

**UNIVERSIDAD DE SEVILLA**

FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
Departamento de Geometría y Topología



**Arboricidad de Multigrafos y la Categoría LS de Espacios  
Topológicos Finitos**

TRABAJO FIN DE GRADO

REALIZADO POR:

**Luz María Muñoz Rodríguez**

BAJO LA DIRECCIÓN DE LOS TUTORES:

**Antonio Quintero Toscano**  
**María Trinidad Villar Liñán**

Sevilla, 2019



*A mi familia*



# Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría dar las gracias a mis padres y mis hermanos por apoyarme y aconsejarme, no sólo en la realización de este trabajo, sino en todos estos años de carrera.

A Pablo, por todos los días de estudio, por soportar mis agobios, mis malos modos y, a pesar de eso, quererme y sacar lo mejor de mí.

Agradecer a mis tutores, Antonio Quintero y María Trinidad Villar, su disposición y dedicación para llevar a cabo este trabajo. Sin su ayuda esto no habría sido posible.

Por último, dar las gracias a todas las personas, compañeros, amigos, familia, que han hecho que todos estos años hayan sido más llevaderos.



# Resumen

El objetivo de este trabajo consiste en relacionar el invariante por homotopía conocido como categoría de Lusternik-Schnirelmann (categoría LS, para abreviar) para espacios finitos de altura uno con la extensión a multigrafos del concepto de arboricidad por vértices. La arboricidad por vértices y su extensión a multigrafos se tratan en los dos primeros capítulos. La topología y homotopía para espacios finitos se resume en el tercer capítulo. En el cuarto capítulo, se habla de la categoría LS en espacios finitos y de su relación con la arboricidad puntual de un cierto multigrafo para espacios de altura 1.



# Abstract

This TFG project focuses on the relation between the homotopical invariant termed Lusternik-Schnirelmann category (LS category, for short) of height 1 finite spaces and the vertex arboricity extension to multigraphs. The point arboricity and its extension to multigraphs are studied in the first and second chapters. The topology and homotopy for finite spaces are resume in the third chapter. This project is finished in the fourth chapter talking about the LS category in finite spaces and its relation with the vertex arboricity of a certain multigraph for height 1 spaces.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>13</b>
<b>1. Conceptos básicos de Teoría de Grafos</b>	<b>15</b>
1.1. Primeras definiciones . . . . .	15
1.2. Caminos y ciclos . . . . .	17
1.3. Coloración . . . . .	17
1.4. Planaridad . . . . .	18
<b>2. Arboricidad por vértices de un multigrafo</b>	<b>19</b>
2.1. Concepto de arboricidad por vértices . . . . .	19
2.2. Propiedades de la arboricidad por vértices . . . . .	21
2.3. Arboricidad por vértices en grafos n-partitos completos. . . . .	24
<b>3. Espacios de Alexandrov</b>	<b>33</b>
3.1. Espacios de Alexandrov. Resultados relevantes. . . . .	33
3.2. Equivalencia entre conjuntos parcialmente ordenados y A-espacios . . . . .	34
3.3. Homotopía de A-espacios . . . . .	36
3.3.1. Nociones básicas . . . . .	36
3.3.2. A-espacios y homotopía . . . . .	37
3.3.3. Homotopía y orden . . . . .	37
<b>4. La categoría de Lusternik-Schnirelmann de espacios finitos</b>	<b>41</b>
4.1. Definición y ejemplos . . . . .	41
4.1.1. Ejemplos . . . . .	42
4.2. Categoría LS en espacios finitos . . . . .	42
4.3. Categoría LS simplicial y categoría LS de espacios finitos . . . . .	45
4.4. Arboricidad y la categoría LS de espacios finitos de altura uno . . . . .	47



# Introducción

En 1937, P. S. Alexandrov puso de relieve que todo conjunto con un orden parcial (poset) posee una topología natural. De hecho, probó en [1] (también lo hizo de manera independiente A.W. Tucker en [14]) que los posets se corresponden con los espacios topológicos en los que las intersecciones arbitrarias de abiertos son también conjuntos abiertos. Estos espacios son llamados A-espacios.

En un principio, los A-espacios fueron olvidados en topología ya que la condición de Hausdorff hace que los únicos A-espacios en la topología usada en el análisis sean los espacios discretos. Esta falta de interés cambió cuando se demostró que existe una correspondencia natural que asocia a un poliedro  $P$  un A-espacio  $X_P$  de forma que invariantes algebraicos como la homología o el grupo fundamental eran preservados por esa correspondencia. Sin embargo, hay invariantes del tipo de homotopía que no son transferidos por ella.

Uno de ellos es la categoría de Lusternik-Schnirelmann (categoría LS). Este invariante numérico fue creado para acotar inferiormente el mínimo de puntos críticos de una función diferenciable.

La categoría LS se ha desarrollado considerablemente en los últimos años, con diferentes variantes según el contexto topológico dado. En particular, la idea de definirla en conjuntos finitos aparece en [6] en relación con un tipo de categoría LS de tipo simplicial.

Es bien sabido que la categoría LS es muy difícil de calcular y el conocer cotas de la misma resulta de gran interés. En espacios finitos no se conoce un método que permita comprobar la categoría LS ni siquiera para espacios finitos de altura 1, es decir aquellos posets cuyos poliedros asociados son grafos.

Este trabajo extiende la arboricidad por vértices a multigrafos para dar una cota superior a la categoría de espacios finitos de altura 1.

De esta manera, se pone en relación la categoría LS con el estudio de parámetros numéricos en Teoría de Grafos: arboricidad, número cromático, etc..

La arboricidad por vértices (o puntual) de un grafo  $G$ ,  $\rho(G)$ , surge en 1968 de la mano de G. Chartrand, H.V. Kronk y C.E. Wall en [3]. Anteriormente, en 1961, C. St. J. A. Nash-Williams presentó una versión por aristas en [11] y [12].

La arboricidad puntual es una propiedad intrínseca de un grafo  $G$  y está relacionada con otros invariantes para grafos. El caso más interesante es su relación con el número cromático por vértices. Concretamente,  $\rho(G)$  es el mínimo número de colores necesarios para colorear los vértices de  $G$  tal que cada color induzca un subgrafo acíclico.

El concepto de arboricidad por vértices puede ser extendido a clases más amplias que la de los grafos. En este trabajo consideraremos la extensión a los multigrafos dada en [8].

Este trabajo queda así dividido en dos partes principales: la primera formada por los capítulos 1 y 2.

El primer capítulo consta de las definiciones básicas de Teoría de Grafos necesarias para el desarrollo de este trabajo y, el segundo, trata de la extensión a multigrafos de la arboricidad por vértices. En particular, extendemos a multigrafos la cota por el máximo grado de los vértices dada en [3] para grafos y para grafos planares. Además, se hacen algunas consideraciones sobre la arboricidad en multigrafos  $n$ -partitos completos.

La segunda parte está dedicada a la categoría LS de espacios finitos. Esta parte la componen los capítulos 3 y 4.

En el tercer capítulo se recogen los conceptos necesarios para entender los A-espacios, así como la equivalencia entre éstos y los conjuntos parcialmente ordenados (o posets). El cuarto contiene un resumen de [13] necesario para plantear el problema de la determinación de la categoría LS,  $cat(X)$ , de un espacio finito  $X$  de altura 1. La aportación de este trabajo consiste en relacionar  $cat(X)$  con la arboricidad de un multigrafo asociado,  $M(X)$ , dando una cota superior que estime un intervalo de variación de  $cat(X)$  ya que es conocido que una cota inferior de  $cat(X)$  viene dada por la arboricidad del diagrama de Hasse de  $X$ .

# Capítulo 1

## Conceptos básicos de Teoría de Grafos

En este capítulo introductorio se van a recoger los conceptos básicos de Teoría de Grafos necesarios para seguir el trabajo. Los detalles se pueden encontrar en cualquier manual de Teoría de Grafos (por ejemplo, [4]).

### 1.1. Primeras definiciones

Lo primero que debemos recordar es que un **grafo** es un par  $G = (V(G), A(G))$  formado por un conjunto finito no vacío denotado  $V(G)$ , y un conjunto finito de 2-subconjuntos de  $V(G)$  denotado  $A(G)$ . A los elementos de  $V(G)$  se les llama **vértices** de  $G$  y a los elementos de  $A(G)$  se les llama **aristas** de  $G$ . Si el conjunto de las aristas de un grafo es ordenado entonces estamos ante un **grafo dirigido**. Lo denotaremos  $D$ .

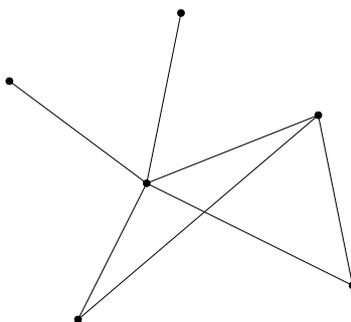


Figura 1.1: Ejemplo de grafo simple

Al cardinal de  $V(G)$ , que es el número de vértices que contiene el grafo  $G$ , se le llama **orden** de  $G$  y se denota como  $\#(V(G))$ . Y al cardinal de  $A(G)$ , que es el número de aristas que contiene el grafo  $G$ , se le llama **tamaño** de  $G$  y se denota como  $\#(A(G))$ .

**Notación 1.1.1.** Si  $V = \{v_0, v_2, \dots, v_n\}$  conjunto de vértices del grafo  $G$  entonces la arista  $\{v_i, v_j\}$  para todo  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  se puede denotar por  $v_i v_j$ .

Para un buen seguimiento de este trabajo es necesario saber que si  $G$  es un grafo y  $u, v \in V(G)$  dos vértices, se dice que  $uv$  conforma una **arista simple** en  $G$  si aparece una única vez en  $A(G)$ . Y se dice que  $uv$  conforma una **arista múltiple** en  $G$  si aparece más de una vez en  $A(G)$ . Así, si  $G$  contiene aristas múltiples entonces  $G$  pasa a ser un **multigrafo**, y lo denotamos  $M$ , y a las aristas múltiples se las llama **multiaristas**.

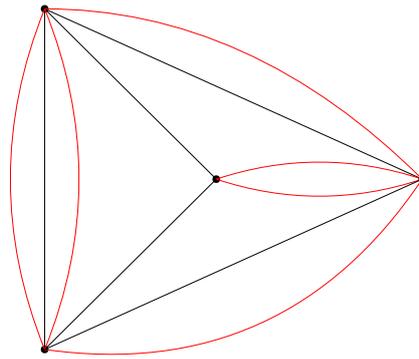


Figura 1.2: Ejemplo de multigrafo

**Notación 1.1.2.** Sea  $M$  multigrafo. Denotaremos  $S(M)$  al grafo resultante de considerar todos los vértices de  $M$  y una arista simple en  $S(M)$  por cada arista de  $M$ .

Las definiciones que recordaremos a continuación son similares para multigrafos.

Si tenemos  $G = (V(G), A(G))$  un grafo se dice que los vértices  $u, v \in V(G)$  son **adyacentes** (o **vecinos**) si  $uv \in A(G)$  (es decir, definen una arista de  $G$ ). De manera similar, dos aristas  $u_1v_1, u_2v_2 \in A$  son **incidentes** si  $u_1v_1 \cap u_2v_2 \neq \emptyset$  (es decir, tienen un vértice en común).

Llamaremos **grado o valencia** de  $v$  al número de aristas incidentes con  $v$ . Es decir, el número de veces que  $v$  es vértice de una arista. Se denotará como  $\delta(v)$ . Si  $\delta(v) = 0$  se dirá que  $v$  es un vértice **aislado**. Al máximo de las valencias de los vértices de  $G$  se le denotará como  $\Delta(G)$ .

Dado  $v \in V(G)$ , el conjunto de vecinos de  $v$  viene dado por  $N(v) = \{u \in V : uv \in A\}$ .

Sea  $G = (V(G), A(G))$  un grafo y  $H = (V(H), A(H))$  grafo tal que  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $A(H) \subseteq A(G)$ , entonces se dice que  $H$  es **subgrafo** de  $G$  y se denota  $H \subseteq G$ .

Si  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $A(H) \subset A(G)$  entonces se dice que  $H$  es **subgrafo propio** de  $G$ . Y si  $V(H) = V(G)$  y  $A(H) \subset A(G)$  se dice que  $H$  es **subgrafo maximal** de  $G$ .

Si  $G = (V(G), A(G))$  es un grafo entonces si  $J \subseteq V(G)$  se define el **subgrafo inducido** por  $J$  y se denota por  $G_J$ , como el grafo  $G_J = (J, E)$  donde

$$E = \{uv : uv \in A(G), u, v \in J\}.$$

Resaltar que el **multigrafo inducido** por  $J \subseteq V(M)$  se define de la misma manera que  $G_J$  y se denota  $M_J$ , siendo  $M = (V(M), A(M))$  un multigrafo.

Un subgrafo  $H$  de un grafo  $G$  se dice **puntualmente inducido o inducido por vértices** si cada arista de  $G$  que une dos vértices de  $H$  es también arista en  $H$ .

Un subgrafo  $H$  de  $G$  es **inducido por aristas** si no contiene vértices aislados.

**Notación 1.1.3.** Notamos  $G - \{v\}$  como el subgrafo de  $G$  resultante de eliminar el vértice  $v$ , así como todas las aristas incidentes en  $v$ .

**Definición 1.1.4** (Grafo n-partito completo). Un **grafo n-partito completo**,  $K(p_1, \dots, p_n)$ , es aquel que tiene su conjunto de vértices particionado en  $n$  subconjuntos disjuntos no vacíos,  $V_i$  con  $\#(V_i) = p_i$ , de manera que, una arista une dos vértices  $u$  y  $v$  si y sólo si  $u \in V_j$  y  $v \in V_k$  con  $j, k \in \{1, \dots, n\}$  y  $j \neq k$ . A cada subconjunto  $V_i$  se le llama **clase**.

Si  $p_i = 1$  para cada  $i$  entonces el grafo es **completo**. Si  $n = 2$  al grafo se le llama **bipartito completo**.

## 1.2. Caminos y ciclos

Sea  $G = (V(G), A(G))$  un grafo, con  $u, v \in V(G)$ . Un **camino** entre  $u$  y  $v$  en  $G$  es una sucesión  $u = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots v_{n-1} e_n v_n$  donde  $v_i \in V(G)$  y  $e_i \in A(G)$  tales que  $e_i = v_{i-1} v_i$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . La **longitud** de un camino es el número de aristas de dicho camino.

**Notación 1.2.1.** Abreviadamente podemos notar un camino como:  $u = v_0 v_1 v_2 \cdots v_{n-1} v_n = v$ .

Se dice que  $u$  y  $v$  están **conectados por un camino** en  $G$  si existe un camino entre  $u$  y  $v$ . Si  $u = v$  el camino entre  $u$  y  $v$  se llama **cerrado**. En particular, se puede dar el camino trivial que es:  $u = v_0 = v_n = v$

**Proposición 1.2.2.** Tenemos una relación de equivalencia en  $V(G)$  dada por  $u \sim v$  si y sólo si existe un camino entre  $u$  y  $v$ .

Una **componente conexa** de un grafo  $G$  es un subgrafo inducido por los vértices de una clase de equivalencia  $\sim$  en  $V(G)$ . Si  $G$  tiene una única componente conexa se dice que  $G$  es **conexo**.

Sean  $G = (V(G), A(G))$  un grafo y  $u, v \in V(G)$ . Un camino entre  $u$  y  $v$  en el que todas las aristas son distintas se llama **recorrido** entre  $u$  y  $v$ . Un recorrido cerrado se llama **circuito**. Un camino en el que todos los vértices son distintos se llama **arco** o **camino simple**. Un camino en el que sólo se repiten el primer vértice y el último se llama **ciclo**.

Un grafo  $G$  se dice **acíclico** si no contiene ciclos. También se le suele llamar **bosque**. Al grafo  $G$  se le llama **árbol** si es un grafo acíclico conexo. Si  $H \subseteq G$  es un árbol diremos que es un **árbol maximal** si contiene a todos los vértices de  $G$ .

## 1.3. Coloración

En esta subsección recordaremos las nociones de coloración y número cromático por vértices que serán utilizados posteriormente en el trabajo.

Una **coloración por vértices** de un grafo  $G = (V(G), A(G))$  con un conjunto finito de colores  $C$  es una asignación de elementos de  $C$  a los vértices de  $G$  de manera que los vértices que sean adyacentes llevan asignados colores diferentes. Es decir, existe  $\gamma : V(G) \rightarrow C$  aplicación denominada **coloración** tal que  $\forall v, w \in V$  con  $vw \in A$  se tiene que  $\gamma(v) \neq \gamma(w)$ .

Cuando esta aplicación existe y el cardinal de  $C$  es  $k$ ,  $\#(C) = k$ , dicha aplicación se llama **k-coloración** de  $G$  y se dice que  $G$  es **k-coloreable**.

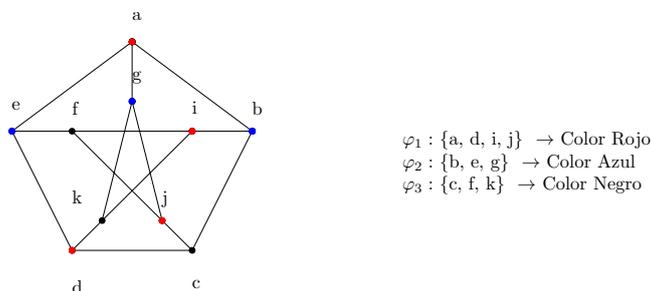


Figura 1.3: Ejemplo de coloración por vértices

El **número cromático** (por vértices) de un grafo  $G$ , denotado como  $\chi(G)$ , es el menor entero  $k$  tal que existe una  $k$ -coloración de  $G$ .

