

MODELO ESTADISTICO PARA LA DETERMINACION DE LA VIDA A FATIGA ANTE CARGAS ALEATORIAS

J. Zapatero\* y J. Domínguez\*\*

\* E.U.I.T.I. Universidad de Málaga  
 \*\* E.T.S.I.I. Universidad de Sevilla

**Resumen.** - En este trabajo se presenta una aproximación estadística a la determinación de la vida a fatiga de un elemento mecánico sometido a cargas aleatorias. La duración se considera como la suma del tiempo necesario para la nucleación y para la propagación. En nucleación se caracteriza el registro mediante una función de densidad de probabilidad de rangos, después de aplicar el método Rain-Flow para contar ciclos. En propagación se emplea también una función de densidad de probabilidad de rangos, pero ajustada directamente. Para la nucleación se emplea un criterio de acumulación de daño lineal, mientras en propagación se utiliza una fórmula recurrente que permite definir la longitud esperada de grieta en cualquier instante en función del anterior y las características estadísticas del registro.

1. NOMENCLATURA

- a : Longitud de grieta.
- A,B : Función de la geometría y las características del material.
- b : Exponente de resistencia a la fatiga.
- c : Exponente de ductilidad a la fatiga.
- C : Constante dependiente del material.
- d :  $(b/c + 1)/2$ .
- E : Módulo de elasticidad.
- $\Delta K$  : Rango del factor de intensidad de tensiones.
- $K_c$  : Factor crítico de intensidad de tensiones.
- $K_T$  : Factor de concentración de Tensiones elástico.
- n : Constante dependiente del material.
- $N_{fi}$  : Ciclos para la rotura a un nivel de tensión o deformación i.
- $N_p$  : Número de ciclos aplicados.
- $N_T$  : Vida de transición. Valor de N en la curva  $\Delta\epsilon - 2N_p$ , para el que los rangos de deformaciones elásticas y plásticas son iguales.
- p,r : Funciones de densidad de probabilidad.
- R : Coeficiente de asimetría de los ciclos.
- $\Delta s$  : Rango de tensiones nominales.
- $\Delta s_o$  : Valor del desplazamiento de la función de densidad de probabilidad de  $\Delta s$ .

- $\Delta\epsilon$  : Rango de deformaciones en el fondo de una entalla.
- $\Delta\epsilon_T$  : Rango de deformación de transición.
- $\alpha\beta\delta$  : Parámetros de las curvas de Manson.
- $\lambda$  : Parámetro de la distribución exponencial.

2. INTRODUCCION

El proceso de fatiga se puede entender como una acumulación progresiva de daño. Este deterioro paulatino culmina en el fallo del material. Este proceso puede considerarse en general dividido en cuatro etapas. /1-3/, nucleación, crecimiento en estado I, crecimiento en estado II y fractura. Desde el punto de vista de la ingeniería estas etapas suelen agruparse en dos: nucleación y crecimiento /4-6/.

Para calcular la vida a fatiga es mejor contemplar ambas etapas de forma separada, pues las leyes de comportamiento de ambas son distintas. En la nucleación juegan un papel primordial las deformaciones plásticas locales, mientras que en la propagación lo juegan los parámetros básicos empleados en mecánica de la fractura. Un problema que se plantea en esta separación es definir cuando termina una etapa y comienza la otra. Existen muy diversos criterios sobre este tema. Unos suponen el fin de la nucleación cuando existen grietas con dimensiones del orden de varias micras, mientras otros consideran el fin de esta etapa cuando hay grietas de varios milímetros /7-9/.

El cálculo de la vida de un elemento como suma de la duración de ambas etapas, cuando las --

cargas varían de forma aleatoria, puede hacerse por dos procedimientos. Uno es la simulación ciclo a ciclo de todo el proceso de fatiga y otro es el empleo de conceptos estadísticos para estudiar cada una de las dos etapas de una forma global /10-12/.

En este trabajo se obtiene de forma analítica una aproximación estadística de la vida a fatiga de un elemento sometido a cargas aleatorias, separando el proceso en las dos fases indicadas previamente.

### 3. NUCLEACION

El estudio del periodo de nucleación se realiza a partir del método de las deformaciones locales, el método Rain-Flow para contar ciclos y un criterio lineal de daño acumulado. El método se basa en el ajuste de una función de densidad de probabilidad (FDP) de rangos de deformación, a partir de la distribución de rangos obtenida después de aplicar el método Rain-Flow al registro en cuestión. El ajuste se hace mediante mínimos cuadrados, ponderando, de forma que tengan mayor influencia los rangos de mayor amplitud, cuyo error en el ajuste produce un error mayor en la vida obtenida /13/.

