

Resulta interesante destacar que, en las condiciones más extremas empleadas en nuestros experimentos de abrasión, la pérdida de peso por bola utilizada representa solamente un $7,1 \times 10^{-3}$ por ciento del peso original o, también $1,18 \times 10^{-4}$ g/cm² de superficie.

CONCLUSIONES

De los resultados encontrados, pueden obtenerse como conclusiones en este primer estudio que:

1^a. El empleo del Talynova representa un avance fundamental en el estudio de las características de las superficies metálicas; ya que permite obtener en cada barrido una serie de parámetros, de los que se puede hacer el uso que con venga en cada caso concreto.

2^a. El tratamiento estadístico de los valores de los parámetros no añade ventajas adicionales, cuando se trata de superficies preparadas con una determinada metodología.

3^a. El estudio de las tres variables consideradas permite obtener una orientación sobre las condiciones a que debe someterse una superficie metálica para alcanzar unas determinadas características.

4^a. Aunque cada uno de los parámetros estudiados presenta una individualidad propia, resulta más o menos dependiente de los demás o de alguno de ellos y complementa la información.

5^a. Dada la metodología empleada y los resultados encontrados, su aplicación al rodaje de superficies metálicas puede enfocarse, desde un punto de vista básico, mediante su preparación previa al proceso correspondiente, una vez determinadas las características que definen la situación deseada en cada caso concreto.

AGRADECIMIENTOS

A la Comisión Asesora de Investigación Científica y Técnica por el soporte económico y facilidades que han permitido la realización del trabajo en el marco del Proyecto STEN-82. A Doña Asunción de Diago por su permanente ayuda en toda la tramitación, labor administrativa y tareas experimentales.

BIBLIOGRAFIA

1. Real Acad. Ciencias Exact. Fís. y Nat. Madrid, "Mesa Redonda sobre Ingeniería Mecánica y Tribología"

(1982), págs. 9-13.

2. Bowden, F.P. and Tabor, D., "The Friction and Lubrication of Solids" Oxford University Press, Part 2, Londres (1964)
3. Kragelskii, I.V., "Friction and Wear", Butterworths, Londres (1965)
4. Rabinowicz, E., "Friction and Wear of Materials", John Wiley and Sons, Inc. U.S.A. (1965)
5. Halling, J. Ed., "Principles of Tribology", The Macmillan Press Ltd., Prescott, Merseyside, G.B., págs. 94-127, (1975)
6. Sarkar, A.D., "Wear of Metals", Pergamon Press, Oxford, (1976)
7. Czichos, H., "Tribology", Elsevier, Amsterdam, (1978)
8. Real Academia Ciencias Exact. Fís. y Nat., loc. cit., págs. 31-42
9. Cameron, A., "The Principles of Lubrication", Longmans Green and Co. Ltd., Londres, (1966)
10. Dowson, D., Taylor, C.M., Godet, M. and Berthe, D., Eds., "Surface Roughness Effects in Lubrication", Mechanical Engineering Publications Ltd., Londres (1978)
11. Pendiente de publicación
12. Boothroyd, G., "Fundamentos del corte de metales y de las máquinas herramienta", Mc Graw-Hill Latinoamericana, S.A., Bogotá (1978)
13. Fischer, H., "Elektrolytische Abscheidung und Elektrokristallisation von Metallen", Springer, Berlín, (1954)
14. Kubaschewski, O. and Hopkins, B.E., "Oxidation of Metals and Alloys", Academic Press, New York, (1953)
15. Mott, N.F., Trans. Faraday Soc., Vol 36, págs. 472-483, 1940.
16. Mott, N.F., Trans. Faraday Soc., Vol 43, págs. 429-434, 1947.
17. Mott, N.F., Jour. Chim. phys., Vol 44, págs. 172-180, 1947.
18. Cottrell, A.H., "Dislocations and Plastic Flow in Crystals", Oxford University Press, Londres (1953)
19. Read, W.T., Jr., "Dislocations in Crystals", Mc Graw Hill, U.S.A., (1953)

