

Trabajo Fin de Máster

Máster en Ingeniería Industrial

Desarrollo de un modelo multicuerpo no holónimo de patinete eléctrico con conductor y modelo de ruedas toroidales

Autor: Eduardo Arroyo Martín

Tutor: Daniel García Vallejo,
Alfonso García-Agúndez Blanco

Dpto. de Ingeniería Mecánica y Fabricación
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020



Trabajo Fin de Máster
Máster en Ingeniería Industrial

Desarrollo de un modelo multicuerpo no holónimo de patinete eléctrico con conductor y modelo de ruedas toroidales

Autor:

Eduardo Arroyo Martín

Tutor:

Daniel García Vallejo

Profesor titular

Alfonso García-Agúndez Blanco

Dpto. de Ingeniería Mecánica y Fabricación

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020

Trabajo Fin de Máster: Desarrollo de un modelo multicuerpo no holónimo de patinete eléctrico con conductor y modelo de ruedas toroidales

Autor: Eduardo Arroyo Martín

Tutor: Daniel García Vallejo, Alfonso
García-Agúndez Blanco

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2020

El Secretario del Tribunal

A mi familia
A mis maestros

Agradecimientos

Después de un intenso período de cinco meses, hoy es el día: escribo este apartado de agradecimientos para finalizar mi trabajo de fin de máster. Ha sido un período de aprendizaje intenso, no solo en el campo científico, sino también a nivel personal. Escribir este trabajo ha tenido un gran impacto en mí y es por eso que me gustaría agradecer a todas aquellas personas que me han ayudado y apoyado durante este proceso.

Eduardo Arroyo Martín

Sevilla, 2020

Recientemente estamos asistiendo a un “boom” de los vehículos eléctricos de un solo pasajero para micromovilidad urbana, y cada vez son más las empresas que se incorporan a este negocio. Sin embargo, este tipo de medios de transporte no está sujeto a normativas en muchos países, lo que genera incertidumbre y desprotección de los ciudadanos, tanto usuarios de estos vehículos como posibles terceros que puedan estar involucrados en un accidente. Este tipo de vehículos unipersonales son generalmente basados en el uso de ruedas de pequeño diámetro como elemento rodante. El modelado y análisis computacional de sus características dinámicas, así como el estudio de su estabilidad y, por tanto, de los parámetros físicos que influyen decisivamente en ella, son objeto de este proyecto.

Agradecimientos	v
Resumen	vi
Índice	VIII
Índice de Tablas	viii
Índice de Figuras	ix
1 Introducción	1
2 Herramientas Matemáticas	3
2.1. <i>Cinemática del Sólido Rígido</i>	3
2.2. <i>Ecuaciones De Newton-Euler</i>	4
2.3. <i>Ecuaciones De Movimiento</i>	5
3 Modelado del Patinete	6
3.1. <i>Cinemática del patinete</i>	6
3.2. <i>Cálculo de parámetros</i>	9
3.2.1. <i>Humano (sólido 8)</i>	11
3.3. <i>Ecuaciones de movimiento del patinete</i>	13
4 Simulación y Resultados	19
4.1. <i>Patinete a v constante</i>	20
4.2. <i>Aceleración del motor eléctrico</i>	25
4.3. <i>Maniobra de frenado</i>	29
4.4. <i>Oscilación del humano respecto al eje y_8</i>	32
4.5. <i>Oscilación del humano respecto al eje x_8</i>	38
5 Conclusiones	40
Referencias	41
Anexo I. Códigos de MATLAB	42

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3-1. Parámetros de rigidez y de amortiguación

17

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1. Componentes del patinete eléctrico	1
Figura 3-1. Modelo multicuerpo del patinete eléctrico: número de cuerpos y coordenadas generalizadas	6
Figura 3-2. Parámetros geométricos del modelo multicuerpo del patinete eléctrico	8
Figura 3-3. Lista de los parámetros principales del modelo multicuerpo del patinete eléctrico y sus valores numéricos	10
Figura 3-4. Modelo mecánico del cuerpo humano con parámetros geométricos	11
Figura 3-5. Masas, longitudes y tensores de inercia de los segmentos del modelo	12
Figura 3-6. Geometría de la rueda y el neumático	13
Figura 3-7. Giros ξ y η	14
Figura 3-8. Vista lateral de la rueda toroidal	15
Figura 3-9. Posición absoluta de los vectores de la rueda toroidal	16
Figura 4-1. Restricciones holónomas a lo largo del tiempo	21
Figura 4-2. Restricciones no holónomas a lo largo del tiempo	21
Figura 4-3. x_2 en patinete a v constante	22
Figura 4-4. \dot{x}_2 en patinete a v constante	22
Figura 4-5. z_2 en patinete a v constante	23
Figura 4-6. ϕ_2 en patinete a v constante	23
Figura 4-7. δ en patinete a v constante	24
Figura 4-8. ψ_2 en patinete a v constante	24
Figura 4-9. θ_{62} en patinete a v constante	25
Figura 4-10. S_{43} en patinete a v constante	25
Figura 4-11. x_2 en aceleración del motor eléctrico	26
Figura 4-12. \dot{x}_2 en aceleración del motor eléctrico	26
Figura 4-13. δ en aceleración del motor eléctrico	27
Figura 4-14. ψ_2 en aceleración del motor eléctrico	27
Figura 4-15. z_2 en aceleración del motor eléctrico	28
Figura 4-16. θ_{62} en aceleración del motor eléctrico	28
Figura 4-17. S_{43} en aceleración del motor eléctrico	29
Figura 4-18. x_2 en maniobra de frenado	30
Figura 4-19. \dot{x}_2 en maniobra de frenado	30
Figura 4-20. z_2 en maniobra de frenado	31
Figura 4-21. θ_{62} en maniobra de frenado	31
Figura 4-22. S_{43} en maniobra de frenado	32
Figura 4-23. θ_{82} en oscilación del humano respecto al eje $y_8(1)$.	33

Figura 4-24. z_2 en oscilación del humano respecto al eje $y_8(1)$.	34
Figura 4-25. θ_{62} en oscilación del humano respecto al eje $y_8(1)$.	34
Figura 4-26. S_{43} en oscilación del humano respecto al eje $y_8(1)$.	35
Figura 4-27. λ_1 en oscilación del humano respecto al eje $y_8(1)$.	35
Figura 4-28. λ_2 en oscilación del humano respecto al eje $y_8(1)$.	36
Figura 4-29. z_2 en oscilación del humano respecto al eje $y_8(2)$.	36
Figura 4-30. θ_{62} en oscilación del humano respecto al eje $y_8(2)$.	37
Figura 4-31. S_{43} en oscilación del humano respecto al eje $y_8(2)$.	37
Figura 4-32. z_2 en oscilación del humano respecto al eje $x_8(1)$.	38
Figura 4-33. z_2 en oscilación del humano respecto al eje $x_8(2)$.	39

1 INTRODUCCIÓN

El mecanismo de la bicicleta, así como otros mecanismos como el del waveboard [1], han sido estudiados para poder optimizarlos y sacarle el máximo rendimiento. Al haber muchos estudios sobre el mecanismo de la bicicleta, se pueden coger los resultados teóricos de estos para tener un buen punto de partida para poder analizar estos tipos de mecanismos multicuerpos. Sin embargo, los parámetros de la bicicleta y el patinete son muy diferentes, el humano en la bicicleta va sentado sobre ella mientras que en el patinete va de pie encima del mismo. Además, las bicicletas tienen ruedas grandes con neumáticos que generan fuerzas giroscópicas y los patinetes tienen solo pequeñas ruedas rígidas.

Este proyecto se ha basado en un primer estudio sobre el patinete eléctrico tomado como punto de referencia [2], a partir del cual se han cogido ciertos parámetros para el modelado del patinete. Los componentes mecánicos de un patinete son el vástago con motor de cubo direccional y un manillar con pantalla, acelerador y freno electrónicos y reposapiés con guardabarros trasero.

El modo de funcionamiento de este vehículo es posar uno de los pies en el reposapiés mientras se patea el otro pie contra el suelo hasta llegar a unos 3 Km/h. Posteriormente, hay que mantener el equilibrio y presionar el acelerador automático con la mano derecha hasta poder llegar a una velocidad máxima de 25 Km/h. Para la maniobra de frenado se puede pulsar el freno electrónico con la mano izquierda y el guardabarros trasero con un pie al mismo tiempo.

Plegar y transportar el patinete son características importantes para la micromovilidad urbana. Se consigue pisando el pedal plegable mientras se empuja el manillar hacia adelante ligeramente. Luego dobla el manillar hacia abajo hasta que mire hacia el guardabarros trasero.

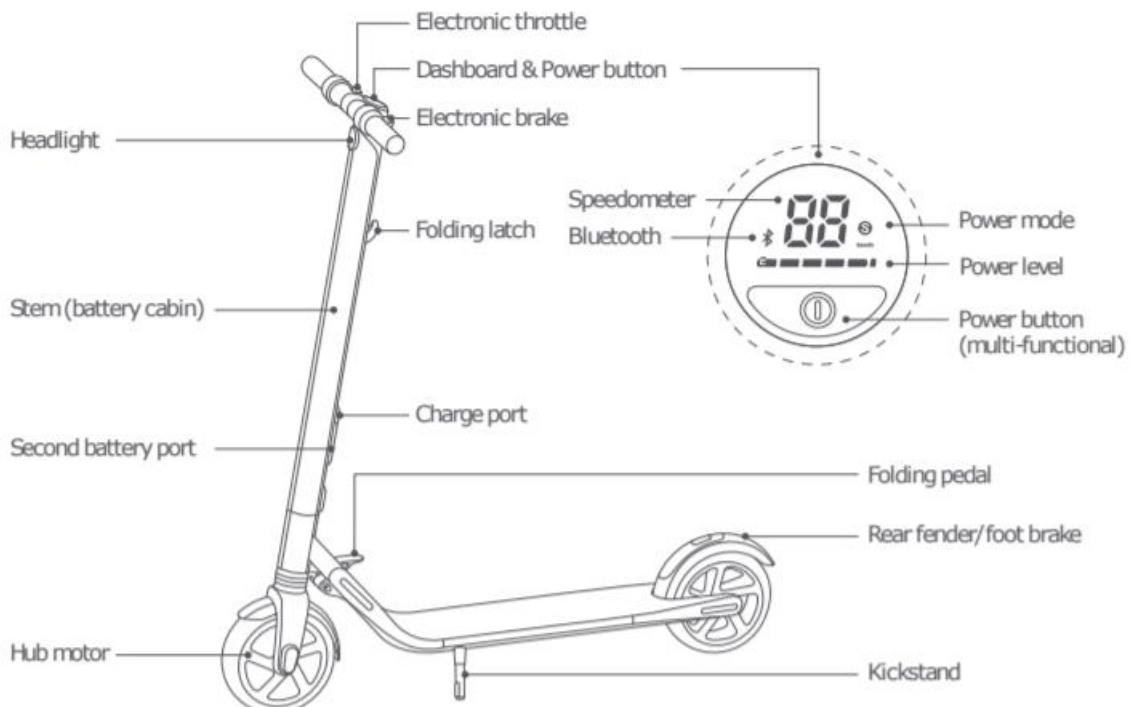


Figura 1-1. Componentes del patinete eléctrico

El conocimiento de cómo los principales parámetros del modelo afectan su estabilidad y su maniobrabilidad permitirá modificaciones de diseño que pueden conducir a vehículos más seguros y se traducirá en la reducción de accidentes en la movilidad urbana a través de estos vehículos. Es curioso conocer el comportamiento de un aparato utilizado para la movilidad y el ocio, pero del que poca gente sabe su complejo funcionamiento. El propósito de este proyecto es la simulación cinemática y dinámica de este mecanismo bajo

acciones que un humano tendría que hacer para el correcto movimiento de este. Se implementará un programa en MATLAB para modelar el mecanismo mediante herramientas matemáticas, para posteriormente integrar sus ecuaciones de movimiento y así obtener el valor de todos sus grados de libertad a lo largo del tiempo. Con esto conseguiremos comprobar el grado de importancia de todos los parámetros físicos que intervienen en el movimiento del mecanismo.

2 HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

2.1 Cinemática Del Sólido Rígido

Para el modelado del patinete, se necesitarán una serie de herramientas matemáticas, del ámbito de cinemática y dinámica de máquinas [3], que ayuden a conseguir las ecuaciones de movimiento del mecanismo (Ecuaciones de Newton-Euler + ecuaciones de restricción).

El primer paso para conseguir estas ecuaciones es entender la cinemática del sólido rígido, conociendo la orientación de este en el espacio y sus respectivos parámetros cinemáticos.

Para conocer el vector posición de un punto del mecanismo en coordenadas globales de referencia utilizaremos la siguiente relación:

$$\text{Coordenadas: } q^i = [r_x^i \ r_y^i \ r_z^i \ \alpha^i \beta^i \gamma^i] = [\vec{r}^i \alpha^i \beta^i \gamma^i]$$

$$\text{Posición de P: } \vec{r}_P^i = \vec{r}^i + A^i \vec{u}_P^i$$

Siendo la matriz $A^i = A_{\alpha^i} A_{\beta^i} A_{\gamma^i}$, y siendo estas las matrices de giro de cada uno de los giros asociados al sólido i. El vector \vec{u}_P^i es la distancia entre el origen y el punto a definir en coordenadas locales del sólido i.

Así como se pueden obtener los vectores posición de cualquier punto del sólido, derivando las relaciones antes vistas, podremos obtener los vectores velocidad y aceleración de cualquier punto del sólido.

Se calcularán las velocidades y aceleraciones de un punto del sólido rígido a través del jacobiano de su vector posición:

$$V_P^i = H_P^i \dot{q}^i$$

$$a_P^i = H_P^i \ddot{q}^i + h_P^i \dot{q}^i$$

La matriz H_P^i es el jacobiano de la posición, es decir las derivadas parciales de las tres componentes de la posición respecto de todas las coordenadas del sistema, y la matriz h_P^i es la derivada respecto al tiempo de la matriz H_P^i . Estas matrices tienen dimensiones de $3 \times n$, siendo n el número de coordenadas del mecanismo.

Como ya se ha comentado, cada sólido del mecanismo lleva asociado una matriz de giro que relaciona el sistema de referencia local del mismo con el sistema de referencia global del mecanismo. A partir de estas matrices podemos calcular las velocidades angulares y aceleraciones angulares de cada uno de los sólidos en función de las coordenadas del sistema:

$$\tilde{w}_i = \dot{A}_i A_i^T \quad \tilde{w}_i = A_i^T \dot{A}_i$$

Siendo \tilde{w}_i y \tilde{w}_i las matrices antisimétricas de la velocidad angular del sólido i, en coordenadas globales y coordenadas locales, respectivamente.

$$\tilde{w} = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix}$$

Una vez calculadas las velocidades angulares de los sólidos, podemos calcular las matrices \bar{G} de los sólidos (muy importantes para la posterior formación de las ecuaciones de Newton-Euler), y a partir de la derivada temporal de estas, se calcularán las aceleraciones angulares de los sólidos.

$$\bar{w}_i = \begin{bmatrix} \bar{w}_{x_i} \\ \bar{w}_{y_i} \\ \bar{w}_{z_i} \end{bmatrix} = \bar{G}_i \dot{q}, \text{ siendo } \bar{G}_i \text{ el jacobiano de la velocidad angular en locales respecto a las coordenadas del}$$

sistema derivadas en el tiempo: $\bar{G}_i = \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \dot{q}}$

Se calcularán las aceleraciones angulares de la siguiente manera:

$$\bar{\alpha}_i = \bar{G}_i \ddot{q} + \bar{g}_i \dot{q}, \text{ siendo } \bar{g}_i \text{ la derivada temporal de } \bar{G}_i \longrightarrow \bar{g}_i = \dot{\bar{G}}_i$$

Tanto \bar{G}_i , como \bar{g}_i , tendrán dimensiones de 3Xn.

2.2 Ecuaciones De Newton-Euler

Una vez comprendida la cinemática del sólido rígido, nos centraremos en la formación de las ecuaciones de Newton-Euler. Estas son ecuaciones vectoriales independientes del sistema de referencia al que se refieren y las cuales representan las ecuaciones de equilibrio del mecanismo en cuestión.

$$\begin{bmatrix} m^i 1 & 0 \\ 0 & \bar{I}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_G^i \\ \bar{\alpha}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^i \\ \bar{M}^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{w}^i x \bar{I}^i \bar{w}^i \end{bmatrix}, i = 2, 3, 4 \dots nb$$

$$\begin{bmatrix} m^2 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & m^{nb} 1 & & & \\ & & & \bar{I}^2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \bar{I}^{nb} \end{bmatrix} = \hat{M} ; \quad \begin{bmatrix} F^2 \\ \vdots \\ F^{nb} \\ \bar{M}^2 \\ \vdots \\ \bar{M}^{nb} \end{bmatrix} = \hat{Q} ; \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\bar{w}^2 x \bar{I}^2 \bar{w}^2 \\ \vdots \\ -\bar{w}^{nb} x \bar{I}^{nb} \bar{w}^{nb} \end{bmatrix} = \hat{Q}_v$$

$$\hat{M} \begin{bmatrix} a_G^2 \\ \vdots \\ a_G^{nb} \\ \alpha_G^2 \\ \vdots \\ \alpha_G^{nb} \end{bmatrix} = \hat{Q} + \hat{Q}_v$$

La matriz \hat{M} contiene las matrices de masas y de tensores de inercia locales para cada sólido, por lo que sus dimensiones son de 6nbX6nb, siendo nb el número de sólidos del mecanismo. Esta es multiplicada por el vector que contiene la aceleración del centro de gravedad y la aceleración angular, según el sistema de referencia local, para cada sólido del mecanismo. En el otro miembro de la igualdad tenemos la matriz \hat{Q} , que representa las fuerzas aplicadas y de reacción de cada sólido según el sistema de referencia global y los momentos aplicados y de reacción de cada sólido según los sistemas de referencias locales, por lo que tendrá una dimensión de 6nbX1. También nos encontramos fuerzas centrífugas y de Coriolis, con otros momentos aplicados localmente a cada sólido del mecanismo.

Aunque estas ecuaciones determinan la dinámica de los sólidos que forman una máquina, se quiere expresar estas ecuaciones en función de las coordenadas del mecanismo. Para ello se utilizarán las ecuaciones cinemáticas con jacobianos que permiten escribir las ecuaciones de Newton-Euler en términos de las coordenadas del mecanismo y sus derivadas. Con esto conseguiremos que estas ecuaciones dependan de en qué posición se encuentre el mecanismo.

Entonces, las aceleraciones de los sólidos se calcularían de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} a_G^2 \\ \vdots \\ a_G^{nb} \\ \bar{\alpha}^2 \\ \vdots \\ \bar{\alpha}^{nb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^2 \\ \vdots \\ H^{nb} \\ \bar{G}^2 \\ \vdots \\ \bar{G}^{nb} \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} h^2 \\ \vdots \\ h^{nb} \\ \bar{g}^2 \\ \vdots \\ \bar{g}^{nb} \end{bmatrix} \dot{q} = L\ddot{q} + l\dot{q}$$

Por lo que los términos de las ecuaciones de Newton-Euler, se multiplicarán por las matrices L y l para que estos dependan de las coordenadas del sistema. La nueva estructura de estas ecuaciones será:

$$M\ddot{q} = Q + Q_v$$

$$M = L^T \widehat{M} L \quad ; \quad Q = L^T \widehat{Q} \quad ; \quad Q_v = L^T (\widehat{Q}_v - \widehat{M} l \dot{q})$$

Las dimensiones de las matrices L y l son de $6nb \times n$. Por lo que la matriz M será de dimensiones $n \times n$ y las matrices Q y Q_v de dimensiones $n \times 1$.

2.3 Ecuaciones De Movimiento

Las ecuaciones de equilibrio tienen que ser aumentadas con las ecuaciones de restricción para obtener las ecuaciones de movimiento.

Cada mecanismo en movimiento conlleva una serie de ecuaciones de restricción, con una fuerza de reacción asociada a cada una de ellas. Las ecuaciones de restricción pueden ser holónomas o no-holónomas, según dependan de las derivadas de las coordenadas o no. Como en el patinete vamos a requerir de ambos tipos de restricciones, se explicará el caso de las ecuaciones de movimiento en el que tengamos los dos tipos de restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} C(q, t) = 0 \\ C(q, \dot{q}, t) = B(q)\dot{q} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{bmatrix} C_q \\ B \end{bmatrix} \dot{q} + \begin{bmatrix} C_t \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow D\dot{q} + E = 0$$

$$\begin{bmatrix} M & D^T \\ D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{apl} + Q_v \\ -\dot{D}\dot{q} - \dot{E} \end{bmatrix}$$

La matriz D tiene unas dimensiones de $m \times n$, siendo m el número de ecuaciones de restricción tanto holónomas como no-holónomas, y la matriz E tendrá unas dimensiones de $m \times 1$.

La matriz Q_{apl} ahora solo representan las fuerzas aplicadas a cada sólido, ya que las fuerzas de reacción vienen representadas por la multiplicación de D^T y λ . La matriz λ son los multiplicadores de Lagrange, que representan la fuerza que hay que ejercer para que se cumpla esa ecuación de restricción pero en sentido contrario, es decir $\lambda = -F$, siendo F la fuerza comentada anteriormente.

Si integráramos estas ecuaciones a lo largo de un tiempo determinado, obtendríamos las coordenadas del mecanismo y las fuerzas de reacción a lo largo de este tiempo. Pero experimentalmente se ha observado que al ser una integración de segundo grado, se crean ciertos errores en la integración que provocan que se dejen de cumplir las ecuaciones de restricción. Este problema se puede solucionar mediante el método de Baumgarte [4], en el que habría que añadir dos términos más a las ecuaciones de restricción, estando estos dos términos multiplicados cada uno por un coeficiente adimensional de valor ajustable para evitar los errores en la integración. Por lo que las ecuaciones de movimiento quedarían de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} M & D^T \\ D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{apl} + Q_v \\ -\dot{D}\dot{q} - \dot{E} - 2\alpha \begin{bmatrix} \dot{C}(\dot{q}, t) \\ C(q, \dot{q}, t) \end{bmatrix} - \beta^2 \begin{bmatrix} C(q, t) \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Siendo α y β los coeficientes adimensionales que se variarán según los requisitos de la integración.

3 MODELADO DEL PATINETE

En este apartado se aplicarán las herramientas matemáticas antes vistas al mecanismo del patinete, para obtener sus ecuaciones de movimiento.

3.1. Cinemática del patinete

Para modelar este mecanismo, primero lo orientaremos y lo modelaremos en el aire, para posteriormente mediante ecuaciones de restricción situarlo en el suelo. Nuestro mecanismo va a constar de 7 sólidos, el sólido 2 es el bastidor inferior donde se sitúa la persona, el sólido 3 es el vástago vertical donde va situada la batería de la patineta eléctrica. Los sólidos 5 y 7 son las ruedas delantera y trasera respectivamente. El sólido 6 corresponde a una suspensión rotacional que se situará entre el bastidor inferior y la rueda trasera, y el sólido 4 corresponde a una suspensión lineal que se situará entre el vástago vertical y la rueda delantera. Finalmente, el sólido 8 será el humano que irá montado encima del bastidor inferior y que controlará el patinete mediante el manillar del vástago vertical.

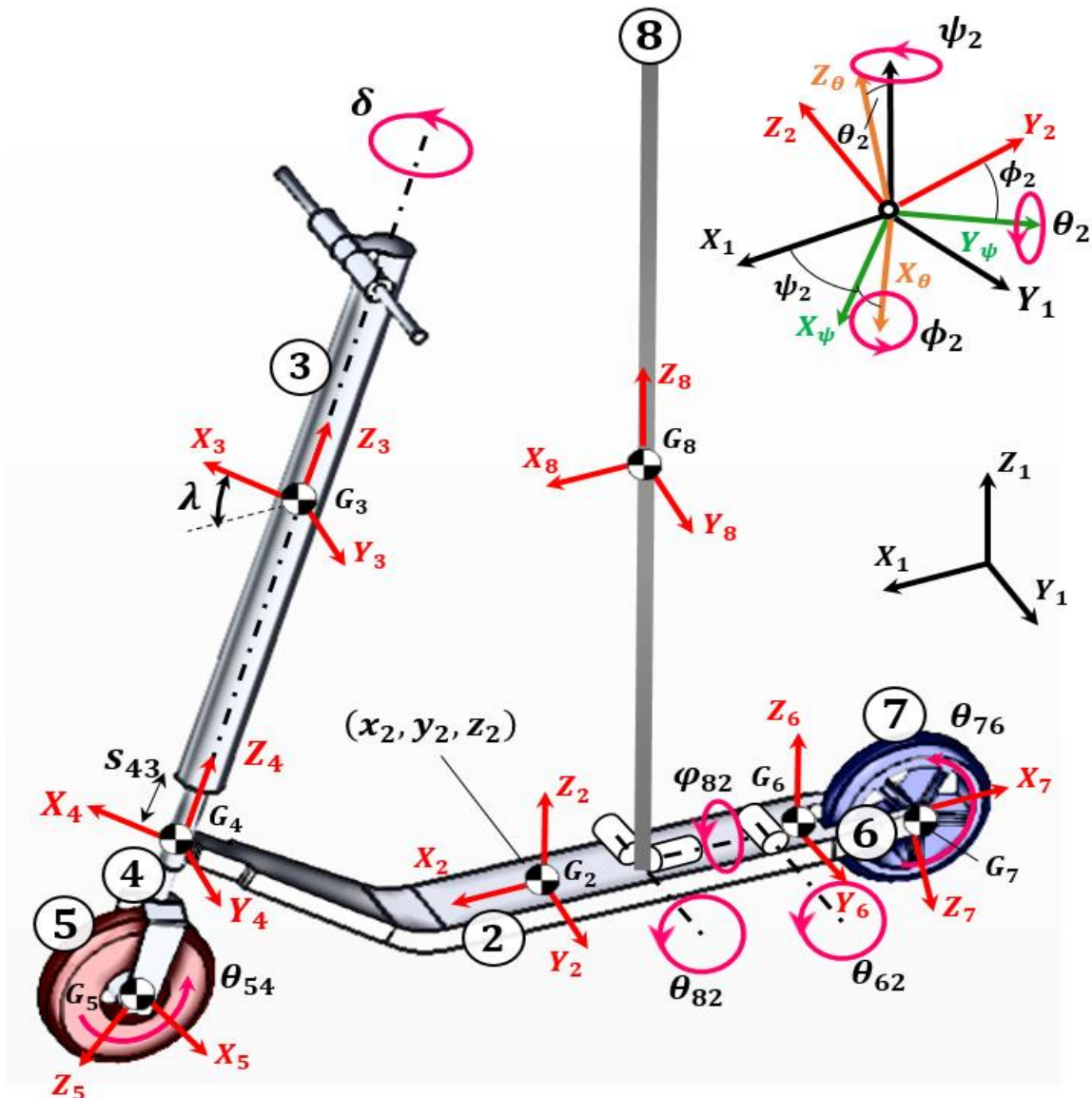


Figura 3-1. Modelo multicuerpo del patinete eléctrico: número de cuerpos y coordenadas generalizadas.

Para orientar el mecanismo en el espacio, se requerirán las 3 coordenadas del centro de gravedad del sólido 2 (x_2, y_2 y z_2) y 3 giros (ϕ_2, θ_2 y ψ_2) con los que orientaremos el sólido 2 en el aire. A partir de la posición del sólido 2 se obtendrán las posiciones del centro de gravedad del resto de sólidos mediante giros de los sistemas de referencia.

