

Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

**Un programa MATLAB para el estudio
de la convección natural con flujo de
calor impuesto: casos de conducción y de
radiación**

Autor: Antonio Galán Villamor

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

Dpto. Ingeniería aeroespacial y mecánica de fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2021



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

**Un programa MATLAB para el estudio de la
convección natural con flujo de calor impuesto:
casos de conducción y de radiación**

Autor:

Antonio Galán Villamor

Tutor:

Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

Profesor Titular

Dpto. Ingeniería aeroespacial y mecánica de fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2021

Trabajo Fin de Grado: **Un programa MATLAB para el estudio de la convección natural con flujo de calor impuesto: casos de conducción y de radiación**

Autor: Antonio Galán Villamor
Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:

Agradecimientos

En estos últimos años, los cuales he dedicado en gran medida a este grado, he aprendido como no lo había hecho antes, y he conocido no a muchas, pero sí a muy buenas personas. Gente que viene y se va, otros que vienen para quedarse, es lo mismo, a todos ellos les estoy agradecido por lo que me aportaron y por lo que me aportan a día de hoy. Sin ellos sin duda no sería quien soy.

Por otro lado, también quiero agradecer su apoyo incondicional a los que siempre han estado ahí, a mi familia. Aunque rara vez pida expresamente ayuda, el mero hecho de saber que la puedo recibir siempre que la necesite es más que suficiente. De la misma forma, ellos saben que me tienen ahí para lo que haga falta.

Finalmente, si eres un estudiante y estás leyendo esto, te daré un consejo. Aprovecha tus años de estudiante porque sólo los vas a vivir una vez; es importante estudiar y aprobar asignaturas, pero el aprendizaje que puedes obtener durante este periodo va mucho más allá de lo meramente académico. No tengas miedo a cometer locuras, a arriesgarte, a equivocarte y volver a levantarte, eso es la vida, y sin eso, ¿qué sentido tendría?

Antonio Galán Villamor
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Sevilla, 2021

Resumen

En el presente trabajo realizaremos un estudio numérico del fenómeno de convección natural de Rayleigh-Bénard. Dicho estudio está motivado por ciertas observaciones realizadas del Sol, de las cuales se deduce que dicho fenómeno es una realidad en la zona convectiva solar, y cuyo análisis está aún en su fase primigenia. A modo de introducción, se explicará dicho fenómeno y las causas que lo motivan, así como las leyes que rigen su comportamiento.

El caso objeto de análisis, sin embargo, será una reducción simplificada de este problema real, con el objetivo de simular la realidad existente en la zona convectiva del Sol y obtener conclusiones interesantes.

Partiendo de las ecuaciones de Navier-Stockes, llegaremos al planteamiento del problema y su posterior resolución. Analizaremos dos casos diferentes: Primeramente, tomaremos un recinto rectangular al que se le aplicará, desde su base, un flujo de calor constante. Posteriormente, el análisis se centrará en el mismo recinto, pero en este caso estudiaremos la influencia de la imposición de un flujo de calor por radiación en el sistema.

Dichas líneas de estudio se realizarán con el programa de cálculo numérico MATLAB, el cual nos permitirá mostrar simulaciones del fenómeno y obtener valores característicos de determinadas variables.

Finalmente, se hará un resumen de las conclusiones recogidas y se abrirán nuevas líneas de trabajo para proyectos futuros.

Abstract

In this project we will accomplish a numeric study of the phenomenon known as Rayleigh-Bénard natural convection. This study is motivated by certain observations of the Sun from which we deduce that these phenomenon is a reality in the solar convective zone and its analysis is still in his initial phase. As an introduction, we will explain this phenomenon and its causes, and also the laws that rule its behaviour.

Nevertheless, the case we are going to analyse is a simplified reduction of the real problem, since our objective is to simulate the reality of the solar convective zone and obtain interesting conclusions.

On the basis of the Navier-Stockes equations, we will reach the setup of the problem and its subsequent resolution. Two different cases will be addressed: Firstly, a rectangular enclosure will be taken into account and a constant heat flux will be applied on its lower surface. Afterwards, the analysis will focus on the same enclosure, but in this case the effect of an imposed radiation flux in the system will be the subject of study.

These lines of analysis will be carried out in terms of numeric calculus with MATLAB program, which will let us show simulations of the phenomenon and obtain characteristic values of certain variables.

Finally, we will make a resume of the conclusions we obtain and new lines of study will be opened for future projects.

Índice

| | |
|---|-----------|
| <i>Resumen</i> | III |
| <i>Abstract</i> | V |
| 1 Introducción | 1 |
| 1.1 Objetivo | 1 |
| 1.2 Convección natural de Rayleigh-Bénard | 2 |
| 1.3 Antecedentes y trabajos previos | 6 |
| 1.4 Estructura del proyecto | 7 |
| 2 Formulación del problema | 9 |
| 2.1 Conducción | 9 |
| 2.1.1 Hipótesis y aproximaciones | 10 |
| 2.1.2 Convección de Rayleigh-Bénard en 2D. Las ecuaciones de Saltzman | 12 |
| 2.2 Radiación | 15 |
| 2.2.1 Aproximación optically thick | 16 |
| 2.2.2 Flujo radiactivo | 18 |
| 2.2.3 Desarrollo de las ecuaciones de Saltzman 2D. Problema de radiación pura | 21 |
| 3 Método numérico | 25 |
| 3.1 Conducción | 25 |
| 3.1.1 Método de diferencias finitas | 25 |
| 3.1.2 Distribución de temperatura hidrostática | 29 |
| 3.1.3 Implementación de las ecuaciones de Saltzman | 30 |
| 3.1.4 Condiciones iniciales y de contorno | 33 |
| 3.2 Radiación | 37 |
| 3.2.1 Distribución de temperatura hidrostática | 37 |
| 3.2.2 Implementación de las ecuaciones de Saltzman | 39 |
| 3.2.3 Condiciones iniciales y de contorno | 42 |
| 4 Resultados numéricos. Caso de flujo de calor por conducción | 45 |
| 4.1 Rayleigh crítico | 46 |
| 4.1.1 Método de obtención del Rayleigh crítico | 46 |
| 4.1.2 Resultado | 50 |
| 4.2 Relación de aspecto y Rayleigh crítico | 51 |
| 4.3 Número de células convectivas | 53 |

| | | |
|-------------------|---|-----------|
| 4.3.1 | Número de células y relación de aspecto | 53 |
| 4.3.2 | Número de células y Rayleigh | 55 |
| 4.4 | Número de Nusselt | 56 |
| 4.4.1 | Tiempo estacionario | 62 |
| 4.5 | Número de Prandtl | 65 |
| 4.6 | Análisis del mecanismo de transferencia de calor | 68 |
| 4.6.1 | Temperatura media | 69 |
| 4.6.2 | Flujos de calor | 71 |
| 5 | Resultados numéricos. Caso de flujo de calor por radiación | 75 |
| 5.1 | Rayleigh crítico | 76 |
| 5.1.1 | Método de obtención del Rayleigh crítico | 76 |
| 5.1.2 | Resultado | 78 |
| 5.2 | Relación de aspecto y Rayleigh crítico | 79 |
| 5.3 | Número de células convectivas | 80 |
| 5.4 | Número de Nusselt | 81 |
| 5.4.1 | Tiempo estacionario | 86 |
| 5.5 | Análisis del mecanismo de transferencia de calor | 87 |
| 5.5.1 | Temperatura media | 88 |
| 5.5.2 | Flujos de calor | 89 |
| 6 | Conclusiones y líneas futuras | 91 |
| Apéndice A | Códigos MATLAB empleados | 93 |
| A.1 | Método de diferencias finitas | 93 |
| A.2 | Flujo de calor por conducción | 94 |
| A.3 | Flujo de calor por radiación | 100 |
| | <i>Índice de Figuras</i> | 107 |
| | <i>Bibliografía</i> | 109 |

1 Introducción

1.1 Objetivo

El presente trabajo consiste en el análisis numérico del fenómeno de convección de Rayleigh-Bénard, en un modelo simplificado de la zona convectiva del Sol.

La estructura del Sol ha sido ampliamente estudiada en las últimas décadas, gracias en gran medida a las observaciones que han hecho de él los diferentes satélites que han sido enviados al espacio con este objetivo. En base a estas observaciones y datos recogidos, científicos como Dermott Mullan en su trabajo *Physics of the Sun: A First Course* han determinado la existencia en el manto solar de una zona convectiva donde, debido a las condiciones de densidad y temperatura y a la acción del campo gravitatorio solar, se forman una serie de células de convección. Como indica Mullan, la presencia de estas células es lo que provoca la existencia de una serie de patrones observables en la superficie solar.

En este proyecto, nuestro objetivo radica en analizar cómo se desarrolla el problema de convección en el Sol, caracterizarlo, y obtener resultados de interés que poder comparar con la literatura. Analizando el problema numéricamente, mediante la implementación de las ecuaciones de Navier-Stokes que describen el movimiento de un fluido viscoso, obtenemos resultados que pueden ser comparados con otros obtenidos del análisis experimental del proceso. Con ello, se comprueba cómo teoría y práctica están relacionadas mediante la lógica, y nos permite dar legitimidad a los resultados teóricos obtenidos por los científicos.

El problema que analizamos tiene el interés de no haber sido tan extensamente estudiado como el caso de temperatura impuesta en las placas superior e inferior, lo que conforma el problema clásico de convección de Rayleigh-Bénard. Los términos de radiación y convección introducen no linealidad en el problema, de la misma forma que el análisis para $Ra \gg Ra_c$, y se empleará un método de diferencias finitas basado en los interpolantes de Lagrange. Con todo ello, analizaremos el sistema desde distintos puntos de vista: Rayleigh crítico, número de células convectivas, número de Nusselt, tiempo transcurrido hasta el régimen estacionario, flujos de calor, etc.

Finalmente, este trabajo también sirve para mostrar la potencia que tiene el análisis numérico de este tipo de problemas en el ámbito académico. Hace décadas, los alumnos tenían que conformarse con observar una serie de ecuaciones que nunca llegarían a resolver por su complejidad, mientras que hoy día el alumnado de las diferentes escuelas de ingeniería gozan de una amplia gama de herramientas que pueden emplear para hallar soluciones a problemas extremadamente complejos, y así comprender mejor el alcance de los resultados teóricos que estudian. Gracias a los avances informáticos, en asignaturas como Mecánica de Fluidos (y muchas otras), la relación entre

teoría y práctica es más visible que nunca para los alumnos. Mediante este proyecto, se demuestra la potencia que tienen estas herramientas en la enseñanza universitaria y, particularmente, en las escuelas de ingenieros.

1.2 Convección natural de Rayleigh-Bénard

En cuanto a este concepto cabe aclarar varios puntos; primeramente, se trata de un fenómeno de convección, es decir, un mecanismo de transferencia de calor donde ésta se produce en el seno de un fluido por el movimiento de capas a distintas temperaturas. Seguidamente, vemos que se trata de un fenómeno natural, es decir, que se produce sin la intervención de mecanismos artificiales externos tales como bombas o ventiladores. Finalmente, los científicos que le dan el nombre a este tipo de convección natural fueron quienes la estudiaron a fondo a través de sus experimentos, y de los cuales se hablará en detalle más adelante.

Antes de entrar en materia podemos (y deberíamos) hacernos la siguiente pregunta: ¿Qué es lo que provoca este fenómeno? Para responder a esta pregunta, debemos determinar cuál es el motor del movimiento, el cual caracteriza a este mecanismo de transferencia de calor. La respuesta se encuentra en un desequilibrio de fuerzas. Dicho desequilibrio puede darse en fluidos con carga eléctrica al estar sometidos a un campo magnético o eléctrico. Sin embargo, el caso más común (y el que nos concierne) es el desequilibrio de fuerzas gravitatorias; cuando la distribución de densidad de un fluido difiere de aquella asociada al régimen hidrostático (densidad constante en planos perpendiculares a la dirección de la gravedad), esto produce un desequilibrio en dichas fuerzas, lo cual genera un movimiento relativo en el seno del propio fluido. Por tanto, y como se deduce de estas líneas, el mecanismo de convección natural que vamos a estudiar se dará en fluidos que estén inmersos en un campo gravitatorio, y cuya densidad difiera de la relacionada al régimen hidrostático. Dado el caso de la zona convectiva solar, en el cual se centra nuestro estudio, podemos concluir que la primera premisa se cumple. Por otro lado, podemos ahora hacernos una segunda pregunta sobre qué es lo que produce las variaciones de densidad mencionadas. Desde un punto de vista genérico, dichas variaciones pueden estar producidas por varios motivos, como por ejemplo diferencias de concentración (soluciones). Sin embargo, en nuestro estudio nos centraremos en el caso relativo al Sol, en el cual estos gradientes de densidad vienen producidas por diferencias de temperatura. De hecho, las variaciones de temperatura en el manto solar son inmensas, yendo desde millones de grados Kelvin en la superficie del núcleo solar, hasta el orden de diez mil grados en la superficie superior. A ello hay que sumarle el efecto del flujo de calor incidente en la superficie interior, proveniente del núcleo.

A modo de ejemplo, vemos cómo este fenómeno se da de igual forma en nuestro planeta, donde las condiciones citadas se cumplen de igual forma; dicho fenómeno, al igual que se da en el manto del Sol, también es una realidad en el propio manto de la Tierra. Por otro lado, observamos en nuestra atmósfera las células de convección denominadas de Hadley (en el entorno del ecuador y responsable de los vientos alisios), de Ferrell (latitudes medias) y Polar. Ambos ejemplos pueden ser visualizados mediante las siguientes imágenes.

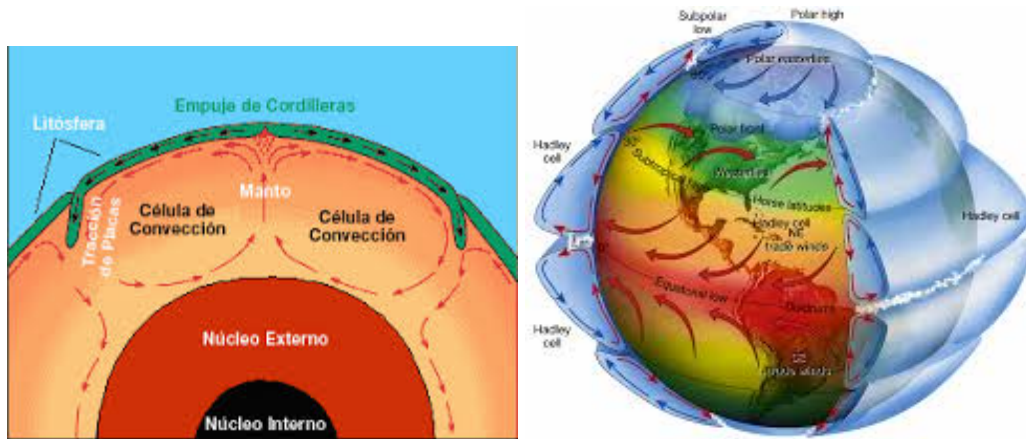


Figura 1.1 Ejemplos de convección de Rayleigh-Bénard por gradiente de temperaturas.

Por otro lado, el fenómeno de convección natural de Rayleigh-Bénard, tal como indicamos anteriormente, también puede estar provocado por gradientes de concentración (que a su vez producen variaciones de densidad) en el seno de un fluido heterogéneo. Tal es el caso que vemos en la imagen 1.2 que mostramos a continuación.



Figura 1.2 Celdas formadas en el salar de Uyuni, Bolivia.

Este fenómeno se observa en salinas donde, por evaporación, la sal queda en la superficie formando estas celdas hexagonales que, como veremos más adelante con el análisis de los estudios de Lord Rayleigh y Henri Bénard, son un efecto debido al movimiento de convección.

Finalmente, y como último ejemplo, vemos que el fenómeno de convección también es empleado en el ámbito industrial e ingenieril. Así ocurre, de hecho, en las aplicaciones de la convección natural en la ventilación, calefacción y aislamiento de edificios, en la refrigeración de equipos electrónicos, cámaras de aire, etc.

Históricamente, el punto de partida del estudio del fenómeno de convección natural se halla a comienzos del siglo XX, época en la que el físico francés Henri Claude Bénard (1874 - 1939) llevó a cabo una serie de experimentos sobre el tema. En particular, destaca el experimento consistente en delgadas capas de grasa de ballena (alta conductividad térmica) calentadas desde abajo, con la superficie superior en contacto con el aire ambiental. Dadas estas condiciones, Bénard pudo apreciar la formación de celdas hexagonales regulares en la superficie superior, dándose un caso similar al de un panal de abejas (figura 1.3). A continuación, observó que la formación de dicho patrón regular se debía a un movimiento en forma de células convectivas, el cual, tras un periodo transitorio de corta duración, alcanzaba un régimen estacionario. Sus investigaciones revelaron que el fluido ascendía por el centro de las celdas hexagonales, y se sumergía a lo largo de su perímetro, tal y como se observa en la figura 1.3. Otras mediciones de mayor precisión permitieron observar una pequeña depresión en el centro de la celda hexagonal, cuya formación se debía, según investigaciones de Bénard, a la tensión superficial de la película de fluido en contacto con el aire del ambiente. Por otro lado, el físico francés estableció como tamaño característico de la celda la distancia media entre los centros de dos celdas vecinas (la cual designó como λ), y determinó la dependencia de esta variable respecto a ciertos parámetros como la profundidad de la capa de fluido (relación de aspecto), el flujo de calor, o la diferencia de temperatura entre las superficies inferior y superior.

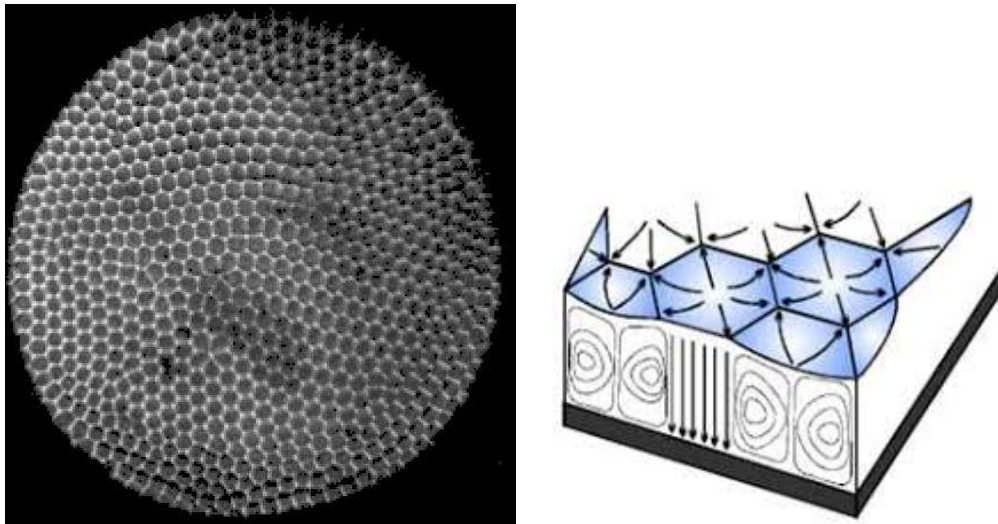


Figura 1.3 Resultados del experimento de Henri C. Bénard.

Puede observarse un gran parecido entre los resultados obtenidos del experimento de Bénard y el caso mostrado anteriormente del salar de Uyuni (figura 1.2), donde la convección se produce por gradientes de densidad derivados de diferencias de concentración. Aunque en el experimento de Bénard dicho gradiente de densidad se produzca por variaciones de temperatura, vemos que los resultados finales son análogos.

Tras los descubrimientos de Bénard, que constituyeron principalmente una aproximación cualitativa al fenómeno de convección natural, entró en escena Lord Rayleigh (1842 - 1919) con su trabajo *On Convection Currents in a Horizontal Layer of Fluid, When the Higher Temperature Is Under Side*. En este artículo Rayleigh pone de manifiesto por primera vez en la historia los mecanismos físicos que intervienen en el fenómeno de convección natural. De hecho, cuando un fluido cuya distribución de densidades difiere del caso hidrostático se encuentra inmerso en un campo gravitatorio, la fuerza gravitatoria será más intensa en unas regiones (las de mayor densidad)

que en otras, dándose en las zonas menos densas el fenómeno conocido como *fuerza de flotabilidad* o *empuje de Arquímedes*, el cual tiende a provocar que el fluido denso se hunda mientras las regiones con menor densidad asciendan a la superficie. Sin embargo, a dicha fuerza se contraponen los efectos de la fricción (ocasionada por las *fuerzas de fricción*) y de la *conducción de calor*, la cual tiende a homogeneizar el campo de temperaturas en el seno del fluido, y por tanto, el campo de densidades (observamos dichos efectos en la imagen 1.5).

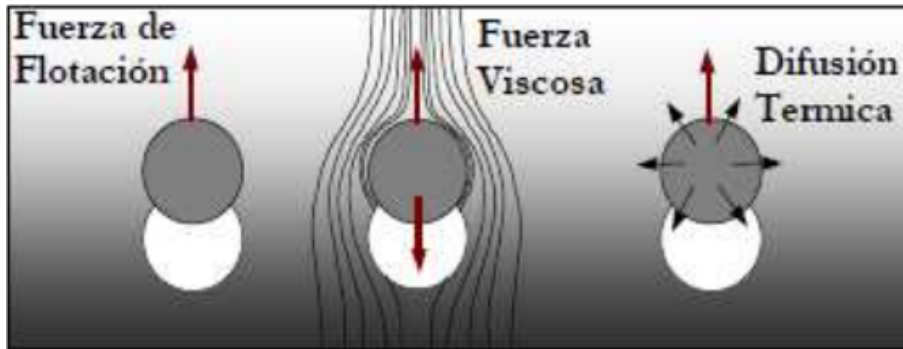


Figura 1.4 Mecanismos físicos en el seno del fluido.

En sus estudios, Rayleigh tomó una capa de fluido dispuesta entre dos placas infinitas en posición horizontal, estando la placa inferior a mayor temperatura que la superior. Su objetivo era el estudio de la evolución de las perturbaciones en función de diversos parámetros, por lo que linealizó las ecuaciones de Navier-Stokes que gobiernan el movimiento del fluido entorno al estado hidrostático (situación de equilibrio estático), de forma que aparece de forma natural el parámetro adimensional que llamó *número de Rayleigh*:

$$Ra = \frac{gH^3\beta\Delta T}{\nu\alpha}$$

En esta expresión observamos los siguientes parámetros:

- g : aceleración de la gravedad
- H : espesor de la capa fluida (longitud característica del dominio del fluido)
- β : coeficiente de dilatación térmica
- ΔT : diferencia de temperatura entre las placas inferior y superior
- ν : coeficiente de viscosidad cinemática
- α : coeficiente de difusividad térmica

Básicamente, el número de Rayleigh (en adelante, Ra) representa la relación existente entre los efectos de las fuerzas de flotabilidad, por un lado, y los efectos de las fuerzas de viscosidad y de conducción térmica, por otro. En función del valor que tomara dicho parámetro podían darse dos situaciones cuando el sistema llegaba al régimen estacionario; para valores altos de Ra , caso en que las fuerzas de flotabilidad tienen preponderancia frente a los otros efectos, se alcanzaba un régimen de equilibrio inestable, formándose las celdas hexagonales un día analizadas por Bénard, es decir, se alcanzaba un régimen caracterizado por la convección natural del fluido. Por otro lado, para valores pequeños de Ra , el caso es justamente el opuesto, y al imponerse los efectos de la fricción y la conductividad térmica, se llegaba a un régimen de equilibrio estable, es decir, el fluido permanecía en reposo y no se daba, en este caso, la convección.

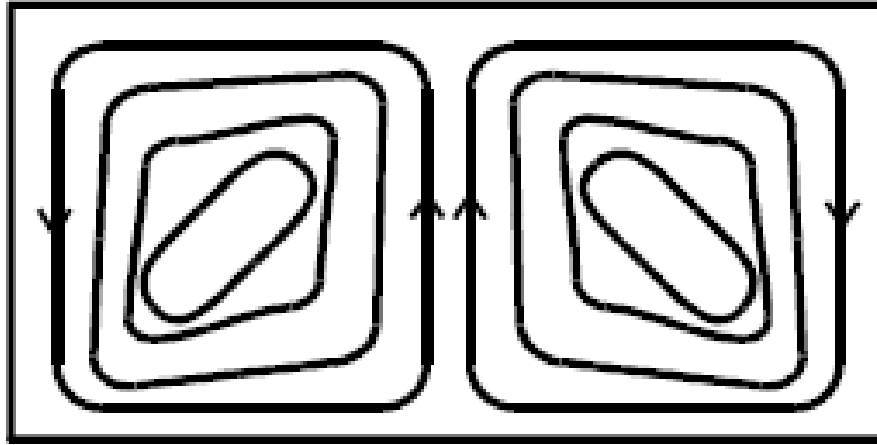


Figura 1.5 Esquemización de las celdas convectivas observadas en el experimento de Lord Rayleigh.

En base al resultado obtenido, Rayleigh descubrió la existencia de un valor característico del Ra , al que denominó número de Rayleigh crítico (Ra_c). Dicho valor tiene la peculiaridad de que, para valores del número de Rayleigh que cumplan $Ra > Ra_c$, se da el régimen convectivo en el seno del fluido, mientras que para $Ra < Ra_c$, sucedía lo contrario y se alcanzaba el régimen hidrostático.

1.3 Antecedentes y trabajos previos

Numerosos han sido los trabajos que han tratado de encontrar, al igual que hizo Lord Rayleigh en su día, el valor crítico del Ra en función del sistema considerado (tipo de fluido, condiciones de contorno, etc.). Por ejemplo, tenemos a Jeffreys (1926), quien determinó el Ra_c para el caso de placas planas e infinitas considerado por Rayleigh (en este sistema, obtuvo $Ra_c = 1708$). Por otro lado tenemos a Davis (1967), Catton (1970, 1972), Heitz y Westwater (1971) y Stork y Müller (1972), quienes estudiaron el valor de dicha variable para diferentes geometrías y condiciones de contorno del sistema. Por otro lado, cabe destacar asimismo el trabajo de Batchelor (1954), quien consideró un recinto rectangular de dimensiones $L \times H$, y analizó la evolución del estado del fluido en función de parámetros como la relación de aspecto, $AR = L/H$, el número de Prandtl, $Pr = \nu/\alpha$, que caracteriza al fluido, y el propio número de Rayleigh, Ra . De hecho, dicho trabajo de Batchelor se asemeja a lo que realizaremos a lo largo de este trabajo. En cuanto a trabajos más recientes, tenemos *Internally Heated Convection and Rayleigh-Bénard Convection* de David Goluskin (2016), donde el autor analiza, entre otros, uno de los casos que nos conciernen en el presente trabajo, el de un recinto rectangular al que se le aplica una fuente de calor en la superficie inferior del mismo. Utilizaremos dicho trabajo para comparar los resultados experimentales (Goluskin) con los nuestros, obtenidos mediante el cálculo numérico de la aplicación directa de las ecuaciones de Navier-Stokes. Finalmente, se ha visto últimamente cómo el análisis del régimen turbulento, el cual se obtiene para valores extremadamente altos del número de Rayleigh ($Ra \sim 10^5$), ha suscitado el interés de la comunidad científica, tal y como se observa en las investigaciones de D. Lohse publicadas en la revista *Annual Review of Fluid Mechanics* en el año 2010, bajo el nombre del artículo *Small-Scale Properties of Turbulent Rayleigh-Bénard Convection*.

Por otro lado, también han sido varios los trabajos realizados en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sevilla sobre el fenómeno de convección de Rayleigh-Bénard, y son éstos proyectos los que han permitido en cierto modo que este trabajo salga a la luz. Principalmente, los dos trabajos que más lo han influido han sido *El método de colocación para el problema de convección de*

Rayleigh-Bénard de Pablo Ruiz Contreras, y *Estudio numérico de problemas de convección de Rayleigh-Bénard en presencia de radiación* de Krishna Laxman Jamnani Jamnani.

De un lado, el primero de estos proyectos nos ha proporcionado el método de colocación que empleamos para resolver el sistema de ecuaciones que constituyen las ecuaciones de Saltzman, ecuaciones que permiten obtener el campo de temperaturas y la función de corriente en todo el dominio fluido. Sin embargo, este sistema nos proporciona el resultado para una infinidad de puntos, y al ser resuelto numéricamente (en vez de analíticamente), es imposible obtener la solución de estas ecuaciones en todo el dominio. Debido a ello, empleamos el método de colocación, mediante el cual se halla la solución de este sistema solamente en un número finito de puntos, y la solución en los demás puntos del dominio se obtiene por interpolación de las soluciones calculadas.

Por otro lado, el trabajo de Krishna ha sido de gran utilidad, ya que él fue capaz de resolver numéricamente las ecuaciones de Saltzman para un sistema diferente con otras condiciones de contorno, y el estudio de sus métodos e implementación han proporcionado un punto de partida sobre el que se han podido hacer mejoras y se ha logrado optimizar el proceso de obtención de resultados. Sin una base como esa, seguramente la calidad del proyecto se habría visto afectada.

1.4 Estructura del proyecto

En este trabajo se va a realizar un estudio teórico y numérico del fenómeno de convección de Rayleigh-Bénard en dos sistemas diferentes, los cuales pretenden ser una aproximación teórica a las condiciones propias de la zona convectiva del Sol, de modo que se pueda analizar el efecto de diferentes parámetros sobre la evolución del mismo. Por un lado se analizará el caso de conducción de calor, y por otro lado, el de radiación pura. La naturaleza del flujo de calor en ambos casos será totalmente distinto, por lo que veremos a su vez el efecto que esto tiene en el sistema.

Obviando el primer capítulo que acabamos de ver, en el segundo se tiene la Formulación del Problema. En él realizamos el desarrollo de las ecuaciones completas de Navier-Stokes para obtener finalmente las ecuaciones de Saltzman, las cuales conforman el sistema de ecuaciones que resolveremos más adelante. Asimismo, también analizamos las condiciones iniciales y de contorno a las cuales está sujeta la solución del problema. En este capítulo distinguiremos claramente el caso de conducción, por un lado, del caso radiactivo, por otro, aunque los resultados de este capítulo para ambos casos son similares.

A continuación, en el tercer capítulo analizaremos el método numérico empleado para implementar los resultados del segundo capítulo (ecuaciones de Saltzman y condiciones iniciales y de contorno) en nuestro código de MATLAB, y así resolver el problema numéricamente. En este capítulo, en el cual también hacemos distinción entre los casos conductivo y radiactivo, se analizarán los métodos numéricos empleados tales como el método de diferencias finitas, la implementación del sistema de ecuaciones o la aplicación de las condiciones de contorno.

Los capítulos cuarto y quinto se dedicarán a la exposición de los resultados numéricos obtenidos. El cuarto se corresponde con los resultados del primer caso, esto es, el caso de conducción de calor, y en el quinto se muestran los resultados relacionados con el caso de radiación pura de calor. En estos capítulos analizamos la influencia que tienen sobre el sistema determinados parámetros como el número de Rayleigh, el número de Prandtl, el espesor óptico del medio, etc. De esta forma caracterizaremos el sistema y determinaremos cuáles son los parámetros que influyen en su desarrollo, y de qué forma lo hacen.

Finalmente, en el sexto y último capítulo sacaremos las conclusiones del proyecto y abriremos nuevas líneas de investigación que podrán seguirse a partir del presente trabajo.

2 Formulación del problema

Tal y como se ha comentado, nuestro estudio pretende analizar el fenómeno de convección de Rayleigh-Bénard en la zona convectiva del manto solar. Para ello, analizaremos primero el caso de conducción de calor, y posteriormente el de radiación.

2.1 Conducción

En primer lugar tomaremos un recinto prismático de sección rectangular como el que se observa en la figura 2.1. Dicho recinto, de dimensiones L , B , H , en las direcciones x , y , z , respectivamente, se encuentra sometido a la acción de un campo gravitatorio constante. La temperatura de la superficie superior, T_2 , vendrá dada por la aproximación *optically thick*, de la cual hablaremos más adelante, y en toda la base del recinto se aplica uniformemente un flujo de calor por conducción, F .

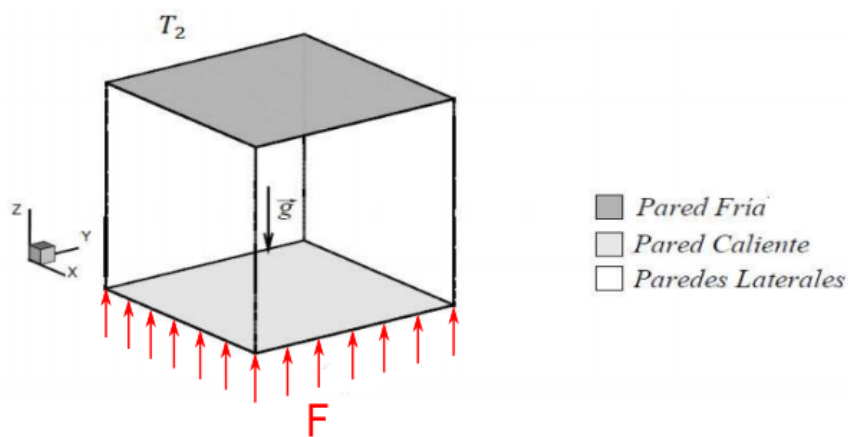


Figura 2.1 Representación del recinto que aloja al fluido.

Este recinto de estudio pretende ser una aproximación de una sección concreta de la región convectiva del manto solar; de esta forma, la base del mismo representaría la superficie del núcleo solar, desde el cual incide un flujo de calor por conducción. La superficie superior del recinto sería la superficie del Sol, y su temperatura vendría determinada por la hipótesis de suponer a dicha estrella como un cuerpo negro. Evidentemente, el recinto descrito contiene en su interior un fluido representativo del plasma propio de la zona convectiva solar, y las paredes de dicho recinto se suponen impermeables.

2.1.1 Hipótesis y aproximaciones

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento del fluido en estas condiciones son las conocidas ecuaciones de Navier-Stokes completas para un fluido viscoso, compresible y conductor de calor. Sin embargo, dada la complejidad que supone la resolución de dicho sistema, es frecuente asumir determinadas hipótesis que permiten reducir esta complejidad y obtener un resultado, sujeto evidentemente a determinados errores y condiciones. Por ejemplo, en nuestro estudio supondremos que el valor de g permanece invariable en todo el recinto, a pesar de que las variaciones en el caso real a lo largo de la región convectiva del Sol resultan notables. Por otro lado, asumiremos la *aproximación de Boussinesq*, ampliamente utilizada en este tipo de análisis. La condición en la que se basa esta aproximación es que las variaciones relativas de densidad en el volumen de control sean pequeñas. Esto, evidentemente, no se cumple en la zona convectiva del Sol; de hecho, según los datos proporcionados por el modelo solar simplificado realizado por Dermott J. Mullan en *Physics of the Sun*, se tendría que en la base de dicha zona convectiva, en la superficie del núcleo solar, la densidad media es $\rho_1 = 2.22e - 1 g/cm^3$, frente a la densidad en la superficie superior de $\rho_2 = 1.14e - 6 g/cm^3$. Vemos que por tanto la variación de densidad real es más que significativa. Sin embargo, dado el alcance buscado en este proyecto, daremos por válida dicha hipótesis, asumiendo variaciones relativas de densidad pequeñas en el recinto descrito.

Continuando con el desarrollo de la *aproximación de Boussinesq*, partiremos de la ecuación de estado del fluido $\rho = \rho(p, T)$. Tomando el desarrollo en serie de Taylor de dicha función obtenemos lo siguiente:

$$\rho = \rho(p_0, T_0) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p_0, T_0} (T - T_0) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{p_0, T_0} (p - p_0) \quad (2.1)$$

Donde p_0 , T_0 y $\rho_0 = \rho(p_0, T_0)$ son los valores de referencia característicos del problema respecto de los cuales las variaciones son relativamente pequeñas (correspondientes al caso de equilibrio hidrostático). A continuación, tomando las expresiones de los coeficientes de expansión térmica, β , y de compresibilidad, κ , dicha expresión puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = -\beta(T - T_0) + \kappa(p - p_0) \quad (2.2)$$

En el caso de convección de Rayleigh-Bénard, puede demostrarse que la influencia de la presión en las variaciones de densidad es despreciable frente al efecto de las variaciones de temperatura; de esta forma, tendríamos que la expresión correspondiente para la densidad del fluido puede aproximarse como sigue

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \approx -\beta(T - T_0) \quad (2.3)$$

Teniendo en cuenta que la aplicación de la *aproximación de Boussinesq* supone variaciones relativas de densidad pequeñas, deberá cumplirse que $|\beta(T - T_0)| \ll 1$, concretamente tomaremos la condición de que la variación relativa de densidad no supere el 10%.

Por otro lado, haciendo una comparación de los órdenes de magnitud de los términos de disipación viscosa y de convección térmica de la ecuación de la energía tenemos que

$$\frac{\tau' : \Delta \vec{v}}{\rho c_p \vec{v} \cdot \Delta T} \sim \frac{v}{c_p} \sqrt{\frac{g\beta}{L(T - T_0)}}$$

Puede comprobarse que, tomando los valores característicos de variación de temperatura, longitudes y demás parámetros en el caso de la zona convectiva solar, el anterior cociente es muy pequeño, y por tanto los efectos de disipación viscosa resultan despreciables.

Observando todo lo comentado anteriormente, tenemos que la aceptación de la *aproximación de Boussinesq* supone emplear las siguientes consideraciones:

- La densidad del fluido se considerará constante e igual a la de referencia, ρ_0 , en todas las ecuaciones de Navier-Stockes, excepto en la de cantidad de movimiento, en la cual es necesario tener en cuenta variaciones de densidad para que pueda producirse el movimiento del fluido. En este caso, la densidad se modelará tal y como se ha descrito con anterioridad, es decir

$$\rho = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)] \quad (2.4)$$

- Las propiedades del fluido se consideran constantes e iguales a las tomadas a la temperatura y densidad de referencia.
- Los términos de disipación viscosa (función de disipación de Rayleigh) son, como indicamos anteriormente, despreciables.

Aplicando estas simplificaciones a las ecuaciones completas de Navier-Stockes obtenemos el siguiente sistema, compuesto por las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento, y energía, cuyas incógnitas serían el campo de velocidades, de presiones y de temperatura.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.5)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (2.6)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \quad (2.7)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_0 g[1 - \beta(T - T_0)] + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (2.8)$$

$$\rho_0 c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \nabla^2 T \quad (2.9)$$

Este sistema de ecuaciones debe resolverse sujeto a una serie de condiciones iniciales y de contorno; en nuestro caso, como condiciones iniciales tomaremos una pequeña perturbación sobre el fluido en reposo, es decir, una perturbación respecto de la situación de equilibrio hidrostático, sobre el campo de temperaturas y velocidades. Por otro lado, tendremos paredes rígidas e inmóviles, siendo las verticales adiabáticas, la superior isoterma a temperatura T_2 , y con un flujo impuesto en la base. La expresión formal de dichas condiciones es como sigue

- Para $t = 0 \longrightarrow \vec{v}(x,y,z) = \vec{v}_i(x,y,z) \quad ; \quad T = T_i$
- Para $x = 0 \longrightarrow v_x = v_y = v_z = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$
- Para $x = L \longrightarrow v_x = v_y = v_z = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$

- Para $y = 0 \longrightarrow v_x = v_y = v_z = 0$; $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$
- Para $y = B \longrightarrow v_x = v_y = v_z = 0$; $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$
- Para $z = 0 \longrightarrow v_x = v_y = v_z = 0$; $F = -k \frac{\partial T}{\partial z}$
- Para $z = H \longrightarrow v_x = v_y = v_z = 0$; $T = T_2$

2.1.2 Convección de Rayleigh-Bénard en 2D. Las ecuaciones de Saltzman

Existe un problema respecto al análisis de la convección de Rayleigh-Bénard en 3D y es que, a pesar de que Lord Rayleigh fue capaz de resolverlo en el régimen lineal, resulta muy complejo resolverlo, incluso numéricamente, en el régimen no lineal dado por las ecuaciones anteriores. Debido a ello, tomaremos el límite bidimensional de las ecuaciones planteadas y las desarrollaremos para obtener un nuevo sistema de ecuaciones, equivalente al anterior, pero más adecuado para su implementación numérica, las ecuaciones de Saltzman. Gracias a ello, seremos capaces de resolver el sistema con un código relativamente sencillo de MATLAB, tal y como veremos en los siguientes capítulos.

De esta forma, el problema que analizaremos viene representado por la figura 2.2, donde observamos un recinto rectangular, de dimensiones L, H , en las direcciones x, z , respectivamente, la temperatura en la superficie superior viene dada y en la base incide un flujo de calor por conducción constante.

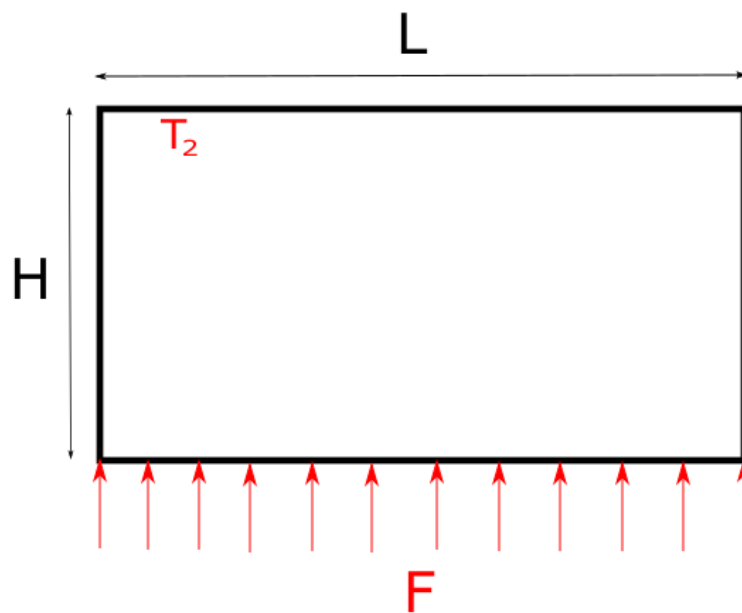


Figura 2.2 Representación del recinto en el caso bidimensional.

