

Proyecto Fin de Grado

Ingeniería Aeroespacial

Métodos numéricos sencillos para problemas de radiación en regímenes de convección forzada y libre

Autor: Antonio Enríquez López

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

Dpto. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020



Proyecto Fin de Carrera
Ingeniería Aeroespacial

Métodos numéricos sencillos para problemas de radiación en regímenes de convección forzada y libre

Autor:

Antonio Enríquez López

Tutor:

Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

Profesor titular

Dpto. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020

Proyecto Fin de Carrera: Métodos numéricos sencillos para problemas de radiación en regímenes de convección forzada y libre

Autor: Antonio Enríquez López

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2020

El Secretario del Tribunal

Agradecimientos

Quisiera agradecer todos los desafíos que la Escuela me ha planteado en mis años de grado, porque me han ayudado a enfocar mis esfuerzos de manera eficiente. Además, son varios los docentes en los que he hallado, no solo personas apasionadas en su materia, sino también buenos interlocutores con los alumnos, que, en beneficio de éstos, procuran mejorar sus asignaturas, destacando, entre otros, los responsables de Cálculo de Aeronaves, Ingeniería Electrónica o Aviónica. A ellos les doy las gracias. También le agradezco a mi tutor, Miguel Pérez Saborid, la ayuda que me prestó para la asimilación de los conceptos involucrados en este proyecto, y la empatía que me demostró con el paso de las semanas, tanto durante las citas presenciales que durante los primeros meses mantuvimos, como durante las videoconferencias y los mensajes que intercambiamos durante los meses de confinamiento y de restricciones a la movilidad debido a la pandemia por Covid-19.

Para terminar, y siendo uno de los miles de estudiantes que han hecho y defendido su trabajo fin de grado en este año marcado por la alerta sanitaria, quiero que conste en acta mi agradecimiento sincero al esfuerzo titánico que los servicios esenciales han realizado, realizan, y seguirán realizando para protegernos del Covid-19, y asegurar que la sociedad no se paralice en esta crisis que en septiembre de 2020 seguimos afrontando. También le doy las gracias a Felipe, una nueva amistad que trasciende a lo espiritual, que me ha dado esperanza, así como a mi familia y amigos, que los siento cerca de mi, ahora y siempre, y, por último, pero no menos importantes, a mis padres, por creer en mi y motivarme para realizarme como persona y sacar lo mejor de mi.

Resumen

Este proyecto presenta, a grandes rasgos, dos partes bien diferenciadas. En primer lugar, se presenta una introducción a modo de fundamentación teórica, cuyo objetivo es, por un lado, desarrollar los conceptos que involucran a las capas límite, generadas por convección forzada (flujo laminar subsónico ideal y viscoso confinado entre dos placas horizontales que se comportan como cuerpos negros) y por convección libre (flujo inducido laminar viscoso en placa plana vertical), y a la radiación térmica, prestando atención a las hipótesis de medio con espesor óptico delgado, y medio con espesor óptico grueso; y por otro, poner en contexto las ecuaciones a resolver, partiendo del sistema de ecuaciones diferenciales parciales de Navier Stokes, así como de las expresiones del flujo de calor por radiación.

En segundo lugar, una vez puestas en contexto las ecuaciones involucradas, se desarrolla sucintamente los métodos numéricos empleados para resolver los perfiles de velocidad y de temperatura de las capas límite en estudio, y se procede al despliegue de una serie de parámetros adimensionales cuyo sentido físico se alumbró. A continuación, partiendo de unos códigos originales, se encara el estudio de una serie de resultados gráficos, la mayor parte de ellos sobre una placa plana, obtenidos con MATLAB R2020a, que, en ocasiones, están acompañados de resultados de la literatura para demostrar su aplicabilidad. Una muestra amplia de los códigos empleados para su obtención se añade en un anexo para su consulta.

Para la elaboración de este trabajo han sido fundamentales la utilización de algunas referencias especializadas. Caben destacar las siguientes. En el primer apartado se emplean [1] y [2] para exponer aquellos aspectos más esenciales de las ecuaciones de Navier-Stokes y de la capa límite, así como las hipótesis básicas. Especial mención merece el trabajo fin de grado [3] con autoría de Adrián Carriba Merino, que me inspiró en una buena parte en lo concerniente a la comprensión del comportamiento que tienen las partículas de un flujo en presencia de radiación. Entre otros, [4] y [5] me ayudaron a aclarar los fundamentos de la radiación para poder estructurar de manera eficiente el apartado 2, mientras que [2] y el trabajo fin de grado [6] me sirvieron de referencia para las hipótesis que sustentan convección libre. El modelo teórico sin dispersión con el que se obtiene la expresión general del gradiente del flujo de calor por radiación proviene de [7]. Las referencias con las que se validan los resultados correspondientes a capa límite viscosa *thick* y *thin* generada por convección forzada son [8] y [4], mientras que [9] y [10] me ayudaron al análisis del comportamiento de la capa límite térmica según la longitud recorrida en la placa. Para terminar, los resultados concernientes a convección libre se basan en los de [6].

Abstract

This project presents overall two distinct parts. First, an introduction is presented as a theoretical foundation, the objective of which is, on the one hand, to develop the concepts involving the boundary layers, generated by forced convection (ideal and viscous subsonic laminar flow confined between two horizontal plates that behave like black bodies) and by free convection (induced viscous laminar flow in vertical flat plate), and involving the thermal radiation, paying attention to the medium hypotheses with thin and medium optical thickness; and on the other hand, to put in context the equations to be solved, starting from Navier Stokes' system of partial differential equations, as well as the expressions of radiation heat flow.

Secondly, once the equations involved are put in context, the numerical methods used to solve the speed and temperature profiles of the boundary layers under study are developed succinctly, and some dimensional parameters whose physical sense is illuminated are set. Then, from some original codes, a series of graphic results are faced, most of them on a flat plate, obtained with MATLAB R2020a, which are sometimes accompanied by results from the literature to demonstrate their applicability. The vast majority of codes used to obtain them are added in an annex for consultation.

The use of some specialized references has been essential for the development of the work. The following are worth noting. In the first section are used [1] and [2] to expose those most essential aspects of Navier-Stokes equations and the boundary layer, as well as basic hypotheses. Special mention deserves the end-of-degree work [3] with authorship of Adrián Carriba Merino, which inspired me in a good part in terms of understanding the behavior of particles in a flow in the presence of radiation. Among others, [4] and [5] helped me to clarify the basics of radiation in order to be able to efficiently structure Chapter 2 while [2] and the end-of-grade work [6] served as a reference for the hypotheses that underpin free convection. The non-dispersion theoretical model used to develop the general expression of the gradient of radiation heat flow comes from [7]. The references from which the results corresponding to the *thick* and *thin* viscous boundary layer generated by forced convection are validated are [8] and [4] while [9] and [10] helped me to analyze the behavior of the thermal boundary layer according to the length traveled on the plate. Finally, the results concerning free convection are compared to those of [6].

Índice

Agradecimientos	vii
Resumen	ix
Abstract	xi
Índice	xiii
Índice de Tablas	xv
Índice de Figuras	xvii
1 Capa límite: convección forzada y convección libre	1
1.1 <i>Introducción a las capas límite. Tratamiento de las ecuaciones de Navier Stokes</i>	1
1.2 <i>Teorema Pi. Parámetros adimensionales empleados</i>	3
1.3 <i>Capas límite generadas por convección forzada. Hipótesis desplegadas</i>	5
1.4 <i>Capas límite generadas por convección natural. Hipótesis de Boussinesq</i>	8
2 Introducción a la radiación térmica	13
2.1 <i>La radiación como onda-corpúsculo. Aplicaciones en ciencia e ingeniería</i>	13
2.2 <i>Conceptos generales. Propiedades radiativas, cuerpo negro, y potencia emisiva</i>	17
2.3 <i>Intensidad de radiación y ecuación de transferencia de radiación</i>	21
2.4 <i>Opacidad. Hipótesis de espesor óptico pequeño y grueso</i>	26
2.5 <i>Hipótesis generales aplicadas a capas límite y a la radiación</i>	29
3 Métodos numéricos empleados y formulación de ecuaciones	33
3.1 <i>Métodos numéricos empleados</i>	33
3.2 <i>Aplicación a la convección forzada. Espesor óptico grueso según Viskanta & Gross [8]</i>	37
3.3 <i>Introducción de τ y N_{cr}. Formulación de ecuaciones, y despliegue de hipótesis relativas a τ</i>	39
3.3.1 <i>Flujo no viscoso. Aproximación para $\tau \ll 1$ y $\tau \gg 1$</i>	40
3.3.2 <i>Flujo no viscoso que absorbe y emite radiación en función de τ y N_{cr}</i>	41
3.3.3 <i>Flujo viscoso. Hipótesis de espesor óptico delgado. Perfil de Howell</i>	42
3.3.4 <i>Flujo viscoso. Relajación de hipótesis relativas a τ. Resumen de ecuaciones</i>	45
3.4 <i>Formulación de ecuaciones en convección libre. Hipótesis de espesor óptico grueso</i>	47
4 Efectos de la radiación térmica en convección forzada	51
4.1 <i>Flujo viscoso. Capa límite ópticamente gruesa</i>	51
4.2 <i>Flujo no viscoso. Resultados con hipótesis y relajándolas</i>	57
4.3 <i>Flujo viscoso. Capa límite thin. Revisión de la capa límite thick</i>	62
4.4 <i>Flujo viscoso. Condiciones para asumir un límite óptico. Conclusiones</i>	65
5 Efectos de la radiación térmica en convección libre. Espesor óptico grueso	71
6 Motivación, conclusiones y futuras líneas	77
Anexo: códigos Matlab	79
Referencias	91

Índice de Tablas

Tabla 1: comparación entre el flujo de pared (4.6), calculado en este trabajo en base a los resultados previos y calculado en [8]	56
Tabla 2: desviación producida entre los cálculos aquí realizados y los cálculos expuestos en [8]	56
Tabla 3: Componentes de la distribución de temperatura para flujo no viscoso que no conduce calor, calculadas por el código original atribuido a este trabajo, y calculadas por el código basado en [3], cuando ambos códigos han alcanzado el régimen estacionario a lo largo de la placa plana	57
Tabla 4: comparación de la distribución de temperaturas θ en algunas estaciones de la capa límite de espesor <i>thin</i> en el caso de $N_{cr} \ll 1$ y de $N_{cr} = 2$	63
Tabla 5: comparación de la distribución de temperatura θ en capa límite viscosa <i>thick</i> para algunas estaciones resuelta en función de τ y ξ (ver apartado 3.3.4); y resuelta en función de Re y η (<i>script 1</i>)	65

Índice de Figuras

Figura 1: distribución de velocidades de un flujo viscoso cerca de la pared, siempre que $Re \gg 1$ [2]	5
Figura 2: distribución de velocidades de un flujo viscoso cerca de la pared [2]. Nótese el desprendimiento de la capa límite cuando avanzamos más allá del punto S	8
Figura 3: capa límite por convección natural en una placa vertical [12]	8
Figura 4: aeronave. Fuente: El País	10
Figura 5: reentrada de nave espacial. Fuente: Wikipedia	10
Figura 6: ejemplo de convección libre en naturaleza [6]	10
Figura 7: Representación de los mecanismos físicos que tiene lugar en el seno del fluido en convección libre [6]	11
Figura 8: espectro electromagnético [5]	13
Figura 9: propiedades radiativas de una superficie [15]	14
Figura 10: atenuación de radiación debido a absorción y dispersión [13]	15
Figura 11: reflejo de la luna en el casco de un astronauta que presenta un fino recubrimiento de oro [5]	16
Figura 12: equilibrio radiativo en la Tierra [3]	16
Figura 13: absorptividad espectral de una mezcla isoterma de nitrógeno y dióxido de carbono [13]	17
Figura 14: ley de Kirchhoff [13]	18
Figura 15: energía específica del cuerpo negro en función de su temperatura y de la longitud de onda [13]	20
Figura 16: hemisferio mostrando las dimensiones de un diferencial de ángulo sólido [5]	21
Figura 17: intensidad de radiación [4]	22
Figura 18: modelo físico de radiación unidimensional [7] con aproximación al método de las diferencias finitas; se estudia la placa 1 como la condición de contorno “w” y la placa 2 como la “0”	23
Figura 19: atenuación debido a absorción y dispersión a lo largo de ds [4]; el razonamiento espectral es análogo al aquí expresado, en función de magnitudes totales	26
Figura 20: malla de discretización [2]	33
Figura 21: resolución numérica de la capa límite mecánica para una forma genérica; y condición de desprendimiento	35
Figura 22: tratamiento numérico a las componentes de velocidad de la capa límite mecánica	38
Figura 23: separación del flujo entre dos regiones con intercambios energéticos diferentes	43
Figura 24: valores de Ncr para diferentes sustancias según la temperatura [4]	45
Figura 25: sistema de ejes coordenados empleado en [8]	51
Figura 26: comparación con [8] de la distribución de temperaturas en función de η escalada, en la última estación de la placa plana. $\theta_w = 0.1$; $\theta_0 = 1$; $Ncr = \{0.1, 1, 10\}$	53
Figura 27: comparación con [8] de la distribución de temperaturas en función de η escalada, en la última estación de la placa plana. $\theta_w = 1$; $\theta_0 = 0.1$; $Ncr = \{0.1, 1, 10\}$	53
Figura 28: comparación con [8] del gradiente de temperaturas, para un caso de pared caliente y otro de pared fría, en función de η escalada, en la última estación de la placa plana. $Ncr = \{0.1, 1, 10\}$	54
Figura 29: comparación con [8] del gradiente de temperaturas en la pared fría ($\theta_0 = 1$) en función de la temperatura de la pared, en la última estación de la placa plana. $Ncr = \{0.1, 1, 10\}$	55
Figura 30: comparación con [8] del gradiente de temperaturas en la pared caliente ($\theta_w = 1$) en función de la	

temperatura del infinito, en la última estación de la placa plana. $Ncr = \{0.1, 1, 10\}$	55
Figura 31: comparación de la distribución de temperaturas en función de η , para $Ncr=0.1$ (a, b y c) y para $Ncr=1$ (d,e y f), para tres estaciones longitudinales hasta $\xi=1$, $Nxi=2000$; y para placa plana, cilindro ideal ($\sigma=1$) y elipse ideal con $\sigma=0.4$	57
Figura 32: distribución de temperatura para flujo no viscoso que no conduce calor y que no dispersa radiación, calculada por el código original atribuido a este trabajo, y calculada por el código basado en [3], cuando ambos códigos han alcanzado el régimen estacionario a lo largo de la placa plana	58
Figura 33: salto de temperatura en la pared en flujo no viscoso. Pared caliente ($\theta_0 = 0.1$; $\theta_0 = 0.9$) y pared fría ($\theta_w = 0.1$; $\theta_w = 0.9$). Comparación con resultados análogos para radiación lineal [4]	59
Figura 34: distribución de temperaturas para flujo no viscoso con $Ncr=0$ (a, b y c), y con $Ncr=1$ (d, e y f); para tres posiciones en la placa plana, hasta $\xi=1$, $Nxi=2000$, y para $\tau=20$	60
Figura 35: distribución de temperaturas para flujo no viscoso con $Ncr=0$ (a, b y c), y con $Ncr=1$ (d); para tres posiciones en la placa plana, hasta $\xi=1$, $Nxi=2000$, y para $\tau=0.2$	60
Figura 36: distribución de temperaturas para flujo no viscoso con $Ncr=0$ (a, b y c), y con $Ncr=1$ (d); para tres posiciones en la placa plana, hasta $\xi=1$, $Nxi=2000$, y para $\tau=0.002$	61
Figura 37: comparación entre segunda componente del vector de temperaturas del flujo ideal designado, y condición de contorno exterior de Howell para el caso específico de hipótesis <i>thin</i> en capas límite viscosas	62
Figura 38: código que implementa la condición de contorno de Howell	62
Figura 39: evolución de $NuRe$ con ξ para pared fría. Comparación con [4]	63
Figura 40: evolución que describe el gradiente de temperaturas $\Theta w'$ en función de θ_w/θ_0 para cuatro estaciones diferentes de la placa plana. Comparación con [4].	64
Figura 41: comparación de la distribución de temperaturas en capa límite viscosa con espesor <i>thin</i> , con $Pr=1$ y con $Nxi=2000$ resuelta con códigos originales y con consideraciones expuestas en [4]	64
Figura 42: distribución de temperaturas en función de τ de las tres posibles soluciones originales, relajando hipótesis ($f(\tau)$), hipótesis <i>thick</i> e hipótesis <i>thin</i> para $Ncr=2$, $Ntau=1000$ y $Nxi=2000$. En este caso se produce en torno al 0.01% de error entre flujo general y <i>thick</i> en $\xi=1$, ópticamente cerca de la placa	65
Figura 43: distribución de temperaturas en función del espesor óptico de $f(\tau)$, <i>thick</i> y <i>thin</i> , para $Ncr=2 \cdot 10 - 6$, $Ntau=1000$ y $Nxi=2000$. En este caso se produce menos del 0.01% de error entre flujo general y <i>thin</i> en $\xi=0.0045023$.	66
Figura 44: distribución de temperaturas en función del espesor óptico de $f(\tau)$, <i>thick</i> y <i>thin</i> para $Ncr=0.1$, $Ntau=1000$ y $Nxi=2000$; y superposición con la distribución de temperaturas de flujo ideal	66
Figura 45: distribución de temperaturas en función de η de $f(\tau)$ para los tres valores típicos de Ncr , $Ntau=1000$ y $Nxi=2000$	67
Figura 46: evolución de $NuRe$ con ξ en el caso de pared fría y pared caliente, y los tres valores típicos de Ncr	68
Figura 47: gradiente de temperaturas frente a ηv calculado a partir de $f(\tau)$ en las estaciones indicadas en la leyenda, para los valores típicos de Ncr	69
Figura 48: perfiles de temperatura adimensional θ , y perfiles de velocidad u y v , para tres estaciones diferentes de la placa plana, $Ncr = \{0.1, 1, 10, \infty\}$ y $Pr=1$	72
Figura 49: perfiles de temperatura adimensional θ , y perfiles de velocidad u y v , para tres estaciones diferentes de la placa plana, $Ncr = \{0.1, 1, 10, \infty\}$ y $Pr=100$	72
Figura 50: perfiles de Θ respecto a η_{esc} para $Pr=1$ y $Pr=100$, $Ncr = \{0.1, 1, 10, \infty\}$, y en la última estación de la placa plana, es decir, $\xi=1$	73
Figura 51: perfiles de u_{esc} respecto a η_{esc} para $Pr=1$ y $Pr=100$, $Ncr = \{0.1, 1, 10, \infty\}$, y en la última estación de la placa plana, es decir, $\xi=1$	74
Figura 52: evolución de $Nu/Gr^{1/4}$ respecto a ξ , para $Pr=1$ y $Pr=100$, y $Ncr = \{0.1, 1, 10, \infty\}$	75

1 Capa límite: convección forzada y convección libre

1.1 Introducción a las capas límite. Tratamiento de las ecuaciones de Navier Stokes

En este proyecto se trabaja con flujo ideal, o también denominado flujo no viscoso, y con flujo real, o viscoso. Interaccionan, en general, con una o dos placas planas que están orientadas horizontal o verticalmente. En todos los casos, el concepto de *capa límite* salta a la palestra. Cuando hablamos de capa límite nos referimos indistintamente al comportamiento, en términos de velocidad y de temperatura, que presenta un flujo muy cerca (más adelante se discute cuánto de cerca) de una superficie, o a esa zona cercana a la pared donde el flujo exhibe dicho comportamiento. Para que se genere una capa límite mecánica y térmica es condición necesaria, entre otros, que el fluido en estudio tenga viscosidad. Si el fluido en estudio no es viscoso, pero transmite calor por conducción, solo se genera una capa límite térmica.

Por otro lado, es importante conocer si el campo de velocidades y la densidad del fluido dependen de su campo de temperaturas o no. En este trabajo se va a estudiar radiación en convección forzada, cuando no existe dicha dependencia; y radiación en convección libre, cuando sí existe dicha dependencia. Si en la convección forzada también existiese, se hablaría de convección mixta. Así pues, en este primer apartado, se realiza una somera descripción de la naturaleza física de los fluidos ideales y no ideales; se explica aquellos términos que se van a conservar de las ecuaciones de Navier-Stokes; se enfatiza la necesidad de trabajar con números adimensionales en la mecánica de fluidos, en presencia o no de radiación térmica; y se explican las hipótesis que nos permiten sostener el modelo de capa límite mecánica y térmica en convección forzada y en convección natural que se va a resolver a través de los métodos numéricos del apartado 3. En el apartado 2, se explican los fundamentos de la radiación térmica que son relevantes en este proyecto. Finalmente, en los apartados 4 y 5 se muestran los resultados buscados, validados tras contrastarse con referencias de interés.

En los fluidos no viscosos, no existen fuerzas tangenciales entre capas adyacentes de fluido, ni entre el fluido y las condiciones de contorno, solo existen fuerzas normales (presión). Dicho de otro modo, [2] el flujo ideal no se opone a un cambio en su forma a través de cualquier resistencia interna. De esta manera, si bien esta teoría ha tenido una gran evolución desde el punto de vista matemático, y ofrece una descripción satisfactoria en el movimiento de ondas en un fluido, o en la formación de chorros líquidos y capilares, no es útil para calcular la resistencia que experimenta un cuerpo que se mueve de manera relativa respecto a un fluido. En este caso la hipótesis de flujo ideal, al no tener en cuenta las fuerzas tangenciales antes mencionadas, predice la paradoja de D'Alembert, por la cual, un cuerpo que se mueve de manera subsónica y uniforme a través de un fluido ideal infinito no experimenta resistencia al avance, cuando la experiencia dicta que sí la experimenta. Si bien en este trabajo, no se pretende calcular dicha resistencia al avance, sí se pretende estudiar las propiedades del fenómeno físico que la explica cuando se consideran efectos de radiación térmica. Del mismo modo, para conocer la razón de ser de dicho fenómeno, se debe considerar una propiedad física de los fluidos, la viscosidad.

Históricamente, la viscosidad de los fluidos se había despreciado de manera generalizada, ya que fluidos tan usados como el agua o el aire, tienen una viscosidad muy baja. En muchos casos, estos fluidos de baja viscosidad se comportan como los flujos ideales, porque las fuerzas tangenciales en las capas del fluido son muy pequeñas. Sin embargo, en el flujo ideal hay una diferencia entre las velocidades tangenciales que presentan las moléculas de fluido que se encuentran en las proximidades de una condición de contorno y en la propia condición de contorno. En teoría, nada impide que el fluido deslice por la condición de contorno. En cambio, el fluido real no desliza, porque la viscosidad, por muy pequeña que sea, le obliga a adherirse a la condición de contorno, debido a las fuerzas tangenciales que aparecen entre ésta y el fluido. La presencia de dichas fuerzas tangenciales y la condición de no deslizamiento constituyen la diferencia esencial entre fluidos viscosos y no viscosos.

La mecánica de fluidos es una disciplina que presenta una fuerte dependencia con la experimentación para validar las hipótesis susceptibles de ser planteadas para modelar y comprender un fenómeno. Al mismo tiempo, debe apoyarse en todo momento en las ecuaciones simplificadas de Navier-Stokes. Se trata de un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento general de un fluido respecto a un objeto, entendido este último como parte de las condiciones de contorno junto con la condición de no deslizamiento, la velocidad lejos del objeto, y la temperatura en él y lejos de él. Deducidas por Claude-Louis Naviere y por George Gabriel Stokes, aún no se dispone de una solución general, debido a su colosal complejidad. La manera que tiene la mecánica de fluidos de tratar con ellas para resolver problemas es a través de números adimensionales definidos convenientemente, a través de hipótesis y a través de métodos numéricos.

El sistema de ecuaciones de Navier Stokes [1] proporciona los campos de densidad (ρ), velocidad (\vec{v}), presión (p) y temperatura (T) en cualquier punto del dominio fluido, incluida la superficie del objeto con el que el fluido interactúa. Se compone de seis ecuaciones y seis incógnitas. Las ecuaciones son la conservación de la masa (1 ecuación), la conservación de la cantidad de movimiento (3 ecuaciones), la conservación de la energía (1 ecuación) y la ecuación de estado para los gases perfectos (1 ecuación). Las incógnitas son ρ , \vec{v} (tres componentes, u , v y w), p y T . Se muestran las ecuaciones en su forma más general para encarar los problemas que se resuelven en este trabajo:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \rho \vec{f}_m + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \quad (1.2)$$

$$\rho C_p \vec{v} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (k \nabla T) - \nabla \cdot q_r \quad (1.3)$$

$$\frac{p}{\rho} = R_g T \quad (1.4)$$

Se trata de las ecuaciones para un movimiento estacionario en el tiempo. La densidad es constante, a expensas de matizar esta información en convección natural. Sabiendo además que, desde un punto de vista matemático, la divergencia de un campo vectorial como es \vec{v} mide la diferencia entre el flujo saliente y entrante de dicho campo vectorial sobre la superficie que rodea a un volumen de control, entonces (1.1) expresa un movimiento incompresible.

En el primer miembro de (1.2) tenemos el término convectivo de la derivada total, que mide la variación de la cantidad de movimiento de una partícula fluida a lo largo de su movimiento en el volumen de control en estudio. Dicho término constituye una fuerza que se iguala con los posibles gradientes de presión, fuerzas másicas y difusión del momento.

Con C_p el calor específico a presión constante, y “ k ” la conductividad térmica, en (1.3) se tiene el balance de energía que tiene lugar en el volumen de control, el cual, en nuestro caso será el flujo confinado entre las dos placas horizontales, o el flujo adyacente a una placa vertical. Según el primer principio de la termodinámica, el incremento de energía total que se produce en el volumen de control es igual al calor suministrado a cada elemento de masa. El término de la izquierda mide la variación de la energía interna de una partícula fluida a lo largo de su movimiento en el volumen de control en estudio. Dado que el transporte de calor por convección se debe al movimiento del fluido, esté o no esté obligado a circular a cierta velocidad por la superficie en estudio; y dado que el término de la derecha se corresponde con el calor suministrado al volumen de control por radiación y por conducción, el balance de energía cobra sentido físico: el calor que se propaga por convección se iguala al calor por conducción y por radiación. Estos dos últimos medios de propagación del calor, como se verá, gobiernan los problemas a resolver en este trabajo. Como se verá en los apartados 4 y 5, dicho balance puede modificarse durante el avance del fluido. Por otro lado, la ecuación de estado se empleará cuando haya que justificar ciertas hipótesis en el marco de la convección natural. El fluido de trabajo es en todo momento un gas perfecto. En el apartado 2 se justifica su elección.

1.2 Teorema Pi. Parámetros adimensionales empleados

Como se ha comentado previamente, uno de los recursos más versátiles para expresar el potencial de las ecuaciones de Navier-Stokes es el análisis dimensional. Esta herramienta [11] se basa en el principio de que las relaciones funcionales entre las variables que intervienen en un fenómeno físico dado son independientes del sistema de unidades elegido. Dicho principio permite expresar toda la información acerca de las variables físicas contenida en las relaciones funcionales en términos de un número menor de variables o parámetros adimensionales obtenidos a partir de los originales. En otras referencias, se refieren a dicho principio como leyes de similitud, según las cuales, [2] las variables a calcular pueden referenciarse respecto a valores de referencia, obteniéndose de la misma manera parámetros adimensionales.

Este principio queda plasmado en el Teorema Pi o de Vaschy-Buckingham. Considerese una relación funcional [11] entre las cantidades físicas a_0, a_1, \dots, a_n . Si se tienen “k” dimensiones físicas independientes, como pueden ser longitud, tiempo, masa y temperatura, este teorema establece que pueden definirse “n+1-k” variables o parámetros adimensionales. A continuación, se hace una relación de aquellos que son de nuestro interés, tanto para convección forzada como para convección libre, en presencia de radiación, y que irán apareciendo a lo largo del trabajo conforme se vaya desarrollando el proyecto.

- Número de Eckert: mide la importancia relativa de la convección de energía cinética frente al efecto de convección de calor. Se ha supuesto mucho menor que la unidad tanto en convección forzada como en convección natural [1] ya que se despreja la disipación de energía cinética en energía interna.

$$Ec = \frac{u_{\infty}^2}{C_p \Delta T} \quad (1.5)$$

- Número de Froude: mide la importancia relativa de la convección de energía cinética frente al término de fuerzas másicas.

$$Fr = \frac{U_{\infty}^2}{Lg} \quad (1.6)$$

En convección forzada es mucho menor que la unidad, mientras que en convección libre es de orden unidad.

- Número de Reynolds: se define de la siguiente forma.

$$Re = \frac{\rho U_{\infty} L}{\mu} = \frac{U_{\infty} L}{\nu} \quad (1.7)$$

Siendo μ el coeficiente de viscosidad del fluido, ν su viscosidad cinemática y L la longitud característica del objeto en estudio, generalmente una placa plana (del orden de metros). Mide la importancia relativa entre las fuerzas de inercia convectiva, y las fuerzas de viscosidad. En este trabajo se va a trabajar con régimen laminar, y “Re” toma un valor de $Re = 10^4$.

- Número de Prandtl: se define de la siguiente forma.

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu \cdot C_p}{k} \quad (1.8)$$

Siendo α la difusividad térmica. Se empleará profusamente en el apartado 3 la primera definición. Se trata de una propiedad del fluido, al igual que la viscosidad, y compara la capacidad de un fluido para transferir, por difusión, cantidad de movimiento y calor. Toma un valor de $Pr=1$, salvo en convección libre, que se le dan dos valores, $Pr=1$ y $Pr=100$.

- Número de Peclet: se define de la siguiente forma.

$$Pe = Re \cdot Pr = \frac{U_{\infty} L}{\alpha} \quad (1.9)$$

Mide la importancia relativa de la convección de calor frente al calor recibido por conducción

- Número de Boltzmann: se define de la siguiente forma.

$$Bo = \frac{\rho C_p U_{\infty}}{\sigma T^*{}^3} \quad (1.10)$$

Establece una medida cualitativa del orden de magnitud de la convección frente al flujo de calor por radiación. Así mismo, el cambio de variable que se le aplica a la variable longitudinal que se emplea en el análisis de las capas límite en función del espesor óptico puede expresarse, cuando la convección de calor entra en juego, en función de Bo:

$$x = \frac{\rho C_p U_{\infty}}{2\beta\sigma T^*{}^3} \cdot \xi = \frac{Bo}{2\beta} \cdot \xi \quad (1.11)$$

- Parámetro Ncr: se define de la siguiente forma.

$$Ncr = \frac{\kappa k}{4\sigma T^*{}^3} \quad (1.12)$$

Siendo κ la absorptividad del medio, con unidades recíprocas, este número adimensional aparece de manera natural en el apartado 3. Establece una relación entre el término conductivo de la capa límite y el término radiativo. De hecho, su valor puede dar pistas sobre si el número de Pr puede tomarse grande o pequeño. Si $Ncr \ll 1$, entonces Pr podría tomarse $Pr \gg 1$, momento en el que la capa límite térmica tendría un espesor mucho menor que el de la capa límite mecánica. Si $Ncr \gg 1$, entonces Pr podría tomarse $Pr \ll 1$, momento en el que la capa límite térmica tendría un espesor mucho mayor que el de la capa límite mecánica. En la página 213 de [2] puede hallarse más información sobre estos supuestos.

- Espesor óptico: en el apartado 2.4 se aportará más información. De momento se tiene:

$$\tau = \int_0^y \kappa \cdot dy \quad (1.13)$$

Siendo “y”, la coordenada vertical que se maneja en este trabajo. El espesor óptico y Ncr son los parámetros que modificaremos con mayor frecuencia con el objeto de conocer cómo se comporta un medio, en este caso flujo ideal y capa límite, frente a radiación térmica.

- Número de Nusselt: se trata de un número adimensional que mide el aumento de la transmisión de calor por convección comparada con la transferencia de calor si ésta ocurriera solamente por conducción. Puede existir interés por un Nusselt local, correspondiente a un punto concreto de la superficie en estudio, o por un Nusselt medio, que puede obtenerse integrando el Nusselt local en toda la superficie. En este trabajo, se va a estudiar por defecto el número de Nusselt local, que se toma como el gradiente de temperaturas en la superficie, en tres formas diferentes: gradiente de temperaturas *persé*, Nu/\sqrt{Re} (convección forzada) y $Nu/(Gr)^{1/4}$ (convección libre).
- Número de Rayleigh: mide la importancia relativa entre los efectos de las fuerzas de flotabilidad y los efectos de las fuerzas de viscosidad de la conducción térmica.
- Número de Gr: mide la importancia relativa entre los efectos de las fuerzas de flotabilidad y los efectos de la viscosidad del fluido. Ambos parámetros se usan en el estudio de los fenómenos de convección libre:

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu\alpha}; Gr = \frac{g\beta\Delta T \cdot L^3}{\nu^2} \quad (1.14)$$

Valga el siguiente comentario para contextualizar la relevancia del análisis dimensional. El choque de partículas entre sí en un flujo sea ideal o viscoso, permite la transmisión de calor por conducción o difusión. Sin embargo, la absorción de las partículas de la energía de los fotones no tiene porqué venir acompañada de estos choques. Por un lado, el parámetro N_{cr} da una idea de la existencia o no de estos choques de partículas, mientras que el espesor óptico da una idea de los obstáculos que los fotones encuentran en su recorrido a la velocidad de la luz hasta que finalmente son absorbidos por las partículas del medio. Efectivamente, a la hora de validar en la realidad los resultados que se muestran en este proyecto, los experimentos a realizar deberían considerar entre otros, los valores de la absorptividad, la conductividad térmica, la velocidad del fluido o la temperatura de referencia, de los que dependen τ y N_{cr} , los parámetros que gobiernan los problemas en estudio de convección forzada.

1.3 Capas límite generadas por convección forzada. Hipótesis desplegadas

En este apartado se alumbran las implicaciones físicas que tiene los órdenes de magnitud que toman algunos de los números adimensionales referidos anteriormente, en el caso de convección forzada. En el siguiente apartado se hace lo mismo, en el caso de convección libre.

Cuando se obliga a un flujo viscoso a circular por una superficie horizontal a una velocidad de referencia constante U_∞ , [1] la cual, para las aplicaciones en las que se genera capa límite, toma valores del orden de 100m/s, el término de fuerzas másicas es varios órdenes menor que el de la aceleración convectiva. En consecuencia, $Fr \gg 1$, y se desprecia, de momento, la aceleración de la gravedad. Por otro lado, resultan de nuestro interés los fluidos de baja viscosidad. Recordando (1.7), se tiene que $Re \gg 1$, y, por tanto, $Pe \gg 1$, ya que $Pr=1$. Es decir, siempre y cuando nos situemos a una distancia L (contemplada en Re) lo suficientemente lejos del objeto que interacciona con el flujo, se pueden despreciar los términos viscosos y los de conducción de calor, siendo válida la hipótesis de flujo ideal cometiendo errores relativos del orden de Re^{-1} y de $(RePr)^{-1}$. Sin embargo, estos términos han de ser retenidos en una región del espacio cercana a la superficie del objeto, ya que representan en las ecuaciones aquellos mecanismos físicos responsables de forzar tanto la condición de contorno de igualdad de velocidades tangenciales entre el fluido y el sólido, como la igualdad de temperaturas y de flujo de calor entre el fluido y el sólido:

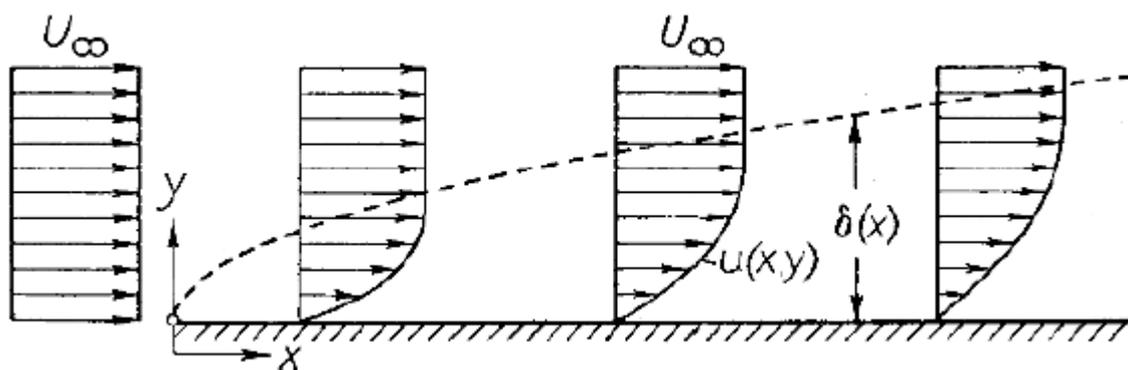


Figura 1: distribución de velocidades de un flujo viscoso cerca de la pared, siempre que $Re \gg 1$ [2]

Ese espacio cercano a la superficie del sólido se conoce como capa límite. Fue identificado por Ludwig Prandtl en 1904 en su trabajo *“On the motion of fluids in very little friction”*. Como se ve en la Figura 1, [2] a medida que el flujo recorre una distancia mayor, la capa de partículas que es frenada por la fricción se hace cada vez más grande. Si bien la transición entre capa límite y flujo exterior se produce de manera continua en régimen laminar, se introduce de manera artificial “ δ ” para designar al espesor de la capa límite.

De este modo, en virtud de las hipótesis desplegadas en el apartado 2.5, (1.1)-(1.4) se expresa:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (1.15)$$

$$\rho \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (1.16)$$

$$\rho C_p \left(u_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial q_R}{\partial y} \quad (1.17)$$

Fijándonos en (1.16), es posible estimar el espesor físico de la capa límite mecánica. Sabiendo que los efectos de difusión transversal en “ δ ” deben ser del mismo orden que la variación de la cantidad de movimiento de las partículas en su recorrido “ L ” por el volumen de control:

$$\rho v \cdot \nabla v \sim \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \leftrightarrow \rho \frac{U_\infty^2}{L} \sim \mu \frac{U_\infty}{\delta^2} \leftrightarrow \frac{\delta}{L} \sim Re^{-1/2} \ll 1 \quad (1.18)$$

Por tanto, según (1.7), a menor viscosidad, mayor Re ; y según (1.18), a mayor Re , más estrecha será la franja en la que se producen las variaciones significativas de la velocidad cerca de la pared. Por ejemplo, si $Re=10000$, y $L=1$ metro, $\delta \sim 1$ cm. Se toma un número de veces dicho espesor ($Re^{-1/2}$) para disponer la malla del método de las diferencias finitas. Aun así, cabe resaltar que, en los albores de la mecánica de fluidos, no se disponía de computación para resolver ecuaciones diferenciales de orden 2, y era preciso reducir el orden. Para ello debía implementarse [2] una solución de similaridad, con la cual, los perfiles de velocidad en puntos diferentes de la placa plana seguían una forma afín o similar que se escalaba según factores adecuados. Una de las soluciones de similaridad más destacadas es la solución de Blasius, que postulaba que el espesor de la capa límite para que las partículas alcancen el 99% de la velocidad del flujo ideal se expresaba en función de \sqrt{x} :

$$\delta_{99}(x) = 5 \sqrt{\frac{vx}{U_\infty}} \rightarrow \frac{\delta_{99}(x)}{L} = \frac{5}{\sqrt{Re}} \sqrt{\frac{x}{L}} \quad (1.19)$$

Si bien en este trabajo se despliega un método numérico muy versátil, en el apartado 4 se toma dicha solución de similaridad de Blasius a la hora de tratar un cambio de variable con el espesor óptico, con el objetivo de establecer una comparación con los resultados en la literatura, y validar el código para capa límite en presencia de radiación con hipótesis *thin* (ver (3.73) y Figura 39).

Volviendo a la estimación de espesores físicos, [1] de manera análoga, y suponiendo ausencia de radiación; ya que la temperatura de las partículas fluidas T_∞ , en virtud de la convección de energía interna, ha de adaptarse a la temperatura del objeto T_s en distancias del orden de L , y puesto que solo el mecanismo físico de conducción de calor puede obligar al fluido a cumplir con esta condición de contorno en “ δ ”, se tiene:

$$\rho C_p v \cdot \nabla T \sim k \nabla^2 T \leftrightarrow \rho C_p U_\infty \frac{v}{L} \frac{T_\infty - T_s}{L} \sim k \frac{T_\infty - T_s}{\delta_T^2} \leftrightarrow \frac{\delta_T}{L} \sim Re^{-1/2} Pr^{-1/2} \ll 1 \quad (1.20)$$

Si Pr es del orden de la unidad, la distribución de temperaturas presenta un espesor del mismo orden que el de la distribución de velocidades. Como se comentó previamente, en caso de que $Ncr \ll 1$, la transmisión de calor por conducción es mucho menor que la transmisión de calor por radiación, lo que puede llevar a $Pr \gg 1$, y según (1.20), en un espesor de la capa límite térmica menor. En el apartado 4 se mostrarán resultados que dejan entrever esa idea, incluso para Pr del orden de la unidad. Del mismo modo, si Ncr es del orden de la unidad o mayor, el calor por conducción es importante, y Pr tiende a ser más pequeño, lo que se traduce en un espesor de la capa límite mayor. En el apartado 3.2, se estima el espesor de la capa límite térmica para el caso de $Ncr \gg 1$, o sea, para el caso de hipótesis *thick*. Como se verá en la Figura 45, dicha estimación es una cota superior del espesor físico de la capa límite.

Antes de pasar a convección natural, se rescatan algunas hipótesis comentadas en el apartado 2.5, para describir el fenómeno del desprendimiento de la capa límite. Gracias a (1.18), [1] es posible apreciar que las variaciones de presión transversales necesarias para acelerar al fluido de la capa límite transversalmente son insignificantes:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.21)$$

Es por ello, que en (1.16) se contempla solamente la variación de la presión a lo largo de la variable “x”. De este modo, se pretende ahora generalizar para cualquier forma que no sea una placa plana, por lo que pasamos a hablar de variable “s”. (1.21) implica que, para una posición “s” dada, el valor de la presión en cualquier punto de la capa límite es igual a la que existe para ese mismo valor de “s” en el límite exterior no viscoso de la capa límite. Para el caso estacionario e incompresible, se tiene, por Bernoulli:

$$p_e(s) + \rho \frac{u_e^2(s)}{2} = p_\infty + \rho \frac{U_\infty^2}{2} \rightarrow -\frac{\partial p}{\partial s} = \rho u_e(s) \frac{du_e(s)}{ds} \quad (1.22)$$

Quedando (1.15) y (1.16) como las ecuaciones de la capa límite mecánica:

$$\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (1.23)$$

$$\rho \left(u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} + v_y \frac{\partial u_s}{\partial y} \right) = \rho u_e(s) \frac{du_e(s)}{ds} + \mu \frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} \quad (1.24)$$

Con las siguientes condiciones de contorno:

$$y = 0, u_s = v_y = 0; y \rightarrow \infty, u_s \rightarrow u_e(s) \quad (1.25)$$

De esta forma, (1.22) puede leerse como la constancia de las presiones de remanso en un flujo estacionario e incompresible. Una presión de remanso se compone de una parte estática, consistente en presiones termodinámicas, y una parte dinámica, por estar el fluido en movimiento. De esta manera, un gradiente de presiones favorable, en cuanto a que reduce la presión estática, dado por un incremento en la cantidad de movimiento del flujo exterior a la capa límite, es beneficioso para ésta porque [1] las velocidades de las partículas fluidas en el interior de la capa límite en la dirección tangente al sólido siguen teniendo el mismo sentido que las velocidades exteriores a la misma, y $\delta \ll L$. En este caso, la capa límite se encuentra adherida, porque la corriente exterior rodea una región viscosa que prácticamente coincide con la forma del objeto. Es entonces cuando los métodos numéricos que implementan condiciones de contorno en velocidad conocidas, según coeficiente de presiones experimentales, o según velocidades exteriores como se muestra en el apartado 3 permiten resolver el flujo confinado en dicha región, en velocidad y en temperatura.