El daño acumulado en nucleación, empleando un criterio lineal, puede determinarse mediante la expresión:

$$D = \sum \frac{n(\Delta\epsilon)}{2 N_f(\Delta\epsilon)} = \int_0^{\infty} \frac{2 N_p r(\Delta\epsilon)}{2 N_f(\Delta\epsilon)} d(\Delta\epsilon) \quad (1)$$

donde D es el daño acumulado,  $N_f(\Delta\epsilon)$  es el número de ciclos necesarios para el fallo con unos rangos de deformación  $\Delta\epsilon$ ,  $n(\Delta\epsilon)$  es el número de rangos de valor  $\Delta\epsilon$ ,  $N_p$  es el número total de rangos producidos y  $r(\Delta\epsilon)$  es la función de densidad de probabilidad de rangos de deformaciones.

La función  $r(\Delta\epsilon)$  se obtiene a partir de la función de densidad de probabilidad de rangos de tensiones, ajustada después de aplicarle el método Rain-Flow a las tensiones nominales. Su determinación exige el empleo de la regla de Neuber /14/ y una ecuación invertida de la curva de comportamiento cíclico ( $\sigma-\epsilon$ ) del tipo de la propuesta por Manson /15/.  $N_f$  puede expresarse de forma explícita en función de  $\Delta\epsilon$ , de forma aproximada, como también propone Manson.

Empleando para el ajuste de la función de densidad de probabilidad de rangos de tensiones, una función exponencial del tipo

$$r(x) = \lambda e^{-\lambda(x-x_0)} \quad (2)$$

donde  $\lambda$  es el parámetro a ajustar, y sustituyendo en la ecuación (1) las expresiones indicadas anteriormente, puede obtenerse /13/:

$$D = \frac{1}{N_p} \left[ \frac{B \lambda (\Delta\epsilon_T)^{1/b}}{N_T} \int_0^{\Delta\epsilon_T} e^{-(\lambda(B \Delta\epsilon, F1 - \Delta s_0) + \delta (\frac{\Delta\epsilon}{\Delta\epsilon_T})^\beta)} d\Delta\epsilon + \frac{A \lambda (\Delta\epsilon_T)^{1/c}}{N_T} \int_{\Delta\epsilon_T}^{\infty} e^{-(\lambda(A \Delta\epsilon)^d F2 - \Delta s_0) + \delta (\frac{\Delta\epsilon}{\Delta\epsilon_T})^\beta} d\Delta\epsilon \right] \quad (3)$$

$$\frac{F1 (1 + \frac{b\delta\beta}{2} (\frac{\Delta\epsilon}{\Delta\epsilon_T})^\beta)}{(\Delta\epsilon)^{1/b}} d\Delta\epsilon + \frac{A \lambda (\Delta\epsilon_T)^{1/c}}{N_T} \int_{\Delta\epsilon_T}^{\infty} e^{-(\lambda(A \Delta\epsilon)^d F2 - \Delta s_0) + \delta (\frac{\Delta\epsilon}{\Delta\epsilon_T})^\beta} d\Delta\epsilon + \frac{F2(d + \frac{b\delta\alpha}{2} (\frac{\Delta\epsilon}{\Delta\epsilon_T})^\alpha)}{(\Delta\epsilon)^{1+1/c-d}} d\Delta\epsilon \quad (3)$$

Donde tanto A y B /13/, como b, c, d,  $N_T$ ,  $\Delta\epsilon_T$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta$  son constantes conocidas, dependientes del material y de la geometría del elemento,  $\Delta s_0$  es el origen de la exponencial ajustada a la FDP de los rangos de tensiones y  $F1 = F1(\Delta\epsilon)$  y  $F2 = F2(\Delta\epsilon)$  /13, 15/.

Haciendo  $D=1$  en la ecuación anterior y despejando  $N_p$  puede obtenerse la duración esperada del periodo de nucleación.

### 4. CRECIMIENTO

La etapa de crecimiento se analiza con un modelo recurrente, que permite determinar la longitud esperada de la grieta en cada ciclo, en función de su longitud esperada en el ciclo anterior. Dicha etapa se considerará terminada cuando la longitud esperada alcance el valor de la grieta crítica o una longitud mínima admisible definida.