Equivalentemente se puede decir que es el mínimo número de subconjuntos en una partición del conjunto de vértices de  $G$ , tal que cada subconjunto induce un subgrafo trivial.

## 1.4. Planaridad

Un **grafo plano**  $G$  es un grafo dibujado en un plano (un papel, una pizarra, etc.) de manera que todo par de aristas que se encuentre en  $G$  se cortan, únicamente, si son incidentes.

Un **grafo planar**  $G$  es un grafo isomorfo a un grafo plano, es decir, lo podemos redibujar como un grafo plano.

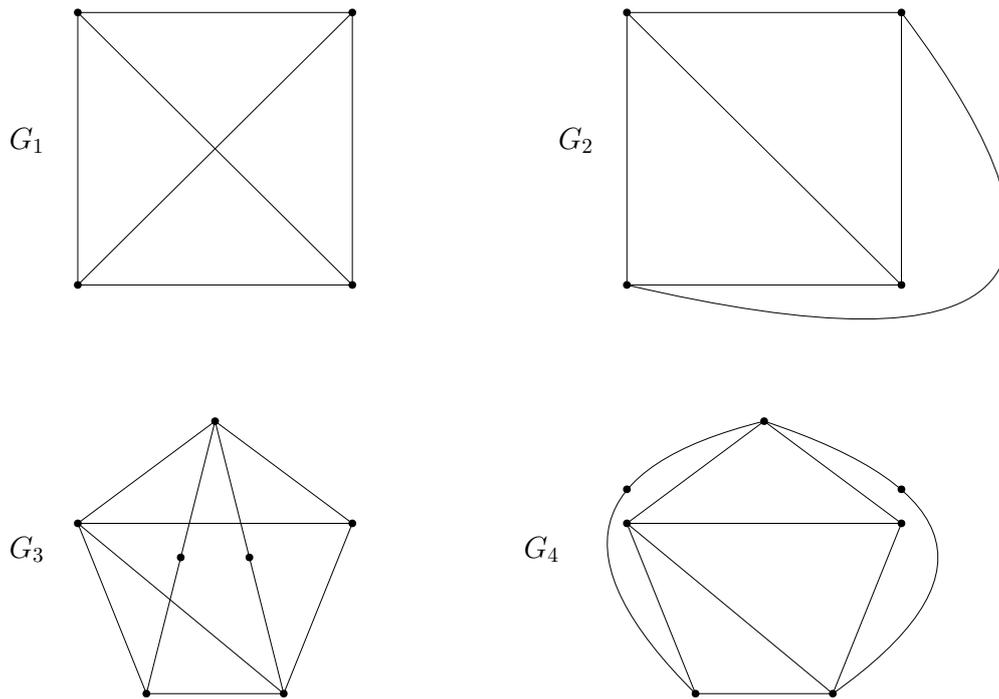


Figura 1.4: Ejemplo de cuatro grafos planares

Por ejemplo, en la Figura 1.4 los cuatro grafos son planares pero  $G_1$  y  $G_3$  no son planos. De hecho  $G_1$  se ha redibujado como  $G_2$  para que sea plano. Lo mismo se ha hecho con  $G_3$  convirtiéndose éste en  $G_4$ .

## Capítulo 2

# Arboricidad por vértices de un multigrafo

En este capítulo hablaremos del concepto de arboricidad puntual en grafos y multigrafos, y estudiaremos sus propiedades en algunas familias concretas de éstos. Toda la información recogida en el capítulo está basada en [3].

### 2.1. Concepto de arboricidad por vértices

En primer lugar comenzaremos definiendo el concepto de arboricidad para grafos. Dicha definición se recoge en [3]. Luego extenderemos el concepto a multigrafos, y veremos algunas de sus propiedades.

**Definición 2.1.1.** La **arboricidad puntual** o **por vértices** de un grafo  $G$ ,  $\rho(G)$ , se define como el mínimo número de subconjuntos disjuntos en los que el conjunto de vértices de  $G$  puede ser dividido de manera que cada subconjunto induce un subgrafo acíclico.

Es claro que  $\rho(G) \geq 1$  para todo  $G \neq \emptyset$  y que  $\rho(G) = 1$  si y sólo si  $G$  es acíclico.

**Observación 2.1.2.** La definición que acabamos de dar es exactamente la misma para multigrafos. Lo que tenemos que tener en cuenta es que si dos vértices  $u$  y  $v$  del multigrafo  $M$  poseen aristas múltiples entre ellos, dichos vértices deben de estar en subconjuntos distintos. Si estuviesen en el mismo, el subconjunto induciría un subgrafo de  $M$  que contiene al menos un ciclo.

Veamos un ejemplo en el que calculamos la arboricidad puntual a un multigrafo  $M$ .

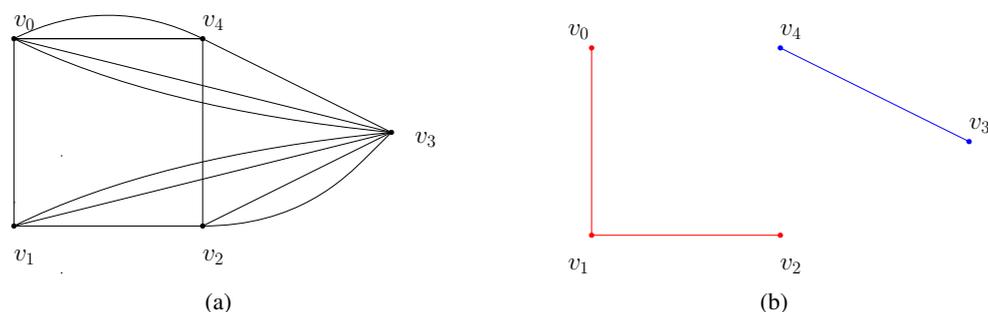


Figura 2.1: Multigrafo  $M$  y sus dos subgrafos acíclicos inducidos por una posible partición del conjunto de vértices de  $V(K)$

**Ejemplo 2.1.3.** Si consideramos  $M$  el multigrafo dado por la Figura 2.1(a), podemos decir que  $\rho(M) = 2$ , que es el mínimo número de subconjuntos en los que pueden ser divididos los vértices de  $M$  de manera que cada uno induce un subgrafo acíclico.  $\rho(M)$  no puede ser uno ya que  $M$  contiene ciclos.

Dos subconjuntos del conjunto de vértices de  $M$  son:  $V'_0 = \{v_0, v_1, v_2\}$  y  $V'_1 = \{v_3, v_4\}$ . Dichos subconjuntos inducen los subgrafos acíclicos que se muestran en la Figura 2.1(b).

Resaltamos que los subconjuntos de vértices de  $V(M)$  no son únicos, y por lo tanto, tampoco lo son los subgrafos acíclicos que inducen.

De manera natural, por la definición, se tiene el siguiente resultado

**Proposición 2.1.4.** Dados dos grafos  $G$  y  $H$  con  $H \subseteq G$  se verifica:

$$\rho(H) \leq \rho(G)$$

En la proposición siguiente, mostraremos la relación que hay entre el número cromático de un grafo y su arboricidad.

**Proposición 2.1.5.** Para todo  $G$  se tiene que:

$$\rho(G) \leq \chi(G) \leq 2\rho(G)$$

donde  $\chi(G)$  es el número cromático de  $G$ .

*Demostración.*  $\boxed{\rho(G) \leq \chi(G)}$  Supongamos que  $\chi(G) = r$  entonces por la definición existen  $V_1, \dots, V_r$  con  $V_i \subseteq V(G)$  para todo  $1 \leq i \leq r$  tal que  $G_{V_i}$  es un subgrafo inducido sin aristas. Entonces  $G_{V_i} = V_i$  para cualquier  $1 \leq i \leq r$ . Por lo tanto,  $G_{V_i}$  es acíclico. Así, aplicando la Definición 2.1.1 tenemos que:  $\rho(G) \leq r = \chi(G)$ . Entonces  $\rho(G) \leq \chi(G)$ .

$\boxed{\chi(G) \leq 2\rho(G)}$  Supongamos ahora  $\rho(G) = r$ , esto significa que el conjunto de vértices de  $G$ ,  $V(G)$ , se puede particionar en  $V_1, \dots, V_r$  subconjuntos tal que cada uno de ellos induce un subgrafo acíclico. Entonces  $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$  y cada  $V_i$  con  $1 \leq i \leq r$  induce el subgrafo  $G_{V_i}$  acíclico de  $G$ . Entonces cada  $G_{V_i}$  es un árbol o un bosque, por tanto,  $\chi(G_{V_i}) \leq 2$ .

De manera general, teniendo en cuenta esto último, tenemos que existe una  $2r$ -coloración de  $G$  entonces  $\chi(G) \leq 2r$ , equivalentemente  $\chi(G) \leq 2\rho(G)$  como queríamos demostrar.  $\square$

Estas cotas se tienen también para multigrafos. Veámoslo en el corolario siguiente. Antes recordemos que para un multigrafo  $M$ ,  $S(M)$  es el grafo resultante de considerar todas las aristas de  $M$  como aristas simples.

**Corolario 2.1.6.** Sea  $M$  un multigrafo. Se tiene:

$$\rho(S(M)) \leq \rho(M) \leq \chi(M) = \chi(S(M)) \leq 2\rho(S(M))$$

Por todo esto que se ha explicado, se puede interpretar la arboricidad por vértices como un coloreado (vértices adyacentes pueden llevar el mismo color), de manera que  $\rho(G)$  es el mínimo número de colores necesarios para colorear los vértices de  $G$  tal que no haya ciclos con todos sus vértices del mismo color.

**Corolario 2.1.7.** Si  $G$  es un grafo acíclico no trivial, su arboricidad es uno. Si  $M$  es un multigrafo con  $S(M)$  acíclico, su arboricidad es dos.

## 2.2. Propiedades de la arboricidad por vértices

En esta sección presentaremos una cota superior de  $\rho(M)$  en función del máximo grado de los vértices de  $M$ . Luego restringiremos el estudio de dicha cota para la familia de los grafos planares.

Antes de enunciar el siguiente teorema recordemos que,  $\lceil x \rceil$  es el menor entero no más pequeño que  $x$ . Tenemos entonces:

**Teorema 2.2.1.** Para cualquier multigrafo  $M$  se tiene:

$$\rho(M) \leq \left\lceil \frac{1 + \Delta(M)}{2} \right\rceil$$

Este resultado es análogo al Teorema 2 enunciado para grafos simples en [3] y su demostración sigue el mismo esquema de razonamiento. Más aún, la cota obtenida es similar.

Previamente a la demostración de este teorema, se demostrará el siguiente lema necesario para el desarrollo de la misma.

**Lema 2.2.2.** Sea  $M$  un multigrafo y  $v \in V(M)$ . Supongamos  $V_1, \dots, V_r$  subconjuntos del conjunto de vértices de  $M - \{v\}$  disjuntos, tal que cada  $V_i$  con  $1 \leq i \leq r$  induce un subgrafo acíclico de  $M - \{v\}$ . Entonces si:

$$\rho(M - \{v\}) = \left\lceil \frac{1 + \Delta(M)}{2} \right\rceil$$

se puede encontrar un  $V_i$  tal que  $V_i \cap N(v)$  es a lo más un vértice. Más aún, de todos los  $V_i$  tal que  $V_i \cap N(v) = \{u\}$  existe al menos uno donde se verifica que  $uv$  es una arista simple.

*Demostración.* Por reducción al absurdo:

Supongamos que  $\#(V_i \cap N(v)) \geq 2$  para todo  $i$ . Entonces:

$$\Delta(M) \geq \delta(v) \geq 2r$$

Entonces, por la definición de arboricidad, se tiene:

$$r \geq \rho(M - \{v\}) = \left\lceil \frac{1 + \Delta(M)}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{1 + 2r}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{2} + r \right\rceil = r + 1 \quad (2.1)$$

Por tanto:

$$r \geq r + 1 \text{ lo cual es imposible.}$$

De manera que un subconjunto  $V_i$  contiene como mucho un vértice adyacente a  $v$ .

Supongamos ahora  $\#(V_i \cap N(v)) \geq 1$  para toda  $i = 1, 2, \dots, r$ . Entonces existen ciertos subconjuntos  $V_j$  con  $1 \leq j \leq i \leq r$  que cumplen que  $\#(V_j \cap N(v)) = 1$ , es decir,  $V_j \cap N(v) = \{u_j\}$ . Sea  $u_j v$  arista doble para todo  $1 \leq j \leq i$  entonces:

$$\Delta(M) \geq \delta(v) \geq 2r$$

por lo que volveríamos a tener (2.1) y, por lo tanto, una contradicción. Luego, para algún  $j$  con  $1 \leq j \leq j + 1 \leq r$  tal que  $V_j \cap N(v) = \{u_j\}$ , la arista  $u_j v$  ha de ser simple.  $\square$

*Demostración Teorema 2.2.1:* Se procede por inducción en el número de vértices,  $p$ , de  $M$ :

$\boxed{p = 1}$  Trivial.

$\boxed{p - 1 \implies p}$  Supongamos que el resultado es cierto para  $p - 1$  vértices (con  $p \geq 2$ ) y veamos que se verifica para un multigrafo  $M$  de  $p$  vértices.

Sin pérdida de generalidad, tomemos  $v \in M$  vértice y consideremos el grafo  $M - \{v\}$ . Sea  $r = \rho(M - \{v\})$ , por hipótesis de inducción se tiene:

$$r \leq \left\lceil \frac{1 + \Delta(M - \{v\})}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{1 + \Delta(M)}{2} \right\rceil$$

Por lo tanto, es posible particionar el conjunto de vértices  $V(M - \{v\})$  en subconjuntos  $V_1, V_2, \dots, V_r$  tal que cada  $V_i$  para todo  $1 \leq i \leq r$  induce un subgrafo acíclico.

Veamos si es posible hacer esto en  $V(M)$ . Consideramos dos casos:

- **Caso 1:**  $r < \left\lceil \frac{1 + \Delta(M)}{2} \right\rceil$ . Entonces la partición en  $r + 1$  subconjuntos de  $V(M)$ ,  $V_1, V_2, \dots, V_r, \{v\}$  produce el resultado deseado.
- **Caso 2:**  $r = \left\lceil \frac{1 + \Delta(M)}{2} \right\rceil$ . Por el Lema 2.2.2, existe un  $V_i$  con  $\#(V_i \cap N(v)) \leq 1$ . Aquí hemos de distinguir dos subcasos:
  - Si  $\#(V_i \cap N(v)) = 0$ . Sea  $H' \subset M - \{v\}$  el subgrafo inducido por  $V_i$ , entonces el subgrafo  $H \subseteq M$  inducido por  $V_i \cup \{v\}$  es  $H' \sqcup \{v\}$ .
  - Si  $\#(V_i \cap N(v)) = 1$ . Entonces  $V_i \cap N(v) = \{u\}$  y, por el Lema 2.2.2, se puede elegir  $V_i$  tal que  $uv$  es una arista simple. Luego, la partición  $V_1, \dots, V_i \cup \{v\}, \dots, V_r$  da el resultado que queremos.

En cualquiera de los casos se tienen subgrafos acíclicos. Por lo tanto, se concluye aquí la prueba.  $\square$

**Corolario 2.2.3.** El resultado anterior es el mejor posible para grafos simples completos ya que  $\Delta(K_p) = p - 1$  y se alcanza la cota dada. Es más, si  $p$  es par la arboricidad puntual coincide con el número máximo de aristas independientes y si  $p$  es impar coincide con el número máximo de aristas independientes más uno.

Es decir, si  $K_p$  es el grafo simple completo con  $p$  vértices entonces:

$$\rho(K_p) = \begin{cases} \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil & \text{si } p \text{ es par} \\ \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil + 1 & \text{si } p \text{ es impar} \end{cases}$$

Obsérvese que para multigrafos esta igualdad no siempre se tiene. Por ejemplo, para el multigrafo  $M_p$  resultante de considerar  $\Delta(M_p) = 2(p - 1)$ , su arboricidad no es  $\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil$  sino que es  $p$ , ya que:

$$\rho(M_p) \leq \left\lceil \frac{1 + \Delta(M_p)}{2} \right\rceil = \left\lceil p - \frac{1}{2} \right\rceil = p$$

Ahora vamos a estudiar la arboricidad puntual en algunas familias de grafos y multigrafos. Comenzaremos con los grafos planares.

En grafos planares, la cota dada por el Teorema 2.2.1 no es particularmente útil ya que hay grafos que pueden contener vértices con el grado muy elevado mientras su arboricidad puntual es baja. Sin embargo, de la Proposición 2.1.5 se tiene que  $\rho(G) \leq \chi(G)$ , por lo que por el Teorema de los Cuatro Colores (recogido en [4]),  $\rho(G)$  no puede ser mas grande que 4 para grafos planares. Veamos una cota aún más ajustada para esta familia de grafos (Teorema 3 en [3]).

**Teorema 2.2.4.** [3] Para cualquier grafo planar  $G$  se tiene:

$$\rho(G) \leq 3$$

*Demostración:* Se procede por inducción en el número de vértices,  $p$ , de  $G$ :

$p = 1$  Es trivial.

$p \implies p + 1$  Supongamos que el resultado es cierto para todo grafo  $G'$  con  $p$  vértices tal que  $p \geq 1$  y tomemos ahora un grafo  $G$  con  $p + 1$  vértices.