En cambio, un gradiente de presiones adverso, en cuanto a que aumenta la presión estática, dado por un decremento de la cantidad de movimiento del flujo exterior, provoca que la velocidad tangente al objeto de las partículas fluidas en el interior de la capa límite decrezca aguas abajo, siendo menor que $u_e(s)$ siempre. En consecuencia, la energía cinética por unidad de volumen de las partículas fluidas confinadas en la capa límite es mucho menor que la de la región no viscosa, siendo de hecho desacelerada por la acción de una fuerza por unidad de volumen $\rho u_e(s) \frac{du_e(s)}{ds}$ en sentido contrario al de la velocidad de las partículas fluidas en el flujo exterior. Como se ve en la Figura 2, ello provoca que, en el punto S, la dirección del flujo se invierta con respecto a la del flujo en la región no viscosa, produciéndose el desprendimiento de la capa límite. En este trabajo, para demostrar la generalidad del método numérico empleado para resolver capas límite para otras formas, se resuelve la capa límite térmica en presencia de radiación para cilindro y elipse. Aunque no se llega a desprender el fluido, sí se programa la condición de desprendimiento en el apartado 3 para futuros proyectos.

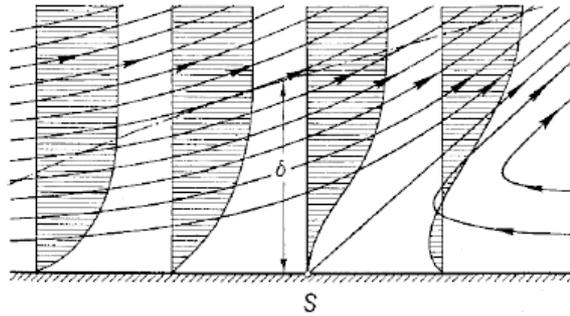


Figura 2: distribución de velocidades de un flujo viscoso cerca de la pared [2]. Nótese el desprendimiento de la capa límite cuando avanzamos más allá del punto S

1.4 Capas límite generadas por convección natural. Hipótesis de Boussinesq

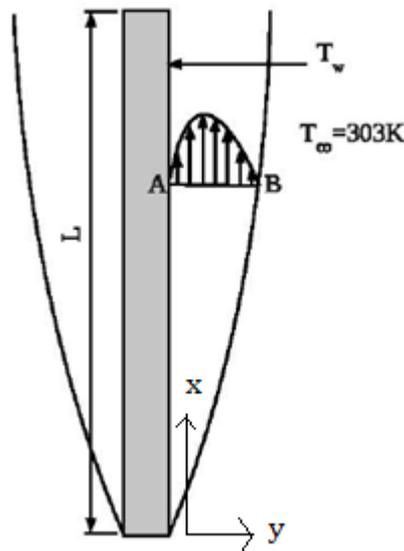


Figura 3: capa límite por convección natural en una placa vertical [12]

Conviene en primer lugar poner en contexto la convección libre con el siguiente ejemplo recogido en la referencia [12].

En la Figura 3 se ve la disposición, con el sistema de referencia correspondiente, que se estudia para convección libre en este proyecto: una placa vertical calentada a $T_w = 373$, y rodeada por un fluido, que será aire, en reposo a T_∞ . Se puede demostrar que, en un fluido en reposo a una temperatura ambiente, la radiación puede generar convección libre y con ella transporte/evacuación de energía que, según las especificaciones técnicas del sistema del que se tratase, requeriría cierta refrigeración adicional, o incluso haría las veces de refrigeración natural.

Con $L=0.5$ metros, y emisividad $\epsilon=0.9$, [12] la capa límite por convección natural se forma a lo largo de la placa en los dos lados (para este ejemplo y en general, en convección libre, nos centramos en un lado). La velocidad en los puntos A y B será nula por diferentes razones. En A la velocidad es nula como consecuencia de la condición de no deslizamiento, y en B, es nula porque el aire se encuentra en reposo, estando B en la frontera entre la zona viscosa y la no viscosa.

En este caso, el número de Nusselt medio (Nu) y el número de Rayleigh (Ra) vienen dados por:

$$\text{Nu} = a \cdot \text{Ra}^b \quad (1.26)$$

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu\alpha} \quad (1.27)$$

A continuación, tomamos una correlación muy conocida para convección natural laminar para una placa plana vertical, basada en unos estudios de Richard Sparrow. Según dicha correlación, $a=0.59$ y $b=0.25$ en (1.26). Por otro lado, Ra es calculado con $g=9.81 \text{ m/s}^2$, $\Delta T = 70 \text{ K}$, $\beta = \frac{1}{T_{mean}} = \frac{2}{373+303} = 1/338 \text{ K}^{-1}$, $\nu = 16 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ y $Pr=\nu/\alpha = 0.71$, dando como resultado $Ra=7 \cdot 10^8 < 10^9$, correspondiente a flujo laminar. Sustituyendo Ra en (1.26), $Nu=96$. Según $Nu = hL/k$, con $k=0.03 \text{ W/mK}$ (aire), se puede calcular el coeficiente medio de transferencia de calor, $h=5.8 \text{ W/m}^2\text{K}$.

Al mismo tiempo, para comprender los órdenes de magnitud de los flujos de calor por convección y por radiación, comparándolos con los flujos de calor totales, en cualquier caso, por unidad de área, se tiene:

$$q_{conv} = h \cdot \Delta T = 406 \text{ W/m}^2 \quad (1.28)$$

$$q_{rad} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T_w^4 - T_\infty^4) = 557 \text{ W/m}^2 \quad (1.29)$$

$$q_{total} = q_{conv} + q_{rad} = 964 \text{ W/m}^2; \frac{q_{rad}}{q_{total}} = 57.8\% \quad (1.30)$$

Imaginemos por un momento que se desprecia el flujo de calor por radiación. En el caso de que h pueda alcanzar 6 o $6.5 \text{ W/m}^2\text{K}$, en función de los parámetros comentados, q_{conv} puede alcanzar hasta 0.5 kW/m^2 . Si el sistema en estudio requiriese unos niveles de refrigeración mayores, sería preciso el uso de uno o varios ventiladores para mantenerlo a la temperatura deseada. Esta casuística es más determinante si cabe si no se desprecia el calor por radiación, como muestra (1.30). En cambio, si h se incrementa hasta un valor de 15 o 20, $q_{conv} \sim 1 \text{ kW/m}^2$, la convección domina sobre la radiación, aunque $\frac{q_{rad}}{q_{total}} \sim 33\%$. Por tanto, es justo concluir que la decisión de despreciar el calor por radiación no debe fundamentarse tan solo en el hecho de que la temperatura de las condiciones de contorno sea baja, sino en el hecho de que otros modos de transmisión de calor realmente dominen sobre la radiación.

Como también sugiere Modest en [13], queda patente que los efectos de la radiación en convección libre son más críticos que en convección forzada. Huelga decir que la importancia de la radiación a bajas temperaturas en determinadas circunstancias es solo uno de los aspectos diferenciadores de la radiación respecto a convección y conducción. Ver apartado 2 para más información.

Con todo, el propósito del estudio de la radiación en convección natural, o también conocida como convección de Rayleigh-Bénard, es poner en perspectiva, en el apartado 5, las diferencias entre los efectos que la radiación tiene en una capa límite ópticamente gruesa generada por convección libre, y en una capa límite sin tener en cuenta efectos de radiación (en la práctica, ópticamente opaca) generada también por convección libre, usando para ello unas técnicas de escalado para poder comparar con resultados de la literatura como se sugiere en [6]. De momento, se comentan aplicaciones prácticas de la convección forzada y de la convección libre, se comentan las hipótesis que se deben realizar partiendo de (1.1)-(1.4), y se muestran las ecuaciones a resolver. Finalmente, en el apartado 3.4 se desarrollan las ecuaciones para convección libre según el método numérico.

La aplicación más conocida de la convección forzada en la ingeniería proviene del ámbito aeroespacial. Los aviones, y las naves espaciales en su reentrada en la atmósfera terrestre tras un viaje espacial, cumplen una función diferente en términos de experiencia del pasajero. El avión tiene la misión de repetir un mismo viaje de manera rutinaria, ofreciendo un servicio a los pasajeros, de manera que, en un día, hay millones de vuelos a la vez. En cambio, llevar una nave al espacio cuesta, en función de la misión que se ambicione, miles de millones de euros, tratándose más de un proyecto a largo plazo, que un proceso diario como puede ser coger un avión. Sin embargo, en términos de aerodinámica, ambas construcciones tienen el objetivo de minimizar la resistencia

al avance, aumentando la eficiencia aerodinámica, en el primer caso, sobre todo, para disminuir el consumo de combustible, y en el segundo caso, para disminuir la fricción de las superficies con el aire que lo rodea. Este último caso es a su vez un ejemplo de vehículo en régimen hipersónico. En el apartado 2 se comenta, también a modo de introducción, qué implica ello en términos de calor transmitido por radiación.



Figura 4: aeronave. Fuente: El País

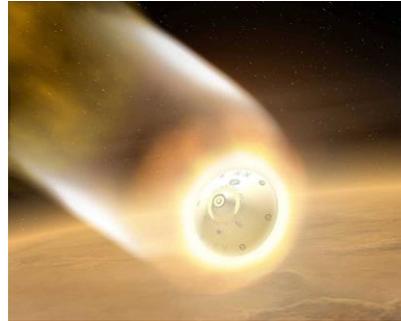


Figura 5: reentrada de nave espacial. Fuente: Wikipedia

Por otro lado, en nuestro entorno, [6], el fenómeno de convección libre más frecuente lo constituyen los movimientos generados en el seno de un fluido que se encuentra en presencia de un campo gravitatorio y en el que existen diferencias de densidad entre sus partes. Puede darse tanto en la naturaleza, como en procesos industriales. En la naturaleza se manifiesta en el caso de la atmósfera terrestre donde la radiación solar calienta la superficie de la Tierra y este calor se transfiere a la atmósfera por convección. En procesos industriales se manifiesta en aplicaciones como la refrigeración de equipos electrónicos, la ventilación, calefacción y aislamiento de edificios...

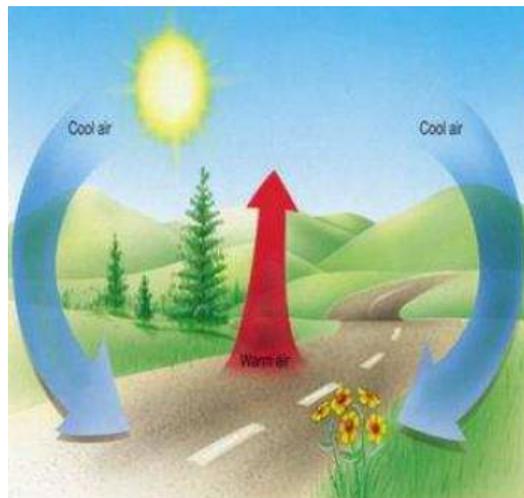


Figura 6: ejemplo de convección libre en naturaleza [6]

El estudio de los fenómenos de convección libre comenzó en 1916, cuando Rayleigh publicó su artículo “*On convection currents in a Horizontal Layer of Fluid, When the Higher Temperature Is Under Side*”, siendo el primer investigador que desarrolló una teoría que ponía de manifiesto los mecanismos físicos involucrados en la convección libre.

En efecto, cuando un fluido en reposo, cuya densidad no es uniforme, se encuentra en presencia de la gravedad, la fuerza de flotabilidad hace que una porción de fluido más densa que su entorno tienda a descender, mientras que una porción con densidad menor tienda a ascender. Cabe destacar que [2] si la densidad permaneciese constante, un flujo de convección natural no podría formarse. De hecho, la densidad variable no es el primer factor que influye en la generación de convección natural. El origen directo de un flujo tal es la transferencia de calor por conducción a través de las condiciones de contorno que rodean el fluido. La diferencia de temperaturas entre la placa y el fluido, que genera dicha transferencia de calor por conducción, da lugar a un incremento de la temperatura del fluido cercano a la placa y a un cambio en la densidad del fluido al suponer que es dependiente de la temperatura. Este efecto a lo largo de la placa se restringe, al igual que en convección forzada, a una región

muy fina cercana a la placa, dado que el aporte adicional de energía interna al fluido a través de la placa es transportado por convección, por lo que la energía no puede alcanzar zonas lejos de la placa. Esta zona puede entenderse, al menos, como capa límite térmica, ya que en su espesor δ_{CL} la temperatura evoluciona de T_w a T_∞ . Dicho espesor crece a medida que avanzamos en la capa, mientras que meras consideraciones dimensionales muestran que, además, δ_{CL} es pequeño, tanto más cuanto más pequeña sea la viscosidad μ . En conclusión, dicho flujo cercano a la placa también tiene carácter de capa límite mecánica.

Con todo, además de las fuerzas de flotabilidad, ya mencionadas, [6] deben tenerse en cuenta los mecanismos que tienden a contrarrestar su efecto: la fricción, ya mencionada, y el de la difusión térmica, ya mencionado, que tiende a homogeneizar en el seno del fluido el campo de temperaturas, y, por tanto, el de densidades. Dependiendo de la importancia relativa de estos tres factores, se tiene situación de equilibrio estable o inestable. La convección libre ocurre por una situación de equilibrio inestable.

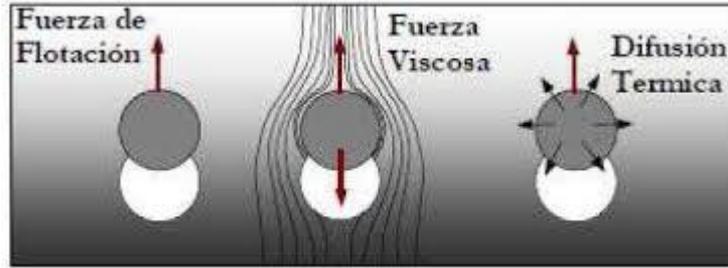


Figura 7: Representación de los mecanismos físicos que tiene lugar en el seno del fluido en convección libre [6]

De este modo, en convección natural, Ra se puede definir como el producto de otros dos números adimensionales, Pr y Gr . Dada la velocidad característica del movimiento $u_0 = \sqrt{g\beta\Delta TL}$, necesaria para adimensionalizar más adelante:

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu\alpha} = Pr \cdot Gr = \frac{\nu}{\alpha} \cdot \frac{u_0^2 \cdot L^2}{\nu^2} = \frac{\nu}{\alpha} \cdot \frac{g\beta\Delta TL \cdot L^2}{\nu^2} \quad (1.31)$$

Al aumentar Gr , se produce la transición al régimen turbulento. Dado que en este trabajo se estudia régimen laminar, Gr no es una variable en este problema, de manera que está fijo. Por otro lado, el objetivo es estudiar los efectos de la radiación térmica, cuando el flujo tiene un espesor óptico grueso. No estamos interesados en modificar el valor del espesor óptico en el estudio de la convección libre como sí lo estamos en el estudio de la convección forzada (ver apartado 2). Por tanto, estamos interesados nuevamente en modificar el parámetro Ncr . De esta forma, si en convección forzada, los parámetros que gobiernan el estudio son τ y Ncr , en convección libre los parámetros son Ncr y Pr (éste último mientras no se produzca transición al régimen turbulento).

Partiendo del sistema (1.1)-(1.4), y sabiendo que el término de las fuerzas másicas es necesario, se tiene:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (1.32)$$

$$\rho \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \vec{f}_m + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (1.33)$$

$$\rho C_p \left(u_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial q_R}{\partial y} \quad (1.34)$$

Llegados a este punto, es posible y necesario aplicar una hipótesis relativa a la variación de la densidad, conocida como hipótesis o aproximación de Boussinesq. Para más información consultar la referencia [2]. En esencia, se tiene que $\rho \vec{f}_m = -\rho g \mathbf{i}$ en el sistema de referencia de la Figura 3; y que $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_\infty g \mathbf{i}$. Por tanto:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \vec{f}_m = -(\rho - \rho_\infty)g \mathbf{i} \quad (1.35)$$

Con esto en mente, y [6] siempre que las variaciones relativas de densidad en el proceso sean pequeñas:

- La densidad se considera constante e igual a la de referencia, en este caso, ρ_∞ , en todos los términos de las ecuaciones de Navier-Stokes excepto en el de la variación de la presión en función de la variable longitudinal de la placa, en el cual, se aproxima por:

$$\rho = \rho_\infty[1 - \beta(T - T_\infty)] \quad (1.36)$$

Siendo β el coeficiente de expansión térmica.

- Todas las propiedades del fluido (ν , α y β) se consideran constantes y tomadas a la temperatura y densidad de referencia.
- Los términos de disipación viscosa son despreciables. Es decir, como ya se hace en convección forzada, $Ec \ll 1$ (ver apartado 2.5).

Por tanto, (1.33) queda:

$$\rho \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = g\beta(T - T_\infty) + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (1.37)$$

Como puede verse, la ecuación de la cantidad de movimiento depende del perfil de temperaturas, ya que, como se comenta en el primer apartado del trabajo, la convección libre se modela con una densidad dependiente de la temperatura. En el apartado 3.4 se le añade al sistema (1.32)-(1.34) el término de radiación pertinente, y se le aplican los métodos numéricos que se explican en los apartados precedentes. Para cerrar el sistema, las condiciones de contorno quedarían:

$$u_x(x, 0) = v_y(x, 0) = u_x(x, y \rightarrow \infty) = 0; T(0, y) = T_\infty, T(x, y \rightarrow \infty) = T_\infty, T(x, 0) = T_w \quad (1.38)$$

Aquí concluye esta introducción de aquellos aspectos de la mecánica de fluidos relevantes en este proyecto. Pasamos a explicar los fundamentos de la radiación térmica.

2 Introducción a la radiación térmica

2.1 La radiación como onda-corpúsculo. Aplicaciones en ciencia e ingeniería

Cualquier tipo de materia cuya temperatura sea mayor que el cero absoluto emite energía electromagnética, que se propaga en todas las direcciones a la velocidad de la luz. Dicha energía, según la dualidad onda-corpúsculo, puede tener, o bien, naturaleza de onda electromagnética, o bien, naturaleza de fotones. Los dos puntos de vista se complementan. Por un lado, [3] [4] la teoría de las ondas electromagnéticas suele usarse para predecir las propiedades radiativas de ciertas superficies, mientras que la teoría de los cuantos de energía se emplea para determinar las propiedades de los medios que absorben y emiten. En este trabajo no se asume ninguno de los dos puntos de vista en especial, aunque a la hora de comentar los resultados desde el punto de vista físico, se hará uso del concepto de fotón, en vista de que se va a proceder al estudio de los efectos de la radiación en capas límite que, en mayor o menor medida, pueden absorber y emitirla. Dicho esto, la energía electromagnética viene dada por tres parámetros: la frecuencia ν , la longitud de onda λ , y la velocidad de la onda o de los fotones c , siendo independientes dos de ellos, a través de la siguiente relación:

$$c = \lambda\nu \quad (2.1)$$

La velocidad c y la longitud de onda en un cierto medio se relacionan con sus correspondientes valores en el vacío, c_0 y $\lambda_0 = c_0/\nu$, mediante:

$$c = \frac{c_0}{n} \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad (2.2)$$

donde n es el índice de refracción (en este trabajo se asume de valor unidad). De esta manera, [5] el interés del proyecto reside en la energía electromagnética con un rango de longitud de onda de entre $0.1 \mu\text{m}$ y $100 \mu\text{m}$ (parte del espectro ultravioleta, todo el espectro visible y parte del espectro infrarrojo).

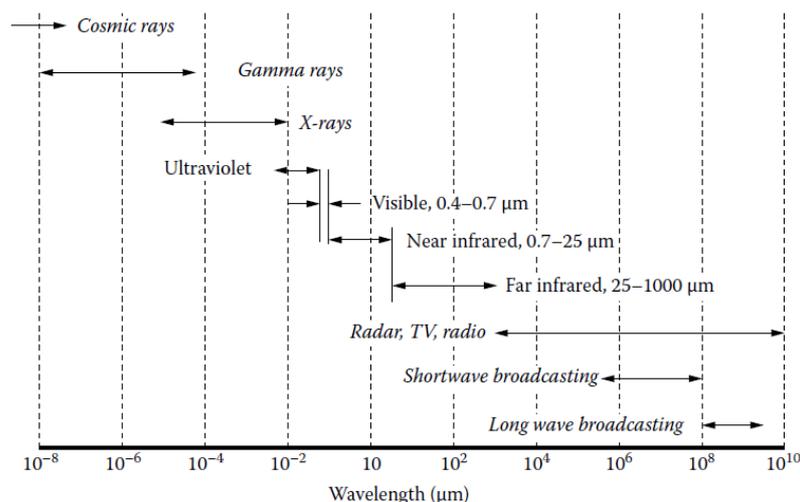


Figura 8: espectro electromagnético [5]

Dicho rango se corresponde con energía, denominada de aquí en adelante radiación térmica, emitida por un medio debido únicamente a su temperatura. Es una de las tres maneras en las que el calor puede transmitirse, junto con la convección y la conducción. En este trabajo se estudia cómo se relacionan estos tres modos de transmisión de calor. Como característica diferenciadora, la radiación térmica puede propagarse por el vacío.

La radiación puede, en general, [3] reflejarse, transmitirse, ser emitida por un cuerpo o partícula (*emitting*), ser

absorbida por dicho cuerpo (*absortion*), a la vez que emite radiación propia, dispersarse (*scattering*) o atenuarse. La relación existente entre los niveles cuánticos de energía de átomos y moléculas, de origen electrónico, vibracional y rotacional gobierna las leyes de la emisión de energía, que se propaga por un medio entre el objeto emisor y el objeto que absorbe. Por otro lado, el efecto de absorción, sumado al de dispersión, se denomina atenuación (*extinction*). Si los fotones impactan con moléculas del medio en estudio ([4] o incluso con inhomogeneidades), [14] éstas se excitan a un nivel de energía mayor y casi inmediatamente (en la escala de nanosegundos), vuelven a su estado energético previo y emiten fotones de igual o diferente frecuencia que aquellos que absorbieron en primer lugar. En este caso se ha producido dispersión de la radiación. Si en cambio, las moléculas excitadas colisionan con otras antes de que se produzca la reemisión, el salto de energía se traduce en un aumento de energía cinética de las moléculas que reciben el impacto de los otras. En este caso se produciría absorción de los fotones, y, en función del valor de N_{cr} , transmisión de calor por conducción. En este proyecto se supone que, si bien las moléculas se ven excitadas por el impacto de los fotones, no existe dispersión, por lo que el nivel de atenuación de la radiación coincide con la absorción producida. Si la radiación se atenúa completamente en su camino por el medio, éste es opaco. Si lo atraviesa sin atenuarse, la onda se transmite completamente y el medio es transparente. Si se atenúa parcialmente, entonces el medio es semitransparente.

Del mismo modo, [7] la radiación puede interactuar con la convección y la conducción de dos maneras diferentes, ya comentadas anteriormente. Por un lado, puede darse fenómenos de radiación a través de las condiciones de contorno de los procesos que involucran conducción y convección. En este trabajo dicha condición de contorno será generalmente una placa plana (si bien también se harán algunos comentarios para otras formas). Así, es posible que la temperatura de dicha placa se vea modificada debido a la interacción de radiación térmica con los otros dos modos de transmisión de calor, si bien, en este trabajo se hace la hipótesis de placa isoterma. Dicho esto, según las propiedades radiativas de la superficie que contacte la radiación (más adelante se definen), una fracción de ésta se refleja, otra se convierte en energía interna a través de la absorción de energía, y otra se transmite a través de la placa (en nuestro caso, trabajaremos con placas opacas).

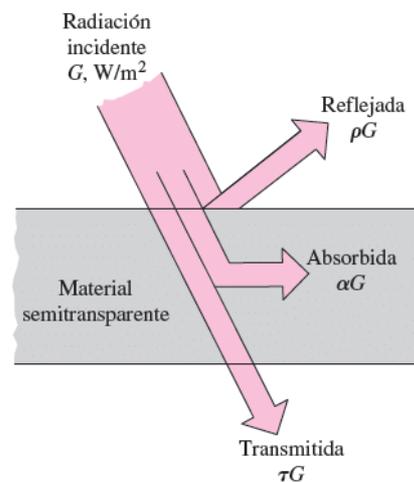


Figura 9: propiedades radiativas de una superficie [15]

Por otro lado, puede darse fenómenos de radiación volumétricos; es decir, la energía atraviesa un medio que puede absorberla o emitirla. Debido al hecho de que la expresión analítica de la potencia emisiva depende de la potencia a la cuarta de la temperatura, problemas de este tipo presentan un claro comportamiento no lineal. Así mismo, la radiación que finalmente absorbe un elemento, tras ser emitida por otros elementos situados en la vecindad o lejanos, da lugar a una expresión integral. Teniendo en cuenta además el tratamiento numérico de dicha expresión integral, así como el empleo del método de las diferencias finitas, que nos aportan expresiones algebraicas; así como la dependencia de las magnitudes, a priori, de las 3 dimensiones del espacio, o la frecuencia; y la necesidad de resolver la capa límite para introducirla, como dato conocido en cada estación, en la ecuación de conservación de la energía, consecuentemente el sistema de ecuaciones de Navier-Stokes que se resuelve de manera recursiva en este trabajo es, en los sucesivos pasos que se dan en su resolución, no lineal-integro-algebraico-diferencial parcial acoplado. Véase la siguiente ilustración para visualizar cómo la radiación en forma de fotones interacciona con un elemento volumétrico según lo ya comentado. En base a ello se definirá más adelante la ecuación de transferencia de radiación (ETR).

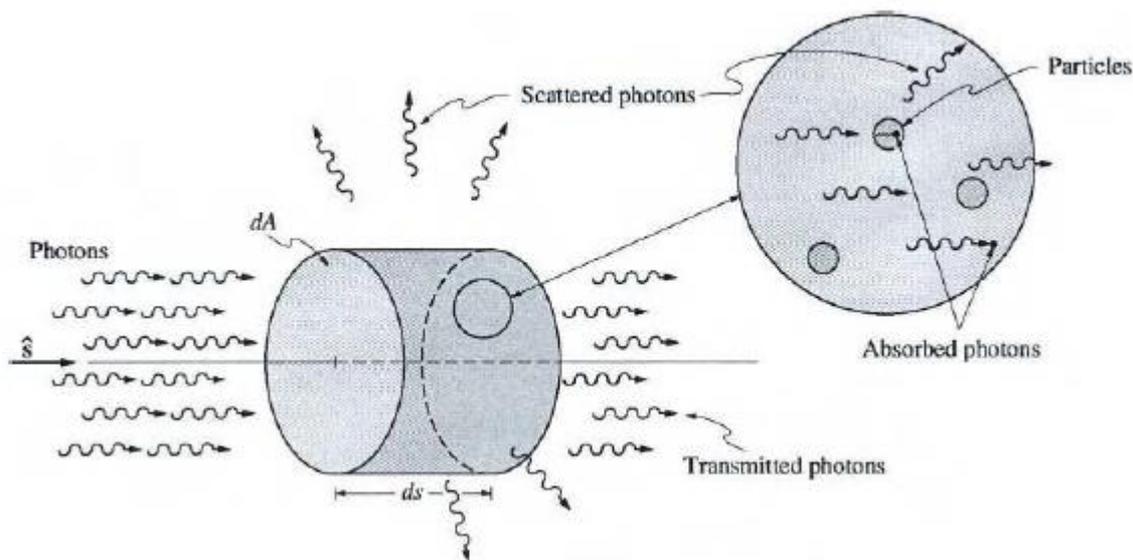


Figura 10: atenuación de radiación debido a absorción y dispersión [13]

De esta manera, la radiación térmica es uno de los factores más importantes que tener en cuenta en numerosos ámbitos de la ciencia y la tecnología.

Destaca especialmente aquellos que involucran altas temperaturas, [3] habida cuenta de la dependencia con la potencia a la cuarta de la temperatura que presenta la energía por radiación térmica emitida por un cuerpo a dicha temperatura, que convierte a la radiación en un eficiente mecanismo de transmisión de calor en hornos, cámaras de combustión, intercambiadores de calor o en la reentrada de una nave en la Tierra en régimen hipersónico. En este último caso, al friccionar el aire con la nave, la temperatura exterior a ésta se eleva considerablemente, y el material sufre una absorción considerable de energía térmica, para lo cual el correspondiente escudo térmico debe estar correctamente diseñado.

La radiación térmica es tan importante que, en vista de que es la única manera en que el calor puede propagarse por el vacío, puede explicar fenómenos de la vida real, como, por ejemplo, [5] el enfriamiento que ocurre durante una noche con el cielo despejado, debido a que el calor que irradian las personas o el acumulado por el suelo durante el día, se pierde al exterior. Es también la razón de que pueda existir congelación por encima de los 0° centígrados, por ejemplo, en las plantas de una floristería, cubiertas con plástico, cuando no existe ningún emisor de radiación térmica en los alrededores de las plantas, ni siquiera en la floristería; de que, en las misiones espaciales, las naves se abastezcan de energía solar, para aprovecharla a bordo, por ejemplo, haciendo funcionar sistemas sin tener que incrementar el peso a través de baterías o generadores; o incluso de que, en las misiones Apolo, la nave tuviera que reorientarse cada cierto tiempo para cambiar las partes de la nave expuestas a la radiación solar, y evitar su sobrecalentamiento.

Por otro lado, como se verá a lo largo del trabajo, los efectos de la radiación antes mencionados dependen, no solo de su frecuencia, sino también del medio o medios con los que interacciona. En función del espesor óptico de estos, la radiación penetrará más o menos sin ser absorbida. Al mismo tiempo, en el caso de que la radiación esté compuesta por más de una longitud de onda, como es el caso de la luz solar, [5] puede estudiarse un recubrimiento de cierto espesor, que absorba tan solo ciertas frecuencias. Tal es el caso del oro. Como material presenta gran absorción, pero para ciertos espesores pequeños, se comporta como un recubrimiento semitransparente que deja sólo pasar la radiación visible. En consecuencia, es ampliamente utilizado para proteger a los astronautas de longitudes de onda dañinas, a modo de filtro en sus cascos. En nuestro trabajo, asumimos radiación monocromática.



Figura 11: reflejo de la luna en el casco de un astronauta que presenta un fino recubrimiento de oro [5]

El equilibrio radiativo que ocurre en la atmósfera ilustra aquello que se comentó previamente que la radiación térmica podía hacer. De esta manera, las capas más bajas de la atmósfera se encargan de absorber el espectro de la luz solar más perjudicial para el ser humano, [3] atenuándose la energía de la radiación que llega a la superficie terrestre, la cual absorbe y refleja un cierto porcentaje de dicha radiación. A su vez, un cierto porcentaje de la radiación se dispersa en otras capas de la atmósfera, como por ejemplo ocurre en la formación de un arco iris, cuando sale el Sol mientras llueve; o en los atardeceres, cuando [4] se dispersan especialmente aquellas longitudes de onda menores, correspondientes al color azul, y permanecen aquellas tonalidades más rojizas. A este equilibrio también se suma la energía que emite la Tierra, de la cual, una parte no puede escapar al espacio porque es reflejada por la atmósfera, debido al efecto invernadero; otra parte es absorbida por la atmósfera, y finalmente, aquella radiación de longitud de onda grande sí se transmite al espacio exterior. Si bien, las propiedades radiativas de superficies y/o elementos de volumen pueden ser dependientes de la longitud de onda, en este trabajo se consideran independientes (se toma la hipótesis de medio gris).

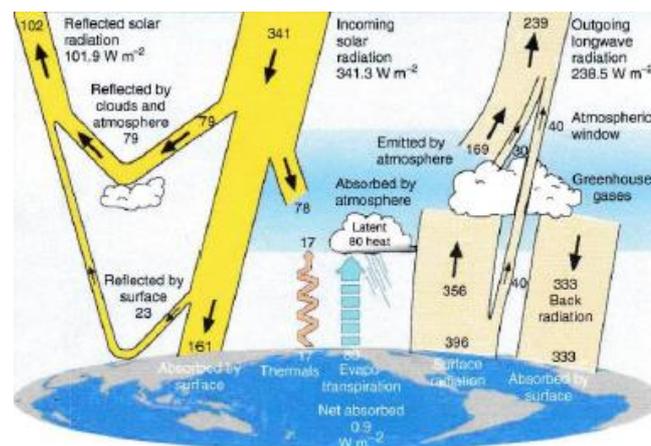


Figura 12: equilibrio radiativo en la Tierra [3]

Para finalizar, se hace un breve comentario sobre el medio con el que se va a trabajar en este proyecto. Como se ha mencionado en el apartado anterior, se trata de las capas límite que se generan en una placa plana horizontal; y las que se generan por convección libre en una placa plana vertical. En ambos casos, se pone en juego un cierto flujo de un gas, típicamente aire. Dicha asunción no es baladí en un trabajo que versa sobre interacción de la radiación con un medio. No en vano, las hipótesis de medio gris e índice de refracción unidad, si bien son asumibles para un gas como el aire, restan generalidad a este proyecto, al menos desde el punto de vista de la radiación. Como muestra un botón.

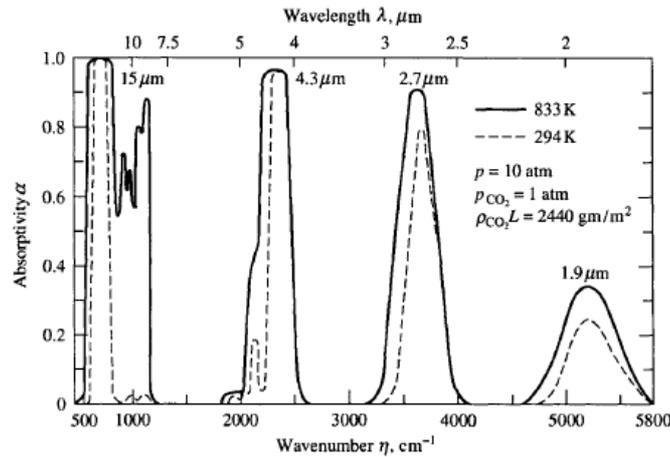


Figura 13: absortividad espectral de una mezcla isoterma de nitrógeno y dióxido de carbono [13]

Como puede verse, dependiendo de la temperatura a la que ocurra el proceso, y dependiendo de la longitud de onda, la propiedad de la absortividad, así como el resto de las propiedades, que se mencionarán a continuación, ofrecen variaciones importantes. Aun así, cabe resaltar que este proyecto sí ofrece generalidad, por ejemplo, en el tratamiento numérico a la hora de resolver las capas límite, con la posibilidad de ser resueltas para flujos alrededor de otras formas que no sean placas planas. Una vez expuestas unas líneas maestras del potencial que tienen los estudios sobre radiación, y algunas de las principales hipótesis que se despliegan en este trabajo, se pasa a una fundamentación teórica para poner en pie el estudio que se hará en los próximos apartados.

2.2 Conceptos generales. Propiedades radiativas, cuerpo negro, y potencia emisiva

Llegados a este punto, puede apreciarse que la radiación térmica, a diferencia de la conducción y la convección, requiere, para cada punto en el espacio, [13] un balance de energía que tenga en cuenta todos los fotones que puedan llegar a ese punto, sin importar lo lejos que estuviesen. Por ello, un balance de conservación de energía debe realizarse en un espacio cerrado por paredes lo suficientemente gruesas que impidan que las atraviese la radiación (es decir opacas). Nada impide, en cambio, que dichas “superficies” puedan absorber o emitir fotones. Estrictamente hablando, una superficie hace referencia a un objeto geométrico en dos dimensiones, en el cual no es posible la atenuación de la radiación. Sin embargo, en la práctica, el espesor de la placa es muy pequeño comparado con las dimensiones totales del espacio cerrado en estudio (del orden de Amstrongs en metales y de micrómetros en no metales). Por tanto, es adecuado hablar de superficie para referirnos a dichas condiciones de contorno.

Centrando la atención en una superficie tal, y recordando la Figura 9, podemos tener las siguientes propiedades radiativas para una superficie:

$$\text{Reflectancia} \quad \rho = \frac{\text{radiación reflejada}}{\text{radiación total que llega a la placa}} \quad (2.3)$$

$$\text{Absortividad} \quad \alpha = \frac{\text{radiación absorbida}}{\text{radiación total que llega a la placa}} \quad (2.4)$$

$$\text{Transmisibilidad} \quad \tau = \frac{\text{radiación transmitida}}{\text{radiación total que llega a la placa}} \quad (2.5)$$

Sabiendo que la radiación se comportará de alguna de estas tres maneras al llegar a la superficie:

$$\rho + \alpha + \tau = 1 \quad (2.6)$$

Si el medio es opaco, entonces $\tau = 0$ y por tanto $\rho + \alpha = 1$. Por otro lado, dicho medio puede emitir también radiación, pudiéndose definir:

$$\text{Emisividad } \varepsilon = \frac{\text{energía emitida desde una superficie}}{\text{energía emitida por un cuerpo negro a la misma temperatura}} \quad (2.7)$$

De esta manera, una superficie que, además de ser opaca, no refleja nada de radiación, $\rho = 0$, se trata de un cuerpo negro. Ningún otro cuerpo puede absorber tanta energía como éste. De hecho, también es el cuerpo que emite más energía. Es una de las conclusiones de la ley de Kirchhoff.

La ley de Kirchhoff establece que, para un sistema en equilibrio termodinámico, como el de la Figura 14, se aplica, para cada una de las superficies del sistema, que la emisividad es igual a la absorptividad. Si bien, como puede apreciarse, esta ley se dedujo bajo la condición de que una determinada superficie se encuentra en equilibrio termodinámico con su entorno, es, de hecho, [4] una relación general que se aplica para condiciones de no equilibrio. La razón es el hecho de que tanto la emisividad como la absorptividad solo dependen de la naturaleza de la superficie y de su temperatura, mientras el índice de refracción sea la unidad.

Como consecuencias de la ley de Kirchhoff, se tienen:

- Para un cuerpo negro, que no refleja ni deja pasar la radiación, se tiene que, según la ecuación (2.6), $\alpha = 1$. Consecuentemente, según la ley de Kirchhoff, $\varepsilon = 1$. Por tanto, ningún cuerpo puede absorber ni emitir tanta energía como lo hace el cuerpo negro.
- La radiación del cuerpo negro es isotrópica o difusa. Independientemente de la dirección, la intensidad es la misma. En cualquier caso, a instancias prácticas, a veces se asume dicha isotropía de la radiación en general, aunque no se trate la del cuerpo negro. En este trabajo se asume igualmente.

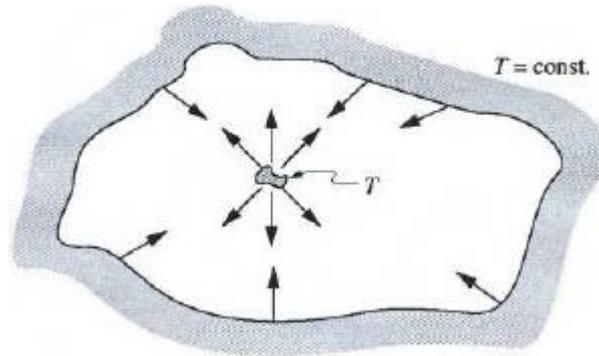


Figura 14: ley de Kirchhoff [13]

En cuanto a las partículas que componen el medio, debe asumirse que se encuentran en equilibrio termodinámico local. Es decir, [4] el total de átomos y moléculas que contribuye a la emisión y absorción de fotones se encuentra en equilibrio. Esta asunción es válida cuando las transiciones de energía están controladas por colisiones moleculares en vez de por absorción y emisión de energía, como es el caso. A su vez, dicha asunción implica [16] que cada punto geométrico que describe el medio está caracterizado por una temperatura T definida. Por tanto, cada elemento de materia en cada punto del espacio se comporta como si formase parte de un entorno cerrado isoterma a dicha temperatura T . Por ello, la emisión es independiente de la radiación incidente en el elemento de volumen, y la ley de Kirchhoff, al igual que en superficies, también se cumple en elementos de volumen. Ello será de especial utilidad para establecer la ETR.

Así pues, todos los medios en general sean superficies o elementos de volumen, emiten radiación electromagnética al azar en todas las direcciones, dependiendo de la temperatura local, de la frecuencia y de las propiedades del medio. Dicha radiación puede estudiarse a nivel de intensidad o a nivel de energía. A nivel conceptual, como veremos, la energía de los fotones se integra, bien en un hemisferio o en una esfera unidad, según si el elemento en cuestión es de una superficie o del fluido, para obtener el flujo de calor [W/m^2] con el que se trabaja en este proyecto. En un principio los fotones pueden tener cualquier frecuencia y depender de la dirección. Más adelante, en coherencia con la hipótesis de cuerpo gris e intensidad difusa, se trabaja con magnitudes totales y se obtiene una relación entre la intensidad y la energía. Más adelante en este apartado se demostrará que, en convección forzada, la transferencia de radiación en dirección del avance de la capa límite es despreciable bajo ciertas condiciones, por lo que nos centramos en la transferencia de radiación verticalmente.

Comenzamos por la energía. [13] El flujo de calor por radiación emitido desde una superficie también se llama potencia emisiva. Debe distinguirse entre potencia emisiva espectral E_ν (en una cierta frecuencia) y potencia emisiva total E (integrada en todo el espectro):

- E_ν (Energía emitida por unidad de tiempo, unidad de superficie y unidad de frecuencia).
- E (Energía emitida por unidad de tiempo y unidad de superficie).

$$E = \int_0^\infty E_\nu d\nu \quad (2.8)$$

$$E_{\nu_1-\nu_2} = \int_{\nu_1}^{\nu_2} E_\nu d\nu \quad (2.9)$$

A la radiación térmica por unidad de tiempo, unidad de superficie y de una cierta frecuencia o longitud de onda se le denomina también radiación monocromática. Como puede verse, $E_\nu d\nu$ se trata de la energía emitida por unidad de tiempo y unidad de superficie correspondiente a las ondas situadas en ese diferencial de frecuencia. Dicha expresión nos permite en la práctica integrar en todo el espectro o entre dos frecuencias, en función de si la potencia que deseamos obtener realmente es en todo el espectro o entre dos frecuencias. Esta reflexión puede realizarse también equivalentemente en función de la longitud de onda.