Partiendo de una longitud inicial  $a_0$ , la longitud después de cualquier ciclo n, puede expresarse:

$$a_n = a_{n-1} + \Delta a_n \quad (4)$$

donde  $a_{n-1}$  es la longitud después del ciclo n-1 y  $\Delta a_n$  es el incremento de longitud producido en el ciclo indicado. Determinando el valor esperado, puede escribirse:

$$E[a_n] = E[a_{n-1} + \Delta a_n] \quad (5)$$

o de otra forma:

$$E[a_n] = \int_{a_0}^{\infty} \int_{a_0}^{\infty} (a_{n-1} + \Delta a_n) p(a_{n-1}, \Delta a_n) da_{n-1} d\Delta a_n \quad (6)$$

donde  $p(a_{n-1}, \Delta a_n)$  es la función de densidad de probabilidad conjunta. Representando esta función de densidad de probabilidad en la forma:

$$p(a_{n-1}, \Delta a_n) = p(a_{n-1}) p(\Delta a_n/a_{n-1}) \quad (7)$$

sustituyendo en (6) y operando, puede llegarse a:

$$E[a_n] = E[a_{n-1}] + \int_{a_0}^{\infty} \int_{a_0}^{\infty} \Delta a_n p(\Delta a_n/a_{n-1}) p(a_{n-1}) da_{n-1} d\Delta a_n \quad (8)$$

que es una fórmula recurrente que permite obtener la longitud esperada de la grieta en cada ciclo, en función de la del ciclo anterior. Haciendo la suposición de que  $a_{n-1} = E[a_{n-1}]$  en la función de densidad de probabilidad marginal, la ecuación anterior puede expresarse:

$$E[a_n] = E[a_{n-1}] + \int_{a_0}^{\infty} \Delta a_n p(\Delta a_n/E[a_{n-1}]) d\Delta a_n \quad (9)$$

Como expresión de  $\Delta a_n$  en función de las tensiones puede emplearse un modelo de los conocidos, por ejemplo el de Forman /16/:

$$\Delta a_n = \frac{da}{dN} = C \frac{\Delta K^n}{(1-R)K_c - \Delta K} \quad (10)$$

Considerando R aproximadamente constante, con valor igual al medio producido, puede decirse que:

$$\Delta a_n = f(\Delta s, a_{n-1} = E[a_{n-1}]) \quad (11)$$

Por otro lado, la probabilidad de que  $\Delta a_n$  tenga un valor determinado cuando  $a_{n-1} = E[a_{n-1}]$  será la misma que la de que se produzca el  $\Delta s$  necesario para producir dicho incremento de a. Esto es:

$$p(\Delta a_n/E[a_{n-1}]) d\Delta a_n = p(\Delta s) d\Delta s \quad (12)$$

Sustituyendo en (9), puede llegarse a:

$$E[a_n] = E[a_{n-1}] + \int_{a_0}^{\infty} f(\Delta s, a_{n-1} = E[a_{n-1}]) p(\Delta s) d\Delta s \quad (13)$$

que es la ecuación recurrente que permite obtener el valor esperado de la longitud de grieta  $a_n$  en función del del ciclo anterior y las características estadísticas del registro de cargas.

Dado que la longitud de la grieta y la velocidad de crecimiento en función de ésta, varían muy lentamente, puede hacerse la aproximación de considerar la velocidad de crecimiento constante por tramos. Considerando una longitud final  $a_f$  y una inicial  $a_0$ , puede considerarse el crecimiento como una serie de incrementos  $\Delta a_I$ , suficientemente pequeños, tales que:

$$\Delta a_I = \frac{a_f - a_0}{h} \quad (14)$$

donde h es el número de intervalos en que se divide la cantidad total a crecer. Para cada in-

cremento  $\Delta a_I$  se considerará una velocidad de crecimiento igual a la media de las correspondientes a las longitudes inicial  $a_{I-1}$  y final  $a_I$  del intervalo.