Como  $G$  es planar, entonces ha de contener un vértice  $v$  tal que  $\delta(v) \leq 5$ . (Este resultado es el Corolario 5.7 de [4]). Su demostración se tiene como consecuencia de la Fórmula de Euler (Teorema 5.3 de [4]). El grafo obtenido de quitarle a  $G$  dicho vértice  $v$ ,  $G - \{v\}$ , posee  $p$  vértices y, por lo tanto, es planar y cumple  $\rho(G - \{v\}) \leq 3$  por hipótesis. Así, el conjunto de vértices de  $G - \{v\}$  se puede particionar en tres (no necesariamente todos no vacíos) subconjuntos  $V_1, V_2, V_3$  tal que cada uno de ellos induce un subgrafo acíclico. Como el grado de  $v$  no excede de 5, al menos uno de los subconjuntos  $V_i$  contiene como mucho un vértice adyacente a  $v$ . Sea  $V_1$  ese subconjunto, entonces  $V_1 \cup \{v\}, V_2, V_3$  constituye una partición del conjunto de vértices de  $G$  tal que cada subconjunto induce un subgrafo acíclico. Entonces,  $\rho(G) \leq 3$ , completando así la prueba.  $\square$

Veamos un ejemplo en el que la arboricidad es exactamente tres.

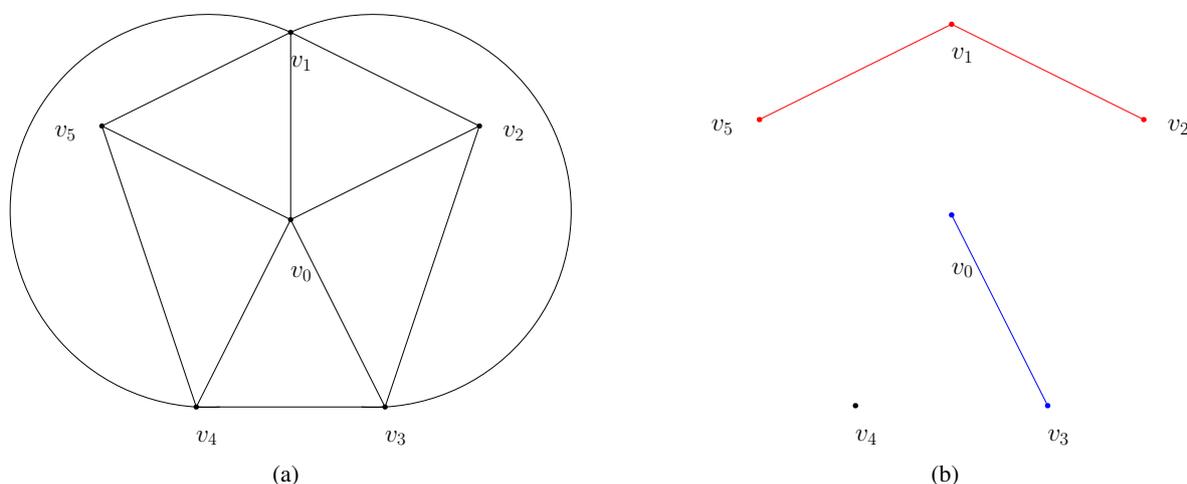


Figura 2.2: Grafo planar  $G$  y sus tres subgrafos acíclicos inducidos por una posible partición del conjunto de vértices  $V(K)$ .

**Ejemplo 2.2.5.** Sea el grafo  $G$  representado en la Figura 2.2(a), el grafo rueda de 6 vértices ( $W_6$ ) al que se le han añadido el máximo número de aristas permitidas antes de que deje de ser planar. Si aplicamos la definición de arboricidad puntual a  $G$ , observamos que el mínimo número de subconjuntos de  $V(G)$  que inducen subgrafos acíclicos es tres. Dichos subconjuntos son:  $V_0 = \{v_1, v_2, v_5\}$ ,  $V_1 = \{v_0, v_3\}$  y  $V_2 = \{v_4\}$ ; y los subgrafos que inducen se pueden observar en la Figura 2.2(b).

Hemos de recordar que los subconjuntos de vértices tomados de  $V(G)$  no son únicos. Podríamos haber elegido otros y éstos inducirían otros subgrafos, pero siempre serían subgrafos acíclicos de  $G$ .

Si generalizamos esta propiedad a multigrafos se observa que la cota aumenta.

**Observación 2.2.6.** Para cualquier multigrafo planar  $M$ , considerando el Corolario 2.1.6, tenemos:

$$\rho(M) \leq \chi(M) = \chi(S(M)) \leq 4 \leq 2\rho(S(M))$$

Por lo que la cota en multigrafos planares aumenta con respecto a la cota para grafos simples planares en una unidad como máximo. Esto es porque el número cromático de  $M$  coincide con el número cromático de  $S(M)$ , y sabemos, por el Teorema de los Cuatro Colores (ver [4]) que el número cromático de un grafo planar es a lo más 4.

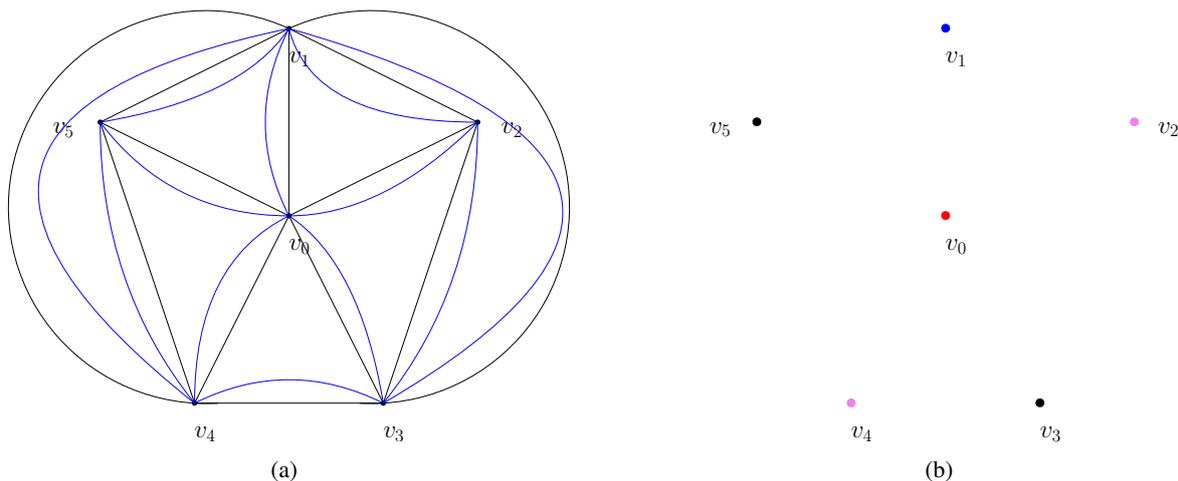


Figura 2.3: Multigrafo planar  $M$  y sus subgrafos acíclicos inducidos por una posible partición del conjunto de vértices de  $V(M)$

**Ejemplo 2.2.7.** Sea ahora el multigrafo de la Figura 2.3(a) el grafo  $G$  del Ejemplo 2.2.5 con todas sus aristas múltiples. Lo denotaremos  $M$ . Si consideramos el multigrafo  $M - \{v_0\}$  éste contiene ciclos por lo que lo único que podemos afirmar es que  $\rho(M - \{v_0\}) \geq 2$  y que  $v_0$  debe formar él solo un subconjunto de la partición de  $V(M)$ . Veamos ahora si el subgrafo  $M - \{v_0\}$  posee arboricidad puntual igual a tres. Si es así, podemos afirmar que el multigrafo  $M$  tiene arboricidad puntual cuatro. Entonces, si le quitamos a  $M - \{v_0\}$  el vértice  $v_1$  el multigrafo resultante contendría ciclos, por lo que su arboricidad sería mayor o igual a dos y  $v_1$  debe formar él solo un subconjunto de la partición de  $V(M - \{v_0\})$ . Por lo tanto tenemos que  $\rho(M - \{v_0\}) = 3$ . Entonces,  $\rho(M)$  es exactamente cuatro. Si tomamos como posible partición  $V_0 = \{v_0\}$ ,  $V_1 = \{v_1\}$ ,  $V_2 = \{v_2, v_4\}$  y  $V_3 = \{v_3, v_5\}$  los subgrafos acíclicos que inducen son los triviales. Los podemos contemplar en la Figura 2.3(b).

### 2.3. Arboricidad por vértices en grafos n-partitos completos.

Veamos ahora como será la arboricidad puntual para la familia de grafos n-partitos completos y cómo varía si hablamos de multigrafos n-partitos completos. Veremos al final de la sección que esto último se complica bastante.

Se tiene que  $\chi(K(p_1, p_2, \dots, p_n)) = n$  en los grafos n-partitos completos. Por tanto, de la Proposición 2.1.5, se sigue que  $\rho = \rho(K(p_1, p_2, \dots, p_n)) \leq n$ . Enunciemos entonces el resultado sobre arboricidad puntual para esta familia de grafos. (Teorema 4 recogido en [3])

**Teorema 2.3.1.** [3] La arboricidad por vértices de un grafo n-partito completo  $K(p_1, p_2, \dots, p_n)$  con  $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$  viene dada como:

$$\rho(K(p_1, p_2, \dots, p_n)) = n - \max \left\{ k \mid k \leq n - \sum_{i=0}^k p_i \right\}$$

donde  $p_0 = 0$

*Demostración:* Procederemos por inducción en  $n$ .

$n = 1$  Trivial.

$n \implies n + 1$  Supongamos la fórmula cierta para  $n$  con  $n \geq 1$ .

Consideremos el grafo  $K(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})$  con los subconjuntos  $V_1, V_2, \dots, V_{n+1}$  como en la Definición 1.1.4.

Para el subgrafo  $K(p_1, p_2, \dots, p_n)$  vamos a suponer un  $t \geq 0$  tal que

$$t \leq n - \sum_{i=0}^t p_i \quad \text{pero} \quad (t+1) > n - \sum_{i=0}^{t+1} p_i$$

Por hipótesis,  $\rho(K(p_1, p_2, \dots, p_n)) = n - t$  y por la Proposición 2.1.4 se tiene

$$\rho(K(p_1, p_2, \dots, p_n)) \leq \rho(K(p_1, p_2, \dots, p_{n+1}))$$

También, como el conjunto adicional de vértices  $V_{n+1}$ , induce el subgrafo trivial se sigue que:

$$\rho(K(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})) \leq \rho(K(p_1, p_2, \dots, p_n)) + 1$$

En definitiva, se tiene la siguiente serie de desigualdades:

$$\rho(K(p_1, p_2, \dots, p_n)) \leq \rho(K(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})) \leq \rho(K(p_1, p_2, \dots, p_n)) + 1 \quad (2.2)$$

Entonces para probar lo que queremos tendremos que considerar dos casos:

- **Caso 1:** Supongamos  $(t+1) > (n+1) - \sum_{i=0}^{t+1} p_i$ . Esto implica que

$$(n+1) - \text{máx} \left\{ k \mid k \leq (n+1) - \sum_{i=0}^k p_i \right\} = n+1 - t.$$

En tal caso veamos que  $\rho(K(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})) = \rho(K(p_1, p_2, \dots, p_n)) + 1$  y si seguirá el paso  $n+1$  de la demostración por inducción para el Caso 1.

Procedemos por reducción al absurdo:

Supongamos que no se cumple lo último dicho, así,

$$\rho(K(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})) = \rho(K(p_1, p_2, \dots, p_n))$$

El grafo  $(n+1)$ -partito completo  $K(p_1, p_2, \dots, p_t, p_{t+1}, \dots, p_{t+1}) = K'$  es subgrafo de  $K(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})$ ; por lo tanto,

$$\rho(K') \leq \rho(K(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})) = \rho(K(p_1, p_2, \dots, p_n)) = n - t$$

Sin embargo, el cardinal de los vértices de  $K'$  es  $\sum_{i=0}^{t+1} p_i + (n-t)p_{t+1}$ . Por tanto, cualquier partición del conjunto de vértices de  $K'$  en  $n-t$  (o menos) subconjuntos, debe contener por lo menos uno

de ellos con al menos  $\frac{\sum_{i=0}^{t+1} p_i + (n-t)p_{t+1}}{n-t}$  vértices.

Pero estamos suponiendo que  $\sum_{i=0}^{t+1} p_i > n-t$  entonces

$$\frac{\sum_{i=0}^{t+1} p_i + (n-t)p_{t+1}}{n-t} > 1 + p_{t+1}$$

por lo que uno de los subconjuntos de la partición, digamos  $\mathcal{Z}$ , posee al menos  $p_{t+1} + 2$  vértices. Como el cardinal de cada clase de  $K'$  es menor o igual que  $p_{t+1}$  entonces,  $\mathcal{Z}$  debe de tener vértices de al menos dos clases de  $K'$ . En particular, si  $p_{t+1} = 1$  entonces el subgrafo generado por  $\mathcal{Z}$  contiene un triángulo (los dos vértices extra son ambos de distinta clase, tanto entre ellos como de  $p_{t+1}$ ); y si  $p_{t+1} \geq 2$ ,  $\mathcal{Z}$  genera un subgrafo que contiene un 4-ciclo (los dos vértices extra pueden pertenecer ambos a la misma clase pero siempre a distinta que  $p_{t+1}$ ).

Como consecuencia de todo lo anterior necesariamente  $\rho(K') > n - t$ , lo que contradice la hipótesis de reducción al absurdo.

- **Caso 2:** Supongamos ahora  $(t + 1) \leq (n + 1) - \sum_{i=0}^{t+1} p_i$ .

Pero  $(t + 1) > n - \sum_{i=0}^{t+1} p_i$  de donde se sigue que  $(t + 2) > (n + 1) - \sum_{i=0}^{t+2} p_i$ . Así, en este caso:

$$(n + 1) - \max \left\{ k \mid k \leq (n + 1) - \sum_{i=0}^k p_i \right\} = (n + 1) - (t + 1) = n - t$$

Por lo que aquí lo que tenemos que probar es que:

$$\rho(K(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})) = \rho(K(p_1, p_2, \dots, p_n))$$

De  $\sum_{i=0}^{t+1} p_i \leq n - t$  deducimos que:

$$\sum_{i=0}^{t+1} p_i = |V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{t+1}| \leq |\{V_{t+2}, V_{t+3}, \dots, V_{n+1}\}| = n - t$$

Para cada  $u \in V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{t+1}$  consideramos los conjuntos  $V_j \cup \{u\}$  para  $t + 2 \leq j \leq s$  con  $s \leq n - t$  hasta agotar los vértices de  $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{t+1}$ . Los subgrafos inducidos por cada  $V_j \cup \{u\}$  son grafos acíclicos de la forma  $K(1, p_j)$  para cada valor de  $j$ .

Por lo tanto,

$$\rho(K(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})) \leq n - t$$

De (2.2) y la ecuación anterior se concluye:

$$\rho(K(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})) = n - t$$

Cumpliendo así lo que queremos y concluyendo por tanto la demostración.  $\square$

Veamos un ejemplo que ilustra el resultado probado.

**Ejemplo 2.3.2.** Consideremos el grafo 3-partito completo  $K(2, 2, 3)$ , representado en la Figura 2.4(a). Si calculamos su arboricidad según la fórmula del Teorema 2.3.1 obtenemos:

$$\rho(K(2, 2, 3)) = 3 - \max \{ k \mid k \leq 3 - \sum_{i=0}^k p_i \} = 3 - 1 = 2$$

donde  $p_i = \#(V_i)$  para todo  $1 \leq i \leq 3$  con  $V_i$  cada uno de los subconjuntos disjuntos no vacíos en los que se particiona el conjunto de vértices del grafo  $K(2, 2, 3)$ , según la Definición 1.1.4.

Por lo que la arboricidad de  $K(2, 2, 3)$  es dos. Esto significa que podemos encontrar dos subconjuntos del conjunto de vértices de  $K(2, 2, 3)$  de manera que cada uno de ellos induce un subgrafo acíclico.

Los subconjuntos de vértices serán:  $V'_0 = \{v_0, v_4, v_5, v_6\}$  y  $V'_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$  y una representación de los subgrafos acíclicos inducidos por ellos viene dada en la Figura 2.4(b).

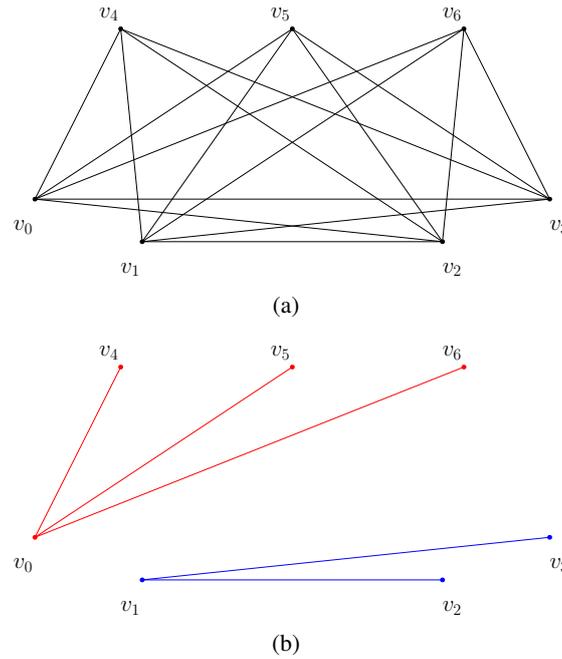


Figura 2.4: Grafo 3-partito completo  $K(2, 2, 3)$  y sus subgrafos acíclicos inducidos por una posible partición del conjunto de vértices de  $V(K(2, 2, 3))$

**Corolario 2.3.3.** Para el grafo bipartito completo  $K(p_1, p_2)$ ,  $p_1 \leq p_2$  se tiene:

$$\rho(K(p_1, p_2)) = \begin{cases} 2 & \text{si } p_1 > 1 \\ 1 & \text{si } p_1 = 1 \end{cases}$$

El Teorema 2.3.1 se cumple en grafos n-partitos completos. Veamos ahora qué ocurre cuando tenemos un multigrafo, en este caso, n-partito.

