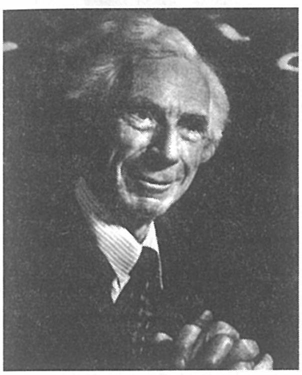
¿ANTINOMIA O TRIVIALIDAD? LA PARADOJA DE RUSSELL

José M. Ferreirós

Mil veces se ha escrito que la célebre disputa sobre fundamentos, a comienzos del siglo XX, surgió del descubrimiento de las paradojas de la lógica y la teoría de conjuntos. Historiadores recientes han mostrado cómo esta idea es sólo una media verdad: más importantes fueron las disputas sobre la metodología abstracta frente a la constructiva, que habían empezado ya en el XIX. Pero, en todo caso, las paradojas han afectado enormemente al estudio de los fundamentos de la matemática y a la concepción de las relaciones entre lógica y matemáticas.



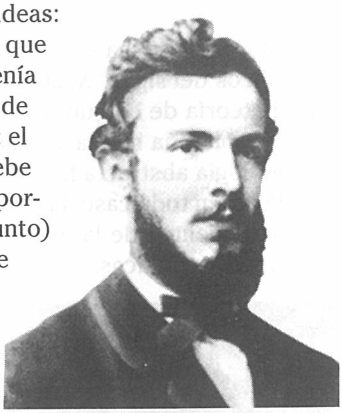
Bertrand Russell

Entre todas las paradojas, la de Russell destaca por su carácter simple y directo. La mayoría de los conjuntos no pertenecen a sí mismos: N no es un número natural, ni R un número real; pero el conjunto universal, si existe, debería ser uno de sus propios elementos. Llamemos $\boldsymbol{B}$ al conjunto de *todos* los conjuntos que no pertenecen a sí mismos, $\boldsymbol{B} = \{x : x \notin x\}$; el mismo $\boldsymbol{B}$ es un conjunto y, dada su definición, $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{B}$ si y sólo si $\boldsymbol{B} \notin \boldsymbol{B}$. Lo llamativo del caso es que la 10
paradoja sólo requiere tres nociones aparentemente muy simples: las de conjunto, pertenencia y negación, junto con los principios lógicos fundamentales de tercio excluso y no-contradicción. La historia de esta contradicción tiene el valor añadido de mostrar cómo, en el desarrollo matemático, una paradoja puede dar lugar a un teorema, y lo extraño llegar a parecer trivial.

Para entender cómo surgió la cuestión, empezaremos con el método de diagonalización —tan importante en lógica— que Georg Cantor (1845-1918) encontró hacia 1890, y que se emplea al demostrar que R no es un conjunto enumerable. Con dicho método Cantor consiguió demostrar que, dado un conjunto C, existe otro de mayor cardinalidad: el conjunto de las funciones $\{f : C \rightarrow \{0,1\}\}$. Este resultado es lo que hoy llamamos el *teorema de Cantor*. Se publicó en un articulito aparecido en 1892, pero curiosamente Cantor no lo integró en su obra magna de los años 1890. La razón parece haber sido que, para él, un conjunto de funciones era algo bien distinto de un conjunto de, pongamos, números. Por ello, su importante teorema no le parecía un resultado elemental de la teoría de conjuntos.

El joven aristócrata inglés Bertrand Russell (1872–1970) se ocupó en estudiar la obra de Cantor hacia 1900. Fue él quien puso de relieve la gran importancia del teorema de Cantor, al reformularlo en la versión moderna: dado un conjunto C, el conjunto potencia $\wp(C)$ tiene mayor cardinalidad (las $f : C \rightarrow \{0,1\}$ se conciben como funciones características de los subconjuntos de C). Esto sucedía en la obra *Los principios de la matemática* (1903), que discutía también la paradoja de Russell, entre otras. El inglés llegó a su descubrimiento precisamente a través del teorema de Cantor.