Como se acaba de referir, el cuerpo negro presenta importantes propiedades, que para este trabajo son de especial relevancia puesto que las placas planas que se consideran son cuerpos negros. En la práctica, también aporta una idea de que cómo E_ν varía con ν , puesto que las tendencias que a continuación van a explicarse para la energía que emite un cuerpo negro se corrigen con la emisividad ya definida para obtener una emisión de energía real.

De esta manera, aplicando la Segunda Ley de la Termodinámica, así como argumentos de mecánica cuántica, [4] Max Planck demostró que, a una cierta temperatura y longitud de onda, existe una máxima cantidad de radiación que puede ser emitida. Tal emisor es el cuerpo negro. Se trata de la ley de Planck:

$$E_{b\nu}(T) = \frac{2\pi h\nu^3 n^2}{c_0^2 \cdot (e^{\frac{h\nu}{\sigma T}} - 1)} \quad (2.10)$$

En esta ecuación, h y k son las constantes de Planck y de Boltzmann. La constante de Planck nos aporta a través de $h \cdot \nu$ la energía de un fotón. Sin embargo, en este trabajo se ha seguido la misma premisa que siguió Viskanta en la referencia [16]: “dos niveles diferentes de definición son posibles en este estudio de la interacción de la radiación electromagnética con materia: por un lado, el análisis de la interacción microscópica detallada de las ondas electromagnéticas son varios tipos de partículas desde el punto de vista de la mecánica cuántica; y por otro, el estudio macroscópico de la interacción entre la materia y la radiación [...] En este informe, se considera el último punto de vista, es decir, el estudio del campo de radiación a través de ecuaciones macroscópicas, escritas en términos del coeficiente de absorción volumétrico promedio [...]”. Por tanto, nos ceñimos a la deducción de la energía total de emisión del cuerpo negro, así como al estudio de las hipótesis de espesor óptico delgado y grueso, para comprender cómo interacciona la radiación con las ecuaciones de capa límite en convección forzada y convección natural.

Volviendo a la ecuación (2.10), el índice de refracción n se refiere al medio que rodea el cuerpo negro. En nuestro caso, n toma valor unidad, como ya se justificó. Por otro lado, dicha ecuación puede escribirse también en función de la longitud de onda:

$$\nu = \frac{c_0}{\lambda} \rightarrow d\nu = -\frac{c_0 d\lambda}{\lambda^2}; E_{b\lambda} d\lambda = -E_{b\nu} d\nu \rightarrow E_{b\lambda} = \frac{2\pi h c_0^2}{\lambda^5 \cdot (e^{\frac{hc_0}{\lambda T}} - 1)} \quad (2.11)$$

Si el medio fuese un cristal o un líquido ($n \neq 1$), [4] c_0 debería sustituirse por c_0/n . La Figura 15 muestra la potencia emisiva espectral como una función de la longitud de onda para cuerpos negros a diferente temperatura. Por un lado, a mayor temperatura, la potencia emisiva se incrementa para una misma longitud de onda. Por otro lado, esta evolución, fijada una temperatura, presenta un máximo para una cierta longitud de onda, que puede obtenerse resolviendo numéricamente una ecuación transcendental (ver página 9 de [13]). El resultado se conoce

como Ley del Desplazamiento de Wien:

$$\lambda_m = \frac{2898}{T} \mu\text{m} \quad (2.12)$$

Una vez fijada la temperatura, la potencia emisiva decae para longitudes de onda mayores o menores que λ_m . Según la ecuación (2.12), dicha longitud de onda λ_m decae a medida que crece la temperatura.

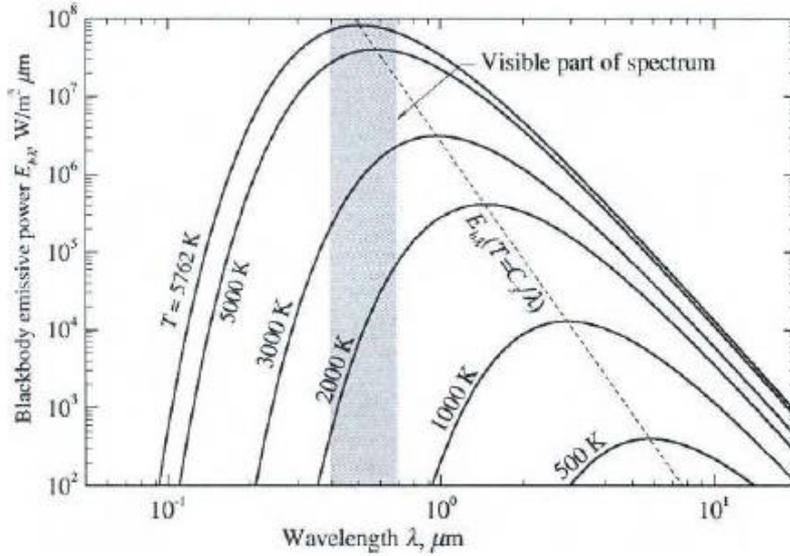


Figura 15: energía específica del cuerpo negro en función de su temperatura y de la longitud de onda [13]

Esta ley explica, por ejemplo, [3] por qué cuando un cuerpo metálico es calentado su superficie cambia de color gradualmente desde el rojo hasta el amarillo, e incluso hasta el blanco. De esta forma, si introducimos (2.11) en (2.8), obtenemos la potencia emisiva total de un cuerpo negro cuya superficie se encuentre a una temperatura T , según la ley de Stefan-Boltzmann:

$$E_b = \sigma T^4 \quad (2.13)$$

Donde σ es la constante de Stefan Boltzmann (ver página 10 de [13] para más información sobre su obtención). Los cuerpos reales no son cuerpos negros, por lo que para medir la potencia emisiva espectral de una superficie real respecto a la del cuerpo negro a la misma temperatura, se emplea su emisividad espectral:

$$E_\lambda(T) = \varepsilon_\lambda(T) \cdot E_{b\lambda}(T) \quad (2.14)$$

Para superficies de diferentes materiales, $\varepsilon_\lambda(T) \leq 1$ debe determinarse experimentalmente. La emisividad total se define como la ratio de la potencia emisiva de un cuerpo real respecto a la de un cuerpo negro a la misma temperatura.

$$\varepsilon(T) = \frac{E(T)}{E_b(T)} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda(T) \cdot E_{b\lambda}(T)}{\sigma T^4} \quad (2.15)$$

Al igual que $\varepsilon_\lambda(T)$, es una propiedad del material. Sin embargo, como se especificó en el apartado anterior, se trabajará con la hipótesis de cuerpo gris. Es decir, se hace un promedio de las propiedades antes mencionadas con la frecuencia y se considera un cuerpo gris "equivalente" con propiedades igual al promedio e independientes de la longitud de onda. Por tanto, de aquí en adelante se trabajará con magnitudes y ecuaciones que ya han sido integradas para todas las longitudes de onda. Por otro lado, como ya se mencionó, $\alpha = \varepsilon = 1$. De esta manera, se da por cerrado este apartado correspondiente al estudio de las condiciones de contorno del sistema que va a estudiarse en este trabajo.

2.3 Intensidad de radiación y ecuación de transferencia de radiación

A continuación, pasamos a un estudio más detallado sobre la manera en la que se va a tratar la energía de los fotones para comprender la influencia que tiene en la propagación de calor debido a la radiación. Para ello, se va a repasar el concepto de ángulo sólido.

El ángulo sólido es por definición similar al ángulo plano, pero viene dado en un espacio de tres dimensiones. La necesidad de usarlo en el aparato matemático da una idea de la dependencia del fenómeno de la radiación con el espacio. Mientras que el ángulo plano es la ratio entre un arco y la distancia entre el vértice del ángulo y un punto de dicho arco, [5] el ángulo sólido es la ratio entre un área contenido en una esfera y el cuadrado del radio de dicha esfera. Por ejemplo, un hemisferio tiene una superficie de $2\pi R^2$, por lo que, siendo la unidad del ángulo sólido el estereorradián (sr), tiene asociado un ángulo sólido de 2π sr sobre el centro de su base. El estereorradián se define, al igual que el radián, a partir de un elemento unidad, en este caso, una esfera de radio unidad: es el área de valor unidad contenido en una esfera de radio también unidad, que se corresponde con un ángulo sólido de valor 1 sr. Por tanto, el ángulo sólido de una esfera completa será 4π sr. Véase a continuación el sistema de referencia provisional, así como el diferencial de ángulo sólido:

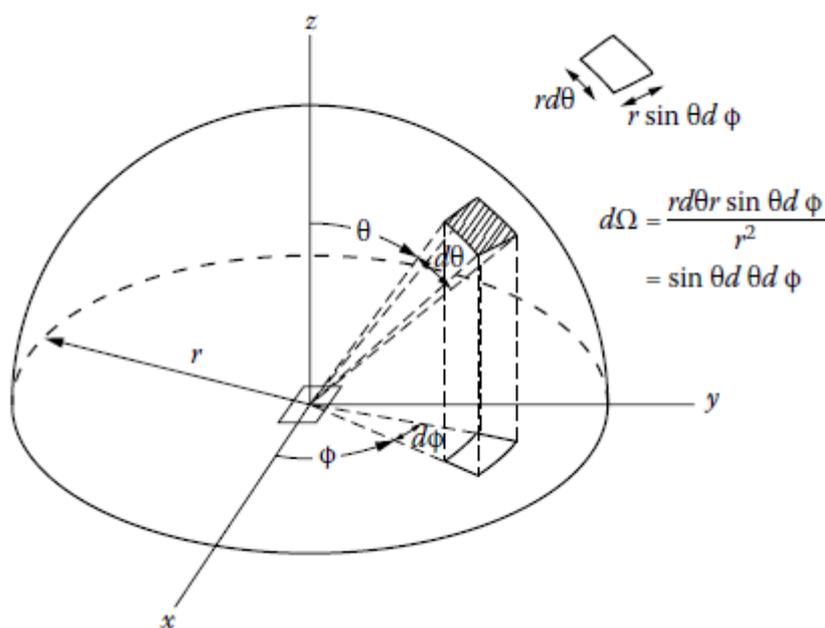


Figura 16: hemisferio mostrando las dimensiones de un diferencial de ángulo sólido [5]

Ya sea para caracterizar la cantidad de energía de radiación que emite una superficie a lo largo de un cierto camino, o para caracterizar la cantidad de energía de radiación que atraviesa localmente un elemento del medio fluido, [4] el concepto de un solo rayo es inadecuado. A cambio, se emplea el concepto de intensidad de radiación, que consiste en un modelo geométrico de un haz de fotones. Para el primer caso (desde una superficie) se emplea como símbolo “ i ” y para el segundo caso (en un medio) se emplea “ I ”. Para ser consistentes con las definiciones anteriores, se tiene:

- i_v (energía emitida desde una superficie por unidad de tiempo, por unidad de superficie normal al haz de fotones, por unidad de ángulo sólido y por unidad de frecuencia).
- i (energía emitida desde una superficie por unidad de tiempo, por unidad de superficie normal al haz de fotones, y por unidad de ángulo sólido).

$$i = \int_0^{\infty} i_v dv \quad (2.16)$$

- I_v (energía puesta en juego localmente en un elemento diferencial de medio fluido, por unidad de tiempo, por unidad de superficie normal al haz de fotones, por unidad de ángulo sólido y por unidad de frecuencia).
- I (energía puesta en juego localmente en un elemento diferencial de medio fluido, por unidad de tiempo, por unidad de superficie normal al haz de fotones, y por unidad de ángulo sólido).

$$I = \int_0^\infty I_v dv \quad (2.17)$$

Se recuerda que en este trabajo se va a trabajar con magnitudes totales. La siguiente figura ilustra el modelo geométrico de haz de fotones que se ha referido. Es consistente con el sistema de referencia en Figura 16:

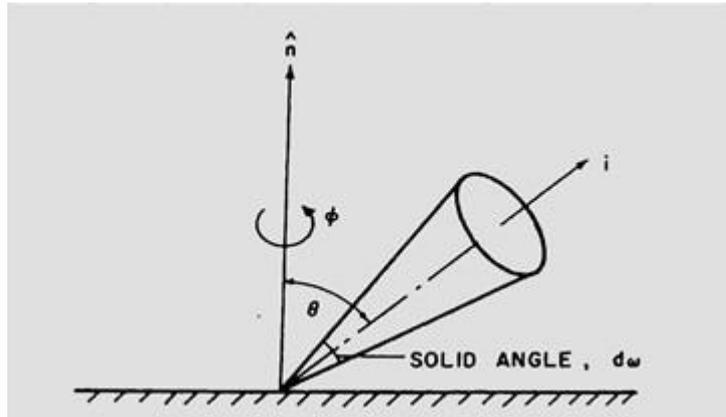


Figura 17: intensidad de radiación [4]

A continuación, estamos interesados en comentar una propiedad del cuerpo negro. Sea $d\Phi$ [4] la energía de radiación por unidad de tiempo y por unidad de área que abandona una cierta superficie en la dirección θ y contenida en un ángulo sólido $d\Omega$. Conceptualmente es la energía que emite una superficie sumada a la energía que se refleja por uno o varios focos de radiación que llegan a la placa. En este trabajo, dado que las placas planas son cuerpos negros, entonces no se refleja energía, por tanto, $\Phi = E_b$. El interés reside en la energía que abandona una superficie perpendicularmente a la misma. Por tanto

$$d\Phi = i \cdot d\Omega \cdot \cos \theta \quad (2.18)$$

Para obtener la energía que pasa desde la superficie al hemisferio, se integra en dicho hemisferio:

$$\Phi = \int_{\Omega} i \cdot \cos \theta \cdot d\Omega \quad (2.19)$$

El símbolo Ω denota integración con respecto al ángulo sólido en todo el hemisferio. Más adelante, a esta energía se le da el nombre de radiosidad y se le asigna la letra "B", para ser consistentes con la notación de [3]. Así pues, considerando la expresión del diferencial del ángulo sólido dada en la Figura 16, se tiene:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} i \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi \quad (2.20)$$

Como se comentó previamente, asumimos que la intensidad es difusa, es decir, independiente de la dirección. En estos casos, (2.20) se reduce a:

$$\Phi = \pi \cdot i \quad (2.21)$$

En nuestro caso, dado que la radiación del cuerpo negro también es isotrópica:

$$E_b = \pi \cdot i_b \quad (2.22)$$

Gracias a las asunciones de equilibrio termodinámico local, e intensidad difusa, (2.22) puede aplicarse a un elemento de volumen fluido cuando se obtenga la ETR.

Ya estamos en disposición de rescatar el SR geométrico que se va a emplear en convección forzada (ver Figura 1). Se trata de dos placas planas, que se comportan como cuerpos negros a diferente temperatura, separadas físicamente por una distancia L , y entre las cuales, se encuentra un medio con la capacidad de absorber y emitir radiación. Dicho medio será un flujo viscoso que se mueve a velocidad U_∞ , que en ambas placas genera una capa límite, tanto mecánica (distribución de velocidades) como térmica (distribución de temperaturas). El hecho de que el fluido esté en movimiento no afecta a las deducciones que a continuación se realizan. Como comentaba Viskanta en [16], puede asumirse que “la materia homogénea e isotrópica capaz de absorber y emitir radiación se encuentra en reposo. Emplear un sistema de referencia en el que la velocidad macroscópica de la materia es nula, es conveniente, porque los coeficientes de absorción y dispersión son medidos en dicho sistema, y porque dichos coeficientes y la distribución de temperatura son independientes de la variable “s” asociada a un haz de fotones. Esta aproximación [...] describe correctamente aquellos fenómenos en los que la velocidad del fluido es mucho más pequeña que la velocidad de la luz”.

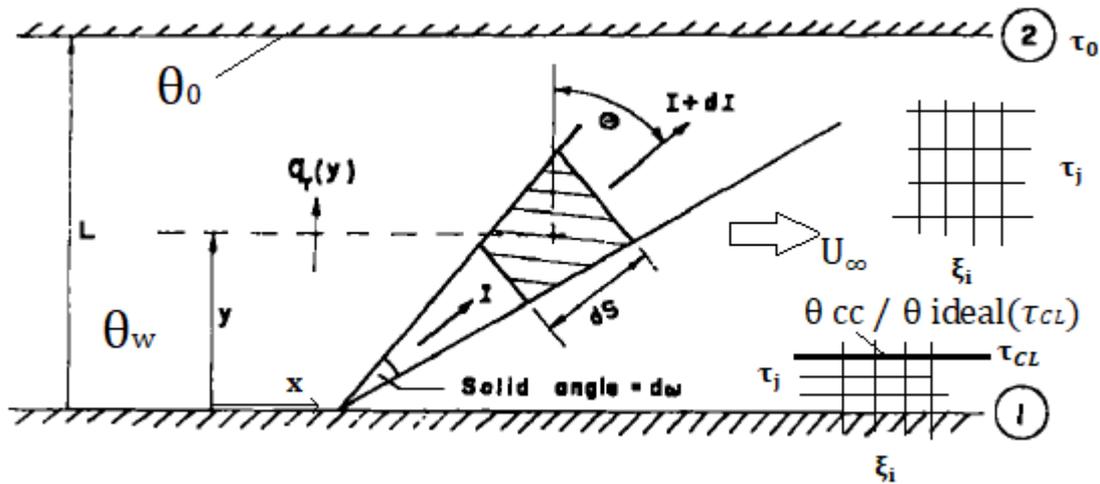


Figura 18: modelo físico de radiación unidimensional [7] con aproximación al método de las diferencias finitas; se estudia la placa 1 como la condición de contorno “w” y la placa 2 como la “0”

Sea I la intensidad de radiación atravesando un elemento de volumen de tamaño ds y área de paso unidad como se muestra en la Figura 18. Estamos interesados en la obtención del incremento diferencial de intensidad en dicho elemento de volumen.

$$\text{Cambio en energía de radiación} = +\text{ganancia por emisión} - \text{pérdida por absorción} \quad (2.23)$$

Para más información sobre la deducción de la ecuación de ETR en un medio que puede dispersar radiación, ver [3]. Por definición del coeficiente de absorción κ (ver apartado 2.4), [7] el diferencial de intensidad que es absorbido al atravesar la longitud ds es:

$$dI_{abs} = -\kappa \cdot I \cdot ds \quad (2.24)$$

Además, a través del uso antes mencionado de la ley de Kirchhoff, el diferencial de intensidad que es emitido por el elemento de volumen viene dado por:

$$dI_{emi} = \kappa \cdot I_b \cdot ds \quad (2.25)$$

Siendo I_b la intensidad de radiación de emisión del cuerpo negro, corregida con el coeficiente de emisión. Por tratarse de un medio emisor difuso:

$$dI_{emi} = \kappa \cdot \frac{E_b}{\pi} \cdot ds \quad (2.26)$$

Aparentemente, la intensidad de radiación a lo largo del camino ds se reduce por absorción según (2.24), y se

incrementa por emisión según (2.26). Por tanto, el cambio en la intensidad dI conduce a la ecuación de transferencia de radiación:

$$\frac{dI}{ds} = \kappa \cdot \frac{E_b}{\pi} - \kappa \cdot I \quad (2.27)$$

El objetivo es alcanzar una expresión de la componente en dirección vertical del gradiente del flujo de calor según la temperatura T en cada punto del medio para introducirla en la ecuación de la conservación de la energía. Para ello, se define la opacidad o espesor óptico τ (no confundir con la transmisibilidad) como:

$$\tau = \int_0^y \kappa \cdot dy \quad (2.28)$$

En el siguiente apartado se aportará más información sobre esta propiedad. Valga reseñar por ahora que la opacidad es la definición opuesta a la que se le dio precisamente a τ en (2.5), la transmisibilidad, en el marco de la definición de propiedades en una superficie. Por otro lado, según la Figura 18:

$$\frac{dy}{ds} = \cos \theta \rightarrow ds = \frac{dy}{\cos \theta} \quad (2.29)$$

Sabiendo que $d\tau = \kappa \cdot dy$, y definiendo $\mu = \cos \theta$:

$$ds = \frac{d\tau}{\kappa \cdot \mu} \quad (2.30)$$

Introduciendo (2.30) en (2.27), nos queda:

$$\mu \cdot \frac{dI}{d\tau} = \frac{E_b}{\pi} - I \quad (2.31)$$

Llamando a las radiosidades de la placa inferior y superior B_1 y B_2 respectivamente, las condiciones de contorno de (2.31) se expresan como:

$$I = \frac{B_1}{\pi}; \quad \tau = 0, \mu > 0 \quad (2.32)$$

$$I = \frac{B_2}{\pi}; \quad \tau = \tau_0, \mu < 0 \quad (2.33)$$

Donde $\tau_0 = \int_0^L \kappa \cdot dy$. La solución de (2.31) es:

$$I^+ = \frac{B_1}{\pi} \cdot \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right) + \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\tau} E_b \cdot \exp\left(\frac{\tau' - \tau}{\mu}\right) \cdot \frac{d\tau'}{\mu}; \quad \mu > 0 \quad (2.34)$$

$$I^- = \frac{B_2}{\pi} \cdot \exp\left(\frac{\tau_0 - \tau}{\mu}\right) - \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\tau}^{\tau_0} E_b \cdot \exp\left(\frac{\tau' - \tau}{\mu}\right) \cdot \frac{d\tau'}{\mu}; \quad \mu < 0 \quad (2.35)$$

El flujo de calor por radiación puede ahora obtenerse de la misma manera que (2.19), pero esta vez, haciendo el cambio de variable $\mu = \cos \theta$; $d\mu = -\sin \theta \cdot d\theta$; e integrando sobre la esfera unidad completa, al tratarse de un elemento del medio, y [3] separando la integral entre el hemisferio superior ($\mu > 0$, correspondiente a la intensidad de radiación proveniente de la placa inferior, considerando atenuación entre 0 y τ , y aumento de la intensidad por contribución de emisión en cada uno de los caminos ópticos elementales entre $\tau'=0$ y $\tau'=\tau$) y el inferior ($\mu < 0$, correspondiente a la energía proveniente de la placa superior hacia espesores ópticos decrecientes, con la misma interpretación física que para $\mu > 0$):

$$q_R = 2\pi \int_0^\pi I \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta = 2\pi \int_0^1 I^+ \mu d\mu - 2\pi \int_0^{-1} I^- \mu d\mu \quad (2.36)$$

Substituyendo (2.34) y (2.35) en la primera y segunda integrales respectivamente de (2.36) y definiendo las integrales exponenciales, así como una propiedad para ser derivadas:

$$E_n(\chi) = \int_0^1 \mu^{n-2} e^{-\chi/\mu} d\mu; \quad \frac{dE_n(\chi)}{d\chi} = -E_{n-1}(\chi) \quad (2.37)$$

El flujo de calor por radiación queda en función del espesor óptico y de T, a través de las radiosidades, y de la potencia emisiva del cuerpo negro, quedando:

$$q_R(\tau, T) = 2B_1 E_3(\tau) - 2B_2 E_3(\tau_0 - \tau) + 2 \int_0^\tau E_b E_2(\tau - \tau') d\tau' - 2 \int_\tau^{\tau_0} E_b E_2(\tau' - \tau) d\tau' \quad (2.38)$$

Por tanto, el gradiente del flujo de radiación en dirección vertical es $-dq_R/d\tau$ (tendríamos que deshacer el cambio si estamos interesados en la expresión del flujo de radiación dependiente de “y”). Diferenciando (2.38), y aplicando la Fórmula de Leibniz [17] a las dos integrales, queda:

$$-\frac{dq_R}{d\tau}(\tau, T) = 2B_1 E_2(\tau) + 2B_2 E_2(\tau_0 - \tau) + 2 \int_0^{\tau_0} E_b \cdot E_1(|\tau - \tau'|) d\tau' - 4E_b \quad (2.39)$$

$$B_1 = e_1 = \sigma T_1^4; \quad B_2 = e_2 = \sigma T_2^4; \quad E_b = e(T) = \sigma T^4 \quad (2.40)$$

Físicamente, [7] los dos primeros términos de esta expresión representan la energía, que emiten ambas placas, y que es absorbida por un elemento de volumen. El tercer término denota la energía, proveniente de la emisión del resto de elementos, absorbida por un elemento de volumen, y el último término es la energía emitida por dicho elemento de volumen, obtenida a través de [17] a partir del aumento de la intensidad de radiación de los elementos afectados, tanto por la placa superior, como por la placa inferior.

Como se comentó en (2.18), al ser las placas cuerpos negros, la radiosidad de cada placa coincide con la potencia emisiva de la misma, que es la máxima posible y sigue la ley de Stefan-Boltzmann, (2.13). Para este trabajo, el subíndice “1” se va a renombrar como “w”, de “wall”, aprovechando que se estudiará el problema de la convección libre en una pared vertical; mientras que el subíndice “2” se va a renombrar como “0”, aprovechando que las dos placas están suficientemente alejadas físicamente hablando para que el flujo exterior ideal no se vea afectado y actúe como una condición de contorno, al menos del flujo exterior; pero lo suficientemente cerca ópticamente hablando para que la energía emitida por ambas placas afecte a la distribución de temperatura, para estudiar y comprender dicho efecto. En caso de que las placas no se comporten como cuerpos negros (es decir, las emisividades no son de valor unidad), las radiosidades deben incluir, no solo la energía emitida, sino también la reflejada. Ver [7] y [3] para más información. En cualquier caso, mientras se mantenga la asunción de radiación difusa, (2.21), (2.32) y (2.33) son consistentes.

Mientras no haya dispersión de la radiación, la energía que absorbe un elemento de volumen proviene tan solo de la emisión de las moléculas del fluido a través de la ley de Kirchhoff y según (2.25). En caso de que haya dispersión, dicha energía que absorbe un elemento de volumen debe analizarse a través de la denominada función de fuente (*Source function*), que [3] tiene en cuenta el incremento de intensidad debido a los efectos tanto de emisión como de dispersión en la dirección del rayo. En este último sumando, la energía dispersada a través de las propias moléculas del medio queda en función de la energía radiante total G puesta en juego. La ecuación de transferencia energía radiante total se expresa, integrando esta vez en la esfera unidad completa:

$$\frac{dI}{ds} = \beta \cdot S - \beta \cdot I; \quad S = (1 - \omega) \cdot I_b(T) + \frac{\omega G}{4\pi}; \quad G(\tau, T) = \int_{\mathcal{D}} I d\Omega = I \cdot 4\pi \quad (2.41)$$

Siendo β el coeficiente de atenuación (ver apartado 2.4), y ω , el coeficiente de dispersión. Si $\omega=0$, $S=I_b$. Huelga resaltar que la dispersión [4] no solo provoca un incremento en la intensidad de radiación, junto con la emisión

persé. También provoca atenuación de la intensidad, junto con la absorción, efectos recogidos en el segundo sumando del segundo miembro de la ETR expresada en (2.41). Dicho esto, introduciendo S en la ecuación de transferencia de radiación y empleando el teorema de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_R = 4\pi\beta(1 - \omega)\left(I_b - \frac{G}{4\pi}\right) \quad (2.42)$$

Por otro lado, G puede expresarse en función de la intensidad en los dos hemisferios, como se hizo previamente con el flujo de calor. A su vez, si comparamos (2.27) y (2.41), podemos hacer $S = \frac{E_b}{\pi}$, teniendo:

$$G(\tau, T) = 2\pi \int_0^\pi I \cdot \sin\theta \cdot d\theta = 2\pi \int_0^1 I^+ d\mu - 2\pi \int_0^{-1} I^- d\mu \quad (2.43)$$

$$G(\tau, T) = 2B_1 E_2(\tau) + 2B_2 E_2(\tau_0 - \tau) + 2\pi \int_0^{\tau_0} S(\tau') \cdot E_1(|\tau - \tau'|) d\tau' \quad (2.44)$$

Queda patente entonces la dificultad matemática que entraña el problema en el que ω no es nulo, y las emisividades no son la unidad. En este caso, es necesario, como se plasma ampliamente en [3], emplear las radiosidades de la placa superior e inferior y (2.44) para crear un sistema de matrices del cual extraer las dos radiosidades y G . Sin embargo, asumiendo las hipótesis de emisividades unidad y dispersión nula, (2.42) puede simplificarse a la expresión que se emplea en este trabajo del gradiente del flujo de calor, y que se dedujo partiendo en el proceso de deducción de un medio que no podía dispersar radiación. Efectivamente, introduciendo (2.44) en (2.42), anulando la dispersión y empleando cuerpos negros como placas planas, se llega a (2.39). En el apartado 4 se aportará una tabla comparativa entre los resultados de la distribución de temperatura en flujo ideal con dispersión nula obtenidos a partir del modelo que incorpora la dispersión en [3], y los resultados de la distribución de temperatura en flujo ideal obtenidos a partir del modelo deducido en este trabajo.

2.4 Opacidad. Hipótesis de espesor óptico pequeño y grueso

En el apartado 2.2 se explican sucintamente las propiedades radiativas para una superficie. Ahora se hace lo mismo, pero para un medio compuesto por infinitos elementos de volumen fluido que intercambian energía con radiación térmica presente. Para describir dichos elementos [5] se emplean los llamados coeficientes volumétricos, con unidades de longitud recíproca. Ya se ha definido el coeficiente de absorción κ . También es posible definir el coeficiente de dispersión σ_s , así como el coeficiente de atenuación o extinción $\beta = \kappa + \sigma_s$. En algunos contextos, como en el apartado anterior, el coeficiente de dispersión también puede definirse como $\omega = \sigma_s/\beta$. En este trabajo sin dispersión se opta por usar κ .

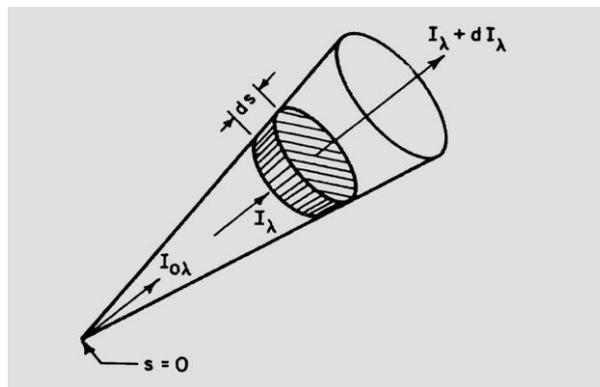


Figura 19: atenuación debido a absorción y dispersión a lo largo de ds [4]; el razonamiento espectral es análogo al aquí expresado, en función de magnitudes totales

Así mismo, para poder estudiar en este trabajo el efecto de espesores ópticos delgados y gruesos en la radiación, deben darse los siguientes pasos. Centrémonos por el momento en introducir el concepto del camino medio de penetración o también conocido como camino medio libre de un fotón. Es decir, [4] el camino a través del cual el medio no atenúa la intensidad de radiación, y, por lo tanto, los fotones tienen el camino expedito, justo antes de que finalmente sean absorbidos o dispersados.

Considérese un haz de fotones de intensidad I que se origina en $s=0$, y que recorre una distancia “ s ”. Sea I_0 la intensidad en $s=0$ (ver Figura 19). Tómese además la atenuación de la intensidad de radiación debido a absorción y dispersión, y la expresión exponencial de la intensidad tras aplicársele la atenuación como:

$$dI = -\beta \cdot I \cdot ds \quad (2.45)$$

$$I = I_0 e^{-\beta \cdot s} \quad (2.46)$$

Desde el punto de vista de un fotón, la cantidad $F(s) = e^{-\beta \cdot s}$ en (2.46) representa la fracción de fotones cuyo camino libre excede la longitud “ s ”. Es decir, es la proporción de fotones que no han sido ni absorbidos ni dispersados al atravesar la distancia “ s ”. Por otro lado, definimos $f(s)$ como la fracción de fotones que tienen camino libre en el rango de “ s ” a “ $s+ds$ ”. Matemáticamente es el negativo de la derivada de $F(s)$ respecto a “ s ”:

$$f(s) \cdot ds = F(s) - F(s + ds) = -\frac{dF}{ds} ds \rightarrow f(s) = \beta e^{-\beta \cdot s} \quad (2.47)$$

En términos de la función de distribución “ f ”, el camino medio de penetración λ_p se expresa:

$$\lambda_p = \int_0^{\infty} s \cdot f(s) \cdot ds = \frac{1}{\beta} \quad (2.48)$$

Ya estamos en disposición de estudiar el efecto de espesores ópticos delgados y gruesos en la radiación. Una de las propiedades fundamentales [3] es la opacidad del medio, que nos indica la dificultad que encuentra la radiación para atravesar dicho medio. Por necesidades del desarrollo de la memoria se definió en (2.28), para dispersión nula, y asumiendo que “ y ” era el camino “ s ” que recorría la radiación. Se vuelve a definir:

$$\tau = \int_0^y \kappa \cdot dy \quad (2.49)$$

Dado que κ se toma promedio, empleando (2.48) y una longitud característica L , se obtiene:

$$\tau = \kappa \cdot L = \frac{L}{\lambda_p} \quad (2.50)$$

Si la opacidad es significativa, $\tau \gg 1$, [3] la radiación térmica se entiende como un fenómeno superficial porque los fotones que saltan en el interior del medio son nuevamente reabsorbidos (la distancia media de penetración es pequeña frente a L), de tal manera, que solo los fotones que saltan de una delgada capa exterior escapan realmente del medio, y todos los fotones que llegan del exterior son absorbidos o dispersados a través de esa misma capa. Es decir, la radiación no puede atravesar el medio libremente, de manera que, o es absorbida, o dispersada al exterior. En cambio, si el material es semitransparente, es decir de una menor opacidad, $\tau \ll 1$, la radiación térmica se entiende como un fenómeno volumétrico, ya que a la radiación se le permite recorrer dentro del medio una mayor distancia frente a L , sin que se traduzca en un incremento de su energía interna.

Así pues, podemos tener cinco categorías fenomenológicas:

$$\tau = 0; \tau \ll 1; \tau \sim 1; \tau \gg 1; \tau \rightarrow \infty \quad (2.51)$$

En este trabajo se estudian las tres categorías centrales: espesor óptico pequeño (hipótesis o límite *optically thin*), L del mismo orden que τ , y espesor óptico grueso (hipótesis o límite *optically thick*). Queda fuera del alcance del estudio el medio transparente (en ausencia de materia que radique en un cambio en la intensidad de radiación) y el medio opaco (por definición se emplea como condición de contorno, no como medio de transmisión).

Dada la ecuación del gradiente del flujo de calor por radiación, se va a obtener la expresión aplicando la **hipótesis de $\tau \ll 1$** , también denominada hipótesis *thin*.

En caso de que $\tau \ll 1$ [7]:

$$E_2(\tau) = 1 + O(\tau); \quad E_3(\tau) = 1/2 - \tau + O(\tau^2) \quad (2.52)$$

Siendo estos los términos, hasta de segundo orden, de la serie de potencias de $E_2(\tau)$ y $E_3(\tau)$. Considerando superficies negras, (2.38) queda:

$$q_R = e_1(1 - 2\tau) - e_2(1 - 2\tau_0 + 2\tau) + 2 \int_0^\tau e(T) d\tau' - 2 \int_\tau^{\tau_0} e(T) d\tau' \quad (2.53)$$

Evaluando los dos integrandos en los límites establecidos, y derivando la expresión, se tiene:

$$-\frac{dq_R}{d\tau} = 2e_1 + 2e_2 - 4e(T) \quad (2.54)$$

La interpretación de (2.54) es como sigue. El tercer sumando del segundo miembro representa la energía emitida por unidad de volumen desde un elemento, mientras que el primer y segundo sumandos del segundo miembro denotan la energía absorbida por un elemento proveniente de la placa inferior y superior respectivamente. Por tanto, bajo condiciones de espesor óptico delgado todos los elementos del medio intercambian radiación directamente con las placas planas, porque, al ser λ_p relativamente grande, los fotones atraviesan el medio en estudio, sin que este sea capaz de incrementar su energía interna, hasta llegar a las placas. En general, se trata de un medio cuyos elementos tienen una capacidad despreciable de absorber/atenuar energía emitida/dispersada por los propios elementos del medio.

A continuación, dada la ecuación del gradiente del flujo de calor por radiación, se va a razonar la obtención de la expresión aplicando la hipótesis de $\tau \gg 1$, también denominada hipótesis *thick*, haciendo un comentario que involucra al estudio de la convección libre.

Si el medio presenta un espesor óptico grueso, [13] las integrales exponenciales involucradas (de orden 2 y 3) decaen rápidamente a lo largo de un corto espesor desde $\tau' = \tau$. Además, puede asumirse que, en una gran extensión del medio en estudio, nos encontramos alejados de las dos placas, a una gran distancia óptica. Bajo estas condiciones, la influencia de las superficies puede despreciarse. Por otro lado, sabiendo que $E_2(\tau)$ decae rápidamente, desde $\tau' = \tau$; y que la función S variará muy poco una vez $E_2(\tau)$ sea despreciable, puede desarrollarse S mediante una serie de Taylor (ver demostración en páginas 451 y 452 de [13]).

Despreciando términos de orden superior, se llega a:

$$q_R(\tau) = -\frac{4\pi dS}{3 d\tau}; \quad q_R(y) = -\frac{4\pi dS}{3\kappa_R dy} \quad (2.55)$$

Para un medio que no dispersa radiación, $S = I_b$, y la ecuación (2.55) se reduce a:

$$q_R(\tau) = -\frac{4\pi dI_b}{3 d\tau} = -\frac{4\sigma d(T^4)}{3 d\tau}; \quad q_R(y) = -\frac{4\sigma d(T^4)}{3\kappa_R dy} = -\frac{16\sigma T^3 dT}{3\kappa_R dy} \quad (2.56)$$

El gradiente en dirección “y” del flujo de calor quedaría entonces:

$$\frac{dq_R}{dy}(y) = -\frac{4\sigma d^2(T^4)}{3\kappa_R dy^2} = -\frac{4\sigma d}{3\kappa_R dy} \left[\frac{d(T^4)}{dy} \right] = -\frac{16\sigma d}{3\kappa_R dy} \left[T^3 \frac{dT}{dy} \right] = -\frac{d}{dy} \left[\frac{16\sigma T^3 dT}{3\kappa_R dy} \right] \quad (2.57)$$

Con κ_R el coeficiente medio de absorción de Rosseland. Haya o no haya dispersión de la radiación, el coeficiente que se obtiene al realizar esta aproximación se denomina siempre de Rosseland, ya que fue el astrofísico noruego Svein Rosseland el que realizó esta aproximación referida en [13]. Cabe destacar que (2.57) es del mismo tipo

que la ley de Fourier de difusión de calor. Es decir, el problema se ha simplificado a uno de conducción con gran dependencia de la Temperatura. La razón radica en que [7] la emisión de las moléculas del medio se someterá a una gran atenuación de manera que el proceso de transferencia de calor dependerá completamente de las condiciones locales. Es decir, del choque de partículas del medio entre sí. La solución a este problema, sin embargo, no es válida cerca de las condiciones de contorno, ya que se requiere pequeños gradientes de temperatura, algo que no ocurre cerca de la placa plana, en este caso. De hecho, según [8], debe modificarse el coeficiente $16/3$ por $8/3$ cuando se calculen los flujos de calor de la pared al fluido, como se ve más adelante. En efecto, la solución nos muestra que [16] existe una discontinuidad entre la placa y el medio en contacto con ella. Solo en el caso de espesor óptico tendiendo a infinito, la temperatura exhibe continuidad cerca de la placa. Este hecho es consistente con el modelo de transferencia de energía mediante radiación únicamente, como se verá en los siguientes apartados. En la práctica este método es útil solo para casos con espesor óptico realmente grueso, [5] para valores de τ mayores que 10. Dicho valor depende de la geometría y de las condiciones del problema y podría ser mayor en algunos casos.

Como ya se ha comentado, en convección libre se estudiará la distribución de velocidades y de temperaturas en el caso de que la capa límite generada sea ópticamente gruesa. De esta manera, es aplicable el método numérico y las reflexiones generales sobre la interacción de la radiación con el medio, en especial, todo lo concerniente a un medio ópticamente grueso. Por definición de esta hipótesis, las radiosidades asociadas a las dos placas planas no llegan a afectar a los alrededores de éstas. Por ello, se plantea el problema de la capa límite generada por convección libre en los mismos términos en los que se plantea el problema análogo en convección forzada: imponiendo las condiciones de contorno en temperatura en la pared y en el flujo ideal, sin entrar a valorar la influencia que pueda tener la presencia de las placas planas en la transferencia de radiación. El principal cambio será el del sistema de referencia (ver Figura 3), y en el sistema de ecuaciones que debe resolverse.

2.5 Hipótesis generales aplicadas a capas límite y a la radiación

En este apartado se recopilan el total de las hipótesis que se aplican en este trabajo, tanto las que involucran a las capas límite, como las que involucran a la radiación térmica. Se incluyen también otras hipótesis que anteriormente no se mencionaron para no romper el ritmo de exposición. Las hipótesis no son excluyentes; es decir, tanto las que se aplican al modelo de capa límite como las que se aplican a la radiación, se aplican a un mismo flujo en estudio.

Las hipótesis aplicadas a las capas límite en convección forzada y libre son:

- Régimen estacionario (ambas).
- Régimen subsónico. En consecuencia, régimen incompresible (ambas).
- En convección forzada, $Re \gg 1$, $Pe \gg 1$. Los esfuerzos viscosos y de transmisión de calor se concentran en una zona muy estrecha adyacente a la pared del objeto.
- En convección forzada, $Fr \gg 1$.
- $Ec \ll 1$, con lo que se desprecian los efectos de disipación en la capa límite térmica debida a los efectos viscosos (ambas).

$$Ec = \frac{u_{\infty}^2}{C_p \Delta T} \ll 1 \quad (2.58)$$

- En convección forzada, en la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \sim U_{\infty} / L^2 \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim U_{\infty} / \delta^2 \quad (2.59)$$

Mientras que, en la ecuación de la energía:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} \sim k \frac{T_\infty - T_s}{L^2} \ll k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \sim k \frac{T_\infty - T_s}{\delta_T^2} \quad (2.60)$$

Es decir, $\delta/L \ll 1$ lleva a que todas las variaciones respecto a la variable “s” se desprecian, excepto los gradientes de presión impuestos por el flujo exterior.

