

Aportaciones al modelado y control de oscilaciones en una torre de perforación petrolífera

M. A. Corchero , F. R. Rubio, C. Canudas-de-Wit

Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática (Universidad de Sevilla)

Laboratoire d'Automatique de Grenoble (CNRS-LAG)

{macperu,rubio}@cartuja.us.es

carlos.canudas-de-wit@lag.ensieg.inpg.fr

Resumen

En el presente artículo se presenta un resumen del trabajo hecho en [1], en el que se introduce el sistema electromecánico constituido por una torre de perforación vertical, usada normalmente en la industria petrolífera para la extracción de petróleo y gas a grandes profundidades, desde el punto de vista de las soluciones adoptadas para su modelado y el control de las oscilaciones que aparecen en su comportamiento. Se introducirán nuevas soluciones tanto para el problema del modelado de estos sistemas como para el de control de oscilaciones, con un nuevo método de control de oscilaciones stick-slip. Por último se presentarán algunos resultados obtenidos por simulación que corroboran el buen rendimiento de este algoritmo de control.

Palabras clave: Control de oscilaciones, stick-slip, drillstring, D-OSKIL.

1 Introducción

Las torres de perforación petrolíferas denominadas *drillstrings* (ver Figura 1), son sistemas mecánicos que desde el punto de vista del control, presentan características muy interesantes. En particular, tanto el modelado como la eliminación de oscilaciones en dichos sistemas ha constituido un importante punto de interés tanto para los profesionales del sector como para la comunidad científica en los últimos tiempos.

Este problema, que lleva asociado aspectos tanto teóricos en el estudio de dichas vibraciones y de los distintos controladores, como prácticos a la hora de implementar los controladores y los distintos elementos mecánicos que constituyen la sarta, convierten el problema en un fértil campo para la investigación.

El aspecto específico del estudio y control de las oscilaciones que se producen en este sistema es de gran interés en la investigación científica actual, debido a los enormes beneficios que se ha comprobado que reporta la eliminación de las mismas en cuanto a reducción del tiempo de perforación,



Figura 1: Vista de una plataforma de perforación vertical.

reducción de costes de explotación, aumento del tiempo entre averías, etc.

Como ejemplo ilustrativo se pueden exponer los resultados de un estudio llevado a cabo por el *Centro de Investigación y Apoyo Tecnológico de Petróleos de Venezuela* que revela que las vibraciones son responsables de casi el 80% de los fallos prematuras en sartas de perforación. De la misma forma se asegura que las pérdidas por vibraciones constituyen casi el 5% del costo total de explotación de un pozo, que si se acepta que es de en torno de 30000\$ diarios, estamos hablando de unas pérdidas de 45000\$ por pozo y mes. Para más información sobre el tema ver [7].

En este artículo se tratan las dos vertientes del problema. Primeramente, en la Sección 2, se presentará una visión general del sistema constituido por una sarta de perforación y de los comportamientos oscilatorios que aparecen en su régimen normal de funcionamiento. En la Sección 3 se presentará el modelo del sistema adoptado en nuestro estudio. En la Sección 4, se revisarán algunos

métodos de control que se han venido usando en estos sistemas, así como el adoptado finalmente en este trabajo. También se mostrarán resultados de simulación que validan el modelo y controlador adoptados, en cuanto a la capacidad de reproducir los fenómenos de oscilación *stick-slip* en la sarta de perforación. Por último se presentará la idea de introducir un nuevo grado de libertad en el control tradicional de dichos sistemas con el objetivo de apagar las oscilaciones así como resultados de simulación que corroboran el buen rendimiento de estos controladores.

2 Sistemas de perforación vertical. Comportamientos oscilatorios asociados.

Para acceder a las reservas naturales de combustible tales como petróleo y gas, hay que realizar perforaciones de considerable profundidad en la corteza terrestre por medio de un sistema de perforación rotatorio.

Se crea un agujero en la superficie terrestre mediante una barrena de perforación. La energía necesaria para hacer rotar este sistema es normalmente generada por un motor eléctrico en la superficie. Este motor mueve la *rotatory-table*; un gran disco que actúa como acumulador de energía cinética y que normalmente se controla independientemente para que gire a una velocidad constante. El medio por el que se transmite la energía de rotación a la barrena es mediante un sistema encadenado de diversos elementos; el *drillstring*.

Este sistema encadenado, cuya longitud puede alcanzar varios kilómetros, está formado principalmente por tuberías, o *drillpipes*, de unos 10m cada una, acopladas mediante uniones atornilladas. La parte inferior del sistema (*Bottom-Hole-Assembly*) esta formada por los collares de lastrado (*drillcollars*), que tienen un diámetro mayor que las tuberías y son de mayor peso, y que se usan como estabilizadores del movimiento de taladrado, y por último, la barrena de perforación (*Bit*).