Los 3 giros de orientación del sólido 2 serán ángulos de Euler, es decir, el giro ϕ_2 será respecto al eje x, el giro θ_2 será respecto al eje y y el giro ψ_2 será respecto al eje z:

$$A_{\psi_2} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_2) & -\text{sen}(\psi_2) & 0 \\ \text{sen}(\psi_2) & \cos(\psi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{\theta_2} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & 0 & \text{sen}(\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta_2) & 0 & \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \quad A_{\phi_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_2) & -\text{sen}(\phi_2) \\ 0 & \text{sen}(\phi_2) & \cos(\phi_2) \end{bmatrix}$$

La matriz de giro del sólido 2 sería $A_2 = A_{\psi_2}A_{\theta_2}A_{\phi_2}$

Como se ve representado en la figura anterior, cada par de sólidos llevan asociados una serie de giros y traslaciones con las que se completará la cinemática del mecanismo:

- θ_{62} es el giro entre el bastidor inferior (sólido 2) y la suspensión rotacional (sólido 6). Este giro será respecto al eje y_2 .

$$A_{\theta_{62}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{62}) & 0 & \text{sen}(\theta_{62}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta_{62}) & 0 & \cos(\theta_{62}) \end{bmatrix}$$

La matriz de giro del sólido 6 será $A_6 = A_2A_{\theta_{62}}$.

- θ_{76} es el giro que representa el ángulo girado por la rueda trasera (sólido 7). Este giro será respecto al eje y_6 .

$$A_{\theta_{76}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{76}) & 0 & \text{sen}(\theta_{76}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta_{76}) & 0 & \cos(\theta_{76}) \end{bmatrix}$$

La matriz de giro del sólido 7 será $A_7 = A_6A_{\theta_{76}}$.

- Para llegar al sistema de referencia local del sólido 3, primero se necesitará una matriz de giro constante que tenga en cuenta la inclinación λ del vástago vertical y posteriormente el giro δ que representa el giro del manillar. El giro λ representado en la figura es en sentido negativo por lo que se hará un giro de valor $2\pi - \lambda$ respecto al eje y_2 . El giro δ será respecto al eje z_3 .

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} \cos(2\pi - \lambda) & 0 & \text{sen}(2\pi - \lambda) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(2\pi - \lambda) & 0 & \cos(2\pi - \lambda) \end{bmatrix} \quad A_\delta = \begin{bmatrix} \cos(\delta) & -\text{sen}(\delta) & 0 \\ \text{sen}(\delta) & \cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de giro del sólido 3 será $A_3 = A_7A_\lambda A_\delta$.

- S_{43} representa la traslación correspondiente a la suspensión lineal (sólido 4). Esta coordenada se verá involucrada cuando se definan los vectores de posición de cada uno de los sólidos. La matriz de giro del sólido 4 será igual a la matriz de giro que la del sólido 3 ya que entre este par de sólidos sólo existe

la dicha traslación ($A_4 = A_3$).

- θ_{54} es el giro que representa el ángulo girado por la rueda delantera (sólido 5). Este giro será respecto al eje y_4 .

$$A_{\theta_{54}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{54}) & 0 & \text{sen}(\theta_{54}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta_{54}) & 0 & \cos(\theta_{54}) \end{bmatrix}$$

La matriz de giro del sólido 5 será $A_5 = A_4 A_{\theta_{54}}$.

- Para el humano que va montado en el patinete (sólido 8) vamos a definir dos giros que van a representar la inclinación del mismo encima del patinete. Uno respecto al eje x y otro respecto al eje y , ya que definir un giro respecto al eje z no tiene sentido ya que el conductor de un patinete no hace giros sobre si mismo. Por lo que para el sólido 8 se tendrá el giro ϕ_{82} respecto al eje x_2 y el giro θ_{82} respecto al eje y_2 .

$$A_{\phi_{82}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_{82}) & -\text{sen}(\phi_{82}) \\ 0 & \text{sen}(\phi_{82}) & \cos(\phi_{82}) \end{bmatrix} \quad A_{\theta_{82}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{82}) & 0 & \text{sen}(\theta_{82}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta_{82}) & 0 & \cos(\theta_{82}) \end{bmatrix}$$

La matriz de giro del sólido 8 será $A_8 = A_2 A_{\phi_{82}} A_{\theta_{82}}$.

Una vez tenemos las matrices de giro de cada uno de los sólidos se calcularán las velocidades angulares locales, y a través de estas las matrices \bar{G} y \bar{g} de cada sólido mediante las herramientas matemáticas vistas en el apartado anterior.

Como se quiere obtener las matrices L y l del mecanismo para llegar a las ecuaciones de movimiento, se calcularán los vectores posición de cada uno de los sólidos, para posteriormente mediante jacobianos obtener las matrices H y h de estos.

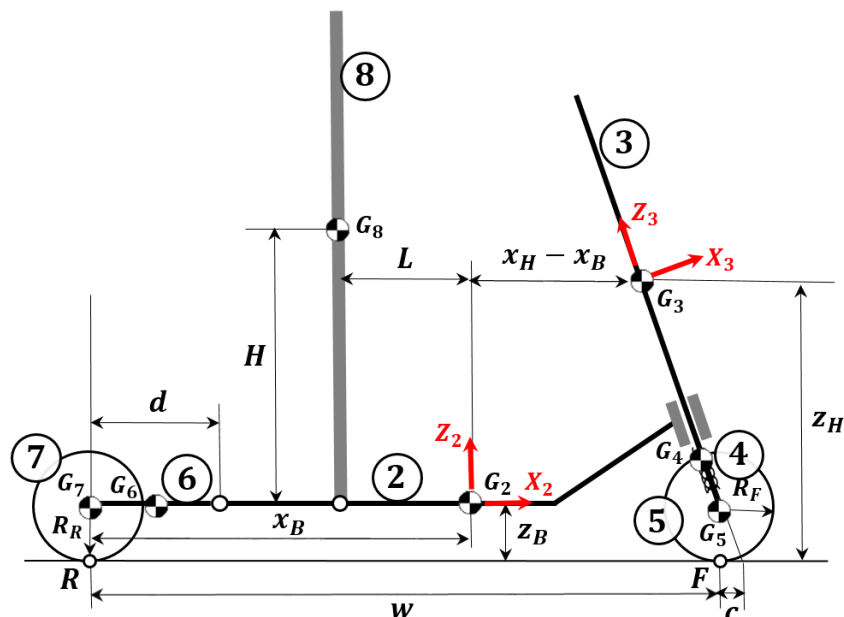


Figura 3-2. Parámetros geométricos del modelo multicuerpo del patinete eléctrico.

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{r}_6 = \mathbf{r}_2 + A_2 \begin{bmatrix} -(x_B - d) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + A_6 \begin{bmatrix} -d/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{r}_7 = \mathbf{r}_6 + A_6 \begin{bmatrix} -d/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_8 = \mathbf{r}_2 + A_2 \begin{bmatrix} -L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + A_8 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_2 + A_2 \begin{bmatrix} x_H - x_B \\ 0 \\ z_H - z_B \end{bmatrix}$$

Para obtener el vector de posición del sólido 4 se necesita la distancia entre el centro de gravedad del sólido 3 y el sólido 4 según el eje z_3 . Esta distancia se va a llamar z_{43} y se va a poder obtener mediante cálculos de geometría:

$$z_{43} = \sqrt{(w - x_H)^2 + (z_H - z_B)^2} - R_F ; \quad \mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_3 + A_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(z_{43} + S_{43}) \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{r}_5 = \mathbf{r}_4 + A_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R_F \end{bmatrix}$$

Cómo se dijo anteriormente, se puede observar que la coordenada S_{43} sólo se ve involucrada en la definición de los vectores de posición. Por lo que sólo se encontrará en las matrices H y h ya que es una coordenada de traslación. En cambio todas las demás coordenadas al ser coordenadas de rotación se ven involucradas tanto en los vectores de posición como en las matrices de giro, por lo que se encontrarán tanto en las matrices H y h como en las matrices \bar{G} y \bar{g} .

3.2. Cálculo de parámetros

El mecanismo del patinete ha sido modelado mediante un programa de diseño 3D para poder obtener los parámetros geométricos, máxicos e inerciales. Estos parámetros serán constantes a lo largo de toda la simulación. El programa puede aportar la mayoría de ellos pero algunos se van a tener que calcular o suponer. En este apartado se conseguirá el valor numérico de cada uno de estos parámetros ya sean aportados por el programa o calculados o supuestos.

Parameter	Symbol	Numerical value
Wheel base	w	0.925 m
Trail	c	0.034 m
Steer axis tilt	λ	$\frac{\pi}{10}$ rad (18°)
Horizontal distance R, G_2	x_B	0.528 m
Vertical distance R, G_2	z_B	0.149 m
Horizontal distance R, G_3	x_H	0.733 m
Vertical distance R, G_3	z_H	0.696 m
Length body 6	d	0.115 m
Body 2 (Platform)		
Mass	m_2	2.5 kg
Moment of inertia tensor	$\bar{I}_2 = \begin{pmatrix} \bar{I}_{2xx} & 0 & \bar{I}_{2xz} \\ 0 & \bar{I}_{2yy} & 0 \\ \bar{I}_{2xz} & 0 & \bar{I}_{2zz} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0.03 \\ 0 & 0.17 & 0 \\ 0.03 & 0 & 0.17 \end{pmatrix}$ kg m ²
Body 3 (Handlebar)		
Mass	m_3	8 kg
Moment of inertia tensor	$\bar{I}_3 = \begin{pmatrix} \bar{I}_{3xx} & 0 & \bar{I}_{3xz} \\ 0 & \bar{I}_{3yy} & 0 \\ \bar{I}_{3xz} & 0 & \bar{I}_{3zz} \end{pmatrix}$	
Body 7 (Rear wheel)		
Radius	R_R	0.096 m
Mass	m_7	0.65 kg
Moment of inertia tensor	$\bar{I}_7 = \begin{pmatrix} \bar{I}_{7xx} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{I}_{7yy} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I}_{7zz} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.002 & 0 & 0 \\ 0 & 0.004 & 0 \\ 0 & 0 & 0.002 \end{pmatrix}$ kg m ²
Body 5 (Front wheel)		
Radius	R_F	0.105 m
Mass	m_5	1.5 kg
Moment of inertia tensor	$\bar{I}_5 = \begin{pmatrix} \bar{I}_{5xx} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{I}_{5yy} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I}_{5zz} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.004 & 0 & 0 \\ 0 & 0.008 & 0 \\ 0 & 0 & 0.004 \end{pmatrix}$ kg m ²

Figura 3-3. Lista de los parámetros principales del modelo multicuerpo del patinete eléctrico y sus valores numéricos.

El programa ha aportado todos los parámetros geométricos excepto 3. El parámetro z_{43} que se calculará mediante la expresión vista en el apartado anterior, y los parámetros L y H correspondientes al sólido 8. El parámetro L se va a suponer ya que esto solo definirá el punto en el que va apoyado el humano, y el parámetro H se calculará posteriormente cuando estudiemos los parámetros del sólido 8.

$$z_{43} = 0,5164 \text{ m} \quad ; \quad L = 0,2 \text{ m (aprox.)}$$

Las masas de las suspensiones serán consideradas reduciendo las masas del sólido 2 y del sólido 3, ya que estas formarían parte de estos sólidos en el programa de diseño 3D. Suponiendo que $m_4 = m_6 = 0,5 \text{ Kg}$, la masa del sólido 2 pasará de 2,5 Kg a 2 Kg y la masa del sólido 3 pasará de 8 Kg a 7,5 Kg. Los tensores de inercia de los sólidos 4 y 6 se van a suponer, ya que estos sólidos son muy pequeños y su inercia será casi despreciable en comparación con el resto de sólidos.

$$\bar{I}_4 = \begin{bmatrix} 0,002 & 0 & 0,001 \\ 0 & 0,003 & 0 \\ 0,001 & 0 & 0,0005 \end{bmatrix} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \quad ; \quad \bar{I}_6 = \begin{bmatrix} 0,0005 & 0 & 0,001 \\ 0 & 0,003 & 0 \\ 0,001 & 0 & 0,003 \end{bmatrix} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

El programa de diseño en 3D ha aportado el tensor de inercia del sólido 3 respecto al sistema de referencia global $I_3 = \begin{bmatrix} 0,58 & 0 & 0,19 \\ 0 & 0,63 & 0 \\ 0,19 & 0 & 0,07 \end{bmatrix} \text{Kg} \cdot \text{m}^2$, por lo que habrá que realizar las operaciones que se muestran a continuación para obtener el tensor de inercia respecto al sistema de referencia local del sólido 3.

$$\bar{I}_{3_{xx}} = I_{3_{xx}} \cos^2(\lambda) + I_{3_{zz}} \sin^2(\lambda) - I_{3_{xz}} \sin(2\lambda)$$

$$\bar{I}_{3_{yy}} = I_{3_{yy}}$$

$$\bar{I}_{3_{zz}} = I_{3_{xx}} \sin^2(\lambda) + I_{3_{zz}} \cos^2(\lambda) + I_{3_{xz}} \sin(2\lambda)$$

$$\bar{I}_{3_{xz}} = (I_{3_{zz}} - I_{3_{xx}}) \sin(\lambda) \cos(\lambda) - I_{3_{xz}} \cos(2\lambda)$$

Finalmente el tensor de inercia del sólido 3 respecto a su sistema de referencia local resultaría:

$$\bar{I}_3 = \begin{bmatrix} 0,42 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0,63 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0,23 \end{bmatrix} \text{Kg} \cdot \text{m}^2$$

3.2.1. Humano (sólido 8)

Para obtener la posición del centro de gravedad y el tensor de inercia del sólido 8 se va a partir de un modelo antropomórfico de otro estudio [5]. Este estudio proporciona las masas y tensores de inercia de un humano dividido en 5 partes: HAT (del inglés hombros, cabeza y brazos), pelvis, muslos derecho e izquierdo, espinillas derecho e izquierda y pies derecho e izquierdo. A partir de este modelo dividido en 5 partes se puede calcular el centro de gravedad del conjunto, y mediante el Teorema de Steiner también el tensor de inercia del conjunto.

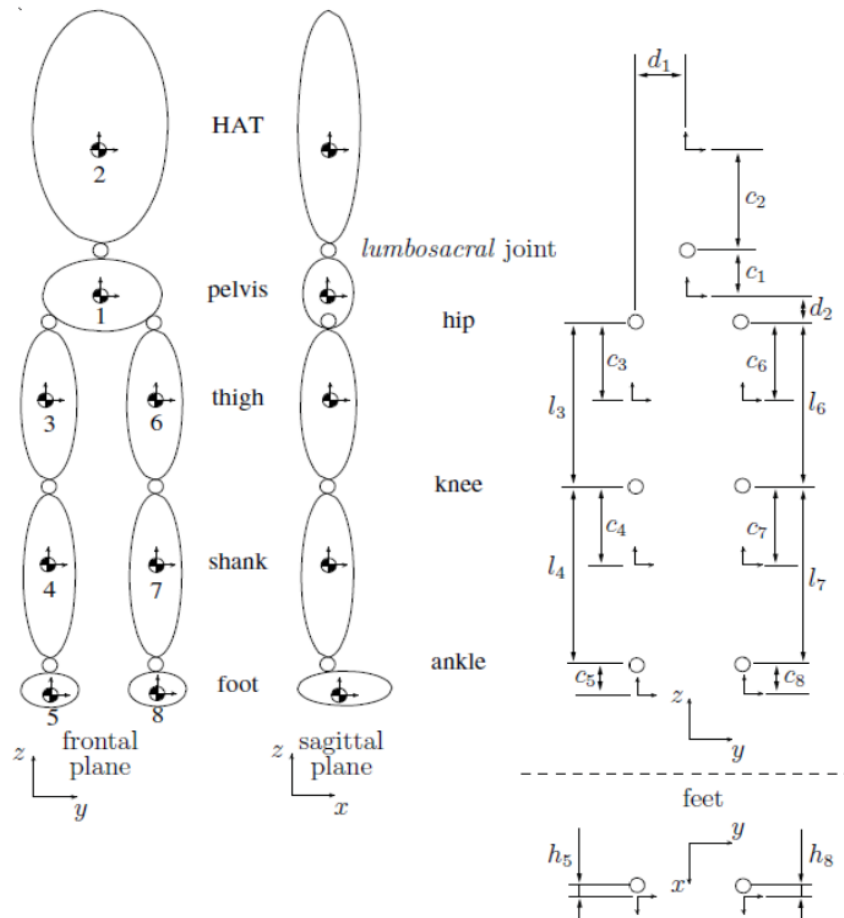


Figura 3-4. Modelo mecánico del cuerpo humano con parámetros geométricos.

A continuación se mostrará el valor de todos los parámetros geométricos del modelo, así como la masa y el tensor de inercia de cada uno de los segmentos de la división. Se debe comentar que el sujeto escogido para este estudio es el sujeto 2, es decir, el sujeto con $m_{total} = m_8 = 74,6$ Kg.

Segment	subj. 1	subj. 2	unity
HAT (trunk, head and arms)			
mass	35.85	36.64	kg
proximal CM (c_2)	0.269	0.268	m
moment of inertia about sagittal axis (X)	1.6061	1.6585	kg m ²
moment of inertia about frontal axis (Y)	1.1903	1.2064	kg m ²
moment of inertia about longitudinal axis (Z)	0.5175	0.5539	kg m ²
pelvis			
mass	8.15	8.33	kg
proximal CM (c_1)	0.092	0.091	m
pelvis CM to hip joints in Y (d_1)	0.080	0.087	m
pelvis CM to hip joints in Z (d_2)	0.058	0.058	m
moment of inertia about sagittal axis (X)	0.0694	0.0719	kg m ²
moment of inertia about frontal axis (Y)	0.0557	0.0577	kg m ²
moment of inertia about longitudinal axis (Z)	0.0632	0.0655	kg m ²
right and left thighs			
mass	10.34	10.56	kg
length (l_3 and l_6)*	0.475	0.4447	kg
proximal CM (c_3 and c_6)	0.195	0.183	m
moment of inertia about sagittal axis (X)	0.2678	0.2450	kg m ²
moment of inertia about frontal axis (Y)	0.2678	0.2450	kg m ²
moment of inertia about longitudinal axis (Z)	0.0549	0.0503	kg m ²
right and left shanks			
mass	3.16	3.23	kg
length (l_4 and l_7)*	0.429	0.405	kg
proximal CM (c_4 and c_7)	0.188	0.178	m
moment of inertia about sagittal axis (X)	0.0400	0.0370	kg m ²
moment of inertia about frontal axis (Y)	0.0382	0.0353	kg m ²
moment of inertia about longitudinal axis (Z)	0.0065	0.0061	kg m ²
right and left feet			
mass	1.00	1.02	kg
proximal CM in Z (c_5 and c_8)	0.043	0.0569	m
proximal CM in X (h_5 and h_8)	0.117	0.117	m
moment of inertia about sagittal axis (X)	0.0011	0.0011	kg m ²
moment of inertia about frontal axis (Y)	0.0047	0.0047	kg m ²
moment of inertia about longitudinal axis (Z)	0.0042	0.0043	kg m ²
total			
mass	73.0	74.6	kg
stature	1.792	1.785	m

Figura 3-5. Masas, longitudes y tensores de inercia de los segmentos del modelo.

En primer lugar hay que calcular el centro de gravedad del modelo, es decir, el centro de gravedad del sólido 8. Para este cálculo se va a tomar como centro de gravedad provisional el *lumbosacral joint*.

$$cdg = \frac{m_{HAT} \cdot c_2 - m_{pelvis} \cdot c_1 - 2 \cdot m_{muslos} \cdot (c_1 + d_2 + c_3) - 2 \cdot m_{espinillas} \cdot (c_1 + d_2 + l_3 + c_4) - 2 \cdot m_{pies} \cdot (c_1 + d_2 + l_3 + l_4 + c_5)}{m_{total}} = -0,0682 \text{ m}$$

Por lo que ya se puede calcular el parámetro geométrico H que faltaba del sólido 8.

$$H = c_5 + l_4 + l_3 + d_2 + c_1 + cdg \approx 1 \text{ m}$$

Para calcular el tensor de inercia en el centro de gravedad simplemente hay que utilizar el Teorema de Steiner con los 5 segmentos.

$$\bar{I}_8 = \begin{bmatrix} 13,0982 & 0 & 0 \\ 0 & 12,6357 & 0 \\ 0 & 0 & 0,965 \end{bmatrix} \text{Kg} \cdot \text{m}^2$$

3.3. Ecuaciones de movimiento del patinete

La matriz de masa de los sólidos \hat{M} será de dimensiones 42x42 ya que tenemos 7 sólidos. Se situará el patinete en el suelo mediante la restricción de igualar a cero la coordenada z del vector posición del que será el punto de contacto de cada una de las ruedas con el suelo. Se corroborará que el patinete siempre se apoya sobre el suelo diciendo que las tangentes transversales y longitudinales a las ruedas en el punto de contacto con el suelo

y el vector normal $n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ siempre forman 90°, es decir, que la multiplicación escalar de ambos vectores sea igual a cero. Además, las coordenadas de giro del sólido 8 (ϕ_{82} y θ_{82}) se igualarán a cero para evitar que el humano se incline demasiado y se des controle el patinete.

Las ruedas se van a modelar como ruedas toroidales de tal manera que dotaremos de espesor al neumático [6], por lo que para obtener el vector de posición del punto de contacto con el suelo se van a necesitar dos coordenadas generalizadas.

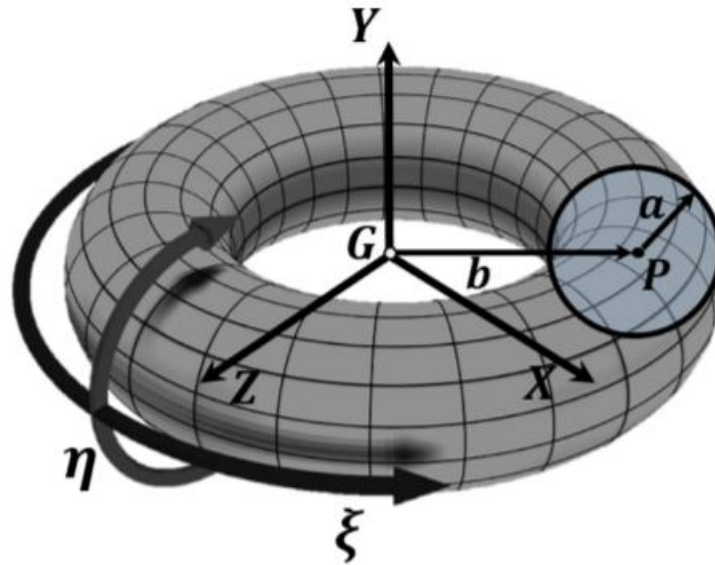


Figura 3-6. Geometría de la rueda y el neumático.

Primero, se realizará un giro ξ de los sistemas de referencia de las ruedas (ξ_5 para el sólido 5 y ξ_7 para el sólido 7) respecto a sus ejes y (y_5 y y_7 , respectivamente) de tal forma que sus ejes x (x_5 y x_7) siempre apunten al punto del centro del neumático que está en el mismo plano que el punto de contacto con el suelo (x_{ξ_5} y x_{ξ_7}).

$$A_{\xi_i} = \begin{bmatrix} \cos(\xi_i) & 0 & \text{sen}(\xi_i) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\xi_i) & 0 & \cos(\xi_i) \end{bmatrix} \quad i = 5,7$$

$$\mathbf{r}_{P5} = \mathbf{r}_5 + A_5 A_{\xi_5} \begin{bmatrix} b = R_F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{r}_{P7} = \mathbf{r}_7 + A_7 A_{\xi_7} \begin{bmatrix} b = R_R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para finalizar, se realizará un giro η de los sistemas de referencia ξ (η_5 para el sólido 5 y η_7 para el sólido 7) respecto a sus ejes z (z_{ξ_5} y z_{ξ_7} , respectivamente) de tal forma que sus ejes x (x_{ξ_5} y x_{ξ_7}) siempre apunte al

punto de contacto del neumático con el suelo (x_{η_5} y x_{η_7}).

$$A_{\eta_i} = \begin{bmatrix} \cos(\eta_i) & -\text{sen}(\eta_i) & 0 \\ \text{sen}(\eta_i) & \cos(\eta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i = 5,7$$

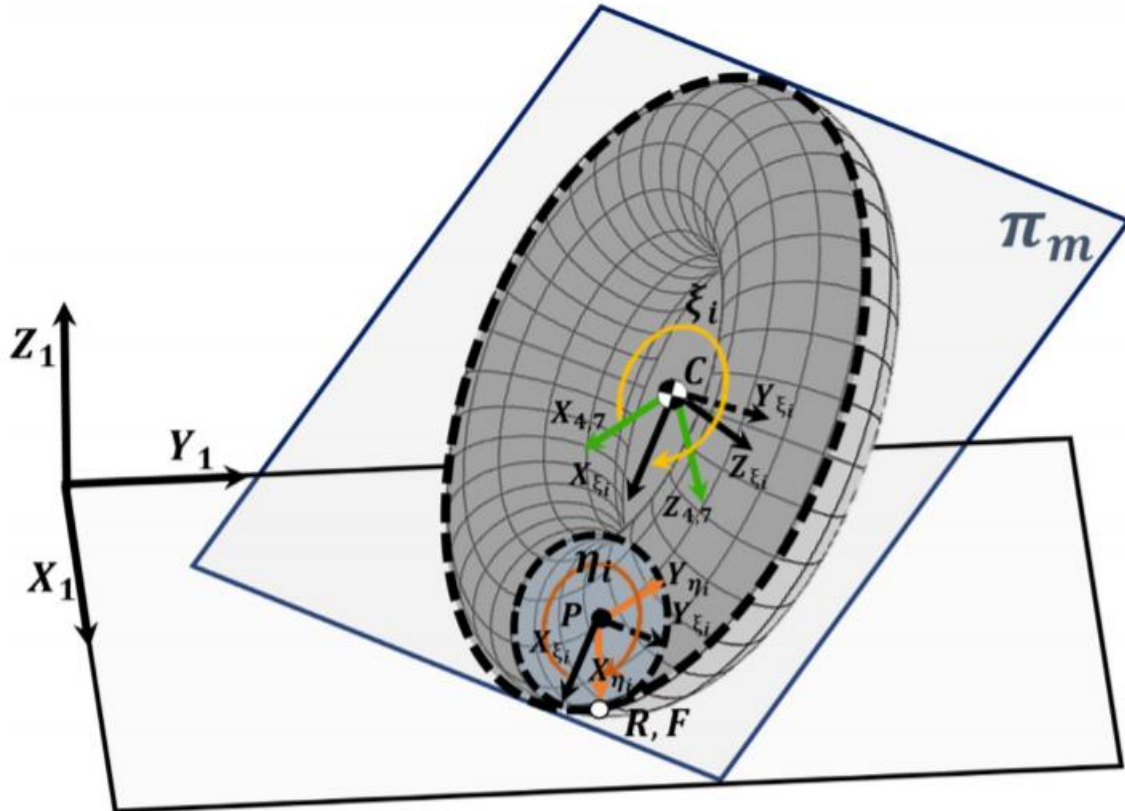


Figura 3-7. Giros ξ y η

Los neumáticos van a tener un radio del orden del 20% del radio de las ruedas. Se va a obtener el vector posición del punto de contacto con el suelo de la siguiente manera:

$$\mathbf{r}_F = \mathbf{r}_{P_5} + A_5 A_{\xi_5} A_{\eta_5} \begin{bmatrix} a = e_F = 0,2 \cdot R_F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{r}_R = \mathbf{r}_{P_7} + A_7 A_{\xi_7} A_{\eta_7} \begin{bmatrix} a = e_R = 0,2 \cdot R_R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

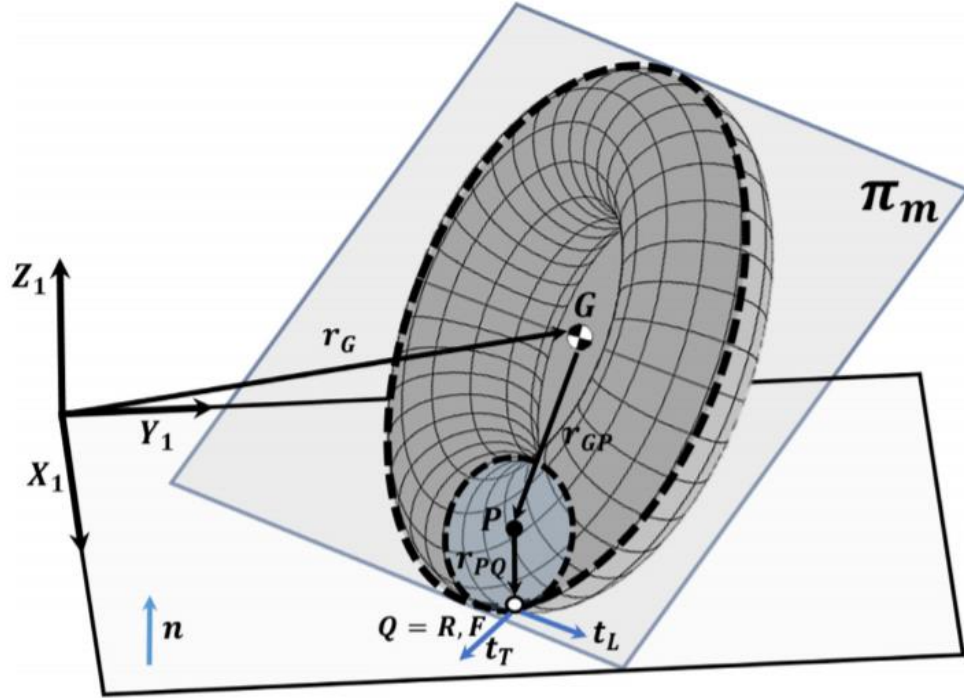


Figura 3-9. Posición absoluta de los vectores de la rueda toroidal.

