FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

GRADO EN MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Título

La topología gráfica sobre torneos

Realizado por:
Ana Belén Sánchez Ruiz

Supervisado por:
Desamparados Fernández Ternero y
José Antonio Vilches Alarcón

11 de Septiembre de 2020

Índice general

Resumen / Abstract

El objetivo de esta memoria es definir una topología no trivial sobre torneos, no solo finitos, sino torneos infinitos localmente finitos. Para ello, hemos tenido que estudiar algunas nociones basicas como la noción de intervalo y de torneo indescomponible. Una vez definida la llamada topología gráfica, se han estudiado distintas propiedades sobre ella, entre las que se destacan la compacidad y la conexión. Además, se caracterizan los conjuntos densos y se dan condiciones para que la topología gráfica sea discreta.

The objective of this memory is to define a non-trivial topology on tournaments, not only finite, but infinite tournaments which are locally finite. To do this, we have had to study some basic notions such as the notions of interval and indecomposable tournament. Once the graphic topology has been defined, different properties on it have been studied, among which compactness and connection are highlighted. Furthermore, dense sets are characterized and conditions are given for which the graphical topology will be discrete.

Introducción

A pesar de ser un área relativamnete jóven, la Teoría de grafos está muy desarrollada en Matemáticas, tanto por su indudable interés en sí misma, como por sus aplicaciones dentro y fuera de las Matemáticas. Atendiendo a que exista o no una ordenación en los pares de vértices que determinan sus aristas, los grafos se clasifican en dirigidos o no dirigidos. Dado que una aplicación muy frecuente de la teoría de grafos consiste en modelizar problemas de la más variada procedencia, es habitual que los grafos dirigidos, digrafos para abreviar, surjan de modo natural en diferentes situaciones.

Éste es precisamente el caso al modelar con grafos uno de los objetos de estudio fundamentales de este trabajo: los torneos, es decir, los grafos completos dirigidos. En 1966 Harary y Moser publicaron un artículo [8] en el que se estudiaban los torneos "round robin", es decir, torneos de todos contra todos, donde varios equipos se enfrentan dos a dos en un juego que no puede terminar en empate, y cada equipo juega con todos los demás exactamente una vez. Al modelar esta situación mediante un grafo, cada vértice representa un equipo y se establece una arista orientada (v_1, v_2) si el equipo representado por el vértice v_1 vence al equipo representado por el vértice v_2, es este caso se dice que v_1 domina a v_2. Por otro lado, como cada equipo juega con todos los demás, el grafo dirigido obtenido resulta ser completo, es decir, existe una arista dirigida entre cualesquiera dos vértices. Dado un torneo, existe la noción clave de intervalo (Definición 1.30) que determina un tipo especial de torneos que serán el objeto de estudio fundamental este trabajo: los torneos *indescomponibles*, aquellos para los que los únicos intervalos posibles son los triviales, es decir, $\emptyset$, el conjunto total de vértices y cualquier conjunto unitario $\{x\}$.

Por otra parte, se abordará también en esta memoria la manera de dotar de una estructura de espacio topológico a todo torneo. De modo más preciso, se hará uso de un tipo especial de espacios topológicos, los *espacios de Alexandroff*. En este tipo de espacios topológicos, además de verificarse los tres axiomas de topología, se verifica que la intersección arbitraria de abiertos es un nuevo abierto. Esta propiedad adicional posibilita la existencia del menor abierto que contiene a un subconjunto, algo que resultará clave en muchas de las demostraciones que se abordarán en esta memoria. Los espacios de Alexandroff han tenido un desarrollo considerable a partir de 1980 motivado por su destacado papel en el estudio de la topología digital. El modo de asociar a un torneo un espacio topológico de Alexandroff consiste esencialmente en tomar como subbase de la llamada topología gráfica a los conjuntos de vértices dominados por cada vértice del torneo. Se probará que ése es precisamnete el caso de torneos localmente finitos (grafos infinitos donde cada vértice solo comparte arista con un número finito de vértices) e indescomponibles.

Esta memoria se organiza según la siguiente estructura: comenzaremos introduciendo en el Capítulo 1 nociones y resultados básicos que serán clave en el desarrollo llevado a cabo en los siguientes capítulos. En concreto, se introducirán algunas nociones clave sobre espacios topológicos y de Alexandroff y se recordarán conceptos clave sobre grafos dirigidos, entre los que cabe destacar los de torneo, intervalo y torneo indescomponible.

A continuación, en el Capítulo 2 se estudiarán maneras de dotar de una estructura de espacio topológico a los torneos indescomponibles: se trata la nociones de topología trivial y de topología gráfica. El principal resultado que se aborda es la relación entre torneos indescomponibles y espacios de Alexandroff.

En el capítulo 3 se estudian propiedades fundamentales de la topología gráfica, probando resultados que involucran conjuntos abiertos y cerrados.

Por último, en el Capítulo 4, se estudian funciones entre digrafos asociados a torneos y propiedades de la conexión de la topología gráfica. Se demuestran distintos resultados que establecen condiciones necesarias para que el espacio topológico asociado a un torneo sea conexo.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo introduciremos las nociones y resultados básicos para poder abordar el estudio de la topología gráfica sobre torneos, esto es, grafos dirigidos completos.

1.1. Topologías de Alexandroff

En esta primera sección recordamos algunas definiciones iniciales de espacios topológicos. Existen multitud de monografías introductorias a la materia, por ejemplo, se pueden tomar los libros de J. Dugundji [5] y J. R. Munkres [13]. Para ampliar conocimientos sobre las topologías de Alexandroff se pueden consultar las notas de J.P. May [11] o los artículos [1] y [14].

Definición 1.1 *Una **topología** $\mathcal{T}$, sobre un conjunto X, es una colección de conjuntos de X con las siguientes propiedades:*

1. *$\emptyset$ y X están en $\mathcal{T}$.*
2. *La intersección finita de elementos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.*
3. *La unión arbitraria de elementos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.*

*Al par $(X,\mathcal{T})$ se le llama **espacio topológico**. Los conjuntos de $\mathcal{T}$ son **conjuntos abiertos** de $(X,\mathcal{T})$. Además a los conjuntos complementarios de los abiertos se les denomina **cerrados**, es decir, A es cerrado si y sólo si $X - A$ es abierto.*

Definición 1.2 *Dado un conjunto A, su **complementario** es otro conjunto A^c, cuyos elementos son todos aquellos que no están en A, es decir, $x \in A^c$ si y sólo si $x \notin A$.*

Definición 1.3 *En un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$, la **clausura** de un conjunto A es el conjunto: $\overline{A} = \{x \in X |\ \forall\ G \text{ con } x \in G,\ G \cap A \neq \emptyset\}$. Equivalentemente, la clausura de A es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A.*

Definición 1.4 *En un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$, un conjunto D es **denso** si su clausura es el total X. Equivalentemente, un conjunto D es denso si su intersección con cualquier abierto no vacío es no vacía.*

Ejemplo 1.5 *Dado un conjunto X, la **topología trivial** sobre X es la que está formada únicamente por $\emptyset$ y X. Además sabemos que esos dos abiertos son también cerrados, ya que el complementario de uno es el otro y viceversa.*

Definición 1.6 *Una topología es* ***discreta*** *si cualquier subconjunto de T es abierto, lo que equivale a que todos los conjuntos unitarios sean abiertos. Además, una topología es discreta si el menor abierto que contiene a un elemento es el propio elemento.*

Definición 1.7 *Dado un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$, una subcolección $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ se dice que es una* ***base*** *de la topología $\mathcal{T}$ si todo abierto no vacío de $\mathcal{T}$ es unión de abiertos de $\mathcal{B}$. Equivalentemente, $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$ si para cada abierto U y para cada $x \in U$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.*

Definición 1.8 *Dado un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$, se dice que una subcolección $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ es una* ***subbase*** *si $\mathcal{T}$ es la topología más pequeña que contiene a $\mathcal{B}$. Equivalentemente, todo conjunto abierto de $\mathcal{T}$ puede escribirse como una unión de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{B}$.*

Definición 1.9 *Un espacio topológico es de* ***Alexandroff*** *si la intersección arbitraria de abiertos es un conjunto abierto.*

Definición 1.10 *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es* ***conexo*** *si los únicos conjuntos abiertos y cerrados son el vacío $\emptyset$ y el total X.*

Definición 1.11 *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es* ***compacto*** *si todo recubrimiento de X por abiertos de $\mathcal{T}$ contiene un subrecubrimiento finito.*

Definición 1.12 *En un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, se dice que $U \subseteq X$ es un* ***entorno*** *de un punto $x \in X$ si existe un abierto $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subseteq U$.*

Nota 1.13 *Podemos observar que un abierto $A \in \mathcal{T}$ es un entorno de todo $x \in A$.*

Definición 1.14 *Dados $(V_1, \mathcal{T}_1)$ y $(V_2, \mathcal{T}_2)$ dos espacios topológicos. Una función $f : V_1 \to V_2$ es* ***continua*** *si $f^{-1}(O)$ es un abierto en $(V_1, \mathcal{T}_1)$ para cada conjunto abierto O en $(V_2, \mathcal{T}_2)$. Además, se dice que f es un* ***homeomorfismo*** *si f es biyectiva y f y su inversa son continuas.*

Definición 1.15 *(Propiedades de separación)*

1. *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es $\boldsymbol{T_1}$ si, dados dos puntos distintos $x, y \in X$, existen abiertos distintos G_1 y G_2 tales que $x \in G_1$, $y \notin G_1$, e $y \in G_2$, $x \notin G_2$. Coloquialmente, $(X, \mathcal{T})$ es T_1 si es posible separar puntos distintos por abiertos distintos.*

2. *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es $\boldsymbol{T_2}$ o de* ***Hausdorff*** *si, dados puntos distintos $x, y \in X$, existen dos abiertos disjuntos G_1 y G_2 tales que $x \in G_1$ e $y \in G_2$. Coloquialmente, $(X, \mathcal{T})$ es T_2 si es posible separar puntos distintos por abiertos disjuntos.*

A continuación, vamos a mostrar varios resultados sobre los espacios topológicos de Alexandroff que, además, son Hausdorff.

Definición 1.16 *Dados un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ de Alexandroff y un punto $x \in X$, se denotará por $S(x)$ al conjunto* ***abierto minimal*** *que contiene a x, es decir; el menor abierto que lo contiene.*

Observación 1.17 *La noción anterior no tiene sentido en un espacio topológico general, sólo tiene sentido para los espacios de Alexandroff, pues implica la existencia del menor abierto que contiene a un punto y éste se construye como la intersección de todos los abiertos que lo contienen.*

Teorema 1.18 *Un espacio de Alexandroff $(X, \mathcal{T})$ es Hausdorff si y sólo si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$, tenemos que $S(x) \cap S(y) = \emptyset$.*

Demostración.