Para facilitar, lubricar y enfriar el movimiento de taladrado se inyecta una sustancia especial llamada lodo (*mud*) mediante un sistema de bombeo y recogida que llega hasta la parte que ocupa la barrena de taladrado.

En la Figura 2 se puede ver un esquema del sistema *drillstring*. Una descripción más exhaustiva del sistema y sus componentes se puede encontrar en [7] y [11], entre otros.

Una de las principales problemáticas en este tipo de sistemas es la aparición de compor-

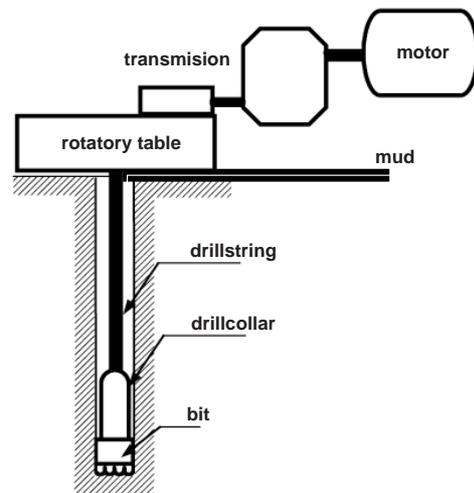


Figura 2: Esquemático de una plataforma de perforación.

tamientos oscilatorios (ciclos límite) de distintas características, que provocan tanto la disminución del rendimiento de perforación en diferentes parámetros (tasa de penetración en la superficie (*Rate-Of-Penetration*), velocidad de giro de la barrena, etc) y lo que puede ser más grave, el fallo prematuro del sistema con la rotura de alguno de sus elementos [11].

Las vibraciones que aparecen en el *drillstring* pueden dividirse básicamente en 3 categorías:

- Vibraciones longitudinales: Se producen en la dirección longitudinal de la torre de perforación, provocando rebotes de la boca en el fondo del foso (*bit-bouncing*).
- Vibraciones laterales: Se producen cuando el centro de masas del *drillstring* esta desplazado del eje de rotación provocando movimientos en forma de remolino (*whirl-oscillations*) que producen rebotes en las paredes del foso.
- Vibraciones torsionales: Se producen cuando las velocidades de giro de la *rotatory-table* y de la barrena son diferentes, debido a la fricción en el giro del *BHA* [6], provocando movimientos de brusca parada y deslizamiento en forma de ciclo límite (*stick-slip oscillations*).

En la Figura 3 puede verse una representación de estos tipos de vibraciones sobre la sarta de perforación.

Todos estos fenómenos aparecen en el comportamiento de un sistema de perforación como el

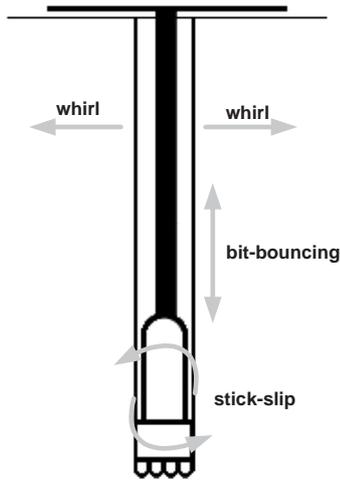


Figura 3: Vibraciones longitudinales, laterales y torsionales en una sarta de perforación.

mostrado. Ocurre que la aparición de estos fenómenos se dan en instantes de tiempo más o menos separados en el régimen de operación del equipo, y en rangos frecuenciales distintos, lo que permite estudiar cada uno por separado. De entre todas ellas, nos centraremos en el caso de las vibraciones torsionales, y en el fenómeno de *stick-slip* que producen.

Si durante un movimiento continuado de rotación del *BHA*, éste es detenido debido a una perturbación (contacto con algún tipo especial de terreno, el taladro se topa con una roca que le cuesta romper, etc), el par requerido para volver a liberar el taladro es igual al par de fricción estática considerado. La *rotatory-table*, sin embargo, continúa girando a una velocidad constante. Esto hace que el sistema flexible *drillstring* actúe como un resorte torsional hasta que el par que ejerce sobre el taladro alcanza el valor del par de fricción estática.