De acuerdo con lo anterior, y la ecuación (13), el número de ciclos necesarios para que la longitud esperada de la grieta pase de  $a_{I-1}$  a  $a_I$  será:

$$N_I = \frac{2 \Delta a_I}{\int_0^{\infty} f(\Delta s, a_{I-1}) p(\Delta s) d\Delta s + \int_0^{\infty} f(\Delta s, a_I) p(\Delta s) d\Delta s} \quad (15)$$

El número necesario para que el valor esperado de la grieta sea  $a_f$ , será:

$$N = \sum_h N_I \quad (16)$$

En vez de dividir el intervalo en incrementos  $\Delta a_I$  iguales, podría hacerse definiendo m incrementos  $\Delta a_I$ , tales que:

$$a_f = a_0 (1+g)^n \quad (17)$$

y

$$\Delta a_I = a_{I-1} (1+g) \quad (18)$$

De esta forma, el número de intervalos necesarios para conseguir suficiente precisión será menor.

Para todo el proceso anterior es necesario conocer previamente  $p(\Delta s)$  y los valores  $a_0$  y  $a_f$ . El valor de la longitud máxima admisible  $a_f$  puede definirse de acuerdo con un criterio determinado o como la longitud crítica, a partir de la cual se produce la fractura. En este último caso puede definirse como aquella para la que se produce la fractura con un valor de  $\Delta s$  igual al valor medio. Esto es, aquella que cumple:

$$K_c = F(a) \sqrt{\pi a_f} \int_0^{\infty} \Delta s p(\Delta s) d\Delta s \quad (19)$$

Como valor de  $a_0$  puede elegirse uno de los obtenidos por alguno de los criterios normalmente aceptados para ello. En el caso más frecuente de elementos entallados, un criterio para la definición puede ser el propuesto por Dowling /17/. Propone que este valor sea la longitud para la que puede considerarse que la grieta ha salido del campo de influencia de la entalla. Ello ocurre cuando la longitud es aquella en que el factor de intensidad de tensiones determinado considerando la profundidad de la entalla como parte de la grieta es igual al determinado considerando la grieta como más pequeña, en la superficie, e incluida en la zona de concentración de tensiones. Esto es, cuando:

$$F(a) \Delta s \sqrt{\pi a} = 1,12 K_T \Delta s \sqrt{\pi l} \quad (20)$$

siendo a la profundidad de la entalla más la longitud de la grieta l y donde  $K_T$  es el factor de concentración de tensiones producido por la entalla.

La función  $p(\Delta s)$  puede obtenerse haciendo un ajuste de los rangos obtenidos en el registro. Dicho ajuste puede hacerse mediante una función propuesta por Rice /18/, desplazada para conseguir un error menor. Su expresión es:

$$p(\Delta s) = \lambda_1 \frac{\Delta s - \Delta s_0}{\sigma^2} e^{-\lambda_2 (\Delta s - \Delta s_0)^2 / \sigma^2} \quad (21)$$

donde  $\sigma$  es la desviación típica de la amplitud del registro e  $\Delta s_0$  el desplazamiento. La relación entre los parámetros  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  se obtiene de la condición:

$$\int_0^{\infty} p(\Delta s) d\Delta s = 1 \quad (22)$$

Los valores de  $\lambda$  e  $\Delta s_0$  se obtendrán del ajuste realizado.

## 5. RESULTADOS

Para analizar la bondad del modelo propuesto, se han comparado los resultados obtenidos con distintos registros con los producidos mediante simulación y con algunos resultados de ensayos. La comparación se ha hecho separadamente en nucleación y en propagación, y conjuntamente, con resultados de vida total.

Los registros empleados han sido los utilizados por el "Fatigue Design and Evaluation Committee" de SAE /19/ denominados "Frenos", "Transmisión" y "Suspensión" y dos de los empleados en el programa "Round Robin Crack Growth Prediction on Center-Crack Tension Specimen Under Spectrum Loading" /20/, denominados "H 300" y "H1300".

Para nucleación, la función de densidad de probabilidad de rangos de tensión ajustada, ha sido:

$$p(\Delta s) = \lambda e^{-(\Delta s - \Delta s_0)} \quad (23)$$

donde  $\Delta s_0$  es el desplazamiento, y corresponde al punto de máxima ordenada de la distribución real obtenida. Se han obtenido resultados con tres ajustes distintos /13/ :

a) Ajuste en el que la función a minimizar es:

$$FOBJ = \sum \left( \frac{p_i - p(\Delta s_i)}{N_{fi}} \right)^2 \quad (24)$$

donde  $p_i$  es el valor de la frecuencia normalizada del rango  $\Delta s_i$ ,  $p(\Delta s_i)$  es el valor de  $p(\Delta s)$

en  $\Delta s_i$  y  $N_{fi}$  es el número de ciclos hasta el fallo en la curva  $\Delta s$ -N, modificada para tener en cuenta la concentración de tensiones /21/. Se ha considerado como límite de fatiga un rango igual al 60% del máximo producido.

b) La función a minimizar es:

$$FOBH = \left( \sum \frac{p_i}{N_{fi}} - \sum \frac{p(\Delta s_i)}{N_{fi}} \right)^2 \quad (25)$$

No se ha considerado límite de fatiga.

c) La misma función anterior pero ajustada sólo para valores de  $\Delta s$  mayores del 60% del máximo. Se ha considerado el mismo límite de fatiga que en el ajuste a.

