UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Facultad de Matemáticas

Máster Universitario en Matemática Avanzada

Departamento de Análisis Matemático

FUNCIONES UNIVERSALES Y PROPIEDADES DE ACOTACIÓN

Trabajo Fin de Máster

presentado por

Mercedes Prado Rodríguez

Directores: Mª del Carmen Calderón Moreno

José Antonio Prado Bassas

Sevilla, Septiembre de 2015

Índice general

Abstract

The aim of this Master's Thesis is to study the latest results of existence of universal entire functions with bounded properties and translate them to the field of harmonic functions.

This memory is divided into four chapters. In the first one, we will make a brief reminder of some basic concepts that will be used in subsequent chapters. In the second chapter, we will study the universality of complex functions and we will give some bounded properties of such functions through the concept of Arakelian subsets. In the next chapter we will study the universality of harmonic functions in $\mathbb{R}^N$, and will define the notion of Carleman sets and will prove, under certain conditions, the existence of universal harmonic functions on $\mathbb{R}^N$. In the last chapter we will see how it is possible to transfer these results from entire functions to harmonic functions on $\mathbb{R}^N$. The content of this chapter is original.

The completion of this work has allowed us to get into a line of research that combines concepts of Functional Analysis, Operator Theory and Topology. This is a field that has developed mainly in the last 25 years, although its origins date back to the early twentieth century.

Resumen

El objetivo principal de este Trabajo Fin de Máster es realizar un estudio sobre los últimos resultados de existencia de funciones enteras universales con propiedades de acotación y trasladarlos al ámbito de las funciones armónicas.

Esta memoria se dividirá en cuatro capítulos. En el primero de ellos, haremos un breve recordatorio de algunas nociones básicas que se usarán en los capítulos posteriores. En el segundo capítulo estudiaremos la universalidad de funciones en el ámbito de las funciones complejas y daremos algunas propiedades de acotación de dichas funciones mediante el concepto de conjunto de Arakelian. En el siguiente capítulo estudiaremos la universalidad de funciones armónicas en $\mathbb{R}^N$, definiremos los conjuntos de Carleman y probaremos, bajo ciertas condiciones, la existencia de funciones armónicas universales en $\mathbb{R}^N$. En el último capítulo veremos cómo es posible trasladar los resultados de acotación de funciones enteras universales al ámbito de las funciones armónicas en $\mathbb{R}^N$, siendo el contenido de este capítulo original.

La realización del presente trabajo nos ha permitido adentrarnos en una línea de investigación que conjuga conceptos propios del Análisis Funcional, la Teoría de Operadores y la Topología. Se trata de un campo que se ha desarrollado principalmente en los últimos 25 años, aunque sus orígenes se remonten a las primeras décadas del siglo XX.

Introducción

Sea X un espacio vectorial topológico y sea $T : X \to X$ una aplicación lineal y continua. Siguiendo a Beauzamy, se dice que T es hipercíclica si existe un vector $x \in X$ tal que el conjunto $\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X.

Usando esta terminología, en 1929 Birkhoff [11] probó la hiperciclicidad del operador de traslación $T_a f(z) := f(z+a)$ $(a \neq 0)$ en el espacio de las funciones enteras $H(\mathbb{C})$; a las funciones hipercíclicas respecto del operador de traslación se las conoce como *funciones universales en el sentido de Birkhoff*. El análogo armónico del Teorema de Birkhoff, es decir, cuando se reemplaza el espacio de funciones enteras $H(\mathbb{C})$ por el espacio $h(\mathbb{R}^N)$ de funciones armónicas en $\mathbb{R}^N$, es debido a Armitage y Gauthier [4].

Principalmente a lo largo de los últimos 30 años, son numerosos los resultados sobre hiperciclicidad que se pueden encontrar en la literatura: hiperciclicidad de operadores de composición, de desplazamiento, crecimiento y/o "acotación" de funciones hipercíclicas, periodicidad de funciones hipercíclicas, condiciones necesarias y/o suficientes para la hiperciclicidad, estructura/tamaño topológico y algebraico del conjunto de vectores hipercíclicos...

En este Trabajo Fin de Máster se pretende realizar un estudio sobre los últimos resultados de existencia de funciones Birkhoff-universales con propiedades adicionales de acotación y trasladarlos al ámbito de las funciones armónicas. Pero además, modificaremos alguna demostración original y completaremos o mejoraremos otras tantas, para así, obtener una única notación entre todas las utilizadas a lo largo del estudio de estos temas.

Para comenzar y con objeto de que la lectura sea autocontenida, recordaremos en el Capítulo 1 algunas definiciones básicas y resultados necesarios relacionados con el Análisis Funcional, la Topología o la Teoría de Operadores para facilitar la comprensión de los posteriores capítulos.

En el Capítulo 2, comenzaremos hablando de los llamados conjuntos de Arakelian, las cuales son una útil herramienta en muchos resultados posteriores de existencia de funciones enteras universales respecto de similaridades (prefijadas o no) con propiedades adicionales de acotación.

En el siguiente capítulo, nos introduciremos en el ámbito de las funciones armónicas. Trasladaremos el concepto de Birkhoff-universalidad de funciones de $H(\mathbb{C})$ a $h(\mathbb{R}^N)$ e introduciremos el concepto armónico análogo a los conjuntos de Arakelian: los conjuntos de Carleman. Además, probaremos detalladamente la existencia de un conjunto de funciones armónicas de $\mathbb{R}^N$ Birkhoff-universales (resultado obtenido por A. Bonilla [2] en 2002).

En el cuarto y último capítulo, trasladaremos al ámbito de las funciones armónicas los resultados estudiados en los anteriores capítulos, modificando o añadiendo los resultados oportunos y las pruebas necesarias, redefiniendo los conceptos, etc.

La bibliografía la hemos dividido en dos partes. En primer lugar destacamos la *Bibliografía fundamental*, en la que hemos recogido las referencias que se han manejado con mayor intensidad para la realización del trabajo. Por otro lado, bajo el epígrafe de *Otras referencias* hemos incluido una colección de algunos de los artículos más importantes en la literatura, tanto clásicos como modernos, que recogen resultados relacionados con la universalidad de funciones enteras o armónicas que han servido de referencia para la realización de este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de este capítulo es facilitar la comprensión de los tres siguientes. Para ello recordaremos algunas definiciones básicas y resultados necesarios relacionados con el Análisis Funcional, la Topología o la Teoría de Operadores.

1.1. Espacios de Baire

Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subconjunto de X. Se dice que A es de *primera categoría* si es unión numerable de subconjuntos cuyo cierre tiene interior vacío. Por otra parte, A será de *segunda categoría* si no es de primera categoría. Un espacio topológico X se dice que es *de Baire* si todo subconjunto de X, abierto y no vacío, es de segunda categoría.

Si X es de Baire, se dice que A es *residual* si su complementario es de primera categoría. Se puede decir que un conjunto residual es "topológicamente grande". Asimismo, un subconjunto A de X será residual si y solo si, contiene alguna intersección numerable de abiertos que sea densa, es decir, si contiene algún G_δ-denso.

Además, contamos con el conocido *Teorema de Baire* que nos garantiza que todos los espacios con los que vamos a trabajar son de Baire.

Teorema 1.1.1 (**Teorema de Baire**). *Sea X un espacio topológico. Si X es un espacio métrico completo, entonces es un espacio de Baire.*

En este contexto, sabemos que X es un espacio de Baire si y sólo si, dada cualquier sucesión $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de abiertos densos, su intersección $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ es también densa.

1.2. Nociones básicas de topología

Un espacio topológico X se dice que es T_1 si cada par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$ se pueden separar por un abierto, es decir, si existe $U \subseteq X$ abierto tal que $x_1 \in U$ y $x_2 \notin U$.

Análogamente, un espacio topológico X se dice que es T_2 o de Hausdorff, si para cada par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$, existen abiertos $U, V \subseteq X$ tales que $U \cap V = \emptyset$, $x_1 \in U$ y $x_2 \in V$.

Obviamente, todo espacio T_2 es automáticamente T_1. Además, se cumple que un espacio topológico es T_1 si y sólo si cada conjunto unitario es cerrado. Dado $A \subset X$ denotaremos por $\overline{A}$ su clausura.

En efecto, si cada conjunto unitario es cerrado, entonces dados $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$, se tiene que $U = X \setminus \{x_1\}$ es un abierto tal que $x_2 \in U$ y $x_1 \notin U$ y por tanto X es T_1. Recíprocamente, consideremos $x \in X$ y veamos que $\overline{\{x\}} = \{x\}$. Sea $y \in X$ con $y \neq x$; por ser X un espacio T_1, existe $U \subseteq X$ abierto tal que $y \in U$ y $x \notin U$, luego $U \cap \{x\} = \emptyset$ y se tiene que $y \notin \overline{\{x\}}$ por cada $y \neq x$, de donde $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

A continuación veremos un lema que usaremos, líneas más abajo, en la demostración del resultado de más importancia en esta sección.

Lema 1.2.1. *Sea X un espacio topológico T_1 sin puntos aislados. Entonces cada subconjunto finito de X tiene interior vacío y es cerrado.*

Demostración. Sea $F \subseteq X$ finito, digamos $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Como X es T_1, cada subconjunto unitario $\{x\}$ es cerrado. Con lo cual, al ser F unión finita de conjuntos cerrados ($\{x_i\}$, $i = 1, \ldots, n$), $F = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{x_i\}$, es cerrado.

Ahora, por reducción al absurdo, probaremos que F tiene interior vacío. Llamemos $A = int(F)$, que es un conjunto abierto, finito (por ser F finito), luego cerrado. Suponemos que $A \neq \emptyset$; veamos entonces que A posee al menos dos puntos. En efecto, si A fuese unitario, $A = \{x\}$ sería un abierto que sólo contiene a x y a ningún otro punto, por tanto, x sería un punto aislado, lo que contradice las hipótesis del lema.

Escogemos ahora un subconjunto $B \subseteq A$ no vacío, abierto y minimal. Entonces, igual que ocurría con A, B tiene al menos dos puntos. Sean a y b dichos puntos; al ser X un espacio T_1, existe un subconjunto abierto $U \subseteq X$ tal que $a \in U$ y $b \notin U$. Sea $C = B \cap U$; entonces C es un abierto no vacío contenido en A y además $C \subsetneq B$, lo que es una contradicción puesto que B es minimal. □

Enunciamos además algunos conceptos previos y necesarios para enunciar dicho teorema.

Definición 1.2.2. *Se dice que un espacio topológico X es perfecto si es cerrado y no posee ningún punto aislado.*

Definición 1.2.3. *Un espacio topológico X es pseudométrico si su topología es generada por una función $d\colon X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ (denominada semidistancia o pseudométrica), que cumple*

1. $d(x, x) = 0$
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *(simetría)*
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(desigualdad triangular)*

para todo $x, y, z \in X$.

La condición $d(x, y) \geq 0$ se deduce de las anteriores, pues

$$d(x, y) = \tfrac{1}{2}(d(x, y) + d(y, x)) \geq \tfrac{1}{2} d(x, x) = 0.$$

Nótese que todo espacio métrico es un espacio pseudométrico. En este último tipo de espacios puede darse el caso $d(x, y) = 0$ para $x \neq y$.

Finalmente veremos el verdadero objetivo de esta sección: un teorema que nos será útil para probar la universalidad de funciones en futuros resultados (ver [7]).

Teorema 1.2.4. *Sea X un espacio topológico perfecto T_1 cuya topología se define mediante una familia creciente de pseudodistancias $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n \leq \cdots$. Suponemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son dos subconjuntos numerables de X tales que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es densa en X y $\lim\limits_{n\to\infty} d_n(x_n, y_n) = 0$. Entonces $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es también densa en X.*

Demostración. De las hipótesis se puede deducir que el espacio X es metrizable y que la expresión

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x,y)}{1+d_n(x,y)} \quad (x, y \in X)$$

define una distancia que genera la topología de X.

Además, por el Lema 1.2.1, cada subconjunto finito F de X es cerrado y tiene interior vacío.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$d(x_n, y_n) \;\leq\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \frac{d_k(x_n,y_n)}{1+d_k(x_n,y_n)} + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \;\leq\; 2d_n(x_n,y_n) + \frac{1}{2^n}.$$

Por tanto, $d(x_n, y_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Fijamos ahora $\alpha \in X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n > N$. Si tomamos el conjunto $F := \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, entonces F es un conjunto cerrado con interior vacío y así, el conjunto $G = \{x \in X : d(x, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}\} \setminus F$ es abierto y no vacío.

Como el conjunto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es denso en X, entonces existe $m > N$ de manera que $x_m \in G$, es decir, $d(x_m, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, tenemos que

$$d(y_m, \alpha) \leq d(y_m, x_m) + d(x_m, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

y se tiene la densidad de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

1.3. Bases de Schauder

Sabemos que todo espacio vectorial X tiene una base algebraica, llamada base de Hamel, es decir, una familia de vectores $\{u_i\}_{i\in I} \subset X$ tal que cada $x \in X$ se puede escribir de manera única como combinación lineal finita $x = \sum_{i\in I} \alpha_i(x)u_i$, con $\alpha_i(x) \in \mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C})$ es el cuerpo base. Sin embargo, en el caso de que X posea alguna topología (por ejemplo, si X es un espacio de Banach), esta base algebraica tiene poco que ver con la topología del espacio. Por ello, necesitaremos el concepto de base de Schauder.

Definición 1.3.1. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ se denomina base de Schauder de X si para cada $x \in X$ existe una única sucesión $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ de escalares tal que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n,$$

donde la convergencia es entendida respecto de la norma $\|\cdot\|_X$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k \right\|_X = 0.$$

Los escalares α_n son llamados las coordenadas de x respecto de la base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Se dice que la base es normalizada si $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nótese que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es base de Schauder de un espacio de Banach X, entonces cada uno de sus coeficientes funcionales $x_k^* : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \mapsto \alpha_k$ es continuo en X.

A continuación veremos los conceptos de sucesión básica y de equivalencia de sucesiones básicas. Dado $A \subset X$, denotaremos $span(A)$ el espacio vectorial generado por A.

Definición 1.3.2. *Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ es sucesión básica si es base de Schauder de $\overline{span}(x_n)$.*

Definición 1.3.3. *Dos sucesiones básicas $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ e $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ se dice que son equivalentes si para toda sucesión de escalares $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, se tiene que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ converge si y solo si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i$ converge.*

El siguiente resultado [5] nos asegura que dada una sucesión básica en X, bajo ciertas condiciones podemos encontrar otra sucesión de X que sea también básica equivalente a la anterior.

Teorema 1.3.4. *Supongamos que $\{x_n\}_n$ es una sucesión básica en un espacio de Banach X y que $\{x_n^*\}_n$ es su sucesión de coeficientes funcionales. Supongamos que $\{y_n\}_n$ es una sucesión en X tal que*

$$\sum_n \|x_n^*\| \, \|x_n - y_n\| < 1.$$

Entonces $\{y_n\}_n$ es una sucesión básica equivalente a $\{x_n\}_n$.