En este punto, la fricción ya no puede retener el *BHA*, y consecuentemente el taladro empezará a girar impulsado por un par igual al llamado par de holgura o *backlash-torque*, que es la diferencia entre el par de fricción estática y el de fricción dinámica considerados. Este par de holgura excita el modo resonante del sistema resultando una fracción de movimiento armónico. Si el amortiguamiento considerado para el *BHA* y la velocidad de giro nominal son lo suficientemente pequeñas, y el par de holgura lo suficientemente grande, el movimiento resonante puede llevar la velocidad de giro del taladro a cero de nuevo, tras

lo cual, el ciclo se repite [10].

3 Modelado del sistema.

El modelo de sistema utilizado también va en función del tipo de fenómeno que se va a analizar [10]. Modelos complejos de parámetros distribuidos del sistema pueden encontrarse en [3].

Si se quisiera estudiar el comportamiento del sistema en cuanto a todos los fenómenos oscilatorios que acontecen en el mismo, tal y como ya se ha comentado, habría que incluir en el modelo tanto la dinámica vertical, como la horizontal y la de torsión, lo que llevaría a un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas, (ver [3]) como el dado en el Apéndice A.

Sin embargo, para el estudio que se lleva a cabo en este artículo, el modelo utilizado, que se presenta en la Figura 4, es básicamente un modelo de torsión de dos masas acopladas, donde cada uno de sus elementos se refiere a:

- J_r : Inercia considerada de la *rotatory-table* y del sistema de transmisión del motor DC.
- J_b : Inercia considerada del *BHA* (la inercia total es igual a la inercia del *BHA* más un tercio de la inercia total de los *drillpipes*).
- d_r : Constante de amortiguamiento (fricción viscosa) en la *rotatory-table*.
- d_b : Constante de amortiguamiento (fricción viscosa) en la barrena.
- c : Constante de amortiguamiento relativo en el acoplamiento entre ambas inercias.
- k : Constante de rigidez torsional relativa en el acoplamiento entre ambas inercias.
- v : Par de fuerzas ejercido por el sistema de transmisión del motor sobre la *rotatory-table*.
- T_{oB} : Par de fuerzas ejercido sobre el *BHA*, principalmente debido a pares de fricción.

En [10] se dan valores para estos parámetros, obtenidos a partir de medidas realizadas en un sistema real de perforación.

Las variables utilizadas son los ángulos de rotación (φ_r y φ_b) y las velocidades de rotación ($\dot{\varphi}_r$ y $\dot{\varphi}_b$) de la *rotatory-table* y del *bit*, respectivamente.

Las ecuaciones que describen el movimiento del sistema son:

$$J_r \ddot{\varphi}_r + k(\varphi_r - \varphi_b) + c(\dot{\varphi}_r - \dot{\varphi}_b) + d_r \dot{\varphi}_r = v \quad (1)$$

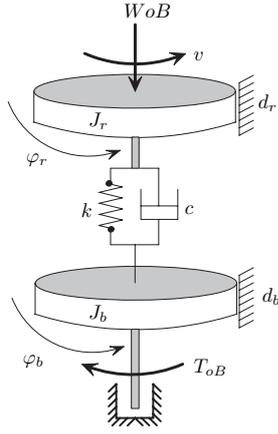


Figura 4: Modelo simplificado de sarta de perforación.

$$J_b \ddot{\varphi}_b - k(\varphi_r - \varphi_b) - c(\dot{\varphi}_r - \dot{\varphi}_b) + d_b \dot{\varphi}_b = -T_{oB} \quad (2)$$

Se puede expresar la dinámica del giro relativo $\psi = \varphi_r - \varphi_b$ de la siguiente forma:

$$\ddot{\psi} + \frac{c}{J_{eq}} \dot{\psi} + \frac{k}{J_{eq}} \psi = \frac{C_b}{J_b} \dot{\varphi}_b - \frac{C_r}{J_r} \dot{\varphi}_r + \frac{T_m}{J_r} + \frac{T_b}{J_b} \quad (3)$$

siendo:

$$\frac{1}{J_{eq}} = \frac{1}{J_r} + \frac{1}{J_b} \quad (4)$$

Para describir el sistema en el espacio de estados [8], se toman los estados dados por $x^T = [\psi \quad \dot{\varphi}_r \quad \dot{\varphi}_b]$, de forma que la descripción del sistema queda:

$$\dot{x} = Ax + Bv + HT_{oB} \quad (5)$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/i & -1 \\ -k/iJ_r & -(d_r + c/i^2)/J_r & c/iJ_r \\ k/J_b & c/iJ_b & -(c + d_b)/J_b \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/J_r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/J_b \end{pmatrix}$$

La naturaleza de este tipo de oscilaciones está íntimamente ligada al fuerte par de fricción que se produce, tanto en el contacto de la barrena de perforación con el fondo del pozo, como en el contacto del BHA con las paredes del mismo. Como se indicó anteriormente, todo este par de fricción resultante queda modelado por T_{oB} .

