgebra* $\mathcal{M}$ *en* X *es* σ*-finita si* X *es una unión numerable de conjuntos* X_i*, con medida finita.*

Definición C.7. *Un espacio métrico de medida* (X, μ, d) *es un espacio métrico* (X, d) *con una medida de Borel* μ *en* X σ*-finita, regular y completa, que asocia una medida finita y positiva a las bolas de* X.

Apéndice D

Operadores

Para la realización de los siguientes resultados sobre operadores, se han utilizado las referencias [8], [22] y el capítulo 6 de [6].

Definición D.1.

1. *Un operador lineal (o simplemente operador) T en un espacio de Banach X es una aplicación tal que*

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty, \quad \forall x, y \in X \text{ y } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \tag{D.1}$$

2. *La suma de dos operadores T, S es el operador $T + S$ definido por*

$$(T + S)x := Tx + Sx, \quad \forall x \in X. \tag{D.2}$$

La composición de T y S es el operador $T \circ S$ definido por

$$(T \circ S)x := T(Sx), \quad \forall x \in X. \tag{D.3}$$

El producto de un operador T con un número complejo α es el operados αT definido por

$$(\alpha T)x := \alpha(Tx), \quad \forall x \in X. \tag{D.4}$$

3. *Una función $f \in X$ no nula es autofunción de T con autovalor α si*

$$Tf = \alpha f. \tag{D.5}$$

4. *El adjunto de un operador T es el operador $T^\dagger$ definido por la condición:*

$$(x, T^\dagger y) = (Tx, y), \quad \forall x, y \in X,$$

donde $(\cdot, \cdot)$ denota el producto escalar en X.

5. *Un operador T es autoadjunto si $T = T^\dagger$. Es decir, para todo $x, y \in X$, se tiene*
$$(x, Ty) = (Tx, y) = (y, Tx)^*. \tag{D.6}$$

6. *Un operador T es antihermítico si $T = -T^\dagger$.*

Teorema D.2.

1. *Los autovalores de un operador autoadjunto T son reales.*

2. *Los autovectores correspondientes a dos autovalores diferentes son ortogonales.*

Demostración.

1. Sea α un autovalor del operador T entonces $Tx = \alpha x \Rightarrow (x, Tx) = (x, \alpha x) = \alpha(x, x) = \alpha\|x\|^2$. Por otro lado, por ser T un operador autoadjunto se tiene $(x, Tx) = (Tx, x) = (\alpha x, x) = \alpha^*\|x\|^2$. Por tanto $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Sean α_1, α_2 dos autovalores distintos y x_1, x_2 sus autovalores correspondientes. Se tiene
$$\alpha_2(x_2, x_1) = (T^\dagger x_2, x_1) = (Tx_2, x_1) = (x_2, Tx_1) = \alpha(x_2, x_1),$$
como $\alpha_1 \neq \alpha_2$, entonces $(x_2, x_1) = 0$.

■

Definición D.3. *Un operador $T \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ es invertible si existe $S \in \mathcal{L}(X_2, X_1)$ tal que $T \circ S = I_{X_2}$ y $S \circ T = I_{X_1}$, donde $I : X_i \to X_i$, es la función identidad del conjunto X_i, para $i = 1, 2$.*

Definición D.4. *Sean $T \in \mathcal{L}(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Decimos que λ es un autovalor de T si $T - \lambda I$ no es inyectivo; es decir, si existe $x \in X \setminus \{0\}$ tal que $Tx = \lambda x$. Cualquier $x \in X \setminus \{0\}$ que satisface $Tx = \lambda x$, decimos que es un autovector asociado al autovalor λ. Al conjunto de todos los autovalores de T lo llamamos espectro de T y lo denotemos $\sigma_X(T)$. En el caso que no sea necesario especificar el espacio, solamente se escribirá $\sigma(T)$.*

Definición D.5. *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sus autovalores. Se denomina radio espectral de T al mayor autovalor de T en valor absoluto y lo denotaremos por $\rho_X(T)$,*
$$\rho_X(T) = \max_{i=1,\ldots,n} \{|\lambda_i|\}.$$
En el caso que no sea necesario especificar el espacio, solamente se denotará por $\rho(T)$.