ALGUNOS CASOS DE RESPUESTA DE LOS SISTEMAS DINAMICOS SOMETIDOS A EXCITACIONES ALEATORIAS

Luis Arizón, Javier García-Lomas, Jaime Domínguez

E.T.S.I. Industriales de Sevilla

Resumen.- Se ha obtenido la respuesta de sistemas dinámicos sometidos a excitaciones aleatorias, para lo cual no ha sido necesario imponer restricciones al tipo de excitación ni a las características del sistema dinámico. Para poder obtener esta respuesta se ha utilizado un algoritmo general de resolución cuyo desarrollo se indica.

La eficacia de dicho algoritmo, se ha comprobado comparando la respuesta de sistemas dinámicos con distintas características sometidos a excitaciones aleatorias, obtenida por los distintos procedimientos de resolución. Para poder realizar esta comparación, se han considerado aquellos casos en los que es posible utilizar los métodos clásicos de resolución.

INTRODUCCION

La vibración es un tema al que se le ha dedicado una gran atención en la ingeniería mecánica durante muchos años. En contraste con los estudios iniciales, que se centraron exclusivamente en procesos de tipo determinista, en los últimos 25 años, debido a la necesidad de un análisis riguroso de aquellos sistemas dinámicos reales que están sometidos a fenómenos o excitaciones que presentan un cierto grado de aleatoriedad, se ha realizado un gran esfuerzo en el estudio de este tipo de problemas, desarrollándose distintos métodos de análisis de la respuesta de estos sistemas. Ejemplos de este tipo de fenómeno, son los producidos por las acciones sísmicas, cargas de vientos y excitaciones acústicas sobre las estructuras, acción del oleaje del mar sobre los cascos de los barcos y efecto de las irregularidades de la carretera sobre el automóvil. Después de los trabajos realizados por Caughey [1] y Chuang [2] en 1959, en los que ambos abordaron el análisis de las vibraciones aleatorias producidas en sistemas mecánicos no lineales, y debido a que gran parte de los sistemas mecánicos existentes en la realidad presentan en una forma más o menos acusada una cierta falta de linealidad, se han realizado un gran número de estudios so-

bre este tipo de problemas.

Como resultado de estos estudios, aparecieron diversos métodos para analizar la respuesta de los sistemas mecánicos no lineales sometidos a excitaciones aleatorias.

En 1963 Caughey [3] aplicó la ecuación de "Fokker-Planck-Kolmogorov" a la resolución de sistemas no lineales sometidos a excitaciones que tenían la característica de un ruido blanco. En ese año, el mismo Caughey [4] desarrolló el método de la "linealización estadística", donde ya no era necesario imponer la condición de ruido blanco a las características de la excitación. Crandall [5], en 1963 aplicó la Técnica de las "perturbaciones" al estudio de sistemas mecánicos que presentaban una pequeña falta de linealidad. Posteriormente se aplicó la teoría de los funcionales de Volterra [6] por medio de un desarrollo similar a la técnica de las perturbaciones.

Los métodos indicados anteriormente, son los básicos existentes en la actualidad para análisis de vibraciones aleatorias en sistemas no lineales. A partir de estos métodos se han desarrolla-

do mejoras y procedimientos derivados, con objeto de aumentar la eficacia y ampliar el campo de aplicación. Payne [7], en 1967 aplicó los métodos asintóticos y otros métodos de aproximación, a la resolución de aquellos problemas en los que no existía una solución exacta de la ecuación de Fokker-Planck-Kolmogorov. También indicó la forma en que podrían tratarse aquellos problemas en los que la excitación no era un ruido blanco.

En 1970, Yang e Iwan [8] aplicaron el método de la "linealización estadística" a sistemas de más de un g.d.l.

Iyengar y Dash [9] desarrollaron en 1978 la técnica de la "envoltura de Gauss", derivada del método de la linealización estadística, aplicándola a sistemas histeréticos sometidos a excitaciones gaussianas y no gaussianas.

