

## DINAMICA DE MECANISMOS FLEXIBLES: NO-LINEALIDADES GEOMETRICAS

Mayo Núñez, J.M.; Domínguez Abascal, J.

Departamento de Ingeniería Mecánica y de los Materiales E.T.S. Ingenieros Industriales de Sevilla.  
Reina Mercedes, S/N. Sevilla 41011. Tfn (95) 4.55.69.05. FAX (91) 4.62.28.03.

**Resumen.**- En Dinámica de mecanismos flexibles las vibraciones longitudinales y transversales están acopladas aun cuando se utiliza una teoría elástica lineal. Este acoplamiento se acentúa cuando existen grandes desplazamientos relativos entre puntos del mismo cuerpo, y es necesario formular el problema usando una teoría elástica no lineal que considere los términos cuadráticos de las ecuaciones de compatibilidad. En este trabajo se desarrolla una formulación no lineal general de sistemas mecánicos flexibles y se comparan los resultados numéricos obtenidos usando la teoría lineal y la teoría no lineal.

**Abstract.**- In Dynamics of multibody systems, longitudinal and transverse vibrations are coupled even when linear elastic theory is used. This coupling becomes greater when large relative displacements between points within bodies are allowed. Then, it is necessary to develop a nonlinear formulation that accounts for the geometrically nonlinear effects by retaining the terms in the strain-displacement relationship. In this work a general nonlinear formulation of the dynamical behavior of flexible mechanisms is presented and numerical results obtained using the linear and nonlinear theories are compared.

### 1.-INTRODUCCION.

La teoría elástica lineal supone que tanto los desplazamientos como las deformaciones de los cuerpos flexibles son infinitesimales y que el material tiene un comportamiento elástico lineal. Existen, sin embargo, una serie de situaciones prácticas en las cuales estas hipótesis no son aplicables: estudio de estabilidad de los componentes elásticos; problemas en los que existen deflexiones elásticas grandes aun con pequeñas deformaciones, como es el caso de los elementos de gran longitud; o los casos de deformación por flexión (incluso pequeña) influenciada por fuerzas axiales, como es el caso de componentes que giran a altas velocidades tales como helicópteros o turbinas. Este tipo de situaciones deben tratarse haciendo uso de la teoría elástica no lineal.

La teoría elástica no lineal considera que las deformaciones son pequeñas y que no se supera el límite elástico del material, pero permite grandes desplazamientos relativos entre puntos pertenecientes al mismo cuerpo. En esta formulación existe un acoplamiento entre las deformaciones longitudinales y transversales. La existencia de fuerzas axiales de tracción aumentan la rigidez transversal del sistema, teniendo el efecto contrario las fuerzas de compresión. Otra manifestación del acoplamiento es el fenómeno conocido en la literatura inglesa como *foreshortening* o acortamiento por flexión. Cuando un cuerpo flexa, los puntos de ese cuerpo además de experimentar una deflexión transversal, se desplazan longitudinalmente como consecuencia de la flexión si no existe ningún vínculo que impida el movimiento, o si este está restringido el efecto se traduce en un incremento de la deformación longitudinal y, por tanto, del esfuerzo axial con respecto al caso lineal. El

acoplamiento entre las vibraciones longitudinales y transversales se halla acentuado en los problemas de dinámica de mecanismos flexibles. Ello es debido a la interacción del movimiento global como sólido rígido con las deformaciones elásticas, como se demostrará en el apartado 2.

