UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS SOBRE H , MEDIANTE SUBYACENTES REALES

Visado en Sevilla,
Mayo de 1976

EL CATEDRATICO DIRECTOR

A. Castro

El Codirector
Juan Arias de Reyna M.

Fdo. Antonio de Castro Brzezicki

Tesis que presenta José Carmona Alvarez para optar al grado de Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas.

Sevilla, Mayo de 1976

Fdo.
José Carmona Alvarez

Quiero hacer constar mi agradecimiento a D. Antonio de Castro Przezicki, director del presente trabajo, y a D. Juan Arias de Reyna Martinez, co-director del mismo, por las valiosas sugerencias, constante estímulo, y acertada dirección de ambos.

INTRODUCCION :

La noción de subconjunto convexo de un espacio vectorial sobre R, que interviene en la definición de espacios localmente convexo, hace necesaria una estructura de espacio vectorial sobre R en el espacio vectorial considerado. No obstante, la teoria de los espacios localmente convexos, desde su definición por J. von Neumann, ha sido desarrollada simultaneamente para espacios vectoriales sobre R ó C ; debido a que C es un supercuerpo de R, y a la consideración de espacio vectorial topológico subyacente (Bourbaki , [4],§1,1), que permite definir los espacios localmente convexos sobre C, como aquellos espacios vectoriales topológicos tales que sus subyacentes reales son espacios localmente convexos.

Para los cuerpos valorados no arquimedianos, también ha sido desarrollada una teoria de espacios localmente convexos, fundamentalmente por Monna [10],[11]; definiendo previamente el concepto de conjunto K-convexo .

El capítulo de la dualidad, en la teoria de los espacios localmente convexos, es el que aporta los resultados mas profundos y elegantes de la teoria. Desde los trabajos precursores de Mackey, Dieudonné, Schwartz ; la teoria de la dualidadha sido ampliamente estudiada . Fundamentalmente, el método seguido ha sido el de desarrollar simultaneamente el estudio de la dualidad entre espacios vectoriales sobre R ó C. Asi es desarrollada por Bourbaki [5],Schwartz [14], Horváth [8], entre otros. Sin embargo, Köthe ([9],21,11) indica la posibilidad de reducir el estudio de la dualidad entre espacios vectoriales sobre C, al de la dualidad entre los espacios vectoriales sobre R (los subyacentes) ; y utilizando relaciones entre la polar y la polar absoluta de un conjunto, prueba la igualdad de ciertas topologías definidas por la dualidad entre espacios vectoriales sobre C, y entre los subyacente reales . Grothendieck [7], también indica esta posibilidad, aunque desarrolla simultaneamente la teoria para R ó C. La dualidadentre espacios vectoriales sobre cuerpos no arquimedianos ha sido estudiada fundamentalmente por Van Tiel [17].

El objeto fudamental de la primera parte de nuestro trabajo (Capítulos I y II) es estudiar la dualidad entre dos espacios vectoriales sobre un supercuerpo K de R, mediante la dualidad entre los subyacentes reales, utilizando resultados de la teoria de aplicaciones traspuestas respecto de una dualidad real. Hemos tomado como cuerpo K, el cuerpo H de los cuaternios de Hamilton, por ser éste el mayor cuerpo que contiene en su centro a R, y es de dimensión finita sobre R .

El capítulo I , es fundamentalmente, un capítulo instrumental dentro de nuestro trabajo. En él, se considera un espacio vectorial E, a la izquierda sobre H (para los espacios vectoriales a la derecha el estudio es totalmente análogo, por lo que se omite).

Puesto que al tener un espacio vectorial sobre H, tenemos asociado un espacio vectorial real (el subyacente real), el criterio que hemos seguido en la notación es anteponer la letra H, cuando el concepto sea relativo a la estructura de E ; así por ejemplo, tenemos los conceptos de H-subespacio, H-absolutamente convexo, H-seminorma,...etc. ,y sus correspondientes para el subyacente : R-subespacio, R-absolutamente convexo, R-seminorma...etc. .

De los primeros apartados de este capítulo, queremos destacar los resultados siguientes :

- El subyacente real de E, se puede descomponer en suma directa de subespacios propiamente reales estrictos (1.5)
- El subyacente real del dual algebraico (topológico)de E, es isomorfo al dual algebraico (topológico) del subyacente real de E.(1.6) ((1.11)).
- La caracterización de la cápsula H-absolutamente convexa de un subconjunto de E (Corolario de 1.23); que es totalmente análoga a la del caso real y complejo.
- Una condición necesaria y suficiente para que una topología compatible con la estructura de espacio vectorial real del subyacente, sea compatible con la estructura de E (1.10) .

En el apartado de los espacios localmente convexos, destacamos por su importancia posterior en el trabajo, el procedimiento dado en 1.31 para la obtención de topologías localmente convexas para E, a partir de topologías localmente convexas del subyacente; y la caracterización de las topologías localmente convexas de E, por H-seminormas (1.34).

En el último apartado se establece el teorema de Hahn-Banach para espacios vectoriales sobre H, siguiendo un proceso análogo al que se sigue para pasar del caso real al complejo.

Hemos de indicar, por último, que independientemente de su valoración instrumental en el trabajo, este capítulo, fuera del contexto, tiene intrinsecamente el interés de ser una generalización de los espacios de Wachs [16]; en el sentido en que los espacios localmente convexos sobre R ó C, representan una generalización de los espacios de Hilbert sobre R ó C.

En el capítulo II, estudiamos fundamentalmente, la dualidad y cuestiones relacionadas con ella.

Comenzamos el capítulo, definiendo el concepto de par dual, formado por un espacio vectorial E a la izquierda sobre H, un espacio vectorial F a la derecha sobre H, y una forma bilineal en E x F que separa puntos en E y en F. El hecho de que consideremos un espacio vectorial a la izquierda y el otro a la derecha para poder definir la forma bilineal, no es óbice para que como caso particular importante de par dual, tengamos el formado por E y E*, ya que E* tiene estructura de espacio vectorial a la derecha sobre H. A continuación definimos el concepto de par dual subyacente, entre los subyacentes reales; y probamos (II.2) que las aplicaciones traspuestas (respecto de la dualidad real subyacente), de las aplicaciones lineales en E_0 : $x \in E_0 \to ix$; $x \in E_0 \to jx$, son respectivamente, las aplicaciones lineales en F_0 : $y \in F_0 \to yi$; $y \in F_0 \to yj$.

Este resultado, junto con los lemas 1 y 2, y (I.10), constituyen el núcleo fundamental del estudio de la dualidad que hemos desarrollado.

Así, en el apartado de las $\mathfrak{S}$-topologías de E (topologías de la convergencia uniforme en los conjuntos de $\mathfrak{S}$), se prueba facilmente la igualdad de las topologías $\sigma(E,F)$ y $\sigma(E_0,F_0)$ (resp. $\tau(E,F)$ y $\tau(E_0,F_0)$; $\beta(E,F)$ y $\beta(E_0,F_0)$) definidas respectivamente por la dualidad entre E y F, y la dualidad subyacente entre E_0 y F_0.

Hemos de destacar que tras la definición del concepto de familia H-saturada de conjuntos de F, demostramos el teorema de Mackey-Arens con hipótesis correspondientes a las del caso real.

En la última parte de este capítulo, estudiamos algunos tipos particulares de espacios localmente convexos. Probamos que un espacio localmente convexo (E,τ) es un espacio T, si y solo si, (E_0,τ) es un espacio T. (T= tonelado, infratonelado, bornológico, semireflexivo, reflexivo); lo cual permite trasladar todas las propiedades de estos tipos de espacios del caso real a nuestro caso.

En resumen, queremos destacar de este capítulo, que presenta un método de estudio sistemático de la dualidad mediante la dualidad subyacente; método que a su vez puede seguirse para el estudio de la dualidad entre espacios vectoriales sobre C.

En el capítulo III, se encuentran, según nuestra opinión, los resultados que pueden tener mas trascendencia. En este capítulo, nos planteamos el problema inverso al de los capítulos anteriores, es decir, partiendo de un espacio localmente convexo real (F,τ) determinar si es subyacente de algún espacio localmente convexo sobre H. En este problema hay dos cuestiones involucradas: una de tipo algebraico, que consiste, según probamos en III.1, en la existencia de dos automorfismos de F verificando ciertas condiciones; y otra de tipo topológico, que consiste en que estos automorfismos sean continuos para τ .

Para el caso complejo, Bourbaki (4 , §8,1) prueba que una condición necesaria y suficiente para que (F,τ) sea subyacente de un espacio vectorial topológico sobre C, es que exista un automorfismo anti-involutivo en (F,τ). Dieudonné en 6 ,dá un ejemplo de un espacio localmente convexo real, de dimensión infinita, para el cual no existe ningún automorfismo anti-involutivo.

Bourbaki indica, tambien en (4 , §8,1) un procedimiento para obtener espacios vectoriales topológicos sobre C, a partir de espacios vectoriales topológicos sobre R. El procedimiento consiste, en esencia, en "duplicar" la dimensión del espacio. Considera, el espacio vectorial real F x F, y lo dota de estructura de espacio vectorial sobre C; y como topología considera la topología producto de F x F .

Algunos autores (Schaefer 12 , Slugin 15), utilizan este procedimiento en el estudio de espacios vectoriales topológicos ordenados. Schaefer denomina a este procedimiento : "complejización".

Como podemos observar, el procedimiento de complejización, hace variar la estructura algebraica y topológica de pertida. Nosotros hemos probado en III.2 que , excepto para los espacios vectoriales reales de dimensión finíta y no múltiplo de cuatro, existen automorfismos de F verificando las condiciones de III.1; y que nos permiten dotar a F de estructura de espacio vectorial a la izquierda (resp. a la derecha) sobre H, a la que denominamos "cuaternización algebraica de F" respecto de los automorfismos considerados . La condición que obtenemos en III.2 es lo suficientemente amplia, como para poner de manifiesto, que la dificultad en el ejemplo de Dieudonné radica en la parte topológica de la cuestión. Por eso, el procedimiento que damos consiste, en partir del hecho de que F puede cuaternizarse algebraicamente y definir, entonces, en función de τ dos topologías localmente convexas que son compatibles con la estructura de espacio vectorial sobre H de la cuaternización algebraica de F.

En primer lugar definimos (III.3), una topología $\underline{\tau}$ menos fina que τ, compatible con la estructura de espacio vectorial sobre H de la cuaternización algebraica de F ; y caracterizamos a $\underline{\tau}$ por un sistema fundamental de entornos de 0 y por H-seminormas. También caracterizamos algebraicamente el dual de $(F,\underline{\tau})$, a partir del dual de (F,τ). En el ejemplo 1 del final del capítulo, ponemos de manifiesto que la topología $\underline{\tau}$ puede no ser de Hausdorff, aunque τ lo sea.

En segundo lugar, definimos (III.10) una topología localmente convexa $\overline{\tau}$ mas fina que τ, y compatible con la estructura de espacio vectorial sobre H de la cuaternización algebraica de F; y caracterizamos a $\overline{\tau}$ por un sistema fundamental de entornos de 0, y por H-seminormas. También caracterizamos algebraicamente el dual de $(F,\overline{\tau})$ a partir del dual de (F,τ). Hemos de señalar que en este caso no aparecía de una manera natural la definición de esta topología, por lo que es fundamental III.9.

En el ejemplo 2, ponemos de manifiesto, que la igualdad de los duales de $(F,\underline{\tau})$, (F,τ), y $(F,\overline{\tau})$ no implican, en general, la igualdad de las topologías $\underline{\tau}$, τ, y $\overline{\tau}$.

Por último, queremos destacar, que el procedimiento de "cuaternización localmente convexa" que definimos, puede aplicarse en particular, para obtener espacios localmente convexos sobre C, a partir de espacios localmente convexos sobre R; y proponemos el nombre de "complejización localmente convexa" para distinguirlo del de complejización anteriormente citado.

CAPITULO I

ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS LOCALMENTE CONVEXOS SOBRE H

PRELIMINARES ALGEBRAICOS

Por H denotaremos el cuerpo no conmutativo de los cuaternios. Los elementos de H los representaremos en la forma :
$\lambda_0+\lambda_1 i+\lambda_2 j+\lambda_3 k$; $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in R$.

Si denotamos por E a un espacio vectorial a la izquierda sobre H, al espacio vectorial real obtenido restringiendo el cuerpo de escalares a R lo denotaremos por E_0 , y lo denominaremos <u>espacio vectorial real subyacente</u>, o simplemente <u>subyacente real</u>.

En algún caso concreto, consideraremos también el espacio vectorial complejo que se obtiene restringiendo a C el cuerpo de escalares, que denotaremos por ${}_0E$ y que denominaremos <u>espacio vectorial complejo subyacente</u>, o simplemente <u>subyacente complejo</u>.

I.1 Los automorfismos de E_0 , definidos por :
$x \longrightarrow ix$; $x \longrightarrow jx$; $x \longrightarrow kx$ $\forall x \in E_0$
los denotaremos por u_1 , u_2 , u_3 , respectivamente. Estos automorfismos verifican : $u_1^2 = u_2^2 = u_3^2 = -I_{E_0}$; $u_1 \circ u_2 + u_2 \circ u_1 = \Theta$
donde I_{E_0} y Θ son, respectivamente, la aplicación identidad y la aplicación nula en E_0 .

(Observación : Para un espacio vectorial a la derecha sobre H las consideraciones anteriores son totalmente análogas. Por esta razón, en nuestro trabajo omitiremos sistemáticamente el estudio de las estructuras a la derecha.)

Si $M \subset E$ es un subespacio lineal de E, es en particular un subespacio lineal de E_0 y de ${}_0E$. A los subespacios lineales de E los denominaremos H-subespacios, a los de E_0 R-subespacios, y a los de ${}_0E$ C-subespacios.

1.2 Proposición : Sea $M \subset E$ un R-subespacio. Son equivalentes las proposiciones siguientes :

I) M es H-subespacio

II) $iM \subset M$, $jM \subset M$

III) $iM \cap jM \cap kM = M$

Demostración :

I)<=> II) Si M es H-subespacio, verifica en particular $iM \subset M$ $jM \subset M$.

Si $iM \subset M$, $jM \subset M$, se tiene $kM = ijM \subset iM \subset M$, y por tanto, si $x,y \in M$ $x+y \in M$ ya que M es R-subespacio; y si $\lambda \in H$ $\lambda x = (\lambda_0+\lambda_1 i+\lambda_2 j+\lambda_3 k)x =$

$$= \lambda_0 x+\lambda_1 (ix)+\lambda_2 (jx)+\lambda_3 (kx) \in M$$

II)<=>III) $iM \subset M \Rightarrow -M=M \subset iM \Rightarrow M = iM$

$jM \subset M \Rightarrow -M=M \subset jM \Rightarrow M = jM$

$kM = ijM = iM = M$

Por tanto $iM \cap jM \cap kM = M$

$$M = iM \cap jM \cap kM \Rightarrow \begin{array}{l} M \subset iM \Rightarrow iM \subset -M=M \\ M \subset jM \Rightarrow jM \subset -M=M \end{array}$$

1.3 Proposición : Un C-subespacio N es H-subespacio si y solo $jN \subset N$ ó $kN \subset N$.

Demostración :

Si N es H-subespacio, en particular se tiene que $jN \subset N$ y $kN \subset N$.

Reciprocamente, sea N C-subespacio es por tanto R-subespacio y verifica por ser C-subespacio $iM \subset M$, por I.2 (II) tenemos que N es H-subespacio.

I.4 Definición : Un C-subespacio N de E decimos que es *propiamente complejo* si $N \cap jN = \{0\}$.

Un R-subespacio M de E decimos que es *propiamente real* si $M \cap iM \cap jM \cap kM = \{0\}$. Si los R-subespacios M, iM, jM, kM, son disjuntos entre sí entonces decimos que M es *estrictamente propiamente real*.

I.5 Proposición : En E existen subespacios propiamente complejo y estrictamente propiamente real tales que

$E = N \oplus jN$, $E = M \oplus iM \oplus jM \oplus kM$; respectivamente.

Demostración :

a) Sea Ξ la familia de los subespacios propiamente complejos de E, que es no vacía puesto que $\{0\} \in \Xi$. Ξ está parcialmente ordenada por inclusión.

Sea $\{F_\alpha, \alpha \in A\}$ una subfamilia de Ξ totalmente ordenada, veamos que tiene elemento maximal : $F = \bigcup_{\alpha \in A} F$ es C-subespacio de E por estar la subfamilia considerada totalmente ordenada; y es propiamente complejo puesto que si $x \in F \cap jF$, se tiene :

$x = x_{\alpha_1}$ $x_{\alpha_1} \in F_{\alpha_1}$, $x = jx_{\alpha_2}$ $x_{\alpha_2} \in F_{\alpha_2}$, sea

$\beta = \text{máx}\{\alpha_1, \alpha_2\}$ $\Rightarrow$ $x \in F_\beta \cap jF_\beta = \{0\}$ $\Rightarrow$ $x = 0$.

Aplicando el lema de Zorn, existe un elemento maximal N en Ξ . Consideremos $N \oplus jN = G$. G es C-subespacio y verifica $jG = jN \oplus (-N) = N \oplus jN = G$; es decir G es H-subespacio de E.

Supongamos que $E \supset N \oplus jN$ estrictamente, existirá entonces $y \in E$ / $y \notin G$; y puesto que G es H-subespacio $(H\cdot\{y\}) \cap G = \{0\}$ Consideremos el C-subespacio $(C\cdot\{y\}) \oplus N = L$. L es propiamente complejo : $x \in L \cap jL$ $\Rightarrow$

$$x = (\lambda_0 + i\lambda_1)y + v_0 \ , \ v_0 \in N$$

$$x = j\big((\lambda_2 + i\lambda_3)y + v_1\big) \ , \ v_1 \in N$$

$$(\lambda_0 + i\lambda_1)y + v_0 = j\big((\lambda_2 + i\lambda_3)y + v_1\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda_0 + i\lambda_1 - j\lambda_2 + k\lambda_3)y = v_0 - jv_1 \Rightarrow \lambda y = v \ , \text{ con } \lambda \in H \ , \ v \in G$$

como $(H\cdot\{y\}) \cap G = \{0\}$ se tendrá por tanto $\lambda = 0$,ó $v = 0$, En ambos casos : $x = v_0$, $x = jv_1$ $\Rightarrow$ $v_0 = v_1 = 0$ $\Rightarrow$ $x = 0$.

Hemos llegado a contradicción puesto que N es maximal y se tiene que $L \supset N$, con L propiamente complejo. Por tanto :

$_0E = N \oplus jN$.

b) Con análogo razonamiento al de la parte a) podemos probar que si N es un espacio vectorial complejo, existe un subespacio propiamente real de N , tal que $N_0 = M + iM$, con $M \cap iM = \{0\}$.

Consideremos como N el subespacio propiamente complejo del apartado a). Entonces M es subespacio propiamente estrictamente real. En efecto : M es R-subespacio de E y verifica

$M \cap iM = \{0\} \Rightarrow jM \cap kM = \{0\}$; y puesto que $N \cap jN = \{0\}$

tenemos que $M \cap jM = \{0\}$, $M \cap kM = \{0\}$, $iM \cap kM = \{0\}$, $iM \cap jM = \{0\}$.

Ademas : $E_0 = M + iM + jM + kM$, ya que $\forall x \in E$

$x = x_1 + jx_2$ $x_1 , x_2 \in N$ (de manera única), $x_1 = x_{11} + ix_{12}$

$x_2 = x_{21} + ix_{22}$ $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \in M$ (de manera única), por tanto $x = x_{11} + ix_{12} + j(x_{21} + ix_{22}) = x_{11} + ix_{12} + jx_{21} - kx_{22}$ (de manera única).

Consideremos a continuación el dual algebráico E^* de E, que será un espacio vectorial a la derecha sobre H. Tiene, por tanto sentido considerar el subyacente real de E^* que denotaremos por $(E^*)_0$. Por otra parte el dual de E_0 lo denotaremos por $(E_0)^*$.

<u>1.6 Proposición :</u> $(E_0)^*$ y $(E^*)_0$ son isomorfos .

Demostración :

Sea $f \in (E^*)_0$. Podemos expresar

$f(x) = f_0(x) + if_1(x) + jf_2(x) + kf_3(x)$, $\forall x \in E$; donde

$f_0, f_1, f_2, f_3 \in (E_0)^*$.

Considerando $f(ix) = f_0(ix)+if_1(ix)+jf_2(ix)+kf_3(ix)$, teniendo en cuenta que $f(ix) = if(x)$, e identificando obtenemos :

$f_1(x) = -f_0(ix)$. Analogamente para j y k obtenemos :

$f_2(x) = -f_0(jx)$; $f_3(x) = -f_0(kx)$ $\forall x \in E$.

Por lo que podemos expresar :

$$f(x) = f_0(x) - if_0(ix) - jf_0(jx) - kf_0(kx) \quad \forall x \in E \tag{1}$$

Observemos que $f_0(x) = \mathrm{Re}(f(x))$ $\forall x \in E$; donde Re denota la aplicación R-lineal de $H \to R$ definida por $\mathrm{Re}(\lambda) = \lambda_0$ si $\lambda = \lambda_0 + i\lambda_1 + j\lambda_2 + k\lambda_3$.

Vamos aprobar que la aplicación $\phi: (E^*)_0 \to (E_0)^*$ definida por $f \in (E^*)_0 \to \phi(f) = \mathrm{Re}\circ f$ es un isomorfismo.

ϕ es R-lineal por serlo Re , y es inyectiva en virtud de la expresión (1) . Para probar que es sobre, consideraremos la la aplicación $\psi: (E_0)^* \to (E^*)_0$ definida por :

$f_0 \in (E_0)^* \to \psi(f_0)$; donde

$$\psi(f_0)\ (x) = f_0(x) - if_0(ix) - jf_0(jx) - kf_0(kx) \quad \forall x \in E$$

$\psi(f_0) \in (E^*)_0$. En efecto $\psi(f_0)\ (x+y) = \psi(f_0)(x) + \psi(f_0)(y)$

$$\begin{aligned}\psi(f_0)(ix) &= f_0(ix) - if_0(-x) + jf_0(kx) - kf_0(jx) = \\ &= i(f_0(x) - if_0(ix) - jf_0(jx) - kf_0(kx)) = \\ &= i(\psi(f_0)(x))\end{aligned}$$

Análogamente para j y para k ; por tanto

$$\psi(f_0)(\lambda x) = \lambda(\psi(f_0)\ (x) \quad \forall \lambda \in H \quad , \forall x \in E$$

Por otra parte, $\psi\circ\phi = \phi\circ\psi = I$. Por tanto si $f_0 \in (E_0)^* \Longrightarrow$ $\Longrightarrow f_0 = \phi(\psi(f_0))$. Es decir ϕ es sobre y se tiene $\psi = \phi^{-1}$

A los hiperplanos de E los denominaremos H-hiperplanos y a los de E_0 R-hiperplanos. Las proposiciones siguientes son consecuencias inmediatas de I.6.

