

# Estudio semi-analítico de la excitación electromagnética de núcleos halo



## TRABAJO FIN DE GRADO

Pedro Punta de la Herrán

Dirigido por

D. José Antonio Lay Valera

D. Antonio M. Moro Muñoz

Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear  
Universidad de Sevilla

Junio 2019



# Resumen

---

Los núcleos halo, son núcleos con uno o varios nucleones débilmente ligados, llamados de valencia. Estos nucleones pueden alejarse en gran medida del resto del núcleo, que forma una estructura compacta llamada *core*. Este trabajo se centra en el estudio del  $^{11}\text{Be}$ , núcleo halo de un neutrón. Utilizamos un modelo sencillo en el que el *core* es un solo cuerpo inerte, y el neutrón de valencia, solo siente un potencial nuclear modelado como un pozo esférico finito.

Las soluciones dentro y fuera del pozo son analíticas. Por lo tanto, imponiendo continuidad y derivabilidad entre las dos soluciones, somos capaces de obtener las funciones de onda del neutrón de valencia para estados ligados y no ligados, que llamaremos del continuo. Obtenidas dichas funciones, se calculan las probabilidades de transición dipolar eléctrica del estado fundamental a otros estados ligados o del continuo. Estas probabilidades se relacionan con la llamada regla de suma, que comprobaremos con nuestro modelo. Finalmente, sumando las transiciones al continuo, se obtiene la probabilidad de desligar el neutrón halo del resto del núcleo bajo la acción de un campo eléctrico dipolar.



# Índice

---

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Metodología</b>	<b>5</b>
2.1 Funciones de onda de estados ligados .....	7
2.2 Funciones de onda de estados del continuo .....	9
2.3 Probabilidad de transición dipolar eléctrica .....	12
2.4 Probabilidad de transición dipolar eléctrica al continuo .....	15
2.5 Reglas de suma .....	16
<b>3. Resultados</b>	<b>17</b>
3.1 Estado fundamental .....	17
3.2 Primer estado excitado.....	20
3.3 Estado prohibido $0p_{3/2}$ .....	22
3.4 Estados p del continuo.....	25
3.5 Resonancia $d_{5/2}$ .....	28
3.6 Probabilidad de transición a estados ligados .....	30
3.7 Probabilidad de transición al continuo .....	31
3.8 Reglas de suma para estados $p_{1/2}$ y $p_{3/2}$ .....	32
<b>4. Conclusiones</b>	<b>35</b>
<b>5. Bibliografía</b>	<b>39</b>
<b>Anexo 1: Códigos</b>	<b>41</b>



# 1. Introducción

---

En este trabajo se hace un estudio de núcleos halo de un neutrón. Dichos núcleos se caracterizan por poseer una elevada asimetría entre el número de protones y neutrones, lo que hace que se trate de sistemas débilmente ligados. En un diagrama de Segrè se sitúan en torno a las líneas de evaporación de neutrones o protones, lejos del valle de estabilidad. En la figura 1.1 se puede ver la situación de distintos núcleos halo en un diagrama de Segrè de la región  $Z \leq 10$ ,  $N \leq 16$ .

La línea de evaporación de neutrones marca el máximo número de neutrones que admite un núclido manteniéndose ligado y estable frente emisión de partículas. Análogamente, la línea de evaporación de protones marca el máximo número de protones que admite un núclido. Debido a la repulsión coulombiana entre protones, la línea de evaporación de protones está más cerca del valle de estabilidad que la línea de evaporación de neutrones.

La proximidad de los núcleos halo a estos límites hace que posean uno o varios nucleones débilmente ligados llamados de valencia. Los restantes, al estar más ligados, forman una estructura más compacta y estable que denominamos *core*. Los nucleones de valencia, al estar débilmente ligados, presentan una densidad de probabilidad que se extiende hasta zonas muy alejadas del resto de nucleones. Esta probabilidad puede verse como un halo de materia alrededor de una zona de mayor densidad en el centro debida al core.

De esta visión viene el uso del término ‘halo’ para referirnos a estos núcleos, término que usaron por primera vez los físicos Hansen y Johnson en 1987 [1]. Sin embargo, fueron el físico I. Tanihata y sus colaboradores quienes, dos años antes en Lawrence Berkeley Laboratory, pusieron de manifiesto las propiedades “exóticas” de estos núcleos [2,3]. La primera evidencia de los núcleos halo fue que presentaban un radio anormalmente grande en comparación con sus isótopos.

En este trabajo nos centramos en el caso más sencillo de un núcleo halo de un neutrón. De esta forma, podemos reducir el problema a un sistema de dos cuerpos, el core y el neutrón de valencia. Al ser el nucleón de valencia un neutrón no hay interacción coulombiana con

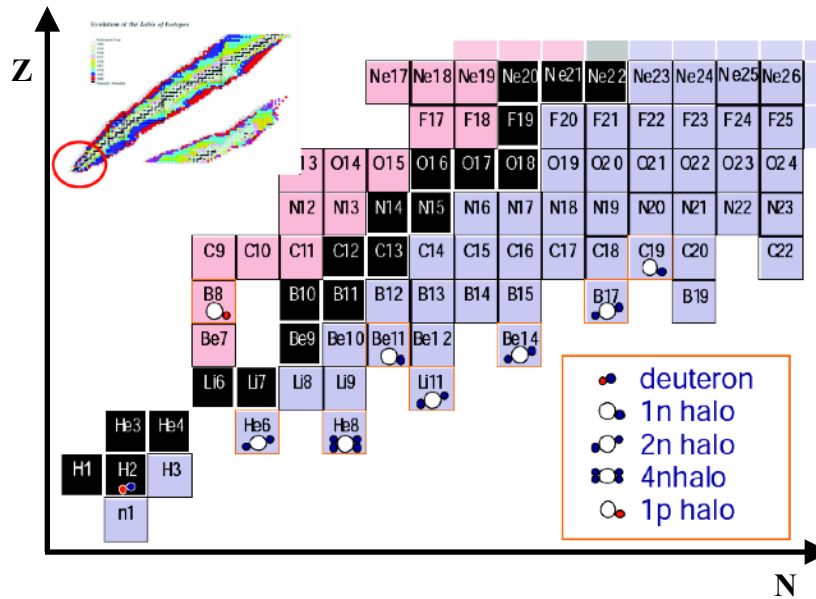


Figura 1.1: Diagrama de Segrè de la región  $Z \leq 10$ ,  $N \leq 16$  en la que se resaltan los núcleos halo encontrados hasta la fecha.

el core, de modo que dicho neutrón solo siente un potencial nuclear que modelaremos como un pozo esférico finito.

Nos vamos a centrar en el núcleo de  $^{11}\text{Be}$ , ejemplo representativo de núcleos halo de un neutrón. Este núcleo tiene 7 neutrones y 4 protones. De los resultados experimentales se extrae que bajo el modelo de partícula independiente, en el estado fundamental, los últimos protones deben encontrarse en un nivel  $0p_{3/2}$  y el último neutrón en  $1s_{1/2}$  [4]. El caso de los protones está de acuerdo con el modelo de capas de partícula independiente, con el orden de niveles encontrado en los núcleos estables. Mientras tanto, para el neutrón de valencia, el modelo predice un nivel  $0p_{1/2}$ . El esquema de niveles para el  $^{11}\text{Be}$  se ilustra en la figura 1.2. Hay que tener en cuenta que en todos los casos empezamos a contar los niveles desde 0, es decir, empezando por el nivel  $0s_{1/2}$ .

El  $^{11}\text{Be}$  se puede crear en los laboratorios mediante reacciones nucleares. Debido a su exceso de neutrones, el  $^{11}\text{Be}$  es inestable y decae por desintegración beta, con una semivida de 13.76 s [4]. En su estado fundamental tiene momento y paridad  $1/2^+$ , mientras que el modelo de capas predice  $1/2^-$ . Esto pone de manifiesto el intercambio de los niveles  $0p_{1/2}$  y  $1s_{1/2}$  para los neutrones.



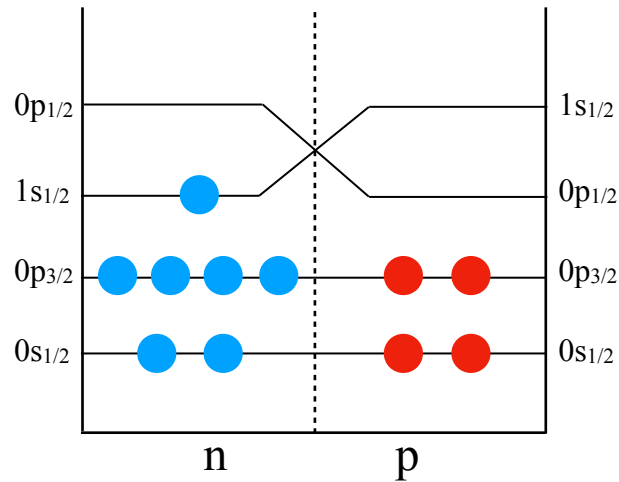


Figura 1.2: Esquema de niveles para el  $^{11}\text{Be}$ . Se observa el intercambio entre los niveles  $0p_{1/2}$  y  $1s_{1/2}$  que afecta al último neutrón.

Este núcleo tiene un único estado excitado ligado, en el que, según el modelo de partícula independiente, el último neutrón se encuentra en el nivel  $0p_{1/2}$ . El resto de estados excitados sería un continuo de estados no ligados, llamados por eso estados del continuo, en los cuales el último neutrón no está ligado al resto del núcleo. Debido a esto, es muy relevante estudiar la probabilidad de excitación del núcleo, ya que, excitar el núcleo a estos estados del continuo equivale a arrancar un neutrón. También es una parte importante de la estructura del núcleo, podría ser relevante para conocer cómo se comporta el núcleo durante una reacción. En este trabajo calcularemos la probabilidad de transición dipolar eléctrica  $\mathfrak{B}(E1)$ , que es la probabilidad de excitación en presencia de un campo eléctrico dipolar. La excitación en la que se arranca un neutrón por excitación electromagnética es el proceso inverso a la captura neutrónica. Este proceso es responsable de la nucleosíntesis de varios isótopos. Si bien  $^{11}\text{Be}$  no tiene interés astrofísico conocido para comprender la nucleosíntesis, tiene la mayor  $\mathfrak{B}(E1)$  conocida entre estados ligados, entre el estado fundamental y el primer estado excitado [5], además de una importante  $\mathfrak{B}(E1)$  al continuo. Por lo tanto, se trata de un caso óptimo para comprender mejor la excitación dipolar eléctrica.

Para el cálculo de las probabilidades de transición dipolar eléctrica será necesario obtener las funciones de onda tanto de los estados ligados como de los no ligados. Para ello hemos

desarrollado distintos programas en Matlab [6]. Utilizaremos esta herramienta para analizar los estados ligados y no ligados del núcleo de  $^{11}\text{Be}$ , calcular las probabilidades de transición dipolar y comprobar las reglas de suma. En lo que sigue se describe detalladamente todo este proceso.

## 2. Metodología

---

En primer lugar debemos resolver la ecuación de Schrödinger para el núcleo de  $^{11}\text{Be}$ . Al tratarse de un núcleo halo de un neutrón, si consideramos el core como un solo cuerpo inerte, podemos aproximar el problema por un sistema de dos cuerpos. De esta forma, si nos olvidamos del movimiento del centro de masas del núcleo y nos centramos en el relativo al sistema valencia-core, la ecuación de Schrödinger resultaría:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}), \quad (2.1)$$

donde  $\vec{r}$  representa la posición del neutrón de valencia respecto al core y  $\mu$  es la masa reducida del sistema, cuyo valor es:

$$\mu = \frac{M(^{10}\text{Be})M_n}{M(^{10}\text{Be}) + M_n} = 853,57 \text{ MeV}/c^2, \quad (2.2)$$

donde  $M(^{10}\text{Be})$  y  $M_n$  son la masa del núcleo de  $^{10}\text{Be}$  y la del neutrón, respectivamente [4].

El potencial  $V(\vec{r})$ , que debe ser exclusivamente nuclear, lo vamos a aproximar por un pozo esférico finito  $V_N(r)$  de profundidad  $V_{lJ}$  y radio  $R$ :

$$V_N(r) = \begin{cases} -V_{lJ} & 0 \leq r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}, \quad (2.3)$$

donde los subíndices de  $V_{lJ}$  indican que cambia su valor según el momento angular orbital  $l$  del neutrón de valencia y su momento angular total  $J$ . El valor del radio del pozo  $R$ , es el radio del core, que se puede estimar como:

$$R = r_0 A^{1/3}, \quad (2.4)$$

donde  $A$  es el número de nucleones del core y  $r_0$  es el radio reducido del núcleo, que se puede aproximar por 1,20 fm.

Como nuestro potencial es central, podemos aplicar la separación de variables  $\psi(\vec{r}) = R(r)Y(\theta, \phi)$ . De la parte angular se conoce la solución, una combinación de armónicos esféricos dependiente del momento angular  $l$ . El problema se reduce entonces a estudiar la parte radial, que viene dada por la siguiente ecuación y las condiciones de contorno:

$$\frac{-\hbar}{2\mu r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right] + \left[ V_N(r) + \frac{\hbar(l+1)l}{2\mu r^2} \right] R(r) = ER(r). \quad (2.5)$$

Si separamos esta expresión para el interior y el exterior del pozo obtenemos:

$$\begin{cases} r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + 2r \frac{dR(r)}{dr} + \left[ 2\mu \frac{V_{IJ} + E}{\hbar} r^2 - l(l+1) \right] R(r) = 0 & 0 \leq r \leq R \\ r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + 2r \frac{dR(r)}{dr} + \left[ 2\mu \frac{E}{\hbar} r^2 - l(l+1) \right] R(r) = 0 & r > R \end{cases}. \quad (2.6)$$

Si en el interior del pozo definimos una constante  $q$  y aplicamos  $z = qr$ , llegamos a una ecuación esférica de Bessel de orden  $l$  [7]:

$$q = \frac{\sqrt{2\mu(V_{IJ} + E)}}{\hbar} \rightarrow z = qr \rightarrow z^2 \frac{d^2 R(z)}{dz^2} + 2z \frac{dR(z)}{dz} + [z^2 - l(l+1)] R(z) = 0 \quad (2.7)$$

La solución de esta ecuación es una combinación de las funciones esféricas de Bessel de orden  $l$  de primera y segunda clase  $j_l(z)$  e  $y_l(z)$ , respectivamente [6]. En nuestro caso, para que la solución sea finita en el origen, solo se consideran las de primera clase.