En 1980, Kimura y Sakata [10] desarrollaron una modificación del método de la "linealización estadística" para obtener la respuesta de sistemas no lineales, sometidos a excitaciones aleatorias estacionarias y no estacionarias. Ultimamente, Metwalli y Mayne [11] desarrollaron una técnica para poder analizar las características aleatorias de la respuesta del sistema en una forma determinista.

Teniendo en cuenta los trabajos expuestos anteriormente, se puede notar que los métodos básicos existentes actualmente para abordar el análisis de sistemas mecánicos no lineales sometidos a excitaciones aleatorias, no se pueden aplicar de una forma general a cualquier tipo de problema, sino que es necesario realizar modificaciones para poderlos utilizar en las distintas aplicaciones.

Con objeto de poder disponer de un instrumento general capaz de poderse aplicar en la resolución de los distintos sistemas mecánicos sometidos a cualquier tipo de excitación aleatoria, se ha desarrollado el algoritmo de resolución, que se expone a continuación.

DESCRIPCION DEL METODO

El método desarrollado está basado en la técnica de la linealización estadística. Esta técnica consiste en reducir un sistema no lineal a otro lineal de forma que el error cometido sea mínimo.

Sea el sistema dinámico cuya ecuación de movimiento viene expresada por:

$$M \ddot{x} + g(\dot{x}, x) = f(t) \quad (1)$$

Donde: M = Matriz de masa del sistema
x = Vector desplazamiento
f(t) = Vector de excitación
g(x, x) = Vector de fuerzas restauradas del sistema

Aplicando el método de la "linealización estadística" a la ecuación (1), se tendrá:

$$M \ddot{x} + C_e \dot{x} + K_e x = f_e(t) \quad (2)$$

Siendo; C_e y K_e las matrices equivalentes de amortiguamiento y de rigidez, y f_e(t) el vector equivalente de la excitación, cuyas expresiones son [8] [10], [12];

$$\left. \begin{aligned} K_e(t) &= f_1 \{ E[g(\dot{x}(t), x(t))] \}, E[x(t)], E[\dot{x}(t)] \} \\ C_e(t) &= f_2 \{ E[g(\dot{x}(t), x(t))] \}, E[x(t)], E[\dot{x}(t)] \} \\ f_e(t) &= f_3 \{ E[g(\dot{x}(t), x(t))] \}, E[x(t)], E[\dot{x}(t)] \} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

donde el operador E[W] es la esperanza matemática de la función W.

Una vez obtenida la ecuación linealizada, se aplicará el algoritmo de resolución que se expone a continuación y se obtendrá una solución aproximada de la respuesta del sistema.

El algoritmo de resolución empleado supone que, una vez conocidas totalmente las características estadísticas de la excitación y por tanto su función de densidad de probabilidad, al ser un sistema no lineal, la forma de la función de densidad de probabilidad de la respuesta del sistema, generalmente no coincidirá con la de la excitación, y por tanto no se conocerá a priori.

Para poder conocer dicha función en cada instante de tiempo, será necesario obtener los momentos estadísticos de la respuesta del sistema en cada instante de tiempo. La precisión con que se obtiene dicha función aumenta con el orden del último momento estadístico obtenido.

Aplicando el operador "E" a la ecuación (2), se tendrá:

$$M E\{\ddot{x}(t)\} + C_e E\{\dot{x}(t)\} + K_e E\{x(t)\} = E\{f_e(t)\} \quad (4)$$

do mejoras y procedimientos derivados, con objeto de aumentar la eficacia y ampliar el campo de aplicación. Payne [7], en 1967 aplicó los métodos asintóticos y otros métodos de aproximación, a la resolución de aquellos problemas en los que no existía una solución exacta de la ecuación de Fokker-Planck-Kolmogorov. También indicó la forma en que podrían tratarse aquellos problemas en los que la excitación no era un ruido blanco.