I.7 Proposición : Si M es un H-hiperplano homogeneo de E de ecuación $f(x) = 0$, $f \in E^*$; se tiene que $M = M_0 \cap iM_0 \cap jM_0 \cap kM_0$ siendo M_0 el R-hiperplano de E de ecuación $(\phi(f))(x) = 0$.

Reciprocamente, si M_0 es un R-hiperplano homogeneo de E de ecuación $f_0(x) = 0$, $f_0 \in (E_0)^*$; $M = M_0 \cap iM_0 \cap jM_0 \cap kM_0$ es un H-hiperplano homogeneo de E de ecuación $\psi(f_0)(x) = 0$.

I.8 Proposición ; Si M es un H-hiperplano afín de E de ecuación $f(x) = \lambda_0 + i\lambda_1 + j\lambda_2 + k\lambda_3$, $f \in E^*$, se tiene que

$M = M_0 \cap M_1 \cap M_2 \cap M_3$; siendo M_0 ,M_1 ,M_2 ,M_3 los R-hiperplanos afines de **E** de ecuaciones respectivas: $\phi(f)(x)= \lambda_0$,$\phi(f)(ix)=-\lambda_1$ $\phi(f)(jx)=-\lambda_2$, $\phi(f)(kx)=-\lambda_3$

PRELIMINARES TOPOLOGICOS .

Consideraremos en H el valor absoluto que define en el cuerpo la aplicación $\lambda=\lambda_0+i\lambda_1+j\lambda_2+k\lambda_3 \rightarrow |\lambda|=\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}$. Tambien consideraremos en H la topología asociada a este valor absoluto, que dota a H de estructura de espacio topológico localmente compacto y separado.

Por tanto, si E es un espacio vectorial a la izquierda sobre H, son aplicables las definiciones y proposiciones relativas a espacios vectoriales topológicos sobre cuerpos topológicos, en particular sobre cuerpos valorados. (V.C. [4])

1.9 **Definición** : Un espacio vectorial E a la izquierda sobre H, se dice que es un espacio vectorial topológico, si está dotado de una topología tal que se verifica :

E.V.T. I .- La aplicación $(x,y) \rightarrow x+y$, de $E \times E \rightarrow E$ es continua.

E.V.T. II.- La aplicación $(\lambda,x) \rightarrow \lambda x$, de $H \times E \rightarrow E$ es continua.

Una topología sobre E que verifica E.V.T. I y E.V.T. II se dice que es compatible con la estructura de espacio vectorial de E sobre H.

(Observación : Si una topología sobre E es compatible con la estructura de espacio vectorial de E sobre H, es en particular compatible con la estructura de E_0 sobre R ; ya que la topología que induce en R la de H , es la usual de R.)

En las proposiciones siguientes E representará un espacio vectorial a la izquierda sobre H.

<u>1.10 Proposición :</u> Una topología τ compatible con la estructura de espacio vectorial de E_0 es compatible con la estructura de espacio vectorial de E sobre H, si y solo si, los automorfismos u_1 y u_2 de (1.1) son continuos para τ .

Demostración :

Si τ es compatible con la estructura de espacio vectorial de E sobre H , verifica en particular E.V.T.II, y por tanto los automorfismos u_1 ,u_2 son continuos para τ.

Reciprocamente, sea τ compatible con la estructura de espacio vectorial real de E_0 , y supongamos u_1 ,u_2 continuos para τ. Puesto que $u_3 = u_1 u_2$, u_3 tambien será continuo para τ.

Tenemos entonces, que la aplicación $(x,y) \to x+y$ de $E \times E \to E$ es continua, y por la asociatividad de la suma tambien es continua la aplicación $(x_1,x_2,x_3,x_4) \to x_1+x_2+x_3+x_4$ de $E \times E \times E \times E \to E$. Sea $\lambda \in H$ $\lambda=\lambda_0+\lambda_1 i+\lambda_2 j+\lambda_3 k$, la aplicación $(\lambda,x) \to (\lambda_0 x,\lambda_1 ix,\lambda_2 jx,\lambda_3 kx)$ de $H\times E \to E\times E\times E\times E$ es continua,por ser continua por componentes y puesto que la aplicación $(\lambda_0 x,\lambda_1 ix,\lambda_2 jx,\lambda_3 kx) \to \lambda_0 x+\lambda_1 ix+\lambda_2 jx+\lambda_3 kx$ es continua seguñ vimos anteriormente, tenemos que tambien se verifica E.V.T. II .

Supongamos a continuación,E dotado de una topología compatible con la estructura de espacio vectorial sobre H. Tendremos que el dual topológico de E será un H-subespacio de E^* y que denotaremos por E'. Analogamente el dual topológico de E_0 para la topología considerada será un subespacio de $(E_0)^*$ que denotaremos por $(E_0)'$.

<u>1.11 Proposición :</u> $(E_0)'$ y $(E')_0$ son isomorfos.

Demostración :

Bastará probar que la restricción de ϕ a $(E')_0$es un isomorfismo entre $(E')_0$ y $(E_0)'$.

Teniendo en cuenta que según (1.6) podemos expresar

$f(x) = \phi(f)(x) - i\phi(f)(ix) - j\phi(f)(jx) - k\phi(f)(kx) \quad \forall x \in E$

tenemos que si $\phi(f)$ es continua f tambien es continua ; es decir $f_0 \in (E_0)' \Rightarrow \psi(f_0) \in (E')_0$. Y reciprocamente, por ser la aplicación $\lambda \in H \to Re(\lambda)$ continua de $H \to R$ tenemos que si $f \in (E')_0 \Rightarrow \phi(f) \in (E_0)'$. Por tanto, ψ es un isomorfismo entre $(E_0)'$ y $(E')_0$.

Como consecuencia obtenemos el siguiente resultado :

1.12 Proposición : Todo H-hiperplano cerrado de E es intersección de R-hiperplanos cerrados de E .

Demostración :

Es consecuencia inmediata de (1.7) , (1.8) y (1.11) .

Por último, dentro de este apartado, estableceremos los resultado que por ser válidos para espacios vectoriales sobre cuerpos valorados, lo serán para espacios vectoriales a la izquierda sobre H. Las demostraciones que omitamos pueden encontrarse en [4]; §1, 5 .

1.13 Definición : Una parte $M \subset E$ se dice H-equilibrada si $\lambda M \subset M$ $\forall \lambda \in H$ $|\lambda| \leq 1$. Si $N \subset E$, se llama cápsula H-equilibrada de N y se denota por $\mathcal{E}(N)$ al menor conjunto H-equilibrado de E que contiene a N, y es igual a $\bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda N$.

Si $0 \in N$ se define el núcleo H-equilibrado de N y se denota por $\kappa(N)$ al mayor subconjunto de N H-equilibrado ; y es igual a $\bigcup_{|\lambda| \geq 1} \lambda N$

Una consecuencia inmediata de la definición anterior es que si $M \subset E$ es H-equilibrado es en particular R-equilibrado (equilibrado en E_0). Y que $M \subset E$ es H-equilibrado si y solo si es R-equilibrado y verifica $\lambda M \subset M$ $\forall \lambda \in H$ $|\lambda| = 1$.

1.14 Proposición : Sea $M \subset E$, se verifica :

I) .- $\mathcal{E}(\mu M) = \mu \mathcal{E}(M)$ $\forall \mu \in H$

II).- Si E está dotado de una topología compatible con la estructura de espacio vectorial de E sobre H, y Hausdorff ; entonces si M es compacto $\mathcal{E}(M)$ es compacto.

Demostración :

Por la razón que indicamos anteriormente sólo demostraremos

I) . Demostración de I) : $x \in \mathcal{E}(\mu M) \Rightarrow x = \lambda\mu y$, $y \in M$, $\lambda \in H$ $|\lambda| \leq 1$. Podemos poner $x = \lambda\mu y = \mu(\mu^{-1}\lambda\mu)y = \mu\alpha y$ donde $\alpha \in H$ $|\alpha| \leq 1 \Rightarrow x \in \mu\,\mathcal{E}(M)$. Reciprocamente ; $x \in \mu\,\mathcal{E}(M) \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \mu\lambda y$, $\lambda \in H$ $|\lambda| \leq 1$, $y \in M$. Podemos poner $x = \mu\lambda\mu^{-1}\mu y = \alpha\mu y$, donde $\alpha \in H$ $|\alpha| \leq 1 \Rightarrow x \in \mathcal{E}(\mu M)$.

<u>I.15 Definición</u> : Una parte $A \subset E$ se dice que absorbe a una parte $B \subset E$ si $\exists \alpha > 0 \,/\, \lambda A \supset B$ $\forall \lambda \in H$ $|\lambda| \geq \alpha$. Una parte $B \subset E$ se dice H-absorbente, si absorbe a todos los conjuntos unitarios de E.

Una parte B E se dice acotada para una topología τ compatible con la estructura de espacio vectorial de E sobre H , si todos los entornos de 0 absorben a B.

Consecuencias inmediatas de esta definición, son :

I) .- Todo conjunto H-absorbente de E,es R-absorbente (absorbente en E_0).

II).- Si $A \subset E$ es H-equilibrado, entonces, A absorbe a $B \subset E$ si y solo si, $\exists \lambda$ H / $\lambda A \supset B$. En particular, si A es H-equilibrado, entonces, A es H-absorbente si y solo si, es R-absorbente.

<u>I.16 Proposición</u> : Si E está dotado de una topología τ , compatible con la estructura de espacio vectorial de E sobre H,existe un sistema fundamental de entornos cerrados de 0 para τ, $\mathcal{B}$, tal que :

E.V.T. I' .- Todo $V \in \mathcal{B}$ es H-absorbente y H-equilibrado.

E.V.T. II' .- $\forall V \in \mathcal{B}$ $\forall \lambda \in H, \lambda \neq 0$ $\lambda V \in \mathcal{B}$

E.V.T. III'.- $\forall V \in \mathcal{B}$ $\exists W \in \mathcal{B}$ tal que $W + W \subset V$.

Reciprocamente, si $\mathcal{B}$ es una base de filtro sobre E, verificando E.V.T. I' , E.V.T. II' , E.V.T. III' ; existe una única topología sobre E, compatible con la estructura de espacio vectorial de E sobre H, para la cual $\mathcal{B}$ es un sistema fundamental de entornos de 0.

<u>I.17 Proposición</u> : Si E está dotado de una topología τ, compati-

ble con la estructura de espacio vectorial de E sobre H, los conjuntos acotados de E y de E_0 son los mismos.

Demostración :

Es consecuencia inmediata de E.V.T. I' y de la consecuencia II de I.15.

CONJUNTOS CONVEXOS. CAPSULA CONVEXA.

En este apartado E representará un espacio vectorial a la izquierda sobre H.

<u>I.18 Definición :</u> Una parte $A \subset E$, diremos que es un conjunto convexo de E, si es un conjunto convexo de E_0 ; es decir, si $\forall \alpha, \beta \in R$ $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ $\alpha + \beta = 1$, y $\forall x, y \in A$ se tiene que $\alpha x + \beta y \in A$.

Puesto que en la definición de conjunto convexo de E , que hemos introducido, solamente interviene la estructura de espacio vectorial real de E_0 , las propiedades generales de los conjuntos convexos serán válidas para nuestro caso. Por tanto, enunciaremos las propiedades mas importantes, dando solamente, las demostraciones en aquéllas en las que intervenga la estructura de E sobre H.

<u>I.19 Proposición :</u> I) Si $A \subset E$ es convexo, tambien lo son $x + A$, $x \in E$, y λA $\forall \lambda \in H$.

II) La intersección de una familia de conjuntos convexos de E es un conjunto convexo de E.

III) $A \subset E$ es convexo , si y solo si se verifica que para todo conjunto finito x_α $1 \leq \alpha \leq n$,de elementos de A , y todo conjunto finito de elementos de R: r_α, tales que $r_\alpha \geq 0$ $1 \leq \alpha \leq n$, $\sum_{\alpha=1}^{n} r_\alpha = 1$,se tiene : $\sum_{\alpha=1}^{n} r_\alpha x_\alpha \in A$

Supongamos E dotado de una topología τ , compatible con la estructura de espacio vectorial de E sobre H, y por tanto con la estructura de espacio vectorial real de E .

IV) Si $A \subset E$ es convexo, tambien lo son : $\overset{\circ}{A}$ y $\bar{A}$.

Demostración :

Para probar la segunda parte de I), basta tener en cuenta que la aplicación $x \to \lambda x$, $\lambda \in H$ de $E \to E$ es una aplicación lineal en E_0 ,por ser R el centro de H.

1.20 Definición : Sea $A \subset E$, denominamos cápsula convexa de A al menor conjunto convexo de E que contiene a A ; y lo denotamos por $C(A)$. A $\overline{C(A)}$ lo denominamos cápsula convexa y cerrada de A .

1.21 Proposición : I) Sea A_α $\alpha \in \Omega$ una familia de conjuntos convexos de E. La cápsula convexa de $\bigcup_{\alpha\in\Omega} A_\alpha$ es el conjunto de las combinaciones lineales $\sum_{\alpha\in\Omega} r_\alpha x_\alpha$, tales que $x_\alpha \in A_\alpha$; $r_\alpha \in R$ $r_\alpha \geq 0$, $\sum_{\alpha\in\Omega} r_\alpha = 1$, siendo todos los r_α nulos excepto un número finito de ellos.

II) La cápsula convexa de $A \subset E$ está formado por las combinaciones lineales $\sum_{\beta\in\Lambda} r_\beta x_\beta$, donde $x_\beta \in A$ $\beta \in \Lambda$, $r_\beta \in R$, $r_\beta \geq 0$ $\sum_{\beta\in\Lambda} r_\beta = 1$ siendo todos los r_β nulos excepto un número finito de ellos.

CONJUNTOS H-ABSOLUTAMENTE CONVEXOS. CAPSULA H-ABSOLUTAMENTE CONVEXA.

Por E denotaremos a un espacio vectorial a la izquierda sobre H.

1.22 Definición : Sea $A \subset E$, decimos que A es H-absolutamente convexo si A es convexo y H-equilibrado; y decimos que A es

R-absolutamente convexo, si A es convexo y R-equilibrado (es decir si A es absolutamente convexo en E_0).

<u>1.23 Proposición :</u> Sea $A \subset E$, las proposiciones siguientes son equivalentes :

I) .- A es convexo y verifica $\forall \lambda \in H$, $|\lambda|=1 \Rightarrow \lambda A \subset A$.

II) .- A es H-absolutamente convexo .

III).- $\forall \lambda, \mu \in H$ / $|\lambda|+|\mu| \leq 1$; y $\forall x, y \in A \Rightarrow \lambda x + \mu y \in A$.

<u>Demostración :</u>

I) $\Rightarrow$ II) Tomando $\lambda = -1$, tenemos que $-A = A$. Por ser A convexo , tomando $a, -a \in A$, tenemos $1/2\, a + 1/2(-a) \in A \Rightarrow$ $\Rightarrow 0 \in A$. Por tanto, si $r \in R$, $0 \leq r \leq 1$ se tiene $rx \in A$, $\forall x \in A$ ya que A es convexo. Veamos por último que A es H-equilibrado : sea $\lambda \in H$, $\lambda \neq 0$ $|\lambda| \leq 1$; podemos poner $\lambda A = |\lambda|(\lambda|\lambda|^{-1}A) \subset A$. Si $\lambda = 0$, $\lambda A \subset A$ ya que segun vimos antes $0 \in A$

II) $\Rightarrow$ III) Sean $\lambda, \mu \in H$ / $|\lambda| + |\mu| \leq 1$; $x, y \in A$. Si $\lambda = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lambda x + \mu y \in A$, por ser A H-equilibrado. Si $\mu = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lambda x + \mu y \in A$, por ser A H-equilibrado. Si $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, podemos poner:

$$\lambda x + \mu y = (|\lambda| + |\mu|)\Big(|\lambda|(|\lambda|+|\mu|)^{-1}(\lambda|\lambda|^{-1}x) + $$
$$+ |\mu|(|\lambda|+|\mu|)^{-1}(\mu|\mu|^{-1}y)\Big)$$

y puesto que A es convexo y H-equilibrado se sigue que $\lambda x + \mu y \in A$.

III) $\Rightarrow$ I) Tomando en particular $\lambda, \mu \in R$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$; se sigue que A es convexo. Tomando $\lambda = 0$, $|\mu| = 1$ se sigue que $\mu A \subset A$.

<u>Corolario:</u> Si $A \subset E$ es H-absolutamente convexo, se verifica que para todo conjunto finito $\{x_\alpha, 1 \leq \alpha \leq n\}$, de elementos de A, y para todo conjunto finito $\{\lambda_\alpha, 1 \leq \alpha \leq n\}$ de elementos de H tal que que $\sum_{\alpha=1}^{n} |\lambda_\alpha| \leq 1$, se tiene que $\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha x_\alpha \in A$

Demostración :

Para $n = 1$ se verifica por ser A H-equilibrado.

Para $n = 2$ se verifica segun 1.23 .

Supongamoslo cierto para n-1. Sean x_α , $1 \leq \alpha \leq n$; $\lambda_\alpha \in H$ $\sum_{\alpha=1}^{n} |\lambda_\alpha| \leq 1$. Si $\sum_{\alpha=1}^{n} |\lambda_\alpha| = 0$ el resultado es cierto por ser A

H-equilibrado. Supongamos $\lambda = \sum_{\alpha=1}^{n-1}|\lambda_\alpha| \neq 0$, y denotemos $\mu_\alpha = \lambda_\alpha\lambda^{-1}$ $1 \leq \alpha \leq n-1$. Podemos expresar :

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha x_\alpha = \lambda\sum_{\alpha=1}^{n-1} \mu_\alpha x_\alpha + \lambda_n x_n \text{ . Como } \sum_{\alpha=1}^{n-1}|\mu_\alpha| = 1, \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ por la hipótesis de inducción que $\sum_{\alpha=1}^{n-1}\mu_\alpha x_\alpha \in A$; y puesto que $|\lambda| + |\lambda_n| = \sum_{\alpha=1}^{n} |\lambda_\alpha| \leq 1 \Longrightarrow \lambda \sum_{\alpha=1}^{n-1} \mu_\alpha x_\alpha + \lambda_n x_n \in A$

Por otra parte, la condición enunciada es suficiente, evidentemente.

<u>1.24 Proposición:</u> I) Si $A \subset E$ es H-absolutamente convexo, λA es H-absolutamente convexo $\forall \lambda \in H$.

II) La intersección de una familia arbitraria A_α $\alpha \in \Omega$, de conjuntos H-absolutamente convexos, es un conjunto H-absolutamente convexo.

III) El nucleo H-equilibrado de un conjunto convexo es H-absolutamente convexo.

Supongamos que E esté dotado de una topología compatible con la estructura de espacio vectorial de E sobre H, entonces :

IV) Si $A \subset E$ es H-absolutamente convexo, tambien lo son $\overline{A}$ y $\mathring{A}$.

Demostración :

I) En primer lugar, λA es convexo según 1.19 (I) . Por otra parte : sea $\mu \in H$, $|\mu| = 1$; y supongamos $\lambda \neq 0$ (ya que si $\lambda = 0$ el resultado es trivial). Podemos poner :

$$\mu\lambda A = \lambda\lambda^{-1}\mu\lambda A = \lambda\beta A. \text{ Como } |\beta| = |\lambda^{-1}||\mu||\lambda| = |\mu| = 1$$

y A es H-equilibrado se tiene que $\beta A \subset A$ y por tanto $\mu(\lambda A) \subset \lambda A$.

II) Es consecuencia inmediata del hecho de que el resultado es cierto para conjuntos equilibrados en general, y para conjuntos convexos (1.19 (II)).

III) Basta tener en cuenta que el nucleo H-equilibrado de un conjunto A , es igual a $\bigcap_{|\lambda|\geq 1} \lambda A$; y el resultado se obtiene como consecuencia de las partes I) y II) de la proposición.

IV) En primer lugar $\overline{A}$ y $\mathring{A}$ son convexos, según 1.19 (IV). Bastará, según 1.23, probar que si $\lambda \in H$, $|\lambda| = 1 \Longrightarrow \lambda\overline{A} \subset \overline{A}$, $\lambda\mathring{A} \subset \mathring{A}$.

Sea $x \in \overline{A}$; puesto que la aplicación $x \to \lambda x$, es continua como consecuencia de E.V.T, II. se tiene que si W es un entorno de λx , existe un entorno V de x tal que : $\lambda V \subset W$. Puesto que $x \in \overline{A}$, se tiene que $V \cap A \neq \emptyset$. Sea $z \in V \cap A \Rightarrow \lambda z \in W$, y $\lambda z \in A$ ya que A es en particular H-equilibrado, por tanto $\lambda z \in W \cap A \Rightarrow W \cap A \neq \emptyset$; y como es cierto para todo entorno de λx, se tiene que $\lambda x \in \overline{A}$.

Analogamente, si $\mathring{A} \neq \emptyset$, sea $x \in \mathring{A} \Rightarrow \exists V$, entorno de x tal que $V \subset A$ y podemos tomar V H-equilibrado en virtud de 1.16 y por tanto $\lambda x \in \lambda V \subset V \subset A \Rightarrow \lambda x \in \mathring{A}$.

1.25 Definición : Sea $A \subset E$, denominamos cápsula H-absolutamente convexa de A, y la denotamos por $\Gamma(A)$, al menor conjunto H-absolutamente convexo de E que contiene a A .

Denominamos cápsula R-absolutamente convexa, y la denotamos por $\Gamma_0(A)$, a la capsula absolutamente convexa de A en E_0 .

A $\overline{\Gamma(A)}$ y $\overline{\Gamma_0(A)}$, las denominamos cápsula H-absolutamente convexa y cerrada, cápsula R-absolutamente convexa ycerrada, respectivamente.

1.26 Proposición : Sea $A \subset E$, se tiene que $\Gamma(A) = C(\mathcal{E}(A))$.

Demostración :

Sea $B \subset E$, B H-absolutamente convexo y $B \supset A$, entonces $B \supset C(\mathcal{E}(A))$, y por tanto $\Gamma(A) \supset C(\mathcal{E}(A))$.