Capítulo 2

Caracterización de conjuntos sub-Arakelian

Como objetivo principal, en este capítulo recogeremos algunos de los resultados estudiados por Calderón-Moreno y Prado-Bassas [1] sobre la existencia de funciones universales bajo similaridades que están acotadas en un determinado subconjunto A.

En primer lugar repasaremos algunas investigaciones previas a dicho artículo; veremos la definición de conjunto de Arakelian y algunos resultados anteriores sobre acotación y universalidad de funciones. Dedicaremos la siguiente sección a los conjuntos llamados sub-Arakelian, dando algunos ejemplos ilustrativos de este tipo de conjuntos, así como una construcción de conjuntos Arakelian. A continuación estudiaremos la existencia de funciones universales respecto de similaridades y acotadas en un conjunto sub-Arakelian prefijado y, posteriormente, fijaremos previamente también las similaridades. Por último, comentaremos algunas conclusiones y observaciones finales.

2.1. Antecedentes

En 1929 Birkhoff [11] probó la existencia de una función f entera que es universal respecto de traslaciones, es decir, cuya familia de trasladadas $\{f(\cdot + n) : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en $H(\mathbb{C})$.

En los últimos 20 años, muchos investigadores han centrado su atención en encontrar funciones que presentan un comportamiento "salvaje", pero que simultáneamente están, en cierto sentido, controladas. Más concretamente, se pueden encontrar resultados que compatibilizan existencia de funciones universales con propiedades opuestas como la acotación o el decrecimiento rápido (cuando $z \to \infty$) en conjuntos "grandes".

En 2002, Calderón [12] probó la existencia de una colección de funciones enteras y Birkhoff-universales que están acotadas en un cierto dominio. Denotaremos por Σ la familia de regiones planas comprendidas entre dos rectas paralelas.

Teorema 2.1.1. *Para cada $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, existe una variedad lineal densa $M \subset H(\mathbb{C})$ tal que, para toda función $f \in M \setminus \{0\}$, se tiene:*

1. *f es Birkhoff-universal.*
2. $\displaystyle\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in S}} \exp\left(|z|^{\alpha}\right) f(z) = 0,\ \forall S \in \Sigma$. *En particular, f está acotada en S.*

Dos años después, Costakis y Sambarino [13] probaron el siguiente resultado.

Teorema 2.1.2. *Dado un compacto $K \subset \mathbb{C}$, existe una función f entera tal que:*

1. *f es Birkhoff-universal.*
2. *f tiende a cero en todo "sector trasladado" $K + \{z : \varepsilon \leq \arg z \leq 2\pi(1-\varepsilon)\}$ ($\varepsilon \in (0,1)$).*

El teorema anterior fue generalizado por Gharibyan, Luh y Niess [16] en los siguientes términos.

Teorema 2.1.3. *Dado un sector $S := \{z = z_0 + re^{it} : r \geq 0,\ t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]\}$ ($z_0 \in \mathbb{C}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $0 < \tau < \pi$), existe un subconjunto denso $M \subset H(\mathbb{C})$ tal que cada función $f \in M$ está acotada en S y es Birkhoff-universal.*

En 2006, Bernal y Bonilla [7] probaron, bajo ciertas condiciones, la existencia de una función entera f Birkhoff-universal y acotada en un cierto conjunto A prefijado. Veamos algunos conceptos previos necesarios para enunciar este resultado.

Definición 2.1.4. *Si F es un subconjunto de $\mathbb{C}$, se dice que F es un conjunto de Arakelian si $F \neq \emptyset$ es cerrado en $\mathbb{C}$ y su complementario respecto al plano extendido $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es conexo y localmente conexo en el infinito.*

Observemos que las bandas y los sectores son conjuntos de Arakelian.

Definición 2.1.5. *Se define el radio inscrito de $A \subset \mathbb{C}$ como*

$$\rho(A) = \sup\{r > 0 : \exists a \in \mathbb{C} \text{ tal que } \overline{B}(r, a) \subset A\}.$$

Veamos ahora el resultado previamente citado.

Teorema 2.1.6. *Dado un subconjunto $A \subset \mathbb{C}$, entonces las dos propiedades siguientes son equivalentes:*

1. *Existe un subconjunto $F \subset \mathbb{C}$ de Arakelian tal que $A \subset F$ y $\rho(\mathbb{C} \setminus F) = +\infty$.*

2. *Existe una función entera f Birkhoff-universal y acotada en A.*

Cuatro años más tarde, Bernal, Calderón y Luh [8] probaron bajo ciertas condiciones la existencia de una familia de funciones enteras Birkhoff-universales que además cumplen una serie de propiedades.

Teorema 2.1.7. *Si $F \subset \mathbb{C}$ es un conjunto de Arakelian no acotado con $\rho(\mathbb{C} \setminus F) = +\infty$, entonces existe un subespacio vectorial $M \subset H(\mathbb{C})$ tal que*

1. *M es denso en $H(\mathbb{C})$*

2. *Toda función $f \in M \setminus \{0\}$ es Birkhoff-universal*

3. $\exp(|z|^\alpha) f(z) \to 0$ *cuando* $z \to 0$ $(z \in \mathbb{C})$, $\forall \alpha \in (0, 1/2)$ *y* $\forall f \in M$.

En particular, toda función $f \in M$ está acotada en F.

2.2. Conjuntos sub-Arakelian y construcción de conjuntos de Arakelian

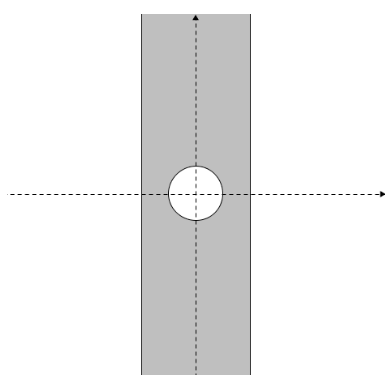
Siguiendo las ideas de Bernal y Bonilla en [7], en 2013 Calderón-Moreno y Prado-Bassas [1] introducen el concepto de conjunto sub-Arakelian.

Definición 2.2.1. *Decimos que un subconjunto $A \subset \mathbb{C}$ es sub-Arakelian si existe un conjunto $F \subset \mathbb{C}$, $F \neq \mathbb{C}$, Arakelian tal que $A \subset F$.*

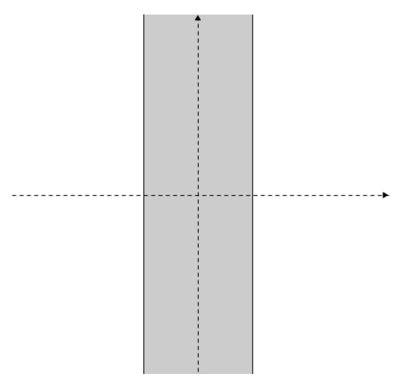
Obsérvese que cualquier conjunto Arakelian, salvo $\mathbb{C}$, es trivialmente sub-Arakelian, pero el recíproco no es cierto. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos 2.2.2.

1. El subconjunto $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\Re z| \leq 2, |z| \geq 1\}$ es sub-Arakelian si consideramos el conjunto $F_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\Re z| \leq 2\}$, ya que este último es un conjunto no vacío, cerrado y cumple que $\mathbb{C}_\infty \setminus F_1$ es conexo y localmente conexo en el infinito, es decir, es Arakelian y contiene a A_1. Pero A_1 no es Arakelian pues su complementario respecto al plano extendido no es conexo.

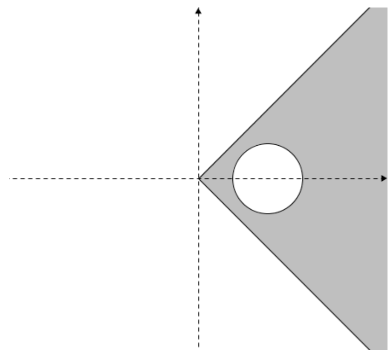


Conjunto A_1

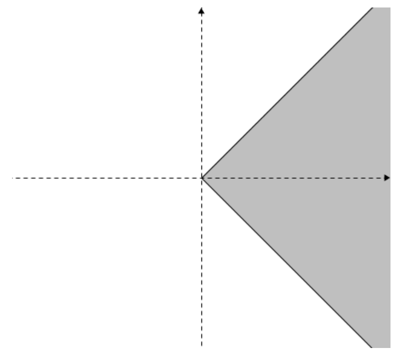


Conjunto F_1

2. El subconjunto $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : |\Im z| \leq \Re z, |z-2| \geq 1\}$ también es sub-Arakelian. Es fácil comprobar que el conjunto $F_2 = \{z \in \mathbb{C} : |\Im z| \leq \Re z\}$ es Arakelian, pero, igual que antes, A_2 no es Arakelian pues $\mathbb{C}_\infty \setminus A_2$ no es conexo.

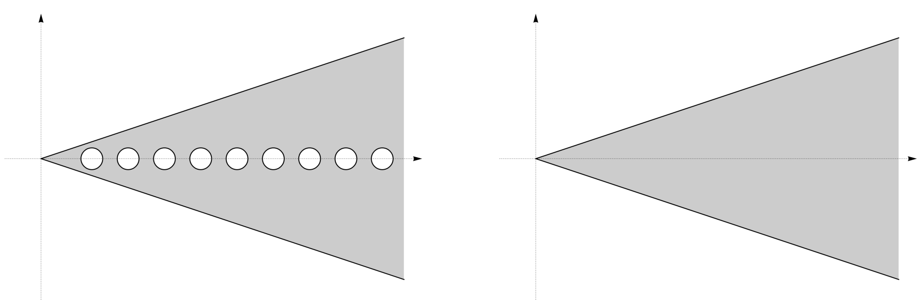


Conjunto A_2

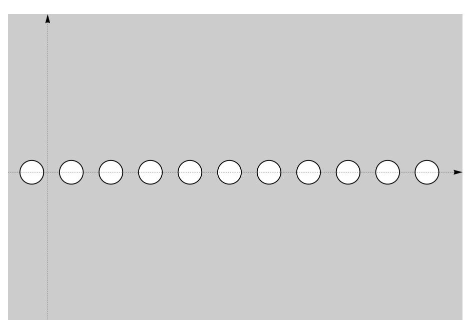


Conjunto F_2

Estos ejemplos nos muestran que un conjunto A es sub-Arakelian si se convierte, de algún modo, en Arakelian al “rellenar sus agujeros”. Más aún, si tomamos un conjunto Arakelian (distinto de $\mathbb{C}$) y “hacemos agujeros” dentro de él, el conjunto resultante es sub-Arakelian.



Por supuesto, también existen conjuntos que no son sub-Arakelian, como por ejemplo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ ó $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B(n, 1/2)$, ya que ningún conjunto, salvo $\mathbb{C}$, “rellenará” sus agujeros.



El siguiente lema nos permite añadir una sucesión de conjuntos compactos tendiendo a infinito a un conjunto Arakelian sin necesidad de perder la condición de Arakelian. En lo que sigue, dado un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ denotaremos por A° (resp. ∂A) el interior (resp. la frontera) de A.

Lema 2.2.3. *Dado un conjunto de Arakelian $F \subset \mathbb{C}$, $F \neq \mathbb{C}$, y un punto $z_0 \in \mathbb{C} \setminus F$, existen dos sucesiones dobles $\{a_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N},n\leq k} \subset \mathbb{C}$ y $\{r_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N},n\leq k} \subset (0,+\infty)$ y una sucesión creciente $\{R_k\}_{k\geq 0}$ de números positivos tendiendo a infinito tales que:*

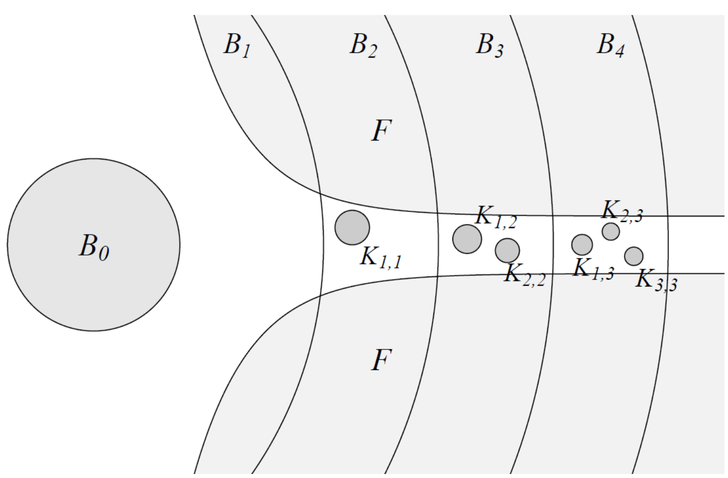
1. *$B_0 \cap F = \emptyset$, donde $B_0 := \overline{B}(z_0, R_0)$.*

2. *Para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $n \leq k$, si definimos los conjuntos $K_{n,k} := \overline{B}(a_{n,k}, r_{n,k})$ y $B_k := \overline{B}(0, R_k)$, entonces los conjuntos $K_{n,k}$ son disjuntos dos a dos y están contenidos en $B_{k+1} \setminus (B_k \cup F)$.*

3. *El conjunto $C_0 := F \cup B_0 \cup \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ j\leq k}} K_{j,k}$ es Arakelian.*

4. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $C_n := (F \setminus B^\circ_{n-1}) \cup B_0 \cup \bigcup_{\substack{k\geq n\\ j\leq k}} K_{j,k}$ es Arakelian.*

La siguiente figura representa la construcción realizada en este último lema.



2.3. Condiciones de acotación y universalidad

Definición 2.3.1. *Sea X un espacio vectorial topológico y $A \subset X$.*

- *Decimos que el subconjunto A es espaciable si existe un subespacio lineal cerrado e infinito-dimensional $M \subset X$ tal que $M \setminus \{0\} \subset A$.*
- *Se dice que A es denso-lineable (resp. maximal denso-lineable) si existe un subespacio lineal $M \subset X$ denso tal que $M \setminus \{0\} \subset A$ (resp. y M tiene la máxima dimensión algebraica, es decir, $dim(M) = dim(X)$).*

Se puede observar que no existe relación entre los conceptos de espaciabilidad y lineabilidad densa; pero sí, entre la lineabilidad densa y la lineabilidad densa maximal: todo conjunto maximal denso-lineable es obviamente denso-lineable, pero el recíproco no es cierto. Además, como $H(\mathbb{C})$ es un espacio vectorial infinito–dimensional, métrico, completo y separable, entonces su dimensión es la del continuo (esto es consecuencia del Teorema de Baire) y para cualquier subespacio V del mismo, se cumplirá que $dim(V) \leq dim\Big(H(\mathbb{C})\Big)$.

Recordemos que el conjunto de automorfismos de $\mathbb{C}$ viene dado por el conjunto de similaridades, es decir,

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{a + bz : a, b \in \mathbb{C}, b \neq 0\}.$$

En general decimos que una función entera $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es universal respecto de similaridades si $\{f \circ \varphi : \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})\}$ es denso en $H(\mathbb{C})$.