Definición D.6. *Sean X, Y dos espacios de Banach; denotemos por B_X la bola unidad cerrada de X. Una aplicación lineal $T : X \to Y$ se dice que es un operador compacto si $T(B_X)$ es relativamente compacto en Y; es decir, si su clausura $\overline{T(B_X)}$ es compacta. Denotamos por $\mathcal{K}(X, Y)$ al conjunto de todos los operadores compactos de X en Y.*

Nota D.7. *Los siguientes criterios de conjuntos relativamente compactos se pueden encontrar en [2] y [14]:*

1. *S es relativamente compacto si y sólo si toda sucesión de S contiene una subsucesión de Cauchy.*

2. *S es relativamente compacto si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$, S se puede recubrir por un número finito de bolas de radio ε.*

3. *Sean S y T conjuntos relativamente compactos y subconjuntos de un espacio de Banach, entonces $S + T$ es un conjunto relativamente compacto.*

4. *Sea S un conjunto relativamente compacto en un espacio de Banach, entonces su envolvente es convexa.*

5. *Sea S un conjunto relativamente compacto del espacio de Banach X, sea Y un espacio de Banach y $M \subset \mathcal{L}(X, Y)$, entonces $M(S)$ es relativamente compacto.*

Teorema D.8. *Todo subconjunto de un conjunto relativamente compacto es relativamente compacto.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach. Sean $B \subset X$ un conjunto relativamente compacto y $A \subset B$. Al ser B un conjunto relativamente compacto, $\overline{B}$ es compacto. Sea ahora, una sucesión (x_n) de A entonces (x_n) también es sucesión de B que por ser relativamente compacto, (x_n) contiene una subsucesión de Cauchy.

Sea $(x'_n) \subset (x_n)$ la sucesión de Cauchy de (x_n) en B, entonces se tiene la siguiente cadena de contenciones

$$(x'_n) \subset (x_n) \subset A \subset B,$$

por lo tanto (x'_n) también es una sucesión de Cauchy contenida en (x_n) en A. Podemos concluir que A es relativamente compacto.

■

Proposición D.9. *Se tienen las siguientes propiedades de operadores compactos:*

1. *Sean $S, T : X \to Y$ dos operadores lineales compactos, entonces el operador $S + T$ es compacto.*

2. *Sea Z un espacio de Banach, $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$ y $T : X \to Y$ compacto. Entonces $S \circ T$ es compacto.*

3. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y S un operador compacto, entonces el operador αS es compacto.*

4. *Sea X un espacio de Banach, $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $T : Y \to Z$ compacto. Entonces $T \circ S$ es compacto.*

5. *Sea $S_n : X \to Y$ una sucesión de operadores compactos que convergen uniformemente a S y tal que $\lim_{n\to+\infty} \|S_n - S\| = 0$. Entonces S es un operador compacto.*

Demostración.

1. Se tiene que $B_S := S(B_X)$ y $S_T := T(B_X)$ son relativamente compactos en Y. Por tanto, $B_S + B_T$ es relativamente compacto. Además, se tiene la siguiente contención

$$(S + T)(B_X) \subset S(B_X) + T(B_X) = B_S + B_T.$$

   Por el teorema D.8, como $(S+T)(B_X)$ es un subconjunto de un conjunto relativamente compacto entoces es relativamente compacto.

2. Sea el compacto $K = \overline{T(B_X)}$ en Y. Entonces $S(K)$ es compacto en Z. Además,

$$(S \circ T)(B_X) = S(T(B_X)) \subset S(K).$$

   Pero como un subconjunto de un conjunto compacto siempre es relativamente compacto, se tiene que $S \circ T$ es compacto.

3. La demostración de este apartado es un caso particular del apartado 2.

4. Sea $S \in \mathcal{L}(X, Y)$, entonces por los resultados destacados en el apéndice, $S(B_X) \subset B(0, R)$, donde $R = \|S\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$. Además, por la linealidad de T,

$$T(B(0, R)) = \|S\|_{\mathcal{L}(X,Y)} T(B_X).$$

   Por otro lado,

$$(T \circ S)(B_X) = T(S(B_X)) \subset T(B(0, R)) = \|S\|_{\mathcal{L}(X,Y)} T(B_X),$$

   que es compacto por el apartado 3 y como todo subconjunto de un compacto es relativamente compacto, entonces $T \circ S$ es compacto.

5. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\|S_n - S\| < \varepsilon$. Como S_n es una sucesión de operadores compactos entonces podemos recubrir $S_n(B_X)$ por un número finito de bolas de radio ε. En este caso, podemos recubrir $S(B_X)$ por un número finito de bolas de radio 2ε centradas en el mismo punto. Por tanto, S es un operador compacto.