En cualquier caso, por el Corolario 2.1.6, se sabe que la arboricidad del multigrafo va a estar acotada tanto inferior como superiormente siempre. Sabiendo esto, se pueden dar ejemplos de cómo aumenta la arboricidad de un multigrafo en función del número de aristas múltiples que haya entre sus vértices.

**Observación 2.3.4.** En los multigrafos considerados a continuación, las aristas múltiples serán siempre aristas dobles pues es claro que en caso de tener aristas de multiplicidad mayor, la arboricidad puntual no aumenta.

**Ejemplo 2.3.5.** Consideremos el multigrafo bipartito completo con  $p_1 = n$  y  $p_2 = m$  siendo  $n \neq 0$  y  $m \neq 0$  enteros positivos. Lo denotaremos  $M(n, m)$ . Queremos calcular la arboricidad de éste, por lo que para ello, en primer lugar aplicamos el Corolario 2.1.6. Entonces tenemos:

$$\rho(K(n, m)) \leq \rho(M(n, m)) \leq \chi(K(n, m)) \iff 2 \leq \rho(M(n, m)) \leq 2$$

siendo  $K(n, m)$  el grafo bipartito completo resultante de considerar las aristas de  $M(n, m)$  como aristas simples. De la ecuación anterior podemos deducir que  $\rho(M(n, m)) = 2$  para cualquier  $n$  y  $m$  y teniendo el número de aristas múltiples que sea. Esto lo podemos ver en los siguientes grafos para los casos particulares  $K(2, 3)$  y  $M(2, 3)$ .

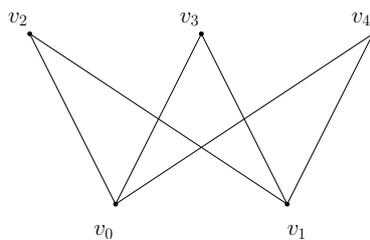


Figura 2.5: En este caso tenemos el grafo simple bipartito completo,  $K(2, 3)$ . Es claro que  $\rho(K(2, 3)) = 2$ . Tomando la partición:  $V'_0 = \{v_0, v_3, v_4, v_5\}$  y  $V'_1 = \{v_1\}$  del conjunto  $V(K(2, 3))$ , se tienen dos subconjuntos que inducen subgrafos acíclicos de  $K(2, 3)$ .

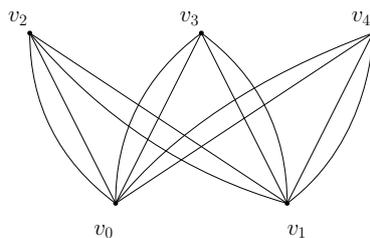


Figura 2.6: Aquí estamos ante el multigrafo  $M(2, 3)$  con todas sus aristas múltiples. Observamos que  $\rho(M(2, 3))$  es también dos ya que únicamente podemos tomar como subconjuntos de vértices  $V'_0 = \{v_0, v_1\}$  y  $V'_1 = \{v_3, v_4, v_5\}$  y ambos inducen subgrafos acíclicos, los triviales.

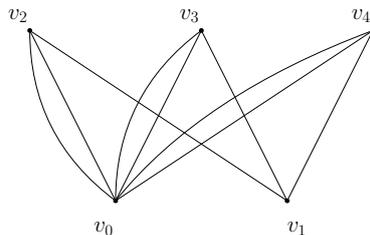


Figura 2.7: Volvemos a tener el multigrafo  $M(2, 3)$  si bien ahora no todas las aristas son múltiples, tenemos múltiples y simples. Observamos que  $\rho(M(2, 3))$  vuelve a ser dos. Tomando  $V'_0 = \{v_0\}$  (ya que si tomamos cualquier otro vértice se induciría un subgrafo con ciclos) y  $V'_1 = \{v_1, v_3, v_4, v_5\}$  tenemos dos subconjuntos que inducen subgrafos acíclicos.

Veamos ahora casos particulares de multigrafos  $n$ -partitos completos con  $n \geq 3$  y cómo aumenta su arboricidad puntual en función de las aristas múltiples.

Es claro, que por el Corolario 2.1.6 se tiene:

$$\rho(K(p_1, \dots, p_n)) \leq \rho(M(p_1, \dots, p_n)) \leq \chi(K(p_1, \dots, p_n)) \quad (2.3)$$

donde  $p_i = \#(V_i)$  para todo  $1 \leq i \leq n$  con  $V_i$  cada uno de los subconjuntos disjuntos no vacíos en los que se particiona el conjunto de vértices de los grafos  $n$ -partitos, y,  $M(p_1, \dots, p_n)$  es un multigrafo  $n$ -partito cuyo grafo simple  $n$ -partito completo asociado es  $K(p_1, \dots, p_n)$ .

**Notación 2.3.6.** A partir de ahora y para evitar confusiones, denotaremos  $N_i$  a cada uno de los subconjuntos de una partición de  $V(M(p_1, \dots, p_n))$  que induce un subgrafo acíclico y proporciona la arboricidad del multigrafo. Y denotaremos  $V_i$  a cada una de las clases del multigrafo dadas por la Definición 1.1.4.

**Ejemplo 2.3.7.** Sea  $M(2, 2, 3)$  el multigrafo 3-partito completo cuyo grafo simple 3-partito completo asociado es  $K(2, 2, 3)$ . Por el Teorema 2.3.1 obtenemos que  $\rho(K(2, 2, 3)) = 2$  de la fórmula:

$$\rho(K(2, 2, 3)) = 3 - \max\{k \mid k \leq 3 - \sum_{i=0}^k p_i\} = 3 - 1 = 2$$

Entonces,  $2 \leq \rho(M(2, 2, 3)) \leq 3$  ya que  $\chi(K(2, 2, 3)) = 3$ . Sabiendo esto vamos a determinar si la arboricidad del multigrafo es 2 ó 3. El aumento del número de la arboricidad se producirá si hay aristas múltiples entre los vértices de más de dos clases. Que haya aristas múltiples únicamente entre los vértices de dos clases,  $V_i$  y  $V_j$  con  $0 \leq i, j \leq 2$  e  $i \neq j$ , no afecta en el aumento de  $\rho(M(2, 2, 3))$  ya que  $M(p_i, p_j)$  es un multigrafo bipartito y hemos dicho que su arboricidad es siempre 2. Veamos en las figuras distintos casos:

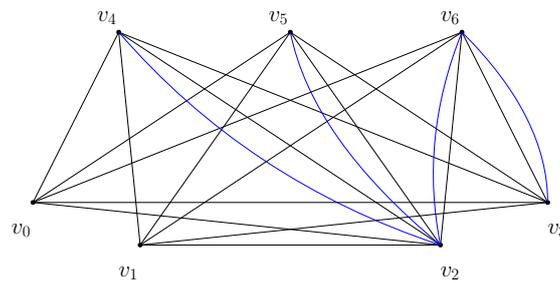


Figura 2.8: En este caso, tenemos un ejemplo de lo que comentamos antes. Si consideramos  $V_0 = \{v_0, v_1\}$ ,  $V_1 = \{v_2, v_3\}$  y  $V_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$  observamos que las aristas múltiples las tenemos entre vértices de las clases  $V_1$  y  $V_2$ . Tomando  $N_0 = \{v_0, v_4, v_5, v_6\}$  y  $N_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$  como una partición  $V(M(2, 2, 3))$ , tenemos que  $N_0$  y  $N_1$  inducen subgrafos acíclicos. Por lo tanto,  $\rho(M(2, 2, 3)) = 2$

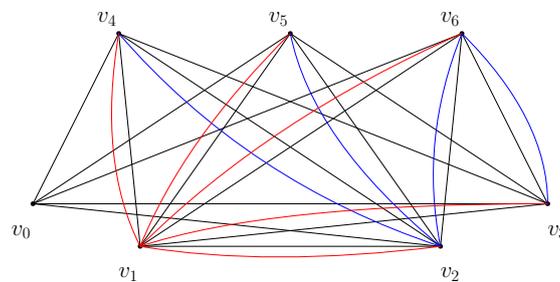


Figura 2.9: Aquí observamos que  $v_1 \in V_0$  posee aristas múltiples con todos los vértices de  $V_1$  y  $V_2$ . Por lo tanto, la partición de vértices que tomaremos será:  $N_0 = \{v_0, v_4, v_5, v_6\}$ ,  $N_1 = \{v_1\}$  y  $N_2 = \{v_2, v_3\}$ . Dicha partición induciría subgrafos acíclicos. Por lo que aquí,  $\rho(M(2, 2, 3)) = 3$ .

**Ejemplo 2.3.8.** Consideremos el multigrafo  $M(1, 1, 3, 4)$ . Aplicando el Teorema 2.3.1,  $\rho(K(1, 1, 3, 4)) = 2$  con  $K(1, 1, 3, 4)$  el grafo simple 4-partito completo asociado a  $M(1, 1, 3, 4)$ . Dicho esto y teniendo en cuenta (2.3) tenemos:

$$2 \leq \rho(M(1, 1, 2, 3)) \leq 4$$

Veamos ejemplos donde la arboricidad del multigrafo es 2, 3 ó 4 en función del número de aristas múltiples.

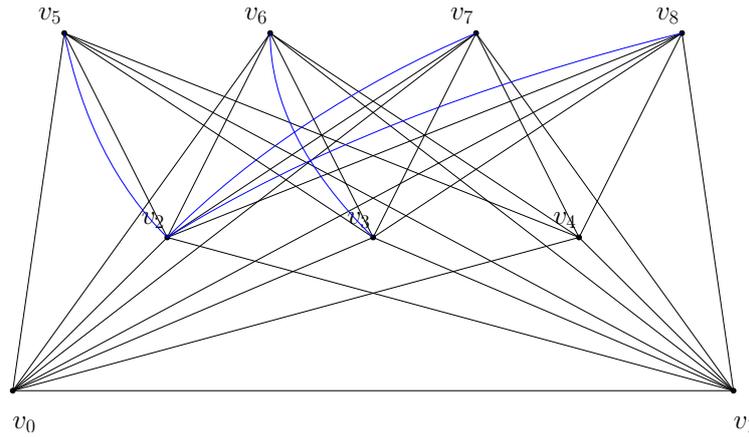


Figura 2.10: Consideremos  $V_0 = \{v_0\}$ ,  $V_1 = \{v_1\}$ ,  $V_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$  y  $V_3 = \{v_5, v_6, v_7, v_8\}$ . En la figura podemos observar que el multigrafo tiene las aristas múltiples entre los vértices de las clases  $V_2$  y  $V_3$ . Veamos que podemos tomar una partición de los vértices del multigrafo de manera que la arboricidad de este último sea la misma que la de  $K(1, 1, 3, 4)$ . Si tomamos  $N_0 = \{v_0, v_5, v_6, v_7, v_8\}$  y  $N_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  como partición de  $V(M(1, 1, 3, 4))$  ésta induce subgrafos acíclicos, por lo tanto,  $\rho(M(1, 1, 3, 4)) = 2$ .

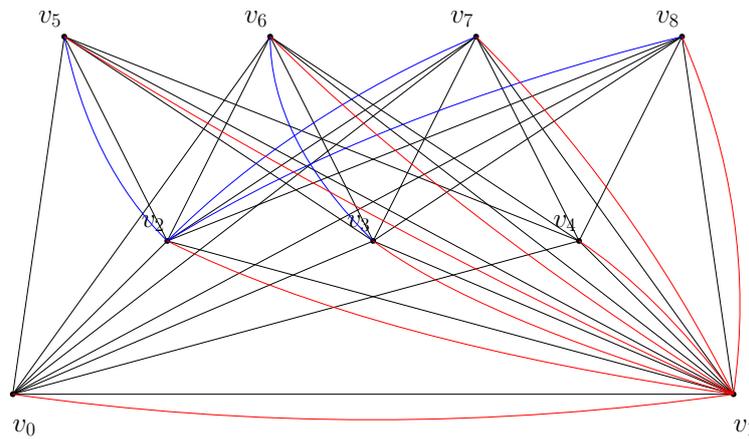


Figura 2.11: Considerando igual que antes  $V_0 = \{v_0\}$ ,  $V_1 = \{v_1\}$ ,  $V_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$  y  $V_3 = \{v_5, v_6, v_7, v_8\}$ , en este ejemplo, además de tener aristas múltiples entre vértices de  $V_2$  y  $V_3$ , tenemos que  $v_1 \in V_1$  posee aristas múltiples con todos los vértices de  $V_0$ ,  $V_2$  y  $V_3$ . Por ello, no podemos incluirlo en ninguno de los subconjuntos de vértices de la partición ya que en cualquiera induciría subgrafos con ciclos. Por lo tanto, la partición de vértices que tomaremos será:  $N_0 = \{v_0, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ ,  $N_1 = \{v_2, v_3, v_4\}$  y  $N_2 = \{v_1\}$ . Dicha partición induce subgrafos acíclicos. Por lo que aquí,  $\rho(M(1, 1, 3, 4)) = 3$ .

Como conclusión, deducimos que cuando  $n \geq 3$  poder establecer cotas generales para la arboricidad puntual del multigrafo  $n$ -partito completo va a depender de dónde tengamos las aristas múltiples. Exigiendo condiciones de regularidad en el reparto de dichas aristas múltiples obtendríamos familias de multigrafos donde poder estudiar la arboricidad puntual con detalle en trabajos futuros.

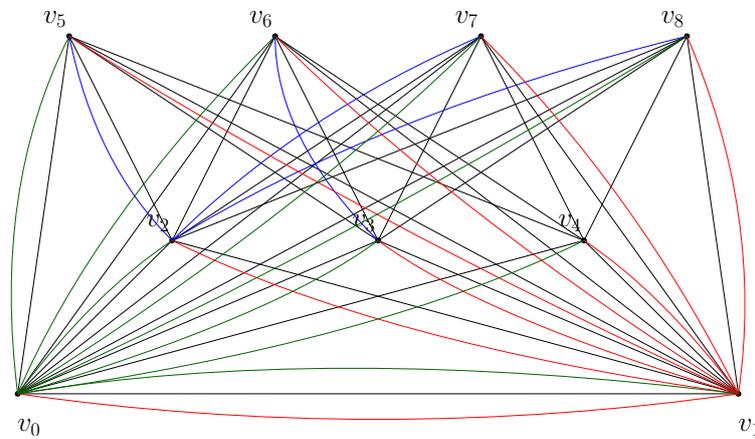


Figura 2.12: Por ultimo, en este caso, además de todas las aristas múltiples consideradas en la Figura 2.11 se tiene que  $v_0 \in V_0$  posee aristas múltiples con todos los vértices de las clases  $V_1$ ,  $V_2$  y  $V_3$ . Por lo que tampoco podemos incluirlo en ningún subconjunto de la partición de vértices ya que induciría subgrafos con ciclos. Por lo tanto, los subconjuntos de vértices que tomaremos serán:  $N_0 = \{v_5, v_6, v_7, v_8\}$ ,  $N_1 = \{v_2, v_3, v_4\}$  y  $N_2 = \{v_1\}$  y  $N_3 = \{v_0\}$ . Dichos subconjuntos inducen subgrafos acíclicos. De manera que aquí,  $\rho(M(1, 1, 3, 4)) = 4$ .



## Capítulo 3

# Espacios de Alexandrov

Este capítulo es una breve introducción a la topología de los espacios finitos, y se ha extraído de [13].

### 3.1. Espacios de Alexandrov. Resultados relevantes.

**Definición 3.1.1.** Un espacio topológico se dice **espacio de Alexandrov**, (o **A-espacio**) si la topología  $\mathcal{T}$  es cerrada también bajo intersecciones arbitrarias. Es decir, la intersección arbitraria de abiertos es un conjunto abierto.

**Nota 3.1.2.** De la definición de A-espacios se sigue que todo A-espacio con la propiedad de Hausdorff es discreto.

Está claro que todo espacio topológico finito es un A-espacio, ya que toda intersección de abiertos se puede expresar como una intersección finita. Por tanto, todo lo que se establezca para A-espacios, seguirá siendo válido para espacios finitos.

Un hecho muy importante en el tratamiento de los A-espacios es la existencia de abiertos mínimos.

**Definición 3.1.3.** Si  $X$  es un A-espacio se define el **abierto mínimo** de  $x \in X$ ,  $U_x$ , como la intersección de todos los conjuntos abiertos que contienen a  $x$ .

De hecho, los A-espacios son exactamente aquellos espacios topológicos con abiertos mínimos.

Veamos ciertos resultados importantes en el tratamiento de los abiertos mínimos.

En primer lugar, recordemos que un espacio topológico  $X$  se dice  $T_0$  si para todo par de puntos  $x, y \in X$  existe un abierto  $G$  con  $x \in G$  e  $y \notin G$  ó  $x \notin G$  e  $y \in G$ .

**Lema 3.1.4.** Un A-espacio es  $T_0$  si y sólo si  $U_x = U_y$  es equivalente a  $x = y$ .

**Proposición 3.1.5.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación entre A-espacios. Entonces  $f$  es continua si y sólo si  $f(U_x) \subseteq U_{f(x)}$  para todo  $x \in X$ .