Reciprocamente, veamos que $C(\mathcal{E}(A))$ es H-absolutamente convexo: en primer lugar, $C(\mathcal{E}(A))$ es convexo por ser la cápsula convexa de un conjunto; bastará probar, entonces, que si $\lambda \in H$ $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda C(\mathcal{E}(A)) \subset C(\mathcal{E}(A))$. Sea $x \in C(\mathcal{E}(A))$, según 1.13 y 1.21(II), $x = \sum_{\alpha=1}^{n} r_\alpha(\mu_\alpha x_\alpha)$ con $r_\alpha \geq 0$, $1 \leq \alpha \leq n$, $\sum_{\alpha=1}^{n} r_\alpha = 1$; $\mu_\alpha \in H$, $|\mu_\alpha| \leq 1$, $1 \leq \alpha \leq n$; $x_\alpha \in A$.

$$\lambda x = \lambda \sum_{\alpha=1}^{n} r_\alpha(\mu_\alpha x_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{n} r_\alpha(\lambda\mu_\alpha x_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{n} r_\alpha(\beta_\alpha x_\alpha) \quad \text{con}$$

$\sum_{\alpha=1}^{n} r_\alpha = 1$, $r_\alpha \geq 0$; $\beta_\alpha \in H$, $|\beta_\alpha| = |\lambda||\mu_\alpha| \leq 1$. Por tanto , $\lambda x \in C(\mathcal{E}(A))$. Puesto que $C(\mathcal{E}(A))$ es H-absolutamente convexo y $C(\mathcal{E}(A)) \supset A \Rightarrow \Gamma(A) \subset C(\mathcal{E}(A))$. Por tanto : $\Gamma(A) = C(\mathcal{E}(A))$.

<u>Corolario :</u> Si $A \subset E$ es H-equilibrado se tiene que $\Gamma(A) = C(A)$.

<u>1.27 Proposición :</u> Sea $A \subset E$. $\Gamma(A)$ está formado por las combinaciones lineales $\sum_{\alpha \in \Omega} \lambda_\alpha x_\alpha$, donde $x_\alpha \in A$, $\alpha \in \Omega$; $\lambda_\alpha \in H$, $\alpha \in \Omega$ $\sum_{\alpha \in \Omega} |\lambda_\alpha| \leq 1$, siendo todos los λ_α nulos excepto un número finito de ellos.

Demostración :

Denotemos por $T = \{ \sum_{\alpha \in \Omega} \lambda_\alpha x_\alpha \; ; \; x_\alpha \in A \, , \lambda_\alpha \in H, \; \sum_{\alpha \in \Omega} |\lambda_\alpha| \leq 1,$

$\lambda_\alpha = 0$ excepto unnúmero finito $\}$

$T \supset A$, evidentemente; y según 1.23 T está contenido en todo conjunto H-absolutamente convexo que contenga a A. Bastará, por tanto, probar que T es H-absolutamente convexo.

Sean λ , $\beta \in H$ / $|\lambda| + |\beta| \leq 1$; y sean $\sum_{\alpha \in \Omega} \lambda_\alpha x_\alpha$, $\sum_{\alpha \in \Omega} \mu_\alpha x_\alpha \in T$

$$\lambda \sum_{\alpha \in \Omega} \lambda_\alpha x_\alpha + \beta \sum_{\alpha \in \Omega} \mu_\alpha x_\alpha = \sum_{\alpha \in \Omega} (\lambda \lambda_\alpha + \beta \mu_\alpha) x_\alpha \quad , \text{ donde } x_\alpha \in A,$$

$$\sum_{\alpha \in \Omega} |\lambda \lambda_\alpha + \beta \mu_\alpha| \leq |\lambda| \sum_{\alpha \in \Omega} |\lambda_\alpha| + |\beta| \sum_{\alpha \in \Omega} |\mu_\alpha| \leq |\lambda| + |\beta| \leq 1 \text{ , y}$$

$(\lambda \lambda_\alpha + \beta \mu_\alpha) = 0$ excepto un número finito. Por tanto,

$\lambda \sum_{\alpha \in \Omega} \lambda_\alpha x_\alpha + \beta \sum_{\alpha \in \Omega} \mu_\alpha x_\alpha \in T \implies T$ es H-absolutamente convexo.

(Observación : las expresiones que hemos tomado de los elementos de T ,en la demostración,no suponen pérdida de generalidad ya que casi todos los λ_α, μ_α son nulos).

ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS,LOCALMENTE CONVEXOS, SOBRE H

En este apartado, E representará un espacio vectorial a la izquierda sobre H.

<u>1.28 Definición :</u> Sea τ una topología en E, compatible con la

estructura de espacio vectorial de E sobre H, decimos que E,τ es un espacio vectorial topológico, localmente convexo si E_0,τ es un espacio vectorial topológico, loclmente convexo. Abreviadamente, diremos simplemente que τ es una topología localmente convexa de E.

1.29 Proposición : Si E,τ es un espacio vectorial topológico, localmente convexo; existe un sistema fundamental de entornos de 0, H-absolutamente convexos y cerrados.

Demostración :

Por ser E_0,τ espacio vectorial topológico, localmente convexo, existe un sistema fundamental de entornos de 0 R-absolutamente convexos y cerrados. Sea V entorno de 0, R-absolutamente convexo y cerrado. Según 1.16 , existe $W\subset V$, entorno de 0 H-equilibrado ; puesto que V es convexo se tiene $C(W)\subset V$, y según el corolario de 1.26 $\Gamma(W) = C(W) \subset V$. Por último, $\overline{\Gamma(W)} \subset V$ por ser V cerrado . $\overline{\Gamma(W)}$ es H-absolutamente convexo según 1.24 (IV) .

1.30 Proposición : Sea $\mathfrak{G}$ una base de filtro sobre E, formada por conjuntos H-absolutamente convexos y H-absorbentes . La familia $\mathcal{B} = \{rB \ / \ r>0 \ , \ B\in\mathfrak{G}\}$, es un sistema fundamental de entornos de 0 para una topología localmente convexa de E .

Demostración :

Puesto que $\mathfrak{G}$ es en particular una base de filtro sobre E formada por conjuntos R-absolutamente convexos y R-absorbentes, sabemos que ([4], II, §4, 1) la familia $\mathcal{B} = \{rB \ / \ r>0, \ B\in\mathfrak{G}\}$ es una base de entornos de 0 para una topología localmente convexa de E_0 . Bastará, por tanto, según 1.10, probar que para esta topología de E_0 , las aplicaciones u_1 , u_2 de 1.1 , son continuas; y ésto es consecuencia inmediata del hecho de ser los conjuntos de $\mathcal{B}$ H-absolutamente convexos .

Vamos a debilitar las hipótesis de 1.30, en el sentido de que una base de filtro sobre E_0 , formada por conjuntos R-absolutamente convexos y R-absorbentes, también determina en E una to pología localmente convexa, compatible con la estructura de espacio vectorial de E sobre H.

1.31 Proposición : Sea $\mathfrak{S}_0$ una base de filtro sobre E_0, formada por conjuntos R-absolutamente convexos y R-absorbentes. Sea $\mathfrak{S}$ la familia formada por las cápsulas H-absolutamente convexas de los conjuntos de $\mathfrak{S}_0$. Se verifica que la familia :
$\mathcal{B} = \{ rB \ / \ r>0 \ , \ B \in \mathfrak{S} \}$ es un sistema fundamental de entornos de 0, para una topología localmente convexa de E.

Demostración :

Bastará probar que $\mathfrak{S}$ verifica las hipótesis de 1.30 .

$\mathfrak{S}$ es base de filtro sobre E :

En efecto , $\Gamma(U) \supset U \ \forall U \in \mathfrak{S}$; y $\Gamma(U \cap V) \subset \Gamma(U) \cap \Gamma(V)$ $\forall U,V \in \mathfrak{S}$.

$\Gamma(U)$ es H-absolutamente convexo $\forall U \in \mathfrak{S}$.

$\Gamma(U)$ es H-absorbente $\forall U \in \mathfrak{S}$: U R-absorbente => $\Gamma(U)$ R-absorbente; y puesto que $\Gamma(U)$ es en particular H-equilibrado se tiene según 1.15 (II) que $\Gamma(U)$ es H-absorbente.

A continuación vamos a estudiar las seminormas en E , a partir de las propiedades de las seminormas en espacios vectoriales reales.

1.32 Definición : LLamamos H-seminorma de E , a toda aplicación $q : x \to q(x)$, de $E \to R^+$ que verifique :

S.I) $q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$, $\forall \lambda \in H \quad \forall x \in E$

S.II) $q(x+y) \leqslant q(x) + q(y)$, $\forall x,y \in E$

(Observación:Nuestra definición es un caso particular del concepto de seminorma que se define en espacios vectoriales sobre cuerpos valorados ([4]; II, 1, 1). La variación en la notación es debida a la necesidad que tenemos de distinguir las seminormas de E de las de E_0. A éstas últimas las denominaremos R-seminormas de E. Obsérvese tambien, que una R-seminorma de E es H-seminorma si y solo si $q(\lambda x) = q(x)$, $\forall \lambda \in H \ \ |\lambda|=1$, $\forall x \in E$. Por último, es evidente que toda H-seminorma de E es,en particular R-seminorma de E.)

<u>1.33 Proposición</u> : Una condición necesaria y suficiente, para que una familia Λ de R-seminormas de E defina una topología localmente convexa de E , es que se verifique :

para cada $q \in \Lambda$, existen q_α , $p_\alpha \in \Lambda$, $1 \leqslant \alpha \leqslant n$; y $k \geqslant 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{ll} q(ix) \leqslant k \sup\limits_{1\leqslant\alpha\leqslant n} q_\alpha(x) & \forall x \in E \\ q(jx) \leqslant k \sup\limits_{1\leqslant\alpha\leqslant n} p_\alpha(x) & \forall x \in E \end{array}\right\} \quad (*)$$

Demostración :

La familia Λ de R-seminormas define una topología τ localmente convexa de E_0 . ([4], II, §4, 1)

Según I.10 y I.28 , para probar que τ es una topología localmente convexa de E es necesario y suficiente que las aplicaciones u_1 , u_2 de I.1 sean continuas para τ . Ahora bien, puesto que las aplicaciones u_1 , u_2 son lineales de $E_0 \to E_0$ las condiciones (*) del enunciados son necesarias y suficientes para que u_1 , u_2 sean continuas para τ . ([4], II, §1, 4)

<u>Corolario</u> : Sea Λ una familia filtrante de H-seminormas de E.

Se verifica :

I) La topología τ que define sobre E_0 , es una topología localmente convexa de E.

II) Los conjuntos $B_{(q,\varepsilon)} = \{ x \in E \ / \ q(x) < \varepsilon \ , \ \varepsilon \geqslant 0, \ q \in \Lambda \}$ forman un sistema fundamental de entornos de 0, para τ , H-absolutamente convexos.

Observación : La noción de "filtante" está considerada en el preorden: $p \preccurlyeq q$ si existe $k \geqslant 0$ tal que $p(x) \leqslant kq(x) \ \forall x \in E$, en el conjunto de todas las R-seminormas de E . Siguiendo la notación de ([4]).

Demostración :

I) Por ser H-seminormas verifican, en particular, las condiciones (*) de (I.33)

II) Sabemos por ([4], II, §1, 1) , que los conjuntos : $B_{(q,\varepsilon)} = \{ x \in E \ / \ q(x) < \varepsilon \ , \ \varepsilon \geqslant 0, \ q \in \Lambda \}$ forman un sistema fundamental de entornos de 0 para τ. Bastará, por tanto, probar que estos conjuntos son H-absolutamente convexos.

Sean λ , $\beta \in H$ / $|\lambda| + |\beta| \leqslant 1$; $\forall x,y \in B_{(q,\varepsilon)}$

$$q(\lambda x + \beta y) \leqslant q(\lambda x) + q(\beta y) = |\lambda| q(x) + |\beta| q(y) <$$

$$< (|\lambda|+|\beta|)\varepsilon \leqslant \varepsilon \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lambda x + \beta y \in B_{(q,\varepsilon)} .$$

__1.34 Proposición :__ Si τ es una topología localmente convexa de E , τ puede ser definida por una familia filtrante de H-seminormas.

Demostración :

τ es en particular una topología localmente convexa de E_0. Sabemos por ([4], II, §4, 1) que τ puede ser definida por una familia filtrante de R-seminormas , formada por las jaujas de un sistema fundamental de entornos de 0,R-absolutamentes convexos y R-absorbentes.

Puesto que por 1.30 sabemos que podemos tomar un sistema de entornos de 0 H-absolutamente convexos y H-absorbentes ya que τ ,es por hipótesis, topología localmente convexa de E; bastará probar que la jauja de un conjunto H-absolutamente convexo y H-absorbente es una H-seminorma de E.

Sea $A \subset E$ H-absolutamente convexo y H-absorbente. La jauja p_A de A está definida por :

$$p_A(x) = \inf \{r \in R^+ / \ x \in rA \} , \quad \forall x \in E$$

Sea $\lambda \in H$,$\lambda \neq 0$ $\qquad p_A(\lambda x) = p_A(\lambda|\lambda|^{-1}|\lambda|x) = |\lambda| p_A(\lambda|\lambda|^{-1}x)$

Pobemos que $p_A(\lambda|\lambda|^{-1}x) = p_A(x)$:

$$p_A(\lambda|\lambda|^{-1}x) = \inf \{ r \in R^+ / \ \lambda|\lambda|^{-1}x \in rA \} =$$

$$= \inf \{ r \in R^+ / \ x \in \lambda^{-1}|\lambda| rA \} .$$

Puesto que $||\lambda^{-1}|\lambda|| = 1$ y A es H-equilibrado se tiene que

$$x \in \lambda^{-1}|\lambda| rA \iff x \in rA \ ; \text{ y por tanto } \ p_A(\lambda|\lambda|^{-1}x) = p_A(x).$$

__1.35 Proposición :__ Sea $M \subset E$, H-absolutamente convexo y H-absorbente. Para que una H-seminorma p de E sea la jauja de M, es necesario y suficiente que se verifique : $M_1 \subset M \subset M_2$; donde

$M_1 = \{ x \in E \ / \ p(x) < 1 \}$, $M_2 = \{ x \in E \ / \ p(x) \leqslant 1 \}$.

Demostración :

Sea p una H-seminorma en E, y supongamos que $M_1 \subset M \subset M_2$. Denotemos por q la jauja de M.

Si $p(x) = h$, $h \neq 0$; tenemos $\forall r \in R$, $r > h$ que

$p(x) < r \Rightarrow p({}^1/_r\, x) < 1 \Rightarrow {}^1/_r\, x \in M_1 \Rightarrow x \in rM$

y $\forall r \in R^+$, $r < h$ $r \neq 0$ $p(x) > r \Rightarrow p({}^1/_r\, x) > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow {}^1/_r\, x \notin M_2 \Rightarrow x \notin rM \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \inf \{ r \in R^+ / \ x \in rM \} = q(x)$.

Recíprocamente , si suponemos $p(x) = q(x)$ $\forall x \in E$, tenemos que si $x \in M_1 \Rightarrow p(x) = h < 1 \Rightarrow q(x) = h \Rightarrow$ $x \in rM \subset M$, $h<r<1$. Si $x \in M \Rightarrow q(x) \leqslant 1 \Rightarrow p(x) \leqslant 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in M_2$.

<u>1.36 Proposición :</u> Sean E_1, E_2 dos espacios vectoriales a la izquierda sobre H , dotados de las topologías τ_1, τ_2 definidas respectivamente, por las familias de H-seminormas Λ_1 , Λ_2 . Las condiciones siguientes son equivalentes :

I) $S \subset \mathcal{L}_c(E_1, E_2)$, S es equicontinuo.

II) Para toda H-seminorma $q \in \Lambda_2$ existe una H-seminorma p de Λ_1 y $k \geqslant 0$ tal que : $q(v(x)) \leqslant kp(x)$, $\forall x \in E$, $\forall v \in S$.

III) Para toda H-seminorma q de Λ_2 $\sup\limits_{v \in S} q \circ v$ es una H-seminorma continua en E_1 .

Demostración :

Basta considerar los subyacentes reales respectivos $(E_1)_0$ y $(E_2)_0$; tener en cuenta que Λ_1, Λ_2 son en particular familias de seminormas en $(E_1)_0$ y en $(E_2)_0$ respectivamente , y que

$\mathcal{L}_c(E_1, E_2) \subset \mathcal{L}_c((E_1)_0, (E_2)_0)$. El resultado se sigue, entonces de ([4], II, §1, 4) .

<u>Corolario :</u> Si E está dotado de una topología localmente definida por la familia de H-seminormas Λ , se tiene que :

$f \in E' \iff \exists q \in \Lambda \ / \ |f(x)| \leq kq(x) \ , \ k \geq 0 \ ; \forall x \in E.$

TEOREMA DE HAHN-BANACH.

En este apartado estableceremos el teorema de Hahn-Banach y sus consecuencias , para un espacio vectorial a la izquierda sobre H. Procederemos de forma análoga a como se procede para pasar del teorema de Hahn-Banach para espacios vectoriales reales a espacio vectoriales complejos.

Los resultados para el caso real se suponen conocidos y pueden encontrarse las demostraciones en ([4]).

E representará un espacio vectorial a la izquierda sobre H.

<u>1.37 Proposición :</u> (Teorema de Hahn-Banach)

Sea p una H-seminoema en E, F un H-subespacio de E, y $f \in F^*$ tal que $|f(y)| \leq p(y)$ $\forall y \in F$. Existe $f_1 \in E^*$ tal que $|f_1(x)| \leq p(x)$ $\forall x \in E$; siendo f_1 una prolongación de f .

Demostración :

Sea ψ el isomorfismo de $(F_0)^* \to (F^*)_0$, de 1.6. Puesto que $f \in (F^*)_0 \implies \psi^{-1}(f) = g \in (F_0)^*$.

Puesto que p es en particular una R-seminorma en E , es decir una seminorma en E_0 ; $|g(y)| \leq |f(y)| \leq p(y)$ $\forall y \in F$, y como F es en particular subespacio de E_0 , por el teorema de Hahn-Banach para el caso real , tenemos que existe $g_1 \in (E_0)^*$, prolongación de g y que verifica : $|g_1(x)| \leq p(x)$ $\forall x \in E_0$.

Consideremos $f_1 = \psi(g_1)$. En primer lugar veamos que f_1 prolonga a f :

$$\forall x \in F \quad f_1(x) = \psi(g_1(x)) = g_1(x) - ig_1(ix) - jg_1(jx) - kg_1(kx) =$$
$$= g(x) - ig(ix) - jg(jx) - kg(kx) = \psi(g)(x) = f(x).$$

Además f_1 verifica :

Si $f_1(x) \neq 0$, tomando $\lambda = |f_1(x)|(f_1(x))^{-1}$, se tiene

$\lambda \in H$, $|\lambda| = 1$. Podemos poner :

$$|f_1(x)| = |f_1(x)|(f_1(x))^{-1}(f_1(x)) = f_1(\lambda x) = |\mathrm{Re}\ f_1(\lambda x)| =$$
$$= |\psi^{-1}(f_1)(\lambda x)| = |g_1(\lambda x)| \leq p(\lambda x) = p(x).$$

Si $f_1(x) = 0$ tambien se verifica evidentemente.

Corolario 1 : Si E está dotado de una topología τ , compatible con la estructura de espacio vectorial de E sobre H ; p es una H-seminorma de E ; y $x_0 \in E$; existe, entonces, $f \in E'$, tal que $f(x_0) = p(x_0)$ y $|f(x)| \leq p(x)$ $\forall x \in E$.

Demostración :

Consideremos como F el H-subespacio de E : $H\cdot\{x_0\}$ y definamos $f : F \to H$ por $f(\lambda x_0) = \lambda p(x_0)$

Según 1.36 , existe $f_1 \in E^*$ que prolonga a f y verifica $|f_1(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in E$. Teniendo en cuente el Corolario de 1.35 y que p es H-seminorma continua , se tiene que $f \in E'$.

Corolario 2 : Supongamos E dotado de una topología localmente convexa, y sea F un H-subespacio de E. Entonces, si $f \in F'$, existe $f_1 \in E'$ que prolonga a f .

Demostración :

Teniendo en cuenta el Corolario de 1.35 , existe una H-seminorma p de las que definen la topología de E , tal que $|f(x)| \leq p(x)$, x F . Según 1.36 existe f_1 E^* , que prolonga f y verifica $|f_1(x)| < p(x)$, $\forall x \in E$. Teniendo en cuenta nuevamente el Corolario de 1.35, se tiene que $f_1 \in E'$.

Corolario 3 : Supongamos E dotado de una topología localmente convexa y Hausdorff. Sea F un H-subespacio de E de dimensión finita; existe, entonces, un H-subespacio cerrado de E, suplementario topológico de F en E.

Demostración :

Sabemos, por ([4], III, §6, 2), que para que F admita un suplementario topológico es necesario y suficiente la aplicación identidad en F , se prolongue a una aplicación H-lineal continua de

E sobre F .

Consideremos el subyacente real F_0 de F , que es un subespacio de E_0 de dimensión finita ya que $\dim F_0 = 4\dim F$, por ser F de dimensión finita .

Puesto que el resultado es válido para el caso real, F_0 admite un suplementario topológico en E_0, y por tanto, la aplicación identidad en F_0 admite una extensión a una aplicación H-lineal de $E_0 \to F_0$.

Denotemos por J_0 la aplicación R-lineal y continua de E_0 sobre F_0 , extensión de la identidad sobre F_0 .

Definimos la aplicación $J : E \to F$, de la forma siguiente : $J(x) = {}^1/_4\,(\, J_0(x) - iJ_0(ix) - jJ_0(jx) - kJ_0(kx)\,) \quad \forall x \in E$

La alicación $x \in E \to J(x)$ es una aplicación H-lineal y continua de E sobre F , y que prolonga a la identidad en F :

J es H-lineal :

$$J(ix) = {}^1/_4\,(\, J_0(ix) + iJ_0(x) + jJ_0(kx) - kJ_0(jx)\,) =$$
$$= {}^1/_4\, i\,(\, J_0(x) - iJ_0(ix) - jJ_0(jx) - kJ_0(kx)\,) =$$
$$= iJ(x) \quad , \qquad \forall x \in E$$

analogamente se obtiene que $J(jx) = jJ(x)$; $J(kx) = kJ(x)$, $\forall x \in E$. Por tanto, $J(\lambda x) = \lambda J(x)\ \forall \lambda \in H$, $\forall x \in E$.

J es continua por ser J_0 continua y por verificarse E.V.T. II.

J es una extensión de la identidad sobre F :

$$J(x) = {}^1/_4\,(\, x - i(ix) - j(jx) - k(kx)\,) = x \ , \quad \forall x \in F$$

puesto que J_0 es la identidad sobre F_0 , y F es H-subespacio.