- Tanto en convección forzada como en convección libre, la ecuación de la cantidad de movimiento en dirección “y” se reduce en primera aproximación (ver [1] para más información) a:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.61)$$

- En convección libre, se aplica la hipótesis de Boussinesq, por la cual, la densidad se toma constante en las ecuaciones de Navier-Stokes, excepto en la ecuación de la cantidad de movimiento en dirección longitudinal de la placa vertical, en cuyo caso:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \vec{f}_m = -(\rho - \rho_\infty)g \mathbf{i} \quad (2.62)$$

Las hipótesis aplicadas a la radiación son:

- Dado que la velocidad de la materia, respecto a la de la luz, es despreciable, tomamos un sistema de referencia en reposo respecto a las placas.
- El fluido que se estudia constituye un cuerpo gris. Por tanto, las propiedades involucradas son independientes de la longitud de onda.
- El índice de refracción se toma 1. Según [4], es una buena aproximación para gases. Por tanto, la elección de dicho gas depende de la elección que hagamos del número de Prandtl.
- No hay dispersión de la radiación.
- Radiación difusa o isotrópica.
- El medio se encuentra en equilibrio termodinámico local. Es decir, aunque las variaciones de las magnitudes puedan ser muy importantes desde un punto de vista macroscópico, su efecto desde el punto de vista de las variables de estado, en especial la temperatura, es muy pequeño. Así pues, cada elemento de materia, a una cierta temperatura, situado en cada punto del espacio se comporta como si formase parte de un entorno cerrado isoterma a dicha temperatura T.
- Las placas planas constituyen cuerpos isotermos y negros, que absorben y emiten de manera difusa, y opacos (transmisibilidad nula).
- La transmisión de radiación térmica se realiza perpendicularmente a las placas, unidimensionalmente. Dicho de otro modo, se busca demostrar que la transmisión de calor por radiación en la dirección “x” es despreciable frente al calor por convección en la dirección “x”, sabiendo que este último, bajo la mayoría de las condiciones, es un término predominante en la ecuación de la energía:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} \gg \frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial q_{Rx}}{\partial x} \quad (2.63)$$

La convección en la dirección longitudinal se estima tal que:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} \sim U_\infty \frac{(T_w - T_\infty)}{L} \quad (2.64)$$

Para estimar la expresión del flujo de calor por radiación, se tiene en cuenta que el límite de espesor óptico grueso, como se verá más adelante, [4] sobredimensiona la transferencia de calor por radiación si se aplicase a condiciones que no cumplen dicho límite. Según (2.63), ello permite que el límite de

espesor delgado pueda abrazar las conclusiones de este análisis de órdenes de magnitud. Por tanto:

$$q_{Rx} = -\frac{16\sigma T^3}{3\kappa_R} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \frac{dq_R}{dx} = \sim \frac{16\sigma T^3}{3\kappa_R} \frac{(T_w - T_\infty)}{L^2} \quad (2.65)$$

De (2.63) y sabiendo que $\alpha = k/\rho C_p$

$$\frac{U_\infty L}{\frac{16\sigma T^3}{3\kappa_R \rho C_p}} \gg 1 \rightarrow \frac{Pe}{\frac{16\sigma T^3}{3\kappa_R k}} \gg 1 \quad (2.66)$$

El denominador constituye el inverso de Ncr, que indica el grado de importancia de la transferencia de calor por radiación respecto a la transferencia de calor por conducción. Dado que este análisis se plantea en el límite de espesor óptico grueso, donde se emplea el modelo de difusión de la energía, se espera que dicho coeficiente sea mucho menor que uno. Queda demostrado entonces que puede despreciarse la transmisión de calor por radiación en la dirección “x” respecto a la convección en la dirección “x”, siempre que $Pe \gg 1$, lo cual era ya una hipótesis necesaria para garantizar una capa límite adherida.

- Como se mencionó antes, no es necesario considerar de manera detallada el mecanismo de interacción entre átomos y moléculas y el medio físico donde ocurren los fenómenos radiantes para deducir la ecuación de transferencia de radiación. Solo son necesarias las interacciones a nivel macroscópico entre la materia y el medio. En consecuencia, es innecesario retener la formulación de la teoría cuántica. Es suficiente con considerar el correspondiente haz de radiación, y seguir los cambios de intensidad a través de un medio en el que la temperatura varía de un punto a otro en el espacio.
- No es un canal. Las dos placas están suficientemente alejadas físicamente hablando para que el flujo ideal no se vea afectado **y se asegure el equilibrio termodinámico**; pero lo suficientemente cerca ópticamente hablando para que la energía emitida por ambas placas afecte a la distribución de temperatura, para estudiar y comprender dicho efecto. De esta manera, por ejemplo, la placa plana más alejada, modificando sus propiedades, jugaría el papel de condición de contorno a elevada temperatura en un flujo hipersónico.
- Si bien en un mismo flujo, sea convección forzada o convección libre, se transmite el calor a través de tres mecanismos diferentes, [12] la temperatura T_∞ de dicho flujo se toma constante en todo momento, y en todo punto de la placa.

Hecha esta doble introducción con los aspectos más interesantes para este proyecto de la convección forzada y natural; y de la radiación térmica, nos centramos en el apartado 3, en el cual, se explican los métodos numéricos empleados, y se aplican a las ecuaciones que se pretenden resolver.

3 Métodos numéricos empleados y formulación de ecuaciones

3.1 Métodos numéricos empleados

En este proyecto se emplean fundamentalmente el método de las diferencias finitas y el método de Newton Raphson para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. También se realiza un tratamiento numérico de expresiones integro-algebraicas, del cual puede encontrarse más información en [3] y en [18].

Como ya se ha dejado claro en el apartado 1, la capa límite es uno de los pilares del proyecto. En consecuencia, la resolución de las ecuaciones en este trabajo bebe de este concepto. De este modo, [2] la solución numérica de las ecuaciones de capa límite están basadas en la asunción de que las ecuaciones diferenciales, involucren o no a más de una variable dependiente pueden aproximarse por expresiones en diferencias. Esta aproximación, entendida como discretización, se obtiene como un desarrollo en serie de las derivadas de la temperatura o de la velocidad en el sistema de referencia. Es lo que se conoce como método de las diferencias finitas.

Para obtener las expresiones en diferencias, debe situarse una malla en el espacio geométrico donde cada partícula tiene una velocidad y una temperatura incógnitas a resolver. Esta malla se compone de líneas paralelas a los ejes coordenados. Dichas incógnitas se asociarían a puntos de malla, es decir, puntos del espacio geométrico de coordenadas entendidos como la intersección de las líneas coordenadas en cuestión. La separación entre dichas líneas puede escogerse como variable o constante. Si se esperan grandes variaciones en los campos de velocidad o de temperatura, sería necesario que dicha separación se redujese, para que el error correspondiente a la discretización fuese mínimo:

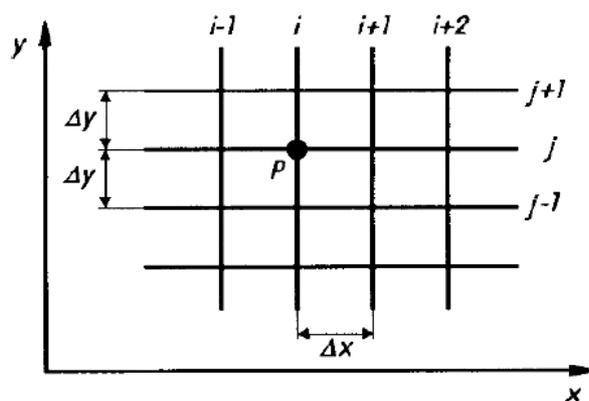


Figura 20: malla de discretización [2]

En mecánica de fluidos, se suele adimensionalizar en primer lugar para disminuir el número de parámetros involucrados, para luego implementar métodos numéricos. Nada impide, aun así, que se aplique el método de las diferencias finitas a variables dimensionales, como “x” e “y”. Sin embargo, nuestro propósito es aplicarlo sobre variables adimensionales. A partir del apartado 3.2, introducimos los cambios de variable necesarios.

Dicho esto, en la dirección “x” habitualmente se emplean N_x líneas, siendo la variable adimensional ξ , y en la dirección “y” se emplean N_y líneas, siendo la variable adimensional η . En ocasiones se renombran como N_τ líneas, porque se emplea una malla que toma como variable τ (espesor óptico). En ese caso se deben modificar las matrices de transformación que a continuación se explican (ver anexos). Este método se aplica, no solo a ecuaciones lineales, sino también a ecuaciones no lineales, en cuyo caso, el sistema debe resolverse de manera iterativa. En este proyecto, ello se consigue implementando el método de Newton Raphson.

A la hora de discretizar las derivadas parciales mediante cocientes, hay tres posibilidades diferentes: expresión en diferencias hacia delante, expresión en diferencias hacia atrás, y expresión en diferencias centrada. Ver el trabajo fin de grado [19] para más información. En este proyecto se implementan una expresión en diferencias hacia atrás, y dos expresiones en diferencias centradas. Sea H la variable a resolver, y “ x ” e “ y ” las variables independientes. Despreciándose errores de segundo orden, y sabiendo que $H_{i,j}$ tiene la naturaleza de un vector con componentes j -ésimas y en la estación i -ésima, se necesitan los siguientes cocientes para este proyecto:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{H_{i,j} - H_{i-1,j}}{\Delta x}; \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{H_{i,j+1} - H_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (3.1)$$

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{H_{i,j+1} - 2 \cdot H_{i,j} + H_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \quad (3.2)$$

Teniendo en mente los sistemas de referencia en la Figura 3 y la Figura 18, este método resuelve todas las componentes j -ésimas (perpendicular a la placa plana o forma general) en la estación i -ésima (a lo largo de la placa plana o forma general). Por tanto, $H_{i-1,j}$ se calcula en la estación anterior. Sabiendo eso, $\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{i,j}$ tendrá un tratamiento más detallado en el apartado 3. De otra parte, los otros dos cocientes conviene que sean tratados como una transformación matricial, para facilitar la posterior aplicación del método de Newton Raphson:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2\Delta y} & \dots \\ -\frac{1}{2\Delta y} & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \cdot H_{i,j} = D_1 \cdot H_{i,j} \quad (3.3)$$

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{(\Delta y)^2} & \frac{1}{(\Delta y)^2} & \dots \\ \frac{1}{(\Delta y)^2} & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \cdot H_{i,j} = D_2 \cdot H_{i,j} \quad (3.4)$$

Cuando hablamos de Δx , en nuestro proyecto se refiere como h_ξ . Realmente, no se van a deducir ecuaciones con Δy , ya que está dentro de las matrices D_1 y D_2 . En cualquier caso, nos referiríamos a ello con h_η o h_τ .

En los anexos, estas dos matrices se definen con el comando *sparse* al ser matrices banda. De este modo, dado que la capa límite para convección forzada en ausencia de radiación se trata ampliamente en la asignatura de “Mecánica de Fluidos II”, no se implementa (1.17) en ausencia de radiación ni se muestran resultados gráficos en el apartado 4 del campo de velocidades para placa plana. En cambio, en el apartado 3.3.3, sí se implementa (1.24), porque se emplean unos cambios de variable diferentes a los habituales para el campo de velocidades (el cambio habitual se implementa en el *script I*). Para que conste, también se explica a continuación cómo se implementa el término del gradiente de velocidades, para ser considerado en proyectos similares, así como la condición de desprendimiento. En convección libre sí se considera pertinente implementar las ecuaciones de la capa límite mecánica y térmica en presencia de radiación, así como aportar resultados gráficos del campo de velocidades, dado que esta vez, sí depende del campo de temperaturas, siendo una novedad respecto a la asignatura de “Mecánica de Fluidos II”.

En general, este proyecto aporta resultados para placa plana. Uno de los motivos es que generalizar a cualquier forma el cálculo de capas límite en presencia de radiación incurre en un aumento importante de la complejidad de las expresiones involucradas. Además, como se verá en el apartado 3.3, desde el punto de vista físico, la condición de contorno en temperatura en el exterior de la capa límite es más complicada de calcular a medida que el espesor óptico de la misma disminuye y deja pasar parte de la radiación. Sin embargo, en caso de espesor óptico grueso, la condición de contorno es simplemente la del exterior, T_∞ .

Profundizando en la condición de contorno en velocidad, hay dos maneras de calcularla: a través del coeficiente de presiones si el flujo es real, ver (3.5), o a través de una expresión analítica si el flujo es ideal, menos frecuente. En este trabajo se calcula la capa límite en espesor óptico grueso para una placa plana, un cilindro ideal, ver (3.6), y una elipse ideal, para simplificar. Se entiende por ξ como la variable adimensional que sigue el perfil:

$$p_e(s) + \rho \frac{u_e^2(s)}{2} = p_\infty + \rho \frac{U_\infty^2}{2}; C_p = \frac{p_e(s) - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \rightarrow C_p + \frac{u_e^2(s)}{U_\infty^2} = 1 \quad (3.5)$$

$$\frac{u_e(s)}{U_\infty} = 2 \cdot \sin \xi \quad (3.6)$$

Una vez obtenida la velocidad exterior a la capa límite, se le aplica el método de las diferencias finitas al gradiente de velocidades tal que así:

```
duedx(2:Nxi) = (ue(2:Nxi) - ue(1:Nxi-1)) ./ hxi;
```

y se incorpora al término independiente de la ecuación numérica de la cantidad de movimiento:

```
for n=2:Nxi,
    n
    % Capa límite mecánica
    % Matriz A y vector r
    Matu=spdiags(unml/hxi,0,Neta,Neta);
    Matv=spdiags(vnml,0,Neta,Neta);
    r(1:Neta,1)=unml.^2/hxi+duedx(n)*ue(n);
    A=-D2/Re+Matv*D1+Matu;
    % Condiciones de contorno en A y r
    A(1,:)=0; A(1,1)=1; r(1)=0;
    A(Neta,:)=0; A(Neta,Neta)=1; r(Neta)=ue(n);
    % Solución
    un(1:Neta,1)=(A\r);
    if un(2)<=0,
        pause
        iflagstall=1;%aviso de que el flujo se ha desprendido en ns
        ns=n,2,
        if iflagdib==0
            Thetanv2=Thetan;%el vector Thetanv1 sería el correspondiente a ns-1, es decir
            %de la estación anterior, la última en la que se resolvió la capa
            %límite térmica
        end
        break
    end
end
```

Figura 21: resolución numérica de la capa límite mecánica para una forma genérica; y condición de desprendimiento

Para que conste en acta, y a pesar de que en la Figura 31 se muestran capas límite que no llegaron a desprenderse, en la Figura 21 se comenta que la condición de desprendimiento se cumple si la segunda componente del vector de velocidades horizontal es negativa. Se deja para futuros proyectos involucrar esta situación con la temática que se está abordando.

Pasamos a tratar el método de Newton Raphson. Tal método se aplica en este proyecto para resolver una ecuación del tipo:

$$\mathbf{B} \cdot \vec{\theta}_i + \mathbf{C} \cdot \vec{\theta}_i^4 = \vec{b} \quad (3.7)$$

Siendo \mathbf{B} y \mathbf{C} matrices, y θ_i el vector temperatura adimensional incógnita en la estación i -ésima. Las matrices \mathbf{B} y \mathbf{C} deben completarse según unas condiciones de contorno que en los siguientes apartados se razonan.

De este modo, si $\vec{\theta}_1 = \vec{\theta}_k + \vec{\Delta\theta}_k$, y despreciando términos de orden superior:

$$\mathbf{B} \cdot (\vec{\theta}_k + \vec{\Delta\theta}_k) + \mathbf{C} \cdot (\vec{\theta}_k^4 + 4 \cdot \vec{\theta}_k^3 * \vec{\Delta\theta}_k) = \vec{b} \quad (3.8)$$

Usándose “*” como el producto componente a componente, también conocido como producto de Hadamard. De esta manera, y con el propósito de despejar $\vec{\Delta\theta}_k$ se tiene:

$$\mathbf{S} \cdot \vec{\Delta\theta}_k = \mathbf{F}_k, \quad \mathbf{S} = \mathbf{B} + 4 \cdot \mathbf{C} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \theta_N^3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_k = \vec{b} - (\mathbf{B} \cdot \vec{\theta}_k + \mathbf{C} \cdot \vec{\theta}_k^4) \quad (3.9)$$

$$\vec{\Delta\theta}_k = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{F}_k \quad (3.10)$$

Este método se itera hasta que la norma de $\vec{\Delta\theta}_k$ es menor que una cierta cantidad. Véanse los anexos. En adelante, el propósito consiste en la obtención de las matrices B y C partiendo de las ecuaciones de la capa límite y del flujo de radiación explicados en los anteriores apartados.

Antes de pasar a la resolución numérica de los problemas, [3] es necesario realizar transformaciones matriciales sobre expresiones integro-algebraicas tales como:

$$F(\tau) = \int_0^{\tau_0} f(\tau') \cdot E_1(|\tau - \tau'|) \cdot d\tau' \quad (3.11)$$

De manera que puedan escribirse como:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{N_z} \end{bmatrix} = [A_{ij}] \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{N_z} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Para cada intervalo $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, con $j=(1 \dots N_z)$ una vez estamos en una estación i -ésima, la contribución a (3.11) se puede aproximar por:

$$\frac{f_j + f_{j+1}}{2} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} E_1(|\tau_i - \tau'|) \cdot d\tau' \equiv \frac{f_j + f_{j+1}}{2} g_{ij} \quad (3.13)$$

Recordando (2.37), y sabiendo que en (3.11) tenemos un valor absoluto en el argumento de la función exponencial, [18] dos casos se distinguen:

$$E_1(|\tau_i - \tau'|) = -\frac{dE_2(\tau' - \tau_i)}{d\tau'} \quad (\tau_i \leq \tau_j) \quad \text{y} \quad E_1(|\tau_i - \tau'|) = \frac{dE_2(\tau_i - \tau')}{d\tau'} \quad (\tau_i \geq \tau_{j+1}) \quad (3.14)$$

Si (3.14) se sustituye en la integral, g_{ij} toma la siguiente expresión compacta:

$$g_{ij} = \text{sign}(\tau_i - \tau_{j+1} + 0^+) [E_2(|\tau_i - \tau_{j+1}|) - E_2(|\tau_i - \tau_j|)] \quad (3.15)$$

La cantidad arbitrariamente pequeña positiva 0^+ se introduce en (3.15) para que la función *sign* aporte el signo correcto cuando $\tau_i = \tau_{j+1}$. Por tanto, (3.11) y (3.13) resultan en:

$$F_i = \sum_{j=1}^{N_z-1} \frac{f_j + f_{j+1}}{2} \cdot g_{ij} = \frac{f_1}{2} g_{i1} + \frac{f_2}{2} (g_{i1} + g_{i2}) + \dots + \frac{f_j}{2} (g_{ij-1} + g_{ij}) + \dots + \frac{f_{N_z}}{2} g_{iN_z-1} \quad (3.16)$$

y se rescata (3.12):

$$F_i = \sum_{j=1}^{N_z} A_{ij} \cdot f_j \quad (3.17)$$

donde:

$$A(i, 1) = \frac{1}{2} g_{i1}, \quad A(i, j) = \frac{g_{ij-1} + g_{ij}}{2}, \quad A(i, N_z) = \frac{g_{iN_z-1}}{2} \quad (3.18)$$

Estas son las principales herramientas a nivel de métodos numéricos necesarias para resolver los problemas relacionados con convección forzada y convección libre. Concretamente, (3.17) se implementa en los *scripts 2* y *4*, que involucran un medio que absorbe y emite radiación.

3.2 Aplicación a la convección forzada. Espesor óptico grueso según Viskanta & Gross [8]

Desde un punto de vista físico, es coherente que, a continuación, nuestros pasos se encaminen a la deducción de las ecuaciones que describen el flujo de un fluido no viscoso que no transmite calor por conducción, sino puramente mediante radiación. Sin embargo, dicho flujo adquiere en este trabajo una importancia mayor que la que su simplicidad desde un punto de vista conceptual pudiera sugerir.

Efectivamente, un flujo viscoso se comporta, lejos de las capas límite, como un flujo ideal que, en primera aproximación, no transmite calor por conducción, y que además en este trabajo, transmite calor por radiación. Ello nos deja dos consecuencias. La primera es que, conceptualmente, el flujo ideal debería exponerse cuando exista interés en cuantificar el valor de la condición de contorno exterior a la capa límite; la segunda es que ello ocurre cuando el espesor de la capa límite no sea grueso. Cuando se introduzca el cambio de variable que dependa, entre otros, del espesor óptico de la capa límite, se darán más detalles. De momento, resaltar que la hipótesis *thick* se acerca más a la situación, ya estudiada en la asignatura de “Mecánica de Fluidos 2”, en la que no se tiene en cuenta la influencia de la radiación, y en la que se capturan los efectos del calor por conducción, que se propaga por difusión.

Por ello, con la intención de estructurar el aparato matemático asentándonos en conocimientos previos, se considera en primer lugar el caso de espesor óptico grueso. Se tiene:

$$\rho c_p \left(u_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{16\sigma T^3}{3\beta} + k \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (3.19)$$

Se opta por denominar β a la absortividad con el objetivo de distinguirla de la conductividad térmica “ k ”. Se aplican los siguientes cambios de variable:

$$x = \xi \cdot L, \quad y = \eta \cdot L, \quad T = T^* \cdot \theta, \quad u_x = U_\infty \cdot u, \quad v_y = U_\infty \cdot v \quad (3.20)$$

Rescatando los números adimensionales y magnitudes físicas antes mencionados:

$$Re = \frac{U_\infty \cdot L}{\nu}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad (3.21)$$

Se manipula la expresión:

$$\frac{U_\infty T^*}{L} \left(u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + v \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) = \frac{\nu \cdot T^*}{\nu \cdot L^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{Pr \cdot 16\sigma T^{*3}}{Pr \cdot 3\beta \rho c_p} \theta^3 + \frac{k}{\rho c_p} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right] \quad (3.22)$$

$$\left(u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + v \frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right) = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{4}{3 \cdot \text{Ncr}} \theta^3 + 1 \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right] \quad (3.23)$$

Como se ve, se define, al igual que en todas las referencias consultadas, el parámetro conducción-radiación. Da una idea de la proporción de calor por conducción que se transfiere respecto al calor por radiación que se transfiere (ver apartado 1.2):

$$\text{Ncr} = \frac{\beta k}{4\sigma T^*{}^3} \quad (3.24)$$

Entiéndase T^* como una temperatura de referencia, que no tiene porqué ser la temperatura en el infinito, que nos permitirá darle valores a la temperatura adimensional θ_0 en el infinito diferentes de la unidad.

Al menos en el caso de espesor óptico grueso, este parámetro Ncr puede entenderse como un “cociente de conductividades”, k/k_R . En vista de que asumir espesor óptico grueso en la capa límite implica asumir que el calor debido al choque de los fotones con las partículas del fluido se transmite conceptualmente de la misma forma en que se produce la transmisión del calor por conducción, es decir, a través de difusión en la vecindad más próxima de las partículas, entonces es lógico hacer uso de un parámetro que mida cualitativamente la proporción de calor por conducción respecto al calor por radiación. Si dicho parámetro es infinito, es decir, el calor que se transmite por difusión se debe completamente a conducción, estaríamos en el caso estudiado en “Mecánica de Fluidos II”.

La pequeña distancia media de penetración de los fotones valida la hipótesis del transporte difusivo de energía de radiación. Si dicha distancia aumenta, entonces los fotones pueden recorrer una distancia mayor antes de ser absorbidos, sin que las partículas vecinas puedan excitarse por radiación y transmitir la energía de la misma manera que en el caso difusivo en estudio. Aun así, se empleará el parámetro Ncr de manera extensiva para entender la validez de cada hipótesis, ya que la idiosincrasia de “cociente de conductividades” se le es otorgada al parámetro según si estamos o no en la hipótesis correspondiente, en este caso, transporte difusivo de energía si el espesor óptico de la capa límite es grueso.

Por tanto, se va a discretizar la siguiente expresión:

$$\left(u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + v \frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right) = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{4}{3 \cdot \text{Ncr} \cdot \text{Re} \cdot \text{Pr}} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\theta^3 \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right] \quad (3.25)$$

Expresando el segundo sumando del segundo miembro de (3.25) en función de la derivada segunda de la cuarta potencia de θ para mayor comodidad, y aplicando diferencias finitas nos queda:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\theta^3 \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right] = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 (\theta^4)}{\partial \eta^2} \rightarrow u_n \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{h_\xi} + v_n D_1 \theta_n = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} D_2 \theta_n + \frac{1}{3\text{Ncr} \cdot \text{Re} \cdot \text{Pr}} D_2 \cdot \theta_n^4 \quad (3.26)$$

Puede verse cómo se ha discretizado $\frac{\partial \theta}{\partial \xi}$, en función de los resultados de la estación previa. Se toman las siguientes decisiones enfocadas a la codificación en matlab.

```
Matu=spdiags(un/hxi,0,Neta,Neta);
Matv=spdiags(vn,0,Neta,Neta);
```

Figura 22: tratamiento numérico a las componentes de velocidad de la capa límite mecánica

En el *script* 1 puede consultarse el código para programar la capa límite mecánica. Ordenando los términos se tiene:

$$\text{Matu} \cdot \theta_n + \text{Matv} \cdot D_1 \cdot \theta_n - \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} D_2 \cdot \theta_n - \frac{1}{3\text{Ncr} \cdot \text{Re} \cdot \text{Pr}} D_2 \cdot \theta_n^4 = \text{Matu} \cdot \theta_{n-1} \quad (3.27)$$

Comparando con (3.7):

$$B = \text{Matu} + \text{Matv} \cdot D_1 - \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \cdot D_2; \quad C = -\frac{1}{3\text{Ncr} \cdot \text{Re} \cdot \text{Pr}} \cdot D_2; \quad b = \text{Matu} \cdot \theta_{n-1} \quad (3.28)$$

Las condiciones de contorno son:

$$\theta = \theta_0 = \frac{T_0}{T^*}, \quad \xi = 0, \eta; \quad \theta = \theta_0, \quad \xi, \eta \rightarrow \infty; \quad \theta = \theta_w, \quad \xi, \eta = 0 \quad (3.29)$$

Para lograr que el método matemático reconozca dichas condiciones de contorno, se necesita [3] completar las matrices B y C de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} B(1, :) = 0, \quad B(1,1) = 1, \quad C(1, :) = 0, \quad b(1) = \theta_w \\ B(N_z, :) = 0, \quad B(N_z, N_z) = 1, \quad C(N_z, :) = 0, \quad b(N_z) = \theta_0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Para convección forzada en presencia de radiación, las condiciones de contorno siempre serán (3.29). El único cambio que realizar vendrá dado por el valor de θ_0 , según si el espesor óptico de la capa límite es delgado o grueso. En consecuencia, (3.30) se implementa en los códigos de todos los problemas, haciendo el cambio pertinente de la condición de temperatura del exterior, de la que se habla largo y tendido en los apartados que siguen.

Los resultados para este flujo de capa límite se hallan en el apartado 4.1. Rescatando la expresión de la estimación de la capa límite térmica sin radiación, y por comparación con (3.23), se tiene, para este caso de espesor óptico grueso:

$$\frac{\delta_T}{L} \sim \sqrt{\frac{1 + 4/(3 \cdot \text{Ncr})}{\text{Re} \cdot \text{Pr}}} \quad (3.31)$$

Al menos mientras se cumpla la hipótesis en estudio, y mientras se transmita radiación, el espesor físico de la capa límite térmica es mayor que en el caso de conducción pura, ya que se requiere mayor espacio para acomodar la energía puesta en juego. Por otro lado, si bien se ha resuelto este flujo en función de la variable η , será necesario deshacer el cambio y expresarla en función de una variable distinta, que la referencia [8] nombra η_v , para poder comparar nuestros resultados con los de dicha referencia.

3.3 Introducción de τ y N_{cr} . Formulación de ecuaciones, y despliegue de hipótesis relativas a τ

Realmente, las capa límite tienen un espesor físico pequeño en comparación con la separación de las dos placas. En ese sentido, el flujo exterior ocupa un mayor espacio que la capa límite. Sin embargo, en este trabajo existe interés en trabajar, en vez de con una variable física, con una variable óptica, el espesor óptico ya definido, que no tiene por qué corresponderse con el espesor físico del ente en estudio (ver Figura 18).

Como se introdujo en el apartado 2.1, el espesor de los filtros que usan los astronautas para absorber longitudes de onda perjudiciales para la vista es del orden de micras (ver Figura 11). Ello implica que la disparidad de escalas físicas en la que se encuentran las capas límite y la separación de las placas no es impedimento para que se trabaje en términos de espesor óptico. Dicho esto, si el espesor óptico de las capas límite, τ_{CL} , es del orden del espesor óptico de la separación de las placas, $\tau_0 \sim 10$, como se comentó en el apartado 2.4, se favorece la difusión de la energía a través de la capa límite, pudiéndose adaptar la temperatura satisfactoriamente hasta la temperatura de la placa superior. Estamos en el caso de espesor óptico grueso ($\tau_{CL} \gg 1$).

En cambio, si el espesor óptico de las capas límite es mucho menor que el de la separación de las placas, cualquier fotón, sea originario de la placa superior o de la placa inferior, tendrá un camino de penetración mayor, en virtud de (2.50), en la capa límite, por lo que la materia adapta su energía interna a la presencia de la radiación, que se filtra en la capa límite. Efectivamente, a diferencia del caso anterior, la radiación puede transmitirse hacia el flujo exterior a las capas límite. Ello indica que la condición de contorno exterior a la capa límite no es T_∞ : θ_0

se convierte en una θ_{cc} a estimar como la condición de contorno exterior a la capa límite.

En el caso de que el espesor óptico de la capa límite sea menor, aunque del orden, del espesor óptico de la separación de las placas planas ($\tau_{CL} \sim 1$), se realiza la simplificación de tomar la condición de contorno del exterior de la capa límite, como la temperatura que tendría el flujo ideal sin la presencia de la capa límite, sabiendo que, en aras de una mayor exactitud, dicha simplificación requeriría una revisión, introduciendo algún tipo de método iterativo como el que se propone en la referencia [9].

De esta forma, en el apartado presente se introduce como variable el espesor óptico de la capa límite, τ_{CL} , con el propósito de formular las ecuaciones que nos permitirían estudiar la vigencia de las hipótesis de espesor óptico grueso y espesor óptico delgado en las capas límite generadas por convección forzada. De momento se empieza por flujo no viscoso o ideal, para comparar con los flujos resultantes de cada hipótesis.

3.3.1 Flujo no viscoso. Aproximación para $\tau \ll 1$ y $\tau \gg 1$

Se supone que este flujo puede transportar calor por conducción. La utilidad de dicha suposición es entender, en el apartado 4.2, qué relación existe entre los valores de Ncr , τ , y las hipótesis según τ . Se admite que Ncr puede tomar valor $Ncr=0$, en cuyo caso, no habría conducción. Dicho eso, en este apartado ponemos el foco en flujo ideal con espesor óptico delgado y grueso.

Siendo flujo no viscoso, no se crea una capa límite mecánica, por lo que no existe un mecanismo convectivo de materia y de energía. Hemos de tratar con flujo ideal que puede transportar calor por conducción y por radiación. Se aplican entonces los siguientes cambios:

$$u_x = U_\infty \cdot 1; \quad \theta = \frac{T}{T^*}; \quad x = \frac{\rho C_p U_\infty}{2\beta\sigma T^{*3}} \cdot \xi = Lc \cdot \xi; \quad (3.32)$$

$$\eta = y \cdot \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu \cdot Lc}} = \frac{\tau}{\beta} \cdot \sqrt{\frac{U_\infty \cdot 2\beta\sigma T^{*3}}{\nu \cdot \rho C_p U_\infty}} = \tau \cdot \sqrt{\frac{4\sigma T^{*3}}{\nu \cdot \beta \cdot k/\alpha \cdot 2}} \rightarrow \eta = \frac{\tau}{\sqrt{2 \cdot Pr \cdot Ncr}}$$

El cambio de variable para “x” e “y” se usa extensamente en las principales referencias de la temática. Por un lado, el cambio para “x” está en función de una longitud característica, Lc . En el apartado 4.3 se cuantifica esta cantidad. Por otro lado, el cambio para “y” es equivalente al siguiente:

$$\eta = y \cdot \sqrt{\frac{U_\infty \cdot Lc}{\nu \cdot Lc \cdot Lc}} = \frac{y}{Lc} \cdot \sqrt{Re_{Lc}} \rightarrow \frac{y}{Lc} = \frac{\eta}{\sqrt{Re_{Lc}}} \quad (3.33)$$

Técnicamente, η no tiene límites como en un flujo viscoso sobre una placa plana. Puede tomar cualquier valor. Por ello, puede asumirse que τ y Ncr son dos grados de libertad, por lo que puede contemplarse la posibilidad de que $Ncr=0$. Por otro lado, para flujo ideal confinado entre dos placas son igualmente aplicables (3.29) y (3.30) como condiciones de contorno. Empezamos por flujo ideal con espesor óptico delgado ($\tau_0 \ll 1$). Se tiene:

$$U_\infty \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{2\beta\sigma}{\rho C_p} (T_1^4 + T_\infty^4 - 2T^4) \quad (3.34)$$

Aplicando los cambios pasamos por:

$$\frac{U_\infty \cdot T^*}{Lc} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\nu/Pr \cdot T^* \cdot Re_{Lc}}{Lc^2} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{2\beta\sigma T^{*4}}{\rho C_p} (T_1^4 + T_\infty^4 - 2\theta^4) \quad (3.35)$$

Y llegamos a:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 2 \cdot Ncr \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} + \theta_1^4 + \theta_\infty^4 - 2\theta^4 \quad (3.36)$$

Aplicando diferencias finitas:

$$\frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{h_\xi} = 2 \cdot Ncr \cdot D_2 \cdot \theta_n + \theta_1^4 + \theta_\infty^4 - 2\theta^4 \quad (3.37)$$

Obteniéndose:

$$\left(\frac{1}{h_\xi} \cdot \text{speye}(N\tau) - 2 \cdot Ncr \cdot D_2 \right) \cdot \theta_n + 2 \cdot \text{speye}(N\tau) \cdot \theta_n^4 = \frac{\theta_{n-1}}{h_\xi} + \theta_1^4 + \theta_\infty^4 \quad (3.38)$$

Si $Ncr=0$, el flujo ideal con espesor óptico delgado es una línea vertical porque toma un valor intermedio entre θ_1 y θ_∞ . Al ser una ecuación uni-dimensional no lineal básica, al no haber conducción de calor, podría resolverse con una calculadora (ver Figura 34).

Pasamos a flujo ideal con espesor óptico grueso ($\tau_0 \gg 1$). Se tiene:

$$\rho C_p U_\infty \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{16\sigma T^3}{3\beta} + k \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (3.39)$$

Aplicando los cambios pasamos por:

$$U_\infty \frac{T^* \partial \theta}{Lc \partial \xi} = \frac{T^* \cdot Re_{Lc} \cdot v}{Lc^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{16\sigma T^{*3} \theta^3}{3\beta \rho C_p v} + \frac{\alpha}{v} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right] \quad (3.40)$$

Pasando por (3.26), llegamos a:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 2 \cdot Ncr \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial^2 (\theta^4)}{\partial \tau^2} \quad (3.41)$$

Aplicando diferencias finitas:

$$\frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{h_\xi} = 2 \cdot Ncr \cdot D_2 \cdot \theta_n + \frac{2}{3} \cdot D_2 \cdot \theta_n^4 \quad (3.42)$$

Obteniéndose:

$$\left(\frac{1}{h_\xi} \cdot \text{speye}(N\tau) - 2 \cdot Ncr \cdot D_2 \right) \cdot \theta_n - \frac{2}{3} \cdot D_2 \cdot \theta_n^4 = \frac{\theta_{n-1}}{h_\xi} \quad (3.43)$$

Una de las enseñanzas más importantes de este proyecto es que la variación de τ y Ncr promueve una evolución de la temperatura correspondiente a espesor óptico grueso o delgado, independientemente de si el flujo en estudio es ideal o viscoso. A partir de ahí, como se ve en el apartado 4, es tarea del investigador conocer los matices de un caso u otro.

3.3.2 Flujo no viscoso que absorbe y emite radiación en función de τ y Ncr

En este apartado, el objetivo es explicar de manera sucinta el procedimiento de resolución de la capa límite térmica en flujo ideal en presencia de radiación que es absorbida y emitida. Se puede proceder mediante dos modos diferentes, expuestos en el *script 2* y en el *script 3*. Para que conste, el *script 3* no es original. Calcula el campo de temperaturas de un flujo ideal entre dos placas siguiendo el método numérico implementado en el trabajo fin de grado [3], por el cual, entra en escena la intensidad de radiación, ver (2.42), porque las dos placas condición de contorno podían no ser cuerpos negros, y podía tenerse en cuenta *dispersión*. Se ha usado en este trabajo para comparar con los resultados análogos originales, los cuáles se obtienen de aplicar las ecuaciones del flujo de radiación cuando se parte de la hipótesis de que no hay dispersión de la radiación, y las placas son cuerpos negros (ver *script 2*). Por brevedad, se remite al lector una vez más a la referencia [3] para complementar

la información a nivel de métodos numéricos. Sí se comenta que el paso que se da en el *script 3* respecto a dicha referencia constituye el punto de unión entre ambos proyectos. Consiste en pasar de un proceso unidimensional, que evoluciona en el tiempo hasta un régimen estacionario, a un proceso en dos dimensiones, donde la dimensión longitudinal “x” hace el papel del tiempo.

Una vez hecha esta puntualización, nos centramos en la siguiente expresión:

$$U_{\infty} \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{4\beta\sigma T^4}{\rho C_p} + \frac{2\beta\sigma}{\rho C_p} [T_1^4 E_2(\tau) + \int_0^{\tau_0} T^4(x, \tau') E_1(|\tau - \tau'|) d\tau' + T_{\infty}^4 E_2(\tau - \tau_{CL})] \quad (3.44)$$

Aplicando los cambios se tiene:

$$\frac{U_{\infty} \cdot T^*}{L_c} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{v/Pr \cdot T^* \cdot Re_{L_c}}{L_c^2} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{2\beta\sigma T^{*4}}{\rho C_p} [-2\theta^4 + \theta_1^4 E_2(\tau) + \int_0^{\tau_0} T^4(x, \tau') E_1(|\tau - \tau'|) d\tau'] + \theta_{\infty}^4 E_2(\tau - \tau_0) \quad (3.45)$$

Quedando:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 2 \cdot Ncr \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} - 2\theta^4 + \theta_1^4 E_2(\tau) + \theta_{\infty}^4 E_2(\tau - \tau_0) + \int_0^{\tau_0} T^4(x, \tau') E_1(|\tau - \tau'|) d\tau' \quad (3.46)$$

Aplicando diferencias finitas, y la transformación algebraica de la expresión integral:

$$\frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{h_{\xi}} = 2 \cdot Ncr \cdot D_2 \cdot \theta_n - 2\theta^4 + \theta_1^4 E_2(\tau) + \theta_{\infty}^4 E_2(\tau - \tau_0) + A_{ij} \theta_n^4 \quad (3.47)$$

Finalmente, reagrupando tenemos:

$$\left(\frac{1}{h_{\xi}} \cdot \text{speye}(N\tau) - 2 \cdot Ncr \cdot D_2 \right) \cdot \theta_n + (2 \cdot \text{speye}(N\tau) - A_{ij}) \cdot \theta_n^4 = \frac{\theta_{n-1}}{h_{\xi}} + \theta_1^4 E_2(\tau) + \theta_{\infty}^4 E_2(\tau - \tau_0) \quad (3.48)$$

Se comenta brevemente, que inspeccionando, (3.36) y (3.38); (3.41) y (3.43); (3.46) y (3.48), en los tres casos de estudio de flujo ideal, la matriz B es idéntica. Se corresponde con la parte lineal de las ecuaciones, incluyéndose el transporte de calor por conducción. En cambio, la parte no lineal, C, es diferente, según la hipótesis en cada momento, y según se comenta en el apartado 2. El término independiente b también es diferente, según si las radiosidades de las placas estén o no atenuadas por la función exponencial (general o espesor delgado), o según si no se contemplan radiosidades de las placas (espesor grueso).

3.3.3 Flujo viscoso. Hipótesis de espesor óptico delgado. Perfil de Howell

En este apartado unificamos por vez primera la ecuación de conservación de la energía de la capa límite y el flujo de radiación. Consideremos pues las ecuaciones para el flujo completo de espesor $\tau_0 \rightarrow \infty$ para fines académicos:

$$\rho C_p \left(u_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - 4\beta\sigma T^4 + 2\beta\sigma [T_1^4 E_2(\tau) + \int_0^{\infty} T^4(x, \tau') \cdot E_1(|\tau - \tau'|) d\tau'] \quad (3.49)$$

De este modo, [5] el campo de temperaturas se considera que se compone de dos regiones: $0 < \tau < \tau_{CL}$, correspondiente a la capa límite, con grandes gradientes de temperatura, y con una importante conducción de calor; y $\tau > \tau_{CL}$, con pequeños gradientes de temperatura, y conducción de calor despreciable respecto a la transferencia de radiación térmica:

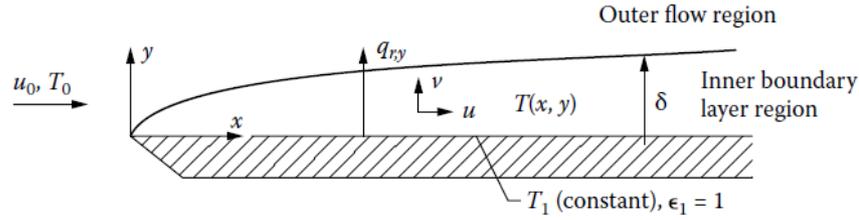


Figura 23: separación del flujo entre dos regiones con intercambios energéticos diferentes

En el flujo exterior, la velocidad en la dirección “x” tiene un valor U_∞ en nuestra nomenclatura. Si despreciamos la conducción de calor, la ecuación de la energía del flujo exterior queda:

$$\rho C_p U_\infty \frac{\partial T}{\partial x} = -4\beta\sigma T^4 + 2\beta\sigma [T_1^4 E_2(\tau) + \int_0^\infty T^4(x, \tau') \cdot E_1(|\tau - \tau'|) d\tau'] \quad (3.50)$$

En el anterior apartado, se implementan los métodos numéricos en esta ecuación, con el objetivo de mostrar resultados más adelante. En este apartado, el objetivo es realizar una aproximación de primer orden, partiendo de un primer valor de la temperatura (ver referencia [5] para más información), para, a continuación, iterarlo un cierto número de veces.

