FORMULACIÓN DINÁMICA DE MECANISMOS FLEXIBLES EN COORDENADAS NODALES ABSOLUTAS

José L. Escalona Franco, Juana M. Mayo Núñez, Jaime Domínguez Abascal
Departamento de Ingeniería Mecánica y de los Materiales
Universidad de Sevilla
Camino de los Descubrimientos s/n
41092 Sevilla
E-mail: jlescalo@cica.es

RESUMEN

En esta investigación se presenta una nueva formulación de elementos finitos que puede ser utilizada para el análisis de grandes desplazamientos elásticos o grandes rotaciones de sólidos flexibles, *la formulación en coordenadas nodales absolutas*. Su aplicación más interesante es el análisis dinámico de mecanismos flexibles. Los elementos no isoparamétricos, que utilizan ángulos infinitesimales de giro como coordenadas nodales, no pueden ser usados para describir movimientos de sólido rígido y dejan de ser efectivos si los desplazamientos debidos a la deformación son relativamente grandes. Este es el caso de elementos tan importantes como vigas y placas. En la formulación en coordenadas nodales absolutas todas las coordenadas se definen respecto a un único sistema global de referencia. No se utilizan ángulos infinitesimales como coordenadas nodales, en cambio se usa la definición matemática de la pendiente. Esta nueva formulación evita los problemas antes mencionados con elementos no isoparamétricos, pudiendo éstos describir el movimiento de sólidos flexibles incluyendo grandes rotaciones o grandes desplazamientos debidos a las deformaciones elásticas. Además presenta muchas ventajas frente a la *formulación en sistemas de referencia flotantes*, que es actualmente la más conocida y utilizada en el campo de la dinámica de mecanismos flexibles.

Abstract

In this research *the absolute nodal co-ordinate formulation* is presented, which is a new finite element procedure for the large rotation and large deformation analysis of flexible bodies. Its most interesting application is the dynamic analysis of flexible multibody systems. Non-isoparametric elements that use infinitesimal angles as nodal co-ordinates cannot be used to describe rigid body motion and its application is restricted to small deformation analysis. Elements as important as beams and plates are included in this category. In the absolute nodal co-ordinate formulation, nodal co-ordinates are defined with respect to a global frame of reference. No infinitesimal rotations are used as nodal co-ordinates, instead the mathematical definition of the slope is used. Using this new interpretation, non-isoparametric elements can be used to describe large rotation and large deformation problems. This new formulation shows many advantages when compared with the *floating frame of reference approach* which is currently the most widely used formulation in flexible multibody dynamics.

1 Introducción

El planteamiento de las ecuaciones del movimiento de mecanismos flexibles usando el método de los elementos finitos es un problema complejo cuando se utilizan elementos no isoparamétricos (vigas, placas). El problema reside en la utilización de rotaciones infinitesimales como coordenadas nodales, las cuales no pueden ser utilizadas para describir grandes rotaciones. Por esto este tipo de elementos no puede ser usado para describir movimientos de sólido (Shabana 1996). Esta es una seria limitación en dinámica de mecanismos flexibles. Se han propuesto diferentes soluciones a este problema, entre ellas la formulación en sistemas de referencia flotantes. (De Veubeke 1976, Cavin and Dusto 1977, Shabana 1989, Bremer and Pfeiffer 1992, Kortum et al. 1995) que modela exactamente la inercia de los movimientos como sólido rígido y además conduce a un estado indeformado de los elementos no isoparamétricos ante este tipo de movimientos. La formulación en sistemas de referencia flotantes usa dos tipos de coordenadas para describir el movimiento de sólidos deformables que presentan movimientos de sólido rígido. Las traslaciones y rotaciones de sólido rígido quedan definidas por un conjunto de coordenadas cartesianas y coordenadas de orientación, respectivamente, ambas referidas a un sistema global e inercial de referencia. Los desplazamientos debidos a deformaciones elásticas se definen usando las coordenadas nodales del método de los elementos finitos relativas a sistemas de referencia definidos en el sólido deformable. Las fuerzas de inercia que se obtienen usando esta formulación son no lineales y presentan un fuerte acoplamiento entre coordenadas de referencia y elásticas. La matriz de masa es fuertemente no lineal y aparecen términos de inercia cuadráticos en velocidad, fuerzas centrífugas y de Coriolis. La matriz de rigidez, por el contrario, es constante y la misma que aparece en mecánica lineal de estructuras.