Si tratamos la conexión en A-espacios, vemos que sus propiedades son similares a la de algunos espacios de interés, como son los poliedros y las variedades. Así, si  $X$  es un A-espacio e  $y \in U_x$ , entonces  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  dada por  $\alpha(t) = y$  si  $t < 1$  y  $\alpha(1) = x$  es un **camino** en  $U_x$  entre  $y$  y  $x$ . En particular, todos los abiertos mínimos de  $X$  son conexos por caminos y, por tanto, todo A-espacio  $X$  es localmente conexo por caminos, de hecho los A-espacios son localmente contractibles como veremos en el Corolario 3.3.2.3.

Tenemos, por lo tanto, el siguiente resultado:

**Teorema 3.1.6.** Sea  $X$  un A-espacio. Las siguientes condiciones son equivalentes.

1.  $X$  es conexo
2. Dados  $x, y \in X$ , existe una secuencia  $x = z_1, \dots, z_s = y$ , tal que  $z_i \in U_{z_{i+1}}$  ó  $z_{i+1} \in U_{z_i}$  para  $i < s$ .
3.  $X$  es conexo por caminos

### 3.2. Equivalencia entre conjuntos parcialmente ordenados y A-espacios

Un **preorden**  $\mathcal{R}$  en un conjunto  $X$  es una relación reflexiva y transitiva. Si un preorden  $\mathcal{R}$  en  $X$  es además antisimétrico, se llamará **orden parcial** (o simplemente **orden** en  $X$ ) y se dirá que  $(X, \mathcal{R})$  es un **conjunto parcialmente ordenado** (o **poset**).

Supongamos el conjunto preordenado  $(X, \leq)$ , dos elementos  $x$  e  $y$  del conjunto se dicen que están **relacionados** si  $x \leq y$  o  $x \geq y$ .

Un elemento  $x$  es un **elemento maximal** si para cada  $z$  en  $X$ ,  $x \leq z$  implica  $x = z$ . Al conjunto de elementos maximales de  $X$  lo denotamos  $Max(X)$ . Respectivamente, un elemento  $x$  es **minimal** si para cada  $z$  en  $X$ ,  $z \leq x$  implica  $x = z$ . Denotamos  $Min(X)$  al conjunto de los elementos minimales de  $X$ .

Las relaciones de los elementos de un conjunto preordenado se pueden representar a partir de un grafo dirigido denominado **diagrama de Hasse** asociado a  $X$  y denotado  $\mathcal{H}(X)$ . En dicho grafo, los vértices son los elementos de  $X$  y las aristas son los pares ordenados  $(a, b)$  tales que  $a < b$  y no existe  $c \in X$  con  $a < c < b$ .

El diagrama de Hasse,  $\mathcal{H}(X)$ , admite una descomposición por niveles al colocar los minimales en el nivel 0 y a un  $x \in X$  se le adjudica el nivel  $k$  si  $k$  es el máximo número de las aristas que contienen los caminos dirigidos desde los minimales hasta  $x$ . Se llama **altura** de  $X$  al mayor de sus niveles. La denotamos  $h(X)$ .

Veamos un ejemplo donde se ilustre este concepto de nivel y altura para un conjunto preordenado.

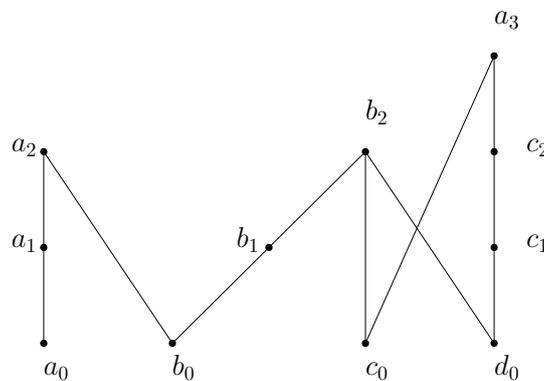


Figura 3.1:

**Ejemplo 3.2.1.** Sea  $(X, \leq)$  un conjunto preordenado cuyos elementos están relacionados de la siguiente manera:  $a_0 \leq a_1 \leq a_2$ ;  $b_0 \leq a_2$ ;  $b_0 \leq b_1 \leq b_2$ ;  $c_0 \leq b_2$ ;  $c_0 \leq a_3$ ;  $d_0 \leq b_2$ ;  $d_0 \leq c_1 \leq c_2 \leq a_3$ . El diagrama de Hasse de  $X$ ,  $\mathcal{H}(X)$ , es el representado en la Figura 3.1. En este podemos observar que los puntos mínimos de  $X$ ,  $\{a_0, b_0, c_0, d_0\}$ , constituyen el nivel 0. El nivel 1 está formado por los elementos  $\{a_1, b_1, c_1\}$ ,  $\{a_2, b_2, c_2\}$  están en el nivel 2 y  $a_3$  es el único en el nivel 3, el mayor nivel. Luego con este último se determina la altura de  $\mathcal{H}(X)$ , que es 3.

En general, cualquier subconjunto  $A \subseteq X$  totalmente ordenado se llamará una **cadena**. Por contra, un subconjunto  $A \subseteq X$  se dice una **anticadena** si ningún par de sus elementos están relacionados. Notar que tanto  $Max(X)$  como  $Min(X)$  son anticadenas.

Una aplicación entre conjuntos preordenados  $f : (X, \leq) \rightarrow (Y, \preceq)$  se dice que **preserva el orden** (o que es una **aplicación ordenada**) si para  $x \leq x'$  se tiene  $f(x) \preceq f(x')$ . Se dice que **invierte el orden** (o es **antiordenada**) si para  $x \leq x'$  se tiene  $f(x') \preceq f(x)$ .

La aplicación anterior se dice que es un isomorfismo entre conjuntos preordenados si es una biyección tal que  $f$  y  $f^{-1}$  son aplicaciones ordenadas. Si son antiordenadas se llama antiisomorfismo.

Un subconjunto  $S \subseteq X$  se llama **conjunto decreciente** si  $y \leq x \in S$  implica  $y \in S$  para  $x, y \in X$ . Para  $x \in X$  denotamos como  $\downarrow x = \{y \in X; y \leq x\}$  a un conjunto decreciente y se le llama **ideal principal** generado por  $x$ .

Dualmente, un subconjunto  $S \subseteq X$  se llama **conjunto creciente** si  $y \geq x \in S$  implica  $y \in S$  para  $x, y \in X$ . Como caso particular,  $\uparrow x = \{y \in X; y \geq x\}$  es un conjunto creciente para todo  $x \in X$ , llamado **filtro principal** generado por  $x$ .

Si  $\leq$  es un preorden en  $X$ , entonces no es difícil comprobar que la familia de los conjuntos decrecientes junto con el conjunto vacío forman una A-topología sobre  $X$  cuyos cerrados son los conjuntos crecientes. Es más, si " $\leq$ " es un orden parcial, entonces esta topología es  $T_0$ . A esta topología se le llama **topología del preorden " $\leq$ "** y se denota por  $\mathcal{T}_{\leq}$ .

Alternativamente, los conjuntos crecientes también definen una topología sobre  $X$ . Dicha topología sería la topología del preorden opuesto definido por  $x \leq^{op} y$  si  $y \leq x$ . Se denotará  $X^{op}$  al A-espacio correspondiente al preorden  $\leq^{op}$ .

Recíprocamente, dado un A-espacio  $(X, \mathcal{T})$  se puede definir un preorden  $\leq_{\mathcal{T}}$  (**preorden de especialización** de  $\mathcal{T}$ ) estableciendo que  $x \leq_{\mathcal{T}} y$  si  $x \in U_y$ .

Más aún, si  $(X, \mathcal{T})$  es  $T_0$  entonces el preorden  $\leq_{\mathcal{T}}$  es de hecho un orden parcial; ver Lema 3.1.4.

Las observaciones anteriores permiten establecer el siguiente teorema que da la equivalencia entre conjuntos preordenados y A-espacios.

**Teorema 3.2.2.** Toda relación de preorden " $\leq$ " sobre un conjunto  $X$  coincide con el preorden de especialización de su topología. Y toda A-topología  $\mathcal{T}$  sobre  $X$  es la topología de su preorden de especialización. Además,  $f : (X, \leq) \rightarrow (Y, \preceq)$  es ordenada si y sólo si  $f : (X, \mathcal{T}_{\leq}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_{\preceq})$  es continua.

Esta equivalencia se restringe a una equivalencia entre los A-espacios  $T_0$  y los conjuntos parcialmente ordenados.

A partir de la equivalencia establecida en el teorema anterior, las propiedades topológicas de los A-espacios se pueden reescribir en términos del orden y recíprocamente. Así, los elementos minimales de un conjunto preordenado  $(X, \leq)$  son abiertos unitarios de la A-topología asociada al preorden. Igualmente, los elementos maximales de  $X$  son conjuntos cerrados unitarios. En particular,  $Min(X)$  es un subespacio abierto discreto y  $Max(X)$  es un subespacio cerrado discreto. Como todo poset finito tiene algún elemento maximal y minimal entonces todo espacio finito  $T_0$  posee al menos un punto que es subconjunto cerrado y otro punto que es abierto.

Nótese también que  $G$  es abierto de  $X$  si y sólo si  $G$  es cerrado en el espacio  $X^{op}$  del preorden opuesto. Esto es así pues los abiertos de  $X$  son los conjuntos crecientes para su orden  $\leq$  que coincide con los conjuntos decrecientes para  $\leq^{op}$ ; es decir, los cerrados de  $X^{op}$ .

A partir del Teorema 3.2.2 podemos reescribir el Teorema 3.1.6 como sigue.

**Teorema 3.2.3.** Un A-espacio  $X$  es conexo (o, equivalentemente, conexo por caminos) si y sólo si existe una secuencia de elementos relacionados para el orden de especialización entre dos puntos cualesquiera de  $X$ .

También se tiene la siguiente caracterización de los abiertos de un espacio finito en términos del preorden.

**Proposición 3.2.4.** Los abiertos de un espacio finito  $(X, \mathcal{T})$  están en correspondencia biunívoca con las anticadenas de su preorden asociado. Más precisamente, la anticadena asociada a un abierto  $G$  es el conjunto  $Max(G)$ .

Usando la proposición anterior se pueden dar las siguientes condiciones suficientes para obtener homeomorfismos entre espacios finitos.

**Proposición 3.2.5.** Sean  $X$  un espacio finito y  $f : X \rightarrow X$  continua e inyectiva, o bien sobreyectiva, entonces  $f$  es un homeomorfismo.

Finalmente, dado que cada espacio topológico finito  $(X, \mathcal{T})$  puede ser identificado con un poset, se llama **diagrama de Hasse del espacio** al diagrama del poset que determina. Veamos un ejemplo de esto.

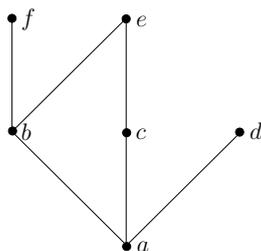


Figura 3.2:

**Ejemplo 3.2.6.** Para  $X = \{a, b, c, d, e, f\}$  con  $a < b$ ,  $a < c$ ,  $a < d$ ,  $a < e$ ,  $a < f$ ,  $b < e$ ,  $b < f$  y  $c < e$ , el diagrama de Hasse de  $X$  está descrito en la Figura 3.2. Obsérvese que en  $\mathcal{H}(X)$  no se reflejan las relaciones  $a < e$  y  $a < f$ . Puesto que  $\mathcal{H}(X)$  contiene a todas las anticadenas del orden, la topología del orden puede obtenerse a partir del diagrama de Hasse por medio de la Proposición 3.2.4, de forma que los abiertos mínimos son los correspondientes a los anticadenas unitarias, esto es,  $U_a = \{a\}$ ,  $U_b = \{a, b\}$ ,  $U_c = \{a, c\}$ ,  $U_d = \{a, d\}$ ,  $U_e = \{a, b, c, e\}$  y  $U_f = \{a, b, f\}$ .

### 3.3. Homotopía de A-espacios

Esta sección contiene el material necesario sobre homotopía de A-espacios para el desarrollo del último capítulo.

#### 3.3.1. Nociones básicas

**Definición 3.3.1.1.** Dos aplicaciones continuas  $f, g : X \rightarrow Y$  se dicen **homotópicas** si existe una aplicación continua

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

tal que  $H(x, 0) = f(x)$  y  $H(x, 1) = g(x)$ , para todo  $x \in X$ . La aplicación  $H$  se llama **homotopía** entre  $f$  y  $g$ , y la relación de ser homotópicas se denotará por  $f \simeq g$ .

Una **homotopía** se dice **relativa** a un conjunto  $A \subseteq X$  si  $H(a, t) = f(a) = g(a)$  para todo  $t$  y  $a \in A$ . Una aplicación se dice **homotópicamente trivial** si es homotópica a una constante.

**Definición 3.3.1.2.** Una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  se dice que es una **equivalencia de homotopía** (o que  $X$  e  $Y$  tienen el mismo tipo de homotopía) si existe  $g : Y \rightarrow X$  continua tal que  $f \circ g \simeq id_Y$  y  $g \circ f \simeq id_X$ .

**Definición 3.3.1.3.** Un subespacio  $A \subseteq X$  se dice un **retracto** de  $X$  si existe una aplicación continua  $r : X \rightarrow A$  llamada **retracción** tal que  $r(a) = a$  para todo  $a \in A$ , esto es,  $r \circ i = id_A$  para la inclusión  $i : A \rightarrow X$ .

Se dice que  $A$  es un **retracto de deformación** de  $X$  si además la composición  $i \circ r$  es homotópica a la identidad de  $X$ . Cuando la homotopía es relativa a  $A$ , se dice que es **retracto de deformación fuerte**.

**Definición 3.3.1.4.** Un espacio  $X$  se dice que es **contractible** si es homotópicamente equivalente a un espacio formado por un único punto.

Es inmediato ver que la condición anterior es equivalente a afirmar que la identidad  $id_X$  es homotópicamente trivial, o bien, que  $X$  admite un punto como retracto de deformación.

**Definición 3.3.1.5.** Un espacio  $X$  se dice **localmente contractible** si para todo  $x \in X$  y todo  $N$  entorno de  $x$  existe un entorno más pequeño  $N' \subseteq N$  que es contractible.

### 3.3.2. A-espacios y homotopía

La existencia de abiertos mínimos permite reescribir las nociones de homotopía y contractibilidad de la siguiente manera:

**Lema 3.3.2.1.** Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  dos aplicaciones continuas, donde  $Y$  es un A-espacio. Supongamos que  $U_{f(x)} \subseteq U_{g(x)}$  (o, equivalentemente,  $f(x) \in U_{g(x)}$ ), para todo  $x \in X$ . Entonces  $f$  y  $g$  son homotópicas por una homotopía relativa al conjunto  $\{x \in X; f(x) = g(x)\}$ .

**Corolario 3.3.2.2.** Si  $Y$  es un A-espacio tal que para algún  $y_0 \in Y$  se tiene  $U_{y_0} = Y$  entonces  $Y$  es contractible.

**Corolario 3.3.2.3.** Todo A-espacio  $X$  es localmente contractible.

El siguiente teorema nos dice, que salvo homotopía, podemos trabajar siempre con espacios  $T_0$ .

**Teorema 3.3.2.4.** El espacio cociente de un A-espacio  $X$  por la relación  $x \sim y$  si  $U_x = U_y$  es un A-espacio  $T_0$ . Más aún, la aplicación cociente  $p : X \rightarrow X_0$  es una equivalencia de homotopía con inversa homotópica cualquier aplicación  $f : X_0 \rightarrow X$  que elige para cada clase de  $X_0$  un representante de la misma.

Al espacio  $X_0$  se le llama el **modelo**  $T_0$  de  $X$ .

### 3.3.3. Homotopía y orden

Si  $Y^X$  denota el conjunto de las aplicaciones continuas del A-espacio  $X$  en el A-espacio  $Y$ , se puede dotar a  $Y^X$  con el preorden

$$f \leq g \text{ si } f(x) \leq g(x) \text{ para todo } x \in X. \quad (3.1)$$

En el caso particular de que  $X$  sea finito se tiene la siguiente caracterización de la homotopía en función del orden anterior.

**Teorema 3.3.3.1.** (Ver [13]; Teorema 1.4.1) Si  $f, g : X \rightarrow Y$  son aplicaciones continuas del espacio finito  $X$  en el A-espacio  $Y$ ,  $f$  es homotópica a  $g$  si y sólo si existe una secuencia de aplicaciones  $f_1, f_2, \dots, f_n$  donde  $f_1 = f$ ,  $f_n = g$  y  $f_i$  y  $f_{i+1}$  están relacionadas para el preorden en (3.1) para  $1 \leq i \leq n - 1$ .

Es más, esta caracterización se mejora en el siguiente lema. (Lema 2.1.1 de [2])

**Lema 3.3.3.2.** Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  dos aplicaciones homotópicas entre espacios finitos  $T_0$ . Entonces existe una secuencia  $f = f_0, f_1, \dots, f_n = g$  tal que para cada  $0 \leq i < n$  hay un punto  $x_i \in X$  con las siguientes propiedades:

1.  $f_i$  y  $f_{i+1}$  coinciden en  $X \setminus \{x_i\}$ , y
2.  $f_i(x_i) \leq f_{i+1}(x_i)$  o  $f_{i+1}(x_i) \leq f_i(x_i)$ .

Otra particularidad de los A-espacios es que el tipo de homotopía de cualquier espacio finito tiene un representante minimal único salvo homotopía.

**Definición 3.3.3.3.** Sea  $X$  un A-espacio. Un punto  $x \in X$  es **eliminable ascendentemente** si existe  $y \in X$  con  $y > x$  tal que  $z \geq x$  implica  $z \geq y$ .