$\Leftarrow$) Para probar que es de Hausdorff, basta tomar los conjuntos $S(x)$ y $S(y)$ que son abiertos y disjuntos y contienen a x y a y, respectivamente.

$\Rightarrow$) Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Hausdorff podemos encontrar abiertos disjuntos $U, V \in \mathcal{T}$ de forma que $x \in U$ e $y \in V$. Entonces $S(x) \subseteq U$ y $S(y) \subseteq V$, así que $S(x)$ y $S(y)$ tienen que ser también disjuntos.

□

Corolario 1.19 *Un espacio topológico de Alexandroff $(X, \mathcal{T})$ es de Hausdorff si y sólo si es discreto.*

Demostración.

$\Leftarrow$) Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico discreto, es inmediato ver que es de Hausdorff, tomando los conjuntos unitarios que corresponden a cada punto.

$\Rightarrow$) Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Hausdorff, veamos que $S(x) = \{x\}$. Sea $y \in S(x)$, entonces $S(y) \subset S(x)$ pues $S(x)$ es un abierto que contiene a y. Luego tenemos que $S(y) \cap S(x) = S(y)$, lo que es una contradicción con el Teorema 1.18 si $y \neq x$. Por tanto, $S(x)$ no contiene ningún punto distinto de x, es decir; $S(x) = \{x\}$. Como $\{x\}$ es un abierto de X para cualquier x, necesariamente $(X, \mathcal{T})$ es discreto.

□

Corolario 1.20 *Un espacio topológico de Alexandroff $(X, \mathcal{T})$ es T_1 si y sólo si es discreto.*

Demostración.

$\Leftarrow$) Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico discreto, es inmediato ver que es T1, tomando los conjuntos unitarios que corresponden a cada punto.

$\Rightarrow$) Todo subconjunto de X es unión finita de puntos y, por lo tanto, cerrado.

□

Ejemplo 1.21 *Veamos un ejemplo de un espacio de Alexandroff que no es T_1.*
Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico definido sobre $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y que tiene como subbase al conjunto $B = \{\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{0, 3, 4\}\}$.

Al ser X un conjunto finito, el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es de Alexandroff. Por último, tenemos que no es T1 ya que no existe ningún abierto que contenga a 1 y no contenga a 2.

1.2. Torneos

En esta segunda sección se introduce la noción de torneos, mostrándose definiciones y algunas de las propiedades mas importantes. Un libro donde se pueden ampliar conocimientos y que está dedicado exclusivamente a torneos es el libro de J. W. Moon [12]. También se puede consultar el libro sobre grafos dirigidos de J. Bang-Jensen y G. Gutin [2]. Dentro de las propiedades que consideraremos podemos destacar la noción de torneo indescomponible, ya que es la propiedad clave para poder desarrollar los resultados de este trabajo.

Definición 1.22 *Un **grafo dirigido** $G = (V, E)$ consiste en un conjunto finito V de vértices junto con una colección E de pares ordenados de distintos vértices con un sentido definido, llamadas aristas dirigidas.*

Definición 1.23 *Un **torneo** $T = (V, E)$ es un grafo dirigido completo, esto es, donde todo par de vértices está conectado por una única arista dirigida.*

Ejemplos 1.24 *A continuación, mostramos representaciones gráficas de torneos de 4 y 5 vértices, donde una arista dirigida (x, y) se representa por una flecha de x a y.*

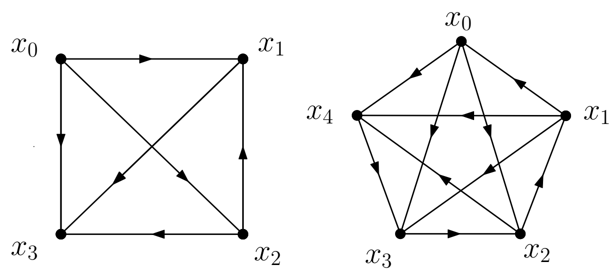

Figura 1.1: Torneos de 4 y 5 vértices

Definición 1.25 *Sea $T = (V, E)$ un torneo, si $(x, y) \in E$ se dice que **x domina a y** y se denota por $x \to y$. Además, dados $X, Y \subseteq V$ si para todo $x \in X$ y para todo $y \in Y$ se tiene que $x \to y$, entonces se dice que X domina a Y y se denota por $X \to Y$.*

Definición 1.26 *Dado $T = (V, E)$ un torneo, se llama **subtorneo** a un torneo $T' = (V', E')$ tal que $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.*

Definición 1.27 *Sea $T = (V, E)$ un torneo, dado un subconjunto de vértices $G \subset V$, se llama **subtorneo inducido por G** al torneo T[G] =(G,E(G)) donde E(G) denota al conjunto de aristas que conectan los vértices del conjunto G, es decir, el torneo formado por los vertices contenidos en G y las aristas correspondientes.*

Definición 1.28 *Sea $T = (V, E)$ un torneo, se llama **torneo opuesto** al torneo que tiene el mismo conjunto de vértices y con las aristas en el sentido contrario al que tienen en T.*

Ejemplo 1.29 *A continuación, mostramos una representación gráfica del torneo opuesto al torneo de 4 vértices de la Figura 1.1.*

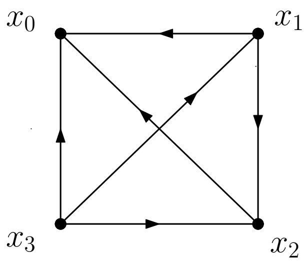

Figura 1.2: Torneo opuesto

Definición 1.30 *Un subconjunto $I \subseteq V$ es un **intervalo** si para todo $a, b \in I$ y $x \in V - I$, $(a, x) \in E$ si y solo si $(b, x) \in E$.*

Ejemplo 1.31 *Los conjuntos $\emptyset$, V y $\{x\}$, donde $x \in V$, son intervalos de T, llamados **intervalos triviales**.*

Ejemplo 1.32 *Vamos a ver ejemplos de intervalos no triviales en la Figura 1.3. Para comprobar que son intervalos no triviales, buscaremos en cada gráfica un subconjunto de vértices que verifiquen la definición.*

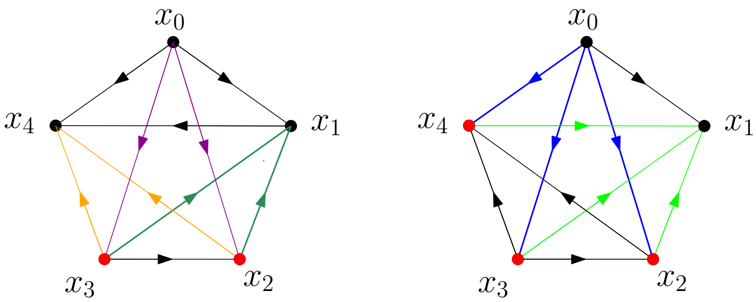

Figura 1.3: Representación gráfica de intervalos no triviales

En la figura de la izquierda podemos observar en rojo los vértices que forman el intervalo $I = \{x_2, x_3\}$. Para probar que es un intervalo, debemos probar que cualquier punto del complementario está unido con x_2 y x_3 con aristas en el mismo sentido, comprobamos en la gráfica que en color naranja son las aristas que unen el intervalo con x_4, en violeta con x_0 y en verde con x_1.
En la figura de la derecha, al igual que en la anterior, tenemos en rojo los vértices que forman el intervalo $I' = \{x_2, x_3, x_4\}$. Para ver que es intervalo, observamos que las aristas que unen los vértices del intervalo con los vértices del complementario son del mismo sentido. En la gráfica, tenemos en azul las aristas que unen los puntos del intervalo con x_0 y en verde con x_1.

Definición 1.33 *Un torneo es **indescomponible** si todos sus intervalos son triviales, en caso contrario, se dice que es **descomponible**.*

Definición 1.34 *Dos torneos T y T' son **isomorfos** si existe una biyección entre sus vértices que induce una biyección entre sus aristas.*

Ejemplo 1.35 *El único torneo indescomponible que existe de tres vértices es el 3-ciclo dirigido (ver Figura 1.4 y [12]).*

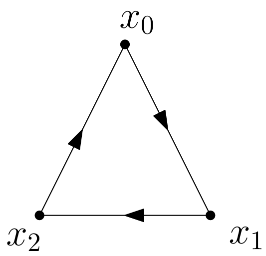

Figura 1.4: Torneo indescomponible de 3 vértices

Además, el otro torneo (salvo isomorfismo) que existe de 3 vértices sí es descomponible, ya que contiene un intervalo no trivial. Tomando $I = \{x_1, x_2\}$*, tenemos que* $V - I = \{x_0\}$*, y comprobamos que* $(x_1, x_0) \notin E$ *y* $(x_2, x_0) \notin E$ *(ver Figura 1.5).*

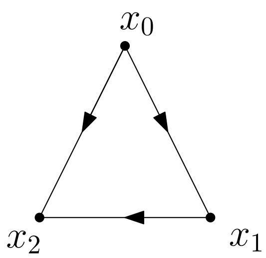

Figura 1.5: Torneo descomponible de 3 vértices

Por otro lado, no existen torneos indescomponibles de cuatro vértices. En la Figura 1.6 se muestran todos los torneos de cuatro vértices, salvo isomorfismo.

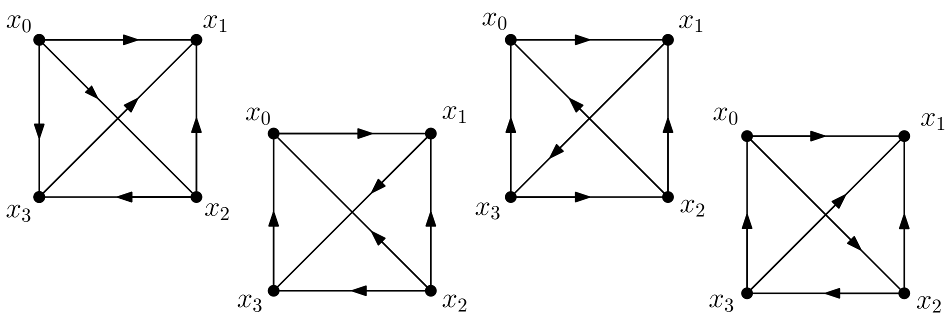

Figura 1.6: Torneos de 4 vértices

Definición 1.36 *En un grafo, se llama* ***camino*** *a una secuencia de vértices tal que exista una arista entre cada par de vértices consecutivos. Además, se llama* ***camino dirigido*** *a una secuencia de vértices unidos por aristas en el mismo sentido.*

Definición 1.37 *Un torneo T, con un conjunto de vértices V, es **fuertemente conexo** si para cada $x, y \in V, x \neq y$, existen dos secuencias de vértices $x_0 = x, \ldots, x_n = y$ e $y_0 = y, \ldots, y_m = x$ tal que $x_i \to x_{i+1}$ para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $y_i \to y_{i+1}$ para cada $i \in \{0, \ldots, m-1\}$.*

Nota 1.38 *Más brevemente, podemos decir que un torneo $T = (V, E)$ es fuertemente conexo si dados dos vértices $x, y \in V$ existe un camino dirigido que vaya de x hacia y, y otro camino de y a x.*

Proposición 1.39 (Teor. 2, [12]) *Cualquier torneo indescomponible con al menos tres vértices es fuertemente conexo.*

En nuestro trabajo, consideraremos sólo torneos con al menos tres vértices ya que los torneos con uno o dos vértices, no son de interés por esta razón.