De esta forma, como primera aproximación, $T = T_\infty$ en $x=0$, y queda:

$$T(x, y) = T_\infty + \sigma(T_1^4 - T_0^4) E_2(\beta y) \frac{2\beta x}{\rho C_p U_\infty} + \dots \quad (3.51)$$

Por ser aproximación ópticamente delgada, y si $y=\delta$ (espesor físico de la capa límite), $E_2(\beta\delta) \approx E_2(0) \approx 1$. Por tanto, en $y=\delta$, se tiene:

$$T(x, \delta) = T_\infty + \sigma(T_1^4 - T_0^4) \frac{2\beta x}{\rho C_p U_\infty} + \dots \quad (3.52)$$

Esta sería la primera aproximación. A parte de lo que la referencia [5] expone, en el apartado 4 se muestran unas curvas con la evolución de la condición de Howell después de una serie de iteraciones. En este proyecto se entiende como condición de Howell el valor aproximado de la segunda componente del vector de temperaturas en una estación x concreta. En efecto, si se plantea:

$$T_{i+1} = T_\infty + \frac{2\beta\sigma x}{\rho C_p U_\infty} (T_1^4 - T_i^4) \quad \text{para } i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.53)$$

Es posible realizar varias iteraciones hasta que una buena parte de la curva correspondiente a la evolución de la condición de Howell coincida con la curva correspondiente a la evolución con la placa plana de la segunda componente de la solución numérica de (3.50). Así mismo, es posible involucrar ξ para simplificar (3.53). Haciendo $\theta = T/T^*$, y recordando (1.11), se tiene:

$$\theta_{i+1} = \theta_\infty + (\theta_1^4 - \theta_i^4) \cdot \xi \quad \text{para } i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.54)$$

Es importante distinguir entre θ_∞ , θ_{i+1} y θ_i . Si bien es cierto que $\theta_0 = \theta_\infty$, las siguientes iteraciones se corresponden con el valor aproximado de θ en la frontera entre la capa límite y el flujo exterior, para cierto valor de ξ . Gracias a $E_2(\beta\delta) \approx E_2(0) \approx 1$, estas iteraciones convergen a la verdadera condición de contorno exterior si se cumple la hipótesis de espesor óptico delgado. Sin embargo, dicha hipótesis no es válida para toda la placa plana. En el apartado 4 se dan más detalles. La condición de contorno resultante es θ_{cc} .

Además de analizar cómo es la condición de contorno exterior si se dan las condiciones para espesor óptico delgado, también es importante saber cómo queda (3.49). Respecto a dicha ecuación, [5] la integral se divide en dos partes, de $\tau=0$ a $\tau=\beta\delta$; y de $\tau=\beta\delta$ a $\tau=\infty$. La primera porción se desprecia ya que la capa límite tiene espesor

óptico delgado, y la segunda integral se evalúa usando la condición de contorno exterior (3.52). Reteniendo únicamente términos de primer orden, y recordando (2.54), la ecuación de la energía de la capa límite queda:

$$u_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{2\beta\sigma}{\rho C_p} (T_1^4 + T_\infty^4 - 2T^4) \quad (3.55)$$

Es cierto que en el apartado 3.3.4, las ecuaciones se complican ya que es necesario tratar una expresión integral a través de una transformación matricial. Sin embargo, los cambios de variable que es preciso introducir a continuación son en esencia los mismos que los aplicados previamente, y serán los mismos en lo que queda de convección forzada. Solo se introducen otros dos cambios de variable para el campo de velocidades. Tenemos:

$$u_x = U_\infty \cdot u; \quad v_y = \frac{U_\infty}{\sqrt{Re}} \cdot \hat{v}; \quad v = \hat{v} \cdot \sqrt{2 \cdot Pr \cdot Ncr}; \quad \theta = \frac{T}{T^*}; \quad x = \frac{\rho C_p U_\infty}{2\beta\sigma T^{*3}} \cdot \xi = Lc \cdot \xi; \quad (3.56)$$

$$\eta = y \cdot \sqrt{\frac{U_\infty}{v \cdot Lc}} = \frac{\tau}{\beta} \cdot \sqrt{\frac{U_\infty \cdot 2\beta\sigma T^{*3}}{v \cdot \rho C_p U_\infty}} = \tau \cdot \sqrt{\frac{4\sigma T^{*3}}{v \cdot \beta \cdot k/\alpha \cdot 2}} \rightarrow \eta = \frac{\tau}{\sqrt{2 \cdot Pr \cdot Ncr}}$$

Si nos fijamos en (1.18) y (3.33), $\eta \sim O(1)$ si $y = \delta$. Por tanto, se le da a η un valor máximo de 10. Cabe destacar que no solo se realizan los dos cambios de variable en η y en τ . También se realizan otros dos cambios que afectan al campo de velocidades. Partiendo de (1.15) y (1.16):

$$\frac{U_\infty}{Lc} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{U_\infty}{\sqrt{Re_{Lc}}} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta} \frac{\sqrt{Re_{Lc}}}{Lc} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0 \quad (3.57)$$

$$\frac{U_\infty^2}{Lc} u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{U_\infty^2}{\sqrt{Re_{Lc}}} \hat{v} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\sqrt{Re_{Lc}}}{Lc} = \frac{v \cdot U_\infty \cdot Re_{Lc}}{Lc^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \rightarrow u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \tau} = 2 \cdot Pr \cdot Ncr \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad (3.58)$$

Con condiciones de contorno, correspondientes a placa plana

$$\tau = 0, u = v = 0; \quad \tau \rightarrow \infty, u \rightarrow 1 \quad (3.59)$$

El campo de velocidades es conceptualmente el mismo que el que se programa en el *script 1*, aunque se exprese en función de Pr , Ncr y el espesor óptico. Se trata de un mero artilugio matemático, en forma de cambio de variable, para que la resolución del sistema de ecuaciones (1.15)-(1.17) sea consistente. Por brevedad, no se le aplica en lo que sigue los métodos matemáticos a las ecuaciones de capa límite mecánica. Los códigos resultantes se encuentran en el *script 4* para su consulta. En el apartado 3.4 sí se dedica más espacio a las ecuaciones, en vista de que, al ser convección libre, el campo de velocidades depende de la temperatura.

Centrándonos en la ecuación de la energía, y saltándonos por brevedad los pasos intermedios de los cambios de variable para implementar el método numérico, se tiene:

$$u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + v \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 2 \cdot Ncr \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} - 2\theta^4 + \theta_1^4 + \theta_0^4 \quad (3.60)$$

Deben modificarse las condiciones de contorno de (3.29) porque se ha producido un cambio en el sistema de referencia. Ahora se trabaja con el espesor óptico. Las condiciones de contorno son entonces:

$$\theta = \theta_0 = \frac{T_0}{T^*}, \quad \xi = 0, \tau; \quad \theta = \theta_{cc}, \quad \xi, \tau \rightarrow \infty; \quad \theta = \theta_w, \quad \xi, \tau = 0 \quad (3.61)$$

Aplicando diferencias finitas se tiene:

$$Matu \cdot (\theta_n - \theta_{n-1}) + Matv \cdot D_1 \cdot \theta_n = 2 \cdot Ncr \cdot D_2 \cdot \theta_n - 2 \cdot \theta_n^4 + \theta_1^4 + \theta_0^4 \quad (3.62)$$

Ordenando, y sabiendo (3.7):

$$B = \text{Matu} + \text{Matv} \cdot D_1 - 2 \cdot \text{Ncr} \cdot D_2; \quad C = 2 * \text{speye}(\text{Ntau}); \quad b = \text{Matu} \cdot \theta_{n-1} + \theta_1^4 + \theta_0^4 \quad (3.63)$$

Igual que antes, para lograr que el método matemático reconozca (3.61), se necesita completar las matrices B y C de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} B(1, :) &= 0, & B(1,1) &= 1, & C(1, :) &= 0, & b(1) &= \theta_w \\ B(N_z, :) &= 0, & B(N_z, N_z) &= 1, & C(N_z, :) &= 0, & b(N_z) &= \theta_{cc} \end{aligned} \quad (3.64)$$

El espesor físico de la capa límite mecánica puede medirse nuevamente con η . Sin embargo, la capa límite térmica se mide con espesor óptico. Tras tomar un valor máximo de η de 10, τ_{CL} es suficientemente grande para capturar la evolución de la temperatura. Por otro lado, como se dijo previamente, en el flujo ideal, η no toma un valor concreto. Puede ser tan grande como queramos. En consecuencia, τ_0 y Ncr son dos grados de libertad. Ello favorece que comprobemos a qué valores de Ncr corresponde cada hipótesis, según los valores de τ_0 que correspondan a espesor delgado, grueso e intermedio, representando las curvas para cada caso (ver apartado 4.2). Sin embargo, cuando se trata de flujo viscoso, éste se confina en una capa límite de un espesor $\eta \sim 10$. Por tanto, se reduce en un grado de libertad el cambio para η . En primera aproximación, se tiene $\text{Ncr} \ll 1$ para espesor óptico delgado:

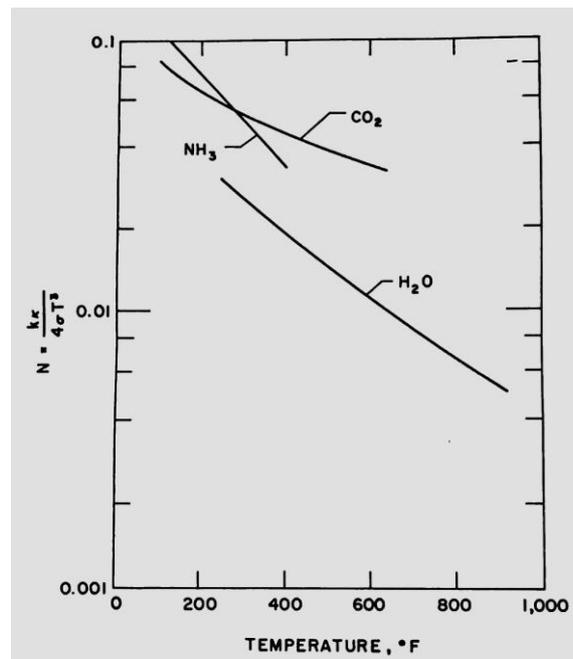


Figura 24: valores de Ncr para diferentes sustancias según la temperatura [4]

Para el apartado 4.4, se toma como valor de Ncr intermedio un valor similar a los que aparece en la Figura 24, mientras que el valor de Ncr correspondiente a espesor óptico delgado se toma como aquel que hace que la condición de contorno se corresponda con la segunda componente τ -ésima del vector de temperaturas del flujo ideal. De ese modo, se puede comparar con los resultados correspondientes a espesor óptico delgado, donde, como venimos comentando en este apartado, se aplica la condición de Howell como condición de contorno.

3.3.4 Flujo viscoso. Relajación de hipótesis relativas a τ . Resumen de ecuaciones

Llegados a este punto, es necesario resolver de nuevo las ecuaciones del flujo viscoso correspondiente a espesor óptico grueso, pero esta vez con el mismo cambio de variable en la dimensión "x", dependiente de L_c , que se viene realizando en este apartado 3.3, para poder establecer una comparación entre las curvas de Nu/\sqrt{Re} correspondientes a cada uno de los tres casos de flujo viscoso en estudio.

En ocasiones, puede deshacerse cambios de variable a la hora de representar curvas con la intención de

compararlas con resultados dependientes de otras variables, como precisamente se hace en este trabajo al representar los perfiles de temperatura de la capa límite térmica, en el apartado 4.1, respecto a η_v . Sin embargo, cuando una variable es independiente, como en el caso de ξ , sea cual sea el cambio empleado, no es posible deshacer el cambio de variable, porque por definición no depende de otras variables adimensionales que puedan manipularse en este caso para facilitar la resolución numérica de la ecuación. Por ello, es necesario resolver el caso de espesor óptico grueso en función de L_c . También se pretende incorporar en la discusión una relación cualitativa, dada por Bo , entre el calor por convección y el calor por radiación puesto en juego en la capa límite que se comenta en el apartado 4.4.

Empezamos por resolver las ecuaciones para espesor grueso en función del espesor óptico. Se tiene:

$$\rho c_p \left(u_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{16\sigma T^3}{3\beta} + k \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (3.65)$$

Nuevamente se aplica (3.56). Tras aplicar los dos cambios de variable, para η y para τ , queda:

$$u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + v \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 2 \cdot Ncr \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial^2 (\theta^4)}{\partial \tau^2} \quad (3.66)$$

Se aplican diferencias finitas, y se ordenan los términos:

$$B = Matu + Matv \cdot D_1 - 2 \cdot Ncr \cdot D_2; \quad C = -2/3 \cdot D_2; \quad b = Matu \cdot \theta_{n-1} \quad (3.67)$$

Las condiciones de contorno son (3.61), con el cambio de $\theta_{cc} = \theta_{\infty}$.

Pasamos a resolver las ecuaciones generales, en cuanto a que relajan las hipótesis relacionadas con el espesor óptico. Se tiene:

$$\rho C_p \left(u_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - 4\beta\sigma T^4 + 2\beta\sigma [T_1^4 E_2(\tau) + \int_0^{\tau_{CL}} T^4(x, \tau') E_1(|\tau - \tau'|) d\tau' + T_{\infty}^4 E_2(\tau - \tau_{CL})] \quad (3.68)$$

Como puede verse, se va a integrar en el entorno óptico donde se ubica la capa límite, entre 0 y τ_{CL} . Al igual que se comentó al principio de este apartado 3.3, se debería integrar entre 0 e ∞ . Sin embargo, el flujo que ocupa el intervalo entre τ_{CL} e ∞ es ideal, afectado por la presencia de la capa límite. Ello repercutiría en un incremento de la complejidad del proceso de resolución, porque la condición de contorno exterior de la capa límite dependería del flujo ideal, que, al mismo tiempo, estaría influenciado por la presencia de la propia capa límite.

Se recuerda que, en la práctica, en convección forzada se estudian por separado flujo ideal y flujo viscoso, es decir, cada uno se estudia con su propio volumen de control a la hora de aplicar las ecuaciones. Si bien el espesor físico de una capa límite puede despreciarse bajo ciertas condiciones, a estas alturas del trabajo puede verse que τ_{CL} puede tomar valores del orden de τ_0 . Por tanto, ninguno de los dos intervalos de la integral debería despreciarse. Estaríamos por tanto ante un proceso iterativo que involucraría expresiones integro algebraicos diferenciales parciales no lineales, como el que se propone en [9]. En el apartado 6 se plantea como línea futura.

En este trabajo, por simplicidad, la condición de contorno exterior de la capa límite con espesor óptico τ_{CL} , nuevamente θ_{cc} , se toma como la componente más cercana a τ_{CL} del vector de temperaturas del flujo ideal en la estación correspondiente. En el apartado 4.4, se dan más detalles. Por otro lado, se opta nuevamente por incluir la radiosidad de la placa superior, porque, al igual que en flujo ideal, los resultados que aporta el método numérico son más estables.

Para que conste, aplicando los dos cambios de variable, el sistema de ecuaciones (1.15)-(1.17) más general posible queda:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0 \quad (3.69)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \tau} = 2 \cdot Pr \cdot Ncr \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad (3.70)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + v \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 2 \cdot Ncr \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} - 2\theta^4 + \theta_1^4 \cdot E_2(\tau) + A_{ij} \cdot \theta^4 + \theta_\infty^4 \cdot E_2(\tau - \tau_{CL}) \quad (3.71)$$

Centrándonos en (3.71), tras aplicar diferencias finitas y ordenar términos, se tiene:

$$B = Matu + Matv \cdot D_1 - 2 \cdot Ncr \cdot D_2; \quad C = 2 * speye(Ntau) - A_{ij}; \quad b = Matu \cdot \theta_{n-1} + \theta_1^4 \cdot E_2(\tau) + \theta_\infty^4 \cdot E_2(\tau - \tau_{CL}) \quad (3.72)$$

Se comenta brevemente, al igual que ocurría con el flujo no viscoso, que inspeccionando (3.60) y (3.63); (3.66) y (3.67); (3.71) y (3.72), en los tres casos de estudio, la matriz B es idéntica. Se corresponde con la parte lineal de las ecuaciones, incluyéndose los campos de velocidad conocidos o el transporte de calor por conducción. En cambio, la parte no lineal, C, es diferente, según la hipótesis en cada momento, y según se comenta en el apartado 2. El término independiente b también es diferente, según si las radiosidades de las placas estén o no atenuadas por la función exponencial (general o espesor delgado), o según si no se contemplan radiosidades de las placas (espesor grueso).

Antes de pasar a convección libre, se hacen dos comentarios necesarios para analizar los resultados de los apartados 4.3 y 4.4. Estamos interesados en el Nusselt local para estudiar la evolución del fluido a lo largo de la placa, así como en el gradiente de temperaturas. De este modo, según [4]:

$$\frac{Nu}{\sqrt{Re}} = \xi^{1/2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}, \quad \theta' = \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \quad (3.73)$$

Siendo θ la temperatura adimensional en uso. Los resultados respecto a $\frac{Nu}{\sqrt{Re}}$ y θ' se expresan en función de (4.10) siempre que se compare con resultados de [4]. Por otro lado, en el apartado 4.3, estamos interesados nuevamente en expresar unos resultados respecto a η_v , como hacemos en el apartado 4.1. Sin embargo, el cambio en η es diferente, ver (3.33). En ese caso, η_v se calcularía tal que así:

$$\eta_v = y \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{U}{v^* \cdot x} \right]^{1/2} = \frac{\eta \cdot Lc}{\sqrt{Re_{Lc}}} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{U_\infty}{v^* \cdot \xi \cdot Lc} \right]^{1/2} = \frac{\eta}{\sqrt{Re_{Lc}}} \cdot \left[\frac{Lc^2}{2} \cdot \frac{U_\infty}{v^* \cdot \xi \cdot Lc} \right]^{1/2} = \eta \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot \xi} \right]^{1/2} \quad (3.74)$$

En [4], dicho cambio de variable es ligeramente distinto, ya que no se expresa en función de 2. El propósito de dejar ese 2, es para uniformar el cambio de variable que realizan Viskanta&Gross y Sparrow. En cualquier caso, se demuestra que el resultado en la Figura 41 es óptimo.

3.4 Formulación de ecuaciones en convección libre. Hipótesis de espesor óptico grueso

Para terminar el apartado 3, se van a implementar los métodos numéricos en las ecuaciones de la convección libre, incluyendo la novedad de que el medio fluido en reposo tiene un espesor óptico grueso. Al igual que en el apartado 3.2, se resuelven las ecuaciones con una malla en η y ξ ; y con unos cambios de variable en función de la longitud de la placa L. El cambio en θ también es el mismo, con el propósito de obtener unos resultados gráficos a partir del mismo marco de referencia propuesto en [8]. La principal referencia usada en este apartado, y en el apartado 5, es [6]. En dicho trabajo fin de grado se resolvía un flujo de Rayleigh-Benard como éste, pero sin radiación. Así pues, partimos de las ecuaciones (3.33), (3.38) y (3.35):

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (3.75)$$

$$\rho \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = g\beta(T - T_\infty) + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (3.76)$$

$$\rho C_p \left(u_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{16\sigma T^3}{3\beta} + k \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (3.77)$$

Con condiciones de contorno:

$$u_x(x, 0) = v_y(x, 0) = u_x(x, y \rightarrow \infty) = 0; T(0, y) = T_\infty, T(x, y \rightarrow \infty) = T_\infty, T(x, 0) = T_w \quad (3.78)$$

Se realizan los siguientes cambios de variable:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{L}, \quad u_x = u_0 \cdot u, \quad v_y = u_0 \cdot v, \quad \text{con } u_0 = \sqrt{g\beta L(T_w - T_\infty)}, \quad \theta = \frac{T}{T^*} \quad (3.79)$$

Nuevamente, $Ncr = \frac{\kappa k}{4\sigma T^*{}^3}$. Sabiendo que $Gr = \frac{g\beta\Delta T \cdot L^3}{\nu^2} = \left(\frac{u_0 \cdot L}{\nu} \right)^2$, se aplican entonces dichos cambios:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad (3.80)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\nu}{U_\infty \cdot L} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{g\beta T^* L}{g\beta L(T_w - T_\infty)} (\theta - \theta_\infty) \quad (3.81)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + v \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\nu}{u_0 \cdot L} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{16\sigma T^*{}^3 \theta^3}{3\beta\rho C_p \nu} + \frac{\alpha}{\nu} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right] \quad (3.82)$$

Dando como resultado:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad (3.83)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{Gr^{1/2}} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\theta - \theta_\infty}{\theta_w - \theta_\infty} \quad (3.84)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + v \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{Gr^{1/2} \cdot Pr} \left(\frac{1}{3 \cdot Ncr} \frac{\partial^2 \theta^4}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right) \quad (3.85)$$

Se implementan diferencias finitas en (3.84) y (3.85). De (3.83) se obtiene v , partiendo de los resultados de u , y empleando el método de integración de los trapecios. Es la manera estándar de tratar numéricamente la ecuación de la masa en este proyecto (ver *script 1*, *script 4* y *script 5*):

$$u_{n-1} \frac{u_n - u_{n-1}}{h_\xi} + v_{n-1} \cdot D_1 \cdot u_n = \frac{1}{Gr^{1/2}} \cdot D_2 \cdot u_n + \frac{\theta_{n-1} - \theta_\infty}{\theta_w - \theta_\infty} \quad (3.86)$$

$$u_n \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{h_\xi} + v_n \cdot D_1 \cdot \theta_n = \frac{1}{3 \cdot Ncr \cdot Gr^{1/2} \cdot Pr} \cdot D_2 \cdot \theta_n^4 + \frac{1}{Gr^{1/2} \cdot Pr} \cdot D_2 \cdot \theta_n \quad (3.87)$$

De (3.86) cabe destacar las siguientes aproximaciones, con el propósito de iterar las estaciones precedentes: $u_j(x_n) \approx u_j(x_{n-1})$; $v_j(x_n) \approx v_j(x_{n-1})$; $\theta_j(x_n) \approx \theta_j(x_{n-1})$. A continuación, se agrupa (3.86) con el propósito de resolver un sistema lineal tal que $A \cdot u_n = r_n$; y se agrupa (3.87) con el propósito de resolverlo mediante Newton Raphson. En (3.86) se definen $Matu$ y $Matv$ según los resultados del campo de velocidades de las estaciones precedentes. En (3.87) se redefinen $Matu$ y $Matv$ como los resultados del campo de velocidades

de la estación actual, para calcular el campo de temperaturas (ver Figura 22):

$$(\text{Matu} + \text{Matv} \cdot D_1 - \frac{D_2}{\text{Gr}^{1/2}}) \cdot u_n = \frac{u_{n-1}^2}{h_\xi} + \frac{\theta_{n-1} - \theta_\infty}{\theta_w - \theta_\infty} \quad (3.88)$$

$$(\text{Matu} + \text{Matv} \cdot D_1 - \frac{1}{\text{Gr}^{1/2} \cdot \text{Pr}} \cdot D_2) \cdot \theta_n - \frac{1}{3 \cdot \text{Ncr} \cdot \text{Gr}^{1/2} \cdot \text{Pr}} \cdot D_2 \cdot \theta_n^4 = \text{Matu} \cdot \theta_{n-1} \quad (3.89)$$

Las condiciones de contorno para (3.88) en términos de A y r son:

$$\begin{aligned} A(1, :) &= 0; & A(1,1) &= 1; & r(1) &= 0; \\ A(\text{Neta}, :) &= 0; & A(\text{Neta}, \text{Neta}) &= 1; & r(\text{Neta}) &= 0; \end{aligned} \quad (3.90)$$

Las condiciones de contorno para (3.89) en términos de B, C y b son:

$$\begin{aligned} B(1, :) &= 0, & B(1,1) &= 1, & C(1, :) &= 0, & b(1) &= \theta_w \\ B(\text{N}_z, :) &= 0, & B(\text{N}_z, \text{N}_z) &= 1, & C(\text{N}_z, :) &= 0, & b(\text{N}_z) &= \theta_\infty \end{aligned} \quad (3.91)$$

Por otro lado, según [6], $\delta_v/L \sim \frac{1}{\text{Gr}^{1/4}} \ll 1$, $\delta_t/L \sim \frac{1}{\text{Gr}^{1/4} \cdot \text{Pr}} \ll 1$ si el medio es completamente opaco a la radiación, es decir, si no se tiene en cuenta la radiación en el modelo. Según (3.31) y (3.82):

$$\frac{\delta_T}{L} \sim \sqrt{\frac{1 + 4/(3 \cdot \text{Ncr})}{\text{Gr}^{1/2}}} \quad (3.92)$$

Como se verá en el apartado 5, se toman dos valores diferentes de Pr, Pr=1, Pr=100. En consecuencia, (3.92) no presenta dependencia con la raíz de Pr en el denominador. Por un lado, para resolver el campo de velocidades y el campo de temperaturas al mismo tiempo, se necesita un mismo valor máximo de η . Por otro lado, si se incluyese la raíz de Pr en el denominador de (3.92), el campo de velocidades podría no tener cabida en el rango de η , al no presentar su espesor físico dicha dependencia con Pr. En consecuencia, se opta por elegir como cota superior de η_{max} para la malla de diferencias finitas la expresión (3.92).

Finalmente, se debe tomar como condición inicial de unml=0.001 por ejemplo. La condición de vnml se queda nula. El motivo es puramente numérico, para evitar errores de condicionamiento en Matlab.

4 Efectos de la radiación térmica en convección forzada

4.1 Flujo viscoso. Capa límite ópticamente gruesa

En este apartado se van a exponer los resultados, estableciendo una comparación con la referencia [8], obra de Viskanta y Grosh en 1962, correspondientes al caso de espesor óptico grueso.

Dicho artículo presenta sus resultados para valor unidad de Pr. El cambio de variable que se ha efectuado permite recoger dichos resultados en función de la variable adimensional η multiplicada por un factor corrector dependiente de ξ , para poder comparar con [8]. Concretamente, dicha variable adimensional que emplea [8] es como sigue:

$$\eta_v = y \cdot \left[\frac{(m+1)}{2} \frac{U}{\nu^* \cdot x} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.1)$$

La variable “m” es la variable de la que depende lo que [8] denomina β a través de:

$$\beta = 2m/(m+1) \quad (4.2)$$

Estrictamente hablando, [8] calcula la distribución de temperaturas de la capa límite sobre una cuña cuyo ángulo es $\pi\beta$:

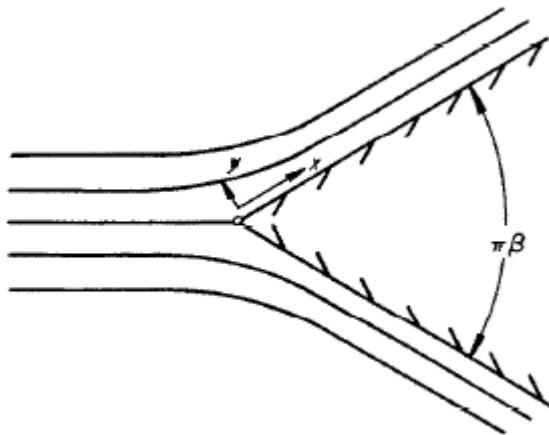


Figura 25: sistema de ejes coordenados empleado en [8]

En este trabajo se está interesado en la distribución de temperaturas en una placa plana, por lo que “m”, así como β , se anulan, quedando:

$$\eta_v = y \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{U}{\nu^* \cdot x} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

A su vez, U se toma como una solución de semejanza, expresándose como una constante multiplicada por una potencia m -ésima de x . Hay que destacar una vez más que uno de los propósitos de este trabajo es generalizar un método numérico, que combina diferencias finitas y el método de Newton Raphson, para calcular la distribución de temperaturas para cualquier forma en presencia de radiación, a través del cálculo de la capa límite mecánica. Más adelante se presenta el procedimiento a seguir en el caso general de cualquier forma. De momento, dado que “ m ” se anula, y en vista de que ν^* es entendida como la viscosidad cinemática a la temperatura de referencia T^* , en este trabajo se le da a U el mismo carácter de velocidad de referencia, tomándose como U_∞ .

Introduciendo Re y las variables adimensionales ξ y η nos queda:

$$\eta_v = \eta L \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{U_\infty}{\nu^* \cdot \xi L} \right]^{\frac{1}{2}} = \eta \cdot \left[\frac{L^2}{2} \cdot \frac{U_\infty}{\nu^* \cdot \xi L} \right]^{\frac{1}{2}} = \eta \cdot \left[\frac{Re}{2 \cdot \xi} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

Este vector η_v depende de una componente del vector ξ , con vistas a representar el perfil de temperatura en dicha estación.

Comenzamos la exposición de los resultados con el perfil de temperaturas para un caso de pared fría (Figura 26) y otro de pared caliente (Figura 27). La naturaleza física de los resultados [8] puede visualizarse cuando se presta atención al valor del parámetro Ncr , que representa, como ya se ha comentado, la importancia relativa del transporte de energía mediante conducción y mediante radiación. Para el caso de $Ncr=10$, predomina la conducción de calor; en el caso de $Ncr=1$, el transporte por conducción molecular y por radiación son del mismo orden de magnitud, y en el caso de $Ncr=0.1$, predomina el transporte por radiación, y la hipótesis del espesor óptico grueso presenta menos aplicabilidad (puede verse cómo se separa claramente de las otras dos curvas para $Ncr=10$ y $Ncr=1$).

Por otro lado, si bien para $Ncr \rightarrow \infty$ el perfil de temperaturas se corresponde con el caso de conducción pura, la referencia [8] contabiliza en un 2% la desviación de todos los casos para $Ncr=10$, respecto al caso de conducción pura. De esta forma, el estudio de los perfiles de temperatura deja como conclusiones, que el efecto de la radiación en el caso de espesor óptico grueso es hacer más denso el flujo de la capa límite, dando pie a la aproximación del flujo de energía de radiación por difusión (efecto similar al que produce disminuir Pr , ya que implica aumentar la difusividad térmica) y que, dejando fijo un cierto valor de Ncr , en el caso de pared caliente, se aprecia, en el correspondiente perfil de temperatura, una mayor diferencia con el caso puramente conductivo que en el caso de pared fría.

A continuación, pasamos a analizar el gradiente de temperatura en la última estación de la placa plana, según la ordenada vertical respecto a la pared η_v , tanto para pared fría como para pared caliente (Figura 28). Hay que destacar que [8] para el caso de pared fría, el gradiente de temperatura, que da una idea de la transmisión de calor por conducción, es máximo en la pared, mientras que para pared caliente el gradiente de temperatura es máximo a una ordenada vertical ciertamente alejada de la pared. Así, mientras que, en el caso de pared fría, una disminución de Ncr provoca que el valor absoluto del gradiente de temperatura más elevado, para cada valor de Ncr , se dé en cualquier caso en la propia pared, en el caso de pared caliente, una disminución de Ncr provoca que el valor absoluto del gradiente de temperatura más elevado, para cada valor de Ncr , se dé a una mayor ordenada vertical. Estas tendencias se deben a la remarcable no linealidad que presenta la dependencia con la temperatura del flujo de radiación. Por otro lado, en la zona adyacente a la placa plana, caracterizada por velocidades casi nulas de la capa límite mecánica, la transmisión de calor es principalmente por conducción. En dicha zona, en el caso de pared fría, debe destacarse que el gradiente de temperatura es constante si Ncr es grande, aunque deja de ser constante, y aumenta, si Ncr toma valores más pequeños como $Ncr=0.1$, en cuyo caso, la aplicabilidad de la aproximación difusa sería limitada.

De esta manera, según (4.5), para el caso de pared fría el flujo de calor por conducción es máximo en la pared, y el flujo de calor por radiación es máximo a una ordenada vertical ciertamente alejada de la pared, cuando la temperatura se incrementa para adaptarse a la temperatura del infinito. Si la pared es caliente, en cambio, y debido a que la temperatura nunca volverá a ser tan grande como en la pared, el flujo de calor por radiación es máximo en la superficie, y el flujo de calor por conducción es máximo en una ordenada vertical ciertamente alejada de la pared.

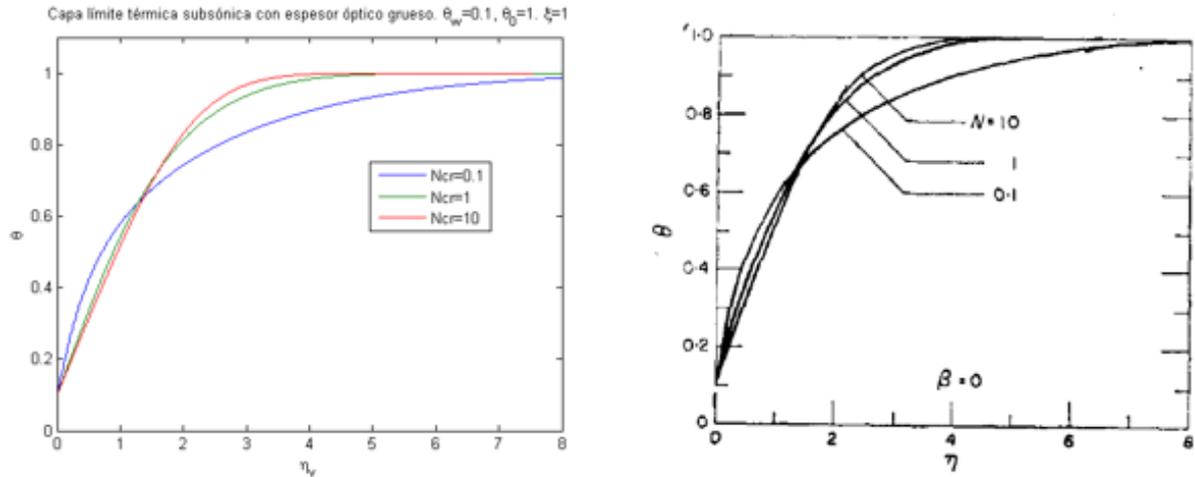


Figura 26: comparación con [8] de la distribución de temperaturas en función de η escalada, en la última estación de la placa plana. $\theta_w = 0.1$; $\theta_0 = 1$; $Ncr = \{0.1, 1, 10\}$

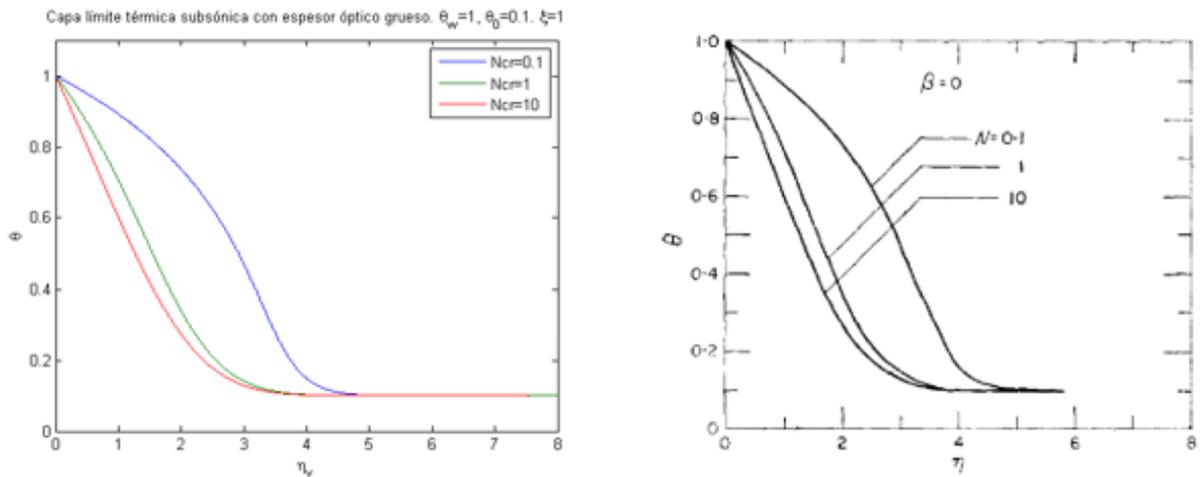


Figura 27: comparación con [8] de la distribución de temperaturas en función de η escalada, en la última estación de la placa plana. $\theta_w = 1$; $\theta_0 = 0.1$; $Ncr = \{0.1, 1, 10\}$

Los gradientes de temperatura en la pared en función de θ_w , si la pared es fría, y en función de θ_0 , si la pared es caliente, se muestran en la Figura 29 y en la Figura 30 respectivamente. Para el caso puramente conductivo y pared fría, los gradientes de temperatura en la pared se desvían menos de un 1% respecto a $Ncr=10$, por lo que solo se muestra el caso puramente conductivo si la pared es caliente. La principal conclusión es que, si el transporte de energía está dominado por la conducción, los gradientes de temperatura en la pared presentan una tasa lineal en ambos casos, mientras que, si la transmisión de calor por radiación se convierte en el modo dominante de transmisión de calor, cuando disminuye Ncr , los gradientes de temperatura en la pared en ambos casos dejan de tener una tendencia lineal. Concretamente, si la pared es fría, la radiación incrementa los gradientes de temperatura, salvo que θ_w aumente, mientras que, si la pared es caliente, la presencia de la radiación disminuye el salto de temperatura para cualquier valor de θ_0 .

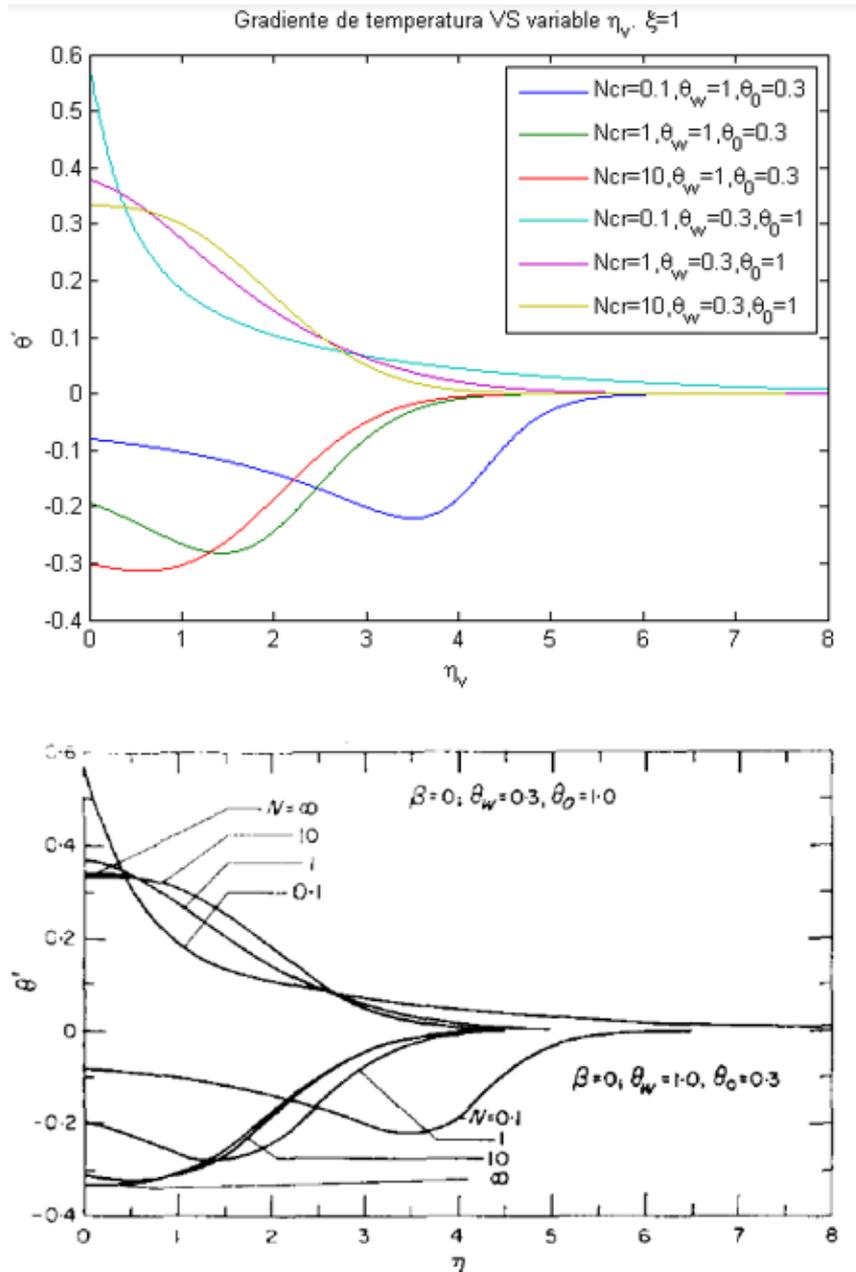


Figura 28: comparación con [8] del gradiente de temperaturas, para un caso de pared caliente y otro de pared fría, en función de η escalada, en la última estación de la placa plana. $Ncr = \{0.1, 1, 10\}$

El flujo de calor (energía por unidad de tiempo y área) que recibe el fluido desde la placa plana es la suma del flujo por conducción y del flujo por radiación. En el marco de la hipótesis thick se tiene [8]:

$$q'' = q_c'' + q_r'' = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_w - \frac{8\sigma T^3}{3\beta} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_w \quad (4.5)$$

Si bien sigue en pie el flujo de radiación de Rosseland, según la obra de éste, [20], debe modificarse el coeficiente de $16/3$ a $8/3$ en las cercanías a la placa plana. El motivo es que esta aproximación no tiene en cuenta la radiación que abandona la superficie. Los autores de [8] lo tuvieron en cuenta y, para valores de η_v más pequeños que el 4% del espesor físico de la capa límite térmica, se usó la constante $8/3$ en la ecuación de conservación de la energía. En este trabajo, se ha mantenido en cambio $16/3$, con el propósito de comprender bajo qué circunstancias es preciso afinar el límite del espesor óptico grueso de la manera propuesta en [8].