Para el exterior del pozo definimos una nueva constante  $k$ :

$$k = \frac{\sqrt{2\mu|E|}}{\hbar}. \quad (2.8)$$

Si ahora aplicamos  $z = kr$ , la ecuación resultante depende de si  $E$  es positiva o negativa. Por tanto, tenemos que separar entre estados ligados y estados del continuo.

## 2.1 Funciones de onda de estados ligados

Los estados ligados son estados donde el movimiento del neutrón está clásicamente acotado. Sólo existe solución de la ecuación de Schrödinger para valores discretos de la energía y las soluciones resultantes son además funciones normalizables a la unidad. Estas soluciones se corresponden con energías negativas, ya que tomamos como origen de potencial  $E = 0$  la situación en la que valencia y core están infinitamente alejados.

La función de onda para  $0 < r < R$  es proporcional a la función esférica de Bessel  $j_l(qr)$ . Para el exterior aplicamos  $z = kr$  a (2.6) para  $r > R$ , obteniendo así una ecuación esférica modificada de Bessel de orden  $l$  [7]:

$$z = kr \rightarrow z^2 \frac{d^2 R(z)}{dz^2} + 2z \frac{dR(z)}{dz} - [z^2 + l(l+1)] R(z) = 0, \quad (2.9)$$

cuya solución particularizada para nuestro caso, que debe tender asintóticamente a cero en el infinito, sería la función esférica modificada de Bessel de tercera clase  $k_l(z)$  [7]. Por tanto, la parte radial de la función de onda resulta:

$$R(r) = \begin{cases} A j_l(qr) & 0 \leq r \leq R \\ B k_l(kr) & r > R \end{cases}, \quad (2.10)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes que tomamos reales. Por su uso en cálculos posteriores es más útil definir  $u(r) = r \cdot R(r)$ ,

$$u(r) = \begin{cases} A r j_l(qr) & 0 \leq r \leq R \\ B r k_l(kr) & r > R \end{cases}. \quad (2.11)$$

La función  $u(r)$  debe ser continua y derivable en todos los puntos, en concreto en  $r=R$ . Si estudiamos la continuidad en este punto, encontramos la relación que cumplen  $A$  y  $B$  en función de unas nuevas constantes  $\xi = qR$  y  $\eta = kR$ :

$$B = \frac{j_l(\xi)}{k_l(\eta)} A. \quad (2.12)$$

Para la condición de continuidad de la derivada, hacemos uso de las siguientes propiedades de las funciones de Bessel [7]:

$$\frac{du(r)}{dr} = \begin{cases} A[qrj_{l-1}(qr) - lj_l(qr)] & 0 \leq r \leq R \\ -B[krk_{l-1}(kr) + lk_l(kr)] & r > R \end{cases}. \quad (2.13)$$

Con esto, al imponer la continuidad de la derivada en el  $r=R$  y usando la expresión (2.8), llegamos a una expresión que relaciona las constantes  $\xi$  y  $\eta$ , por tanto,  $q$  y  $k$ :

$$\xi \frac{j_{l-1}(\xi)}{j_l(\xi)} = -\eta \frac{k_{l-1}(\eta)}{k_l(\eta)}. \quad (2.14)$$

Esta expresión es la que usamos en Matlab para relacionar la profundidad del pozo de potencial con la energía del estado, haciendo uso también de la que se obtiene de la propia definición de  $\xi$  y  $\eta$ ,

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{2\mu V_{lJ}R}{\hbar}. \quad (2.15)$$

Por tanto, si resolvemos el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones (2.14) y (2.15), conocemos la función de onda a falta de la constante A, que se determina a través de la condición de normalización:

$$\int_0^{\infty} u(r)^2 dr = 1. \quad (2.16)$$

Para llevar a cabo la integración separamos la integral en  $0 < r < R$  y  $r > R$ , posteriormente hacemos respectivamente los cambios de variable  $qr=z$ ,  $kr=z$ . Resolvemos ambas integrales basándonos en distintas propiedades de las funciones esféricas de Bessel que nos llevan al siguiente resultado:

$$\int z^2 f_l(z)^2 dz = \frac{z^3}{2} (f_l(z)^2 - f_{l-1}(z)f_{l+1}(z)), \quad (2.17)$$

donde  $f$  puede ser tanto la función  $j$  como  $k$ . Aplicando el resultado con los límites de integración se llega a la expresión:

$$A^2 \frac{R^3}{2} (j_l(\xi)^2 - j_{l-1}(\xi)j_{l+1}(\xi)) - B^2 \frac{R^3}{2} (k_l(\eta)^2 - k_{l-1}(\eta)k_{l+1}(\eta)) = 1, \quad (2.18)$$

donde podemos hacer uso de las siguientes propiedades de las funciones  $j_l$  y  $k_l$ :

$$j_{l+1}(z) + j_{l-1}(z) = \frac{2l+1}{z} j_l(z), \quad k_{l+1}(z) - k_{l-1}(z) = \frac{2l+1}{z} k_l(z). \quad (2.19)$$

Estas expresiones, junto con las obtenidas de las condiciones de continuidad y derivabilidad, permiten llegar al siguiente resultado general:

$$A = \sqrt{\frac{2}{R^3}} \left[ - \left( 1 + \left( \frac{\xi}{\eta} \right)^2 \right) j_{l-1}(\xi) j_{l+1}(\xi) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.20)$$

Por tanto, para un estado con  $l$  definido, si conocemos la profundidad del pozo de potencial, somos capaces de obtener todas las constantes necesarias para el cálculo de la función de onda del neutrón de valencia,

$$u(r) = \begin{cases} Arj_l(qr) & 0 \leq r \leq R \\ A \frac{j_l(\xi)}{k_l(\eta)} r k_l(kr) & r > R \end{cases}. \quad (2.21)$$

## 2.2 Funciones de onda de estados del Continuo

Los llamados estados del continuo son estados en los que el movimiento de la partícula de valencia no está acotado y, por tanto, son estados no ligados. Cualquier energía positiva da lugar a una solución no ligada, cuya función de onda no es de cuadrado integrable, es decir, no puede normalizarse a la unidad.

La función de onda para  $0 < r < R$  es proporcional a la función esférica de Bessel  $j_l(qr)$ . En el caso del exterior, aplicamos  $z = kr$  a (2.6) para  $r > R$ , obteniendo la misma ecuación esférica de Bessel de orden  $l$  que en (2.7). Pero ahora, como el origen  $r = 0$  no es parte del intervalo en el que se define esta parte de la función de onda, la solución sí es una combinación de las funciones  $j_l(z)$  y  $y_l(z)$ . Por tanto, la parte radial de la función de onda resulta:

$$R(r) = \begin{cases} A j_l(qr) & 0 \leq r \leq R \\ B j_l(kr) + C y_l(kr) & r > R \end{cases}, \quad (2.22)$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son constantes que escogemos reales. Por comodidad volvemos a definir  $u(r) = r \cdot R(r)$ ,

$$u(r) = \begin{cases} A r j_l(qr) & 0 \leq r \leq R \\ B r j_l(kr) + C r y_l(kr) & r > R \end{cases}. \quad (2.23)$$

Esta función  $u(r)$  tiene que ser continua y derivable en todos los puntos. Si estudiamos la continuidad en  $r=R$  y definimos las variables  $\xi = qR$  y  $\eta = kR$ , llegamos a una expresión que relaciona las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$ :

$$A j_l(\xi) = B j_l(\eta) + C y_l(\eta). \quad (2.24)$$

Para imponer la condición de continuidad de la derivada, hacemos uso de las expresiones analíticas para las derivadas de las funciones de Bessel:

$$\frac{du(r)}{dr} = \begin{cases} A [q r j_{l-1}(qr) - l j_l(qr)] & 0 \leq r \leq R \\ B [k r j_{l-1}(kr) - l j_l(kr)] + C [k r y_{l-1}(kr) - l y_l(kr)] & r > R \end{cases}. \quad (2.25)$$

Usando (2.24), obtenemos la siguiente relación entre  $B$  y  $C$ :

$$\frac{C}{B} = - \frac{\xi j_{l-1}(\xi) j_l(\eta) - \eta j_l(\xi) j_{l-1}(\eta)}{\xi j_{l-1}(\xi) y_l(\eta) - \eta j_l(\xi) y_{l-1}(\eta)}. \quad (2.26)$$



Para terminar de conocer las constantes es necesario aplicar la condición de normalización, que se complica en este caso, puesto que nuestra función no es de cuadrado sumable. Las funciones de onda del continuo para energías diferentes son ortogonales, es decir:

$$\int_0^{\infty} u_k(r)u_{k'}(r)dr = N\delta(k - k'). \quad (2.27)$$

En este trabajo, vamos a adoptar el convenio  $N = 1$ . Para poder utilizar esta condición analíticamente, suponemos que la contribución a esta integral en el interior del pozo es despreciable. Por tanto, podemos reescribir la expresión de la siguiente forma:

$$B^2 \int_0^{\infty} r^2 j_l(kr)j_l(k'r)dr + C^2 \int_0^{\infty} r^2 y_l(kr)y_l(k'r)dr = \delta(k - k'), \quad (2.28)$$

donde se puede utilizar la siguiente propiedad que cumplen las funciones esféricas de Bessel [6]:

$$\int_0^{\infty} r^2 j_l(kr)j_l(k'r)dr = \int_0^{\infty} r^2 y_l(kr)y_l(k'r)dr = \frac{\pi}{2k^2} \delta(k - k'). \quad (2.29)$$

Aplicando esto en (2.28) se obtiene:

$$B^2 + C^2 = \frac{2}{\pi} k^2. \quad (2.30)$$

Viendo este resultado, es conveniente un cambio de variable a funciones trigonométricas que lo cumplan:

$$B = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \cos \delta_l, \quad C = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} k \sin \delta_l, \quad (2.31)$$

donde  $\delta_l$  sería el desfase, que según (2.26) queda determinado de la siguiente forma:

$$\delta_l = \arctan \left[ \frac{\xi j_{l-1}(\xi) j_l(\eta) - \eta j_l(\xi) j_{l-1}(\eta)}{\xi j_{l-1}(\xi) y_l(\eta) - \eta j_l(\xi) y_{l-1}(\eta)} \right]. \quad (2.32)$$

Utilizando (2.24) también podemos relacionar la constante  $A$  con el desfase:

$$A = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \frac{\cos \delta_l j_l(\eta) - \sin \delta_l y_l(\eta)}{j_l(\xi)}. \quad (2.33)$$

De modo que, para obtener todas las constantes necesarias para el cálculo de la función de onda de un estado del continuo con momento orbital  $l$  y energía  $E$ , solo es necesario conocer la profundidad del pozo para este estado.

### 2.3 Probabilidad de transición dipolar eléctrica

Una vez estudiados los distintos estados posibles para nuestro modelo, nos interesa estudiar la transición entre ellos, ya que es una propiedad importante de cualquier sistema físico. En concreto, en el caso de núcleos halo, estos presentan una elevada probabilidad de excitación al colocarlos en el seno de un campo coulombiano dipolar intenso. Para cuantificar esta respuesta, se introduce la probabilidad dipolar eléctrica  $\mathfrak{B}(E1)$ . Entre dos estados ligados con momentos angulares inicial y final  $J_i$  y  $J_f$  respectivamente, la probabilidad de transición dipolar eléctrica se define como:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(E1, J_i \rightarrow J_f) &= \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{\mu M_f} |\langle J_f M_f | \mathcal{M}_\mu(E1) | J_i M_i \rangle|^2 \\ &= \frac{2J_f + 1}{2J_i + 1} |\langle J_f || \mathcal{M}(E1) || J_i \rangle|^2, \end{aligned} \quad (2.34)$$

siendo  $M_i$  y  $M_f$  las proyecciones en una dirección de los momentos  $J_i$ ,  $J_f$  y  $\langle J_f || \mathcal{M}(E1) || J_i \rangle$  un elemento de matriz reducido [8].  $\mathcal{M}_\mu(E1)$  es el operador dipolar eléctrico en un sistema de  $A$  cuerpos y viene dado por la siguiente expresión:

$$\mathcal{M}_\mu(E1) = e \sum_{i=1}^A Z_i r_i Y_{1\mu}(\hat{r}_i), \quad (2.35)$$

donde  $e$  es la carga del electrón,  $Z_i$  es nulo para neutrones y 1 para protones,  $r_i$  es la distancia al origen de cada partícula y  $Y_{1\mu}(\hat{r}_i)$  representa un armónico esférico definido en función de la dirección en la que se encuentra cada partícula. El origen se puede escoger en cualquier punto del espacio. Dado que los momentos angulares  $J_i$  y  $J_f$  vienen determinados por los estados inicial y final, el problema se reduce al cálculo del elemento de matriz reducido. Para determinar este resultado, en primer lugar, simplificaremos  $\mathcal{M}_\mu(E1)$ . Comenzamos separando el nucleón de valencia del resto en la expresión (2.35),

$$\mathcal{M}_\mu(E1) = e \sum_{i=1}^{A-1} Z_i r_i Y_{1\mu}(\hat{r}_i) + e Z_v r_v Y_{1\mu}(\hat{r}_v). \quad (2.36)$$

El vector  $\vec{r}_i$  de cada integrante del core, puede expresarse como  $\vec{r}_c + \vec{r}_{ci}$ , donde  $\vec{r}_c$  es el vector de posición del centro de masas del core y  $\vec{r}_{ci}$  es la posición del nucleón respecto a  $\vec{r}_c$ . Bajo la aproximación de core inerte, cada  $\vec{r}_{ci}$  ha de permanecer invariable y por lo tanto no contribuirán a la probabilidad de excitación. De esta forma se pueden simplificar todos por  $\vec{r}_c$ , obteniendo el siguiente resultado para el operador dipolar eléctrico:

$$\mathcal{M}_\mu(E1) = e Z_c r_c Y_{1\mu}(\hat{r}_c) + e Z_v r_v Y_{1\mu}(\hat{r}_v), \quad (2.37)$$

siendo  $Z_c$  el número de protones del core.