En trabajos tales como [4] and [5], se ha mostrado que algunos modelos son capaces de capturar las características típicas del fenómeno de fricción (stiction, efecto Stribeck, etc), causantes de las oscilaciones *stick-slip*.

En el caso particular del sistema que estamos estudiando, es claro que el papel que juega el peso instantáneo de la sarta de perforación sobre el fondo del pozo, denominado WoB , es muy relevante. Dada la forma en la que se lleva a cabo el taladrado, conforme va aumentando la profundidad del pozo, hay que ir añadiendo secciones de tubería *drillpipes* para que la barrena alcance el fondo del pozo. De esta forma, la masa total del *drillstring*, y por lo tanto el peso, se irán incrementando. Siendo así, al aumentar la presión que ejerce el taladro, aumentará el par de fricción resultante, y el fenómeno de *stick-slip* debería ser más patente.

El modelo de par de fricción usado corresponde con un modelo de LuGre ([2]) adaptativo con respecto al WoB . La parte del modelo dependiente de la velocidad estará normalizada, de forma que el valor de WoB en el modelo sea el valor real instantáneo.

Éste modelo viene dado por:

$$\begin{aligned} T_{oB} &= \mu(x, z) \cdot WoB \\ \mu(x, z) &= \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 x_3 \\ \frac{dz}{dt} &= x_3 - \frac{\sigma_0}{g(x_3)} z |x_3| \\ g(v) &= \mu_s + (\mu_s - \mu_c) e^{-\left(\frac{x_3}{v_s}\right)^2} \end{aligned} \quad (6)$$

donde cada uno de los parámetros se toma:

- $\mu_c = 0.3, \mu_s = 0.35$
- $\sigma_0 = 25, \sigma_1 = 193, \sigma_2 = 0$
- $v_s = 0.01$

siendo $z \in R$ el estado interno de fricción.

Obsérvese que la fricción lineal del lado del *bit* está incorporada en la matriz A del modelo dado por la Ecuación 5.

4 Control de la velocidad de rotación.

Tradicionalmente, el mecanismo de control aplicado en este tipo de sistemas se basa únicamente en un bucle de control externo sobre el par ejercido por el motor en la *rotatory-table*, de forma

que se mantenga constante la velocidad de giro del *drillstring* (un valor típico para esta velocidad es $\omega_d = 5 \text{ rad/s}$).

Múltiples arquitecturas de control, desde los clásicos PID hasta controladores robustos H_∞ (ver [10]), pasando por métodos de control basados en modificación del coeficiente de reflexión de las ondas torsionales (ver [12]), se han propuesto para llevar a cabo este propósito, con el denominador común de que se suelen usar estructuras de control de bajo orden. De entre todas ellas, quizás la basada en una estructura LQR con los estados definidos anteriormente (suponiendo que se tiene acceso a una medida de la velocidad de rotación del *Bit*¹ x_3) sea la que haya mostrado mejores características en cuanto regulación de la velocidad de la *rotatory-table* y evitación de oscilaciones en la velocidad del *Bit*.

La estructura de control que se usa en este estudio está derivada de la presentada en [3], y tiene la siguiente forma:

$$v = \left[k_1 + \frac{k_2}{s} \right] (\omega_d - \dot{\varphi}_r) - k_3 (\dot{\varphi}_r - \dot{\varphi}_b) \quad (7)$$

Las ecuaciones de bucle cerrado del sistema quedan de la forma:

$$\dot{x} = A_{cl}x + B_{cl}\omega_d + H_{cl}\mu(x, z)u \quad (8)$$

$$\dot{z} = f(x, z) \quad (9)$$

teniendo en cuenta que ha de extenderse el número de estados es ahora de 4, pues la ley de control contiene una acción integral.

$$A_{cl} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{i} & -1 & 0 \\ \frac{-k}{iJ_r} & \frac{-(d_r + \frac{c}{i^2} + k_1 + k_3)}{J_r} & \frac{(c+k_3)}{iJ_r} & \frac{k_2}{J_r} \\ \frac{k}{J_b} & \frac{c}{iJ_b} & \frac{-(c+d_b)}{J_b} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{cl} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k_1}{J_r} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H_{cl} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{J_b} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las ganancias del controlador se diseñan mediante *pole-allocation*, configurando un mapa de polos en bucle cerrado tal y como el que se muestra en la Figura 5.