Definición 1.40 *Sea $T = (V, E)$ un torneo. Definimos:*

- ***Conjunto de salida*** *: conjunto de todos los vértices a los que se llega desde x con una sola arista, es decir, $N_x^+(T) = N_x^+ = \{y \in V : x \to y\}$.*
- ***Conjunto de entrada****: conjunto de todos los vértices desde los que se llega a x con una sola arista, es decir, $N_x^-(T) = N_x^- = \{y \in V : y \to x\}$.*
- ***Grado de salida****: $d_T^+(x) = d^+(x) = |N_x^+|$, donde $|N_x^+|$ denota el cardinal del conjunto N_x^+.*
- ***Grado de entrada****: $d_T^-(x) = d^-(x) = |N_x^-|$.*
- ***Mínimo de los grados de salida****: $\delta^+(T) = \text{mín}\ \{d^+(x) : x \in V\}$.*
- ***Mínimo de los grados de entrada****: $\delta^-(T) = \text{mín}\ \{d^-(x) : x \in V\}$.*
- ***Máximo de los grados de salida****: $\Delta^+(T) = \text{máx}\ \{d^+(x) : x \in V\}$.*
- ***Máximo de los grados de entrada****: $\Delta^-(T) = \text{máx}\ \{d^-(x) : x \in V\}$.*

Ejemplo 1.41 *Vamos a ver un ejemplo gráfico de todas las definiciones anteriores en el siguiente torneo:*

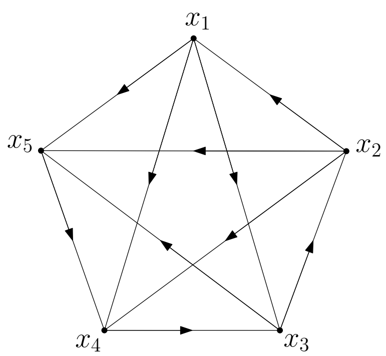

Figura 1.7: Grafo indescomponible de 5 vértices

Comenzamos calculando los conjuntos de salida para cada vértice. Para x_1 tenemos tres arista que salen de él hacia los vértices x_3, x_4 y x_5, así que $N_{x_1}^+ = \{x_3, x_4, x_5\}$ y su cardinal es $d^+(x_1) = 3$. Análogamente, obtenemos que:

- *Para* x_2*:* $N^+_{x_2} = \{x_1, x_5, x_4\}$ *y* $d^+(x_2) = 3$
- *Para* x_3*:* $N^+_{x_3} = \{x_2, x_5\}$ *y* $d^+(x_3) = 2$
- *Para* x_4*:* $N^+_{x_4} = \{x_3\}$ *y* $d^+(x_4) = 1$
- *Para* x_5*:*$N^+_{x_5} = \{x_4\}$ *y* $d^+(x_5) = 1$

Para los conjuntos de entrada, localizamos las aristas que llegan hacia cada vértide, luego tenemos que:

- *Para* x_1*:* $N^-_{x_1} = \{x_2\}$ *y* $d^-(x_1) = 1$
- *Para* x_2*:* $N^-_{x_2} = \{x_3\}$ *y* $d^-(x_2) = 1$
- *Para* x_3*:* $N^-_{x_3} = \{x_1, x_4\}$ *y* $d^-(x_3) = 1$
- *Para* x_4*:* $N^-_{x_4} = \{x_1, x_2, x_5\}$ *y* $d^-(x_4) = 3$
- *Para* x_5*:* $N^-_{x_5} = \{x_1, x_2, x_3\}$ *y* $d^-(x_5) = 3$

Por tanto, el mínimo y el máximo de los grados de entradas son: $\delta^- = 1$ *y* $\Delta^- = 3$*, respectivamente. Por otro lado, el mínimo y el máximo de los grados de salida son:* $\delta^+ = 1$ *y* $\Delta^+ = 3$*.*
Obsérvese que la suma de los grados de entrada y salida de cada vértice coincide con $n-1$*, pues cada vértice está unido con aristas, dirigidas en uno u otro sentido, al resto de los vértices del torneo.*

Capítulo 2

Topologías en torneos indescomponibles

En este capítulo se define, en primer lugar, una topología sobre un torneo T que resultará ser la trivial, y en segundo lugar, una topología no trivial, en general, que constituye el tema central de nuestro trabajo.

2.1. Topología trivial

Veamos un primer intento de definir una topología sobre un torneo. Sea $T = (V, E)$ un torneo indescomponible. Dado $x \in V$, se denota como O_x al conjunto de vértices y tal que existe una secuencia de vértices $x_0 = x, \ldots, x_n = y$ satisfaciendo $x_i \to x_{i+1}$ para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, es decir, al conjunto de vértices y tal que existe un camino dirigido desde x hacia y.

Definición 2.1 *Definimos el siguiente conjunto:*

$$S_T = \{O_x : x \in V\}.$$

El torneo $T = (V, E)$ es indescomponible, así que $O_x = V$ o $\emptyset$, para cada $x \in V$. Luego, $S_T = \{\emptyset, V\}$. Así que esta topología es trivial.

2.2. Topología gráfica

Definición 2.2 *Se dice que un torneo infinito T es* ***localmente finito*** *si sus grados de entrada son finitos.*

Ejemplo 2.3 *Consideramos el torneo Q_w definido en $\mathbb{N}$ de la siguiente forma: para cualesquiera elementos distintos $i, j \in \mathbb{N}$, se verifica que $i \to j$ si $j = i - 1$ o $j \geq i + 2$.*

Veamos que Q_w es un torneo localmente finito e indescomponible. En efecto, $N_0^- = \{1\}$, $N_1^- = \{2\}$ y $N_n^- = \{n+1\} \cup \{i \in \mathbb{N} : 0 \leq i \leq n-2\}$ para cada entero $n \geq 2$. Así que para todo entero no negativo n, $d^-(n) \in \{1, n\}$ es finito, luego Q_w es localmente finito.

Falta verificar que Q_w es indescomponible, para ello necesitamos introducir los siguientes torneos finitos indescomponibles: sea $n \geq 5$ un entero, el torneo Q_n está definido en

$\mathbb{N}_n = \{i \in \mathbb{N} : i < n\} = \{0, \ldots, n-1\}$ *de la misma forma que* Q_w*: para cualesquiera elementos distintos* $i, j \in \mathbb{N}_n$*, se verifica que* $i \to j$ *si* $j = i - 1$ *o* $j \geq i + 2$*, es decir, el torneo* Q_n *es el subtorneo de* Q_w *generado por* $\mathbb{N}_n$*.*

Tenemos que:

$$N_0^- = \{1\},\ N_0^+ = \{2, \ldots, n-1\} = \mathbb{N}_n - \{0, 1\},$$

$$N_1^- = \{2\},\ N_1^+ = \{0, 3, \ldots, n-1\} = \mathbb{N}_n - \{1, 2\},$$

$$N_m^- = \{m+1\} \cup \{0, 1, 2, \ldots, m-2\} \text{ si } m+1 \leq n-1$$

$$\text{y } N_{n-1}^- = \{2\},\ N_1^+ = \{0, 3, \ldots, n-1\} = \mathbb{N}_n - \{1, 2\}.$$

Veamos que Q_n *es indescomponible. Por reducción al absurdo, supongamos que* Q_n *es descomponible. Entonces existe* $I \subseteq \mathbb{N}_n$*, no trivial, tal que* $\forall a, b \in I$ *y* $\forall x \in \mathbb{N}_n - I$*, se tiene que* $a \to x$ *si y solo si* $b \to x$*.*

<u>*Caso 1:*</u> $0 \in I$.

Como I *no es trivial,* $\exists b \neq 0$ *con* $b \in I$*.*

<u>*Caso 1.1:*</u> *Si* $1 \in I$*, entonces, como* $0 \to 2$ *y* $2 \to 1$*, debe ser* $2 \in I$*.*
Como $0 \to 3$ *y* $3 \to 2$*, entonces* $3 \in I$*. Y así sucesivamente, una vez llegamos a que* $k < n-1$ *verifica que* $k \in I$*, a partir de* $0 \to k+1$ *y* $k+1 \to k$*, deducimos que* $k+1 \in I$*.*
En el último paso tenemos que $n-2 \in I$*. Luego,* $0 \to n-1$ *y* $n-1 \to n-2$ *con* $n-2, 0 \in I \Rightarrow n-1 \in I$*. Lo que es una contradicción porque hemos llegado a* $I = \mathbb{N}_n$*.*

<u>*Caso 1.2:*</u> *Supongamos que* $1 \notin I$*.*
Como $1 \to 0$*, ningún vértice* x *con* $x \to 1$ *puede estar en* I*.* $\Rightarrow 2 \notin I$
Como $0 \to 4$*, pero* $4 \to 3$*,* $3 \notin I$*.*
Como $0 \to 5$*, pero* $5 \to 4$*,* $4 \notin I$*.*
$\vdots$
Como $0 \to n-1$*, pero* $n-1 \to n-2$*,* $n-2 \notin I$*.*
¿Puede ser $n-1 \in I$*? No, pues* $0 \to 2$ *y* $2 \to n-1$*. Por tanto,* $I = \{0\}$*. Lo que es una contradicción.*

<u>*Caso 2:*</u> $0 \notin I$.