Llevando el sistema formado por las ecuaciones 2.5 - 2.9 al límite 2D es fácil comprobar que se llega al siguiente sistema de ecuaciones, donde las incógnitas serán las dos componentes del vector campo de velocidades, el campo de presiones y el de temperatura.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.10)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (2.11)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_0 g [1 - \beta(T - T_0)] + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (2.12)$$

$$\rho_0 c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \nabla^2 T \quad (2.13)$$

Dichas ecuaciones estarán sujetas a las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

- Para $t = 0 \longrightarrow \vec{v}(x, z) = \vec{v}_i(x, z) \quad ; \quad T = T_i$
- Para $x = 0 \longrightarrow v_x = v_z = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$
- Para $x = L \longrightarrow v_x = v_z = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$
- Para $z = 0 \longrightarrow v_x = v_z = 0 \quad ; \quad -k \frac{\partial T}{\partial z} = F$
- Para $z = H \longrightarrow v_x = v_z = 0 \quad ; \quad T = T_2$

Una vez planteado el sistema que nos disponemos a resolver, procedemos al desarrollo de las ecuaciones y condiciones de contorno para obtener las ecuaciones de Saltzman, lo cual supondrá una reducción de las ecuaciones e incógnitas con las que tratar a la mitad. Primeramente, introduciremos el concepto de función de corriente, dado que las líneas de corriente están relacionadas con la trayectoria de las partículas fluidas y con el campo de velocidades. De hecho, se tiene que la función de corriente cumple las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = v_x \quad - \frac{\partial \Psi}{\partial x} = v_z$$

Dadas estas relaciones, tenemos que la ecuación 2.10 se cumple con la mera introducción de esta función. Por tanto, introduciendo la función de corriente en el sistema inicial, obtenemos el siguiente:

$$\rho_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \quad (2.14)$$

$$\rho_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \left(-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_0 g + \rho_0 g \beta (T - T_0) - \mu \nabla^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad (2.15)$$

$$\rho_0 c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} \right] = k \nabla^2 T \quad (2.16)$$

En este caso, vemos cómo las ecuaciones 2.14 y 2.15 son las ecuaciones de cantidad de movimiento, mientras que la restante es la ecuación de la energía, una vez introducida la función de corriente. A continuación, y con el objetivo de simplificar el sistema a resolver, combinaremos ambas ecuaciones de cantidad de movimiento de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial}{\partial z} (2.14) - \frac{\partial}{\partial x} (2.15) \right)$$

Así, obtenemos finalmente la expresión de las ecuaciones de Saltzman, las cuales resolveremos en adelante:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \Psi) - \nu \nabla^4 \Psi + g\beta \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \Psi) - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \Psi) \quad (2.17)$$

$$\rho_0 c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} \right] = k \nabla^2 T \quad (2.18)$$

Este sistema es el que resolveremos, el cual está formado por las ecuaciones de Saltzman. Observamos que hemos pasado de un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas como el dado por las ecuaciones 2.10 - 2.13 a un sistema formado por dos ecuaciones (de Saltzman) y dos incógnitas (función de corriente y campo de temperatura).

Adimensionalización de las ecuaciones de Saltzman

El siguiente paso en el desarrollo de las ecuaciones es su adimensionalización. Este procedimiento facilitará su resolución al reducir el número de parámetros o características del fluido que influyen en el desarrollo del sistema. En nuestro caso, la adimensionalización de variables que hemos escogido es la que sigue:

$$x = Hx^* ; z = Hz^* ; t = \frac{H}{v_c} t^* ; v_c = \sqrt{g\beta(T_{1ref} - T_2)H} ; \Psi = v_c H \Psi^*$$

$$T = T_{1ref} - (T_{1ref} - T_2) T^* = (T_{1ref} - T_2) \left[\frac{T_{1ref}}{T_{1ref} - T_2} - T^* \right]$$

$$T = (T_{1ref} - T_2)(s - T^*) = (T_{1ref} - T_2) T_T^*$$

$$F = \frac{k(T_{1ref} - T_2)}{H} = \frac{kT_2}{H} f$$

Donde se tiene que v_c es la velocidad característica de las partículas fluidas del sistema, T_T^* es lo que denominaremos en adelante temperatura total adimensional y el asterisco se adjunta a las nuevas variables adimensionales (excepto en el caso del flujo F , donde viene dado por f . Por otro lado, tenemos el parámetro T_{1ref} , que llamaremos T_1 de referencia, que representa la temperatura que habría en la base del recinto en el caso de equilibrio hidrostático, es decir, sin fenómeno de convección.

Aplicando esta adimensionalización a las ecuaciones de Saltzman, es decir, las ecuaciones 2.17 y 2.18, obtenemos lo siguiente

$$\frac{\partial}{\partial t^*} (\nabla^2 \Psi^*) - \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \nabla^4 \Psi^* - \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial}{\partial z^*} (\nabla^2 \Psi^*) - \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial x^*} (\nabla^2 \Psi^*) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} - \frac{1}{\sqrt{Pr Ra}} \nabla^2 T^* = \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial T^*}{\partial z^*} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \quad (2.20)$$

En el desarrollo de estas ecuaciones vemos que aparecen dos parámetros adimensionales que afectarán al desarrollo del sistema, que son el número de Rayleigh, Ra , comentado con anterioridad,

y el número de Prandtl, $Pr = \nu/\alpha$, que muestra la relación entre la velocidad de difusión de la cantidad de movimiento y de calor propia del fluido considerado.

Por otro lado, los términos no lineales de las ecuaciones 2.19 y 2.20 serán renombrados de la siguiente forma:

$$NLP = \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial}{\partial z^*} (\nabla^2 \Psi^*) - \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial x^*} (\nabla^2 \Psi^*) \quad (2.21)$$

$$NLT = \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial T^*}{\partial z^*} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \quad (2.22)$$

En cuanto a las condiciones iniciales y de contorno necesarias para resolver el sistema, una vez aplicada la adimensionalización adoptada, se tiene lo siguiente:

- Para $t^* = 0 \longrightarrow \Psi^* = \Psi_i^*(x^*, z^*) \quad ; \quad T^* = T_i^*(x^*, z^*)$
- Para $x^* = 0 \longrightarrow \Psi^* = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = 0$
- Para $x^* = L/H \longrightarrow \Psi^* = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = 0$
- Para $z^* = 0 \longrightarrow \Psi^* = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = 1$
- Para $z^* = H \longrightarrow \Psi^* = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} = 0 \quad ; \quad T^* = 1$

2.2 Radiación

Como se comentó en la introducción, el segundo problema que resolveremos corresponderá con el caso de radiación pura. En este caso, el planteamiento del problema resulta análogo al caso anterior, con la diferencia de que ahora se tiene un flujo de calor por radiación en la base. Para no sobredimensionar el trabajo, y al ser los dos problemas muy parecidos, se detallarán a continuación los cambios existentes en este nuevo problema respecto al anterior, obviando determinadas explicaciones y desarrollos que se vieron en el problema de conducción de calor. Para comenzar, se harán determinadas aclaraciones necesarias antes de abordar el problema.

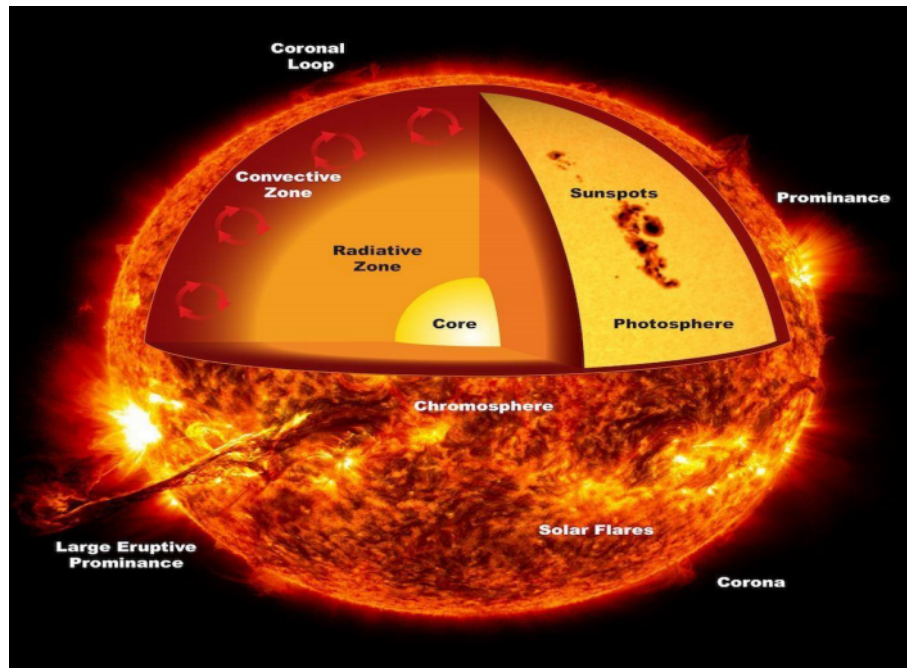


Figura 2.3 Representación de la estructura del Sol.

2.2.1 Aproximación *optically thick*

Todos los cuerpos que se encuentran a cierta temperatura emiten continuamente radiación electromagnética con cierta longitud de onda. Esto se debe al continuo movimiento de las partículas cargadas que se encuentran en el cuerpo. La intensidad de la radiación es dependiente de la longitud de onda y la temperatura considerada.

Asimismo, las características de la radiación térmica son dependientes de la superficie del objeto desde el que se emite. Cuando el objeto emisor se encuentra en equilibrio termodinámico y su superficie presenta una absorptividad máxima a todas las longitudes de onda, se le denomina un cuerpo negro, el cual es a su vez un emisor perfecto, y cuya radiación térmica emitida se llama radiación de cuerpo negro. Tomando esto como referencia, la relación entre la emisión de un cuerpo cualquiera respecto de la que tendría un cuerpo negro se conoce como emisividad.

Por otro lado, la siguiente expresión representa el intercambio de radiación térmica:

$$\tau + \alpha + \rho = 1 \quad (2.23)$$

Donde se tiene que τ representa la componente de transmisión, α la de absorción y ρ la de reflexión. A modo de ejemplo, se tiene que una superficie perfectamente opaca no transmitiría la radiación incidente ($\tau = 0$, y por tanto $\alpha + \rho = 1$), mientras que un reflector perfecto reflejaría toda la radiación incidente ($\rho = 1$, y por tanto $\tau = \alpha = 0$). Para objetos reales, estas componentes varían con la longitud de onda.

El análisis de estos flujos de calor por radiación a temperaturas elevadas (como es el caso del Sol) resulta extremadamente complejo. De hecho, en el análisis del flujo de radiación en las estrellas suele emplearse la aproximación de medio ópticamente grueso, o en inglés, *optically thick*. Para analizar esta cuestión, introducimos en primer lugar el concepto de profundidad óptica (*optical*

depth), que responde a la siguiente expresión

$$\tau = \int_0^s \kappa ds \quad (2.24)$$

Esta expresión se desprende de la siguiente figura, donde observamos los flujos de radiación en el interior de un elemento diferencial; la radiación incidente se divide al penetrar en el medio. Mientras que una parte de la intensidad es absorbida por el medio, otra fracción es dispersada. Por otro lado, el volumen de control también es capaz de emitir radiación en todas las direcciones como un cuerpo negro. Además, suponemos que la radiación incidente sigue una dirección determinada (S).

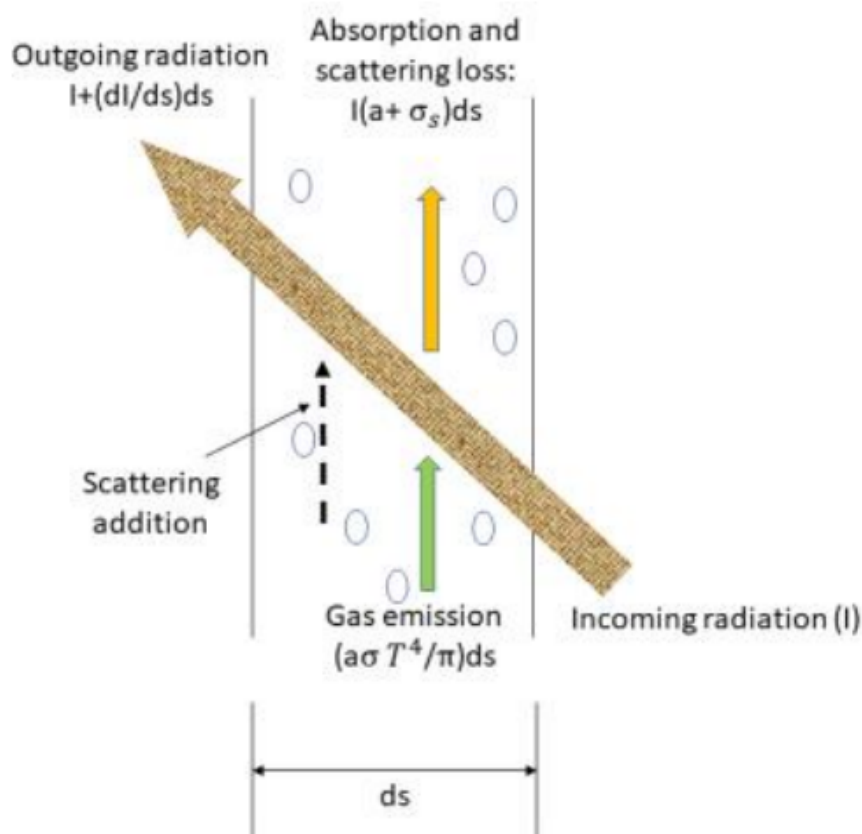


Figura 2.4 Flujos de radiación en el interior de un elemento diferencial.

Volviendo a la ecuación 2.24, el factor τ representa la cantidad de absorción que tiene lugar cuando la luz atraviesa un medio absorbente. Por ejemplo, en el caso $\tau \ll 1$, la intensidad de radiación permanece prácticamente constante, al ser la absorción mínima, por lo que este medio sería considerado ópticamente fino (*optically thin*). Por el contrario, si se tiene $\tau \gg 1$, nos encontraríamos ante un medio ópticamente grueso (*optically thick*), por lo que la intensidad de radiación caería rápidamente, ya que los fotones serían absorbidos por el medio de forma casi inmediata.

En el presente trabajo hemos decidido aplicar la aproximación *optically thick*, con la que logramos expresar el flujo de calor por radiación como una ecuación análoga a la de conducción de calor en la Ley de Fourier. De esta forma, emplearemos un modelo de difusión térmica que permite simplificar los cálculos. En este caso, se requiere de una intensidad isotrópica en el medio participativo, para lo cual supondremos un medio ópticamente grueso con pequeños gradientes térmicos.

2.2.2 Flujo radiactivo

Aplicando la aproximación de medio ópticamente grueso u *optically thick*, en la cual el flujo de radiación que atraviesa un medio recorre una corta distancia hasta que es absorbida o dispersada, podemos hallar de una forma relativamente sencilla la expresión del flujo de radiación, la cual será necesaria para el desarrollo de las ecuaciones de Navier-Stokes, particularmente la de la energía. En este caso, tal y como se comentó anteriormente, podemos encontrar una fórmula que defina la radiación como una expresión análoga a la de conducción de calor en la Ley de Fourier. El desarrollo que realizamos de las ecuaciones de transferencia de calor por radiación está basado en el realizado por Krishna Laxman Jamnani Jamnani en su trabajo *Estudio numérico de problemas de convección de Rayleigh-Bénard en presencia de radiación*, comenzando como veremos por la ecuación RTE.

Como hemos comentado, partimos de la siguiente ecuación, conocida como RTE (*Radiative Transfer Equation*), la cual se obtiene haciendo balance respecto a los flujos de radiación que entran y salen de un elemento diferencial (como el de la figura 2.4).

$$\frac{\partial I}{\partial S} = \vec{\Omega} \cdot \nabla I = -(\kappa + \sigma_s)I + \kappa I_b + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_0^{4\pi} I \phi \, d\Omega \quad (2.25)$$

Donde observamos diversos parámetros, entre los que se encuentran κ , que representa el coeficiente de absorción, σ_s , que es el coeficiente de dispersión, I_b , la intensidad emitida por un cuerpo negro, y finalmente ϕ , que es una función de dispersión de fase que determina la probabilidad del flujo de radiación para desviarse de dirección.

Por otro lado, definimos a continuación el coeficiente de extinción, β , junto con otros coeficientes que muestran la importancia relativa entre absorptividad y dispersión:

$$\beta = \sigma_s + \kappa \quad ; \quad \omega = \frac{\sigma_s}{\beta} \quad ; \quad 1 - \omega = \frac{\kappa}{\beta} \quad (2.26)$$

En este caso, puede tomarse $d\tau = \beta dS$, y sustituyendo en 2.25, se tiene

$$\frac{\partial I}{\partial \tau} = -I + (1 - \omega)I_b + \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{4\pi} I \phi \, d\Omega \quad (2.27)$$

$$\hat{I} = (1 - \omega)I_b + \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{4\pi} I \phi \, d\Omega \quad (2.28)$$

Donde \hat{I} se denomina como función de fuente. A continuación, para seguir desarrollando la ecuación RTE, analizaremos la siguiente figura

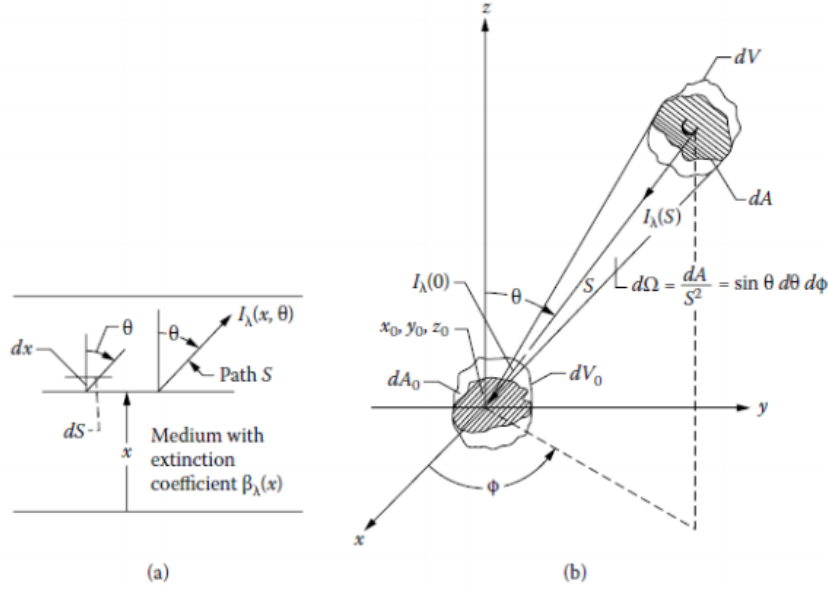


Figura 2.5 Definiciones geométricas para la ecuación RTE: (a) placa bidimensional, (b) caso tridimensional.

En virtud de esta representación gráfica del flujo radiactivo podemos determinar que $dS = dx / \cos \theta$, y aplicando esto a la ecuación 2.27, obtenemos

$$-\frac{\cos \theta}{\beta} \frac{\partial I(x, \theta)}{\partial x} = I(x, \theta) - \hat{I}(x) \quad \longrightarrow \quad -\frac{\cos \theta}{\beta H} \frac{\partial I(x, \theta)}{\partial (x/H)} = I(x, \theta) - \hat{I}(x) \quad (2.29)$$

Para resolver esta ecuación diferencial, se define la intensidad I como una suma de funciones I_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), multiplicadas por potencias de $1/(\beta H) \ll 1$, tal y como se muestra a continuación

$$I = I_0 + \left(\frac{1}{\beta H}\right) I_1 + \left(\frac{1}{\beta H}\right)^2 I_2 + \dots \quad (2.30)$$

Introduciendo esta nueva expresión para la intensidad del flujo en la ecuación 2.29, se obtiene

$$\begin{aligned} & -\frac{\mu}{\beta H} \left[\frac{\partial I_0}{\partial (x/H)} + \frac{1}{\beta H} \frac{\partial I_1}{\partial (x/H)} + \dots \right] = \\ & = I_0 + \left(\frac{1}{\beta H}\right) I_1 + \dots - (1 - \omega) I_b - \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{4\pi} \left[I_0 + \left(\frac{1}{\beta H}\right) I_1 + \dots \right] d\Omega \end{aligned} \quad (2.31)$$

Donde se tiene que $\mu = \cos \theta$ y se ha tomado $\phi = 1$ por tratarse en nuestro problema de un caso isotrópico. En la ecuación anterior, eliminando los términos de menor orden, teniendo en cuenta que $1/(\beta H) \ll 1$, se tiene

$$I_0 = (1 - \omega) I_b + \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{4\pi} I_0 d\Omega \quad (2.32)$$

Los términos de la derecha de la ecuación 2.32 son independientes del ángulo Ω , por lo que I_0 también lo es. De esta forma, se resuelve la ecuación y se obtiene que $I_0 = I_b$. Repitiendo este proceso, teniendo en cuenta ahora los términos de la ecuación 2.31 multiplicados por $1/(\beta H)$,

es decir, despreciando los términos multiplicados por $1/(\beta H)^2$ y órdenes inferiores, se tiene lo siguiente

$$-\mu \frac{\partial I_b}{\partial(x/H)} = I_1 - \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{4\pi} I_1 d\Omega \quad (2.33)$$

A continuación, multiplicando esta expresión por $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta = -2\pi d\mu$ e integrando se obtiene

$$-\mu \frac{\partial I_b}{\partial(x/H)} \int_0^\pi 2\pi \cos \theta \sin \theta d\theta = -\mu \frac{\partial I_b}{\partial(x/H)} \int_{-1}^1 2\pi \mu d\mu = \int_0^{4\pi} I_1 d\Omega - \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{4\pi} I_1 d\Omega \int_0^{4\pi} d\Omega \quad (2.34)$$

Donde la integral del término central es nula, y por tanto

$$0 = \int_0^{4\pi} I_1 d\Omega - \omega \int_0^{4\pi} I_1 d\Omega \quad (2.35)$$

$$\omega \neq 1 \rightarrow \int_0^{4\pi} I_1 d\Omega = 0 \rightarrow I_1 = -\mu \frac{\partial I_b}{\partial(x/H)} \quad (2.36)$$

$$I = I_b - \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial I_b}{\partial x} \quad (2.37)$$

A partir de esta expresión deducimos que en este caso la intensidad del flujo radiactivo depende de la magnitud y el gradiente de la intensidad correspondiente a un cuerpo negro. Teniendo en cuenta que los gradientes térmicos son pequeños y que $\beta \gg 1$, el término de la derecha puede ser despreciado, y por tanto se tiene que I es aproximadamente isotrópico como la intensidad del cuerpo negro, I_b .

Finalmente, para calcular el flujo de calor por radiación multiplicamos la intensidad de radiación por $\cos \theta d\lambda$, y se integra para todos los ángulos sólidos. Teniendo en cuenta que la intensidad de cuerpo negro, I_b , no depende de μ , y por tanto se puede sacar de la integral, se tiene

$$q d\lambda = 2\pi d\lambda \int_0^\pi I(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta = 2\pi d\lambda \int_{-1}^1 I(\mu) \mu d\mu \quad (2.38)$$

$$q(x) d\lambda - 2\pi I_b(x) d\lambda \int_{-1}^1 \mu d\mu - \frac{2\pi d\lambda}{\beta(x)} \frac{dI_b(x)}{dx} \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu = -\frac{4\pi}{3\beta(x)} \frac{dI_b(x)}{dx} d\lambda \quad (2.39)$$

Finalmente, si se integra el miembro $\pi I_b d\lambda$ para todo λ , se obtiene el término σT^4 , y de esta forma llegamos a la *ecuación difusiva de Rosseland*, con la que obtenemos finalmente la expresión para el flujo de calor radiactivo que venimos buscando.

$$\vec{q}_r = -\frac{4\sigma}{3\beta} \nabla I_b = -\frac{16\sigma T^3}{3\beta} \nabla T = -CT^3 \nabla T \quad (2.40)$$

Donde se ha definido $C = 16\sigma/(3\beta) = cte$, y por tanto el flujo de radiación viene dado por la siguiente expresión

$$\vec{q}_r = -\frac{C}{4} \nabla T^4 \rightarrow \nabla \cdot \vec{q}_r = -\frac{C}{4} \nabla^2 T^4 \quad (2.41)$$

2.2.3 Desarrollo de las ecuaciones de Saltzman 2D. Problema de radiación pura

El desarrollo de las ecuaciones completas de Navier-Stokes hasta la obtención de las ecuaciones de Saltzman en dos dimensiones para el caso de radiación pura es análogo al realizado para el caso de conducción de calor, cambiando evidentemente el término para el flujo de calor conductivo por el radiactivo. Por tanto, haciendo este desarrollo, se obtiene el siguiente sistema, análogo al sistema de ecuaciones dado por 2.17 y 2.18, teniéndose lo que sigue

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\Psi) - \nu\nabla^4\Psi + g\beta\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2\Psi) - \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\Psi) \quad (2.42)$$

$$\rho_0 c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial z} \right] = \frac{C}{4}\nabla T^4 \quad (2.43)$$

En cuanto a las condiciones de contorno que deben cumplirse en la resolución de dicho sistemas, son similares a las del caso conductivo, y se muestran a continuación

- Para $t = 0 \longrightarrow \Psi = \Psi_i(x,z) \quad ; \quad T = T_i$
- Para $x = 0 \longrightarrow \Psi = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$
- Para $x = L \longrightarrow \Psi = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$
- Para $z = 0 \longrightarrow \Psi = 0 \quad ; \quad -CT^3\frac{\partial T}{\partial z} = F$
- Para $z = H \longrightarrow \Psi = 0 \quad ; \quad T = T_2$

Observamos que lo único que cambia es la expresión del flujo de calor, que ahora se trata de un flujo por radiación pura, en vez de conducción.

A continuación procedemos a la adimensionalización de las variables del problema, del mismo modo que hicimos en el caso de conducción. De hecho, se tomará la siguiente adimensionalización, análoga a la empleada en dicho caso.

$$x = Hx^* \quad ; \quad z = Hz^* \quad ; \quad t = \frac{H}{\nu_c}t^* \quad ; \quad \nu_c = \sqrt{g\beta(T_{1ref} - T_2)H} \quad ; \quad \Psi = \nu_c H \Psi^*$$

$$T = T_{1ref} - (T_{1ref} - T_2)T^* = T_2 + (T_{1ref} - T_2)(1 - T^*)$$

$$T = (T_{1ref} - T_2) \left[\frac{T_2}{T_{1ref} - T_2} + (1 - T^*) \right] = (T_{1ref} - T_2) \left(\frac{1}{s} + 1 - T^* \right)$$

$$F = CT_2^3 \frac{(T_{1ref} - T_2)}{H}$$

Donde se ha tomado lo siguiente

$$T_{1ref} - T_2 = \frac{FH}{CT_2^3} \quad y \quad \frac{T_{1ref} - T_2}{T_2} = \frac{FH}{CT_2^4} = s$$

Además, para abreviar la notación de ahora en adelante se tomará $s^* = (1/s) + 1$. Introduciendo estos cambios en las ecuaciones de Saltzman (2.42 y 2.43), obtenemos el sistema a resolver, en variables adimensionales, análogo al planteado por 2.19 y 2.20, como vemos a continuación.

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\nabla^2 \Psi^*) - \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \nabla^4 \Psi^* - \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial}{\partial z^*} (\nabla^2 \Psi^*) - \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial x^*} (\nabla^2 \Psi^*) \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{s^3}{\sqrt{Pr Ra}} \nabla^2 (s^* - T^*)^4 = \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial T^*}{\partial z^*} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \quad (2.45)$$

Donde se han tenido en cuenta las expresiones para los números de Rayleigh y de Prandtl, vistos para el caso de conducción. Además, en el desarrollo de las ecuaciones también aparece el término $\alpha \equiv (CT_2^3)/(4\rho_0 c_p)$, el cual tiene dimensiones de difusividad térmica, en este caso radiativa, y a la que hemos identificado, como podemos ver, con α .

Por otro lado vemos que, evidentemente, la ecuación de cantidad de movimiento combinada es igual a la del caso de conducción ya que hemos partido de la misma ecuación y hemos aplicado la misma adimensionalización. Sin embargo, la ecuación de la energía sí se ha visto modificada; dada la nueva expresión para el flujo de calor, ahora nos encontramos con un término que incluye el laplaciano de la temperatura elevada a la cuarta, lo cual repercutirá en ciertas complicaciones dada la no linealidad del nuevo problema.

Estas ecuaciones (2.44 y 2.45) conforman el sistema de ecuaciones que deberemos resolver para el caso de radiación pura, sistema que estará sujeto a una serie de condiciones iniciales y de contorno que mostraremos al final del apartado. Antes de ello, explicaremos el sentido físico del parámetro s que aparece en las ecuaciones.

Sentido físico del parámetro s

Tal y como comentamos anteriormente, se tiene que $s = (T_{1ref} - T_2)/T_2$. Por otro lado, por definición tenemos lo siguiente

$$(T_{1ref} - T_2) = \frac{FH}{CT_2^3} \quad y \quad C = \frac{16\sigma}{3\beta} \quad (2.46)$$

De esta forma, se tiene

$$s = \frac{T_{1ref} - T_2}{T_2} = \frac{FH}{\frac{16\sigma}{3\beta} T_2^4} \quad (2.47)$$

Por tanto, si $F = \sigma T_2^4$, tenemos

$$s = \frac{3}{16} \beta H \quad (2.48)$$

Donde $\tau_0 = \beta H$ es el espesor óptico del medio. Recordemos que β representa el coeficiente de absorción del medio, es decir, es un coeficiente inversamente proporcional al camino libre de los fotones antes de ser absorbidos. Como hemos empleado la aproximación de medio ópticamente grueso (*optically thick*), dicho camino libre de los fotones es extremadamente reducido, y por tanto, $\tau_0 = \beta H \gg 1$. Dado que en la práctica el medio no es tan grueso ópticamente, podemos tomar que $s = \frac{3}{16} \tau_0 \sim O(1)$ aunque supongamos $\tau_0 \gg 1$.

Condiciones iniciales y de contorno

En base a las condiciones iniciales y de contorno a las que está sujeta la resolución del sistema, observamos que éstas son idénticas a las del caso de conducción, y por tanto se tratarán de la misma forma, salvo por la única condición que cambia que es, evidentemente, la que se refiere al flujo de calor en la base del recinto, que ahora se trata de un flujo radiactivo en vez de conductivo.

Dicha condición de contorno viene dada por

$$z = 0 \longrightarrow -CT^3 \frac{\partial T}{\partial z} = F \quad (2.49)$$

Aplicando la adimensionalización descrita anteriormente, tenemos lo siguiente

$$CT_2^3 \left[1 + \frac{(T_{1ref} - T_2)}{T_2} (1 - T^*) \right]^3 \frac{(T_{1ref} - T_2)}{H} \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = F \quad (2.50)$$

Como vimos en la adimensionalización con anterioridad, se ha tomado T_{1ref} de tal forma que se cumpla

$$CT_2^3 \frac{(T_{1ref} - T_2)}{H} = F \quad (2.51)$$

Por tanto, tomando la definición del parámetro s , obtenemos la condición de contorno a cumplir por la temperatura en la base del recinto, que es tal y como sigue

$$[1 + s(1 - T^*)]^3 \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = 1 \quad (2.52)$$

De esta forma, las condiciones iniciales y de contorno escritas en términos de variables adimensionales quedan de la siguiente forma

- Para $t^* = 0 \longrightarrow \Psi^* = \Psi_i^*(x^*, z^*) \quad ; \quad T^* = T_i^*(x^*, z^*)$
- Para $x^* = 0 \longrightarrow \Psi^* = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = 0$
- Para $x^* = L/H \longrightarrow \Psi^* = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = 0$
- Para $z^* = 0 \longrightarrow \Psi^* = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} = 0 \quad ; \quad [1 + s(1 - T^*)]^3 \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = 1$
- Para $z^* = H \longrightarrow \Psi^* = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} = 0 \quad ; \quad T^* = 1$

3 Método numérico

En este capítulo analizaremos el método numérico empleado para resolver los sistemas de ecuaciones planteados en el capítulo anterior, tanto para el caso de conducción como el de radiación pura.

3.1 Conducción

Recordemos que nuestro objetivo estriba en resolver las ecuaciones de Saltzman 2.19 y 2.20, sujetas a las condiciones de contorno correspondientes. Con ello resolveremos el problema que nos ocupa en este caso, es decir, el análisis del flujo 2D de un fluido alojado en un recinto rectangular de anchura L y altura H , cuya superficie superior se encuentra a temperatura impuesta T_2 , y en la base se aplica un flujo de calor por conducción, F , constante y uniforme.

Comenzaremos por explicar el método empleado para la derivación de funciones, para a continuación analizar el tratamiento de las ecuaciones y las condiciones de contorno para su implementación en el código.

3.1.1 Método de diferencias finitas

En trabajos anteriores el método de derivación ha tenido el problema de trabajar con matrices muy llenas, más de lo necesario, llevando a tiempos de computación muy largos. En nuestro caso, para resolver este problema, emplearemos un método diferente uqe, a costa de un error muy pequeño, hemos conseguido reducir el tiempo de cálculo necesario de forma notable. Nos basamos en el artículo publicado por Miguel Pérez-Saborid llamado *A simple MATLAB program to compute differentiation matrices for arbitrary meshes via Lagrangian interpolation*. En este apartado haremos un resumen del método para que sea conocido por el lector.

Partimos del método lagrangiano de interpolación para una función $f(x)$ en un mallado de M puntos $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_M$, dado por la expresión

$$f(x) = \sum_{m=1}^M f_m L_m(x) \quad (3.1)$$

donde $\bar{x}_1 \leq x \leq \bar{x}_M$, $f_m = f(\bar{x}_m)$ y $L_m(x)$ es el interpolante lagrangiano asociado al punto de la malla \bar{x}_m , tal que

$$L_m(x) = \frac{(x - \bar{x}_1) \dots (x - \bar{x}_{m-1})(x - \bar{x}_{m+1}) \dots (x - \bar{x}_M)}{(\bar{x}_m - \bar{x}_1) \dots (\bar{x}_m - \bar{x}_{m-1})(\bar{x}_m - \bar{x}_{m+1}) \dots (\bar{x}_m - \bar{x}_M)} \quad (3.2)$$

A pesar de su complicada apariencia, los interpolantes lagrangianos satisfacen interesantes relaciones que pueden ser demostradas de manera sencilla. Por ejemplo, tomando $f(x) = x^r$ en 3.1 obtenemos

$$\bar{x}_1^r L_1(x) + \bar{x}_2^r L_2(x) + \dots + \bar{x}_M^r L_M(x) = x^r \quad \text{para } 0 \leq r \leq M-1 \quad (3.3)$$

Lo que quiere decir que la interpolación lagrangiana dada por 3.1 puede reproducir exactamente cualquier función polinómica de grado menor o igual a $M-1$, siendo M el número de puntos tomados en dicha interpolación. Concretamente, para $r = 0$, la expresión 3.3 da la relación $\sum_{m=1}^M L_m(x) = 1$, y por tanto se tiene que

$$\sum_{m=1}^M L'_m(x) = 0 \quad (3.4)$$

Resultado que será ampliamente utilizado en el desarrollo.

En ocasiones (como es el caso) es conveniente expresar los interpolantes lagrangianos en su forma baricéntrica, tal y como se muestra a continuación

$$L_m(x) = \frac{a(x)}{(x - \bar{x}_m)a_m} \quad m = 1, \dots, M \quad (3.5)$$

Donde el polinomio $a(x)$ y la constante a_m se definen como sigue

$$a(x) \equiv \prod_{k=1}^M (x - \bar{x}_k) \quad \text{y} \quad a_m \equiv a'(\bar{x}_m) = \prod_{k \neq m} (\bar{x}_m - \bar{x}_k) \quad (3.6)$$

La forma baricéntrica es especialmente útil para hallar las derivadas de $L_m(x)$ en cualquier punto \bar{x}_i de la malla. De hecho, escribiendo 3.5 como

$$a(x) = a_m(x - \bar{x}_m)L_m(x) \quad (3.7)$$

Y tomando su derivada

$$a'(x) = a_m(x - \bar{x}_m)L'_m(x) + a_m L_m(x) \quad (3.8)$$

Ya que por la propia definición del interpolante lagrangiano se tiene que $L_m(x_i) = 0$ para $m \neq i$, obtenemos directamente la expresión de la derivada de dicho interpolante en cualquier punto \bar{x}_i diferente de \bar{x}_m . Tomando $a'(x_i) = a_i$, se tiene

$$L'_m(\bar{x}_i) = \frac{a_i}{a_m(\bar{x}_i - \bar{x}_m)} \quad (m \neq i) \quad (3.9)$$

Por otro lado, para obtener el valor de $L'_i(\bar{x}_i)$ es conveniente emplear la expresión 3.4, de la cual se deduce que

$$L'_i(\bar{x}_i) = - \sum_{m=1, m \neq i}^M L'_m(\bar{x}_i) = - \sum_{m=1, m \neq i}^M \frac{a_i}{a_m(\bar{x}_i - \bar{x}_m)} \quad (3.10)$$

Derivadas superiores de los operadores lagrangianos pueden obtenerse fácilmente siguiendo el mismo procedimiento, de forma que

$$a^{(s)}(x) = a_m(x - \bar{x}_m)L_m^{(s)}(x) + s a_m L_m^{(s-1)}(x) \quad (3.11)$$

Donde el superíndice (s) indica la s -ésima derivada. Observamos que al particularizar esta expresión en $x = \bar{x}_m$ se tiene que $a^{(s)}(x) = sa_m L_m^{(s-1)}(x)$ para $m = 1, \dots, M$. Así, para $\bar{x}_i \neq \bar{x}_m$ se tiene

$$L_m^{(s)}(\bar{x}_i) = \frac{s}{(\bar{x}_i - \bar{x}_m)} \left[\frac{a_i}{a_m} L_i^{(s-1)}(\bar{x}_i) - L_m^{(s-1)}(\bar{x}_i) \right] \quad (i \neq m) \quad (3.12)$$

De la misma forma que antes, el valor de $L_i^{(s)}(\bar{x}_i)$ se obtiene a partir de 3.4 como

$$L_i^{(s)}(\bar{x}_i) = - \sum_{m=1, m \neq i}^M L_m^{(s)}(\bar{x}_i) \quad (3.13)$$

Podemos observar que las expresiones 3.12 y 3.13, en el caso $s = 1$ se corresponden efectivamente a las expresiones 3.9 y 3.10 si definimos $L_m^{(0)}(\bar{x}_i) \equiv \delta_{im}$, donde δ_{im} sería la delta de Kronecker.

Vemos por tanto que las expresiones 3.9 - 3.10 junto con 3.12 - 3.13 nos permiten la computación numérica de la s -ésima derivada de cualquier interpolante lagrangiano en cualquier punto del mallado. Estas derivadas vienen dadas en la que denominamos s -ésima matriz de diferenciación, \bar{D}_s , cuyos elementos vienen definidos por

$$\bar{D}_s(i, m) = L_m^{(s)}(\bar{x}_i) \quad (i, m = 1, \dots, M) \quad (3.14)$$

Observamos que de acuerdo a 3.1 y 3.14 el valor de la s -ésima derivada de una función $f(x)$ en el punto de la malla \bar{x}_i puede ser aproximado empleando \bar{D}_s como

$$f^{(s)}(\bar{x}_i) = \sum_{k=1}^M \bar{D}_s(i, m) f(\bar{x}_m) \quad (3.15)$$

Los elementos de la matriz \bar{D}_s se obtienen directamente de 3.12 y 3.13 como

$$\bar{D}_s(i, m) = \frac{s}{(\bar{x}_i - \bar{x}_m)} \left[\frac{a_i}{a_m} \bar{D}_{s-1}(i, i) - \bar{D}_{s-1}(i, m) \right] \quad (i \neq m) \quad (3.16)$$

$$\bar{D}_s(i, i) = - \sum_{m=1, m \neq i}^M \bar{D}_s(i, m) \quad (3.17)$$

Más abajo mostramos un sencillo código que muestra el empleo de los resultados obtenidos para la obtención de las matrices de derivación \bar{D}_s ($s = 1, 2, 3$). Matrices de derivación superiores pueden ser incluidas de forma trivial. Finalmente, es importante hacer notar el especial cuidado que requiere el cálculo de los coeficientes a_i/a_m de la expresión 3.16 debido a los errores de redondeo del programa, especialmente cuando se trata con mallados grandes y con separaciones irregulares entre los puntos. Para resolver este problema, los factores que intervienen en el cálculo de a_i y a_m se incorporan en los vectores $F_i(1 : M)$ y $F_m(1 : M)$ cuyos componentes son definidos como sigue

$$\begin{aligned} F_i(k) &= \bar{x}_i - \bar{x}_k \quad (k \neq i) \quad \text{y} \quad F_i(k=i) = 1 \\ F_m(k) &= \bar{x}_m - \bar{x}_k \quad (k \neq m) \quad \text{y} \quad F_m(k=m) = 1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Finalmente, los vectores F_i y F_m se ordenan de forma ascendente en función del valor absoluto de sus componentes, y el cociente a_i/a_m queda computado como sigue

$$\frac{a_i}{a_m} = (-1)^{n_i - n_m} \frac{|F_i(k_1)|}{F_m(l_1)} \frac{|F_i(k_2)|}{F_m(l_2)} \dots \frac{|F_i(k_M)|}{F_m(l_M)} \quad (3.19)$$

Donde $[F_i(k_1), F_i(k_2), \dots, F_i(k_M)]$ y $[F_m(l_1), F_m(l_2), \dots, F_m(l_M)]$ representan los vectores F_i y F_m reordenados, mientras que n_i y n_m son el respectivo número de valores negativos. A continuación se muestra el código anunciado, que muestra cómo se obtendrían las matrices de derivación \bar{D}_1 , \bar{D}_2 y \bar{D}_3 .