Dada una sucesión $\{\varphi_n\}_n \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, decimos que f es unicersal respecto de $\{\varphi_n\}_n$ si $\{f \circ \varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $H(\mathbb{C})$. En particular, toda función entera Birkhoff-universal es universal respecto de similaridades, de hecho es universal respecto de $\{\varphi_n = \varphi \circ \overset{(n)}{\cdots} \circ \varphi\}_n$ donde $\varphi(z) = z + 1$.

En [1] se relaciona la existencia de funciones universales y acotadas en un conjunto A, con la propia condición de Arakelian, estableciendo además una conexión entre la estructura algebraica y la estructura topológica del conjunto de tales funciones.

Teorema 2.3.2. *Sea $A \subset \mathbb{C}$. Entonces son equivalentes:*

1. *A es sub-Arakelian.*
2. *Existe una función entera universal (respecto de similaridades) y acotada en A.*
3. *El conjunto de funciones enteras universales (respecto de similaridades) y acotadas en A es denso-lineable.*
4. *El conjunto de funciones enteras universales (respecto de similaridades) y acotadas en A es espaciable.*
5. *El conjunto de funciones enteras universales (respecto de similaridades) y acotadas en A es maximal denso-lineable.*

2.4. Condiciones de acotación y universalidad para similaridades prefijadas

Recordemos el concepto de sucesión fugitiva, de acuerdo con los resultados de Bernal y Montes [10] de 1995.

Definición 2.4.1. *Sea G un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y denotamos $H(G,G) := \{\varphi : G \to G : \varphi$ es holomorfa en $G\}$. Se dice que la sucesión $\{\varphi_n\}_n \subset H(G,G)$ es fugitiva si para todo $K \subset G$ compacto, existe $n_0 = n_0(K) \in \mathbb{N}$ tal que $K \cap \varphi_{n_0}(K) = \emptyset$.*

La condición de "ser fugitiva" está directamente relacionada con la existencia de funciones enteras universales.

Teorema 2.4.2 (Bernal-Montes [10], 1995). *Dada una sucesión de similaridades $\{\varphi_n(z) = a_n + b_n z\}_n$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existen funciones enteras universales respecto de $\{\varphi_n\}_n$.*
2. *La sucesión $\{\varphi_n\}_n$ es fugitiva.*
3. *El conjunto $\min\{|a_n|, \left|\frac{a_n}{b_n}\right|\}$ no es acotado.*

Observemos que el resultado anterior también nos caracteriza las sucesiones de similaridades fugitivas. En particular, se tiene que una sucesión de similaridades $\{z \mapsto a_n + b_n z\}$, esta es fugitiva si y solo si existe $\{n_k\}_k$ tal que $a_{n_k} \to \infty$ y $\frac{a_{n_k}}{b_{n_k}} \to \infty$ si $k \to \infty$. Así, en 2013, Bernal [6] probó el siguiente resultado.

Teorema 2.4.3. *Dado un subconjunto no acotado $A \subset \mathbb{C}$ y una sucesión prefijada de similaridades $\{\varphi_n(z) = a_n + b_n z\}$, tal que $a_n \to \infty$ y $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$ si $n \to \infty$, se tiene que las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existe una función entera acotada en A y universal respecto de $\{\varphi_n\}_n$.*
2. *El conjunto de funciones enteras acotadas en A y universales respecto de $\{\varphi_n\}_n$ es denso-lineable.*
3. *Existe un subconjunto $F \subset \mathbb{C}$ Arakelian con $A \subset F$ y tal que, para cada $R > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ con $F \cap B(a_n, R|b_n|) = \emptyset$.*

Siguiendo la definición de fugitividad de una sucesión, en 2013, Calderón-Moreno y Prado-Bassas introducen el concepto de fugitividad fuera de un subconjunto dado.

Definición 2.4.4. *Sea G un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $A \subset G$. Se dice que la sucesión $\{\varphi_n\}_n \subset H(G,G)$ es fugitiva fuera de A si para todo $K \subset G$ compacto, existe $n_0 = n_0(K) \in \mathbb{N}$ tal que $(K \cup A) \cap \varphi_{n_0}(K) = \emptyset$.*

Es claro que toda sucesión $\{\varphi_n\}_n$ fugitiva fuera de A es fugitiva, pues el hecho de que $(K \cup A) \cap \varphi_n(K) = \emptyset$ implica $K \cap \varphi_n(K) = \emptyset$.

Recíprocamente, si $\{\varphi_n\}_n$ es fugitiva, entonces podemos asegurar que es fugitiva fuera de A, si A es relativamente compacto en G (es decir, $\overline{A}$ es compacto y $\overline{A} \subset G$). En efecto, si $\{\varphi_n\}_n$ es fugitiva, para todo K' compacto, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $K' \cap \varphi_n(K') = \emptyset$. Sean K un conjunto compacto y $A \subset G$ relativamente compacto. Definimos K' como $K' := K \cup \overline{A}$. Entonces $K' \subset G$ es compacto. Tomando el n anterior para tal compacto K', resulta que $(K \cup A) \cap \varphi_n(K) = \emptyset$, ya que $\varphi_n(K) \subset \varphi_n(K')$, y por lo tanto $\{\varphi_n\}_n$ es fugitiva fuera de A.

En el caso particular en que $G = \mathbb{C}$, se tiene que A es relativamente compacto si y solo si A es acotado.

Veamos un ejemplo de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ no acotado en el que una sucesión $\{\varphi_n\}_n$ de funciones enteras es fugitiva y no es fugitiva fuera de A, y otro ejemplo donde sí hay fugitividad fuera de A.

Ejemplos 2.4.5.

1. Sea $\{\varphi_n(z) = nz + n^2\}_n \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ y $A = \{z \in \mathbb{C} : \Re z \geq 0, |\Im z| \leq \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$, se tiene que $\{\varphi_n\}_n$ es fugitiva, pero no es fugitiva fuera de A.

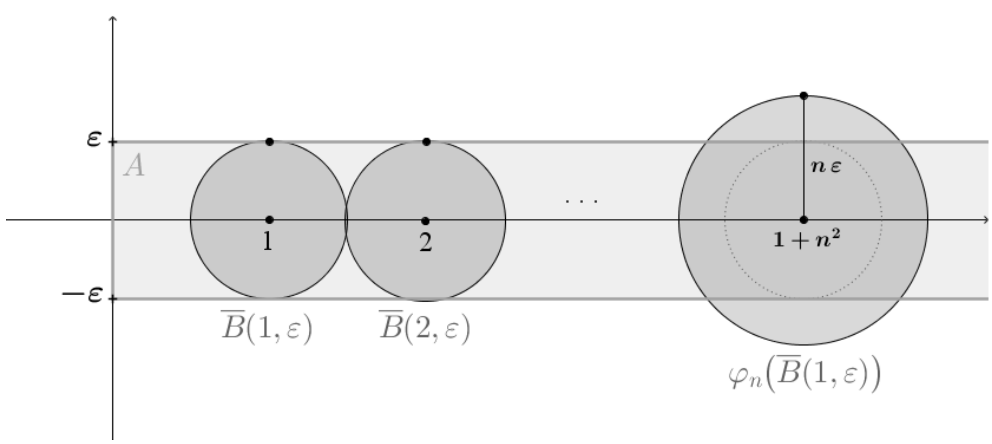
   - Hay que probar en primer lugar que $\{\varphi_n\}_n$ es fugitiva, es decir, para todo $K \subset \mathbb{C}$ compacto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_{n_0}(K) \cap K = \emptyset$.

     Como K está acotado, existe $r = r(K) > 0$ tal que $K \subset \overline{B}(0, r)$, esto es, $|z| \leq r$, para todo $z \in K$. Así, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > r + 1$ de manera que

     $$\begin{aligned} |\varphi_{n_0}(z)| &= |n_0 z + n_0^2| = |n_0|\,|z + n_0| \geq |n_0|\Big(|n_0| - |z|\Big) \\ &> (r+1)(r+1-r) = r+1 > r. \end{aligned}$$

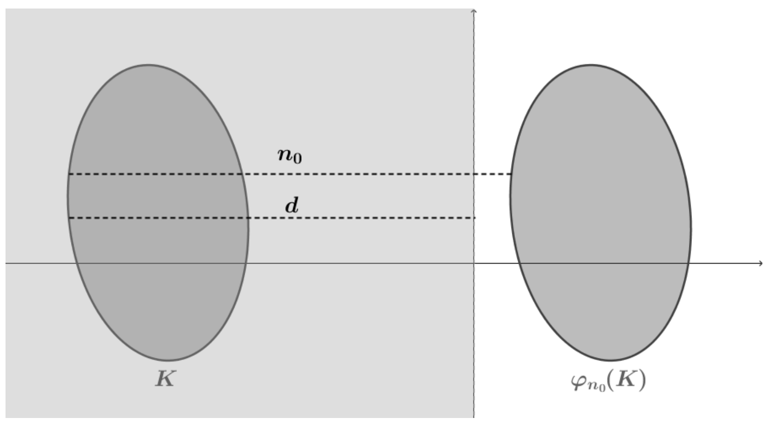
     Hemos probado que $K \cap \varphi_{n_0}(K) \subset \overline{B}(0, r) \cap \varphi_{n_0}\Big(\overline{B}(0, r)\Big) = \emptyset$, por tanto $\{\varphi_n\}_n$ es fugitiva.

   - Probemos ahora que $\{\varphi_n\}_n$ no es fugitiva fuera de A, esto es, $\exists K$ compacto, tal que $\varphi_n(K) \cap (K \cup A) \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En efecto, basta tomar $K = \overline{B}(1, \varepsilon)$. Es claro que $K \subset A$. Además, si $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(K) = \overline{B}(1 + n^2, n\,\varepsilon)$, luego $\varphi_n(K) \cap A \neq \emptyset$ pues por ejemplo $1 + n^2 \in \varphi_n(K) \cap A$, como puede verse en el siguiente dibujo.



2. Sea $\{\varphi_n(z) = z + n\}_n \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ y $A = \{z \in \mathbb{C} : \Re z < 0\}$, se tiene que $\{\varphi_n\}_n$ es fugitiva fuera de A.

   En efecto, sea $d = \max\{|z| : z \in K\}$. Como $\Re(z + n) \to +\infty$ $(n \to \infty)$ uniformemente en compactos y cada compacto $K \subset \mathbb{C}$ es acotado, se deduce que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\Re(z + n_0) > d \geq 0$, luego $K \cap \varphi_{n_0}(K) = \emptyset = A \cap \varphi_{n_0}(K)$. Así que $\{\varphi_n\}_n$ es fugitiva fuera de A.



El siguiente resultado extiende el Teorema 2.4.3.

Teorema 2.4.6. *Sean $A \subset \mathbb{C}$ y $\{\varphi_n(z) = a_n + b_n z\}_n \subset Aut(\mathbb{C})$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existe un subconjunto propio $F \subset \mathbb{C}$ Arakelian tal que $A \subset F$ y $\{\varphi_n\}_n$ es fugitiva fuera de F.*

2. *Existe una función entera universal respecto de $\{\varphi_n\}_n$ y acotada en A.*

3. *El conjunto de funciones enteras universales respecto de $\{\varphi_n\}_n$ y acotadas en A es denso-lineable.*

4. *El conjunto de funciones enteras universales respecto de $\{\varphi_n\}_n$ y acotadas en A es espaciable.*

5. *El conjunto de funciones enteras universales respecto de $\{\varphi_n\}_n$ y acotadas en A es maximal denso-lineable.*

Sea ahora L_θ el rayo desde el origen con pendiente θ, donde $\theta \in (-\pi, \pi]$, es decir,

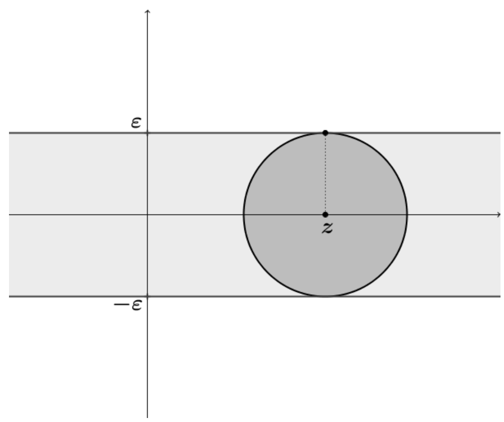
$$L_\theta = \{re^{i\theta} : r \geq 0\}.$$

Definición 2.4.7. *Dados un subconjunto $A \subset \mathbb{C}$ y $\theta \in (-\pi, \pi]$, se define el radio inscrito angular de A en la dirección θ como*

$$\rho_\theta(A) = \sup\{r > 0 : \exists z \in L_\theta \text{ tal que } \overline{B}(z, r) \subset A,\, z \in L_\theta\}.$$

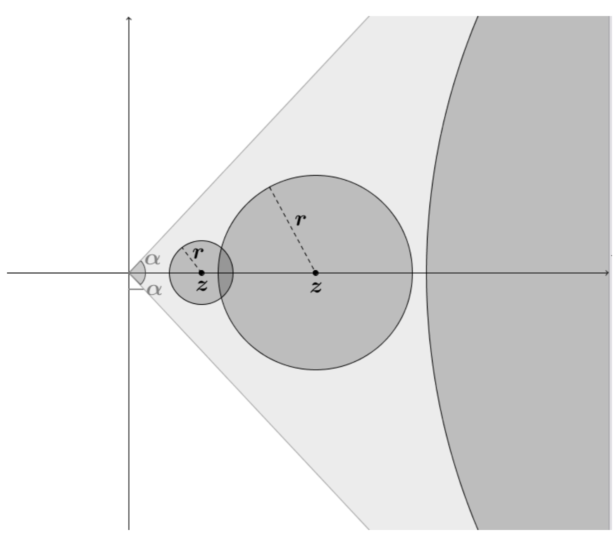
Ejemplos 2.4.8.

1. Sea $A_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |\Im z| \leq \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$, entonces $\rho_\theta(A_1) = \varepsilon$ para cada $\theta \in (-\pi, \pi]$.



2. Sea $A_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \alpha\}$, donde $\alpha \in (0, \pi]$, entonces

$$\rho_\theta(A_2) = \begin{cases} \infty & \text{si } |\theta| < \alpha \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



A continuación, estudiamos cuándo una sola aplicación $\varphi(z) = a + bz \in Aut(\mathbb{C})$ es fugitiva, es decir, cuándo la sucesión de iteradas $\{\varphi_n = \varphi^n = \varphi \circ \underset{(n)}{\cdots} \circ \varphi\}_n$ es fugitiva. En 1995, Bernal y Montes [10] probaron que las únicas similaridades fugitivas son las traslaciones.