La primera reacción de Russell al leer a Cantor había sido de profunda desconfianza hacia sus ideas: buscaba contradicciones por todas partes, cosa que no resulta extraña si tenemos en cuenta que venía de ser un hegeliano convencido. El teorema de Cantor contradecía una idea ingenua de Russell: el conjunto de todas las cosas, llamémosle V, debe tener mayor cardinalidad que cualquier otro, porque todo elemento de un conjunto (y todo conjunto) es una cosa. De ahí se sigue que $\wp(V)$ ha de estar incluido en V, en cuyo caso el cardinal de V debía ser igual o mayor, y el resultado cantoriano tenía que ser erróneo. Así que Russell sospechó la presencia de un error grave en la demostración de Cantor. La diferencia entre él y un hegeliano normal es que procedió a analizar en detalle la demostración, lo que le llevó a considerar el conjunto diagonal en el caso particular de $\wp(V)$. Éste es precisamente el conjunto **B** de su paradoja.



Georg Cantor

10 Aunque había encontrado la contradicción en 1901, transcurrió todo un año antes de que Russell se animara a escribir a sus dos grandes maestros en lógica, Peano y Frege. No conocemos cuál fue la respuesta de Peano, pero sí la de Gottlob Frege (1848–1925). Como dijo Russell hacia el final de su vida:

> Cuando pienso en actos de gracia e integridad, me doy cuenta que no conozco ninguno comparable con la dedicación de Frege a la verdad. Estaba Frege dando cima a la obra de toda su vida, la mayor parte de su trabajo había sido ignorado en beneficio de hombres infinitamente menos competentes que él, su segundo volumen estaba a punto de ser publicado, y, al darse cuenta de que su supuesto fundamental era erróneo, reaccionó con placer intelectual, reprimiendo todo sentimiento de decepción personal. Era algo casi sobrehumano y un índice de aquello de lo que los hombres son capaces cuando están dedicados al trabajo creador y al conocimiento, y no al crudo afán de dominar y hacerse famosos.

La fuente de los problemas estaba en un postulado que implícitamente se venía tomando como base para la teoría de conjuntos: el llamado *principio de comprehensión*, que expresado en castizo rezaría: dame una propiedad y te daré un conjunto; esto es, dado $P(x)$, existe el conjunto $\{x : P(x)\}$. Principio que se encuentra en numerosos autores del siglo XIX, desde Bolzano y Riemann hacia 1850, hasta Peano y Frege. En todos los casos —incluyendo el del riguroso Frege—, el principio se dejó sin una formulación explícita como axioma. Como suele pasar en la historia, fue la refutación de dicho postulado lo que hizo que los matemáticos tomaran conciencia de su carácter de hipótesis básica hasta la fecha. Y en efecto, lo que hizo Russell fue refutarlo tomando $P(x) = (x \notin x)$ y deduciendo la contradicción.

El *principio de comprehensión* surgió de la lógica tradicional de corte aristotélico. Era costumbre asociar a cada concepto una clase de objetos correspondientes (la clase de los mortales, la clase de las rectas) y esta práctica, elevada a principio, originó el postulado. La relación directa entre éste y la noción de concepto hizo pensar a muchos (Dedekind, Frege y Russell entre ellos) que la idea de conjunto pertenecía a la lógica elemental. Esto arrojaba una luz muy peculiar sobre el trabajo de Cantor y sobre la reformulación conjuntista del álgebra y el análisis, desarrollada por autores como Riemann, Dedekind, Peano y Hilbert. Las nuevas tendencias abstractas sugerían que la matemática no es sino una lógica altamente desarrollada, y así nació el logicismo.

Al invalidar el *principio de comprehensión*, la contradicción russelliana echó por tierra lo que se ha llamado la teoría *ingenua* de conjuntos. En *Los principios de la matemática*, Russell decía que su contradicción "surge directamente del sentido común y sólo puede resolverse abandonando algún supuesto del sentido común". Por este tipo de motivos se empezó a hablar de las paradojas como *antinomias*, palabra que sugiere un estatus de dificultad conceptual inevitable. Pero la paradoja no invalidaba la teoría de conjuntos, como ya había visto Cantor, quien sin embargo no disponía de una teoría rigurosa que ofrecer como alternativa a la de sus contemporáneos. Autores posteriores acabaron pensando simplemente que la teoría de conjuntos va más allá de la lógica, siendo sus postulados propiamente matemáticos.