En la Fig. 1 se muestra el registro H1300 ajustado con el criterio b.

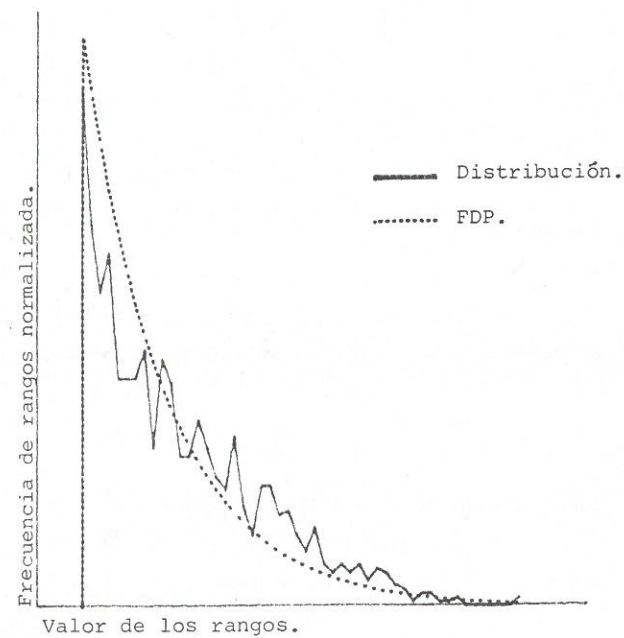


Fig. 1.- Distribución y FDP de la historia H1300.

En la tabla 1 se muestran los niveles máximos de tensión (MPa) de los distintos registros empleados para la comparación de los resultados de la vida en nucleación. El material empleado

Tabla 1.- Valores de los niveles de tensión para nucleación

HISTORIA NIVEL	FRENOS	TRANS.	SUSPENS	H1300
1	805,3	805,3	805,3	805,3
2	402,65	402,65	453	402,65
3	176,16	176,16	302	176,16
4	151	-	226,5	151
5	125,82	-	151	-

ha sido el MAN-TEN /19/. Se ha considerado una probeta con un coeficiente de concentración de tensiones igual a tres ( $K_T = 3$ ).

En la Fig. 2 se representan las relaciones entre los resultados obtenidos con el método propuesto y los de la simulación, para los tres ajustes indicados. En ella puede comprobarse que los resultados se ajustan razonablemente bien a la simulación. Para niveles altos de ten-

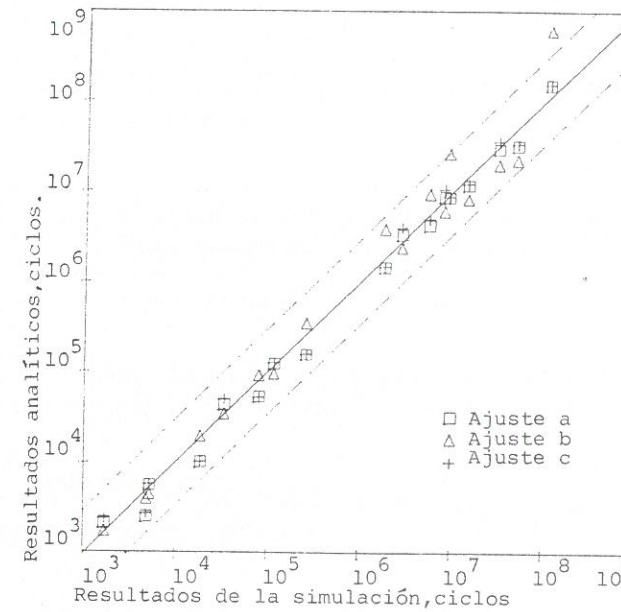


Fig. 2.- Comparación de los resultados del modelo para nucleación, con la simulación.

sión, el ajuste b produce los mejores resultados, mientras que para niveles bajos son los a y c los que generan las mejores aproximaciones. Ello puede explicarse en parte por el hecho de que al considerar el límite de fatiga indicado, sólo se ha hecho el ajuste para los niveles de tensión altos. Con ello se ha obtenido mejor aproximación en los niveles de carga que producen deformaciones por encima de  $\Delta \epsilon_T$  que tienen, sobre la vida, mucho más efecto que el resto.