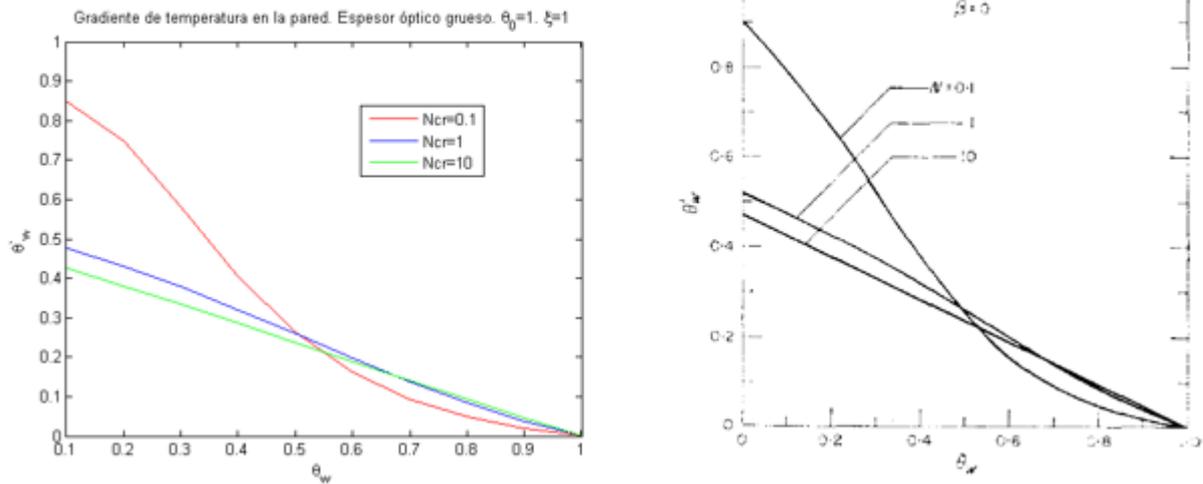


Figura 29: comparación con [8] del gradiente de temperaturas en la pared fría ($\theta_w = 1$) en función de la temperatura de la pared, en la última estación de la placa plana. $Ncr = \{0.1, 1, 10\}$

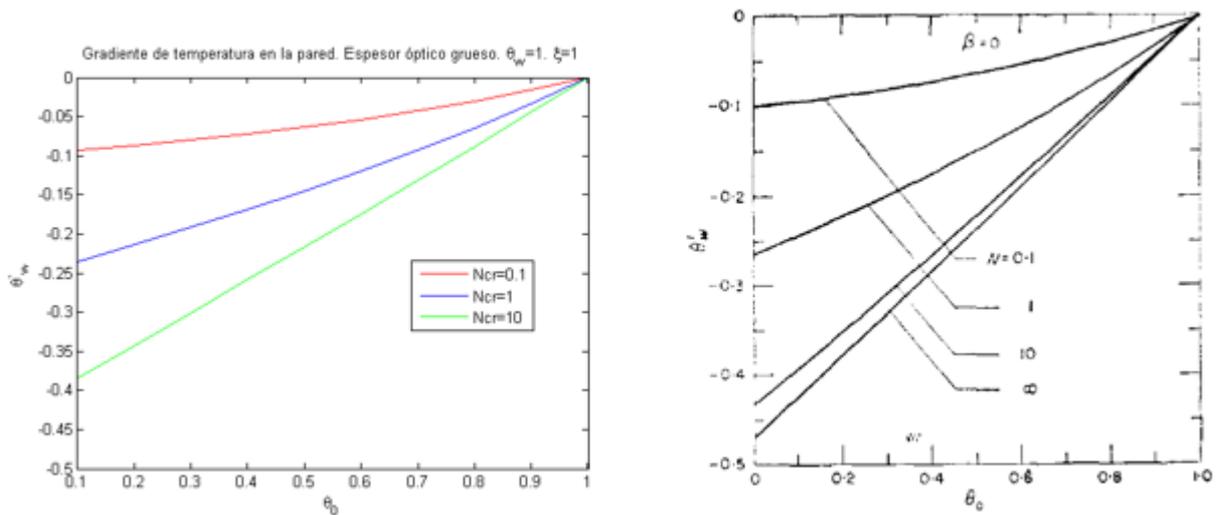


Figura 30: comparación con [8] del gradiente de temperaturas en la pared caliente ($\theta_w = 1$) en función de la temperatura del infinito, en la última estación de la placa plana. $Ncr = \{0.1, 1, 10\}$

Teniendo en cuenta que, en [8] la distancia “y” perpendicular a la placa plana se había expresado según (4.1), y que nuestro propósito nuevamente es obtener resultados que nos permitan comparar con Viskanta; y que $m=0$, el flujo de calor total adimensionalizado queda:

$$\frac{q''x}{kT^*(Re_x)^{1/2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{2\theta_w^3}{3Ncr} \right) \cdot \theta_w' \quad (4.6)$$

Como puede verse en la Tabla 1, el efecto de la radiación es incrementar la transferencia de calor total. Como cabría esperar, incrementar θ_w si la pared es fría provoca un aumento de la transferencia de calor por radiación, que sumado al calor que recibe la placa del flujo exterior, hace que la transferencia neta de energía del fluido a la placa sea menor. Por otro lado, los resultados en el caso de pared caliente muestran, para valores de $\theta_0 = 0.1 \div 0.3$, que existe un mínimo en la transferencia de calor total con Ncr , mientras que, en los dos casos, si la radiación es del orden de 10 veces mayor que la conducción, la transferencia de calor total llega a doblarse.

A la hora de comparar nuestros resultados del flujo de calor adimensionalizado en función de $16/3$, θ'_w y de θ_w , fijándonos además en la Tabla 2, llama la atención dos incidencias. Por un lado, si la pared es fría, se aproximan con cierta exactitud los resultados de [8], no así cuando la pared es caliente, cuando las desviaciones se incrementan, debido al incremento de θ_w . Por otro lado, si nos encontramos cerca del caso puramente conductivo, puesto que el termino radiativo no tiene apenas influencia, no existe excesiva desviación, no así cuando disminuye Ncr . Es decir, en aquellos casos que den lugar a saltos de temperatura moderados, incluso si $\theta_w = 0.1, \theta_0 = 1$, debe emplearse como coeficiente $8/3$ para ajustar los resultados dentro de la aproximación que se está realizando.

Flujo de calor en la pared				
Pared fría				
$Ncr \setminus \theta_w$	0,1	0,3	0,5	0,7
10	-0,30248	-0,23637	-0,16950	-0,10186
1	-0,33879	-0,27283	-0,19877	-0,11982
0,1	-0,60427	-0,48622	-0,34117	-0,22077
Pared caliente				
$Ncr \setminus \theta_0$	0,1	0,3	0,5	0,7
10	0,27176	0,21311	0,15454	0,09513
1	0,16697	0,13799	0,11077	0,08048
0,1	0,06604	0,06648	0,08242	0,09969

N	θ_w			
	0.1	0.3	0.5	0.7
(a) Cool wall, $\beta = 0$				
10	-0.303	-0.237	-0.170	-0.102
1	-0.338	-0.272	-0.198	-0.122
0.1	-0.561	-0.435	-0.330	-0.221
N	θ_0			
	0.1	0.3	0.5	0.7
(c) Hot wall, $\beta = 0$				
10	0.296	0.232	0.165	0.100
1	0.286	0.231	0.173	0.102
0.1	0.501	0.432	0.348	0.233

Tabla 1: comparación entre el flujo de pared (4.6), calculado en este trabajo en base a los resultados previos y calculado en [8]

Desviación respecto a Viskanta&Gross				
Pared fría				
$Ncr \setminus \theta_w$	0,1	0,3	0,5	0,7
10	0,17%	0,26%	0,29%	0,13%
1	0,23%	0,30%	0,39%	1,78%
0,1	7,71%	11,78%	3,38%	0,10%
Pared caliente				
$Ncr \setminus \theta_0$	0,1	0,3	0,5	0,7
10	8,19%	8,14%	6,34%	4,87%
1	41,62%	40,26%	35,97%	21,10%
0,1	86,82%	84,61%	76,32%	57,21%

Tabla 2: desviación producida entre los cálculos aquí realizados y los cálculos expuestos en [8]

Para terminar este apartado, a continuación, se van a explicar algunas claves para visualizar el perfil de temperaturas de la capa límite, en caso de espesor óptico grueso todavía, para otras formas que no sean una placa plana. Dado que este proyecto se centra en el estudio de los fenómenos de transferencia de energía, más que en las condiciones de contorno del proceso, tómese este apunte como una demostración de las posibilidades que otorga la implementación de estos métodos numéricos sencillos para generalizar las capas límite térmica y mecánica a otras formas en futuros proyectos que involucren radiación y flujos viscosos.

Como puede verse en la Figura 31, se representa el perfil de temperaturas respecto a η , en vez de respecto a η_v porque en el caso del perfil correspondiente al cilindro puede dar lugar a confusión. Debido a que en la estación $n=10$ el perfil de temperaturas del cilindro se mantiene prácticamente constante a lo largo de todas las estaciones posteriores, se tiene que al representar respecto a η_v según (4.3), y sabiendo que ξ se va incrementando, la capa límite aparentemente se estrecharía, lo que no tiene sentido como se comentó en el apartado 1.1. Efectivamente, si representamos respecto a η , puede verse que la capa límite del cilindro apenas se ensancha conforme

evoluciona. En general una capa límite tiende a ensancharse conforme evoluciona, siendo lo cual más evidente cuando $Ncr=0.1$, es decir, cuando predomina la transmisión de energía por radiación, y las moléculas que deberían encontrarse a temperatura de infinito aún se encuentran bajo la influencia de sus vecinas, y están sujetas a mayores intercambios difusivos para alcanzar la condición de contorno en el infinito. Así pues, la capa límite de la placa plana se ensancha más que en los casos de elipse y cilindro ideales.

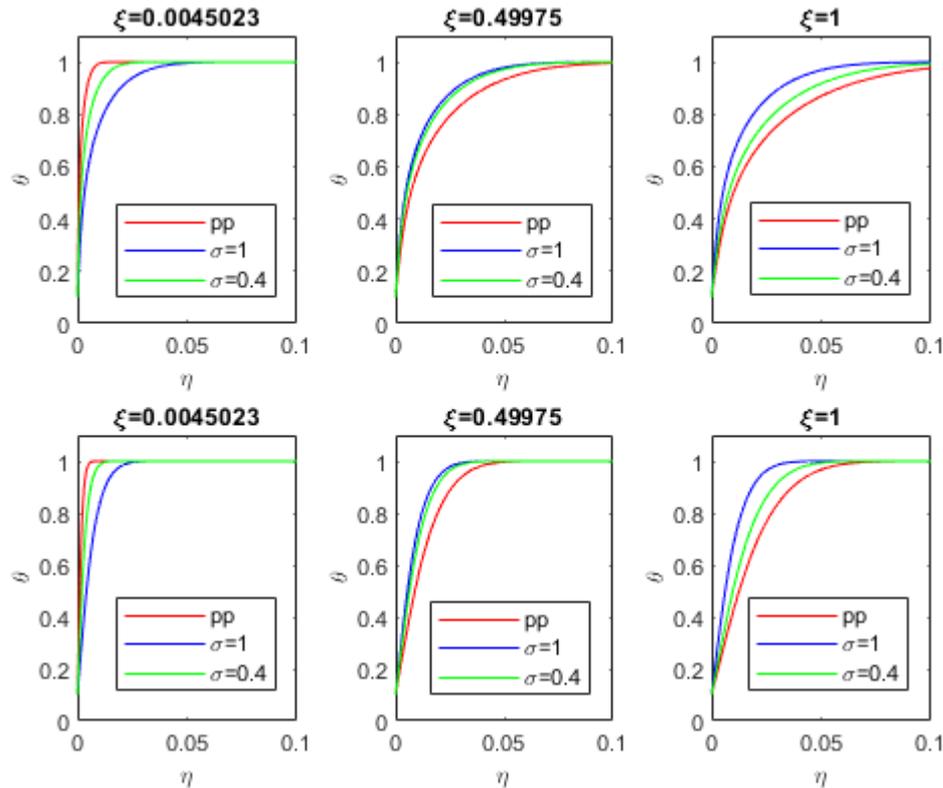


Figura 31: comparación de la distribución de temperaturas en función de η , para $Ncr=0.1$ (a, b y c) y para $Ncr=1$ (d,e y f), para tres estaciones longitudinales hasta $\xi=1$, $Nxi=2000$; y para placa plana, cilindro ideal ($\sigma=1$) y elipse ideal con $\sigma=0.4$

4.2 Flujo no viscoso. Resultados con hipótesis y relajándolas

Para comenzar este apartado nos hacemos en primer lugar la pregunta de cuán exactos son los resultados que se pretende mostrar para flujo no viscoso que no conduce calor, los cuales se emplean como condición de contorno exterior de las capas límite en caso de que se relajen las hipótesis relacionadas con τ .

$\theta_w=1; \theta_0=0,1$	$\theta(50)$	$\theta(70)$	$\theta(100)$	$\theta(150)$	$\theta(290)$
Código original	0,950103107	0,93128547	0,90072767	0,84157283	0,49903698
Código [3]	0,950097722	0,93127759	0,90071544	0,84155087	0,49885212
Desviación	0,00057%	0,00085%	0,00136%	0,00261%	0,03704%

Tabla 3: Componentes de la distribución de temperatura para flujo no viscoso que no conduce calor, calculadas por el código original atribuido a este trabajo, y calculadas por el código basado en [3], cuando ambos códigos han alcanzado el régimen estacionario a lo largo de la placa plana

En la Figura 32 puede apreciarse la distribución de temperaturas en régimen estacionario, para $\tau=20$, $Ntau=300$ y pared caliente, que presenta el flujo no viscoso, sin dispersión, con $Ncr=0$, en función del espesor óptico, calculada según el *script 2* en el Anexo de este trabajo, entendido como “código original”, y según el *script 3* en el mismo Anexo, entendido como “código [3]” porque está basado en el código principal usado en la referencia [3]. Dicho *script 3* realiza los cálculos en función de la matriz “MG” que recoge las energías irradiadas en cada

elemento de volumen de control, asociadas, álgebra mediante, a cada componente de espesor óptico. No se incluyen efectos de dispersión de la radiación, ni de emisividades de las dos placas. De esta manera, en la Tabla 3, puede verse la dispersión marginal que existe entre ambos procedimientos análogos. Cabe destacar que ambos métodos análogos alcanzan el régimen estacionario en posiciones “ ξ ” de la placa plana diferentes. De la misma manera, en una misma estación, el perfil de temperaturas puede no ser exactamente el mismo dependiendo de si es el resultado de un *script* u otro. Esto no implica necesariamente un código mal diseñado, ya que puede haber, si fuese necesario, un factor de corrección entre ambos procedimientos.

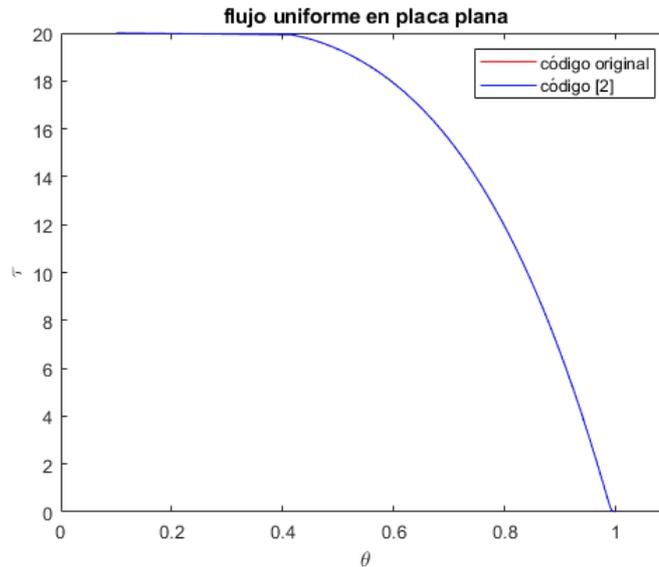


Figura 32: distribución de temperatura para flujo no viscoso que no conduce calor y que no dispersa radiación, calculada por el código original atribuido a este trabajo, y calculada por el código basado en [3], cuando ambos códigos han alcanzado el régimen estacionario a lo largo de la placa plana

A continuación, se procede a la comparación con literatura existente del salto de temperatura que ocurre en flujo ideal cuando $N_{cr}=0$, conocido como *radiation slip*, debido a que la energía interna de una placa tiene origen molecular, en vez de fotónico, por lo que la energía no puede propagarse en las cercanías de la placa plana por el choque de partículas entre sí debido a la ausencia de conducción de calor. En consecuencia, existe una discontinuidad térmica, que puede apreciarse tanto en la placa inferior como en la superior, y que tiende a desaparecer, aunque no del todo, como se aprecia en la placa inferior en la Figura 32, cuando el flujo recorre largas distancias ξ , como puede apreciarse en la Figura 33. Centrándonos en esta última figura, para poder comparar con [4] necesitamos expresar la temperatura adimensional en la pared, y en función de ξ , de la siguiente manera, en función de la temperatura adimensional resuelta en *script 2*:

$$\Theta(\xi, 0) = \frac{T(\xi, 0) - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{\theta(\xi, 0) - \theta_w}{\theta_\infty - \theta_w} \quad (4.7)$$

Por un lado, apreciamos que la radiación *persé*, entendida como fotones que, en este caso, interactúan con moléculas que conforman un flujo no viscoso que solo permite transmitir calor por radiación, disipa energía en las proximidades a una superficie tal que $\theta_w > \theta_0$, en el sentido de que elimina el salto de temperatura dado por *radiation slip* tras haber recorrido el flujo no viscoso una menor distancia adimensional que en el caso de que $\theta_w < \theta_0$. El motivo radica en que, en una superficie caliente, una mayor cantidad de fotones excitan las moléculas cercanas a la misma, de manera que son menos los fotones que llegan a excitar las moléculas que se encuentran, en medio del flujo, y en las proximidades de la superficie fría que enfrenta. En consecuencia, dado que menos fotones excitan dichas moléculas adyacentes a la placa fría, y no existe conducción de calor, no es posible eliminar el salto de temperaturas tan rápidamente como en la zona adyacente a la placa caliente, en la cuál termina produciéndose una disipación de energía que [7] tiende a incrementar el flujo de calor de la placa al fluido, similar a la que se ha comentado en el caso de espesor óptico grueso.

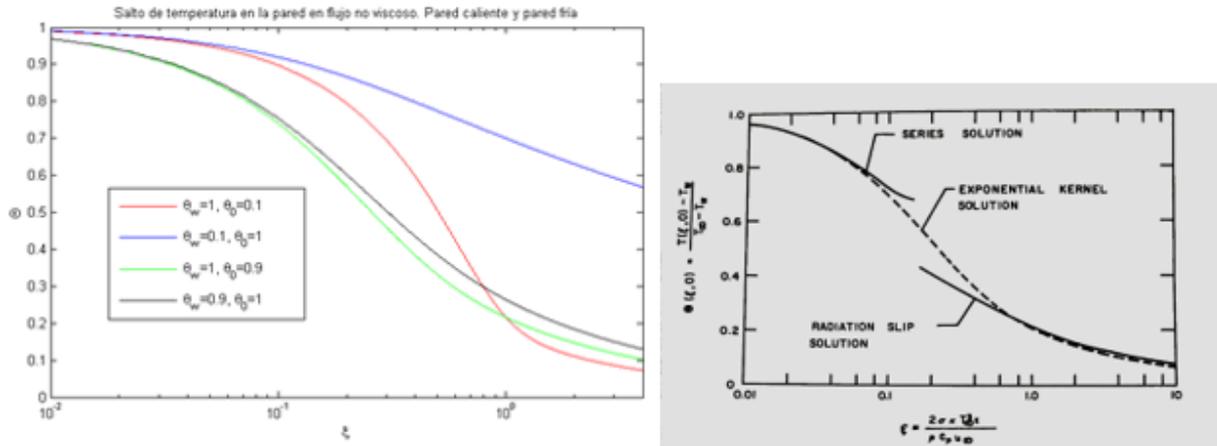


Figura 33: salto de temperatura en la pared en flujo no viscoso. Pared caliente ($\theta_0 = 0.1$; $\theta_0 = 0.9$) y pared fría ($\theta_w = 0.1$; $\theta_w = 0.9$). Comparación con resultados análogos para radiación lineal [4]

Por otra parte, si $\theta_w/\theta_0 \rightarrow 1$ se comprueba cómo el salto de temperaturas se asemeja al salto que se calcula en [4] haciendo la hipótesis de radiación lineal, tal que:

$$T^4 \approx 4 \cdot T_\infty^3 \cdot T - 3 \cdot T_\infty^4 \quad (4.8)$$

El motivo por el que el salto de temperatura en la pared caliente disminuye aproximadamente al mismo nivel que el salto de temperatura en el caso de $\theta_w/\theta_0 \rightarrow 1$ radica en que, al igual que en las proximidades de la pared caliente, los fotones reciben cierta energía, aunque esta vez proveniente en igual medida de las dos placas, por lo que se favorece una continuidad del campo de temperaturas. Por tanto, (4.8) es aplicable mientras el medio donde se estudie su posible aplicabilidad esté sometido a un incremento de temperaturas lo suficientemente pequeño para estimar que la cuarta potencia de la temperatura varía linealmente con la temperatura.

Cabe destacar que el resultado original se amolda mejor a las curvas correspondientes a *series solution* y a *exponential kernel solution*, antes que a *radiation slip*, curvas cuyas expresiones pueden consultarse en “[4]”. El motivo reside en que las dos primeras involucran las integrales exponenciales, empleadas para modelar la absorción de radiación emitida, bien por las placas, o bien por las moléculas del medio, primando los efectos de primer orden, que son los que ampliamente se están teniendo en cuenta en este trabajo. En cambio, la solución de *radiation slip* a la que hace referencia “[4]” tiene que ver con la hipótesis *thick*, ya que, como veremos, dicha hipótesis consigue reducir dicha discontinuidad. Esta referencia la implementa en fluido ideal a través de:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{8}{3} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} \quad (4.9)$$

Para ilustrar mejor el rango de aplicación, no solo de esta hipótesis, sino también de la correspondiente a espesor óptico delgado, se presentan a continuación una serie de gráficas que ilustran todas ellas la solución general para un flujo ideal, así como las soluciones para ambas hipótesis, para espesor óptico y parámetro N_{cr} variables.

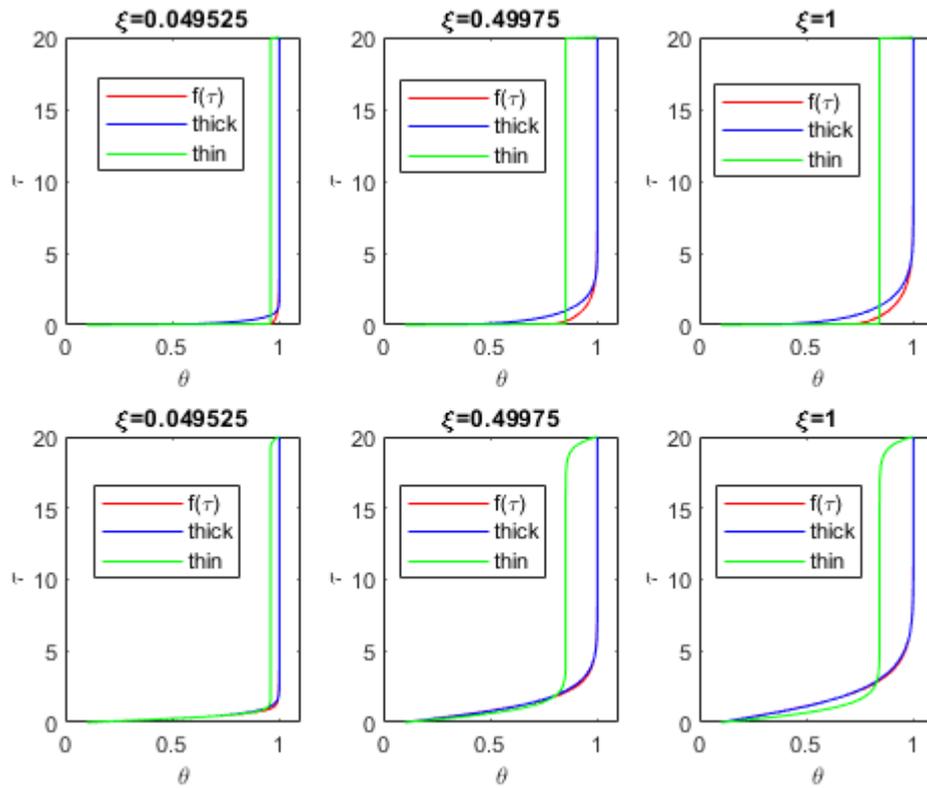


Figura 34: distribución de temperaturas para flujo no viscoso con $Ncr=0$ (a, b y c), y con $Ncr=1$ (d, e y f); para tres posiciones en la placa plana, hasta $\xi=1$, $Nxi=2000$, y para $\tau=20$

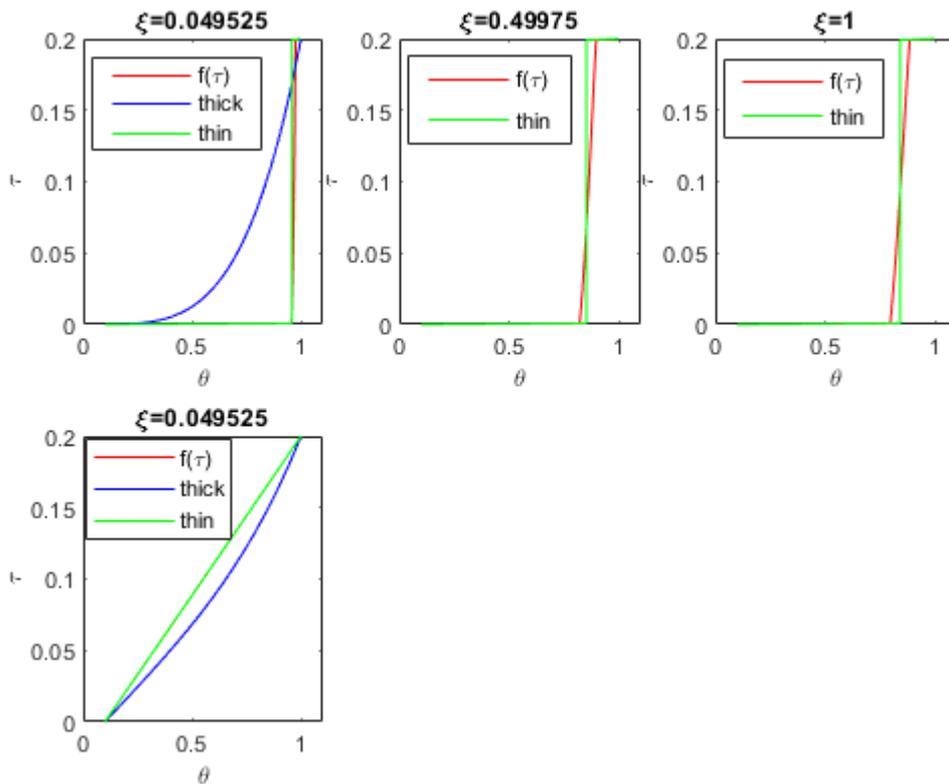


Figura 35: distribución de temperaturas para flujo no viscoso con $Ncr=0$ (a, b y c), y con $Ncr=1$ (d); para tres posiciones en la placa plana, hasta $\xi=1$, $Nxi=2000$, y para $\tau=0.2$

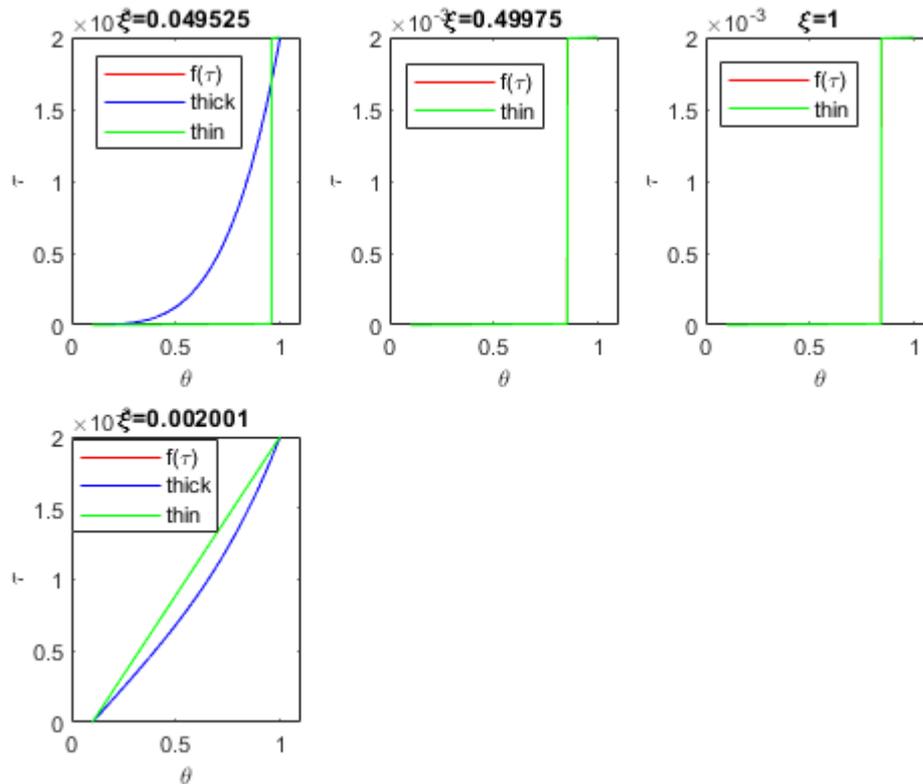


Figura 36: distribución de temperaturas para flujo no viscoso con $Ncr=0$ (a, b y c), y con $Ncr=1$ (d); para tres posiciones en la placa plana, hasta $\xi=1$, $Nxi=2000$, y para $\tau=0.002$

Desde un punto de vista físico, [4] e independientemente de que se aplique o no la hipótesis de espesor óptico grueso o hipótesis *thick*, el transporte de energía radiativo (dirección vertical)-convectivo (dirección longitudinal) resulta en la formación de una capa límite térmica adyacente a la placa plana, de manera que los gradientes de temperatura se encuentran confinados en esta zona. Como puede apreciarse en la Figura 34, el requisito para que el modelo general recoja dichos gradientes es un gran espesor óptico, que en este trabajo se toma como $\tau=20$. Por otro lado, recordando (2.50), $\tau \gg 1$ radica en $\lambda_p \ll 1$, para que cada molécula le pueda transmitir su energía a su vecindad, y se pueda generar dicha distribución de temperatura. En consecuencia, estos gradientes también pueden reproducirse a través de la hipótesis *thick*, tratada en este trabajo, junto con la hipótesis *thin*, para el caso de flujo ideal en el apartado 3.3.1. Dado que la hipótesis *thick* constituye una aproximación por difusión, su radio de aplicación se amplía hasta $\xi \gg 1$, especialmente cuando $Ncr=1$, ya que incorporar al modelo general conducción de calor refuerza la transmisión de energía por difusión. Esta idea se torna más decisiva si cabe en el marco de las capas límite viscosas, donde por definición de la viscosidad de un fluido, se transmite energía por conducción.

De momento, en la Figura 34, con flujo ideal y $Ncr=1$, cuando $\xi=1$, la desviación de la hipótesis *thick* no supera el 1% respecto al caso general. Del mismo modo, la aproximación por difusión permite que, efectivamente, el salto de temperatura que refleja *radiation slip* sea menor, y que prácticamente desaparezca conforme avanzamos en el flujo. En cambio, en las primeras estaciones, la aplicabilidad de esta hipótesis se reduce ligeramente. En las otras dos gráficas se aprecia también que, conforme se reduce el espesor óptico, la hipótesis *thick* no permite capturar el comportamiento térmico del fluido, incluso aunque se incremente Ncr . De hecho, para $\tau=0.2$ y $\tau=0.002$, el flujo resuelto con hipótesis *thick* alcanza el régimen estacionario mucho antes de alcanzar $\xi=1$. Por tanto, la primera conclusión de este trabajo es que el espesor óptico supone la primera variable a determinar para pasar de hipótesis *thick* a *thin*. No en vano, en la Figura 35, puede verse que el flujo general parece adaptarse mejor a la hipótesis *thin* cuando $\tau=0.2$, sobre todo en las primeras estaciones. Cuando $\tau=0.002$, el flujo general se adapta a la hipótesis *thin* con una desviación de menos del 0.1%. La segunda conclusión, como puede verse en la Figura 34, es que Ncr , modula cuánta distancia recorre el flujo general para comportarse según la hipótesis *thick*. En los siguientes apartados se va en esta dirección, en el marco de las capas límite viscosas.

4.3 Flujo viscoso. Capa límite *thin*. Revisión de la capa límite *thick*

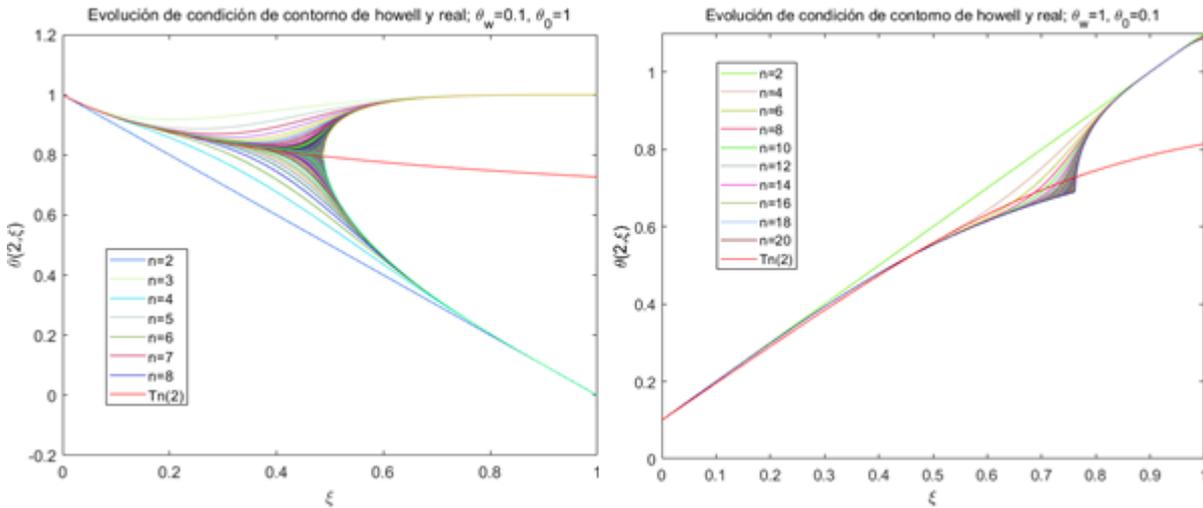


Figura 37: comparación entre segunda componente del vector de temperaturas del flujo ideal designado, y condición de contorno exterior de Howell para el caso específico de hipótesis *thin* en capas límite viscosas

A continuación, se comentan los resultados que involucran a la distribución de temperaturas en las capas límite viscosas, estando aplicada la hipótesis *thin*. También se revisa la capa límite *thick*, resuelta esta vez en función de (3.56). Al igual que, previamente, la componente del vector de temperatura cercana a la placa debía expresarse a través de (4.7), esta vez, es el vector de temperatura completo lo que debe expresarse en función de dicho cambio de variable, para comparar con los resultados de [4]:

$$\Theta(\xi, \eta) = \frac{T(\xi, \eta) - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{\theta(\xi, \eta) - \theta_w}{\theta_\infty - \theta_w} \quad (4.10)$$

En la Figura 37 puede apreciarse la relativa exactitud con la que la condición de Howell sigue la condición de contorno correspondiente al flujo no viscoso no conductivo que se toma como flujo exterior a la capa límite viscosa. Concretamente se toma la segunda componente. Como se comentaba en el apartado 3.3.3, cuando el espesor óptico es delgado, la capa límite deja pasar la mayor parte de la radiación térmica, entrando en juego la energía radiada por las placas, y la propia emisión del medio, sin ser atenuadas por éste. Se recuerda además que el parámetro conducción-radiación, en este contexto, conviene que tome valores tal que $N_{cr} \ll 1$, para evitar cualquier indicio de difusión que implique alejarnos del caso *thin*. Por tanto, estando a merced de la exactitud del método numérico empleado, el espesor óptico de la capa límite que no puede ser más delgada se correspondería con la segunda componente del flujo ideal exterior. De este modo, es posible comparar esta componente con la condición de Howell, la cual, para este trabajo, se iteró unas 1000 veces para lograr una aproximación lo más exacta posible:

```

%iteramos condición de contorno de howell
thetaccnml=Tinf*ones(1,Nxi);
for n=2:1000
thetaccn=Tinf*ones(1,Nxi)+(Tw^4-thetaccnml.^4).*xi;
thetaccnml=thetaccn;
% figure(1)
% plot(xi,thetaccn,'color',rand(1,3));
% legend(['n=2'], ['n=3'], ['n=4'], ['n=5'], ['n=6'], ['n=7'], ['n=8']);
% hold on
end

```

Figura 38: código que implementa la condición de contorno de Howell

Para que conste, en la pared fría se ha mostrado cómo son las iteraciones de “n” impar y “n” par. Puede verse, tanto para pared caliente como para pared fría, que la aproximación es válida hasta $\xi \sim 0.5$. Sabiendo (3.56), y estimando tal que $\rho = 1.223 \text{ kg/m}^3$, $C_p = 1005 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, $T^* = 289 \text{ K}$, $\beta = 0.5$, $L_c \sim 1 \text{ km}$. En función de

la aplicación ingenieril en la que estemos interesados en aplicar estas estimaciones, puede valorarse si durante unos 500 metros es deseable que el flujo se comporte con espesor óptico delgado.

$\eta \setminus \xi$	100, Ncr<<1	100, Ncr=2	500, Ncr<<1	500, Ncr=2	1000, Ncr<<1	1000, Ncr=2
100	0,17777416605	0,17777416604	0,65482314726	0,65482314726	0,81982181382	0,81982181382
300	0,14950362516	0,14950362516	0,34892879892	0,34892879892	0,60058214654	0,60058214654

Tabla 4: comparación de la distribución de temperaturas θ en algunas estaciones de la capa límite de espesor *thin* en el caso de $Ncr \ll 1$ y de $Ncr=2$

En el apartado 4.1 había interés en dar valores diferentes a Ncr para saber cómo el flujo de temperaturas evolucionaba con η_v en una capa límite con espesor óptico grueso. De la misma forma, también es interesante hacer lo mismo en una capa límite con espesor óptico delgado. De ahí la razón de ser de la Tabla 4: vemos que, en este último caso, por más que aumentemos Ncr , la evolución es la misma en las componentes escogidas. Efectivamente, la hipótesis sobre el espesor óptico determina la dependencia con el parámetro Ncr . Así mismo, la hipótesis sobre el espesor óptico sería más o menos acertada según el valor de τ en la ecuación de la energía general del flujo, en este caso, de la capa límite, como se deja entrever al final del apartado 4.2.

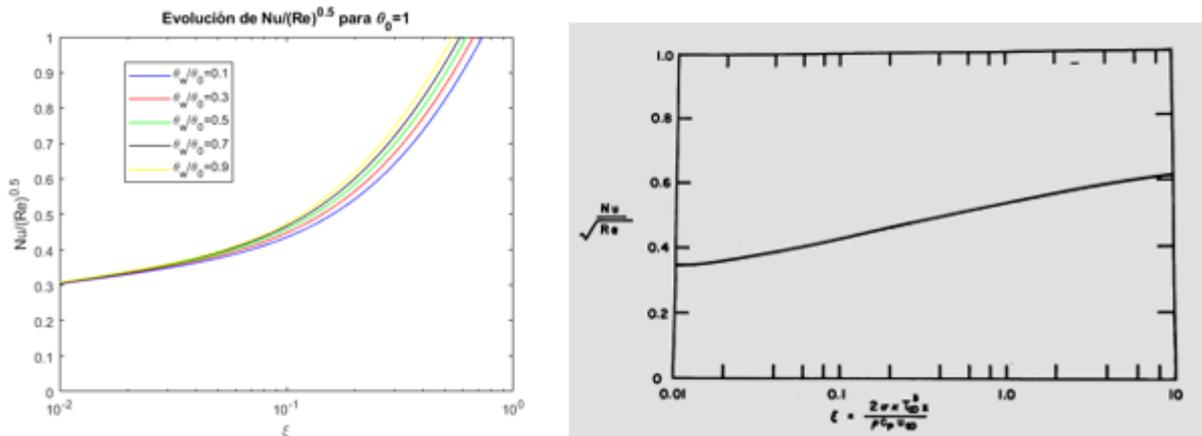


Figura 39: evolución de $\frac{Nu}{\sqrt{Re}}$ con ξ para pared fría. Comparación con [4]

Para pared caliente no se obtienen curvas tan estables como las que se muestran en la Figura 39. No se descarta que, en ese caso, al igual que se comentó en el contexto de la capa límite de espesor *thick*, sea necesario tomar alguna consideración cerca de la placa, como, por ejemplo, relajar la hipótesis *thin*, y plantear la posibilidad de que el medio pudiese ser participativo, debido a la energía puesta en juego. Volviendo a la Figura 39, cabe destacar la veracidad del resultado hasta $\xi = 0.1$, valor longitudinal que se encuentra dentro del rango en el que la condición de contorno de Howell era realista. Como se muestra en el apartado 4.4, hasta ese punto la solución que relaja las hipótesis *thin* y *thick* se adapta muy bien a la solución *thin* si el valor de Ncr es adecuado.

Por otro lado, merece la pena verter unos comentarios acerca de las implicaciones físicas para la capa límite ópticamente delgada. Como puede verse en la Figura 39, para $\xi \ll 1$, [4] el valor límite de $Nu/\sqrt{Re} \sim 0.332$, y representa un intercambio de energía de radiación despreciable. Ello es lógico, sabiendo que, por (1.11), ξ es una medida relativa de la proporción de la radiación frente a la convección en capas límite viscosas. Por tanto, las primeras estaciones dejan a la convección como el modo dominante. Más adelante, la convección pierde terreno de forma cualitativa, dando lugar a un balance entre conducción y radiación. Según [4], la máxima transmisión de calor por conducción que podría lograrse con el intercambio de calor por radiación puede ser del doble respecto a la conducción de las primeras estaciones. Tal afirmación no se puede verificar con el resultado original, ya que a partir de $\xi = 0.1$ se reduce la aplicabilidad de la hipótesis de espesor óptico delgado. En la Figura 46 se realizan estas reflexiones sobre Nu/\sqrt{Re} frente a ξ para pared caliente y fría y cada hipótesis.

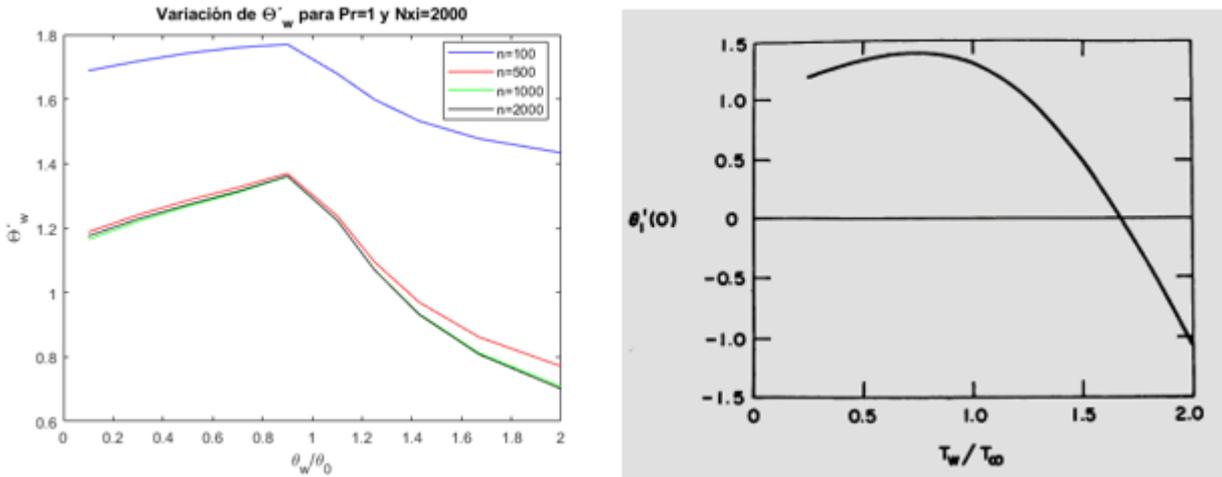


Figura 40: evolución que describe el gradiente de temperaturas Θ'_w en función de θ_w/θ_0 para cuatro estaciones diferentes de la placa plana. Comparación con [4].