Por lo que las tangentes quedarían:

$$\text{Tangentes longitudinales: } \mathbf{t}_{LF} = A_5 \begin{bmatrix} -(R_F + e_F \cos(\eta_5)) \sin(\xi_5) \\ 0 \\ -(R_F + e_F \cos(\eta_5)) \cos(\xi_5) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t}_{LR} = A_7 \begin{bmatrix} -(R_R + e_R \cos(\eta_7)) \sin(\xi_7) \\ 0 \\ -(R_R + e_R \cos(\eta_7)) \cos(\xi_7) \end{bmatrix}$$

$$\text{Tangentes transversales: } \mathbf{t}_{TF} = A_5 \begin{bmatrix} -e_F \sin(\eta_5) \cos(\xi_5) \\ e_F \cos(\eta_5) \\ e_F \sin(\eta_5) \sin(\xi_5) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t}_{TR} = A_7 \begin{bmatrix} -e_R \sin(\eta_7) \cos(\xi_7) \\ e_R \cos(\eta_7) \\ e_R \sin(\eta_7) \sin(\xi_7) \end{bmatrix}$$

Finalmente hay 8 ecuaciones de restricción holónomas $C(q, t) = \begin{pmatrix} r_F^z = 0 \\ r_R^z = 0 \\ n \cdot \mathbf{t}_{LF} = 0 \\ n \cdot \mathbf{t}_{TF} = 0 \\ n \cdot \mathbf{t}_{LR} = 0 \\ n \cdot \mathbf{t}_{TR} = 0 \\ \phi_{82} = 0 \\ \theta_{82} = 0 \end{pmatrix}$.

Las cuatro últimas ecuaciones de restricción son no-holónomas y serían las de rodadura sin deslizamiento de cada una de las ruedas. La componente x e y del vector velocidad del punto de contacto con el suelo de cada una de las ruedas serían iguales a cero. La velocidad del punto de contacto se calculará a través de la velocidad del centro de gravedad de las ruedas (obtenidas derivando el vector posición de los sólidos 5 y 7) mediante la ley de composición de velocidades y las coordenadas no generalizadas.

$$\mathbf{V}_5 = \dot{\mathbf{r}}_5 \quad ; \quad \mathbf{V}_F = \mathbf{V}_5 + (A_5 \bar{\mathbf{w}}_5) \times (A_5 \bar{\mathbf{r}}_{G_5 F}^5)$$

$$\mathbf{V}_7 = \dot{\mathbf{r}}_7 \quad ; \quad \mathbf{V}_R = \mathbf{V}_7 + (A_7 \bar{\mathbf{w}}_7) \times (A_7 \bar{\mathbf{r}}_{G_7 R}^7)$$

Como se ha comentado habrá 4 restricciones no-holónomas $C(q, \dot{q}, t) = \begin{pmatrix} V_F^x = 0 \\ V_F^y = 0 \\ V_R^x = 0 \\ V_R^y = 0 \end{pmatrix}$.

Al añadirse las coordenadas no generalizadas finalmente el mecanismo se compone de 17 coordenadas, siendo el vector de coordenadas:

$$q = [x_2 \ y_2 \ z_2 \ \psi_2 \ \theta_2 \ \phi_2 \ \phi_{82} \ \theta_{82} \ \theta_{62} \ \theta_{76} \ \delta \ S_{43} \ \theta_{54} \ \xi_5 \ \xi_7 \ \eta_5 \ \eta_7].$$

Por lo que las matrices D y \dot{D} del mecanismo tendrán unas dimensiones de 12X17, y la matriz E sería nula ya que ninguna de nuestras ecuaciones de restricción son de movilidad.

Respecto a las fuerzas aplicadas al mecanismo se van a considerar el peso de cada uno de los cuerpos y la fuerza correspondiente a las suspensión rotacional y lineal. Los parámetros de rigidez y de amortiguación de las suspensiones se han sacado de unos ensayos de laboratorio del patinete recogidos en un estudio [2]. En este, las dos suspensiones son lineales, por lo que para el sólido 6 se ha tenido que aproximar el valor de los parámetros multiplicando por dos veces la longitud de la suspensión rotacional para así adaptar las unidades.

Parámetros de rigidez	Unidad	Parámetros de amortiguación	Unidad
$k_4 = 122,05 \cdot 10^3$	N/m	$c_4 = 221,61$	$N/m/s$
$k_6 = 53,43 \cdot 10^3 \cdot d^2$	$N \cdot m/rad$	$c_6 = 545,8 \cdot d^2$	$N \cdot m/rad/s$

Tabla 3-1. Parámetros de rigidez y de amortiguación.

La suspensión lineal ejercerá una fuerza a los sólidos 3 y 4 de elongación S_{43} , y la suspensión rotacional ejercerá un momento de elongación θ_{62} en los sólidos 2 y 6. La matriz \hat{Q}_{apl} tendrá unas dimensiones de 42X1 en la que las fuerzas aplicadas expresadas en N estarán en coordenadas globales y los momentos aplicados expresados en N·m en coordenadas locales:

- Suspensión lineal

$$F_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_3 g \end{bmatrix} + A_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(k_4 \cdot S_{43} + c_4 \cdot \dot{S}_{43}) \end{bmatrix} \quad F_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_4 g \end{bmatrix} + A_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_4 \cdot S_{43} + c_4 \cdot \dot{S}_{43} \end{bmatrix}$$

- Suspensión rotacional

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ k_6 \cdot \theta_{62} + c_6 \cdot \dot{\theta}_{62} \\ 0 \end{bmatrix} \quad M_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -(k_6 \cdot \theta_{62} + c_6 \cdot \dot{\theta}_{62}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Resto de sólidos

$$F_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_i g \end{bmatrix} \quad i = 2,5,6,7,8 \quad M_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad j = 3,4,5,7,8$$

$$\hat{Q}_{apl} = [F_2 \ F_3 \ F_4 \ F_5 \ F_6 \ F_7 \ F_8 \ M_2 \ M_3 \ M_4 \ M_5 \ M_6 \ M_7 \ M_8]$$

Para finalizar, el término de Coriolis \hat{Q}_v , se calculará mediante los tensores de inercia y la velocidad angular de cada uno de los cuerpos en coordenadas locales teniendo unas dimensiones de 42X1:

$$F_{vi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad M_{vi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\bar{w}_i x \bar{I}_i \bar{w}_i \end{bmatrix} \quad i = 2,3,4,5,6,7,8$$

$$\hat{Q}_v = [F_{v2} \ F_{v3} \ F_{v4} \ F_{v5} \ F_{v6} \ F_{v7} \ F_{v8} \ M_{v2} \ M_{v3} \ M_{v4} \ M_{v5} \ M_{v6} \ M_{v7} \ M_{v8}]$$

Para obtener las ecuaciones en función de las coordenadas del mecanismo se utilizarán las matrices L y l. Como el número de coordenadas es 17 estas matrices tendrán una dimension de 42X17.

$$M_{17X17} = L_{17X42}^T \hat{M}_{42X42} L_{42X17} \quad ; \quad Q_{apl_{17X1}} = L_{17X42}^T \hat{Q}_{apl_{42X1}}$$

$$Q_{v_{17X1}} = L_{17X42}^T (\hat{Q}_{v_{42X1}} - \hat{M}_{42X42} l_{42X17} \dot{q}_{17X1})$$

$$\begin{bmatrix} M_{17X17} & D_{17X12}^T \\ D_{12X17} & 0_{12X12} \end{bmatrix}_{29X29} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{17X1} \\ \lambda_{12X1} \end{bmatrix}_{29X1} = Z_{29X1} \quad ; \quad Z_{29X1} = \begin{bmatrix} Q_{apl_{17X1}} + Q_{v_{17X1}} \\ -\dot{D}_{12X17} \dot{q}_{17X1} - 2\alpha \begin{bmatrix} \dot{C}_{h_{8X1}} \\ C_{nh_{4X1}} \end{bmatrix} - \beta^2 \begin{bmatrix} C_{h_{8X1}} \\ 0_{4X1} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Una vez obtenidas las ecuaciones de movimiento se procederá a integrarlas para obtener tanto las coordenadas del Sistema como los multiplicadores de Lagrange a lo largo del tiempo.

4 SIMULACIÓN Y RESULTADOS

Para la simulación de este mecanismo y la integración de las ecuaciones a lo largo del tiempo se utilizará MATLAB, siendo esta una buena herramienta para poder ensamblar las ecuaciones e integrarlas, así como para poder hacer una representación visual en el tiempo del patinete para un mejor análisis de los resultados.

Las ecuaciones de movimiento a integrar son de segundo orden ya que aparecen las aceleraciones, es decir, la segunda derivada de las coordenadas del mecanismo. Por lo que para la integración se van a necesitar las condiciones iniciales en posición y en velocidad. Para obtener estas se va a resolver el problema inicial en posición haciendo cumplir las ecuaciones de restricción holónomas y se va a resolver el problema inicial en velocidades haciendo cumplir las ecuaciones de restricción tanto holónomas como no holónomas.

Se podrán calcular tantas coordenadas de posición en el instante inicial como ecuaciones de restricción holónomas se tienen. Por lo que en el instante inicial se van a calcular 8 coordenadas llamadas dependientes, teniendo que suponer el valor de 9 coordenadas siendo estas las coordenadas independientes en el problema inicial en posición. En MATLAB, para poder empezar a resolver las ecuaciones se necesita darle primero un valor inicial a las 8 coordenadas dependientes para que el programa comience a buscar la solución a partir de ese valor. Se ha dado un valor inicial a las coordenadas dependientes de tal manera que la solución encontrada se aproxime a una posición de equilibrio. Las coordenadas que se han establecido como dependientes en el problema inicial de posición serán las cuatro coordenadas no generalizadas y los dos giros correspondientes al sólido 8 que son las que están involucradas en las restricciones, y también la coordenada z y el giro respecto al eje y del sólido 2.

$$q_{d0}(\text{valor inicial}) = [z_2 = z_B + 1 \quad \theta_2 = \phi_{82} = \theta_{82} = 0 \quad \xi_5 = \xi_7 = \frac{\pi}{2} \quad \eta_5 = 2\pi \quad \eta_7 = \frac{3\pi}{2}]$$

$$q_{i0} = [x_2 = y_2 = \psi_2 = \phi_2 = \theta_{62} = \theta_{76} = \delta = S_{43} = \theta_{54} = 0]$$

Las coordenadas de traslación están expresadas en *m* y las coordenadas de giro están expresadas en *rad*. Posteriormente, con estos valores iniciales se resuelven las ecuaciones de restricción holónomas mediante MATLAB dando como resultado las condiciones iniciales en posición:

$$q_0 = [x_2 = 0 \quad y_2 = 0 \quad z_2 = 0,1464 \quad \psi_2 = 0 \quad \theta_2 = -0,0592 \quad \phi_2 = 0 \quad \phi_{82} = 0 \quad \theta_{82} = 0$$

$$\theta_{62} = 0 \quad \theta_{76} = 0 \quad \delta = 0 \quad S_{43} = 0 \quad \theta_{54} = 0 \quad \xi_5 = 1,9441 \quad \xi_7 = 1.63 \quad \eta_5 = 6,2832 \quad \eta_7 = 6,2832]$$

Como se comentó al principio de este apartado, para la integración de las ecuaciones de movimiento del mecanismo también se necesitan las condiciones iniciales en velocidad. Para conseguirlas se sabe que en el sistema hay 8 restricciones holónomas y 4 no holónomas que denotamos como sigue

$$C(q) = 0 \quad \xrightarrow{d(\cdot)/dt} \quad C_q(q)\dot{q} = 0$$

$$C_{nh}(q, \dot{q}) = B(q)\dot{q} = 0$$

La derivada con respecto al tiempo de las restricciones holónomas puede escribirse también en términos de las coordenadas dependientes e independientes junto con las restricciones no holónomas para poder resolver el problema de velocidad.

$$C_{q_d}(q)\dot{q}_d + C_{q_i}(q)\dot{q}_i = 0$$

$$B_d(q)\dot{q}_d + B_i(q)\dot{q}_i = 0$$

Lo que da lugar al siguiente problema

$$\begin{bmatrix} C_{q_d}(q) \\ B_d(q) \end{bmatrix} \dot{q}_d = - \begin{bmatrix} C_{q_i}(q) \\ B_i(q) \end{bmatrix} \dot{q}_i \quad \rightarrow \quad D_d(q)\dot{q}_d = -D_i(q)\dot{q}_i$$

Por lo que para el instante inicial tenemos

$$\dot{q}_{d0} = -(D_d(q_0))^{-1} D_i(q_0)\dot{q}_{i0}$$

Las matrices D_d y D_i se calcularán a partir de los valores de las coordenadas en el instante inicial calculadas anteriormente, q_0 . Para el problema de velocidades en el instante inicial se tienen 12 ecuaciones de restricción, por lo que habrá 12 coordenadas dependientes y solo 5 independientes. Estas 5 coordenadas independientes no tienen por qué coincidir con las del problema inicial de posición. Para darles valor se utilizará un nuevo parámetro v que representa la velocidad lineal del patinete, que dividiéndolo por el radio de la rueda delantera obtenemos la velocidad angular de la misma. Este será el valor que utilizaremos para las coordenadas independientes en el problema de velocidad en el instante inicial. Las coordenadas de traslación están expresadas en m/s y las coordenadas de giro en rad/s.

$$\dot{q}_{i_0} = [\dot{y}_2 = 0 \quad \dot{\phi}_2 = 0 \quad \dot{\theta}_{54} = \frac{v}{R_F + e_F} \quad \dot{\xi}_5 = -\frac{v}{R_F + e_F} \quad \dot{\xi}_7 = -\frac{v}{R_R + e_R}]$$



$$\begin{aligned} \dot{q}_{d_0} &= -(D_d(q_0))^{-1} D_i(q_0) \dot{q}_{i_0} = [\dot{x}_2 = v \quad \dot{\theta}_{76} = \frac{v}{R_R + e_R} \quad \dot{z}_2 = \dot{\psi}_2 = \dot{\theta}_2 = \dot{\phi}_{82} = \dot{\theta}_{82} = \dot{\theta}_{62} = \dot{\delta} \\ &= \dot{S}_{43} = \dot{\eta}_5 = \dot{\eta}_7 = 0] \end{aligned}$$

Como se puede observar tiene sentido que después de calcular las velocidades dependientes en el instante inicial, la velocidad en dirección x del patinete es el parámetro v , ya que como dijimos con anterioridad este representa la velocidad lineal del patinete, así como también tiene sentido que la velocidad angular de la rueda trasera sea el parámetro v dividido por su radio como impusimos en las dependientes para la rueda delantera.

Una vez obtenidas todas las condiciones iniciales, se pueden integrar las ecuaciones para obtener las coordenadas y los multiplicadores de Lagrange a lo largo del tiempo. En este estudio sobre el mecanismo del patinete se van a hacer varios experimentos de simulación para entender mejor la dinámica del mismo. Se hará una primera simulación “lanzando” el patinete a una velocidad v constante. Una segunda y tercera simulación en la que se le aplicará un par a la rueda delantera para ver como actuaría el patinete bajo la acción de un motor eléctrico y bajo la acción de los frenos. Por último, una cuarta y quinta simulación en la que se hará oscilar al humano (sólido 8) respecto a los ejes y_8 y x_8 , respectivamente, para ver como se comportan las coordenadas del mecanismo bajo estas oscilaciones.

$$\text{Simulaciones} \left\{ \begin{array}{l} \text{Patinete a } v \text{ constante} \\ \text{Aceleración del motor eléctrico} \\ \text{Maniobra de frenado} \\ \text{Oscilación del humano respecto al eje } y_8 \\ \text{Oscilación del humano respecto al eje } x_8 \end{array} \right.$$

4.1. Patinete a v constante

El objetivo de este experimento es “lanzar” el patinete con una condición inicial de v constante para ver cómo avanza el patinete y analizar las coordenadas del mecanismo a lo largo del tiempo. El patinete va a avanzar con un movimiento rectilíneo uniforme a una velocidad inicial y constante de $v = 5$ m/s y unas condiciones iniciales iguales a las explicadas al inicio de este apartado. El tiempo de simulación va a ser de 10 segundos.

Una primera comprobación de que la simulación cinemática se ha realizado correctamente es ver si las restricciones holónomas y no holónomas se cumplen a lo largo del tiempo.

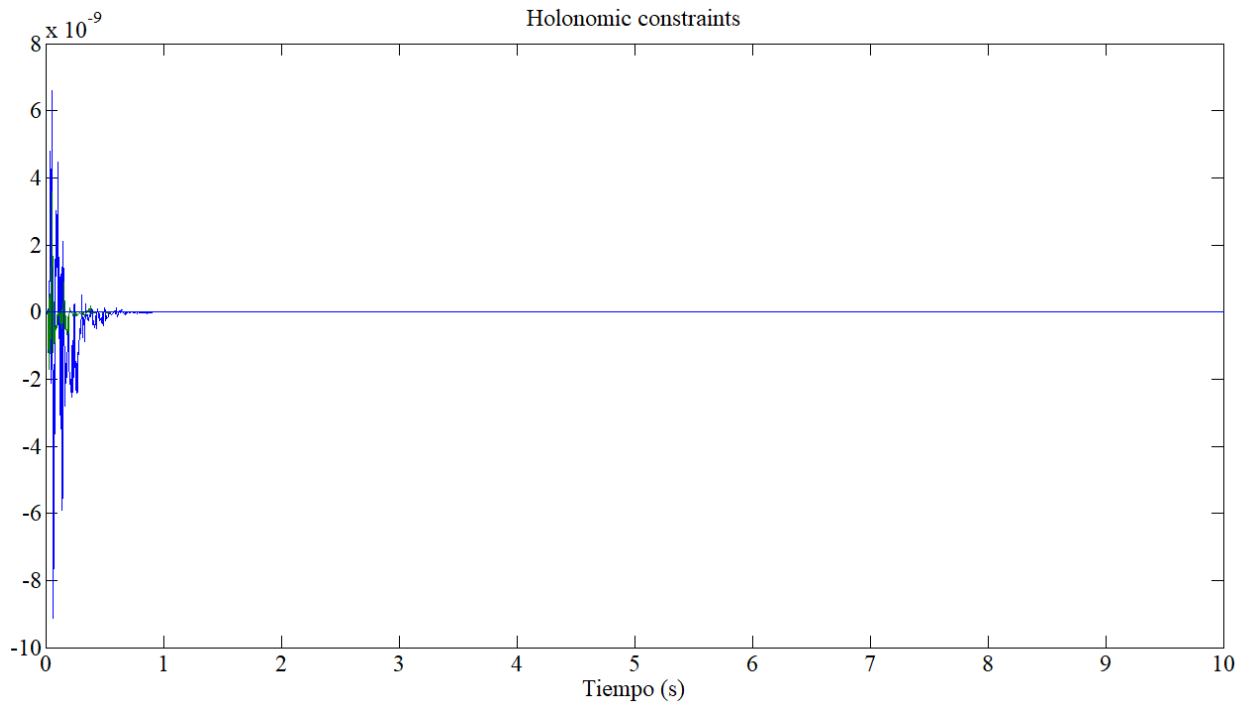


Figura 4-1. Restricciones holónomas a lo largo del tiempo.

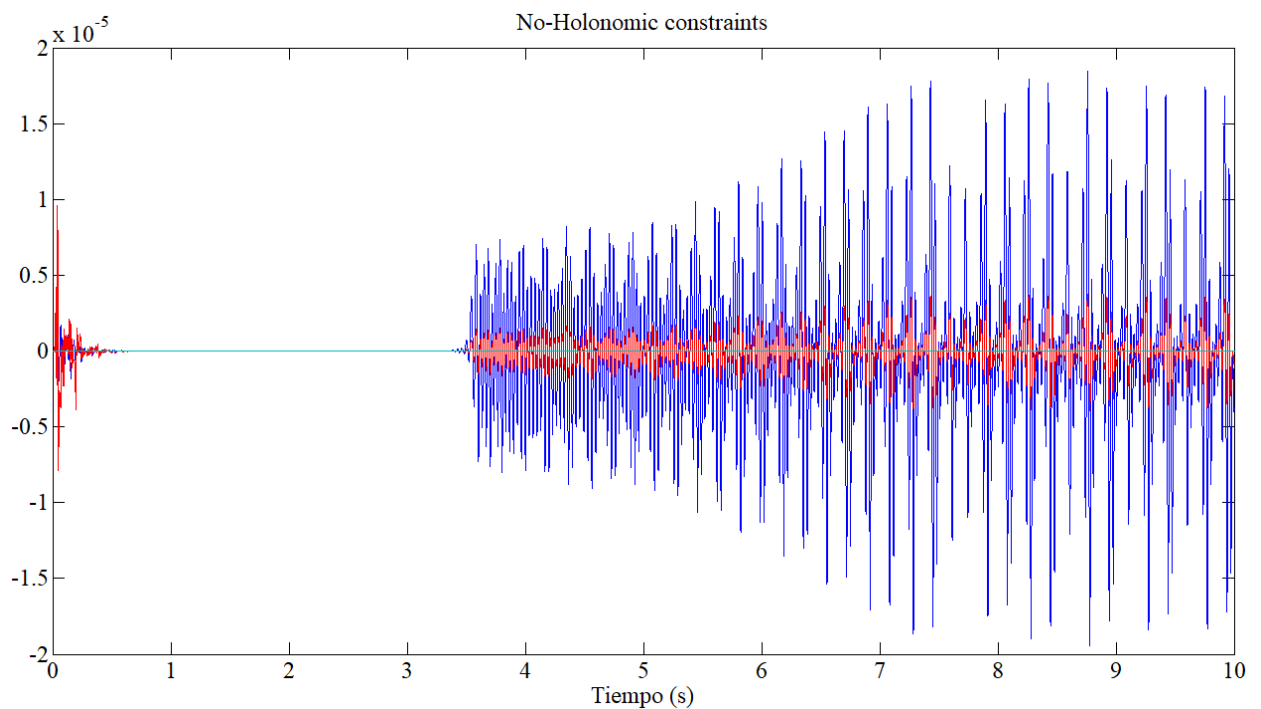


Figura 4-2. Restricciones no holónomas a lo largo del tiempo.

Se puede observar cómo tanto las restricciones holónomas como las no holónomas son prácticamente iguales a cero durante toda la simulación. El valor de las restricciones holónomas está multiplicado por 10^{-9} y el valor de las restricciones no holónomas está multiplicado por 10^{-5} por lo que ambos valores se pueden tomar como prácticamente iguales a cero.

Una vez se ha visto que las ecuaciones de restricción se cumplen, se pueden analizar las coordenadas a lo largo del tiempo para entender mejor el funcionamiento del mecanismo. Un buen primer análisis podría ser comprobar que el patinete sigue un movimiento rectilíneo uniforme, para ello se analizarán las coordenadas x_2 y \dot{x}_2 .

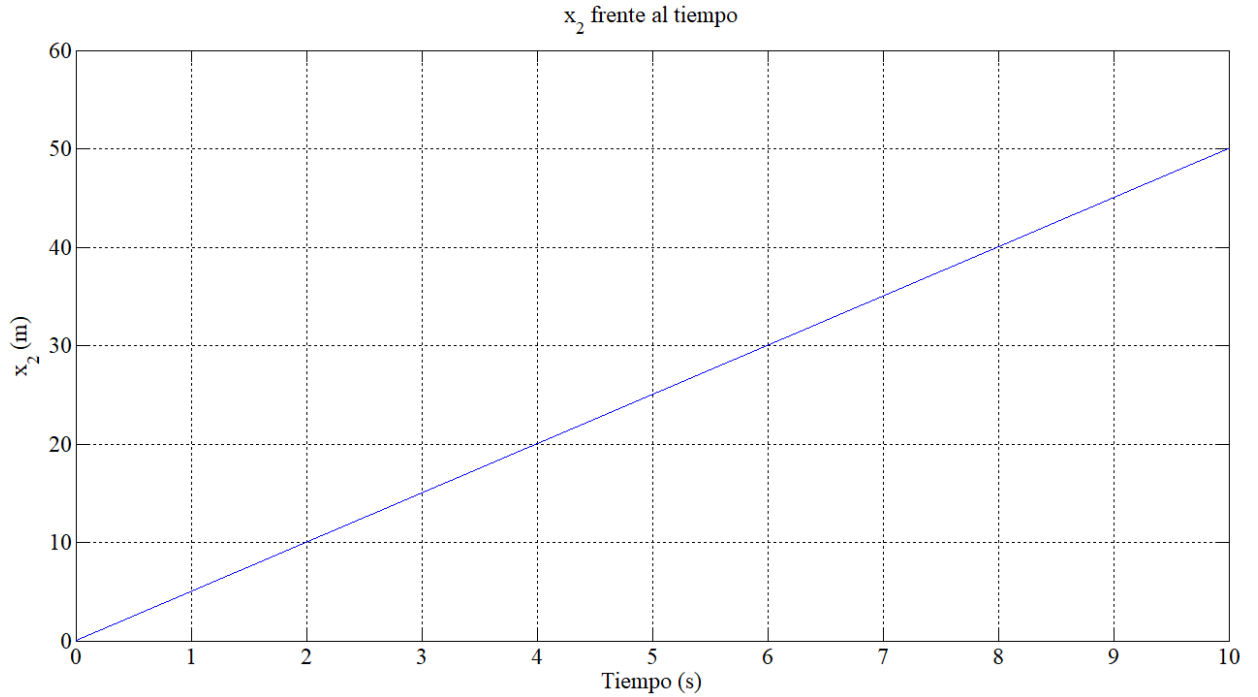


Figura 4-3. x_2 en patinete a v constante.