Si tomamos el origen en el centro de masa del núcleo y redefinimos los vectores de posición en función de su distancia relativa  $\vec{r}$ :

$$\vec{r}_c = -\frac{m_v}{m_c + m_v} \vec{r}, \quad \vec{r}_v = \frac{m_c}{m_c + m_v} \vec{r}, \quad (2.38)$$

podemos simplificar  $\mathcal{M}_\mu(E1)$  definiendo  $Z_{eff}^{(1)}$ :

$$\mathcal{M}_\mu(E1) = e \frac{Z_v m_c - Z_c m_v}{m_c + m_v} r Y_{1\mu}(\hat{r}) = e Z_{eff}^{(1)} r Y_{1\mu}(\hat{r}). \quad (2.39)$$

$Z_v$  es nulo para el caso de un neutrón de valencia que nosotros vamos a considerar, por tanto:

$$Z_{eff}^{(1)} = - \frac{Z_c m_v}{m_c + m_v}. \quad (2.40)$$

De esta forma, el elemento de matriz reducido se puede expresar como:

$$\langle J_f || \mathcal{M}(E1) || J_i \rangle = e Z_{eff}^{(1)} \langle f | r | i \rangle \langle (l_f s_f) J_f || Y_1 || (l_i s_i) J_i \rangle, \quad (2.41)$$

donde  $\langle f | r | i \rangle$  representa la integral de  $r$  con las partes radiales de las funciones de onda inicial y final:

$$\langle f | r | i \rangle = \int_0^\infty r u_i(r) u_f(r) dr. \quad (2.42)$$

El elemento de matriz reducido restante viene dado en función de los momentos angulares de espín ( $s$ ), orbitales ( $l$ ) y totales ( $J$ ) de cada estado:

$$\begin{aligned} \langle (l_f s_f) J_f || Y_1 || (l_i s_i) J_i \rangle &= \delta_{s_i s_f} (2J_i + 1)^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} J_f & J_i & 1 \\ l_i & l_f & s_i \end{array} \right\} \\ &\times (-1)^{l_f + J_i + s_i + 1} (2l_f + 1)^{1/2} \langle l_f || Y_\lambda || l_i \rangle, \end{aligned} \quad (2.43)$$

siendo  $\delta_{s_i s_f}$  una delta de Kronecker y el corchete un símbolo 6j [8]. El resultado de dichos símbolos es conocido. En nuestro caso, utilizaremos las herramientas de [9] para obtenerlos. El último elemento reducido, ya solo depende de los momentos angulares orbitales:

$$\langle l_f || Y_\lambda || l_i \rangle = \left[ \frac{3(2l_i + 1)}{4\pi(2l_f + 1)} \right]^{1/2} \langle 10l_i 0 | l_f 0 \rangle, \quad (2.44)$$

donde  $\langle 10l_i 0 | l_f 0 \rangle$  es el coeficiente Clebsch-Gordan correspondiente. Si unimos esto con la expresión anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle (l_f s_f) J_f || Y_1 || (l_i s_i) J_i \rangle &= \delta_{s_i s_f} (-1)^{l_f + J_i + s_i + 1} \left[ \frac{3(2J_i + 1)(2l_i + 1)}{4\pi} \right]^{1/2} \\ &\times \begin{Bmatrix} J_f & J_i & 1 \\ l_i & l_f & s_i \end{Bmatrix} \langle 10l_i 0 | l_f 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Con las expresiones obtenidas, ya podemos determinar la probabilidad de transición dipolar eléctrica entre dos estados. Sin embargo, lo obtenido solo es válido para transiciones entre estados ligados. Para transiciones a estados del continuo, es necesario definir una distribución en energía de la probabilidad de transición.

## 2.4 Probabilidad de transición dipolar eléctrica al continuo

Cuando la transición es a un estados no ligado de energía  $E$ , definimos una distribución de probabilidad similar a la probabilidad en caso ligado, pero con un factor extra para tener en cuenta la densidad de estados en el continuo. Dicho factor ha de ser consistente con la condición de normalización de las funciones del continuo. En nuestro caso:

$$\frac{d\mathfrak{B}(E)}{dE} = \frac{2J_f + 1}{2J_i + 1} \frac{\mu k}{(2\pi)^3 \hbar^2} |\langle J_f || \mathcal{M}(E) || J_i \rangle|^2. \quad (2.46)$$

El elemento de matriz reducido también tiene un factor adicional:

$$\langle J_f || \mathcal{M}(E) || J_i \rangle = e Z_{eff}^{(1)} \frac{4\pi}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \langle f | r | i \rangle \langle (l_f s_f) J_f || Y_1 || (l_i s_i) J_i \rangle. \quad (2.47)$$

El resto de factores se calculan según las expresiones (2.40), (2.42) y (2.45). Integrando esta distribución en energía y sumando la contribución de los estados ligados excitados, se calcula la probabilidad de transición total de un estado a otro con  $J_f$  definido, pero con cualquier energía.

## 2.5 Reglas de suma

Para calcular la probabilidad de transición de un estado inicial con  $J_i$  a cualquier otro con  $J_f$ , sumamos las probabilidades expresadas como en (2.34). Podemos separar los módulos en producto de conjugados:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(E1) &= \frac{2J_f + 1}{2J_i + 1} \sum_n |\langle nJ_f || \mathcal{M}(E1) || J_i \rangle|^2 \\ &= \frac{2J_f + 1}{2J_i + 1} \sum_n \langle nJ_f || \mathcal{M}(E1) || J_i \rangle \langle J_i || \mathcal{M}(E1) || nJ_f \rangle, \end{aligned} \quad (2.48)$$

siendo  $n$  el índice que identifica a cada estado final. Hay que tener en cuenta que sumamos sobre todos los estados, ligados o del continuo, con  $J_f$ , aunque estén prohibidos por el principio de exclusión de Pauli. La expresión se puede reducir utilizando (2.41):

$$\mathfrak{B}(E1) = \frac{2J_f + 1}{2J_i + 1} (Z_{eff}^{(1)} e)^2 \sum_n \langle i | r | n \rangle \langle n | r | i \rangle |\langle (l_f s_f) J_f || Y_1 || (l_i s_i) J_i \rangle|^2. \quad (2.49)$$

Utilizando la relación de cierre  $\sum_n |n\rangle \langle n| = 1$ , se llega al resultado de la regla de suma:

$$\mathfrak{B}(E1) = \frac{2J_f + 1}{2J_i + 1} (Z_{eff}^{(1)} e)^2 \langle i | r^2 | i \rangle |\langle (l_f s_f) J_f || Y_1 || (l_i s_i) J_i \rangle|^2, \quad (2.50)$$

siendo  $\langle i | r^2 | i \rangle$  el valor medio de  $r^2$  en el estado inicial, o lo que es lo mismo, el cuadrado de la distancia cuadrática media del nucleón de valencia al core. Como el estado inicial es el estado fundamental, la distancia cuadrática media es la de este mismo estado, que llamamos  $r_{cm}$ . El elemento de matriz reducido de la parte angular es el mismo para todos los estados sumados, y se obtiene según la expresión (2.45).

Con esta regla de suma, se puede obtener la distancia cuadrática media del nucleón halo al resto del núcleo, en su estado fundamental, a través de la integral de  $\mathfrak{B}(E1)$  que se obtenga experimentalmente [10,11].

# 3. Resultados

---

Para poder obtener probabilidades de transición en nuestro modelo de  $^{11}\text{Be}$ , lo primero es obtener las funciones de onda de los estados ligados y del continuo.

## 3.1 Estado fundamental

En nuestro modelo de  $^{11}\text{Be}$ , el estado fundamental corresponde al neutrón de valencia en el estado  $1s_{1/2}$ , es decir, para  $l=0$ . Para determinar el potencial del pozo en este caso, utilizamos el valor experimental de la energía de separación del último neutrón, 0,504 MeV. Esta energía, cambiada de signo, es la energía del neutrón de valencia, es decir, la  $E$  del apartado anterior. Con este valor de  $E$  se obtiene de manera inmediata el valor de  $k$  y podemos calcular  $\eta$  multiplicando por el valor de  $R$ , que viene dado por:  $R = r_0 A^{1/3}$ . Aproximando  $r_0$  por 1,20 fm se obtiene:

$$R = 2,59 \text{ fm.} \quad (3.1)$$

Con el valor de  $\eta$  y la ecuación (2.14) se puede obtener el valor de  $\xi$ . En la figura 3.1 podemos ver las soluciones de dicha ecuación obtenidas mediante el método gráfico a través de los cortes de los dos términos de la ecuación. Tomamos el segundo corte, ya que, debido al principio de exclusión de Pauli, el estado fundamental de  $^{11}\text{Be}$  ha de ser un estado  $1s_{1/2}$ , es decir, la función de onda ha de tener un cero. Si ahora usamos la expresión (2.15), se obtiene el valor de la profundidad del pozo:

$$V_0 = 78,88 \text{ MeV.} \quad (3.2)$$

Conocida la profundidad se puede obtener la función de onda  $u(r)$  en el estado fundamental,

$$u(r) = \begin{cases} Arj_0(qr) & 0 \leq r \leq R \\ A \frac{j_0(\xi)}{k_0(\eta)} rk_0(kr) & r > R \end{cases}, \quad (3.3)$$

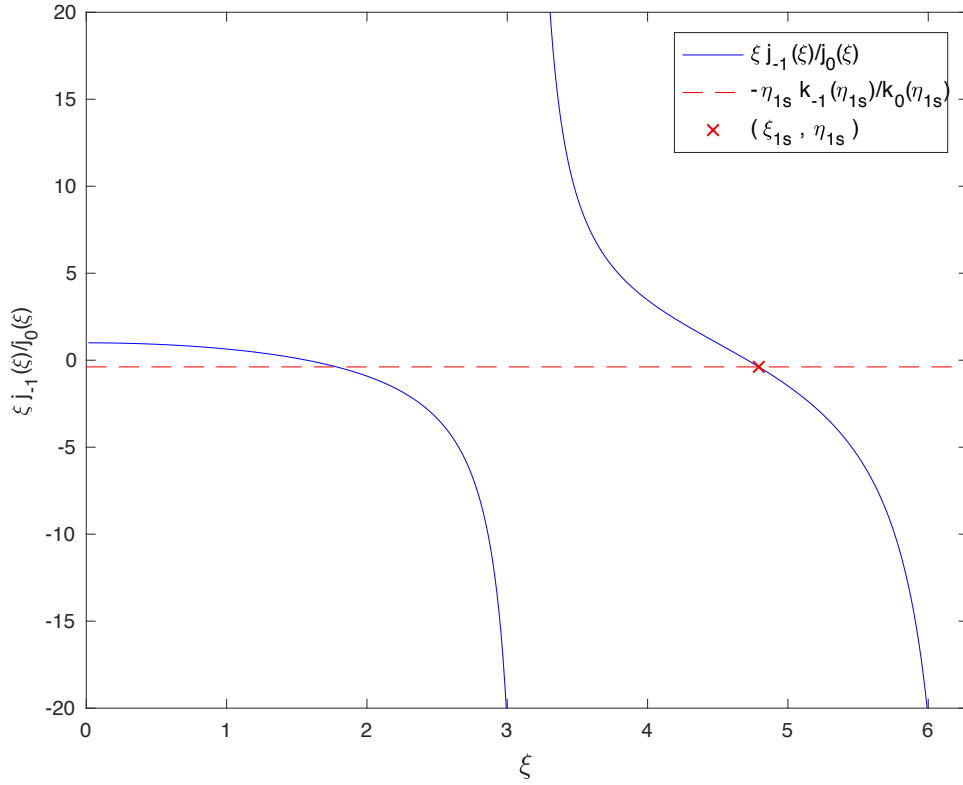


Figura 3.1: Resolución de la ecuación (2.14) para el estado fundamental. Se toma el segundo corte para garantizar que la solución tenga un cero, correspondiente al estado  $1s_{1/2}$ .

donde  $A$  se calcula utilizando (2.20):

$$A = \sqrt{\frac{2}{R^3}} \left[ - \left( 1 + \left( \frac{\xi}{\eta} \right)^2 \right) j_{-1}(\xi) j_1(\xi) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.4)$$

Una vez que se conoce la función de onda, podemos calcular numéricamente la distancia cuadrática media del neutrón que forma el halo con el core:

$$r_{cm} = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \left[ \int_0^\infty r^2 u(r)^2 dr \right]^{\frac{1}{2}} = 5,85 \text{ fm}. \quad (3.5)$$

En la figura 3.2 se representa la parte radial de la función de onda del neutrón halo, la distancia cuadrática media y el radio del core. Comprobamos que la distancia cuadrática



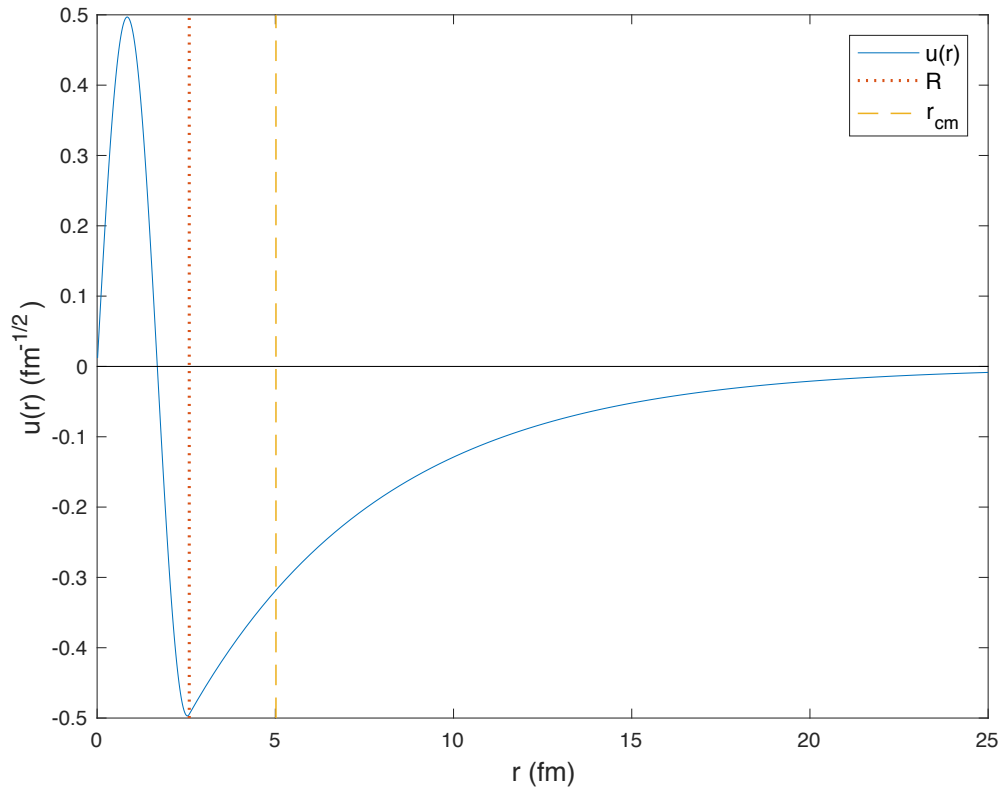


Figura 3.2: Función de onda del neutrón del halo frente a su distancia al core para el estado fundamental. Se observa que la distancia cuadrática media ( $r_{cm}$ ) es mayor que el radio del core ( $R$ ).

media es mayor que el radio del core, que concuerda con la imagen del halo de materia en torno al core. Además, podemos comparar el resultado de la distancia cuadrática media con el valor experimental [12]:

$$r_{cm}^{exp} = 5,66 \pm 0,20 \text{ fm.} \quad (3.6)$$

Vemos que difieren en un 3,3%, valor aceptable dada la simplicidad de nuestro modelo. Además, el valor teórico obtenido entra dentro del margen de error experimental. El valor de  $r_{cm}$  que hemos obtenido será el que usaremos para la regla de suma. Todos estos resultados para el estado fundamental se han obtenido utilizando los códigos que se muestran en el anexo 1.