Las ecuaciones del movimiento resultantes de la formulación elástica no lineal son muy complejas. En la literatura se encuentran diferentes tratamientos de las ecuaciones. Hay una serie de trabajos que no consideran las deformaciones axiales. Estudian casos particulares en los que la primera frecuencia natural axial es mucho más alta que la primera frecuencia natural transversal. Viscomi y Ayre (1) usaron este método para estudiar un mecanismo de biela y manivela. Sadler y Sandor (2) obtuvieron la respuesta de un mecanismo de cuatro barras. Yigit et al. (3) analizaron una viga girando sobre un soporte con movimiento de sólido rígido, introduciendo en el análisis el trabajo realizado por las fuerzas centrífugas. Turcic y Midha (4), Bakr y Shabana (5), Liou y Erdman (6) desarrollaron un método basado en el método de la matriz geométrica usado en dinámica de estructuras. Es un método muy fácil de implementar en un programa de elementos finitos de análisis de mecanismos flexibles. Tiene en cuenta el efecto de la rigidización transversal debida a las fuerzas axiales, pero no permite el acortamiento por flexión. Esta simplificación tiene la ventaja de que puede usar funciones de forma desacopladas para representar las deformaciones longitudinales y transversales. Song (7) divide los componentes en subestructuras, en cada una de las cuales es aplicable la teoría elástica lineal y las condiciones de compatibilidad se imponen como ecuaciones de restricción en los puntos de unión de las

subestructuras. Wu y Haug (8) amplian la formulación anterior a coordenadas modales. Kane et al. (9) usan como coordenada longitudinal la deformación medida a lo largo del eje neutro en la posición deformada. Esta deformación es independiente de la deformación transversal, por lo que no es necesario suponer funciones de forma acopladas. Esta formulación conduce a la aparición de términos de inercia adicionales. En este trabajo se presenta una formulación que se denominará completamente no lineal porque no realiza ninguna hipótesis simplificativa para considerar las no-linealidades geométricas. Se toman como coordenadas las deformaciones longitudinal y transversal medidas en la posición indeformada, lo que conlleva a la aparición de términos de rigidez no lineales y a la necesidad de utilizar funciones de forma acopladas para describir las deformaciones.

## 2.-FORMULACION.

La diferencia entre la teoría elástica lineal y la teoría elástica no lineal reside en la expresión del tensor de deformaciones. En este trabajo se va a considerar solo el estudio de vigas en el plano, por ser el caso más sencillo de visualizar, aunque la formulación se extiende fácilmente al caso tridimensional. Se desprecia la contribución de la deformación a cortante. La teoría lineal desprecia la contribución de los términos cuadráticos, lo que conduce a la siguiente expresión para las deformaciones normales:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1)$$

La teoría no lineal, sin embargo, permite grandes desplazamientos relativos entre puntos del mismo sólido, lo que lleva a la expresión

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (2)$$

El planteamiento directo como medio continuo de las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de los sistemas flexibles mediante el equilibrio de la rebanada es el más intuitivo.

Sea una barra de directriz recta cuya referencia de deformación está caracterizada por una orientación  $\phi$  y la posición de su origen A. Sea un punto P de la barra sometido a una deflexión axial  $u$  y transversal  $v$ . La posición, velocidad y aceleración absolutas de P se miden sobre unos ejes fijos en cada momento, que por conveniencia son paralelos a la referencia rígida de la barra, y pasan por el origen absoluto. Se plantea el equilibrio de la rebanada P sometida a una

distribución de axiles N, cortantes Q, y flectores M. Se desprecia la inercia al giro de la sección.

La teoría lineal conduce a las ecuaciones,

$$\begin{aligned} EAu'' &= \\ m(\ddot{x}_A + \ddot{u} - 2\dot{\phi}\dot{v} - \dot{\phi}^2 v - \dot{\phi}^2(x+u)) & \quad (3) \\ -EIV^{IV} &= \\ m(\ddot{y}_A + \ddot{v} + 2\dot{\phi}\dot{u} + \dot{\phi}(x+u) - \dot{\phi}^2 v) & \end{aligned}$$

donde ' indica derivada con respecto a la coordenada espacial y . con respecto a la temporal, E es el módulo de elasticidad de Young, A es el area de la sección, I es la inercia de la sección y m la masa por unidad de longitud.

De la Ec. 3 se observa, que aun en el caso lineal, existe acoplamiento entre las vibraciones transversales y longitudinales a través de la rotación como sólido rígido. La aceleración tangencial y la de Coriolis son las responsables del acoplamiento.