El código que muestra cómo se obtendrían las matrices de derivación \bar{D}_1 , \bar{D}_2 y \bar{D}_3 se encuentra en el apéndice A.1, al final del trabajo.

Matrices de derivación para un mallado arbitrario

Consideremos una función $f(x)$ definida en una malla arbitraria de N puntos, $x_1, \dots, x_i, \dots, x_N$ por sus valores $f(x_i) \equiv f_i$. Una matriz de derivación de la malla, D_s , es aquella que permite aproximar los valores de la s -ésima derivada de $f(x)$ en los puntos del mallado, $f^{(s)}(x_i) \equiv f_i^{(s)}$ de la siguiente forma

$$f_i^{(s)} = \sum_{j=1}^N D_s(i, j) f_j \quad (i = 1, \dots, N) \quad (3.20)$$

Para ello, es conveniente definir una malla de $M \leq N$ puntos consecutivos del mallado original alrededor del punto x_i donde queremos calcular la derivada de $f(x)$. Hacemos esto porque al utilizar menos puntos (la reducción puede ser considerable) el tiempo de computación se reduce notablemente, y además puede comprobarse que los puntos del mallado cercanos a x_i son los que más contribuyen al cálculo de la derivada en dicho punto. Por poner un ejemplo, en nuestro análisis del fenómeno de convección hemos tomado en la mayoría de los casos una malla de 30×30 puntos, sin embargo, para calcular derivadas en x o en z , solamente hemos utilizado nueve puntos, en vez de treinta, reduciendo en gran medida el tiempo de computación y asumiendo un error ínfimo.

Sin embargo, en cuanto al punto x_i en el que queremos calcular la derivada, podemos tener varios casos distintos; si es un punto central de la malla, tomaremos ese punto como el centro de la malla auxiliar de M puntos, pero si x_i se encuentra cerca de un borde de la malla, evidentemente esto no es posible. Por ello, a la hora de computarlo, hemos empleado el código *Dsmesh*, el cual permite seleccionar aquellos M puntos que se emplearán en el cálculo de la derivada en el punto considerado. Dicho código se encuentra en el apéndice A.1.

Básicamente, a la hora de seleccionar los puntos de la malla que intervendrán en el cálculo, podemos tener tres posibilidades, tomando siempre el caso general $M < N$ (ya que el caso $M = N$ tomaría toda la matriz de derivación y no habría reducción de tiempo de computación), las cuales serían las siguientes:

- $1 \leq i < M_c$. Es decir, el punto x_i se encuentra cerca del borde izquierdo de la malla. En este caso se emplearán los M puntos más cercanos a dicho borde, teniéndose

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_M) = (x_1, x_2, \dots, x_M) \quad (\bar{x}_{i_s=i} = x_i)$$

Y los elementos de la matriz de diferenciación que se corresponden con x_i serían

$$D_s(i, j = [1, \dots, M]) = \bar{D}_s(i_s, m = [1, \dots, M]) \quad (i \leq M_c)$$

- $M_c \leq i \leq N - M_c$. Por tanto, el punto x_i es un punto interior de la malla. En este caso se toma el punto x_i como el centro de la malla auxiliar, y entonces

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_M) = (x_{i-M_c+1}, x_{i-M_c+2}, \dots, x_{i+M_c-1}) \quad (\bar{x}_{i_s=M_c} = x_i)$$

Y los elementos de la matriz de diferenciación que se corresponden con x_i serían

$$D_s(i, j = [i - M_c + 1, \dots, i + M_c - 1]) = \bar{D}_s(i_s, m = [1, \dots, M]) \quad (M_c \leq i \leq N - M_c)$$

- $N - M_c < i \leq N$. Finalmente, el caso en que x_i se encuentra próximo al borde derecho. Por tanto, para el cálculo de la derivada se tomarán los M puntos más cercanos a dicho borde, y de esta forma se tiene

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_M) = (x_{N-M+1}, x_{N-M+2}, \dots, x_N) \quad (\bar{x}_{i_s=i+M-N} = x_i)$$

Y los elementos de la matriz de diferenciación que se corresponden con x_i serían

$$D_s(i, j = [N - M + 1, \dots, N]) = \bar{D}_s(i_s, m = [1, \dots, M]) \quad (N - M_c + 1 < i \leq N)$$

Así queda descrita la forma empleada para calcular las derivadas espaciales de las distintas variables. Los sencillos códigos mostrados (Dbs.m, Dsmesh.m) son los que hemos empleado en nuestro código, tomando $M = 9$, es decir, nueve puntos en cada cálculo. El lector interesado puede comprobar la efectividad del método, tanto en la considerable reducción de tiempo (respecto al uso de todos los puntos de la malla), como en el ínfimo error en el que se incurre.

Finalmente, debemos indicar que el método descrito de diferencias finitas está destinado a mallas unidimensionales. Sin embargo, y como se observa en los apéndices, donde vemos el código completo para los casos de conducción y radiación, mediante el uso de la delta de Kronecker (comando *kron* de MATLAB) podemos extender el método a una malla bidimensional como la que tratamos en el presente proyecto.

3.1.2 Distribución de temperatura hidrostática

Aunque en otros trabajos sobre el fenómeno de convección de Rayleigh-Bénard ha sido recurrente la descomposición de la temperatura como la propia al caso hidrostático más una perturbación ($T^* = T_h^* + \theta^*$), en nuestro caso esto no es necesario ni conveniente debido a la adimensionalización adoptada y a la manera de tratar las ecuaciones. Sin embargo, con el objetivo de poder conocer la perturbación existente respecto del caso de equilibrio hidrostático hemos decidido calcular dicha distribución de temperatura hidrostática, y así calcular la perturbación respecto al equilibrio como $\theta^* = T^* - T_h^*$.

Debido a la adimensionalización adoptada y las condiciones de contorno, la temperatura hidrostática se ha calculado de la siguiente forma. Primeramente, recordamos la adimensionalización empleada para la temperatura y la altura.

$$T = T_{1_{ref}} - (T_{1_{ref}} - T_2)T^* ; \quad z = Hz^*$$

A continuación, se tiene que el flujo impuesto en la base toma la siguiente expresión

$$F = -k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (3.21)$$

Ahora, aplicando la adimensionalización comentada más arriba, se tiene

$$F = \frac{k(T_{1ref} - T_2)}{H} \left. \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right|_{z^*=0} \quad (3.22)$$

Entonces, teniendo en cuenta que $(T_{1ref} - T_2) = FH/k$, tenemos que

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right|_{z^*=0} = 1 \quad (3.23)$$

Finalmente, integrando esta expresión (la cual se corresponde con una de las condiciones de contorno a aplicar), y teniendo en cuenta que por condiciones de contorno $T_h^*(z^* = 1) = 1$, tenemos la sencilla expresión para la temperatura hidrostática en el caso de conducción que mostramos a continuación

$$T_h^* = z^* \quad (3.24)$$

Debido a la extremada trivialidad que supone la implementación de la distribución hidrostática de temperaturas, no se ha considerado necesario incluir el fragmento de código que se destina a ello. Al final del presente apartado se mostrará en el código completo.

3.1.3 Implementación de las ecuaciones de Saltzman

Antes de comenzar con el desarrollo de las ecuaciones debemos hacer un par de aclaraciones. Primeramente, la discretización del problema se realiza introduciendo en el recinto rectangular nodos de Chebyshev, tanto en la dirección x como en la z , definidos de la siguiente forma:

$$x_i = \frac{x_{max} + x_{min}}{2} + \frac{x_{min} - x_{max}}{2} \cos \left[\frac{(i-1)\pi}{N_x - 1} \right] \quad i = 1, \dots, N_x \quad (3.25)$$

$$z_j = \frac{z_{max} + z_{min}}{2} + \frac{z_{min} - z_{max}}{2} \cos \left[\frac{(j-1)\pi}{N_z - 1} \right] \quad j = 1, \dots, N_z \quad (3.26)$$

Donde x_{min} y z_{min} serán nulos ya que se corresponden con el origen de coordenadas, y debido a la adimensionalización empleada, se tiene a su vez que $x_{max} = AR = L/H$ y $z_{max} = 1$. El siguiente fragmento de código muestra la forma en que hemos implementado esta discretización del recinto objeto de estudio:

```
% Nodos de Chebyshev %
AR = 2; %a = L/H (relación de aspecto)
Nx = 30; xmin = 0; xmax = AR;
for i = 1:Nx
    xast(i) = (xmax+xmin)/2+(xmin-xmax)/2*cos((i-1)/(Nx-1)*pi);
end
Nz = 30; zmin = 0; zmax = 1;
for p = 1:Nz
    zast(p) = (zmax+zmin)/2+(zmin-zmax)/2*cos((p-1)/(Nz-1)*pi);
end
Nt = Nx*Nz;
```

Por otro lado, se empleará un parámetro, I , para recorrer los $N_t = N_x * N_z$ nodos del mallado. Esto resulta conveniente para emplear un vector de longitud N_t para recorrer todos los nodos, en vez de una matriz espacial. Para referirse a un punto (x_i, z_j) , se le asignará un valor tal como sigue

$$I = (i - 1) * N_z + j \quad (3.27)$$

En cuanto a las derivadas temporales, se discretizarán como sigue

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t_n} = \frac{\phi_n - \phi_{n-1}}{\Delta t} \quad (3.28)$$

Donde se tiene que $\phi_n = \phi(t_n)$ (análogo en el case de ϕ_{n-1}) y Δt es el paso de tiempo escogido.

Finalmente, en el desarrollo de la implementación numérica veremos determinadas matrices de derivación (D_x, D_z, DL, \dots), cuyos elementos han sido calculados a través del método explicado con anterioridad. Dichas matrices de derivación representan las derivadas espaciales respecto de x , respecto de z , el operador laplaciano, etc.

Una vez aclaradas estas cuestiones, procederemos al desarrollo de las ecuaciones 2.19 y 2.20 para su implementación en MATLAB. Comenzando por la ecuación de cantidad de movimiento combinada (2.19), se tiene lo siguiente:

$$D_L \left(\frac{\Psi_n^* - \Psi_{n-1}^*}{\Delta t^*} \right) - \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} * D_L^2 * \Psi_n^* - D_x * T_n^* = NLP_n \quad (3.29)$$

Donde, en virtud de la definición dada por 2.21, se tiene

$$NLP_n = (D_x * \Psi_n^*) * (D_z * D_L * \Psi_n^*) - (D_z * \Psi_n^*) * (D_x * D_L * \Psi_n^*) \quad (3.30)$$

Por otro lado, en cuanto a la ecuación de la energía, dada por 2.20, tenemos lo siguiente

$$\frac{T_n^* - T_{n-1}^*}{\Delta t^*} - \frac{1}{\sqrt{Pr * Ra}} D_L * T_n^* = NLT_n \quad (3.31)$$

De la misma manera que antes, recordamos que el factor no lineal NLT_n viene definido por la expresión 2.22, como sigue

$$NLT_n = (D_x * \Psi_n^*) * (D_z * T_n^*) - (D_z * \Psi_n^*) * (D_x * T_n^*) \quad (3.32)$$

A continuación nos encontramos con un problema a la hora de tratar de resolver el sistema. Dicha complicación radica en los términos no lineales, NLP y NLT , los cuales dificultan la resolución del sistema. Para resolver este problema se tomará la siguiente aproximación:

$$NLP_n \approx NLP_{n-1} \quad ; \quad NLT_n \approx NLT_{n-1} \quad (3.33)$$

Valorando estos términos en la estación precedente acarreamos un cierto error, pero permite simplificar notablemente la resolución del sistema, convirtiéndolo en uno lineal.

Finalmente, teniendo en cuenta los desarrollos y aproximaciones mostrados, tomando las ecuaciones 3.29 y 3.31, multiplicándolas por Δt^* , aplicando las aproximaciones sobre los términos no lineales

y reagrupando términos, se tiene

$$\underbrace{\left[D_L - \Delta t^* \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} D_L^2 \right]}_{A_\Psi} \Psi_n^* + \underbrace{[-\Delta t^* * D_x]}_{A_T} T_n^* = \underbrace{\Delta t^* * NLP_{n-1} + D_L * \Psi_{n-1}^*}_{b_\Psi} \quad (3.34)$$

$$\underbrace{[\emptyset]}_{B_\Psi} \Psi_n^* + \underbrace{\left[I - \frac{\Delta t^*}{\sqrt{Pr * Ra}} D_L \right]}_{B_T} T_n^* = \underbrace{\Delta t^* * NLT_{n-1} + T_{n-1}^*}_{b_T} \quad (3.35)$$

Vemos que en las ecuaciones 3.34 y 3.35 ya hemos introducido la definición de las submatrices que conforman el sistema. Teniendo definidas estas matrices, pasamos a la expresión formal del sistema a resolver, que es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} A_\Psi & A_T \\ B_\Psi & B_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_n^* \\ T_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_\Psi \\ b_T \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_\Psi & A_T \\ B_\Psi & B_T \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_\Psi \\ b_T \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} \Psi_n^* \\ T_n^* \end{bmatrix}; \quad A * x = b \quad (3.37)$$

Donde, como vimos con anterioridad, las submatrices del sistema vienen dadas por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} A_\Psi &= D_L - \Delta t^* \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} D_L^2 & A_T &= -\Delta t^* * D_x \\ B_\Psi &= \emptyset & B_T &= I - \frac{\Delta t^*}{\sqrt{Pr * Ra}} D_L \\ b_\Psi &= \Delta t^* * NLP_{n-1} + D_L * \Psi_{n-1}^* & b_T &= \Delta t^* * NLT_{n-1} + T_{n-1}^* \end{aligned} \quad (3.38)$$

En el programa de MATLAB empleado para analizar el desarrollo del sistema, se forman primeramente estas submatrices tal como sigue

```
% Matrices del sistema %
Apsi = DL-dt*sqrt(Pr/Ra)*DL2;
AT = -dt*Dx;
Bpsi = zeros(Nt,Nt);
BT = speye(Nt)-dt/sqrt(Pr*Ra)*DL;
```

A continuación, en cada instante de tiempo considerado (para lo cual se forma un bucle), se resuelve el sistema matricial descrito, tal y como se muestra a continuación

```
% Se forman los vectores NLP, NLT, bPsi y bT
% se modifican con condiciones de contorno
NLP(1:Nt,1) = (Dx*psinm1).*(DzDL*psinm1)-(Dz*psinm1).*(DxDL*psinm1);
NLT(1:Nt,1) = (Dx*psinm1).*(Dz*Tastnm1)-(Dz*psinm1).*(Dx*Tastnm1);
bpsi = (NLP*dt + DL*psinm1).*FBCpsi;
bT = (NLT*dt + Tastnm1).*FBCT + FBCT2 + FBCT3;

% Resuelve para t*_n
```

```
Asyst = [Apsi,AT;Bpsi,BT]; b = [bpsi; bT];
sol = Asyst\b;
psi(1:Nt,1) = sol(1:Nt,1); Tast(1:Nt,1) = sol(Nt+1:2*Nt,1);
```

Donde los factores FBC_{Ψ} , FBC_T , FBC_{T_2} y FBC_{T_3} corresponden a la aplicación de las condiciones de contorno y serán explicados en el siguiente subapartado.

3.1.4 Condiciones iniciales y de contorno

Comenzando por la implementación de las condiciones de contorno, tal y como se comentó en el apartado correspondiente a la formulación del problema, deben implementarse las siguientes condiciones:

- Para $x^* = 0 \rightarrow \Psi^* = 0 ; \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} = 0 ; \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = 0$
- Para $x^* = L/H \rightarrow \Psi^* = 0 ; \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} = 0 ; \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = 0$
- Para $z^* = 0 \rightarrow \Psi^* = 0 ; \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} = 0 ; \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = 1$
- Para $z^* = H \rightarrow \Psi^* = 0 ; \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} = 0 ; T^* = 1$

Observamos que debemos aplicar un total de doce condiciones de contorno, ocho para la función de corriente y cuatro para la temperatura. Estas condiciones serán aplicadas en el contorno del recinto, tal y como puede observarse, pero surge el siguiente problema; para las condiciones de contorno que debemos aplicar a la función de corriente, debemos incluir el concepto de subcontorno, puesto que resulta evidente que no podemos incluir las ocho condiciones en el contorno, el cual solamente permite la aplicación de cuatro (las cuatro paredes del recinto). El concepto de subcontorno se refiere a los puntos del recinto inmediatamente contiguos a los puntos del contorno, y viene esquematizado en la siguiente figura:

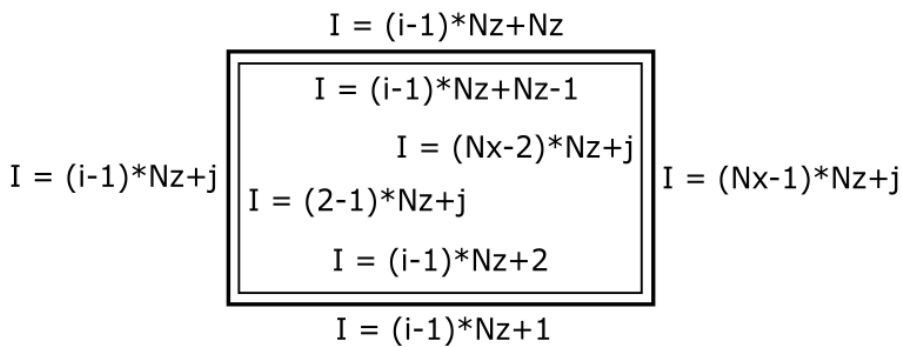


Figura 3.1 Representación de la discretización del contorno (exterior) y subcontorno (interior) del recinto.

De esta forma, para la aplicación de la condición de función de corriente nula emplearemos los nodos del contorno, mientras que para garantizar que su derivada (respecto de x^* o z^* , según el caso) sea nula, utilizaremos los nodos del subcontorno. La aplicación formal de las condiciones de contorno se enumera a continuación.

- Para la condición de la función de corriente nula en los contornos del recinto, haremos las siguientes modificaciones: para todo elemento con índice I correspondiente a un nodo del

contorno anulamos toda la fila I de las submatrices A_Ψ , A_T , B_Ψ y el elemento I de los vectores b_Ψ y b_T (para lo cual se emplean los factores FBC_Ψ y FBC_T comentados anteriormente), para después imponer que $A_\Psi(I,I) = 1$. De esta forma, en el código la implementación es como sigue

```
% CC en contornos horizontales (psi impuesta)
for i = 1:Nx
    % inferior
    I = (i-1)*Nz+1; Apsi(I,:) = 0; Apsi(I,I) = 1;
    AT(I,:) = 0; FBCT(I,1) = 0;
    Bpsi(I,:) = 0; FBCpsi(I,1) = 0;

    % superior
    I = (i-1)*Nz+Nz; Apsi(I,:) = 0; Apsi(I,I) = 1;
    AT(I,:) = 0; FBCT(I,1) = 0;
    Bpsi(I,:) = 0; FBCpsi(I,1) = 0;
end

% CC en contornos verticales (psi impuesta)
for j = 2:Nz-1
    % izquierda
    I = (1-1)*Nz+j; Apsi(I,:) = 0; Apsi(I,I) = 1;
    AT(I,:) = 0; FBCT(I,1) = 0;
    Bpsi(I,:) = 0; FBCpsi(I,1) = 0;

    % derecha
    I = (Nx-1)*Nz+j; Apsi(I,:) = 0; Apsi(I,I) = 1;
    AT(I,:) = 0; FBCT(I,1) = 0;
    Bpsi(I,:) = 0; FBCpsi(I,1) = 0;
end
```

- En cuanto a la condición de derivadas nulas de la función de corriente emplearemos el concepto de subcontorno, tal y como comentamos con anterioridad.
 - Para un nodo I perteneciente al subcontorno vertical izquierdo, anulamos las filas I de la submatriz A_T y los elementos I del vector b_Ψ . Por otro lado, sustituiremos la fila I de A_Ψ por la fila de la matriz D_x correspondiente al nodo $K = I - N_z$. En el caso de la pared opuesta, es decir, el subcontorno vertical derecho, solamente habría que tomar $K = I + N_z$.
 - En el caso de un punto I perteneciente al subcontorno horizontal inferior, se anulan las filas I de la matriz A_T y los elementos I del vector b_Ψ . Además, de modo similar al caso de los subcontornos verticales, sustituimos la fila I de la matriz A_Ψ por la fila de la matriz D_z que se corresponde al nodo $K = I - 1$. Por otro lado, en el caso del subcontorno horizontal superior, solamente habría que tomar $K = I + 1$.

A continuación mostramos el fragmento de código destinado a la implementación de estas condiciones de contorno:

```
% CC en subcontornos horizontales
```



```

for i=2:Nx-1
    % subcontorno inferior
    I = (i-1)*Nz+2; K = I-1;
    AT(I,:) = 0; Apsi(I,:) = Dz(K,:);
    FBCpsi(I,1) = 0;

    % subcontorno superior
    I = (i-1)*Nz+Nz-1; K = I+1;
    AT(I,:) = 0; Apsi(I,:) = Dz(K,:);
    FBCpsi(I,1) = 0;
end

% CC en subcontornos verticales
for j=3:Nz-2
    % subcontorno izquierdo
    I = (2-1)*Nz+j; K = I-Nz;
    AT(I,:) = 0; Apsi(I,:) = Dx(K,:);
    FBCpsi(I,1) = 0;

    % subcontorno derecho
    I = (Nx-2)*Nz+j; K = I+Nz;
    AT(I,:) = 0; Apsi(I,:) = Dx(K,:);
    FBCpsi(I,1) = 0;
end

```

- En cuanto a las condiciones de contorno para la temperatura, comenzamos por aquellas que aplicamos a los contornos verticales. Para imponer la condición de paredes adiabáticas, es decir, que la derivada espacial respecto de x de la temperatura sea nula, para cada nodo I perteneciente al contorno vertical, anulamos el elemento I del vector b_T , para lo que empleamos el factor FBC_T . Además, sustituimos la fila I de la matriz B_T por la fila correspondiente de la matriz D_x , quedando el código como sigue

```

% Condiciones de contorno para BT %
% Verticales (paredes adiabaticas, dT*/dx = 0)
for j = 2:Nz-1
    % izquierdo
    I = (1-1)*Nz+j;
    BT(I,:) = Dx(I,:); FBCt(I,1) = 0;

    % derecho
    I = (Nx-1)*Nz+j;
    BT(I,:) = Dx(I,:); FBCt(I,1) = 0;
end

```

- Finalmente, pasamos a las condiciones de contorno para la temperatura en los contornos horizontales. En este caso, debemos hacer una aclaración; en la aplicación de las condiciones de contorno anteriores, hemos impuesto que determinadas funciones fueran nulas. Para ello, hemos empleado los vectores FBC_Ψ y FBC_T , cuyos elementos en un principio eran todos iguales a la unidad, para después anular aquellos elementos que nos interesaban. Sin embargo,

la situación para esta condición de contorno y la siguiente es diferente, ya que no debemos anular, sino igualar a la unidad determinadas funciones. En este caso, el procedimiento a seguir será inverso, es decir, utilizaremos los vectores FBC_{T_2} y FBC_{T_3} , los cuales son creados como vectores nulos, para después igualar a la unidad los elementos que nos interesen, mientras que el vector FBC_T se seguirá empleando de la misma forma.

- Por un lado, en la pared horizontal inferior, debemos imponer la condición de derivada de la temperatura respecto de z impuesta, condición dada por el desarrollo mostrado en 3.21 - 3.23. Para ello, en cada nodo I perteneciente a este contorno, sustituimos la fila I de la matriz B_T por la fila correspondiente de la matriz D_z . Posteriormente, igualamos a la unidad los elementos I del vector b_T , para lo cual empleamos los vectores auxiliares FBC_T y FBC_{T_2} tal y como explicamos con anterioridad.
- En cuanto a la condición sobre la temperatura en el contorno horizontal superior, donde debemos imponer $T^* = 1$ (para que, dada la adimensionalización tomada, se cumpla que $T(z = H) = T_2$), procederemos como sigue; en cada nodo I correspondiente al contorno horizontal superior, anulamos la fila I de la matriz B_T , para después imponer $B_T(I,I) = 1$ (análogamente al procedimiento empleado para imponer la función de corriente nula en las paredes del recinto). A continuación, igualamos a la unidad los elementos I del vector b_T , para lo cual empleamos los vectores auxiliares FBC_T y FBC_{T_3} como explicamos anteriormente.

Por último, mostramos el código de MATLAB empleado para imponer las condiciones de contorno sobre la temperatura en los contornos horizontales.

```
% Condiciones de contorno para Bt %
% Horizontales
for i = 1:Nx
    % inferior (derivada de T* impuesta (=1))
    I = (i-1)*Nz+1;
    BT(I,:) = Dz(I,:); FBCt(I,1) = 0; FBCt2(I,1) = 1;

    % superior (T* impuesta (=1))
    I = (i-1)*Nz+Nz;
    BT(I,:) = 0; BT(I,I) = 1; FBCt(I,1) = 0; FBCt3(I,1) = 1;
end
```

Finalmente, pasamos a las condiciones iniciales que introduciremos en el sistema. Básicamente, introducimos una perturbación inicial en el sistema para que pueda darse una situación de equilibrio inestable, es decir, que pueda saltar la convección. Aun si no introducimos dicha perturbación inicial, el sistema, debido a errores de redondeo, puede alcanzar dicho régimen inestable, pero de esta forma permitimos que el sistema se desarrolle con mayor rapidez.

De esta forma, al inicio le damos tanto a la función de corriente como al campo de temperaturas unos valores distintos de aquellos correspondientes al régimen hidrostático, que se corresponden con la siguiente expresión:

$$\Psi^*(x^*, z^*, t^* = 0) = 0.0005(x^*)^2(x_{max}^* - x^*)^2(z^*)^2(z_{max}^* - z^*)^2 \cos\left(\frac{\pi^2 x^* z^*}{5x_{max}^* z_{max}^*}\right) \quad (3.39)$$

$$T^*(x^*, z^*, t^* = 0) = T_h^*(z^*) + 0.005 * \cos\left(\frac{2\pi(x^* - x_{min}^*)}{x_{max}^* - x_{min}^*}\right) * \sin\left(\frac{2\pi(z^* - z_{min}^*)}{z_{max}^* - z_{min}^*}\right) \quad (3.40)$$

Se han tomado estas expresiones para la perturbación inicial de forma que se cumplan las condiciones de contorno del problema. Por otro lado, uno podría pensar que la selección de estos valores iniciales es relativamente aleatoria, y es verdad. Sin embargo, esto no supone ningún problema, ya que, en base al trabajo de Pablo Ruiz Contreras llamado *El Método de Colocación para el problema de convección de Rayleigh-Bénard*, vemos que el efecto de la perturbación inicial seleccionada repercute obviamente en el régimen transitorio del sistema, pero en ningún caso afectará al régimen estacionario que se alcanza al final del desarrollo del mismo, por lo que tomaremos como aceptables las condiciones iniciales seleccionadas.

El código completo de MATLAB empleado para resolver el problema que se plantea, es decir, el análisis del fenómeno de convección de Rayleigh-Bénard en el recinto descrito, para el caso de flujo de calor por conducción aplicado en su base, se encuentra al final del proyecto, en el apéndice A.2.

3.2 Radiación

En este apartado desarrollaremos el método numérico empleado para resolver el sistema dado por las ecuaciones de Saltzman para el caso radiactivo (2.44 y 2.45), sujeto al cumplimiento de las condiciones iniciales y de contorno descritas con anterioridad. Se tomará un orden similar al empleado en el caso de conducción.

Antes de proceder, aclaramos que el método de diferencias finitas explicado para el caso conductivo es el mismo que se empleará en este nuevo caso, y por tanto evitamos realizar el mismo desarrollo por segunda vez. Una vez dada esta aclaración, pasamos al desarrollo del método numérico para el caso de radiación pura.

3.2.1 Distribución de temperatura hidrostática

En este caso la expresión adoptada por la distribución de equilibrio estable, es decir, la situación de equilibrio hidrostático, resulta más compleja que en el caso conductivo (donde era verdaderamente trivial, por otro lado).

Partimos de la expresión que nos proporciona la solución hidrostática

$$\frac{\partial T^*}{\partial z^*} = -\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial z^*} [1 + s(1 - T^*)] \quad (3.41)$$

Aplicando este resultado a la condición de contorno dada por 2.52, se tiene

$$-\frac{1}{4s} \frac{\partial}{\partial z^*} [1 + s(1 - T^*)]^4 = 1 \quad (z^* = 0) \quad (3.42)$$

Para la solución hidrostática ($T_h^*(z^*)$) la constancia del flujo adimensional (= 1) se da en todo z^* , y no solo en $z^* = 0$, por lo que integrando la expresión anterior obtenemos

$$[1 + s(1 - T_h^*)]^4 = -4sz^* + cte \quad (3.43)$$

Como $T_h^*(z^* = 1) = 1$ tenemos que $cte = 1 + 4s$, y por tanto

$$[1 + s(1 - T_h^*)]^4 = 1 + 4s(1 - z^*) \quad (3.44)$$

Y finalmente, despejando $T_h^*(z^*)$, obtenemos la expresión que utilizaremos para la distribución de temperatura hidrostática

$$T_h^*(z^*) = \frac{1}{s} [1 + s - [1 + 4s(1 - z^*)]^{1/4}] \quad (3.45)$$

Observamos que no solo depende de z^* , sino que también varía con el parámetro s , cuyo sentido físico fue explicado en el anterior capítulo. La siguiente gráfica nos muestra la dependencia de la distribución de la temperatura hidrostática respecto al parámetro s .

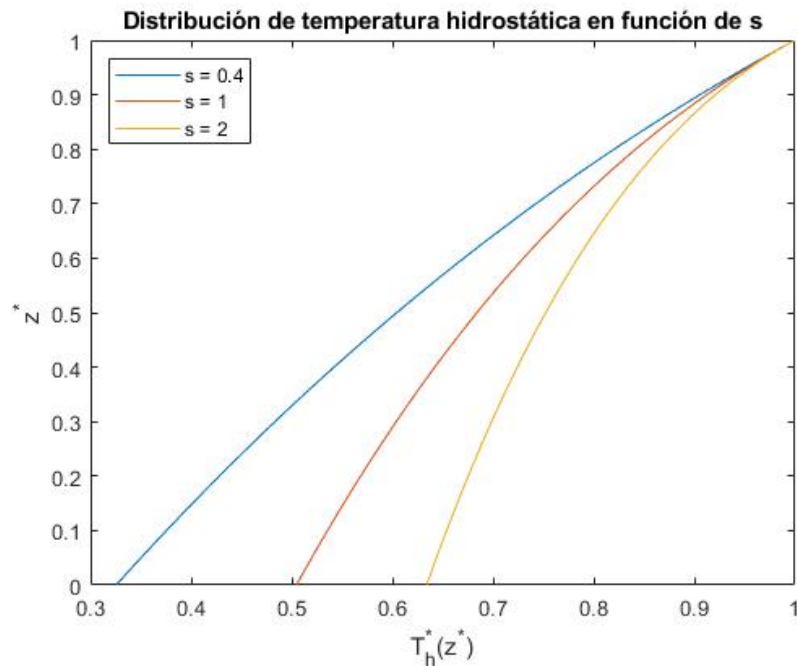


Figura 3.2 Distribución de temperatura hidrostática frente al parámetro s .

Observamos que al aumentar el espesor óptico del medio (parámetro s) se homogeneiza la distribución de temperaturas hidrostática ya que, como veremos, la radiación tiene un carácter estabilizador.

Finalmente, el sencillo fragmento de código empleado para calcular la distribución de temperatura hidrostática se muestra a continuación.

```
function Th = Thyd_Rad(s,Nz,zast)

for i = 1:Nz
    Th(i) = (1/s)*(1 + s - (1 + 4*s*(1-zast(i)))^(1/4));
end

% plot(Th,zast)

end
```

3.2.2 Implementación de las ecuaciones de Saltzman

Primero de todo, aclararemos que tanto el método de diferencias finitas, como los nodos empleados (de Chebyshev), como el método utilizado para las derivadas temporales, son todos idénticos a los que vimos en el caso de conducción, por lo que en este apartado obviaremos su explicación. Asimismo, también emplearemos el parámetro I para recorrer los nodos del recinto y tomaremos por válidas todas las aproximaciones anteriores (como la empleada para los factores no lineales de las ecuaciones de Saltzman, es decir, la aproximación 3.33).

Recordemos que el sistema de ecuaciones a resolver viene dado por las ecuaciones de Saltzman para el caso de radiación pura, que vienen dadas por

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\nabla^2 \Psi^*) - \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \nabla^4 \Psi^* - \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial}{\partial z^*}(\nabla^2 \Psi^*) - \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial x^*}(\nabla^2 \Psi^*) \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{s^3}{\sqrt{Pr Ra}} \nabla^2 (s^* - T^*)^4 = \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial T^*}{\partial z^*} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \quad (3.47)$$

El objetivo será, al igual que antes, llegar a un sistema como el representado por 3.36 y 3.37, solamente que en este nuevo caso (radiación pura) las submatrices del sistema tendrán expresiones diferentes a las que se muestran en 3.38, las cuales desarrollaremos en adelante.

Para empezar, observamos que la ecuación de cantidad de movimiento combinada es idéntica para los casos de conducción y radiación (ecuaciones 2.19 y 2.44), por lo que las expresiones de A_Ψ , A_T , b_Ψ y el factor no lineal NLP se implementan de la misma forma que en el caso de conducción, teniéndose lo siguiente

$$A_\Psi = D_L - \Delta t^* \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} D_L^2 \quad (3.48)$$

$$A_T = -\Delta t^* * D_x \quad (3.49)$$

$$b_\Psi = \Delta t^* * NLP_{n-1} + D_L * \Psi_{n-1}^* \quad (3.50)$$

$$NLP_n \approx NLP_{n-1} = (D_x * \Psi_{n-1}^*) * (D_z * D_L * \Psi_{n-1}^*) - (D_z * \Psi_{n-1}^*) * (D_x * D_L * \Psi_{n-1}^*) \quad (3.51)$$

A continuación procedemos al desarrollo de la ecuación de la energía (3.47), la cual sí presenta un cambio respecto al caso conductivo, un cambio que como veremos nos trae ciertas complicaciones. Para empezar, y de la misma forma que antes, aproximamos el término no lineal de la derecha de la siguiente forma

$$NLT_n \approx NLT_{n-1} = (D_x * \Psi_{n-1}^*) * (D_z * T_{n-1}^*) - (D_z * \Psi_{n-1}^*) * (D_x * T_{n-1}^*) \quad (3.52)$$

Por otro lado, el segundo término del miembro de la izquierda en 3.47 sí representa un problema, ya que nos aparecen términos no lineales que deberemos linealizar. Con ello nos referimos al siguiente término:

$$\frac{s^3}{\sqrt{Pr Ra}} \nabla^2 (s^* - T^*)^4$$

Podemos ver que mientras que en el caso conductivo el campo de temperatura al que afecta el laplaciano estaba elevado a la unidad (por lo que no hacía falta linealizar), en este caso se encuentra elevado a la cuarta potencia. Para solventar este problema computacional, empezaremos por mostrar la implementación inicial de esta ecuación (3.47), diferenciando ahora las variables en el instante t_n de las variables en el instante anterior (t_{n-1}), es decir

$$\frac{T_n^* - T_{n-1}^*}{\Delta t^*} + \frac{s^3}{\sqrt{Pr Ra}} D_L * (s^* - T_n^*)^4 = NLT_n \approx NLT_{n-1} \quad (3.53)$$

Donde recordemos que $s^* = (1/s) + 1$ y el término NLT_{n-1} viene dado por 3.52. A continuación linealizaremos paso a paso esta expresión, comenzando como sigue

$$\frac{T_n^* - T_{n-1}^*}{\Delta t^*} + \frac{s^3}{\sqrt{Pr Ra}} D_L * [(s^* - T_{n-1}^*) - (T_n^* - T_{n-1}^*)]^4 = NLT_n \approx NLT_{n-1} \quad (3.54)$$

Ahora debemos tener en cuenta que dado un paso de tiempo Δt^* lo suficientemente pequeño, se tiene que $T_n^* \approx T_{n-1}^*$, que por tanto $|T_n^* - T_{n-1}^*| \ll 1$ y entonces podemos asumir que $|T_n^* - T_{n-1}^*| \ll |s^* - T_{n-1}^*|$. Este hecho nos permitirá linealizar este término.

A continuación mostraremos un desarrollo que nos resultará de utilidad; supóngase el caso en que se quiere linealizar el término $(a - b)^4$ con $|b| \ll |a|$. Abriendo los paréntesis y desarrollando este término obtenemos lo siguiente

$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \quad (3.55)$$

Entonces, y teniendo en cuenta que $|b| \ll |a|$, despreciamos los términos con b^2 y con potencias superiores, al ser éstos de un orden menor que los restantes, llegándose a la siguiente aproximación

$$(a - b)^4 \approx a^4 - 4a^3b \quad (3.56)$$

Aplicando este resultado a nuestro problema, donde $a = (s^* - T_{n-1}^*)$ y $b = (T_n^* - T_{n-1}^*)$, tenemos

$$(s^* - T_n^*)^4 = [(s^* - T_{n-1}^*) - (T_n^* - T_{n-1}^*)]^4 \approx (s^* - T_{n-1}^*)^4 - 4(s^* - T_{n-1}^*)^3(T_n^* - T_{n-1}^*) \quad (3.57)$$

Aplicando este resultado a la ecuación 3.54 obtenemos

$$\frac{T_n^* - T_{n-1}^*}{\Delta t^*} + \frac{s^3}{\sqrt{Pr Ra}} D_L * [(s^* - T_{n-1}^*)^4 - 4(s^* - T_{n-1}^*)^3(T_n^* - T_{n-1}^*)] = NLT_n \approx NLT_{n-1} \quad (3.58)$$

Esta es la forma en que conseguimos linealizar la ecuación de la energía. De hecho, simplemente abriendo paréntesis, operando y reorganizando los términos obtenemos lo siguiente

$$\left[I - \frac{4\Delta t^* s^3}{\sqrt{Pr Ra}} D_L * (s^* - T_{n-1}^*)^3 \right] T_n^* = \Delta t^* * NLT_{n-1} + T_{n-1}^* - \frac{\Delta t^* s^3}{\sqrt{Pr Ra}} D_L * [(s^* - T_{n-1}^*)^4 + 4(s^* - T_{n-1}^*)^3 T_{n-1}^*] \quad (3.59)$$

De esta forma obtenemos las expresiones de los últimos elementos del sistema que nos faltaban, es decir

$$B_{\Psi} = \emptyset \quad (3.60)$$

$$B_T = I - \frac{4\Delta t^* s^3}{\sqrt{Pr Ra}} D_L * (s^* - T_{n-1}^*)^3 \quad (3.61)$$

$$b_T = \Delta t^* * NLT_{n-1} + T_{n-1}^* - \frac{\Delta t^* s^3}{\sqrt{Pr Ra}} D_L * [(s^* - T_{n-1}^*)^4 + 4(s^* - T_{n-1}^*)^3 T_{n-1}^*] \quad (3.62)$$

De esta forma, ya tenemos el sistema planteado y listo para su resolución. De hecho, el sistema a resolver es análogo al del caso conductivo, y viene dado por la misma expresión:

$$\begin{bmatrix} A_\Psi & A_T \\ B_\Psi & B_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_n^* \\ T_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_\Psi \\ b_T \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_\Psi & A_T \\ B_\Psi & B_T \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_\Psi \\ b_T \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} \Psi_n^* \\ T_n^* \end{bmatrix}; \quad A * x = b \quad (3.64)$$

Donde Ψ_n^* y T_n^* son las incógnitas del problema (función de corriente y campo de temperaturas en el instante t_n), y el resto de submatrices y vectores del sistema vienen dados por (3.48 - 3.50) y (3.60 - 3.62). Finalmente, recordamos que los términos no lineales del término independiente (denominados NLP y NLT) vienen dados por 3.51 y 3.52.

Para terminar con este subapartado aclaramos que en este caso no es posible definir todas las submatrices del sistema fuera del bucle, ya que en el caso de B_T , al incorporar en su cálculo términos de la estación anterior, debe incluirse dentro del mismo. De esta forma, mostramos a continuación el fragmento de código empleado para la definición y resolución del sistema.