## 3.2 Primer estado excitado

El  $^{11}\text{Be}$  tiene un único estado excitado ligado, que en el modelo de partícula independiente se corresponde con el neutrón de valencia en el estado  $0p_{1/2}$ , es decir, con  $l=1$ . Para determinar el potencial del pozo en este caso seguiremos los mismos pasos que en estado fundamental, teniendo en cuenta que ahora la energía de separación del neutrón es 0,184 MeV. Con este dato, de nuevo podemos calcular  $\eta$  utilizando el mismo valor de  $R$  y resolver la ecuación (2.10) para obtener  $\zeta$ . Usando la expresión (2.11) se consigue el valor de la profundidad del pozo:

$$V_1 = 34,16 \text{ MeV.} \quad (3.7)$$

La resolución gráfica se muestra en la figura 3.3. Tomamos el primer corte porque el primer estado excitado del  $^{11}\text{Be}$  ha de ser un estado  $0p_{1/2}$ , es decir, la función de onda no debe tener ceros. Una vez obtenido este resultado calculamos la función de onda para el primer estado excitado:

$$u(r) = \begin{cases} Arj_1(qr) & 0 \leq r \leq R \\ A \frac{j_1(\xi)}{k_1(\eta)} rk_1(kr) & r > R \end{cases}, \quad (3.8)$$

La constante de normalización  $A$  se obtiene a partir de la expresión (2.16):

$$A = \sqrt{\frac{2}{R^3}} \left[ - \left( 1 + \left( \frac{\xi}{\eta} \right)^2 \right) j_0(\xi) j_2(\xi) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.9)$$

Aunque en este caso tiene menos relevancia, también se puede calcular la distancia cuadrática media entre el neutrón de valencia y el core:

$$r'_{cm} = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \left[ \int_0^\infty r^2 u(r)^2 dr \right]^{\frac{1}{2}} = 5,14 \text{ fm.} \quad (3.10)$$

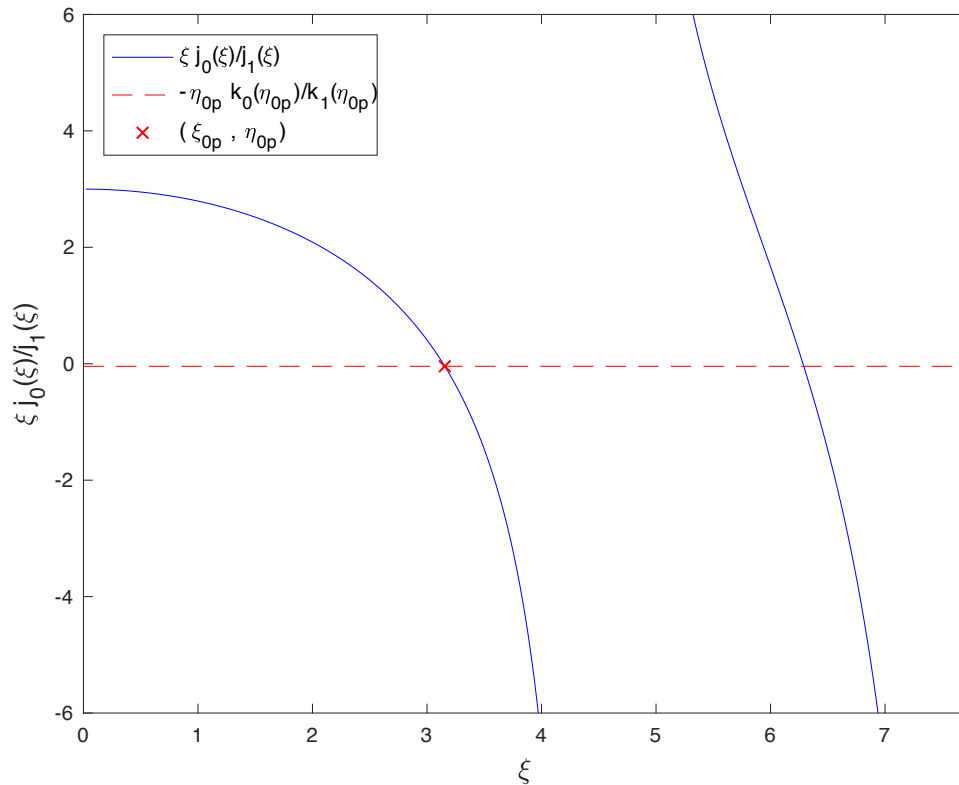


Figura 3.3: Resolución de la ecuación (2.14) para el primer estado excitado. La solución que aparece para un valor de  $\xi$  mayor corresponde a un estado  $1p_{1/2}$ , que sabemos que no es un estado ligado.

Los códigos de Matlab que se han utilizado para todos los cálculos anteriores se encuentran en el anexo 1. La función de onda se representa en la figura 3.4, donde también se observan la distancia cuadrática media y el radio del core. Comprobamos que la distancia cuadrática media vuelve a ser mayor que el radio del core, pero la diferencia es menor que para el estado fundamental.

Los dos estados ligados que se han descrito son los únicos accesibles para nuestro núcleo. Sin embargo, es necesario para la regla de suma hacer un estudio del otro estado de  $l=1$  ( $0p_{3/2}$ ), estado prohibido por el principio de exclusión de Pauli.

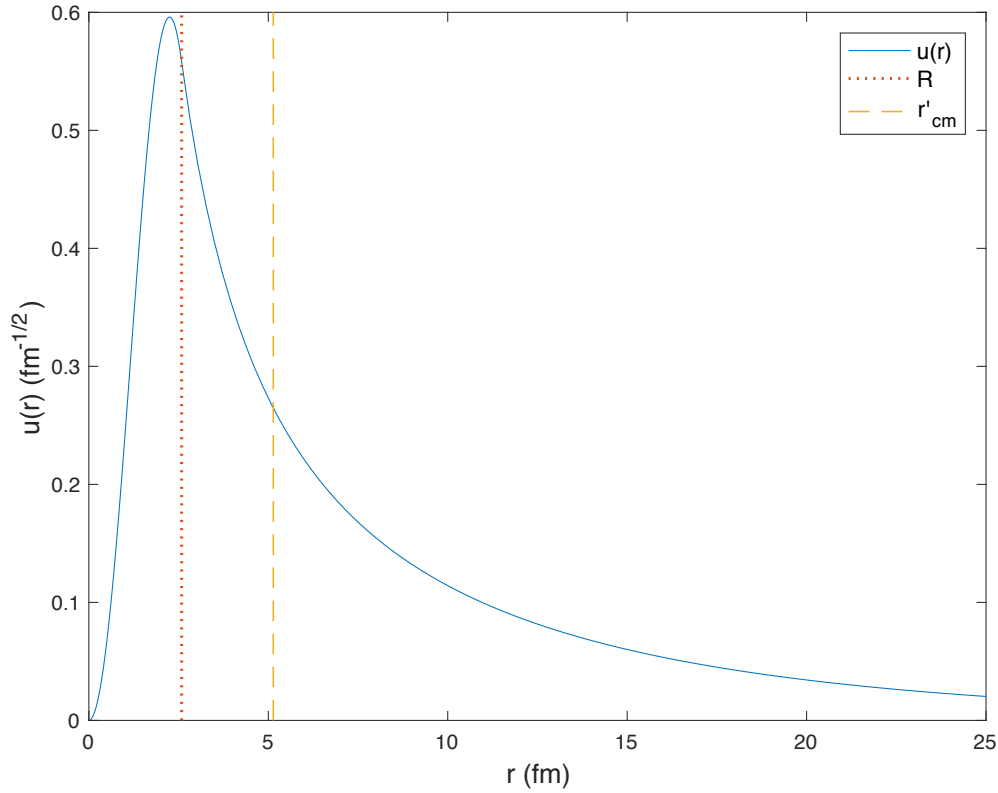


Figura 3.4: Función de onda del neutrón de valencia frente a su distancia al core para el primer estado excitado. Se observa que la distancia cuadrática media ( $r'_{cm}$ ) es mayor que el radio del core ( $R$ ).

### 3.3 Estado prohibido $0p_{3/2}$

Para este estado, el potencial no es el mismo que para el primer estado excitado, puesto que la profundidad depende del momento angular total  $J$ . Podríamos considerar un único potencial si le añadimos a la profundidad del pozo un término de espín-órbita. Este término rompe la degeneración de las energías para estados con un mismo  $l$ , haciendo más ligados los estados de  $J$  mayores. Aproximamos el término con la siguiente expresión:

$$V_{s-o} = -C_l \vec{l} \cdot \vec{s}, \quad (3.11)$$

donde  $C_l$  sería una constante real positiva dependiente de  $l$  y  $\vec{l}$ ,  $\vec{s}$  son los momentos angulares orbital y de espín respectivamente. Según esto, con el resto de números cuánticos definidos, la diferencia de profundidad entre los niveles de distinto  $J$  es la siguiente:

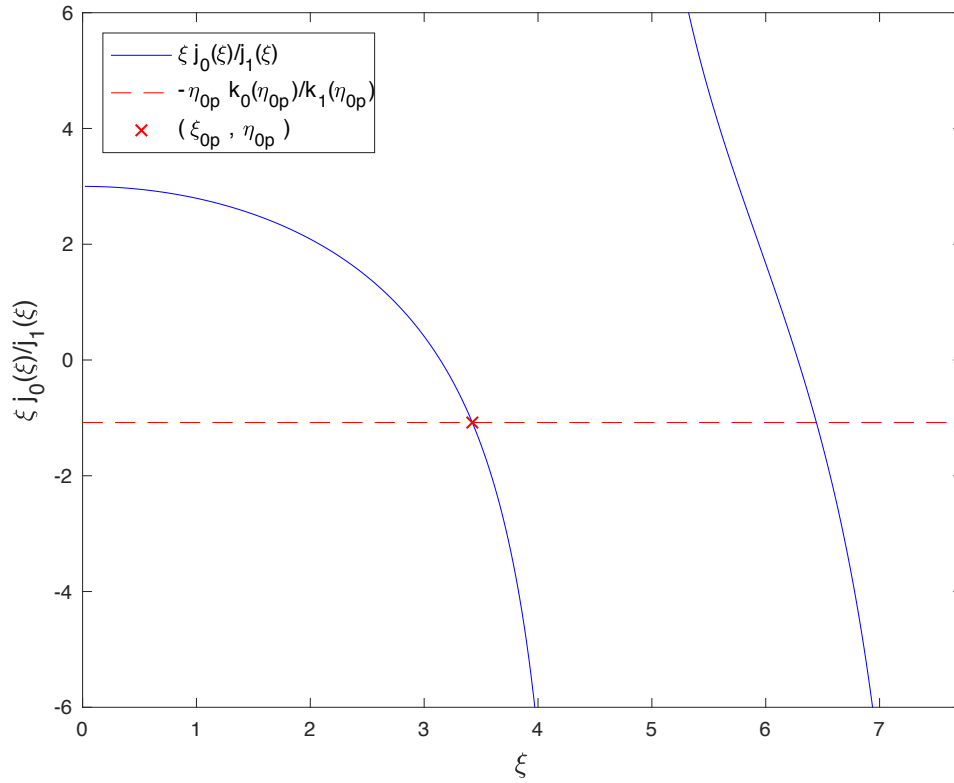


Figura 3.5: Resolución de la ecuación (2.14) para el estado prohibido  $0p_{3/2}$ .

$$V_{J=l+1/2} - V_{J=l-1/2} = \left( l + \frac{1}{2} \right) C_l. \quad (3.12)$$

Por eso, para este estado, vamos a considerar que el potencial tiene una profundidad distinta  $V'_1$ , que se puede calcular de la misma forma que en los casos anteriores. Tomamos una energía para el estado de  $-10$  MeV. Con este valor, el estado prohibido esté bastante más ligado que los estados  $1s_{1/2}$  y  $0p_{1/2}$ , sin llegar a tener un potencial que genere una resonancia  $p_{3/2}$  en el continuo. La  $\mathfrak{B}(E1)$ , que se obtendrá más adelante, se verá influenciada por el valor de potencial obtenido, pero se espera que sea razonable mientras se cumplan dichas condiciones.