De forma similar, un punto  $x \in X$  es **eliminable descendentemente** si existe  $y \in X$  con  $y < x$  tal que  $z \leq y$  para todo  $z \leq x$ .

Se dirá que un punto  $x$  es **eliminable** si lo es ascendentemente o descendentemente. Si  $x$  es un punto eliminable, la aplicación  $r : X \rightarrow X - \{x\}$  dada por  $r(z) = z$  si  $z \neq x$  y  $r(x) = y$  es una retracción con deformación.

Veamos un ejemplo de eliminación de puntos de un A-espacio  $X$ .

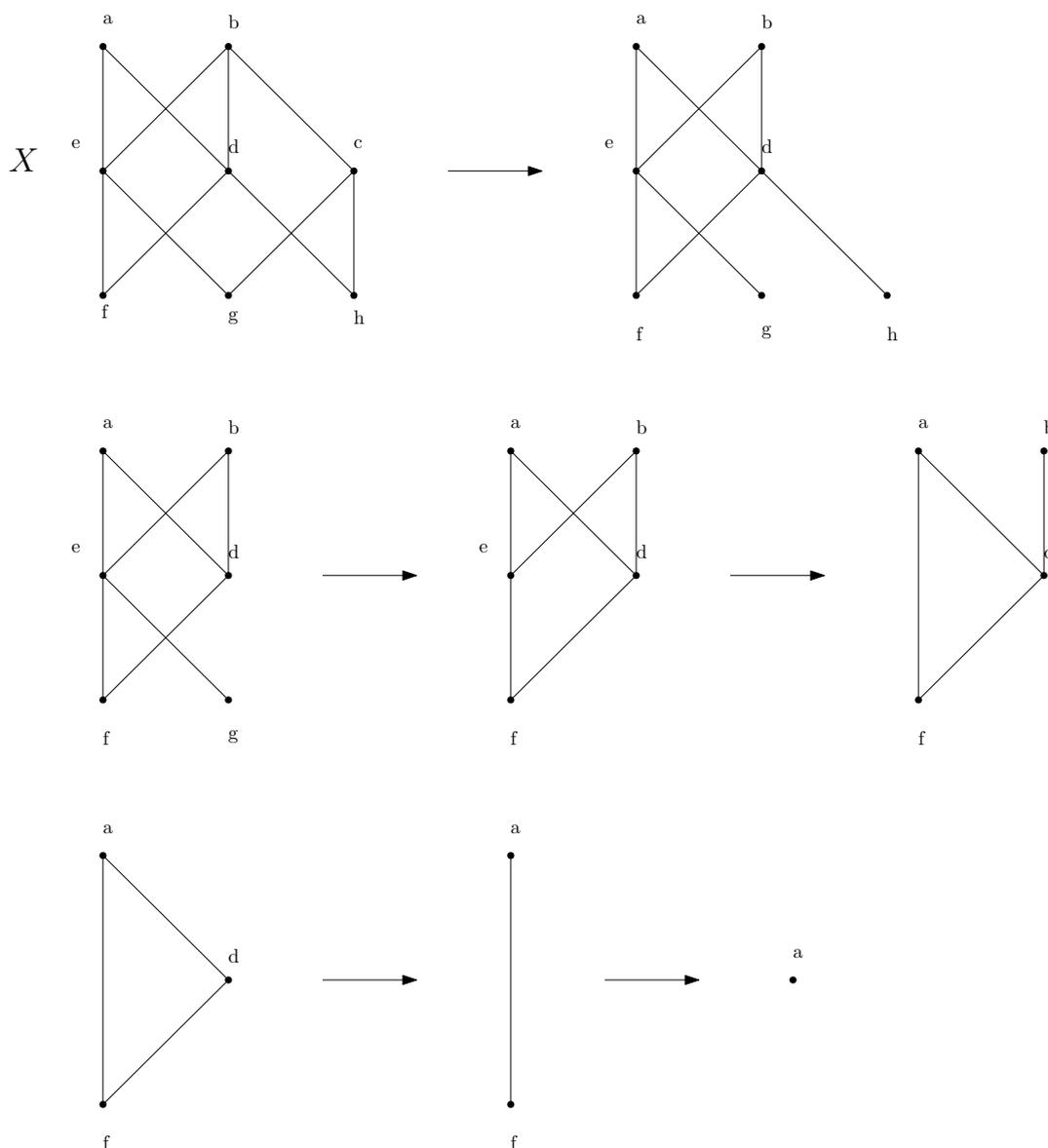


Figura 3.3: Diagrama de Hasse en las sucesivas eliminaciones de puntos del A-espacio  $X$

**Ejemplo 3.3.3.4.** En la Figura 3.3 podemos observar la degeneración de un A-espacio  $X$  a un punto  $\{a\}$ . Dicha degeneración la conseguimos siguiendo la siguiente sucesión de eliminación de puntos:  $c, h, g, e, b, d, f$ , sobreviviendo únicamente  $\{a\}$ .

**Definición 3.3.3.5.** Un A-espacio se dice **minimal** si es  $T_0$  y no tiene puntos eliminables.

**Definición 3.3.3.6.** A todo subespacio minimal de un A-espacio que sea retracto de deformación de  $X$  se le llama un **alma** de  $X$ .

**Teorema 3.3.3.7.** Sea  $X$  un espacio finito. Entonces  $X$  admite un alma.

De hecho, las almas de un mismo espacio finito son todas homeomorfas como consecuencia del siguiente teorema.

**Teorema 3.3.3.8.** Sea  $X$  un espacio minimal finito y sea  $f : X \rightarrow X$  homotópica a la identidad. Entonces  $f$  es la identidad. En particular, toda equivalencia de homotopía entre espacios minimales finitos es un homeomorfismo.

Del teorema anterior se deduce que dos espacios finitos  $T_0$  son homotópicamente equivalentes si y sólo si tienen almas homeomorfas.



## Capítulo 4

# La categoría de Lusternik-Schnirelmann de espacios finitos

En este último capítulo asociaremos un multigrafo a un espacio finito y acotaremos la categoría de Lusternik-Schnirelmann de  $X$  superiormente por la arboricidad de ese multigrafo. La mayor parte del material necesario para el desarrollo del capítulo está tomado de [13]. Una recopilación de las propiedades básicas de la categoría de Lusternik-Schnirelmann se puede ver en [9].

### 4.1. Definición y ejemplos

**Definición 4.1.1.** Sea  $X$  un espacio topológico. Un recubrimiento  $\mathcal{U}$  del espacio  $X$  se dice **LS-recubrimiento** si para todo  $U \in \mathcal{U}$  la inclusión  $U \hookrightarrow X$  es homotópicamente trivial. A  $U$  se le llama **abierto categórico**.

**Definición 4.1.2.** Sea  $X$  un espacio topológico. Se define la **categoría de Lusternik-Schnirelmann** (o **categoría LS**) de  $X$ , denotada  $cat(X)$  como el mínimo cardinal de los LS-recubrimientos de  $X$  por abiertos. Si no existe el entero mínimo, se conviene  $cat(X) = \infty$

**Nota 4.1.3.**  $cat(X) = 1$  si y sólo si  $X$  es contractible, de acuerdo con la definición.

**Nota 4.1.4.** Si  $A \subseteq B$  y  $B$  es un abierto categórico de  $X$ , entonces  $A$  es abierto categórico. Esto es inmediato, ya que si  $i : B \hookrightarrow X$  es homotópicamente trivial, también lo es  $A \hookrightarrow X$  por medio de la restricción de la homotopía entre  $i$  y una constante.

Es bien conocido que la categoría LS es un invariante del tipo de homotopía de un espacio. Más generalmente tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.5.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua para la que existe una aplicación  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $g \circ f \simeq id_X$ , entonces  $cat(X) \leq cat(Y)$ .

*Demostración.* Sea  $H : X \times I \rightarrow X$  una homotopía entre  $id_X$  y  $g \circ f$ . Dado un LS-recubrimiento de  $Y$  por abiertos  $\mathcal{U}_Y = \{U_i\}$ , es claro que  $\mathcal{U}_X = \{f^{-1}(U_i)\}$  es un recubrimiento por abiertos de  $X$ , ya que  $f$  es continua.

Veamos que  $\mathcal{U}_X$  es un LS-recubrimiento, con lo que se probará  $cat(X) \leq cat(Y)$ . Sea  $G_i : U_i \times I \rightarrow Y$  una homotopía entre la inclusión  $U_i \subseteq Y$  y una aplicación constante  $y_i$ . Entonces se define  $F_i : f^{-1}(U_i) \times I \rightarrow X$  como la homotopía:

$$F_i(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t), & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ g \circ G_i(f(x), 2t - 1), & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La aplicación  $F_i$  está bien definida, pues  $H(x, 1) = g(f(x)) = g(G_i(f(x), 0))$ . Además  $F_i(x, 0) = H(x, 0) = x$  y  $F_i(x, 1) = g(G_i(f(x), 1)) = g(y_i)$ . Es decir,  $F_i$  es una homotopía entre la inclusión  $f^{-1}(U_i) \subseteq X$  y la constante  $g(y_i)$ .  $\square$

**Corolario 4.1.6.** Si  $r : X \rightarrow A$  es una retracción entonces  $\text{cat}(A) \leq \text{cat}(X)$ .

*Demostración.* Si  $i : A \rightarrow X$  es la inclusión entonces  $r \circ i = \text{id}_A$  y por tanto  $\text{cat}(A) \leq \text{cat}(X)$ .  $\square$

**Corolario 4.1.7.** Si  $X$  e  $Y$  son del mismo tipo de homotopía entonces  $\text{cat}(X) = \text{cat}(Y)$

*Demostración.* Existen aplicaciones  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  con  $g \circ f \simeq \text{id}_X$  y  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ . Entonces  $\text{cat}(X) \leq \text{cat}(Y) \leq \text{cat}(X)$ , aplicando el Teorema 4.1.5 a  $f$  y  $g$ .  $\square$

**Nota 4.1.8.** De acuerdo con el Corolario 4.1.7 y el Teorema 3.3.2.4 se sigue que la categoría LS de los espacios finitos queda determinada por los espacios finitos  $T_0$ .

**Nota 4.1.9.** Es natural preguntarse si los LS-recubrimientos por abiertos pueden ser sustituidos por los LS-recubrimientos por cerrados para determinar la categoría LS. Esto es así para cualquier poliedro, ver Proposición 1.10 en [5]. En este trabajo sólo usaremos LS-recubrimientos por abiertos.

### 4.1.1. Ejemplos

Veamos algunos ejemplos de LS-recubrimientos:

1. Sea  $X$  un espacio con  $X = A \cup B$  donde  $A$  y  $B$  son conjuntos abiertos. Entonces  $\text{cat}(X) \leq \text{cat}(A) + \text{cat}(B)$ . En efecto, si  $\{U_i\}$  y  $\{W_j\}$  son LS-recubrimientos por abiertos de  $A$  y  $B$ , respectivamente, por ser  $A$  y  $B$  abiertos de  $X$  se sigue que  $U_j$  y  $W_j$  son abiertos en  $X$  y por tanto  $\{U_i\} \cup \{W_j\}$  es un LS-recubrimiento de  $X$  por abiertos. Esto implica  $\text{cat}(X) \leq \text{cat}(A) + \text{cat}(B)$ .
2. Si  $X = S^1$ , como la circunferencia no es contráctil se tiene que  $\text{cat}(S^1) > 1$ . Por otro lado, en la Figura 4.1 se da un LS-recubrimiento con dos abiertos, así que  $\text{cat}(S^1) = 2$ . En general,  $\text{cat}(S^n) = 2$ . Es inmediato también que  $\text{cat}(S^n \vee S^n) = 2$ .

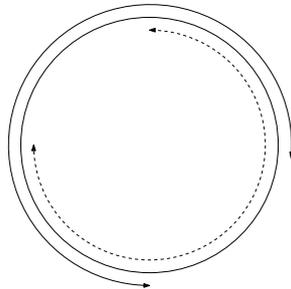


Figura 4.1: Un LS-recubrimiento de  $S^1$

3. Si  $T$  es la superficie tórica,  $\text{cat}(T) \leq 3$ . En efecto, se toman dos conjuntos  $D_1, D_2$  homeomorfos al disco abierto y tales que  $\overline{D_1} \subseteq D_2$ . Entonces  $T = (T \setminus \overline{D_1}) \cup D_2$ , y de acuerdo con (2) se sigue  $\text{cat}(T) \leq \text{cat}(T \setminus \overline{D_1}) + \text{cat}(D_2) = \text{cat}(T \setminus \overline{D_1}) + 1$  pues  $D_2$  es contráctil. Además, por el Teorema (4.1.5), al ser  $T \setminus \overline{D_1}$  del mismo tipo de homotopía que  $S^1 \vee S^1$ , se sigue  $\text{cat}(T \setminus \overline{D_1}) = 2$  y, por tanto,  $\text{cat}(T) \leq 3$ .

## 4.2. Categoría LS en espacios finitos

Para un espacio finito  $X$  tiene sentido preguntarse por su categoría LS. Como los espacios finitos son equivalentes a los posets, se tiene así la posibilidad de aplicar la categoría LS a la teoría del orden.

La categoría LS es un invariante del tipo de homotopía del espacio, por lo que se puede asumir que trabajamos siempre con los modelos minimales y sus diagramas de Hasse.

Una primera característica de la categoría LS de los espacios finitos es que está acotada superiormente por los elementos maximales; esto es

$$cat(X) \leq \#(Max(X)). \quad (4.1)$$

Esto se sigue de que los abiertos mínimos de un punto son contráctiles y que los abiertos mínimos de los elementos maximales cubren todo el espacio.

En general, la existencia de los elementos maximales en un A-espacio permite estudiar la categoría en función de estos. Sea  $J \subseteq Max(X)$ , se llama **abierto J-generado** a la unión  $\bigcup_{x \in J} U_x$ . Se tiene el siguiente lema.

**Lema 4.2.1.** Todo LS-recubrimiento de un espacio finito  $X$ ,  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^m$ , se puede reemplazar por otro LS-recubrimiento por abiertos J-generados,  $\mathcal{W}$ , con  $\#\mathcal{W} \leq \#\mathcal{U}$ .

*Demostración.* Para cada  $x \in Max(X)$  existe  $i$  con  $x \in U_i$  y por tanto,  $U_x \subseteq U_i$ . Para cada  $i$  sea  $W_i$  (posiblemente vacío) la unión  $W_i = \bigcup_{x \in Max(X) \cap U_i} U_x \subseteq U_i$ . Como  $U_i$  es abierto categórico, también lo es  $W_i$  por la Nota 4.1.4.

Nos queda probar únicamente que  $X = \bigcup_{i=1}^m W_i$ . Nótese que los elementos maximales quedan cubiertos por los  $W_i$ . Por lo tanto, dado cualquier  $y \in X$ , si  $x \in X$  es maximal e  $y \leq x$  y tenemos  $W_i$  con  $x \in W_i$  entonces  $y \in U_x \subseteq W_i$ .  $\square$

**Corolario 4.2.2.** La categoría LS de un espacio finito queda determinada por recubrimientos de abiertos J-generados.

**Definición 4.2.3.** El subconjunto  $J \subseteq Max(X)$  se dice que es **compatible** si el abierto J-generado correspondiente es un abierto categórico.

Como consecuencia inmediata de la Nota 4.1.4 se sigue

**Lema 4.2.4.** Si  $J \subseteq J'$  y  $J'$  es compatible entonces  $J$  también lo es.

De acuerdo con el Corolario 4.2.2 y la Definición 4.2.3 se tiene que la categoría LS queda determinada por los conjuntos compatibles de  $Max(X)$ . Esto es,

**Lema 4.2.5.** La categoría LS de un espacio finito  $X$ ,  $cat(X)$ , coincide con el mínimo número conjuntos compatibles  $J_i \subseteq Max(X)$  que forman un recubrimiento de  $Max(X)$ . Lo denotamos  $m(X)$ . Equivalentemente, se puede ver  $cat(X)$  como el mínimo cardinal de una partición de  $Max(X)$  en subconjuntos compatibles. Lo denotamos  $p(X)$ .

*Demostración.* Si  $\{U_{J_1}, \dots, U_{J_k}\}$  es un recubrimiento de  $X$  por abiertos con  $U_{J_i}$  abierto  $J_i$ -generado, entonces  $Max(X) = \bigcup_{i=1}^k J_i$  y cada  $J_i$  es compatible. Así pues,  $m(X) \leq cat(X)$ .

Por otro lado, de todo recubrimiento por conjuntos compatibles  $Max(X) = J_1 \cup \dots \cup J_s$  se puede extraer una partición  $J_1^* \cup \dots \cup J_s^*$  donde  $J_1^* = J_1$  y  $J_i^* = J_i - \left( \bigcup_{j=1}^{i-1} J_j^* \right)$  para  $i \geq 2$  (si algún  $J_i^*$  es vacío no se considera en la partición). Como cada  $J_i$  es compatible también lo es cada  $J_i^*$  por el Lema 4.2.4 y tenemos entonces  $p(X) \leq m(X) \leq cat(X)$ .

Finalmente, si  $Max(X) = J_1 \cup \dots \cup J_s$  es una partición en conjuntos compatibles, entonces cada  $U_{J_i}$  es contractil y  $cat(X) \leq p(X)$ . Luego  $cat(X) = p(X) = m(X)$ .  $\square$

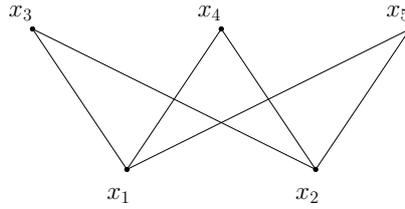


Figura 4.2:

**Nota 4.2.6.** En la Nota 4.1.9 se comentó que para los poliedros se puede definir la categoría LS usando alternativamente conjuntos cerrados. Este resultado no puede aplicarse a los espacios finitos.