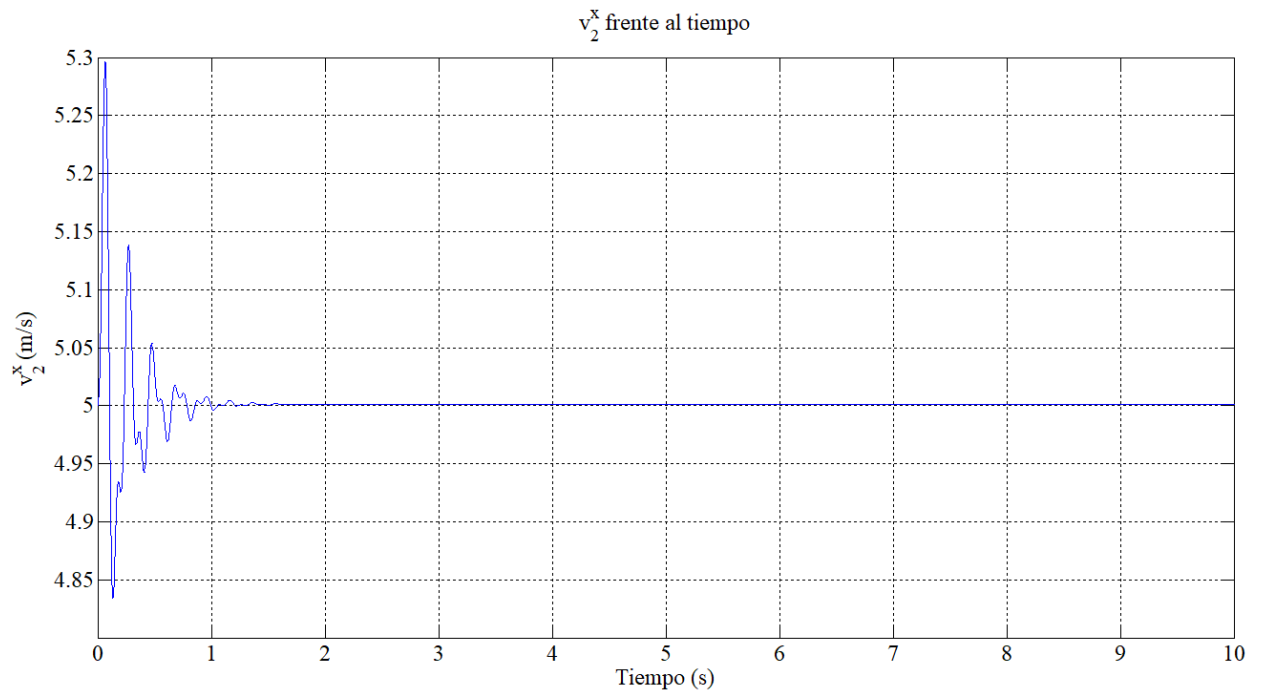


Figura 4-4. \dot{x}_2 en patinete a v constante.

Cómo se puede observar la coordenada x_2 aumenta con una pendiente constante y la velocidad \dot{x}_2 es siempre igual a 5 a lo largo del tiempo como habíamos impuesto con el parámetro v , por lo que queda comprobado que el patinete se mueve con un movimiento rectilíneo uniforme. Para comprobar que el patinete se mantiene estable en ese movimiento, se puede analizar la coordenada z_2 para comprobar que sea constante y se puede analizar la coordenada ϕ_2 (giro del sólido 2 respecto al eje x) para comprobar que sea cero, así se verifica que el patinete no se cae ni se inclina en ningún momento.

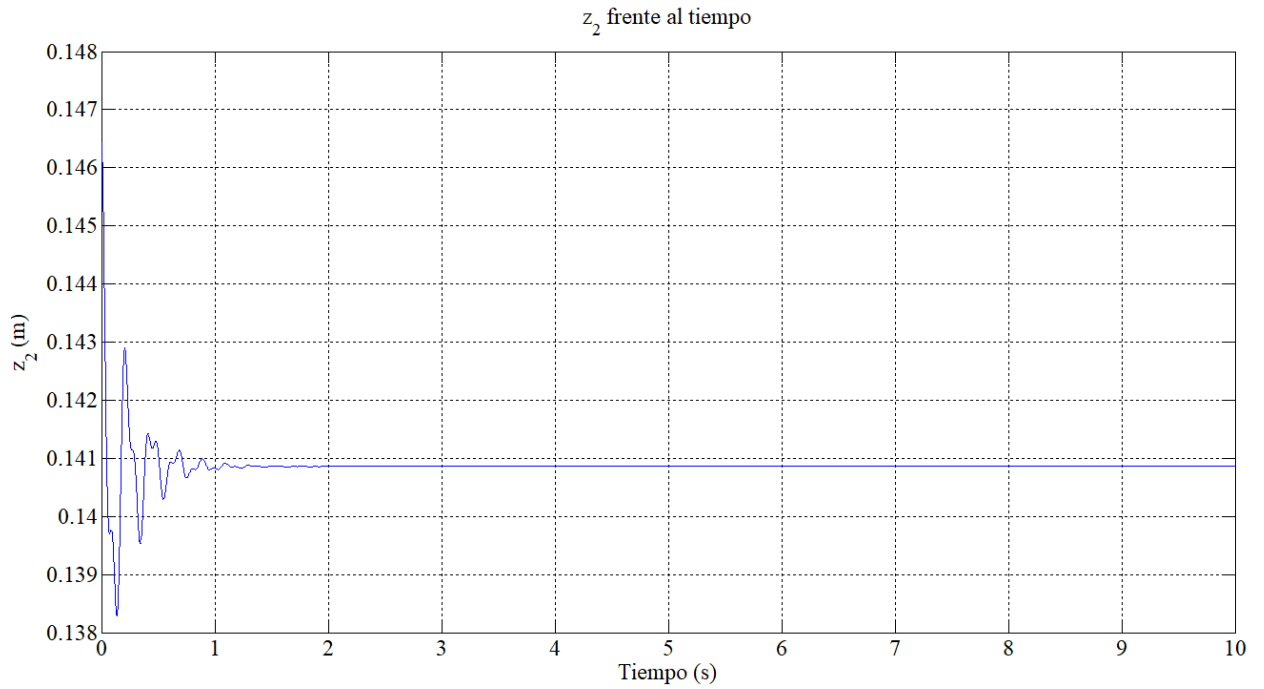


Figura 4-5. z_2 en patinete a v constante.

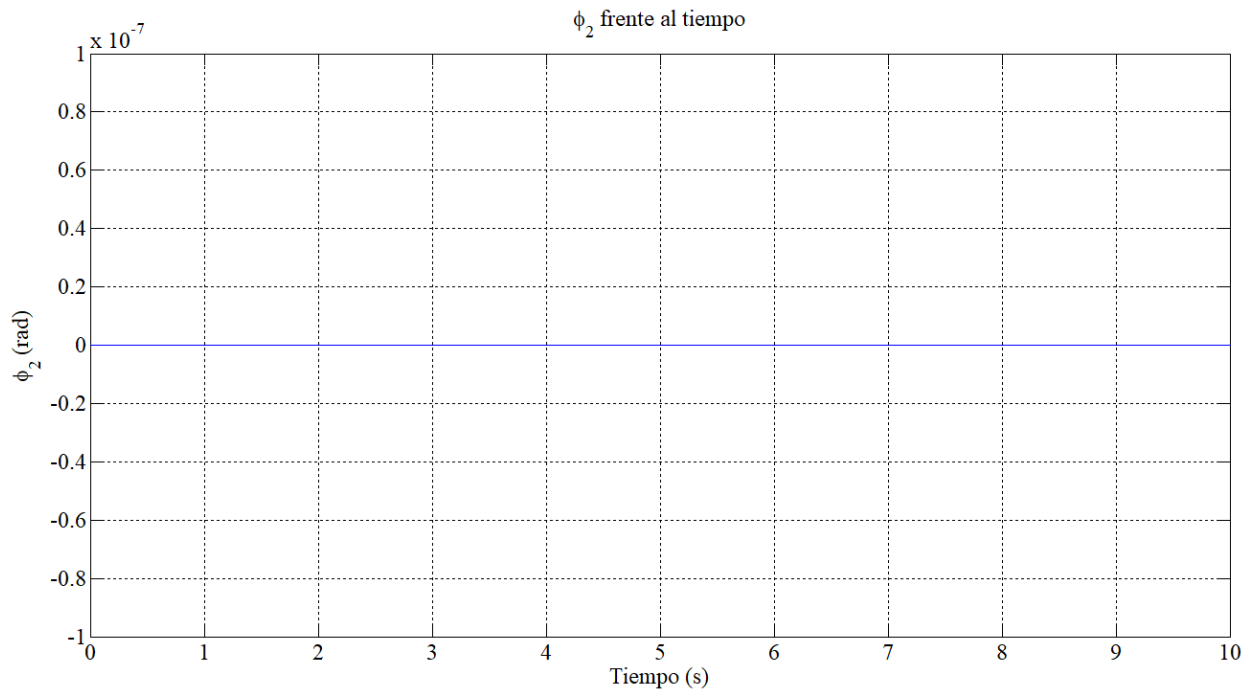


Figura 4-6. ϕ_2 en patinete a v constante.

La coordenada z_2 después de un breve periodo inicial de oscilaciones se acaba haciendo constante alrededor de 0,141 m que es aproximadamente el valor de z_B , además la coordenada ϕ_2 es siempre cero por lo que se verifica que el patinete ni se cae ni se inclina en ningún momento. Otra comprobación que puede hacerse es analizar si la trayectoria del patinete es rectilínea como habíamos impuesto. Esto lo podemos comprobar viendo si las coordenadas δ (giro del manillar) y ψ_2 (giro del sólido 2 respecto a z) son siempre igual a cero.

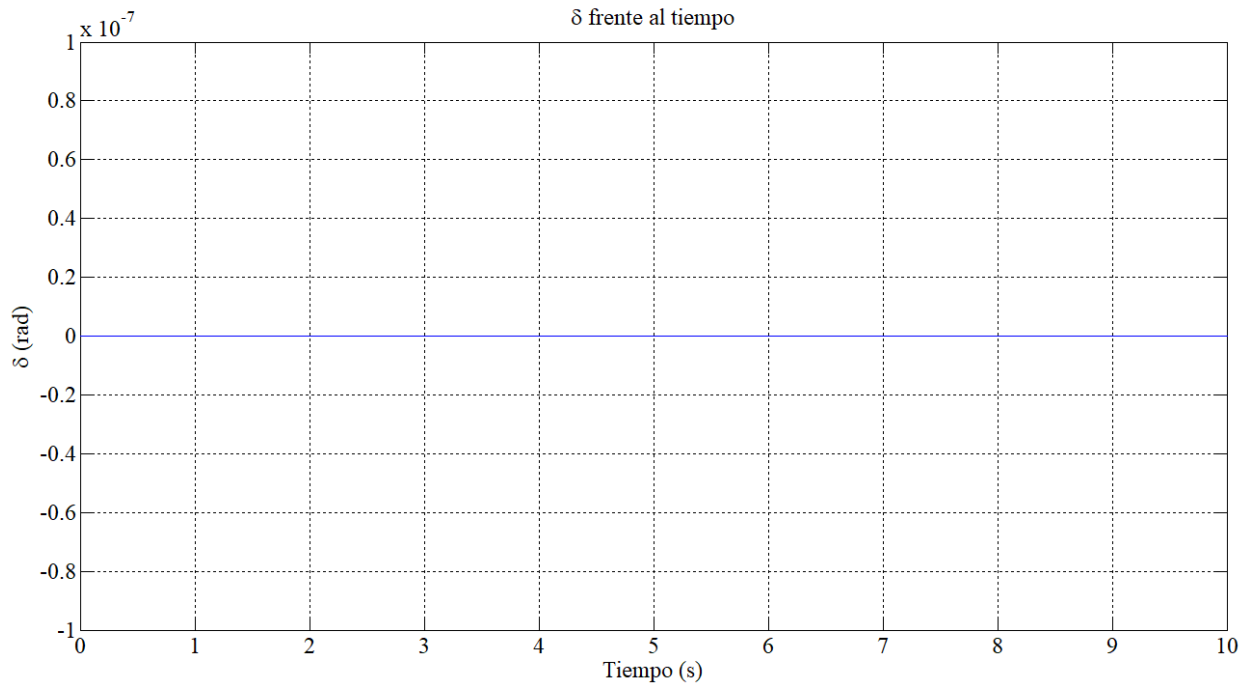


Figura 4-7. δ en patinete a v constante.

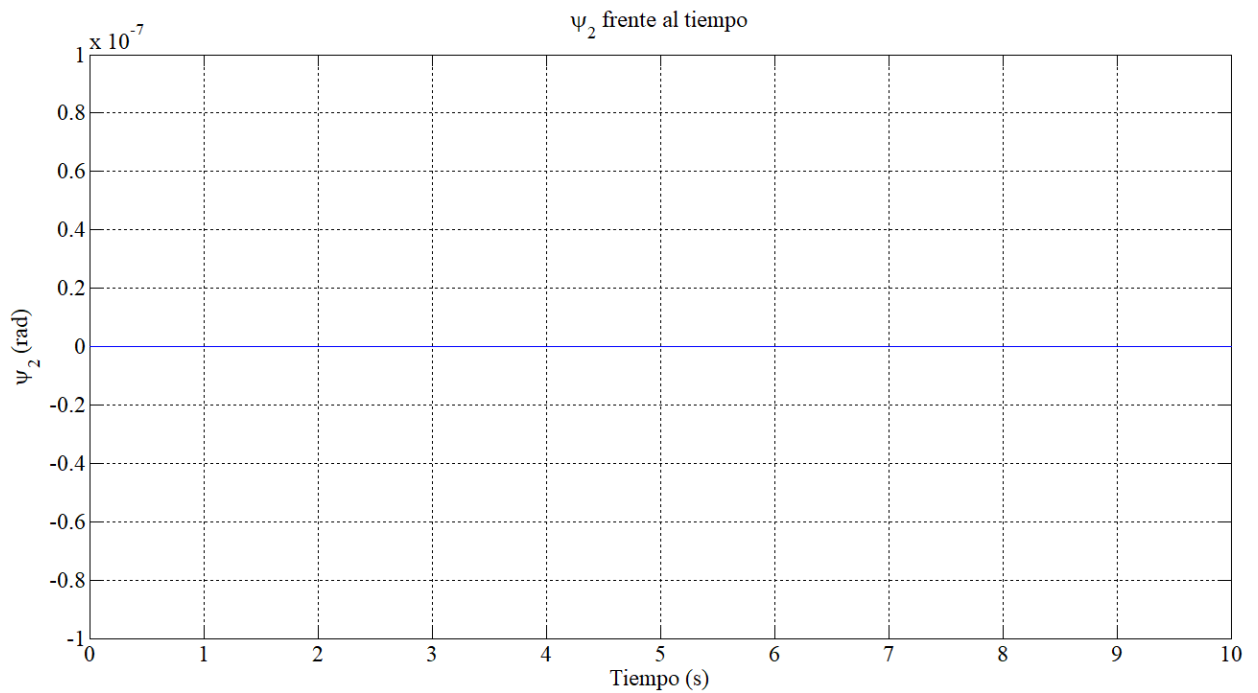


Figura 4-8. ψ_2 en patinete a v constante.

Cómo se puede observar el patinete sí mantiene una trayectoria rectilínea ya que ambas coordenadas son 0 en toda la simulación. Finalmente, se pueden analizar las coordenadas correspondientes a las dos suspensiones. Se analizarán las coordenadas θ_{62} correspondiente a la suspensión rotacional trasera y S_{43} correspondiente a la suspensión lineal delantera.

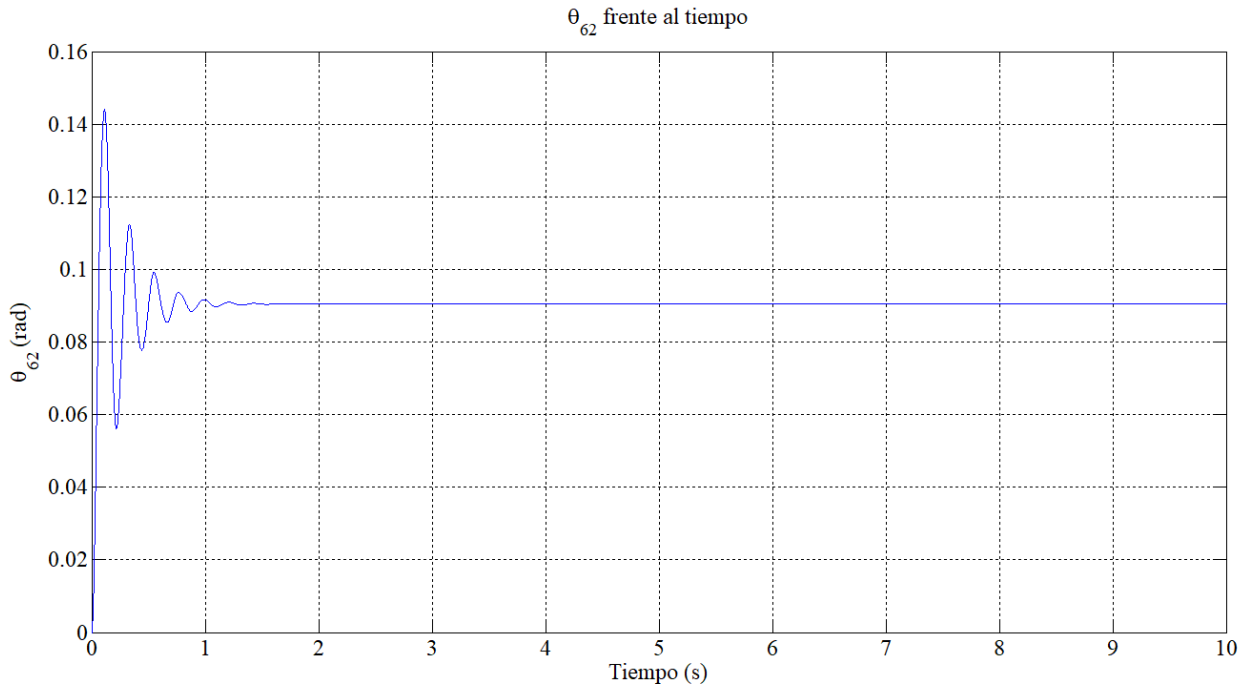


Figura 4-9. θ_{62} en patinete a v constante.

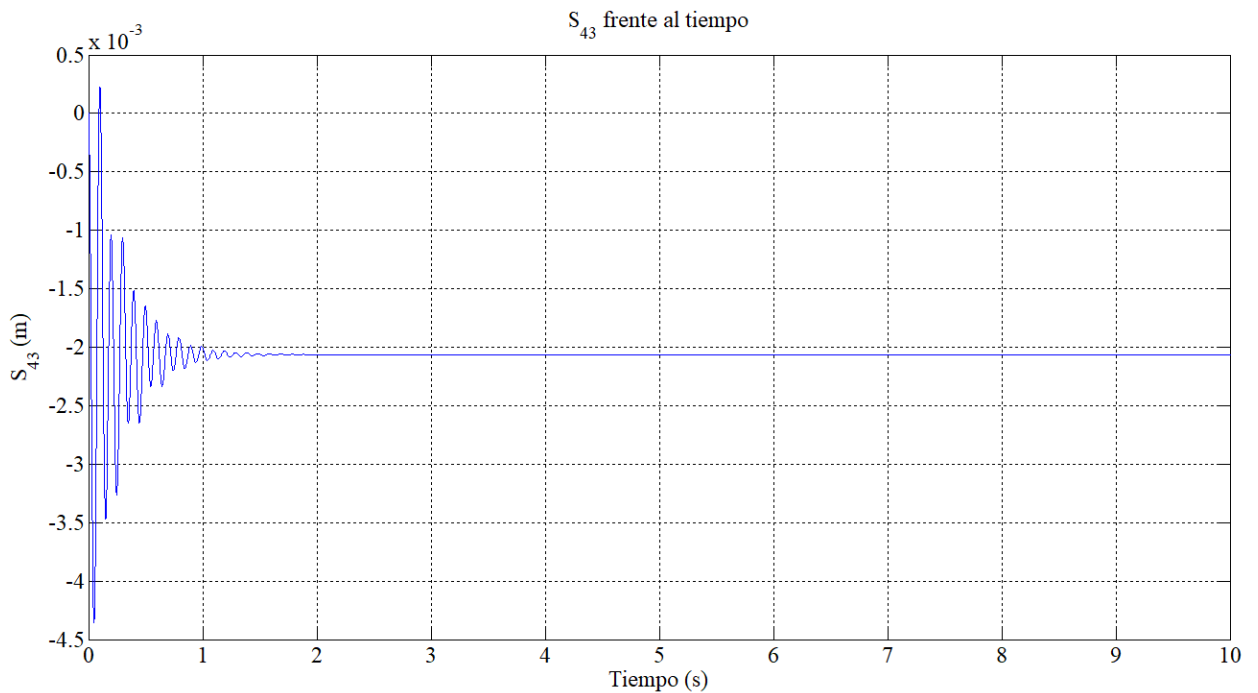


Figura 4-10. S_{43} en patinete a v constante.

En ambas suspensiones ocurre lo mismo, primero hay un breve periodo de oscilaciones en el que actúa la amortiguación y posteriormente el mecanismo encuentra una posición de equilibrio. Este breve periodo de oscilaciones seguramente se deba a que el patinete inicialmente no empieza en una posición de total equilibrio.

4.2. Aceleración del motor eléctrico

Para esta simulación lo que se va a hacer es aplicar un par a la rueda delantera (sólido 5) respecto al eje y_5 de manera que actúe como un motor eléctrico que vaya acelerando el patinete. Debido al principio de acción y reacción se le aplica el mismo par pero de sentido contrario al amortiguador lineal (sólido 4). La magnitud del par se ha establecido en $2 \cdot t$, es decir, el par será cada vez mayor a medida que avance el tiempo de simulación. Al tener un nuevo par externo para los sólidos 4 y 5, la matriz \hat{Q}_{apl} cambiará:

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \cdot t \\ 0 \end{bmatrix} \quad M_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \cdot t \\ 0 \end{bmatrix}$$

El patinete nuevamente comienza con una velocidad inicial de $v = 5 \text{ m/s}$ y con unas condiciones iniciales en posición iguales a las explicadas al comienzo de este apartado. El tiempo de simulación seguirá siendo de 10 segundos.

Para comprobar que el patinete se ha acelerado se van a comparar la coordenada x_2 y la velocidad \dot{x}_2 con el par aplicado respecto a las del patinete a v constante que realizaba un movimiento rectilíneo uniforme, es decir, con una aceleración nula.

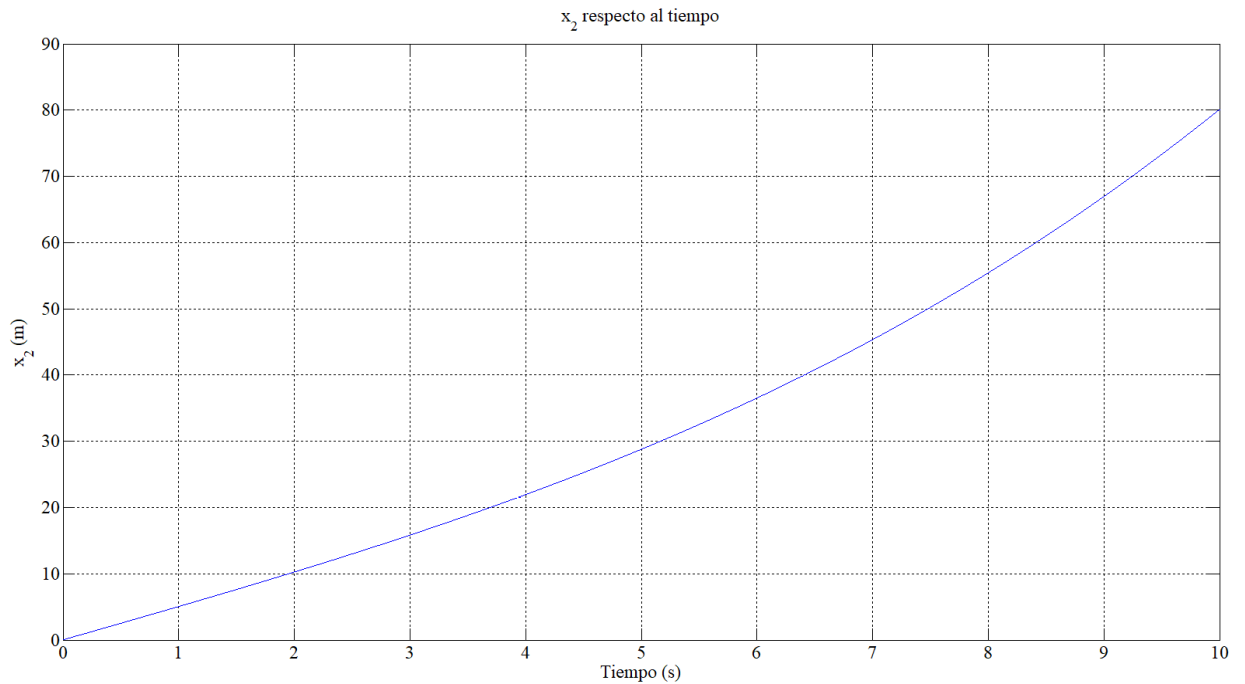


Figura 4-11. x_2 en aceleración del motor eléctrico.

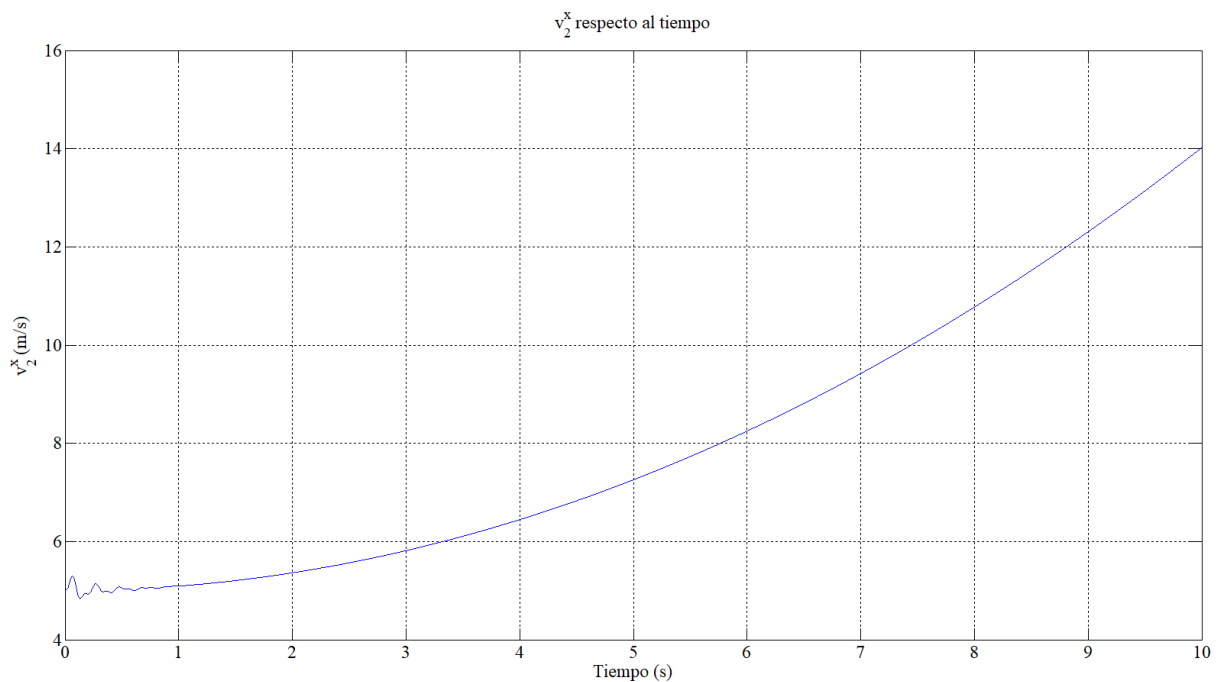


Figura 4-12. \dot{x}_2 en aceleración del motor eléctrico.