Antes de entrar en el bucle tenemos

```
% Matrices del sistema %
% sin B_T que se define en el bucle
Apsi = DL-dt*sqrt(Pr/Ra)*DL2;
AT = -dt*Dx;
Bpsi = zeros(Nt,Nt);
```

Posteriormente, dentro del bucle se tiene

```
% Forma matriz BT y los vectores NLP, NLT, bPsi y bT %
% se modifican con condiciones de contorno
NLP(1:Nt,1) = (Dx*psinm1).*(DzDL*psinm1)-(Dz*psinm1).*(DxDL*psinm1);
NLT(1:Nt,1) = (Dx*psinm1).*(Dz*Tastnm1)-(Dz*psinm1).*(Dx*Tastnm1);
bpsi = (NLP*dt + DL*psinm1).*FBCpsi;
sast = (1/s) + 1;
sastTastnm1 = sast - Tastnm1;
sastTastnm1_2 = sastTastnm1.*sastTastnm1;
sastTastnm1_3 = sastTastnm1_2.*sastTastnm1;
sastTastnm1_4 = sastTastnm1_3.*sastTastnm1;
DL_1 = DL*spdiags(sastTastnm1_3,0,Nt,Nt);
DL_2 = DL*(sastTastnm1_4 + 4*sastTastnm1_3.*Tastnm1);
BT = speye(Nt) - 4*dtPrRa*(s^3)*DL_1;
bT = NLT*dt + Tastnm1 - dtPrRa*(s^3)*DL_2;
```

```

% (...) % Se omite la aplicación de condiciones de contorno

% Resuelve para t*_n
bT = bT.*FBCT + FBCT2 + FBCT3;
Asyst = [Apsi,AT;Bpsi,BT]; b = [bpsi; bT];
sol = Asyst\b;

```

Observamos que en este fragmento de código se ha omitido la parte en la que se implementan las condiciones de contorno, las cuales, al formarse la matriz B_T dentro del bucle, también deben implementarse dentro del mismo. El tratamiento de estas condiciones de contorno se verá en el siguiente subapartado, donde se explicará asimismo el sentido de los factores FBC_Ψ , FBC_T , FBC_{T_2} y FBC_{T_3} , de la misma forma que en el caso de conducción.

Por otro lado, vemos la forma en que se ha implementado el término $(s^* - T_{n-1}^*)^n$, con $n = 1, 2, 3, 4$, que ha sido componente a componente como podemos comprobar.

3.2.3 Condiciones iniciales y de contorno

En este caso pasamos al método numérico de implementación de las condiciones iniciales y de contorno. Por un lado, las condiciones iniciales son idénticas a las del caso de conducción y se emplean por los mismos motivos, por ello en este apartado obviaremos su explicación para evitar que el trabajo sea excesivamente repetitivo. Por otro lado, tal y como vimos en el capítulo correspondiente a la formulación del problema, las condiciones de contorno a implementar son las siguientes:

- Para $x^* = 0 \rightarrow \Psi^* = 0$; $\frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} = 0$; $\frac{\partial T^*}{\partial x^*} = 0$
- Para $x^* = L/H \rightarrow \Psi^* = 0$; $\frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} = 0$; $\frac{\partial T^*}{\partial x^*} = 0$
- Para $z^* = 0 \rightarrow \Psi^* = 0$; $\frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} = 0$; $[1 + s(1 - T^*)]^3 \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = 1$
- Para $z^* = H \rightarrow \Psi^* = 0$; $\frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} = 0$; $T^* = 1$

Es fácil comprobar que todas las condiciones de contorno salvo la aplicada en $z^* = 0$ para el campo de temperaturas son idénticas a las del caso de flujo conductivo, y por tanto su implementación numérica es exactamente igual en este nuevo caso, excepto por el hecho de que las condiciones de contorno sobre la temperatura se aplican ahora dentro del bucle por el motivo explicado anteriormente (los elementos de la matriz B_T deben definirse dentro del bucle por su naturaleza, ya que emplean valores de las incógnitas en la estación anterior). Es por este motivo que en este subapartado nos dedicaremos sola y exclusivamente a explicar la implementación de la siguiente condición de contorno, la única que sí cambia respecto del caso conductivo:

$$z^* = 0 \rightarrow [1 + s(1 - T^*)]^3 \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = 1 \quad (3.65)$$

Primeramente tratamos de implementar la condición de contorno dada por 3.65 de forma directa, es decir, imponiendo lo siguiente

$$z^* = 0 \rightarrow \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \frac{1}{[1 + s(1 - T^*)]^3} \quad (3.66)$$

Sin embargo, al aplicar la condición de contorno de esta forma el programa no convergía y daba ciertos errores evidentes, ya que existía una contradicción entre la aplicación de esta condición y la

aproximación hecha anteriormente para el término no lineal de la ecuación de la energía (aproximación dada por 3.57). De este modo, y para ser consecuentes con esta aproximación, decidimos abordar la aplicación de esta condición de contorno de una forma diferente.

Para empezar, la condición de contorno 2.52 puede ser escrita de la siguiente forma

$$-\frac{s^3}{4} \frac{\partial}{\partial z^*} (s^* - T^*)^4 = 1 \quad (3.67)$$

Aplicando un desarrollo de Taylor como hicimos con anterioridad, se tiene

$$(s^* - T_n^*)^4 = (s^* - T_{n-1}^*)^4 + 4T_{n-1}^* (s^* - T_{n-1}^*)^3 - 4T_n^* (s^* - T_{n-1}^*)^3 \quad (3.68)$$

Por tanto, aplicando este resultado a la expresión 3.67, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial z^*} (s^* - T_n^*)^4 = \frac{\partial}{\partial z^*} [(s^* - T_{n-1}^*)^4 + 4T_{n-1}^* (s^* - T_{n-1}^*)^3] - 4 \frac{\partial}{\partial z^*} [T_n^* (s^* - T_{n-1}^*)^3] = -\frac{4}{s^3} \quad (3.69)$$

Reorganizando términos se tiene

$$4 \frac{\partial}{\partial z^*} [T_n^* (s^* - T_{n-1}^*)^3] = \frac{4}{s^3} + \frac{\partial}{\partial z^*} [(s^* - T_{n-1}^*)^4 + 4T_{n-1}^* (s^* - T_{n-1}^*)^3] \quad (3.70)$$

De esta forma llegamos a la condición de contorno expresada en la forma en que la vamos a implementar, que queda tal y como sigue

$$\frac{\partial}{\partial z^*} [T_n^* (s^* - T_{n-1}^*)^3] = \frac{1}{s^3} + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial z^*} [(s^* - T_{n-1}^*)^3 (s^* + 3T_{n-1}^*)] \quad (3.71)$$

Por tanto, para implementar esta condición de contorno crearemos la matriz mbc_T y el vector vbc_T que vendrán definidos de la siguiente forma

$$mbc_T = D_z * (spdiags((s^* - T_{n-1}^*)^3)) \quad (3.72)$$

$$vbc_T = (1/4) * D_z * [(s^* - T_{n-1}^*)^3 .* (s^* + 3T_{n-1}^*)] \quad (3.73)$$

Una vez creados estos elementos, podremos aplicar la condición de contorno dada por 3.71 como explicamos a continuación.

- Para cada nodo I perteneciente al contorno horizontal inferior ($I = (i - 1) * Nz + 1$, con $i = 1 : N_x$), se sustituye cada fila I de la matriz B_T por la misma fila de la matriz mbc_T . A continuación se anula el elemento I del vector FBC_T y se asigna el valor $(1/s^3) + vbc_T(I)$ al elemento I del vector FBC_{T_2} . Aclaramos que los vectores de condiciones de contorno (FBC_T , FBC_{T_2} y FBC_{T_3}) se emplean de la misma forma en que se hizo en el caso de conducción.

De esta forma conseguimos implementar la nueva condición de contorno que, como vemos, ha resultado en ciertas complicaciones. Para terminar con este subapartado, mostramos el fragmento de código empleado para imponer esta condición de contorno.

```
% Matrices mbcT y vector vbcT definidos en las notas:
%
mbcT = Dz * spdiags(sastTastnm1_3,0,Nt,Nt);
vbcT = (1/4) * Dz * (sastTastnm1_3.*(sast+3*Tastnm1));
%
```

```
% Condiciones de contorno para BT %
% Horizontales
for i = 1:Nx
    % inferior (derivada de T* impuesta)
    I = (i-1)*Nz+1;
    % mbcT y vbcT para aplicar la condición de contorno
    BT(I,:) = mbcT(I,:); FBCT(I,1) = 0;
    FBCT2(I,1) = (1/s^3) + vbcT(I,1);
%
end
```

Para terminar con este apartado, y con el capítulo referente al método numérico, indicamos que, al igual que hicimos en el caso conductivo, el código completo que se ha empleado para resolver el sistema de ecuaciones y analizar la evolución del fluido en el caso de radiación se encuentra en el apéndice correspondiente (apéndice A.3).

4 Resultados numéricos. Caso de flujo de calor por conducción

En este apartado del proyecto analizaremos el fenómeno de convección de Rayleigh-Bénard dado, como se comentó anteriormente, el siguiente sistema:

Sea un recinto rectangular bidimensional de base L y altura H en cuyo interior se aloja un fluido caracterizado por el número de Prandtl, $Pr = \nu/\alpha$. Las paredes de dicho recinto son adiabáticas y rígidas, en la superficie superior se tiene una temperatura T_2 conocida, y en la base se aplica un flujo de calor por conducción, F , repartido uniformemente por toda la superficie inferior.

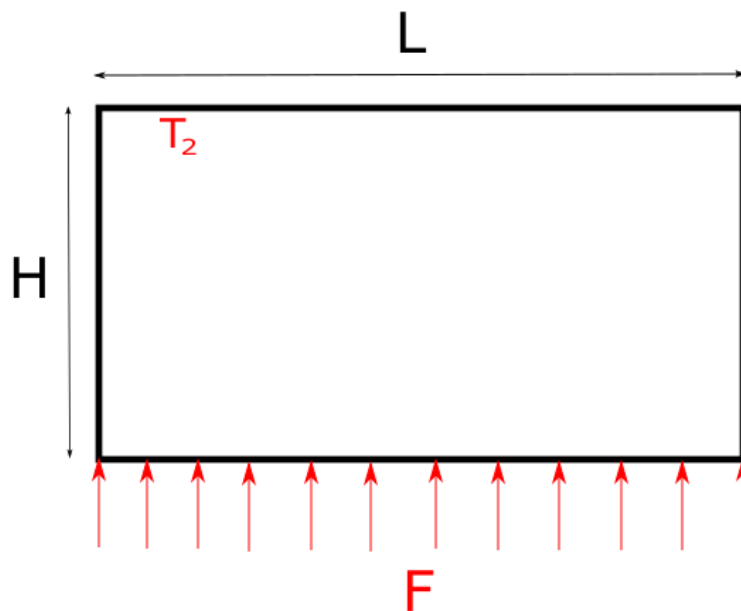


Figura 4.1 Representación gráfica para el caso de flujo conductivo.

Los resultados se han obtenido mediante el programa de cálculo numérico MATLAB. Tomando como base el código mostrado anteriormente, se han generado una serie de ficheros (los cuales no se han expuesto por no extender excesivamente el documento) y se han ejecutado para obtener las

diferentes gráficas y cálculos necesarios.

En los apartados en los que no se indique lo contrario, se ha tomado una relación de aspecto $AR = L/H = 2$ y un número de Prandtl $Pr = 0.733$.

4.1 Rayleigh crítico

Como se indicó con anterioridad, el número de Rayleigh (Ra) es un parámetro adimensional que aparece de forma natural al linealizar las ecuaciones de Navier-Stokes entorno a la solución de equilibrio correspondiente al régimen hidrostático. Dicho parámetro representa la relación entre los efectos de la fuerza de flotabilidad frente a los de viscosidad y conducción térmica. De los experimentos de Lord Rayleigh sobre dos placas infinitas a distinta temperatura entre las cuales se situaba un fluido newtoniano, se desprende la existencia de un valor crítico del número de Rayleigh (Ra_c). Para valores del Ra tales que $Ra > Ra_c$, los efectos del empuje de Arquímedes se superponen a los de fricción y conducción y se tiene que el sistema evoluciona pasando por un corto régimen transitorio hasta alcanzar un *equilibrio inestable* en el estacionario. Dicho equilibrio se caracteriza por la formación de células convectivas en el seno del fluido, y se dice, por tanto, que se da el régimen de convección de Rayleigh-Bénard. Por el contrario, en el caso de $Ra < Ra_c$, los efectos de la fuerza de flotabilidad no son suficientes para contrarrestar los de viscosidad y conducción térmica, y tras un corto transitorio, se alcanza un régimen estacionario de *equilibrio estable*. En este caso no se forman células convectivas y, por tanto, se dice que no se alcanza el régimen de convección antes citado.

En el caso del experimento de Rayleigh, donde se tenían dos placas infinitas a distinta temperatura ($T_{inferior} > T_{superior}$), el científico inglés obtuvo el valor de $Ra_c = 1708$, pero en nuestro caso, al tener un sistema diferente, no solo en cuanto al recinto, sino también respecto a las condiciones de contorno, el valor del número de Rayleigh crítico variará en nuestro caso.

4.1.1 Método de obtención del Rayleigh crítico

Existen varias formas diferentes de determinar el Ra_c . Se podría hacer de forma cualitativa, observando la evolución del sistema durante un tiempo suficientemente largo, para varios valores del Ra , y comprobando si se alcanza o no el régimen de células convectivas. Por otro lado, se podría realizar calculando el número de Nusselt característico del sistema, el cual representa la relación entre el calor transferido por conducción y convección, y del cual hablaremos más adelante. Esta forma de llevar a cabo el estudio resulta más formal y exacta, aunque en este caso hemos decidido emplear este método como comprobación de los resultados.

En nuestro caso, se ha propuesto el siguiente método para determinar el valor crítico del Rayleigh, es decir, el Ra_c . Primeramente, debemos tener en cuenta que en nuestros cálculos hemos tomado una expresión de la temperatura adimensional, T^* , tal que ésta se forma de dos componentes; por un lado, la distribución de temperaturas correspondiente al régimen hidrostático; por otro lado, una perturbación respecto a este estado de equilibrio. De esta forma, nos queda lo siguiente:

$$T^*(t^*, x^*, z^*) = T_h^*(t^*, z^*) + \theta^*(t^*, x^*, z^*) \quad (4.1)$$

Teniendo claro este concepto, vemos que la evolución del sistema difiere en un concepto clave en los casos de alcanzar un equilibrio estable o inestable. De hecho, tras un transitorio inicial que suele ser de duración muy corta, pueden ocurrir dos casos bien diferenciados:

- 1) Para valores pequeños de Ra , donde no se alcanza la convección, el valor de la perturbación en la temperatura, $\theta^*(t^*, x^*, z^*)$, disminuye sin cesar hasta alcanzar un valor nulo. En este

caso, que se corresponde con el de equilibrio estable, la solución final para el campo de temperatura, corresponde, en virtud de la ecuación 4.1, al caso de régimen hidrostático, ya que la perturbación vemos que tiende a cero.

- 2) Para valores altos de Ra , donde sí se alcanza la convección, el valor de la perturbación $\theta^*(t^*, x^*, z^*)$ no tiende a cero, sino que crece hasta cierto punto, donde se estabiliza y se alcanza el régimen estacionario.

En el segundo caso, el valor que alcanza, en media, la perturbación, será mayor cuanto mayor sea el Ra , de la misma forma que, en el primer caso, la tendencia de la perturbación a extinguirse será más rápida cuanto menor sea el Ra .

Observamos que existen tres periodos diferentes durante la evolución del sistema; un transitorio inicial, donde se forman las células de convección y la perturbación de la temperatura se estabiliza, de muy corta duración, un transitorio secundario, donde puede darse unos de los dos casos que acabamos de citar, de una duración mayor, y finalmente el régimen estacionario, donde el sistema alcanza el equilibrio, ya sea estable o inestable.

Para visualizar correctamente estos dos casos, vamos a mostrar la evolución de la perturbación en el medio del recinto y en distintos instantes de tiempo, es decir, $\theta^*(t^* = t_i, x^* = L/H/2, z^*)$, y los isocontornos de T^* , para dos valores del Ra , uno muy por debajo del Ra_c , y otro muy por encima.

Primeramente, tomando $Ra = 500 \ll Ra_c$ se tiene lo siguiente:

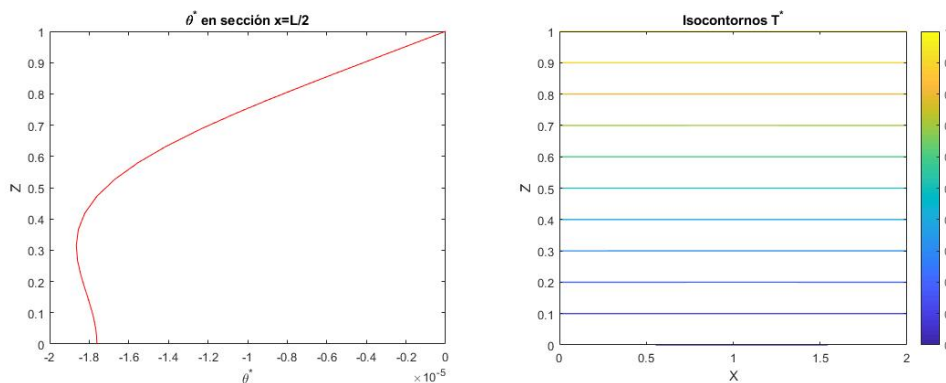


Figura 4.2 Representación de la perturbación en la temperatura en $x = L/2$ (izquierda) y los isocontornos de la temperatura adimensional (derecha) para $Ra = 500$ y $t^* = 10$.

Observamos cómo la perturbación calculada en el centro del recinto alcanza un valor máximo del orden de 10^{-5} al terminar el transitorio ($t^* = 10$). A continuación vemos cómo evoluciona el sistema tras este instante:

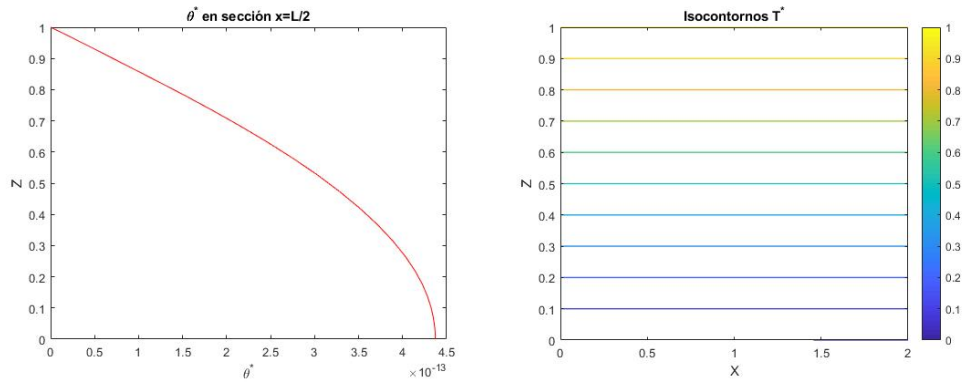


Figura 4.3 Representación de la perturbación en la temperatura en $x = L/2$ (izquierda) y los isocontornos de la temperatura adimensional (derecha) para $Ra = 500$ y $t^* = 100$.

Vemos que transcurrido un cierto tiempo (alcanzamos el instante $t^* = 100$) la perturbación ha disminuido considerablemente (su máximo es ahora del orden de 10^{-13}). Debido a ello, las líneas de isocontornos de T^* permanecen rectas, representación del régimen hidrostático en el que permanece el sistema. En este caso, evidentemente, no salta la convección.

A continuación, mostramos los resultados obtenidos tomando ahora $Ra = 5000 \gg Ra_c$, donde se tiene

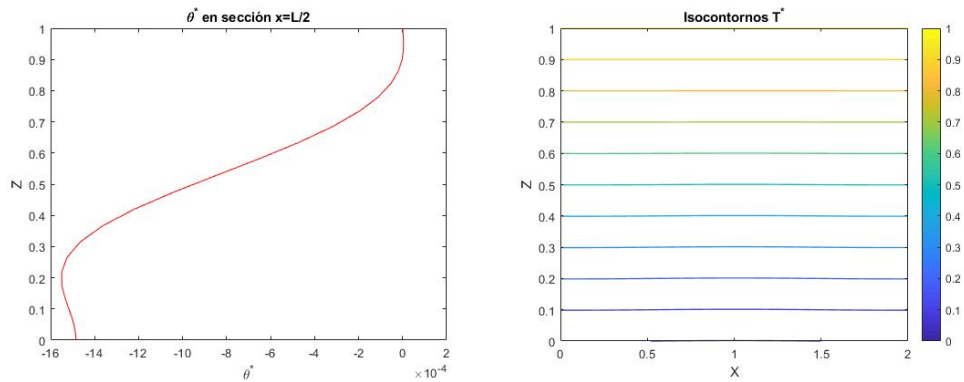


Figura 4.4 Representación de la perturbación en la temperatura en $x = L/2$ (izquierda) y los isocontornos de la temperatura adimensional (derecha) para $Ra = 5000$ y $t^* = 5$.

Observamos que en el instante $t^* = 5$, donde ha pasado un corto transitorio, la magnitud de la perturbación respecto del caso hidrostático es muy pequeña, del orden de 10^{-3} , y por ello los isocontornos de T^* siguen siendo líneas rectas, pues la distribución de temperaturas se corresponde a la de equilibrio hidrostático. Sin embargo, si dejamos pasar el tiempo hasta $t^* = 100$, donde se ha alcanzado el régimen estacionario, se observa lo siguiente:

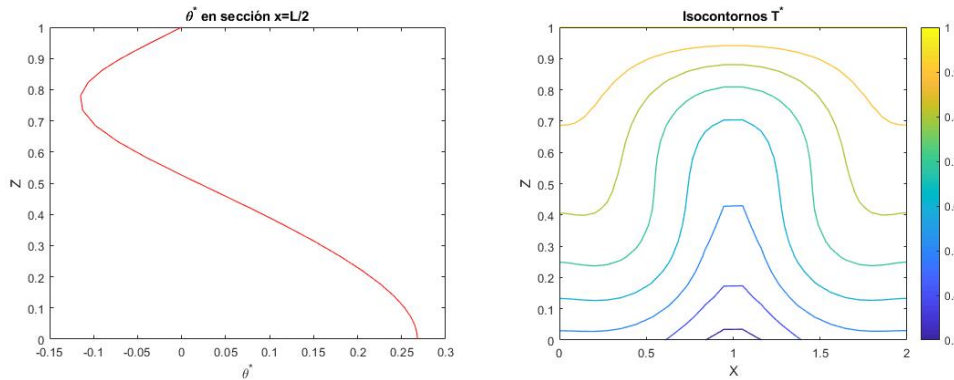


Figura 4.5 Representación de la perturbación en la temperatura en $x = L/2$ (izquierda) y los isocontornos de la temperatura adimensional (derecha) para $Ra = 5000$ y $t^* = 100$.

Vemos que el valor de la perturbación en la sección media del recinto ha crecido considerablemente, siendo su máximo del orden de 10^{-1} . Los efectos que ello tiene sobre los isocontornos es más que evidente, ya que se ve una curvatura pronunciada en ellos, muestra de que efectivamente se ha producido el fenómeno de convección. De hecho, esta gráfica nos indica que el flujo frío asciende por el medio del recinto a medida que aumenta su temperatura, mientras que el flujo caliente desciende por los laterales, enfriándose.

Para visualizar mejor este fenómeno, mostraremos, en la misma situación ($Ra = 5000$, $t^* = 100$), la gráfica correspondiente a la función de corriente, $\Psi(t^* = 100, x^*, z^*)$, así como el campo de velocidades del fluido, representado por los vectores cuyas componentes son $v_x(t^* = 100, x^*, z^*) = \partial\Psi/\partial z$ y $v_z(t^* = 100, x^*, z^*) = -\partial\Psi/\partial x$

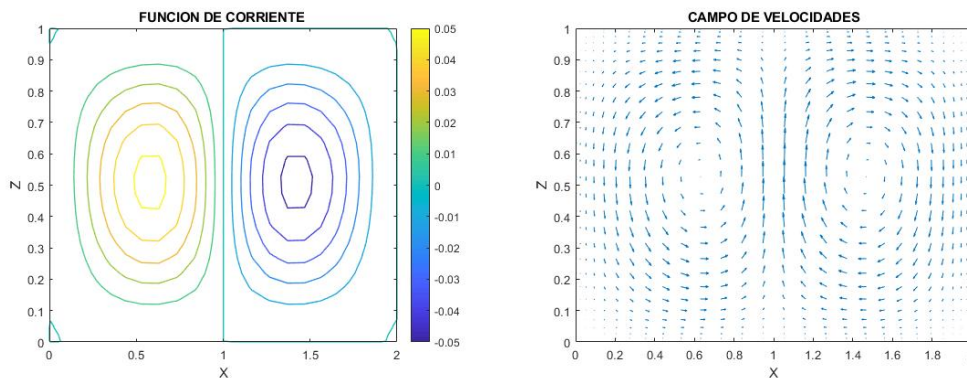


Figura 4.6 Representación de la función de corriente (izquierda) y el campo de velocidades (derecha) para $Ra = 5000$ y $t^* = 100$.

Ahora que hemos visualizado bien los dos casos que pueden darse en función del número de Rayleigh, es decir, sistema en equilibrio estable e inestable, explicaremos la condición que se ha tomado para hallar el valor del Ra que separa ambos casos, es decir, Ra_c , el Rayleigh crítico. Teniendo en cuenta lo explicado con anterioridad, tras un corto periodo transitorio inicial, de una duración corta (entre $t^* = 1$ y $t^* = 10$, dependiendo del Ra), se alcanza el régimen transitorio secundario, donde puede ser que la perturbación sobre el campo de temperaturas hidrostático tienda a cero (se alcanzaría un equilibrio estable, sin convección), o que dicha perturbación crezca hasta un valor más o menos grande en función del número de Rayleigh. Nuestro Ra_c será el valor del Ra para el que la perturbación no tienda a cero, pero que su incremento durante el transitorio secundario

sea el mínimo posible. Así, se ha tomado como valor de referencia de la perturbación, la media del valor absoluto de la perturbación en todos los nodos del sistema, ya que de esta forma tenemos en cuenta el modo en que se desarrolla el flujo en todos los puntos del recinto. Dicha perturbación media se calcula a través de la siguiente expresión:

$$\bar{\theta}^*(t^*) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_z} \frac{|\theta^*(t^*, x_i^*, z_j^*)|}{N_x * N_z} \quad (4.2)$$

Tomando este valor como representativo de la perturbación, se ha hecho un barrido tomando muchos valores del Ra , y se ha determinado que el Rayleigh crítico, será el valor de Ra para el cual la variación relativa de la media de la perturbación sobre el caso hidrostático, sea mínima durante el periodo transitorio secundario. De hecho se han hecho barridos sucesivos, en cada uno tomando rangos de Ra menores, pero con un paso proporcionalmente menor para aumentar la precisión.

4.1.2 Resultado

Empleando el criterio explicado anteriormente, se ha obtenido que el Rayleigh crítico, dado el sistema planteado con flujo impuesto en la base, relación de aspecto $AR = 2$, y número de Prandtl, $Pr = 0.733$, se corresponde con el valor numérico $Ra_c = 1617.6 \pm 0.1$. Comparando este resultado con el obtenido por Pablo Ruiz Contreras en el proyecto *El Método de Colocación para el problema de convección de Rayleigh-Bénard*, vemos que nuestro valor del Ra_c es considerablemente menor que el suyo, correspondiente a $Ra_c = 2014$. La explicación de esta diferencia en los resultados radica en las condiciones que se imponen al sistema. En su caso, se imponía una diferencia relativa de temperatura entre la superficie superior e inferior del recinto, mientras que en nuestro caso se impone un flujo de calor por conducción en la base. Observamos que una modificación en las condiciones de contorno del problema puede llegar a cambiar mucho sus resultados más fundamentales (en este caso, el valor crítico del Rayleigh).

La precisión tomada para el cálculo de Ra_c resulta más que suficiente para satisfacer los objetivos propuestos. Además, como veremos más adelante, las sucesivas comprobaciones hechas en los demás cálculos nos aseguran que este valor de Ra_c es correcto y suficientemente preciso.

Para este valor del número de Rayleigh vemos la siguiente situación cuando se alcanza el estacionario:

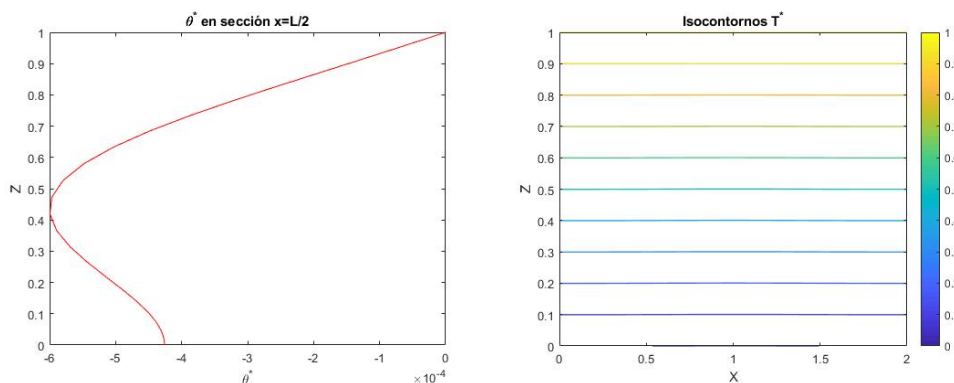


Figura 4.7 Representación de la perturbación en la temperatura en $x = L/2$ (izquierda) y los isocontornos de la temperatura adimensional (derecha) para $Ra = Ra_c$ y $t^* = 50$.

Observamos que, a pesar de que la perturbación es muy pequeña (valor máximo del orden de 10^{-4}), ésta no tiende a disiparse (debemos tener en cuenta que en la gráfica mostrada ya se ha

alcanzado el régimen estacionario, por lo que el sistema no varía con el tiempo alcanzado este punto). Por otro lado, al ser tan insignificante la magnitud de la perturbación, la distribución de temperatura se corresponde 'casi' perfectamente a la de equilibrio hidrostático.

4.2 Relación de aspecto y Rayleigh crítico

Como hemos visto anteriormente, para una relación de aspecto $AR = 2$, tenemos que $Ra_c = 1617.6$ (de ahora en adelante, buscando simplicidad, se obviará el margen de error). A continuación veremos cómo varía dicho valor crítico del Ra en función de la relación de aspecto del recinto, AR , que es básicamente la relación existente entre el largo del recinto frente a su altura, es decir, $AR = L/H$.

Empleando el mismo criterio que en el apartado anterior, y tomando un rango de valores de la relación de aspecto suficientemente grande para poder sacar conclusiones bien fundamentadas ($0.5 \leq AR \leq 10$), obtenemos la siguiente relación entre el Rayleigh crítico frente a la relación de aspecto del recinto:

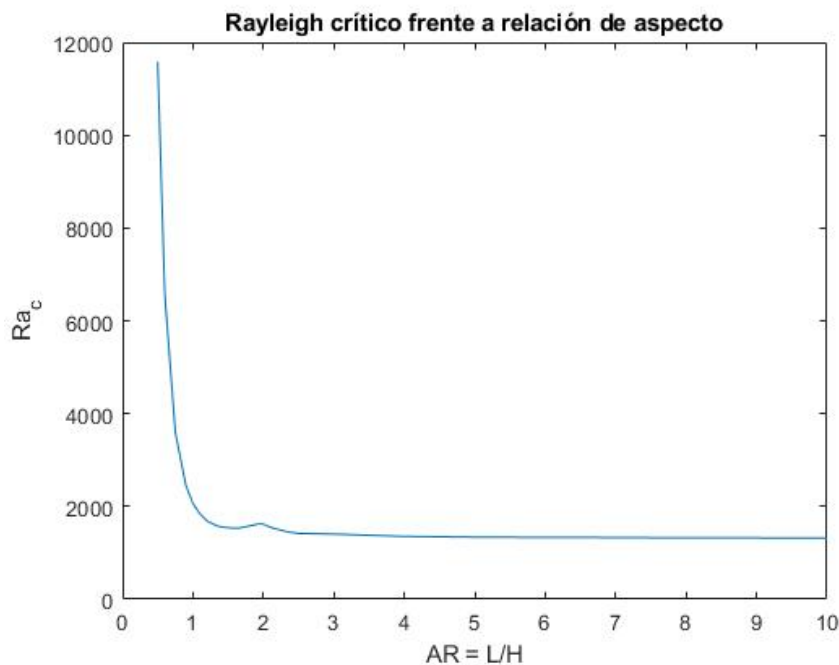


Figura 4.8 Relación entre el Rayleigh crítico y la relación de aspecto.

En la gráfica anterior vemos perfectamente cómo, en general, el valor crítico del Ra , a partir del cual podemos decir que se produce el fenómeno de convección, disminuye a medida que aumentamos la relación de aspecto. Este resultado es bastante lógico y esperado, dado que al ser mayor la base respecto a la altura del recinto, y debido a la forma en que se generan las células de convección (dispuestas horizontalmente, una junto a la otra), dichas células disponen así de un mayor espacio para formarse, lo cual facilita el salto a la convección y, por tanto, al aumentar la AR , disminuye el Ra_c .

Por otro lado, vemos que el resultado obtenido es coherente respecto a la literatura; es interesante ver que en el trabajo *Internally Heated Convection and Rayleigh-Bénard Convection*, de David Goluskin, publicado en el 2016 (vemos que es un tema de actualidad), se analiza también el caso que nos concierne, aunque ligeramente distinto. En su caso, Goluskin hace un estudio de un recinto

formado por dos placas infinitas (como en el caso de Lord Rayleigh), con un fluido entre ellas, y donde se tiene un flujo de calor constante incidente en la placa inferior. En su caso, él obtiene el resultado $Ra_c = 1295.78$, valor que comprobamos que es cercano al obtenido por nosotros para $AR = 10$ (la mayor relación de aspecto que hemos tomado), donde tenemos $Ra_c = 1320$ y, viendo la tendencia decreciente del Rayleigh crítico frente a la relación de aspecto, no extraña que su valor para $AR \rightarrow \infty$ tienda al obtenido por Goluskin.

Sin embargo, aparte del resultado observado sobre la figura 4.8, vemos un fenómeno que salta a la vista. Vemos cómo cerca del punto en que $AR = 2$ tenemos un pequeño rango de valores de la relación de aspecto para los cuales se da una situación contraria a la esperada: al aumentar AR , en vez de disminuir, el Ra_c aumenta, aunque sea levemente. Movidos por pura curiosidad y afán investigador, tratamos de descubrir qué fenómeno es el que propicia un resultado tan inesperado como sorprendente. Con este objetivo en mente, observamos que, en base a un análisis posterior, tal y como veremos en el próximo apartado (donde analizamos el número de células convectivas del sistema), resulta que la zona donde aumenta el Rayleigh crítico con la relación de aspecto ($AR \simeq 2$), coincide con los valores de AR para los que se pasa de tener una célula de convección a tener dos. Para comprobar si estos dos sucesos (aumento de Ra_c y aumento del número de células convectivas) tienen efectivamente alguna relación, decidimos reproducir la gráfica de la figura 4.8, pero en el tramo $2.5 \leq AR \leq 5.5$, y con un paso menor para la relación de aspecto, obteniendo el siguiente resultado:

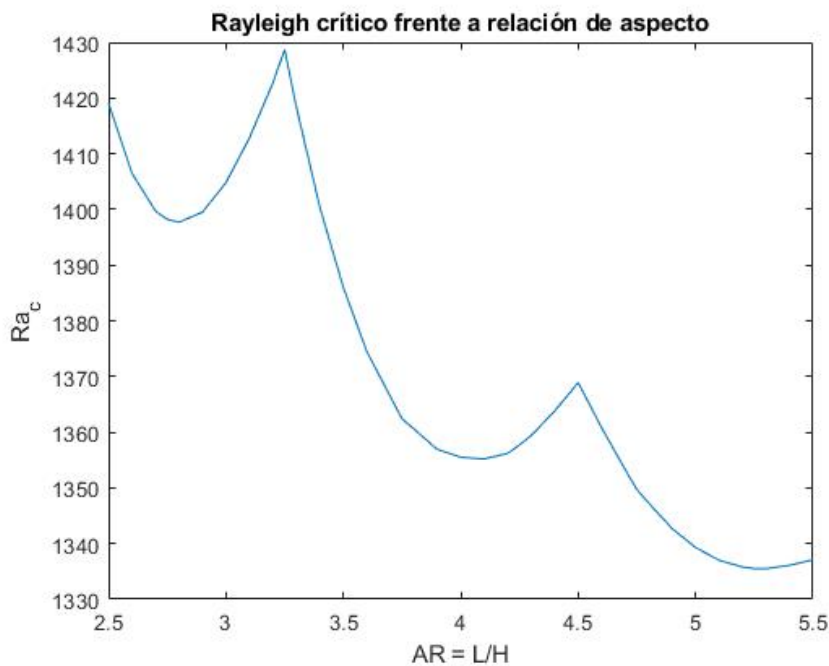


Figura 4.9 Relación entre el Rayleigh crítico y la relación de aspecto, apreciación en el tramo $2.5 \leq AR \leq 5.5$.

Necesitamos algunos resultados del siguiente apartado para poder interpretar la gráfica. Como veremos, en los puntos $AR = 3.3$ y $AR = 4.6$ es donde se pasa, para $Ra = Ra_c(AR)$, de tener dos a tres células convectivas, y de tres a cuatro, respectivamente. Estos resultados desprenden una relación interesante respecto a lo que podemos observar en la gráfica anterior. Al igual que ocurre cuando pasamos de una a dos células para $Ra = Ra_c(AR)$ (en $AR = 2$), en este caso vemos que, antes de que se aumente definitivamente el número de células convectivas, el valor del Rayleigh

crítico aumenta levemente hasta alcanzar el punto en que se termina de formar la célula adicional, momento en que el Ra_c vuelve a disminuir, recobrando el comportamiento general que presenta frente a la relación de aspecto. A continuación, el valor de AR para el que se pasa de tener n a tener $n + 1$ células, para $Ra = Ra_c(AR)$, lo denominaremos AR_n . Viendo los resultados obtenidos, observamos que cuando $AR \rightarrow AR_n^-$, el Rayleigh crítico aumenta levemente, mientras que para relaciones de aspecto tales que $AR \geq AR_n$ y $AR \ll AR_{n+1}$, el Ra_c vuelve a disminuir, siguiendo su comportamiento general. Este efecto se debe a que, cuando $AR \rightarrow AR_n^-$, se generan muchas inestabilidades en el sistema, puesto que, aunque finalmente se formen n células, el sistema está muy próximo al estado en que se dan $n + 1$, y ello hace que el transitorio inicial sea especialmente largo y se dificulte el salto a la convección por pérdidas de energía derivadas de este proceso.

4.3 Número de células convectivas

Anteriormente, cuando calculamos el Rayleigh crítico (sección 4.1), se tenía una relación de aspecto $AR = 2$, donde observamos que se formaban dos células convectivas, tal y como podíamos apreciar en la figura 4.6. Sin embargo, tal y como se indicó en el apartado anterior, el número de células de convección que se forman en el sistema depende de las características de este. En este apartado, analizaremos la dependencia de dicho número de células con dos factores: por un lado, la relación de aspecto, AR , y, por otro, el número de Rayleigh, Ra .

4.3.1 Número de células y relación de aspecto

A continuación veremos la dependencia existente entre la relación de aspecto, es decir, $AR = L/H$, y el número de células convectivas que se dan en el sistema. Ya que este número, como se ha indicado con anterioridad, depende a su vez del Ra , en todo caso tomaremos $Ra = Ra_c(AR)$, aprovechando el resultado obtenido en el apartado anterior.

En este caso, el método seguido consiste simplemente en ejecutar el código y representar en ciertas estaciones la función de corriente para ver cómo evoluciona a lo largo del tiempo. Con ello, cuando el sistema alcanza el régimen estacionario, es fácil comprobar visualmente cuántas células se forman. Hemos realizado un barrido con muchos valores de la AR con el objetivo de hallar los puntos en que varía el número de células. Tal y como indicamos en el apartado anterior, denominamos AR_n al valor de la relación de aspecto para la que se pasa por primera vez de n a $n + 1$ células, y se ha tomado un margen de error de ± 0.1 , lo cual se considera suficiente respecto a los objetivos propuestos. Siguiendo este procedimiento, se obtienen los siguientes resultados, expresados en forma de tabla:

Tabla 4.1 Valores de AR_n para $n \leq 7$.

| | |
|--------|-----|
| AR_1 | 2.0 |
| AR_2 | 3.3 |
| AR_3 | 4.6 |
| AR_4 | 5.8 |
| AR_5 | 7.1 |
| AR_6 | 8.4 |
| AR_7 | 9.8 |

Sin embargo, posiblemente el resultado se visualice mejor en forma de gráfica, por lo que a continuación mostramos los valores de la tabla 4.1 de esta forma:

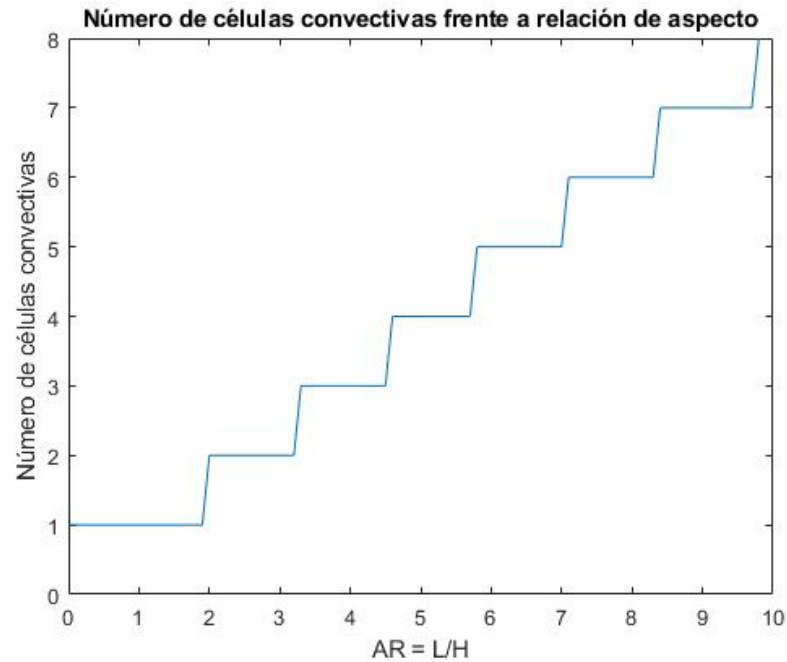


Figura 4.10 Número de rollos en función de la relación de aspecto para $Ra = Ra_c(AR)$.