Para analizar la eficacia del modelo de crecimiento se han utilizado los cinco tipos de registro indicados anteriormente. Cada uno de ellos se ha aplicado con 2 ó 3 niveles distintos de tensión. Las tensiones máximas aplicadas a cada uno de ellos se indican en la tabla 2.

Tabla 2.- Niveles de tensión utilizados en crecimiento

HISTORIA NIVEL	FRENOS	TRANS.	SUSPEN.	H300	H1300
1	176,16	402,69	493	144,79	124
2	151,16	176,16	302	193	186
3	-	-	-	-	248

Los tres primeros registros se han aplicado a probetas iguales a las utilizadas por SAE --- /19/, de acero Max-Ten. Para las otras dos historias de carga se ha considerado una probeta igual a la empleada en el programa "Round Robin" /20/, de aleación de aluminio 2219-T851. En la Fig. 3 se muestra el ajuste realizado con el registro de Frenos, mediante la ecuación (21). La ecuación de crecimiento empleada ha sido una igual a la (10), pero empleando un  $\Delta K$  efectivo, resultado de restarle las tensiones de cierre /22/ a las tensiones mínimas.

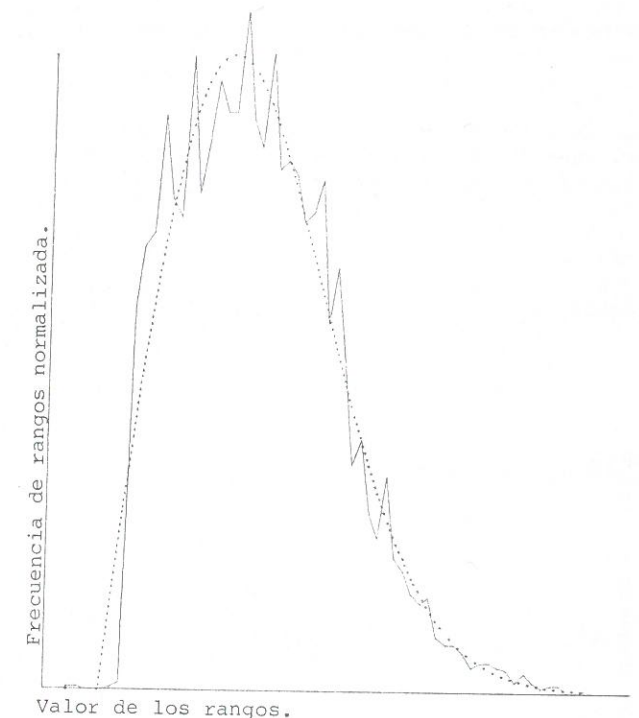


Fig. 3.- Distribución de rangos y FDP de la historia de Frenos.

En la tabla 3 se muestra una comparación de los resultados obtenidos mediante el modelo propuesto, con los obtenidos para los seis procedimientos propuestos en el programa "Round Robin" /20/. Los valores indicados son relaciones entre los números de ciclos obtenidos, y los resultados de ensayos. En el caso del programa "Round Robin", se representan los valores medios de los resultados de los 6 procedimientos y la dispersión, de forma que todos los procedimientos produjeron resultados dentro de la banda indicada.

Tabla 3.- Comparación de los resultados de los registros H300 y H1300 con los valores del programa Round Robin.

HISTORIA NIVEL	H300	ROUND ROBIN	H1300	ROUND ROBIN
1	1,6	1,6±0,64	1,24	1,47±0,43
2	1,29	1,20±0,41	1,14	0,99±0,21
3	-	-	1,03	1,03±0,3

En la Fig. 4 se representan los resultados obtenidos con los tres registros de SAE, comparados con los ensayos. Se ha considerado el crecimiento entre 2.5 mm y el fallo. Para el material empleado se ha asumido un valor umbral de crecimiento  $\Delta K_{th} = 11 \text{ Mp}_a \sqrt{\text{m}}$ . Como valor de la tensión de cierre se ha supuesto que esta es en todos los casos igual al 35% de la máxima.