Respecto a la variación de Θ'_w en función de θ_w/θ_0 (una vez que se adimensionaliza cociente y denominador por la temperatura de referencia), cabe destacar que el resultado original calcula la capa límite para obtener ese resultado hasta $\xi=1$. El motivo es que, en la Figura 39, se demuestra que más allá de $\xi=1$ el resultado no reproduce la gráfica en [4], por lo que la comparación se prefiere realizar hasta el punto donde el resultado es fiable. Dicho esto, la Figura 40 se obtiene calculando en primer lugar Θ'_w según $\theta_0 = 1$, y dándole valores cada vez más grande desde 0.1 a θ_w ; y luego según $\theta_w = 1$, y dándole valores cada vez más pequeños desde 0.9 a θ_0 . Vemos que el máximo incremento de conducción ocurre entre $\theta_w/\theta_0 \sim 0.5$ y 1. Según avanzamos en la placa, los gradientes, en general, tienden a disminuir, sin que tenga alguna incidencia el valor de Ncr, a diferencia del caso *thick*. En el resultado original, el gradiente no lleva a ser negativo, si bien la tendencia es que, conforme avanzamos hacia un ξ mayor, los gradientes tiendan a ser negativos. Es decir, la presencia de la radiación produce un incremento o un decremento de conducción según el valor de θ_w/θ_0 , fruta de las no linealidades presentes.

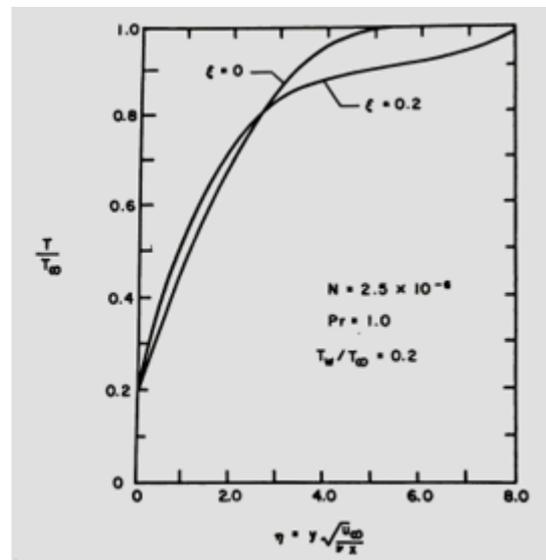
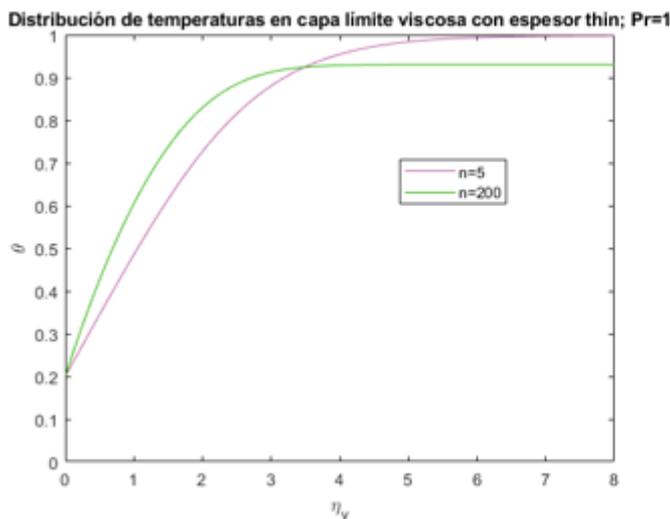


Figura 41: comparación de la distribución de temperaturas en capa límite viscosa con espesor *thin*, con $Pr=1$ y con $Nxi=2000$ resuelta con códigos originales y con consideraciones expuestas en [4]

En la Figura 41 podemos apreciar la capa límite térmica para dos estaciones situadas al principio de la placa plana: para $n=5$ y para $n=200$. En el primer caso, $\xi \ll 1$, y en el segundo, $\xi=0.1$. En virtud de la condición de Howell por la que se opta en este trabajo para reproducir la condición de contorno exterior para el caso *thin*, que emplea [5], se tiene que el flujo evoluciona de manera análoga a cómo evoluciona en [4]. La temperatura exterior de la capa límite evoluciona desde la temperatura en el infinito hasta una temperatura que se acerca a la temperatura de la pared. Llegados a este punto, cabe destacar que el salto de temperaturas que ocurre en la pared en el flujo ideal nos permite, dentro del orden en el que se trabaja en este proyecto, poder relacionarlo con la

condición de contorno exterior de la capa límite que relaja hipótesis. De esta manera, se evita unas ligeras desviaciones que la Figura 41 muestra para la referencia [4] cuando η alcanza las condiciones exteriores.

Para el siguiente apartado, es necesario recalcular el flujo de temperaturas para el caso *thick* en función de las mismas variables τ y ξ con el propósito de comparar dichos resultados con aquellos que se obtienen con hipótesis relajadas. Como puede verse, los resultados son idénticos al caso *thick* en función de η y ξ , con igual número de componentes verticales y horizontales en el método numérico.

$n(\tau \text{ ó } \eta) \backslash n(\xi)$	100(con τ)	100(con η)	300(con τ)	300(con η)	1000(con τ)	1000(con η)
100	0,8674662645662	0,8674662645665	0,5662610141026	0,5662610141032	0,4462613819049	0,4462613819061
300	0,9999560087605	0,9999560087605	0,9513512970244	0,9513512970245	0,8590854875565	0,8590854875567

Tabla 5: comparación de la distribución de temperatura θ en capa límite viscosa *thick* para algunas estaciones resuelta en función de τ y ξ (ver apartado 3.3.4); y resuelta en función de Re y η (*script 1*)

4.4 Flujo viscoso. Condiciones para asumir un límite óptico. Conclusiones

En este apartado se pretende una síntesis de las conclusiones más importantes en convección forzada en términos de τ , N_{cr} y espesor físico η . Comenzamos por describir el flujo ideal. Se decide $\tau_0 = 20$, pared fría ($\theta_w = 0.1, \theta_0 = 1$), $N_{xi}=2000$ y $N_{tau}=1000$ en *script 2*. Se muestra la segunda componente de θ de todas las estaciones en ξ de dicho flujo en la Figura 37. Se guardan los resultados de θ para cada τ_j y cada ξ_i de la malla en 'thetaccideal20fria.mat', ver *script 4*. Dicho esto, se muestran ahora resultados análogos a los que se muestran en el apartado 4.2 con flujo ideal. Éstos tenían la razón de ser de justificar que la hipótesis depende de τ , y la evolución del flujo en función de la conducción de calor depende de N_{cr} . La Tabla 4 iba en la misma línea. Esta vez, el propósito es demostrar que en la capa límite con espesor óptico variable ocurre lo mismo, con el matiz de que este flujo conduce calor siempre. En consecuencia, las condiciones de espesor óptico delgado se ven comprometidas conforme el flujo avanza a lo largo de la placa, sea cual sea el valor de N_{cr} .

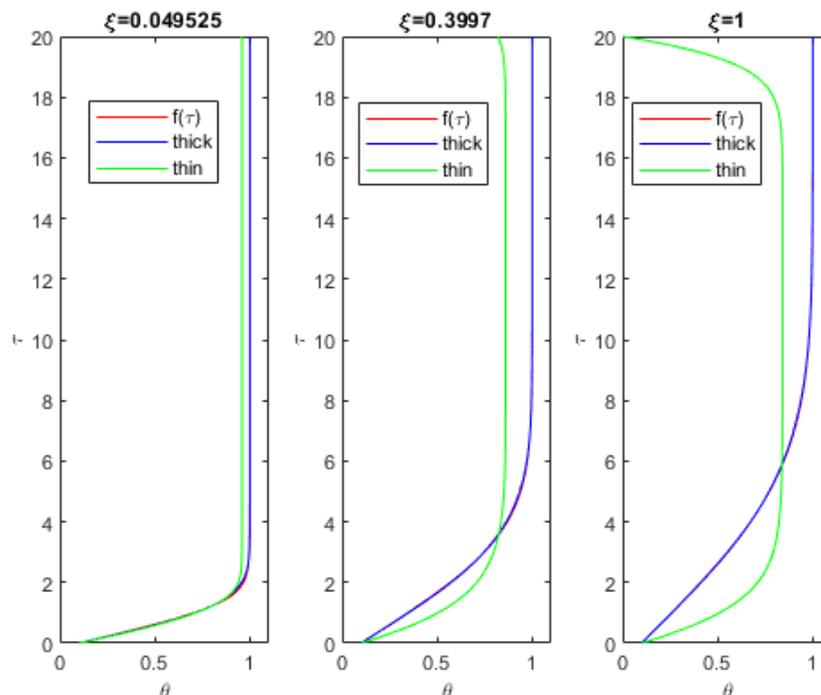


Figura 42: distribución de temperaturas en función de τ de las tres posibles soluciones originales, relajando hipótesis ($f(\tau)$), hipótesis *thick* e hipótesis *thin* para $N_{cr}=2$, $N_{tau}=1000$ y $N_{xi}=2000$. En este caso se produce en torno al 0.01% de error entre flujo general y *thick* en $\xi=1$, ópticamente cerca de la placa

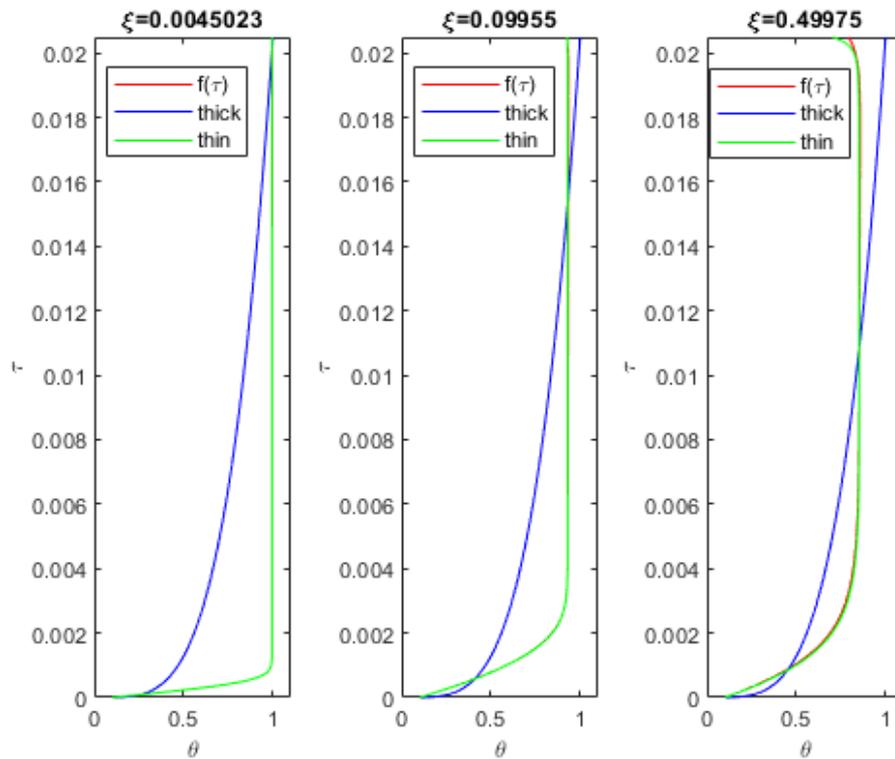


Figura 43: distribución de temperaturas en función del espesor óptico de $f(\tau)$, *thick* y *thin*, para $N_{cr}=2 \cdot 10^{-6}$, $N_{\tau}=1000$ y $N_{xi}=2000$. En este caso se produce menos del 0.01% de error entre flujo general y *thin* en $\xi=0.0045023$.

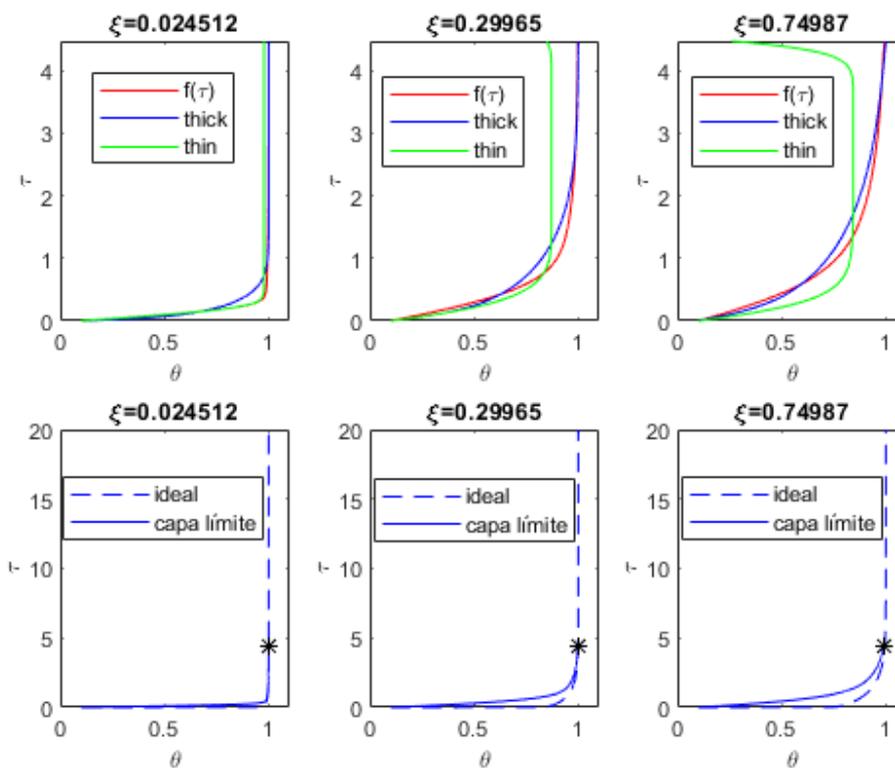


Figura 44: distribución de temperaturas en función del espesor óptico de $f(\tau)$, *thick* y *thin* para $N_{cr}=0.1$, $N_{\tau}=1000$ y $N_{xi}=2000$; y superposición con la distribución de temperaturas de flujo ideal

De esta forma, [10] a medida que crece $\xi \ll 1$, la radiación tiende a reducir la temperatura en la capa límite y un gradiente de temperaturas se genera en la placa. La magnitud de dicho gradiente de temperaturas se controla por un balance entre el flujo de radiación desde la placa y el flujo de calor por conducción hacia la superficie. En esencia, para pequeños valores de ξ , y como se comenta anteriormente, se cumple la hipótesis de espesor óptico delgado, mientras que para $\xi \sim O(1)$ o mayor que uno, el flujo se asemeja a la hipótesis de espesor óptico grueso, ya que se da más espacio y distancia para que las partículas absorban la energía de los fotones, se exciten y se produzca difusión de energía. Esta conclusión es la misma que se extrae de flujo ideal, si bien, para un mismo valor de N_{cr} , el flujo necesita una mayor ξ , así como un τ grande, para que se alcance un nivel de difusión que case con la hipótesis por la ausencia de la capa límite. Evidentemente, el valor del espesor óptico predispone la opacidad de la capa límite frente a la radiación, y el valor de N_{cr} , si se alcanzan las condiciones ópticamente gruesas para un valor grande o pequeño de ξ . Pero la evolución que los perfiles de temperatura tienen a lo largo de la placa son independientes de las condiciones del experimento.

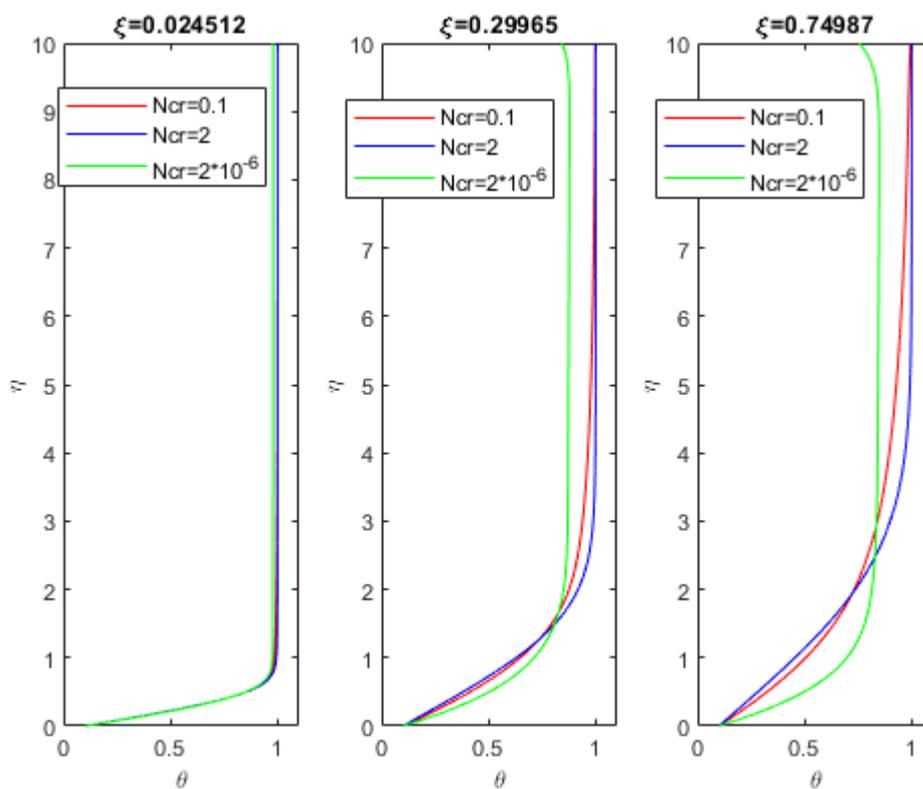


Figura 45: distribución de temperaturas en función de η de $f(\tau)$ para los tres valores típicos de N_{cr} , $N_{\tau}=1000$ y $N_{\xi}=2000$

A continuación, se comenta la Figura 45, que versa sobre la evolución del espesor físico de las capas límite. A ese respecto, huelga decir que, para las estaciones más tempranas, la evolución, como puede verse, es similar. Para las siguientes estaciones, se aprecian dos ideas. La primera es que el espesor físico para hipótesis *thin*, es decir, $N_{cr} \ll 1$, es cualitativamente menor que el espesor físico para hipótesis *thick*, es decir, para $N_{cr} \gg 1$, y relajando hipótesis, porque, si bien en la capa límite *thin* los fotones pasan de largo con más frecuencia sin ser absorbidos por las partículas fluidas, se transmite energía en forma de radiación unos órdenes superior a la energía transmitida en forma de conducción, de forma que el flujo alcanza la temperatura exterior cuando aún hay partículas fluidas que no han alcanzado la velocidad U_{∞} ideal (ver apartado 1.2). En cambio, el espesor físico para hipótesis *thick* es mayor, porque, esta vez, la energía por radiación se admite que se propaga por difusión, de manera que las partículas fluidas excitan por contacto a sus vecinas y la transmisión de energía se produce de una manera más suave. En este caso, cuando las partículas circulan a velocidad U_{∞} ideal, aún no han

alcanzado la temperatura exterior, que, por tener la capa límite un espesor óptico grande, tiende a ser T_∞ . La conclusión, por tanto, para $Ncr \ll 1$ es que la radiación se revela como un eficiente mecanismo de transmisión de energía.

Esta idea puede verse desde otro punto de vista. Según (3.31), Si $Ncr \rightarrow \infty$, es decir, si se tiene conducción pura, $\delta_T/L \sim Re^{-1/2} Pr^{-1/2} \ll 1$. Pero, si $Ncr \rightarrow 0$, es decir, si tenemos tanto conducción como radiación, y cada vez se le otorga más importancia a la radiación, δ_T/L crece. Aparentemente, si $Ncr \ll 1$, δ_T/L es mayor que en el caso *thick*. Sin embargo, (3.31) es válida solo para condiciones *thick*, de tal forma, que usarla para $Ncr \ll 1$ implica admitir que la energía por radiación térmica se comporta, en general, de manera difusiva, afectando solo a la vecindad de las partículas fluidas, cuando, en realidad, como se puede ver, es mucho más energética si $Ncr \ll 1$. Por tanto, admitiendo Pr del orden unidad, según la Figura 26 y Figura 45 los órdenes de magnitud quedan, en función de los valores de Ncr :

$$\delta/L \text{ (mecánica)} \sim \delta_T/L \text{ (} Ncr \rightarrow \infty) < \delta_T/L \text{ (} Ncr \sim O(1)) < \delta_T/L \text{ (} Ncr < 1 \text{ si } thick) > \delta_T/L \text{ (} Ncr \ll 1) \quad (4.11)$$

Dicho de otro modo, cuando el parámetro Ncr se aleja de situaciones propicias para que se dé difusión térmica en el medio, y la radiación es varios órdenes más importantes que la conducción, entonces la radiación térmica se convierte en un eficiente mecanismo de transmisión de energía, al ser δ_T/L menor que si se diese difusión térmica.

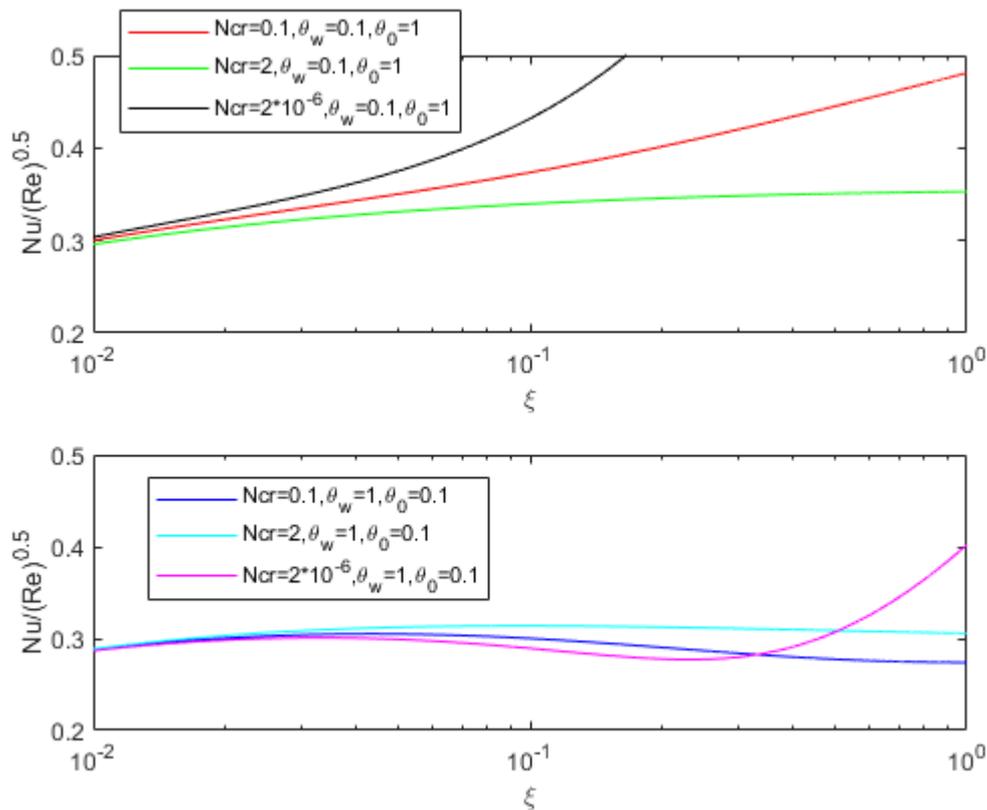


Figura 46: evolución de $\frac{Nu}{\sqrt{Re}}$ con ξ en el caso de pared fría y pared caliente, y los tres valores típicos de Ncr

Por otro lado, en la Figura 46, se pretende realizar un análisis similar al de la Figura 39. ¿Cómo varía cualitativamente la transmisión de calor por conducción a la placa (en caso de placa fría), y la transmisión de calor por conducción desde la placa (en caso de placa caliente)? En el primer caso, vemos que, si el medio es ópticamente grueso, la transmisión de calor por conducción a la placa crece lentamente. Conforme se reduce Ncr y pasamos a espesor delgado, la transmisión de calor por conducción crece más claramente. En el segundo caso, vemos que la transmisión de calor por conducción tiende incluso a disminuir conforme se reduce Ncr .

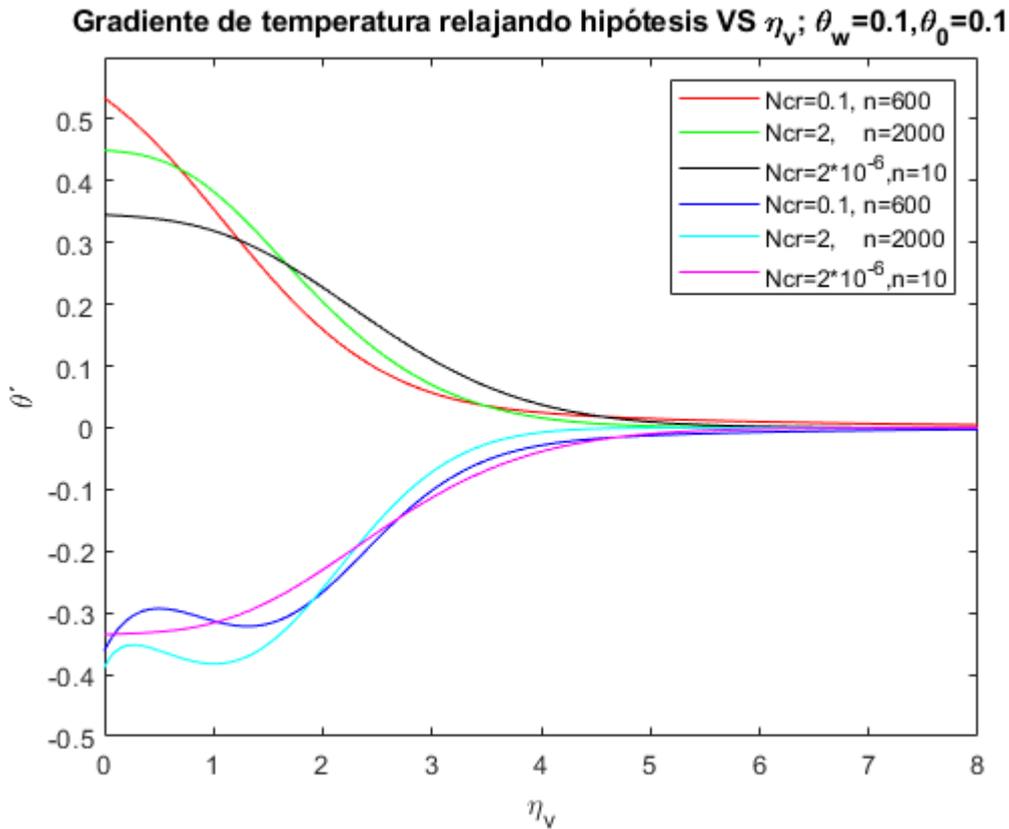


Figura 47: gradiente de temperaturas frente a η_v calculado a partir de $f(\tau)$ en las estaciones indicadas en la leyenda, para los valores típicos de N_{cr}

Finalmente, la Figura 47 pretende analizarse basándonos en la Figura 28 anterior. Por un lado, vemos que, para pared fría, se reproduce con cierta exactitud las curvas correspondientes. Sin embargo, para pared caliente, las curvas son notoriamente diferentes. Como se comenta en el apartado 4.1, aparentemente con pared caliente debe corregirse el flujo de radiación, porque se acentúa la discontinuidad propia del flujo con espesor óptico cercano a la placa.

Aquí concluye el apartado 4, así como las reflexiones sobre convección forzada. En el apartado 5 no se pretende añadir más información sobre convección forzada, sino realizar un estudio introductorio sobre convección libre del medio típico de este proyecto con espesor óptico grueso. En el apartado 6 se escribirá una síntesis de las conclusiones más importantes del proyecto.

5 Efectos de la radiación térmica en convección libre. Espesor óptico grueso

Como se ha podido comprobar, el núcleo de este trabajo es la radiación en convección forzada. Sin embargo, los métodos numéricos sencillos que se vienen aplicando a lo largo del proyecto son igualmente aplicables a la radiación en convección natural. Además, ofrecen las mismas posibilidades de generalización a otras formas que en convección forzada. Dicho esto, para cerrar este trabajo fin de grado, se estima interesante realizar un estudio similar al que se lleva a cabo en [8], pero en convección libre. Ello nos da la oportunidad de apreciar las semejanzas entre ambos resultados, por tratarse de flujos de medios ópticamente gruesos.

También se distingue entre un perfil de temperaturas, de velocidades, o de cualquiera de los parámetros que se muestran a continuación, con conducción pura, y para valores diferentes de N_{cr} . También se estudia el efecto de dos Pr diferentes, $Pr=1$ y $Pr=100$. Los resultados que se muestran en este apartado son originales, si bien, las consideraciones sobre los mismos están basados en el trabajo fin de grado [6]. Para que conste, sabiendo que [6] $Ra \sim 10^9$ cuando se produce la transición a la turbulencia; $Gr = 5.092 \cdot 10^6$, y $Pr=100$; con todo, $Ra < 10^9$.

Comenzamos por la Figura 48 y la Figura 49. Como se comenta en el apartado 4.1, así como en [8], las diferencias entre los flujos puramente conductivos, y los flujos que involucran conducción, así como radiación, son muy exiguas mientras $N_{cr}=10$. Para que conste, en el anexo puede verse el *script 5*, que calcula el perfil de temperaturas para el caso ópticamente grueso en convección libre. Si se eliminase C (término no lineal), y se mantuviesen el resto de las condiciones de contorno especificadas en el apartado 3.4, tendríamos el código usado para obtener los resultados puramente conductivos (equivalente a darle un valor muy grande a N_{cr}). Por otro lado, cuando $Pr=100$, puede verse que el espesor físico de la capa límite térmica es más pequeño, tal y como se comenta en el apartado 1.2, ver (1.12). Se han encontrado, así pues, dos formas de reducir el espesor físico de la capa límite térmica: reduciendo N_{cr} o subiendo Pr . Precisamente, en el caso en el que $Pr=100$, se emplea un valor de η_{max} sin Pr para no cortar el perfil de velocidades. Cabe destacar además cómo las velocidades dependen de las temperaturas de la estación anterior. Véase también, el valor negativo que toma “ v ” en un principio. Pero es simplemente el flujo que se acerca a la placa en convección natural a lo largo de la dirección longitudinal.

En cuanto a la Figura 50, las curvas se representan en $\xi=1$, y tenemos el siguiente cambio de variable a realizar:

$$\theta(\xi, \eta) = \frac{T(\xi, \eta) - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}} = \frac{\theta(\xi, \eta) - \theta_{\infty}}{\theta_w - \theta_{\infty}} \quad (5.1)$$

Al mismo tiempo, la gráfica tiene como variable independiente:

$$\eta_{esc} = \frac{\eta}{\xi} \left(\frac{Gr}{4} \right)^{1/4} \quad (5.2)$$

De esta forma, nuevamente, podemos comprobar que si $Pr=100$, la capa límite es más estrecha; y si N_{cr} toma valores más próximos a un espesor óptico delgado, como $N_{cr}=0.1$, en teoría el espesor físico es mayor. Sin embargo, como se ha matizado en el apartado 4.4, ello solo ocurre cuando existe difusión en la capa límite. Si la radiación es varios órdenes más importante que la conducción, predominan las condiciones de espesor óptico delgado y el espesor físico es menor.

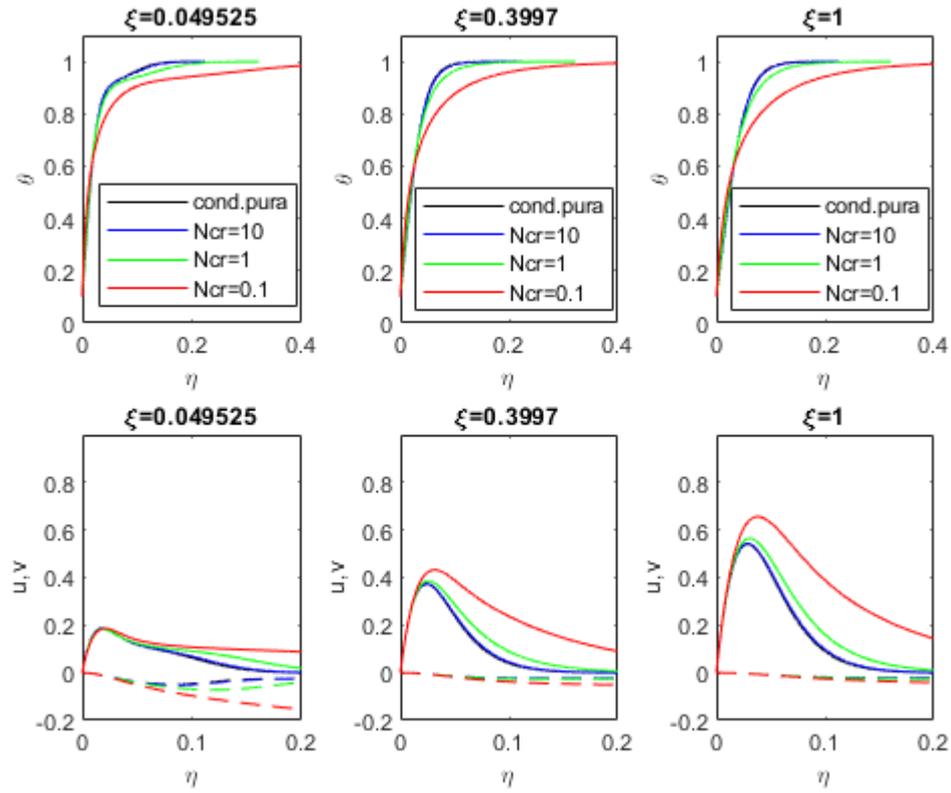


Figura 48: perfiles de temperatura adimensional θ , y perfiles de velocidad u y v , para tres estaciones diferentes de la placa plana, $Ncr = \{0.1, 1, 10, \infty\}$ y $Pr=1$

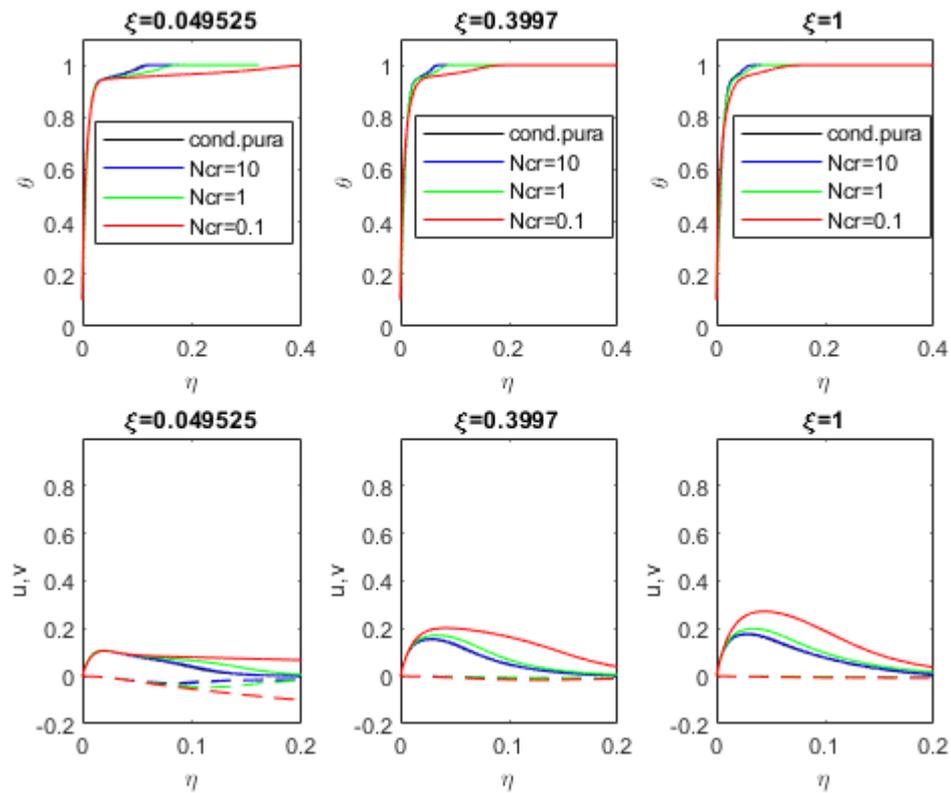


Figura 49: perfiles de temperatura adimensional θ , y perfiles de velocidad u y v , para tres estaciones diferentes de la placa plana, $Ncr = \{0.1, 1, 10, \infty\}$ y $Pr=100$

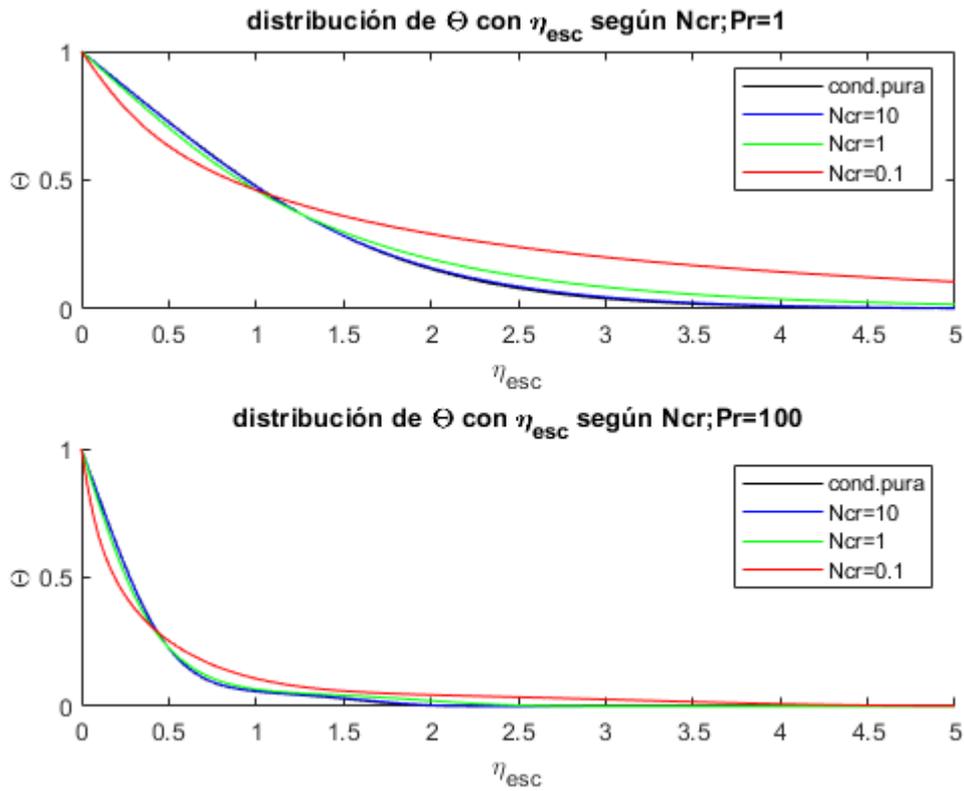


Figura 50: perfiles de Θ respecto a η_{esc} para $Pr=1$ y $Pr=100$, $Ncr = \{0.1, 1, 10, \infty\}$, y en la ultima estación de la placa plana, es decir, $\xi=1$

Respecto a la Figura 51, las curvas se representan nuevamente en la última estación de la placa plana. La variable independiente es nuevamente η_{esc} . Esta vez, se pretende representar la componente u de la velocidad, es decir, la que sigue la dirección longitudinal de la placa plana. Para ello, se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\frac{u}{2\sqrt{gx}} \cdot \sqrt{\frac{T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}}} = \frac{u}{2\sqrt{\xi}} \quad (5.3)$$

Nuevamente, se representa una variable que depende de la raíz de ξ . Uno de los propósitos del trabajo era resolver las ecuaciones sin necesidad de echar mano de cambios de variable que beben de las técnicas primigenias de resolución de capas límite. Lo que no quita que en ocasiones sea pertinente expresar una variable en función de la raíz de ξ para demostrar la aplicabilidad del código, como en este caso. De este modo, el resultado viene a ser que, para $Pr=100$, una capa límite térmica más estrecha repercute en un campo de velocidades que también es más estrecho. Eso sí, cuando $Ncr=0.1$, las velocidades de la convección son mayores, tanto para $Pr=1$ como para $Pr=100$.

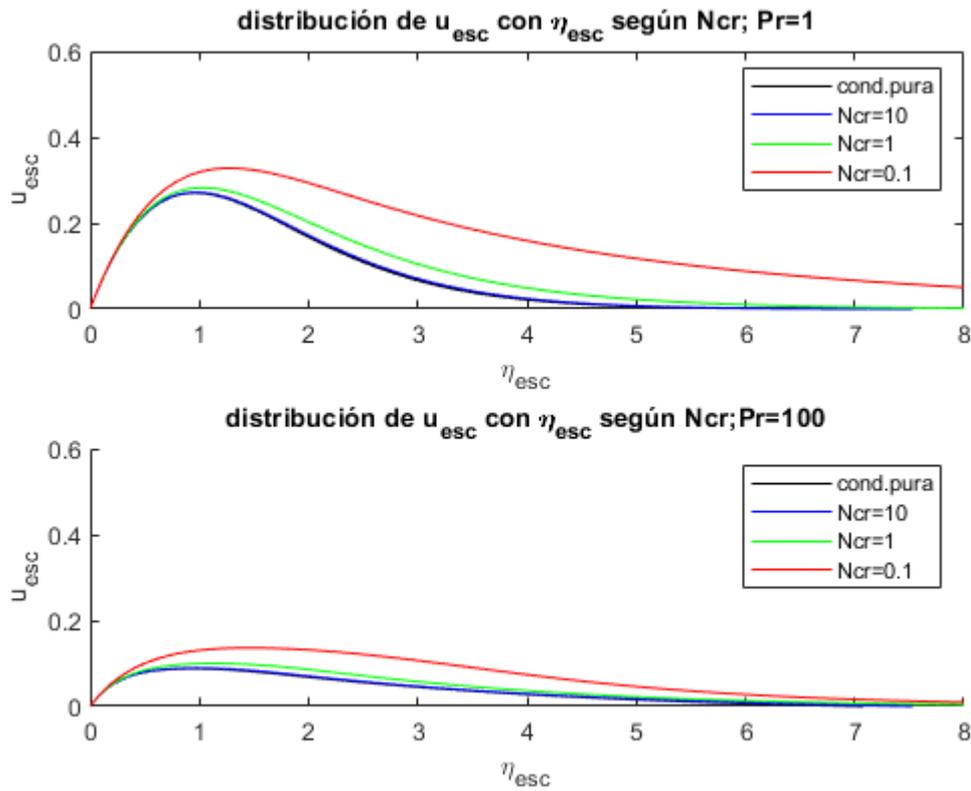


Figura 51: perfiles de u_{esc} respecto a η_{esc} para $Pr=1$ y $Pr=100$, $Ncr = \{0.1, 1, 10, \infty\}$, y en la última estación de la placa plana, es decir, $\xi=1$

Finalmente, en la Figura 52, se pretende representar el número de Nusselt local aplicado a la convección libre respecto a cada estación a lo largo de la placa plana vertical. Empleándose como variable de temperaturas (5.1), así como gradientes de temperatura en la placa plana, $Nu/Gr^{1/4}$ se mantiene en general bastante estable a lo largo de toda la placa plana, teniendo al principio un pequeño transitorio. Cabe destacar que cuando $Pr=100$, las curvas son inferiores, ya que, por estar en el denominador de Pr la difusividad térmica, la conducción de calor es más pequeña en este caso.