Se puede observar como la coordenada x_2 para $t = 10$ s tiene un valor muy diferente en ambas simulaciones. Para v constante $x_2(t = 10 \text{ s}) = 50$ m, en cambio con el par de aceleración aplicado $x_2(t = 10 \text{ s}) = 80$ m. Además, la velocidad \dot{x}_2 pasa de tener forma constante a parabólica llegando a un valor de $\dot{x}_2(t = 10 \text{ s}) = 14$ m/s por lo que queda comprobado que el patinete se acelera en esta simulación.

Se debe analizar si la aplicación de este par externo afecta de alguna manera a la trayectoria rectilínea del patinete. Para ello vamos a comparar las coordenadas δ (giro del manillar) y ψ_2 (giro del sólido 2 respecto a z) con el par aplicado respecto a las de v constante.

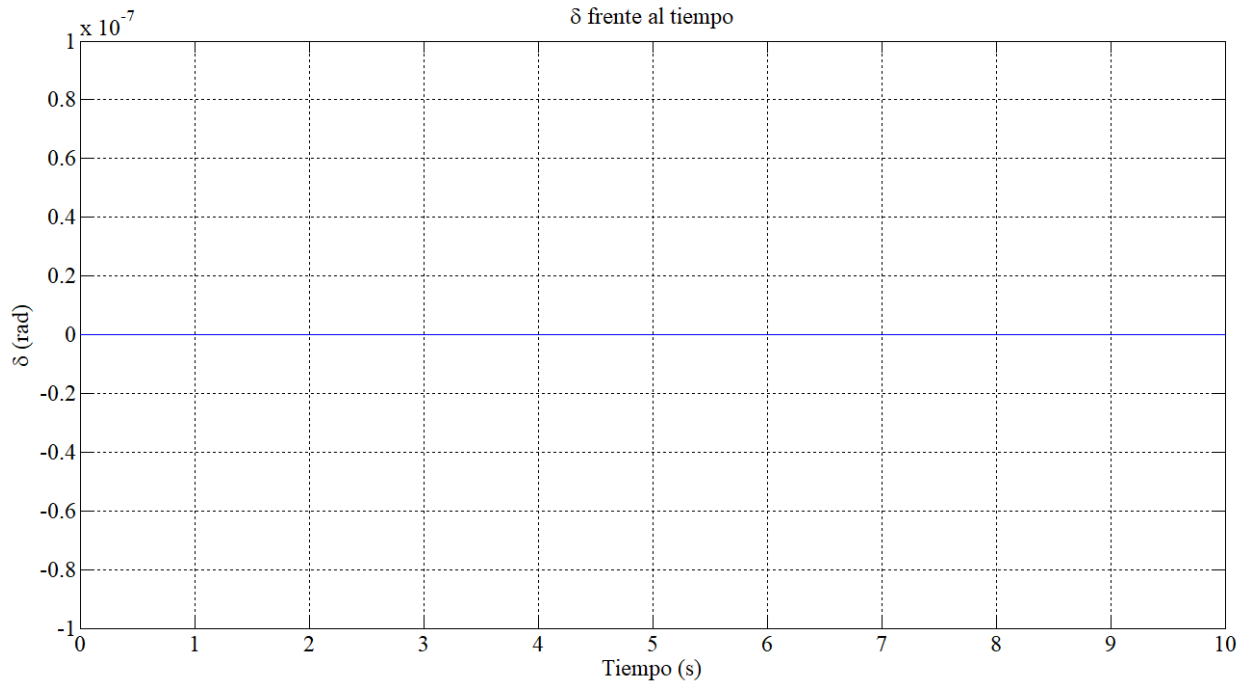


Figura 4-13. δ en aceleración del motor eléctrico.

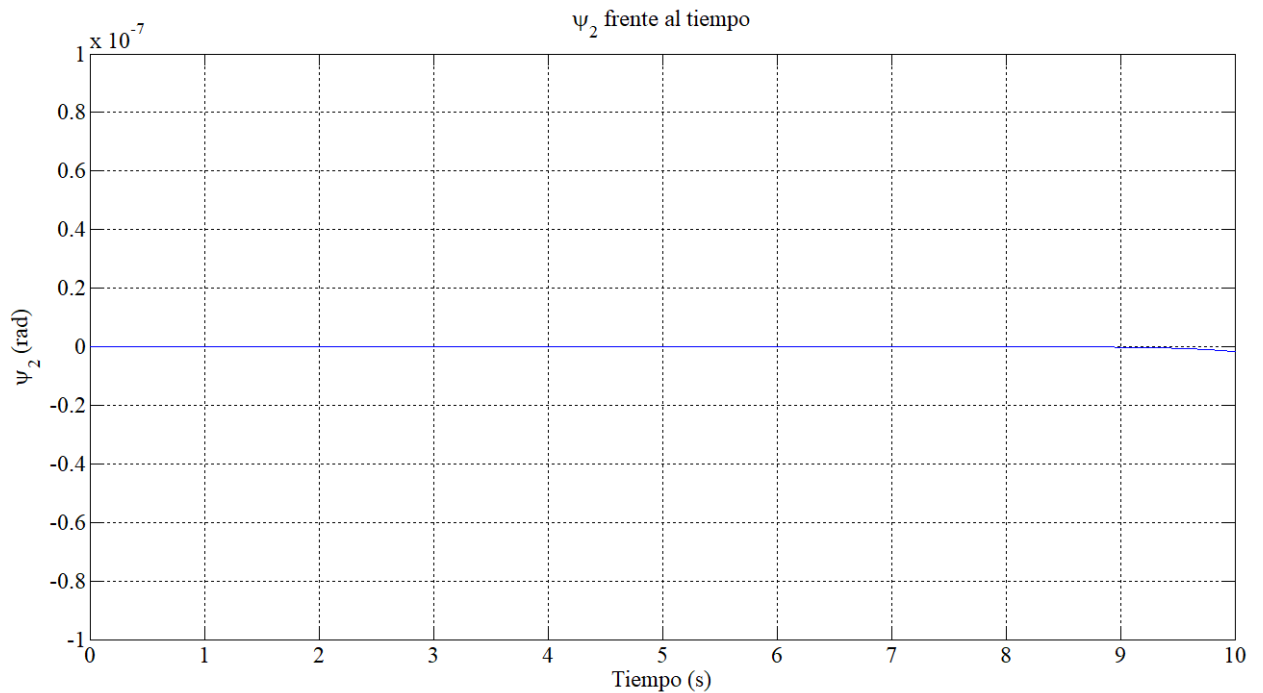


Figura 4-14. ψ_2 en aceleración del motor eléctrico.

Cómo se puede observar las dos coordenadas vuelven a ser cero en toda la simulación como en la simulación a v constante, por lo que se puede verificar que el par externo aplicado no afecta a la trayectoria rectilínea del patinete. Sin embargo, se ha observado cómo otras coordenadas sí se han visto afectadas por la aplicación de este par. La estabilidad que encuentran los valores de las coordenadas z_2 , θ_{62} y S_{43} en la simulación a v constante se ve afectada en esta simulación debido al par de aceleración aplicado.

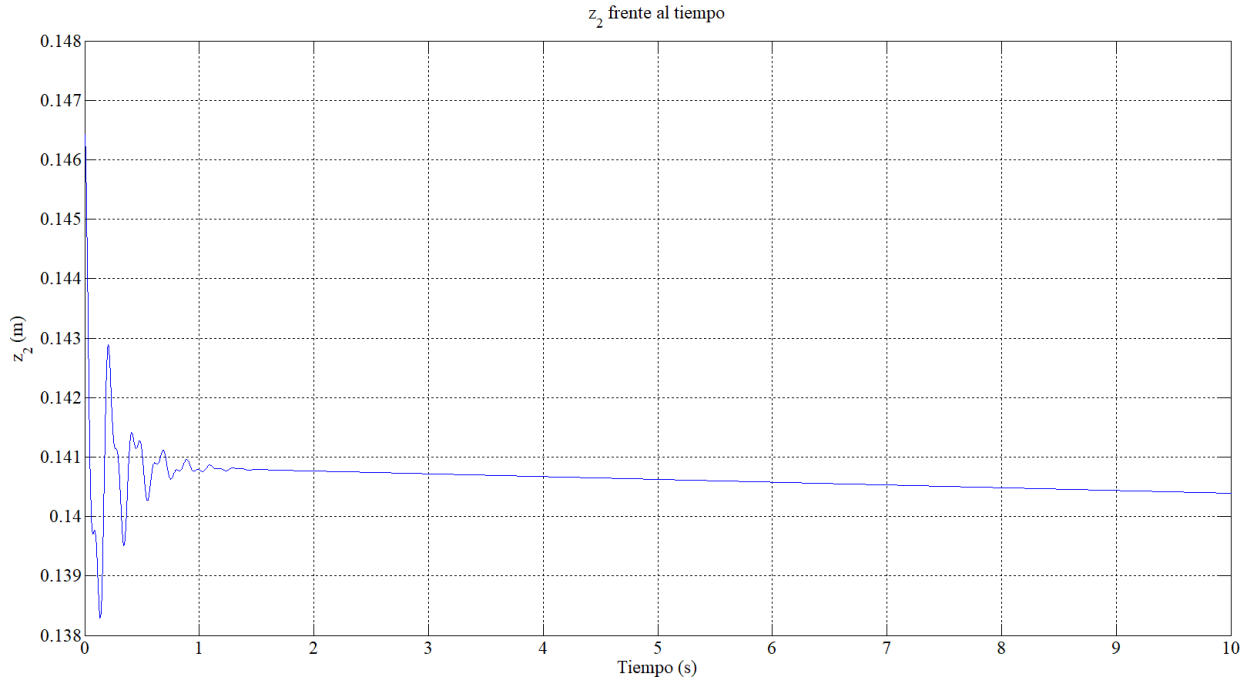


Figura 4-15. z_2 en aceleración del motor eléctrico.

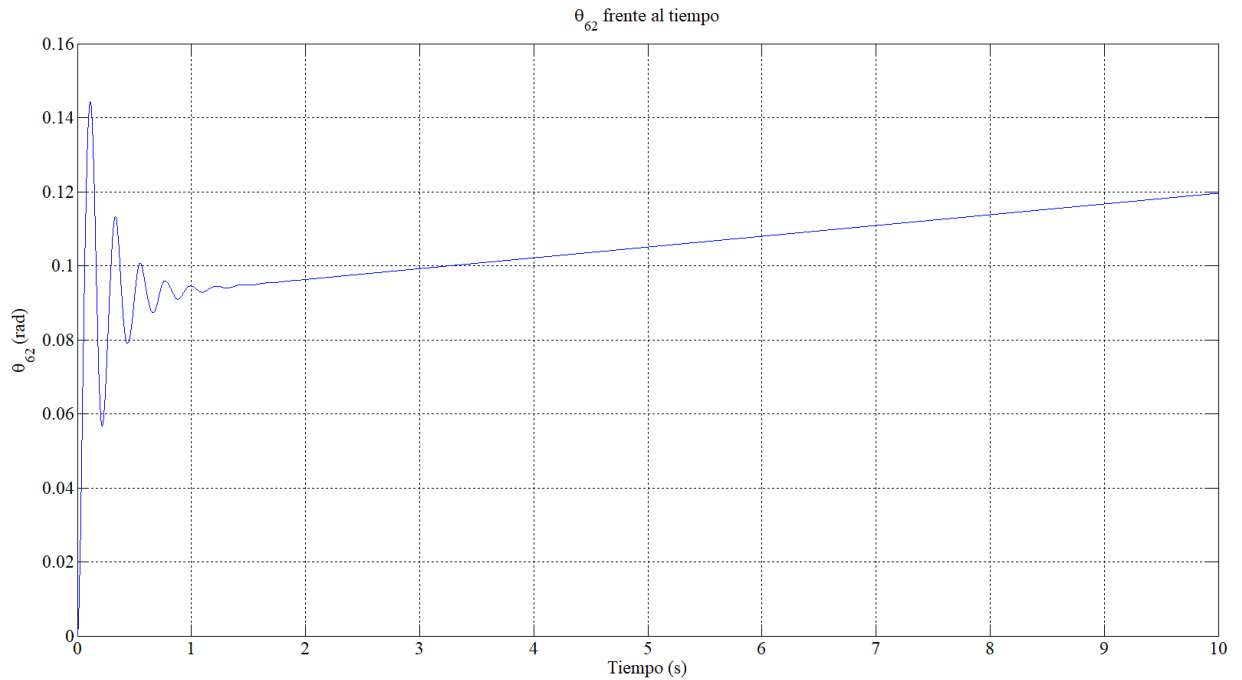


Figura 4-16. θ_{62} en aceleración del motor eléctrico.

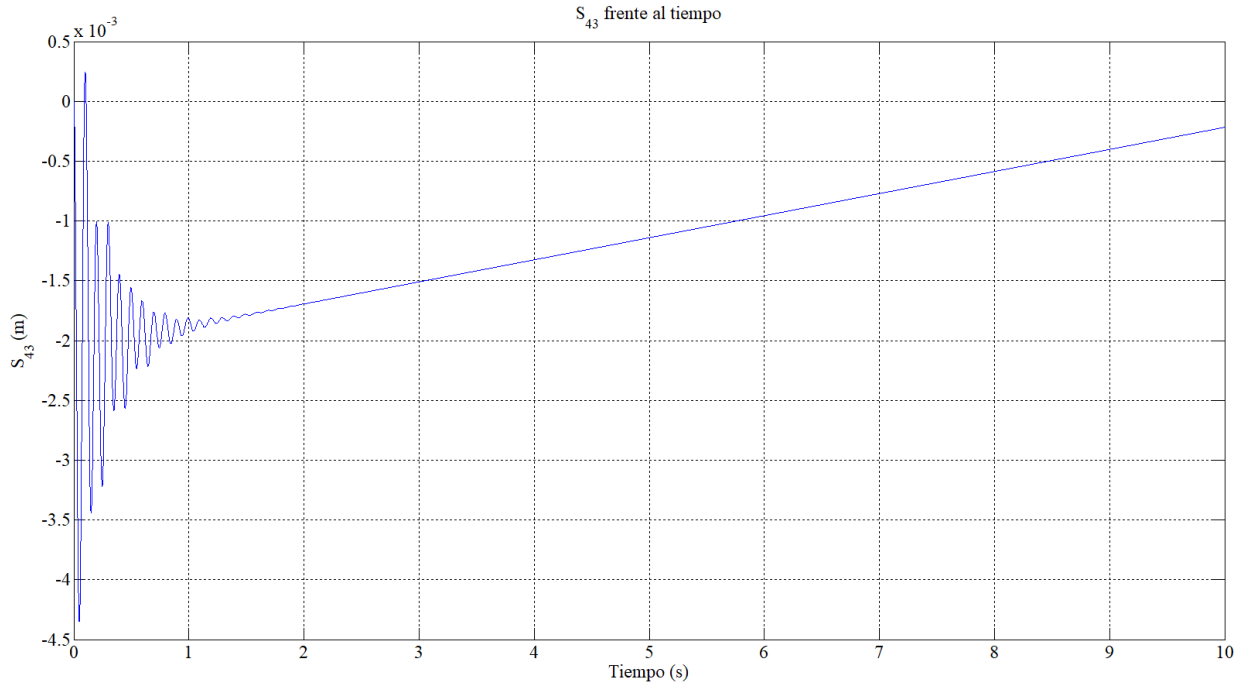


Figura 4-17. S_{43} en aceleración del motor eléctrico.

Se observa cómo la suspensión delantera experimenta una expansión a medida que aumenta la velocidad. En cambio, la suspensión rotacional trasera sufre una compresión con el aumento de velocidad y esto hace que el c.d.g. del bastidor inferior disminuya verticalmente a medida que avanza el tiempo como se puede observar en la gráfica de la coordenada z_2 .

4.3. Maniobra de frenado

La maniobra de frenado consiste en aplicar un par a la rueda delantera (sólido 5) según el eje y_5 como se hizo para la aceleración del motor eléctrico, pero en este caso en sentido negativo para ir decelerando el patinete. Debido al principio de acción y reacción se le aplica el mismo par pero de sentido contrario al amortiguador lineal (sólido 4). La magnitud del par se ha establecido en $1 \cdot t$, es decir, el par será cada vez mayor a medida que avanze el tiempo de simulación. Al tener un nuevo par externo para los sólidos 4 y 5, la matriz \hat{Q}_{apl} cambiará:

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \cdot t \\ 0 \end{bmatrix} \quad M_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \cdot t \\ 0 \end{bmatrix}$$

El patinete nuevamente comienza con una velocidad inicial de $v = 5$ m/s y con unas condiciones iniciales en posición iguales a las explicadas al comienzo de este apartado. El tiempo de simulación seguirá siendo de 10 segundos.

Para comprobar que el patinete se ha decelerado se van a comparar la coordenada x_2 y la velocidad \dot{x}_2 con el par aplicado respecto a las del patinete a v constante que realizaba un movimiento rectilíneo uniforme, es decir, con una deceleración nula.

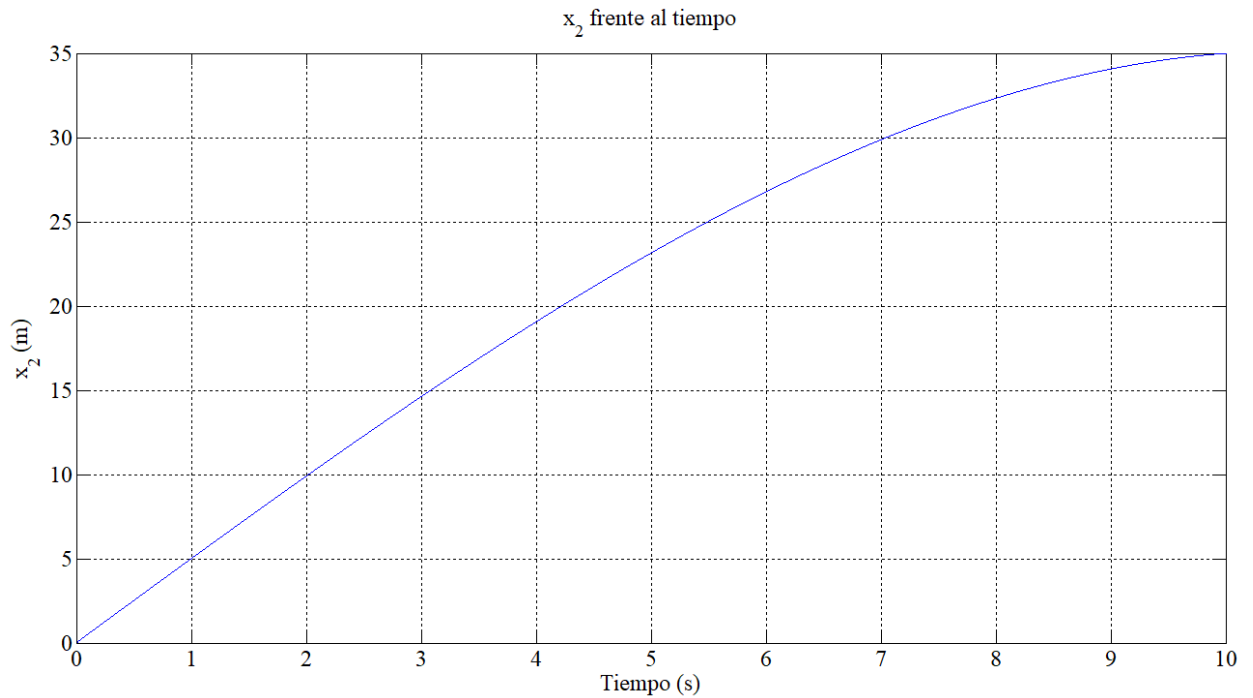


Figura 4-18. x_2 en maniobra de frenado.

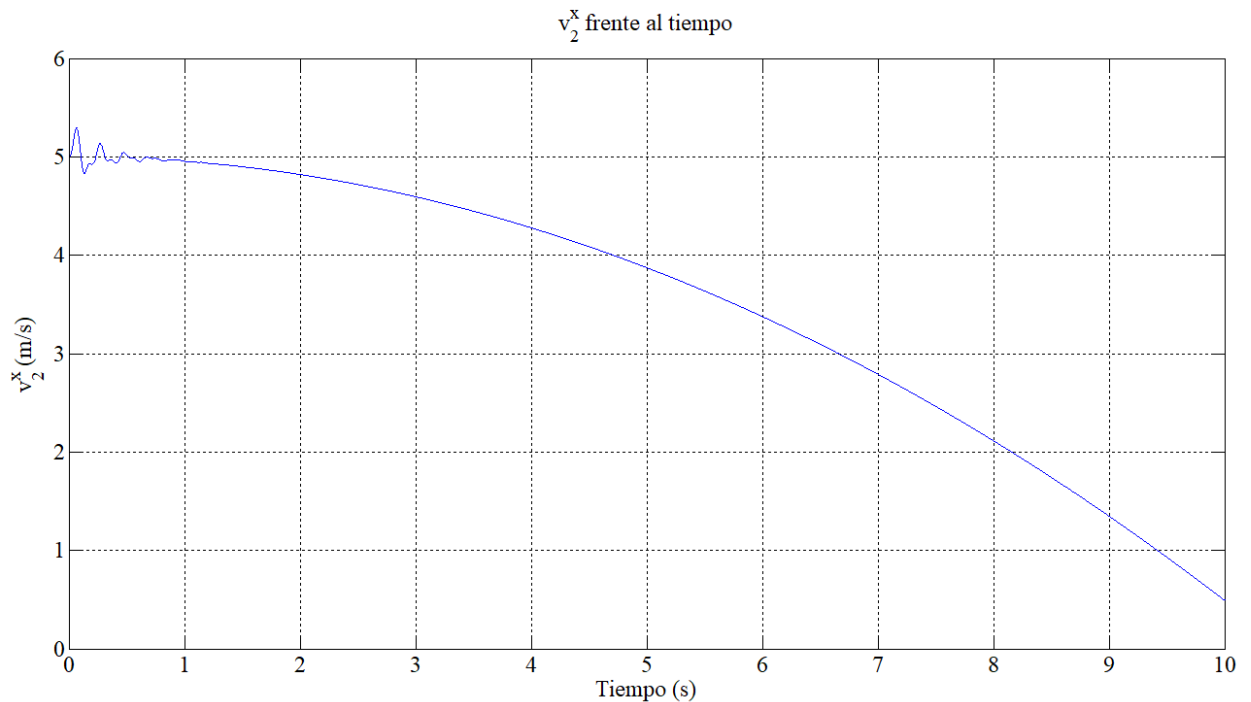


Figura 4-19. \dot{x}_2 en maniobra de frenado.

Se puede observar como la coordenada x_2 para $t = 10$ s tiene un valor muy diferente en ambas simulaciones. Para v constante $x_2(t = 10 \text{ s}) = 50 \text{ m}$, en cambio con el par de deceleración aplicado $x_2(t = 10 \text{ s}) = 35 \text{ m}$. Además, la velocidad \dot{x}_2 pasa de tener forma constante a parabólica llegando a un valor de $\dot{x}_2(t = 10 \text{ s}) = 0,5 \text{ m/s}$ por lo que queda comprobado que el patinete se frena en esta simulación.

Para esta simulación se han hecho las mismas comprobaciones, para ver si la trayectoria rectilínea del patinete se ve afectada, que en la simulación de la aceleración del motor eléctrico y se observa de igual modo que la trayectoria rectilínea no se ve afectada ya que las coordenadas δ y ψ_2 son cero en toda la simulación. Además, de igual modo que en la simulación anterior, la estabilidad que encuentran los valores de las coordenadas z_2 , θ_{62} y S_{43} para la simulación a v constante se ve afectada.

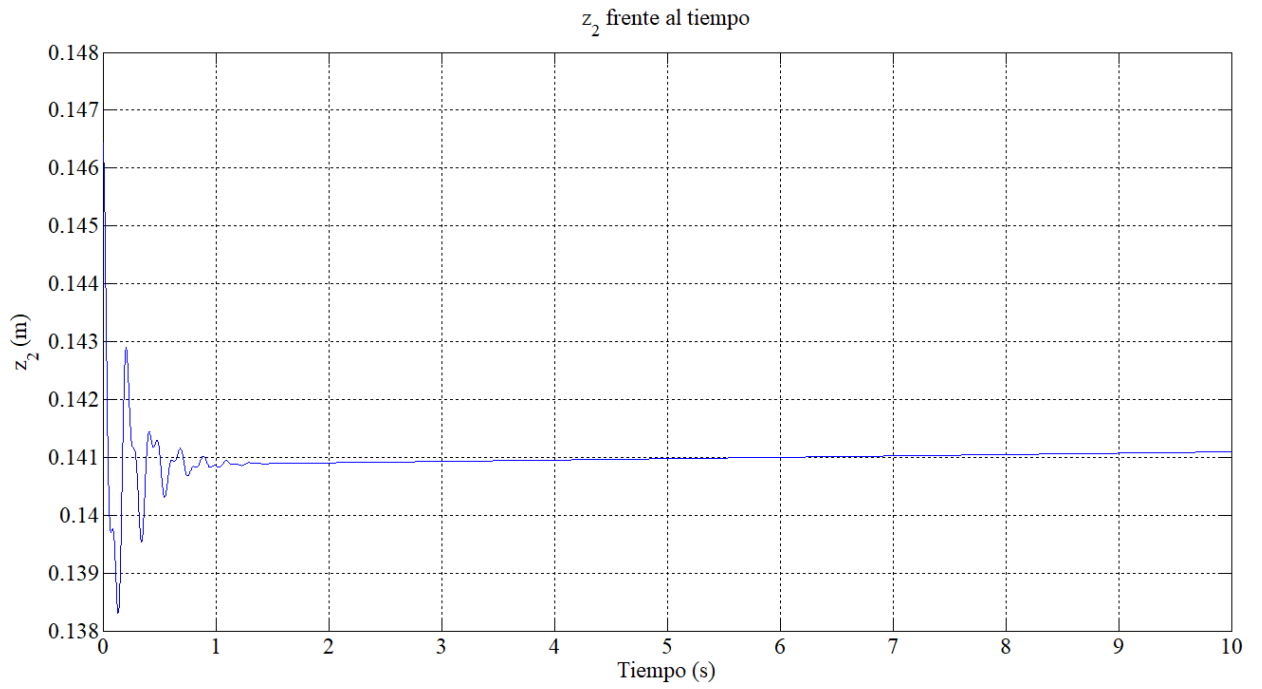


Figura 4-20. z_2 en maniobra de frenado.