Si seguimos los mismos pasos que para el primer estado excitado, utilizando el nuevo valor de la energía, llegamos al siguiente valor para la profundidad del pozo:

$$V'_1 = 49,98 \text{ MeV}. \quad (3.13)$$

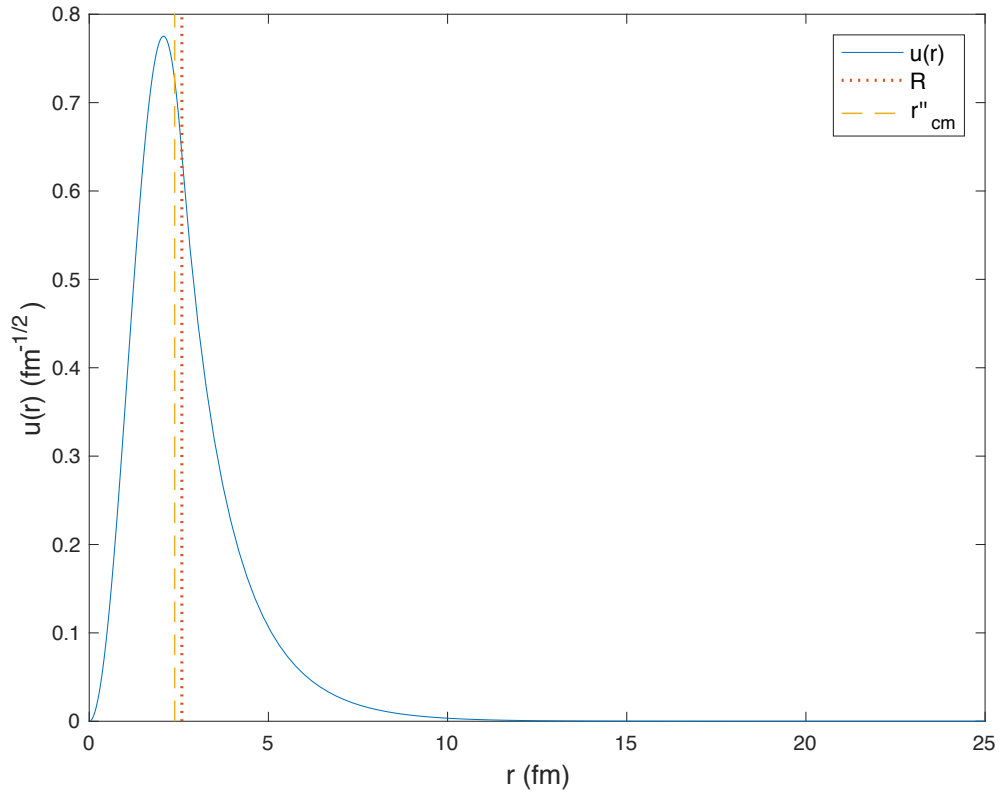


Figura 3.6: Función de onda del neutrón de valencia frente a su distancia al core para el estado prohibido  $0p_{3/2}$ . Tiene una forma similar a la del primer estado excitado, pero menos extendida. Como consecuencia la distancia cuadrática media ( $r''_{cm}$ ) es menor que el radio del core ( $R$ ).

En la figura 3.5 podemos ver la resolución gráfica de la ecuación (2.14) para este caso. De nuevo tomamos el primer corte, para que la función de onda no tenga ceros, es decir, que sea un estado  $0p_{3/2}$ .

Para obtener la función de onda utilizamos la expresión (2.21) con los nuevos valores de  $\zeta$  y  $\eta$ . La constante de normalización  $A$  sigue (2.20) con estos mismos valores de  $\zeta$  y  $\eta$ . Además, podemos calcular la distancia cuadrática media para este estado prohibido:

$$r''_{cm} = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \left[ \int_0^{\infty} r^2 u(r)^2 dr \right]^{\frac{1}{2}} = 2,3841 \text{ fm}, \quad (3.14)$$

De nuevo, los códigos utilizados se encuentran en el anexo 1. La representación de la función de onda, junto con la distancia cuadrática media y el radio del core se muestran en la figura 3.6. En este caso, se observa que la distancia cuadrática media obtenida es algo menor que el radio estimado del core, lo cual refleja el carácter fuertemente ligado del estado  $0p_{3/2}$ .

Una vez conocida la profundidad de ambos estados con  $l=1$ , podemos calcular  $C_l$  utilizando (2.25):

$$C_1 = \frac{2}{3}(V_1' - V_1) = 10,55 \text{ MeV}. \quad (3.15)$$

Por tanto, podemos redefinir el potencial de la siguiente forma:

$$V_N(\vec{r}) = \begin{cases} -(V_l + C_l \vec{l} \cdot \vec{s}) & 0 \leq r \leq R, \\ 0 & r > R \end{cases}, \quad (3.16)$$

siendo entonces  $V_l$  común para ambos valores de  $J$ . Concretamente, se obtendría para el caso de  $l=1$ :

$$V_1 = 44,71 \text{ MeV}. \quad (3.17)$$

### 3.4 Estados p del continuo

Por su importancia para la transición dipolar eléctrica al continuo desde el estado fundamental, vamos a estudiar los estados del continuo con  $l=1$ . Para ello usaremos los potenciales ya obtenidos en los estados ligados con  $l=1$ ,  $V_1$  para estado  $p_{1/2}$  y  $V_1'$  para estados  $p_{3/2}$ . Con estos potenciales, podemos obtener valores de  $\xi$  y  $\eta$  para cualquier valor de  $E$  positivo. Con dichos valores, se obtiene el desfase a través de la expresión (2.32):

$$\delta_1 = \arctan \left[ \frac{\xi j_0(\xi) j_1(\eta) - \eta j_1(\xi) j_0(\eta)}{\xi j_0(\xi) y_1(\eta) - \eta j_1(\xi) y_0(\eta)} \right]. \quad (3.18)$$

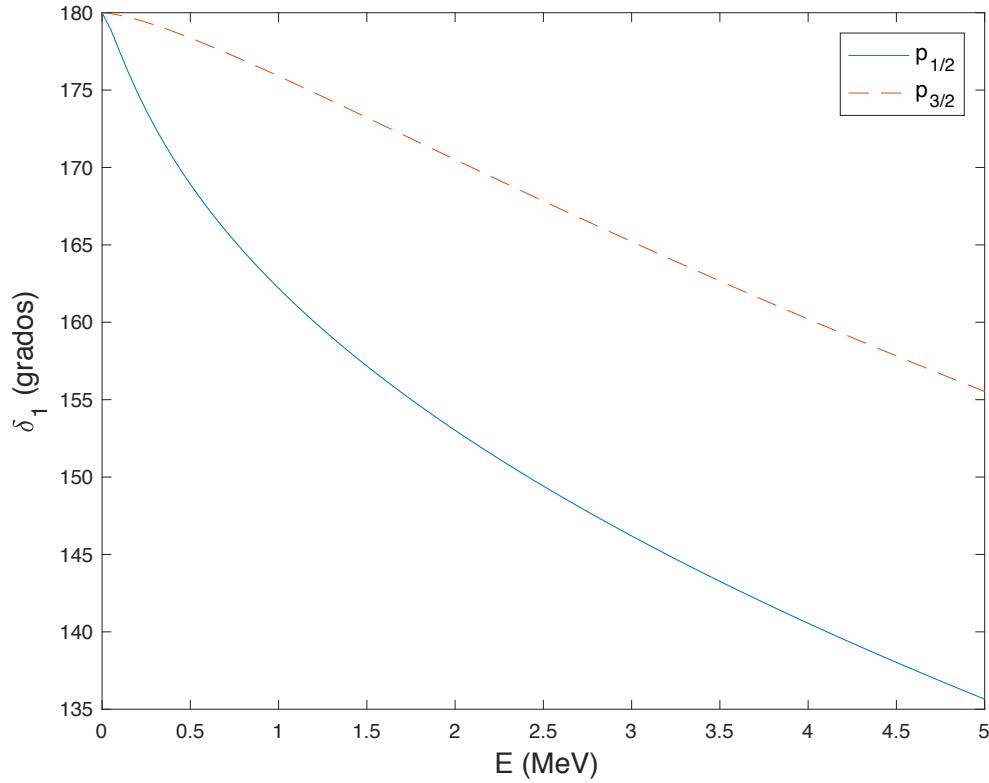


Figura 3.7: Desfase de las funciones de  $l = 1$  frente a la energía.

Para los dos estados p, el valor del desfase para una energía cero, debe ser  $180^\circ$ . Esto es una consecuencia del teorema de Levinson, según el cual se cumple que  $\delta_l(E = 0) - \delta_l(E = \infty) = n\pi$ , siendo  $n$  el número de estados ligados soportado por el potencial para la onda parcial considerada [13]. En la figura 3.7 se representa el desfase frente a la energía.

Una vez determinado el desfase, se obtienen las funciones de onda según (2.23), teniendo en cuenta que las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$  están relacionadas con el desfase a través de las expresiones (2.31) y (2.33):

$$u(r) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}kr \frac{\cos \delta_1 j_1(\eta) - \sin \delta_1 y_1(\eta)}{j_1(\xi)} j_1(qr) & 0 \leq r \leq R \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}kr (\cos \delta_1 j_1(kr) - \sin \delta_1 y_1(kr)) & r > R \end{cases} \quad (3.19)$$

En la figura 3.8, se representan funciones de onda de estados  $p_{1/2}$  y  $p_{3/2}$  de distintas energías.



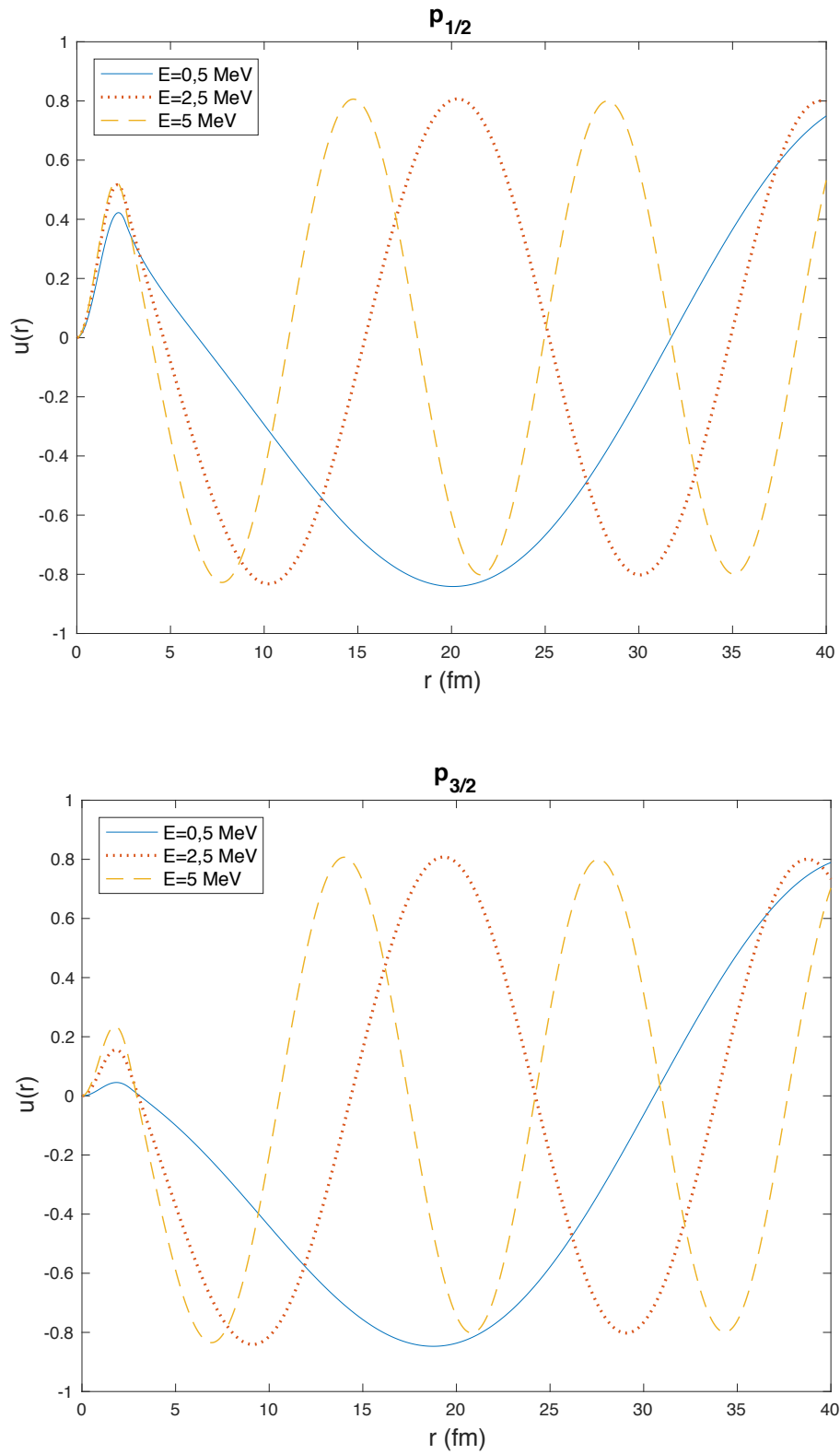


Figura 3.8: Funciones de onda para estados del continuo de distintas energías. Todas son para  $l = 1$ , las de arriba para  $J = 1/2$  y las de abajo para  $J = 3/2$ .

### 3.5 Resonancia $d_{5/2}$

Aunque no tenga relevancia para la transición dipolar eléctrica, estudiamos los estados  $d_{5/2}$  del continuo con nuestro modelo. La mayor importancia de estos estados está en que, para una energía cercana a 1,2 MeV sobre el umbral de separación, el núcleo de  $^{11}\text{Be}$  presenta una resonancia [4]. Matemáticamente, la resonancia se manifiesta en el desfase con un cambio abrupto de  $180^\circ$  cuando se representa en función de la energía de excitación. El desfase lo podemos calcular a través de (2.32) tomando  $l = 2$ :

$$\delta_{d_{5/2}} = \arctan \left[ \frac{\xi j_1(\xi) j_2(\eta) - \eta j_2(\xi) j_1(\eta)}{\xi j_1(\xi) y_2(\eta) - \eta j_2(\xi) y_1(\eta)} \right]. \quad (3.20)$$

Ajustamos el potencial para que el cambio se dé cerca de los 1,2 MeV. Esto lo conseguimos para un potencial con la siguiente profundidad:

$$V_{d_{5/2}} = 66,82 \text{ MeV}. \quad (3.21)$$

La representación del desfase frente a la energía para este potencial se muestra en la parte superior de la figura 3.9. Se observa el aumento brusco del desfase en torno a 1,2 MeV. Para comprobar el cambio de la función de onda en la resonancia, la calculamos para la energía de 1,2 MeV, para una energía mayor y para otra menor. Las energías escogidas han sido señaladas en la figura 3.9. Para el cálculo de las funciones de onda, particularizamos (2.23) para  $l = 2$ , sustituyendo las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$  por sus relaciones con el desfase:

$$u(r) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} k r \frac{\cos \delta_{d_{5/2}} j_2(\eta) - \sin \delta_{d_{5/2}} y_2(\eta)}{j_2(\xi)} j_2(qr) & 0 \leq r \leq R \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} k r \left( \cos \delta_{d_{5/2}} j_2(kr) - \sin \delta_{d_{5/2}} y_2(kr) \right) & r > R \end{cases}. \quad (3.22)$$

En el gráfico inferior de la figura 3.9, se representan las funciones de onda para las energías ya citadas. Comprobamos como la función para  $E = 1,2$  MeV, presenta un máximo mucho más acentuado para un  $r$  pequeño que en los otros casos. Esto indica que la probabilidad de presencia del neutrón halo a una distancia menor que el radio del core, es mayor en este caso.