Teorema 2.4.9. *$\varphi(z) = a + bz \in Aut(\mathbb{C})$ es fugitiva si y sólo si $b = 1$ y $a \neq 0$.*

En estas condiciones, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.4.10 (Calderón-Prado [1], 2013). *Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Son equivalentes:*

1. *Existe un subconjunto $F \subset \mathbb{C}$ de Arakelian tal que $A \subset F$ y $\rho_\theta(\mathbb{C} \setminus F) = +\infty$, donde $\theta = \arg a$.*

2. *Existe un subconjunto $F \subset \mathbb{C}$ de Arakelian de manera que $A \subset F$ y la traslación $\varphi(z) = z + a$ es fugitiva fuera de F.*

3. *Existe una función f entera acotada en A universal respecto de $\varphi(z) = z + a$.*

4. *El conjunto de funciones f enteras que están acotadas en A universales respecto de $\varphi(z) = z + a$ es maximal denso-lineable y espaciable.*

2.5. Conclusiones y observaciones finales

1. De la prueba del Teorema 2.3.2, que se puede encontrar en el artículo de Calderón-Moreno y Prado-Bassas [1], se tiene la existencia de funciones universales que están acotadas en un conjunto sub-Arakelian A prefijado.

Por otro lado, si el conjunto A está acotado, siempre podrá estar contenido en un conjunto $F \subsetneq \mathbb{C}$ de Arakelian, con lo que A será un conjunto sub-Arakelian y toda función entera estará acotada en él. Más aún, si A no fuese sub-Arakelian, existirían muchas funciones universales respecto de similaridades no acotadas en A.

Por lo tanto, del Teorema 2.3.2 se deduce el siguiente resultado.

Teorema 2.5.1 (Calderón-Prado [1], 2013). *El conjunto de funciones enteras universales respecto de similaridades es maximal denso-lineable y espaciable.*

2. Por el Teorema 2.3.2, se tiene que el conjunto de funciones enteras universales respecto de similaridades y acotadas en un conjunto sub-Arakelian A, al que denotaremos por $\mathcal{H}(A)$, es grande en sentido algebraico.

Por otro lado, el tamaño de $\mathcal{H}(A)$ en sentido topológico depende de si A está o no acotado. Si A está acotado, entonces $\mathcal{H}(A)$ es grande en sentido topológico, pues es residual en el espacio de Baire $H(\mathbb{C})$, ya que coincide con todo conjunto de funciones enteras universales respecto de similaridades (ver [10]). Sin embargo, si A no está acotado, $\mathcal{H}(A)$ es pequeño en sentido topológico, pues es de primera categoría en $H(\mathbb{C})$. En efecto, si definimos

$$\mathcal{B}(A) = \{f \in H(\mathbb{C}) : f \text{ acotada en } A\}$$

podemos escribir

$$\mathcal{B}(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n, \quad \text{con} \quad \mathcal{B}_n = \{f \in H(\mathbb{C}) : |f(z)| \leq n, \ \text{ para todo } z \in A\}$$

donde cada $\mathcal{B}_n$ es cerrado y de interior vacío. Así, $\mathcal{B}(A)$ es de primera categoría, y como $\mathcal{H}(A) \subset \mathcal{B}(A)$, entonces $\mathcal{H}(A)$ es de primera categoría.

Además, estos conjuntos $\mathcal{B}_n$ cumplen que $\mathcal{B}_n \cap \mathcal{P}_c = \emptyset$, donde $\mathcal{P}_c$ es el conjunto de polinomios no constantes, el cual es denso en $H(\mathbb{C})$.

3. En 2006, Niess [17] probó el siguiente resultado.

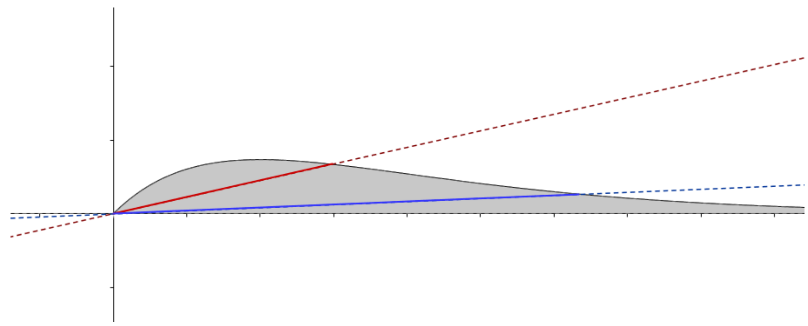
Teorema 2.5.2. *Existe una función f entera con las siguientes propiedades:*

1. *El conjunto de trasladadas $\Big\{f(\cdot + a_n) : \{a_n\}_n \subset \mathbb{C},\, n \in \mathbb{N}\Big\}$ es denso en $H(\mathbb{C})$.*

2. *f es acotada en toda recta L.*

si y sólo si existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}_k$ tal que para todo $R > 0$ y toda recta L, existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L \cap B(a_{n_k}, R) = \emptyset$, para todo $k \geq k_0$.

Si consideramos el conjunto $B = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 0 < y < xe^{-x}\}$, se tiene que $A = \mathbb{C} \setminus B$ es Arakelian y que, para toda recta L, el conjunto $L \setminus A$ es acotado.



En estas condiciones y aplicando el Teorema 2.3.2 a este conjunto, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.5.3 (Calderón-Prado [1], 2013). *El conjunto de funciones enteras universales bajo similaridades que están acotadas en toda recta, es maximal denso-lineable y espaciable.*

Capítulo 3

Funciones Universales Armónicas

En la primera sección de este capítulo, recordaremos la definición de función armónica, fijaremos la notación que vamos a usar y daremos un resultado que relaciona el espacio L^2 con las funciones armónicas. Finalizaremos con el estudio de las funciones armónicas universales junto con los conjuntos de Carleman y daremos una prueba de la existencia de un conjunto de funciones armónicas universales respecto de traslaciones.

3.1. Funciones Armónicas

Definición 3.1.1. *Una función $u : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, se dice que es armónica en el abierto A si u es de clase $\mathcal{C}^2(A)$ y satisface la ecuación de Laplace:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2} = 0$$

en A. Esto se suele escribir como $\nabla^2 u = 0$ o también como $\Delta u = 0$.

Denotaremos por $h(\mathbb{R}^N)$ el espacio de funciones armónicas de $\mathbb{R}^N$ y por $P_m(\mathbb{R}^N)$ el espacio vectorial de todos los polinomios homogéneos de $\mathbb{R}^N$ de grado m. Asimismo, denotamos por $h_m(\mathbb{R}^N)$ el subespacio de $P_m(\mathbb{R}^N)$ de todos los polinomios armónicos homogéneos de $\mathbb{R}^N$ de grado m.

Llamemos S a la frontera de la bola unidad euclidea en $\mathbb{R}^N$. Por $L^2(S)$ denotamos el espacio vectorial de funciones medibles $S \to \mathbb{R}$ tales que

$$\|f\|_2 := \Big(\int_S |f(x)|^2 d\sigma(x) \Big)^{1/2} < \infty,$$

donde $d\sigma$ es la medida de Hausdorff $(n-1)$-dimensional normalizada, sobre el álgebra de los subconjuntos medibles-Lebesgue de S. Es bien conocido que $\Big(L^2(S), \|\cdot\|_2 \Big)$ es un espacio de Banach. Definimos la restricción de $h_m(\mathbb{R}^N)$ a S de la siguiente manera.

Definición 3.1.2. *La restricción de $h_m(\mathbb{R}^N)$ a S se dice que es el conjunto de los polinomios homogéneos armónicos esféricos de grado m y viene dado por*

$$h_m(S) = \{ p|_S : p \in h_m(\mathbb{R}^N) \}.$$

Recordemos ahora algunas nociones de espacios de Hilbert. Si H es un espacio de Hilbert complejo que satisface las siguientes condiciones:

(a) H_m es un subespacio cerrado de H para cada m

(b) H_k es ortogonal a H_m si $k \neq m$

(c) Para cada $x \in H$, existe $x_m \in H_m$ tal que la suma

$$x = x_0 + x_1 + \cdots ,$$

converge en la norma de H,

entonces se dice que H es suma directa de los espacios H_m y se se escribe como

$$H = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H_m.$$

Es más, si se cumplen las condiciones anteriores, entonces la suma del apartado (c) es única. Más aún, si se cumplen (a) y (b), entonces se tiene (c) si y solo si el subespacio lineal complejo $span(\bigcup_{m=0}^{\infty} H_m)$ es denso en H.

El siguiente resultado [5] nos dice que el espacio $L^2(S)$ se puede escribir como suma directa de polinomios homogéneos armónicos esféricos.

Teorema 3.1.3. $L^2(S) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} h_m(S)$.

3.2. Conjuntos de Carleman

En esta sección definiremos el concepto de conjunto de Carleman y daremos una caracterización de los mismos.

Definición 3.2.1. *Se dice que $F \subset \mathbb{R}^N$, $F \neq \mathbb{R}^N$, es un conjunto armónico de Carleman en $\mathbb{R}^N$ si F es cerrado y para cada función u continua en F y armónica en F° y para cada función $\epsilon : F \to (0,1]$ continua, existe una función v armónica en R^N tal que*

$$|v(\vec{x}) - u(\vec{x})| < \epsilon(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in F.$$

A continuación definiremos el concepto de conjunto fino en un punto, pero necesitaremos algunas nociones previas.

Definición 3.2.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto. Una función u se dice que es superarmónica (resp. subarmónica) en Ω si es continua en Ω y cumple que para toda bola $B \subset \Omega$ y para toda función v armónica en B, se tiene que si $u \geq v$ (resp. $u \leq v$) en ∂B, entonces $u \geq v$ (resp. $u \leq v$) en B.*

Definición 3.2.3. *Un punto $\xi \in \mathbb{R}^N$ se dice que es un punto límite fino de un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ si cumple las siguientes propiedades:*

1. *ξ es punto de acumulación de A.*

2. *Para cada función superarmónica u definida en un entorno abierto de ξ, se tiene que existe una sucesión $\{x_n\}_n \subset A$ con $x_n \to \xi$ tal que $u(x_n) \to u(\xi)$ $(n \to \infty)$.*

Dado un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^N$. Se define el conjunto fino derivado A^f de A como el conjunto de puntos límite finos de A.

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ se dice que es fino en el punto finito ξ si dicho punto no es un punto límite fino de A, esto es, si $\xi \notin A^f$.

Veamos ahora una condición necesaria y suficiente para que un conjunto sea de Carleman. Dado un cerrado $F \subset \mathbb{R}^N$, definimos $\widehat{F}$ como la unión de F con las componentes acotadas de $\mathbb{R}^N \setminus F$.

Teorema 3.2.4 (**Gardiner y Goldstein (1995)[15]**). *Sea F un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^N$. Entonces F es un conjunto de Carleman si y sólo si se dan las dos siguientes condiciones:*

1. *$\mathbb{R}^N \setminus \widehat{F}$ y $\mathbb{R}^N \setminus F^\circ$ son finos en los mismos puntos que F.*

2. *Para cada subconjunto compacto K, existe un conjunto compacto L que contiene:*

   - *A todas las componentes acotadas de $\mathbb{R}^N \setminus (K \cup F)$ cuya clausura corta a K.*

   - *A todas las componentes de F° que intersecan a K.*

3.3. Funciones armónicas universales

Como ya se ha comentado, Birkhoff [11] probó la existencia de una función entera universal bajo traslaciones. El análogo al Teorema de Birkhoff para funciones armónicas de $\mathbb{R}^N$, es decir, cuando se reemplaza el espacio de funciones enteras $H(\mathbb{C})$ por el espacio $h(\mathbb{R}^N)$ de funciones armónicas en $\mathbb{R}^N$, es debido a Armitage y Gauthier [4]. En estas condiciones, definiremos el concepto de función armónica universal como sigue.

Definición 3.3.1. *Una función armónica v en $\mathbb{R}^N$ se dice que es universal si a cada función armónica u en $\mathbb{R}$ le corresponde una sucesión $\{\overrightarrow{a_n}\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^N$ (que depende de u) tal que satisface*

$$\lim_{n\to\infty} v(\vec{x} + \overrightarrow{a_n}) = u(\vec{x})$$

uniformemente en compactos de $\mathbb{R}^N$.

Teorema 3.3.2. *Existen funciones armónicas universales en $\mathbb{R}^N$.*

En 2002, Bonilla [2] demostró que existen muchas más funciones armónicas universales, en concreto probó su espaciabilidad.

Teorema 3.3.3. *Existe un espacio vectorial M cerrado, infinito–dimensional, de funciones armónicas en $\mathbb{R}^N$ tal que cada función $v \in M \setminus \{0\}$ es universal respecto de traslaciones.*

Demostración. Sea $\{\varepsilon_m\}_{m\geq 0}$ una sucesión de números positivos tal que $\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m < 1$. Sea $\{\overrightarrow{a_n}\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^N$ una sucesión de puntos distintos que diverge suficientemente rápido a infinito de manera que podemos construir discos cerrados $\overline{B}_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ disjuntos dos a dos, centrados en los puntos $\overrightarrow{a_n}$, que forman una familia localmente finita y cuyos radios tienden a infinito. Podemos suponer que $\overrightarrow{a_0} := \overrightarrow{0}$ y $\overline{B}_0 := \overline{B}(\overrightarrow{0}, 1)$, la bola unidad cerrada.

Recordamos que $h_k(\mathbb{R}^N)$ es el espacio de polinomios armónicos homogéneos de grado k. Tomamos $\{q_{k,l} : l = 1, \ldots, l_k\}$ una base de $h_k(\mathbb{R}^N)$ y $\{q_m\}_{m=1}^{\infty}$ una enumeración de $\{q_{k,l}\}$ según el grado. Sea $\{p_n\}_{n\geq 1}$ el conjunto de combinaciones lineales finitas de q_m con coeficientes racionales, que es denso en $h(\mathbb{R}^N)$.

Tomando $i(m,n) := \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + m$, dividimos $\{\overrightarrow{a_n}\}_n$ en infinitas subsucesiones $\{\overrightarrow{a_{i(m,n)}}\}$ disjuntas.