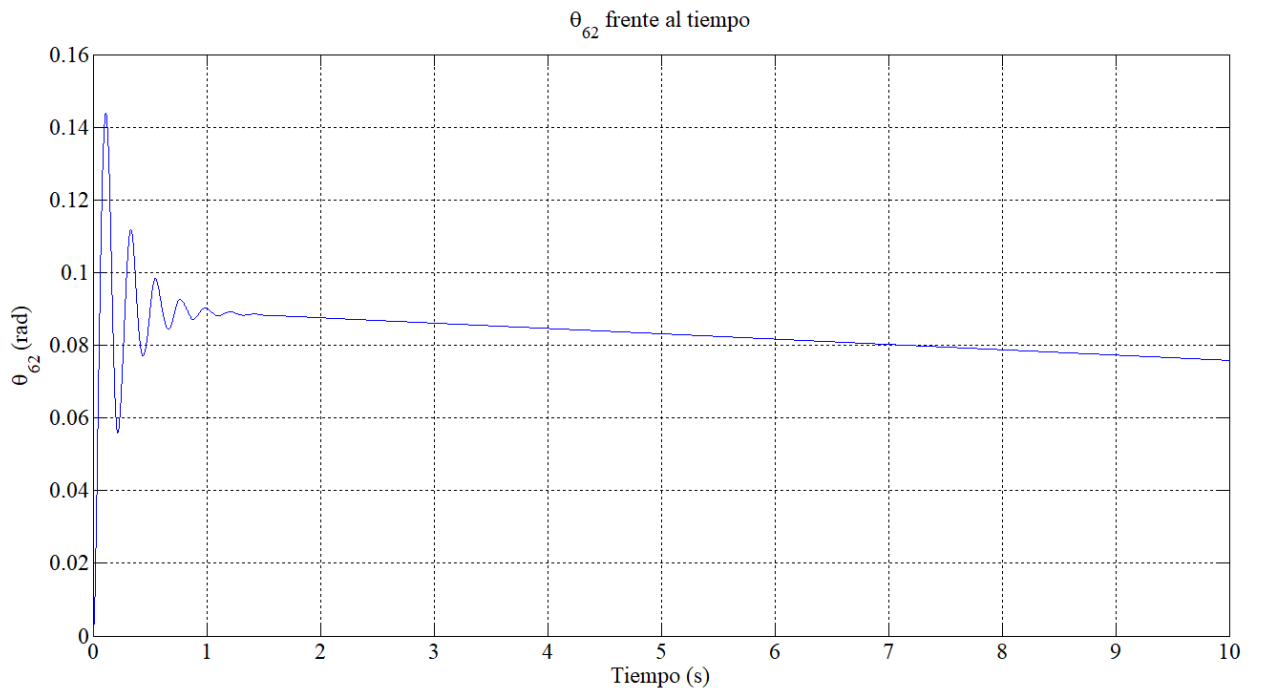


Figura 4-21. θ_{62} en maniobra de frenado.

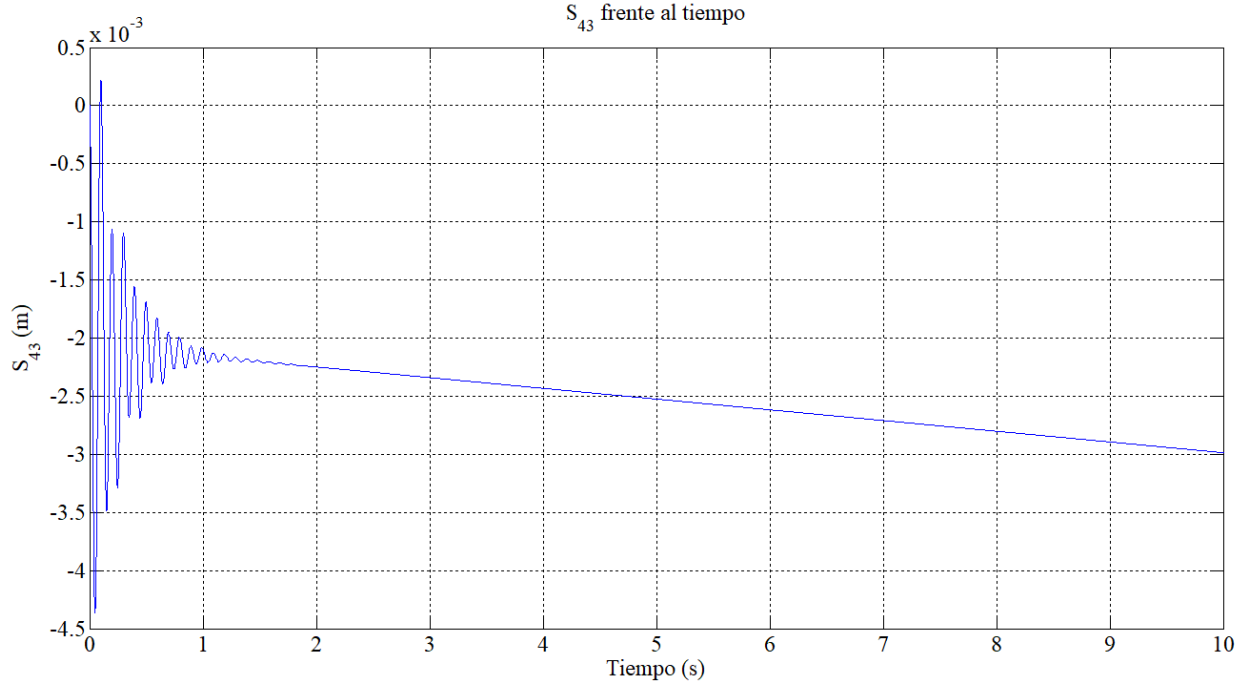


Figura 4-22. S_{43} en maniobra de frenado.

En esta simulación ocurre totalmente lo contrario que en la aceleración del motor eléctrico. En este caso, la suspensión delantera experimenta una compresión, mientras que la suspensión rotacional trasera sufre una expansión que hace que el c.d.g. del bastidor inferior aumente verticalmente con el tiempo como se observa en la gráfica de la coordenada z_2 .

4.4. Oscilación del humano respecto al eje y_8

En esta simulación se hará oscilar al humano respecto al eje y_8 haciendo como si este se estuviera balanceando hacia delante y hacia detrás, volviendo a “lanzar” el patinete a una velocidad constante de $v = 5 \text{ m/s}$ y con un tiempo de simulación de 10 segundos. Para realizarlo se impondrá una restricción de movilidad a la coordenada θ_{82} de tal forma que $\theta_{82} = A \cdot \text{sen}(wt)$. Al tener ahora una restricción de movilidad, la matriz E dejaría de ser nula. Hay que recordar que la restricción $\theta_{82} = 0$ corresponde a la restricción número 8 del vector de restricciones holónomas C_h , por lo que el nuevo vector de restricciones de movilidad será de la siguiente manera:

$$C(t) = \begin{bmatrix} 0_{7 \times 1} \\ -A \cdot \text{sen}(wt) \end{bmatrix}$$

Por lo que al tener 12 restricciones en total, las matrices E y \dot{E} serán:

$$E = \begin{bmatrix} C(t) \\ 0_{4 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{7 \times 1} \\ -A \cdot w \cdot \cos(wt) \\ 0_{4 \times 1} \end{bmatrix} ; \quad \dot{E} = \begin{bmatrix} 0_{7 \times 1} \\ A \cdot w^2 \cdot \text{sen}(wt) \\ 0_{4 \times 1} \end{bmatrix}$$

Debido a que ahora hay restricciones de movilidad la resolución del problema inicial en velocidad cambiará.

$$\dot{q}_{d0} = -(D_d(q_0))^{-1} (D_i(q_0) \dot{q}_{i0} + E(t=0))$$

Si se vuelve a dar el mismo valor a las coordenadas independientes que en los otros apartados.

$$\dot{q}_{i0} = [\dot{y}_2 = 0 \quad \dot{\phi}_2 = 0 \quad \dot{\theta}_{54} = \frac{v}{R_F + e_F} \quad \dot{\xi}_5 = -\frac{v}{R_F + e_F} \quad \dot{\xi}_7 = -\frac{v}{R_R + e_R}]$$

Se obtiene el siguiente valor de las coordenadas dependientes:

$$\dot{q}_{d0} = [\dot{x}_2 = v \quad \dot{\theta}_{76} = \frac{v}{R_R + e_R} \quad \dot{\theta}_{82} = A \cdot w \quad \dot{z}_2 = \dot{\psi}_2 = \dot{\theta}_2 = \dot{\phi}_{82} = \dot{\theta}_{62} = \dot{\delta} = \dot{S}_{43} = \dot{\eta}_5 = \dot{\eta}_7 = 0]$$

Estos valores tienen sentido ya que si $\theta_{82} = A \cdot \text{sen}(wt)$, entonces $\dot{\theta}_{82}(t = 0) = A \cdot w$. Además de la resolución del problema inicial en velocidad, la nueva restricción de movilidad cambiaría las ecuaciones de movimiento del patinete.

$$\begin{bmatrix} M_{17 \times 17} & D_{17 \times 12}^T \\ D_{12 \times 17} & 0_{12 \times 12} \end{bmatrix}_{29 \times 29} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{17 \times 1} \\ \lambda_{12 \times 1} \end{bmatrix}_{29 \times 1} = Z_{29 \times 1}$$

$$Z_{29 \times 1} = \begin{bmatrix} Q_{apl_{17 \times 1}} + Q_{v_{17 \times 1}} \\ -\dot{D}_{12 \times 17} \dot{q}_{17 \times 1} - \dot{E}_{12 \times 1} - 2\alpha \left(\begin{bmatrix} \dot{C}_{h_{8 \times 1}} \\ C_{nh_{4 \times 1}} \end{bmatrix} + [E_{12 \times 1}] \right) - \beta^2 \left(\begin{bmatrix} C_{h_{8 \times 1}} \\ 0_{4 \times 1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C(t)_{8 \times 1} \\ 0_{4 \times 1} \end{bmatrix} \right) \end{bmatrix}$$

Para realizar una primera prueba se darán unos valores pequeños tanto a la amplitud como a la velocidad angular de la función senoidal para que el balanceo del humano no sea tan brusco. $A = 0,2$ rad y $w = 2$ rad/s. Por lo que la coordenada θ_{82} sería de la siguiente manera:

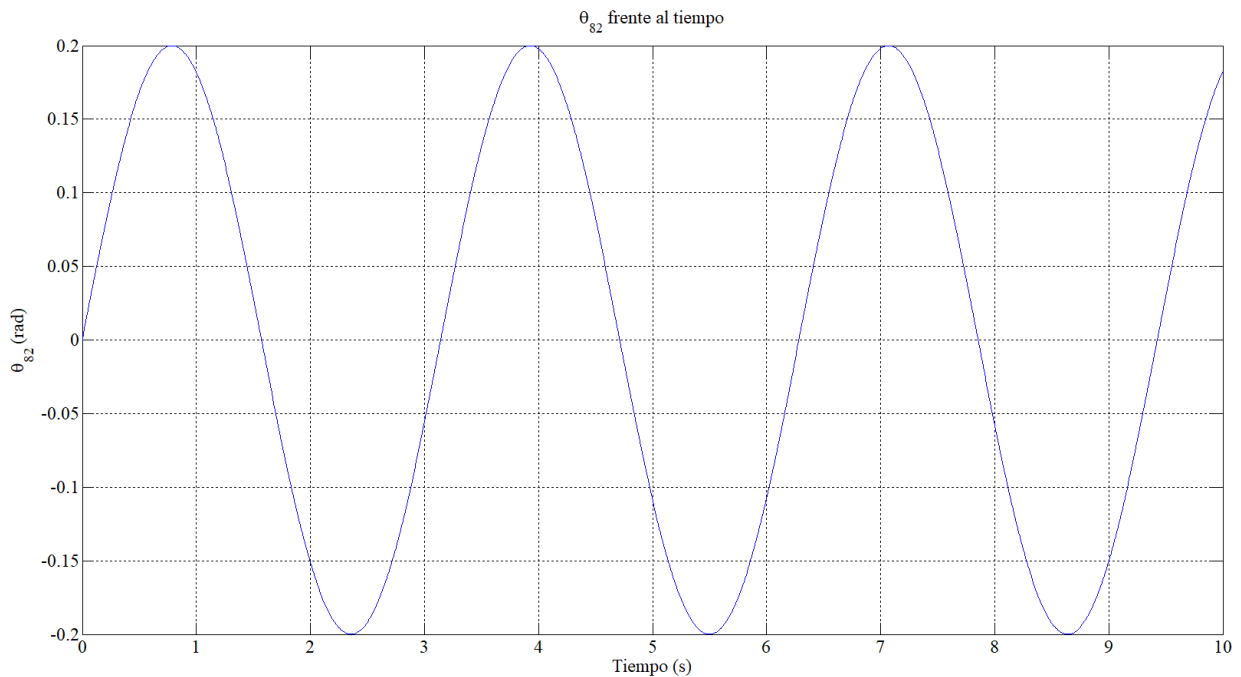


Figura 4-23. θ_{82} en oscilación del humano respecto al eje $y_8(1)$.

Para analizar las consecuencias del balanceo del humano hacia delante y hacia detrás se va a estudiar la coordenada z_2 para ver si el c.d.g. del bastidor inferior se ve afectado, las coordenadas θ_{62} y S_{43} para ver cómo afecta el balanceo a las suspensiones y los multiplicadores de Lagrange correspondientes a las restricciones r_F^Z y r_R^Z para ver si oscilan debido al efecto del balanceo.

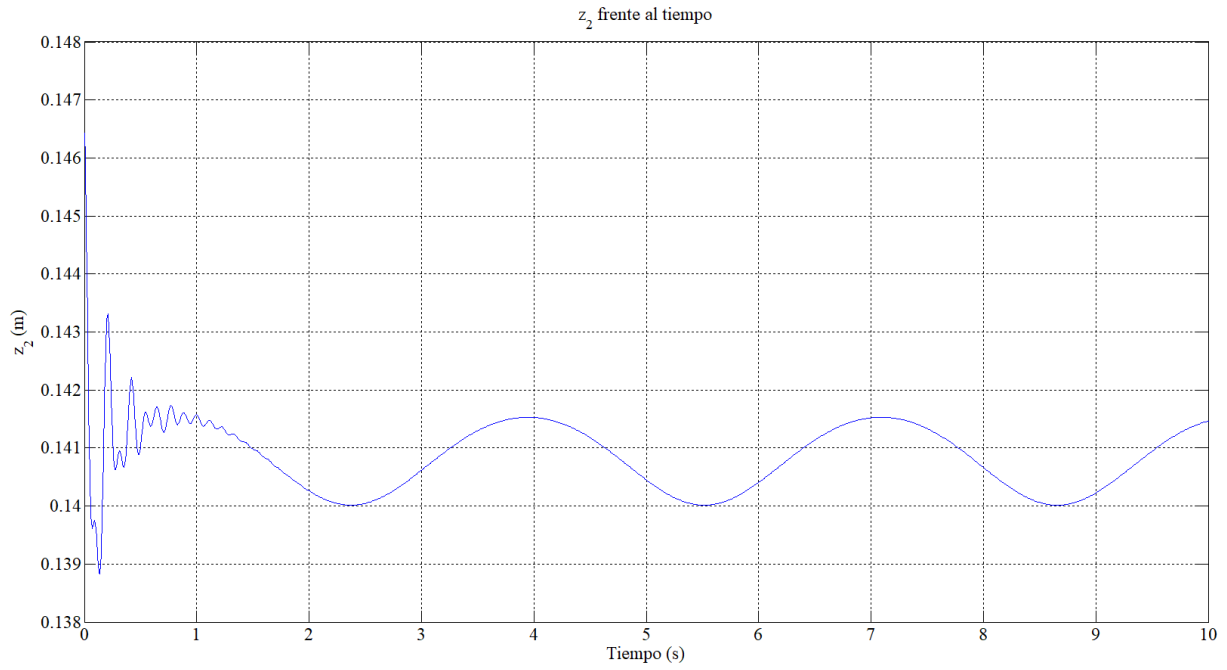


Figura 4-24. z_2 en oscilación del humano respecto al eje $y_8(1)$.

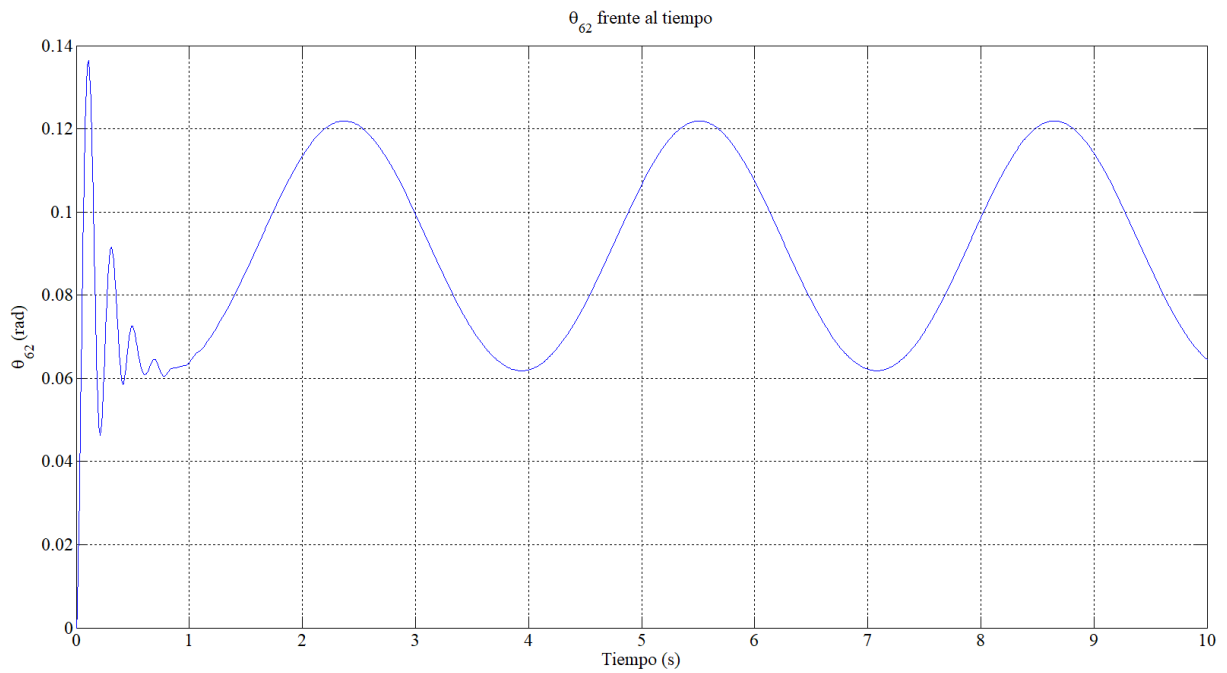


Figura 4-25. θ_{62} en oscilación del humano respecto al eje $y_8(1)$.

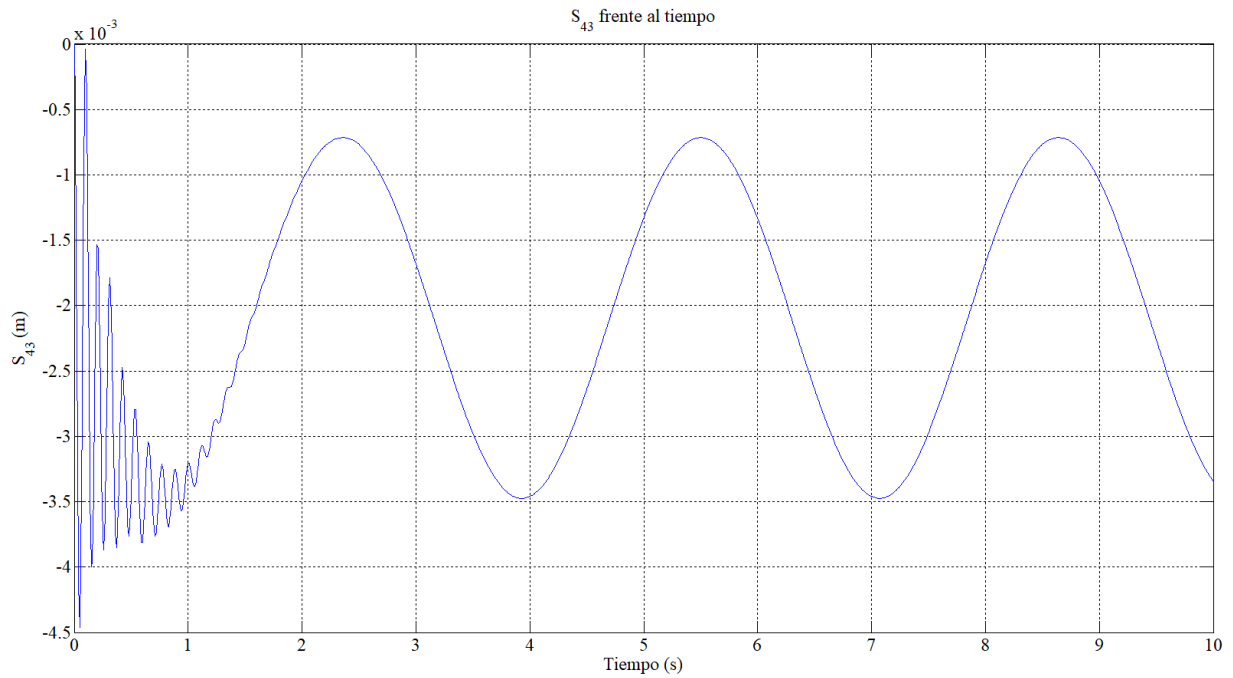


Figura 4-26. S_{43} en oscilación del humano respecto al eje $y_8(1)$.

Se observa cómo las coordenadas oscilan debido al efecto del balanceo del humano. Además, se observa que cuando el humano se inclina hacia delante la suspensión delantera experimenta una compresión y por el contrario la suspensión rotacional trasera sufre una expansión que hace que el c.d.g. del bastidor inferior aumente verticalmente como se observa en la gráfica de la coordenada z_2 . En cambio, cuando el humano se inclina hacia detrás la suspensión delantera experimenta una expansión y la suspensión rotacional trasera sufre una compresión que hace que el c.d.g. del sólido 2 disminuya verticalmente.

A continuación, se van a estudiar los multiplicadores de Lagrange previamente nombrados.

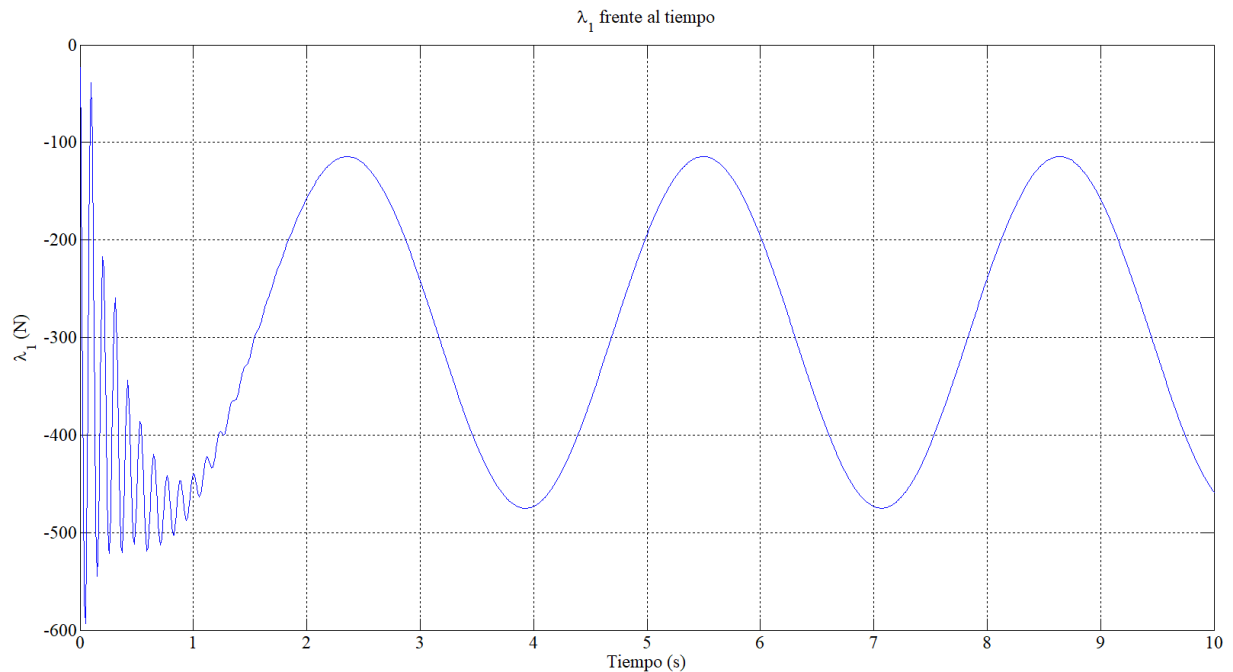


Figura 4-27. λ_1 en oscilación del humano respecto al eje $y_8(1)$.

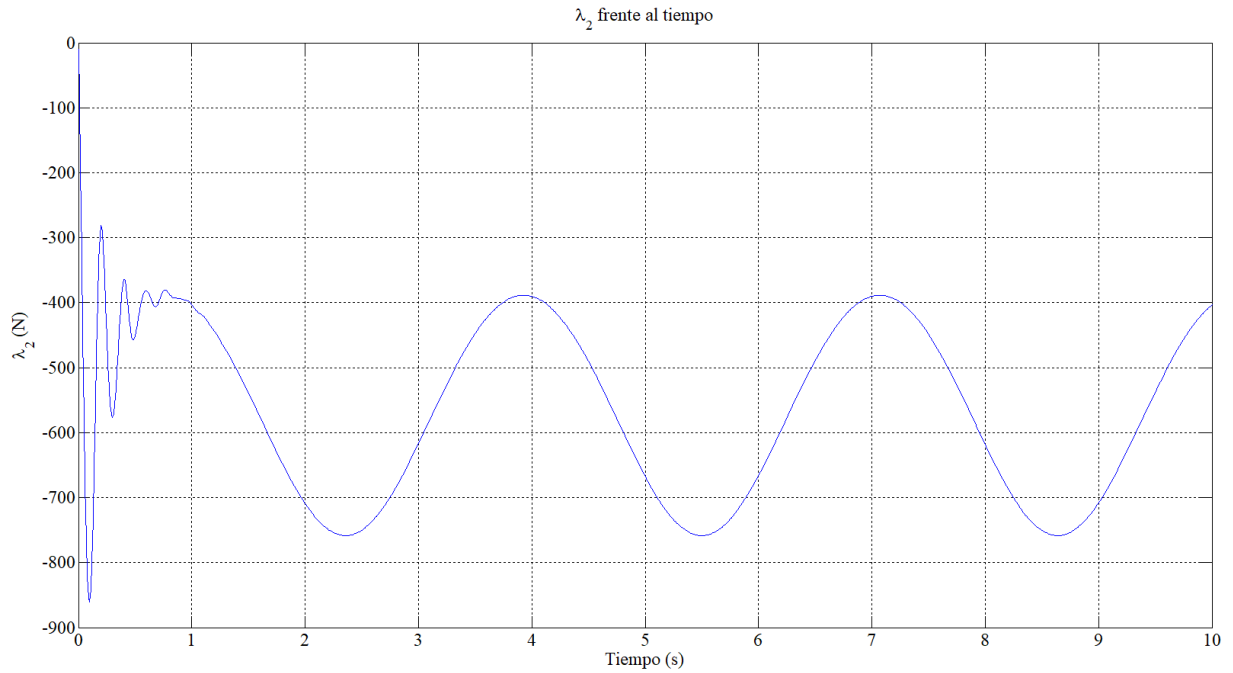


Figura 4-28. λ_2 en oscilación del humano respecto al eje $y_8(1)$.

Cómo se puede observar, la fuerza normal que se tiene que ejercer para que se cumpla la restricción es mayor cuando el humano se inclina hacia el lado correspondiente a cada rueda.

Para finalizar esta simulación, se hará una segunda prueba aumentando la amplitud y la velocidad angular de la función senoidal para ver cómo afecta esto a la oscilación de las coordenadas. $A = 0.3$ rad y $w = 4$ rad/s.