Hemos decidido dejar el cálculo al llegar a AR_7 , pues los resultados obtenidos son suficientes para sacar las conclusiones necesarias. Observamos que el resultado general es que al aumentar la relación de aspecto, AR , aumenta a su vez el número de células de convección. Este resultado es evidente ya que, dada la forma en que se distribuyen las células (horizontalmente), al aumentar AR , es decir, al aumentar el largo del recinto frente a su altura, estas células tienen más espacio para producirse y, por tanto, se forman en mayor número.

Finalmente, para que pueda visualizarse mejor el método empleado, así como la formación de múltiples células de convección, mostraremos en algunas gráficas la función de corriente una vez alcanzado el régimen estacionario, para diferentes valores de la relación de aspecto, y tomando $Ra = Ra_c(AR)$ en todo caso. Así podremos ver mejor la forma que tienen de distribuirse las células en el recinto:

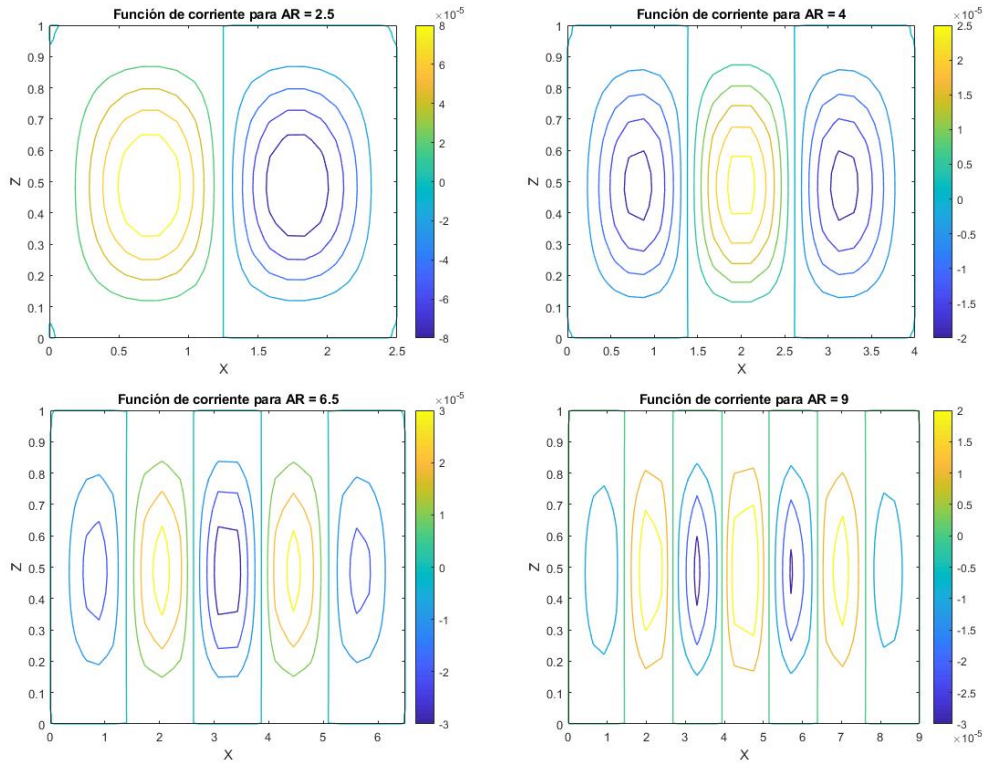


Figura 4.11 Función de corriente una vez alcanzado el régimen estacionario para $Ra = Ra_c(AR)$ (relación de aspecto en cada caso indicada sobre la gráfica correspondiente).

En estas gráficas podemos ver cómo se cumple lo presentado en la tabla 4.1 y observamos además cómo aumenta el número de células convectivas al incrementar la relación de aspecto.

4.3.2 Número de células y Rayleigh

En este subapartado analizaremos la influencia del Ra en el número de células que se forman una vez alcanzado el régimen estacionario. Para estudiar dicha influencia, representaremos la función de corriente en el estacionario de la misma forma que hicimos en el subapartado anterior, ya que resulta muy sencillo e intuitivo determinar el número de células de convección al observar esta gráfica.

El método que emplearemos en este caso será el siguiente: para empezar, tomaremos dos valores concretos de la relación de aspecto, concretamente analizaremos los casos $AR = 4$ y $AR = 4.5$. Hemos elegido estos dos valores ya que, en vista de los resultados mostrados en la tabla 4.1 y en la figura 4.9, tenemos que el caso $AR = 4$ representa un punto alejado de aquél en el que se aumenta el número de rollos ($AR_3 = 4.6$), mientras que el valor $AR = 4.5$ se encuentra muy cercano a este punto. Por otro lado, para cada valor de la relación de aspecto ($AR = 4$ y $AR = 4.5$) analizaremos para qué valor del Ra , o mejor dicho, para qué valor de la relación $Ra/Ra_c(AR)$, se pasa a tener una célula convectiva adicional. Dicho de otro modo, en ambos casos ($AR = 4$ y $AR = 4.5$), para $Ra = Ra_c(AR)$, o lo que es lo mismo, para $Ra/Ra_c(AR) = 1$, se forman tres células de convección. En el proceso, hemos aumentado poco a poco el valor del parámetro $Ra/Ra_c(AR)$ hasta llegar al estado en que se forman no tres, sino cuatro células. A dicho valor mínimo de $Ra/Ra_c(AR)$ que hace que aparezca una célula convectiva más le llamaremos $\frac{Ra}{Ra_c}|_{critico}$, que a su vez será función de AR , como comprobaremos. El resultado que a continuación se mostrará nos servirá también para corroborar que el valor de $AR_3 = 4.6$ es correcto y suficientemente preciso.

Una vez ejecutado este procedimiento, hemos obtenido los siguientes resultados:

Tabla 4.2 Valor crítico de $Ra/Ra_c(AR)$ para $AR = 4$ y $AR = 4.5$.

| AR | $\frac{Ra}{Ra_c} _{critico}$ |
|------|------------------------------|
| 4 | 1.734 |
| 4.5 | 1.000877 |

Teniendo en cuenta que $AR_2 = 3.3 < AR = 4$, $AR = 4.5 < AR_3 = 4.6$, vemos en este resultado dos casos diferentes. Primeramente, tenemos el caso de $AR = 4$, un valor alejado de AR_3 , y por tanto, un valor de la relación de aspecto para el que tenemos que aumentar sustancialmente el Ra respecto del Ra_c para que se forme una célula convectiva adicional; de hecho, vemos que para un aumento del 73.4% sobre el Rayleigh crítico es cuando se pasan a tener cuatro células en vez de tres. Por otro lado, tenemos el caso en que $AR = 4.5$, un valor de la relación de aspecto muy cercano a $AR_3 = 4.6$, por lo que en este caso el incremento necesario en el Ra respecto al Ra_c para que se forme una célula adicional es mucho menor. De esta forma, tenemos que aumentando el número de Rayleigh tan sólo un 0.0877% aparece la cuarta célula de convección. Éste es un síntoma de que, efectivamente, el valor $AR = 4.5$ se encuentra mucho más cerca de AR_3 que el valor anterior, es decir, $AR = 4$.

4.4 Número de Nusselt

En este caso analizaremos la importancia que tiene el parámetro adimensional conocido como *número de Nusselt* en cuanto a su influencia sobre nuestro sistema y cómo puede caracterizarlo en lo concerniente a la forma de transferencia de calor. Primeramente, haremos un estudio del número de Nusselt (en adelante, Nu) para entender su significado y la forma de su obtención.

Comenzaremos tomando la ecuación de la energía para el caso que nos atañe, es decir, flujo de calor por conducción impuesto en la base, con lo que se tendría lo siguiente:

$$\rho_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_0 c_p v_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho_0 c_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (4.3)$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = 0$$

La expresión 4.3 puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\rho_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \rho_0 c_p \frac{\partial}{\partial x} (v_x T) - \rho_0 c_p \frac{\partial}{\partial z} (v_z T) \quad (4.4)$$

Integrando entre $x = 0$ y $x = L$, y como $k \frac{\partial T}{\partial x} = 0$ y $v_x = 0$ tanto en $x = 0$ como en $x = L$, tenemos la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^L \rho_0 c_p T(x,z) dx \right] = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\int_0^L -k \frac{\partial T}{\partial z}(t,x,z) dx + \int_0^L \rho_0 c_p v_z(x,z) T(t,x,z) dx \right] \quad (4.5)$$

Integrando ahora entre $z = 0$ y z genérico, como $-k\frac{\partial T}{\partial z}(t,x,z=0) = F$ y $v_z(t,x,z=0) = 0$ se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^z \int_0^L \rho_0 c_p T(t,x,z_0) dx dz_0 \right] = - \left[\underbrace{\int_0^L -k \frac{\partial T}{\partial z_0}(t,x,z_0=z) dx}_{F_{conduccion}(t,z)} + \underbrace{\int_0^L \rho_0 c_p v_z(t,x,z_0=z) T(t,x,z_0=z) dx}_{F_{conveccion}(t,z)} \right] + FL \quad (4.6)$$

Donde el término de la izquierda representa la variación respecto al tiempo de la energía térmica extendida en el dominio $0 \leq x \leq L$ y $0 \leq z_0 \leq z$. Finalmente, el último término de la derecha refleja el flujo introducido en el dominio a través de la base del recinto. Para facilitar la visualización de este resultado será conveniente observar la siguiente representación, donde se ven los diferentes flujos de calor que entran y salen del dominio:

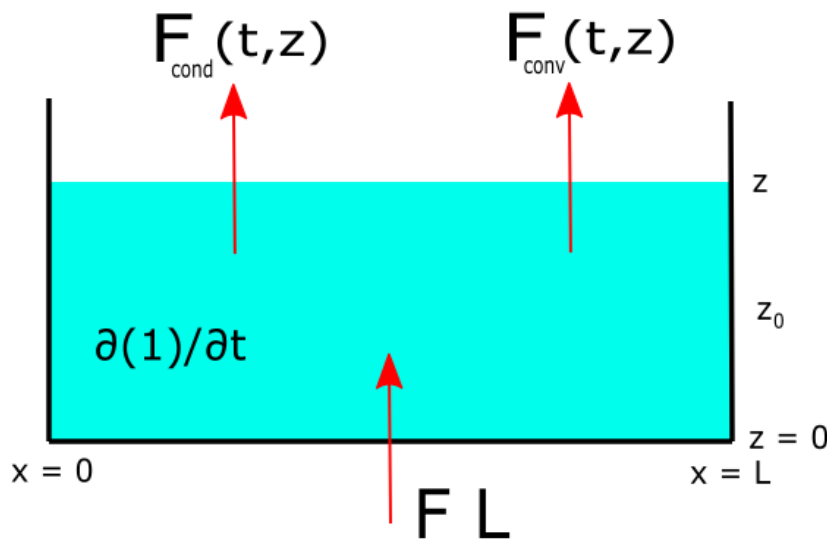


Figura 4.12 Esquema de los flujos de calor que interactúan con el dominio $0 \leq x \leq L$ y $0 \leq z_0 \leq z$.

Donde, evidentemente, los términos F_{cond} y F_{conv} se refieren a los flujos de calor que salen del dominio por conducción y convección, y se corresponden con los términos así indicados de la ecuación 4.6. Asimismo, el término que aparece dentro del dominio como $\partial(1)/\partial t$ equivale al término de la izquierda de la ecuación 4.6, el cual dijimos que representaba la variación temporal de la energía térmica extendida en el dominio. De hecho, la correlación entre la ecuación 4.6 y la figura 4.12 resulta evidente; la variación temporal de la energía térmica en el dominio es igual al total del flujo de calor que entra en él (FL) menos el flujo que sale (es decir, F_{cond} y F_{conv}). Las expresiones de estos términos, que se pueden visualizar en la imagen, vienen dadas en la ecuación anterior.

A continuación llamaremos $F_{total} = F_{cond} + F_{conv}$ al flujo total que atraviesa la sección $z_0 = z$, teniéndose que es la suma de los flujos que salen por conducción y convección. Tomando este flujo total promediado en x , obtenemos lo siguiente:

$$\bar{F}_{total}(t,z) = \frac{F_{total}(t,z)}{L} = \frac{1}{L} \int_0^L -k \frac{\partial T}{\partial z}(t,x,z) dx + \frac{1}{L} \int_0^L \rho_0 c_p v_z(t,z) T(t,z) dx \quad (4.7)$$

Ahora aplicaremos la adimensionalización empleada anteriormente, es decir:

$$\begin{aligned}
T &= T_1 - (T_1 - T_2)T^* \\
v_z &= v_z^* \sqrt{g\beta(T_1 - T_2)H} \\
x &= Hx^* \\
z &= Hz^*
\end{aligned}$$

Con ello obtenemos la siguiente expresión para el promediado en x^* del flujo total:

$$\bar{F}_{total}(t^*, z^*) = \frac{F_{total}(t^*, z^*)}{L} = \frac{k(T_1 - T_2)}{L} \int_0^{AR} \frac{\partial T^*}{\partial z^*}(t^*, x^*, z^*) dx^* + \frac{\rho_0 c_p (T_1 - T_2) H}{L} \sqrt{g\beta(T_1 - T_2)H} \int_0^{AR} v_z^* T^* dx^* \quad (4.8)$$

Donde se ha tenido en cuenta que $L/H = AR$ y que, en virtud de la ecuación de continuidad ($\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$), tenemos esta expresión:

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^L v_z dx = 0$$

Ya que el término de la integral no depende de z al integrarse entre 0 y L . A continuación, y teniendo en cuenta las expresiones del flujo de calor introducido, es decir, $F = k(T_1 - T_2)/H$, y del número de Rayleigh, siendo éste $Ra = g\beta(T_1 - T_2)H^3/(\nu\alpha)$, se obtiene, a partir de la ecuación 4.8, lo siguiente:

$$\bar{F}_{total}^*(t^*, z^*) = \frac{1}{AR} \int_0^{AR} \frac{\partial T^*}{\partial z^*}(t^*, x^*, z^*) dx^* - \frac{1}{\alpha AR} \sqrt{g\beta(T_1 - T_2)H^3} \int_0^{AR} v_z^* T^* dx^* \quad (4.9)$$

Finalmente, como $\alpha^2 = \alpha \frac{\nu}{Pr}$, se tiene

$$\bar{F}_{total}^*(t^*, z^*) = \underbrace{\frac{1}{AR} \int_0^{AR} \frac{\partial T^*}{\partial z^*}(t^*, x^*, z^*) dx^*}_{\bar{F}_{cond}^*(t^*, z^*)} - \underbrace{\sqrt{RaPr} \frac{1}{AR} \int_0^{AR} v_z^* T^* dx^*}_{\bar{F}_{conv}^*(t^*, z^*)} \quad (4.10)$$

Donde, como sabemos, $v_z^* = -\partial\Psi/\partial x$. Por otro lado, en el régimen estacionario $\bar{F}_{total}^* = 1$ ya que, en vista de la ecuación 4.6, y como se puede deducir fácilmente de la figura 4.12, una vez alcanzado este régimen, evidentemente la variación temporal de la energía térmica en el recinto completo es nula, y por tanto todo el flujo de calor introducido en el sistema es igual al que sale en forma de flujo de conducción y convección. Por tanto, en este régimen se tiene que la ecuación 4.10 puede ser escrita tal como sigue:

$$1 = \underbrace{\frac{1}{AR} \int_0^{AR} \frac{\partial T^*}{\partial z^*}(x^*, z^*) dx^*}_{\bar{F}_{cond}^*(z^*)} - \underbrace{\sqrt{RaPr} \frac{1}{AR} \int_0^{AR} v_z^* T^* dx^*}_{\bar{F}_{conv}^*(z^*)} \quad (4.11)$$

Lo que Goluskin en su trabajo sobre convección de Rayleigh-Bénard con flujo de calor impuesto denomina *número de Nusselt*, y el término que tomamos nosotros igualmente, es lo siguiente:

$$Nu(t) = \frac{\int_0^1 (\bar{F}_{cond}^*(t^*, z^*) + \bar{F}_{conv}^*(t^*, z^*)) dz^*}{\int_0^1 \bar{F}_{cond}^*(t^*, z^*) dz^*} \quad (4.12)$$

En nuestro caso, al igual que en el de Goluskin, solamente nos interesará el valor del número de Nusselt una vez alcanzado el régimen estacionario, en cuyo caso Nu no depende del tiempo y el

numerador del término de la derecha de la ecuación 4.12 es igual a la unidad, tal y como vimos anteriormente. De esta forma, de la ecuación 4.10 se tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \bar{F}_{cond}(t^*, z^*) dz^* &= \frac{1}{AR} \int_0^{AR} \left[\int_0^1 \frac{\partial T^*}{\partial z^*}(t^*, x^*, z^*) dz^* \right] dx^* = \\
 &= \frac{1}{AR} \int_0^{AR} [T^*(t^*, x^*, z^* = 1) - T^*(t^*, x^*, z^* = 0)] dx^* = \\
 &= 1 - \frac{1}{AR} \int_0^{AR} T^*(t^*, x^*, z^* = 0) dx^* = 1 - \bar{T}^*(t^*, z^* = 0)
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Donde se ha tenido en cuenta que $T^*(t^*, x^*, z^* = 1) = 1$ (condición de contorno necesaria por la adimensionalización tomada). Por otro lado, tenemos que el término $\bar{T}^*(t^*, z^* = 0)$ representa la temperatura adimensional media en $z^* = 0$, es decir, en la base del recinto. De esta forma, en el régimen estacionario, tenemos que la expresión del número de Nusselt, en vista de las ecuaciones 4.12 y 4.13, es como sigue:

$$Nu = \frac{1}{1 - \bar{T}^*(t^* \rightarrow \infty, z^* = 0)} \tag{4.14}$$

Donde hemos tenido en cuenta que en el régimen estacionario el flujo total medio adimensional toma valor unidad (ya que en el estacionario no existe variación temporal de la energía térmica en el recinto completo). Este parámetro adimensional (Nusselt) representa la importancia relativa que tiene la convección como mecanismo de transferencia de calor frente a la conducción. De esta forma, podemos emplearlo como un indicador de la intensidad que tiene la convección en el sistema una vez alcanzado el estacionario. Será asimismo un indicador de si alcanzamos un equilibrio estable o inestable en el sistema.

Primeramente, ya que el número de Nusselt muestra la importancia relativa de la convección frente a la conducción, será interesante observar cómo evoluciona en función del número de Rayleigh, dado que, como vimos con anterioridad, este parámetro adimensional es el que determina si el sistema evoluciona hasta un estado de equilibrio estable (no salta la convección) o inestable (la convección domina como mecanismo de transferencia de calor). Este resultado también será útil para comprobar si el Rayleigh crítico calculado anteriormente es correcto. Por otro lado, debemos indicar que el número de Nusselt puede ser expresado de forma local, es decir, que dependa del punto del sistema en el que se calcule, pero en nuestro caso, y con tal de dar valores representativos al sistema completo, se ha tomado el número de Nusselt medio.

Para comenzar, veremos cual es el resultado de la deducción realizada en las últimas páginas; por ello, mostraremos a continuación lo que se obtiene al implementar la ecuación 4.14 en el código

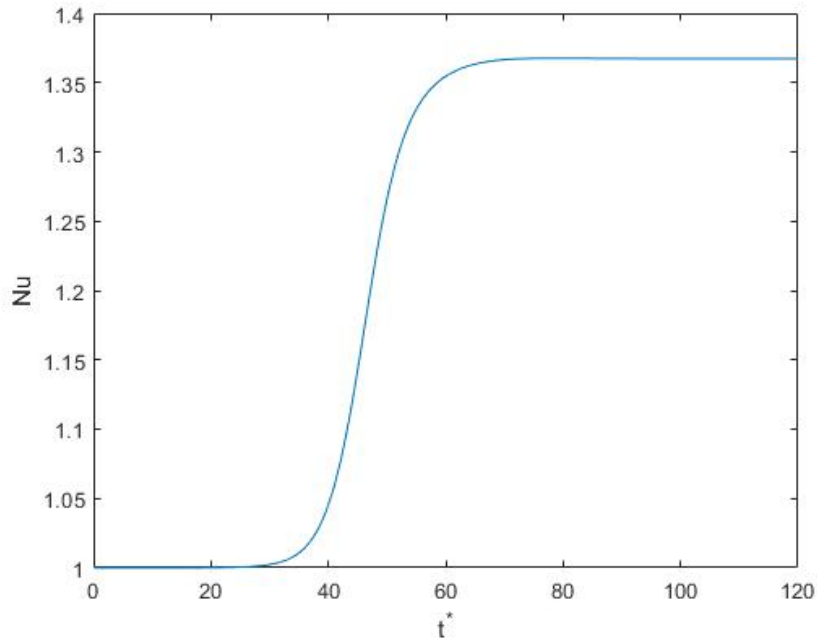


Figura 4.13 Número de Nusselt para $AR = 2$, $Pr = 0.733$ y $Ra = 3000$.

En esta gráfica vemos cómo, al contrario de lo que comentamos anteriormente, el Nu depende del tiempo, pero este resultado necesita ser interpretado. Realmente, la expresión 4.14 solamente es válida cuando se alcanza el régimen estacionario, ya que es en ese momento cuando la variación temporal de la energía térmica en el recinto se anula, y es entonces cuando se tiene que el numerador de la ecuación 4.14 equivale a la unidad, tal y como comentamos antes. Por tanto, aunque en la figura 4.13 se vea como Nu depende del tiempo, realmente lo que debe interesarnos, y el único tramo en que esta gráfica es correcta, es el estado en que se alcanza el estacionario, es decir, el tramo final donde se tiene $Nu = 1.3673$, valor independiente del tiempo (ya que se alcanza en el régimen estacionario).

Empleando este método para obtener el número de Nusselt, básicamente esperando el tiempo necesario para dejar que se alcance el régimen estacionario, obtendremos la relación existente, para $AR = 2$ y $Pr = 0.733$, entre el Nu y la relación $Ra/Ra_c(AR)$, tomando $Ra_c(AR = 2) = 1617.6$, que es el Rayleigh crítico para la relación de aspecto tomada, resultado obtenido en el apartado correspondiente. Siguiendo el procedimiento indicado, obtenemos el siguiente resultado:

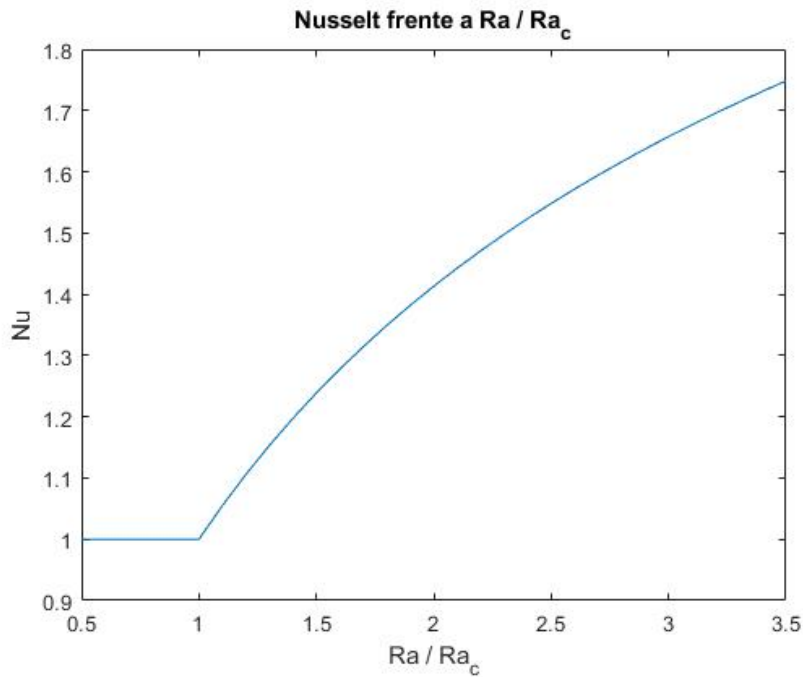


Figura 4.14 Número de Nusselt en función de la relación Ra/Ra_c .

Para empezar, comprobamos que el valor obtenido para el Rayleigh crítico en el apartado correspondiente ($Ra_c = 1617.6$) es correcto y suficientemente preciso, ya que vemos que es justo a partir de $Ra/Ra_c = 1$ cuando la curva de Nu comienza a crecer, lo cual denota que es el punto a partir del cual salta la convección en el sistema. Por otro lado, vemos que conforme aumenta el valor del número de Rayleigh respecto al de Ra_c , aumenta asimismo el Nu , lo cual indica que la convección cada vez tiene mayor preponderancia frente a la conducción como mecanismo de transmisión de calor.

Es interesante en estos casos tratar de encontrar una fórmula que pueda ajustarse a la expresión del número de Nusselt. En nuestro caso buscaremos una expresión sencilla que determine $Nu = Nu(Ra/Ra_c)$. Esta fórmula tendrá la siguiente forma:

$$Nu - 1 = C(Ra/Ra_c - 1)^x \quad (4.15)$$

Por tanto, debemos hallar los valores de C y x que hacen que el Nusselt calculado de esta manera se ajuste a la gráfica de la figura 4.15. Tras realizar el cálculo, hemos obtenido que los valores que minimizan el error son $C = 0.4047$ y $x = 0.7072$, y con ello obtenemos el resultado que se muestra a continuación:

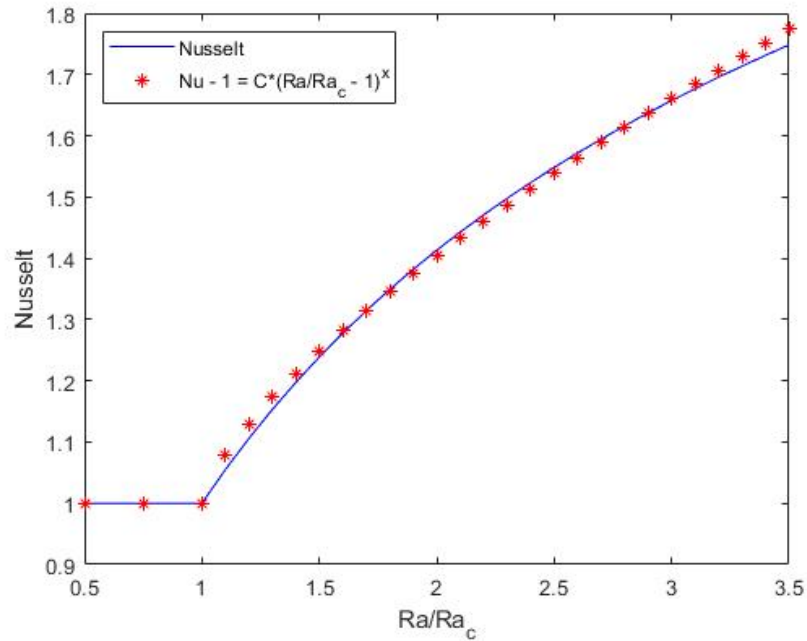


Figura 4.15 Número de Nusselt en función de la relación Ra/Ra_c frente al Nusselt calculado con la fórmula ($AR = 2$).

Observamos que para estos valores de C y x la fórmula se ajusta perfectamente a los resultados obtenidos. Así, la fórmula a la que responde el número de Nusselt queda de la siguiente forma:

$$Nu - 1 = 0.4047 * (Ra/Ra_c - 1)^{0.7072} \quad (4.16)$$

Evidentemente, esta expresión solamente es válida para $Ra/Ra_c > 1$, ya que por detrás de este punto, es decir, para $Ra/Ra_c < 1$, se tiene $Nu = 1$.

4.4.1 Tiempo estacionario

El cálculo del Nu resulta muy conveniente a la hora de determinar el tiempo que tarda el sistema en alcanzar el régimen estacionario. Como veremos, este tiempo, al que denominaremos t_{est}^* , dependerá del número de Rayleigh, además de otros factores como la relación de aspecto. En concreto, nos centraremos en este apartado en determinar la relación existente entre el tiempo estacionario, t_{est}^* , y el Ra , para relación de aspecto dada.

Método de obtención

En cuanto al método que emplearemos para determinar el tiempo que tarda el sistema en alcanzar el régimen estacionario, primero debemos analizar la figura 4.13. En esta gráfica vemos que el Nu comienza siendo igual a la unidad, posteriormente tiene un periodo de ascenso y, finalmente, se estabiliza hasta alcanzar su valor real durante el estacionario. Vemos que aquí se pueden observar los tres tramos de los que hemos hablado con anterioridad sobre la evolución del sistema, es decir, transitorio inicial ($Nu = 1$), secundario (ascenso) y régimen estacionario (estabilización). Debemos señalar aquí que esta gráfica toma la forma mencionada para $Ra > Ra_c$, mientras que para $Ra \leq Ra_c$ el valor de Nu es igual a la unidad en todo momento, ya que en este caso no salta la convección. Por ello, centraremos el cálculo del tiempo estacionario en los casos $Ra > Ra_c$, es decir, en los casos en que salta la convección.

Nuestro objetivo es determinar el tiempo estacionario en función del número de Rayleigh para $AR = 2$ y $Pr = 0.733$, es decir, la curva $t_{est}^*(Ra)$, por lo cual haremos un barrido con muchos valores del Ra , y para cada uno de ellos determinaremos el tiempo necesario para alcanzar el estacionario. Para determinar el instante en que consideramos que se alcanza este régimen haremos lo siguiente: para empezar, dejamos que el sistema avance el tiempo suficiente para que se alcance el estacionario, lo cual se identifica visualmente con facilidad tal y como vemos en la figura 4.13 (aun así imponemos una condición sobre la variación del Nusselt en su tramo final, imponiendo que se sitúe por debajo de un determinado valor aceptable). A continuación, determinamos el valor de Nu en este régimen (en el caso de la figura sería $Nu_{est} = 1.3673$), y fijamos el valor $Nu_{lim} = 1 + 0.99 * (Nu_{est} - 1)$, el cual representará el valor del Nu a partir del cual consideramos que comienza el régimen estacionario. Esta expresión de Nu_{lim} nos quiere decir que consideramos que el estacionario comienza cuando, al representar una gráfica análoga a la de la figura 4.13, el valor del Nu haya ascendido el 99 % del ascenso total.

Ahora mostraremos un ejemplo de este proceso para que se comprenda mejor. Nos disponemos a calcular el tiempo estacionario para el sistema que venimos tomando para los diferentes apartados (flujo impuesto en la base, $AR = 2$ y $Pr = 0.733$), para el caso de $Ra = 3000$, es decir, daremos como ejemplo el cálculo de $t_{est}^*(Ra = 3000)$.

Partimos de la figura 4.13, que representa básicamente el Nusselt medio en el sistema dado con $Ra = 3000$. En este caso, hemos tomado $t_{fin}^* = 120$. Observamos que, evidentemente, se alcanza el régimen estacionario, ya que se ve perfectamente cómo el valor del Nu se estabiliza en la parte derecha de la gráfica. Aun así, para poder estar seguros de que se ha dejado transcurrir suficiente tiempo, se calcula la variación relativa del Nu en el tramo final ($0.8 \leq t^*/t_{fin}^* \leq 1$) y se impone que ésta sea suficientemente pequeña (igual o menor a 10^{-3}). Como vimos, en este caso se tiene $Nu_{est} = 1.3673$ por lo que, en base a la expresión dada para Nu_{lim} , tenemos para este caso $Nu_{lim} = 1 + 0.99 * (Nu_{est} - 1) = 1.3636$. Una vez obtenidos estos dos resultados, comprobamos cuál es el punto de la figura 4.13 en el que se da el valor límite de Nu , y así encontramos el instante en que comienza el régimen estacionario, tal y como vemos en la siguiente gráfica:

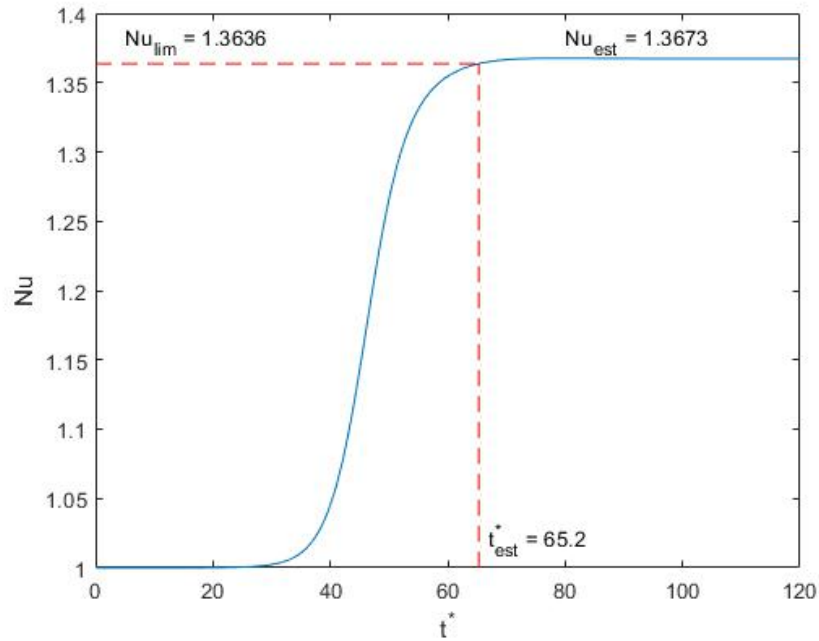


Figura 4.16 Visualización del método empleado para obtener el tiempo estacionario para $Ra = 3000$.

De esta manera tenemos que $t_{est}^*(Ra = 3000) = 65.2$, es decir, hemos hallado el tiempo que tarda el sistema en alcanzar el régimen estacionario (en base a los criterios que hemos tomado) para un número de Rayleigh $Ra = 3000$.

Resultado

A continuación, hemos seguido este proceso para ver la variación del tiempo estacionario en función del Ra , para $AR = 2$ y $Pr = 0.733$. Hemos tomado en cuenta solamente valores del Rayleigh tales que $Ra > Ra_c = 1617.6$, ya que este método de obtener el t_{est}^* solamente es válido con esta condición. El motivo es que para $Ra \leq Ra_c$ no existe ningún ascenso en la gráfica, ya que el valor de Nu es igual a la unidad en todo momento, y evidentemente el método explicado no es aplicable. Sabiendo esto, mostramos a continuación el resultado obtenido:

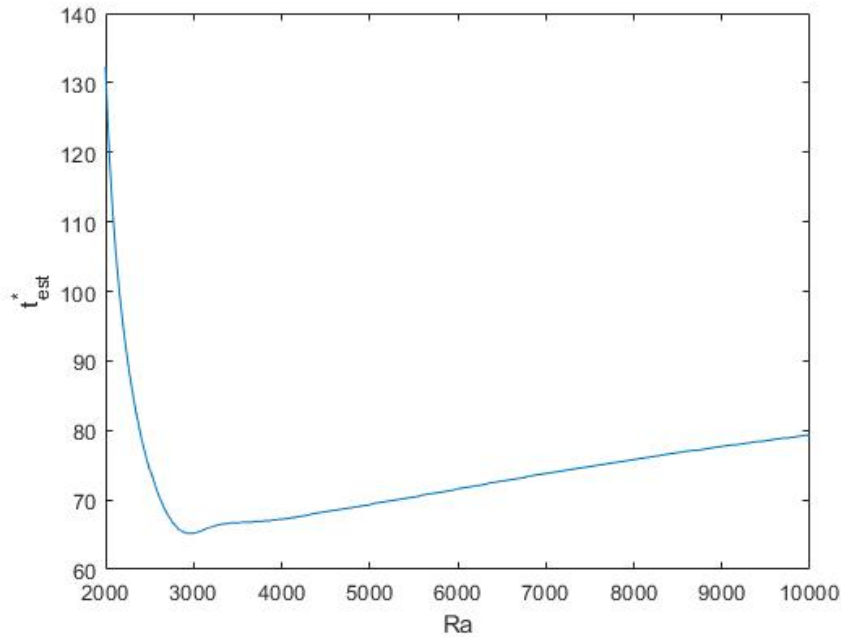


Figura 4.17 Tiempo estacionario frente al número de Rayleigh del sistema para $AR = 2$ y $Pr = 0.733$.

Vemos que al superar el valor crítico del número de Rayleigh el tiempo que tarda el sistema en estabilizarse, es decir, en llegar al régimen estacionario (caracterizado por un equilibrio inestable, puesto que se tiene $Ra > Ra_c$), se reduce muy rápidamente, pasando de $t_{est}^*(Ra = 2000) = 132.4$ a $t_{est}^*(Ra = 3000) = 65.2$, es decir, que al pasar de $Ra = 2000$ a $Ra = 3000$, el tiempo estacionario se reduce a menos de la mitad. Esto se debe a que al aumentar el Ra el sistema presenta una tendencia mayor a alcanzar el régimen convectivo, la intensidad de la convección es mayor, y por tanto tarda menos tiempo en estabilizarse. Viendo la tendencia que presenta en este tramo, deducimos que conforme nos acercamos al punto en que $Ra = Ra_c$, el tiempo que tarda el sistema en estabilizarse tiende al infinito. Por otro lado, tras alcanzar un mínimo entorno al punto $Ra = 3000$, el tiempo estacionario crece a un ritmo aproximadamente constante al aumentar el Ra . Este comportamiento se debe a que, para valores muy altos del Ra , la convección es excesivamente intensa, y ello hace que se entre en un régimen caótico y turbulento que tarda más tiempo en aplacarse.

4.5 Número de Prandtl

Hasta ahora hemos empleado el número de Prandtl (Pr) para caracterizar el fluido del interior del recinto, por lo que en este apartado veremos la influencia que tiene en el comportamiento del sistema.

Este número adimensional puede expresarse como $Pr = \nu/\alpha$, donde ν es la viscosidad cinemática del fluido y α su difusividad térmica. El sentido físico de este parámetro es que representa la relación entre la velocidad de difusión de la cantidad de movimiento (viscosidad) y la difusividad térmica, y fue llamado así en honor al ingeniero y físico alemán Ludwig Prandtl (1875 - 1953).

Primeramente, veremos el efecto que tiene el valor de este parámetro adimensional en el Rayleigh crítico y en el número de Nusselt. Para ello calcularemos el Nu para $AR = 2$ y varios valores del Pr y del Ra , ya que este resultado será suficiente para comprobar el efecto del Prandtl en ambos valores (Ra_c y Nu). Básicamente, recalcularemos el resultado visto en la figura 4.15 para varios valores del número de Prandtl, obteniendo lo siguiente:

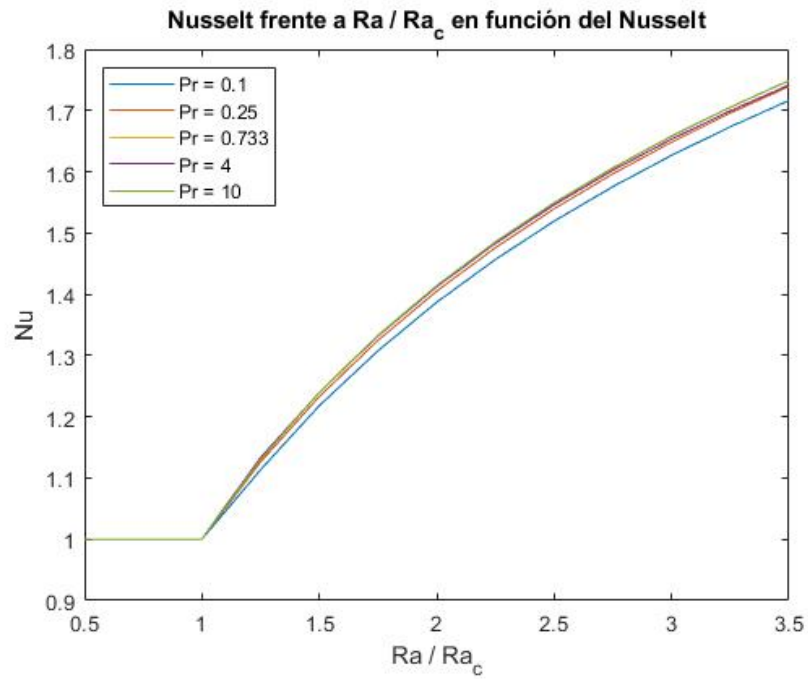


Figura 4.18 Número de Nusselt frente a la relación Ra/Ra_c con $Ra_c = 1617.6$, para $AR = 2$ y varios valores del número de Prandtl.