Definimos F como la unión de todas las bolas $\overline{B}_n$ $(n \geq 0)$. Entonces F es cerrado y por el Teorema 3.2.4 es un conjunto de Carleman.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos las funciones $u_m : F \to \mathbb{R}$ como:

$$u_m(\vec{x}) := \begin{cases} q_m(\vec{x}) & \text{si } \vec{x} \in \overline{B}_0 \\ 0 & \text{si } \vec{x} \in \overline{B}_{i(k,n)},\ k \neq m \\ p_n(\vec{x} - \overrightarrow{a_{i(m,n)}}) & \text{si } \vec{x} \in \overline{B}_{i(m,n)}. \end{cases}$$

Es calro que u_m es continua en F y armónica en F°. Entonces, por definición de conjunto de Carleman, para cada función $\epsilon_m(\vec{x}) : F \to (0,1]$ continua, existe una función v_m armónica en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$|u_m(\vec{x}) - v_m(\vec{x})| < \epsilon_m(\vec{x}), \text{ para } \vec{x} \in F. \tag{1}$$

En particular, si consideramos $\epsilon_m(\vec{x}) : F \to (0,1]$ como:

$$\epsilon_m(\vec{x}) := \begin{cases} \varepsilon_m & \text{si } \vec{x} \in \overline{B}_0 \\ \dfrac{\varepsilon_m}{2^n} & \text{si } \vec{x} \in \overline{B}_{i(k,n)},\ k, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Entonces para un $m \in \mathbb{N}$ fijo, tenemos

$$\begin{aligned}
&|v_m(\vec{x}) - q_m(\vec{x})| < \varepsilon_m && \text{si } \vec{x} \in \overline{B}_0 && (2)\\
&|v_m(\vec{x} + \overrightarrow{a_{i(m,n)}})| < \frac{\varepsilon_m}{2^n} && \text{si } \vec{x} + \overrightarrow{a_{i(k,n)}} \in \overline{B}_{i(k,n)},\ k \neq m && (3)\\
&|v_m(\vec{x} + \overrightarrow{a_{i(m,n)}}) - p_n(\vec{x})| < \frac{\varepsilon_m}{2^n} && \text{si } \vec{x} + \overrightarrow{a_{i(m,n)}} \in \overline{B}_{i(m,n)}. && (4)
\end{aligned}$$

Sea E el espacio vectorial de todas las series $\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m v_m$ que convergen uniformemente en compactos de $\mathbb{R}^N$. Sea M la clausura de E en $h(\mathbb{R}^N)$. Entonces:

- M es cerrado, por ser la clausura de E.
- M es ∞-dimensional.

  Efectivamente, por el Teorema 3.1.3, se tiene que $\{q_m\big|_S\}$ es base de Schauder en $L^2(S)$, con S la frontera de la bola unidad. Sea $\{q_m^*\big|_S\}$ la sucesión de los coeficientes funcionales, de manera que

  $$q_m^*\Big|_S : L^2(S) \to \mathbb{R}\ ,\ q_m^*\Big|_S \left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j q_j\right) = \alpha_m.$$

  Es fácil comprobar que $\left\| q_m^*\big|_S \right\|_2 = 1$.

  Por otra parte, por (2),

  $$\begin{aligned}
  \sum_{m=0}^{\infty} \left\| q_m^*\Big|_S \right\|_2 \left\| v_m - q_m\Big|_S \right\|_2 &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\| v_m - q_m\Big|_S \right\|_2\\
  &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \|v_m - q_m\|_{\infty}\\
  &< \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m\\
  &< 1
  \end{aligned}$$

  y usando el Teorema 1.3.4, se llega a que $\{v_m\}$ es base de Schauder en $L^2(S)$. En particular, se tiene que M es ∞-dimensional.

- Para terminar sólo nos resta probar que cada función $v \in M \setminus \{0\}$ es armónica universal. Para ello es suficiente demostrar que

  $$\lim_{n\to\infty} \left| v(\vec{x} + \overrightarrow{a_{i(m,n)}}) - p_n(\vec{x}) \right| = 0$$

uniformemente en compactos.

Dado $v \in M$, existen sucesiones de series en E que convergen a v uniformemente en subconjuntos compactos y, por continuidad de la norma $\|\cdot\|_2$ respecto de la norma $\|\cdot\|_\infty$, tenemos que esa sucesión de series converge a v en L^2, por tanto v es representable como serie convergente en $L^2(S)$ en la base de Schauder v_m. Sea $\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m v_m$ la representación de v en $L^2(S)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\alpha_k = 1$, para algún k. Sea $\left\{\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^l v_m\right\}_{l\geq 1}$ una sucesión de series de E que convergen a v en compactos. Podemos considerar $\alpha_k^l = 1$, $\forall l$. Más aún, dado un subconjunto compacto K, existe n_0 tal que $K + \overrightarrow{a_{i(m,n)}} \subset \overline{B}_{i(k,n)}$, $\forall n > n_0$.

Entonces, usando en primer lugar la desigualdad triangular y a continuación las desigualdades (4) y (5), se tiene lo siguiente: para $\varepsilon > 0$ y n suficientemente grande, obtenemos para cada $\vec{x} \in K$ que

$$
\begin{aligned}
&\left|v(\vec{x} + \overrightarrow{a_{i(m,n)}}) - p_n(\vec{x})\right| \\
&\quad \leq \left|v(\vec{x} + \overrightarrow{a_{i(m,n)}}) - \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^l v_m(\vec{x} + \overrightarrow{a_{i(m,n)}})\right| + \\
&\qquad + \left|\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^l v_m(\vec{x} + \overrightarrow{a_{i(m,n)}}) - p_n(\vec{x})\right| \\
&\quad \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left|v_k(\vec{x} + \overrightarrow{a_{i(m,n)}}) - p_n(\vec{x})\right| + \sum_{\substack{m=0\\ m\neq k}}^{\infty} \left|\alpha_m^l v_m(\vec{x} + \overrightarrow{a_{i(m,n)}})\right| \\
&\quad \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon_k}{2^n} + \sum_{\substack{m=0\\ m\neq k}}^{\infty} \alpha_m^l \frac{\varepsilon_m}{2^n} \;=\; \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^l \frac{\varepsilon_m}{2^n} \\
&\quad \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\left\|\{\alpha_m^l\}\right\|_2 \|\{\varepsilon_m\}\|_2}{2^n} \;=\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\left[\sum_{m=0}^{\infty} (\alpha_m^l)^2\right]^{1/2} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^2\right]^{1/2}}{2^n} \\
&\quad \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\left[\sum_{m=0}^{\infty} (\alpha_m^l)^2\right]^{1/2}}{2^n} \;=\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\left\|\{\alpha_m^l\}\right\|_2}{2^n} \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|\{\alpha_m\}\|_2 + 1}{2^n} \;\leq\; \varepsilon.
\end{aligned}
$$

donde la penúltima desigualdad se tiene debido a que $\{\alpha_m^l\}_m \xrightarrow{l\to\infty} \{\alpha_m\}_m$ en L^2. Así, se tiene la universalidad de la función armónica $v \in M \setminus \{0\}$.

$\square$

Capítulo 4

Funciones armónicas universales y conjuntos sub-Carleman

En este capítulo extenderemos los resultados de universalidad, estudiados en el Capítulo 2, desde el ámbito de las funciones analíticas de variable compleja al de las funciones armónicas. Los resultados de esta sección son, en su mayoría originales y se han recogido en [3].

En la primera sección, veremos qué tipo de funciones son las que preservan la armonicidad. En la siguiente, daremos una construcción de conjuntos de Carleman, análoga a la de conjuntos de Arakelian, y presentaremos condiciones de acotación y universalidad para funciones armónicas. Continuaremos con condiciones de acotación y universalidad en la siguiente sección, pero esta vez fijando previamente las sucesiones. Finalizaremos el capítulo con algunas observaciones y las conclusiones obtenidas.

4.1. Funciones que preservan la armonicidad

En el capítulo anterior definimos las funciones armónicas universales bajo traslaciones, pero ahora queremos trabajar no sólo con traslaciones, sino también con dilataciones. Reescribiremos la definición de universalidad como sigue.

En el ámbito complejo, la composición de una función f entera con una similaridad $z \mapsto az+b$ sigue siendo entera, es decir, $f(az+b) \in H(\mathbb{C})$. En el caso armónico, para que la definición de universalidad funcione, ha de ocurrir algo parecido. Entonces, dada una función $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ y una función armónica $u \in h(\mathbb{R}^N)$, nos preguntamos si la composición $u \circ \varphi$ seguirá siendo armónica en $\mathbb{R}^N$.

Efectivamente, existe una caracterización de este tipo de aplicaciones [14] que dice que las funciones que preservan la armonicidad son las isometrías (salvo cambios de escala), es decir, isometrías compuestas con homotecias. Son funciones $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ del tipo

$$\varphi(\vec{x}) = M\vec{x} + \vec{a}, \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^N,\ M \in \mathcal{M}_{N\times N}.$$

donde la matriz M es una isometría.

En particular, las funciones del tipo $\varphi(\vec{x}) = \lambda\vec{x} + \vec{a}$, con $\vec{a} \in \mathbb{R}^N$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, preservan la armonía (sin más que tomar la matriz M como $M = \lambda\, Id$). Por lo tanto, las traslaciones también preservan la armonía (tomando $\lambda = 1$).

Definimos entonces el concepto de función universal de la siguiente forma.

Definición 4.1.1. *Una función armónica u en $\mathbb{R}^N$ se dice que es universal si a cada función armónica v en $\mathbb{R}^N$ le corresponde una sucesión de aplicaciones $\varphi_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ $(n \geq 1)$ tal que $v \circ \varphi_n \in h(\mathbb{R}^N)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y satisface*

$$\lim_{n\to\infty} v\Big(\varphi_n(\vec{x})\Big) = u(\vec{x})$$

uniformemente en compactos.

En esta memoria usaremos sucesiones $\{\varphi_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N\}_n$ que sean traslaciones y dilataciones, es decir, sucesiones del siguiente tipo

$$\{\varphi_n = M_n\vec{x} + \overrightarrow{a_n}\}_n, \text{ con } M_n \in \mathcal{M}_{nxn} \text{ y } \overrightarrow{a_n} \in \mathbb{R}^N.$$

En particular, tomaremos para cada n la matriz $M_n = \lambda_n Id$ $(\lambda_n \in \mathbb{R})$ y así tendremos $\{\varphi_n = \lambda_n\vec{x} + \overrightarrow{a_n}\}_n$.

4.2. Conjuntos sub-Carleman y condiciones de acotación y universalidad

Al igual que en variable compleja, podemos construir sucesiones de bolas cerradas cuya unión con un conjunto de Carleman sigue siendo Carleman.

Lema 4.2.1. *Sea $F \subset \mathbb{R}^N$, $F \neq \mathbb{R}^N$, un conjunto de Carleman y $\overrightarrow{x_0} \in \mathbb{R}^N \setminus F$. Existen dos dobles sucesiones $\{\overrightarrow{a_{n,k}}\}_{k\in\mathbb{N},n\leq k} \subset \mathbb{R}^N$ y $\{r_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N},n\leq k} \subset (0,+\infty)$ y una sucesión creciente $\{R_k\}_{k\geq 0}$ de números positivos tendiendo a infinito tales que*

1. *$B_0 \cap F = \emptyset$, donde $B_0 := \overline{B}(\overrightarrow{x_0}, R_0)$.*
2. *Para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $n \leq k$, si definimos $K_{n,k} := \overline{B}(\overrightarrow{a_{n,k}}, r_{n,k})$ y $B_k := \overline{B}(\overrightarrow{0}, R_k)$, entonces los conjuntos $K_{n,k}$ son disjuntos dos a dos y están contenidos en $B_{k+1} \setminus (B_k \cup F)$.*
3. *El conjunto $C_0 := F \cup B_0 \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N},\, j\leq k} K_{j,k}$ es Carleman.*
4. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $C_n := (F \setminus B_{n-1}^{\circ}) \cup B_0 \cup \bigcup_{k\geq n,\, j\leq k} K_{j,k}$ es Carleman.*

Demostración.

1. Como $\overrightarrow{x_0} \notin F$ y, por definición de Carleman, F es un conjunto cerrado propio, podemos tomar un radio $R_0 \in (0,1)$ suficientemente pequeño tal que $\overline{B}(\overrightarrow{x_0}, R_0) \cap F = \emptyset$.

2. Existe un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B(\overrightarrow{0}, n) \cap F = \emptyset$, $\forall n \geq n_0$. Sean $R_k := n_0 + k$ y $B_k := \overline{B}(\overrightarrow{0}, R_k)$; para cada $k \in \mathbb{N}$, la intersección $[(\mathbb{R}^N \setminus F) \setminus B_k] \cap B_{k+1}^{\circ}$ es no vacía y abierta. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos seleccionar un número finito de bolas cerradas y disjuntas dos a dos y, en particular, seleccionamos exactamente k bolas. Así, $K_{n,k} := \overline{B}(\overrightarrow{a_{n,k}}, r_{n,k}) \subset [(\mathbb{R}^N \setminus F) \setminus B_k] \cap B_{k+1}^{\circ} = B_{k+1} \setminus (B_k \cup F)$.

3. Si definimos $C_0 := F \cup B_0 \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N},\, j\leq k} K_{j,k}$, tenemos que es armónico Carleman por el Teorema 3.2.4, pues se trata de una unión de un conjunto armónico Carleman F y una unión numerable de bolas cerradas disjuntas dos a dos y disjuntas con F que tienden a infinito.

4. Al ser $F \setminus B_{n+1}^{\circ}$ armónico Carleman, análogamente al apartado anterior, se tiene que el conjunto $C_n := (F \setminus B_{n-1}^{\circ}) \cup B_0 \cup \bigcup_{k \geq n,\ j \leq k} K_{j,k}$ es armónico Carleman. $\square$

Introducimos la definición de conjunto sub-Carleman para así establecer en el teorema siguiente una relación entre la estructura algebraica y la geométrica del conjunto de funciones armónicas universales.

Definición 4.2.2. *Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ es armónico sub-Carleman si existe un conjunto F tal que $A \subset F$ y F es Carleman.*

Teorema 4.2.3. *Sea $A \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto sub-Carleman. Entonces:*

1. *El conjunto de funciones armónicas universales y acotadas en A es denso-lineable.*
2. *El conjunto de funciones armónicas universales y acotadas en A es espaciable.*
3. *El conjunto de funciones armónicas universales y acotadas en A es maximal denso-lineable.*

Demostración.