Por ejemplo, el espacio finito  $X$  cuyo diagrama de Hasse  $\mathcal{H}(X)$  viene dado por la Figura 4.2 tiene  $cat(X) = 3$  usando conjuntos abiertos mientras que tiene  $cat(X) = 2$  si usamos conjuntos cerrados.

Recordemos que el espacio  $X^{op}$ , definido como el orden opuesto al de  $X$ , tiene por cerrados los abiertos de  $X$ . Así pues, la categoría LS por abiertos de  $X^{op}$  coincide con la categoría LS por cerrados de  $X$ .

Si consideramos ahora el caso particular en el que el espacio finito  $X$  posea altura  $h(X) = 1$ , los abiertos  $J$ -generados categóricos son contractibles por componentes. Esto es,

**Proposición 4.2.7.** Sea  $X$  un espacio finito  $T_0$  conexo de altura  $h(X) = 1$ . Entonces un abierto  $J$ -generado  $U \subset X$  es categórico en  $X$  si y sólo si cada componente de  $U$  es contractible en sí misma.

*Demostración.* Es trivial que si todas las componentes de  $U$  son contractibles en sí mismas entonces  $U$  es categórico en  $X$  gracias a la conexión de  $X$  que, recordemos, equivale a la conexión por caminos ya que  $X$  es localmente conexo (Corolario 3.3.2.3).

Recíprocamente, si  $C \subset U$  es una componente de  $U$ , entonces  $C$  también es  $J'$ -generado para algún  $J' \subseteq J$  y categórico en  $X$  por el Lema 4.2.4.

Sea  $C_0 \subseteq C$  el alma de  $C$  (ver Definición 3.3.3.6). Si  $C_0$  es un punto ya hemos terminado. En caso contrario  $C_0$  sigue siendo categórico en  $X$  por el Lema 4.2.4. Entonces por el Lema 3.3.3.2 existe una secuencia de aplicaciones continuas  $f_0, f_1, \dots, f_n : C_0 \rightarrow X$  tales que  $f_0$  es la inclusión de  $C_0$  en  $X$  y  $f_n$  es la aplicación constante  $f_n(x) = p$  con  $x \in C_0$  y verifica además que para  $1 \leq i \leq n - 1$   $f_{i-1} = f_i$  salvo en un punto  $x_{i-1}$  donde se cumple:

$$f_{i-1}(x_{i-1}) < f_i(x_{i-1}) \text{ o } f_{i-1}(x_{i-1}) > f_i(x_{i-1}).$$

Veamos que  $f$  no puede existir si  $\#C_0 \geq 2$ .

Teniendo en cuenta que  $X$  es de altura 1, supongamos que  $x_0 \in C_0$  con altura  $h(x_0) = 0$  en  $\mathcal{H}(X)$  y, por tanto,  $\{x_0\}$  es abierto en  $X$ . Entonces necesariamente

$$x_0 = f_0(x_0) < f_1(x_0) \text{ y } m = f_1(x_0) \in Max(X) \text{ pues } h(X) = 1.$$

Además,  $\{y \in C_0 \text{ con } y > x_0\} = Max(X) \cap C_0 = Max(C_0) \neq \emptyset$  ya que si no fuese así  $\{x_0\}$  sería abierto y cerrado en el conexo  $C_0$  con  $\#C_0 \geq 2$ . Por lo tanto, existe  $m' \in Max(C_0) \subseteq Max(X)$  con  $x_0 \leq m'$  y  $m \neq m'$ , pues si  $Max(C_0) = \{m\}$   $x_0$  sería eliminable ascendentemente lo que entraría en contradicción con la minimalidad de  $C_0$ .

Finalmente, por la continuidad de  $f_1$ ,  $m = f_1(x_0) \leq f_1(m') = f_0(m') = m'$  que es una contradicción.

Supongamos ahora  $x_0 \in C_0$  con  $h(x_0) = 1$  y, por tanto,  $\{x_0\}$  es cerrado en  $X$ . Entonces

$$x_0 = f_0(x_0) > f_1(x_0) \text{ e } y = f_1(x_0) \in Min(X) \text{ pues } h(X) = 1.$$

De manera análoga al caso anterior,  $\{y \in C_0 \text{ con } y < x_0\} = (U_{x_0} \cap C_0) - \{x_0\} = \text{Min}(X) \cap C_0 = \text{Min}(C_0) \neq \emptyset$  pues en caso contrario  $\{x_0\}$  sería abierto y cerrado en  $C_0$ , que es conexo. Entonces existe  $y' \in \text{Min}(C_0) \subseteq \text{Min}(X)$  con  $y' < x_0$  e  $y' \neq y$  ya que si  $\text{Min}(C_0) = \{y\}$ , entonces  $\{x_0\}$  sería eliminable descendientemente en contradicción con la minimalidad de  $C_0$ . Ahora, por continuidad de  $f_1$ ,  $y = f_1(x_0) \geq f_1(y') = f_0(y') = y'$ , que es una contradicción.  $\square$

**Definición 4.2.8.** Dado un espacio finito  $X$  de altura  $h(X) = 1$  se llama **corona** en  $X$  a una secuencia de puntos  $\Gamma = x_1y_1x_2y_2 \cdots x_{n-1}y_{n-1}x_n$  con  $x_1 = x_n$  y  $x_i > y_i < x_{i+1}$  para  $1 \leq i \leq n - 1$ .

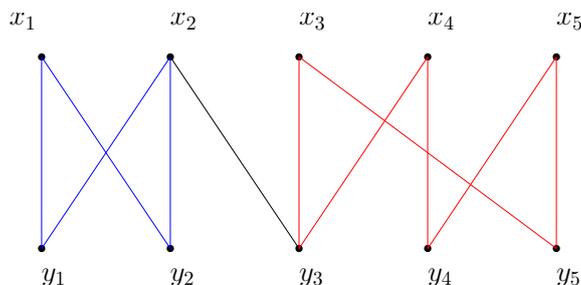


Figura 4.3:

**Ejemplo 4.2.9.** Sea  $X$  un espacio finito de altura 1 cuyo diagrama de Hasse es el dado en la Figura 4.3. En dicho grafo podemos diferenciar dos coronas:  $\Gamma_1 = x_1y_1x_2y_2x_1$  (en azul) y  $\Gamma_2 = x_3y_3x_4y_4x_5y_5x_3$  (en rojo).

**Corolario 4.2.10.** Sea  $X$  un espacio finito  $T_0$  conexo minimal con  $h(X) = 1$ . Entonces un conjunto  $J \subseteq \text{Max}(X)$  es compatible si y sólo si  $U_J$  no contiene una corona.

*Demostración.* Por el Lema 4.2.7 cada componente  $C \subset U_J$  es contractil en sí misma y, por tanto, existe una secuencia de puntos  $p_1, p_2, \dots, p_s$  con  $p_i$  eliminable en  $C_{i-1} = C - \{p_1, \dots, p_{i-1}\}$  con  $C_0 = C$  y  $C_s = \{q\}$ . Ahora bien, si existe una corona  $\Gamma \subseteq C$  ningún punto de la secuencia que define la corona sería eliminable en  $C_i$ , por lo que  $\Gamma \subseteq C_i$  para todo  $0 \leq i \leq s$ , lo que es una contradicción.

Recíprocamente, si  $C$  no contiene una corona, entonces  $\mathcal{H}(C)$  no contiene ciclos. Por lo tanto,  $\mathcal{H}(C)$  debe ser un árbol con los vértices terminales (vértices en los que únicamente tenemos, o bien una arista por encima de ellos, o bien por debajo) que son puntos eliminables de  $C$ . De manera inductiva llegamos a que  $C$  sería contractible en sí mismo y, por tanto,  $J$  es compatible.  $\square$

### 4.3. Categoría LS simplicial y categoría LS de espacios finitos

En esta sección hablaremos del invariante numérico que interpola la categoría LS de un espacio finito y la de su realización como poliedro. Es la denominada **categoría simplicial** introducida en [6]. Veremos cómo se define y su relación con la categoría LS de un espacio finito. Todo lo que se comentará a continuación lo podemos encontrar con más detalle en [13].

**Definición 4.3.1.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Se define la **categoría simplicial**,  $\text{scat}(K)$ , de  $K$  como el menor número entero tal que existen subcomplejos  $K_1, K_2, \dots, K_n$  que recubren a  $K$  y cuyas inclusiones  $K_i \hookrightarrow K$  están en la misma clase de contigüidad que una constante.

Recordemos la noción de contigüidad. Se dice que dos aplicaciones simpliciales  $\varphi, \psi : K \rightarrow L$  son **contiguas** si para cada símplice  $\sigma \in K$ , sus imágenes  $\varphi(\sigma)$  y  $\psi(\sigma)$  están en un mismo símplice de  $L$ . Se dice que están en la **misma clase de contigüidad** si existe una secuencia  $\varphi = \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n = \psi$  tal que  $\varphi_i$  y  $\varphi_{i+1}$  son contiguas para todo  $0 \leq i \leq n - 1$ .

Teniendo en cuenta que dos aplicaciones simpliciales contiguas son homotópicas (ver [10]) y que se pueden usar recubrimientos por cerrados para determinar la categoría LS de un poliedro (Nota 4.1.9) entonces se sigue la desigualdad

$$scat(K) \geq cat(|K|). \quad (4.2)$$

Dos complejos simpliciales  $K$  y  $L$  se dicen que **están en la misma clase de contigüidad** si existen aplicaciones simpliciales  $\varphi : K \rightarrow L$  y  $\psi : L \rightarrow K$  tales que  $\varphi \circ \psi$  y  $\psi \circ \varphi$  están en la misma clase de contigüidad que las correspondientes identidades.

Se demuestra en [6] que si  $K$  y  $L$  están en la misma clase de contigüidad entonces

$$scat(K) = scat(L).$$

Pasamos a relacionar la categoría LS de un espacio finito  $X$  con la categoría simplicial de su complejo de orden asociado  $\mathcal{O}(X)$ . Para ello empezaremos recordando la definición de complejo de orden de  $X$ , así como algunas de sus propiedades.

**Definición 4.3.2.** Sea  $X$  un espacio finito  $T_0$ , se llama **complejo de orden de  $X$**  al complejo simplicial  $\mathcal{O}(X)$  cuyos vértices son los puntos de  $X$  y cuyos símlices son las cadenas finitas del orden de especialización de  $X$ . (Ver Sección 3.2).

Más aún, toda aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  entre espacios finitos  $T_0$  define una aplicación simplicial  $\mathcal{O}(f) : \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}(Y)$  que envía la cadena  $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$  en la cadena  $f(x_0) \leq f(x_1) \leq \dots \leq f(x_n)$ .

**Nota 4.3.3.** 1. La dimensión de  $\mathcal{O}(X)$  coincide con la altura del diagrama de Hasse  $\mathcal{H}(X)$  asociado a  $X$ . Más aún, si la altura de  $X$  es 1, entonces  $\mathcal{O}(X)$  es un grafo y coincide con el diagrama de Hasse de  $X$ .

2. Más generalmente,  $\mathcal{H}(X)$  es el 1-esqueleto de  $\mathcal{O}(X)$ , es decir, los símlices de dimensión  $\leq 1$  de  $\mathcal{O}(X)$ .

3. Es inmediato comprobar que si  $Y \subseteq X$  entonces  $\mathcal{O}(Y)$  es subcomplejo de  $\mathcal{O}(X)$ .

A continuación, vamos a comprobar que la relación de homotopía de los espacios finitos pasa a ser la de contigüidad entre sus complejos asociados. Para esto, usaremos el Lema 3.3.3.2.

**Proposición 4.3.4.** Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  dos aplicaciones homotópicas entre espacios finitos  $T_0$ . Entonces las aplicaciones simpliciales  $\mathcal{O}(f), \mathcal{O}(g) : \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}(Y)$  están en la misma clase de contigüidad.

*Demostración.* Por el Lema 3.3.3.2, podemos asumir que existe  $x_i \in X$  tal que  $f(x_j) = g(x_j)$  si  $j \neq i$  y  $f(x_i) < g(x_i)$  o  $f(x_i) > g(x_i)$ . Por lo tanto, para toda cadena (sin elementos repetidos) en  $X$ ,  $C = \{x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$ , tenemos que  $f(C) = \{f(x_1) \leq f(x_2) \leq \dots \leq f(x_{i-1}) \leq f(x_i) \leq f(x_{i+1}) \leq \dots \leq f(x_n)\}$  y  $g(C) = \{g(x_1) \leq g(x_2) \leq \dots \leq g(x_{i-1}) \leq g(x_i) \leq g(x_{i+1}) \leq \dots \leq g(x_n)\}$  por continuidad. Además, es claro que  $f(x_j) = g(x_j)$  para  $j \neq i$  y  $f(x_i) < g(x_i)$  para todo  $x_i, x_j \in C$ . Entonces  $f(C) \cup g(C)$  es la cadena  $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{i-1} \leq y_i \leq y_{i+1} \leq \dots \leq y_{n+1}$  donde  $y_j = f(x_j) = g(x_j)$  si  $j \neq i, i+1$ ;  $y_i = f(x_i) < g(x_i) = y_{i+1}$ .

En caso de que  $f(x_i) > g(x_i)$  tenemos la misma cadena sólo que ahora  $y_i = g(x_i) < f(x_i) = y_{i+1}$ . En cualquiera de los casos, si  $\sigma \in \mathcal{O}(X)$  es el símlice representado por la cadena  $C$ , sus imágenes  $\mathcal{O}(f)(\sigma)$  y  $\mathcal{O}(g)(\sigma)$  están en un mismo símlice de  $\mathcal{O}(Y)$ .  $\square$

Como una consecuencia inmediata de la Proposición 4.3.4 y (4.2) se tiene

**Teorema 4.3.5.** Sea  $X$  un espacio finito, entonces

$$cat(X) \geq scat(\mathcal{O}(X)) \geq cat(|\mathcal{O}(X)|).$$

*Demostración.* Sea  $cat(X) = n$  y  $\{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$  un LS-recubrimiento por abiertos de  $X$ . Sea  $H_i : U_i \rightarrow X$  una homotopía que hace a la correspondiente inclusión homotópicamente trivial.

Sabemos por la Nota 4.3.3 (3) que cada  $\mathcal{O}(U_i)$  es subcomplejo de  $\mathcal{O}(X)$  y que la inclusión  $I_i : \mathcal{O}(U_i) \rightarrow \mathcal{O}(X)$  está en la misma clase de contigüidad que una aplicación constante por la Proposición 4.3.4.

Queda ver que  $\mathcal{O}(X) = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}(U_i)$ . En efecto, si  $C = \{x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_s\}$  es una cadena en  $X$ , sea  $U_i$  con  $x_s \in U_i$ . En particular,  $U_{x_s} \subseteq U_i$  y  $x_j \in U_{x_s}$  para todo  $j \leq s$ . Por tanto,  $C \subseteq U_{x_s}$  por lo que también está en  $U_i$  lo cual significa que el símplex de  $\mathcal{O}(X)$  que define, está en el subcomplejo  $\mathcal{O}(U_i)$ . Se concluye pues que  $n \geq scat(\mathcal{O}(X))$ .  $\square$

Del Teorema 4.3.5 se sigue que si  $X$  es un espacio contractible, esto es  $cat(X) = 1$ , entonces  $scat(X) = 1$ . Es interesante notar que el recíproco también es cierto. Es decir, se tiene

**Teorema 4.3.6.** Sea  $X$  un espacio finito  $T_0$ . Entonces  $cat(X) = 1$  si y sólo si  $scat(\mathcal{O}(X)) = 1$ .

La demostración original la podemos encontrar de manera indirecta en [2] (ver Corolarios 5.2.8 y 5.1.11 de [2]). Alternativamente, una demostración más directa la podemos encontrar en el Teorema 4.1.9 de [13].

## 4.4. Arboricidad y la categoría LS de espacios finitos de altura uno

En esta última sección veremos cómo utilizar la arboricidad de (multi)grafos como cota de la categoría LS de espacios finitos de altura 1.

Empezamos recordando que la categoría simplicial de los grafos queda caracterizada por la arboricidad por vértices de los mismos. Explícitamente,

**Teorema 4.4.1.** Sea  $G$  un grafo, entonces  $scat(G) = \rho(G)$ .

El teorema anterior es el Corolario 8.3.2 en [7].

Como contribución al estudio del problema de la determinación de la categoría LS de espacios finitos de altura 1, terminamos este trabajo usando la extensión a multigrafos de la arboricidad por vértices dada en la primera parte del mismo. Así, estableceremos una cota entre la categoría LS de un espacio finito  $X$  de altura 1 y la arboricidad puntual de cierto multigrafo que asociaremos a su diagrama de Hasse,  $\mathcal{H}(X)$ , de acuerdo a la siguiente definición.

**Definición 4.4.2.** Sea  $\mathcal{H}(X)$  el diagrama de Hasse asociado a un espacio finito  $T_0, X$ , de altura uno. Se define  $M(X)$  como el **multigrafo asociado a  $\mathcal{H}(X)$**  cuyos vértices son los puntos de  $Max(X)$  y cuyas aristas están determinadas de la manera siguiente:

$$A(M(X)) = \left\{ \begin{array}{ll} x_i x_j \text{ arista simple} & \text{si } \#(U_{x_i} \cap U_{x_j}) = 1 \\ x_i x_j \text{ arista doble} & \text{si } \#(U_{x_i} \cap U_{x_j}) \geq 2 \end{array} \text{ con } x_i, x_j \in Max(X) \right\}$$

Veamos algunos ejemplos:

**Ejemplo 4.4.3.** Sea  $X$  el espacio finito cuyo diagrama de Hasse asociado,  $\mathcal{H}(X)$ , está indicado en la Figura 4.4. Los vértices del multigrafo,  $M(X)$ , son los puntos maximales  $x_1$  y  $x_2$  y la arista entre ellos va a ser doble ya que  $\#(U_{x_1} \cap U_{x_2}) = 2$ .