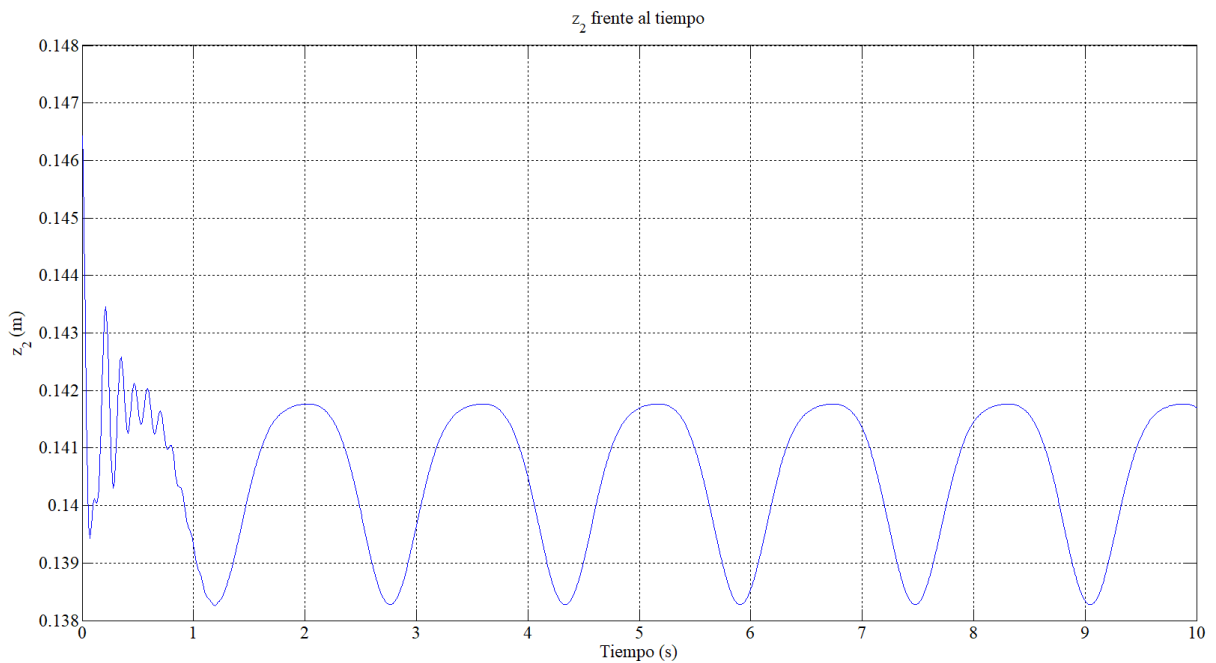


Figura 4-29. z_2 en oscilación del humano respecto al eje $y_8(2)$.

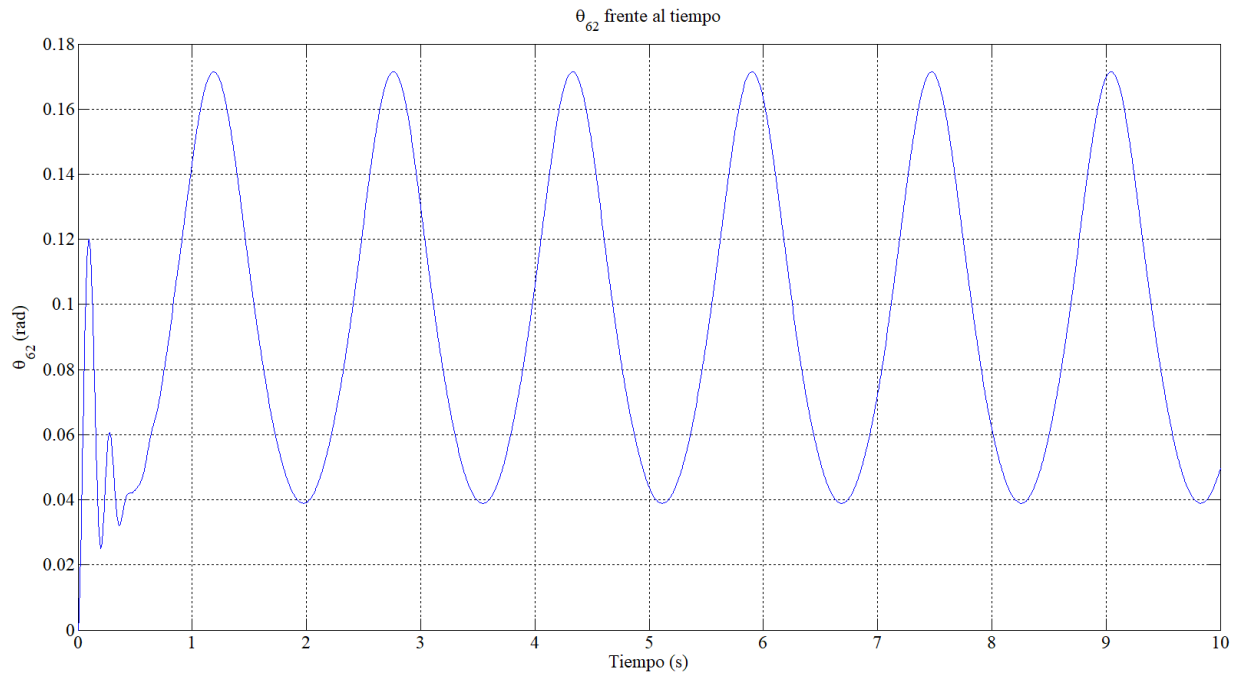


Figura 4-30. θ_{62} en oscilación del humano respecto al eje $y_8(2)$.

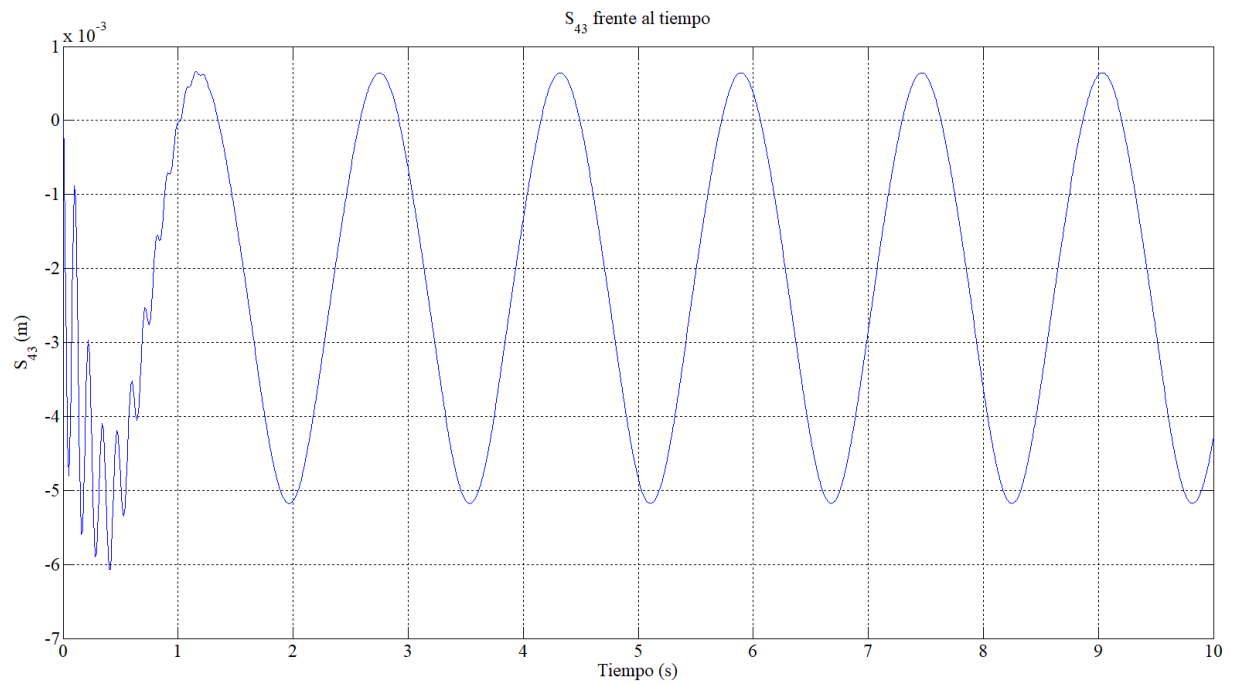


Figura 4-31. S_{43} en oscilación del humano respecto al eje $y_8(2)$.

Cómo se podía esperar, al aumentar la amplitud y la velocidad angular de la restricción de movilidad, las oscilaciones de las coordenadas a lo largo del tiempo también tienen mayores amplitudes.

4.5. Oscilación del humano respecto al eje x_8

En esta última simulación se hará oscilar al humano respecto al eje x_8 haciendo cómo si este se estuviera balanceado hacia los lados, volviendo a “lanzar” el patinete a una velocidad constante de $v = 5$ m/s y con un tiempo de simulación de 2 segundos, mucho más corto que en los casos anteriores ya que seguramente el patinete se caiga debido al balanceo hacia los lados y MATLAB dará problemas de compilación. Para realizar esta simulación se impondrá una restricción de movilidad a la coordenada ϕ_{82} de tal forma que $\phi_{82} = A \cdot \text{sen}(wt)$.

Cómo en el apartado anterior se tiene una nueva restricción de movilidad, por lo que se resolverán las ecuaciones de movimiento del patinete y el problema inicial en velocidad de la misma manera, pero teniendo en cuenta que la restricción $\phi_{82} = 0$ corresponde a la restricción número 7 del vector de restricciones holónomas.

$$C(t) = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 1} \\ -A \cdot \text{sen}(wt) \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad E = \begin{bmatrix} C(\dot{t}) \\ 0_{4 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 1} \\ -A \cdot w \cdot \cos(wt) \\ 0_{5 \times 1} \end{bmatrix} ; \quad \dot{E} = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 1} \\ A \cdot w^2 \cdot \text{sen}(wt) \\ 0_{5 \times 1} \end{bmatrix}$$

Se realizará una primera prueba dándole unos valores pequeños tanto a la amplitud como a la velocidad angular de la función senoidal para que el balanceo hacia los lados no sea muy brusco y el patinete no se caiga tan rápidamente. $A = 0,05$ rad y $w = 0,5$ rad/s. Para analizar cuánto tarda en caer el patinete se va a estudiar la coordenada z_2 .

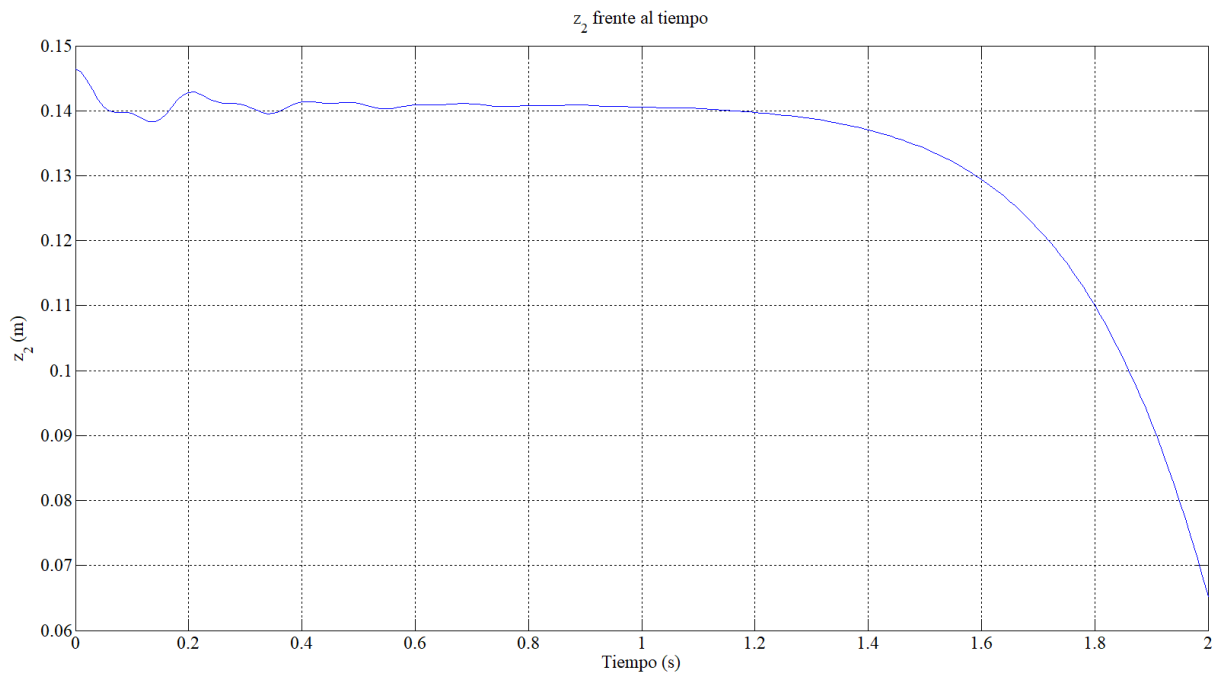


Figura 4-32. z_2 en oscilación del humano respecto al eje $x_8(1)$.

En este caso el patinete se termina cayendo al suelo cuando han pasado 2 segundos. Ahora se comprobará que si aumentamos la amplitud y la velocidad angular de la restricción de movilidad el patinete se caerá antes, ya que si el balanceo es más brusco, el patinete se desestabiliza más rápido. $A = 0,5$ rad y $w = 1$ rad/s.

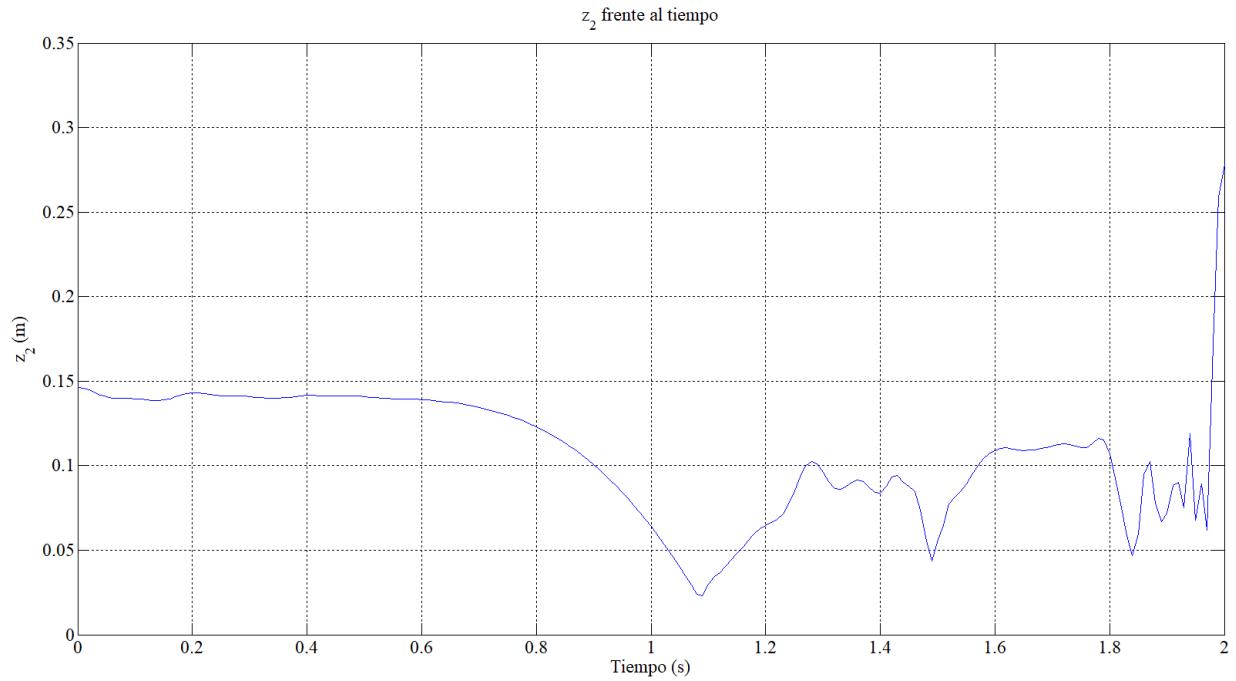


Figura 4-33. z_2 en oscilación del humano respecto al eje $x_8(2)$.

Cómo se puede observar, en este caso el patinete cae al suelo alrededor de 1 segundo desde el comienzo de la simulación. Por lo que queda comprobado que el balanceo del humano hacia los lados hace que el patinete se desestabilice y caiga al suelo, y también que cuánto más brusca y más rápida es esa oscilación del humano, menos tarda el patinete en caer.

5 CONCLUSIONES

Este estudio del patinete eléctrico permite que se entienda mejor su funcionamiento, permite conocer cómo funcionan entre sí todos sus sólidos y cómo se desarrollan todas sus coordenadas a lo largo del tiempo. Además, se ha entendido cómo funcionan y cómo afectan las suspensiones en el mecanismo del patinete y se ha entendido cómo se modelan las ruedas toroidales. Para simular el mecanismo del patinete se ha realizado una dinámica directa en el que se le aplican al mecanismo una serie de acciones (gravedad, suspensiones, acciones exteriores...) para posteriormente integrar las ecuaciones y calcular las coordenadas a lo largo de un tiempo determinado.

El análisis de las simulaciones realizadas ha generado un mayor conocimiento de cómo funciona el patinete eléctrico. Inicialmente, se han visto el desarrollo de las coordenadas cuando “lanzamos” el patinete con un movimiento rectilíneo uniforme. Posteriormente, se ha visto como acelerando o frenando el patinete, este se comporta de distintas maneras afectando al desarrollo de ciertas coordenadas. Por último, se ha conseguido estabilizar el patinete eléctrico partiendo desde una posición que sin la acción de fuerzas exteriores caería al suelo inmediatamente.

Una continuación a estos estudios podría ser la eliminación de las restricciones holónomas 7 y 8 en las que restringimos los posibles giros del humano respecto al patinete con lo que conseguimos que el patinete no se descontrola. Si se eliminan estas restricciones sería interesante estudiar las acciones exteriores que se podrían aplicar para que el humano (sólido 8) sea capaz de no caerse y de controlar el patinete, y así estabilizar la trayectoria.

REFERENCIAS

- [1] Arroyo Martín E., " Modelado y Estudio Cinemático y Dinámico de un Waveboard", Trabajo Fin de Grado, (2018).
- [2] García Vallejo D., Schiehlen W., García-Agúndez Blanco A., " eXS KickScooter Benchmark Documents".
- [3] Escalona Franco J.L., "Sistemas Dinámicos Multicuerpo", Apuntes de la asignatura Cinemática y Dinámica de Máquinas.
- [4] Baumgarte J., "Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems", (1972).
- [5] Ackermann, M., "Dynamics and Energetics of Walking with Prostheses", PhD thesis, Institut für Technische und Numerische Mechanik, Stuttgart (2007)
- [6] García Vallejo D., García-Agúndez Blanco A., Freire E., " Study of the forward locomotion of a three-dimensional multibody model of a Waveboard by inverse dynamics".

ANEXO I. CÓDIGOS DE MATLAB

Archivo de Generación de Funciones

```
gen = false;

fprintf('Defining symbolic variables...\n')
syms x2 y2 z2 psi2 teta2 fi2 fi82 teta82 teta62 teta76 delta s43 teta54 xi5 xi7 eta5
eta7 real
syms x2p y2p z2p psi2p teta2p fi2p fi82p teta82p teta62p teta76p deltap s43p teta54p
xi5p xi7p eta5p eta7p real
syms x2pp y2pp z2pp psi2pp teta2pp fi2pp fi82pp teta82pp teta62pp teta76pp deltapp
s43pp teta54pp xi5pp xi7pp eta5pp eta7pp real

fprintf('Defining constants...\n')
syms grav lamda L H xB zB d xH zH RR RF z43 z54 k4 k6 d4 d6 acelofren estab1 estab2
estab3 real
syms m2 m3 m4 m5 m6 m7 m8 real
syms I2xx I2yy I2zz I2xz I3xx I3yy I3zz I3xz I4xx I4yy I4zz I4xz I5xx I5yy I6xx I6yy
I6zz I6xz I7xx I7yy I8xx I8yy I8zz real

fprintf('Building transformation matrices...\n')
q = [x2, y2, z2, psi2, teta2, fi2, fi82, teta82, teta62, teta76, delta, s43, teta54,
xi5, xi7, eta5, eta7];
qp = [x2p, y2p, z2p, psi2p, teta2p, fi2p, fi82p, teta82p, teta62p, teta76p, deltap,
s43p, teta54p, xi5p, xi7p, eta5p, eta7p];
par = [grav lamda L H xB zB d xH zH RR RF z43 z54 k4 k6 d4 d6 acelofren estab1 estab2
estab3 m2 m3 m4 m5 m6 m7 m8 I2xx I2yy I2zz I2xz I3xx I3yy I3zz I3xz I4xx I4yy I4zz
I4xz I5xx I5yy I6xx I6yy I6zz I6xz I7xx I7yy I8xx I8yy I8zz];

wvar = 2*pi-lamda; %lamda=pi/10
A_lambda = [ cos(wvar), 0, sin(wvar);
            0, 1, 0;
            -sin(wvar), 0, cos(wvar)];

A_psi2 = [cos(psi2), -sin(psi2), 0;
          sin(psi2), cos(psi2), 0;
          0, 0, 1];

A_teta2 = [cos(teta2), 0, sin(teta2);
          0, 1, 0;
          -sin(teta2), 0, cos(teta2)];

A_fi2 = [1, 0, 0;
         0 cos(fi2), -sin(fi2);
         0 sin(fi2), cos(fi2)];

A_fi82 = [1, 0, 0;
         0 cos(fi82), -sin(fi82);
         0 sin(fi82), cos(fi82)];

A_teta82 = [cos(teta82), 0, sin(teta82);
          0, 1, 0;
          -sin(teta82), 0, cos(teta82)];

A_teta62 = [cos(teta62), 0, sin(teta62);
          0, 1, 0;
          -sin(teta62), 0, cos(teta62)];

A_teta76 = [cos(teta76), 0, sin(teta76);
          0, 1, 0;
          -sin(teta76), 0, cos(teta76)];

A_delta = [cos(delta), -sin(delta), 0;
          sin(delta), cos(delta), 0;
          0, 0, 1];
```

```

A_teta54 = [cos(teta54), 0, sin(teta54);
            0, 1, 0;
            -sin(teta54), 0, cos(teta54)];

A_xi5 = [cos(xi5), 0, sin(xi5);
         0, 1, 0;
         -sin(xi5), 0, cos(xi5)];

A_xi7 = [cos(xi7), 0, sin(xi7);
         0, 1, 0;
         -sin(xi7), 0, cos(xi7)];

A_eta5 = [cos(eta5), -sin(eta5), 0;
          sin(eta5),  cos(eta5), 0;
          0,          0, 1];

A_eta7 = [cos(eta7), -sin(eta7), 0;
          sin(eta7),  cos(eta7), 0;
          0,          0, 1];

A2 = A_psi2*A_teta2*A_fi2;
if gen, matlabFunction(A2, 'file', 'A2', 'Vars', {q,par}); end
A8=A2*A_fi82*A_teta82;
if gen, matlabFunction(A8, 'file', 'A8', 'Vars', {q,par}); end
A6=A2*A_teta62;
if gen, matlabFunction(A6, 'file', 'A6', 'Vars', {q,par}); end
A7=A6*A_teta76;
if gen, matlabFunction(A7, 'file', 'A7', 'Vars', {q,par}); end
A3=A2*A_lamda*A_delta;
A4=A3;
if gen, matlabFunction(A3, 'file', 'A3', 'Vars', {q,par}); end
if gen, matlabFunction(A4, 'file', 'A4', 'Vars', {q,par}); end
A5=A3*A_teta54;
if gen, matlabFunction(A5, 'file', 'A5', 'Vars', {q,par}); end

% Body-2
fprintf('Creating G2, G2p, H2 and H2p...\n')

syms A2p real; A2p = 0;
for i=1:length(q)
    A2p = A2p + diff(A2,q(i))*qp(i);
end

Wskew2 = (A2')*A2p ;

w1_2 = Wskew2(3,2);
w2_2 = Wskew2(1,3);
w3_2 = Wskew2(2,1);

w2 = [w1_2,w2_2,w3_2];
w2 = simplify(w2);
G2 = jacobian(w2,qp);
syms g2 real; g2 = 0;
for i=1:length(q)
    g2 = g2 + diff(G2,q(i))*qp(i);
end
if gen, matlabFunction(G2, 'file', 'G2', 'Vars', {q,par}); end
if gen, matlabFunction(g2, 'file', 'G2p', 'Vars', {q,qp,par}); end

r2 = [x2;y2;z2];
H2 = jacobian(r2,q);
syms h2 real; h2 = 0;
for i=1:length(q)
    h2 = h2 + diff(H2,q(i))*qp(i);
end
if gen, matlabFunction(H2, 'file', 'H2', 'Vars', {q,par}); end
if gen, matlabFunction(h2, 'file', 'H2p', 'Vars', {q,qp,par}); end

```

```

% Body-8
fprintf('Creating G8, G8p, H8 and H8p...\n')

syms A8p real; A8p = 0;
for i=1:length(q)
    A8p = A8p + diff(A8,q(i))*qp(i);
end

Wskew8 = (A8')*A8p ;

w1_8 = Wskew8(3,2);
w2_8 = Wskew8(1,3);
w3_8 = Wskew8(2,1);

w8 = [w1_8,w2_8,w3_8];
w8 = simplify(w8);
G8 = jacobian(w8,qp);
syms g8 real; g8 = 0;
for i=1:length(q)
    g8 = g8 + diff(G8,q(i))*qp(i);
end
if gen, matlabFunction(G8,'file','G8','Vars',{q,par}); end
if gen, matlabFunction(g8,'file','G8p','Vars',{q,qp,par}); end

r8 = r2 + A2*[-L;0;0;] + A8*[0;0;H];
if gen, matlabFunction(r8,'file','r8','Vars',{q,par}); end
H8 = jacobian(r8,q);
syms h8 real; h8 = 0;
for i=1:length(q)
    h8 = h8 + diff(H8,q(i))*qp(i);
end
if gen, matlabFunction(H8,'file','H8','Vars',{q,par}); end
if gen, matlabFunction(h8,'file','H8p','Vars',{q,qp,par}); end

% Body-6
fprintf('Creating G6, G6p, H6 and H6p...\n')

syms A6p real; A6p = 0;
for i=1:length(q)
    A6p = A6p + diff(A6,q(i))*qp(i);
end

Wskew6 = (A6')*A6p ;

w1_6 = Wskew6(3,2);
w2_6 = Wskew6(1,3);
w3_6 = Wskew6(2,1);

w6 = [w1_6,w2_6,w3_6];
w6 = simplify(w6);
G6 = jacobian(w6,qp);
syms g6 real; g6 = 0;
for i=1:length(q)
    g6 = g6 + diff(G6,q(i))*qp(i);
end
if gen, matlabFunction(G6,'file','G6','Vars',{q,par}); end
if gen, matlabFunction(g6,'file','G6p','Vars',{q,qp,par}); end

r6 = r2 + A2*[-(xB-d);0;0;] + A6*[-d/2;0;0];
if gen, matlabFunction(r6,'file','r6','Vars',{q,par}); end
H6 = jacobian(r6,q);
syms h6 real; h6 = 0;
for i=1:length(q)
    h6 = h6 + diff(H6,q(i))*qp(i);
end
if gen, matlabFunction(H6,'file','H6','Vars',{q,par}); end
if gen, matlabFunction(h6,'file','H6p','Vars',{q,qp,par}); end

% Body-7