Puede comprobarse que los resultados son bastante buenos, excepto en el caso del registro "Suspensión", sobre todo a niveles altos. Dicho registro tiene un coeficiente medio de asimetría mucho menor que uno ( $R < -1$ ). Ello implica valores menores de la tensión de cierre que en los otros registros, sin embargo, se ha considerado el mismo valor. Además, en el caso del nivel alto de tensión, la media de los mínimos de tensión nominal llega a ser la mitad del límite elástico, habiendo numerosos ciclos que sobrepasan dicho nivel. Ello, además de afectar aun más a las tensiones de cierre, hace que prácticamente deje de ser aplicable la mecánica de la fractura,

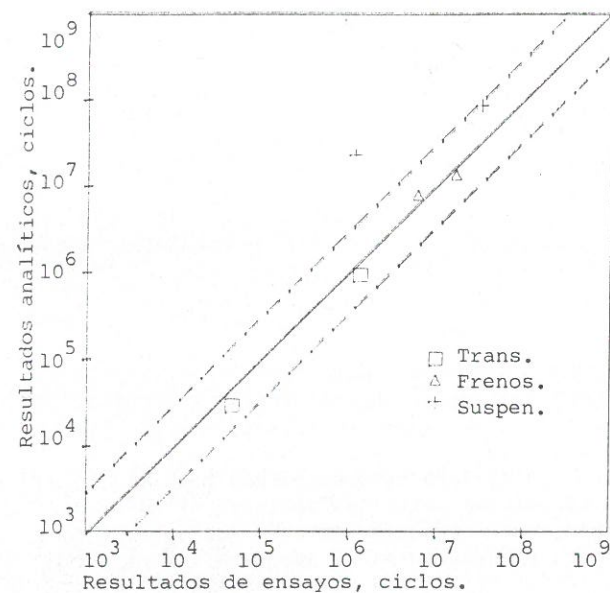


Fig. 4.- Comparación de los resultados de crecimiento, del modelo con los datos de ensayos.

Con respecto a la vida total, se ha aplicado el procedimiento con la probeta y los tres registros de SAE, con acero Man-Ten. Como separación entre nucleación y propagación se ha empleado el criterio indicado previamente, representado en la ecuación (20). Con ello se obtiene un valor de  $a_0 = 0.7 \text{ mm}$ . En la Fig. 5 se representan los resultados obtenidos, comparados con los experimentales.

Los resultados están prácticamente todos en la banda de 2 a 1/2 en relación a los experimentales, excepto el caso de niveles altos en el registro "Suspensión". En este caso, dado que con niveles altos de tensiones, la mayor parte de la vida se consume en propagación, las razo-

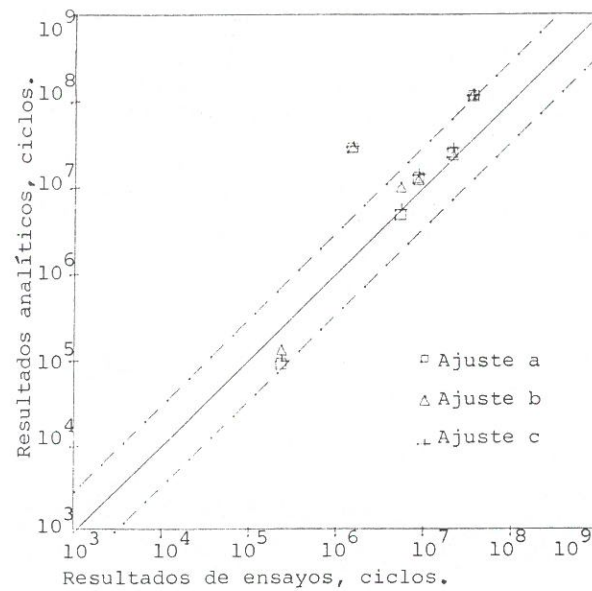


Fig. 5.- Comparación de la vida total del modelo con los resultados de ensayos.

nes de la diferencia obtenida son las indicadas previamente en propagación.

## 6. CONCLUSIONES

Como ventaja del método propuesto puede señalarse la rapidez, una vez realizado el ajuste y la práctica constancia del tiempo de cálculo, independientemente del número de ciclos del registro. Ello permite emplear registros más largos, que caracterizan la variación de las cargas de una forma más exacta.

Como inconveniente principal está la imposibilidad de considerar al menos de forma directa los efectos de secuencia tanto en nucleación como en propagación.