Así, tras el revuelo causado por las publicaciones de Russell y de Frege en 1903, llegaron las propuestas de solución, más o menos tentativas, seleccionando hipótesis adecuadas a los resultados deseados, e incluso, a veces, proponiendo postulados *ad hoc*. Las principales fueron la complicada pero filosófica teoría de tipos de Russell —en la que no podemos entrar—, y la elegante axiomatización de Zermelo.

Ernst Zermelo (1871–1953) había encontrado independientemente la paradoja de Russell hacia 1900, pero parece que no la consideró una amenaza grave. El discípulo de Hilbert vio con toda claridad que el origen de las "antinomias" estaba en el principio irrestricto de comprehensión. Su propuesta en 1908 fue adoptar el *axioma de separación* o subconjuntos, versión *relativizada* de *comprehensión*, donde se afirma que dado $P(x)$ *y un conjunto* C, existe el subconjunto $\{x: x \in C \text{ y } P(x)\}$. Sobre esta base, Zermelo podía ahora demostrar que no hay un conjunto V de todos los conjuntos: el supuesto de su existencia da lugar a un absurdo, pues (por separación) V tendría como subconjunto al contradictorio $\boldsymbol{B}$.

El mencionado axioma, junto con otros seis entre los que se incluía el del Infinito y el de Elección, constituyó el justamente célebre sistema de Zermelo. Esta axiomatización fue atrayendo cada vez más atención, y en los años 1920 fue completada al emplear como base para la misma la lógica de primer orden. Además, se introdujeron dos nuevos postulados, de los que aquí nos interesa el de *fundación*. Este axioma elaboraba una idea del suizo Mirimanoff, retomada luego por Skolem y Von Neumann. En un trabajo de 1917 sobre las paradojas, Mirimanoff señalaba cómo en los "conjuntos normales" no existen cadenas de pertenencia descendentes infinitas, del tipo $\ldots \in x_2 \in x_1 \in x_0 \in C$. Si postulamos que todos los conjuntos son "normales", ninguno puede pertenecer a sí mismo, pues entonces tendríamos la cadena $\ldots \in C \in C \in C$. A la luz del axioma de fundación, la grave contradicción o antinomia de Russell se contrae hasta reducirse a una simple banalidad.

El primero en adoptar Fundación explícitamente como postulado del sistema fue, de nuevo, Zermelo en 1930. El axioma permitía desarrollar cualquier modelo del sistema en forma de la llamada jerarquía cumulativa, clarificando el estudio metateórico de la teoría de conjuntos. Más aun, la jerarquía cumulativa sugería una justificación intuitiva de los axiomas de Zermelo–Fraenkel, tal como propuso Gödel a comienzos de los años 1930: es la llamada *concepción iterativa*, que se basa en la idea de *conjunto* de elementos "preexistentes".

Sin duda, una vez familiarizados con la concepción iterativa y demás, la contradicción de Russell se nos aparece como resultado esperable de un enfoque sumamente ingenuo y burdo de la teoría de conjuntos. Pero la historia nos enseña a desconfiar del *hindsight*, de la visión retrospectiva, y ya conocemos la tendencia de los matemáticos a calificar de "trivial" cualquier cosa —dentro de su especialidad, claro— que tenga unas décadas de antigüedad. La concepción llamada ingenua no tenía nada de tal: era el producto sofisticado de un complejo de ideas bien establecido en su época, y que no puede considerarse en absoluto como inevitable o "natural". Hemos de agradecer a la obra de Russell el que mostrara de manera muy explícita los problemas que escondía esa concepción. Puede decirse que, en último análisis, la publicación de su paradoja en 1903 fue la sentencia de muerte para el logicismo como aspirante serio a fundamentar la matemática. Sin embargo, el propio Russell —a diferencia del quincuagenario Frege— no logró aceptar esta conclusión, y permaneció el resto de su tiempo anclado en las convicciones que había adquirido en sus primeros 30 años de vida.