■

Proposición D.10. *$\mathcal{K}(X,Y)$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{L}(X,Y)$.*

Demostración. Sea T_n una sucesión de operadores compactos y T un operador acotado tal que $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \to 0$, por tanto, por la Proposición D.9 se sigue que T es compacto. Se tiene entonces que para todo $\varepsilon > 0$ se puede recubrir $T(B_X)$ mediante un número finito de bolas de radio ε, donde B_X denota a la bola unidad en X. Fijamos n tal que $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $T_n(B_X)$ tiene clausura compacta, existe un recubrimiento finito de $T_n(B_X)$ mediante bolas de radio $\frac{\varepsilon}{2}$,

$$T_n(B_X) \subset \bigcup_{i\in I} B\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Por lo tanto

$$T(B_X) \subset \bigcup_{i\in I} B(y_i, \varepsilon).$$

■

Definición D.11. *Sean $F \in \mathcal{L}(Y)$ y f una función analítica en un entorno de $\sigma(F) \subset \mathbb{C}$. Sea también U un conjunto abierto cuya frontera, Γ, está formada por una cantidad finita de curvas de Jordan rectificables y orientadas positivamente. Supongamos que $U \subset \sigma(F)$, y que $U \cup \Gamma$ está contenida en el dominio en el que f es analítica. Entonces el operador*

$$f(F) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda I - F)^{-1}\, d\lambda$$

está bien definido y $f(F) \in \mathcal{L}(Y)$.

Nota D.12. *Recordando la definición de proyección de Riesz correspondiente a la parte aislada σ_1, Q_{σ_1}, que encontramos en la Definición 2.30, podemos probar que Q_{σ_1} es realmente una proyección. Podemos encontrar este resultado en [17]: Q_{σ_1} es una proyección, ya que $Q_{\sigma_1}^2 = Q_{\sigma_1}$.*

En efecto, sean Γ_1 y Γ_2 formadas por una cantidad finita de curvas de Jordan alrededor de σ_1 rectificables y orientadas positivamente tales que separan σ_1 de σ_2. Supongamos que Γ_1 está dentro de Γ_2. Entonces

$$\begin{aligned} Q_{\sigma_1}^2 &= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(\lambda I - F)^{-1}\,d\lambda\right)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}(\mu I - F)^{-1}\,d\mu\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}(\lambda I - F)^{-1}(\mu I - F)^{-1}\,d\mu\,d\lambda. \end{aligned}$$

Por otro lado, como $(\lambda I - F)(\mu I - F) = (\mu I - F)(\lambda I - F)$, se tiene que

$$(\lambda I - F)(\mu I - F)[(\mu I - F)^{-1} - (\lambda I - F)^{-1}] = (\lambda I - F) - (\mu I - F) = (\mu - \lambda)I,$$

es decir,

$$(\lambda I - F)^{-1} - (\mu I - F)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda I - F)^{-1}(\mu I - F)^{-1}, \tag{D.7}$$

para λ y μ pertenecientes al espectro de F.

Entonces podemos escribir $Q_{\sigma_1}^2 = S - R,$ donde

$$S = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\frac{1}{\mu - \lambda}(\lambda I - F)^{-1}\,d\mu\,d\lambda \tag{D.8}$$

y

$$R = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\frac{1}{\mu - \lambda}(\mu I - F)^{-1}\,d\mu\,d\lambda. \tag{D.9}$$

Ahora bien, de (D.8) *deducimos que*

$$\begin{aligned} S =& \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(\lambda I - F)^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{1}{\mu - \lambda I}\,d\mu\right)\,d\lambda = \\ =& \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(\lambda I - F)^{-1}\,d\lambda = Q_{\sigma_1}, \end{aligned}$$

y de (D.9) *se sigue que*

$$\begin{aligned} R =& \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\frac{1}{\mu - \lambda}(\mu I - F)^{-1}\,d\lambda\,d\mu = \\ =& \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}(\mu I - F)^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{1}{\mu - \lambda}I\,d\lambda\right)\,d\mu. \end{aligned}$$

Ahora bien, para $\mu \in \Gamma_2$, se tiene que $\displaystyle\int_{\Gamma_1}\frac{1}{\mu - \lambda}I\,d\lambda = 0$, ya que Γ_1 está dentro de Γ_2. Por lo tanto, $R = 0$. Quedando así probado que $Q_{\sigma_1}^2 = Q_{\sigma_1}$.