```

```

fprintf('Creating G7, G7p, H7 and H7p...\n')

syms A7p real; A7p = 0;
for i=1:length(q)
    A7p = A7p + diff(A7,q(i))*qp(i);
end

Wskew7 = (A7')*A7p ;

w1_7 = Wskew7(3,2);
w2_7 = Wskew7(1,3);
w3_7 = Wskew7(2,1);

w7 = [w1_7,w2_7,w3_7];
w7 = simplify(w7);
G7 = jacobian(w7,qp);
syms g7 real; g7 = 0;
for i=1:length(q)
    g7 = g7 + diff(G7,q(i))*qp(i);
end
if gen, matlabFunction(G7,'file','G7','Vars',{q,par}); end
if gen, matlabFunction(g7,'file','G7p','Vars',{q,qp,par}); end

r7 = r6 + A6*[-d/2;0;0];
if gen, matlabFunction(r7,'file','r7','Vars',{q,par}); end
H7 = jacobian(r7,q);
syms h7 real; h7 = 0;
for i=1:length(q)
    h7 = h7 + diff(H7,q(i))*qp(i);
end
if gen, matlabFunction(H7,'file','H7','Vars',{q,par}); end
if gen, matlabFunction(h7,'file','H7p','Vars',{q,qp,par}); end

% Body-3
fprintf('Creating G3, G3p, H3 and H3p...\n')

syms A3p real; A3p = 0;
for i=1:length(q)
    A3p = A3p + diff(A3,q(i))*qp(i);
end

Wskew3 = (A3')*A3p ;

w1_3 = Wskew3(3,2);
w2_3 = Wskew3(1,3);
w3_3 = Wskew3(2,1);

w3 = [w1_3,w2_3,w3_3];
w3 = simplify(w3);
G3 = jacobian(w3,qp);
syms g3 real; g3 = 0;
for i=1:length(q)
    g3 = g3 + diff(G3,q(i))*qp(i);
end
if gen, matlabFunction(G3,'file','G3','Vars',{q,par}); end
if gen, matlabFunction(g3,'file','G3p','Vars',{q,qp,par}); end

r3 = r2 + A2*[(xH-xB);0;(zH-zB)];
if gen, matlabFunction(r3,'file','r3','Vars',{q,par}); end
H3 = jacobian(r3,q);
syms h3 real; h3 = 0;
for i=1:length(q)
    h3 = h3 + diff(H3,q(i))*qp(i);
end
if gen, matlabFunction(H3,'file','H3','Vars',{q,par}); end
if gen, matlabFunction(h3,'file','H3p','Vars',{q,qp,par}); end

% Body-4
fprintf('Creating G4, G4p, H4 and H4p...\n')

```

```

syms A4p real; A4p = 0;
for i=1:length(q)
    A4p = A4p + diff(A4,q(i))*qp(i);
end

Wskew4 = (A4')*A4p ;

w1_4 = Wskew4(3,2);
w2_4 = Wskew4(1,3);
w3_4 = Wskew4(2,1);

w4 = [w1_4,w2_4,w3_4];
w4 = simplify(w4);
G4 = jacobian(w4,qp);
syms g4 real; g4 = 0;
for i=1:length(q)
    g4 = g4 + diff(G4,q(i))*qp(i);
end
if gen, matlabFunction(G4,'file','G4','Vars',{q,par}); end
if gen, matlabFunction(g4,'file','G4p','Vars',{q,qp,par}); end

r4 = r3 + A3*[0;0;-(z43+s43)];
if gen, matlabFunction(r4,'file','r4','Vars',{q,par}); end
H4 = jacobian(r4,q);
syms h4 real; h4 = 0;
for i=1:length(q)
    h4 = h4 + diff(H4,q(i))*qp(i);
end
if gen, matlabFunction(H4,'file','H4','Vars',{q,par}); end
if gen, matlabFunction(h4,'file','H4p','Vars',{q,qp,par}); end

% Body-5
fprintf('Creating G5, G5p, H5 and H5p...\n')

syms A5p real; A5p = 0;
for i=1:length(q)
    A5p = A5p + diff(A5,q(i))*qp(i);
end

Wskew5 = (A5')*A5p ;

w1_5 = Wskew5(3,2);
w2_5 = Wskew5(1,3);
w3_5 = Wskew5(2,1);

w5 = [w1_5,w2_5,w3_5];
w5 = simplify(w5);
G5 = jacobian(w5,qp);
syms g5 real; g5 = 0;
for i=1:length(q)
    g5 = g5 + diff(G5,q(i))*qp(i);
end
if gen, matlabFunction(G5,'file','G5','Vars',{q,par}); end
if gen, matlabFunction(g5,'file','G5p','Vars',{q,qp,par}); end

r5 = r4 + A4*[0;0;-z54];
if gen, matlabFunction(r5,'file','r5','Vars',{q,par}); end
H5 = jacobian(r5,q);
syms h5 real; h5 = 0;
for i=1:length(q)
    h5 = h5 + diff(H5,q(i))*qp(i);
end
if gen, matlabFunction(H5,'file','H5','Vars',{q,par}); end
if gen, matlabFunction(h5,'file','H5p','Vars',{q,qp,par}); end

% Constraints
fprintf('Computing holonomic constraints...\n')
eR = 0.2*RR;

```



```

eF = 0.2*RF;

rR = r7 + A7*A_xi7*[RR;0;0] + A7*A_xi7*A_eta7*[eR;0;0];
rF = r5 + A5*A_xi5*[RF;0;0] + A5*A_xi5*A_eta5*[eF;0;0];

tLR = A7*[-(RR+eR*cos(eta7))*sin(xi7);0;-(RR+eR*cos(eta7))*cos(xi7)];
tTR = A7*[-eR*cos(xi7)*sin(eta7);eR*cos(eta7);eR*sin(eta7)*sin(xi7)];

tLF = A5*[-(RF+eF*cos(eta5))*sin(xi5);0;-(RF+eF*cos(eta5))*cos(xi5)];
tTF = A5*[-eF*cos(xi5)*sin(eta5);eF*cos(eta5);eF*sin(eta5)*sin(xi5)];

C1 = rF(3);
C2 = rR(3);
C3 = tLF(3);
C4 = tTF(3);
C5 = tLR(3);
C6 = tTR(3);
C7 = fi82;
C8 = tet82;
C = [C1;C2;C3;C4;C5;C6;C7;C8];

fprintf('Creating function C...\n')
if gen, matlabFunction(C,'file','C','Vars',{q,par}); end
syms Cpunto real; Cpunto = 0;
for i=1:length(q)
    Cpunto = Cpunto + diff(C,q(i))*qp(i);
end
if gen, matlabFunction(Cpunto,'file','Cpunto','Vars',{q,qp,par}); end

Cq = jacobian(C,q);
Cq = simplify(Cq);
syms Cqpunto real; Cqpunto = 0;
for i=1:length(q)
    Cqpunto = Cqpunto + diff(Cq,q(i))*qp(i);
end
if gen, matlabFunction(Cqpunto,'file','Cqpunto','Vars',{q,qp,par}); end

fprintf('Computing non-holonomic constraints...\n')
syms v7G7 real; v7G7 = 0;
for i=1:length(q)
    v7G7 = v7G7 + diff(r7,q(i))*qp(i);
end
vR = v7G7 + A7*cross(w7',[ (RR+eR*cos(eta7))*cos(xi7);eR*sin(eta7);-
(RR+eR*cos(eta7))*sin(xi7) ]);

syms v5G5 real; v5G5 = 0;
for i=1:length(q)
    v5G5 = v5G5 + diff(r5,q(i))*qp(i);
end
vF = v5G5 + A5*cross(w5',[ (RF+eF*cos(eta5))*cos(xi5);eF*sin(eta5);-
(RF+eF*cos(eta5))*sin(xi5) ]);

vp = [vF(1);vF(2);vR(1);vR(2)];

fprintf('Creating function vp...\n')
if gen, matlabFunction(vp,'file','vp','Vars',{q,qp,par}); end

B = jacobian(vp,qp);
B = simplify(B);

D = [Cq;B];
fprintf('Creating function D...\n')
if gen, matlabFunction(D,'file','D','Vars',{q,par}); end
Dpunto = [
    (jacobian(Cq*(qp'),q));
    (jacobian(B*(qp'),q))];
fprintf('Creating function Dpunto...\n')
if gen, matlabFunction(Dpunto,'file','Dpunto','Vars',{q,qp,par}); end

```

```

DpuntoXqp = [
    (jacobian(Cq*(qp'),q))*(qp');
    (jacobian(B*(qp'),q))*(qp')];
fprintf('Creating function DpuntoXqp...\n')
if gen, matlabFunction(DpuntoXqp,'file','DpuntoXqp','Vars',{q,qp,par}); end

velocidades = [Cpunto;vp];
fprintf('Creating function velocidades...\n')
if gen, matlabFunction(velocidades,'file','velocidades','Vars',{q,qp,par}); end

%Ecuaciones Newton-Euler
fprintf('Assembling equations...\n')
m(1,1:3) = [m2, 0, 0];
m(2,1:3) = [0, m2, 0];
m(3,1:3) = [0, 0, m2];

m(4,4:6) = [m3, 0, 0];
m(5,4:6) = [0, m3, 0];
m(6,4:6) = [0, 0, m3];

m(7,7:9) = [m4, 0, 0];
m(8,7:9) = [0, m4, 0];
m(9,7:9) = [0, 0, m4];

m(10,10:12) = [m5, 0, 0];
m(11,10:12) = [0, m5, 0];
m(12,10:12) = [0, 0, m5];

m(13,13:15) = [m6, 0, 0];
m(14,13:15) = [0, m6, 0];
m(15,13:15) = [0, 0, m6];

m(16,16:18) = [m7, 0, 0];
m(17,16:18) = [0, m7, 0];
m(18,16:18) = [0, 0, m7];

m(19,19:21) = [m8, 0, 0];
m(20,19:21) = [0, m8, 0];
m(21,19:21) = [0, 0, m8];

I(1,1:3) = [I2xx, 0, I2xz];
I(2,1:3) = [0, I2yy, 0];
I(3,1:3) = [I2xz, 0, I2zz];

I(4,4:6) = [I3xx, 0, I3xz];
I(5,4:6) = [0, I3yy, 0];
I(6,4:6) = [I3xz, 0, I3zz];

I(7,7:9) = [I4xx, 0, I4xz];
I(8,7:9) = [0, I4yy, 0];
I(9,7:9) = [I4xz, 0, I4zz];

I(10,10:12) = [I5xx, 0, 0];
I(11,10:12) = [0, I5yy, 0];
I(12,10:12) = [0, 0, I5xx];

I(13,13:15) = [I6xx, 0, I6xz];
I(14,13:15) = [0, I6yy, 0];
I(15,13:15) = [I6xz, 0, I6zz];

I(16,16:18) = [I7xx, 0, 0];
I(17,16:18) = [0, I7yy, 0];
I(18,16:18) = [0, 0, I7xx];

I(19,19:21) = [I8xx, 0, 0];
I(20,19:21) = [0, I8yy, 0];
I(21,19:21) = [0, 0, I8zz];

Mgorro =[m zeros(21)];

```

```

        zeros(21) I];
if gen, matlabFunction(Mgorro, 'file', 'Mgorro', 'Vars', {par}); end

fprintf('Creating function L...\n')
L = [H2;H3;H4;H5;H6;H7;H8;G2;G3;G4;G5;G6;G7;G8];
if gen, matlabFunction(L, 'file', 'L', 'Vars', {q,par}); end
fprintf('Creating function Lpunto...\n')
l=[h2;h3;h4;h5;h6;h7;h8;g2;g3;g4;g5;g6;g7;g8];
if gen, matlabFunction(l, 'file', 'Lpunto', 'Vars', {q,qp,par}); end

F2=[0;0;-m2*grav];
F3=[0;0;-m3*grav]+A3*[0;0;-k4*(s43)]+A3*[0;0;-d4*s43p];
F4=[0;0;-m4*grav]+A4*[0;0;k4*(s43)]+A4*[0;0;d4*s43p];
F5=[0;0;-m5*grav];
F6=[0;0;-m6*grav];
F7=[0;0;-m7*grav];
F8=[0;0;-m8*grav];

M2=[estab3;k6*teta62+d6*teta62p;0];
M3=[estab1;0;estab2];
M4=[0;-acelofren;0];
M5=[0;acelofren;0];
M6=[0;-k6*teta62-d6*teta62p;0];
M7=[0;0;0];
M8=[-estab3;0;0];
Qaplgorro=[F2;F3;F4;F5;F6;F7;F8;M2;M3;M4;M5;M6;M7;M8];

Fv2=[0;0;0];
Fv3=[0;0;0];
Fv4=[0;0;0];
Fv5=[0;0;0];
Fv6=[0;0;0];
Fv7=[0;0;0];
Fv8=[0;0;0];

v2 = [I2xx 0 I2xz;
       0 I2yy 0;
       I2xz 0 I2zz]*(w2');
Mv2 = cross(-w2',v2);

v3 = [I3xx 0 I3xz;
       0 I3yy 0;
       I3xz 0 I3zz]*(w3');
Mv3 = cross(-w3',v3);

v4 = [I4xx 0 I4xz;
       0 I4yy 0;
       I4xz 0 I4zz]*(w4');
Mv4 = cross(-w4',v4);

v5 = [I5xx 0 0;
       0 I5yy 0;
       0 0 I5xx]*(w5');
Mv5 = cross(-w5',v5);

v6 = [I6xx 0 I6xz;
       0 I6yy 0;
       I6xz 0 I6zz]*(w6');
Mv6 = cross(-w6',v6);

v7 = [I7xx 0 0;
       0 I7yy 0;
       0 0 I7xx]*(w7');
Mv7 = cross(-w7',v7);

v8 = [I8xx 0 0;
       0 I8yy 0;
       0 0 I8zz]*(w8');
Mv8 = cross(-w8',v8);

```

```

fprintf('Creating function Qvgorro...\n')
Qvgorro = [Fv2;Fv3;Fv4;Fv5;Fv6;Fv7;Fv8;Mv2;Mv3;Mv4;Mv5;Mv6;Mv7;Mv8];
if gen, matlabFunction(Qvgorro,'file','Qvgorro','Vars',{q,qp,par}); end

fprintf('Creating function M...\n')
M = L'*Mgorro*L;
if gen, matlabFunction(M,'file','M','Vars',{q,par}); end

fprintf('Creating function Qapl...\n')
Qapl = L'*Qaplgorro;
if gen, matlabFunction(Qapl,'file','Qapl','Vars',{q,qp,par}); end

fprintf('Creating function A...\n')
Qv = L'*(Qvgorro-Mgorro*l*(qp));
A = [M D';D zeros(12)];
if gen, matlabFunction(A,'file','A','Vars',{q,par}); end

```

Archivo de Integración de Ecuaciones

```

%constantes
grav = 9.81;
lamda= pi/10;
L=0.2;
H=1;
xB=0.528;
zB=0.149;
d=0.115;
xH=0.733;
zH=0.696;
RR=0.096;
RF=0.105;
eR = 0.2*RR;
eF = 0.2*RF;
z43=0.5164;
z54=0.105;
k4=122.05e3;
k6=53.43e3*d^2;
d4=221.61;
d6=545.8*d^2;
acelofren=0;
estab1=0;
estab2=0;
estab3=0;

m2=2;
I2xx=0.01;
I2yy=0.17;
I2zz=0.17;
I2xz=0.03;

m3=7.5;
I3xx=0.42;
I3yy=0.63;
I3zz=0.23;
I3xz=0.3;

m4=0.5;
I4xx=0.002;
I4yy=0.003;
I4zz=0.0005;
I4xz=0.001;

m5=1.5;
I5xx=0.004;
I5yy=0.008;

m6=0.5;
I6xx=0.0005;
I6yy=0.003;

```

```

I6zz=0.003;
I6xz=0.001;

m7=0.65;
I7xx=0.002;
I7yy=0.004;

m8=74.6;
I8xx=13.0982;
I8yy=12.6357;
I8zz=0.965;

A_theta=0.3;
A_fi=0;
w_theta=4;
w_fi=0;

par = [grav lamda L H xB zB d xH zH RR RF z43 z54 k4 k6 d4 d6 acelofren estab1 estab2
estab3 m2 m3 m4 m5 m6 m7 m8 I2xx I2yy I2zz I2xz I3xx I3yy I3zz I3xz I4xx I4yy I4zz
I4xz I5xx I5yy I6xx I6yy I6zz I6xz I7xx I7yy I8xx I8yy I8zz];

ts=0:0.01:10;
q0=[0;0;zB+1;0;0;0;0;0;0;0;0;0;pi/2;pi/2;2*pi;3*pi/2];
v = 5;

options = optimset('Display','iter');

X0 = fsolve(@(X)
C([q0(1:2);X(1);q0(4);X(2);q0(6);X(3);X(4);q0(9:13);X(5);X(6);X(7);X(8)]',par), [q0(3);
q0(5);q0(7:8);q0(14:17)],options)
q0(3) = X0(1);
q0(5) = X0(2);
q0(7) = X0(3);
q0(8) = X0(4);
q0(14) = X0(5);
q0(15) = X0(6);
q0(16) = X0(7);
q0(17) = X0(8);

P=D(q0',par);
Ddep=[P(:,1),P(:,3:5),P(:,7:12),P(:,16:17)];
Dindep=[P(:,2),P(:,6),P(:,13),P(:,14:15)];
qpunto0indep=[0;0;v/(RF+eF);-v/(RF+eF);-v/(RR+eR)];
qpunto0dep=Ddep\(-Dindep*qpunto0indep-[0;0;0;0;0;0;-A_fi*w_fi;-
A_theta*w_theta;0;0;0;0])
qpunto0=[
    qpunto0dep(1);
    qpunto0indep(1);
    qpunto0dep(2:4);
    qpunto0indep(2);
    qpunto0dep(5:10);
    qpunto0indep(3:5);
    qpunto0dep(11:12)];
rank(Ddep)

%return
[t,y]=ode45(@(t,X) ecs(t,X,par,A_theta,A_fi,w_theta,w_fi),ts,[q0;qpunto0]);
return
res = [];
for j = 1:length(t)
    x = y(j,1:17);
    res = [res;C(x,par)'];
end
figure
plot(t,res)
title('Holonomic constraints')
res1 = [];
for j = 1:length(t)
    x = y(j,1:17);

```

```

        v = y(j,18:34);
        res1 = [res1;vp(x,v,par)'];
    end
    figure
    plot(t,res1)
    title('No-Holonomic constraints')

    figure
    plot(t,y(:,1));grid on;title('x_{2} (m)')
    figure
    plot(t,y(:,2));grid on;title('y_{2} (m)')
    figure
    plot(t,y(:,3));grid on;title('z_{2} (m)')

%return
for j=1:length(t)
    z(j,:)=(multiplicadores(y(j,:),par,ts(j),A_theta,A_fi,w_theta,w_fi)');
end

function f=ecs(t,X,par,A_theta,A_fi,w_theta,w_fi)
x=X(1:17,1)';
v=X(18:34,1)';
alfa=50;
beta=50;
%par(18)=2*t;
Z=[Qapl(x,v,par)+L(x,par)'*(Qvgorro(x,v,par)-Mgorro(par)*Lpunto(x,v,par)*v')-
-DpuntoXqp(x,v,par)-
[0;0;0;0;0;0;A_fi*w_fi^2*sin(w_fi*t);A_theta*w_theta^2*sin(w_theta*t);0;0;0;0]-
2*alfa*(velocidades(x,v,par)+[0;0;0;0;0;0;-A_fi*w_fi*cos(w_fi*t);-
A_theta*w_theta*cos(w_theta*t);0;0;0;0])-beta*beta*([C(x,par);0;0;0;0]+[0;0;0;0;0;0;-
A_fi*sin(w_fi*t);-A_theta*sin(w_theta*t);0;0;0;0])];
N=(A(x,par))\Z;
f=[v';N(1:17,1)];

function f=multiplicadores(X,par,t,A_theta,A_fi,w_theta,w_fi)
x=X(1,1:17);
v=X(1,18:34);
alfa=50;
beta=50;
%par(18)=-1*t;
Z=[Qapl(x,v,par)+L(x,par)'*(Qvgorro(x,v,par)-Mgorro(par)*Lpunto(x,v,par)*v')-
-DpuntoXqp(x,v,par)-
[0;0;0;0;0;0;A_fi*w_fi^2*sin(w_fi*t);A_theta*w_theta^2*sin(w_theta*t);0;0;0;0]-
2*alfa*(velocidades(x,v,par)+[0;0;0;0;0;0;-A_fi*w_fi*cos(w_fi*t);-
A_theta*w_theta*cos(w_theta*t);0;0;0;0])-beta*beta*([C(x,par);0;0;0;0]+[0;0;0;0;0;0;-
A_fi*sin(w_fi*t);-A_theta*sin(w_theta*t);0;0;0;0])];
N=(A(x,par))\Z;
f=N(18:29);

```

Archivo de Animación del Patinete

```

fid = figure;

uA2 = [-(xB-d);-0.1;0];
uB2 = [-(xB-d);0.1;0];
uC2 = [0;-0.1;0];
uD2 = [0;0.1;0];
uE2 = [xH-xB;-0.1;(zH-zB)/2];
uF2 = [xH-xB;0.1;(zH-zB)/2];
uA6 = [d/2;0.1;0];
uB6 = [d/2;-0.1;0];
uC6 = [-d/2;0.1;0];
uD6 = [-d/2;-0.1;0];
uA8 = [0;0;-H];
uB8 = [0;0;0];
uC8 = [0;0;0.3];

```

```

uA3 = [0;0;-z43];
uB3 = [0;0;0.2];
uC3 = [0;0.3;0.2];
uD3 = [0;-0.3;0.2];

A21 = A2(y(1,1:17),par);
A31 = A3(y(1,1:17),par);
A41 = A4(y(1,1:17),par);
A51 = A5(y(1,1:17),par);
A61 = A6(y(1,1:17),par);
A71 = A7(y(1,1:17),par);
A81 = A8(y(1,1:17),par);

R2 = [y(1,1),y(1,2),y(1,3)]';

r3s=r3(y(1,1:17),par);
R3=[r3s(1);r3s(2);r3s(3)];

r4s=r4(y(1,1:17),par);
R4=[r4s(1);r4s(2);r4s(3)];

r5s=r5(y(1,1:17),par);
R5=[r5s(1),r5s(2),r5s(3)]';

r6s=r6(y(1,1:17),par);
R6=[r6s(1);r6s(2);r6s(3)];

r7s=r7(y(1,1:17),par);
R7=[r7s(1);r7s(2);r7s(3)];

r8s=r8(y(1,1:17),par);
R8=[r8s(1);r8s(2);r8s(3)];

B2=[R2+A21*uA2,R2+A21*uB2,R2+A21*uD2,R2+A21*uF2,R2+A21*uE2,R2+A21*uC2,R2+A21*uA2];
B6=[R6+A61*uA6,R6+A61*uB6,R6+A61*uD6,R6+A61*uC6,R6+A61*uA6];
B3=[R4,R3+A31*uA3,R3+A31*uB3,R3+A31*uC3,R3+A31*uD3];
B8=[R8+A81*uA8,R8+A81*uB8,R8+A81*uC8];

th54 = 0;
th76 = 0;
B5 = R5;
B7 = R7;
npr = 50;
for l = 1:npr
    B5 = [B5,R5+A51*[(RF+eF)*cos(th54+2*pi*(l-1)/npr);0;-(RF+eF)*sin(th54+2*pi*(l-1)/npr)]];
    B7 = [B7,R7+A71*[(RR+eR)*cos(th76+2*pi*(l-1)/npr);0;-(RR+eR)*sin(th76+2*pi*(l-1)/npr)]];
end
B5 = [B5,R5+A51*[(RF+eF)*cos(th54+2*pi);0;-(RF+eF)*sin(th54+2*pi)]];
B7 = [B7,R7+A71*[(RR+eR)*cos(th76+2*pi);0;-(RR+eR)*sin(th76+2*pi)]];

p2 = plot3(B2(1,:),B2(2,:),B2(3:),'o-');
grid on
hold on
p5=plot3(B5(1,:),B5(2,:),B5(3:),'r-');
hold on
p3=plot3(B3(1,:),B3(2,:),B3(3:),'og-');
hold on
p6=plot3(B6(1,:),B6(2,:),B6(3:),'og-');
hold on
p7=plot3(B7(1,:),B7(2,:),B7(3:),'r-');
hold on
p8=plot3(B8(1,:),B8(2,:),B8(3:),'or-');
axis equal
set(gca,'nextplot','replacechildren');
v = VideoWriter('wave.avi');
open(v)

```

```

for k = 2:length(t)
    A21 = A2(y(k,1:17),par);
    A31 = A3(y(k,1:17),par);
    A41 = A4(y(k,1:17),par);
    A51 = A5(y(k,1:17),par);
    A61 = A6(y(k,1:17),par);
    A71 = A7(y(k,1:17),par);
    A81 = A8(y(k,1:17),par);

    R2 = [y(k,1),y(k,2),y(k,3)]';
    B2=[R2+A21*uA2,R2+A21*uB2,R2+A21*uD2,R2+A21*uF2,R2+A21*uE2,R2+A21*uC2,R2+A21*uA2];

    r3k=r3(y(k,1:17),par);
    R3=[r3k(1);r3k(2);r3k(3)];
    r4k=r4(y(k,1:17),par);
    R4=[r4k(1);r4k(2);r4k(3)];
    B3=[R4,R3+A31*uA3,R3+A31*uB3,R3+A31*uC3,R3+A31*uD3];
    r6k=r6(y(k,1:17),par);
    R6=[r6k(1);r6k(2);r6k(3)];
    B6=[R6+A61*uA6,R6+A61*uB6,R6+A61*uD6,R6+A61*uC6,R6+A61*uA6];

    r8k=r8(y(k,1:17),par);
    R8=[r8k(1);r8k(2);r8k(3)];
    B8=[R8+A81*uA8,R8+A81*uB8,R8+A81*uC8];

    r5k=r5(y(k,1:17),par);
    R5=[r5k(1);r5k(2);r5k(3)];
    r7k=r7(y(k,1:17),par);
    R7=[r7k(1);r7k(2);r7k(3)];

    th54 = y(k,13);
    th76 = y(k,10);
    B5 = R5;
    B7 = R7;

    for l = 1:npr
        B5 = [B5,R5+A51*[(RF+eF)*cos(th54+2*pi*(l-1)/npr);0;-(RF+eF)*sin(th54+2*pi*(l-1)/npr)]];
        B7 = [B7,R7+A71*[(RR+eR)*cos(th76+2*pi*(l-1)/npr);0;-(RR+eR)*sin(th76+2*pi*(l-1)/npr)]];
    end
    B5 = [B5,R5+A51*[(RF+eF)*cos(th54+2*pi);0;-(RF+eF)*sin(th54+2*pi)]];
    B7 = [B7,R7+A71*[(RR+eR)*cos(th76+2*pi);0;-(RR+eR)*sin(th76+2*pi)]];

    set(p2,'XData',B2(1,:), 'YData',B2(2,:), 'ZData',B2(3,:));
    set(p3,'XData',B3(1,:), 'YData',B3(2,:), 'ZData',B3(3,:));
    set(p5,'XData',B5(1,:), 'YData',B5(2,:), 'ZData',B5(3,:));
    set(p6,'XData',B6(1,:), 'YData',B6(2,:), 'ZData',B6(3,:));
    set(p7,'XData',B7(1,:), 'YData',B7(2,:), 'ZData',B7(3,:));
    set(p8,'XData',B8(1,:), 'YData',B8(2,:), 'ZData',B8(3,:));
    pause(0.000000001);
    axis equal
    %    drawnow;

    frame = getframe(gcf);
    writeVideo(v,frame);

end
close(v);

```