Actas VII Congresso do G.M.E.L. Vol. II, pp. 167-170
Universidade de Coimbra, 1985

SOBRE LOS MULTIPLICADORES ENTRE ESPACIOS DE CESÁRO

PEDRO J. PAÚL y MIGUEL FLORENCIO.

RESUMEN

Sea α un entero no negativo y C_α el correspondiente espacio de sucesiones sumables en el sentido de Cesáro de orden α. Denotemos por $M(C_\alpha, C_\beta)$ el espacio de multiplicadores entre C_α y C_β, es decir

$$M(C_\alpha,C_\beta) := \{u = (u_n)_n : (u_n x_n)_n \in C_\beta \text{ para todo } x = (x_n)_n \in C_\alpha\}$$

En este trabajo caracterizamos la clausura del espacio ϕ (las sucesiones con una cantidad finita de términos no nulos) en $M(C_\alpha, C_\beta)$ con su topología normada inducida por $\mathcal{L}(C_\alpha, C_\beta)(\tau_b)$ generalizando un resultado de M. Buntinas. Dicha clausura coincide con el espacio de multiplicadores compactos entre C_α y C_β.

AMS Subject Classification: 40H05 (46A45)

Utilizaremos la terminología y notación de [3] en lo que se refiere a conceptos generales y la de [5], [6] en lo que se refiere a espacios de sucesiones.

1.DEFINICIONES. Sea α un entero no negativo, el espacio C_α de las sucesiones sumables en el sentido de Cesáro de orden α es el campo de sumabilidad asociado a la matriz triangular inferior infinita $T_\alpha = (t_{n,k})_{n,k\geq 0}$ con

$$t_{n,k} := \binom{n-k+\alpha}{\alpha}\binom{n+\alpha}{\alpha}^{-1} \quad \text{si} \quad k \leq n.$$

con la norma

$$\|\cdot\|_\alpha : x \in C_\alpha \longrightarrow \|x\|_\alpha = \sup\left\{\left|\binom{n+\alpha}{\alpha}^{-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k+\alpha}{\alpha}x_k\right| : n = 0,1..\right\}$$

C_α es un BK-espacio isométricamente isomorfo a c, además C_α posee la propiedad $T_\alpha K$ (cf. [2],[5],[6]), es decir ; si t^n es la fila n-ésima de T_α entonces $\lim_n t^n x = x$ (con $t^n x := (t_{n1} x_1, \dots, t_{nn} x_n, 0, \dots)$) para todo $x \in C_\alpha$.

Si α y β son enteros no negativos, consideremos el espacio

$$M(C_\alpha, C_\beta) := \{u = (u_n)_n : (u_n x_n)_n \in C_\beta \text{ para todo } x = (x_n)_n \in C_\alpha\}$$

Con la topología normada τ_b inducida como subespacio de $\mathcal{L}(C_\alpha, C_\beta)$; $M(C_\alpha, C_\beta)$ es un BK-espacio [6, 4.3.15]. Definimos

$$S(C_\alpha, C_\beta) := \overline{\varphi}^{\tau_b} \subset M(C_\alpha, C_\beta)$$

Este espacio coincide con el de las aplicaciones diagonales y compactas entre C_α y C_β [4]. Estamos interesados en obtener una caracterización manejable de $S(C_\alpha, C_\beta)$. Para ello dividiremos el problema en los casos $\alpha \leqq \beta$ y $\alpha > \beta$.

Si $\alpha \leqq \beta$ son enteros no negativos entonces la siguiente -- caracterización se debe a Bosanquet [1]

(B1) $M(C_\alpha, C_\beta) = M(C_\alpha, C_\alpha) = \left\{u = (u_n)_n : \|u\| = \left(\sum_{n \geqq 0} n^\alpha |\Delta^{\alpha+1} u_n| + \|u\|_\infty \right) < +\infty \right\}$

con esta caracterización y un resultado de Buntinas [2, Prop.3] dado para el caso $\alpha = \beta$, es inmediato deducir

2. PROPOSICION. Sean $\alpha \leqq \beta$ enteros no negativos, entonces:

(1) La norma $\|\cdot\|$ que aparece en (B1) induce la topología τ_b sobre $M(C_\alpha, C_\beta)$

(2) $S(C_\alpha, C_\beta) = M(C_\alpha, C_\beta) \cap c_0 = \{u \in M(C_\alpha, C_\beta)(\tau_b) : u$ posee la propiedad $T_\alpha K\}$

En lo que sigue supondremos $\alpha > \beta$. Estamos interesados en caracterizar $S(C_\alpha, C_\beta)$ para lo que utilizaremos la siguiente igualdad debida también a Bosanquet [1].