1. Suponemos que A es armónica sub-Carleman. Entonces existe un conjunto F armónico Carleman tal que $A \subset F$.

Sean $K_{n,k} := \overline{B}(\overrightarrow{a_{n,k}}, r_{n,k})$ y $B_k := \overline{B}(\vec{0}, R_k)$ del Lema 4.2.1, aplicado a F. Sea $h_k(\mathbb{R}^N)$ el espacio de polinomios armónicos homogéneos de grado k y $\{q_{k,l} : l = 1, \ldots, l_k\}$ una base de $h_k(\mathbb{R}^N)$, y sea $\{q_m\}_{m=1}^{\infty}$ una enumeración de $\{q_{k,l}\}$ según el grado. Sea $\{p_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión densa en $h(\mathbb{R}^N)$ de combinaciones lineales finitas de q_m con coeficientes racionales.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la función

$$u_n(\vec{x}) := \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{x} \in F \setminus B_{n+1}^{\circ} \\ p_n(\vec{x}) & \text{si } \vec{x} \in B_n \\ 0 & \text{si } \vec{x} \in K_{j,k},\ k \geq n,\ n \neq j,\ j \leq k \\ p_k\left(\dfrac{r_{n,k}}{R_k}(\vec{x} - \overrightarrow{a_{n,k}})\right) & \text{si } \vec{x} \in K_{n,k},\ k \geq n \end{cases}$$

Los conjuntos son dos a dos disjuntos por construcción, y cada u_n es continua en $C_n := (F \setminus B_{n-1}^\circ) \cup B_0 \cup \bigcup_{k\geq n,\, j\leq k} K_{j,k}$ y armónica en C_n°. Por el Lema 4.2.1, los C_n son armónico Carleman. Entonces, por definición, para cada función $\varepsilon_n(\vec{x}) : C_n \to (0,1]$ continua, existe una función armónica v_n en $h(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|v_n(\vec{x}) - u_n(\vec{x})| < \varepsilon_n(\vec{x}), \quad x \in C_n. \tag{1}$$

Definimos dichas funciones ε_n como

$$\varepsilon_n(\vec{x}) := \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{x} \in F \setminus B_{n+1}^\circ \\ 1/n & \text{si } \vec{x} \in B_n \\ e^{-\|\vec{x}\|^{1/4}} & \text{si } \vec{x} \in K_{n,k},\ n,k \in \mathbb{N}, kk \geq n. \end{cases}$$

Entonces para un $n \in \mathbb{N}$ fijo, tenemos gracias a (1) que

$$|v_n(\vec{x})| < 1 \qquad \text{si } \vec{x} \in F \setminus B_{n+1}^\circ \tag{2}$$
$$|v_n(\vec{x}) - p_n(\vec{x})| < 1/n \qquad \text{si } \vec{x} \in B_n \tag{3}$$
$$|v_n(\vec{x})| < e^{-\|\vec{x}\|^{1/4}} \qquad \text{si } \vec{x} \in K_{j,k},\ k \geq n,\ n \neq j,\ j \leq k \tag{4}$$
$$\left| v_n(\vec{x}) - p_k\left(\frac{\vec{x} - \overrightarrow{a_{n,k}}}{r_{n,k}/R_k}\right)\right| < e^{-\|\vec{x}\|^{1/4}} \qquad \text{si } \vec{x} \in K_{n,k},\ k \geq n \tag{5}$$

Sea $M := \operatorname{span}\{v_k : k \in \mathbb{N}\}$. Este va a ser el subespacio lineal que buscamos. En efecto:

- Las funciones de M están acotadas en A. Efectivamente, se tiene por (2) que

$$|v_n(\vec{x})| < 1, \quad \forall \vec{x} \in F \setminus B_{n+1}^\circ,$$

  es decir, v_n esta acotada en $F \setminus B_{n+1}^\circ$ y, como B_{n+1} es compacto, v_n es acotada en F. Por linealidad, cada $v \in M$ está acotada en F y por tanto en A.

- M es denso en $h(\mathbb{R}^N)$ pues por (3) tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\vec{x}\in B_n} |v_n(\vec{x}) - p_n(\vec{x})| = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$$

  y como $\{p_n\}_{n\geq 1}$ es denso en $h(\mathbb{R}^N)$, por el Teorema 1.2.4 se tiene la densidad de $\{v_n\}_n$.

- Falta probar que cada función $v \in M \setminus \{0\}$ es armónica universal. Fijamos una función $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, v_j \in M \setminus \{0\}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\alpha_n = 1$ pues un múltiplo de una función universal por un escalar no nulo, es universal. Fijamos $k \geq n$, si $\vec{x} \in B_k$ ($\|\vec{x}\| < R_k$). Entonces definimos $\overrightarrow{y} := \frac{r_{n,k}}{R_k}\vec{x} + \overrightarrow{a_{n,k}}$, que pertenece a $K_{n,k} = \overline{B}(\overrightarrow{a_{n,k}}, r_{n,k})$ pues

$$\|\overrightarrow{y} - \overrightarrow{a_{n,k}}\| = \left\| \frac{r_{n,k}}{R_k}\vec{x} + \overrightarrow{a_{n,k}} - \overrightarrow{a_{n,k}} \right\| = \left| \frac{r_{n,k}}{R_k} \right| \|\vec{x}\| < \frac{r_{n,k}}{R_k} R_k = r_{n,k}.$$

Es suficiente probar que $\lim_{k\to\infty} v\left(\frac{r_{n,k}}{R_k}\vec{x} + \overrightarrow{a_{n,k}}\right) - p_k(\vec{x}) = 0$ uniformemente en compactos en $\mathbb{R}^N$. Nótese que las aplicaciones $\varphi_k(\vec{x}) = \frac{r_{n,k}}{R_k}\vec{x} + \overrightarrow{a_{n,k}}$ preservan la armonicidad, como comentamos en la primera sección de este capítulo y, por tanto, la composición $v \circ \varphi_k$ sigue siendo armónica en $\mathbb{R}^N$.

Sin más que aplicar en primer lugar un cambio de variable, usar la desigualdad triangular y las desigualdades (4) y (5), y teniendo en cuenta que $\|\overrightarrow{y}\| > R_k$ (si $\overrightarrow{y} \in K_{n,k} \subset B^{\circ}_{k+1} \setminus B_k$), se tiene para $\vec{x} \in B_k$ e $\vec{y} = \frac{r_{n,k}}{R_k}\vec{x} + \overrightarrow{a_{n,k}}$ que

$$\begin{aligned}
\left| v\left(\frac{r_{n,k}}{R_k}\vec{x} + \overrightarrow{a_{n,k}}\right) - p_k(\vec{x}) \right| &= \left| v(\overrightarrow{y}) - p_k\left(\frac{\overrightarrow{y} - \overrightarrow{a_{n,k}}}{r_{n,k}/R_k}\right) \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, v_j(\overrightarrow{y}) - p_k\left(\frac{\overrightarrow{y} - \overrightarrow{a_{n,k}}}{r_{n,k}/R_k}\right) \right| \\
&= \left| \alpha_n \, v_n(\overrightarrow{y}) - p_k\left(\frac{\overrightarrow{y} - \overrightarrow{a_{n,k}}}{r_{n,k}/R_k}\right) \right| + \left| \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \, v_j(\overrightarrow{y}) \right| \\
&\leq \left| v_n(\overrightarrow{y}) - p_k\left(\frac{\overrightarrow{y} - \overrightarrow{a_{n,k}}}{r_{n,k}/R_k}\right) \right| + \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_j| \, |v_j(\overrightarrow{y})| \\
&\leq e^{-\|\overrightarrow{y}\|^{1/4}} + \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_j| e^{-\|\overrightarrow{y}\|^{1/4}} \\
&= \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_j|\right) e^{-\|\overrightarrow{y}\|^{1/4}} \\
&\leq \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_j|\right) e^{-R_k^{1/4}} \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty).
\end{aligned}$$

Entonces $\lim_{k\to\infty} \sup_{\vec{x}\in B_k} \left| v\left(\frac{r_{n,k}}{R_k}\vec{x} + \overrightarrow{a_{n,k}}\right) - p_k(\vec{x}) \right| = 0$, con $\{p_k\}_{k\geq 0}$ denso en $h(\mathbb{R}^N)$.

Así, por el Teorema 1.2.4 se tiene que $\{v \circ \varphi_k\}_k$ es denso, con $\varphi_k(\vec{x}) := \dfrac{r_{n,k}}{R_k}\vec{x} + \overrightarrow{a_{n,k}}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y por tanto v es armónica universal.

2. Por hipótesis, el conjunto A es armónico sub-Carleman, luego existe un conjunto F armónico Cárleman que contiene a A.

Sean $K_{n,k}$ y B_k como en el Lema 4.2.1. Sin pérdida de generalidad, consideramos que el conjunto B_0 dado en dicho lema es de hecho $\mathbb{B} = \overline{B}(\vec{0}, 1)$. Estamos pues en las mismas condiciones que en el apartado anterior.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$U_n(\vec{x}) := \begin{cases} q_n(\vec{x}) & \text{si } \vec{x} \in \mathbb{B} \\ 0 & \text{si } \vec{x} \in F \\ 0 & \text{si } \vec{x} \in K_{j,k},\ k \geq n,\ n \neq j,\ j \leq k \\ p_k\left(\dfrac{\vec{x} - \overrightarrow{a_{n,k}}}{r_{n,k}/R_k}\right) & \text{si } \vec{x} \in K_{n,k},\ k \geq n. \end{cases}$$

Cada u_n es continua en $C_0 := F \cup \mathbb{B} \cup \bigcup\limits_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ j \leq k}} K_{j,k}$ y armónica en C_0°. Por el Lema 4.2.1, C_0 es armónico Carleman. Entonces por definición, para cada elección de funciones continuas $\epsilon_n(\vec{x}) : C_0 \to (0, 1]$ $(n \in \mathbb{N})$ existen funciones $V_n \in h(\mathbb{R}^N)$ tales que

$$|V_n(\vec{x}) - U_n(\vec{x})| < \epsilon_n(\vec{x}), \quad \vec{x} \in C_0. \tag{1}$$

Definimos dichas funciones ϵ_n como

$$\varepsilon_n(\vec{x}) := \begin{cases} \varepsilon_n & \text{si } \vec{x} \in \mathbb{B} \\ 1 & \text{si } \vec{x} \in F \\ \dfrac{\varepsilon_n}{2^k} & \text{si } \vec{x} \in K_{n,k},\ k, n \in \mathbb{N},\ k \geq n. \end{cases}$$

Entonces para un $n \in \mathbb{N}$ fijo, tenemos por (1) que

$$|V_n(\vec{x}) - q_n(\vec{x})| < \varepsilon_n \qquad \text{si } \vec{x} \in \mathbb{B} \tag{2}$$

$$|V_n(\vec{x})| < 1 \qquad \text{si } \vec{x} \in F \tag{3}$$

$$|V_n(\vec{x})| < \frac{\varepsilon_n}{2^k} \qquad \text{si } \vec{x} \in K_{j,k},\ k \geq n,\ n \neq j,\ j \leq k \tag{4}$$

$$\left|V_n(\vec{x}) - p_k\left(\frac{\vec{x} - \overrightarrow{a_{n,k}}}{r_{n,k}/R_k}\right)\right| < \frac{\varepsilon_n}{2^k} \qquad \text{si } \vec{x} \in K_{n,k},\ k \geq n. \tag{5}$$

Sea E el espacio vectorial de todas las series $\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m V_m$ que convergen uniformemente en compactos de $\mathbb{R}^N$. Sea M la clausura de E en $h(\mathbb{R}^N)$.

- M es cerrado por ser la clausura de E.
- M es lineal por construcción.
- Las funciones de M están acotadas en A. En efecto, por (3) se tiene que $|V_n(\vec{x})| < 1$, $\forall \vec{x} \in F$, es decir, V_n esta acotada en F y por tanto en A.
- Veamos que M es ∞-dimensional.

  En primer lugar, $\{q_m\big|_S\}$ es base de Schauder en $L^2(S)$, donde S es la frontera de $\mathbb{B}$, por el Teorema 3.1.3. Sea $\{q_m^*\big|_S\}$ la sucesión de los coeficientes funcionales, de manera que

  $$q_m^*\big|_S : L^2(S) \to \mathbb{R} \ , \ q_m^*\big|_S \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n q_n \right) = \alpha_m.$$

  Es fácil comprobar que $\left\| q_m^*\big|_S \right\|_2 = 1$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Aplicando la desigualdad (2) y $\left\| q_m^*\big|_S \right\|_2 = 1$, se tiene que la sucesión V_m cumple

  $$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \left\| q_m^*\big|_S \right\|_2 \left\| V_m - q_m\big|_S \right\|_2 &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\| V_m - q_m\big|_S \right\|_2 \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \left\| V_m - q_m\big|_S \right\|_\infty \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m < 1. \end{aligned}$$

  Entonces, usando el Teorema 1.3.4 se llega a que $\{V_m\}$ es base de Schauder en $L^2(S)$ y por ello, M es ∞-dimensional.

- Falta demostrar que cada función $V \in M \setminus \{0\}$ es armónica universal. Esto quedará probado, habida cuenta de la densidad de $\{p_k\}$, si se muestra que

  $$\lim_{n\to\infty} \left| V\left(\frac{r_{n,k}}{R_k} \vec{x} + \overrightarrow{a_{n,k}} \right) - p_k(\vec{x}) \right| = 0$$

  uniformemente en compactos en $\mathbb{R}^N$.

Dado $V \in M$, existen sucesiones de series en E que convergen a V uniformemente en subconjuntos compactos y, por continuidad de la norma $\|\cdot\|_2$ respecto de la norma $\|\cdot\|_\infty$, tenemos que esa sucesión de series converge a V en $L^2(S)$, por tanto V tiene representante como serie de $L^2(S)$.

Sea $\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m V_m$ el representante de V en $L^2(S)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\alpha_n = 1$, para algún n. Sea $\{\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^l V_m\}$ una sucesión de series de E que convergen a V en compactos. Debido a la continuidad de las proyecciones, podemos admitir sin pérdida de generalidad que $\alpha_n^l = 1$, para todo $l \in \mathbb{N}$. Más aún, si $\vec{x} \in B_k$ ($\|\vec{x}\| < R_k$), entonces definimos $\vec{y} := \frac{r_{n,k}}{R_k}\vec{x} + \overrightarrow{a_{n,k}}$ que pertenece a $K_{n,k} = \overline{B}(\overrightarrow{a_{n,k}}, r_{n,k})$ pues

$$\|\vec{y} - \overrightarrow{a_{n,k}}\| = \left\|\frac{r_{n,k}}{R_k}\vec{x} + \overrightarrow{a_{n,k}} - \overrightarrow{a_{n,k}}\right\| = \left|\frac{r_{n,k}}{R_k}\right| \|\vec{x}\| < \frac{r_{n,k}}{R_k} R_k = r_{n,k}.$$

Entonces, aplicando la desigualdad triangular y las desigualdades (4) y (5), se tiene, para $\varepsilon > 0$, para $k \geq n$ y l suficientemente grandes y para $\vec{x} \in B_k$ e $\vec{y} := \frac{r_{n,k}}{R_k}\vec{x} + \overrightarrow{a_{n,k}}$, tiene lugar la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned}
&\left|V\left(\frac{r_{n,k}}{R_k}\vec{x} + \overrightarrow{a_{n,k}}\right) - p_k(x)\right| \\
&\quad = \left|V(\vec{y}) - p_k\left(\frac{\vec{y} - \overrightarrow{a_{n,k}}}{r_{n,k}/R_k}\right)\right| \\
&\quad \leq \left|V(\vec{y}) - \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^l V_m(\vec{y})\right| + \left|\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^l V_m(\vec{y}) - p_k\left(\frac{\vec{y} - \overrightarrow{a_{n,k}}}{r_{n,k}/R_k}\right)\right| \\
&\quad \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left|\sum_{\substack{m=0\\ m\neq n}}^{\infty} \alpha_m^l V_m(\vec{y}) + V_n(\vec{y}) - p_k\left(\frac{\vec{y} - \overrightarrow{a_{n,k}}}{r_{n,k}/R_k}\right)\right| \\
&\quad \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{\substack{m=0\\ m\neq n}}^{\infty} \left|\alpha_m^l V_m(\vec{y})\right| + \left|V_n(\vec{y}) - p_k\left(\frac{\vec{y} - \overrightarrow{a_{n,k}}}{r_{n,k}/R_k}\right)\right| \\
&\quad \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{\substack{m=0\\ m\neq n}}^{\infty} |\alpha_m^l| \frac{\varepsilon_m}{2^k} + \frac{\varepsilon_n}{2^k} = \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_m^l| \frac{\varepsilon_m}{2^k} \\
&\quad \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\left\|\{\alpha_m^l\}\right\|_2 \|\{\varepsilon_m\}\|_2}{2^k} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\left[\sum_{m=0}^{\infty} (\alpha_m^l)^2\right]^{1/2} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^2\right]^{1/2}}{2^k} \\
&\quad \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\left\|\{\alpha_m^l\}\right\|_2}{2^k} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|\{\alpha_m\}\|_2 + 1}{2^k} \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\vec{x}\in B_k} \left| v\left(\frac{r_{n,k}}{R_k}\vec{x} + \overrightarrow{a_{n,k}}\right) - p_k(\vec{x})\right| = 0$$

con $\{p_k\}_{k\geq 0}$ denso en $h(\mathbb{R}^N)$. Así, por el Teorema 1.2.4 se tiene que $\{v\circ\varphi_k\}_k$ es denso, con $\varphi_k(\vec{x}) := \dfrac{r_{n,k}}{R_k}\vec{x} + \overrightarrow{a_{n,k}}$ para cada $k\in\mathbb{N}$, y por tanto v es armónica universal.