<u>*Caso 2.1:*</u> *Si* $1 \in I$*, como* $1 \to 0$*, si* x *verifica que* $0 \to x$*,* $x \notin I \Rightarrow 2, 3, \ldots, n-1 \notin I$*.*
Luego $I = \{1\}$*. Lo que es una contradicción.*

<u>*Caso 2.2:*</u> *Si* $1 \notin I$*.*
Como $2 \to 1$ *y* $0 \to 2$*,* $2 \notin I$*.*
Como $3 \to 2$ *y* $0 \to 3$*,* $3 \notin I$*.*
$\vdots$
Así sucesivamente, llegamos a que $I = \emptyset$*. Lo que es una contradicción.*

En la Figura 2.1 puede verse una representación gráfica del torneo Q_5*.*

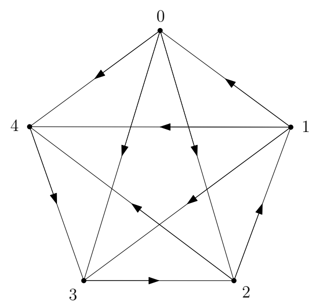

Figura 2.1: Representación gráfica del torneo Q_5

Para deducir que Q_w es indescomponible aplicamos el siguiente teorema que relaciona los torneos indescomponibles infinitos con los torneos indescomponibles finitos.

Teorema 2.4 (Teor. 1, [9]) *Dado un torneo infinito $T = (V, E)$, T es indescomponible si y sólo si para todo subconjunto finito F de V, existe un subconjunto finito G de V tal que $F \subset G$ y $T[G]$ es indescomponible.*

Ejemplo 2.5 *Continuando con el Ejemplo 2.3, consideramos F un subconjunto finito de $\mathbb{N}$. Basta tomar $n \geq 5$ tal que F esté contenido en $\mathbb{N}_n$, entonces $Q_w[\mathbb{N}_n] = Q_n$ es indescomponible. Luego, aplicando el Teorema 2.4, concluimos que Q_w es indescomponible.*

A partir de este momento consideraremos sólo torneos localmente finitos.

Realizamos ahora otra forma de definir una topología sobre un torneo. Sean V un conjunto, no necesariamente finito, con $|V| \geq 3$ y T un torneo localmente finito e indescomponible definido sobre V. Es fácil ver que para cualesquiera $x, y \in V$, $y \in N_x^+$ si y sólo si $x \in N_y^-$. Además, para cualquier $x \in V$ se tiene que $x \notin N_x^+ \cup N_x^-$, $N_x^+ \cap N_x^- = \emptyset$ y $N_x^+ \cup N_x^- \cup \{x\} = V$. Sean $N_{[x]}^+ := N_x^+ \cup \{x\}$ y $N_{[x]}^- := N_x^- \cup \{x\}$. Tenemos, como consecuencia, que $|N_x^-| = |V| - |N_x^+| - 1$.

Definición 2.6 *Definimos el siguiente conjunto:*

$$S_T = \{N_x^+ : x \in V\}.$$

Al ser T indescomponible con al menos 3 vértices, N_x^- es no vacío. Por tanto, para cada $y \in V$, como N_y^- es no vacío, existe $x \in N_y^-$ y, en consecuencia, también se tiene que $y \in N_x^+$. Así que $V = \bigcup_{x \in V} N_x^+$. Por tanto, S_T es una subbase para una cierta topología τ_T en V, llamada **topología gráfica** de T.

A continuación, veamos dos ejemplos de la topología gráfica, en uno de ellos la topología resultará discreta y en el otro no.

Ejemplo 2.7 *Consideramos la topología gráfica definida sobre el torneo Q_n. Esta topología no es discreta ya que los abiertos se obtienen como instersecciones finitas o uniones de elementos de la subbase. Así, como $N_0^- = \{1\}$, el único elemento de la subbase que contiene a 0 es N_1^+, pero $N_1^+ = \{0, 3, \ldots, n\}$, por tanto, $\{0\}$ no es abierto y la topología definida no es discreta.*

Ejemplo 2.8 *Ahora consideramos la topología gráfica sobre el torneo T_{2h+1}, que está definido sobre $\{0, 1, \ldots, 2h\}$ de la siguiente forma:*
Dados $i, j \in \{0, \ldots, 2h\}$, tenemos $i \to j$ si existe $k \in \{1, \ldots, h\}$ tal que $j - i = k$ donde $j - i$ se considera módulo $(2h + 1)$.
Esta topología es discreta para $h \geq 1$, pues para cada $i \in \{0, \ldots, 2h\}, N_i^+ = \{i + 1, i + 2, \ldots, i + h\}$ y, en consecuencia, tenemos que $\bigcap_{k=i-h}^{i-1} N_k^+ = \{i\}$ es abierto.
Observemos más detalladamente esa topología para un valor de h concreto, $h = 3$. Comenzamos obteniendo los conjuntos de salida para cada vértice:

$$N_0^+ = \{1, 2, 3\} \quad N_1^+ = \{2, 3, 4\} \quad N_2^+ = \{3, 4, 5\} \quad N_3^+ = \{4, 5, 6\} \quad N_4^+ = \{5, 6, 0\}$$
$$N_5^+ = \{6, 0, 1\} \quad N_6^+ = \{0, 1, 2\}$$

Podemos observar que, efectivamente, se verifica la propiedad indicada, para cada $i \in \{0, \ldots, 6\}, N_i^+ = \{i + 1, i + 2, i + 3\}$ y, en consecuencia, tenemos que $\bigcap_{k=i-3}^{i-1} N_k^+ = \{i\}$ es abierto. Si tomamos un valor concreto de i, por ejemplo $i = 5$, vemos claramente que $\bigcap_{k=2}^{4} N_k^+ = \{5\}$.
En la Figura 2.2 puede verse una representación gráfica del torneo T_7.

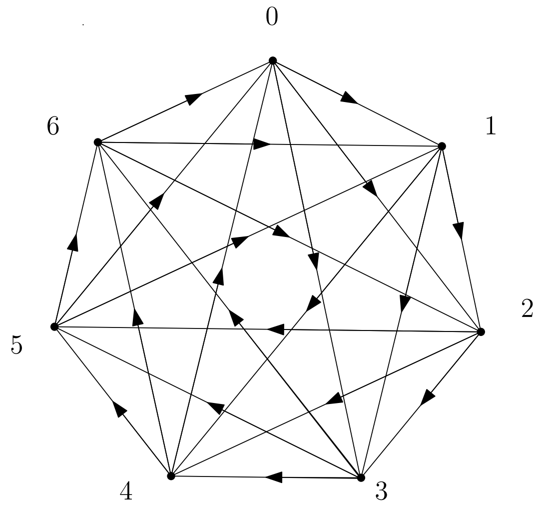

Figura 2.2: Representación gráfica del torneo T_7

Proposición 2.9 *Sea $T = (V, E)$ un torneo localmente finito e indescomponible. Se tiene que (V, τ_T) es un espacio de Alexandroff.*

Demostración. Sea $S \subseteq V$.
Si $\bigcap_{y \in S} N_y^+$ es vacío, entonces esta intersección de abiertos arbitraria es abierta, por ser vacía.
Si $\bigcap_{y \in S} N_y^+$ no es vacío, existe $x \in \bigcap_{y \in S} N_y^+$. Así que $x \in N_y^+$ para cualquier $y \in S$. Por tanto, se tiene que $y \in N_x^-, \forall y \in S$, luego, $S \subseteq N_x^-$. Como T es localmente finito, N_x^- es finito, y también lo es S. Entonces tenemos que $\bigcap_{y \in S} N_y^+$ es la intersección finita de conjuntos abiertos y, por tanto, es un abierto. □

Observación 2.10 *Obsérvese que para probar que un espacio es de Alexandroff es suficiente probar que la intersección arbitraria de abiertos es abierta considerando solo los elementos de la subbase.*

En un espacio de Alexandroff cada punto tiene un conjunto abierto minimal que lo contiene, el conjunto intersección de todos los abiertos que contienen al punto. Dado $x \in V$, sea

$$U_x = \bigcap \{I : I \text{ es un conjunto abierto que contiene a } x\}.$$

donde:

- U_x es el conjunto abierto más pequeño que contiene a x,
- la familia $\mathcal{U} = \{U_x : x \in V\}$ es una base para el espacio topológico (V, τ_T) y
- cualquier base de τ_T contiene a $\mathcal{U}$.

Lema 2.11 *Sea $T = (V, E)$ un torneo indescomponible. Para cualesquiera $x, y \in V$ con $x \neq y$, se verifica que $N_x^+ - \{y\} \neq N_y^+ - \{x\}$ y $N_x^- - \{y\} \neq N_y^- - \{x\}$.*

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que $N_x^+ - \{y\} = N_y^+ - \{x\}$ o $N_x^- - \{y\} = N_y^- - \{x\}$. Obtenemos entonces, tomando complementario, que:

$$(N_x^+ - \{y\})^c = (N_x^+ \cap \{y\}^c)^c = \{y\} \cup (N_x^+)^c = \{y\} \cup (N_x^- \cup \{x\}) = N_x^- \cup \{x, y\}$$

$$(N_y^+ - \{x\})^c = (N_y^+ \cap \{x\}^c)^c = \{x\} \cup (N_y^+)^c = \{x\} \cup (N_y^- \cup \{y\}) = N_y^- \cup \{x, y\}$$

Análogamente, obtenemos que $(N_x^- - \{y\})^c = N_x^+ \cup \{x, y\}$ y $(N_y^- - \{x\})^c = N_y^+ \cup \{x, y\}$. Así que $N_x^- \cup \{x, y\} = N_y^- \cup \{x, y\}$ o, análogamente, tenemos que $N_x^+ \cup \{x, y\} = N_y^+ \cup \{x, y\}$. Como $x \notin N_x^+ \cup N_x^-$ e $y \notin N_y^+ \cup N_y^-$, realizando operaciones simples y eliminando x e y tenemos que $N_x^- - \{y\} = N_y^- - \{x\}$ y $N_x^+ - \{y\} = N_y^+ - \{x\}$. Entonces deducimos que $N_x^- - \{y\} \to \{x, y\} \to N_x^+ - \{y\}$, lo cual significa que $\{x, y\}$ es un intervalo no trivial de T. Lo que contradice que T es indescomponible.

□

Vamos a demostrar que la topología definida no es discreta, ya que sería innecesario tomar esta nueva topología teniendo la topología trivial.

Lema 2.12 *Sea $T = (V, E)$ un torneo localmente finito e indescomponible con al menos 5 vértices. Si $\delta^-(T) = 1$, entonces (V, τ_T) no es discreta.*

Demostración. Como $\delta^-(T) = 1$, existen $x, y \in V$ tal que $N_y^- = \{x\}$. Para cada $i \in V - \{x\}$ si $y \in N_i^+$, entonces $i \in N_y^-$, lo que no es posible. Por tanto, $y \notin N_i^+$ para todo $i \in V - \{x\}$. Además, $y \in N_x^+$, pues $x \in N_y^-$. Entonces, $U_y = N_x^+$ al ser N_x^+ el único conjunto de salida que contiene a y. Se deduce que $U_y - \{y\} = N_x^+ - \{y\} \neq \emptyset$ pues, en caso contrario, tendríamos que $N_x^+ = \{y\}$, lo que significaría que $y \to V - \{x, y\} \to x$, así que $V - \{x, y\}$ sería un intervalo no trivial de T porque $|V - \{x, y\}| = |V| - 2 \geq 3$. Esto contradice la indescomponibilidad de T. Como consecuencia, $U_y \neq \{y\}$. Luego, (V, τ_T) no es discreta.