(B2) $M(C_\alpha, C_\beta) = \left\{u = (u_n)_n : \|u\|^* = \left(\sum_{n \geqq 0} n^\alpha |\Delta^{\alpha+1} u_n| + \|((n+1)^{\alpha-\beta} u_n)_n\|_\infty \right) < +\infty \right\}$

3. PROPOSICION. Sean $\alpha > \beta$ enteros no negativos, entonces la aplicación $\|\cdot\|^*$ que aparece en la caracterización (B2) de $M(C_\alpha, C_\beta)$ es una norma y la topología que induce es τ_b.

Demostración. A partir de la linealidad del operador Δ es claro que $\|\cdot\|^*$ es una norma. Si comprobamos que $M(C_\alpha, C_\beta)(\|\cdot\|^*)$ es completo, $M(C_\alpha, C_\beta)(\|\cdot\|^*)$ será un BK-espacio y, como la --- identidad $I : M(C_\alpha, C_\beta)(\|\cdot\|^*) \longrightarrow M(C_\alpha, C_\beta)(\tau_b)$ tiene gráfica cerrada por ser ambos BK-espacios [5, 4.1.5], se tendrá ---- $\tau_{\|\cdot\|^*} = \tau_b$.

Observemos que $M(C_\alpha, C_\beta) \subset M(C_\alpha, C_\alpha)$ y que $\|u\| \leq \|u\|^*$ para todo $u \in M(C_\alpha, C_\beta)$. Supongamos ahora que $\{u^{(m)} = (u_n^{(m)})_n\}_{m=1}^\infty$ es una sucesión $\|\cdot\|^*$-Cauchy, entonces $\{v^{(m)} := ((n+1)^{\alpha-\beta} u_n^{(m)})_n\}_{m=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $\ell^\infty(\|\cdot\|_\infty)$; si $v = \|\cdot\|_\infty - \lim_m v^{(m)}$ entonces es claro que tomando $u := ((n+1)^{\beta-\alpha} v_n)_n$, se tiene que $((n+1)^{\alpha-\beta} u_n)_n \in \ell^\infty$ y

(1) $\quad \|(n+1)^{\alpha-\beta} (u_n^{(m)} - u_n)\|_\infty \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

Por otro lado, $\{u^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ es $\|\cdot\|$-Cauchy luego converge a un cierto elemento $z \in M(C_\alpha, C_\alpha)$ ya que éste es un BK-espacio. Es decir:

(2) $\quad \sum_{n\geq 0} n^\alpha \, |\Delta^{\alpha+1} (u_n^{(m)} - z_n)| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

(3) $\quad \lim_m u_n^{(m)} = z_n \qquad$ para $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Pero de (3) y (1) se sigue que $u = z$; de $((n+1)^{\alpha-\beta} u_n)_n \in \ell^\infty$, y $u = z \in M(C_\alpha, C_\alpha)$ se sigue que $u \in M(C_\alpha, C_\beta)$; finalmente de (1) y (2) se sigue que $\|u - u^{(m)}\|^* \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ Q.E.D.