Bibliografía

Ferreirós, José: *El nacimiento de la teoría de conjuntos*. Ediciones U.A.M., Madrid, 1993.

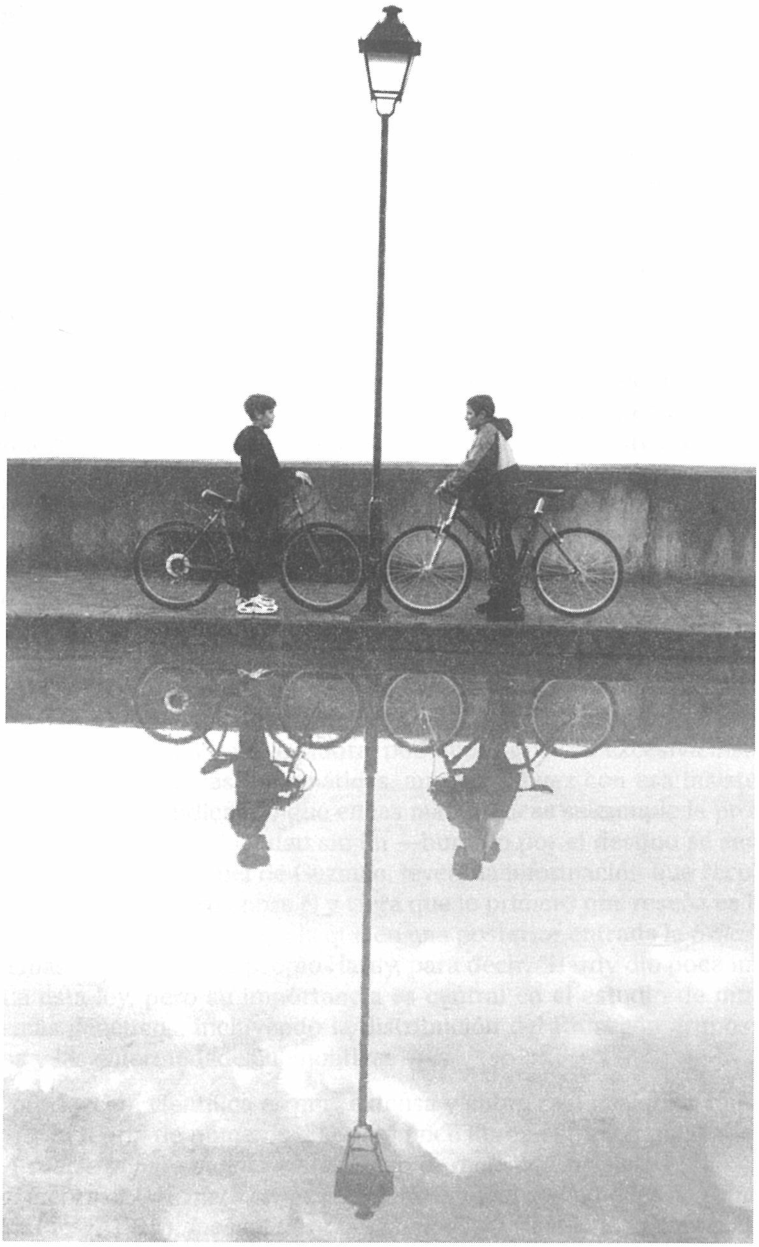
Grattan-Guinness, Ivor: *Del cálculo a la teoría de conjuntos*. Alianza, Madrid, 1984.

Mosterín, Jesús: *Los lógicos*. Espasa-Calpe, Madrid, 2000.

Russell, Bertrand: *Los principios de la matemática* [1903]. Espasa-Calpe, Madrid, 1967.

— *La evolución de mi pensamiento filosófico*. Alianza, Madrid, 1976.

— *Collected Papers*, Vol. 3. ed. G. H. Moore. Routledge, Londres, 1993.



Simetrías
Luis Balbuena