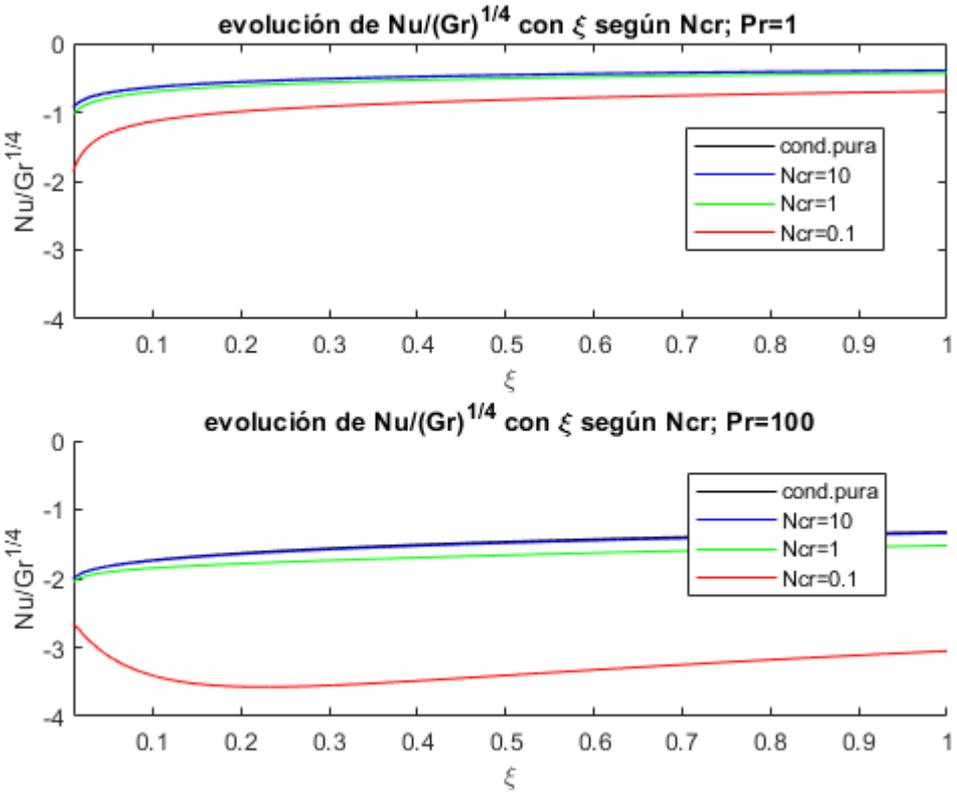


Figura 52: evolución de $Nu/Gr^{1/4}$ respecto a ξ , para $Pr=1$ y $Pr=100$, y $N_{cr} = \{0.1, 1, 10, \infty\}$

6 Motivación, conclusiones y futuras líneas

La motivación última que ha impulsado al autor de este proyecto a su realización es la comprensión de los fenómenos que ocurren en la reentrada en la atmósfera terrestre de una cápsula en régimen hipersónico, destacando efectos de compresibilidad, radiación térmica, e ionización. Una vez comprendida la magnitud de la empresa, se partió de trabajos ya existentes para estudiar efectos de la radiación térmica en capas límite, generadas por convección forzada (en régimen subsónico) y por convección libre. De esta manera, se pretende valorar esta aportación al departamento de Mecánica de Fluidos de la Universidad de Sevilla como parte de un conocimiento en continuo desarrollo que daría la oportunidad en futuros proyectos de comprender fenómenos con los que las agencias espaciales deben lidiar para, por ejemplo, permitir regresar a la Tierra misiones tripuladas en condiciones óptimas de seguridad, y con los que deberán lidiar para afrontar futuras misiones tripuladas a Marte, que también presenta una atmósfera.

Dicho esto, este trabajo fin de grado deja como conclusiones las siguientes:

- Tanto un flujo ideal como un flujo viscoso de materia llena de partículas, puede ser un medio ópticamente grueso u ópticamente delgado.
- Tanto en un flujo ideal como en un flujo viscoso a través de una placa plana, se repite el siguiente patrón: en las primeras estaciones de la placa plana el flujo tiende a filtrar la radiación porque los fotones aún no han tenido espacio para ser absorbidos, incluso aunque $\lambda_p \ll 1$; y en las siguientes estaciones, en general, los fotones cada vez serán absorbidos más frecuentemente. Esa es la razón por la que las figuras gráficas, que incluían perfiles de temperatura con los tres casos posibles, y proponía condiciones que favorecían la hipótesis thin, mostraban que, en las primeras estaciones, el flujo general se comportaba rápidamente como le correspondía; y las figuras gráficas que proponían condiciones que favorecían la hipótesis thick, mostraban que las últimas estaciones, era cuando el flujo general se comportaba como correspondía. Según si se transmitía el calor por conducción en cada caso, podía asemejarse más rápidamente. Por ejemplo, en la Figura 34 se muestra que, en flujo ideal, cuando $N_{cr}=1$, y se tenían condiciones thick, en las primeras estaciones, en el flujo general las partículas aún no transmitían calor por difusión tan claramente como en las últimas estaciones.
- En una capa límite mecánica se transmite por necesidad calor por conducción debido a su naturaleza física. La consecuencia de dicha naturaleza es un flujo confinado que hace que N_{cr} y τ dependan uno del otro. Al mismo tiempo, analizar la opacidad de la capa límite está directamente relacionado con el valor que toma el parámetro N_{cr} . En cambio, en flujo ideal, N_{cr} y τ son dos grados de libertad, y puede estudiarse por separado aquellos valores de N_{cr} que casan con según qué valores de τ . La regla general, es que, si un medio es ópticamente grueso, las partículas tienden a transmitir la energía de manera difusiva. Por tanto, si en dicho medio, se favorece la transmisión de calor por conducción, de manera indirecta el medio se comportará como ópticamente grueso. Eso es casar un alto valor de τ y de N_{cr} . En cambio, si un medio es ópticamente delgado, se favorece la transmisión de calor por radiación: esta se filtra por el medio. Para que eso sea posible, no es posible que se “tropiece” con partículas que se encuentre por su camino. En consecuencia, casan un valor pequeño de τ y un valor pequeño de N_{cr} .
- Finalmente, en caso de que $N_{cr} \ll 1$, es decir, la radiación tiende a filtrarse por un medio ópticamente delgado, la radiación se convierte en un óptimo transmisor de energía: el espesor físico es más pequeño, y puede hacer a su vez que la transmisión de calor por conducción se vea incrementada.

Finalmente, estas serían futuras líneas de trabajo:

- Programar códigos que contemplen flujo de radiación a través de medios ópticamente gruesos y delgados que bordeen figuras en 3D.
- Estudiar régimen hipersónico y ionización.
- Programar una condición de contorno en función del flujo de calor, en vez de la temperatura.
- Convección libre con medio que absorbe y emite, del mismo modo que se ha estudiado en convección forzada en este proyecto.
- Efecto de emisividades no unidad, y de dispersión, en capas límite.
- Modelar de manera sinérgica las dos regiones en las que se divide un flujo viscoso, capa límite y flujo ideal, de tal forma, que una capa límite en condiciones de espesor óptico delgado se corresponda con un flujo ideal en las mismas condiciones, a través de un proceso iterativo como el de [9].

Anexo: códigos Matlab

```
%script 1: código que calcula el perfil de temperaturas para una capa
%límite en placa plana, generada por un flujo viscoso que no dispersa radiación, y
%confinado entre dos placas isotermas, las cuales irradian como cuerpos negros.
%Dicha capa límite sí tiene capacidad de transferir calor por conducción,y
%en ella es aplicable la hipótesis de espesor óptico grueso. En consecuencia,
%la condición de contorno exterior de la capa límite será la temperatura de
%la placa superior, enfrentada por la placa en estudio.
```

```
clear all, close all,clc
%parámetros
Re=1e4; Pr=1; Ncr=10; Tw=0.1; Tinf=1;
%discretización en xy
ximin=0; ximax=1; Nxi=2000;
etamin=0; etamax=10*sqrt((1+4/3/Ncr)/Re/Pr);Neta=2000;
xi(1:Nxi)=linspace(ximin,ximax,Nxi);
eta(1:Neta)=linspace(etamin,etamax,Neta);
hxi=(ximax-ximin)/(Nxi-1);
heta=(etamax-etamin)/(Neta-1);
%matrices correspondientes a cocientes incrementales
D1=sparse(Neta,Neta);
D2=sparse(Neta,Neta);
for j=2:(Neta-1),
    D1(j,j-1)=-1/2/heta; D1(j,j+1)=1/2/heta;
    D2(j,j-1)=1/heta^2; D2(j,j)=-2/heta^2; D2(j,j+1)=1/heta^2;
end
%primera estación capa límite mecánica
unm1(1:Neta,1)=1; vnm1(1:Neta,1)=0;
%primera estación capa límite térmica
Thetanm1(1:Neta,1)=Tinf;
%matriz C capa límite térmica
C=-(1/3/Re/Pr/Ncr)*D2;
C(1,:)=0; C(Neta,:)=0;

for n=2:Nxi,
% Capa límite mecánica en placa plana
% Matriz A y vector r
    Matu=spdiags(unm1/hxi,0,Neta,Neta);
    Matv=spdiags(vnm1,0,Neta,Neta);
    r(1:Neta,1)=unm1.^2/hxi;
    A=-D2/Re+Matv*D1+Matu;
% Condiciones de contorno en A y r
    A(1,:)=0; A(1,1)=1; r(1)=0;
    A(Neta,:)=0; A(Neta,Neta)=1; r(Neta)=1;
% Solución
    un(1:Neta,1)=(A\r);
% Cálculo de vn
```

```

dun(1:Neta)=(un-unm1)/hxi;
vn(1,1)=0;
for j=2:Neta,
    vn(j,1)=vn(j-1,1)-0.5*heta*(dun(j)+dun(j-1));
end
% Actualizar:
unm1=un;    vnm1=vn;

%Capa límite térmica con hipótesis de espesor óptico grueso
%reassignamos Matu y Matv
Matu=spdiags(un/hxi,0,Neta,Neta);
Matv=spdiags(vn,0,Neta,Neta);
%vector b en función de velocidades de la estación en la que nos
%encontramos
bt(1:Neta,1)=Matu*Thetanm1;
b=[Tw; bt(2:Neta-1,1);Tinf];
%matriz B
B=Matu+Matv*D1-1/Re/Pr*D2;
%condiciones de contorno de B
B(1,:)=0; B(1,1)=1;
B(Neta,:)=0; B(Neta,Neta)=1;
%método de newton raphson
Tk=Thetanm1;
for k=1:100,
    Tk3=Tk.*Tk.*Tk; Tk4=Tk.*Tk3;
    J=B+4*C*spdiags(Tk3,0,Neta,Neta); F=b-B*Tk-C*Tk4;
    dTk=J\F;
    Tk=Tk+dTk;
    if max(abs(dTk))<= 10^-12,
        Thetan=Tk;
        break
    end
end
%variable de semejanza respecto a la cual enfrentamos nuestro vector de
%temperaturas para poder comparar con los resultados de viskanta
etavisk=eta*sqrt(Re/2/xi(n));
%plot (Thetan, eta)
%axis([0.4 1.1 etamin etamax])
plot(eta,Thetan)
axis([etamin etamax 0 1.1])
%actualizar
Thetanm1=Thetan;
end

%script 2: código que calcula el perfil de temperaturas para un flujo no
%viscoso, que no dispersa radiación, y confinado entre dos placas isothermas,
%las cuales irradian como cuerpos negros. Dicho flujo puede transferir calor
%por conducción en este trabajo. Para que conste, se busca establecer una
%comparación con el script 3, código basado en [2], que calcula igualmente
%el perfil de temperaturas para dicho flujo, aunque en función de un aparato
%matemático que permitía considerar dispersión, y emisividades de las placas
%que no son unidad. A lo largo del código se muestran líneas que se
%corresponden con algunas de las gráficas obtenidas para flujo ideal

close all,clc,clear all
%parámetros adimensionales
Pr=1; Ncr=1; Tw=0.1; Tinf=1;
%discretizar en x
ximin=0; ximax=1; Nxi=2000;hxi=(ximax-ximin)/(Nxi-1);xi(1:Nxi)=linspace(ximin,ximax,Nxi);

```

```

%discretizar en espesor óptico
Ntau=300; taumin=0; tau0=0.002;
tauv(1:Ntau)=linspace(taumin,tau0,Ntau);
htau=(tau0-taumin)/(Ntau-1);
%integral exponencial correspondiente a exp(-x/mu); es decir, E2;
%posteriormente se interpola dicho vector en tauv
tauH=tau0;
NX=10^3; Nmu=10^5;
Xv=linspace(0,tauH,NX);
mu=linspace(10^-10,1,Nmu);
E2v(1)=1; E2Hv(1)=trapz(mu,exp(-tauH./mu));
for ix=2:NX,
    X=Xv(ix);
    E2v(ix)=trapz(mu,exp(-X./mu));%correspondiente a placa 1
    E2Hv(ix)=trapz(mu,exp(-abs(tauH-X)./mu));%correspondiente a placa 2
end
%matriz A, en función de tauv
Mtau=tauv'*ones(1,Ntau)-ones(Ntau,1)*tauv; % Matriz que obtiene tau_i-tau_j, de tau-tau'
Mabtau=abs(Mtau); % Matriz que obtiene |tau_i-tau_j| de |tau-tau'|
ME2=interp1(Xv,E2v,Mabtau); %Matriz E2(|tau-tau'|)
VE2=interp1(Xv,E2v,tauv);%vector E2(tauv), correspondiente a placa 1
VE2H=interp1(Xv,E2Hv,tauv);%vector E2(tau0-tauv), correspondiente a placa 2
Mstau=sign(Mtau+10^-10); Mstaum=sign(Mtau-10^-10);
g(1:Ntau,1:Ntau-1)=Mstau(:,2:Ntau).*ME2(:,2:Ntau)-Mstaum(:,1:Ntau-1).*ME2(:,1:Ntau-1);
Aa(1:Ntau,1)=0.5*g(:,1); Aa(:,2:Ntau-1)=0.5*(g(:,1:Ntau-2)+g(:,2:Ntau-1));
Aa(:,Ntau)=0.5*g(:,Ntau-1);
%matrices correspondientes a cocientes incrementales
Dtau1=sparse(Ntau,Ntau);
Dtau2=sparse(Ntau,Ntau);
for j=2:(Ntau-1),
    Dtau1(j,j-1)=-1/2/htau; Dtau1(j,j+1)=1/2/htau;
    Dtau2(j,j-1)=1/htau^2; Dtau2(j,j)=-2/htau^2; Dtau2(j,j+1)=1/htau^2;
end
%primera estación capa límite térmica
Thetanm1(1:Ntau,1)=Tinf;
%método de newton raphson, calculamos campo de temperaturas con radiación
%en función de Ncr
% contador
% comp=[];
openfig('idncr01thinthickftau0002');
p=4;
for n=2:Nxi
    xi(n)
    %matrices B y C con condiciones de contorno
    B=speye(Ntau)/hxi-2*Ncr*Dtau2;C=2*speye(Ntau)-Aa;
    C(1,:)=0; C(Ntau,:)=0;
    B(1,:)=0; B(1,1)=1;
    B(Ntau,:)=0; B(Ntau,Ntau)=1;
    %término independiente
    bact=Tw^4*VE2'+Thetanm1/hxi+Tinf^4*VE2H';
    %
    b=[Tw; bact(2:Ntau-1,1) ;Tinf];
    %Newton Raphson
    Tk=Thetanm1;
    for k=1:100,
        Tk3=Tk.*Tk.*Tk; Tk4=Tk.*Tk3;
        J=B+4*C*spdiags(Tk3,0,Ntau,Ntau); F=b-B*Tk-C*Tk4;
        dTk=J\F;
        Tk=Tk+dTk;
    end
end

```

```

%condición para salir del método
if max(abs(dTk)) <= 10^-12,
    Thetan=Tk;
    break
end
end
%obtención de matriz que contiene las componentes de temperaturas
%calculadas en la malla dispuesta, con la intención de implementarlas
%como condición de contorno en la capa límite de espesor óptico variable
Thetanideal(1:Ntau,n)=Thetan;
%perfil de temperaturas obtenido
% figure(1)
% plot (Thetan,tauv,'r')
% axis([0 1.1 taumin tau0])
% pause(0.01)
if n==100|n==1000|n==2000
    figure(1)
    subplot(2,3,p)
    plot (Thetan,tauv,'r')
    axis([0 1.1 taumin tau0])
% legend(['ideal f(\tau)'],['ideal thick']);
title(['n=',num2str(n)]);
xlabel('\theta');ylabel('\tau');
filename=['idncr01thinthickftau0002'];saveas([1],filename);
p=p+1;
end
if max(abs((Thetan-Thetanm1)/hxi)) <= 10^-7||n==Nx1,
% comp(2,1:4)=[Thetan(50),Thetan(70),Thetan(100),Thetan(150),Thetan(290)];
% xlswrite('compideal2.xlsx',comp,'Hoja1','B2');
% %condición que se emplea para llegar a la estacionariedad en
% %términos de posición longitudinal a lo largo de la placa plana;
% %empleada para comparar la curva estacionaria a la que llega el
% %flujo ideal con hipótesis de espesor óptico grueso
% [max(abs((Thetan-Thetanm1)/hxi))]
figure(1)
subplot(2,3,p)
plot (Thetan,tauv,'r')
axis([0 1.1 taumin tau0])
% legend(['ideal f(\tau)'],['ideal thick']);
title(['n=',num2str(n)]);
xlabel('\theta');ylabel('\tau');
filename=['idncr01thinthickftau0002'];saveas([1],filename);
% filename=['pruebaidealthickk'];saveas([1],filename);
p=p+1;
% %
%
break;
% else
% [max(abs((Thetan-Thetanm1)/hxi))]
% hold off
end
Thetanm1=Thetan;
% figure(1)
% com
theta(n)=(Thetan(2)-Tw)/(Tinf-Tw);
% semilogx(xi(2:n),theta(2:n),'g')
% hold on
end

```

```

% openfig('sparrow289')
% hold on
% semilogx(xi(2:Nxi),theta(2:Nxi),'k')
% hold on
% axis([0.01 4 0 1]);
% xlabel('\xi')
% ylabel('\Theta')
% title('Salto de temperatura en la pared en flujo no viscoso. Pared caliente y pared fría');
% legend(['\theta_w=1, \theta_0=0.1'],['\theta_w=0.1, \theta_0=1'],['\theta_w=1,
\theta_0=0.9'],['\theta_w=0.9, \theta_0=1']);
% filename=['sparrow289'];
% saveas([1],filename);

%script 3: flujo ideal encerrado entre dos placas que permite transmisión%
%de calor, por conducción y por radiación, por diferencia de temperaturas%
%entre dichas placas; cálculo a través de matrices A y MG

clear all; clc; close all;
%parámetros adimensionales
emiss1=1; emiss2=1; Ncr=0;Tw=1;Tinf=0.1;
%discretizar en x
ximin=0; ximax=1200; Nxi=2000;hxi=(ximax-ximin)/(Nxi-1);
%discretizar en tau
tau0=20; Ntau=300; taumin=0; tau0;
tauv(1:Ntau)=linspace(taumin,tau0,Ntau);
htau=(tau0-taumin)/(Ntau-1);
%integral exponencial correspondiendo a exp(-X/mu) y exp(-abs(tauH-X));
%calculada con una malla muy fina; cuando sea necesario se interpolará
tauH=tau0;
NX=10^3; Nmu=10^5;
Xv=linspace(0,1.5*tauH,NX);
mu=linspace(10^-10,1,Nmu);
E2v(1)=1; E2Hv(1)=trapz(mu,exp(-tauH./mu));
for ix=2:NX,
    X=Xv(ix);
    E2v(ix)=trapz(mu,exp(-X./mu));
    E2Hv(ix)=trapz(mu,exp(-abs(tauH-X)./mu));
end
E3_H=trapz(mu,mu.*exp(-tauH./mu)); %para radiosidades

%Matriz A
Mtau=tauv'*ones(1,Ntau)-ones(Ntau,1)*tauv; % Matriz de la discretización tau_i-tau_j de tau-tau'
Mabtau=abs(Mtau); % Matriz de la discretización |tau_i-tau_j| de |tau-tau'|
ME2=interp1(Xv,E2v,Mabtau); % Matriz de la discretización E2(|tau-tau'|)
Mstaup=sign(Mtau+10^-10); Mstaum=sign(Mtau-10^-10);
g(1:Ntau,1:Ntau-1)=Mstaup(:,2:Ntau).*ME2(:,2:Ntau)-Mstaum(:,1:Ntau-1).*ME2(:,1:Ntau-1); % matrix
g
A(1:Ntau,1)=0.5*g(:,1); A(:,2:Ntau-1)=0.5*(g(:,1:Ntau-2)+g(:,2:Ntau-1)); A(:,Ntau)=0.5*g(:,Ntau-
1);
%Vectores a y b:
vE2(1:Ntau)=interp1(Xv,E2v,tauv); E2(1)=1;
vE2H(1:Ntau)=interp1(Xv,E2Hv,tauv); E2H(Ntau)=1;
a(1:Ntau)=0.5*[vE2(1:Ntau-1).*(tauv(2:Ntau)-tauv(1:Ntau-1)) 0]+0.5*[0
vE2(2:Ntau).*(tauv(2:Ntau)-tauv(1:Ntau-1))];
b(1:Ntau)=0.5*[vE2H(1:Ntau-1).*(tauv(2:Ntau)-tauv(1:Ntau-1)) 0]+0.5*[0
vE2H(2:Ntau).*(tauv(2:Ntau)-tauv(1:Ntau-1))];
%Matrices LGJ and Rib:
LGJ(1:Ntau,1:Ntau)=eye(Ntau); LGJ(1:Ntau,Ntau+1)=-2*vE2(1:Ntau)'; LGJ(1:Ntau,Ntau+2)=-
2*vE2H(1:Ntau)';

```

```

LGJ(Ntau+1,1:Ntau)=0; LGJ(Ntau+1,Ntau+1)=1; LGJ(Ntau+1,Ntau+2)=-2*(1-emiss1)*E3_H;
LGJ(Ntau+2,1:Ntau)=0; LGJ(Ntau+2,Ntau+1)=0; LGJ(Ntau+2,Ntau+2)=1; %J2=0
RIb(1:Ntau,1:Ntau)=2*pi*A;
RIb(Ntau+1,1:Ntau)=pi*emiss1*[1 zeros(1,Ntau-1)]+2*pi*(1-emiss1)*a;
%RIb(Ntau+2,1:Ntau)=2*pi*(1-emiss2)*(1-omega)*b+pi*emiss2*[zeros(1,Ntau-1) 1];
RIb(Ntau+2,1:Ntau)=0; %J2=0%
LGJi=inv(LGJ);
LGJiRIb=LGJi*RIb; MG=LGJiRIb(1:Ntau,1:Ntau); aJ1=LGJiRIb(Ntau+1,1:Ntau);
aJ2=LGJiRIb(Ntau+2,1:Ntau);
%matrices correspondientes a cocientes incrementales
D_tau=sparse(Ntau,Ntau);
D_tau2=sparse(Ntau,Ntau);
for j=2:(Ntau-1),
    D_tau(j,j-1)=-1/2/htau; D_tau(j,j+1)=1/2/htau;
    D_tau2(j,j-1)=1/htau^2; D_tau2(j,j)=-2/htau^2; D_tau2(j,j+1)=1/htau^2;
end
%condición de contorno en temperatura
Tnm1(1:Ntau,1)=Tinf;

comp=[];

for n=2:1000000
    b=[Tw; Tnm1(2:Ntau-1,1); Tinf];
% Matrices del sistema y condiciones de contorno
    B=eye(Ntau)-hxi*Ncr*D_tau2;
    B(Ntau,:)=0; B(Ntau,Ntau)=1; B(Ntau,Ntau-1)=-1;
    C=hxi*(eye(Ntau,Ntau)-MG/4/pi);
    B(1,:)=0; B(1,1)=1; C(1,:)=0;
    B(Ntau,:)=0; B(Ntau,Ntau)=1; C(Ntau,:)=0;
%Iteración Newton Raphson
    Tk=Tnm1;
    for k=1:100,
        Tk3=Tk.*Tk.*Tk; Tk4=Tk3.*Tk;
        Fk=B*Tk+C*Tk4-b;
        Hk=B+4*C*spdiags(Tk3,0,Ntau,Ntau);
        dTk=-Hk\Fk;
        if max(abs(dTk)) <= 10^-12,
            break
        else
            Tk=Tk+dTk;
        end
    end
end
Tn=Tk;
Tn4=Tk4;

[max(abs((Tn-Tnm1)/hxi))]
if max(abs((Tn-Tnm1)/hxi)) <= 10^-7,
    openfig('estacionario');
    hold on
    plot(Tn,tauv,'b');
    title('flujo uniforme en placa plana');
    xlabel('\theta');ylabel('\tau');
    legend(['código original'], ['código [2]']);
    comp(2,1:5)=[Tn(50),Tn(70),Tn(100),Tn(150),Tn(290)];
    xlswrite('compideal.xlsx',comp,'Hojal','B2');

    break;

end

```

```

Tnm1=Tn;

% if 5*round(n/5)==n,
%     figure(1)
%     plot(Tn,tauv)
%     hold off
%     %figure(2)
%     %plot(n,theta,'b')
%     %hold on
%     %pause(0.5)

%end
end

%script4: capa límite viscosa sobre una placa plana, en presencia de radiación,
%generada por un flujo ideal que no conduce calor y confinado entre dos placas
%que se comportan como cuerpos negros. Dicha capa límite queda en función
%del espesor óptico tauCL, de la condición de contorno correspondiente a
%dicha tauCL en el flujo ideal, cargado en memoria, que se calcula con
%script2, y del flujo de radiación que tiene en cuenta absorción y emisión
%en el medio, relajándose hipótesis thin y thick
clear all, close all,clc
%parámetros adimensionales
Pr=1; Ncr=0.1; Tw=0.1; Tinf=1;tau0=20;
%discretizar en x
ximin=0; ximax=1; Nxi=2000;hxi=(ximax-ximin)/(Nxi-1);
xi(1:Nxi)=linspace(ximin,ximax,Nxi);
%discretizar en espesor óptico
Ntau=1000; taumin=0; tauCL=10*sqrt(2*Pr*Ncr);
tauv(1:Ntau)=linspace(taumin,tauCL,Ntau);
htau=(tauCL-taumin)/(Ntau-1);heta=htau/sqrt(2*Pr*Ncr);
eta(1:Ntau)=tauv/sqrt(2*Pr*Ncr);%eta=tauadi de sparrow
%discretizar en espesor óptico de flujo ideal
tauideal(1:Ntau)=linspace(taumin,tau0,Ntau);
%variable diferencia para saber en qué posición de tauideal se encuentra
%la condición de contorno exterior de la capa límite
dif=abs(tauideal(1)-tauCL);
p=1;
for s=2:Ntau
    if abs(tauideal(s)-tauCL)<dif
        dif=abs(tauideal(s)-tauCL);
        p=s
    end
end
%p es la posición de tauideal en la que se encuentra la condición de
%contorno exterior de la capa límite
pause
%se carga el flujo ideal correspondiente a tau0=20, y pared fría
load ('thetaccidea120fria','-mat');
CC=Thetanideal;
%obtención de E2(tau), E2(|tau0-tau|), y Aij, siempre respecto a tauCL
tauH=tauCL;
NX=10^3; Nmu=10^5;
Xv=linspace(0,tauH,NX);
mu=linspace(10^-10,1,Nmu);
E2v(1)=1; E2Hv(1)=trapz(mu,exp(-tauH./mu));
for ix=2:NX,

```

```

X=Xv(iX);
E2v(iX)=trapz(mu,exp(-X./mu));
E2Hv(iX)=trapz(mu,exp(-abs(tauH-X)./mu));
end
Mtau=tauv'*ones(1,Ntau)-ones(Ntau,1)*tauv; % Matriz que obtiene tau_i-tau_j, de tau-tau'
Mabtau=abs(Mtau); % Matriz que obtiene |tau_i-tau_j| de |tau-tau'|
ME2=interp1(Xv,E2v,Mabtau); %Matriz E2(|tau-tau'|)
VE2=interp1(Xv,E2v,tauv);%vector E2(tauv)
VE2H=interp1(Xv,E2Hv,tauv);%vector E2(tauCL-tauv)
Mstau=sign(Mtau+10^-10); Mstaum=sign(Mtau-10^-10);
g(1:Ntau,1:Ntau-1)=Mstau(:,2:Ntau).*ME2(:,2:Ntau)-Mstaum(:,1:Ntau-1).*ME2(:,1:Ntau-1);
Aa(1:Ntau,1)=0.5*g(:,1); Aa(:,2:Ntau-1)=0.5*(g(:,1:Ntau-2)+g(:,2:Ntau-1));
Aa(:,Ntau)=0.5*g(:,Ntau-1);
%matrices correspondientes a cocientes incrementales
Dtau1=sparse(Ntau,Ntau);
Dtau2=sparse(Ntau,Ntau);
for j=2:(Ntau-1),
    Dtau1(j,j-1)=-1/2/htau; Dtau1(j,j+1)=1/2/htau;
    Dtau2(j,j-1)=1/htau^2; Dtau2(j,j)=-2/htau^2; Dtau2(j,j+1)=1/htau^2;
end
%primera estación capa límite mecánica
unm1(1:Ntau,1)=1; vnm1(1:Ntau,1)=0;
%primera estación capa límite térmica
Thetanm1(1:Ntau,1)=Tinf;
%Definición matriz A campo velocidades
A=sparse(Ntau,Ntau);
Matu=sparse(Ntau,Ntau);
Matv=sparse(Ntau,Ntau);
%método de newton raphson, calculamos a la vez campo de velocidades y campo
%de temperaturas con radiación
cont=1;
for n=2:Nxi
    n
    %obtención de campo de velocidades
    Matu=spdiags(unm1,0,Ntau,Ntau)/hxi;
    Matv=spdiags(vnm1,0,Ntau,Ntau);
    A=Matu+Matv*Dtau1-Dtau2*2*Pr*Ncr;
    r(1:Ntau,1)=unm1.^2/hxi;
    A(1,:)=0; A(1,1)=1; r(1)=0;
    A(Ntau,:)=0; A(Ntau,Ntau)=1; r(Ntau)=1;
    un=(A\r);
    % figure(1)
    % plot(un,tauv,'b');
    % axis([0 2 taumin tauCL]);
    % hold off
    % pause(0.01)
    %cálculo de vn
    dudxi_n=(un-unm1)/hxi;
    vn(1)=0;
    for j=2:Ntau,
        vn(j,1)= vn(j-1)-0.5*htau*(dudxi_n(j)+dudxi_n(j-1));
    end
    %actualización
    unm1=un;vnm1=vn;
    %capa límite térmica en función del espesor óptico tauCL
    %vector un obtenido como matriz diagonal
    Matu=spdiags(un/hxi,0,Ntau,Ntau);
    Matv=spdiags(vn,0,Ntau,Ntau);
    %matrices B y C con condiciones de contorno

```

```

B=Matu+Matv*Dtau1-2*Ncr*Dtau2;C=2*speye(Ntau)-Aa;
C(1,:)=0; C(Ntau,:)=0;
B(1,:)=0; B(1,1)=1;
B(Ntau,:)=0; B(Ntau,Ntau)=1;
bact=Tw^4*VE2'+Matu*Thetanm1+Tinf^4*VE2H';
b=[Tw; bact(2:Ntau-1,1) ;CC(p,n)];
Tk=Thetanm1;
for k=1:100,
    Tk3=Tk.*Tk.*Tk; Tk4=Tk.*Tk3;
    J=B+4*C*spdiags(Tk3,0,Ntau,Ntau); F=b-B*Tk-C*Tk4;
    dTk=J\F;
    Tk=Tk+dTk;
    if max(abs(dTk))<= 10^-12,
        Thetan=Tk;
        break
    end
end
theta2=(Thetan(2)-Tw)/(Tinf-Tw);dTheta(n)=theta2/heta;
%se obtienen gráficas para comparar resultados con las dos hipótesis y
%relajando hipótesis
if n==50|n==600|n==1500
figure(1)
subplot(2,3,cont);
plot (Thetan,tauv,'r');
xlabel('\theta');ylabel('\tau');
axis([0 1.1 taumin tauCL])
title(['n=',num2str(n)]);
figure(1)
subplot(2,3,cont+3);
plot(Thetanideal(1:Ntau,n),tauideal(1:Ntau),'b--',Thetan,tauv,'b',...
    CC(p,n),tauCL,'k*');
xlabel('\theta');ylabel('\tau');
axis([0 1.1 taumin tau0]);
title(['n=',num2str(n)]);
filename=['compfinalthetataunr01'];saveas([1],filename);
figure(2)
subplot(1,3,cont);
plot(Thetan,eta,'r');
xlabel('\theta');ylabel('\eta');
axis([0 1.1 eta(1) eta(Ntau)])
title(['n=',num2str(n)]);
filename=['compfinalthetaeta'];saveas([2],filename);
if n==600
    dThetavisk(1:Ntau-1)=(Thetan(2:Ntau)-Thetan(1:Ntau-1))/(heta*sqrt(1/2/xi(n)));
    figure(3);
    plot(eta(1:Ntau-1)*sqrt(1/2/xi(n)),dThetavisk(1:Ntau-1),'r');
    xlabel('\eta_v');ylabel('\theta');
    filename=['compfinaldthetavisk'];saveas([3],filename);
end

cont=cont+1;
end
Thetanm1=Thetan;
% if n==1600
% break
% end
end
figure(4)
subplot(2,1,1);

```

```

semilogx(xi,dTheta.*(xi.^0.5),'r');
xlabel('xi');ylabel('Nu/(Re)^0.5');
filename=['compfinalNuraizRe'];saveas([4],filename);

% plot(xi,dTheta.*(xi.^0.5))
% pause
% filename=['pruebathinftau1'];saveas([2],filename);
% etaVisk=eta*sqrt(1/2/xi(n));
% plot(etaVisk,Thetan,'r');
% axis([0 10 0 1.1])

%script5: este código calcula la capa límite mecánica, así como la térmica,
%con gran espesor óptico, con el método de Newton Raphson, que trata
%más eficientemente las no linealidades, que se generan por convección libre
%en un medio en reposo, y que no puede dispersar radiación, situado sobre
%una placa plana negra radiante

clear all, clc, close all
%parámetros
Gr=5.092*10^6;Pr=100;Ncr=0.1;Tw=0.1; Tinf=1;
%discretización
ximin=0; ximax=1; Nxi=2000;
etamin=0; etamax=10*sqrt((1+4/3/Ncr)/Gr^0.5);Neta=2000;
xi(1:Nxi)=linspace(ximin,ximax,Nxi);
eta(1:Neta)=linspace(etamin,etamax,Neta);
hxi=(ximax-ximin)/(Nxi-1);
heta=(etamax-etamin)/(Neta-1);
%matrices correspondientes a cocientes incrementales
D1=sparse(Neta,Neta);
D2=sparse(Neta,Neta);
for j=2:(Neta-1),
    D1(j,j-1)=-1/2/heta; D1(j,j+1)=1/2/heta;
    D2(j,j-1)=1/heta^2; D2(j,j)=-2/heta^2; D2(j,j+1)=1/heta^2;
end
%primera estación capa límite mecánica
unm1(1:Neta,1)=0.001; vnm1(1:Neta,1)=0;
%primera estación capa límite térmica
Thetanm1(1:Neta,1)=Tinf;
%matriz C capa límite térmica|término no lineal de la capa límite térmica
C=-1/3/Ncr/Gr^0.5/Pr*D2;
C(1,:)=0; C(Neta,:)=0;
p=1;
openfig('compthetavetalibre2');
openfig('compThetaetaesclibre');
openfig('competaesclibre');
openfig('compNuGrxilibre');
for n=2:Nxi,
    n
% Capa límite mecánica
% Matriz A y vector r
    Matu=spdiags(unm1/hxi,0,Neta,Neta);
    Matv=spdiags(vnm1,0,Neta,Neta);
    r(1:Neta,1)=unm1.^2/hxi+(Thetanm1-Tinf)/(Tw-Tinf);%dependencia con el
    %campo de temperaturas
    A=-D2/Gr^0.5+Matv*D1+Matu;
% Condiciones de contorno en A y r
    A(1,:)=0; A(1,1)=1; r(1)=0;
    A(Neta,:)=0; A(Neta,Neta)=1; r(Neta)=0;
% Solución

```

```

un(1:Neta,1)=(A\r);
% Cálculo de vn
dun(1:Neta)=(un-unm1)/hxi;
vn(1,1)=0;
for j=2:Neta,
    vn(j,1)=vn(j-1,1)-0.5*heta*(dun(j)+dun(j-1));
end
% Actualizar:
unm1=un;    vnm1=vn;

%Capa límite térmica con hipótesis optically thick
%reassignamos Matu y Matv
Matu=spdiags(un/hxi,0,Neta,Neta);
Matv=spdiags(vn,0,Neta,Neta);
%vector b en función de velocidades de la estación en la que nos
%encontramos
bt(1:Neta,1)=Matu*Thetanm1;
b=[Tw; bt(2:Neta-1,1);Tinf];
%matriz B
B=Matu+Matv*D1-1/Gr^0.5/Pr*D2;
%condiciones de contorno de B
B(1,:)=0; B(1,1)=1;
B(Neta,:)=0; B(Neta,Neta)=1;
%método de newton raphson
Tk=Thetanm1;
for k=1:100,
    Tk3=Tk.*Tk.*Tk; Tk4=Tk.*Tk3;
    J=B+4*C*spdiags(Tk3,0,Neta,Neta); F=b-B*Tk-C*Tk4;
    dTk=J\F;
    Tk=Tk+dTk;
    if max(abs(dTk))<= 10^-12,
        Thetan=Tk;
        break
    end
end
%obtención de gráficas
if n==100|n==800|n==2000
figure(1);subplot(2,3,p);hold on
plot(eta,Thetan,'r');axis([etamin etamax 0 1.1]);
title(['\xi=',num2str(xi(n))]);
xlabel('\eta');ylabel('\theta');
hold on
subplot(2,3,p+3);hold on
plot(eta, vn,'r--',eta,un,'r');
title(['\xi=',num2str(xi(n))]);
xlabel('\eta');ylabel('u,v');
axis([0 0.2 -0.2 1]);
filename=['compthetavetalibre2'];saveas([1],filename);
if n==2000
    figure(2); subplot(2,1,2);hold on
    plot(eta/xi(n)*(Gr/4)^0.25,(Thetan-Tinf)/(Tw-Tinf),'r')
    xlabel('\eta_e_s_c');ylabel('\Theta');title('distribución de \Theta con \eta_e_s_c según
Ncr;Pr=100');
    filename=['compThetaetaesclibre'];saveas([2],filename);
    figure(3);subplot(2,1,2);hold on
    plot(eta/xi(n)*(Gr/4)^0.25,un/2/(xi(n)^0.5),'r');
    xlabel('\eta_e_s_c');ylabel('u_e_s_c');title('distribución de u_e_s_c con \eta_e_s_c
según Ncr;Pr=100');
    axis([0 8 0 0.6]);

```

```

        filename=['compuetaesclibre']; saveas([3], filename);
    end
    p=p+1;
end
%actualizar
    Thetanm1=Thetan;
%flujo de calor
    theta2=(Thetan(2)-Tinf)/(Tw-Tinf);
    dTheta_p(n)=(theta2-1)/heta;

end
figure(4); subplot(2,1,2); hold on
plot(xi, dTheta_p/Gr^0.25, 'r');
xlabel('\xi'); ylabel('Nu/Gr^{1/4}'); title('evolución de Nu/(Gr)^{1/4} con \xi según Ncr; Pr=100');
axis([0.01 1 -4 0]);
filename=['compNuGrxilibre']; saveas([4], filename);

```

[Published with MATLAB® R2020a](#)

Referencias

- [1] J. M. G. A. d. Saavedra y G. R. Acher, *Introducción a la Aerodinámica Potencial*, Madrid: Paraninfo, 2012.
- [2] H. Schlichting y K. Gersten, *Boundary layer theory*, Springer, 2017.
- [3] A. C. Merino, *Numerical study of one-dimensional unsteady radiation problems with applications to the thermal structure of planetary lower atmospheres*, Sevilla, 2019.
- [4] E. Sparrow y R. Cess, *Radiation Heat Transfer*, CRC Press, 1978.
- [5] J. Howell y R. Siegel, *Thermal Radiation Heat Transfer*, Nueva York: CRC Press, 2010.
- [6] A. G. Sánchez, *Métodos numéricos sencillos para problemas de convección libre de Rayleigh-Bénard*, Sevilla: Universidad de Sevilla, 2015.
- [7] R. Cess, «The interaction of thermal radiation with conduction and convection heat transfer,» Elsevier, Nueva York, 1964.
- [8] R. Viskanta y R.J. Grosh, «Boundary layer in thermal radiation absorbing and emitting media,» *International Journal Heat Mass Transfer*, 1962.
- [9] C. C. Oliver y P. McFadden, «The interaction of radiation and convection in the laminar boundary layer,» *ASME*, 1966.
- [10] M. Askar, «Numerical analysis of combined heat transfer in the laminar boundary layer,» *Research Gate*, 2011.
- [11] J. M. López-Herrera, M. Á. Herrada, M. P. Saborid y A. Barrero, *Problemas Resueltos de Mecánica de Fluidos*, Madrid: McGrawHill, 2005.
- [12] C. Balaji, *Essentials of Radiation Heat Transfer*, Nueva Delhi: Ane Books, 2014.
- [13] M. F. Modest, *Radiative Heat Transfer*, Massachusetts: Academic Press, 2003.
- [14] J. Tatum, «Absorption, scattering, extinction and the equation of transfer,» *LibreTexts*, 2020.
- [15] M. Mateo, «ResearchGate,» 2016. [En línea]. Available: https://www.researchgate.net/figure/Figura-32-Absorcion-reflexion-y-transmision-de-la-radiacion-incidente-por-un-material_fig2_320474536. [Último acceso: 10 5 2020].
- [16] R. Viskanta, *Radiation Transfer and Interaction of Convection with Radiation Heat Transfer*, Nueva York: Academic Press, 1966.

-
- [17] M. Á. M. Medina, «Gaussianos,» 22 Junio 2011. [En línea]. Available: <https://www.gaussianos.com/calcular-la-derivada-de-una-integral/>. [Último acceso: 22 Mayo 2020].
- [18] M. P.-S. Sánchez-Pastor, «A numerical method for transient, one-dimensional conduction-radiation-convection problems with applications to the thermal structure of simple models of planetary lower atmospheres,» Sevilla, 2020.
- [19] G. D. D. Reina, «Métodos numéricos sencillos para el cálculo de chorros y penachos térmicos laminares,» Sevilla, 2016.
- [20] S. Rosseland, *Astrophysik auf Atom-Theoretischer Grundlage*, Berlin, 1931.