En esta gráfica observamos dos resultados interesantes; por un lado, tenemos que el valor del Pr no influye en el Rayleigh crítico, ya que vemos que todas las curvas tienen el punto de inflexión, donde Nu deja de tomar valor unidad, en el mismo punto donde $Ra/Ra_c = 1$, es decir, independientemente del Prandtl, se tiene $Ra_c = 1617.2$, que es el valor correspondiente a la relación de aspecto tomada. Por otro lado, comprobamos que la influencia del Pr sobre el número de Nusselt es muy pequeña y no sigue una tendencia determinada. De hecho, si hacemos una ampliación de la gráfica anterior, tenemos lo siguiente:

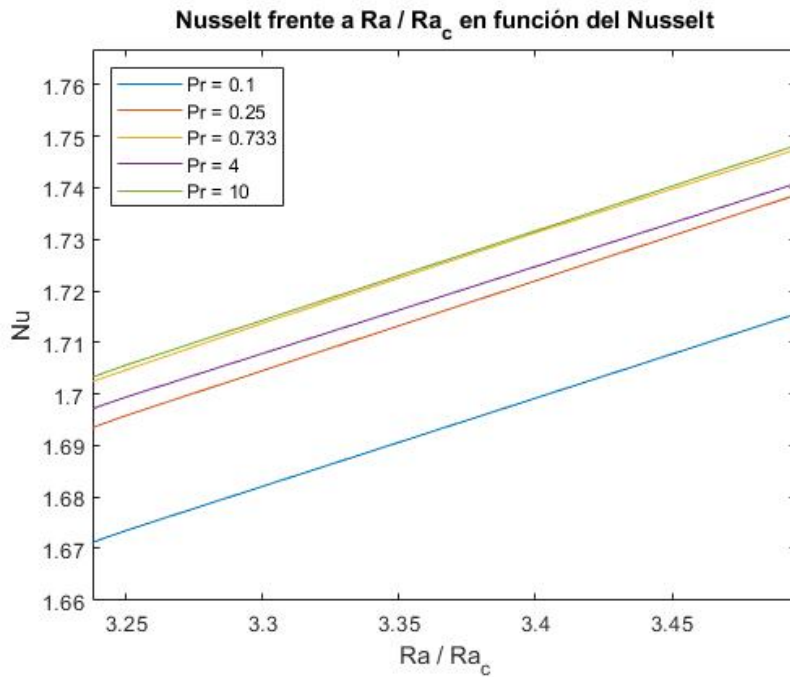


Figura 4.19 Apreciación de la figura 4.18 en su tramo final.

Como hemos comentado, la influencia del Prandtl sobre el valor del Nusselt en el estacionario es muy pequeña, teniéndose que, para $Ra/Ra_c = 3.5$, donde se dan las mayores diferencias en la figura 4.18, aun variando el Pr desde $Pr = 0.1$ hasta $Pr = 10$ (una variación de dos órdenes de magnitud), el Nusselt permanece acotado en el rango $1.71 \leq Nu \leq 1.75$, con una diferencia relativa máxima menor del 2%. Por otro lado, en la figura 4.19 podemos ver que la relación entre el Prandtl y el Nusselt no sigue un orden claro, sin embargo, lo que sí podemos asegurar es la baja influencia del uno sobre el otro.

No obstante, la principal influencia del número de Prandtl sobre el sistema se dará en el tiempo necesario para alcanzar el régimen estacionario, t_{est} , tal y como veremos a continuación. De la misma forma que se hizo en el apartado 4.4.1, calcularemos el tiempo estacionario en función del Rayleigh, para $AR = 2$, pero en este caso, para diferentes valores del número de Prandtl. De hecho, el método empleado será análogo al del apartado 4.4.1, pero para un cierto rango de valores del Pr , para así poder ver su influencia. De esta manera, obtenemos el siguiente resultado:

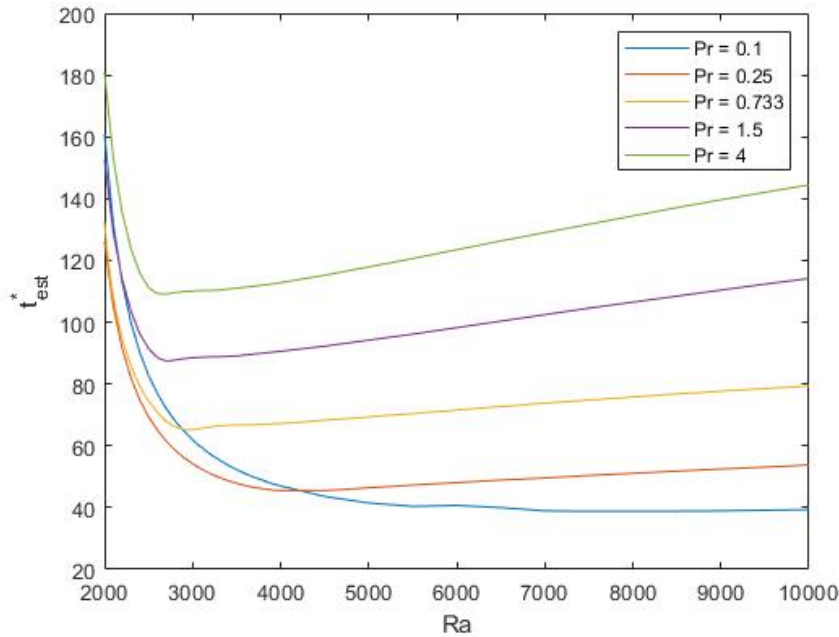


Figura 4.20 Tiempo estacionario frente al número de Rayleigh del sistema para $AR = 2$ y valores del Prandtl en el rango $0.1 \leq Pr \leq 4$.

En esta gráfica observamos que, en general, al aumentar el número de Prandtl aumenta asimismo el tiempo requerido para alcanzar el régimen estacionario, por lo menos para valores del Ra suficientemente alejados del Rayleigh crítico (recordemos que para $AR = 2$ tenemos $Ra_c = 1617.6$). Este resultado se debe a que, como comentamos anteriormente, el Prandtl representa la relación entre la velocidad de difusión de la cantidad de movimiento (viscosidad) y la difusividad térmica, y es un parámetro que caracteriza al fluido. De esta forma, para números de Prandtl bajos, tenemos una preponderancia de la difusividad térmica y una baja viscosidad, por lo cual el fluido presenta menos resistencia al movimiento y es capaz de alcanzar el régimen de convección más rápido. Si por el contrario, tenemos un Pr alto, la viscosidad será mayor frente a la difusividad térmica, por lo que existirá una menor velocidad de transmisión de la cantidad de movimiento y, evidentemente, se tardará más tiempo en alcanzar el régimen estacionario. Por otro lado, el hecho de que para números de Rayleigh cercanos al crítico el tiempo estacionario aumenta rápidamente para Pr bajo (como es el caso para $Pr = 0.1$ que vemos en la figura 4.20) se debe a que, como hemos comentado, un Prandtl reducido supone una viscosidad baja, y por tanto, las perturbaciones que se producen para Ra cercano al crítico tardan más tiempo en extinguirse.

Por otro lado, debemos comentar que en vista de los resultados obtenidos y de la evolución del sistema durante las simulaciones, vemos que el principal efecto del número de Prandtl sobre el sistema radica en el tiempo requerido para alcanzar el régimen estacionario y, en general, en la velocidad de la evolución del sistema. Básicamente, al variar el Prandtl, hemos visto que la evolución del sistema no cambiaba (número de células, Rayleigh crítico, Nusselt, etc.) excepto por la velocidad, la cual aumentaba al reducir este parámetro.

4.6 Análisis del mecanismo de transferencia de calor

Para terminar con el caso conductivo, analizaremos algunos resultados de interés que se dan en el sistema en función de si se alcanza el régimen convectivo (equilibrio inestable) o no (equilibrio

estable). Para ello, observaremos cómo se comportan determinadas variables en ambos casos.

4.6.1 Temperatura media

En este apartado, definiremos una variable del sistema que llamaremos *temperatura media*. Esta variable, que escribiremos como $\bar{T}^*(t^*, z^*)$, se define mediante la siguiente expresión:

$$\bar{T}^*(t^*, z^*) = \frac{1}{AR} \int_0^{AR} T^*(x^*, z^*, t^*) dx^* \tag{4.17}$$

Esta variable determina la temperatura media en cada sección z^* (para $0 \leq z^* \leq 1$), en función del tiempo. A continuación veremos cómo se comporta esta variable frente a la temperatura hidrostática (dada por la expresión 3.24), para dos casos diferentes, uno en el que se alcanza un equilibrio estable en el sistema (no salta la convección), y otro en el que se obtiene un equilibrio inestable (salta la convección). En ambos casos tomaremos una relación de aspecto $AR = 2$ y número de Prandtl $Pr = 0.733$.

Comenzando por el primer supuesto, tomaremos $Ra = 1000 < Ra_c$, de forma que evidentemente no saltará la convección. Con ello obtenemos el siguiente resultado:

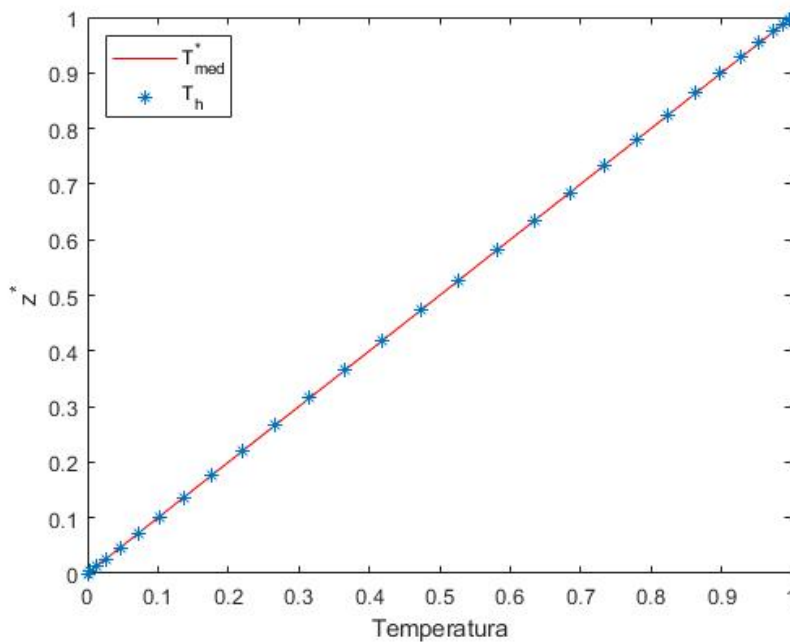


Figura 4.21 Temperatura media y distribución de temperatura hidrostática para Rayleigh bajo.

Sin importar el tiempo que dejemos transcurrir la simulación, éste es el resultado que obtenemos, ya que hemos tomado un valor del número de Rayleigh considerablemente bajo frente al valor crítico. Observamos que, como era de esperar, para un valor del Rayleigh tal que $Ra < Ra_c$, no salta la convección, y por tanto la distribución de temperaturas (y por tanto la temperatura media) tienden a la distribución hidrostática.

A continuación mostramos el mismo resultado, pero ahora tomando $Ra = 3000$, el cual es un valor de aproximadamente el doble del valor crítico. Estamos por tanto ante un caso en el que sí saltará la convección en el sistema, y por tanto es interesante mostrar la evolución del mismo con el tiempo.

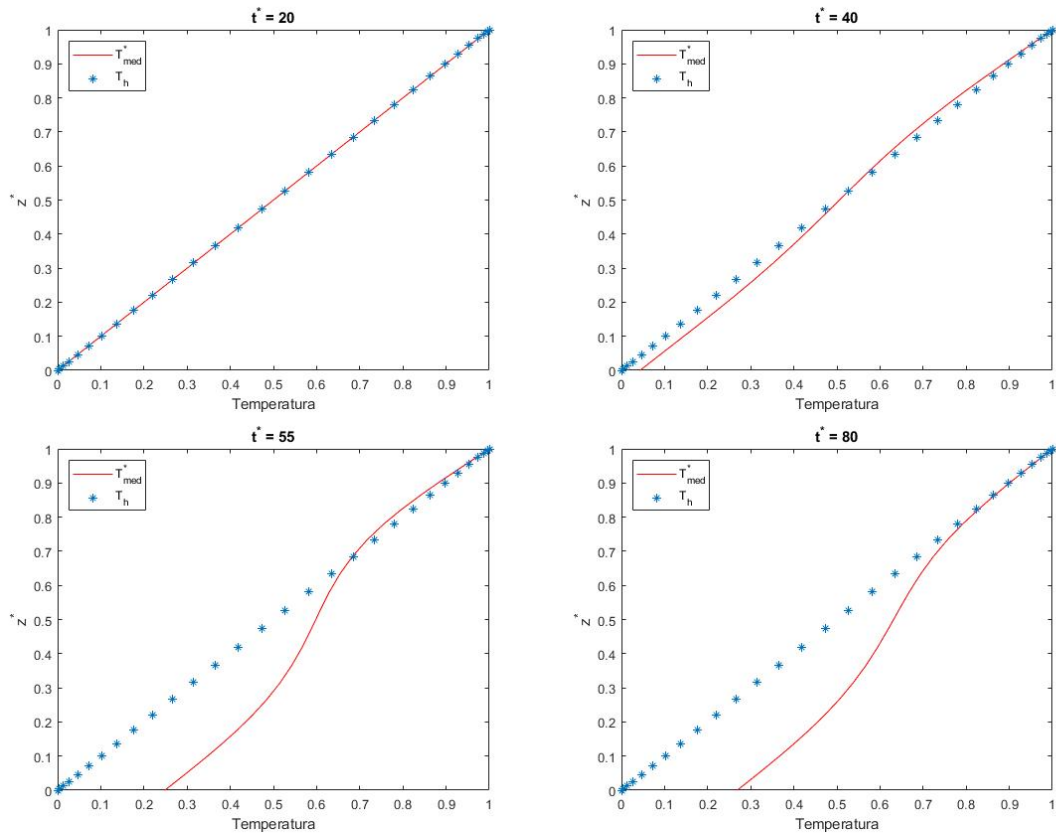


Figura 4.22 Temperatura media y distribución de temperatura hidrostática para Rayleigh alto y varios instantes de tiempo ($t^* = 20, 40, 55, 80$).

Observamos que en un inicio la temperatura media se ajusta a la distribución hidrostática de temperaturas, pero conforme avanza el tiempo de simulación la temperatura media tiende a homogeneizarse y alejarse cada vez más de la situación de equilibrio (hidrostático). Gracias a este resultado podemos concluir que el fenómeno de convección de Rayleigh-Bénard y, en general, la transferencia de calor por convección, tiende a homogeneizar el campo de temperaturas.

De hecho, podemos comprobar esta característica de la convección aumentando el valor del número de Rayleigh; en la figura 4.22 tomamos un Rayleigh $Ra = 3000$, y a continuación mostraremos el caso correspondiente a un Rayleigh mayor:

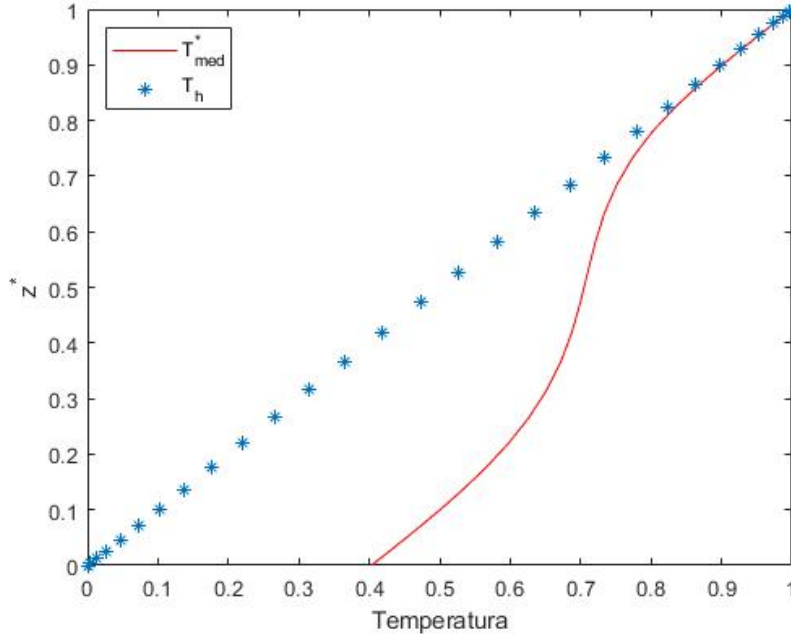


Figura 4.23 Temperatura media y distribución de temperatura hidrostática para Rayleigh $Ra = 5000$.

En esta gráfica mostramos la temperatura media del sistema respecto a la hidrostática para $Ra = 5000$, una vez alcanzado el régimen estacionario. Comparando con la figura 4.22, vemos que al aumentar el Rayleigh llegamos a un sistema con mayor homogeneidad en el campo de temperaturas, ya que al aumentar el número de Rayleigh, aumenta la intensidad de la convección.

4.6.2 Flujos de calor

Recordamos que en el desarrollo de la simulación conviven dos formas de transferencia de calor; por un lado, tenemos la transferencia de calor por conducción, y por otro lado, la transferencia por convección. Ya en el apartado que dedicamos a la obtención del número de Nusselt (apartado 4.4) hallamos las expresiones que permiten obtener estos dos flujos. A su vez, calculamos el flujo medio (por conducción y por convección) en cada sección z^* en función del tiempo, tal como se muestra a continuación:

$$\bar{F}_{conduccion}^*(z^*, t^*) = \frac{1}{AR} \int_0^{AR} \frac{\partial T^*}{\partial z^*}(x^*, z^*) dx^* \tag{4.18}$$

$$\bar{F}_{conveccion}^*(z^*, t^*) = -\sqrt{RaPr} \frac{1}{AR} \int_0^{AR} v_z^* T^* dx^* \tag{4.19}$$

Además, definimos el flujo total medio como la suma de los dos anteriores:

$$\bar{F}_{total}^* = \bar{F}_{conduccion}^* + \bar{F}_{conveccion}^* \tag{4.20}$$

Finalmente, como premisa para la obtención de la expresión del número de Nusselt (ecuación 4.14) asumimos que, una vez alcanzado el régimen estacionario, la variación temporal de la energía térmica contenida en el sistema debía anularse, y por tanto se tenía, en régimen estacionario, que

$$\bar{F}_{total}^* = \bar{F}_{conduccion}^* + \bar{F}_{conveccion}^* = 1 \tag{4.21}$$

Esta suposición nos permitió obtener la expresión del número de Nusselt, la cual no era válida, evidentemente, hasta alcanzar el régimen estacionario. A continuación analizaremos la evolución de los flujos medios (por conducción, convección y el total) en dos casos diferentes (uno con Rayleigh bajo, sin que salte la convección, y otro con un valor alto del Rayleigh, para ver el efecto del régimen convectivo), y comprobaremos que la premisa dada por 4.21 para el régimen estacionario se cumple siempre. Además, analizaremos en cada caso la importancia relativa de la transferencia de calor por conducción y convección en todo el recinto. En ambos casos se tomará $AR = 2$ y $Pr = 0.733$, y se cambiará el número de Rayleigh.

Primeramente, analizaremos el caso en que no salta la convección. Para ello, tomaremos $Ra = 1000$ y calcularemos los flujos de calor medios, tanto por conducción, como por convección, como el total. De esta forma obtenemos el siguiente resultado:

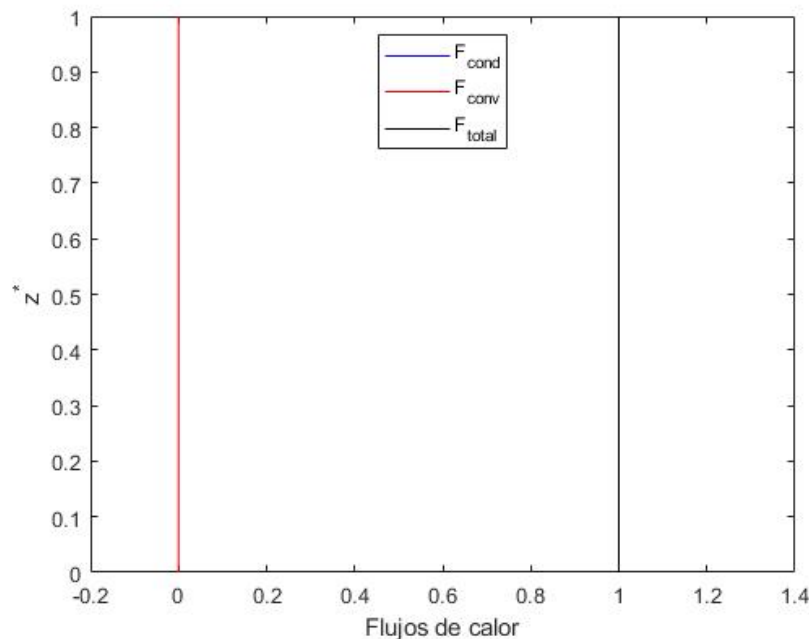


Figura 4.24 Flujos de calor medios por conducción, convección y total para Rayleigh bajo.

Primeramente, aclaramos que en la leyenda se han omitido las barras que representan al flujo medio y los asteriscos que denotan las variables adimensionales, y las palabras conducción y convección se han contraído para una mejor visualización de la gráfica.

Por otro lado, independientemente del tiempo que dejemos transcurrir, la situación se mantiene constante, ya que al tomar un valor tan bajo del Rayleigh (respecto al valor crítico) el sistema permanece en equilibrio estable (hidrostático). En esta situación podemos ver cómo el flujo de calor medio transmitido por convección es nulo, mientras que el flujo por conducción es máximo. Asimismo observamos cómo se cumple la condición de flujo total medio igual a la unidad una vez alcanzado el estacionario (en este caso concreto, se cumple durante toda la simulación).

A continuación analizaremos un caso más interesante, en el cual tomaremos $Ra = 3000$, para el cual salta la convección, y por tanto será conveniente mostrar la evolución del sistema a lo largo de la simulación. Para ello, al igual que hicimos en el caso de la temperatura media, mostraremos las gráficas correspondientes a distintos instantes de tiempo:

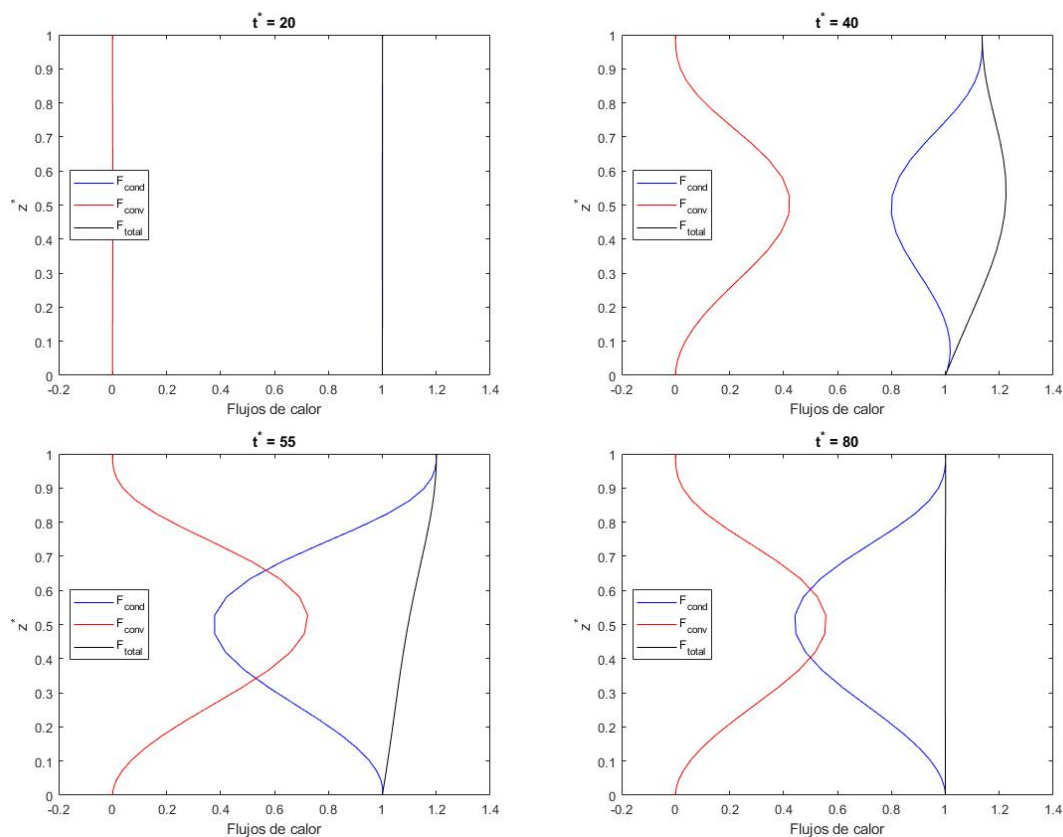


Figura 4.25 Flujos de calor medios por conducción, convección y total para Rayleigh alto y varios instantes de tiempo ($t^* = 20, 40, 55, 80$).

En la figura 4.25 podemos observar la evolución de los flujos medios en el sistema. Inicialmente se tiene una situación de equilibrio hidrostático (sin convección), tras la cual se produce un proceso de transición en el que el flujo de calor medio por convección aumenta en el centro del recinto, mientras que disminuye la conducción de calor. Finalmente, se alcanza un estado de equilibrio nuevo en el que la convección de calor domina en el centro del recinto, mientras que cerca de las superficies superior e inferior prevalece el flujo conductivo. Por otro lado, comprobamos que una vez alcanzado el régimen estacionario la suma de ambos flujos medios (el flujo total medio) equivale a la unidad en todo el recinto, muestra de que efectivamente se ha alcanzado el estacionario y la variación temporal de energía térmica del sistema es nula.

Finalmente, veremos cómo evoluciona el sistema con un número de Rayleigh mayor. A continuación, tomaremos $Ra = 5000$ (en vez de $Ra = 3000$, como en la figura 4.25), y veremos la evolución de los distintos flujos de calor medios:

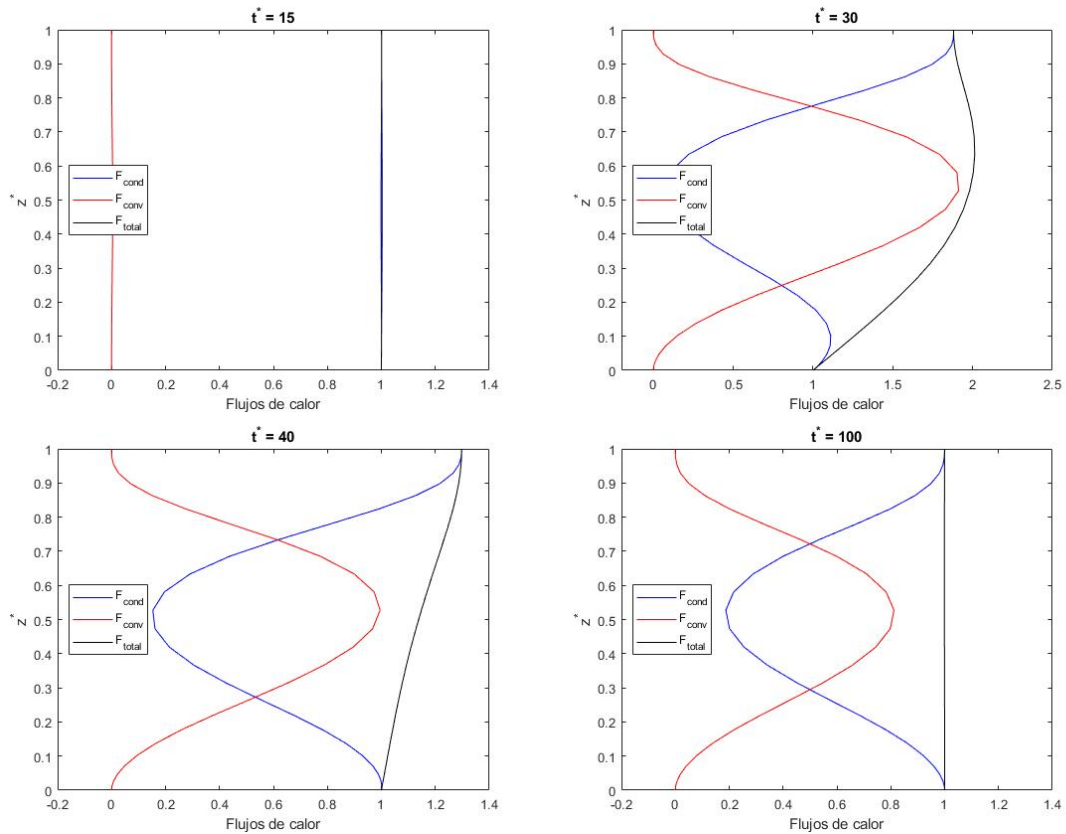


Figura 4.26 Flujos de calor medios por conducción, convección y total para Rayleigh $Ra = 5000$ y varios instantes de tiempo ($t^* = 15, 30, 40, 100$).

Comparando estas últimas gráficas con la figura 4.25 podemos determinar la influencia que tiene un aumento del número de Rayleigh para los flujos de calor medios. Como era previsible, al aumentar el Rayleigh aumenta a su vez la intensidad de la convección, y por tanto aumenta también el flujo de calor medio por convección, conllevando ello una disminución en la transferencia de calor por conducción. Por otro lado, al haberse tomado un valor del número de Rayleigh tan alto, vemos como al sistema le cuesta aplacar el estado de intensa convección por el que transcurre durante el transitorio (nótese que en la figura 4.26, para $t^* = 30$, la escala es diferente), y por tanto el tiempo que se tarda en alcanzar el régimen estacionario es mayor. Este resultado también justifica por qué al aumentar el número de Rayleigh aumenta el Nusselt (figura 4.15), ya que el flujo medio de calor por convección aumenta frente a la conducción de calor.

5 Resultados numéricos. Caso de flujo de calor por radiación

En este capítulo analizaremos el problema de radiación pura, en el cual resolveremos las ecuaciones de Saltzman para el caso radiactivo, sujetas a las correspondientes condiciones iniciales y de contorno, tal y como se comentó en el capítulo correspondiente a la formulación del problema. De esta forma, tenemos el siguiente planteamiento:

Sea un recinto bidimensional rectangular de base L y altura H en cuyo interior se aloja un fluido caracterizado por el número de Prandtl, $Pr = \nu/\alpha$. Las paredes del recinto son adiabáticas y rígidas, la superficie superior se encuentra a una temperatura T_2 conocida, y en la base se aplica un flujo de calor por radiación, F , uniformemente repartido por toda la superficie inferior.

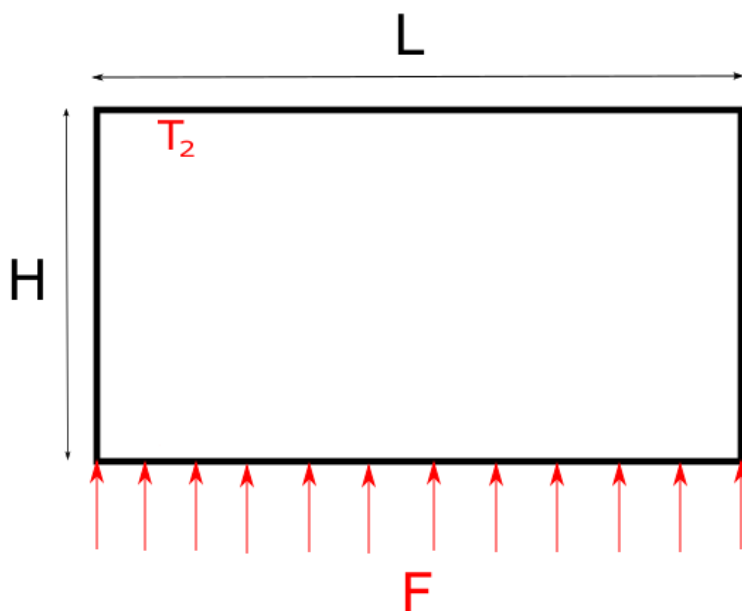


Figura 5.1 Representación gráfica para el caso de radiación pura.

Los resultados que se mostrarán a continuación se han obtenido con el programa de cálculo numérico MATLAB, mediante el código mostrado en el capítulo sobre el método numérico (caso radiactivo). A partir de este código se han generado una serie de ficheros que no mostraremos por

no extender excesivamente el proyecto.

Por otro lado, este capítulo será más breve que el anterior, dado que muchos conceptos (como el de número de Rayleigh crítico, Ra_c , régimen transitorio inicial y secundario, régimen estacionario, etc.) ya han sido explicados con anterioridad y los métodos de obtención de los diferentes resultados son análogos a los del caso conductivo. Por ello, y con el objetivo de no hacer el trabajo excesivamente repetitivo, se indicará en cada caso dónde pueden consultarse los métodos y conceptos que trataremos refiriéndonos al apartado concreto del capítulo anterior.

Finalmente, en los apartados en que no se indique lo contrario, se tomará relación de aspecto $AR = 2$ y número de Prandtl $Pr = 0.733$, al igual que en el caso de conducción.

5.1 Rayleigh crítico

Tal y como indicamos en el apartado 4.1, el Rayleigh crítico, Ra_c , es el valor del número de Rayleigh a partir del cual se alcanza un régimen estacionario en equilibrio inestable, es decir, un régimen dominado por el efecto de la convección de calor. Frente a esto, tenemos que para valores del Rayleigh por debajo del crítico, las perturbaciones frente a la distribución hidrostática de temperaturas tienden a anularse, y por tanto se alcanza un equilibrio estable, hidrostático, en el estacionario.

Ya en el caso de conducción de calor vimos la inmensa importancia del Ra_c , y cómo su análisis permite predecir el comportamiento del sistema una vez alcanzado el estacionario. Vimos el efecto del número de Rayleigh sobre la evolución del fluido y cómo determinaba la aparición o no del régimen convectivo. Asimismo, vimos la influencia de diferentes parámetros, como el Prandtl, Pr , o la relación de aspecto, $AR = L/H$, sobre el valor del Rayleigh crítico. De hecho, comprobamos que $Ra_c = Ra_c(AR)$, ya que este valor resultaba independiente del Prandtl, y vimos la curva correspondiente al Rayleigh crítico frente a la relación de aspecto.

En este nuevo caso entra en juego un nuevo parámetro, s , que caracteriza el espesor óptico del medio, y cuyo sentido físico fue explicado en el apartado correspondiente del capítulo sobre la formulación del problema (apartado 2.2.3). A continuación veremos el efecto que tiene este parámetro sobre la evolución del sistema y, concretamente, sobre el valor del Rayleigh crítico. Para ello, hemos tomado un recinto con relación de aspecto $AR = 2$ y Prandtl $Pr = 0.733$, que es el caso que hemos tomado como estándar. A continuación, hemos calculado el Ra_c para varios valores de s comprendidos en el rango $0.4 \leq s \leq 2$, ya que buscábamos valores del parámetro que no se distanciaran excesivamente de la unidad, y así respetar las aproximaciones realizadas (en concreto, aproximación *optically thick*). Antes de mostrar los resultados obtenidos, nos detendremos a analizar el método empleado, que presenta una importante diferencia respecto del anterior, ya que ha permitido optimizar el proceso.

5.1.1 Método de obtención del Rayleigh crítico

El método empleado en este caso no es sustancialmente diferente del que vimos en el apartado 4.1.1 para el caso de conducción de calor. Al igual que entonces, hemos tomado un valor de referencia para la perturbación del campo de temperaturas frente al caso hidrostático (la media del valor absoluto de la perturbación en todos los nodos), y hemos analizado para cada valor del Rayleigh cómo era su evolución, es decir, si esta perturbación media (dada por 4.2) se mitigaba, y por tanto se alcanzaba un régimen de equilibrio estable (no saltaba la convección), o si por el contrario esta perturbación media evolucionaba hasta tomar algún valor, mayor cuanto más se aumentara el Ra (saltaba la convección). En este sentido, el método empleado es idéntico. Sin embargo, ha habido un cambio en el procedimiento, básicamente se ha optimizado el barrido de los diferentes números

de Rayleigh para hacerlo mucho más rápido, y con una precisión similar.

Primeramente, detallaremos el método de barrido que explicábamos antes, y posteriormente comentaremos cómo funciona el nuevo. En ambos casos nos encontramos ante un sistema con unas condiciones dadas (una determinada relación de aspecto, número de Prandtl, y en el caso radiactivo, un valor concreto del parámetro s). En este sistema, realizamos un barrido con diferentes valores del Ra , hasta encontrar el valor crítico, Ra_c , en función de la evolución que presente la perturbación respecto de la distribución hidrostática de temperatura.

En el caso conductivo, empezábamos por encontrar dos valores del Rayleigh, Ra_{min} y Ra_{max} , que nos acotaban la búsqueda, ya que Ra_{min} se correspondía con un valor muy bajo del Ra para el que no saltaba la convección, mientras que Ra_{max} representaba un valor del Ra muy por encima del Ra_c y para el que, por lo tanto, sí saltaba la convección. Posteriormente, se hacía un barrido para todos los valores del Rayleigh comprendidos entre Ra_{min} y Ra_{max} , con un paso p (precisión), y se determinaba, en función de la evolución de las perturbaciones, el valor más próximo al crítico, Ra_{sol} . Entonces, se redefinían los valores de Ra_{min} y Ra_{max} , siendo $Ra_{min} = Ra_{sol} - p$ y $Ra_{max} = Ra_{sol} + p$, y se cambiaba también el nuevo valor del paso o precisión, reduciéndolo en un orden de magnitud ($p \leftarrow p/10$). De esta forma, se repetía el proceso, y así una y otra vez hasta alcanzar la precisión que se buscaba en el momento.

El problema del proceso comentado es que se debían hacer demasiados cálculos, ya que se consideraban muchos valores del número de Rayleigh. En contraposición, ahora en el caso radiactivo hemos buscado un método más eficiente, basado en el método de la bisección, tal y como explicaremos a continuación.

Ahora, para el caso de radiación pura, empezamos buscando, al igual que antes y con el mismo significado, los valores de Ra_{min} y Ra_{max} que nos acotan el rango de búsqueda del Rayleigh crítico. Sin embargo, mientras que antes comparábamos la evolución del sistema con diferentes Ra , buscando el valor para el que las variaciones en la perturbación durante el transitorio secundario fueran mínimas (Ra_{sol}), ahora establecemos un criterio para determinar si salta o no la convección. Este criterio se basa en que la variación de la perturbación media durante el transitorio secundario no sobrepase del 20%, y que el valor medio de esta perturbación en el estacionario no fuera superior a un máximo ($\bar{\theta}_{max}^* = 0.002$). Estos valores pueden parecer una aleatoriedad, pero no lo son. Estos valores se han tomado al hacer un estudio exhaustivo de cómo evolucionaban las sistemas en el caso conductivo para $Ra = Ra_c$, y se ha comprobado que en el peor de los casos se cumplían las restricciones.

Volviendo al método de barrido en el caso de radiación, y aplicando los criterios arriba mencionados para determinar si salta o no la convección, se valora la evolución de la perturbación media para el Rayleigh medio ($Ra_{med} = (Ra_{min} + Ra_{max})/2$). Si salta la convección, se actualiza el valor del Rayleigh máximo como $Ra_{max} = Ra_{med}$, y si, por el contrario, no salta la convección, se toma $Ra_{min} = Ra_{med}$, estrechando de esta forma el cerco a la mitad. Así, el número de etapas a realizar en la búsqueda del valor crítico del Rayleigh se reduce considerablemente.

Finalmente, para comprobar la validez de este nuevo método de barrido respecto del anterior que, a pesar de ser más lento es más fiable (al no emplear un criterio "artificial" para la determinación de si salta o no la convección, sino que se compara la evolución del fluido en cada caso respecto de los demás), se ha calculado el valor del Ra_c en el caso radiactivo con los dos métodos, para múltiples sistemas diferentes (variando los valores de AR y s), comprobándose que ambos métodos daban valores del Ra_c muy similares, en ningún caso superando una diferencia relativa del 1%. Por tanto, damos por válido este nuevo método que, aunque traiga un mayor error, éste es

despreciable frente al gran ahorro computacional y de tiempo.

5.1.2 Resultado

Una vez expuesto el método de obtención del Rayleigh crítico, procedemos sin más dilación a la exposición de los resultados. Como se comentó anteriormente, se ha calculado el Ra_c en función de s , para $AR = 2$ y $Pr = 0.733$, obteniéndose lo siguiente:

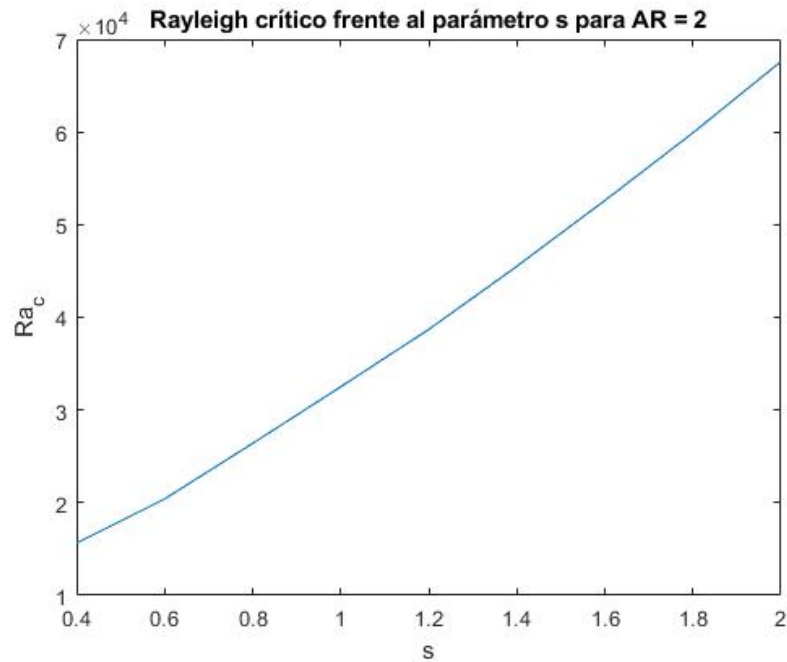


Figura 5.2 Rayleigh crítico en función del parámetro de radiación.