□

A continuación, vamos a demostrar algunas propiedades de los conjuntos de salida y de entrada con los abiertos minimales de dos vértices distintos. Estas relaciones entre los conjuntos se usarán en muchas de las demostraciones de este trabajo.

Lema 2.13 *Sea $T = (V, E)$ un torneo localmente finito e indescomponible y sean $x, y \in V$ dos vértices distintos. Se verifica que:*

(1) Si $y \in N_x^-$, entonces $U_x \subseteq N_y^+$.

(2) Si $U_y \subseteq N_x^-$, entonces $U_x \subseteq N_y^+$.

(3) Tenemos que $U_y \subseteq N_x^+$ o $U_x \subseteq N_y^+$ y, en consecuencia, tenemos que $U_y \cap N_{[x]}^- = \emptyset$ o $U_x \cap N_{[y]}^- = \emptyset$.

Demostración.

(1) Si $y \in N_x^-$, entonces $x \in N_y^+$, el cual es un conjunto abierto que contiene a x. Por tanto, $U_x \subseteq N_y^+$.

(2) Si $U_y \subseteq N_x^-$, entonces $y \in N_x^-$ y, por (1), $U_x \subseteq N_y^+$.

(3) Como $x \neq y$, tenemos $x \to y$ o $y \to x$. Así que, por (1), $U_y \subseteq N_x^+$ o $U_x \subseteq N_y^+$. Esto implica que $U_y \cap N_{[x]}^- = \emptyset$ o $U_x \cap N_{[y]}^- = \emptyset$, respectivamente.

□

Ya hemos visto que (V, τ_T) es un espacio de Alexandroff en la Proposición 2.9. Con el Lema 2.14 y los siguientes corolarios, se ve cómo podemos calcular los abiertos minimales.

Lema 2.14 *Sea $T = (V, E)$ un torneo localmente finito e indescomponible. Para cualquier $x \in V$, tenemos que $U_x = \bigcap_{y \in N_x^-} N_y^+$.*

Demostración. Por el Lema 2.13(1), si $y \in N_x^-$, entonces $U_x \subseteq N_y^+$. Por tanto, tenemos que $U_x \subseteq \bigcap_{y \in N_x^-} N_y^+$.
Veamos la otra inclusión. Si tenemos que U_x es un abierto que contiene a x, al ser S_T una subbase de τ_T, entonces, $\exists S \subseteq V$ tal que $x \in \bigcap_{y \in S} N_y^+ \subseteq U_x$.
Si tuvieramos que $S \subseteq N_x^-$, entonces $\bigcap_{y \in N_x^-} N_y^+ \subseteq \bigcap_{y \in S} N_y^+ \subseteq U_x$. Así que veremos que $S \subseteq N_x^-$: Sea $y \in S$, se tiene que $x \in N_y^+$ y, en consecuencia, $y \in N_x^-$. Luego, se tiene que $S \subseteq N_x^-$.

□

Ejemplo 2.15 *Vamos a calcular los abiertos minimales del torneo Q_n para $n \geq 5$ y a representar gráficamente el espacio de Alexandroff obtenido. En la Figura 2.3 podemos observar una representación gráfica del torneo Q_5.*

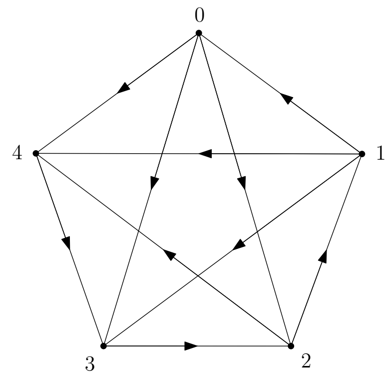

Figura 2.3: Representación gráfica del torneo Q_5

El lema anterior nos da una forma de calcular los abiertos minimales. Para ello, comenzamos calculando los conjuntos de salida de cada vértice:

$$N_0^+ = \{2,3,4\}, \quad N_1^+ = \{0,3,4\}, \quad N_2^+ = \{1,4\}, \quad N_3^+ = \{2\} \text{ y } N_4^+ = \{3\}.$$

Aplicando el Lema 2.14, es decir, que $U_x = \bigcap_{y \in N_x^-} N_y^+$, para Q_5 obtenemos:

$$U_0 = \{0,3,4\}, \quad U_1 = \{1,4\}, \quad U_2 = \{2\}, \quad U_3 = \{3\} \text{ y } U_4 = \{4\} = N_0^+ \cap N_1^+ \cap N_2^+.$$

Tendríamos la siguiente representación gráfica del espacio topológico obtenido, como espacio de Alexandroff, $(\{0,1,2,3,4\}, \tau_{Q_5})$,

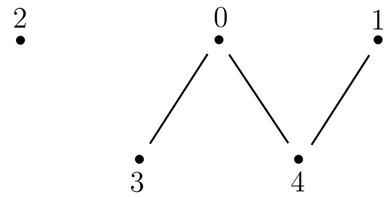

Figura 2.4: Espacio topológico de Alexandroff

donde una línea entre dos puntos de distinto nivel significa que el abierto minimal del nivel superior contiene al abierto minimal del nivel inferior, por ejemplo, la línea que une los puntos 1 y 4 indica que $U_4 \subseteq U_1$. Por otra parte, cuando un punto no está unido a ningún otro punto de nivel inferior, indica que el abierto minimal del punto es el conjunto unitario. Así, los abiertos minimales de 2, 3 y 4 son los conjuntos unitarios correspondientes.

Corolario 2.16 *Sea $T = (V, E)$ un torneo localmente finito e indescomponible y sean $x, y \in V$ dos vértices distintos. Tenemos que $U_x = N_y^+$ si y sólo si $N_y^+ \subseteq N_z^+$ para cada $z \in N_x^-$.*
En particular, si $N_x^- = \{y\}$, entonces $U_x = N_y^+$.

Demostración. Por el Lema 2.14, $U_x = N_y^+$ si y sólo si $\bigcap_{z \in N_x^-} N_z^+ = N_y^+$, lo que es equivalente a $N_y^+ \subseteq N_z^+$ para todo $z \in N_x^-$.
En particular, si $N_x^- = \{y\}$, entonces $N_y^+ \subseteq N_z^+$ para todo $z \in N_x^- = \{y\}$, pues $N_y^+ \subseteq N_y^+$.
Así que, $U_x = N_y^+$.

□

Corolario 2.17 *Sea $T = (V, E)$ un torneo localmente finito e indescomponible. Entonces para cualesquiera $x, z \in V$, tenemos que $z \in U_x$ si y sólo si $N_x^- \subseteq N_z^-$. De forma equivalente,*

$$U_x = \{z \in V : N_x^- \subseteq N_z^-\}.$$

Demostración. Por el Lema 2.14, $z \in U_x$ si y sólo si $z \in N_y^+$ para todo $y \in N_x^-$, lo que es equivalente a $y \in N_z^-$ para todo $y \in N_x^-$, que es a su vez equivalente a $N_x^- \subseteq N_z^-$.

□

Nota 2.18 *Observamos que al ser (T, τ_T) de Alexandroff, se tiene que (T, τ_T) es T_1 si y sólo si $U_x = \{x\}$ para todo $x \in T$. Por el corolario 2.17, se deduce que (T, τ_T) es T_1 si y sólo si $N_z^- \nsubseteq N_x^-$ y $N_x^- \nsubseteq N_z^-$ para cualesquiera dos vértices distintos $x, z \in T$.*

Ejemplo 2.19 *Consideremos el torneo V_{2n+1} definido en $\{0, 1, \ldots, 2n\}$ por:*

- $i \to j$ *con* $i < j$ *y* $0 \leq i, j \leq 2n - 1$
- $\{2i + 1 : 0 \leq i \leq n - 2\} \to 2n \to \{2i : 0 \leq i \leq n - 2\}$

La topología gráfica sobre este torneo no es discreta para $n \geq 2$. Basta ver que $N_0^- = \{2n\} \subseteq N_2^- = \{0, 1, 2n\}$ si $n \geq 2$, ya que si existen dos puntos distintos x y z tales que $N_x^- \subseteq N_z^-$, entonces este espacio topológico no es T_1.
Vamos a ver este ejemplo con más detalle para un valor de n concreto, para $n = 3$.
En la Figura 2.5 vemos una representación gráfica del torneo V_7, donde las aristas rojas muestran que $N_2^- = \{0, 1, 6\}$ y la arista verde que $N_0^- = \{6\}$.

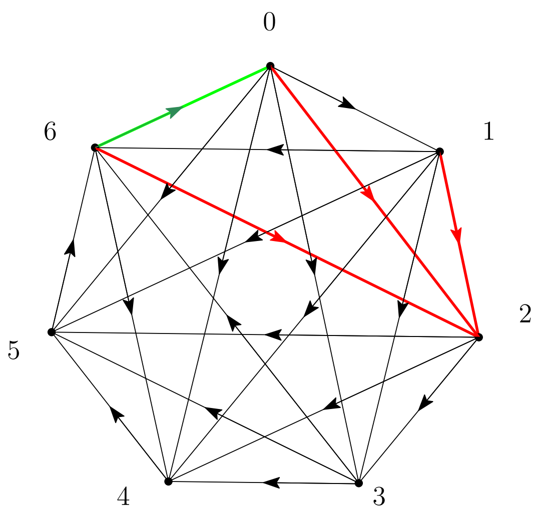

Figura 2.5: Representación gráfica del torneo V_7.

Corolario 2.20 *Sea $T = (V, E)$ un torneo localmente finito e indescomponible. Para cualesquiera $x, z \in V$ se tiene que $U_x = U_z$ si y sólo si $x = z$.*

Demostración.

$\Leftarrow$) Si $x = z$, entonces $U_x = U_z$.

$\Rightarrow$) Supongamos que $U_x = U_z$, entonces se tiene que $z \in U_x$. Por el Corolario 2.17, $N_x^- \subseteq N_z^-$. Como también $x \in U_z$, por el Corolario 2.17 de nuevo, tenemos $N_z^- \subseteq N_x^-$. En consecuencia, $N_x^- = N_z^-$. Afirmamos que $x = z$, ya que si no se tendría $x \to z$ o $z \to x$, lo que implicaría que $x \in N_x^-$ o $z \in N_z^-$, que es una contradicción.