En 1970, Yang e Iwan [8] aplicaron el método de la "linealización estadística" a sistemas de más de un g.d.l.

Iyengar y Dash [9] desarrollaron en 1978 la técnica de la "envoltura de Gauss", derivada del método de la linealización estadística, aplicandola a sistemas histeréticos sometidos a excitaciones gaussianas y no gaussianas.

En 1980, Kimura y Sakata [10] desarrollaron una modificación del método de la "linealización estadística" para obtener la respuesta de sistemas no lineales, sometidos a excitaciones aleatorias estacionarias y no estacionarias. Ultimamente, Metwalli y Mayne [11] desarrollaron una técnica para poder analizar las características aleatorias de la respuesta del sistema en una forma determinista.

Teniendo en cuenta los trabajos expuestos anteriormente, se puede notar que los métodos básicos existentes actualmente para abordar el análisis de sistemas mecánicos no lineales sometidos a excitaciones aleatorias, no se pueden aplicar de una forma general a cualquier tipo de problema, sino que es necesario realizar modificaciones para poderlos utilizar en las distintas aplicaciones.

Con objeto de poder disponer de un instrumento general capaz de poderse aplicar en la resolución de los distintos sistemas mecánicos sometidos a cualquier tipo de excitación aleatoria, se ha desarrollado el algoritmo de resolución, que se expone a continuación.

DESCRIPCION DEL METODO

El método desarrollado está basado en la técnica de la linealización estadística. Esta técnica consiste en reducir un sistema no lineal a otro lineal de forma que el error cometido sea mínimo.

Sea el sistema dinámico cuya ecuación de movimiento viene expresada por:

$$M \ddot{x} + g(\dot{x}, x) = f(t) \quad (1)$$

Donde: M = Matriz de masa del sistema

x = Vector desplazamiento

f(t) = Vector de excitación

g(\dot{x}, x) = Vector de fuerzas restauradas del sistema

Aplicando el método de la "linealización estadística" a la ecuación (1), se tendrá:

$$M \ddot{x} + C_e \dot{x} + K_e x = f_e(t) \quad (2)$$

Siendo; C_e y K_e las matrices equivalentes de amortiguamiento y de rigidez, y $f_e(t)$ el vector equivalente de la excitación, cuyas expresiones son [8] [10], [12];

$$\left. \begin{aligned} K_e(t) &= f_1 \{E[g(\dot{x}(t), x(t))], E[x(t)], E[\dot{x}(t)]\} \\ C_e(t) &= f_2 \{E[g(\dot{x}(t), x(t))], E[x(t)], E[\dot{x}(t)]\} \\ f_e(t) &= f_3 \{E[g(\dot{x}(t), x(t))], E[x(t)], E[\dot{x}(t)]\} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

donde el operador $E[W]$ es la esperanza matemática de la función W.

Una vez obtenida la ecuación linealizada, se aplicará el algoritmo de resolución que se expone a continuación y se obtendrá una solución aproximada de la respuesta del sistema.

El algoritmo de resolución empleado supone que, una vez conocidas totalmente las características estadísticas de la excitación y por tanto su función de densidad de probabilidad, al ser un sistema no lineal, la forma de la función de densidad de probabilidad de la respuesta del sistema, generalmente no coincidirá con la de la excitación, y por tanto no se conocerá a priori.

Para poder conocer dicha función en cada instante de tiempo, será necesario obtener los momentos estadísticos de la respuesta del sistema en cada instante de tiempo. La precisión con que se obtiene dicha función aumenta con el orden del último momento estadístico obtenido.

Aplicando el operador "E" a la ecuación (2), se tendrá:

$$M E\{\ddot{x}(t)\} + C_e E\{\dot{x}(t)\} + K_e E\{x(t)\} = E\{f_e(t)\} \quad (4)$$

Para resolver esta ecuación diferencial, se aplica el método de Newmark-Wilson, [13].