Observamos que al aumentar la opacidad del medio (parámetro s) aumenta a su vez el valor crítico del Rayleigh a partir del cual salta la convección, viendo además que la relación entre Ra_c y s es aproximadamente lineal.

La conclusión que sacamos de este resultado es el efecto estabilizador de la radiación; al aumentar el valor de s , es decir, el espesor óptico del medio, la transferencia de calor por radiación es más efectiva, el campo de temperaturas se vuelve más homogéneo (como veremos en el apartado 5.5.1), y por tanto aumenta la dificultad de que salte la convección. Es por ello que el valor crítico del Rayleigh aumenta con el parámetro s , es decir, con la opacidad del medio.

Además, debemos tener en cuenta que la convección de calor y la radiación tienen efectos opuestos. Por un lado, la convección tiende a mezclar los perfiles de temperaturas de forma que homogeneiza la distribución en cada sección, es decir, la convección tiene una propiedad homogeneizadora. Por otro lado, la radiación presenta una tendencia opuesta, consiguiendo disminuir el movimiento del fluido, y acercando su evolución al régimen hidrostático. Podemos decir por tanto que la radiación tiene un carácter estabilizador, lo que hace que aumente el Ra_c . Una prueba de este resultado es el aumento del orden de magnitud del Ra_c frente al caso de conducción de calor. Mientras que en el caso anterior se tenía $O(Ra_c) \sim 10^3$, ahora tenemos $O(Ra_c) \sim 10^4$, lo cual resulta un aumento más que considerable del Rayleigh crítico en el caso de radiación frente al de conducción.

5.2 Relación de aspecto y Rayleigh crítico

Siguiendo con un orden similar al del capítulo anterior, pasamos a ver cómo afecta la relación de aspecto, $AR = L/H$, al valor crítico del Rayleigh. El procedimiento es análogo al del caso conductivo, solo que en este caso se realizará el cálculo para varios valores de la opacidad del medio, caracterizada por s , y así ver la influencia conjunta de este parámetro con la relación de aspecto sobre el Ra_c .

Como veremos a continuación, se ha calculado el Ra_c para valores de la relación de aspecto comprendidos en el rango $0.5 \leq AR \leq 10$ al igual que en el capítulo anterior. Por otro lado, este cálculo se ha hecho para varios valores del parámetro s ($s = 0.4, 1, 2$). Se muestra a continuación el resultado obtenido.

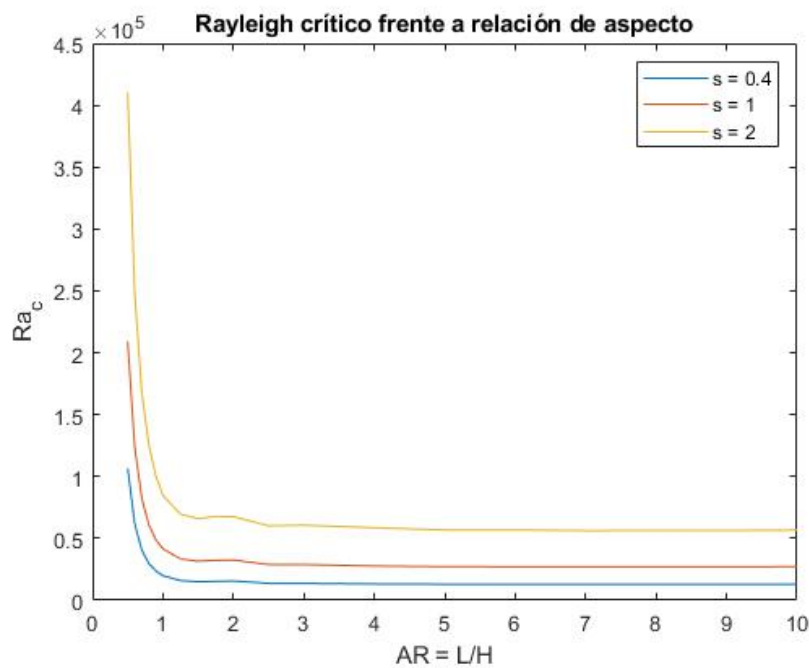


Figura 5.3 Rayleigh crítico frente a relación de aspecto en función del parámetro de radiación s .

En cuanto a la relación entre Rayleigh crítico y relación de aspecto, podemos sacar conclusiones análogas a las del caso conductivo. Ahora, al igual que entonces, vemos un comportamiento similar, en el que el Ra_c disminuye al aumentar AR . De la misma forma, se observan determinados puntos en los que Ra_c aumenta, puntos que se corresponden, como vimos en el capítulo anterior, con los valores de AR para los que aumenta el número de células en el estacionario. El análisis de este fenómeno se ha desarrollado suficientemente en el capítulo correspondiente a los resultados del caso conductivo, por lo que ahora no nos extenderemos más.

Por otro lado, se observa que la tendencia que vimos en el apartado anterior se mantiene para todos los valores de la relación de aspecto. En la figura 5.3 podemos observar que el Ra_c aumenta de forma proporcional al parámetro s , ya que al doblar el valor de este parámetro, se dobla también el valor de Ra_c , no solo para $AR = 2$ como vimos en la figura 5.2, sino también para valores de la relación de aspecto en el rango considerado ($0.5 \leq AR \leq 10$), lo que resulta una muestra más que significativa.

5.3 Número de células convectivas

En este caso trataremos de determinar la relación existente entre el parámetro de radiación, s , y el número de células convectivas que se forman en el sistema una vez alcanzado el régimen estacionario. Para ello, reproduciremos el resultado mostrado en la figura 4.10, es decir, el número de células en función de la relación de aspecto (para $Ra = Ra_c(AR)$), para varios valores de s , concretamente los valores que tratamos en el apartado anterior. Sin embargo, no reproduciremos la relación entre el número de rollos y el valor del número de Rayleigh, como hicimos en el caso de conducción de calor, pues este resultado no ilustra adecuadamente la relación existente entre la opacidad del medio y la formación de más o menos células de convección.

Emplearemos el mismo procedimiento y la misma notación que en el capítulo anterior (correspondiente al caso conductivo). Recordemos, por otro lado, que denominamos AR_n al valor de la relación de aspecto para el que se presentan por primera vez $n + 1$ células de convección, es decir, es el punto en el que se pasa de tener n a $n + 1$ rollos (para $Ra = Ra_c(AR)$). Adoptando esta notación, se ha obtenido el siguiente resultado, análogo al mostrado en la tabla 4.1, pero en este caso para varios valores de s .

Tabla 5.1 Valores de AR_n para $n \leq 7$ en función del parámetro s .

| | $s = 0.4$ | $s = 1$ | $s = 2$ |
|--------|-----------|---------|---------|
| AR_1 | 2.0 | 2.0 | 2.0 |
| AR_2 | 3.3 | 3.3 | 3.3 |
| AR_3 | 4.5 | 4.5 | 4.5 |
| AR_4 | 5.8 | 5.8 | 5.8 |
| AR_5 | 6.9 | 6.8 | 6.7 |
| AR_6 | 8.3 | 8.3 | 8.0 |
| AR_7 | 9.5 | 9.6 | 9.3 |

Comentamos que la precisión que se ha tomado en este caso, al igual que cuando confeccionamos la tabla 4.1, ha sido de $\Delta AR = 0.1$, es decir, el paso que se ha empleado en el cálculo.

Por un lado, podemos ver que los resultados correspondientes al caso de radiación pura (tabla 5.1) no difieren de forma significativa de los obtenidos para el caso conductivo (tabla 4.1). Se muestran a continuación estos mismos resultados, pero expresados en forma de gráfica:

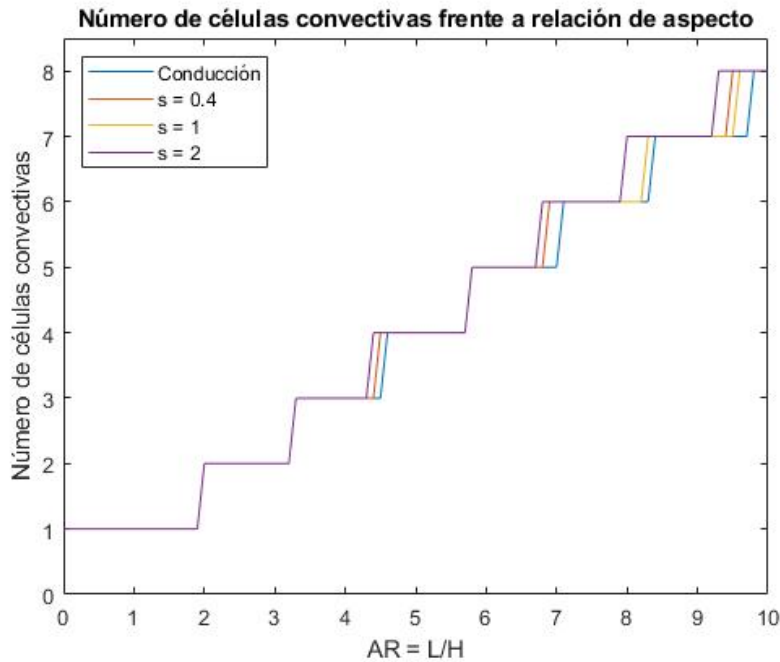


Figura 5.4 Número de células convectivas frente a relación de aspecto. Caso conductivo y de radiación pura para varios s .

Aquí vemos más claramente cómo el número de células de convección varía muy poco entre el caso conductivo y radiativo. De la misma forma, el efecto de la intensidad de radiación, dada por el parámetro s , tiene una influencia escasa sobre el número de células. Por otro lado, observamos que para una relación de aspecto baja no existen diferencias al variar s , diferencias que sí se muestran para relaciones de aspecto mayores, aunque con una influencia que no da ninguna tendencia clara de la evolución del número de células con el parámetro de radiación.

Concluimos por tanto que el efecto de la opacidad del medio sobre el número de células convectivas del sistema es poco significativo e irregular, y que dicho número de células depende principalmente de la relación de aspecto.

5.4 Número de Nusselt

En este apartado analizaremos el sistema en función del valor del *número de Nusselt* al igual que hicimos en el caso conductivo. En dicho caso, el Nusselt representaba la importancia relativa de la convección como mecanismo de transferencia de calor frente a la conducción. En este caso, el sentido físico del Nu será análogo, pero mostrará la relación de importancia entre la convección y la radiación de calor (en vez de la conducción), y por tanto su expresión será diferente.

A continuación mostraremos un desarrollo análogo al del caso de conducción con el que obtendremos la expresión del número de Nusselt para el caso radiativo.

En este caso partiremos de la ecuación 4.6, cambiando el flujo de calor por conducción por la

expresión correspondiente al flujo radiactivo, teniéndose la siguiente expresión.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^z \int_0^L \rho_0 c_p T(t, x, z_0) dx dz_0 \right] = - \left[\underbrace{\int_0^L -CT^3 \frac{\partial T}{\partial z_0}(t, x, z_0 = z) dx}_{F_{radiacin}(t, z)} + \underbrace{\int_0^L \rho_0 c_p v_z(t, x, z_0 = z) T(t, x, z_0 = z) dx}_{F_{conveccion}(t, z)} \right] + FL \quad (5.1)$$

El sentido físico de la ecuación 5.1 puede ser explicado con la siguiente figura; en ella pueden verse la entrada y salida de los distintos flujos de calor en el dominio, así como la variación de energía térmica en el fluido:

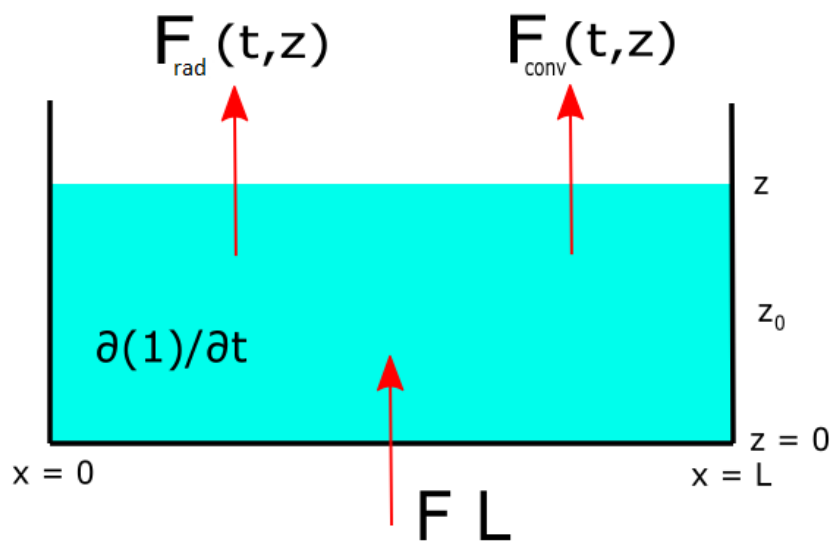


Figura 5.5 Esquema de los flujos de calor que interaccionan con el dominio $0 \leq x \leq L$ y $0 \leq z_0 \leq z$.

En esta figura vemos que se trata un dominio fluido que abarca el recinto para $0 \leq x \leq L$ y $0 \leq z_0 \leq z$, es decir, hasta una altura genérica. En este dominio, vemos cómo la diferencia entre el flujo incidente en la base y el flujo que escapa por la superficie superior (una parte en forma de radiación y otra por convección) da lugar a la variación de energía térmica en el volumen de fluido que se trata (el término $\partial(1)/\partial t$ de la figura se corresponde con el miembro izquierdo de la ecuación 5.1).

De ahora en adelante llamaremos $F_{total} = F_{rad} + F_{conv}$ al flujo de calor total que atraviesa la sección $z_0 = z$, es decir, la suma de los flujos que salen por radiación y convección. De esta forma, promediando la ecuación 5.1 en x , se tiene

$$\bar{F}_{total}(t, z) = \frac{F_{total}(t, z)}{L} = \frac{1}{L} \int_0^L -CT^3 \frac{\partial T}{\partial z}(t, x, z) dx + \frac{1}{L} \int_0^L \rho_0 c_p v_z(t, x, z) T(t, x, z) dx \quad (5.2)$$

El siguiente paso es aplicar la adimensionalización de las variables según lo expuesto con anterioridad, es decir

$$\begin{aligned}
T &= T_1 - (T_1 - T_2)T^* = (T_1 - T_2)(s^* - T^*) \\
v_z &= v_z^* \sqrt{g\beta(T_1 - T_2)H} \\
x &= Hx^* \\
z &= Hz^*
\end{aligned}$$

Aplicando esta adimensionalización a la ecuación 5.2 obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{total}(t^*, z^*) &= \frac{F_{total}(t^*, z^*)}{L} = \\
\frac{C(T_1 - T_2)^4}{L} \int_0^{AR} (s^* - T^*)^3 \frac{\partial T^*}{\partial z^*}(t^*, x^*, z^*) dx^* &- \frac{\rho_0 c_p (T_1 - T_2) H}{L} \sqrt{g\beta(T_1 - T_2)H} \int_0^{AR} v_z^* T^* dx^*
\end{aligned} \quad (5.3)$$

Donde se ha tenido en cuenta que $L/H = AR$ y que, en base a la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^L v_z dx = 0$$

A continuación, dividimos la ecuación 5.3 entre (sCT_2^4/H) para adimensionalizar el flujo total. Además, debemos tratar los coeficientes de la ecuación resultante. Para ello, tendremos en cuenta las siguientes expresiones, empleadas durante la formulación del problema:

$$\begin{aligned}
L/H &= AR \\
\frac{T_1 - T_2}{T_2} &= \frac{FH}{CT_2^4} = s \\
\alpha &= (CT_2^3)/(4\rho_0 c_p) \\
Ra &= \frac{g\beta(T_1 - T_2)H^3}{\nu\alpha} \\
Pr &= \nu/\alpha
\end{aligned}$$

Aplicando estas expresiones, llegamos a la siguiente ecuación del flujo total adimensionalizada:

$$\bar{F}_{total}^*(t^*, z^*) = \underbrace{\frac{s^3}{AR} \int_0^{AR} (s^* - T^*)^3 \frac{\partial T^*}{\partial z^*}(t^*, x^*, z^*) dx^*}_{\bar{F}_{rad}^*(t^*, z^*)} - \underbrace{\sqrt{RaPr} \frac{1}{4AR} \int_0^{AR} v_z^* T^* dx^*}_{\bar{F}_{conv}^*(t^*, z^*)} \quad (5.4)$$

En régimen estacionario tenemos, al igual que en el caso de conducción de calor, que $\bar{F}_{total}^* = 1$, ya que una vez alcanzado este régimen, la variación de energía térmica en el sistema se hace nula, y por tanto todo el flujo de calor introducido en el sistema se escapa en forma de flujo de calor por radiación y convección. De esta forma se tendría

$$1 = \underbrace{\frac{s^3}{AR} \int_0^{AR} (s^* - T^*)^3 \frac{\partial T^*}{\partial z^*}(t^*, x^*, z^*) dx^*}_{\bar{F}_{rad}^*(t^*, z^*)} - \underbrace{\sqrt{RaPr} \frac{1}{4AR} \int_0^{AR} v_z^* T^* dx^*}_{\bar{F}_{conv}^*(t^*, z^*)} \quad (5.5)$$

Al igual que en el caso anterior, tomamos la expresión de Goluskin sobre el número de Nusselt, que sigue la siguiente expresión

$$Nu(t) = \frac{\int_0^1 (\overline{F}_{rad}^*(t^*, z^*) + \overline{F}_{conv}^*(t^*, z^*)) dz^*}{\int_0^1 \overline{F}_{rad}^*(t^*, z^*) dz^*} \quad (5.6)$$

Por lo visto anteriormente, en régimen estacionario el numerador de la expresión 5.6 es igual a la unidad. Por tanto, a continuación desarrollaremos la expresión del denominador, teniéndose lo siguiente

$$\int_0^1 \overline{F}_{rad}^*(t^*, z^*) dz^* = \frac{s^3}{AR} \int_0^{AR} \left[\int_0^1 (s^* - T^*)^3 \frac{\partial T^*}{\partial z^*} dz^* \right] dx^* \quad (5.7)$$

$$\int_0^1 (s^* - T^*)^3 \frac{\partial T^*}{\partial z^*} dz^* = -\frac{1}{4} \int_0^1 \frac{\partial (s^* - T^*)^4}{\partial z^*} dz^* = -\frac{1}{4} [(s^* - T^*(z^* = 1))^4 - (s^* - T^*(z^* = 0))^4] \quad (5.8)$$

A continuación, teniendo en cuenta que por condiciones de contorno se tiene que $T^*(z^* = 1) = 1$ y que s^* fue definido como $s^* = (1/s) + 1$, tenemos

$$\int_0^1 (s^* - T^*)^3 \frac{\partial T^*}{\partial z^*} dz^* = \frac{1}{4} \left[(s^* - T^*(z^* = 0))^4 - \frac{1}{s^4} \right] \quad (5.9)$$

Introduciendo este resultado en 5.7 se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 \overline{F}_{rad}^*(t^*, z^*) dz^* &= \frac{s^3}{4AR} \int_0^{AR} \left[(s^* - T^*(z^* = 0))^4 - \frac{1}{s^4} \right] dx^* = \\ &= \frac{s^3}{4AR} \int_0^{AR} (s^* - T^*(z^* = 0))^4 dx^* - \frac{1}{4s} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Recogiendo este resultado y aplicándolo a la expresión que tomamos para el Nusselt, obtenemos la expresión que finalmente implementamos en el código para calcular el número de Nusselt en el caso de radiación pura:

$$Nu = \left[\frac{s^3}{4AR} \int_0^{AR} (s^* - T^*(t^* \rightarrow \infty, z^* = 0))^4 dx^* - \frac{1}{4s} \right]^{-1} \quad (5.11)$$

Como ya sabemos, este parámetro adimensional caracteriza la importancia relativa de la convección como mecanismo de transferencia de calor frente a la radiación pura de calor. De esta manera, lo emplearemos como un indicador de la intensidad de la convección de calor en el sistema una vez alcanzado el régimen estacionario (recordemos que esta expresión del Nusselt solamente es válida en el régimen estacionario, ya que es entonces cuando la variación temporal de la energía térmica del sistema se anula, y por tanto es entonces cuando la expresión 5.11 es válida).

Si, por ejemplo, implementamos la expresión 5.11 en nuestro programa para relación de aspecto $AR = 2$, Prandtl $Pr = 0.733$, $s = 0.4$ y número de Rayleigh $Ra = 30000$ (punto en el que hemos comprobado que salta la convección), obtenemos el siguiente resultado:

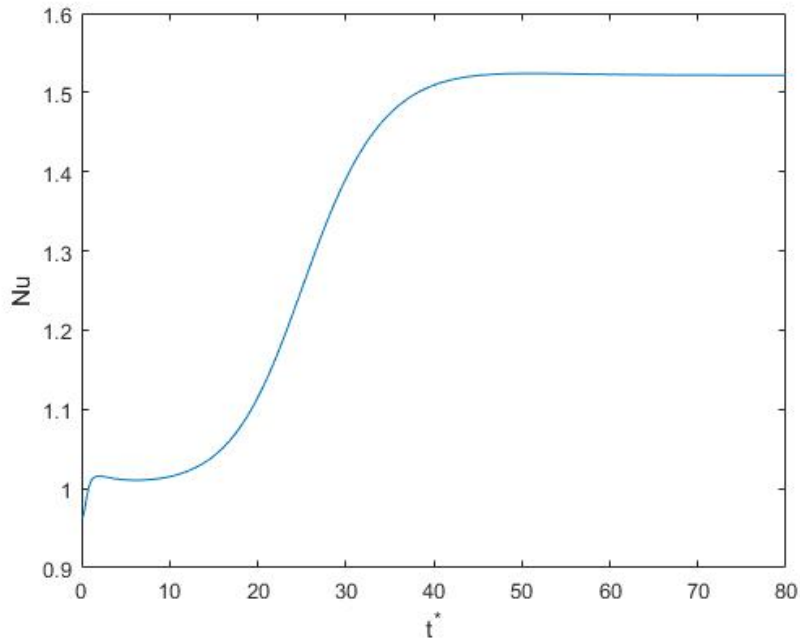


Figura 5.6 Número de Nusselt para $AR = 2$, $Pr = 0.733$, $s = 0.4$ y $Ra = 30000$.

Vemos que este resultado es análogo al correspondiente al caso de conducción. Si hubiéramos tomado los parámetros del sistema de tal forma que no saltara la convección (por ejemplo, tomando $Ra = 3000$ en el caso dado por la figura 5.6), el número de Nusselt tomaría valor unidad hasta el final de la simulación. En este caso, el representado en la figura 5.6), el valor del número de Nusselt para esta configuración del sistema sería $Nu = 1.5217$, ya que es el valor para el que se estabiliza al alcanzar el régimen estacionario. Básicamente, el número de Nusselt, tal y como lo hemos definido, debe tratarse de la misma forma que en el caso conductivo, tomando solamente su valor en el estacionario como válido.

Con este método, hemos observado cómo para un sistema con unas características determinadas ($AR = 2$, $Pr = 0.733$, $s = 0.4$ y $Ra = 30000$), se ha obtenido un número de Nusselt $Nu = 1.5217$. Así pues, hemos seguido este procedimiento para obtener el valor del Nusselt para varios valores del parámetro s , es decir, de la opacidad óptica del medio, y en función del número de Rayleigh (o mejor dicho, de su relación con el Rayleigh crítico, el cual depende a su vez del parámetro s). El resultado obtenido se muestra en la siguiente figura:

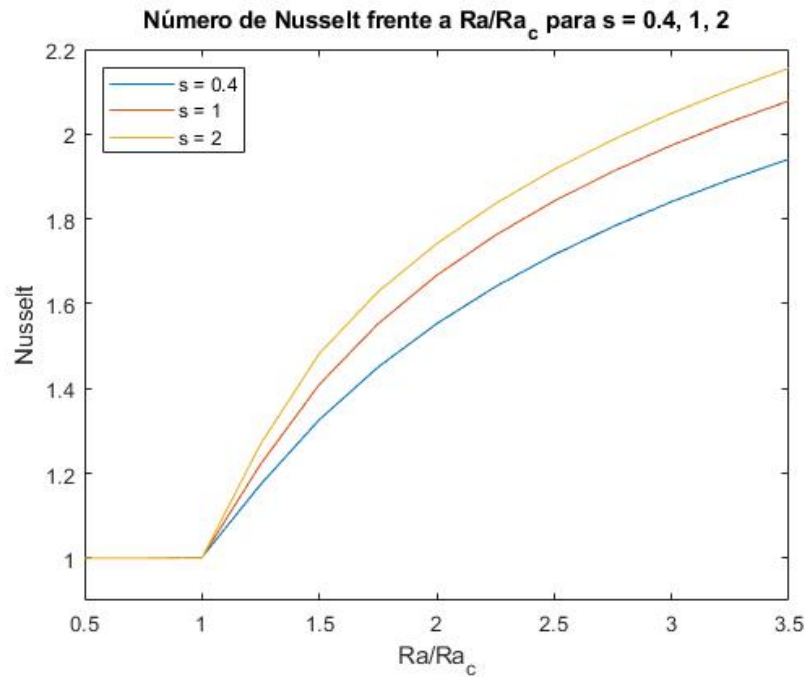


Figura 5.7 Número de Nusselt en función de Ra/Ra_c para varios valores de s .

Aclaremos que los resultados se han calculado para relación de aspecto $AR = 2$ y Prandtl $Pr = 0.733$ dados. Por otro lado, los valores del Rayleigh crítico en función de s han sido obtenidos con anterioridad, y se mostraron en la figura 5.2, en el apartado correspondiente al cálculo del Rayleigh crítico.

Al igual que en el caso conductivo, vemos que el Nusselt permanece equivalente a la unidad hasta que se supera el valor crítico del número de Rayleigh, lo cual indica que este valor crítico fue calculado adecuadamente, ya que por debajo de este valor del Rayleigh se tiene $Nu = 1$, y por tanto no salta la convección.

Por otro lado, en la figura 5.7 observamos que al aumentar el valor de s , es decir, al aumentar la opacidad del medio, el número de Nusselt también aumenta para una misma relación Ra/Ra_c , lo cual era previsible, ya que al aumentar la opacidad del medio las partículas dejan pasar el calor en menor medida y, por tanto, la intensidad del flujo de convección es mayor.

5.4.1 Tiempo estacionario

El tiempo estacionario, t_{est}^* , es el tiempo (adimensional) que tarda el sistema en alcanzar el régimen estacionario para una configuración dada del mismo. Su significación, definición y método de obtención se explicaron detalladamente para el caso conductivo (apartado 4.4.1), por lo que en este caso nos centraremos en la exposición de los resultados.

En este caso, hemos calculado el tiempo estacionario del sistema, t_{est}^* , en función de la relación Ra/Ra_c (siendo Ra_c una función de s), para varios valores de s (de la opacidad del medio). Los cálculos se han realizado para un sistema con relación de aspecto $AR = 2$ y número de Prandtl $Pr = 0.733$, obteniéndose lo siguiente:

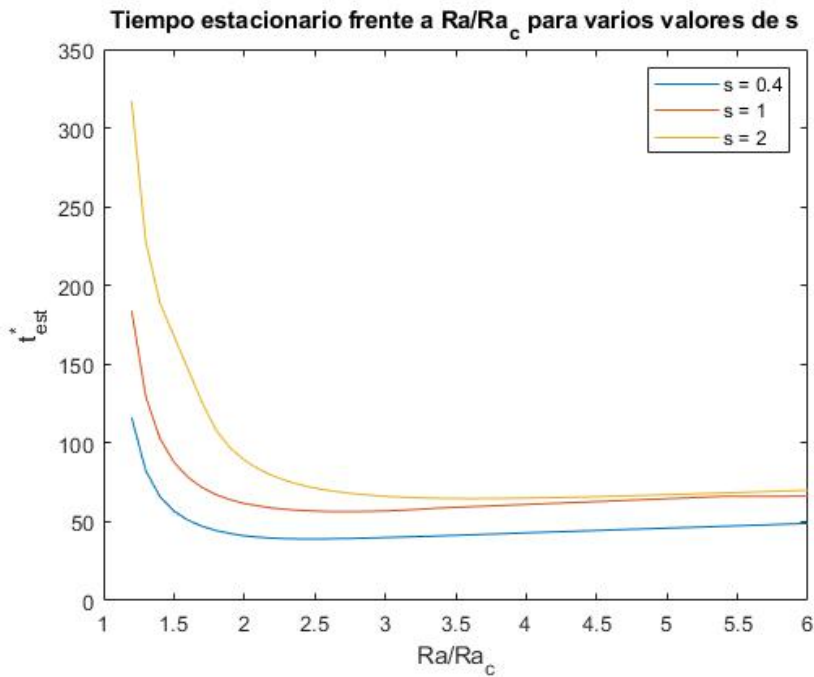


Figura 5.8 Tiempo estacionario en función de Ra/Ra_c para varios valores de s .

En esta figura observamos, para empezar, un comportamiento similar al del caso conductivo; al aumentar el número de Rayleigh se tiene una rápida disminución del tiempo estacionario hasta alcanzar un mínimo, a partir del cual comienza a aumentar suavemente. El motivo de este comportamiento, tal y como indicamos en el caso conductivo, se debe a que al aumentar el Ra la intensidad de la convección es mayor, y por tanto tarda menos tiempo en estabilizarse. Sin embargo, para números de Rayleigh muy altos, la convección se vuelve excesivamente intensa, y ello hace que se entre en un régimen caótico y turbulento que tarda un mayor tiempo en aplacarse.

Por otro lado, en la figura 5.8 vemos que al aumentar la opacidad del medio, es decir, al aumentar el valor del parámetro s , aumenta a su vez el tiempo estacionario para una relación Ra/Ra_c dada. Este comportamiento se debe a que al aumentar s el medio es más opaco, y por tanto la transferencia de calor entre unas zonas y otras del recinto es más difícil y se da con mayor lentitud.

5.5 Análisis del mecanismo de transferencia de calor

Al igual que en el caso conductivo, analizaremos la evolución de la temperatura media y de los flujos de calor medios en el sistema. Entonces, analizamos estas variables para un caso en el que saltara la convección y para otro en el que no. En vista del escaso interés que suponía el caso de equilibrio hidrostático, en este apartado analizaremos la influencia de la opacidad del medio, es decir, del parámetro s , y en todos los casos que analizaremos a continuación se tomará un número de Rayleigh lo suficientemente alto como para asegurar que salte la convección. En el análisis, al tratarse de casos con $Ra > Ra_c$, podría ser de interés mostrar la evolución de las distintas variables a lo largo del tiempo, pero esto solamente se hará en aquellos casos cuyo régimen transitorio muestre alguna particularidad especial.

5.5.1 Temperatura media

La temperatura media fue definida en el capítulo anterior (apartado 4.6.1), y fue definida tal y como sigue

$$\bar{T}^*(t^*, z^*) = \frac{1}{AR} \int_0^{AR} T^*(x^*, z^*, t^*) dx^* \quad (5.12)$$

Podemos ver que se trata del campo de temperaturas promediado en x^* para cada instante de tiempo. En este apartado analizaremos la influencia que tiene la opacidad del medio (parámetro s) tanto en la distribución de temperatura media, como para la de temperatura hidrostática. Tal y como pudimos comprobar en el caso de conducción, para números de Rayleigh lo suficientemente bajos no salta la convección, y por tanto se alcanza un estado de equilibrio estable (hidrostático) en el que la distribución de temperatura media coincide con la hidrostática. Por otro lado, también observamos que en el caso en que salta la convección, al aumentar el número de Rayleigh se intensificaba la convección y, por tanto, aumentaba la homogeneidad del campo de temperaturas. Es por estos motivos que, en este nuevo caso, tomaremos para todas las representaciones $Ra = 2 * Ra_c(s)$, donde el Rayleigh crítico es a su vez una función de la opacidad del medio, y nos centraremos en el efecto que tiene sobre el sistema el espesor óptico del medio.

Sin más preámbulos, mostramos la distribución de temperatura media frente a la distribución hidrostática para tres valores de s ($s = 0.4, 1, 2$), una vez alcanzado el régimen estacionario:

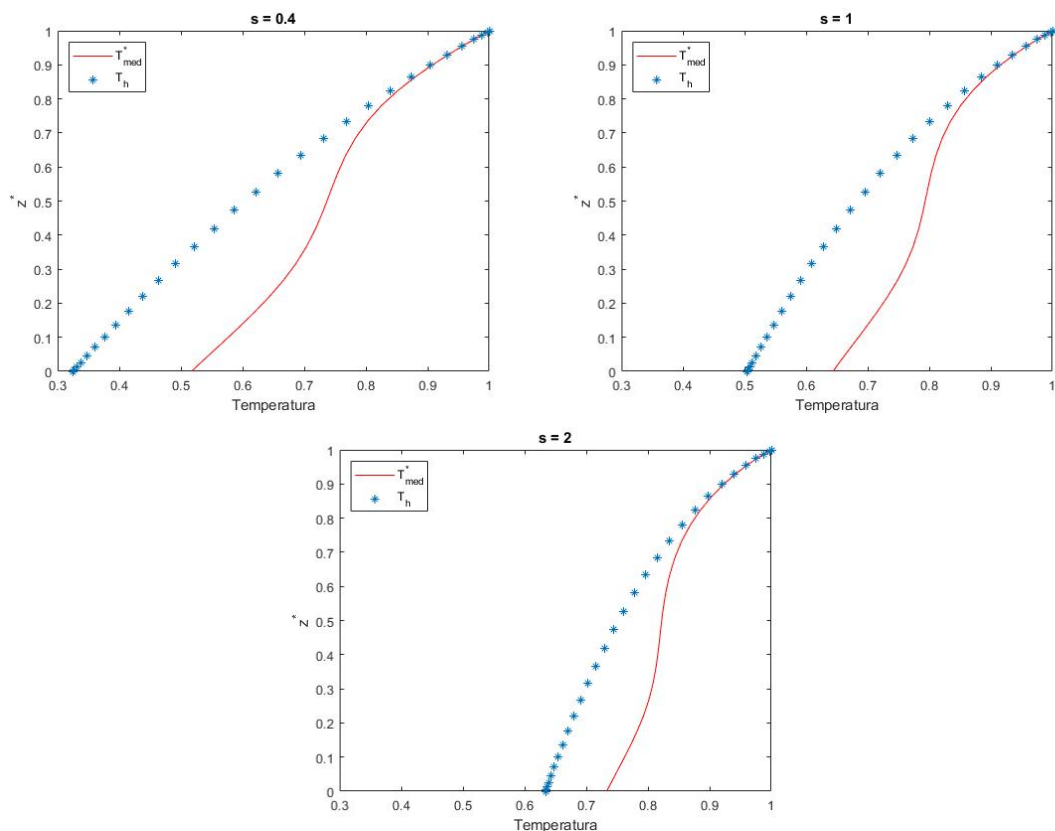


Figura 5.9 Distribución de temperatura media y distribución hidrostática de temperatura para $s = 0.4, 1, 2$ y $Ra = 2 * Ra_c(s)$.

Las gráficas de la figura 5.9 han sido calculadas con relación de aspecto $AR = 2$ y número de

Prandtl $Pr = 0.733$, y nos permiten comprobar el efecto que tiene el espesor óptico del medio sobre la distribución de temperatura media y la distribución hidrostática para un caso en el que salta la convección (es decir, para $Ra > Ra_c(s)$).

Por un lado, respecto a la distribución de temperaturas hidrostática, ya observamos en el apartado 3.2.1 la influencia del espesor óptico. Podemos ver que al aumentar el parámetro s la distribución se hace más homogénea, dado que al ser el medio más opaco, la transferencia de calor entre unas zonas y otras del recinto es más difícil.

Por otro lado, en cuanto a la distribución de temperatura media, sufre dos efectos diferentes. De una parte, el efecto de aumentar la opacidad del medio es el mismo que para la distribución hidrostática; de hecho, si no saltara la convección ya sabemos que ambas distribuciones de temperatura coincidirían. De otra parte, sufre asimismo el efecto del fenómeno de convección que, de igual modo que el aumento del espesor óptico, tiende a homogeneizar el campo de temperaturas. Básicamente, el campo de temperaturas medias sufre el efecto del espesor óptico del medio y la convección de calor, y ambos efectos tienden a homogeneizar dicha distribución de temperaturas.

5.5.2 Flujos de calor

En este apartado analizaremos la influencia del parámetro s (espesor óptico del medio) en la distribución de flujos de calor medios. Recordaremos que, tal y como se definió en el apartado sobre el número de Nusselt (apartado 5.4), los flujos medios por radiación y por convección vienen dados por las siguientes expresiones:

$$\bar{F}_{radiacin}^*(z^*, t^*) = \frac{s^3}{AR} \int_0^{AR} (s^* - T^*)^3 \frac{\partial T^*}{\partial z^*}(x^*, z^*) dx^* \quad (5.13)$$

$$\bar{F}_{conveccion}^*(z^*, t^*) = -\sqrt{RaPr} \frac{1}{4AR} \int_0^{AR} v_z^* T^* dx^* \quad (5.14)$$

Por otro lado, definimos el flujo total medio como la suma de los dos anteriores:

$$\bar{F}_{total}^* = \bar{F}_{conduccion}^* + \bar{F}_{conveccion}^* \quad (5.15)$$

Vemos que, de un modo similar a como hicimos con la distribución de temperatura media, estas variables representan el flujo de calor medio en cada sección z^* (flujo de calor promediado en x^*), para cada instante de tiempo.

Al igual que en el apartado anterior, no repetiremos algunos resultados que ya pudimos comentar en el caso conductivo. En dicho caso vimos, por un lado, la diferencia entre un caso en que saltaba la convección ($Ra > Ra_c$), y otro en el que no ($Ra < Ra_c$). Observamos que el caso en que no saltaba la convección no mostraba gran interés, ya que las distribuciones de flujos medios no evolucionaban, y en definitiva en el régimen estacionario el flujo de calor medio por convección era nulo. Sin embargo, cuando saltaba la convección surgían zonas en las que dominaba el flujo de calor por convección, mientras que en otras prevalecía la conducción de calor. Por otro lado, vimos que al aumentar el número de Rayleigh se intensificaba la convección, y por tanto el flujo medio de calor por convección aumentaba.

Refiriéndonos al caso con radiación, no existen diferencias relevantes en cuanto a la evolución de los flujos de calor medios en función del número de Rayleigh (concretamente, en relación con el Rayleigh crítico), salvo porque, evidentemente, en este caso tenemos un flujo de calor por radiación

en vez de conducción. Cambiando el flujo conductivo por el radiactivo, todos los resultados obtenidos en el caso anterior (caso de conducción de calor, apartado 4.6.2) pueden ser aplicados a este nuevo sistema con radiación pura de calor. Debido a ello, en este apartado nos limitaremos a observar el efecto que tiene la opacidad del medio (parámetro s) en la distribución de los flujos.

La evolución que sufren los distintos flujos medios a lo largo de la simulación es análoga a la que puede observarse en las figuras 4.25 y 4.26, por lo que en este caso mostraremos solamente el resultado final, lo que se obtiene al final de la simulación, durante el régimen estacionario. En todos los casos se ha tomado $Ra = 2 * Ra_c(s)$ para garantizar que salte la convección y que esta sea de una intensidad similar, relación de aspecto $AR = 2$ y número de Prandtl $Pr = 0.733$. A continuación se muestran los resultados obtenidos:

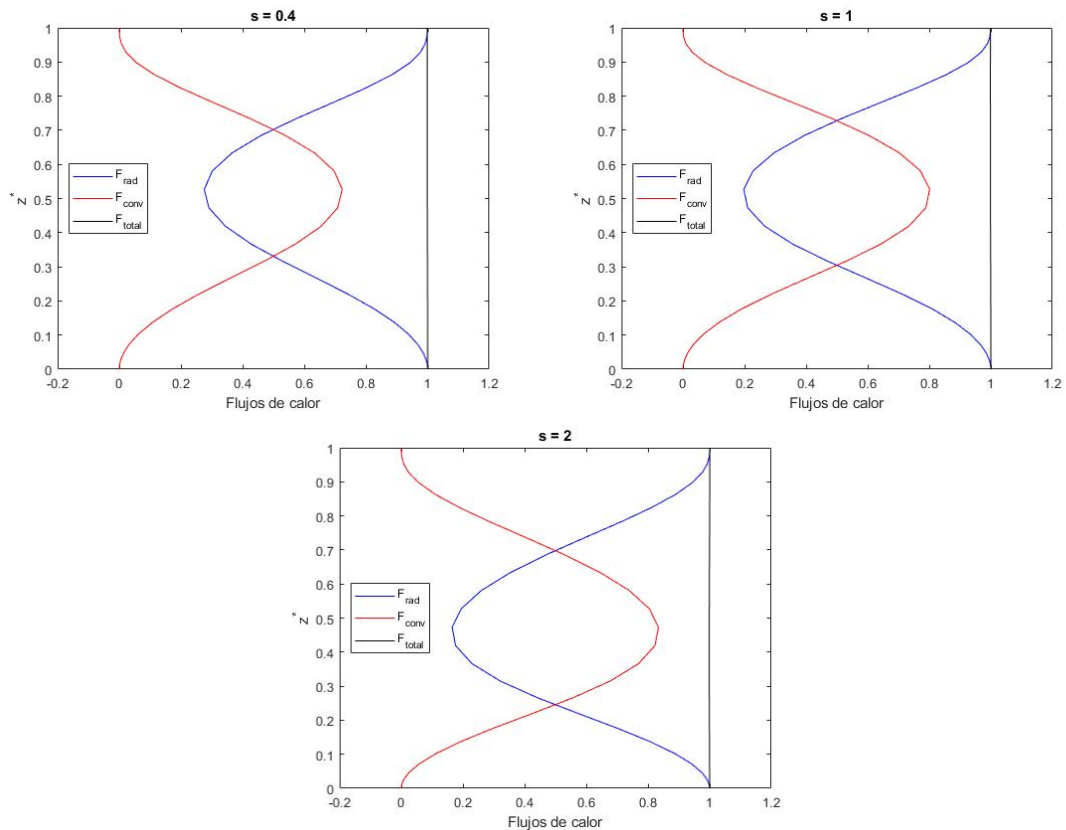


Figura 5.10 Distribución de flujos de calor medios (por radiación, convección y total) para $s = 0.4, 1, 2$ y $Ra = 2 * Ra_c(s)$.