El uso de dos tipos de sistemas de referencia (inerciales y no inerciales) para definir dos tipos de coordenadas (elásticas y de referencia) es la causa de la complejidad de las fuerzas de inercia que aparecen en las ecuaciones. Si se usan elementos finitos isoparamétricos cuyas coordenadas nodales se definen en un sistema inercial de referencia para modelar los sólidos flexibles, se obtienen expresiones mucho más simples para las fuerzas de inercia. Además, las funciones de forma y las coordenadas nodales pueden modelar exactamente la inercia asociada a los movimientos de sólido rígido siempre que estas funciones de forma contengan un juego completo de modos de sólido rígido. En la formulación en coordenadas nodales absolutas (Shabana 1996, Shabana et al. 1998, Escalona et al. 1998) haciendo una nueva interpretación de las coordenadas nodales se consiguen unos elementos finitos viga y placa que pueden ser usados como los isoparamétricos.

Cuando se utiliza la formulación en coordenadas nodales absolutas se incluyen automáticamente los efectos no lineales producidos por los acoplamientos entre los diferentes modos de desplazamiento elástico (no linealidades geométricas). Además la formulación de las restricciones del movimiento impuestas por los pares cinemáticos resulta ser mucho más simple. El objetivo de esta investigación es presentar esta nueva formulación de elementos finitos en el análisis de mecanismos flexibles cuando aparecen pequeños o grandes desplazamientos elásticos. Se utilizan elementos tipo viga de dos dimensiones como demostración.

2 Formulación en Coordenadas Nodales Absolutas

En la formulación en coordenadas nodales absolutas la posición de los puntos materiales pertenecientes al elemento finito se define respecto a un sistema global de referencia. Estas coordenadas absolutas, que se muestran en la Fig. 1, se definen en términos de las funciones de forma y del vector de coordenadas nodales como

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \mathbf{Se} \quad (1)$$

donde **r** es el vector posición de un punto arbitrario del elemento, **S** es la matriz de funciones de forma que incluye un juego completo de modos de sólido rígido, y **e** es el vector de coordenadas nodales formado por desplazamientos y pendientes globales.

2.1. Campo de Desplazamientos y Cinemática de Sólido Rígido

En este artículo se utiliza el elemento tipo viga plana como ejemplo para demostrar la aplicación de la formulación en coordenadas nodales absolutas a la dinámica de mecanismos flexibles. Así como las coordenadas de los puntos materiales de los elementos se definen en un sistema global de referencia, no ha razón para utilizar polinomios de distinto orden en cada dirección. En este trabajo se utilizan polinomios

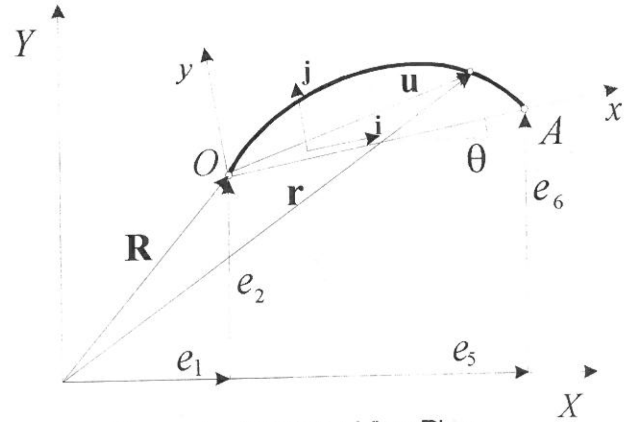

Figura 1. Elemento Viga Plana

cúbicos para interpolar las dos componentes de los desplazamientos. Las funciones de forma y el vector de coordenadas nodales se definen como