<u>I.38 Proposición</u> : Supongamos E dotado de una topología compatible con la estructura de espacio vectorial de E sobre H. Sea $A \subset E$, abierto, convexo, no vacío, y disjunto con el H-subespacio F no vacío. Existe, entonces, un H-hiperplano cerrado que contiene a F y es disjunto con A.

Demostración :

Teniendo en cuenta que el resultado es válido para el caso real ([4], II, §5, 1); y puesto que F es en particular R-subespacio, es decir subespacio de E_0 , y A es convexo y abierto, existe un R-hiperplano cerrado L_0 tal que : $F_0 \subset L_0$, $L_0 \cap A = \emptyset$

Consideremos $L = L_0 \cap iL_0 \cap jL_0 \cap kL_0$; teniendo en cuenta 1.7 , 1.11 , tenemos que L es un H-hiperplano cerrado que verifica :

$F_0 = iF_0 \subset iL_0$; $F_0 = jF_0 \subset jL_0$; $F_0 = kF_0 \subset kL_0$, ya que F es H-subespacio. Por tanto, $F_0 \subset L$, y puesto que $L_0 \cap A = \emptyset$ se tiene además que $L \cap A = \emptyset$.

Corolario 1 : Si E está dotado de una topología localmente convexa, compatible con la estructura de espacio vectorial de E sobre H, se verifica que todo H-subespacio cerrado de E, es la intersección de todos los H-hiperplanos que lo contienen.

Demostración :

Sea F un H-subespacio cerrado de E. Para cada $x \notin F$, existe un entorno de 0 abierto, convexo, y tal que $(x + V) \cap F = \emptyset$.

Según 1.38 existe un H-hiperplano cerrado de E, que contiene a F y es disjunto con $(x+V)$ y por tanto no contiene a x.

Por tanto la intersección de todos los H-hiperplanos cerrados de E que contienen a F es disjunta con F^c , y de aquí el resultado.

1.39 Proposición : Supongamos E dotado de una topología compatible con la estructura de espacio vectorial de E sobre H. Si $A \subset E$ es abierto, H-absolutamente convexo, y no vacío; y $B \subset E$ es convexo, no vacío, y disjunto con A; existe, entonces, $f \in E'$ y $\alpha > 0$ tal que $|f(x)| < \alpha \ \forall x \in A$, $|f(x)| \geq \alpha \ \forall x \in B$.

Demostración :

Puesto que este resultado es válido para el caso real con las hipótesis correspondientes ([4], II, §5, 2), y teniendo en cuenta que A es en particular R-absolutamente convexo, tenemos que existe $g \in (E_0)'$ y $\alpha > 0$ tal que $|g(x)| < \alpha \ \forall x \in A$, y $|g(x)| \geq \alpha \ \forall x \in B$.

Considerando $f = \psi(g) \in E'$, tenemos que :

$|f(x)| \geq |g(x)| \geq \alpha$, $\forall x \in B$. Por otra parte, si $x \in A$ y $f(x) \neq 0$, podemos poner :

$|f(x)| = |f(x)|(f(x))^{-1}f(x) = f(\lambda x) = g(\lambda x) = |g(\lambda x)|$; donde $\lambda = |f(x)|(f(x))^{-1}$, verifica $\lambda \in H$, $|\lambda| = 1$. Puesto que A es en particular H-equilibrado, tenemos que $\lambda x \in A$, y por tanto que $|f(x)| = |g(\lambda x)| < \alpha$.

Si $f(x) = 0$ verifica, evidentemente, $|f(x)| < \alpha$.

<u>1.40 Proposición</u> : Supongamos E dotado de una topología localmente convexa, compatible con la estructura de espacio vectorial de E sobre H. Si $A \subset E$ es cerrado y H-absolutamente convexo; $B \subset E$ es compacto, convexo, no vacío, y disjunto con A ; existe, entonces, $f \in E'$ y $\alpha > 0$ tal que : $|f(x)| < \alpha \ \forall x \in A$, $|f(x)| > \alpha \ \forall x \in B$.

Demostración :

Teniendo en cuenta que el resultado es válido para el caso real ([4], II,§2, 5), la demostración es totalmente análoga a la de 1.39 .

CAPITULO II

DUALIDAD

PARES DUALES

II.1 Definición : Sea F un espacio vectorial a la izquierda sobre H, y sea G un espacio vectorial a la derecha sobre H.

Si tenemos definida una H-forma H-bilineal $B : F \times G \to H$, decimos que F y G forman un par respecto de B.

Si además, B verifica :

S_1) $x \in F$, $x \neq 0$ $\Rightarrow$ $\exists y \in G$ / $B(x,y) \neq 0$; decimos que B separa puntos en F.

Analogamente, si B verifica :

S_2) $y \in G$, $y \neq 0$ $\Rightarrow$ $\exists x \in F$ / $B(x,y) \neq 0$; decimos que B separa puntos en G.

Por último, si B verifica S_1 y S_2 decimos que F y G están en dualidad mediante B; o simplemente, que $(F,G\ ;\ B)$ forman un par dual .

II.2 Proposición : Si F y G están en dualidad mediante la H-forma H-bilineal B ; F_0 y G_0 están en dualidad respecto de la R-forma R-bilineal $B_0 = \mathrm{Re} \circ B$, que además verifica :

$$B_0(ix,y) = B_0(x,yi) \ ; \quad B_0(jx,y) = B_0(x,yj) \ , \qquad \forall x \in F \ , \ \forall y \in G \ .$$

Reciprocamente, si F_0 y G_0 están en dualidad mediante una R-forma R-bilineal B_0, que verifique :

$$B_0(ix,y) = B_0(x,yi) \quad ; \quad B_0(jx,y) = B_0(x,yj) \ , \quad \forall x \in F_0 \ , \forall y \in G_0 ;$$

entonces, F y G están en dualidad mediante la H-forma H-bilineal B , definida por :

$$B(x,y) = B_0(x,y) - iB_0(ix,y) - jB_0(jx,y) - kB_0(kx,y)$$

$\forall x \in F \ , \ \forall y \in G$.

Demostración :

Sean F y G en dualidad mediante B, para todo $(x,y) \in F \times G$ podemos expresar :

$$B(x,y) = B_0(x,y) + iB_1(x,y) + jB_2(x,y) + kB_3(x,y) \quad , \quad \text{donde}$$

B_0 ,B_1 ,B_2 ,B_3 son R-formas R-bilineales definidas en $F \times G$.

Considerando :

$$B(ix,y) = B_0(ix,y) + iB_1(ix,y) + jB_2(ix,y) + kB_3(kx,y) \quad ,$$

$\forall x \in F$, $\forall y \in G$; y teniendo en cuenta que :

$$B(ix,y) = iB(x,y) = iB_0(x,y) - B_1(x,y) + kB_2(x,y) - jB_3(x,y) \ ,$$

$\forall x \in F$, $\forall y \in G$; identificando obtenemos :

$$B_1(x,y) = - B_0(ix,y) \quad , \forall x \in F \ , \forall y \in G \ .$$

Procediendo analogamente con $B(jx,y)$ y $B(kx,y)$, obtenemos

$$B_2(x,y) = - B_0(jx,y) \quad , \quad B_3(x,y) = - B_0(kx,y) \ ; \ \forall x \in F \ , \ \forall y \in G.$$

Por otra parte, considerando $B(x,yi)$, $B(x,yj)$, $B(x,yk)$, y procediendo de forma análoga , obtenemos :

$$B_1(x,y) = - B_0(x,yi) \quad ; \ B_2(x,y) = - B_0(x,yj) \quad ; \ B_3(x,y) = - B_0(x,yk)$$

$\forall x \in F$, $\forall y \in G$.

Por tanto, identificando obtenemos :

$$B_0(ix,y) = B_0(x,yi) \qquad \forall x \in F \ , \ \forall y \in G \ .$$

$$B_0(jx,y) = B_0(x,yj) \qquad \forall x \in F \ , \ \forall y \in G \ .$$

(Observese que $B_0(kx,y) = B_0(x,yk)$ $\forall x \in F$, $\forall y \in G$, es consecuencia de las dos igualdades anteriores ; y y que es convecional el escribir la igualdades para i y j , pudiendose hacer tambien para i y k , o para j y k .)

Veamos a continuación, que B_0 separa puntos en F_0 y en G_0:
si $y \in G_0$ y $B_0(x,y) = 0$, $\forall x \in F_0 \Rightarrow B(x,y) = 0$, $\forall x \in F \Rightarrow$

$\Rightarrow y=0$ por S_2 ; por tanto B_0 separa puntos en G_0
si $x \in F_0$ y $B_0(x,y) = 0$, $\forall y \in G_0 \Rightarrow B(x,y) = 0$, $\forall y \in G \Rightarrow$

$\Rightarrow x=0$ por S_1 ; por tanto B_0 separa puntos en F_0

Reciprocamente, consideremos la aplicación $B : F \times G \to H$ definida por :

$$B(x,y) = B_0(x,y) - iB_0(ix,y) - jB_0(jx,y) - kB_0(kx,y) ,$$
$\forall (x,y) \in F \times G$.

La aplicación B así definida es una H-forma H-bilineal definida en $F \times G$:

En efecto , evidentemente B verifica $\forall x_1,x_2 \in F$, $\forall y \in G$
$B(x_1+ x_2, y) = B(x_1,y) + B(x_2,y)$; y $\forall x \in F$, $\forall y_1,y_2 \in G$
$B(x , y_1+ y_2) = B(x,y_1) + B(x,y_2)$.

Para probar que $B(\lambda x,y) = \lambda B(x,y)$ $\forall \lambda \in H$, $\forall (x,y) \in F \times G$, bastará probar que
$B(ix,y) = iB(x,y)$; $B(jx,y) = jB(x,y)$; $B(kx,y) = kB(x,y)$, $\forall (x,y) \in F \times G$. Y para probar que $B(x,y\lambda) = B(x,y)\lambda$ $\forall \lambda \in H$, $\forall (x,y) \in F \times G$, bastará probar que
$B(x,yi) = B(x,y)i$; $B(x,yj) = B(x,y)j$; $B(x,yk) = B(x,y)k$, $\forall (x,y) \in F \times G$. En virtud de la R-bilinealidad de B_0 .

$$B(ix,y) = B_0(ix,y) + iB_0(x,y) + jB_0(kx,y) - kB_0(jx,y) =$$
$$= i(B_0(x,y) - iB_0(ix,y) - jB_0(jx,y) - kB_0(kx,y))=$$
$$i(B(x,y)) ; \qquad \forall (x,y) \in F \times G$$

$$B(x,yi) = B_0(x,yi) - iB_0(ix,yi) - jB_0(jx,yi) - kB_0(kx,yi) =$$
$$= B_0(ix,y) + iB_0(x,y) - jB_0(kx,y) + kB_0(jx,y) =$$
$$= (B_0(x,y) - iB_0(ix,y) - jB_0(jx,y) - kB_0(kx,y))i =$$
$$= (B(x,y))i \qquad \forall (x,y) \in F \times G$$

Analogamente se prueba para j, y para k.

Por último, veamos que B verifica $S_1)$ y $S_2)$:
Si $x \in F$, $x \neq 0$, como B_0 separa puntos en F_0 por hipótesis se tiene que $\exists y \in G_0$ / $B_0(x,y) \neq 0 \Rightarrow B(x,y) \neq 0$.
Si $y \in G$, $y \neq 0$, como B_0 separa puntos en G_0 por hipotesis se

tiene que $\exists x \in F \;/\; B_0(x,y) \neq 0 \implies B(x,y) \neq 0$.

<u>II.3 Definición :</u> Dado un par dual $(F,G\,;B)$, a $(F_0,G_0;B_0)$ (con la notación de II.2) le llamamos par dual subyacente .

A continuación estudiaremos dos casos particulares importantes depares duales.

Si F es un espacio vectorial a la izquierda sobre H, sabemos que el dual algebraico F^* , de F, es un espacio vectorial a la derecha sobre H. En $F \times F^*$, podemos definir la H-forma H-bilineal : $(x,y^*) \in F \times F^* \rightarrow \ll x,y^* \gg$, donde $\ll x,y^* \gg = y^*(x)$. A esta H-forma H-bilineal la denominamos <u>H-forma H-bilineal canónica en $F \times F^*$</u> .

Para probar que $(F,F^*\,;\ll\ \gg)$ forman un par dual, estudiaremos en primer lugar una caracterización de $\ll\ \gg_0$, y utilizando los resultados conocidos del caso real sobre el par dual que forman un espacio vectorial real y su dual algebraico, estableceremos que $(F,F^*\,;\ll\ \gg)$ forma un par dual.

<u>II.4 Proposición :</u> Si denotamos por $<\ >$ la R-forma R-bilineal canónica en $F_0 \times (F_0)^*$ se verifica :

$$\ll x,y^* \gg_0 = <x,\psi^{-1}(y^*)> \qquad \forall (x,y^*) \in F \times F^*$$

donde ψ es el isomorfismo entre $(F_0)^*$ y $(F^*)_0$ de I.6.

Demostración :

$$\ll x,y^* \gg_0 = \mathrm{Re} \ll x,y^* \gg = \mathrm{Re}(y^*(x)) = \psi^{-1}(y^*)(x) = <x,\psi^{-1}(y^*)>$$

$\forall (x,y^*) \in F \times F^*$.

(Observación : Al mismo resultado llegamos si tenemos en cuenta que según II.3 $(F_0,(F^*)_0;\ll\ \gg_0)$ forman un par dual real y por tanto podemos identificar $(F^*)_0$ con un un R-subespacio de $(F_0)^*$ que resulta ser todo el $(F_0)^*$, y el isomorfismo el propio ψ . Por último, téngase en cuenta que si identificamos $(F_0)^*$ con $(F^*)_0$ quedan identificadas las dualidades $<F_0,(F_0)^*>$ y $\ll F_0,(F^*)_0 \gg_0$).

II.5 Proposición : F y F^* están en dualidad mediante la H-forma H-bilineal canónica .

Demostración :

Según II.2 bastará probar que la R-forma R-bilinear $\ll\ \gg_0$ separa puntos en F_0 y en $(F^*)_0$

Sea $x \in F_0$, como $<\ >$ separa puntos en F_0 , tenemos que si $x \neq 0$, $\exists y_0 \in (F_0)^*$ tal que $<x,y_0> \neq 0$. Y por II.4 tenemos $\ll x,\psi(y_0)\gg_0 = <x,y_0> \neq 0 \implies \ll x,\psi(y_0)\gg \neq 0$, con $\psi(y_0) \in F^*$.

Analogamente, si $y^* \in (F^*)_0$ $y^* \neq 0 \implies \psi^{-1}(y^*) \neq 0$, $\psi^{-1}(y^*) \in (F_0)^*$
Como $<\ >$, separa puntos en $(F_0)^*$ tenemos que existe $x \in F_0$ / $<x,\psi^{-1}(y^*)> \neq 0$. Y por II.4 tenemos

$\ll x,y^*\gg_0 = <x,\psi(y^*)> \neq 0 \implies \ll x,y^*\gg_0 \neq 0 \implies$
$\implies \ll x,y^*\gg \neq 0$.

Otro caso importante de par dual, es si consideramos a F dotado de una topología localmente convexa, compatible con la estructura de espacio vectorial de F sobre H. En este caso el dual topológico de F , F', es un H-subespacio de F^*, y por tanto, podemos considerar la restricción de la H-forma H-bilineal canónica sobre $F \times F^*$, a $F \times F'$, que seguiremos llamando H-forma H-bilineal canónica sobre $F \times F'$. Según I.11 , sabemos que la restricción de ψ a $(F_0)'$ es un isomorfismo entre $(F_0)'$ y $(F')_0$, por lo que tenemos la proposición siguiente, análoga a II.4 :

II.6 Proposición : Si denotamos por $<\ >$, la restrcción de la R-forma R-bilineal canónica sobre $F_0 \times (F_0)^*$, a $F_0 \times (F_0)'$, se verifica :

$$\ll x,y'\gg_0 = <x,\psi^{-1}(y')> , \quad \forall (x,y') \in F \times F' .$$

(Obsérvese que si identificamos $(F_0)^*$ con $(F^*)_0$, según indicamos en II.4, quedan tambien identificados, $(F_0)'$ y $(F')_0$.)

Puesto que en general F' será un H-subespacio de F^* , tenemos que la H-forma H-bilineal canónica sobre $F \times F'$, separará puntos en F', pero en general no los separará en F; en la proposición siguiente, damos una condición necesaria y suficiente para que la H-forma H-bilineal canónica separe puntos en F.

II.7 Proposición : Supongamos F dotado de una topologia τ , localmente convexa, compatible con la estructura de espacio vectorial de E sobre H . Entonces, F y F' forman un par dual respecto de la H-forma Hbilineal canónica, si y sólo si, τ es de Hausdorff.

Demostración :

Suponemos conocido que la proposición es válida para el caso real con las hipótesis correspondientes.

Si τ es de Hausdorff, F_0 y $(F_0)'$ forman un par dual respecto de la R-forma R-bilineal canónica $< \;\; >$. Teniendo en cuenta II.6 , y con un razonamiento totalmente análogo al de II.5, tenemos que $(F,F' ; \ll \;\; \gg)$ forman un par dual.

Reciprocamente, si $(F,F' ;\ll \;\; \gg)$ forman un par dual, teniendo en cuenta II.6, se tiene que $(F_0,(F_0)';< >)$ forman un par dual; y por tanto , τ es de Hausdorff.

La proposición que vamos a probar a continuación, pone de manifiesto como pueden extenderse los resultados válidos para los pares duales reales, a nuestro caso, utilizando para su demostración la validez de los resultados a probar, para los pares duales subyacentes.

II.8 Proposición : Sea $(F,G ;B)$ un par dual, y sean $\{y_\alpha\}$ $1\leq\alpha\leq n$, n vectores de G, H-linealmente independientes. Entonces, existen n vectores de F (necesariamente H-linealmente independientes) tales que $B(x_\gamma,y_\alpha) = \delta_{\gamma\alpha}$ $(\gamma,\alpha=1,\ldots,n)$.

Demostración :

Consideremos el conjunto $\{z_\alpha\}$, $1 \leq\alpha\leq 4n$, donde :

$z_\alpha = y_\alpha$, si $1 \leq \alpha \leq n$,
$z_\alpha =(y_{\alpha-n})i$ si $n+1 \leq \alpha \leq 2n$
$z_\alpha =(y_{\alpha-2n})j$ si $2n+1 \leq \alpha \leq 3n$
$z_\alpha =(y_{\alpha-3n})k$ si $3n+1 \leq \alpha \leq 4n$

Puesto que el conjunto $\{y_\alpha\}$, $1 \leq \alpha \leq n$, es H-linealmente independiente, el conjunto $\{z_\alpha\}$, $1 \leq \alpha \leq 4n$, es R-linealmente independiente; es decir el conjunto $\{ z_\alpha\}$, $1 \leq \alpha \leq 4n$, es un conjunto de $4n$ vectores linealmente independientes en G_0 . Teniendo en cuenta que la proposición es válida en el caso real, ([13] ,IV,1,1), y considerando el par dual subyacente $(F_0,G_0;B_0)$, tenemos que existen $4n$ vectores de F_0 , $\{x_\gamma\}$, $1 \leq \gamma \leq 4n$, tales que :

$B_0(x_\gamma,z_\alpha) = \delta_{\gamma\alpha}$, $(\gamma,\alpha=1,\ldots,4n)$.

Teniendo en cuenta II.2 , y cómo se han definido los z_α , se tiene :

$$B_0(x_\gamma,y_\alpha) = \delta_{\gamma\alpha} \quad , \quad (\gamma,\alpha=1,\ldots,n)$$
$$B_0(ix_\gamma,y_\alpha) = B_0(x_\gamma,y_\alpha i) = B_0(x_\gamma,z_{\alpha+n}) = 0 \qquad (\gamma,\alpha=1,\ldots,n)$$
$$B_0(jx_\gamma,y_\alpha) = B_0(x_\gamma,y_\alpha j) = B_0(x_\gamma,z_{\alpha+2n})= 0 \qquad (\gamma,\alpha=1,\ldots,n)$$
$$B_0(kx_\gamma,y_\alpha) = B_0(x_\gamma,y_\alpha k) = B_0(x_\gamma,z_{\alpha+3n})= 0 \qquad (\gamma,\alpha=1,\ldots,n)$$

y por tanto :

$$B(x_\gamma,y_\alpha) = \delta_{\gamma\alpha} \quad , \quad (\gamma,\alpha=1,\ldots,n) \ .$$

Un corolario inmediato es el siguiente :

<u>Corolario</u> : Sean $f_\alpha \in F^*$, $\alpha =1,\ldots,n$; y $g \in F^*$, tales que $\bigcap_{\alpha=1}^{n} \mathrm{Ker}(f_\alpha) \subset \mathrm{Ker}(g)$. Entonces, g es combinación H-lineal de las f_α .

POLARIDAD

En la noción de "polar", no existe una uniformidad de criterios para los diversos autores, ya que algunos ([5]), ([9]), distinguen la noción de "polar" y de "polar absoluta" para el caso real,mientras que otros (V.G. [8]) utilizan el término de"polar" para el caso real, y "polar absoluta" para el caso complejo.

Nosotros adoptaremos una notación consecuente con la que venimos utilizando, y que al igual que ([8]) distingue las polares según se trate de espacios vectoriales sobre R o sobre H .

En este apartado supondremos que $(F,G;B)$ forman un par dual.

II.9 Definición : Sea $A\subset F$, al conjunto $\{y\in G/|B(x,y)|<1, \forall x\in A\}$ lo denominamos H-polar de A y lo denotamos por $|A^\circ|$.

Al conjunto $\{y\in G/ |B_0(x,y)|<1, \forall x\in A\}$, lo denominamos R-polar de A y lo denotamos por A°.

(Observación: en el caso de las dualidades $\langle F_0,(F_0)^*\rangle$ y $\langle\langle F_0,(F^*)_0\rangle\rangle$, si $A\subset F$ y denotamos por $A^\square$ y A° las R-polares respectivas, se verifica evidentemente que $\psi(A^\square)=A^\circ$)

II.10 Proposición : I)Sea $A\subset F$. La H-polar de A es la R-polar de la cápsula H-equilibrada de A.

II)La H-polar de un conjunto $M\subset F$, es siempre un conjunto H-absolutamente convexo.