Podemos ver que, aunque el cambio no sea especialmente significativo, al aumentar la opacidad del medio (parámetro s), aumenta a su vez la intensidad de la convección, ya que al aumentar el espesor óptico las partículas dejan pasar el calor en menor medida y, por tanto, el flujo de calor medio por convección aumenta y el flujo de radiación disminuye.

6 Conclusiones y líneas futuras

En vista de todo el desarrollo realizado y de los resultados obtenidos hemos podido obtener conclusiones de interés que comentaremos a continuación. Además, haremos una recapitulación del proyecto, analizando el procedimiento que se ha seguido desde un inicio.

Primeramente, comenzamos por hacer una extensa introducción al fenómeno de convección de Rayleigh-Bénard. En ella, explicamos en qué consiste dicho fenómeno, cuáles son las causas físicas de que se produzca en un determinado sistema, además de comentar en qué han consistido los principales experimentos e investigaciones sobre el tema.

A continuación, dedicamos un capítulo a expresar formalmente el problema a resolver y al desarrollo de las ecuaciones de Navier-Stokes hasta obtener el sistema ofrecido por las ecuaciones de Saltzman, con una reducción considerable de la complejidad del problema a resolver. Aquí observamos cómo aparece de forma natural el número de Rayleigh en las ecuaciones, parámetro del que analizaremos más adelante su influencia. De la misma forma, en el caso del flujo de radiación, definimos el parámetro s , y más adelante justificamos su significado. De esta forma, en capítulos posteriores pudimos analizar la influencia del espesor óptico del medio sobre las variables que caracterizan el sistema.

En el tercer capítulo explicamos el método de implementación numérica de las ecuaciones y condiciones del problema, explicamos el método de resolución y las distintas aproximaciones que se adoptaron para reducir su complejidad. El resultado obtenido en este capítulo, los códigos de MATLAB que se muestran en él, son uno de los resultados fundamentales del trabajo, ya que los resultados obtenidos en los capítulos posteriores se consiguieron ejecutando estos programas.

Finalmente, en el cuarto y quinto capítulo analizamos los dos sistemas objeto de estudio (flujo por conducción y por radiación) y obtuvimos numerosos resultados de interés. La primera variable que analizamos fue el número de Rayleigh crítico; demostramos cómo, tal y como establecía Lord Rayleigh, existía un valor crítico de este parámetro a partir del cual el fenómeno de convección se desarrollaba en el sistema. Vimos cómo los resultados teóricos de Rayleigh se corresponden con la implementación numérica de sus resultados, y cómo éstos se corresponden a su vez con los resultados experimentales de otros científicos. Observamos la influencia que tienen la relación de aspecto o la opacidad del medio, sobre el Rayleigh crítico. Por otro lado, definimos el número de Nusselt y lo empleamos para caracterizar el sistema. Comprobamos la correlación existente entre los resultados obtenidos anteriormente para el Rayleigh crítico y los nuevos, y pudimos dar un cálculo del tiempo que duraba el régimen transitorio en función de diversos parámetros. Finalmente, el estudio de la temperatura media y los flujos de calor nos permitió analizar el efecto que tiene la convección, más o menos intensa, en los mecanismos de transferencia de calor, así como en la distribución de temperaturas en el sistema.

En definitiva, este proyecto nos ha permitido mostrar la potencia de las herramientas de cálculo numérico y los métodos numéricos empleados al abordar problemas complejos, y la capacidad que tienen para obtener numerosos resultados de interés sin un alto coste computacional ni de tiempo. Estos métodos pueden ser empleados en análisis más precisos sobre el interior de las estrellas. Además, hemos dado validez a las hipótesis adoptadas (como, por ejemplo, la *aproximación de Boussinesq*) al haber obtenido resultados perfectamente justificables y, a veces, hasta previsible mediante la aplicación de estas reducciones y su cálculo numérico. Por otro lado, tenemos el método de diferencias finitas empleado, el cual se aplica sobre mallas arbitrarias y, por tanto, permite una mayor precisión en aquellas zonas donde sea necesaria. En cuanto a la no linealidad que ha introducido en el problema, no solo el fenómeno de convección, sino el término radiactivo, se ha resuelto mediante un método aparentemente nuevo que permitía linealizar las ecuaciones y resolverlas con un bajo coste computacional. Téngase en cuenta que la radiación introduce términos no lineales tanto en las ecuaciones como en las condiciones de contorno.

Finalmente, al igual que han hecho numerosos científicos en el último siglo, hemos caracterizado el sistema abordado, analizando los diferentes parámetros que afectan a la evolución del sistema, y estableciendo relaciones entre ellos, de forma que hemos podido analizar un fenómeno real a través del cálculo computacional.

Por último, hablaremos de las distintas posibilidades que existen para desarrollar un proyecto a partir del presente. Realmente, el fenómeno de convección de Rayleigh-Bénard tiene todavía mucho contenido por analizar, por no hablar de las posibilidades que ofrece (cada vez en mayor medida) el cálculo numérico. Una posibilidad sería realizar un análisis del fenómeno pero en un recinto con diferente geometría o con otras condiciones de contorno. De esta forma podría comprobarse la influencia de la morfología del sistema en los resultados. Sin embargo, ya que el presente trabajo pretende analizar un proceso que ocurre en el Sol, sería muy interesante realizar un análisis del fenómeno en una corona esférica y sin adoptar reducciones del problema como la aproximación de Boussinesq. De esta forma, el estudio sería más fiel a la realidad, y podrían sacarse conclusiones directamente aplicables a la zona convectiva del Sol. Por otro lado, introduciendo modelos de turbulencia adecuados, podría analizarse el régimen turbulento que se da para valores altos del Rayleigh, y aplicar estos resultados a atmósferas altamente estratificadas como es el caso del Sol.

Apéndice A

Códigos MATLAB empleados

A.1 Método de diferencias finitas

```
function [D_1 D_2 D_3] = Dsmesh (N,x,M)
for i = 1:N,
if M == N,
D_1 = zeros(N,N); D_2 = zeros(N,N); D_3 = zeros(N,N);
xb = x; i_s = i;
[D_1(i,1:M) D_2(i,1:M) D_3(i,1:M)] = Dbs(i_s,xb,M);
else
D_1 = sparse(N,N); D_2 = sparse(N,N); D_3 = sparse(N,N);
M_c = (M+1)/2;
if i < M_c,
xb = x(1:M); i_s = i;
[D_1(i,1:M) D_2(i,1:M) D_3(i,1:M)] = Dbs(i_s,xb,M);
end
if i >= M_c && i <= N-M_c,
xb = x((i-M_c+1):(i+M_c-1)); i_s = M_c;
[D_1(i,(i-M_c+1):(i+M_c-1)) D_2(i,(i-M_c+1):(i+M_c-1)) ...
D_3(i,(i-M_c+1):(i+M_c-1))] = Dbs(i_s,xb,M);
end
if i > N-M_c,
xb = x((N-M+1):N); i_s = i+M-N;
[D_1(i,(N-M+1):N) D_2(i,(N-M+1):N) D_3(i,(N-M+1):N)] = ...
Dbs(i_s,xb,M);
end
end
end
```

```
function [db_1 db_2 db_3] = Dbs (i,xb,M)
% Computamos los coeficientes a_i/a_m
aiam = zeros(1,M);
F_i = xb(i) - xb; F_i(i) = 1; n_i = length(find(F_i<0));
```

```

for m = 1:M,
if abs(m - i) > 0,
F_m = xb(m) - xb ; F_m(m) = 1; n_m = length(find(F_m < 0));
aiam(m) = (-1)^(n_i-n_m)*prod(sort(abs(F_i))./sort(abs(F_m)));
end
end
%
% Matrices de diferenciación :
Db_1 = zeros(M,M); Db_2 = zeros(M,M); Db_3 = zeros(M,M);
% s = 1:
for m = 1:M
if abs(m - i) > 0,
Db_1(i,m) = aiam(m)/(xb(i)-xb(m));
end
end
Db_1(i,i) = -sum(Db_1(i,:));
% s = 2
for m = 1:M
if abs(m - i) > 0,
Db_2(i,m) = 2/(xb(i)-xb(m))*(aiam(m)*Db_1(i,i)-Db_1(i,m));
end
end
Db_2(i,i) = -sum(Db_2(i,:));
% s = 3
for m = 1:M
if abs(m - i) > 0,
Db_3(i,m) = 3/(xb(i)-xb(m))*(aiam(m)*Db_2(i,i)-Db_2(i,m));
end
end
Db_3(i,i) = -sum(Db_3(i,:));
%
% Salida
db_1 = Db_1(i,:); db_2 = Db_2(i,:); db_3 = Db_3(i,:);

```

A.2 Flujo de calor por conducción

```

%%% PROBLEMA DE CONVECCION DE RAYLEIGH-BENARD %%%

%%>_ Problema de conducción _>%

clc; clear all; close all;

% Nodos de Chebyshev %
AR = 4.5; % AR = L/H (relación de aspecto)
Nx = 30; xmin = 0; xmax = AR;
for i = 1:Nx

```

```

    xast(i) = (xmax+xmin)/2+(xmin-xmax)/2*cos((i-1)/(Nx-1)*pi);
end
Nz = 30; zmin = 0; zmax = 1;
for p = 1:Nz
    zast(p) = (zmax+zmin)/2+(zmin-zmax)/2*cos((p-1)/(Nz-1)*pi);
end
Nt = Nx*Nz;

%-----MATRICES-----%

M = 9;
%%%%%%%%%%%%%%
% With finite differences
[dx d2x d3x]=Dsmesh(Nx,xch,M);
[dz d2z d3z]=Dsmesh(Nz,zch,M);
%
Dx=kron(dx, speye(Nz)) ; Dz=kron(speye(Nx), dz);
D2x=kron(d2x, speye(Nz)); D2z=kron(speye(Nx), d2z);
D3x=kron(d3x, speye(Nz)); D3z=kron(speye(Nx), d3z);
DL=D2x+D2z ; DL2=DL*DL;
DxDL=Dx*DL;
DzDL=Dz*DL;

% Creacion de matrices y vectores del sistema %
psi = zeros(Nt,1); %vector de \psi (función de corriente)
Tast = zeros(Nt,1); %vector de temperaturas T
psinm1 = zeros(Nt,1); %vector de condiciones iniciales para \psi
Tastnm1 = zeros(Nt,1); %vector de condiciones iniciales para T
Asyst = sparse(2*Nt,2*Nt); %matriz que engloba el sistema con
    submatrices AP, AT, BP, BT
Apsi = sparse(Nt,Nt);
AT = sparse(Nt,Nt);
Bpsi = sparse(Nt,Nt);
BT = sparse(Nt,Nt);
bps1 = zeros(Nt,1); %vector de terminos independientes para \psi
bT = zeros(Nt,1); %vector de terminos independientes para T
FBCpsi = ones(Nt,1);
FBCt = ones(Nt,1);
FBCt2 = zeros(Nt,1);
FBCt3 = zeros(Nt,1);

% Propiedades del fluido e incremento de tiempo
Pr = 0.733;
Ra = 2000;
dt = 0.1; %Incremento de tiempo que se va a tomar
Ntime = 3000; % Limite de n, siendo t* = n*dt

% Calculo de Th* %
Th = Thyd_NoRad(zast);
for j = 1:Nz

```

```

    for i = 1:Nx
        I = (i-1)*Nz+j;
        TH(I,1) = Th(j);
    end
end

% Perturbación inicial %
for i = 1:Nx
    for j = 1:Nz
        I = (i-1)*Nz+j;
        psinm1(I,1) = 0.0005*xch(i)^2*(xmax-xch(i))^2*zch(j)^2*...
            (zmax-zch(j))^2*cos(pi^2*xch(i)*zch(j)/xmax/zmax/5);
        Tastnm1(I,1) = TH(I,1) + 0.005*cos(2*pi*(xch(i)-xmin)/...
            (xmax-xmin))*sin(2*pi*(zch(j)-zmin)/(zmax-zmin));
    end
end

% Matrices del sistema %
Apsi = DL-dt*sqrt(Pr/Ra)*DL2;
AT = -dt*Dx;
Bpsi = zeros(Nt,Nt);
BT = speye(Nt)-dt/sqrt(Pr*Ra)*DL;

% Condiciones de contorno %
% CC en contornos horizontales (psi impuesta)
for i = 1:Nx
    % inferior
    I = (i-1)*Nz+1; Apsi(I,:) = 0; Apsi(I,I) = 1;
    AT(I,:) = 0; FBCT(I,1) = 0;
    Bpsi(I,:) = 0; FBCpsi(I,1) = 0;

    % superior
    I = (i-1)*Nz+Nz; Apsi(I,:) = 0; Apsi(I,I) = 1;
    AT(I,:) = 0; FBCT(I,1) = 0;
    Bpsi(I,:) = 0; FBCpsi(I,1) = 0;
end

% CC en contornos verticales (psi impuesta)
for j = 2:Nz-1
    % izquierda
    I = (1-1)*Nz+j; Apsi(I,:) = 0; Apsi(I,I) = 1;
    AT(I,:) = 0; FBCT(I,1) = 0;
    Bpsi(I,:) = 0; FBCpsi(I,1) = 0;

    % derecha
    I = (Nx-1)*Nz+j; Apsi(I,:) = 0; Apsi(I,I) = 1;
    AT(I,:) = 0; FBCT(I,1) = 0;
    Bpsi(I,:) = 0; FBCpsi(I,1) = 0;
end

```

```

% CC en subcontornos horizontales
for i=2:Nx-1
    % subcontorno inferior
    I = (i-1)*Nz+2; K = I-1;
    AT(I,:) = 0; Apsi(I,:) = Dz(K,:);
    FBCpsi(I,1) = 0;

    % subcontorno superior
    I = (i-1)*Nz+Nz-1; K = I+1;
    AT(I,:) = 0; Apsi(I,:) = Dz(K,:);
    FBCpsi(I,1) = 0;
end

% CC en subcontornos verticales
for j=3:Nz-2
    % subcontorno izquierdo
    I = (2-1)*Nz+j; K = I-Nz;
    AT(I,:) = 0; Apsi(I,:) = Dx(K,:);
    FBCpsi(I,1) = 0;

    % subcontorno derecho
    I = (Nx-2)*Nz+j; K = I+Nz;
    AT(I,:) = 0; Apsi(I,:) = Dx(K,:);
    FBCpsi(I,1) = 0;
end

% Condiciones de contorno para Bt %
% Horizontales
for i = 1:Nx
    % inferior (derivada de T* impuesta (=1))
    I = (i-1)*Nz+1;
    BT(I,:) = Dz(I,:); FBCt(I,1) = 0; FBCt2(I,1) = 1;

    % superior (T* impuesta (=1))
    I = (i-1)*Nz+Nz;
    BT(I,:) = 0; BT(I,I) = 1; FBCt(I,1) = 0; FBCt3(I,1) = 1;
end
% Verticales (paredes adiabaticas, dT*/dx = 0)
for j = 2:Nz-1
    % izquierdo
    I = (1-1)*Nz+j;
    BT(I,:) = Dx(I,:); FBCt(I,1) = 0;

    % derecho
    I = (Nx-1)*Nz+j;
    BT(I,:) = Dx(I,:); FBCt(I,1) = 0;
end

dtPrRa = dt/sqrt(Pr*Ra); % para facilitar notación

```

```

% Resolucion del problema de conveccion %
for n = 1:Ntime
    t = n*dt;
    [n t]

% Se forman los vectores NLP, NLT, bPsi y bT
% se modifican con condiciones de contorno
NLP(1:Nt,1) = (Dx*psinm1).*(DzDL*psinm1)-(Dz*psinm1).*(DxDL*psinm1);
NLT(1:Nt,1) = (Dx*psinm1).*(Dz*Tastnm1)-(Dz*psinm1).*(Dx*Tastnm1);
bpsi = (NLP*dt + DL*psinm1).*FBCpsi;
bT = (NLT*dt + Tastnm1).*FBCT + FBCT2 + FBCT3;

% Resuelve para t*_n
Asyst = [Apsi,AT;Bpsi,BT]; b = [bpsi; bT];
sol = Asyst\b;
psi(1:Nt,1) = sol(1:Nt,1); Tast(1:Nt,1) = sol(Nt+1:2*Nt,1);

for j=1:Nz
    xmat(1:Nx,j) = xast(1:Nx);
    zmat(1:Nx,j) = zast(j);
    psimat(1:Nx,j) = psi(((1:Nx)-1)*Nz+j,1);
    Thmat(1:Nx,j) = TH(((1:Nx)-1)*Nz+j,1); % matriz de Th*
    Tastmat(1:Nx,j) = Tast(((1:Nx)-1)*Nz+j,1); % matriz de T*
    thetamat(1:Nx,j) = Tastmat(1:Nx,j) - Thmat(1:Nx,j); % Matriz
        para theta*, la perturbación de la temperatura respecto del
        caso hidrostático
end

% Pasa al instante siguiente
Tastnm1 = Tast; psinm1 = psi;
Tastmat = Tastmat'; Thmat = Thmat';

end

%%%__FUNCIONES__%%%

function [db_1 db_2 db_3] = Dbs (i,xb,M)
% Computamos los coeficientes a_i/a_m
aiam = zeros(1,M);
F_i = xb(i) - xb; F_i(i) = 1; n_i = length(find(F_i<0));
for m = 1:M,
    if abs(m - i) > 0,
        F_m = xb(m) - xb; F_m(m) = 1; n_m = length(find(F_m < 0));
        aiam(m) = (-1)^(n_i-n_m)*prod(sort(abs(F_i))./sort(abs(F_m)));
    end
end
end
%
% Matrices de diferenciación :
Db_1 = zeros(M,M); Db_2 = zeros(M,M); Db_3 = zeros(M,M);
% s = 1:

```



```

for m = 1:M
if abs(m - i) > 0,
Db_1(i,m) = aiam(m)/(xb(i)-xb(m));
end
end
Db_1(i,i) = -sum(Db_1(i,:));
% s = 2
for m = 1:M
if abs(m - i) > 0,
Db_2(i,m) = 2/(xb(i)-xb(m))*(aiam(m)*Db_1(i,i)-Db_1(i,m));
end
end
Db_2(i,i) = -sum(Db_2(i,:));
% s = 3
for m = 1:M
if abs(m - i) > 0,
Db_3(i,m) = 3/(xb(i)-xb(m))*(aiam(m)*Db_2(i,i)-Db_2(i,m));
end
end
Db_3(i,i) = -sum(Db_3(i,:));
%
% Salida
db_1 = Db_1(i,:); db_2 = Db_2(i,:); db_3 = Db_3(i,:);
end

function [D_1 D_2 D_3] = Dsmesh (N,x,M)
D_1 = sparse(N,N); D_2 = sparse(N,N); D_3 = sparse(N,N);
for i = 1:N,
if M == N,
xb = x; i_s = i;
[D_1(i,1:M) D_2(i,1:M) D_3(i,1:M)] = Dbs(i_s,xb,M);
else
M_c = (M+1)/2;
if i < M_c,
xb = x(1:M); i_s = i;
[D_1(i,1:M) D_2(i,1:M) D_3(i,1:M)] = Dbs(i_s,xb,M);
end
if i >= M_c && i <= N-M_c,
xb = x((i-M_c+1):(i+M_c-1)); i_s = M_c;
[D_1(i,(i-M_c+1):(i+M_c-1)) D_2(i,(i-M_c+1):(i+M_c-1)) ...
D_3(i,(i-M_c+1):(i+M_c-1))] = Dbs(i_s,xb,M);
end
if i > N-M_c,
xb = x((N-M+1):N); i_s = i+M-N;
[D_1(i,(N-M+1):N) D_2(i,(N-M+1):N) D_3(i,(N-M+1):N)] = ...
Dbs(i_s,xb,M);
end
end
end
end
end
end
end

```

```
function Th = Thyd_NoRad(zast)
Th = zast;
end
```

A.3 Flujo de calor por radiación

```
%%% PROBLEMA DE CONVECCION DE RAYLEIGH-BENARD %%%

%%_ Problema de radiación pura _%%

clc; clear all; close all;

% Nodos de Chebyshev %
AR = 2; % AR = L/H (relación de aspecto)

Nx = 30; xmin = 0; xmax = AR;
for i = 1:Nx
    xast(i) = (xmax+xmin)/2+(xmin-xmax)/2*cos((i-1)/(Nx-1)*pi);
end
Nz = 30; zmin = 0; zmax = 1;
for p = 1:Nz
    zast(p) = (zmax+zmin)/2+(zmin-zmax)/2*cos((p-1)/(Nz-1)*pi);
end
Nt = Nx*Nz;

%_MATRICES_%

M = 9;
%%%%%%%%%%%%%%
% With finite differences
[dx d2x d3x]=Dsmesh(Nx,xast,M);
[dz d2z d3z]=Dsmesh(Nz,zast,M);
%
Dx=kron(dx,speye(Nz)) ; Dz=kron(speye(Nx),dz);
D2x=kron(d2x,speye(Nz)); D2z=kron(speye(Nx),d2z);
D3x=kron(d3x,speye(Nz)); D3z=kron(speye(Nx),d3z);
DL=D2x+D2z ; DL2=DL*DL;
DxDL=Dx*DL;
DzDL=Dz*DL;

% Creacion de matrices y vectores del sistema %
psi = zeros(Nt,1); %vector de \psi (función de corriente)
Tast = zeros(Nt,1); %vector de temperaturas T
psinm1 = zeros(Nt,1); %vector de condiciones iniciales
Tastnm1 = zeros(Nt,1);
Asyst = sparse(2*Nt,2*Nt); %matriz que engloba el sistema con
```

```

%submatrices AP, AT, BP, BT
Apsi = sparse(Nt,Nt);
AT = sparse(Nt,Nt);
Bpsi = sparse(Nt,Nt);
BT = sparse(Nt,Nt);
bps_i = zeros(Nt,1); %vector de terminos independientes para \psi
bT = zeros(Nt,1); %vector de terminos independientes para T
FBCpsi = ones(Nt,1);
FBCT = ones(Nt,1);
FBCT2 = zeros(Nt,1);
FBCT3 = zeros(Nt,1);

% Propiedades del fluido e incremento de tiempo
Pr = 0.733;
Ra = 27100;
s = 1;
dt = 0.1; % Incremento de tiempo que se va a tomar
Ntime = 10000; % Limite de n, siendo t* = n*dt

% Calculo de Th* %
Th = Thyd_Rad(s,Nz,zast);
for j = 1:Nz
    for i = 1:Nx
        I = (i-1)*Nz+j;
        TH(I,1) = Th(j);
    end
end

% Perturbación inicial %
for i = 1:Nx
    for j = 1:Nz
        I = (i-1)*Nz+j;
        psinm1(I,1) = 0.0005*xch(i)^2*(xmax-xch(i))^2*zch(j)^2*...
            (zmax-zch(j))^2*cos(pi^2*xch(i)*zch(j)/xmax/zmax/5);
        Tastm1(I,1) = TH(I,1) + 0.005*cos(2*pi*(xch(i)-xmin)/...
            (xmax-xmin))*sin(2*pi*(zch(j)-zmin)/(zmax-zmin));
    end
end

% Matrices del sistema %
% sin BT que se define en el bucle
Apsi = DL - dt*sqrt(Pr/Ra)*DL2;
AT = -dt*Dx;
Bpsi = zeros(Nt,Nt);

% Condiciones de contorno %
% CC en contornos horizontales (psi impuesta)
for i = 1:Nx
    % inferior
    I = (i-1)*Nz+1; Apsi(I,:) = 0; Apsi(I,I) = 1;

```

```

AT(I,:) = 0; FBCpsi(I,1) = 0;
Bpsi(I,:) = 0; FBCT(I,1) = 0;

% superior
I = (i-1)*Nz+Nz; Apsi(I,:) = 0; Apsi(I,I) = 1;
AT(I,:) = 0; FBCpsi(I,1) = 0;
Bpsi(I,:) = 0; FBCT(I,1) = 0;
end

% CC en contornos verticales (psi impuesta)
for j = 2:Nz-1
    %izquierda
    I = (1-1)*Nz+j; Apsi(I,:) = 0; Apsi(I,I) = 1;
    AT(I,:) = 0; FBCpsi(I,1) = 0;
    Bpsi(I,:) = 0; FBCT(I,1) = 0;

    %derecha
    I = (Nx-1)*Nz+j; Apsi(I,:) = 0; Apsi(I,I) = 1;
    AT(I,:) = 0; FBCpsi(I,1) = 0;
    Bpsi(I,:) = 0; FBCT(I,1) = 0;
end

% CC en subcontornos horizontales (vx=0 en cont horiz)
for i=2:Nx-1
    %subcontorno inferior
    K = (i-1)*Nz+2; AT(K,:) = 0;
    Apsi(K,:) = Dz(K-1,:);
    FBCpsi(K,1) = 0;

    %subcontorno superior
    K = (i-1)*Nz+Nz-1; AT(K,:) = 0;
    Apsi(K,:) = Dz(K+1,:);
    FBCpsi(K,1) = 0;
end

% CC en subcontornos verticales (vz=0 en cont vert)
for j=3:Nz-2
    %subconjunto izquierdo
    K = (2-1)*Nz+j; AT(K,:) = 0;
    Apsi(K,:) = Dx(K-Nz,:);
    FBCpsi(K,1) = 0;

    %subconjunto derecho
    K = (Nx-1-1)*Nz+j; AT(K,:) = 0;
    Apsi(K,:) = Dx(K+Nz,:);
    FBCpsi(K,1) = 0;
end

dtPrRa = dt/sqrt(Pr*Ra); % para facilitar notación

```

```

% Resolucion del problema de conveccion %
for n = 1:Ntime
    t = n*dt;
    [n t]

    % Forma matriz BT y vectores bT, bpsi, NLP y NLT %
    % se modifican con condiciones de contorno
    NLP(1:Nt,1) = (Dx*psinm1).*(DzDL*psinm1)-(Dz*psinm1).*(DxDL*psinm1);
    NLT(1:Nt,1) = (Dx*psinm1).*(Dz*Tastnm1)-(Dz*psinm1).*(Dx*Tastnm1);
    bpsi = (NLP*dt + DL*psinm1).*FBCpsi;
    sast = (1/s) + 1;
    sastTastnm1 = sast - Tastnm1;
    sastTastnm1_2 = sastTastnm1.*sastTastnm1;
    sastTastnm1_3 = sastTastnm1_2.*sastTastnm1;
    sastTastnm1_4 = sastTastnm1_3.*sastTastnm1;
    DL_1 = DL*spdiags(sastTastnm1_3,0,Nt,Nt);
    DL_2 = DL*(sastTastnm1_4 + 4*sastTastnm1_3.*Tastnm1);
    BT = speye(Nt) - 4*dtPrRa*(s^3)*DL_1;
    bT = NLT*dt + Tastnm1 - dtPrRa*(s^3)*DL_2;

%
% Matrices mbcT y vector vbcT definidos en las notas:
%
    mbcT = Dz*spdiags(sastTastnm1_3,0,Nt,Nt);
    vbcT = (1/4)*Dz*(sastTastnm1_3.*(sast+3*Tastnm1));
%
    % Condiciones de contorno para BT %
% Horizontales
for i = 1:Nx
    % inferior (derivada de T* impuesta (=1)). Se usan las filas y
    % componentes I
    I = (i-1)*Nz+1;
    % mbcT y vbcT para aplicar la condición de contorno
    BT(I,:) = mbcT(I,:); FBCT(I,1) = 0;
    FBCT2(I,1) = 1/s^3+vbcT(I,1);
%
    % superior (T* impuesta (=1))
    I = (i-1)*Nz+Nz; BT(I,:) = 0; BT(I,I) = 1;
    FBCT(I,1) = 0; FBCT3(I,1) = 1;
end
% Verticales (paredes adiabaticas, dT*/dx = 0 para x = 0 y x = L/H)
for j = 2:Nz-1
    %izquierdo
    I = (1-1)*Nz+j; BT(I,:) = Dx(I,:); FBCT(I,1) = 0;

    %derecho
    I = (Nx-1)*Nz+j; BT(I,:) = Dx(I,:); FBCT(I,1) = 0;
end

%Resuelve para theta*_n (se suprimen asteriscos en theta*)
bT = bT.*FBCT + FBCT2 + FBCT3;

```

```

Asyst = [Apsi,AT;Bpsi,BT]; b = [bpsi; bT];
sol = Asyst\b;
psi(1:Nt,1) = sol(1:Nt,1); Tast(1:Nt,1) = sol(Nt+1:2*Nt,1);

for j=1:Nz
    xmat(1:Nx,j) = xast(1:Nx);
    zmat(1:Nx,j) = zast(j);
    psimat(1:Nx,j) = psi(((1:Nx)-1)*Nz+j,1);
    Thmat(1:Nx,j) = TH(((1:Nx)-1)*Nz+j,1); % matriz de Th*
    Tastmat(1:Nx,j) = Tast(((1:Nx)-1)*Nz+j,1); % matriz de T*
    thetamat(1:Nx,j) = Tastmat(1:Nx,j) - Thmat(1:Nx,j); % matriz de
        theta*
end

% Pasa al instante siguiente
Tastnm1 = Tast; psinm1 = psi;
Tastmat = Tastmat'; Thmat = Thmat';

end

%%%__FUNCIONES__%%%

function [db_1 db_2 db_3] = Dbs (i,xb,M)
% Computamos los coeficientes a_i/a_m
aiam = zeros(1,M);
F_i = xb(i) - xb; F_i(i) = 1; n_i = length(find(F_i<0));
for m = 1:M,
    if abs(m - i) > 0,
        F_m = xb(m) - xb ; F_m(m) = 1; n_m = length(find(F_m < 0));
        aiam(m) = (-1)^(n_i-n_m)*prod(sort(abs(F_i))./sort(abs(F_m)));
    end
end
%
% Matrices de diferenciación :
Db_1 = zeros(M,M); Db_2 = zeros(M,M); Db_3 = zeros(M,M);
% s = 1:
for m = 1:M
    if abs(m - i) > 0,
        Db_1(i,m) = aiam(m)/(xb(i)-xb(m));
    end
end
Db_1(i,i) = -sum(Db_1(i,:));
% s = 2
for m = 1:M
    if abs(m - i) > 0,
        Db_2(i,m) = 2/(xb(i)-xb(m))*(aiam(m)*Db_1(i,i)-Db_1(i,m));
    end
end
Db_2(i,i) = -sum(Db_2(i,:));
% s = 3

```

```

for m = 1:M
if abs(m - i) > 0,
Db_3(i,m) = 3/(xb(i)-xb(m))*(aiam(m)*Db_2(i,i)-Db_2(i,m));
end
end
Db_3(i,i) = -sum(Db_3(i,:));
%
% Salida
db_1 = Db_1(i,:); db_2 = Db_2(i,:); db_3 = Db_3(i,:);
end

function [D_1 D_2 D_3] = Dsmesh (N,x,M)
D_1 = sparse(N,N); D_2 = sparse(N,N); D_3 = sparse(N,N);
for i = 1:N,
if M == N,
xb = x; i_s = i;
[D_1(i,1:M) D_2(i,1:M) D_3(i,1:M)] = Dbs(i_s,xb,M);
else
M_c = (M+1)/2;
if i < M_c,
xb = x(1:M); i_s = i;
[D_1(i,1:M) D_2(i,1:M) D_3(i,1:M)] = Dbs(i_s,xb,M);
end
if i >= M_c && i <= N-M_c,
xb = x((i-M_c+1):(i+M_c-1)); i_s = M_c;
[D_1(i,(i-M_c+1):(i+M_c-1)) D_2(i,(i-M_c+1):(i+M_c-1)) ...
D_3(i,(i-M_c+1):(i+M_c-1))] = Dbs(i_s,xb,M);
end
if i > N-M_c,
xb = x((N-M+1):N); i_s = i+M-N;
[D_1(i,(N-M+1):N) D_2(i,(N-M+1):N) D_3(i,(N-M+1):N)] = ...
Dbs(i_s,xb,M);
end
end
end
end

function Th = Thyd_Rad(s,Nz,zast)

for i = 1:Nz
Th(i) = (1/s)*(1 + s - (1 + 4*s*(1-zast(i)))^(1/4));
end

% plot(Th,zast)

end

```


Índice de Figuras

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Ejemplos de convección de Rayleigh-Bénard por gradiente de temperaturas | 3 |
| 1.2 | Celdas formadas en el salar de Uyuni, Bolivia | 3 |
| 1.3 | Resultados del experimento de Henri C. Bénard | 4 |
| 1.4 | Mecanismos físicos en el seno del fluido | 5 |
| 1.5 | Esquematación de las celdas convectivas observadas en el experimento de Lord Rayleigh | 6 |
| 2.1 | Representación del recinto que aloja al fluido | 9 |
| 2.2 | Representación del recinto en el caso bidimensional | 12 |
| 2.3 | Representación de la estructura del Sol | 16 |
| 2.4 | Flujos de radiación en el interior de un elemento diferencial | 17 |
| 2.5 | Definiciones geométricas para la ecuación RTE: (a) placa bidimensional, (b) caso tridimensional | 19 |
| 3.1 | Representación de la discretización del contorno (exterior) y subcontorno (interior) del recinto | 33 |
| 3.2 | Distribución de temperatura hidrostática frente al parámetro s | 38 |
| 4.1 | Representación gráfica para el caso de flujo conductivo | 45 |
| 4.2 | Representación de la perturbación en la temperatura en $x = L/2$ (izquierda) y los isocontornos de la temperatura adimensional (derecha) para $Ra = 500$ y $t^* = 10$ | 47 |
| 4.3 | Representación de la perturbación en la temperatura en $x = L/2$ (izquierda) y los isocontornos de la temperatura adimensional (derecha) para $Ra = 500$ y $t^* = 100$ | 48 |
| 4.4 | Representación de la perturbación en la temperatura en $x = L/2$ (izquierda) y los isocontornos de la temperatura adimensional (derecha) para $Ra = 5000$ y $t^* = 5$ | 48 |
| 4.5 | Representación de la perturbación en la temperatura en $x = L/2$ (izquierda) y los isocontornos de la temperatura adimensional (derecha) para $Ra = 5000$ y $t^* = 100$ | 49 |
| 4.6 | Representación de la función de corriente (izquierda) y el campo de velocidades (derecha) para $Ra = 5000$ y $t^* = 100$ | 49 |
| 4.7 | Representación de la perturbación en la temperatura en $x = L/2$ (izquierda) y los isocontornos de la temperatura adimensional (derecha) para $Ra = Ra_c$ y $t^* = 50$ | 50 |
| 4.8 | Relación entre el Rayleigh crítico y la relación de aspecto | 51 |

| | | |
|------|--|----|
| 4.9 | Relación entre el Rayleigh crítico y la relación de aspecto, apreciación en el tramo $2.5 \leq AR \leq 5.5$ | 52 |
| 4.10 | Número de rollos en función de la relación de aspecto para $Ra = Ra_c(AR)$ | 54 |
| 4.11 | Función de corriente una vez alcanzado el régimen estacionario para $Ra = Ra_c(AR)$ (relación de aspecto en cada caso indicada sobre la gráfica correspondiente) | 55 |
| 4.12 | Esquema de los flujos de calor que interaccionan con el dominio $0 \leq x \leq L$ y $0 \leq z_0 \leq z$ | 57 |
| 4.13 | Número de Nusselt para $AR = 2$, $Pr = 0.733$ y $Ra = 3000$ | 60 |
| 4.14 | Número de Nusselt en función de la relación Ra/Ra_c | 61 |
| 4.15 | Número de Nusselt en función de la relación Ra/Ra_c frente al Nusselt calculado con la fórmula ($AR = 2$) | 62 |
| 4.16 | Visualización del método empleado para obtener el tiempo estacionario para $Ra = 3000$ | 64 |
| 4.17 | Tiempo estacionario frente al número de Rayleigh del sistema para $AR = 2$ y $Pr = 0.733$ | 65 |
| 4.18 | Número de Nusselt frente a la relación Ra/Ra_c con $Ra_c = 1617.6$, para $AR = 2$ y varios valores del número de Prandtl | 66 |
| 4.19 | Apreciación de la figura 4.18 en su tramo final | 67 |
| 4.20 | Tiempo estacionario frente al número de Rayleigh del sistema para $AR = 2$ y valores del Prandtl en el rango $0.1 \leq Pr \leq 4$ | 68 |
| 4.21 | Temperatura media y distribución de temperatura hidrostática para Rayleigh bajo | 69 |
| 4.22 | Temperatura media y distribución de temperatura hidrostática para Rayleigh alto y varios instantes de tiempo ($t^* = 20, 40, 55, 80$) | 70 |
| 4.23 | Temperatura media y distribución de temperatura hidrostática para Rayleigh $Ra = 5000$ | 71 |
| 4.24 | Flujos de calor medios por conducción, convección y total para Rayleigh bajo | 72 |
| 4.25 | Flujos de calor medios por conducción, convección y total para Rayleigh alto y varios instantes de tiempo ($t^* = 20, 40, 55, 80$) | 73 |
| 4.26 | Flujos de calor medios por conducción, convección y total para Rayleigh $Ra = 5000$ y varios instantes de tiempo ($t^* = 15, 30, 40, 100$) | 74 |
| 5.1 | Representación gráfica para el caso de radiación pura | 75 |
| 5.2 | Rayleigh crítico en función del parámetro de radiación | 78 |
| 5.3 | Rayleigh crítico frente a relación de aspecto en función del parámetro de radiación s | 79 |
| 5.4 | Número de células convectivas frente a relación de aspecto. Caso conductivo y de radiación pura para varios s | 81 |
| 5.5 | Esquema de los flujos de calor que interaccionan con el dominio $0 \leq x \leq L$ y $0 \leq z_0 \leq z$ | 82 |
| 5.6 | Número de Nusselt para $AR = 2$, $Pr = 0.733$, $s = 0.4$ y $Ra = 30000$ | 85 |
| 5.7 | Número de Nusselt en función de Ra/Ra_c para varios valores de s | 86 |
| 5.8 | Tiempo estacionario en función de Ra/Ra_c para varios valores de s | 87 |
| 5.9 | Distribución de temperatura media y distribución hidrostática de temperatura para $s = 0.4, 1, 2$ y $Ra = 2 * Ra_c(s)$ | 88 |
| 5.10 | Distribución de flujos de calor medios (por radiación, convección y total) para $s = 0.4, 1, 2$ y $Ra = 2 * Ra_c(s)$ | 90 |

Bibliografía

- [1] *A simple MATLAB program to compute differentiation matrices for arbitrary meshes via Lagrangian interpolation*, autor: **Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor**, 2019
- [2] *Convección natural de Rayleigh-Bénard en recintos rectangulares. Mecánica de Fluidos Avanzada*, autor: **Carlos Morales Pérez**
- [3] *Estudio numérico de problemas de convección de Rayleigh-Bénard en presencia de radiación*, autor: **Krishna Laxman Jamnani Jamnani**, tutor: **Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor**, 2020
- [4] *El Método de Colocación para el problema de convección de Rayleigh-Bénard*, autor: **Pablo José Ruiz Contreras**, tutor: **Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor**, 2013
- [5] *Procesos de convección natural con hipótesis anelástica*, autor: **Eduardo M. García Juárez**, tutor: **Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor**, 2014
- [6] *Physics of the Sun: A First Course*, autor: **Dermott J. Mullan**, 2010
- [7] *The influence of radiative transfer on cellular convection*, autor: **R. M. Goody**, 1956
- [8] *Internally Heated Convection and Rayleigh-Bénard Convection*, autor: **David Goluskin**, 2016
- [9] *Notas de clase de convección natural. Mecánica de Fluidos Avanzada*, autor: **Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor**
- [10] *Notas de clase de integración numérica de ecuaciones de Saltzman. Mecánica de Fluidos Avanzada*, autor: **Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor**
- [11] *Análisis de la influencia de la radiación térmica en los procesos de convección de Rayleigh-Bénard*, autor: **Ángel Enrique Boyer Varela**, tutor: **Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor**, 2014
- [12] *Numerical study of one-dimensional unsteady radiation problems with applications to the thermal structure of planetary lower atmospheres*, autor: **Adrián Carriba Merino**, tutor: **Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor**, 2019