¹Se puede plantear el incluir un observador de la velocidad del *Bit* porque puede que dicha velocidad no se tenga accesible directamente

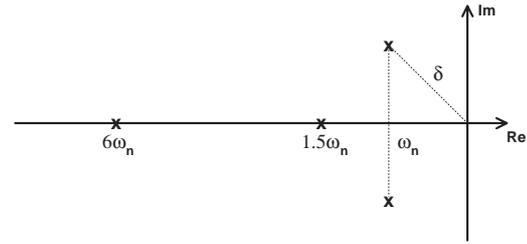


Figura 5: Mapa de polos en bucle cerrado del sistema controlado.

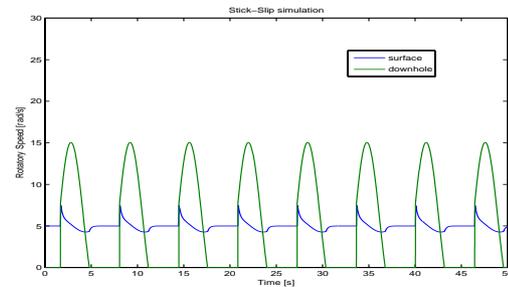
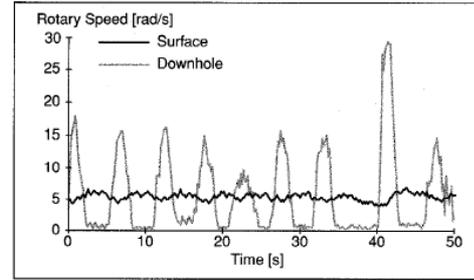


Figura 6: Oscilación *stick-slip* medido en una plataforma de perforación real (arriba), y perfil de oscilación obtenido por simulación (abajo).

Con está ley de control, y junto con el modelo de sistema presentado anteriormente, se puede pasar a intentar validarlo mediante simulación. En la Figura 6 se muestra el perfil de oscilación obtenido a partir de datos tomados de una plataforma de perforación real y los obtenidos por simulación con el modelo comentado anteriormente. Como puede verse, el modelo, aunque no incorpora las dinámicas lateral y vertical del sistema, es capaz de reproducir razonablemente bien el comportamiento observado en la plataforma real.

Sin embargo, se puede comprobar que estas estrategias de control fracasan en evitar la aparición de oscilaciones *stick-slip*, para todo el rango de valores posibles del *WOB* (ver [1]).

Varios trabajos (como por ejemplo [9]) han demostrado que una forma de apagar las oscilaciones acaecidas es incrementar el ancho de banda (ω_n) del controlador usado para regular la velocidad de giro de la *rotatory-table* (ω_d), de forma que para

cada valor de WoB habría que rediseñar el control de velocidad en torno a un nuevo ω_n para el cual no aparecen oscilaciones.

Sin embargo, ya que se sabe que el ancho de banda máximo está limitado por el ruido, puede comprobarse que para valores usuales de WoB reales, los valores de ω_n que provocan la desaparición de oscilaciones transgreden ese límite.

Se hace pues necesaria la adición, posiblemente, de un nuevo grado de libertad en la acción de control, para suplir las deficiencias que como vemos presenta el control simple de velocidad en cuanto a regulación de oscilaciones.

5 Amortiguamiento de oscilaciones *stick-slip* mediante control del WoB .

Tal y como se ha dicho anteriormente, se necesita plantear una nueva estrategia de control para evitación y amortiguamiento de oscilaciones. Por otra parte, veíamos como el WoB instantáneo inflúa directamente en las características de fricción del sistema, a la sazón origen de la aparición de tales comportamientos oscilatorios.

Por tanto, planteamos la adición de una nueva acción de control, esta vez sobre el WoB instantáneo, la cual consistirá en que una vez se detecte la aparición de oscilaciones, se procederá a reducir el valor de WoB hasta que la oscilación desaparezca, procurando luego que el WoB recobre su valor nominal, para que la operación de perforación se siga realizando en condiciones óptimas.

Para apoyar esta idea, puede realizarse un estudio de la aparición de oscilaciones basado en la función descriptiva del par de fricción (aproximándolo por su modelo estático, ya que la dinámica de fricción es mucho más rápida que la del propio sistema mecánico) en el sistema controlado (ver Figura 7), en el cual puede observarse como la aparición de oscilaciones depende de los valores de WoB y ω_n . Para más información sobre este estudio consultar [1].