$$\mathbf{S} = \left[\begin{matrix} 1-3\xi^2+2\xi^3 & 0 & l(\xi-2\xi^2+\xi^3) & 0 \\ 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & 0 & l(\xi-2\xi^2+\xi^3) \end{matrix}\right. \quad (2)$$
$$\left.\begin{matrix} 3\xi^2-2\xi^3 & 0 & l(\xi^3-\xi^2) & 0 \\ 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & 0 & l(\xi^3-\xi^2) \end{matrix}\right]$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{bmatrix}^T \tag{3}$$

donde las componentes del vector de coordenadas nodales son

$$\begin{aligned}
&e_1 = r_x(x=0), && e_2 = r_y(x=0), \\
&e_3 = \frac{\partial r_x(x=0)}{\partial x}, && e_4 = \frac{\partial r_y(x=0)}{\partial x}, \\
&e_5 = r_x(x=l), && e_6 = r_y(x=l), \\
&e_7 = \frac{\partial r_x(x=l)}{\partial x}, && e_8 = \frac{\partial r_y(x=l)}{\partial x}
\end{aligned} \tag{4}$$

donde x es la coordenada longitudinal a lo largo de la viga. Obsérvese como en la formulación en coordenadas nodales absolutas no se usan rotaciones infinitesimales como coordenadas nodales, sino la definición matemática de la pendiente. Los valores iniciales de estas pendientes en la posición indeformada se determinan usando la cinemática de sólidos rígidos, ya que la Eq. 1 puede ser usada para describir movimientos de sólido rígido. Por ejemplo, en una posición indeformada arbitraria definida por las traslaciones. $r_x(x = 0)$ y $r_y(x = 0)$ y el ángulo de giro θ, el vector posición de un punto cualquiera de la viga se escribe como

$$\mathbf{r}(x) = \begin{bmatrix} r_x(x) \\ r_y(x) \end{bmatrix} = \mathbf{Se} = \begin{bmatrix} r_x(x=0) + x\cos\theta \\ r_y(x=0) + x\sin\theta \end{bmatrix} \tag{5}$$

Por lo tanto las pendientes globales en esta posición indeformada son

$$e_3 = e_7 = \cos\theta; \qquad e_4 = e_8 = \sin\theta \tag{6}$$

Un procedimiento equivalente se usa para determinar las pendientes globales en el caso de elementos en tres dimensiones.

2.2. Energía Cinética e Inercia Exacta del Movimiento como Sólidos Rígidos

La energía cinética de la viga se define como

$$T = \frac{1}{2}\int_V \rho \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dV = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{e}}^T \left(\int_V \rho \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV\right)\dot{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{M}_a \dot{\mathbf{e}} \tag{7}$$

donde V es el volumen, ρ es la densidad del material, y $\mathbf{M}_a$ es la matriz de masa del elemento. La matriz de masa de la Ec. 7 es simétrica y constante, y la misma que aparece en dinámica lineal de estructuras. Usando las funciones de forma de Ec. 2, la matriz de masa del elemento es

$$\mathbf{M}_a = \int_V \rho \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV =$$

$$m \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & 0 & \frac{11l}{210} & 0 & \frac{9}{70} & 0 & -\frac{13l}{420} & 0 \\ & \frac{13}{35} & 0 & \frac{11l}{210} & 0 & \frac{9}{70} & 0 & -\frac{13l}{420} \\ & & \frac{l^2}{105} & 0 & \frac{13l}{420} & 0 & -\frac{l^2}{140} & 0 \\ & & & \frac{l^2}{105} & 0 & \frac{13l}{420} & 0 & -\frac{l^2}{140} \\ & & & & \frac{13}{35} & 0 & -\frac{11l}{210} & 0 \\ & \mathit{Simétrica} & & & & \frac{13}{35} & 0 & -\frac{11l}{210} \\ & & & & & & \frac{l^2}{105} & 0 \\ & & & & & & & \frac{l^2}{105} \end{bmatrix} \quad (8)$$

donde *m* es la masa de la viga y *l* su longitud.