**Ejemplo 4.4.4.** Sea  $Y$  cuyo diagrama de Hasse asociado,  $\mathcal{H}(Y)$ , aparece en la Figura 4.5. Los vértices de  $M(Y)$  son los puntos maximales:  $x_1, x_2$  y  $x_3$  y sus aristas serán todas dobles ya que  $\#(U_{x_1} \cap U_{x_2}) = 2$ ,  $\#(U_{x_1} \cap U_{x_3}) = 2$  y  $\#(U_{x_2} \cap U_{x_3}) = 2$ .

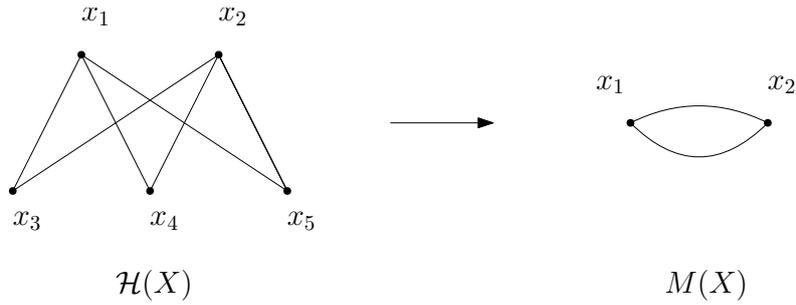


Figura 4.4:

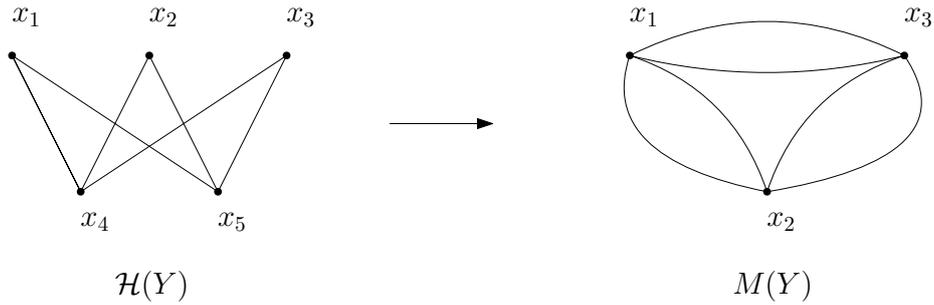


Figura 4.5:

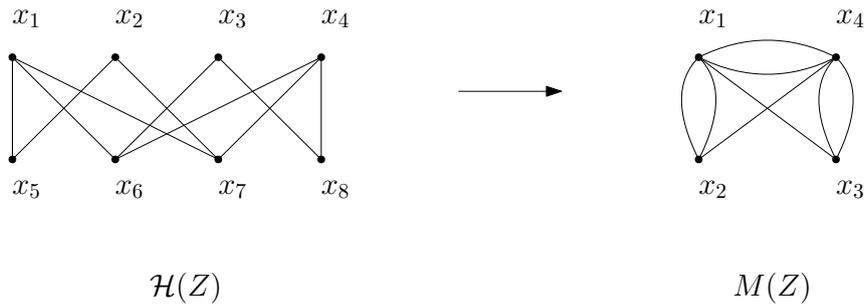


Figura 4.6:

**Ejemplo 4.4.5.** Como último ejemplo, consideremos el espacio finito  $Z$  con diagrama de Hasse  $\mathcal{H}(Z)$ , dibujado en la Figura 4.6. El multigrafo,  $M(Z)$ , poseerá cuatro vértices  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  con  $Max(Z) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ , sus aristas dobles serán:  $x_1x_2, x_1x_4$  y  $x_3x_4$  y  $x_1x_3$  y  $x_2x_4$  serán sus aristas simples. Observar que entre  $x_2$  y  $x_3$  no habrá arista ya que  $U_{x_2} \cap U_{x_3} = \emptyset$ .

Es interesante observar también que para cualquier  $n \geq 1$  siempre se puede encontrar un espacio finito de altura 1 con  $cat(X_n) = n$ .

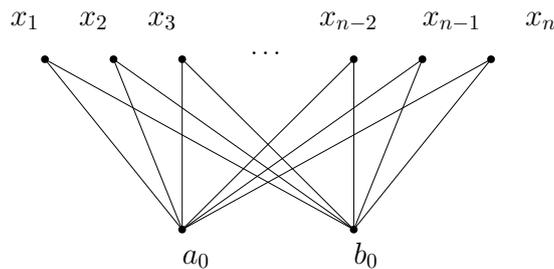


Figura 4.7:

**Ejemplo 4.4.6.** Consideremos el espacio finito  $X_n$  representado por el diagrama de Hasse,  $\mathcal{H}(X_n)$ , dado en la Figura 4.7.

A partir de  $\mathcal{H}(X_n)$  y aplicando la Proposición 3.2.4 podemos determinar su topología del orden, es decir, los abiertos mínimos que recubren el espacio. Estos son:  $U_{a_0} = \{a_0\}$ ,  $U_{b_0} = \{b_0\}$ ,  $U_{x_1} = \{a_0, b_0, x_1\}$ ,  $U_{x_2} = \{a_0, b_0, x_2\}$ ,  $U_{x_3} = \{a_0, b_0, x_3\}$ ,  $\dots$ ,  $U_{x_{n-1}} = \{a_0, b_0, x_{n-1}\}$ ,  $U_{x_n} = \{a_0, b_0, x_n\}$ . Aplicando la Definición 4.4.2, el multigrafo asociado a  $\mathcal{H}(X_n)$  será el multigrafo completo de  $n$  vértices con todas sus aristas dobles. Por lo tanto,  $\rho(M(X_n)) = n$  y tenemos así

$$\#Max(X_n) = cat(X_n) = \rho(M(X_n)) = n$$

ya que no hay pareja compatible en  $Max(X_n)$ .

Nótese que la arboricidad por vértices de  $\mathcal{H}(X_n) = \mathcal{O}(X)$  es 2, por tanto, de acuerdo con el Teorema 4.4.1, tenemos que  $scat(\mathcal{O}(X)) = 2$ . Entonces la diferencia entre  $cat(X_n)$  y  $cat(\mathcal{O}(X))$  puede ser arbitrariamente grande.

Además es el espacio con el menor número de elementos que tiene esa categoría. En efecto, si  $Y$  es un espacio de altura 1 con  $cat(Y) = n$ , tenemos de acuerdo con 4.1,  $Max(Y) \geq cat(Y) = n$ . Por otro lado, si en altura 0 sólo hay un vértice entonces todos los puntos de  $Max(Y)$  serán eliminables inferiormente y el espacio  $Y$  será contractible.

De manera general, si tenemos dada una altura  $h$ , podemos dar el espacio minimal de menor cardinal,  $X_n^h$ , con  $cat(X_n^h) = n$  y altura  $h$ .

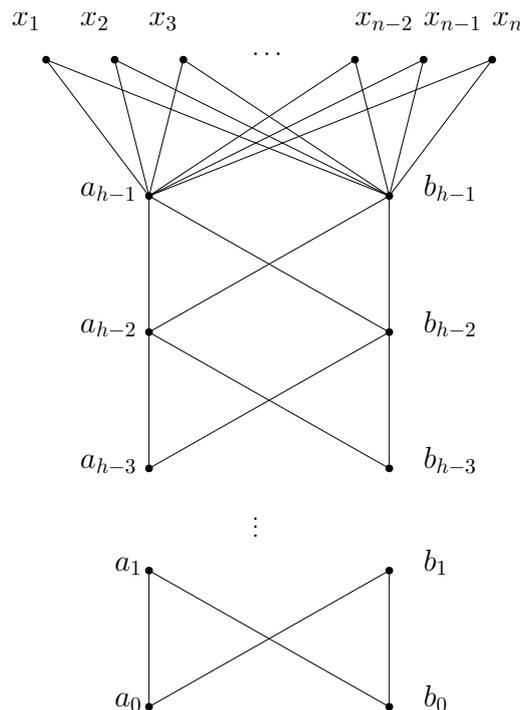


Figura 4.8:

**Ejemplo 4.4.7.** El espacio minimal de menor cardinal,  $X_n^h$ , con  $cat(X_n^h) = n$  y altura  $h$ , es el representado por el diagrama de Hasse dado en la Figura 4.8.

Veamos que ningún subconjunto de dos elementos de  $Max(X_n^h)$  es compatible. Por simetría, bastará verificarlo para  $\{x_1, x_2\}$ . Si este conjunto fuese compatible entonces para  $U = U_{x_1} \cup U_{x_2}$  debe existir una homotopía entre la inclusión  $i : U \rightarrow X_n^h$  y una aplicación constante  $c : U \rightarrow X_n^h$ . Por lo tanto, por el Lema 3.3.3.2, existe una secuencia de aplicaciones continuas  $\{f_i : U \rightarrow X_n^h\}_{i=0}^s$  con

$f_0 = i$ ;  $f_s = c$  y tales que para cada  $i \geq 1$  existe  $y_i \in U$  con  $f_i(y_i) < f_{i-1}(y_i)$  o  $f_i(y_i) > f_{i-1}(y_i)$  y  $f_i(z) = f_{i-1}(z)$  para todo  $z \in U - \{y_i\}$ .

Como  $c(U) = \{y_0\}$  es sólo un punto, al menos  $x_1$  o  $x_2$  (podría ocurrir  $y_0 = x_1$  o  $y_0 = x_2$ ) debe ser un  $y_i$  para algún  $i$ .

Sea  $i_0$  el primer índice con  $y_{i_0} \in \{x_1, x_2\}$ . Entonces  $f_j(y_{i_0}) = y_{i_0}$  para todo  $j \leq i_0 - 1$  y  $f_{i_0}(y_{i_0}) > f_{i_0-1}(y_{i_0}) = y_{i_0}$  (imposible ya que  $y_{i_0} \in \text{Max}(X)$ ) o  $f_{i_0}(y_{i_0}) < f_{i_0-1}(y_{i_0})$ .

Sea  $p \in X$  otro punto de  $X$  compartiendo nivel con  $f_{i_0}(y_{i_0})$ . Observese que  $p \in U$  pues  $X - \text{Max}(X) \subseteq U$ . Entonces tenemos que  $p < y_{i_0}$  y por continuidad,  $p = f_{i_0}(p) \leq f_{i_0}(y_{i_0})$  que es una contradicción pues  $p$  y  $f_{i_0}(y_{i_0})$  no son comparables.

En general,  $\rho(M(X))$  proporciona una cota superior para la categoría LS. Esto es, se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 4.4.8.** Sea  $X$  espacio finito minimal de altura  $h(X) = 1$  cuyo diagrama de Hasse es  $\mathcal{H}(X)$ . Sea  $M(X)$  el multigrafo asociado a  $\mathcal{H}(X)$ . Se tiene entonces:

$$\rho(\mathcal{H}(X)) = \text{scat}(\mathcal{H}(X)) \leq \text{cat}(X) \leq \rho(M(X)).$$

*Demostración.* La igualdad  $\rho(\mathcal{H}(X)) = \text{scat}(\mathcal{H}(X))$  sigue del Teorema 4.4.1. Además, como  $X$  es de altura 1 entonces  $\mathcal{H}(X) = \mathcal{O}(X)$  y  $\text{scat}(\mathcal{H}(X)) = \text{scat}(\mathcal{O}(X)) \leq \text{cat}(X)$  por el Teorema 4.3.5.

Queda demostrar la desigualdad  $\text{cat}(X) \leq \rho(M(X))$ . Si consideramos  $n = \rho(M(X))$ , sea  $\{J_1, \dots, J_n\}$  una partición de  $\text{Max}(X)$  tal que, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , el multigrafo inducido por  $J_i$ ,  $M_{J_i}(X) \subseteq M(X)$ , es acíclico. Esto es,  $M_{J_i}(X)$  es unión disjunta de árboles;  $M_{J_i}(X) = \bigcup_{j \in \Lambda_i} T_j$ .

Para cada  $j \in \Lambda_i$ , sea  $V_j = V(T_j)$  el conjunto de los vértices de cada árbol  $T_j$ . Sean  $U_j = \bigcup_{x \in V_j} U_x$

los abiertos  $V_j$ -generados. Afirmamos entonces que  $U_i = \bigcup_{j \in \Lambda_i} U_j$  es un abierto categórico.

En efecto, por el Corolario 4.2.10, basta ver que  $U_i$  no puede contener coronas.

Supongamos que existe una corona  $\Gamma = x_i y_1 x_2 y_2 \dots x_n$  con  $x_1 = x_n$ , y  $x_i > y_i < x_{i+1}$ . Por la conexión de  $\Gamma_j$  todos los  $x_k$  en algún  $U_j$  con  $j \in \Lambda_i$ . Entonces los vértices de  $T_j$  correspondientes a los  $x_i$  formarían un ciclo en  $T_j$  cuyas aristas serían  $x_1 x_2, x_2 x_3, \dots, x_{n-1} x_n = x_{n-1} x_1$ , lo que es una contradicción con el hecho de ser  $T_j$  un árbol. Luego  $\text{cat}(X) \leq n = \rho(M(X))$ .  $\square$

**Nota 4.4.9.** El teorema anterior proporciona una mejor cota que (4.1). Por ejemplo, el espacio finito  $Z$  del Ejemplo 4.4.5 tiene  $\#\text{Max}(Z) = 4$  y  $\rho(M(Z)) = 2$ .

El siguiente ejemplo muestra que la diferencia entre  $\text{cat}(X)$  y  $\rho(M(X))$  puede ser arbitrariamente grande.

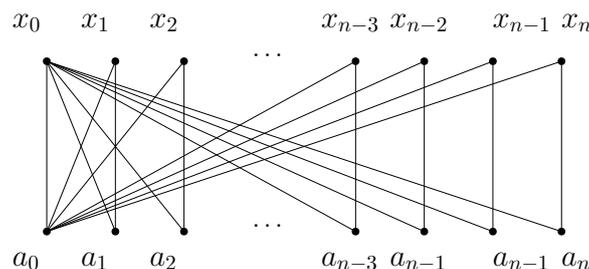


Figura 4.9:

**Ejemplo 4.4.10.** Dado  $n = 2k + 1$ , sea  $X$  el espacio cuyo diagrama de Hasse es el que aparece en la Figura 4.9. Entonces  $U_1 = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$  y si  $U_2 = U_{x_0}$  son contractibles y tenemos  $X = U_1 \cup U_2$ , por lo que  $\text{cat}(X) = 2$ . Por el contrario, si  $J \subseteq \text{Max}(X)$  contiene tres o más  $b_i$  con  $i \geq 1$  entonces aparece un ciclo en el multigrafo inducido  $M_J(X)$ . Análogamente, si  $J' \subseteq \text{Max}(X)$  contiene a  $x_0$  y a algún  $x_i$  con  $i \neq 0$ , entonces  $M_{J'}(X)$  también contiene un ciclo. Por tanto,  $\rho(M(X)) = k + 1$ .



# Bibliografía

- [1] P. S. Alexandrov, Discrete Räume, *Mathematicheskii Sbornik*, 2(3):501–519, 1937.
- [2] J. A. Barmak. *Algebraic topology of finite topological spaces and applications*, Lecture Notes in Math., Vol. 2032, Springer, 2011.
- [3] G. Chartrand, H. V. Kronk, C. E. Wall, The point-arboricity of a graph, *Israel J. Math*, 6:169-175, 1968.
- [4] J. Clark, D. A. Holton, *A first look at Graph Theory*, World Scientific, 1991.
- [5] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea, D. Tanré, *Lusternik-Schnirelmann category*, American Mathematical Society, 2003.
- [6] D. Fernández-Tertero, E. Macías-Virgós, J. A. Vilches, Lusternik-Schnirelmann category of simplicial complexes and finite spaces, *Topology and its Appl.*, 194: 37-50, 2015.
- [7] D. Fernández-Tertero, E. Macías-Virgós, J. A. Vilches, E. Minuz, Simplicial Lusternik-Schnirelmann category, *Publ. Mat.*, 63:265-293, 2019.
- [8] L.K. Jørgensen, Vertex Partitions of  $K_{4,4}$ -Minor Free Graphs, *Graphs and Combinatorics*, 17:265-274, 2001.
- [9] T. López, *La categoría de Lusternik-Schnirelmann*, Trabajo Fin de Grado, Tutor: José Manuel García Calcines, Universidad de La Laguna, 2017.
- [10] J. R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley Reading, 1984.
- [11] C. St. J. A. Nash-Williams, Edge-disjoint spanning trees of finite graphs, *J.London Math.Soc.*, 36:445-450,1961.
- [12] C. St. J. A. Nash-Williams, Descomposition of finite graphs into forests, *J.London Math.Soc.*, 39:12,1964.
- [13] A. Pavón, *La categoría de Lusternik-Schnirelmann de los espacios finitos. Enunciado y discusión de un problema*, Trabajo Fin de Grado, Tutores: Antonio Quintero Toscano, Jose Antonio Vilches Alarcón, Universidad de Sevilla, 2016.
- [14] A. W. Tucker, Cell spaces, *Ann. of Math*, 37: 92–100, 1936.