Demostración :

I) Tenemos que probar que $|A^\circ| = (\mathcal{E}(A))^\circ$

Si $y\in|A^\circ| \implies |B(x,y)|<1, \forall x\in A \implies$

$\implies |B(\lambda x,y)| = |\lambda||B(x,y)| \leq |B(x,y)| < 1 \quad \forall x\in A, \forall\lambda\in H\ |\lambda|\leq 1$

$\implies |B_0(\lambda x,y)| < 1 \quad \forall x\in A \implies y\in(\mathcal{E}(A))^\circ$.

Si $y\in(\mathcal{E}(A))^\circ \implies |B_0(\lambda x,y)| < 1 \quad \forall x\in A, \forall\lambda\in H\ |\lambda|\leq 1$

Si $B(x,y)\neq 0$, con $x\in A$, podemos poner

$|B(x,y)| = |B(x,y)|(B(x,y))^{-1}B(x,y) = B(\lambda x,y) = |B_0(\lambda x,y)| <1$,

ya que $\lambda\in H$, $|\lambda|=1$.

Por otra parte, si $B(x,y)=0$, con $x\in A$, tambien se verifica evidentemente que $|B(x,y)|<1$.

Por tanto, $y\in|A^\circ|$.

II) $\forall y,z\in|A^\circ|$, $\forall\lambda,\mu\in H$ $|\lambda|+|\mu|\leq 1$ tenemos que

$|B(x,y\lambda+z\mu)| \leq |B(x,y)||\lambda| + |B(x,z)||\mu| < |\lambda|+|\mu| \leq 1 \implies$

$\implies y\lambda+z\mu\in|A^\circ| \implies |A^\circ|$ es H-absolutamente convexo.

Corolario 1 : Si $A\subset F$, y A es H-equilibrado; entonces, $|A^\circ| = A^\circ$

Corolario 2 : La H-bipolar de $A\subset F$: $||A^\circ|^\circ|$, es la R-bipolar de la cápsula H-equilibrada de A.

II.11 Proposición : (Teorema de la H-bipolar). Sea $A \subset F$. La H-bipolar de A es la cápsula H-absolutamente convexa y cerrada para $\sigma(F_0,G_0)$ de A .

Demostración :

Según el Corolario 2 de II.10, tenemos que $||A^\circ|^\circ| = (\mathcal{E}(A))^{\circ\circ}$.

Teniendo en cuenta, que en particular, $\mathcal{E}(A) \subset F_0$ y que la R-bipolar de $\mathcal{E}(A)$ es la bipolar en la dualidad real subyacente, tenemos , según el teorema de la bipolar para el caso real ([8], 3, §3), que $(\mathcal{E}(A))^{\circ\circ}$ es la cápsula R-absolutamente convexa y cerrada para $\sigma(F_0,G_0)$ de $\mathcal{E}(A)$. Por tanto,

$$||A^\circ|^\circ| = (\mathcal{E}(A))^{\circ\circ} = \overline{C(\mathcal{E}(A))} = \overline{\Gamma(A)} \quad (\text{para } \sigma(F_0,G_0))$$

en virtud de I.26.

(Observación : En II.14 probaremos que $\sigma(F_0,G_0) = \sigma(F,G)$, por lo que la proposición anterior guarda una total analogía con el teorema de la bipolar para el caso real).

$\mathfrak{S}$-TOPOLOGIAS

En este apartado supondremos que $(F,G\,;B)$ forman un par dual. Supondremos a G identificado con un H-subespacio de F^*, mediante la aplicación $y \in G \rightarrow y^* \in F^*$, siendo $y^*: x \in B \rightarrow B(x,y)$, y por tanto B identificada con la restricción a F x G de la H-forma H-bilineal canónica sobre $F \times F^*$.

Asímismo supondremos identificadas las dualidades reales $(F_0,(F^*)_0;\ll\ \gg_0)$ y $(F_0,(F_0)^*;<\ >)$ según las relaciones de II.4 .

Un papel muy importante van a desempeñar, en este apartado, dos teoremas del caso real que vamos a enunciar como lemas, y cuyas demostraciones pueden encontrarse en [8] .

Sean F_1,F_2,G_1,G_2, espacios vectoriales reales, formando los pares duales $(F_1,G_1;B_1)$ y $(F_2,G_2;B_2)$.

LEMA 1 : Una aplicación lineal u, de F_1 en F_2, es continua para $\sigma(F_1,G_1)$, $\sigma(F_2,G_2)$ si y solo si, $u^t(G_2) \subset G_1$.
(Por u^t denotamos la aplicación traspuesta de la u, respecto de las dualidades $(F_1,(F_1)^*;< >)$, $(F_2,(F_2)^*;< >)$.)

LEMA 2 : Sea u una aplicación lineal, debilmente continua de F_1 en F_2. Sean $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ familias saturadas de subconjuntos $\sigma(F_1,G_1)$, $\sigma(F_2,G_2)$ acotados (respectivamente de F_1 y de F_2); y denotemos por τ_1, τ_2 las $\mathfrak{S}$-topologías respectivas en G_1 y en G_2. Entonces, u^t es continua de (G_2,τ_2) en (G_1,τ_1) si y solo si, $u(\mathfrak{S}_1) \subset \mathfrak{S}_2$.

II.12 Proposición : La topología $\sigma(F_0,G_0)$ es una topología localmente convexa, compatible con la estructura de espacio vectorial de F sobre H.

Demostración :

Según I.10, y I.28 bastará probar que las aplicaciones R-lineales u_1,u_2 definidas en I.1 son continuas para $\sigma(F_0,G_0)$.

Considerando en el lema 1 : $F_1 = F_2 = F_0$, y $G_1 = G_2 = G_0$; y las aplicaciones u_1, u_2 sucesivamente, bastará probar que
$u_1^t(G_0) \subset G_0$, $u_2^t(G_0) \subset G_0$.

Según II.2 tenemos que :
$u_1^t(y^*) = y^*i$, $\forall y^* \in G_0$
$u_2^t(y^*) = y^*j$, $\forall y^* \in G_0$

Por último, puesto que G_0 es subyacente de un espacio vectorial sobre H, tenemos que :
$u^t(G_0) = G_0 i = G_0$; $u^t(G_0) = G_0 j = G_0$.

II.13 Definición : LLamamos topología débil, definida por la dualidad $(F,G ;\ll \gg)$ en F, a la topología localmente convexa de F menos fina de las que $F' = G$; y la denotamos por $\sigma(F,G)$.

II.14 Proposición : Con las notaciones anteriores, se verifica : $\sigma(F,G) = \sigma(F_0,G_0)$.

Demostración :

Según la proposición II.12, tenemos que $\sigma(F,G) \leqslant \sigma(F_0,G_0)$.

Por otra parte, $\sigma(F,G)$ es, en particular, una topología localmente convexa de F_0, tal que $(F_0)' = G_0$, (suponiendo G_0 identificado con $\psi^{-1}(G_0)$), por tanto, $\sigma(F_0,G_0) \leqslant \sigma(F,G)$.

En virtud del resultado que acabamos de obtener, el estudio de las propiedades relativas a la topología $\sigma(F,G)$ se reduce, mediante la dualidad subyacente, al caso real.

Asi por ejemplo, quedan inmediatamente establecidos los resultados siguientes :

Una familia de R-seminormas que definen la topología $\sigma(F,G)$ son las $\{p_A\}$ / $A = \{y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^* \;/\; y_\alpha^* \in G\}$

$$p_A(x) = \sup_{y_\alpha^* \in A} |\ll x, y_\alpha^* \gg| \qquad , \forall x \in F .$$

Si G_1 es un H-subespacio de G, la H-forma Hbilineal canónica pone en dualidad a F y G_1, si y solo si, G_1 es $\sigma(G,F)$-denso en G. Además, si $G_1 \subset G$ estrictamente, $\sigma(F,G_1)$ es estrictamente menos fina que $\sigma(F,G)$.

II.15 Proposición : La topología $\tau(F_0,G_0)$ es una topología, localmente convexa, compatible con la estructura de espacio vectorial de F sobre H.

Demostración :

Analogamente a II.12, bastará probar que u_1, u_2 son continuas para $\tau(F_0,G_0)$.

Teniendo en cuenta que $\tau(F_0,G_0)$ es una $\mathfrak{S}$-topología, donde $\mathfrak{S}$ es la envoltura saturada de la familia de los subconjuntos de G_0, $\sigma(G_0,F_0)$-compactos, convexos y equilibrados, para probar la proposición, utilizaremos convenientemente el lema 2.

Consideremos en el lema 2 , $F_1 = F_2 = G_0$; $G_1 = G_2 = F_0$ y como aplicación lineal u , las aplicaciones u_1^t , u_2^t sucesivamente; es decir las aplicaciones :

$u_1^t : y^* \in G_0 \quad \to \quad y^*i$

$u_2^t : y^* \in G_0 \quad \to \quad y^*j$

y por tanto $u^t = u_1$, $u^t = u_2$ sucesivamente.

Por análogo razonamiento al de II.12, las aplicaciones u_1^t , u_2^t son $\sigma(G_0,F_0)$-continuas , por lo que, si $A \subset G$ es $\sigma(G_0,F_0)$--compacto, se tiene que $u_1^t(A)$, $u_2^t(A)$ tambien son $\sigma(G_0,F_0)$-compactos.

Además, si A es absolutamente convexo , $u_1^t(A)$, $u_2^t(A)$, tambien son absolutamente convexos , por ser u_1^t , u_2^t R-lineales, es decir lineales de G_0 en G_0 .

Por último, si B es subconjunto de un conjunto $A \subset G_0$, siendo A $\sigma(G_0,F_0)$-compacto y absolutamente convexo, se tiene, según lo anterior, que $u_1^t(B)$,$u_2^t(B)$ son subconjuntos de conjuntos de G_0 $\sigma(G_0,F_0)$-compactos ,y absolutamente convexos.

Puesto que la envoltura saturada de la familia de los conjuntos de G_0 $\sigma(G_0,F_0)$-compactos, y absolutamente convexos,se obtiene añadiendo todos los subconjuntos de los elementos de la familia (([13],pag.137)), tenemos según lo anterior que :

$u_1^t(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{S}$, $u_2^t(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{S}$.

Aplicando el lema 2 , obtenemos que u_1,u_2 son continuas para $\tau(F_0,G_0)$, como queríamos probar.

<u>II.16 Definición</u> : LLamamos topología de Mackey, definida por la dualidad $(F,G ;\ll \gg)$ en F, a la topología localmente convexa de F mas fina de las que $F' = G$; y la denotamos por $\tau(F,G)$.

<u>II.17 Proposición</u> : Con las notaciones anteriores, se verifica : $\tau(F,G) = \tau(F_0,G_0)$.

Demostración :

Según la proposición II.15, tenemos que :

$\tau(F,G) \leqslant \tau(F_0,G_0)$.

Por otra parte, $\tau(F,G)$ es, en particular, una topología localmente convexa de F_0, tal que $(F_0)' = G_0$, (suponiendo G_0 identificado con $\psi^{-1}(G_0)$) por tanto, $\tau(F_0,G_0) \leqslant \tau(F,G)$.

En virtud del resultado que acabamos de obtener, el estudio de las propiedades relativas a la topología $\tau(F,G)$ se reduce, mediante la dualidad subyacente, al caso real. No obstante, para el teorema de Mackey-Arens, daremos una demostración directa, para conservar las hipótesis análogas a las del caso real. Pero, previamente vamos a caracterizar las topologías localmente convexas como $\mathfrak{S}$-topologías.

Denotemos por E un espacio vectorial sobre H a la izquierda, y por τ a una topología, localmente convexa y de Hausdorff, de E. Vamos a caracterizar τ como una cierta $\mathfrak{S}$-topología.

<u>II.18 Proposición:</u> $M \subset E'$ es equicontinuo, si y sólo si, $\psi^{-1}(M)$ es un subconjunto equicontinuo de $(E_0)'$.

Demostración:

Sea $M \subset E'$, M equicontinuo, es decir, existe un entorno de 0, V, para la topología τ, tal que:

$$\forall x \in V, \; \forall y' \in M \qquad |\langle x,y'\rangle| < 1 \implies |\langle\langle x,y'\rangle\rangle_0| < 1 \implies$$

$\implies |\langle x,\psi^{-1}(y')\rangle| < 1$, en virtud de 11.4.

Recíprocamente, sea $M \subset E'$ tal que $\psi^{-1}(M)$ sea un subconjunto equicontinuo de $(E_0)'$, es decir, existe un entorno de 0, V, para τ, que podemos tomar H-equilibrado, tal que:

$$\forall x \in V, \; \forall y' \in M \qquad |\langle x,\psi^{-1}(y')\rangle| < 1/4 \implies$$

$$\implies |\langle\langle x,y'\rangle\rangle_0| < 1/4 \quad ; \quad |\langle\langle ix,y'\rangle\rangle_0| < 1/4 \quad ;$$

$$|\langle\langle jx,y'\rangle\rangle_0| < 1/4 \quad ; \quad |\langle\langle kx,y'\rangle\rangle_0| < 1/4 \quad ; \implies$$

$\implies |\langle\langle x,y'\rangle\rangle| < 1$.

<u>II.19 Proposición :</u> La topología τ es la $\mathfrak{S}$-topología de E,

en la que $\mathfrak{S}$ es la familia de todos los conjuntos equicontinuos de E' .

Demostración :

La topología τ es, en particular, una topología localmente convexa y de Hausdorff de E_0 . Por tanto, τ es la $\mathfrak{S}_0$-topología de E_0 , en la que $\mathfrak{S}_0$ es la familia de todos los conjuntos equicontinuos de $(E_0)'$; ya que el resultado es válido para el caso real.

Según la definición de $\mathfrak{S}_0$-topología, y puesto que $\mathfrak{S}_0$ es saturada, un sistema fundamental de entornos de 0 para esta topología está formado por los conjuntos $A^{\square}$ (con la notación de II.9) $A \in \mathfrak{S}_0$.

Por otra parte, según II.18, si identificamos $(E_0)'$ con $(E')_0$ quedan identificados los conjuntos equicontinuos de uno y de otro; por lo que, según lo anterior, un sistema fundamental de entornos de 0 para τ estará formado por los conjuntos $A°$, $A \in \mathfrak{S}$. Por último, teniendo en cuenta que la subfamilia $\mathfrak{S}' = \{\Gamma(A) \ / \ A \in \mathfrak{S}\}$ es una subfamilia fundamental de $\mathfrak{S}$ (cofinal por inclusión), tenemos que un sistema fundamental de entornos de 0 para τ está formado por los conjuntos $|A°|$, $A \in \mathfrak{S}'$ (ya que $|A°| = A°$ si $A \in \mathfrak{S}'$ en virtud del corolario 1 de II.10), es decir, τ es la $\mathfrak{S}'$-topología , pero por ser $\mathfrak{S}'$ subfamilia fundamental de $\mathfrak{S}$, es la propia $\mathfrak{S}$-topología.

<u>II.20 Definición :</u> Una familia $\mathfrak{S}$ de subconjuntos de G, $\sigma(G,F)$-acotados, decimos que es una familia H-saturada , si verifica:

I) $A \in \mathfrak{S} \implies \forall B \subset A \quad B \in \mathfrak{S}$.

II) $A \in \mathfrak{S}$, $r > 0 \implies rA \in \mathfrak{S}$.

III) $A_\alpha \in \mathfrak{S}$ $\alpha = 1,\dots,n \implies \overline{\Gamma}_{\alpha=1,\dots,n}(A_\alpha)$ (para $\sigma(G,F)$).

(Observación : Puesto que la cápsula H-absolutamente convexa de un conjunto contiene a la cásula R-absolutamente convexa de ese conjunto, y pueto que por II.14 $\sigma(G,F) = \sigma(G_0,F_0)$, tenemos que toda familia H-saturada es, en particular, una familia saturada de subconjuntos de G_0 $\sigma(G_0,F_0)$-acotados.)

<u>II.21 Proposición :</u> (Teorema de Mackey-Arens) Una topología local-

mente convexa y de Hausdorff, de F, τ , es compatible con la dualidad $(F,G\ ;\ll\ \gg)$,(es decir, para τ : $F' = G$), si y solo si, τ es una $\mathfrak{S}$-topología de F, siendo $\mathfrak{S}$ una familia H-saturada de conjuntos $\sigma(G,F)$ relativamente compactos que recubren a G.

Demostración :

Si τ es una topología localmente convexa y de Hausdorff, de F compatible con la dualidad $(F,G\ ;\ll\ \gg)$, es en particular, una topología de F_0 localmente convexa y de Hausdorff, compatible con la dualidad $(F_0,G_0;\ll\ \gg_0)$; según el teorema de Mackey-Arens para el caso real, τ es una $\mathfrak{S}$-topología de F_0 , donde $\mathfrak{S}$ es la familia (saturada) de los conjuntos equicontinuos de G_0 , que según el teorema de Alouglu-Bourbaki , son $\sigma(G_0,F_0)$ relativamente compactos.

Vamos a probar que $\mathfrak{S}$ es H-saturada; para lo cual bastará probar que si $A_\alpha \in \mathfrak{S}$ $\alpha = 1,\ldots,n$ $\Rightarrow \overline{\Gamma(A_\alpha)}_{\alpha=1..n}$ (para $\sigma(G_0,F_0)$)

Si $A_\alpha \in \mathfrak{S} \Rightarrow A_\alpha \subset (V_\alpha)^\circ$, siendo V_α entornosde 0 para τ H-absolutamente convexos y cerrados para τ , tenemos :

$\bigcup\limits_{\alpha=1}^{n} A_\alpha \subset \bigcup\limits_{\alpha=1}^{n}(V_\alpha)^\circ$; y por el teorema de la H-bipolar(II.11) :

$$\overline{\Gamma(A_\alpha)}_{\alpha=1..n} = (\mathcal{E}(\bigcup_{\alpha=1}^{n} A_\alpha))^{\circ\circ} \subset (\mathcal{E}(\bigcup_{\alpha=1}^{n}(V_\alpha)^\circ))^{\circ\circ} = (\bigcup_{\alpha=1}^{n}(V_\alpha)^\circ)^{\circ\circ} = (\bigcap_{\alpha=1}^{n}(V_\alpha)^{\circ\circ})^\circ$$

$= V^\circ$, siendo V entorno de 0 para τ , $\Rightarrow \overline{\Gamma(A_\alpha)} \in \mathfrak{S}$

Recíprocamente, si $\mathfrak{S}$ es una familia H-saturada de conjuntos $\sigma(G,F)$ relativamente compactos,y que recubren a G, es en particular una familia saturada de conjuntos de G_0, $\sigma(G_0,F_0)$ relativamente compactos que recubren a G_0 . Según el teorema de Mackey-Arens para el caso real, la $\mathfrak{S}$-topología de F_0 correspondiente es una topología de F_0 ,localmente convexa y de Hausdorff , compatible con la dualidad $(F_0,G_0;\ll\ \gg_0)$.

Batará, por tanto, probar que la $\mathfrak{S}$-topología de F_0, es compatible con la estructura de espacio vectorial de E sobre H; ya que por ser compatible con la dualidad $(F_0,G_0;\ll\ \gg_0)$ es compatible con la dualidad $(F,G\ ;\ll\ \gg)$, y tomando la subfamilia fundamental $\mathfrak{S}' = \{\Gamma(A)\ /\ A\in\mathfrak{S}\}$, se tiene, con idéntico razonamiento al de II.19, que es una $\mathfrak{S}$-topología de F.

Para probar que la $\mathfrak{S}$-topología es compatible con la estructura de espacio vectorial de E sobre H , tenemos que según el lema 2, basta probar que $u_1^t(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{S}$, $u_2^t(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{S}$.

Sea $A \in \mathfrak{S}$, como $\mathfrak{S}$ es H-saturada, $\overline{\Gamma(A)}$ (para $\sigma(G,F)$) $\in \mathfrak{S}$ y teniendo en cuenta que $\overline{\Gamma(A)}$ es en particular H-equilibrada, tenemos :

$$u_1^t(A) \subset u_1^t(\overline{\Gamma(A)}) = \overline{\Gamma(A)}$$

$$u_2^t(A) \subset u_2^t(\overline{\Gamma(A)}) = \overline{\Gamma(A)}$$

y por el lema 2, tenemos que u_1 ,u_2 son continuas para la $\mathfrak{S}$-topología considerada.

A continuación, y siguiendo la linea de II.12 y II.15, vamos a estudiar la topología fuerte $\beta(F,G)$.

__II.22 Proposición :__ La topología $\beta(F_0,G_0)$ es una topología localmente convexa, compatible con la estructura de espacio vectorial de F sobre H.

Demostración :

Sabemos que $\beta(F_0,G_0)$ es una topología localmente convexa de F_0 y que es la $\mathfrak{S}$-topología de F_0 en la que $\mathfrak{S}$ es la familia de todos los conjuntos $\sigma(G_0,F_0)$-acotados de G_0 .

Analogamente a II.12 y a II.15 , bastará probar que u_1 ,u_2 son continuas para $\beta(F_0,G_0)$.

Según el lema 2, bastará probar que $u_1^t(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{S}$, $u_2^t(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{S}$ (con las notaciones de II.15).

Sea $A \subset G_0$, A $\sigma(G_0,F_0)$-acotados, como u_1^t,u_2^t son $\sigma(G_0,F_0)$ continuas $u_1^t(A)$, $u_2^t(A)$ son acotados para $\sigma(G_0,F_0)$. Por tanto, $u_1^t(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{S}$, $u_2^t(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{S}$.

__II.23 Definición :__ A la topología $\beta(F_0,G_0)$ la denominamos topología fuerte de F, definida por la dualidad (F,G ;« »), y la denotamos por $\beta(F,G)$.

A continuación vamos a probar que la topología $\beta(F,G)$ es una $\mathfrak{S}$-topología de F. Esta caracterización de $\beta(F,G)$ puede tomarse como definición de $\beta(F,G)$, conservando la analogía con el caso real.

Previamente, probaremos el lema siguiente :

LEMA 3 : Sea $\mathfrak{S}$ la familia de todos los conjuntos de G, $\sigma(G,F)$-acotados. La familia $\mathfrak{S}'$ formada por las cápsulas H-absolutamente convexas de los elementos de $\mathfrak{S}$, es una subfamilia fundamental de $\mathfrak{S}$.