4. LEMA. Sean $\alpha > \beta$ enteros negativos. Si $u \in M(C_\alpha, C_\beta)$ es tal que $((n+1)^{\alpha-\beta} u_n)_{n\geq 0} \in c_0$, entonces u posee la propiedad $T_\alpha K$ en $M(C_\alpha, C_\beta)(\|\cdot\|^*)$

Demostración. $M(C_\alpha,C_\beta) \subset M(C_\alpha,C_\alpha) \cap c_0 = S(C_\alpha,C_\alpha)$ que posee la propiedad $T_\alpha K$ para la norma $\|\cdot\|$; entonces, si t^m es la m--ésima fila de T_α, para todo $u \in M(C_\alpha,C_\beta)$ se tiene:

$$(1) \quad \lim_m \sum_{n\geq 0} n^\alpha \left|\Delta^{\alpha+1}\left(u_n - (t^m u)_n\right)\right| = 0$$

Sea $z^{(m)} := u - t^m u = \left(0,(1-t_{m1})u_1,\ldots,(1-t_{mm})u_m, u_{m+1}, u_{m+2},\ldots\right)$ por hipótesis y teniendo en cuenta que $0 \leq t_{mk} \leq 1$ para todos $m,k \geq 0$ dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $m \in \mathbb{N}$ y $n \geq n_0$ es

$$(2) \quad \left|(n+1)^{\alpha-\beta} z_n^{(m)}\right| \leq \left|(n+1)^{\alpha-\beta} u_n\right| < \varepsilon$$

Por otro lado, fijo $n \geq 0$ es $\lim_m t_{mn} = 1$ luego existe ---- $m_0 (\geq n_0) \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq m_0$ y $n \in \{0,1,\ldots,n_0\}$ es:

$$(3) \quad \left|(n+1)^{\alpha-\beta} z_n^{(m)}\right| \leq (1 - t_{mn}) \left|(n+1)^{\alpha-\beta} u_n\right| < \varepsilon$$

De (1), (2) y (3) se sigue que $\| u - t^m u \|^* \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ Q.E.D.

5. PROPOSICION. Si $\alpha > \beta$ son enteros no negativos entonces $S(C_\alpha,C_\beta) = A := \{u \in M(C_\alpha,C_\beta) : \left((n+1)^{\alpha-\beta} u_n\right)_n \in c_0\}$

Demostración. La inclusión $(\supset)$ sigue del Lema 4. (obsérvese que $t^m n \in \phi$). Por otro lado $\phi \subset A$ y $S(C_\alpha,C_\beta) = \overline{\phi}^{\tau_b}$. Pero es claro que A es $\|\cdot\|^*$-cerrado luego debe ser $S(C_\alpha,C_\beta) \subset A$ Q.E.D.

6.EJEMPLO. Dado $k \in \mathbb{N}$ sea $a^{(k)} := \left((n+1)^k\right)_n$, puesto que $a^{(k)}/a^{(k+1)} = \left(1/(n+1)\right)_n \in M(C_{k+1},C_k)$, podemos considerar el --- espacio escalonado $E := \text{proj lim } (1/a^{(k)})\, C_k$

Dicho espacio es un espacio de Fréchet. Ahora bien, si $r > k$, entonces $a^{(k)}/a^{(r)} = \left(1/(n+1)^{r-k}\right)_n \in S(C_r,C_k)$ por la Proposición 5. con lo que, usando un resultado de [4], E no es un espacio de Schwartz. Obsérvese que, sin embargo, $a^{(k)}/a^{(k+r)} \in \ell^1$ para todo $r \geq 2$.

REFERENCIAS

[1] L.S. BOSANQUET. "Note on convergence and summability factors". Jour. London Math. Soc. 20 (1949), 39-48
[2] M. BUNTINAS. "On Toeplitz sections in sequence spaces" Math. Proc. Cambridge. Phil. Soc. 78 (1975) 451-460
[3] H. JARCHOW "Locally Convex Spaces" B.G. Teubner, Stuttgart, 1981
[4] P.J. PAUL "Espacios de sucesiones vectoriales" Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, 1985
[5] W.H. RUCKLE "Sequence Spaces". Pitman, Boston/London/Melburne, 1981
[6] A. WILANSKY "Summability through Functional Analysis". North-Holland, Amsterdam/New York/Oxford, 1984

DIRECCION DE LOS AUTORES: Dpto. Matemáticas E.S. Ingenieros Industriales
Avda. Reina Mercedes s/n. 41012 Sevilla. ESPAÑA