3. Consideramos las funciones $\{v_n\}_n$ construidas en la prueba del apartado (1), sólo para $n\geq 2$. Observar que, en esta construcción, cada función $u_n(\vec{x})$ ($n\geq 2$) está definida como 0 en los compactos de la forma $K_{1,k}$, así que podemos decir que los v_n ($n\geq 2$) son "pequeños" en estos conjuntos.

Sea ahora $M_d = \operatorname{span}\{v_n : n \geq 2\}$. Continuamos como en el apartado (1) y concluimos que M_d es un subespacio lineal y denso de funciones acotadas en A y, salvo la función nula, universales.

A continuación, dividimos $\mathbb{N}$ en infinitas sucesiones estrictamente crecientes $\{p(n,j)\}_j$ ($n\in\mathbb{N}$) y procedemos como en el apartado (2) pero definiendo U_n como

$$U_n(\vec{x}) := \begin{cases} q_n(\vec{x}) & \text{si } \vec{x}\in\mathbb{B} \\ 0 & \text{si } \vec{x}\in F \\ 0 & \text{si } \vec{x}\in K_{j,k},\ k\geq 2,\ j\leq k \\ 0 & \text{si } \vec{x}\in K_{1,p(n,k)},\ n\neq j,\ k\in\mathbb{N} \\ p_k\left(\dfrac{\vec{x}-\overrightarrow{a_{1,p(n,k)}}}{r_{1,p(n,k)}/R_{p(n,k)}}\right) & \text{si } \vec{x}\in K_{1,p(n,k)},\ k\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Nos centraremos en la sucesión $\{K_{1,k}\}_k$ y la dividiremos en infinitas subsucesiones. En una de ellas veremos la propiedad de aproximación y en las demás, intentaremos controlar la función. Tomamos V_n como en la demostración del apartado (2).

Sea M_s la clausura del espacio vectorial de todas las series $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m\, v_m$ que convergen uniformemente en compactos de $\mathbb{R}^N$. El espacio M_s es de dimensión infinita y cada función distinta de cero está acotada en A y es universal respecto de similaridades.

Finalmente definimos $M_{\text{máx}} := \operatorname{span}\{M_d\cup M_s\}$ que es densa (pues contiene a M_d) y tiene dimensión máxima (pues M_s la tiene).

La acotación de cada miembro de $M_{\text{máx}}$ en A es evidente. El problema se nos presenta en la prueba de la universalidad, pues si $v \in M_{\text{máx}}$, podría estar en M_d o en M_s (y en ambos casos se tendría la universalidad de la función) o bien podría ser una combinación lineal de elementos de ambas, con lo cual, a priori, no tendríamos asegurada dicha propiedad. Veamos que, aún así, sí se tiene la universalidad.

Sea $v \in M_{\text{máx}} \setminus \{0\}$. Si $v \in M_d$, entonces v es universal. En caso contrario, si $v \in M_{\text{máx}} \setminus M_d$, podemos escribir v como

$$v = w + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \, v_k,$$

para alguna $w \in M_s \setminus \{0\}$ y algunos $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$. Así, w asume el papel de la función que aproximamos, mientras que los v_k $(k = 1, \ldots, m)$ son pequeños en los conjuntos que estamos considerando. □

4.3. Condiciones de acotación y universalidad bajo sucesiones prefijadas

Reescribimos el concepto de fugitividad en $\mathbb{C}$ y lo extendemos a $\mathbb{R}^N$ como sigue.

Definición 4.3.1. *Sea G un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$, sea $h(G,G) := \{\varphi : G \to G : \varphi$ es armónica en $G\}$ y $A \subset G$.*

1. *Se dice que la sucesión $\{\varphi_n\}_n \subset h(G,G)$ es fugitiva si para todo $K \subset G$ compacto, existe $n_0 = n_0(K) \in \mathbb{N}$ tal que $K \cap \varphi_{n_0}(K) = \emptyset$.*

2. *Se dice que la sucesión $\{\varphi_n\}_n \subset h(G,G)$ es fugitiva fuera de A si para todo $K \subset G$ compacto, existe $n_0 = n_0(K) \in \mathbb{N}$ tal que $(K \cup A) \cap \varphi_{n_0}(K) = \emptyset$.*

Al igual que en el caso complejo, se tiene que toda sucesión fugitiva fuera de A es fugitiva, pero el recíproco se tiene si A es relativamente compacto en G.

En particular, si la sucesión $\{\varphi_n\}_n$ es de la forma $\varphi_n(\vec{x}) = \overrightarrow{a_n} + \lambda_n \vec{x}$, podemos dar una caracterización de cuando dicha sucesión es fugitiva.

Proposición 4.3.2. *Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 1} = \{\overrightarrow{a_n} + \lambda_n \vec{x}\}_{n\geq 1}$. Se tiene que la sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ es fugitiva en $\mathbb{R}^N$ si y sólo si*

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\min\left\{\frac{1}{|\lambda_n|}\|\overrightarrow{a_n}\|, \|\overrightarrow{a_n}\|\right\}\right) = +\infty.$$

Demostración.

$\boxed{\Rightarrow}$ Suponemos que $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ es fugitiva; entonces existe una subsucesión $\{\varphi_{n_k}\}_{k\geq 1}$ fugitiva tal que $\overline{B}(\vec{0},k)\cap\varphi_{n_k}\Big(\overline{B}(\vec{0},k)\Big) = \emptyset$ para todo $k\geq 1$. Por lo tanto, se tiene que $\|\varphi_{n_k}(\vec{0})\| = \|\overrightarrow{a_{n_k}}\| > k$ y así, $\limsup_{k\to\infty}\|\overrightarrow{a_{n_k}}\| = +\infty$.

Es suficiente probar que $\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|\lambda_{n_k}|}\|\overrightarrow{a_{n_k}}\| = +\infty$. Por reducción al absurdo, suponemos que esto no es cierto. En ese caso, existiría un $M > 0$ real tal que $\frac{1}{|\lambda_{n_k}|}\|\overrightarrow{a_{n_k}}\| < M$, para todo $k\geq 1$. Si consideramos el compacto $\overline{B}(\vec{0},M)\subset\mathbb{R}^N$, tenemos

$$\vec{0} = \varphi_{n_k}\left(-\frac{1}{|\lambda_{n_k}|}\|\overrightarrow{a_{n_k}}\|\right)\in\overline{B}(\vec{0},M)\cap\varphi_{n_k}\Big(\overline{B}(\vec{0},M)\Big)\quad\forall k\geq 1,$$

lo que contradice la fugitividad de la subsucesión $\{\varphi_{n_k}\}_{k\geq 1}$ y por tanto se cumple que $\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|\lambda_{n_k}|}\|\overrightarrow{a_{n_k}}\| = +\infty$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Suponemos ahora que $\limsup_{n\to\infty}\Big(\min\Big\{\frac{1}{|\lambda_n|}\|\overrightarrow{a_n}\|, \|\overrightarrow{a_n}\|\Big\}\Big) = +\infty$. Si fijamos un compacto $K\subset\mathbb{R}^N$, entonces existe un $r > 0$ tal que $K\subset\overline{B}(\vec{0},r)$. Como la sucesión $\Big\{\min\Big\{\frac{1}{|\lambda_n|}\|\overrightarrow{a_n}\|, \|\overrightarrow{a_n}\|\Big\}\Big\}_{n\geq 1}$ no es acotada, existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $\|\overrightarrow{a_m}/\lambda_m\| > 2r$ y $\|\overrightarrow{a_m}\| > 2r$. De esta forma se tiene, para todo $x\in\overline{B}(\vec{0},r)$, que

$$\begin{aligned}\|\varphi_m(\vec{x})\| &= \|\overrightarrow{a_m} + \lambda_m\vec{x}\| \geq \Big|\,\|\overrightarrow{a_m}\| - |\lambda_m|\,\|\vec{x}\|\,\Big| \\ &= \|\overrightarrow{a_m}\|\left|1 + \frac{|\lambda_m|}{\|\overrightarrow{a_m}\|}\|\vec{x}\|\right| > 2r\left(1-\frac{r}{2r}\right) = r.\end{aligned}$$

Luego hemos probado que $K\cap\varphi_n(K)\subset\overline{B}(\vec{0},r)\cap\varphi_n\Big(\overline{B}(\vec{0},r)\Big) = \emptyset$, así que $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ es fugitiva. □

Veamos en el siguiente teorema que si se tiene una sucesión prefijada y fugitiva fuera de un Carleman, el conjunto de funciones armónicas acotadas en A y universales bajo dicha sucesión prefijada es denso-(maximal) lineable y espaciable.

Teorema 4.3.3. *Sean $A \subset \mathbb{R}^N$ y $\{\varphi_n(\vec{x}) = \overrightarrow{a_n} + \lambda_n \vec{x}\}_n$ una sucesión de similaridades de R^N. Si existe un subconjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ armónico Carleman tal que $A \subset F$ y $\{\varphi_n\}_n$ es fugitiva fuera de F, entonces*

1. *El conjunto de funciones universales armónicas bajo $\{\varphi_n\}_n$ y acotadas en A es denso-lineable.*
2. *El conjunto de funciones universales armónicas bajo $\{\varphi_n\}_n$ y acotadas en A es espaciable.*
3. *El conjunto de funciones universales armónicas bajo $\{\varphi_n\}_n$ y acotadas en A es maximal denso-lineable.*

Demostración. Por hipótesis, existe $F \subset \mathbb{R}^N$ armónico Carleman. Entonces existen $R_0 \in (0,1)$ y $\overrightarrow{x_0} \in \mathbb{R}^N \setminus F$ tales que $\overline{B}(\overrightarrow{x_0}, R_0) \cap F = \emptyset$, $\forall n \geq n_0$.

Sea $R_1 := n_0 + 1$. Entonces como φ_n es fugitiva fuera de F, existe $N_1^{(1)} \in \mathbb{N}$ tal que $\Big(F \cup \overline{B}(\vec{0}, R_1)\Big) \cap \varphi_{N_1^{(1)}}\Big(\overline{B}(\vec{0}, R_1)\Big) = \emptyset$. Definimos pues $B_1 = \overline{B}(\vec{0}, R_1)$ y $K_{1,1} = \varphi_{N_1^{(1)}}\Big(\overline{B}(\vec{0}, R_1)\Big) = \overline{B}(\overrightarrow{a_{N_1^{(1)}}}, |\lambda_{N_1^{(1)}}|R_1)$.

Elegimos $R_2\,(> R_1)$ con $K_{1,1} \subset \overline{B}(\vec{0}, R_2)$. Luego, como φ_n es fugitiva fuera de F, existe $N_1^{(2)} \in \mathbb{N}$ tal que $\Big(F \cup \overline{B}(\vec{0}, R_2)\Big) \cap \varphi_{N_1^{(2)}}\Big(\overline{B}(\vec{0}, R_2)\Big) = \emptyset$. Sea $R_2'\,(> R_2)$ tal que $\varphi_{N_1^{(2)}}\Big(\overline{B}(\vec{0}, R_2)\Big) \subset \overline{B}(\vec{0}, R_2')$. Entonces existe $N_2^{(2)} \in \mathbb{N}$ de tal forma que la intersección $\Big(F \cup \overline{B}(\vec{0}, R_2')\Big) \cap \varphi_{N_2^{(2)}}\Big(\overline{B}(\vec{0}, R_2')\Big)$ es vacía. Definimos $B_2 = \overline{B}(\vec{0}, R_2)$ y $K_{n,2} = \varphi_{N_n^{(2)}}\Big(\overline{B}(\vec{0}, R_2)\Big) = \overline{B}(\overrightarrow{a_{N_n^{(2)}}}, |\lambda_{N_n^{(2)}}|R_2)$, para $n = 1, 2$. Obsérvese que, al ser $R_2' > R_2$, se tiene que $K_{1,2} \cap K_{2,2} = \emptyset$.

Escogemos ahora $R_3\,(> R_2' > R_2)$. Entonces, de la misma forma que antes, definimos $B_3 = \overline{B}(\vec{0}, R_3)$ y $K_{n,3} = \varphi_{N_n^{(3)}}\Big(\overline{B}(\vec{0}, R_3)\Big) = \overline{B}(\overrightarrow{a_{N_n^{(3)}}}, |\lambda_{N_n^{(3)}}|R_3)$, para $n = 1, 2, 3$.

Continuamos recursivamente construyendo las dos sucesiones $B_k = \overline{B}(\vec{0}, R_k)$ y $K_{n,k} = \varphi_{N_n^{(k)}}\Big(\overline{B}(\vec{0}, R_k)\Big) = \overline{B}(\overrightarrow{a_{N_n^{(k)}}}, |\lambda_{N_n^{(k)}}|R_k)$ $(n = 1, 2, \ldots, k;\ k \in \mathbb{N})$, de modo que B_k es disjunto con cada $K_{n,k}$ y los $K_{n,k}$ son dos a dos disjuntos entre sí. Notemos que los conjuntos B_k y $K_{n,k}$ así construidos satisfacen las condiciones del Lema 4.2.1. Seguimos la prueba como la del Teorema 4.2.3 y obtenemos los apartados (1), (2) y (3). $\square$

Finalmente, caracterizamos el casos de una sola aplicación. Nos preguntamos pues, en qué casos la aplicación $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $\varphi(\vec{x}) = \vec{a} + \lambda\vec{x}$ es fugitiva, es decir, en qué caso la sucesión de iteradas de φ, que viene dada por

$$\varphi^n(\vec{x}) = \varphi \circ \underset{(n)}{\ldots} \circ \varphi(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \vec{a} + \lambda^n \vec{x},$$

es fugitiva.