Demostración :

Bastará probar que si $A \in \mathfrak{S} \Rightarrow \Gamma(A) \in \mathfrak{S}$

Sea V un entorno de 0 para $\sigma(G,F)$, H-absolutamente convexo, por ser A $\sigma(G,F)$-acotado $\exists r>0$ / $A \subset rV$. Como V es H-absolutamente convexo $\Gamma(A) \subset rV$

(Una consecuencia inmediata del lema anterior es que $\mathfrak{S}$ es H-saturada)

II.24 Proposición : La topología $\beta(F,G)$ es la $\mathfrak{S}$-topología de F, en la que $\mathfrak{S}$ es la familia de todos los conjuntos $\sigma(G,F)$-acotados de G

Demostración :

Según la definición de $\beta(F,G)$, se tiene que $\beta(F,G)$ es una $\mathfrak{S}$-topología de F_0 (respecto de la dualidad $(F_0,G_0;\ll\ \gg_0)$) en la que $\mathfrak{S}$ es la familia de todos los conjuntos de G $\sigma(G_0,F_0)$-acotados, pero en virtud de I.17 y de II.12 la familia $\mathfrak{S}$ es la familia de los conjuntos de G que son $\sigma(G,F)$-acotados.

Ahora bien, teniendo en cuenta el lema 3 y el corolario1 de II.10, tenemos que un sistema fundamental de entornos para $\beta(F,G)$ está formado por los conjuntos $|A^\circ|$, $A \in \mathfrak{S}'$; y puesto que $\mathfrak{S}'$ es sufamilia fundamental, $\beta(F,G)$ es la $\mathfrak{S}$-topología.

ALGUNOS TIPOS DE ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS SOBRE H.

En este apartado denotaremos por E a un espacio vectorial a la izquierda sobre H ,dotado de una topología localmente convexa y de Hausdorff, τ . Estudiaremos diversos tipos de espacios, según ciertas propiedades de τ , y estableceremos que es condición necesaria y suficiente que le espacio vectorial topológico real suyacente (E_0,τ) sea de dicho tipo.

II.25 Definición : Un conjunto $T \subset E$, decimos que es un H-tonel si es H-absolutamente convexo, absorbente, y cerrado. A los toneles de (E_0,τ) les llamaremos R-toneles de (E,τ).

Si (E,τ) es tal que los H-toneles forman un sistema fundamental de entornos de 0 para τ , decimos que (E,τ) es tonelado.

II.26 Proposición : El conjunto de los H-toneles de (E,τ) forman un sistema fundamental de entornos de 0 para $\beta(E,E')$.

Demostración:

Sea T un H-tonel de (E,τ), $T°$ es $\sigma((E_0)',E_0)$-acotado, y por II.14 $\sigma(E',E)$-acotados (considerando identificado $(E_0)'$ con $(E')_0$) y puesto que T es en particular H-equilibrado $T° = |T°|$ y según II.10, $T°$ es H-absolutamente convexo. Por tanto, según II.24, $(T°)°$ es un entorno de 0 par $\beta(E',E)$.

Reciprocamente, según II.24, un sistema fundamental de entorno de 0 para $\beta(E',E)$ es:

$$\{ (\Gamma(A))° \ / \ A \text{ es } \sigma(E',E)\text{acotado} \} \quad .$$

Bastará, por tanto, probar que si $A \subset E'$ es $\sigma(E',E)$-acotado entonces, $(\Gamma(A))°$ es un H-tonel en (E,τ).

Sea $A \subset E'$, $\sigma(E',E)$-acotado, según el corolario 1 de II.10 $(\Gamma(A))° = |(\Gamma(A))°|$ y según II.10 (II) $(\Gamma(A))°$ es H-absolutamente convexo. Por otra parte, $\Gamma(A)$ es $\sigma(E',E)$-acotado, según probamos en el lema 3, por tanto $(\Gamma(A))°$ es R-absorbente (por ser este resultado conocido para el caso real) pero por ser $(\Gamma(A))°$, en particular, H-equilibrado, tenemos que $(\Gamma(A))°$ es H-absorbente. Por último, $(\Gamma(A))°$ es cerrado para $\sigma(E_0,(E_0)') \equiv \sigma(E,E')$, y por tanto, para τ .

Son consecuencias importantes de esta proposición los resultados siguientes:

II.27 Proposición : (E,τ) es un espacio tonelado, si y solo si, $\tau = \beta(E,E')$.

Demosteación:

Si (E,τ) es tonelado, los H-toneles forman un sistema fundamental de entornos de 0 tanto para τ, como para $\beta(E,E')$; y de aquí la igualdad de las topologías.

Si $\tau = \beta(E,E')$, según II.26 los H-toneles forman un sistema fundamental de entornos de 0 para τ , y por tanto (E,τ) es tonelado.

II.28 Proposición : (E,τ) es un espacio tonelado, si y sólo si, (E_0,τ) es un espacio tonelado.

Demostración :

Sabemos que II.27 es válido en el caso real, con las hipótesis correspondientes. El resultado es, entonces, consecuencia inmediata de que $\beta(E_0,(E_0)') = \beta(E,E')$.

(Observación: puesto que H-tonel $\Rightarrow$ R-tonel , en una demostración directa de esta proposición solo tendríamos (E_0,τ) tonelado $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (E,τ) tonelado.)

II.29 Definición : Decimos que (E,τ) es un espacio infratonelado, si los H-toneles bornívoros forman un sistema fundamental de entornos de 0 para τ .

(Observación: la noción de bornívoro que consideramos es la del caso real. Obsérvese que como los H-toneles son en particular H-equilibrado, los H-toneles bornívoros en (E,τ) y en (E_0,τ) son los mismos).

II.30 Proposición : (E,τ) es un espacio infratonelado, si y solo si, los conjuntos de E' $\beta(E',E)$-acotados son equicontinuos.

Demostración :

Sea (E,τ) infratonelado y sea $M \subset E'$ $\beta(E',E)$-acotado. Podemos suponer M H-equilibrado ya que $\Gamma(M)$ también es $\beta(E',E)$-acotado. Por tanto, $|M^{\circ}| = M^{\circ}$, y de aquí que M° es H-absolutamente convexo y $\sigma(E,E')$ cerrado y por tanto cerrado para τ. Por otra parte, puesto que M es, en particular, $\sigma(E',E)$-acotado => $M°$ es H-absorbente. Por último, veamos que $M°$ es bornívoro:

Sea $A \subset E$, A acotado => $A°$ es entorno de 0 para $\beta(E',E)$ ya que podemos tomar A H-equilibrado. Por ser M $\beta(E',E)$-acotado $\exists r > 0 \ / \ M \subset rA°$ => $rM° \supset A°° \supset A$. Como (E,τ) es infratonelado, $M°$ es entorno del origen para τ, ya que hemos probado que $M°$ es un H-tonel bornívoro.

Teniendo en cuenta que $M \subset M°°$, y según II.19 se tiene que M es equicontinuo.

Recíprocamente, sea T un H-tonel bornívoro. $A \subset E$ acotado, => => $A°$ entorno de 0 para $\beta(E',E)$, ya que podemos tomar A H-equilibrado.

Por ser T bornívoro, $\exists r > 0 \ / \ A \subset rT$ => $rA° \supset T°$ => => $T°$ es $\beta(E',E)$-acotado => $T°$ es equicontinuo => => $T = T°°$ (según II.19) es entorno del origen para τ.

<u>II.31 Proposición</u>: (E,τ) es un espacio infratonelado, si y solo si (E_0,τ) es un espacio infratonelado.

Demostración :

Sea (E,τ) infratonelado. Teniendo en cuenta que la proposición anterior es válida para el caso real, con las hipótesis correspondientes ([8], 3, 6), bastará probar que si $N \subset (E_0)'$, N $\beta((E_0)',E_0)$-acotado, entonces, N es equicontinuo.

Si identificamos $(E_0)'$ con $(E')_0$, tenemos, en virtud de II.23 y de I.17, que los conjuntos $\beta((E_0)',E_0)$-acotados de $(E_0)'$ y los conjuntos $\beta(E',E)$-acotados de E' quedan identificados. Por tanto, N es un conjunto $\beta(E',E)$-acotado y por ser (E,τ) infratonelado N es, en virtud de II.30, equicontinuo; luego (E_0,τ) es infratonelado.

Recíprocamente, el resultado es consecuencia de la implicación : T H-tonel bornívoro => T es R-tonel bornívoro.

Una consecuencia inmediata de esta proposición y de II.17 es que si (E,τ) es infratonelado, $\tau = \tau(E, E')$.

II.32 Definición : Decimos que (E,τ) es un espacio bornológico si todo conjunto H-absolutamente convexo y bornívoro es entorno de 0 para τ .

II.33 Proposición : Si (E,τ) es un espacio bornológico, entonces se verifica que toda forma lineal sobre E que transforme conjuntos acotados de E en conjuntos acotados de H es continua.

Demostración :

Sea $f \in E^*$, tal que si $B \subset E$, B acotado $\Rightarrow |f(x)| < r, \forall x \in B$. Bastará probar que el conjunto $A = \{ x \in E \ / \ |f(x)| < 1 \}$ es entorno de 0 para τ .

A es H-absolutamente convexo : en efecto, podemos poner $A = |\{f\}°|$ (respecto a la dualidad $(E,E^* ;\ll \gg)$) y por II.10 (II) se tiene que A es H-absolutamente convexo.

A es bornívoro : en efecto, sea $B \subset E$, B acotado $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $|f(x)| < r \ \forall x \in B$ $\Rightarrow$ $B \subset rA$ $\Rightarrow$ A absorbe a B en virtud de la consecuencia (II) a I.15.

Por tanto, A es H-absolutamente convexo y bornívoro, y como (E,τ) es bornológico $\Rightarrow$ A es entorno de 0 para τ.

II.34 Proposición : (E,τ) es un espacio bornológico, si y solo si, (E_0,τ) es un espacio bornológico.

Demostración :

Puesto que todo conjunto H-absolutamente convexo y bornívoro es, en particular, un conjunto R-absolutamente convexo y bornívoro, es evidente que si (E_0,τ) es bornológico entonces, (E,τ) es bornológico.

Para probar el recíproco , tendremos en cuenta una caracterización de los espacios bornológicos reales ([8],§3, 7), según la cual bastará probar que :

I) $\tau = \tau(E_0,(E_0)')$

II) Si $f_0 \in (E_0)^*$ y f_0 trnsforma conjuntos acotados de E, en conjuntos acotados de H, entonces, $f_0 \in (E_0)'$.

En primer lugar, si (E,τ) es bornológico, es en particular infratonelado y según II.31, (E,τ)es tambien infratonelado ; por tanto $\tau = \tau(E_0,(E_0)')$.

Sea $B \subset E$, acotado; $\mathcal{E}(B)$ tambien es acotado y por tanto $|f_0(x)| < r$, $\forall x \in \mathcal{E}(B)$. Consideremos $\psi(f_0) \in E^*$ que verifica :

$|\psi(f_0)(x)| = |f_0(x) - if_0(ix) - jf_0(jx) - kf_0(kx)| < 4r$, $\forall x \in \mathcal{E}(B)$;

en particular $|\psi(f_0)(x)| < 4r$, $\forall x \in B$; es decir, $\psi(f_0)$ transforma acotados de E en acotados de H, y según II.23 $\psi(f_0) \in E'$ =>

=> f_0 $(E_0)'$.

A continuación vamos a estudiar los espacios semi-reflexivos y reflexivos. Observemos, en primer lugar que si E es un espacio vectorial a la izquierda sobre H, podemos considerar los espacios siguientes :

E	E^*	E^{**}
		$(E^{**})_0$
	$(E^*)_0$	$((E^*)_0)^*$
E_0	$(E_0)^*$	$(E_0)^{**}$

donde, son isomorfos $(E_0)^*$ y $(E^*)_0$, $(E^{**})_0$ y $((E^*)_0)^*$ mediante los isomorfismos respectivos $\psi: (E_0)^* \to (E^*)_0$, $\Psi: ((E^*)_0)^* \to (E^{**})_0$ definidos como en I.6. Por tanto, podríamos identificar : $(E^*)_0 \equiv (E_0)^*$ y $((E^*)_0)^* \equiv (E^{**})_0$. En particular, la identificación de $(E^*)_0$ con $(E_0)^*$ nos llevría a la identificación de $((E^*)_0)^*$ con $(E_0)^{**}$ y por ende a la de E^{**} con $(E_0)^{**}$. Si tenemos en cuenta que posteriormente vamos a considerar $E \subset E^{**}$, y $E_0 \subset (E_0)^{**}$ tendríamos una identificación nada intuitiva, de conjuntos, que no facilita la comprensión de los espacios semi-reflexivos ni reflexivos, ni su estudio. Por tanto, en este apartado no consideraremos identificados $(E_0)^*$ y $(E^*)_0$.

Por E denotaremos un espacio vectorial, a la izquierda, sobre H, y por τ una topología de E, localmente convexa y de Hausdorff.

<u>II.35 Definición</u> : Al dual topológico de $(E',\beta(E'E))$ lo denotamos por E'', y lo denominamos bidual (topológico) de (E,τ).

A la aplicación H-lineal $S: E \to (E')^*$, definida por $x \in E \to S(x) \ / \ y' \in E' \to S(x)(y') = y'(x)$, la denominamos inyección canónica de E en $(E')^*$. (La aplicación S es inyectiva por ser τ de Hausdorff).

(Observación : Podemos considerar $E \subset E'' \subset (E')^*$, ya que $S(x)$ es continua para $\sigma(E',E)$ y por tanto, para $\beta(E',E)$.)

<u>II.36 Definición :</u> Si la inyección canónica $S : E \to E''$ es sobreyectiva decimos que (E,τ) es un espacio semi-reflexivo.

Para estudiar la relación entre la semi-reflexividad de (E,τ) y la de (E_0,τ), estudiaremos, previamente, el siguiente diagrama:

(1)
$$\begin{tikzcd}
E_0 \arrow[rr, "S"] \arrow[ddrr, "T"'] & & ((E')^*)_0 \arrow[d, "\psi^{-1}"] \\
& (E')_0 & ((E')_0)^* \arrow[d, "\psi^t"] \\
& (E_0)' \arrow[u, "\psi"] & ((E_0)')^*
\end{tikzcd}$$

siendo :

S la inyección canónica de E en $(E')^*$

T " " " " E_0 en $((E_0)')^*$

Ψ,ψ los isomorfismos análogos a los de I.6 entre $((E')_0)^*$ y $((E')^*)_0$ $(E_0)'$ y $(E')_0$.

ψ^t la traspuesta de ψ, respecto de las dualidades reales $((E_0)', ((E_0)')^*; < \ >)$, $((E')_0, ((E')_0)^*; < \ >)$.

<u>II.37 Proposición :</u> El diagrama (1) es conmutativo.

Demostración :

Sean $x \in E_0$, $y_0' \in (E_0)'$. Según definición de la aplicación T, se tiene : $T(x)(y_0') = y_0'(x)$

Por otra parte : $\psi^t o \Psi^{-1} o S(x)(y_0') = \Psi^{-1} o S(x)(\psi(y_0')) =$

$= \Psi^{-1}(\psi(y_0')(x)) = Re(\psi(y_0')(x)) = y_0'(x)$

<u>II.38 Proposición</u> : Consideremos $(E')_0$ dotado de la topología $\beta((E')_0,E_0) \equiv \beta(E',E)$, y $(E_0)'$ dotado de la topología $\beta((E_0)',E_0)$. La aplicación ψ es un isomorfismo topológico.

Demostración :

Sea $A \subset E$, acotado. Según la observación a II.9 $\psi(A^{\square}) = A^{\circ}$; y puesto que los conjuntos $A^{\square}$, y A° ,con $A \subset E$,acotados, forman un sistema fundamental de entornos de 0 para $\beta((E_0)',E_0)$ y para $\beta((E')_0,E_0)$ respectivamente; se tiene que ψ es continua y abierta, por tanto, ψ es un isomorfismo entre $((E_0)', \beta((E_0)',E_0))$ y $((E')_0, \beta((E')_0,E_0))$.

Para las demostraciones de algunas proposiciones siguientes haremos uso de dos resultados válidos para el caso real, y que enunciamos a continuación. Las demostraciones de estos resultados se encuentran en ([8], 3,12) y ([7], 2,16) , respectivamente.

II.39 Sean F_1,F_2 dos espacios localmente convexos , reales, y separados; dotados de las topologías τ_1, τ_2 respectivamente, y sean F_1' ,F_2' sus duales. Se verifica que si una aplicación lineal $u : F_1 \to F_2$ es continua para las topologías τ_1, τ_2 ; tambien es continua para $\sigma(F_1,F_1')$, $\sigma(F_2,F_2')$. Tambien se verifica que la aplicación traspuesta u^t es continua para $\sigma(F_2',F_2)$, $\sigma(F_1',F_1)$; y para $\beta(F_2',F_2)$, $\beta(F_1',F_1)$.

II.40 Sean $(F_1,G_1;< >_1)$, $(F_2,G_2;< >_2)$ dos pares duales reales y sea u una aplicación lineal de $F_1 \to F_2$, continua para $\sigma(F_1,G_2)$, $\sigma(F_2,G_2)$. Se verifica que u es un isomorfismo entre $(F_1, \sigma(F_1,G_1))$ y $(F_2, \sigma(F_2,G_2))$ si y solo si $u^t(G_2) = G_1$.

<u>II.41 Proposición</u> : Consideremos $(E')_0$ dotado de la topología $\beta((E')_0,E_0)$, y $(E_0)'$ dotado de la topología $\beta((E_0)',E_0)$. Se verifica que ψ^t es un isomorfismo entre $((E')_0)'$ y $(E_0)''$.

Demostración :

Considerando en II.39 : $F_1 = (E_0)'$, $F_2 = (E')_0$, $\tau_1 = \beta((E_0)',E_0)$,$\tau_2 = \beta((E')_0,E_0)$, $u = \psi$; tenemos, según

II.38 que ψ es un isomorfismo entre $((E_0)', \beta((E_0)', E_0))$ y $((E')_0, \beta((E')_0, E_0))$; y aplicando II.39 se tiene que ψ tambien es un isomorfismo entre $((E_0)', \sigma((E_0)', (E_0)''))$ y $((E')_0, \sigma((E')_0, ((E')_0)'))$.

Considerando, por último, en II.40 : $F_1 = (E_0)'$, $F_2 = (E')_0$, $G_1 = (E_0)''$, $G_2 = ((E')_0)'$, $u = \psi$;tenemos que puesto que ψ es un isomorfismo entre $((E_0)', \sigma((E_0)', (E_0)''))$ y $((E')_0, \sigma((E')_0, ((E')_0)'))$ se tiene que :

$\psi^t(((E')_0)') = (E_0)''$. Además ψ^t es inyectiva, ya que $Ker(\psi^t) = (\psi((E_0)'))^{\perp} = ((E')_0)^{\perp} = 0$ (puesto que $\beta((E')_0, E_0)$ es de Hausdorff).

<u>II.42 Proposición :</u> (E,τ) es un espacio semi-reflexivo , si y solo si, (E_0,τ) es un espacio semi-reflexivo.

Demostración :

En el siguiente diagrama :

$$\begin{tikzcd} E_0 \arrow[r, "S"] \arrow[ddr, "T"'] & (E'')_0 \arrow[d, "\psi^{-1}"] \\ & ((E')_0)' \arrow[d, "\psi^t"] \\ & (E_0)'' \end{tikzcd} \qquad (2)$$

sabemos que Ψ es isomorfismo (por I.11) ; que ψ^t es isomorfismo (por II.41); y que el diagrama es conmutativo (II.37).

El resultado es, entonces, evidente puesto que S es sobreyectiva, si y solo si, T es sobreyectiva.

<u>II.43 Definición :</u> Decimos que (E,τ) es un espacio reflexivo si la inyección canónica S, es un isomorfismo entre E y $(E'', \beta(E'', E'))$.

<u>II.44 Proposición :</u> (E,τ) es un espacio reflexivo, si y solo si, (E_0,τ) es un espacio reflexivo.

Demostración :

Si dotamos a $(E'')_0$de la topología $\beta((E'')_0,(E')_0)$, y a $((E')_0)'$ de la topología $\beta(((E')_0)',(E')_0)$; se puede probar, de forma análoga a II.38, que Ψ^{-1}es un isomorfismo entre $((E'')_0, \beta((E'')_0,(E')_0)$ y $(((E')_0)', \beta(((E')_0)',(E')_0))$.

Por otra parte, según II.39, y con las notaciones de II.41, se tiene que ψ^t y $(\psi^t)^{-1}$ son continuas entre $((E')_0)', \beta(((E')_0)',(E')_0))$ y $((E_0)'',\beta((E_0)'',(E_0)'))$; y entre $((E_0)'',\beta((E_0)'',(E_0)'))$ y $((E')_0)', \beta(((E')_0)',(E')_0))$, respectivamente.Por tanto ψ^t es un isomorfismo entre los citados espacios.

Por último, teniendo en cuenta que el diagrama (2) de II.42 es conmutativo; se tiene que S es un isomrfismo entre (E,τ) y $(E'', \beta((E'),E))$, si y solo si, T es un isomorfismo entre (E_0,τ) y $((E_0)'',\beta((E_0)',E_0))$.

Como consecuencia inmediata obtenemos la siguiente caracterización de los espacios reflexivos :

<u>II.45 Proposición :</u> (E,τ) es un espacio reflexivo, si y solo si, es un espacio semi-reflexivo e infratonelado .

Demostración :

(E,τ) es reflexivo $\Leftrightarrow$ (E_0,τ) es reflexivo $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (E_0,τ) es semi-reflexivo e infratonelado $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (E,τ) es semi-reflexivo e infratonelado .

CAPITULO III

CUATERNIZACION

CUATERNIZACION ALGEBRAICA

III.1 Proposición : Sea F un espacio vectorial real. A F podemos dotarlo de estructura de espacio vectorial a la izquierda (respectivamente a la derecha) sobre H, si y solo si, existen en F dos automorfismos: u_1 ,u_2 que verifiquen

$$\left.\begin{array}{l} u_1^2 = u_2^2 = -I_F \\ u_1 o u_2 + u_2 o u_1 = \Theta \end{array}\right\} \qquad (1)$$

donde, I_F es la aplicación identidad sobre F, y Θ la aplicación identicamente nula en F .

Demostración :

Si F está dotado de una estructura de espacio vectorial a la izquierda (resp. a la derecha) sobre H; las aplicaciones : $u_1 ,u_2 : F \rightarrow F$, definidas por $u_1(x) = ix$; $u_2(x) = jx$, $\forall x \in F$ (resp. $u_1(x) = xi$; $u_2(x) = xj$, $\forall x \in F$) ; son automorfismos en F que verifican las condiciones (1) .

Reciprocamente, si u_1 , u_2 son automorfismos en F, verificando (1), podemos definir una aplicación de $H \times F \rightarrow F$ de la forma siguiente :

si $\lambda \in H$, $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$; $x \in F$, entonces definimos

$$\lambda x = \lambda_0 x + \lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x) + \lambda_3 u_1 o u_2(x) .$$

Es fácil de comprobar que el conjunto F dotado de las operaciones : $(x,y) \in F \times F \rightarrow x + y$; $(\lambda,x) \in H \times F \rightarrow \lambda x$, es un espacio vectorial a la izquierda sobre H. Es evidente que el subyacente real de este espacio vectorial a la izquierda sobre H es el propio espacio vectorial real de partida.