Si se usan las leyes de comportamiento lineales pero se tiene en cuenta el efecto de la deformación sobre la orientación de la rebanada, las ecuaciones del movimiento toman la forma,

$$\begin{aligned} EAu'' &= \\ m(\ddot{x}_A + \ddot{u} - 2\dot{\phi}\dot{v} - \dot{\phi}^2 v - \dot{\phi}^2(x+u)) & \quad (4) \\ -EIV^{IV} + EA(u'v')' &= \\ m(\ddot{y}_A + \ddot{v} + 2\dot{\phi}\dot{u} + \dot{\phi}(x+u) - \dot{\phi}^2 v) & \end{aligned}$$

Esta formulación es la que se denominará *parcialmente no lineal*, porque considera la influencia de la fuerza axial en la rigidez transversal, pero no tiene en cuenta el acortamiento por flexión.

La formulación *completamente no lineal* utiliza las leyes de comportamiento no lineales, lo que da lugar a

$$\begin{aligned} EAu'' + EA v' v'' &= \\ m(\ddot{x}_A + \ddot{u} - 2\dot{\phi}\dot{v} - \dot{\phi}^2 v - \dot{\phi}^2(x+u)) & \\ -EIV^{IV} + EA(u'v')' + 3/2 EA v'^2 v'' &= \\ m(\ddot{y}_A + \ddot{v} + 2\dot{\phi}\dot{u} + \dot{\phi}(x+u) - \dot{\phi}^2 v) & \quad (5) \end{aligned}$$

Esta formulación es la más general de las tres, pero tiene el inconveniente de la difícil resolución de las ecuaciones debido al alto grado de acoplamiento. Las funciones de forma dejan de ser independientes, al estar relacionadas a través de la Ec. 2.

### 3.-RESULTADOS NUMERICOS.

Se va a analizar un mecanismo de biela y manivela, donde solamente la biela se considera flexible. La longitud de la manivela es de 0.15 m, la de la biela 0.3 m, la sección de la viga es circular de diámetro 0.006 m. El material es acero de densidad  $7870 \text{ kg/m}^3$  y módulo de elasticidad  $0.2 \times 10^{12} \text{ Pa}$ . La manivela gira con velocidad angular constante de 150 rad/s. No se considera la gravedad en el análisis. La posición inicial del mecanismo corresponde a un ángulo nulo de la manivela con la horizontal y se supone que las velocidades y deformaciones iniciales son nulas.

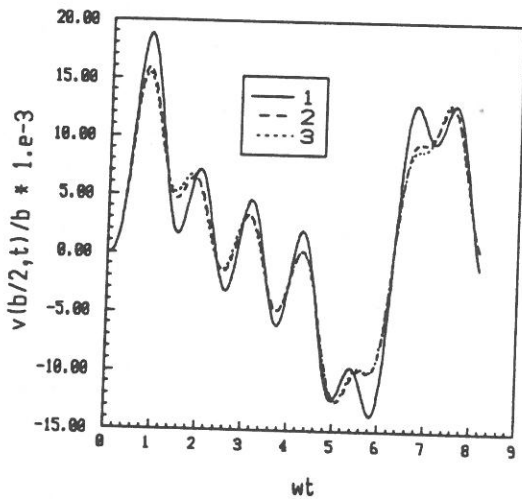


Fig. 1. Vibración transversal para  $r=0.5$ .

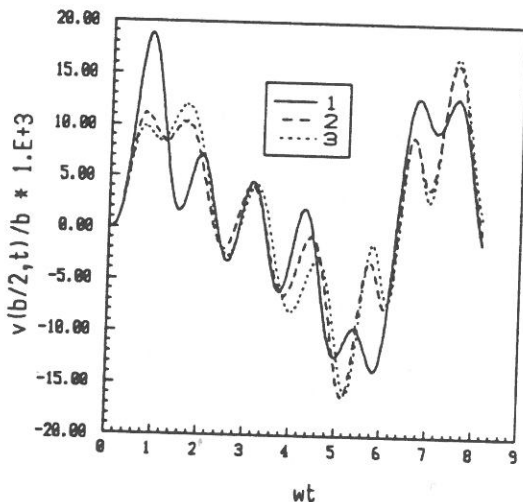


Fig. 2. Vibración transversal para  $r=3$ .