Los resultados obtenidos por este análisis son corroborados por la Figura 8. En ella se muestra en el plano $WoB - \omega_n$, la zona en la cual aparecen las oscilaciones, tanto la predicha a partir del análisis como la obtenida por simulación y vemos que ambas se corresponden casi por completo.

Se plantea pues una acción de control (\tilde{u}) sobre el WoB instantáneo (u). Esta será una señal aditiva sobre el valor nominal de WoB (u_0), de la siguiente forma:

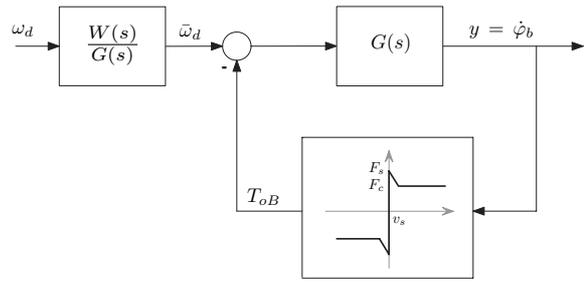


Figura 7: Diagrama de bloques del sistema y par de fricción estática.

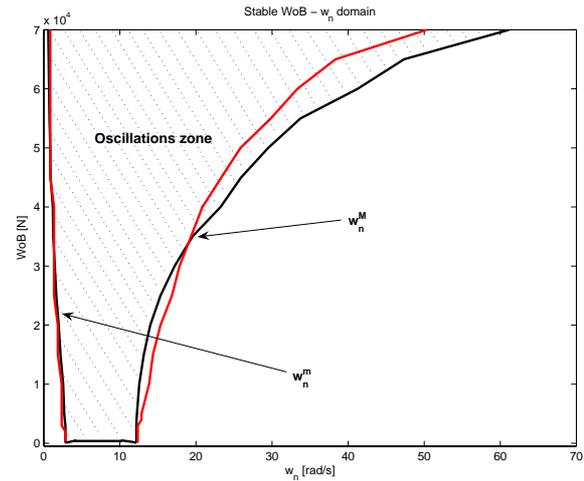


Figura 8: Dominio de aparición de oscilaciones obtenido tanto por simulación (negro) como a partir del análisis (rojo).

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \tilde{u} \\ \dot{\tilde{u}} &= -\sigma \tilde{u} + \Phi(e, \tilde{u}) \end{aligned} \quad (10)$$

con $\tilde{u} =] -u_0, 0]$ la nueva acción de control y e el error de estado.

El problema reside en el método de diseño de la parte no lineal de la ley de adaptación $\Phi(e, \tilde{u})$ de \tilde{u} . En [1] se diseña este término basándose en la realimentación del valor eficaz de la magnitud de las oscilaciones. Aquí se propondrá una ley de la forma:

$$\Phi(e, \tilde{u}) = \frac{-c_1 |e^T P H_{cl}|}{e^T P e + c_2} \quad (11)$$

siendo $P > 0$ la solución de la ecuación de Lyapunov $A_{cl}^T P + P A_{cl} < 0$, y σ, c_1 y c_2 ciertas constantes positivas.

Los resultados obtenidos por simulación del control diseñado se muestran en la Figura 9. En ella puede verse como la nueva acción de control permite una estabilidad global del sistema para el

rango de valores de WOB en el que aparecían comportamientos oscilatorios.