Al espacio vectorial a la izquierda sobre H, así obtenido, lo de nominamos <u>cuaternización algebráica (a la izquierda) de F respecto de u_1 y u_2</u> .

(Respectivamente, si definimos :

$$x\lambda = \lambda_0 x + \lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x) + \lambda_3 u_2 o u_1(x) ;$$

tenemos,que el conjunto F dotado de las operaciones :

$$(x,y) \in F \times F \rightarrow x + y ; \quad (x,\lambda) \in F \times H \rightarrow x\lambda ,$$

es un espacio vectorial a la derecha sobre H, cuyo subyacente real es el espacio vectorial real de partida.

Al espacio vectorial a la derecha sobre H, así obtenido, lo denominamos <u>cuaternización algebráica a la derecha de F respecto de u_1 y u_2</u> .)

A continuación vamos a estudiar la existencia de automorfismos u_1 ,u_2 ,verificando las condiciones (1) de III.1, para un espacio vectorial real dado.

<u>III.2 Proposición :</u> Sea F un espacio vectorial real. En F existen automorfismos u_1 , u_2 verificando las condiciones (1) de III.1 si y solo si, F es de dimensión infinita o F es de dimensión finita y múltiplo de 4.

Demostración :

En primer lugar, supongamos que F es de dimensión finita, y que en F existen los automorfismos u_1 , u_2 verificando las condiciones (1) de III.1. Si denotamos por E a la cuaternización algebráica de F respecto de u_1 y u_2(resp. a la derecha), evidentemente tenemos que :

$$\dim (F) = \dim (E_0) = 4\dim (E).$$

Veamos a continuación que la condición es tambien suficiente. Sea F un espacio vectorial real de dimensión finita, y tal que $\dim (F) = \dot{4}$; denotamos por $\{e_1, e_2, \ldots, e_{2n}\}$ a una base de F, y definimos :

$$u_1(e_k) = \begin{cases} e_{k+n} & \text{si} \quad 1 \leq k \leq n \\ -e_{k-n} & \text{si} \quad n < k \leq 2n \\ e_{k+n} & \text{si} \quad 2n < k \leq 3n \\ -e_{k-n} & \text{si} \quad 3n < k \leq 4n \end{cases}$$

$$u_2(e_k) = \begin{cases} e_{k+2n} & \text{si} \quad 1 \leq k \leq n \\ -e_{k+2n} & \text{si} \quad n < k \leq 2n \\ -e_{k-2n} & \text{si} \quad 2n < k \leq 3n \\ e_{k-2n} & \text{si} \quad 3n < k \leq 4n \end{cases}$$

y si $x \in F$, $x = \sum_{k=1}^{4n} a_k e_k$; definimos :

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{4n} a_k u_1(e_k) \quad , \quad u_2(x) = \sum_{k=1}^{4n} a_k u_2(e_k) \; .$$

Las aplicaciones $u_1 : x \in F \to u_1(x)$, $u_2 : x \in F \to u_2(x)$ así definidas, son automorfismos de F que verifican las condiciones (1) de III.1.

Sea, ahora, F un espacio vectorial real de dimensión infinita, y $\{e_\alpha\}$, $\alpha \in \Omega$, una base de Hamel de F.

Puesto que card (Ω) = card $(\{0,1,2,3\} \times \Omega)$, existe una biyección $\delta : \{0,1,2,3\} \times \Omega \to \Omega$. Denotamos : $\alpha_p = \delta(p,\alpha)$, $p = 0,1,2,3$ $\alpha \in \Omega$; $\Omega_p = \delta(\{p\} \times \Omega)$, $p = 0,1,2,3$.

Evidentemente, tenemos que $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$, y que $\Omega_p \cap \Omega_q = \emptyset$ si $p \neq q$ $p,q = 0,1,2,3$.

Definimos, entonces,

$$u_1(e_\alpha) = \begin{cases} e_{\alpha_1} & \text{si} \quad \alpha \in \Omega_0 \\ -e_{\alpha_0} & \text{si} \quad \alpha \in \Omega_1 \\ e_{\alpha_3} & \text{si} \quad \alpha \in \Omega_2 \\ -e_{\alpha_2} & \text{si} \quad \alpha \in \Omega_3 \end{cases}$$

$$u_2(e_\alpha) = \begin{cases} e_{\alpha_2} & \text{si} \quad \alpha \in \Omega_0 \\ -e_{\alpha_3} & \text{si} \quad \alpha \in \Omega_1 \\ -e_{\alpha_0} & \text{si} \quad \alpha \in \Omega_2 \\ e_{\alpha_1} & \text{si} \quad \alpha \in \Omega_3 \end{cases}$$

y si $x \in F$, $x = \sum\limits_{\alpha \in \Omega} a_\alpha e_\alpha$, definimos :

$$u_1(x) = \sum_{\alpha\in\Omega} a_\alpha u_1(e_\alpha) \quad , \quad u_2(x) = \sum_{\alpha\in\Omega} a_\alpha u_2(e_\alpha) \ .$$

Las aplicaciones $u_1 : x \in F \to u_1(x)$, $u_2 : x \in F \to u_2(x)$ así definidas, son automorfismos de F que verifican las condiciones (1) de III.1 .

CUATERNIZACION TOPOLOGICA

En esta apartado consideraremos un espacio vectorial real F; en él dos automorfismos u_1 ,u_2 que verifican las condiciones (1) de III.1 . A la cuaternización algebráica (a la izquierda) de F respecto de u_1 , u_2 la denotamos por E; y por tanto, a F lo denotaremos por E_0 . Supondremos tambien,que F está dotado de una topología τ , localmente convexa y de Hausdorff.

Distinguiremos dos subapartados :

1.- CUATERNIZACION TOPOLOGICA INFERIOR

III.3 Definición : A la topología mas fina, de las topologías localmente convexas de E, que son menos finas que τ, la denominamos topología cuaternizada inferiormente de τ , respecto de u_1 , u_2 ; y la denotamos por $\underline{\tau}$.

A $(E,\underline{\tau})$ lo denominamos cuaternización localmente convexa, inferior ,de (F,τ) respecto de u_1 , u_2 .

En la proposición siguiente vamos a probar la existencia de $\underline{\tau}$ dando un sistema fundamental de entornos de 0, para esta topología, H-absolutamente convexos y H-absorbentes.

<u>III.4 Proposición :</u> Si $\mathcal{B}_0$ es un sistema fundamental de entornos de 0 para τ , R-absolutamente convexos, y R-absorbentes; entonces, la familia $\mathcal{B} = \{ r\Gamma(V) \ / \ r > 0 \ , \ V \in \mathcal{B}_0 \}$ es un sistema fundamental de entornos de 0 para la topología $\underline{\tau}$.

Demostración :

En primer lugar tenemos que, según I.31, $\mathcal{B}$ es un sistema fundamental de entornos de 0 para una topología localmente convexa de E , que denotamos por τ_1. Evidentemente $\tau_1 \leqslant \tau$. Bastará probar entonces, que $\tau_1 = \underline{\tau}$.

Sea τ' una topología localmente convexa de E, menos fina que τ ; y sea $\mathcal{B}'$ un sistema fundamental de entornos de 0 para τ', H-absolutamente convexos y H-absorbentes. Puesto que $\tau' \leqslant \tau$, se tiene que para cada $V' \in \mathcal{B}'$, existe $V \in \mathcal{B}$, tal que $V \subset V' \Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\Gamma(V) \subset V'$ ya que V' es H-absolutamente convexo. Por tanto, $\tau' \leqslant \tau_1$ y según la definición de $\underline{\tau}$, tenemos $\tau_1 = \underline{\tau}$.

(Observación: en el ejemplo 1 del final de capítulo damos una topología de F, tal que $\underline{\tau} < \tau$ estrictamente, siendo, incluso, $\underline{\tau}$ no separada).

<u>III.5 Proposición . :</u> Sea $\{p_\alpha\}, \alpha \in \Omega$, una familia filtrante de seminormas de F que define a la topología τ .

Para cada $\alpha \in \Omega$, sea Λ_α el conjunto de las H-seminormas, q , de E, tales que : $q(x) \leqslant p_\alpha(x)$, $\forall x \in E$.

Entonces, la familia $\{ q_\alpha \ / \ q_\alpha(x) = \sup_{q \in \Lambda_\alpha} \{q(x)\} \ , \ \forall x \in E\}$ es una familia filtrante de H-seminormas que define a $\underline{\tau}$.

Demostración:

- q_α es H-seminorma de E :

En primer lugar observemos que $\Lambda_\alpha \neq \emptyset$ $\forall \alpha \in \Omega$, ya que a cada Λ_α pertenece, al menos, la H-seminorma $x \in E \rightarrow 0$.

Si x,y E , tenemos :

$$q_\alpha(x+y) = \sup_{q\in\Lambda_\alpha}\{q(x+y)\} \leq \sup_{q\in\Lambda_\alpha}\{q(x)+q(y)\} \leq q_\alpha(x) + q_\alpha(y) .$$

Si $x \in E$, $\lambda \in H$, tenemos :

$$q_\alpha(\lambda x) = \sup_{q\in\Lambda_\alpha}\{q(\lambda x)\} = \sup_{q\in\Lambda_\alpha}\{|\lambda| q(x)\} = |\lambda| q_\alpha(x)$$

- La familia $\{q_\alpha\}, \alpha \in \Omega$, es filtrante :

Sean q_α , q_δ $\alpha,\delta \in \Omega$. Como $\{p_\alpha\}$ es filtrante, dadas p_α , p_δ existe p_γ $\gamma \in \Omega$, tal que $\forall x \in E$:

$$\left.\begin{array}{l} p_\alpha(x) \leq c p_\gamma(x) \\ p_\delta(x) \leq c p_\gamma(x) \end{array}\right. \qquad c > 0$$

por tanto, $1/c\, q_\alpha \in \Lambda_\gamma$, $1/c\, q_\delta \in \Lambda_\gamma$; y de aquí que :

$$\left.\begin{array}{l} q_\alpha(x) \leq c q_\gamma(x) \\ q_\delta(x) \leq c q_\gamma(x) \end{array}\right. \qquad \forall x \in E .$$

- La familia $\{q_\alpha\}$,$\alpha \in \Omega$, define la topología $\underline{\tau}$:

Consideremos el sistema fundamental de entornos de 0, para τ , formado por los conjuntos : $V_{\alpha,\varepsilon} = \{x \in E \ / \ p_\alpha(x) < \varepsilon \ , \alpha \in \Omega, \varepsilon > 0\}$. Según III.4 un sistema fundamental de entornos de 0 para $\underline{\tau}$ es la familia $\{r\Gamma(V_{\alpha,\varepsilon}) \ / \ \alpha \in \Omega, \varepsilon > 0, r > 0\}$.

Según I.34, y teniendo en cuenta que $V_{\alpha\varepsilon} = \varepsilon V_{\alpha 1}$, bastará probar que si q'_α es la jauja de $\Gamma(V_{\alpha,1})$, entonces se verifica $q'_\alpha \equiv q_\alpha$ $\forall \alpha \in \Omega$.

Puesto que $q_\alpha(x) \leq p_\alpha(x)$, $\forall x \in E$, tenemos que :

$$\{ x \in E \ / \ q_\alpha(x) \leq 1\} \supset \{ x \in E \ / \ p_\alpha(x) < 1\}$$

y puesto que $\{ x \in E \ / \ q_\alpha(x) \leq 1 \}$ es un conjunto H-absolutamente convexo, tenemos que $\{x \in E \ / \ q_\alpha(x) \leq 1\} \supset \Gamma(V_{\alpha 1})$.

Por otra parte, y puesto que en particular $q'_\alpha \in \Lambda_\alpha$, tenemos que $q'_\alpha(x) \leq q_\alpha(x)$ $\forall x \in E$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\Gamma(V_{\alpha,1}) \supset \{x$ E $/ \ q_\alpha(x) < 1\}$.

En resumen, hemos probado que :

$$\{x \in E \ / \ q_\alpha(x) < 1\} \subset \Gamma(V_{\alpha 1}) \subset \{x \in E \ / \ q_\alpha(x) \leq 1\}$$

y aplicando I.35 se tiene que $q'_\alpha \equiv q_\alpha$.

Si denotamos por $(\underline{E}_0)'$ y $(E_0)'$ los duales topológicos de $(E_0,\underline{\tau})$ y de (E_0,τ), respectivamente; se tiene que $(\underline{E}_0)'$ es en general, un subespacio de $(E_0)'$, ya que $\underline{\tau} \leqslant \tau$.

A continuación vamos a caracterizar algebraicamente, $(\underline{E}_0)'$, a partir de $(E_0)'$.

<u>III.6 Lema :</u> Sea G un subespacio de $(E_0)^*$, y ψ el isomorfismo de I.6 de $(E_0)^*$ en $(E^*)_0$. Se verifica que :

1) $\psi^{-1}(\psi(G)i) = \{ y_1 \in (E_0)^* \ / \ y_1(x) = y(ix) \ , \forall x \in E_0, y \in G \}$

$\psi^{-1}(\psi(G)j) = \{ y_2 \in (E_0)^* \ / \ y_2(x) = y(jx) \ , \forall x \in E_0, y \in G \}$

$\psi^{-1}(\psi(G)k) = \{ y_3 \in (E_0)^* \ / \ y_3(x) = y(kx) \ , \forall x \in E_0, y \in G \}$

2) $\psi^{-1}(\psi(G) \cap \psi(G)i \cap \psi(G)j \cap \psi(G)k) = G_1$, es el mayor subespacio de G tal que su imagen por la aplicación ψ es subyacente real de un H-subespacio de E^*.

Demostración :

1) Si $y_1 \in (E_0)^*$, y verifica que $y_1(x) = y(ix)$ $\forall x \in E_0$, donde $y \in G$; tenemos que :

$$y_1(x) = \psi^{-1} o\ \psi\ o\ y(ix) = Re(\psi(y)(ix)) = Re((\psi(y)(x))i) =$$
$$= (\psi^{-1} o\ \psi(y)i)(x) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y_1 \equiv \psi^{-1} o\ \psi(y)i \quad \Rightarrow \quad y_1 \in \psi^{-1}(\psi(G)i).$$

Recíprocamente, si $y_1 \in \psi^{-1}(\psi(G)i) \quad \Rightarrow \quad \psi(y_1) \in \psi(G)i \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \psi(y_1) = \psi(y)i \ , \ y \in G \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \psi(y_1)(x) = (\psi(y)i)(x) = (\psi(y)(x))i \ , \forall x \in E_0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y_1(x) = Re\ ((\psi(y)(x))i) = Re\ (i(\psi(y)(x))) = Re\ (\psi(y)(ix)) =$$
$$= y(ix) \ , \forall x \in E_0 \ .$$

Analogamente se prueba para j, y para k .

2) Puesto que G es subespacio de $(E_0)^*$, se tiene que $\psi(G)$ es R-subespacio de E^*, y según I.2 $\psi(G_1)$ es subyacente de un H-subespacio de E^*. Veamos que G_1 es el mayor con esta propiedad .

Si G_2 es subespacio de G, tal que $\psi(G_2)$ es subyacente de un H-subespacio de E^*, se verifica :

$$\psi(G_2) \subset \psi(G)$$
$$\psi(G_2) = \psi(G_2)i \subset \psi(G)i$$
$$\psi(G_2) = \psi(G_2)j \subset \psi(G)j$$
$$\psi(G_2) = \psi(G_2)k \subset \psi(G)k$$

y por tanto, $\psi(G_2) \subset \psi(G_1) \quad \Rightarrow \quad G_2 \subset G_1$.

<u>III.7 Proposición :</u> $(\underline{E}_0)'$ es el mayor subespacio de $(E_0)'$ tal que su imagen por la aplicación ψ es subyacente de un H-subespacio de E^*.

Demostración :

Según la parte 2) de III.6 , bastará probar que :

$$(\underline{E}_0)' = \psi^{-1}(\psi(E_0)' \cap \psi(E_0)'i \cap \psi(E_0)'j \cap \psi(E_0)'k) .$$

Puesto que $(\underline{E}_0)' \subset (E_0)' \Rightarrow \psi(\underline{E}_0)' \subset \psi(E_0)'$; y teniendo en cuenta que $\psi(\underline{E}_0)'$ es subyacente de un H-subespacio de E^* (ya que $\underline{\tau}$ es compatible con la estructura de espacio vectorial de $\dot{E}$ sobre H), tenemos que :

$$\psi(\underline{E}_0)' = \psi(\underline{E}_0)'i \subset \psi(E_0)'i$$

$$\psi(\underline{E}_0)' = \psi(\underline{E}_0)'j \subset \psi(E_0)'j$$

$$\psi(\underline{E}_0)' = \psi(\underline{E}_0)'k \subset \psi(E_0)'k$$

y por tanto , $\psi(\underline{E}_0)' \subset \psi(E_0)' \cap \psi(E_0)'i \cap \psi(E_0)'j \cap \psi(E_0)'k$.

Reciprocamente, sea $\mathcal{B}_0$ un sistema fundamental de entornos de 0 para τ , R-absolutamente convexos; y sea

$$y \in (E_0)' \cap \psi^{-1}(\psi(E_0)'i) \cap \psi^{-1}(\psi(E_0)'j) \cap \psi^{-1}(\psi(E_0)'k)$$

Teniendo en cuenta la parte 1) de III.6, tenemos que :

$$y(x) = y_0(x) \quad \forall x \in E_0 \ , \ y_0 \in (E_0)'$$

$$y(x) = y_1(ix) \quad \forall x \in E_0 \ , \ y_1 \in (E_0)' \quad \Rightarrow \quad y(ix) = -y_1(x) \ \forall x \in E_0$$

$$y(x) = y_2(jx) \quad \forall x \in E_0 \ , \ y_2 \in (E_0)' \quad \Rightarrow \quad y(jx) = -y_2(x) \ \forall x \in E_0$$

$$y(x) = y_3(kx) \quad \forall x \in E_0 \ , \ y_3 \in (E_0)' \quad \Rightarrow \quad y(kx) = -y_3(x) \ \forall x \in E_0$$

por tanto, existen $V_0, V_1, V_2, V_3 \in \mathcal{B}_0$, tales que :

$$|y(x)| < 1/4 \ , \ |y(ix)| < 1/4 \ , \ |y(jx)| < 1/4 \ , \ |y(kx)| < 1/4 \ , \ \forall x \in V$$

siendo $V \in \mathcal{B}_0$, $V \subset W_0 \cap W_1 \cap W_2 \cap W_3$.

Por tanto, si $\lambda \in H$, $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$, con $|\lambda_\alpha| \leq 1$, $\alpha = 0,1,2,3$; tenemos que :

$$|y(\lambda x)| \leq |y(\lambda_0 x)| + |y(\lambda_1 ix)| + |y(\lambda_2 jx)| + |y(\lambda_3 kx)| \leq$$
$$\leq |y(x)| + |y(ix)| + |y(jx)| + |y(kx)| < \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4} =$$
$$= 1 , \quad \forall x \in V.$$

Por último, sea $x \in \Gamma(V)$; según I.27 :

$$x = \sum_{\alpha\in\Omega} \lambda_\alpha x_\alpha \quad , \text{ donde } x_\alpha \in V \ \forall \alpha\in\Omega, \ \lambda_\alpha \in H \quad \sum_{\alpha\in\Omega} |\lambda_\alpha| \leq 1, \text{ siendo}$$

casi todos los λ_α nulos.

Podemos poner :

$$|y(x)| = |y(\sum_{\alpha\in\Omega} \lambda_\alpha x_\alpha)| = |y(\sum_{\alpha\in\Omega'} |\lambda_\alpha||\lambda_\alpha|^{-1} \lambda_\alpha x_\alpha)| \leq$$
$$\leq \sum_{\alpha\in\Omega'} |\lambda_\alpha||y(\beta_\alpha x_\alpha)| < \sum_{\alpha\in\Omega'} |\lambda_\alpha| \leq 1 \quad ,$$

donde, $\Omega' = \{\alpha\in\Omega / \lambda_\alpha \neq 0\}$, y $\beta_\alpha = |\lambda_\alpha|^{-1} \lambda_\alpha$, $\alpha\in\Omega$.

Luego, $y \in (\underline{E_0})'$, ya que según III.4 , $\Gamma(V)$ es un entorno de 0 para $\underline{\tau}$.

De esta proposición obtenemos los siguientes importantes corolarios :

<u>Corolario 1 :</u> Una condición necesaria para que $\underline{\tau} = \tau$, es que $\psi(E_0)'$ sea subyacente de un H-subespacio de E^*.

Escolio : Esta condición no es, en general, suficiente como pondremos de manifiesto en el ejemplo 2 del final del capítulo.

<u>Corolario 2 :</u> Si $\psi(E_0)'$ es un subespacio propiamente real de E^*, entonces, $\underline{\tau}$ no es de Hausdorff .

Demostración :

En efecto, según III.7 , y I.4 , se tiene que $(\underline{E_0})' = \{0\}$ y por tanto, $\underline{\tau}$ no puede ser de Hausdorff .

(En el ejemplo 1 del final del capítulo se da una topología τ de E_0 de Hausdorff , para la cual $\psi(E_0)'$ es subespacio propiamente real de E^* .

2.- CUATERNIZACION TOPOLOGICA SUPERIOR

En este subapartado, vamos a definir una topología localmente convexa de E, mas fina que τ .

Para seguir un procedimiento análogo al del subapartado anterior, necesitamos probar, en primer lugar, la existencia de una topología localmente convexa de E mas fina que τ ; ya que, el procedimiento análogo al del subapartado anterior, es considerar los núcleos H-equilibrados de los conjuntos de un sistema fundamental de entornos de 0, para τ , R-absolutamente convexo y R-absorbentes; y no podemos garantizar,a priori,que no vaya a reducirse al $\{0\}$ para alguno de estos conjuntos, con lo cual no sería H-absorbente.

La existencia de una tal topología se prueba en III.9 , como consecuencia del siguiente lema :

III.8 Lema : Sea $(F_1,G_1;< \ >)$ un par dual real, y sea G_2 un subespacio propio de G_1 , tal que G_2 tambien separe puntos en F_1 .
Se verifica, entonces, que $\tau(F_1,G_2) \prec \tau(F_1,G_1)$ (estrictamente).