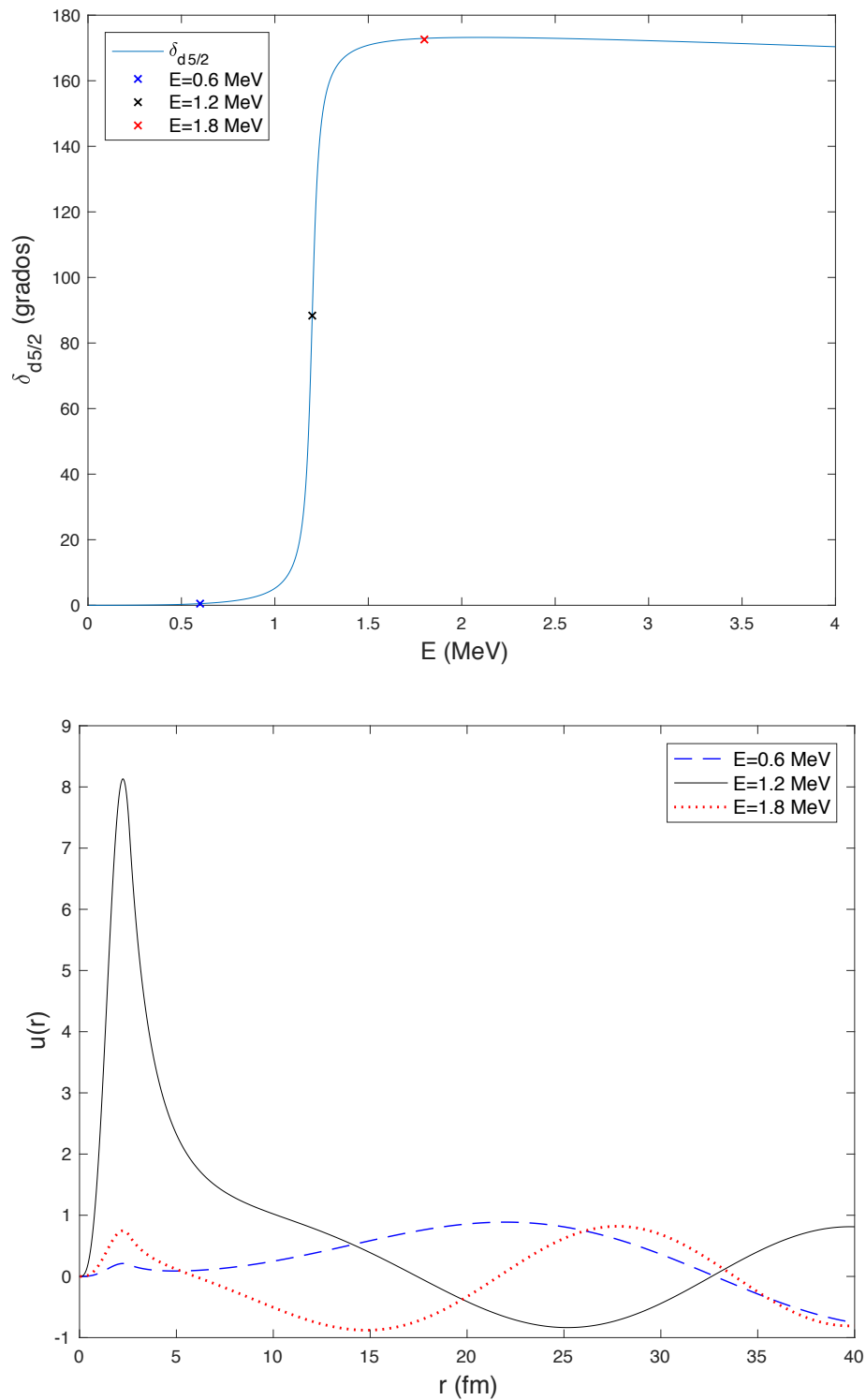


Figura 3.9: Desfase de los estados  $d_{5/2}$  frente a la energía (panel superior) y funciones de onda (panel inferior) para algunos de estos estados. En la primera gráfica se observa el aumento brusco del desfase en torno a la energía nominal de la resonancia. En la segunda, se observa la diferencia de la función de onda de la resonancia con las de energías superiores e inferiores.

### 3.6 Probabilidad de transición a estados ligados

En este trabajo nos vamos a centrar en la probabilidad de transición dipolar eléctrica desde el estado fundamental. En este apartado en concreto nos centraremos en transiciones a otros estados ligados. Para obtenerla, tenemos que calcular el elemento de matriz reducido  $\langle J_f || \mathcal{M}(E1) || J_i \rangle$  a través de (2.41). El valor de  $Z_{eff}^{(1)}$  viene dado por la expresión (2.40), usando los mismos valores para las masas que en la masa reducida, resulta:

$$Z_{eff}^{(1)} = -0,3661. \quad (3.23)$$

El factor  $\langle f | r | i \rangle$  se calcula según (2.42), siendo el estado inicial el fundamental. Para la parte angular, utilizamos la expresión (2.45), sustituyendo los momentos angulares iniciales por los del estado fundamental ( $l_i = 0$ ,  $s_i = \frac{1}{2}$  y  $J_i = \frac{1}{2}^+$ ):

$$\langle (l_f s_f) J_f || Y_1 || (0 \frac{1}{2}) \frac{1}{2} \rangle = \delta_{\frac{1}{2} s_f} (-1)^{l_f} \left[ \frac{6}{4\pi} \right]^{1/2} \cdot \left\{ \begin{matrix} J_f & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & l_f & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \langle 1000 | l_f 0 \rangle. \quad (3.24)$$

La delta del espín nos dice que solo es posible la transición a un estado final de  $s_f = \frac{1}{2}$ . Por otra parte, el coeficiente de Clebsch-Gordan  $\langle 1000 | l_f 0 \rangle$  solo es distinto de 0, e igual a 1, para  $l_f = 1$ . Por tanto, las transiciones desde el estado fundamental solo son posibles a estados  $p_{1/2}$  y  $p_{3/2}$ , justamente los estados que hemos estudiado. Aplicando esto a la expresión (3.24), se obtiene:

$$\langle (1 \frac{1}{2}) \frac{1}{2} || Y_1 || (0 \frac{1}{2}) \frac{1}{2} \rangle = \frac{-1}{\sqrt{4\pi}} = - \langle (1 \frac{1}{2}) \frac{3}{2} || Y_1 || (0 \frac{1}{2}) \frac{1}{2} \rangle, \quad (3.25)$$

donde se ha utilizado el siguiente resultado de los símbolos 6j [8]:

$$\left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} = \frac{-1}{\sqrt{6}} = - \left\{ \begin{matrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\}. \quad (3.26)$$

Una vez obtenida la parte angular, dado que conocemos las funciones de onda de los únicos estados ligados a los que es posible la transición, la probabilidad de transición dipolar eléctrica del estado fundamental a otro estado ligado queda:

$$\mathfrak{B}(E1, \frac{1}{2}^+ \rightarrow J_f) = (J_f + \frac{1}{2}) \frac{(eZ_{eff}^{(1)})^2}{4\pi} |\langle 0p_{J_f} | r | 1s_{1/2} \rangle|^2. \quad (3.27)$$

Utilizando esta expresión, la probabilidad de transición dipolar eléctrica desde el estado fundamental al primer estado excitado ( $J_f = \frac{1}{2}^-$ ) resulta:

$$\mathfrak{B}(E1, \frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^-) = 0,1621 \text{ e}^2\text{fm}^2, \quad (3.28)$$

que se aproxima al valor experimental [5]:

$$\mathfrak{B}(E1, \frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^-) = 0,102 \pm 0,002 \text{ e}^2\text{fm}^2. \quad (3.29)$$

Si hacemos lo mismo para el estado prohibido  $0p_{3/2}$ , se llega al siguiente resultado:

$$\mathfrak{B}(E1, \frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{3}{2}^-) = 0,0243 \text{ e}^2\text{fm}^2. \quad (3.30)$$

Esta probabilidad no tiene sentido físico, ya que el estado final está prohibido por el principio de exclusión de Pauli, pero es un resultado relevante para la regla de suma.

### 3.7 Probabilidad de transición al continuo

En el caso de la transición al continuo, calculamos el elemento de matriz reducido  $\langle J_f || \mathcal{M}(E1) || J_i \rangle$  con la expresión (2.47), donde el factor  $\langle f | r | i \rangle$  se calcula según (2.42) y consideramos el mismo valor de  $Z_{eff}^{(1)}$  que en el apartado anterior. Para la parte angular, el resultado obtenido en el apartado anterior es también válido. Por tanto, de nuevo solo son posibles las transiciones a estados  $p_{1/2}$  y  $p_{3/2}$ , para los que el elemento de matriz reducido de la parte angular sigue la expresión (3.24).

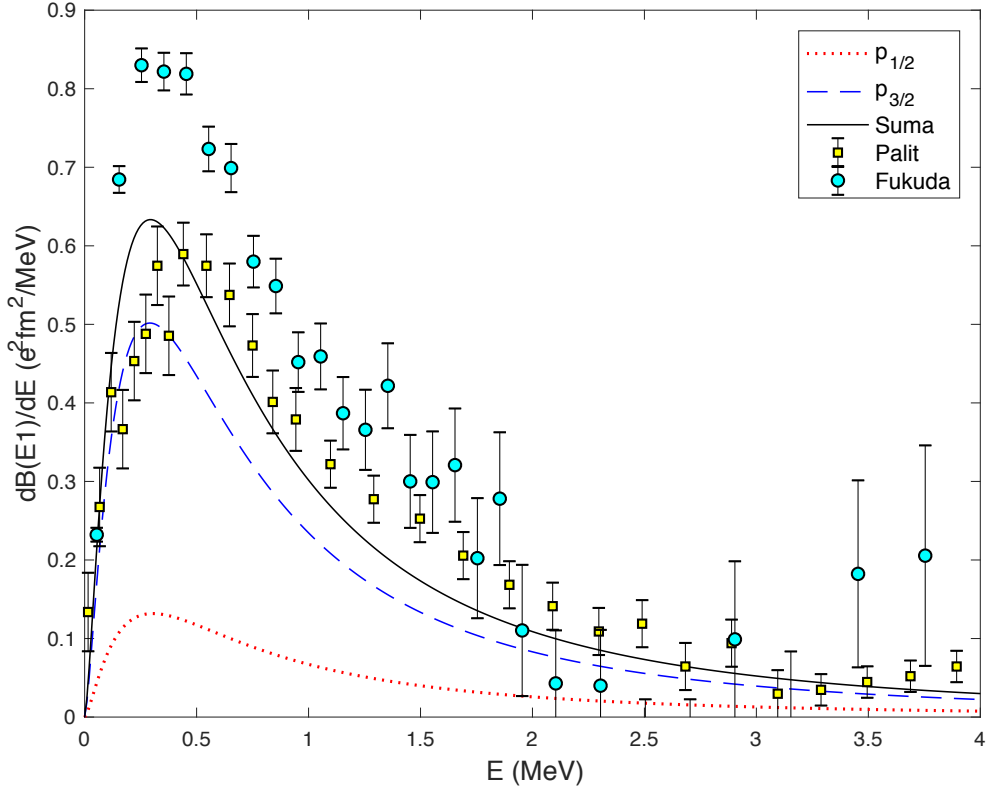


Figura 3.10: Distribución en energía de la probabilidad de transición dipolar eléctrica. Se observan las contribuciones de las transiciones a los estados  $p_{1/2}$ ,  $p_{3/2}$  y la suma de ambas. En comparación, se representan los datos experimentales obtenidos por R. Palit y colaboradores [10] y N. Fukuda y colaboradores [11].