En dicho método de integración, la ecuación de movimiento (4) se plantea en el instante $t + \theta \Delta t = t + \tau$:

$$M E\{\ddot{x}(t+\tau)\} + C_e(\xi) E\{\dot{x}(t+\tau)\} + K_e(\xi) \cdot E\{x(t+\tau)\} = E\{f_e(t+\tau)\} \quad (5)$$

Siendo: θ , uno de los parámetros del método, [13]. debe cumplir: $t \leq \xi \leq t + \tau$

Por medio de la ecuación (5), se obtendrá la media o momento estadístico de primer orden de la respuesta del sistema en cada instante de tiempo. Para ello será necesario el conocimiento de las matrices equivalentes, $C_e(\xi), K_e(\xi), P_e(\xi)$.

Se supondrá que estas matrices y vector equivalente son constantes para cada intervalo de tiempo considerado, e iguales a su valor al inicio de dicho intervalo:

$$\left. \begin{aligned} C_e(\xi) &= C_e(t) \\ K_e(\xi) &= K_e(t) \\ P_e(\xi) &= P_e(t) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

El valor de estas matrices y vector equivalente en el instante t, según se indica en la expresión (3), es función de los momentos estadísticos de la respuesta del sistema en dicho instante de tiempo, los cuales deben ser obtenidos para poder obtener la media de la respuesta del sistema en el instante $t + \tau$. Los momentos estadísticos de orden superior se obtienen multiplicando ambos miembros de la ecuación (2) por $x_i^{k_j-1}(t)$ y aplicando el operador E a dichos miembros:

$$M E\{x_i^{k_j-1}(t) \cdot \ddot{x}\} + C_e E\{x_i^{k_j-1}(t) \cdot \dot{x}\} + K_e \cdot E\{x_i^{k_j-1}(t) \cdot x\} = E\{x_i^{k_j-1}(t) \cdot f_e\} \quad (7)$$

donde: $i = 1, 2, \dots, n$

$k_j = 1, 2, \dots, k$

Integrando la ecuación anterior desde

$t_1 = 0$ hasta $t_1 = t$, se obtendrán los momentos estadísticos de orden k_j en el instante t;

$$E\{x_i^{k_j-1}(t) \cdot \ddot{x}(t)\}; i = 1, 2, \dots, n$$

Para poder realizar la integración anterior, será necesario calcular la evolución a lo largo del tiempo del término independiente de la ecuación (7).

Para dicho cálculo se multiplican ambos miembros de la ecuación (2) por $f_{ej}(t_2) \cdot x_i^{k_j-2}(t)$ y se aplica el operador E:

$$\begin{aligned} &M E\{f_{ej}(t_2) x_i^{k_j-2}(t) \cdot \ddot{x}\} + \\ &+ C_e E\{f_{ej}(t_2) x_i^{k_j-2}(t) \cdot \dot{x}\} + \\ &+ K_e E\{f_{ej}(t_2) x_i^{k_j-2}(t) \cdot x\} = \\ &= E\{f_{ej}(t_2) x_i^{k_j-2}(t) \cdot f_e\} \quad (8) \end{aligned}$$

donde:

$i = 1, 2, \dots, n$

$j = 1, 2, \dots, n$

$t_2 = 0, \dots, t$

De igual forma que ocurría anteriormente, será necesario conocer el término independiente de la ecuación (8) para poder resolver dicha ecuación. Para ello se multiplican ambos miembros de la ecuación (2) por:

$$f_{e1}(t_3) \cdot f_{ej}(t_2) \cdot x_i^{k_j-3}(t)$$

y se aplica el operador "E" a la ecuación resultante. Así se seguirá de forma sucesiva hasta llegar a una ecuación en la que se conozca el término independiente, es decir; hasta que dicho término independiente sea:

$$E\{f_{ei}(t_1) \cdot f_{ej}(t_2) \dots f_{em}(t_{k_j-1}) \cdot f_e\} \quad (9)$$

Operando en la forma indicada anteriormente se obtendrán los momentos estadísticos de la posición del sistema en cada instante de tiempo.