$\square$

Observación 2.21 *Para cualesquiera $x, z \in V$ tenemos que:*

(1) $z \in U_x$ si y sólo si $U_z \subseteq U_x$,

(2) $z \in U_x - \{x\}$ si y sólo si $U_z \subset U_x$ y $x \notin U_z$.

Corolario 2.22 *Dado un vértice x de un torneo localmente finito e indescomponible tal que $|U_x| \geq 2$, se verifica que:*

(1) Para cada $z \in U_x - \{x\}$, tenemos que $U_z \subset U_x$ y, como consecuencia, $|U_z| < |U_x|$.

(2) Existe $z_0 \in U_x - \{x\}$ tal que $U_{z_0} = \{z_0\}$.

Demostración.

(1) Sea $z \in U_x - \{x\}$. Como $z \neq x$, por el Corolario 2.20, $U_z \neq U_x$. Además, $z \in U_x$, que es un conjunto abierto que contiene a x, luego $U_z \subseteq U_x$. Por tanto, $U_z \subset U_x$ y, en consecuencia, $|U_z| < |U_x|$.

(2) Sea $z \in U_x - \{x\}$. Por el apartado (1), tenemos que $U_z \subset U_x$ y entonces $|U_z| < |U_x|$. Para finalizar, tomamos $m = |U_z|$ y sólo hay que probar que existe una secuencia $(a_i)_{0 \leq i \leq k}$ de elementos de U_z de forma que $U_{a_k} \subset U_{a_{k-1}} \subset \ldots \subseteq U_{a_{i+1}} \subset U_{a_i} \subset \ldots \subseteq U_{a_0} = U_z \subseteq U_x - \{x\}$ y $U_{a_k} = \{a_k\}$. Si $m = 1$, entonces $a_0 = a_k = z$. Asumimos que $m = |U_z| \geq 2$. Sea $Z_i = U_{a_i} - \{a_i\}$, con $a_0 = z$. Mientras $Z_i \neq \emptyset$ vamos aplicando el apartado (1).

- Para $a_1 \in Z_0 = U_z - \{z\}$, tenemos $U_{a_1} \subset U_z$. Luego $|U_{a_1}| < m$.
- Para $a_2 \in Z_1 = U_{a_1} - \{a_1\}$ tenemos $U_{a_2} \subset U_{a_1}$. Luego $|U_{a_2}| < |U_{a_1}| \leq m - 1$.
- Para $a_{i+1} \in Z_i = U_{a_i} - \{a_i\}$, tenemos $U_{a_{i+1}} \subset U_{a_i}$. Luego $|U_{a_{i+1}}| < |U_{a_i}| \geq 2$.
- Para $a_k \in Z_{k-1}$, $\{a_k\} = U_{a_k} \subset U_{a_{k-1}} \subset \ldots \subset U_{a_{i+1}} \subset U_{a_i} \subset \ldots \subset U_z \subseteq U_x - \{x\}$.

Por tanto, existe $a_k \in U_x - \{x\}$ verificando que $U_{a_k} = \{a_k\}$.

$\square$

Del resultado anterior se sigue que, dado un torneo T localmente finito e indescomponible, existe un vértice z_0 tal que $U_{z_0} = \{z_0\}$.

Corolario 2.23 *Sea $T = (V, E)$ un torneo localmente finito e indescomponible y sea $x \in V$. Se verifica que:*

(1) $U_x \subseteq N^+_{[x]}$.

(2) $N^-_x \subseteq U^c_x$ y, por tanto, $U_x \cap N^-_x = \emptyset$.

(3) En particular, si $U_z \subseteq N^-_x$, entonces $U_x \cap U_z = \emptyset$.

Demostración.

(1) Sea $z \in U_x - \{x\}$. Por los Corolarios 2.17 y 2.20, tenemos $N^-_x \subset N^-_z$ y $U_x \neq U_z$. Luego, $z \in N^+_x$, ya que en otro caso, $z \in N^-_z$, lo que es absurdo. Luego, $U_x \subseteq N^+_{[x]}$.

(2) Se tiene que $U_x \subseteq N^+_{[x]} = (N^-_x)^c$ y, tomando complementarios, $N^-_x \subseteq U^c_x$. Lo que significa que $U_x \cap N^-_x = \emptyset$.

(3) Si $U_z \subseteq N^-_x$, por el apartado (1) (tomando complementarios), se tiene que $U_z \subseteq U^c_x$, entonces $U_x \cap U_z = \emptyset$.

□

Observación 2.24 *Como N^+_x es un entorno de sus puntos, es un conjunto abierto y, por el Corolario 2.23(1), obtenemos que $N^+_{[x]} = N^+_x \;\cup\; U_x \in \tau_T$. Así que, N^-_x es cerrado, es decir, $\overline{N^-_x} = N^-_x = (N^+_x \cup U_x)^c$. Además, como $\{x\} \subseteq U_x \subseteq N^+_{[x]}$, tomando clausuras, tenemos que $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{U_x} \subseteq \overline{N^+_{[x]}}$.*

Proposición 2.25 *Sea $T = (V, E)$ un torneo localmente finito e indescomponible. Entonces para cualquier $x \in V$, tenemos que $z \in \overline{\{x\}}$ si y sólo si $x \in U_z$, lo que equivale a $U_x \subseteq U_z$. En otras palabras, $\overline{\{x\}} = \{z \in V : N^-_z \subseteq N^-_x\}$.*

Demostración. Observamos que $z \in \overline{\{x\}}$ y $x \neq z$ si y sólo si $(O \backslash \{z\}) \cap \{x\} \neq \emptyset$ para cualquier abierto O que contenga a z, lo que es equivalente a $x \in U_z$ que, por el Corolario 2.17, es a su vez equivalente a $N^-_z \subseteq N^-_x$.

□

Capítulo 3

Algunas propiedades de la topología gráfica

En este capítulo vamos a demostrar algunas propiedades de la topología gráfica. Además, consideraremos algunos conjuntos distinguidos que serán conjuntos abiertos o cerrados.

Proposición 3.1 *Sea $T = (V, E)$ un torneo localmente finito e indescomponible. Entonces (V, τ_T) es un espacio topológico compacto si y sólo si V es finito.*

Demostración.

$\Leftarrow$) Es inmediato, pues si V es finito, cualquier recubrimiento de V por abiertos ya es finito.

$\Rightarrow$) Como el grado de entrada de cualquier vértice es finito, por el Lema 2.14, U_x es la intersección de una cantidad finita de abiertos para cada $x \in V$.
Si V fuera infinito, la familia $\mathcal{U}$ sería un recubrimiento abierto de (V, τ_T), que no contiene a ningun subrecubrimiento finito y tendríamos una contradición. Luego, V es finito.

$\square$

Proposición 3.2 *Sea $T = (V, E)$ un torneo localmente finito e indescomponible y sea*

$$M = \{x \in V : d^-(x) = \Delta^-\}.$$

Entonces M es abierto, es decir, $M \in \tau_T$.

Demostración. Basta ver que, dado $x \in M$, se verifica que $U_x \subset M$, es decir, es entorno de sus puntos.
Si $z \in U_x$, por el Corolario 2.17, tenemos que $N_x^- \subseteq N_z^-$, luego implica que $\Delta^- = |N_x^-| \leq |N_z^-|$. Como Δ^- es el máximo de los grados de entrada, tenemos que $\Delta^- = |N_z^-| = d^-(z)$ y $z \in M$.
Por tanto, para cualquier $x \in M$, se tiene que $x \in U_x \subseteq M$, así que $M \in \tau_T$. $\square$

Proposición 3.3 *Sea $T = (V, E)$ un torneo localmente finito e indescomponible y sea*

$$M' = \{x \in V : d^+(x) = \delta^+\}.$$

Entonces $M' \in \tau_T$.

Demostración. Basta ver que, dado $x \in M'$, se verifica que $U_x \subseteq M'$.
Si $z \in U_x$, por el Corolario 2.17, tenemos que $N_x^- \subseteq N_z^-$. Tomando complementarios, tenemos que $(N_z^+ \cup \{z\}) \subseteq (N_x^+ \cup \{x\})$. Esto implica que $|N_z^+| \leq |N_x^+| = \delta^+$. Como δ^+ es el mínimo de los grados de salida, tenemos que $d^+(z) = |N_z^+| = \delta^+$ y $z \in M'$. Luego, $U_x \subseteq M'$.
Por tanto, $x \in U_x \subseteq M'$, así que $M' \in \tau_T$. $\square$

Proposición 3.4 *Sea $T = (V, E)$ un torneo localmente finito e indescomponible y sea*

$$m = \{x \in V : d^-(x) = \delta^-\}.$$

Entonces m es un conjunto cerrado en (V, τ_T).

Demostración. Como $m \subseteq \overline{m}$ siempre se verifica, para ver que es cerrado sólo es necesario ver que $\overline{m} \subseteq m$.
Sea $z \in \overline{m}$. Existe $x \in V$ tal que $x \in U_z \cap m$. Por el Corolario 2.17, tenemos que $N_z^- \subseteq N_x^-$. Así que $|N_z^-| \leq |N_x^-| = \delta^-$. Como δ^- es el mínimo de los grado de entrada, $\delta^- = |N_z^-| = d^-(z)$ y entonces $z \in m$.
Por tanto, $\overline{m} \subseteq m$. $\square$

Proposición 3.5 *Sea $T = (V, E)$ un torneo localmente finito e indescomponible y sea*

$$m' = \{x \in V : d^+(x) = \Delta^+\}.$$

Entonces m' es un conjunto cerrado en (V, τ_T).

Demostración. Como $m' \subseteq \overline{m}\,'$ siempre se verifica, basta probar que $\overline{m}\,' \subseteq m'$.
Sea $z \in \overline{m}\,'$. Existe $x \in V$ tal que $x \in U_z \cap m'$. Por el Corolario 2.17, tenemos que $N_z^- \subseteq N_x^-$. Tomando complementario, tenemos que $(N_z^+ \cup \{z\}) \subseteq (N_x^+ \cup \{x\})$. Luego, $\Delta^+ = |N_x^+| \leq |N_z^+|$. Como Δ^+ es el máximo de los grados de salida, $\Delta^+ = |N_z^+| = d^+(z)$ y entonces $z \in m'$.
Por tanto, $\overline{m}\,' \subseteq m'$. $\square$

Dado (V, τ_T) un espacio topológico, vamos a ver en las siguientes proposiciones algunas propiedades de τ_T que hacen que dicho espacio sea discreto.