Proposición 4.3.4. *Sea $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $\varphi(\vec{x}) = \vec{a} + \lambda\vec{x}$. Entonces se tiene que $\{\varphi^n\}_{n\geq 1}$ es fugitiva en $\mathbb{R}^N$ si y solo si $\lambda = 1$ y $\vec{a} \neq \vec{0}$.*

Demostración.

$\boxed{\Rightarrow}$ Suponemos que $\{\varphi^n\}_{n\geq 1}$ es fugitiva. Por la Proposición 4.3.2, esto es equivalente a

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\min \left\{ \frac{1}{|\beta_n|} \|\overrightarrow{\alpha_n}\|, \|\overrightarrow{\alpha_n}\| \right\} \right) = +\infty,$$

donde $\{\beta_n = \lambda^n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ y $\{\overrightarrow{\alpha_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \vec{a}\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^N$.

Si $\vec{a}$ fuese el vector cero, entonces

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\min \left\{ \frac{1}{|\beta_n|} \|\overrightarrow{\alpha_n}\|, \|\overrightarrow{\alpha_n}\| \right\} \right) = \limsup_{n\to\infty} \left(\min \{0, 0\} \right) = 0,$$

lo cual contradice la Proposición 4.3.2, por lo que se deduce que $\vec{a} \neq \vec{0}$. Podemos distinguir los siguientes cuatro casos:

- $|\lambda| > 1$; entonces

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \left(\min \left\{ \frac{1}{|\beta_n|} \|\overrightarrow{\alpha_n}\|, \|\overrightarrow{\alpha_n}\| \right\} \right) &= \limsup_{n\to\infty} \left(\min \left\{ \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^{n-k}} \vec{a} \right\|, \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \vec{a} \right\| \right\} \right) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^{n-k}} \vec{a} \right\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \|\vec{a}\| \frac{1}{|\lambda|^n} \sum_{k=0}^{n-1} |\lambda|^k \\
&= \frac{\|\vec{a}\|}{|\lambda| - 1}.
\end{aligned}$$

  lo que contradice la Proposición 4.3.2.

- $|\lambda| < 1$; en este caso

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}\left(\text{mín}\left\{\frac{1}{|\beta_n|}\|\overrightarrow{\alpha_n}\|, \|\overrightarrow{\alpha_n}\|\right\}\right) &= \limsup_{n\to\infty}\left(\text{mín}\left\{\left\|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda^{n-k}}\vec{a}\right\|, \left\|\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k\vec{a}\right\|\right\}\right)\\
&= \limsup_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k\vec{a}\right\|\\
&\le \lim_{n\to\infty}\|\vec{a}\|\sum_{k=0}^{n-1}|\lambda|^k\\
&= \frac{\|\vec{a}\|}{1-|\lambda|}.
\end{aligned}$$

lo que también contradice la Proposición 4.3.2.

- $\lambda = -1$; si esto ocurre,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n-1 \text{ es impar}\\ 0 & \text{si } n-1 \text{ es par.}\end{cases}$$

Por lo tanto $\limsup_{n\to\infty}\left(\text{mín}\left\{\frac{1}{|\beta_n|}\|\overrightarrow{\alpha_n}\|, \|\overrightarrow{\alpha_n}\|\right\}\right) \le 1$. y como antes, tenemos una contradicción con la Proposición 4.3.2.

- $\lambda = 1$; entonces $\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k = \sum_{k=0}^{n-1}1^k = n$, y de esta forma

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\text{mín}\left\{\frac{1}{|\beta_n|}\|\overrightarrow{\alpha_n}\|, \|\overrightarrow{\alpha_n}\|\right\}\right) = \limsup_{n\to\infty}\|n\vec{a}\| = +\infty,$$

que sí cumple la Proposición 4.3.2.

De esta forma, concluimos que $\lambda = 1$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Recíprocamente, suponemos que $\lambda = 1$ y $\vec{a} \neq \vec{0}$. Luego, $\beta_n = 1$, $\overrightarrow{\alpha_n} = n\vec{a}$ y así

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\text{mín}\left\{\frac{1}{|\beta_n|}\|\overrightarrow{\alpha_n}\|, \|\overrightarrow{\alpha_n}\|\right\}\right) = \limsup_{n\to\infty}\|n\vec{a}\| = +\infty$$

y por la Proposición 4.3.2, $\{\varphi^n\}_{n\ge1}$ es fugitiva en $\mathbb{R}^N$. □

Por lo tanto, del resultado anterior se deduce que $\{\varphi^n\}_{n\ge1}$ es fugitiva en $\mathbb{R}^N$ si y solo si φ es una traslación, es decir, $\varphi(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$.

Si $\vec{a} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\vec{0}\}$, el rayo desde el origen que pasa por $\vec{a}$ se denotará por $L_{\vec{a}}$.

Definición 4.3.5. *Dado un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\vec{a} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\vec{0}\}$, definimos el radio inscrito angular de A como*

$$\rho_{\vec{a}}(A) = \sup\{r > 0 : \exists \vec{x} \in L_{\vec{a}} \text{ tal que } \overline{B}(\vec{x}, r) \subset A\}.$$

Corolario 4.3.6. *Sea $A \subset \mathbb{R}^N$ y $\vec{a} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\vec{0}\}$. Son equivalentes:*

1. *Existe un subconjunto $F \subset \mathbb{R}^N$ Carleman tal que $A \subset F$ y $\rho_{\vec{a}}(\mathbb{R}^N \setminus F) = +\infty$.*
2. *Existe un subconjunto $F \subset \mathbb{R}^N$ Carleman de manera que $A \subset F$ y la aplicación $\varphi(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$ es fugitiva fuera de F.*
3. *Existe una función f armónica acotada en A tal que la sucesión $\{f(\vec{x} + n\vec{a})\}_{n\in\mathbb{N}}$ es densa en $h(\mathbb{R}^N)$.*
4. *El conjunto de funciones f armónicas acotadas en A tales que la sucesión $\{f(\vec{x} + n\vec{a})\}_{n\in\mathbb{N}}$ es densa en $h(\mathbb{R}^N)$ es maximal denso-lineable y espaciable.*

Demostración.

$\boxed{2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4}$ Se tiene por el Teorema 4.3.3.

$\boxed{1 \Leftrightarrow 2}$ Hay que demostrar que $\varphi(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$ es fugitiva fuera de F si y solo si $\rho_{\vec{a}}(\mathbb{R}^N \setminus F) = +\infty$.

($\Leftarrow$) Suponemos que φ es fugitiva fuera de F. Entonces $\forall r > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\overline{B}(\vec{0}, r) \cup F\right) \cap \overline{B}(n\vec{a}, r) = \emptyset$, luego $\overline{B}(n\vec{a}, r) \subset \mathbb{R}^N \setminus F$. Ya que r es arbitrario, se deduce que $\rho_{\vec{a}}(\mathbb{R}^N \setminus F) = +\infty$.

($\Rightarrow$) Suponemos que $\rho_{\vec{a}}(\mathbb{R}^N \setminus F) = +\infty$.

Sea $r > 0$ fijo. Tenemos que $\rho_{\vec{a}}\left(\mathbb{R}^N \setminus (F \cup \overline{B}(\vec{0}, r))\right) = +\infty$. Entonces existe $\vec{c} \in \mathbb{R}^N$ tal que $\vec{c} \in L_{\vec{a}}$ y $\overline{B}(\vec{c}, r + |\vec{a}|) \subset \mathbb{R}^N \setminus \left(F \cup \overline{B}(\vec{0}, r)\right)$. Como $\vec{a}$, $\vec{c} \in L_{\vec{a}}$, los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$ son proporcionales ($\exists k > 0$ tal que $\vec{c} = k\vec{a}$).

De esta forma, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ ($n_0 \leq k$) tal que $n_0\|\vec{a}\| \leq \|\vec{c}\| < (n_0 + 1)\|\vec{a}\|$ y así,

$$\begin{aligned} \|n_0\vec{a} - \vec{c}\| &= \|k\vec{a} - n_0\vec{a}\| = |k - n_0|\|\vec{a}\| = k\|\vec{a}\| - n_0\|\vec{a}\| = \|\vec{c}\| - n_0\|\vec{a}\| \\ &\leq (n_0 + 1)\|\vec{a}\| - n_0\|\vec{a}\| = \|\vec{a}\|. \end{aligned}$$

Entonces $\forall \vec{x} \in \overline{B}(n_0\vec{a}, r)$, aplicando la desigualdad triangular se tiene que

$$\|\vec{x} - \vec{c}\| \leq \|\vec{x} - n_0\vec{a}\| + \|n_0\vec{a} - \vec{c}\| \leq r + \|\vec{a}\|,$$

es decir, $\vec{x} \in \overline{B}(\vec{c}, r + \|\vec{a}\|)$.

Por tanto, $\varphi_{n_0}\Big(\overline{B}(\vec{0}, r)\Big) = \overline{B}(n_0\vec{a}, r) \subset \overline{B}(\vec{c}, r + \|\vec{a}\|) \subset \mathbb{R}^n \setminus (F \cup \overline{B}\Big(\vec{0}, r)\Big)$. Con lo que podemos concluir que $\varphi_{n_0}\Big(\overline{B}(\vec{0}, r)\Big) \cap \Big(F \cup \overline{B}(\vec{0}, r)\Big) = \emptyset$ y que φ es fugitiva fuera de F. $\square$

4.4. Conclusiones y Observaciones finales

1. De la misma forma que en la prueba del Teorema 2.3.2 (ver [1]) en el ámbito complejo, en la del Teorema 4.2.3, en el ámbito armónico, se tiene la existencia de funciones armónicas universales que están acotadas en un conjunto sub-Carleman A.

Por otro lado, si A es acotado, entonces es sub-Carleman y cualquier función entera está acotada en A. Además, si A no es sub-Carleman, existen muchas funciones universales que no están acotadas en A.

Del Teorema 4.2.3 se deduce el siguiente resultado.

Teorema 4.4.1. *El conjunto de funciones armónicas universales es maximal denso-lineable y espaciable.*

2. El Teorema 4.2.3 nos dice que el conjunto de funciones armónicas universales que están acotadas en un conjunto sub-Arakelian A, al que denotaremos por $\mathcal{H}(A)$, es grande en sentido algebraico.

El tamaño de $\mathcal{H}(A)$ en sentido topológico depende de si A está o no acotado. Si A está acotado, entonces $\mathcal{H}(A)$ es grande en sentido topológico, pues es residual en el espacio de Baire $h(\mathbb{R}^N)$ (ver [4]). Por otro lado, si A no está acotado, $\mathcal{H}(A)$ es pequeño en sentido topológico, pues es de primera categoría en $h(\mathbb{R}^N)$. En efecto, si definimos

$$\mathcal{B}(A) = \{u \in h(\mathbb{R}^N) : u \text{ acotada en } A\}$$

podemos escribir

$$\mathcal{B}(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n, \quad \text{con} \quad \mathcal{B}_n = \{u \in h(\mathbb{R}^N) : \|u(\vec{x})\| \leq n, \ \text{ en } A\}$$

donde cada $\mathcal{B}_n$ es evidentemente cerrado y de interior vacío. En efecto, estos conjuntos $\mathcal{B}_n$ cumplen que $\mathcal{B}_n \cap \mathcal{P}_c = \emptyset$, donde $\mathcal{P}_c$ es el conjunto de polinomios no constantes, el cual es denso en $h(\mathbb{R}^N)$. Así, $\mathcal{B}(A)$ es de primera categoría, y como $\mathcal{H}(A) \subset \mathcal{B}(A)$, entonces $\mathcal{H}(A)$ es de primera categoría.

3. En el Teorema 4.2.3 se obtienen funciones v universales que están acotadas en un conjunto sub-Carleman prefijado A. Pero si consideramos en la prueba de dicho teorema que los conjuntos B_{n+1}° son acotados y que

$$|v_n(\vec{x})| < e^{-\|\vec{x}\|^{1/4}} \ (\vec{x} \in F \setminus B_{n+1}^\circ),$$

siendo F un conjunto de Carleman prefijado que contiene a A, se obtiene que

$$\lim_{\vec{x}\to\infty} v(\vec{x}) = 0, \ \text{ con } \vec{x} \in F.$$

Bibliografía

Bibliografía fundamental

[1] M.C. Calderón-Moreno y J.A. Prado-Bassas, *A dynamical characterization of sub-Arakelian subsets*, J. Math. Anal. Appl. **405** (2013), 499–506.

[2] A. Bonilla, *Universal Harmonic Functions*, Quaestiones Math. **25** (2002), 527–530.

[3] M.C. Calderón-Moreno, J.A. Prado-Bassas y M. Prado-Rodríguez, *Algebraic generacity of universal harmonic functions bounded on closed sets*, en preparación.

Otras Referencias

[4] D.H. Armitage y P.M. Gauthier, *Recent developments in harmonic approximation, with applications*, Results Math. **29** (1996), 1–15.

[5] S. Axler, P. Bourdon y W. Ramey, *Harmonic function theory*, Sprinter-Verlag, New York, 1992.

[6] L. Bernal-González, *Compositionally universal entire functions on the plane and the punctured planed*, Complex Anal. Oper. Theory **7** (2013), 577–592.

[7] L. Bernal-González y A. Bonilla, *Universality of holomorphic functions bounded on closed sets*, J. Math. Anal. Appl. **315** (2006), 302–316.

[8] L. Bernal-González, M.C. Calderón-Moreno y W. Luh, *Dense-lineability of sets of Birkhoff-universal functions with rapid decay*, J. Math. Anal. Appl. **363** (2010), 4327–335.

[9] L. Bernal-González, M.C. Calderón-Moreno y J.A. Prado-Bassas, *Large subspaces of compositionally universal fuctions with maximal cluster sets*, J. Approx. Theory **164** (2012), 253–267.

[10] L. Bernal-González, A. Montes-Rodríguez, *Universal functions for composition operators*, J. Approx. Theory **82** (1995), 375–391.

[11] G.D. Birkhoff, *Démostration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entiéres*, C.R. Acad. Sci. Paris **189** (1929), 473–475.

[12] M.C. Calderón-Moreno, *Universal functions with small derivates an extremely fast growth*, Analysis **22** (2002), 57–66.

[13] G. Costakis y M. Sambarino, *Genericity of wild holomorphic functions and common hypercyclic vectors*, Adv. Math. **182** (2004), 278–306.

[14] B. Fuglede, *Harmonic morphisms between riemannian manifolds*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **28**, 2 (1978), 107–144.

[15] S.J. Gardiner y M. Goldstein, *Carleman approximation by harmonic functions*, Amer. J. Math. **117** (1995), 245–255.

[16] T.L. Gharibyan, W. Luh y M. Niess, *Birkhoff functions that are bounded on prescribed sets*, Arch. Math. **86** (2006), 261–267.

[17] M. Niess, *Universelle Funktionen mit zusätzlichen Eigenschaften*, Dissertation an der Universität Trier, 2006.