Para obtener en cada instante de tiempo los momentos estadísticos de la velocidad del sistema, se procederá de la misma forma, con la diferencia de que en este caso los miembros de la ecuación (2) se multiplicarán por

$\dot{x}_i^{k,j-1}(t)$ en lugar de $x_i^{k,j-1}(t)$.

Una vez obtenidos los momentos estadísticos de la respuesta del sistema, operando según [12], se obtendrá la función de densidad de probabilidad de la respuesta del sistema en cada instante de tiempo.

RESULTADOS

El algoritmo expuesto anteriormente se ha implementado mediante un programa de ordenador en lenguaje Fortran.

Para comprobar su eficacia, dicho algoritmo se ha utilizado para obtener la respuesta de sistemas mecánicos sometidos a determinados tipos de excitaciones aleatorias, de tal manera que la respuesta obtenida se pueda comparar con los distintos métodos de resolución existentes en la actualidad.

En la Fig. 1, se ha representado con líneas de trazos la respuesta de un sistema lineal sometido a la acción de un ruido blanco obtenida utilizando el algoritmo descrito anteriormente y con línea continua, la respuesta obtenida utilizando la ecuación de "Fokker-Planck Kolmogorov.

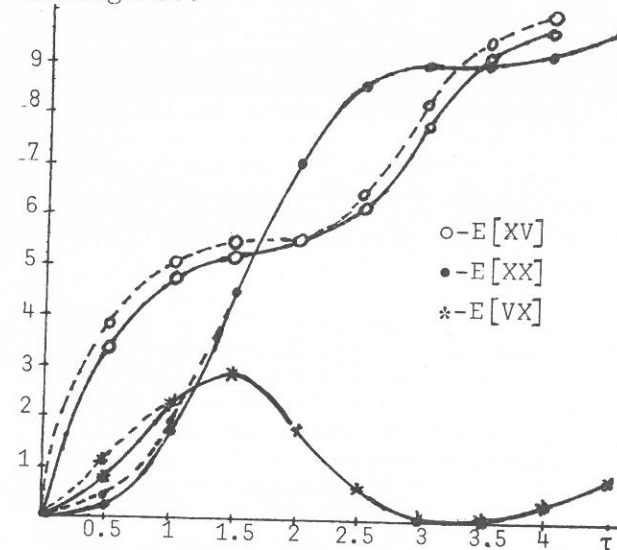


Fig. 1.- Respuesta del sistema

Para poder realizar esta aplicación numérica hay que tener en cuenta las características del ruido blanco, las cuales vienen indicadas en la Fig. 2.

Cuando se realiza esta aplicación, hay que tener en cuenta también que el área de la función de autocorrelación en el origen es:

$$S = R(0) = 2 D \quad (10)$$

Donde $2 D$ es la varianza de la respuesta del sistema.

Al tomar distintos intervalos de tiempos, habrá que considerar distintas ordenadas para que el valor de dicha área permanezca constante.