Bibliografía

[1] Andreu Vaillo, F., Mazón, J., Rossi, J. D. y Toledo Melero, J., *Nonlocal diffusion problems.* American Mathematical Society, 2010.

[2] Ayala Gómez, R., *Apuntes de clase de la asignatura Topología del segundo curso del Grado en Matemáticas.* Dpto. Geometría y Topología, Universidad de Sevilla, curso 2015/2016.

[3] Bates, P. W. y Zhao, G., *Existence, uniqueness and stability of the stationary solution to a nonlocal evolution equation arising in population dispersal.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol. 332 (2007), no. 1, 428-440.

[4] Bernal González, L. y Domínguez Benavides, T., *Nociones de Análisis Funcional.* Dpto. Análisis Matemático, Universidad de Sevilla. Puede encontrarse una versión digital en `https://personal.us.es/lbernal/php/activos/pdf/naf.pdf` Visitado el día 28-08-2021.

[5] Bracewell, R. N., *The Fourier transform and its applications.* McGraw-Hill, 1986.

[6] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, 2011.

[7] Carothers, N. L., *A short course on Banach Space Theory.* Cambridge University Press, 2005.

[8] Casado Díaz, J., *Apuntes de clase de la asignatura Análisis Funcional y Ecuaciones en Derivadas Parciales del cuarto curso del Grado en Matemáticas.* Dpto. Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla, curso 2019/2020.

[9] Cazenave, T. y Haraux, A., *An introduction to semilinear evolution equations.* Oxford University Press on Demand, 1998.

[10] Chasseigne, E., Chaves, M. y Rossi, J. D., *Asymptotic behavior for nonlocal diffusion equations*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Vol. 86 (2006), no. 3, 271-291.

[11] Conway, J. B., *A course in functional analysis*. Springer, 2019.

[12] Fernández Besoy, B. y Cobos Díaz, F., *Teoría espectral de operadores compactos y autoadjuntos en espacios de Hilbert*. Dpto. Análisis Matemático, Universidad Complutense de Madrid, 2016. Puede encontrarse una versión digital en
https://ucm.es/data/cont/docs/193-2016-10-17-MemorioBecaColaboraci%C3%B3nBlancaFernandezBesoy.pdf
Visitado el día 27-08-2021.

[13] Fife, P., *Some nonclassical trends in parabolic and parabolic-like evolutions*. Springer, 2003.

[14] Folland, G. B., *Real analysis: modern techniques and their applications*. John Wiley & Sons, 1999.

[15] García Melián, J. y Rossi, J. D., *A logistic equation with refuge and nonlocal diffusion*. Commun. Pure Appl. Anal. Vol. 8 (2009), no. 6, 2037-2053.

[16] García Melián, J. y Rossi, J. D., *On the principal eigenvalue of some nonlocal diffusion problems*. Journal of Differential Equations. Vol. 246 (2009), no. 1, 21-38.

[17] Gohberg, I., Goldberg, S. y Kaashoek, M. A., *Classes of linear operators*. Birkhäuser, 2013.

[18] Hutson, V., Martinez, S., Mischaikow, K. y Vickers, G. T., *The evolution of dispersal*. J. Math. Biol. Vol. 47 (2003), no. 6, 483-517.

[19] Ibarrola, P., Pardo, L. y Quesada, V., *Teoría de la probabilidad*. Síntesis, 1997.

[20] Kolmogorov, A. N. y Fomin, S. V., *Measure, Lebesgue integrals, and Hilbert space*. Academic Press, 1961.

[21] Pazy, A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer, 2012.

[22] Rodríguez Piazza, L., *Apuntes de clase de la asignatura Variable Compleja y Operadores del Máster Universitario en Matemáticas.* Dpto. Análisis Matemático, Universidad de Sevilla, curso 2020/2021.

[23] Sastre Gómez, S., *Nonlocal diffusion problem*, Tesis Doctoral, Universidad Complutense Madrid, 2014.

[24] Zuazua, E., *Apuntes Ecuaciones en Derivadas Parciales.* Dpto. Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid. Puede encontrarse una versión digital en
https://verso.mat.uam.es/web/ezuazua/documentos_public/archivos/personal/comites/1_ecudepa.pdf
Visitado el día 27-08-2021.