Pasamos del elemento de matriz reducido a la distribución de la probabilidad en energía, a través de (2.48), obteniendo en nuestro caso el siguiente resultado:

$$\frac{d\mathfrak{B}(E1)}{dE} = (J_f + \frac{1}{2}) \frac{(eZ_{eff}^{(1)})^2}{4\pi} \frac{\mu}{\hbar^2 k} |\langle k, p_{J_f} | r | 1s_{1/2} \rangle|^2, \quad (3.31)$$

que nos permite obtener un resultado para cada valor de  $k$ , y por tanto, de la energía. Si sumamos los resultados para transiciones a estados  $p_{1/2}$  con los de transiciones a estados  $p_{3/2}$ , obtenemos la distribución de la probabilidad en energía de la transición al continuo. Este resultado lo comparamos con los que se han obtenido experimentalmente en la figura 3.10, donde también se representan las dos contribuciones de la probabilidad de transición al continuo que hemos calculado. Nuestra probabilidad de transición al continuo

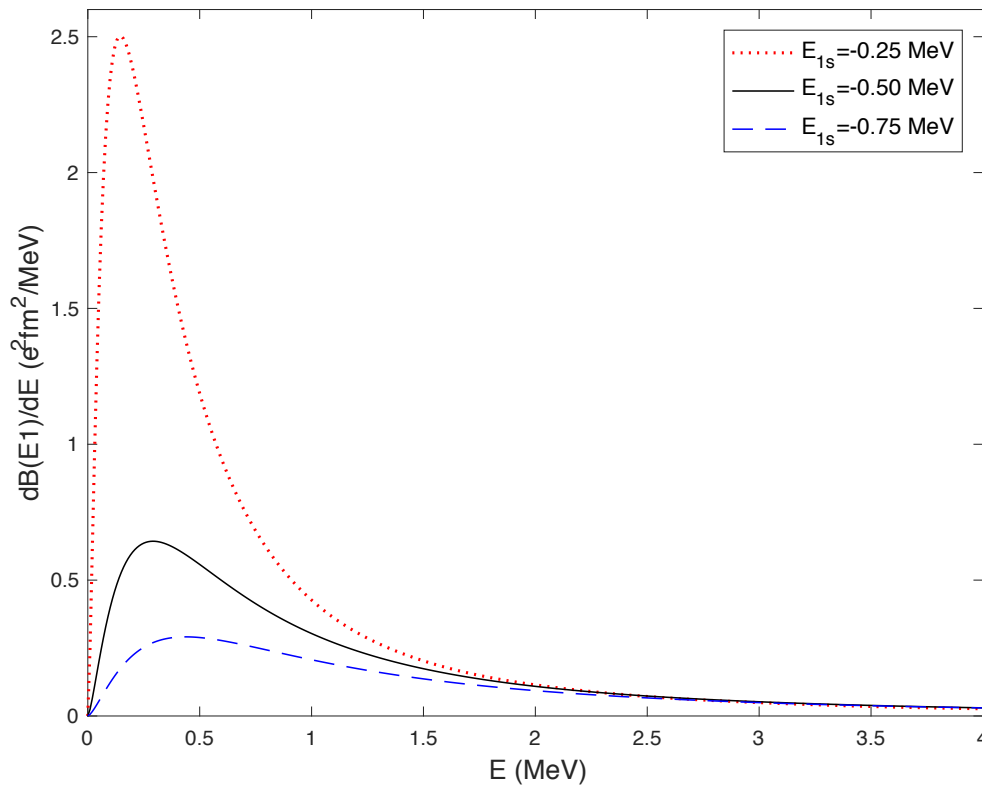


Figura 3.11: Distribución en energía de la probabilidad de transición dipolar eléctrica para distintos valores de la energía del estado fundamental.

parece estar por debajo de los valores experimentales de Fukuda, pero hay que tener en cuenta que sobreestimamos la del estado ligado. Ambos valores están relacionados a través de la regla de suma. Si pudiéramos mejorar nuestro modelo para ajustar la  $\mathfrak{B}(E1)$  al primer estado excitado, la probabilidad de transición al continuo podría acercarse a los datos de Fukuda y alejarse de los de Palit.

Podemos estudiar con nuestro modelo cómo varía la probabilidad de transición al continuo al modificar la energía del estado fundamental. Esto se observa en la figura 3.11, donde comprobamos que la probabilidad disminuye al ligar más el estado fundamental, es decir, al disminuir su energía. También comprobamos que al ligar más el estado fundamental, el máximo de la distribución se alcanza a energías más altas.

### 3.8 Reglas de suma para estados $p_{1/2}$ y $p_{3/2}$

Obtenidas las distribuciones en energía de las probabilidades de transición a estados del continuo  $p_{1/2}$  y  $p_{3/2}$ , podemos integrar cada una de ellas. Si a esto le sumamos la probabilidad de transición a los estados  $0p_{1/2}$  y  $0p_{3/2}$  respectivamente, se tiene la probabilidad de transición dipolar eléctrica total a estados  $p_{1/2}$  y  $p_{3/2}$ :

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}(E1, p_{1/2}) &= \mathfrak{B}(E1, 0p_{1/2}) + \int_0^\infty \frac{d\mathfrak{B}(E1, p_{1/2})}{dE} dE = 0,3649 \text{ e}^2\text{fm}^2, \\ \mathfrak{B}(E1, p_{3/2}) &= \mathfrak{B}(E1, 0p_{3/2}) + \int_0^\infty \frac{d\mathfrak{B}(E1, p_{3/2})}{dE} dE = 0,7299 \text{ e}^2\text{fm}^2.\end{aligned}\quad (3.32)$$

Debemos comprobar que aplicando las reglas de suma se llega a los mismos resultados. Para ello utilizamos la expresión (2.50), con el valor de  $Z_{eff}^{(1)}$  calculado en (3.20), tomando el valor de la distancia cuadrática media de (3.5) y de la parte angular de (3.22):

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}(E1, p_{1/2}) &= \frac{(Z_{eff}^{(1)}e)^2}{4\pi} r_{cm}^2 = 0,3649 \text{ e}^2\text{fm}^2, \\ \mathfrak{B}(E1, p_{3/2}) &= \frac{(Z_{eff}^{(1)}e)^2}{2\pi} r_{cm}^2 = 0,7299 \text{ e}^2\text{fm}^2.\end{aligned}\quad (3.33)$$

Confirmamos que los resultados obtenidos con la regla de suma son idénticos a los obtenidos con la integración. Además, las reglas de suma corroboran que la probabilidad total de la transición a un estado  $p_{3/2}$  es el doble de la probabilidad para estados  $p_{1/2}$ .

Podemos considerar ahora la probabilidad de transición dipolar eléctrica total al continuo. Para ello, sumamos los resultados de ambas reglas de suma y sustraemos las probabilidades de transición a los estados ligados, obteniéndose:

$$\mathfrak{B}(E1, E > 0) = 0,8834 \text{ e}^2\text{fm}^2.\quad (3.34)$$



## 4. Conclusiones

---

En este trabajo hemos estudiado los núcleo halo de un neutrón con un modelo sencillo, centrándonos en el caso concreto del núcleo de  $^{11}\text{Be}$ . Nuestro modelo simplifica el problema considerándolo un sistema de dos cuerpos, el neutrón de valencia y el core. Al considerar el core como un solo cuerpo inerte, el problema se reduce a estudiar el comportamiento relativo al sistema valencia-core a través de la ecuación de Schrödinger. El potencial nuclear que siente el neutrón lo modelamos como un pozo esférico finito, cuya profundidad depende de los momentos angulares  $l$  y  $J$ . Resolviendo la ecuación de Schrödinger con estas aproximaciones encontramos la forma de la función de onda para estados ligados y del continuo. Como nuestro potencial es central, la parte angular es siempre una combinación de armónicos esféricos dependientes de los momentos angulares  $l$  y  $J$ , lo que nos hace centrarnos exclusivamente en la parte radial de la función.

La profundidad del potencial para  $l = 0$  y  $l = 1$ , la ajustamos para que los estados ligados tengan la energía experimental. Una vez conocida la profundidad para estos casos, se han podido obtener las funciones de onda para el estado fundamental, el primer estado excitado y el estado prohibido  $0p_{3/2}$ . Con estas funciones se calculan magnitudes como la distancia cuadrática media entre neutrón de valencia y core, que es especialmente relevante para el estado fundamental. En este estado comprobamos que dicha distancia es mayor que el radio del core, resultado que debe cumplirse para un núcleo halo. Si comparamos esta distancia con el valor experimental, difieren menos de un 5% [12]. Teniendo en cuenta la simplicidad de nuestro modelo, la diferencia es más que razonable, con lo que concluimos que nuestro modelo reproduce bien la distancia cuadrática media. Por otra parte, con la diferencia entre los dos potenciales de  $l = 1$  y distinto  $J$ , hemos podido hacer una estimación del término de espín órbita que rompe su degeneración.

Utilizando los dos mismos potenciales de  $l = 1$  que para estados ligados, ha sido posible obtener las funciones de onda para estado  $p_{1/2}$  y  $p_{3/2}$  del continuo. Hemos observado cómo decae el desfase al aumentar la energía de los estados, y cómo varían las funciones de onda con la energía. Además del estudio de estados con  $l = 1$ , se ha tratado de reproducir la

resonancia  $d_{5/2}^+$  de  $^{11}\text{Be}$ . Suponiendo una configuración  $d_{5/2}$  para dicha resonancia, hemos ajustado el potencial para que la resonancia se dé a la energía observada experimentalmente. Se ha comprobado el efecto de la misma en el desfase y la función de onda.

Una vez conocidas las funciones de onda de los estados que nos han interesado, podemos pasar al estudio de la transición dipolar eléctrica  $\mathfrak{B}(E1)$ . Empezamos por el cálculo de la probabilidad de transición dipolar eléctrica entre estados ligados, que se reduce al cálculo de un elemento de matriz reducido. Bajo la aproximación de core inerte, el elemento de matriz reducido se puede separar en una integral de  $r$  entre los estados inicial y final, una parte angular y una constante. La parte angular nos dice que, partiendo del estado fundamental, solo son posibles transiciones a estados de  $l = 1$ , estados cuyas funciones de onda ya conocemos. Por tanto, ha sido posible obtener la probabilidad de transición al primer estado excitado y al estado ligado  $p_{3/2}$ . Como este último estado está prohibido por el principio de exclusión de Pauli, la probabilidad más relevante es la de transición al primer estado excitado. Para esta transición, obtenemos que  $\mathfrak{B}(E1) = 0,1621 \text{ e}^2\text{fm}^2$ , valor que se aproxima al experimental:  $\mathfrak{B}(E1) = 0,102 \pm 0,002 \text{ e}^2\text{fm}^2$  [5]. El exceso de la probabilidad de transición que hemos calculado, se debe principalmente a la simplicidad del modelo.

Para el estudio de las transiciones al continuo, calculamos una distribución en energía de la probabilidad de transición dipolar eléctrica. Salvo factores adicionales dependientes de la energía, la expresión de esta distribución es similar a la de la probabilidad para estados ligados. De la misma forma, llegamos a que solo es posible la transición desde el estado fundamental a estados con  $l = 1$ . Hemos podido obtener así la distribución para transiciones a estados  $p_{1/2}$ ,  $p_{3/2}$  y  $p$  en general sumando ambas. Esta última se compara con resultados experimentales en la figura 3.10. Se observa que la forma de nuestra distribución se ajusta aproximadamente a la de las distribuciones extraídas experimentalmente. Sin embargo, nuestra distribución está por debajo de los resultados experimentales de Fukuda [11]. Esto se debe principalmente a que nuestro modelo, al sobreestimar la probabilidad de transición a los estados ligados, subestima la probabilidad de transición al continuo. Hay que tener en cuenta que estas transiciones están relacionadas

por la regla de suma, que depende de la distancia cuadrática media en el estado fundamental,  $r_{cm}$ , distancia que en nuestro modelo es muy similar a la que obtiene Fukuda.

La regla de suma calcula la probabilidad total de transición a estados de  $l$  y  $J$  definidos, ligados o del continuo, prohibidos o no. Hemos podido calcular con nuestro modelo las reglas de suma para las transiciones a estados  $p_{1/2}$  y  $p_{3/2}$ , calculando  $r_{cm}$  a partir de la función de onda del estado fundamental. El resultado para las transiciones a estados  $p_{3/2}$ , es justamente el doble que para las transiciones a estados  $p_{1/2}$ . Para confirmar la validez de la regla, hemos integrado las distribuciones en energía de probabilidad de transición a estados  $p_{1/2}$  y  $p_{3/2}$  sumándoles la probabilidad de transición al primer estado excitado y el estado  $0p_{3/2}$  respectivamente. Los resultados que se obtienen de esta forma y con las reglas de suma coinciden, confirmando la validez de la regla en nuestro modelo. Podemos calcular, ahora de dos formas distintas, la probabilidad de transición dipolar eléctrica total al continuo. Ya se haga sumando las integraciones de las dos distribuciones, o sumando las reglas de suma y restando la probabilidad de los estados ligados, se llega al mismo resultado,  $\mathfrak{B}(E1, E > 0) = 0,8834 e^2\text{fm}^2$ . Este valor puede ser menor de lo debido, teniendo en cuenta que sobreestimamos la probabilidad de transición al estado ligado.

Considerando todo lo expuesto en este punto, el modelo empleado reproduce de forma satisfactoria varias propiedades del núcleo de  $^{11}\text{Be}$ , tales como el radio cuadrático medio, su espectro de baja energía, y las probabilidades de transición dipolar eléctrica. Como posibles mejoras del modelo, podríamos emplear un potencial más realista, por ejemplo de tipo Woods-Saxon. Además podríamos añadir un término de espín-órbita desde el principio.



# 4. Bibliografía

---

- [1] P.G. Hansen y B. Jonson, *Europhys. Lett.* 4 (1987) 409.
- [2] I. Tanihata *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* 55, 2676 (1985).
- [3] I. Tanihata *et al.*, *Phys. Lett. B* 160, 380 (1985).
- [4] Base de datos *National Nuclear Data Center*, Brookhaven National Laboratory. [www.nndc.bnl.gov](http://www.nndc.bnl.gov). Consultado en mayo de 2019.
- [5] E. Kwan, C.Y. Wu *et al.*, *Phys. Lett. B*, 732, 210 (2014)
- [6] MATLAB, 2017. version 9.3.0 (R2017b), Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc.
- [7] M. Abramowitz y I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables* (Dover, 1972).
- [8] D. M. Brink y G. R. Satchler, *Angular Momentum* (Clarendon, Oxford, 1968).
- [9] [www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com). Wolfram Alpha LLC.
- [10] R. Palit *et al.*, *Phys. Rev. C* 68, 034318 (2003)
- [11] N. Fukuda *et al.*, *Phys. Rev. C* 70, 054606 (2004)
- [12] I. Tanihata *et al.*, *Phys. Lett. B*, 206, 592 (1988).
- [13] C. J. Joachain, *Quantum Collision Theory* (Amsterdam, 1975)



# Anexo 1: Códigos

---

## Función esférica de Bessel de primera clase

```
function j1 = j1b(l,z)
j1=sqrt(0.5*pi./z).*besselj(l+0.5,z);
```

## Función esférica modificada Bessel de tercera clase

```
function k1 = k1b(l,z)
k1=sqrt(0.5*pi./z).*besselk(l+0.5,z);
```

## Función de onda para estados ligados

```
function u = U(l,r,R,xi,eta,A)
u=zeros(size(r));
Ar=A*r;
for i=1:length(r)
if r(i)<=R
    u(i)=Ar(i)*j1b(l,xi*r(i)/R);
else
    u(i)=Ar(i)*j1b(l,xi)/k1b(l,eta)*k1b(l,eta*r(i)/R);
end
end
```