Esto es debido a que para cada intervalo de tiempo, se supone que la función

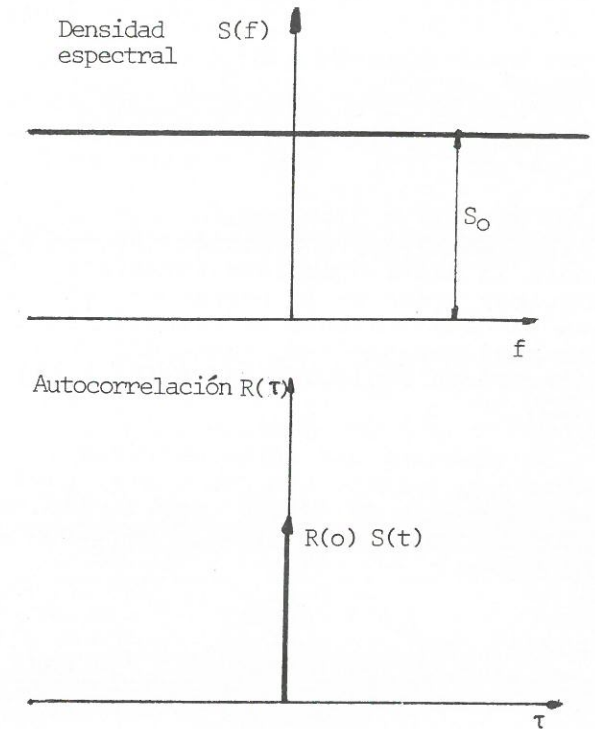


Fig. 2

ción de autocorrelación viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} R(\tau) &= S_0, \quad \tau \leq \Delta t \\ R(\tau) &= 0, \quad \tau \geq \Delta t \end{aligned} \quad (11)$$

En la Fig. 3, se representa la respuesta de un sistema lineal sometido a una excitación aleatoria no estacionaria que posee las características de un ruido blanco.

La generación de dicha excitación no estacionaria, se ha realizado multiplicando un ruido blanco estacionario por una función periódica determinista, de la forma siguiente:

$$f(t) = e(t) \cdot a(t) \quad (12)$$

donde: $e(t)$ = ruido blanco
 $a(t) = \cos \omega t$

Por medio de (12) se obtiene el valor de la función autocorrelación:

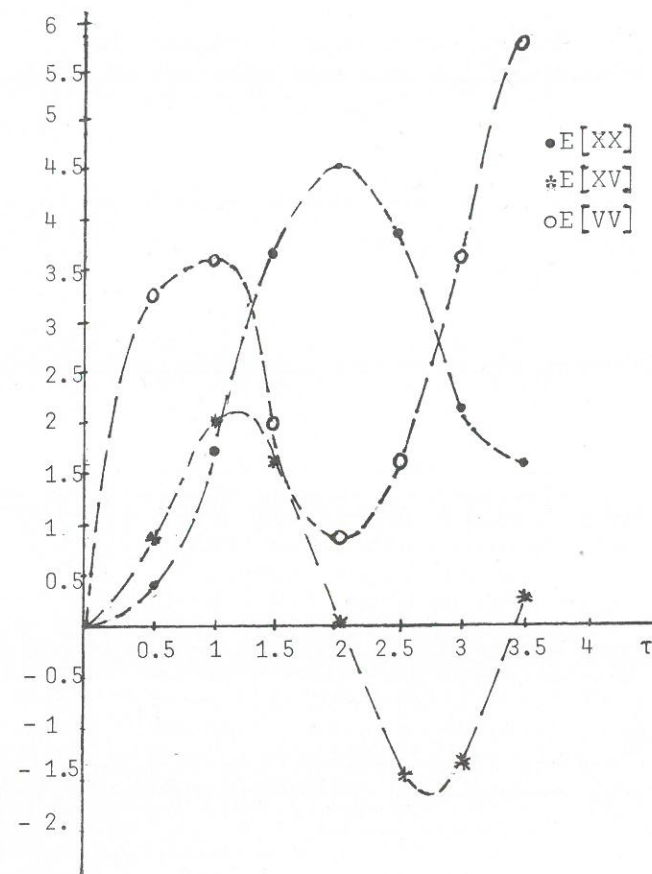


Fig. 3. Respuesta del sistema a un ruido blanco no estacionario

$$R_{ff}(t, \tau) = E[f(t) \cdot f(t+\tau)] = a(t) \cdot a(t+\tau) \cdot E[e(t) e(t+\tau)] \quad (13)$$

Como la función, "e(t)", es un ruido blanco estacionario, su función de autocorrelación está representado por la Fig. 2. Entonces, la función de autocorrelación de la excitación no estacionaria, "f(t)", se puede poner en la siguiente forma:

$$R_{ff}(t, \tau) = \cos \omega t \cdot \cos \omega(t+\tau) \cdot R_{ee}(\tau) \quad (14)$$

Sustituyendo (11) en (14), se tiene:

$$\left. \begin{aligned} R_{ff}(t, \tau) &= \cos \omega t \cos \omega(t+\tau), \tau \leq \Delta t \\ R_{ff}(t, \tau) &= 0, \tau \geq \Delta t \end{aligned} \right\} (15)$$

donde Δt es el intervalo de integración usado en la obtención de la respuesta del sistema.