Utilizando las funciones de forma y las coordenadas nodales se pueden modelar exactamente los movimientos de sólido rígido (Shabana et al. 1997).

2.3. Energía de Deformación

Así como en la formulación en coordenadas nodales absolutas se obtiene una expresión muy simple para las fuerzas de inercia, las fuerzas elásticas vienen dadas por expresiones relativamente complicadas. Para demostrarlo, la teoría clásica lineal de vigas se utiliza en esta sección. Usando el punto *O* mostrado en Fig. 1 como punto de referencia, los desplazamientos de un punto cualquiera dela viga relativos éste se obtienen de

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_{1O})\mathbf{e} \\ (\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_{2O})\mathbf{e} \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$ son las filas de la matriz de funciones de forma y $\mathbf{S}_{1O}$ y $\mathbf{S}_{2O}$ son las mismas particularizadas en el punto *O*. Para definir estas coordenadas relativas en el sistema local de referencia de la viga, dos vectores unitarios **i** y **j**, longitudinal y transversal a la viga, respectivamente, se escriben como

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_x \\ i_y \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_O}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_O|}, \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} j_x \\ j_y \end{bmatrix} = \mathbf{k} \times \mathbf{i} \quad (10)$$

donde **k** es el vector unitario en dirección *Z*. Los desplazamientos elásticos longitudinales y transversales en la viga se definen como

$$\mathbf{u}_d = \begin{bmatrix} u_l \\ u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T\mathbf{i} - x \\ \mathbf{u}^T\mathbf{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x i_x + u_y i_y - x \\ u_x j_x + u_y j_y \end{bmatrix} \tag{11}$$

La energía de deformación en la viga debida a los desplazamientos elásticos longitudinal y transversal viene dada por

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \left(Ea\left(\frac{\partial u_l}{\partial x}\right)^2 + EI\left(\frac{\partial^2 u_t}{\partial x^2}\right)^2 \right) dx = \frac{1}{2}\mathbf{e}^T\mathbf{K}_a\mathbf{e} \tag{12}$$

donde *E* es el módulo de elasticidad, *a* es el área de la sección transversal, *I* es el momento de inercia de la sección, y $\mathbf{K}_a$ es la matriz de rigidez del elemento. Esta matriz es una función no lineal del tiempo.

2.4. Ecuaciones del Movimiento

Usando el principio de los trabajos virtuales en dinámica y las expresiones de las energías cinética y de deformación dadas por Ec. 7 y Ec. 12, las ecuaciones del movimiento del elemento finito se escriben como

$$\mathbf{M}_a\ddot{\mathbf{e}} = \mathbf{Q} \tag{13}$$

donde **Q** es el vector de fuerzas generalizadas nodales incluyendo fuerzas elásticas. Obsérvese que no aparecen fuerzas centrífugas ni de Coriolis al ser la matriz de masa constante. Las ecuaciones del movimiento de sólidos deformables se ensamblan de la misma manera que se hace en el método clásico de elementos finitos.

3 Formulación de Restricciones

La formulación de muchas de las ecuaciones de restricción asociadas a los pares cinemáticos de los mecanismos flexibles es muy simple cuando se usa la formulación en coordenadas nodales absolutas. En muchos casos estas ecuaciones son funciones complicadas no lineales cuando se usa el método de los sistemas de referencia flotantes (Shabana 1989). Por ejemplo, un par de rotación que conecta dos sólidos flexibles. Si dos elementos *i* y *j* están conectados por un par de rotación en el punto *P* y éste se selecciona como nodo de los dos elementos, la ecuación de restricción se reduce a

$$\begin{bmatrix} e_5^i - e_1^j \\ e_6^i - e_2^j \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{14}$$

donde e_5^i y e_6^i son las coordenadas absolutas de traslación del elemento i en el nodo P, y e_1^j y e_2^j son las coordenadas absolutas de traslación del elemento j en el nodo P.