Demostración :

Sabemos por ([8], 3,§2) que $\sigma(F_1,G_2) \prec \sigma(F_1,G_1)$ (estrictamente). Por tanto, la identidad I_{F_1} en F_1 , es continua de $(F_1,\sigma(F_1,G_1))$ en $(F_1,\sigma(F_1,G_2))$.

Por otra parte, según ([8], 3,§12), tenemos que I_{F_1} tambien es continua de $(F_1,\tau(F_1,G_1))$ en $(F_1,\tau(F_1,G_2))$, y por tanto tenemos que $\tau(F_1,G_2) \preccurlyeq (F_1,G_1)$.

Ademas, como I_{F_1} no es continua de $(F_1,\sigma(F_1,G_2))$ en $(F_1,\sigma(F_1,G_1))$,tampoco lo será de $(F_1,\tau(F_1,G_2))$ en $(F_1,\tau(F_1,G_1))$ en virtud de ([8], 3,§12) , y por tanto tenemos que :

$$\tau(F_1,G_2) \prec \tau(F_1,G_1) \quad \text{(estrictamente)}$$

III.9 Proposición : Sea G la envoltura H-lineal de $\psi(E_0)'$ en E^* ; la topología $\tau(E,G)$ verifica : $\tau \leqslant \tau(E,G)$.

Demostración :

Puesto que $(E_0)' \subset \psi^{-1}(G_0)$, según el lema anterior tenemos que : $\tau(E_0,(E_0)') \leqslant \tau(E_0, \psi^{-1}(G_0))$. (En el caso de que $\psi(E_0)'$ no sea subyacente de un H-subespacio de E^* , será estrictamente)

Teniendo en cuenta II.4 y según II.17, tenemos que :

$$\tau \leqslant \tau(E_0,(E_0)') \leqslant \tau(E,G) .$$

III.10 Definición : A la topología menos fina, de las topologias localmente convexas de E, que son mas fina que τ , la denominamos topología cuaternizada superiormente de τ , respecto de u_1 ,u_2; y la denotamos por $\bar{\tau}$.

A $(E,\bar{\tau})$ lo denominamos cuaternización localmente convexa, superior, de (F,τ) respecto de u_1 , u_2 .

En la proposición siguiente vamos aprobar la existencia de $\bar{\tau}$ dando un sistema fundamental de entornos de 0 , para esta topología, H-absolutamente convexos y H-absorbentes .

III.11 Proposición : Sea $\mathcal{B}_0$ un sistema fundamental de entornos de 0, para τ , R-absolutamente convexos. Si denotamos por $\kappa(V)$ el nucleo H-equilibrado de cada $V \in \mathcal{B}_0$, se verifica que la familia : $\mathcal{B} = \{ r\kappa(V) \ / \ V \in \mathcal{B}_0 \ r>0 \}$ es un sistema fundamental de entornos de 0 para $\bar{\tau}$.

Demostración :

En primer lugar probaremos que $\mathcal{B}$ es un sistema fundamental de entornos de 0 para una topología τ_1 , localmente convexa de E. Según I.30, bastará probar que $\{ \kappa(V) \ / \ V \in \mathcal{B}_0 \}$ es una base de filtro en E, formada por conjuntos H-absolutamente convexos y H-absorbentes.

Sean $\kappa(V_1)$, $\kappa(V_2)$ $V_1,V_2 \in \mathcal{B}_0$; puesto que $\mathcal{B}_0$ es un sistema fundamental de entornos de 0, existe $W \in \mathcal{B}_0$ / $W \subset V_1 \cap V_2$; y por tanto, $\kappa(W) \subset \kappa(V_1) \cap \kappa(V_2)$. Luego $\{\kappa(V) \;/\; V \in \mathcal{B}_0\}$ es una base de filtro en E.

$\kappa(V)$ es H-absolutamente convexo y H-absorbente , $\forall\, V \in \mathcal{B}_0$:

En efecto, puesto que V es en particular convexo, se tiene que $\kappa(V)$ es tambien convexo , y por tanto, $\kappa(V)$ es H-absolutamente convexo. Por otra parte, puesto que según III.9 , $\tau \leqslant \tau(F,G)$ se tiene que para cada $V \in \mathcal{B}_0$ existe un entorno de 0, para $\tau(F,G)$, V', H-absolutamente convexo, tal que $V' \subset V \Rightarrow V' \subset \kappa(V)$; y puesto que V' es H-absorbente, se tiene que $\kappa(V)$ tambien es H-absorbente.

Hemos probado que $\{r\kappa(V) \;/\; V \in \mathcal{B}_0 , r>0\}$ es un sistema fundamental de entornos de 0 ,para una topología τ_1, localmente convexa de E, y que por construcción es mas fina que τ . Probemos, ahora, que es la menos fina :

Sea τ' una topología localmente convexa de E, mas fina que τ . Sea $\mathcal{B}'$ un sistema fundamental de entornos de 0 , para τ', H-absolutamente convexos e invariante por homotecias de razón $r > 0$; tenemos que para cada $V \in \mathcal{B}_0$, $\exists\, V' \in \mathcal{B}' \;/\; V' \subset V$, y por ser V' H-absolutamente convexo : $V' \subset \kappa(V) \subset V$. Si consideramos $r\kappa(V)$, $r > 0$, tenemos que $rV' \subset r\kappa(V)$, siendo $rV' \in \mathcal{B}'$. Por tanto, $\tau_1 \leqslant \tau'$, y según la definición de $\overline{\tau}$, se tiene que : $\tau_1 = \overline{\tau}$.

<u>III.12 Proposición :</u> Sea $\{p_\alpha\}$ $\alpha \in \Omega$, una familia de seminormas de F que define a la topología τ .

Se verifica, que para cada p_α , la aplicación :

$x \in E \quad \to \quad \sup_{\lambda \in \Lambda}\{p_\alpha(\lambda x)\}$, siendo $\Lambda = \{\lambda \in H / |\lambda| = 1\}$, es una H-seminorma de E; y que la familia $\{q_\alpha\}$ de las H-seminormas definidas por : $q_\alpha(x) = \sup_{\lambda \in \Lambda}\{p_\alpha(\lambda x)\}$, $\forall x \in E$, define a la topología $\overline{\tau}$.

Demostración :

Veamos en primer lugar que cada q_α , $\alpha \in \Omega$, es una H-seminorma:

- $0 \leq \sup_{\lambda \in \Lambda}\{p_\alpha(\lambda x)\} < +\infty$. En efecto, ya que $p_\alpha(\lambda x) \geq 0$,por ser p_α seminorma ; y $\sup_{\lambda \in \Lambda}\{p_\alpha(\lambda x)\} < +\infty$, puesto que p_α es continua en $\Lambda \cdot \{x\}$, y $\Lambda \cdot \{x\}$ es compacto (dotando a H de la topología usual).
- Si $x,y \in E$, $q_\alpha(x + y) \leq q_\alpha(x) + q_\alpha(y)$. En efecto :

$$q_\alpha(x+y) = \sup_{\lambda\in\Lambda}\{p_\alpha(\lambda x+\lambda y)\} < \sup_{\lambda\in\Lambda}\{p_\alpha(\lambda x)\} + \sup_{\lambda\in\Lambda}\{p_\alpha(\lambda y)\} =$$
$$= q_\alpha(x) + q_\alpha(y) .$$

- Si $x \in E$, $\mu \in H$; $q_\alpha(\mu x) = |\mu| q_\alpha(x)$. En efecto :

Supongamos $\mu \neq 0$, (el caso $\mu = 0$ es trivial); podemos poner

$$q_\alpha(\mu x) = \sup_{\lambda\in\Lambda}\{p_\alpha(\lambda\mu x)\} = \sup_{\lambda\in\Lambda} p_\alpha\{(\lambda\mu|\mu|^{-1}\,|\mu| x)\} =$$
$$= |\mu| \sup_{\lambda\in\Lambda}\{p_\alpha(\lambda\mu|\mu|^{-1} x)\} = |\mu| \sup_{\lambda\in\Lambda}\{p_\alpha(\lambda x)\} = |\mu| q_\alpha(x)$$

- $\{q_\alpha\}$ $\alpha\in\Omega$, define a la topología $\bar{\tau}$.

En efecto : $\{x \in E \,/\, q_\alpha(x) \leq 1\}$ es, evidentemente, el nucleo H-equilibrado de $\{x \in E \,/\, p_\alpha(x) \leq 1\}$.

Si denotamos por $(\bar{E}_0)'$ al dual topológico de $(E, \bar{\tau})$, se tiene que $(E_0)'$ es, en general un subespacio de $(\bar{E}_0)'$, ya que $\tau \leqslant \bar{\tau}$.

A continuación vamos a caracterizar algebraicamente a $(\bar{E}_0)'$, a partir de $(E_0)'$.

<u>III.13 Proposición :</u> Sea G la envoltura H-lineal de $\psi(E_0)'$ en E^*, se verivica que : $(\bar{E}_0)' = \psi^{-1}(G_0)$.

Demostración :

Según III.9 y III.10, tenemos que : $\tau \leqslant \bar{\tau} \leqslant \tau(E,G)$. Por otra parte , $\psi(\bar{E}_0)' \supset G_0$; ya que $(\bar{E}_0)' \supset (E_0)'$, y $\psi(\bar{E}_0)'$ es subyacente de un H-subespacio por ser $\bar{\tau}$ compatible con la estructura de espacio vectorial de E sobre H. Por tanto,
$\sigma(E,G) = \sigma(E_0,G_0) \leqslant \sigma(E_0,\psi(\bar{E}_0)')$ en virtud de ([3], 3,§2).

En resumen, $\sigma(E,G) \leqslant \bar{\tau} \leqslant \tau(E,G) \Rightarrow \psi(\bar{E}_0)' = G_0$.

<u>Corolario 1 :</u> Una condición necesaria para que $\bar{\tau} = \tau$, es que $\psi(E_0)'$ sea subyacente de un H-subespacio de E^*.

Escolio : La condición anterior no es, en general, suficiente, como pondremos de manifiesto en el ejemplo 2 del final del capítulo.

Ejemplo 1 :

Sea E el espacio vectorial a la izquierda sobre H, de las sucesiones $\{\xi_n\}$ tales que $\xi_n \in H, \forall n \in N$, y para cada $\{\xi_n\}$ existe $J \subset N$ tal que $\xi_n = 0$ si $n \in N-J$, siendo J finito. (Es decir, E es el espacio $\bigoplus_{n \in N} H$,considerando H como espacio vectorial a la izquierda sobre H).

Sea F el espacio vectorial , análogo a E, pero considerado a la derecha .

En $E \times F$, definimos la H-forma H-bilineal siguiente :

$$B : (x,y) \in E \times F \quad \to \quad B(x,y) \quad ; \text{ donde}$$

$$B(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \zeta_n \quad \text{si} \quad x = \{\xi_n\} \quad , y = \{\zeta_n\} \quad .$$

Sea G el $\mathbb{R}$-subespacio de F generado por los vectores :

$$e_1 = (1,0,0,0,0, \; . \; . \; . \; . \; . \; ,0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \;)$$

$$e_2 = (i,1,0,0,0, \; . \; . \; . \; . \; . \; ,0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \;)$$

$$e_3 = (j,0,1,0,0, \; . \; . \; . \; . \; . \; ,0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \;)$$

$$e_4 = (k,0,0,1,0, \; . \; . \; . \; . \; . \; ,0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \;)$$

$$e_5 = (0,1,0,0,1, \; . \; . \; . \; . \; . \; ,0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \;)$$

.

.

.

$$e_{4n-3} = (0,0,0,0,0, \; . \; . \; . \; ,0,\overset{n}{1},0, \; . \; . \; . \; ,0,\overset{4n-3}{1},0,0,0,0,\ldots,0,\ldots)$$

$$e_{4n-2} = (0,0,0,0,0, \; . \; . \; . \; ,0,\overset{n}{i},0, \; . \; . \; . \; ,0,0,\overset{4n-2}{1},0,0,0,\ldots,0,\ldots)$$

$$e_{4n-1} = (0,0,0,0,0, \; . \; . \; . \; ,0,\overset{n}{j},0, \; . \; . \; . \; ,0,0,0,\overset{4n-1}{1},0,0,\ldots,0,\ldots)$$

$$e_{4n} = (0,0,0,0,0, \; . \; . \; . \; ,0,\overset{n}{k},0, \; . \; . \; . \; ,0,0,0,0,\overset{4n}{1},0,\ldots,0,\ldots)$$

.

.

.

Evidentemente, el conjunto $\{e_n, n \in N\}$ es H-linealmente independiente.

Veamos a continuación que G es un subespacio propiamente real de F :

$$\text{si} \quad y \in G \cap Gi \cap Gj \cap Gk \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = \sum_{\alpha=1}^{\infty} e_\alpha a_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\infty} e_\alpha b_\alpha i = \sum_{\alpha=1}^{\infty} e_\alpha c_\alpha j = \sum_{\alpha=1}^{\infty} e_\alpha d_\alpha k \quad , a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha \in R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{\alpha=1}^{\infty} e_\alpha (3a_\alpha - b_\alpha i - c_\alpha j - d_\alpha k) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3a_\alpha - b_\alpha i - c_\alpha j - d_\alpha k = 0 \quad \forall \alpha \in N \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_\alpha = b_\alpha = c_\alpha = d_\alpha = 0 \quad \forall \alpha \in N \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

Por último, probemos que G separa puntos en E, mediante la dualidad subyacente :

Sea $x \in E$, $x = \{\xi_n\}$, $\xi_n = \xi_n^0 + \xi_n^1 i + \xi_n^2 j + \xi_n^3 k$, y supongamos $\xi_n = 0$ si $n > m$.

Si $B_0(x,y) = \mathrm{Re}\, B(x,y) = 0 \quad \forall y \in F$, tenemos, en particular, que :

$$B_0(x,e_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_1^0 = 0$$

$$B_0(x,e_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\xi_1^1 + \xi_2^0 = 0$$

$$B_0(x,e_3) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\xi_1^2 + \xi_3^0 = 0$$

$$B_0(x,e_4) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\xi_1^3 + \xi_4^0 = 0$$

$$B_0(x,e_5) = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_2^0 + \xi_5^0 = 0$$

$$\vdots$$

$$B_0(x,e_{4m-3}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_m^0 + \xi_{4m-3}^0 = 0$$

$$B_0(x,e_{4m-2}) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\xi_m^1 + \xi_{4m-2}^0 = 0$$

$$B_0(x,e_{4m-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\xi_m^2 + \xi_{4m-1}^0 = 0$$

$$B_0(x,e_{4m}) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\xi_m^3 + \xi_{4m}^0 = 0$$

Obtenemos así un sistema homogéneo de 4m ecuaciones con 4m incgnitas; cuyo determinante, ordenado en las incognitas en la forma :

$$\xi_1^0 \;\; \xi_1^1 \;\; \xi_1^2 \;\; \xi_1^3 \;\; \xi_2^0 \;\; \xi_2^1 \;\; \xi_2^2 \;\; \xi_2^3 \;\; \xi_3^0 \;\; \cdots\cdots \;\; \xi_m^0 \;\; \xi_m^1 \;\; \xi_m^2 \;\; \xi_m^3$$

es :

$$\left|\begin{array}{cccccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 & -1
\end{array}\right|$$

y puesto que su valor es $(-1)^m$, el sistema solo tiene la solución trivial :

$$\xi_n^0 = \xi_n^1 = \xi_n^2 = \xi_n^3 = 0 \quad , \quad 1 \leqslant n \leqslant m \quad ;$$

y por tanto $x = 0$.

Si consideramos, la topología $\sigma(E_0,G_0)$ tenemos que es una topo̲gía de E_0 , localmente convexa y de Hausdorff; tal que su cuaternizada inferiormente no es de Hausdorff , ya que el dual de E para esta topología es, según III.7 , el espacio $\{0\}$, por ser G subespacio propiamente real de F .

Ejemplo 2 : (Ejemplo de un espacio vectorial real E_0, subyacente de un espacio vectorial a la izquierda sobre H; dotado de una topología τ , localmente convexa y de Hausdorff, tal que $\psi(E_0)'$ es subyacente de un H-subespacio de E* , pero $\underline{\tau} \prec \tau \prec \overline{\tau}$ (estrictamente).)

Sea E un espacio vectorial a la izquierda sobre H, de dimensión infinita. Sea F un H-subespacio de E* , de dimensión infinita; y tal que E y F formen un par dual respecto de la H-forma H-bilineal que induce en E x F la H-forma H-bilineal canónica $\ll \gg$, de E x E*.

Según probamos en I.5, podemos expresar F_0 en la forma :

$F_0 = G \oplus Gi \oplus Gj \oplus Gk$, siendo G un subespacio propiamente real estricto, de F .

En F_0 consideramos la topología $\sigma(F_0,E_0)$, y definimos la familia $\mathfrak{S}$ de subconjuntos de F_0 de forma siguiente :

$S \in \mathfrak{S}$, si $S = A + B + C + D$, siendo

$A \subset G$ R-absolutamente convexo, y $\sigma(F_0,E_0)$-compacto.

$\left.\begin{array}{l} B \subset Gi \\ C \subset Gj \\ D \subset Gk \end{array}\right\}$ R-absolutamente convexos, $\sigma(F_0,E_0)$ compactos, y finito dimensionales.

Evidentemente los conjuntos de $\mathfrak{S}$ son R-absolutamente convexos y $\sigma(F_0,E_0)$-compactos .

La envoltura saturada $\overline{\mathfrak{S}}$, se obtiene , en este caso, añadiendo en primer lugar las uniones finitas de elementos de $\mathfrak{S}$, y en segundo lugar añadiendo todos los subconjuntos de éstos. Se tiene por tanto, que $\overline{\mathfrak{S}}$ es una familia saturada de conjuntos de F_0 , relativamente $\sigma(F_0,E_0)$-compactos, que recubre a F_0 ; y que la familia $\mathfrak{S}$ es una subfamilia fundamental de $\overline{\mathfrak{S}}$.

Sea τ la topología definida en E_0 por la $\overline{\mathfrak{S}}$-topología correspondiente respecto de la dualidad ($E_0,F_0;\ll \gg_0$) . Según el teorema de Mackey-Arens ,caso real, ([11], IV, 3,2); τ es compatible con la dualidad $(E_0,F_0;\ll \gg_0)$, es decir, el dual de (E_0,τ) es $\psi^{-1}(F_0)$.

Probemos, por último que τ no es compatible con la estructura de espacio vectorial de E sobre H; con lo que tendremos que

$\underline{\tau} < \tau < \overline{\tau}$ (estrictamente).

Sea $M \subset G$, R-absolutamente convexo, $\sigma(F_0, E_0)$-compacto, e infinito dimensional. Probaremos que M es equicontinuo, y que $M \cdot i$ no lo es; con lo que tendremos que la aplicación : $x \in E_0 \rightarrow ix$ no es continua para τ, y por tanto, no es compatible con la estructura de espacio vectorial de E sobre H.

Puesto que : $M \subset M^{\circ\circ} = (M^{\circ})^{\circ} \Rightarrow$ M es equicontinuo, ya que M° es un entorno de 0 para τ.

Si $M \cdot i$ fuera equicontinuo, se tendría que : $M \cdot i \subset V^{\circ}$, siendo V un entorno de 0 para τ ; que podemos suponer que es la forma : $V = (A + B + C + D)^{\circ}$,

$A \subset G$ R-absolutamente convexo, y $\sigma(F_0, E_0)$-compacto,

$\left.\begin{array}{l} B \subset Gi \\ C \subset Gj \\ D \subset Gk \end{array}\right\}$ R-absolutamente convexos, $\sigma(F_0, E_0)$-compactos, y finito dimensionales

ya que $\mathfrak{G}$ es una subfamilia fundamental de $\overline{\mathfrak{G}}$.

Por tanto, $M \cdot i \subset (A + B + C + D)^{\circ\circ} = A + B + C + D$; y teniendo en cuenta que $F_0 = G \oplus Gi \oplus Gj \oplus Gk \Rightarrow M\, i \subset B$, lo cual es absurdo, por ser $M \cdot i$ infinito dimensional, y B finito dimensional.

BIBLIOGRAFIA :

1.- Blanchard,A : Les corps non conmutatifs. Presse Universitaire de France (1972)

2.- Bourbaki,N : Eléments de Mathématique. Livre I Théorie des ensembles, Chap. III . Hermann,Paris (1956)

3.- Bourbaki,N : Eléments de Mathématique. Livre II Algebre Chap.9 . Hermann,Paris (1959)

4.- Bourbaki,N : Eléments de Mathématique. Livre V Espaces vectoriels topologiques Chap.1,2 (2eme Ed.) Hermann,Paris (1966)

5.- Bourbaki,N : Eléments de Mathématique. Livre V Espaces vectoriels topologiques Chap.3,4,5 . Hermann,Paris (1964)

6.- Dieudonné,J : Complex structures on Real Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 3 p.p.(162-164) (1952)

7.- Grothendieck,A : Topological vector spaces. Notes on Mathematics and its Applications. Gordon and Breach,Science Publishers,London (1973)

8.- Horváth,J : Topological vector spaces and distributions. Addison-Wesley Co. (1966)

9.- Köthe,G : Topological vector spaces,I . Springer-Verlag,New York (1969)

10.- Monna, A.F. : Analyse non-archimédienne. Springer-Verlag, Berlin, Heilderberg (1970)

11.- Monna, A.F. : Rapport sur la théorie des espaces lineaires topologiques sur un corps valué non-archimédien. Bull. Soc.Math.France, Suppl Mém. Nr. 39-40 pp. (255-278) (1974)

12.- Schaefer, H. : Zur komplexen Erweiterung Linearen Raüme. Arch.Math. 10 pp.363-365 (1959)

13.- Schaefer, H. : Topological vector spaces. Springer-Verlag, New York (1971)

14.- Schwartz, L. : Analyse.Topologie générale et analyse fontionnelle. Hermann, Paris (1970)

15.- Slugin S.N. : A complex semi-ordered space and modules over it .Dkl. Akad. Nauk SSS.R (1962)

16.- Teicmüller, O: Operatoren in Wachsschen Raüm . Journ. reine angew. Math. 174 ,pp.74-124 (1935)

17.- Van Tiel ,J.: Ensembles pseudo-polaires dans les espaces localment K-convexes. Proc. Kon. Ned.Akad. V Weteuch 69 pp.369-373 (1966)

INDICE :

...unido el Tribunal
...n el día de la fecha, ...

D. José Carmona Álvarez

titulada Estudio de espacios localmente convexos sobre H mediante subyacentes reales.

acordó otorgarle la calificación de

Sevilla, de 1.9

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

...residente, El Secretario, El Doctorando

A. Castro

Juan Arias de Reyna