Las figuras 1 y 2 representan la componente vertical adimensional del desplazamiento del punto medio de la biela frente al ángulo de la manivela, obtenida a través de las tres formulaciones: lineal, parcialmente lineal y completamente no lineal. Con la formulación completamente no lineal se han usado unas funciones de forma acopladas como se describe en la Ref. 10.

La Fig. 1 muestra la respuesta en el caso de que la relación  $r$  entre la masa de la corredera y la masa de la biela sea 0.5. Se observa que ambas respuestas no lineales son muy parecidas y que las mayores diferencias con respecto a la respuesta lineal se encuentran en los puntos de deflexión transversal

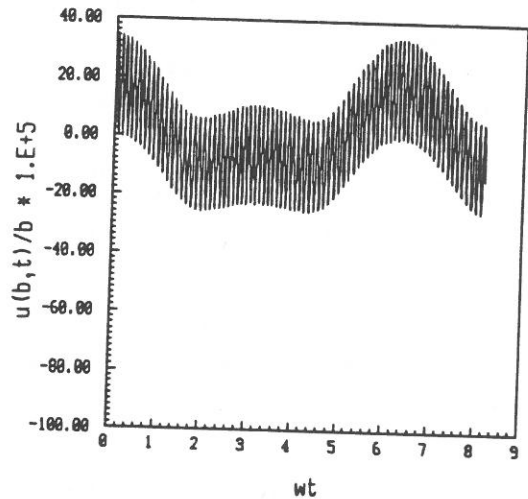


Fig. 3. Vibración longitudinal parcialmente no lineal para  $r=3$ .

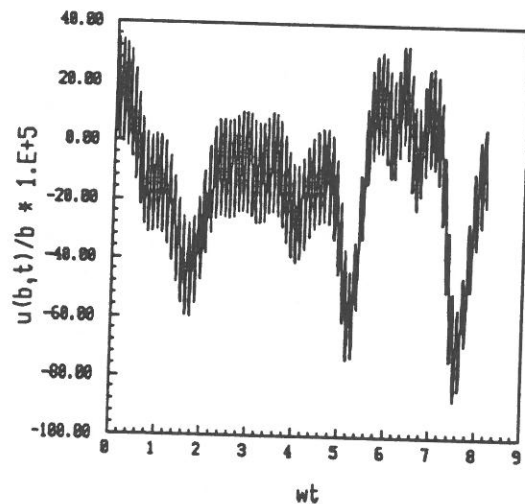


Fig. 4. Vibración longitudinal completamente no lineal para  $r=3$ .

máxima. Los resultados concuerdan perfectamente con los resultados presentados por Bakr y Shabana en (5), donde se comparan las respuestas obtenidas usando una formulación lineal y una formulación parcialmente no lineal.

Si se aumenta la fuerza axial incrementando la masa de la corredera, pero siempre por debajo de la primera carga de pandeo de Euler, los efectos de las no linealidades geométricas cobran mayor importancia. En la Fig. 2 se muestran las respuestas en el caso de que la masa de la corredera sea tres veces la masa de la biela. Se observa que la diferencia entre las respuestas no lineales y la respuesta lineal aumenta. Las diferencias entre las dos respuestas no lineales crecen, aunque no son muy importantes.