Las respuestas del sistema dinámico

representadas en la Fig. 1 y en la Fig. 3, han sido obtenidas utilizando el método desarrollado anteriormente. Estas se han comparado con las obtenidas analíticamente utilizando la ecuación de "Fokker-Planck-Kolmogorov" [7], comprobándose que los errores cometidos no superan nunca el 5%, siendo mayores en los instantes iniciales, y reduciéndose dichos errores con la disminución del intervalo de integración.

CONCLUSIONES

Utilizando el método descrito anteriormente, se han obtenido las características estadísticas de la respuesta de un sistema dinámico cuando está sometido a excitaciones aleatorias de tipos estacionario y no estacionario. En ambos casos, se han comparado dichas características estadísticas con las obtenidas analíticamente usando la ecuación de "Fokker-Planck-Kolmogorov", comprobándose de esta forma la eficacia del método desarrollado.

Mediante este método, se puede abordar de una forma general el estudio de los procesos aleatorios estacionarios o no, sin necesidad de realizar ninguna variación para poder simular cada clase específica de procesos aleatorios.

REFERENCIAS

1. Caughey T.K. "Response of Van der Pol's oscillation to random excitation". Journal of Applied Mechanics Vol. 36, pág. 345-348.
2. Chuang K. and Kazda L.F. "Study of Nonlinear Systems with random inputs" Trans. AIEE. Vol. 78, pág. 100-105, 1959.
3. Caughey T.K. "Derivation and Application of the Fokker-Planck Equation to Discrete Nonlinear Dynamic Systems Subjected to White Random Excitation". Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 35, pág. 1683-1692, Nov. 1963.
4. Caughey T.K. "Equivalent Linearization Techniques". Journal of the Acoustical Society of America. Vol. 35, pág. 1706-1711, Nov. 1963.
5. Crandall S.T. "Perturbation Techniques for Random Vibration of Nonlinear Systems". Journal of the Acoustical Society of America. Vol. 35, pág. 1700-1705, Nov. 1963.

6. Price W.G. and Bishop R.E.D. "Probabilistic Theory of Ship Dynamic". -- Chapman and Hall 1974.
7. Payne H.J. "The Response of Nonlinear System to Stochastic Excitation". Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, 1967.
8. Iwan W.D. and Min Yang I. "Application of Statical Linearization techniques to Nonlinear Multidegree-of-Freedom Systems". Journal of Applied Mechanics, pág. 545-550, June 1972.
9. Iyengar R.N., and Dash P.K. "Estudy of the Random Vibration of Nonlinear Systems by the Gaussian Closure Technique". Journal of Applied Mechanics Vol. 45, pág. 393-399, Junio 1978.
10. Kimura K. and Sakata M. "Non Stationary Response of a Non-Simetric Non-linear System Subjected to a wide -- Class of Random Excitation". Journal of Sound and Vibration, Vol. 76. pág. 261-272, 1981.
11. Metwalli S.M. and Mayne R.W. "Random To Deterministic Transform". Journal of Sound and Vibration, Vol. 79, pág. 197-204, 1981.
12. Arizón del Prado L., García-Lomas -- Jung J., Domínguez Abascal J. "Método para la Determinación de las Respuestas de Sistemas Dinámicos Sometidos a Excitaciones Aleatorias". IV Congreso Nacional sobre la Teoría de Máquinas y Mecanismos. Dic. 1981.
13. Zienkiewicz O.C., Lewis R.W. Stagg - K.G. "Numerical Methods in offshore Engineering". Wiley 1978.