5 Resumen y Conclusiones

Las dificultades de la aplicación de los procedimientos clásicos de elementos finitos a la dinámica de mecanismós flexibles con pequeños o grandes desplazamientos elásticos se deben a dos razones fundamentales. El primer motivo es la utilización de ángulos infinitesimales como coordenadas nodales en le caso de placas y vigas. Estas coordenadas no pueden ser usadas para describir movimientos de sólido rígido. El segundo motivo es la utilización de masas concentradas en muchas formulaciones de elementos finitos y programas de ordenador para describir la inercia de los sólidos flexibles. En este artículo se presenta la formulación en coordenadas nodales absolutas, que puede ser utilizada eficientemente en este tipo de problemas. En esta formulación no se utilizan ángulos, ni infinitesimales ni finitos, como coordenadas nodales, en vez de estos se usan pendientes definidas en los nodos. Es fundamental utilizar masas distribuidas para garantizar unas expresiones exactas de la inercia de los elementos cuando éstos giran como sólidos rígidos.

En la formulación en coordenadas nodales absolutas se hace una nueva interpretación de las coordenadas nodales de los elementos finitos. Éstas dan lugar a unas matrices de masa constante, que a su vez evita la aparición de fuerzas centrífugas y de Coriolis en las ecuaciones del movimiento. Por otro lado, las fuerzas elásticas resultan ser funciones no lineales de las coordenadas nodales. Por esto, pocas ventajas numéricas se obtienen al usas hipótesis de pequeñas deformaciones elásticas. La formulación en coordenadas nodales absolutas puede ser usada eficientemente en problemas con grandes desplazamientos elásticos y en dinámica de mecanismos flexibles. Además de la matriz de masa constante que aparece en esta formulación, las restricciones debidas a los pares cinemáticos se imponen de forma muy sencilla comparado con la formulación en sistemas de referencia flotantes. Por la naturaleza de las coordenadas que se usan en con la formulación en sistemas de referencia flotantes, este método está limitado al análisis de pequeños desplazamientos elásticos en mecanismos flexibles. La formulación en coordenadas nodales absolutas no tiene esta limitación, puede ser usada en el análisis de mecanismos flexibles con grandes desplazamientos elásticos

6 Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por U.S. Army Research Office, Research Triangle Park, N. C. Y por el Ministerio de Educación y Cultura. Referencia PB94-1189-C02-01.

7 Referencias

1. Bremer, H., y Pfeiffer, F., 1992, *Elastische Mehr Korpersysteme*, Teubner Publisher, Stuttgart.
2. Cavin, R. K., y Dusto, A. R., 1977, "Hamilton's Principle: Finite Element Methods and Flexible Body Dynamics", *AIAA Journal*, Vol. 15 (2), pp. 1684-1690.
3. De Veubeke, B. F., 1976, " The Dynamics of Flexible Bodies", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 14, pp. 895-913.
4. Escalona, J. L.; Hussien, A. H. y Shabana, A. A., "Application of the Absolute Nodal Coordinate Formulation to Multibody System Dynamics". Aceptado para publicación en el *Journal of Sound and Vibration*, 1998.
5. Kortum, W., Sachau, D., y Schwertassek, R., " Analysis and Design of Flexible and Controlled Multibody with SIMPACK" Paper IAF-95-Ak.04, 46th Intern. Astro. Conf., Oslo, Norway, 1995.
6. Shabana, A. A., 1989, *Dynamics of Multibody Systems*, John Wiley & Sons.
7. Shabana, A. A., 1996, "Finite Element Incremental Approach and Exact Rigid Body Inertia", *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 118, March 1996.
8. Shabana, A. A., 1996, " An Absolute Modal Coordinate Formulation for the Large Rotation and Deformation Analysis of Flexible Bodies", Technical Report # MBS96-1-UIC, Department of Mechanical Engineering, University of Illinois at Chicago, March 1996.
9. Shabana, A. A., Hussein, A. H., y Escalona, J. L., "Application of the Absolute Nodal Coordinate Formulation to Multibody System Dynamics". Aceptado para publicación en el *Journal of Mechanical Design,* 1998.
10. Simo, J. C., y Vu-Quoc, L., 1986, "On the Dynamics of Flexible Beams Under Large Overall Motions-The Plane Case: Parts I & II", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, pp. 849-863.