Las Fig. 3 y 4 representan el desplazamiento de la corredera frente al ángulo de giro de la manivela, para el caso  $r=3$ . Los resultados obtenidos usando las dos formulaciones no lineales son muy distintos. La respuesta longitudinal lineal y parcialmente no lineal son idénticas, debido a que la formulación parcialmente no lineal desprecia el acortamiento debido a la flexión. La teoría completamente no lineal permite este efecto, como se observa en la Fig. 4. Los picos más altos de desplazamiento longitudinal corresponden a los puntos de máxima deflexión transversal y son, por tanto, negativos, ya que corresponden a un acortamiento de la barra.

En el ejemplo que se está analizando el desplazamiento longitudinal no está restringido, por lo que la deflexión transversal conduce a un acortamiento pero no incrementa la fuerza axial. Por tanto, de la Fig. 3 se deduce que las máximas deflexiones transversales se corresponden con fuerzas axiales de tracción. Esto explica que las respuestas no lineales sean más rígidas (frecuencia más alta y amplitud menor) que la respuesta lineal, como se observa en las Fig. 1 y 2.

#### 4.-CONCLUSIONES.

Se ha desarrollado una formulación completamente no lineal para el análisis dinámico de mecanismos flexibles. Se han analizado los resultados numéricos obtenidos para un mecanismo de biela y manivela, llegándose a las siguientes conclusiones:

El efecto de las no linealidades geométricas es importante cuando existen fuerzas axiales significativas y/o cuando las deflexiones transversales son grandes.

Para las vibraciones axiales, la contribución de los términos no lineales puede llegar a ser mayor que la de los términos lineales. Esta contribución se pierde si se usa una formulación parcialmente no lineal.

Cuando el desplazamiento longitudinal no está

restringido, el acortamiento por flexión influye directamente sobre las vibraciones longitudinales pero indirectamente sobre las transversales, por lo que el efecto sobre estas es menor. La influencia es debida al acoplamiento entre las vibraciones longitudinales y transversales a través de la rotación como sólido rígido del cuerpo.

El uso de la teoría completamente no lineal conlleva al uso de funciones de forma acopladas para representar la deformación del sistema.

#### 5.-REFERENCIAS.

1. Viscomi, B.V. y Ayre, R.S. "Nonlinear Dynamic Response of Elastic Slider-crank Mechanism". *Journal of Engineering for Industry*, pág.251-262, 1971.
2. Sadler, J.P. y Sandor G.N. "Nonlinear Vibration Analysis of Elastic Four-bar Linkages". *Journal of Engineering for Industry*, pág.411-419, 1974.
3. Yigit, A., Scott, R.A. y Ulsoy, A.G. "Flexural Motion of a Radially Rotating Beam Attached to a Rigid Body". *Journal of Sound and Vibration*, vol.121, no.2, pág.201-210, 1988.
4. Turcic, D.A. y Midha, A. "Dynamic Analysis of Elastic Mechanism Systems. Part I: Applications". *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol.106, pág.249-254, 1984.
5. Bakr, E.M. y Shabana, A.A. "Geometrically Nonlinear Analysis of Multibody Systems". *Computers & Structures*, vol.23, no.6, pág.739-751, 1986.
6. Liou, F.W. y Erdman, A.G. "Analysis of a High-speed Flexible Four-bar Linkage. Part I: Formulation and Solution". *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, vol.111, pág.35-47, 1989.
7. Song, J.O. "Dynamical Analysis of Flexible Mechanisms". PhD Dissertation. University of Iowa, 1979.
8. Wu, S.C. y Haug, E.J. "Geometric Non-linear Substructuring for Dynamics of Flexible Mechanical Systems". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.26, pág.2211-2226, 1988.
9. Kane, T.R., Ryan, R.R. y Banerjee, A.K. "Dynamics of a Cantilever Beam Attached to a Moving Base". *Journal of Guidance and Control*, vol.10, no.2, pág.139-151, 1987.
10. Mayo, J.M., Domínguez, J. y García-Lomas, J. "Continuous Modelling of Flexible Mechanisms: Geometrically Nonlinear Analysis". *Proceedings of the Eighth World Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, vol.6, pág.79-82, 1991.