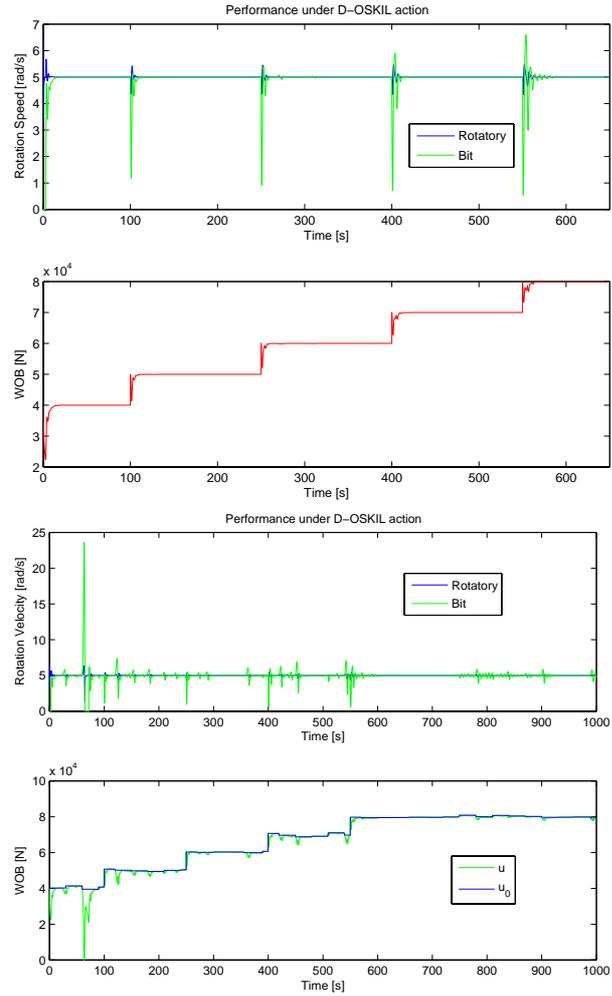


Figura 9: Comportamiento del sistema controlado para distintos valores de u_0 sin ruido y con ruido en la medida.

6 Conclusiones

En este artículo se ha presentado la problemática principal que surge en el control de plataformas de perforación vertical, que consiste en el amortiguamiento de las oscilaciones que aparecen en el mismo. Se ha presentado una pequeña revisión del modelado y control clásicos de dichos sistemas y se ha introducido un nuevo método de control basado en la actuación sobre el WOB con objeto de apagar las oscilaciones. Se han presentado resultados de simulación que corroboran el buen rendimiento del controlador. Actualmente se trabaja en demostrar explícitamente la estabilidad del sistema baja dicha acción de control y en el diseño y construcción de un equipo mecánico a escala del modelo presentado que permita realizar pruebas de funcionamiento sobre un sistema real.

Agradecimientos

Los autores quisieran agradecer al MCYT-FEDER por sufragar este trabajo gracias a los proyectos DPI2004-06419, HF2003-0237 y SAB2003-0085, al igual que al Ministerio de Asuntos Exteriores Francés por los programas PI-CASSO No. 07261YJ(EGIDE) y LAFMA.

A Modelo completo del sistema *drillstring*

El modelo dinámico acoplado completo del sistema viene dado por el siguiente conjunto de Ecuaciones:

- $(m + m_f)(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + k(x, \phi, \dot{\phi})r + c_h|v|\dot{r} = (m + m_f)e_0(\dot{\phi}^2 \cos(\phi - \theta) + \ddot{\phi} \sin(\phi - \theta)) - F_r$
- $(m + m_f)(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) + c_h|v|r\dot{\theta} = (m + m_f)e_0(\dot{\phi}^2 \sin(\phi - \theta) - \ddot{\phi} \cos(\phi - \theta)) + F_\theta$
- $J\ddot{\phi} + k_T(\phi - \phi_{rt}) + c_v\dot{\phi} + c_h|v|r e_0 \sin(\phi - \theta) - c_h|v|r\dot{\theta} e_0 \cos(\phi - \theta) = -T(x, \phi, \dot{\phi}) + F_\theta(R - e_0 \cos(\phi - \theta)) - F_r e_0 \sin(\phi - \theta)$
- $(J_{rt} + n^2 J_m)\ddot{\phi}_{rt} + k_T(\phi_{rt} - \phi) + c_{rt}\dot{\phi}_{rt} - nK_m I = 0$
- $L\dot{I} + R_m I + K_m n \dot{\phi}_{rt} = V_c$
- $m_a \ddot{x} + c_a \dot{x} + k_a x = -F(x, \phi) + \bar{F}$

donde las dos primeras Ecuaciones representan la dinámica lateral, las dos siguientes la dinámica de torsión y las dos últimas la dinámica eléctrica del motor y la dinámica longitudinal.

Cada uno de los parámetros se calcula a partir de:

$$J = 2\rho I_A l_2 + \frac{1}{3}\rho I_p l_3$$

$$m = \rho\pi(d_0^2 - d_i^2)\frac{l_1}{8}$$

$$m_f = \frac{\pi\rho_f(d_i^2 + C_A d_0^2)l_1}{8}$$

$$k(x, \phi, \dot{\phi}) = \frac{EI_A \pi^4}{2l_1^3} - \frac{T\pi^3}{2l_1^2} - \frac{F\pi^2}{2l_1^2}$$

$$k_T = \frac{GI_p}{l_3}$$

$$c_h = \frac{2}{3\pi}\rho_f C_D d_0 l_1$$

$$c_v = \frac{\pi\mu_f d_0^3 l_2}{2(d_h - d_0)}$$

$$m_a = 2(m + m_f) + \frac{\rho\pi(d_0^2 - d_i^2)l_3}{12}$$

$$k_a = \frac{E\pi(d_0^2 - d_i^2)}{4l_3}$$

Los parámetros usados en el modelo son los dados por la siguiente tabla.