## Función de onda para estados del continuo

```
function u = Uc(l,r,R,xi,eta,dl)
u=zeros(length(dl),length(r));
B=sqrt(2/pi)*(eta/R).*cos(dl);
C=-sqrt(2/pi)*(eta/R).*sin(dl);
A=(B.*j1b(l,eta)-(-1)^l.*C.*j1b(-(l+1),eta))./j1b(l,xi);

for i=1:length(r)
if r(i)<=R
    u(:,i)=A.*r(i).*j1b(l,xi.*r(i)/R);
else
    u(:,i)=r(i).*(B.*j1b(l,eta.*r(i)/R)-(-1)^l.*C.*j1b(-(l+1),eta.*r(i)/R));
end
end
```

## Cálculo de la probabilidad de transición a estados ligados

```
function Bp = B(xi,eta,A,Jf)
R=1.2*10^(1/3);%fm
M=12.607+10*931.494-4*0.511;%MeV/c2 Masa del 10Be
Zeff=-4/(M/939.565+1); %carga efectiva
%Estado fundamental
xi1s=4.792407102914924;
eta1s=0.384299980544830;
Als=sqrt(-2/(R^3*(1+(xi1s/eta1s)^2)*jb(-1,xi1s)*jb(1,xi1s)));%fm-3/2
%integración
C=integral(@(r) r.*U(0,r,R,xi1s,eta1s,Als).*U(1,r,R,xi,eta,A),0,Inf);
%Resutado final
Bp=(Jf+0.5)*(Zeff*C).^2/(4*pi);%e2*fm2
```

## Cálculo de la probabilidad de transición al continuo

```
function dBp = dB(E,V,Jf)
R=1.2*10^(1/3);%fm
M=12.607+10*931.494-4*0.511;%MeV/c2 Masa del 10Be
mu=1/(1/939.565+1/M);%MeV/c2 masa reducida
Zeff=-4/(M/939.565+1); %Carga efectiva
K=mu/((2*pi)^3*197.33^2);%MeV-lfm-2 %Constante auxiliar
%Estado fundamental
xi1s=4.792407102914924;
eta1s=0.384299980544830;
Als=sqrt(-2/(R^3*(1+(xi1s/eta1s)^2)*jb(-1,xi1s)*jb(1,xi1s)));%fm-3/2
%Estados del Continuo
eta=R*sqrt(2*mu*E)/197.33;
xi=R*sqrt(2*mu*(E+V))/197.33;
%Desfase
dl= pi+atan((xi.*jb(0,xi).*jb(1,eta)-eta.*jb(1,xi).*jb(0,eta))./...
(xi.*jb(0,xi).*jb(-2,eta)+eta.*jb(1,xi).*jb(-1,eta)));

%integración
C=integral(@(r) r.*U(0,r,R,xi1s,eta1s,Als).*...
Uc(1,r,R,xi,eta,dl),0,inf,'ArrayValued',true);%fm1/2

%Resutado final
dBp=(Jf+0.5)*K./(eta'/R).*(Zeff*C).^2*(4*pi)*pi/2;
dBp(isnan(dBp))=0;
```



## Estado fundamental

```

clear; clc
%Constantes
M=12.607+10*931.494-4*0.511;%MeV/c2 Masa del 10Be
mu=1/(1/939.565+1/M);%MeV/c2 Masa reducida
R=1.2*10^(1/3);%fm
E=-0.504;%MEV

%Obtención del potencial
eta=R*sqrt(-2*mu*E)/197.33;
fj=@(x) x.*jb(-1,x)./jb(0,x);
fk=eta.*kb(-1,eta)./kb(0,eta);
f=@(x) fj(x)+fk;
xi=fzero(f,[1.5,2]*pi);%Solución de (2.14)
V0=-E*((xi/eta)^2+1);%MeV Profundidad del potencial
%Gráfico
X=linspace(1.05,1.92,200)*pi;
X0=linspace(0,0.96,200)*pi;
figure (1)
plot(X,fj(X), 'b', [0,2*pi], [-fk,-fk], 'r--')
hold on
plot(xi,-fk, 'xr', 'LineWidth',1, 'MarkerSize',8)
plot(X0,fj(X0), 'b')
xlabel('\xi', 'FontSize',14)
ylabel('\xi j_{-1}(\xi)/j_0(\xi)')
axis([0,2*pi,-20,20])
legend({'\xi j_{-1}(\xi)/j_0(\xi)', '-\eta_{1s} k_{-1}(\eta_{1s})/k_0(\eta_{1s})', '( \xi_{1s} , \eta_{1s} )'}, 'FontSize',11)
hold off

%Función de onda
A=sqrt(-2/(R^3*(1+(xi/eta)^2)*jb(-1,xi)*jb(1,xi)));%fm-3/2 Cte de
normalización
%integral(@(r) U(0,r,R,xi,eta,A).^2,0,Inf)=1
r=[linspace(0,R,200),linspace(R,25)];%fm
u=U(0,r,R,xi,eta,A);%fm-1/2 u(r)

%Radio cuadrático medio
rcm=sqrt(integral(@(r) r.^2.*U(0,r,R,xi,eta,A).^2,0,Inf));%fm
%Gráfico
figure (2)
plot(r,u);
xlabel('r (fm)', 'FontSize',13)
ylabel('u(r)', 'FontSize',13)
hold on
plot([R,R],[-0.5,0.5], ':', 'LineWidth',1.5)
plot([rcm,rcm],[-0.5,0.5], '--', 'LineWidth',0.75)
plot([0,25],[0,0], 'k')
legend({'u(r) (fm^{-1/2})', 'R', 'r_{cm}'}, 'FontSize',11)
hold off

```

## Primer estado excitado

```

clear; clc
%Constantes
M=12.607+10*931.494-4*0.511;%MeV/c2 Masa del 10Be
mu=1/(1/939.565+1/M);%MeV/c2 masa reducida
R=1.2*10^(1/3);%fm
E=-0.184;%MEV

%Obtención del potencial
eta=R*sqrt(-2*mu*E)/197.33;
fj=@(x) x.*jb(0,x)./jb(1,x);
fk=eta.*kb(0,eta)./kb(1,eta);
f=@(x) fj(x)+fk;
xi=fzero(f,[1,4]);%Solución de (2.14)
V1=-E*((xi/eta)^2+1);%MeV Profundidad del potencial
%Gráfico
X=linspace(0,4,200);
X1=linspace(5.3,7);
plot(X,fj(X),'b',[0,7.73],[-fk,-fk],'--r')
hold on
plot(xi,-fk,'xr','LineWidth',1,'MarkerSize',8)
plot(X1,fj(X1),'b')
xlabel('\xi','FontSize',14)
ylabel('\xi j_{0}(\xi)/j_{1}(\xi)','FontSize',13)
axis([0,7.73,-6,6])
legend({'\xi j_{0}(\xi)/j_{1}(\xi)', '-\eta_{0p} k_{0}(\eta_{0p})/k_{1}(\eta_{0p})', '( \xi_{0p} , \eta_{0p} )'}, 'Location','northwest','FontSize',11)
hold off

%Función de onda
A=sqrt(-2/(R^3*(1+(xi/eta)^2)*jb(0,xi)*jb(2,xi)));%fm-3/2 Cte de
normalización
%integral(@(r) U(1,r,R,xi,eta,A).^2,0,Inf)=1;
r=[linspace(0,R),linspace(R,25)];%fm
u=U(1,r,R,xi,eta,A);%fm-1/2
figure(2)
rcm=sqrt(integral(@(r) r.^2.*U(1,r,R,xi,eta,A).^2,0,Inf));%fm
plot(r,u);
xlabel('r (fm)','FontSize',13)
ylabel('u(r)','FontSize',13)
hold on
plot([R,R],[0,0.6],':','LineWidth',1.5)
plot([rcm,rcm],[0,0.6],'--','LineWidth',0.75)
legend({'u(r) (fm^{-1/2})', 'R', 'r' '_{cm}'}, 'FontSize',11)
hold off

%Transición
B=B(xi,eta,A,0.5);%e2*fm2

```

## Estado prohibido $0p_{3/2}$

```

clear; clc
%Constantes
M=12.607+10*931.494-4*0.511;%MeV/c2 Masa del 10Be
mu=1/(1/939.565+1/M);%MeV/c2 Masa reducida
R=1.2*10^(1/3);%fm
E=-10;%MEV
%Obtención del potencial
eta=R*sqrt(-2*mu*E)/197.33;
fj=@(x) x.*jb(0,x)./jb(1,x);
fk=eta.*kb(0,eta)./kb(1,eta);
f=@(x) fj(x)+fk;
xi=fzero(f,[1,4]);%Solución de (2.14)
V1=-E*((xi/eta)^2+1);%MeV Profundidad del potencial
%Gráfico
X=linspace(0,4,200);
X1=linspace(5.3,7);
figure (1)
plot(X,fj(X), 'b', [0,7.73],[-fk,-fk], '--r')
hold on
plot(xi,-fk, 'xr', 'LineWidth',1, 'MarkerSize',8)
plot(X1,fj(X1), 'b')
xlabel('\xi', 'FontSize',14)
ylabel('\xi j_{0}(\xi)/j_{1}(\xi)', 'FontSize',13)
axis([0,7.73,-6,6])
legend({'\xi j_{0}(\xi)/j_{1}(\xi)', '-\eta_{0p} k_{0}(\eta_{0p})/k_{1}(\eta_{0p})', '( \xi_{0p} , \eta_{0p} )'}, 'Location', 'northwest', 'FontSize',11)
hold off

%Función de onda
A=sqrt(-2/(R^3*(1+(xi/eta)^2)*jb(0,xi)*jb(2,xi)));%fm-3/2 Cte de
normalización
%A=(integral(@(r) U(1,r,R,xi,eta,A).^2,0,Inf))=1;
r=[linspace(0,R,200),linspace(R,25)];%fm
u=U(1,r,R,xi,eta,A);%fm-1/2
rcm=sqrt(integral(@(r) r.^2.*U(1,r,R,xi,eta,A).^2,0,Inf));%fm

%Gráfico
figure (2)
plot(r,u);
xlabel('r (fm)', 'FontSize',13)
ylabel('u(r) (fm^{-1/2})', 'FontSize',13)
hold on
plot([R,R],[0,0.8], ':', 'LineWidth',1.5)
plot([rcm,rcm],[0,0.8], '--', 'LineWidth',0.75)
legend({'u(r)', 'R', 'r' ' ' '_{cm}'}, 'FontSize',11)
hold off

%Transición
B=B(xi,eta,A,1.5);%e2*fm2

```

## Estados del continuo

```

clear; close all; clc

%Constantes
M=12.607+10*931.494-4*0.511;%MeV/c2 Masa del 10Be
mu=1/(1/939.565+1/M);%MeV/c2 Masa reducida
R=1.2*10^(1/3);%fm
V=[34.1620;49.9845];%MeV Profundidad del potencial
l=1;

%Energía
E=0:0.05:5;%MEV
eta=R*sqrt(2*mu*E)/197.33;
xi=R*sqrt(2*mu*(E+V))/197.33;
%Desfase
dl=pi-atan((-1)^l*(xi.*jb(l-1,xi).*jb(l,eta)-
eta.*jb(l,xi).*jb(l-1,eta))./...
(xi.*jb(l-1,xi).*jb(-(l+1),eta)+eta.*jb(l,xi).*jb(-l,eta)));
dl(1:2)=pi;

%Función de Onda
r=[linspace(0,R),linspace(R,40,1e3)];
u1=Uc(l,r,R,xi(1,:),eta,dl(1,:));
u2=Uc(l,r,R,xi(2,:),eta,dl(2,:));

%representación de fase
figure (1)
plot(E,dl(1,:)*180/pi,E,dl(2,:)*180/pi,'--')
xlabel('E (MeV)', 'FontSize',14)
ylabel('\delta_l ( ^o )', 'FontSize',14)
legend({'p_{1/2}', 'p_{3/2}'}, 'FontSize',11)

%representación de funciones de onda
for j=2:3
    figure (j)
    cla reset
    hold on
    if j==2
        title('p_{1/2}', 'FontSize',14)
        u=u1;
    else
        title('p_{3/2}', 'FontSize',14)
        u=u2;
    end
    plot(r,u(11,:))
    plot(r,u(50,:), ':', 'LineWidth',1.75)
    plot(r,u(101,:), '--', 'LineWidth',0.75)
    xlabel('r (fm)', 'FontSize',14)
    ylabel('u(r)', 'FontSize',14)
    legend({'E=0,5 MeV', 'E=2,5 MeV', 'E=5 MeV'}, 'Location', 'northwest', 'FontSize',11)
    box on
    hold off
end

```

## Probabilidad de transición al continuo

```

clear;clc;
%potencial y energía
V=[34.1620;49.9845];%MeV      profundidad
E=0:0.01:5;
%dB
dB1=dB(E,V(1),0.5);%e2fm2/MeV    p1/2
dB2=dB(E,V(2),1.5);%e2fm2/MeV    p3/2
dB=dB1+dB2; %e^2fm^2/MeV    Suma
%Representación
plot(E,dB1,':r','LineWidth',1.5)
hold on
plot(E,dB2,'--b',E,dB,'k','LineWidth',0.75)
%Datos experimentales
load bel_pal.dat -ascii
load bel_fuk.dat -ascii
errorbar(bel_pal(:,1),bel_pal(:,2),bel_pal(:,3),'sk','MarkerFaceColor','y')
errorbar(bel_fuk(:,1),bel_fuk(:,2),bel_fuk(:,3),'ok','MarkerFaceColor','c')
axis([0,4,0,0.9])
xlabel('E (MeV)','FontSize',13)
ylabel('dB(E1)/dE (e^2fm^2/MeV)','FontSize',13)
legend({'p_{1/2}','p_{3/2}','Suma','Palit','Fukuda'},'FontSize',11)
hold off

```

## Regla de suma

```

clear; clc
%Regla Suma
M=12.607+10*931.494-4*0.511;
Zeff=-4/(M/939.565+1); %carga efectiva
B1=34.212004558599880*(Zeff)^2/(4*pi);%e2fm2    p1/2
B2=2*B1;%e2*fm2    p3/2

%Continuo
V=[34.1620;49.9845];%MeV      profundidad
dB1=@(E) dB(E,V(1),0.5);%e2fm2/MeV    p1/2
dB2=@(E) dB(E,V(2),1.5);%e2fm2/MeV    p3/2
B1C=integral(dB1,0,200,'ArrayValued',true);
B2C=integral(dB2,0,200,'ArrayValued',true);

%Suma
B1S=B1C+0.1621;%e2fm2    p1/2
B2S=B2C+0.0493;%e2fm2    p3/2

```