Proposición 3.6 *Sean $T = (V, E)$ un torneo localmente finito e indescomponible y sea T^* el torneo opuesto de T. Si $\tau_T = \tau_T*$, entonces (V, τ_T) es un espacio topológico discreto.*

Demostración. Para cada $x \in V$, recordemos que $U_x(T) = \{z \in V : N_x^-(T) \subseteq N_z^-(T)\} \in \tau_T$ es el menor abierto que contiene a x. Por otro lado, como T^* es el opuesto de T, sabemos que $U_x(T^*) = \{z \in V : N_x^+(T) \subseteq N_z^+(T)\}$. Luego, dado $x \in U_x(T)$, si $\tau_T = \tau_T*$, tenemos que $U_x(T) \cap U_x(T^*) \in \tau_T$.
Supongamos que $z \in U_x(T) \cap U_x(T^*)$, por tanto, por definición tenemos que $N_x^-(T) \subseteq N_z^-(T)$ y $N_x^+(T) \subseteq N_z^+(T)$. En este caso, necesariamente $z \notin N_x^-(T) \cup N_x^+(T)$ ya que en caso contrario, tendríamos que $z \in N_z^-(T)$ o $z \in N_z^+(T)$, lo que es absurdo.
Luego, tenemos que $z \in V \backslash (N_x^+(T) \cup N_x^-(T)) = \{x\}$. Por tanto, se sigue que $U_x(T) \cap U_x(T^*) = \{x\} \in \tau_T$. Así que τ_T es la topología discreta. $\square$

Definición 3.7 *Sea $(V, \mathcal{T})$ un espacio topológico, se define la topología $\mathcal{T}^c$ cómo la topología cuya base está formada por los complementarios de los elementos de la base de $\mathcal{T}$.*

Proposición 3.8 *Sea T un torneo localmente finito e indescomponible. Si $\tau_T = \tau_T^c$, entonces (V, τ_T) es un espacio topológico discreto.*

Demostración. Dado $x \in V$, se tiene que $N_x^+ \in \tau_T$ y así $(N_x^+)^c = N_{[x]}^- \in \tau_T^c = \tau_T$. Ya que $N_{[x]}^-$ es un conjunto abierto de τ_T que contiene a x, $U_x \subseteq N_x^- \cup \{x\}$. Como $U_x \cap N_x^+ = \emptyset$, por la Observación 2.24, en concreto, utilizando que $N_{[x]}^+ = N_x^+ \cup U_x$, se tiene que $U_x = \{x\}$. Así que τ_T es la topología discreta.

□

Vamos a estudiar los conjuntos densos en la topología gráfica definida sobre un torneo.

Proposición 3.9 *Sea T un torneo localmente finito e indescomponible. Un conjunto es denso en (V, τ_T) si y sólo si su intersección con cualquier abierto minimal es no vacía.*

Demostración.

⇒) Si D es un conjunto denso, entonces la intersección de D con cualquier abierto no vacío es no vacía, entonces la intersección con cualquier abierto minimal también es no vacía.

⇐) Sea D un conjunto y supongamos que su intersección con cualquier abierto minimal es no vacía. Sea G un abierto no vacío y sea $x \in G$. Entonces se tiene que $U_x \subseteq G$ y, como consecuencia, $U_x \cap D \subseteq G \cap D$. Por tanto, al ser $U_x \cap D \neq \emptyset$, también $G \cap D \neq \emptyset$.
Luego, la intersección de D con cualquier abierto no vacío es no vacía y es denso.

□

Antes de mejorar el resultado anterior, vamos a recordar una noción esencial en espacios de Alexandroff:

Definición 3.10 *Dado un espacio topológico de Alexandroff $(X, \mathcal{T})$, un elemento $x \in X$ es **minimal** si su abierto minimal no contiene a ningún otro abierto minimal, es decir, no existe $y \in X$, $y \neq x$, tal que $U_y \subseteq U_x$.*

Observación 3.11 *Del corolario 2.20 se deduce que un elemento es minimal si y sólo si su abierto minimal es el conjunto unitario.*

Proposición 3.12 *Sea T un torneo localmente finito e indescomponible. Un conjunto es denso en (V, τ_T) si y sólo si contiene a todos los elementos minimales.*

Demostración.

⇒) Sea D un conjunto denso y consideremos el conjunto D' formado por todos los elementos minimales.Tenemos que probar que $D' \subseteq D$.
Sea x un elemento minimal, tenemos que $U_x = \{x\}$. Como U_x es un abierto no vacío, $U_x \cap D \neq \emptyset$, pero solo es posible si $x \in D$.
Hemos probado entonces que $D' \subseteq D$, es decir; que todo elemento minimal está en D.

$\Leftarrow$) Sea D' el conjunto constituido por todos los elementos minimales y sea D un conjunto conteniendo a D'. Veamos que D es denso.

Es suficiente probar que D corta a cualquier abierto minimal. Sea $x \in V(T)$ y consideremos su abierto minimal U_x.

Si x es minimal, entonces $x \in D' \subseteq D$ y $U_x = \{x\}$ y, en consecuencia, $\{x\} = U_x \cap D \neq \emptyset$.

Si x no es minimal, entonces $\{x\} \nsubseteq U_x$ y, por tanto, $|U_x| \geq 2$. Por la segunda parte del Corolario 2.22, existe $z_0 \in U_x - \{x\}$ tal que $U_{z_0} = \{z_0\}$, es decir; U_x contiene un elemento minimal z_0. Entonces $z_0 \in D' \subseteq D$ y $z_0 \in U_x$ y, en consecuencia, $z_0 \in U_x \cap D \neq \emptyset$.

Luego, D es denso.

$\square$

Observación 3.13 *Del resultado anterior se deduce que cualquier conjunto denso contiene al conjunto de todos los elementos minimales. Por tanto, dicho conjunto sería un conjunto denso minimal.*

Ejemplo 3.14 *Consideremos el torneo del Ejemplo 2.15 (ver Figura 2.3), vamos a obtener el conjunto denso minimal de la topología gráfica definida sobre este torneo.*

En el Ejemplo 2.15 ya obtuvimos los abiertos minimales, que son:

$$U_0 = \{0, 3, 4\}, \quad U_1 = \{1, 4\}, \quad U_2 = \{2\}, \quad U_3 = \{3\} \;\; y \;\; U_4 = \{4\}.$$

Por lo que los elementos minimales son 2, 3 y 4. También podemos obtenerlos fácilmente a partir de la representación gráfica de (Q_5, τ_{Q_5}) como espacio de Alexandroff (ver Figura 2.4).

Por tanto, por la Proposición 3.12 tenemos que el conjunto denso minimal en este espacio topológico es el conjunto $D = \{2, 3, 4\}$.

Observación 3.15 *Hay que tener en cuenta que, aunque hemos caracterizado los conjuntos densos, éstos vienen determinados por los elementos minimales. Por lo que sería interesante obtener una caracterización de los elementos minimales en la topología gráfica definida sobre un torneo, lo que podría ser el inicio de una continuación natural de este trabajo fin de grado.*

Capítulo 4

Funciones entre torneos y la conexión de la topología gráfica

En este capítulo se estudian funciones entre grafos de torneos y características sobre la conexión de la topológia gráfica. En particular, en la búsqueda de condiciones necesarias sobre un torneo T para que el espacio topológico (V, τ_T) sea conexo, surgen dos familias de torneos para los que la topología gráfica no es conexa.

Proposición 4.1 *Sean $T_1 = (V_1, E_1)$ y $T_2 = (V_2, E_2)$ dos torneos localmente finitos e indescomponibles. Una función $f : V_1 \to V_2$ entre (V_1, τ_{T_1}) y (V_2, τ_{T_2}) es continua si y sólo si $N_x^- \subseteq N_y^-$ implica que $N_{f(x)}^- \subseteq N_{f(y)}^-$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que f continua. Si $N_x^- \subseteq N_y^-$, entonces, por el Corolario 2.17, $y \in U_x$. Como $f(x) \in U_{f(x)}$, $x \in f^{-1}(U_{f(x)})$, que es un conjunto abierto de τ_{T_1}, y así $y \in U_x \subset f^{-1}(U_{f(x)})$. Luego, $f(y) \in U_{f(x)}$ y, de nuevo por el Corolario 2.17, tenemos que $N_{f(x)}^- \subseteq N_{f(y)}^-$.

$\Leftarrow$) Sea O un conjunto abierto de τ_{T_2}. Sea $x \in V_1$ tal que $f(x) \in O$, entonces $U_{f(x)} \subseteq O$. Sea $y \in U_x$ entonces, por el Corolario 2.17, $N_x^- \subseteq N_y^-$ y, como consecuencia, tenemos que $N_{f(x)}^- \subseteq N_{f(y)}^-$. De nuevo, por el Corolario 2.17, se deduce que $f(y) \in U_{f(x)} \subseteq O$ y, por tanto, $y \in f^{-1}(O)$. Luego, $f^{-1}(O) \supseteq \bigcup_{f(x) \in O} U_x$. Por otro lado, como $f(x) \in O$ si y sólo si $x \in f^{-1}(O)$ y, además, $x \in U_x$ tenemos que $f^{-1}(O) \subseteq \bigcup_{f(x) \in O} U_x$. Con lo que hemos probado que O es un conjunto abierto de τ_{T_1} al ser unión de abiertos de τ_{T_1}.

$\square$

Proposición 4.2 *Sea $T = (V, E)$ un torneo localmente finito e indescomponible y sean $x, y \in V$. Si $N_y^- = N_x^+$, entonces:*

(1) $U_z \cap U_y = \emptyset$, para cada $z \in N_y^-$.

(2) $U_x = \{x\}$ y, además, $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Demostración.

(1) Sea $z \in N_y^- = N_x^+$. Como N_x^+ es un conjunto abierto que contiene a z, debe contener al menor abierto que contiene a z, esto es, $U_z \subseteq N_x^+ = N_y^-$. Por el apartado (3) del Corolario 2.23, se tiene que $U_z \cap U_y = \emptyset$.

(2) Recordemos que se verifica que:

- $y \neq x$, pues en otro caso $N_x^- = N_x^+$, lo cual es absurdo, y
- $x \in N_y^+$, pues en otro caso $x \in N_y^- = N_x^+$ y así $x \to x$, lo cual es una contradicción.

Como N_y^+ es un conjunto abierto que contiene a x, debe contener al menor abierto que contiene a x, esto es, $U_x \subseteq N_y^+$. Entonces, por el Corolario 2.23(1),

$$U_x \subseteq N_{|x|}^+ \cap N_y^+ = (N_y^- \cup \{x\}) \cap N_y^+ = (N_y^- \cap N_y^+) \cup (\{x\} \cap N_y^+) = \emptyset \cup \{x\}$$

ya que $x \in N_y^+$. Entonces, $U_x \subseteq \{x\}$ y así $U_x = \{x\}$.
Por último, se tiene que $x \notin U_y$, ya que en otro caso, tendríamos una contradicción por el Corolario 2.17, pues tendríamos que $N_x^+ = N_y^- \subseteq N_x^-$.