Parámetro	Significado
C_A	Coefficiente de masa añadida
c_a	Amortiguamiento del movimiento axial
C_D	Coefficiente de arrastre
c_h	Amortiguamiento hidrodinámico
c_v	Amortiguamiento viscoso
c_{rt}	Amortiguamiento viscoso equivalente
c_1, c_2	Constantes empíricas del modelo de penetración
d_h	Diámetro del pozo
d_i	Diámetro interior del <i>drill collar</i>
d_o	Diámetro exterior del <i>drill collar</i>
\bar{d}_i	Diámetro interior de las tuberías
\bar{d}_o	Diámetro exterior de las tuberías
e_0	Excentricidad de los <i>drill collar</i>
E	Modulo de Young
F	<i>Weight-On-Bit</i>
F_0	<i>Weight-On-Bit</i> aplicado
\bar{F}	Fuerza gravitacional
F_h	Fuerza transversal de contacto
F_r	Fuerza radial de contacto
F_θ	Fuerza de fricción de contacto
I	Corriente eléctrica
I_A	Momento de inercia superficial
I_p	Momento de inercia polar
J	Momento de inercia del drillstring
J_m	Momento de inercia del motor
J_{rt}	Momento de inercia de la <i>rotatory table</i>
k	Rigidez de los <i>drill collars</i>
k_a	Rigidez axial efectiva
k_c	Rigidez del contacto
K_m	Constante del motor
k_T	Rigidez torsional
L	Inductancia del motor
m	masa efectiva de los <i>drill collars</i>
m_a	masa efectiva del <i>drillstring</i>
m_f	masa efectiva del fluido
n	Tasa de reducción
R_c	Radio de los <i>drill collars</i>
R_m	Resistencia de la armadura
T	<i>Torque-On-Bit</i>
v	Velocidad del centro geométrico del <i>drill collar</i>
V_c	Voltage de control
ϕ	Ángulo de desplazamiento del <i>drill collar</i>
ϕ_{rt}	Ángulo de desplazamiento de la <i>rotatory table</i>
ρ	Densidad del <i>drillstring</i>
ρ_f	Densidad del <i>mud</i>

Referencias

- [1] Canudas-de-Wit, C., Corchero, M.A., Rubio, F.R., Navarro-Lopez, E.M. D-OSKIL: A new mechanism for suppressing stick-slip in oil well drillstrings. *CDC-ECC 2005, Sevilla (España)*, 2005.
- [2] Canudas-de-Wit C., Olsson H., Astrom K.J. and Lischinsky P. A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3), 1995.
- [3] Christoforou, A. P., Yigit, A. S. Fully coupled vibrations of actively controlled drillstrings. *Journal of Sound and Vibration*, 267:1029–1045, 2003.
- [4] Dupont P., Hayward V., Armstrong B. and Altpeter F. Single state elastoplastic friction models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(5), 2002.
- [5] Lampaert V., Swevers J. and Al-Bender F. Modification of the Leuven integrated friction model structure. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(4), 2002.
- [6] Leine R.I., van Campen D.H., Keultjes W.J.G. Stick-slip whirl interaction in drill-string dynamics. *Journal of Vibration and Acoustics*, 124:209–220, 2002.
- [7] Navarro-Lopez, E.M. *Notas acerca del modelado, analisis y control de las vibraciones mecanicas en una sarta de perforacion*. Instituto Mexicano de Petroleo, programa de investigación en matematicas aplicadas y computacion edition, 2003.
- [8] Navarro-Lopez, E.M. and Suarez-Cortez, R. Modelling and analysis of stick-slip behaviour in a drillstring under dry friction. *Congress of the Mexican Association of Automatic Control*, pages 330–335, 2004.
- [9] Navarro-Lopez, E.M. and Suarez-Cortez, R. Vibraciones mecánicas en una sarta de perforación: problemas de control. *Revista Iberoamerica de Automática e Informática Industrial*, 2(1), 2005.
- [10] Serrarens A.F.A, van de Molengraft M.J.G., Kok J.J. and van den Steen L. H_∞ control for suppressing stick-slip in oil well drillstrings. *IEEE Control Systems Magazine*, 18(2), 1998.
- [11] Spanos, P.D., Chavallier, A.M., Politis N.P. and Payne M.L. Oil well drilling: A vibrations perspective. *The Shock and Vibration Digest*, 35(2):81–99, 2003.
- [12] Tucker, R.W. and Wang C. On the effective control of torsional vibrations in drilling systems. *Journal of Sound and Vibrations*, 224:101–122, 1999.