

Análisis del Efecto de Rigidización Geométrica en un Modelo Compuesto por Varias Subestructuras

D. García Vallejo⁽¹⁾, J. Mayo, J. Domínguez

⁽¹⁾ Camino de los Descubrimientos s/n, 41092 Sevilla.
Tlf: 954487311, FAX: 954487295, dgvallejo@us.es

Resumen

El uso de varias subestructuras se admite en la bibliografía como alternativa en problemas donde la rigidización centrífuga o geométrica es importante. Sin embargo, nada se dice sobre la dependencia de la solución con el número de subestructuras. En este trabajo se demuestra que la técnica de subestructuración puede proporcionar soluciones erróneas en ciertos casos. Este hecho se discute sobre un modelo de una viga sometida a rotación alrededor de un eje perpendicular a ella, empleando una formulación en coordenadas nodales absolutas.

Palabras Clave: Rigidización geométrica, rigidización centrífuga, coordenadas absolutas.

1. Introducción

La teoría lineal de la elasticidad no incorpora el acoplamiento entre los esfuerzos axiales y de flexión. Sin embargo, la consideración de tal acoplamiento resulta ser imprescindible para resolver diversos problemas mecánicos en los que los esfuerzos axiales alcanzan valores suficientes para influir sustancialmente sobre la rigidez a flexión. Tal es el caso, por ejemplo, de una viga flexible que gira con velocidad y aceleración conocidas alrededor de un eje perpendicular que pasa por uno de sus extremos. Este problema se ha usado como referencia en la mayor parte de las investigaciones al respecto, revelando que cuando se utiliza la teoría lineal de la elasticidad para describir la flexibilidad de la viga, se obtienen soluciones inestables [1]. La técnica de la subestructuración es aceptada como solución a este problema [2]. Sin embargo, nada se ha dicho sobre la dependencia de la solución con el número de subestructuras. Este artículo trata de clarificar el comportamiento de un modelo con varias subestructuras, así como, las limitaciones que presenta. Habitualmente, la subestructuración se usa junto con la formulación en referencias flotantes a pesar de que la conexión de las subestructuras da lugar a restricciones no lineales que dificultan el análisis de los términos de las ecuaciones diferenciales algebraicas (DAE) que rigen el movimiento de la viga.

Cuando se usa la formulación en coordenadas nodales absolutas, cada elemento puede considerarse como una subestructura, puesto que para medir las deformaciones se usa un sistema local en cada elemento [3]. A diferencia de lo que ocurre cuando se usa la formulación en referencias flotantes, la especial naturaleza de las coordenadas nodales absolutas permite eliminar todas las restricciones que intervienen en el problema de la viga flexible antes mencionado. De esta forma, el problema se describe mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que permite un análisis más profundo.

2. Coordenadas nodales absolutas

El conjunto de coordenadas nodales absolutas contiene el vector de posición del nodo y su derivada con respecto a la coordenada longitudinal en la posición indeformada [3]. Las variables nodales contienen información sobre la deformación y las grandes rotaciones experimentadas por el elemento. La posición de un punto del elemento j se obtiene como sigue:

$$\mathbf{r}^j = \mathbf{S}^j \mathbf{e}^j \quad (1)$$

donde \mathbf{S}^j es la función de forma y \mathbf{e}^j es el vector de coordenadas nodales del elemento j . Para medir las deformaciones del elemento se utiliza un sistema de referencia local con origen en un extremo y con eje de abscisa tangente a la línea media de la viga en ese punto. Las ecuaciones del elemento obtenidas a través de las ecuaciones de Lagrange, tienen la siguiente expresión:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{e}} = \mathbf{Q}_e(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}, t) - \mathbf{F}_e(\mathbf{e}) \quad (2)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masa constante, $\mathbf{Q}_e(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}, t)$ es el vector de fuerzas externas generalizadas y $\mathbf{F}_e(\mathbf{e})$ es el vector de fuerzas elásticas, que tiene una expresión no lineal ya que está expresado en el sistema inercial. Tanto la matriz de masa como el vector de fuerzas elásticas son invariantes respecto a una transformación ortogonal [4], esto es:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} = \mathbf{M} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{F}_e(\mathbf{A}\mathbf{q}) = \mathbf{F}_e(\mathbf{q}) \quad (3)$$

donde $\mathbf{e} = \mathbf{A}\mathbf{q}$ es una transformación ortogonal tal que, \mathbf{q} es un vector de coordenadas nodales en un sistema no inercial y \mathbf{A} es una matriz diagonal por bloques de tamaño 2×2 de la siguiente forma:

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

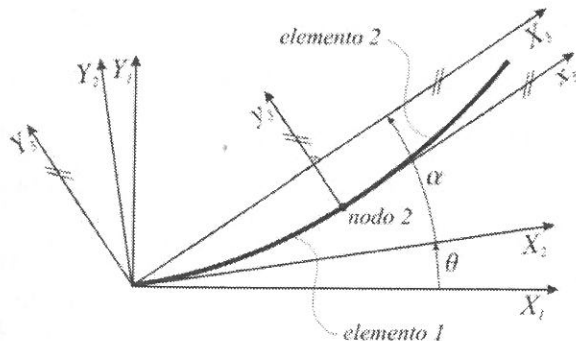
siendo A_{ii} ($i = 1, \dots, 4$) un bloque de la diagonal de A y θ el ángulo girado entre los dos sistemas de referencia.

3. Viga sometida a rotación alrededor de un eje perpendicular

En esta sección se estudia el comportamiento de un modelo de varios elementos de la viga de la Figura 1, que gira alrededor del origen del sistema de coordenadas en el plano X_1Y_1 . El ángulo girado por la viga, θ , varía en función del tiempo como se muestra en la Figura 1, siendo ω_f es el valor final en estado estacionario y T es el tiempo empleado en alcanzar dicha velocidad. La metodología empleada se detalla con un modelo de dos elementos y, a continuación, se generaliza a modelos con distinto número de elementos. Para facilitar el análisis, se linealizan las fuerzas elásticas de los dos elementos que componen el modelo. Dicha linealización se hace respecto a sendos sistemas de referencia, en los cuales los elementos no pueden realizar rotaciones como sólido rígido (X_2Y_2 y X_3Y_3 de la Figura 1, respectivamente). Para linealizar las fuerzas elásticas, se utiliza la serie de Taylor centrada en la configuración indeformada:

$$F_e(\mathbf{q}) \approx F_e(\mathbf{q}_0) + \left. \frac{\partial F_e(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) = \mathbf{K}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \quad (5)$$

donde $F_e(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}$ puesto que no hay fuerzas elásticas en la posición indeformada. Más tarde, las ecuaciones de movimiento de ambos elementos se expresan en el sistema de referencia no inercial X_2Y_2 (Figura 1).



$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{\omega_f}{2T} \left[t^2 + \frac{T^2}{2\pi^2} \left(\cos \frac{2\pi t}{T} - 1 \right) \right], & t < T \\ \omega_f \left(t - \frac{T}{2} \right), & t \geq T \end{cases}$$

Figura 1. Esquema de la viga deformada

Introduciendo la transformación de coordenadas $\mathbf{e} = \mathbf{A}\mathbf{q}$ antes mencionada en la ecuación de un elemento finito, Ecuación (2), en ausencia de fuerzas externas, se obtienen las ecuaciones del elemento en el sistema no inercial. Las condiciones de contorno de la viga en el sistema no inercial, X_2Y_2 , equivalen a condiciones de empotramiento del extremo del primer elemento de la Figura 1. Dichas condiciones de contorno pueden eliminarse junto con los grados de libertad que restringen sustituyendo en las ecuaciones el valor de dichos grados de libertad, puesto que en el sistema X_2Y_2 tienen un valor constante conocido. Así, el número de ecuaciones del primer elemento se reduce a cinco. Dichas ecuaciones tienen la siguiente expresión:

$$\mathbf{M}_1\ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{C}_1\dot{\mathbf{q}}_1 + (\mathbf{K}_1 - \omega^2\mathbf{M}_1)\mathbf{q}_1 = \mathbf{K}_1\mathbf{q}_{01} + \mathbf{Q}_{r1} \quad (6)$$

donde $\omega = \dot{\theta}$, \mathbf{M}_1 y \mathbf{K}_1 son las matrices de masa y rigidez del elemento (una vez linealizada $\mathbf{F}_e(\mathbf{q})$) después de eliminar los grados de libertad restringidos por el empotramiento, la matriz \mathbf{C}_1 se define mediante la expresión $\mathbf{C}_1 = \mathbf{B}^T(2\mathbf{A}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{A}})\mathbf{B}$, siendo \mathbf{B} la matriz booleana usada para eliminar los grados de libertad restringidos, y \mathbf{Q}_{r1} es el vector de fuerzas de reacción debidas a la conexión con el segundo elemento.