□

Proposición 4.3 *Sea T un torneo indescomponible con n vértices $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tal que*

$$x_1 \to V - \{x_1, x_{n-1}, x_n\} \to x_{n-1} \leftarrow x_1.$$

El conjunto $\{x_n\}$ es cerrado y abierto. En particular, el espacio (V, τ_T) no es conexo.

Demostración. Vamos a demostrar que $\{x_n\}$ es abierto y cerrado.
Como T es indescomponible y $d^-_{T-x_n}(x_1) = d^+_{T-x_n}(x_{n-1}) = 0$, necesariamente tenemos $x_{n-1} \to x_n \to x_1$. Como $N_{x_1}^- = \{x_n\} = N_{x_{n-1}}^+$, por el Corolario 4.2(2) tenemos que $U_{x_n} = \{x_n\} \in \tau_T$, es decir, $\{x_n\}$ es abierto.
Por otro lado, sabemos que el conjunto de salida $N_{x_1}^+ = V - \{x_1, x_n\}$ y $x_1 \in N_{x_n}^+ \subseteq V - \{x_n\}$. Se sigue que $\{x_n\}^c = V - \{x_n\} = N_{x_1}^+ \cup N_{x_n}^+$ es abierto también, luego $\{x_n\}$ es cerrado.

□

Ejemplo 4.4 *El torneo V_{2n+1} no es conexo para cada $n \geq 1$. Vamos a verificar el resultado anterior para $n = 3$.*

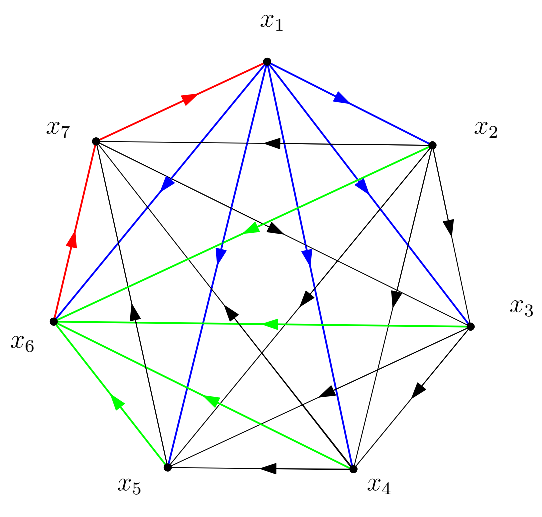

Figura 4.1: Representación gráfica del torneo V_7 no conexo

Comprobamos que se verifican las hipótesis del teorema para el grafo V_7, en efecto, se trata de un torneo con 7 vértices donde $x_1 \rightarrow_{(1)} V - \{x_1, x_6, x_7\} \rightarrow_{(2)} x_6 \leftarrow_{(1)} x_1$. En la Figura 4.1 podemos comprobar (1) con el color azul y (2) con el color verde. Por tanto, como se verifican las hipótesis de la Proposición 4.3, tenemos que $\{x_7\}$ es abierto y cerrado.

Proposición 4.5 *Sea T un torneo indescomponible con n vértices tal que*

$$x_n \to x_1 \to V - \{x_1, x_2, x_n\} \to x_n, \quad \text{con } x_1 \to x_2 \leftarrow x_n.$$

El conjunto $\{x_n\}$ es abierto y cerrado. En particular, el espacio (V, τ_T) no es conexo.

Demostración. Por el Corolario 2.23(1), $U_{x_n} \subseteq N^+_{[x_n]} = \{x_1, x_2, x_n\}$. Como $N^-_{x_1} = \{x_n\}$ se verifica que $N^-_{x_n} \nsubseteq N^-_{x_1}$, en consecuencia, $x_1 \notin U_{x_n}$. Tenemos que $\{x_1, x_n\} \subseteq N^-_{x_2}$ y $N^-_{x_2} \neq V - \{x_2\}$, ya que T es indescomponible. Luego, tenemos que $N^-_{x_n} = V - \{x_1, x_2, x_n\} \nsubseteq N^-_{x_2}$. El Corolario 2.17 nos garantiza que $U_{x_n} = \{x_n\}$.
Además, $U_{x_1} \cup N^+_{x_1} = V - \{x_n\} \in \tau_T$, así que $\{x_n\}$ es también cerrado.

□

Ejemplo 4.6 *Vamos a comprobar gráficamente el resultado anterior para $n = 7$:*

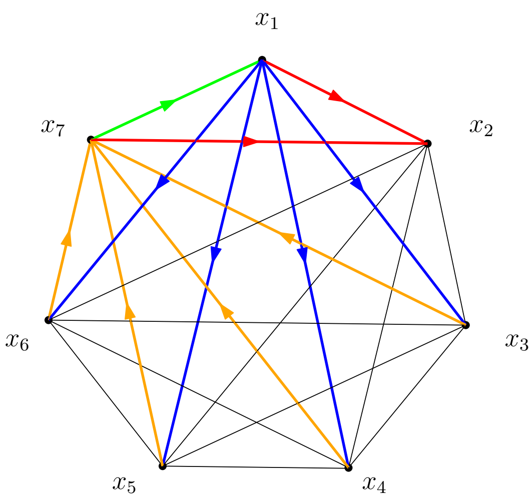

Figura 4.2: Representación gráfica del torneo indescomponible de 7 vértices

En efecto, se trata de un torneo con 7 vértices donde $x_7 \rightarrow_{(1)} x_1 \rightarrow_{(2)} V - \{x_1, x_2, x_7\} \rightarrow_{(3)} x_7$ y, además, $x_1 \rightarrow_{(4)} x_2 \leftarrow_{(4)} x_7$. En la Figura 4.2 podemos comprobar (1) con el color verde, (2) con el color azul, (3) con el color naranja y (4) con el color rojo.
Por tanto, como verifica las hipótesis de la Proposición 4.5 tenemos que $\{x_7\}$ es abierto y cerrado.

A la vista de los últimos resultados y ejemplos nos planteamos lo siguiente:

Cuestión 4.7 *Sea T un torneo con n vértices. Si existe un vértice $x \in V(T)$ tal que $d^+(x) = n - 2$ o $d^-(x) = n - 2$, ¿es el espacio (V, τ_T) no conexo?*

El siguiente ejemplo nos indica que la respuesta no tiene porqué ser afirmativa.

Ejemplo 4.8 *Veamos que el espacio topológico* $(\mathbb{N}_n, \tau_{Q_n})$ *es conexo para* $n \geq 6$.

Supongamos que existen dos conjuntos disjuntos $A, B \in \tau_{Q_n}$, *tales que* $\mathbb{N}_n = A \cup B$. *Basta probar que* A *o* B *es el conjunto vacío.*

Observamos que:

- $N_0^+ = \{2, 3, \ldots, n-1\}$,
- $N_i^+ = \{i-1\} \cup \{i+2, \ldots, n-1\}$, *para* $i \in \{1, \ldots, n-4\}$,
- $N_{n-3}^+ = \{n-4\} \cup \{n-1\}$,
- $N_{n-2}^+ = \{n-3\}$,
- $N_{n-1}^+ = \{n-2\}$.

Sea $n-1 \in A$. *Como* $n-1 \in \bigcap_{i=0}^{n-3} N_i^+$, *tenemos, necesariamente,* $B \in \{\{n-3\}, \{n-2\}, \{n-3, n-2\}, \emptyset\}$. *Por lo tanto, obtenemos* $\mathbb{N}_n - \{n-3, n-2\} \subseteq A$ *y que* $|A| \geq n-2$.

Si $n-2 \in B$, *como*

$$n-2 \in (\bigcap_{i=0}^{n-4} N_i^+) \cap N_{n-1}^+, A \subseteq N_{n-3}^+ \cup N_{n-2}^+ = \{n-4, n-3, n-1\}$$

lo cual implica que $n-2 \leq |A| \leq 3$, *así que* $n \leq 5$, *lo que es una contradicción. Por lo tanto,* $n-2 \in A$, *asi que* $\mathbb{N}_n - \{n-3\} \subseteq A$ *y* $|A| \leq n-1$.

Si $n-3 \in B$, *observamos que* $n-3 \in (\bigcap_{i=0}^{n-5} N_i^+) \cap N_{n-2}^+$. *Por tanto,*

$$A \subseteq N_{n-4}^+ \cup N_{n-3}^+ \cup N_{n-1}^+ = \{n-5, n-4, n-2, n-1\}$$

y $n-1 \leq |A| \leq 4$ *y, de nuevo, tenemos una contradicción.*

Por tanto, tenemos que $B = \emptyset$ *y* $A = \mathbb{N}_n$. *Luego, el espacio topológico considerado es conexo.*

Cuestión 4.9 *¿Cuál es la condición necesaria y suficiente para que* (V, τ_T) *sea un espacio topológico conexo?*

Observación 4.10 *Dar respuesta a esta cuestión podría formar parte de una natural continuación de este trabajo fin de grado.*

Bibliografía

[1] F. G. Arenas, Alexandroff spaces, *Acta Math. Univ. Comenian.* (N.S.) **68**(1) (1999), 17–25.

[2] J. Bang-Jensen and G. Gutin, *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*, Springer-Verlag, 2007.

[3] Y. Boudabbous, J. Dammak and P. Ille, Indecomposability and duality of tournaments, *Discrete Math.* **223**(1-3) (2000), 55–82.

[4] J. Dammak and R. Salem, Graphic topology on tournaments, *Adv. Pure Appl. Math.* **9**(4) (2018), 279–285.

[5] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[6] A. El-Fattah El-Atik, M. E. Abd El-Monsef and E. I. Lashin, On finite T_0 topological spaces, in *Proceedings of the Ninth Prague Topological Symposium, Topology Atlas,* Prague (2001) 75–90.

[7] T. Gallai, Transitiv orientierbare Graphen, *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.* **18** (1967), 25–66.

[8] F. Harary and L. Moser, The theory of round robin tournaments, *Amer. Math. Monthly*, **73**(3) (1966), 231–246.

[9] P. Ille, Graphes indécomposables infinis, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **318** (1994), 499–503.

[10] S. M. Jafarian Amiri, A. Jafarzadeh and H. Khatibzadehan, Alexandroff topology on graphs, *Bull. Iranian Math. Soc.* **39**(4) (2013), 647–662.

[11] J. P. May, *Finite topological spaces*, Notes, University of Chicago, 2008.
`http://math.uchicago.edu/~may/MISC/FiniteSpaces.pdf`

[12] J. W. Moon, *Topics on Tournament*, University of Alberta, 1968.

[13] J. R. Munkres, *Topology: a first course.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[14] T. Speer, *A short study of Alexandroff spaces*, preprint, 2007.
`https://arxiv.org/abs/0708.2136`