## 7. BIBLIOGRAFIA

- Gowda, C.V., Topper, T.H. y Leis B.N. "Crack Initiation and Propagation in Notched Plates Subjected to Cyclic Inelastic Strains", Proceeding Conf. on Mech. Behavior of Materials, Kyoto, pp. 187-197, 1971.
- Schijve, J. "Four Lectures on Fatigue Crack Growth", Eng. Fract. Mech. Vol. 11, pp. 169-181, 1979.
- Hammouda, M.M. y Miller, K.J. "Prediction of Fatigue Lifetime of Notched Members", Fat. of Eng. Mat. and Struct., Vol. 2, pp. 377-386, 1980.
- Kujawski, D., Ellgin, F. "A Cumulative Damage Theory for Fatigue Crack Initiation and Propagation", Int. J. Fat., Vol. 6, No. 2, pp. 83-88, 1984.
- Socie, D.F., "Fatigue Life Estimates for Blunting Notched Members" Trans. ASME, J. of Eng. Mat. and Tech. Vol. 102, pp. 193-198, 1980.

- Schutz W. "The prediction of Fatigue Life in the Crack Initiation and Propagation -- Stages - A State of the Art Survey", Eng. Fract. Mech., Vol. 11, pp. 405-421, 1979.
- Ibrahim, M.F.E. y Miller, K.J. "Determination of Fatigue Crack Initiation Life", Fatigue Eng. Mat. and Struct., Vol. 2, pp. 351-360, 1980.
- Hudak Jr S.J. "Small Crack Behavior and the Prediction of Fatigue Life", Trans. ASME, J. Eng. Mat. and Tech., Vol. 103, pp. 26-35, 1981.
- Nelson, D.V. "Cumulative Fatigue Damage in Metals", Ph. D. Dissertation Mechanical Eng. Dept., Stanford Univ., 1978.
- Hashin, Z. "A Reinterpretation for the Palmgren-Miner Rule for Fatigue Life Prediction", Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol. 47, pp. 324-328, 1980.
- Winching, P.H. y Hagen, E.B. "Probabilistic Design for Random Fatigue Loads", Trans. ASCE, J. Eng. Mech. Division, EM6, pp. 1165-1179, 1973.
- Garivaltis, D.S., Gark, V.K. y D'Souza, A. F. "Fatigue Damage of the Locomotion Suspension Elements Under Random Loading", J. Mech. Design, pp. 1-10, 1980.
- Zapatero, J. y Domínguez, J. "Un modelo Analítico para hallar la Vida en Nucleación Basado en el Rain-Flow y las Deformaciones Locales", Anales de Ingeniería Mecánica, Año 2, No. 1, pp. 212-215 y 147-149, 1984.
- Neuber, H. "Theory of Stress Concentration for Shear Strained Prismatical Bodies with Arbitrary non Linear Stress-Strain Law", J. Appl. Mech., p. 544, 1961.
- Manson, S.S. "Inversion of the Strain-Life and Strain-Stress Relationships for use in Metal Fatigue Analysis", Fatigue Eng. Mat. and Struct., Vol. 1, pp. 37-97, 1979.
- Forman, R.G., Kearney, V.E. y Engle, R.M. "Numerical Analysis of Crack Propagation in Cyclic-Loaded Structures", Trans. ASME J. Basic Eng. D89, p. 459, 1967.
- Dowling, N.E. "Notched Member Fatigue Life Predictions Combining Crack Initiation and Propagation", Fatigue of Eng. Mat. and Struct., Vol. 2, pp. 129-138, 1979.
- Rice, J.R. y Beer, F.P. "On the Distribution of Rises and Falls in a Continuous Random Process", J. of Basic Eng., Vol. 87, No. 2, p. 398, 1965.
- Tucker, L. y Bussa, S. "The SAE Cumulative Fatigue Damage Test Program", Fatigue Under Complex Loading, Advances in Eng. Vol. 6, SAE, pp. 1-53, 1977.
- Chang, J.B. y Hudson, C.M. "Methods and Models for Predicting Fatigue Crack Growth Under Random Loading", ASTM STP 748, pp. 3-40, 1981.
- Fuchs, H.O., Stephens, R.I. "Metal Fatigue in Engineering", John Wiley and Sons, 1980.
- Elber, W. "Fatigue Crack Closure Under Cyclic Tension", Eng. Fract. Mech. Vol. 2, pp. 37, 1970.