Para linealizar el vector de fuerzas elásticas del segundo elemento se utiliza el sistema de referencia intermedio X_3Y_3 . Este sistema de referencia es paralelo al sistema x_3y_3 , que tiene origen en el nodo común y eje x_3 tangente a la línea media de la viga (Figura 1). Las ecuaciones del segundo elemento expresadas en el sistema no inercial X_2Y_2 , se escriben como sigue:

$$\mathbf{M}_2\ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{C}_2\dot{\mathbf{q}}_2 - \omega^2\mathbf{M}_2\mathbf{q}_2 = -\mathbf{F}_e(\mathbf{q}_2) \quad (7)$$

donde, de nuevo, se han usado las propiedades de las Ecuaciones (3). El nuevo cambio de variable $\mathbf{q} = \mathbf{R}\mathbf{p}$ permite expresar las ecuaciones del segundo elemento en el sistema X_3Y_3 , donde la linealización de las fuerzas elásticas sí tiene sentido puesto que, respecto a este, el elemento no puede moverse como sólido rígido. La matriz \mathbf{R} , similar a \mathbf{A} , es función del ángulo α (Figura 1) y \mathbf{p} es un vector de coordenadas nodales en el sistema de referencia X_3Y_3 . Tras la linealización, se introduce el cambio de variable inverso $\mathbf{p} = \mathbf{R}^T\mathbf{q}$ para obtener de nuevo las ecuaciones del segundo elemento en el sistema de referencia X_2Y_2 . Dichas ecuaciones se escriben de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}_2 \ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{q}}_2 + (\mathbf{R}\mathbf{K}_2\mathbf{R}^T - \omega^2\mathbf{M}_2)\mathbf{q}_2 = \mathbf{R}\mathbf{K}_2\mathbf{R}^T\mathbf{q}_{02} + \mathbf{Q}_{r2} \quad (8)$$

donde \mathbf{Q}_{r2} es el vector de fuerzas de reacción en el nodo y \mathbf{q}_{02} es la configuración indeformada del segundo elemento, que coincide con el eje de abscisa del sistema de referencia x_3y_3 . Las fuerzas de restricción presentes en las ecuaciones de ambos elementos pueden ser eliminadas al ensamblar las ecuaciones de la viga siguiendo el procedimiento habitual del Método de Elementos Finitos [3]. De esta forma el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias del modelo de dos elementos de la viga se escribe como sigue:

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_s - \omega^2\mathbf{M}_s)\mathbf{q} = \mathbf{F}_s \quad (9)$$

Como se recoge en la bibliografía [1, 2, 4], usando la teoría lineal de la elasticidad, si las deformaciones se miden en la viga respecto a una misma referencia (método de referencias flotantes), aparecen soluciones inestables cuando la frecuencia de giro se aproxima a la primera frecuencia natural de flexión de la viga en voladizo. Lo mismo ocurre cuando se usa un solo elemento finito para modelar la viga [4]. Cuando la velocidad angular de la viga se aproxima a la frecuencia natural la matriz $(\mathbf{K}_s - \omega^2\mathbf{M}_s)$, en la cual \mathbf{K}_s es una matriz constante, se hace singular. Sin embargo, cuando se usan dos elementos la solución es estable. Además, la matriz \mathbf{K}_s depende de la orientación relativa entre los sistemas de referencia de cada elemento y, por tanto, el valor de ω que hace singular a la matriz $(\mathbf{K}_s - \omega^2\mathbf{M}_s)$.

Considérese una viga de 8 m de longitud, 2767 Kg/m³ de densidad, $7.299 \cdot 10^{-5}$ m² de área de la sección, $8.214 \cdot 10^{-9}$ m⁴ de momento de inercia de la sección y un módulo de Young de $6.895 \cdot 10^{10}$ Pa. Para estos valores, en [1, 2] se demuestra que cuando se hace girar la viga hasta una velocidad ω_f de 4 rad/s, se obtiene una solución inestable con el método de las referencias flotantes, al igual que si se modela la viga con un solo elemento [4].

En la Figura 2-a) se muestra el valor más pequeño de ω (dividido por la primera frecuencia natural de flexión de la viga, ω_1) que hace singular a la matriz $(\mathbf{K}_s - \omega^2\mathbf{M}_s)$ como función del ángulo formado por la tangente a la viga en el punto medio. Se observa cómo para $\alpha = 0$ (los sistemas de referencia son paralelos), independientemente

del número de elementos, la velocidad crítica coincide con la frecuencia natural de flexión. Sin embargo, a medida que el ángulo α aumenta, lo cual ocurre durante la deformación, el valor de la velocidad crítica aumenta. En concreto, para ω_f igual a 4 rad/s ($\omega/\omega_1 = 1.37$) las velocidades críticas de modelos de 2, 3 y 4 elementos se hacen rápidamente superiores.

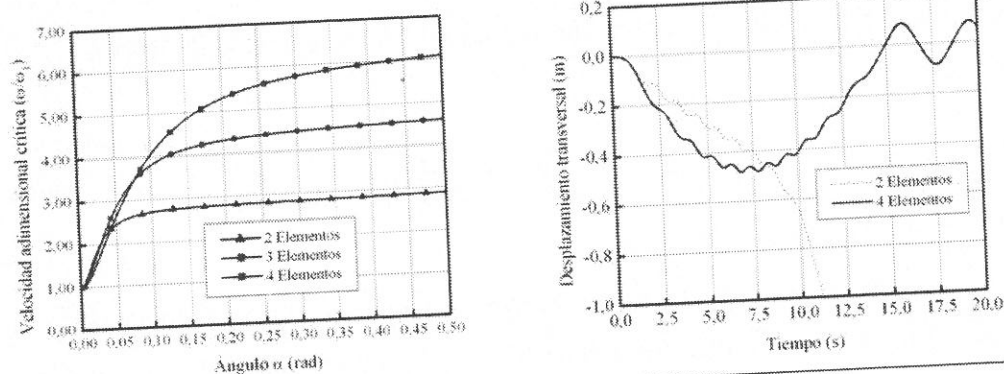


Figura 2. a) Velocidad crítica adimensional en función de α . b) Desplazamiento transversales en el extremo libre de la viga ($\omega_f = 8$ rad/s y $T = 15$ s).

Las curvas de las velocidades críticas de la Figura 2-a) muestran una tendencia horizontal para altos valores de α , lo cual refleja la imposibilidad del modelo de obtener soluciones estables para altas velocidades de giro. Así, haciendo girar el modelo de 2 elementos hasta una velocidad de 8 rad/s ($\omega/\omega_1 = 2.74$), se obtiene una solución inestable, como muestra la Figura 2-b). Sin embargo, usando cuatro elementos se obtiene una solución estable, lo cual coincide con los resultados de la Figura 2-a). En general, como muestra la Figura 2-a), cuando se aumenta el número de elementos, el valor de la velocidad crítica aumenta pero la tendencia de las curvas es siempre horizontal, por lo que la velocidad crítica no desaparece sino que aumenta su valor.

4. Conclusiones

En este trabajo se estudia el comportamiento de una viga sometida a rotación alrededor de un eje perpendicular empleando un modelo de varios elementos finitos, que equivale a usar subestructuras puesto que se utiliza un sistema de referencia local en cada elemento. El uso de un sistema de referencia local a cada elemento introduce el

acoplamiento entre los efectos axiales y de flexión del que carecen los modelos lineales. Se demuestra que incluso usando varios elementos, se obtienen soluciones inestables, por lo que la velocidad crítica no es eliminada con el uso de subestructuras sino desplazada a un valor mayor. Por tanto, es posible obtener soluciones erróneas inesperadas cuando se usa la subestructuración. La formulación en coordenadas nodales absolutas resulta apropiada para este análisis pues permite eliminar todas las restricciones, en contra de lo que ocurre cuando se usa subestructuración sobre el método de referencias flotantes.

5. Referencias

1. Kane, T.R., Ryan, R.R., Banerjee, A.K., *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **10**(2), (1987), 139-151.
2. Wu, S.C., Haug, E.J., *Journal for Num Meth in Engineering*, **26**, (1988), 2211-2226.
3. Shabana, A.A., *Dynamics of Multibody Systems*, John Wiley & Sons, New York (1998).
4. García Vallejo, D., Sugiyama, H., Shabana, A.A., *Technical Report #MBS04-2-UIC*, (2004).

6. Agradecimientos

Los autores desean expresar su agradecimiento al CICYT, por la financiación del proyecto DPI2000-0562, y al departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Illinois en Chicago por su colaboración en este trabajo.