,23727500

Consulta

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Departamento de Matemática Aplicada I

Álgebras de Lie con invariante de Goze dado

Tesis
72

ESCUELA TECNICA SUPERIOR
INGENIERIA INFORMATICA
- B I B L I O T E C A -
N.º ORDEN GENERAL C115C35543
OBRA N.º .... TOMO ....
SIGNATURA ....
N.º EN ESPECIALIDAD ....
EJEMPLAR NUMERO R 14.799

Memoria presentada por Isabel Mª Rodríguez García para optar al grado de Doctora en Matemáticas por la Universidad de Sevilla

Vº. Bº.
del Director,

Fdo. José Ramón Gómez Martín,
Catedrático de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada I de la Universidad de Sevilla.

Sevilla, noviembre de 1999.

ESCUELA TECNICA SUPERIOR INGENIERIA INFORMATICA
BIBLIOTECA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

162 ... Doctoral

... 105 del libro

23 NOV. 1999

Sevilla,

El Jefe del Negociado de Tesis,

ESCUELA TECNICA SUPERIOR INGENIERIA INFORMATICA

BIBLIOTECA

UNIVERSIDAD
de SEVILLA

RECTORADO

Sevilla 15 de Febrero de 2000
N/Ref.: Negociado de Tesis EL/MAR
Asunto: Enviando Tesis Doctoral Leída

DESTINATARIO
ILMO. SR. DIRECTOR DE LA BIBLIOTECA DE
LA FACULTAD DE INFORMÁTICA Y
ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Adjunto le remito ejemplares de Tesis Doctorales leídas en Departamentos vinculados a esa Facultad a fin de que pasen a formar parte de fondos bibliográficos de consulta de ese Centro.

AUTORES DE LAS TESIS LEIDAS

- RODRÍGUEZ GARCÍA, ISABEL MARÍA
- CORCHUELO GIL, RAFAEL
- CAMACHO SANTANA, LUISA MARÍA

SIGILLUM UNIVERSITATIS LITTERARIAE HISPALENSIS

LA JEFA DE NEGOCIADO DE TESIS

Elena Laffitte

Fdo. Elena Laffitte Alaminos.

A José Luis, Alicia y Carlos

y a mis padres.

ESCUELA TECNICA SUPERIOR INGENIERIA INFORMATICA
BIBLIOTECA

Resumen

Se presentan en esta memoria algunos resultados algebraicos enmarcados dentro de los problemas de clasificación de álgebras de Lie nilpotentes, en dimensión cualquiera, así como algunas aplicaciones geométricas.

En concreto, se obtienen algunos resultados en los casos de índices de nilpotencia 2 y 3.

En primer lugar, se obtienen las familias de leyes de álgebras de Lie metabelianas, es decir aquellas que tienen invariante de Goze $(2, ..., 2, 1, ...1)$, obteniéndose la clasificación efectiva en los casos $p = 2$ y $p = 3$ cuando $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) > p$.

En el caso general se obtiene la clasificación en el caso en que $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}))$ es maximal.

A continuación se obtienen los espacios de derivaciones de las familias de álgebras obtenidas, así como algunas aplicaciones geométricas.

En el capítulo 3 se obtienen algunos resultados en el caso de índice de nilpotencia 3, en concreto'para los casos de invariante de Goze $(3, 2, 1...1)$ y $(3, 3, 1...1)$, obteniéndose

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

la clasificación explícita en algunos casos concretos en función de la dimensión de la derivada.

Por último, se calculan también las álgebras de derivaciones de las álgebras obtenidas, por su importancia para la obtención de algunas aplicaciones geométricas.

Agradecimientos

Quisiera con estas líneas, dar las gracias a todas las personas que con su colaboración efectiva y afectiva han hecho posible que haya podido culminarse este trabajo.

Indudablemente, la primer mención la merece el profesor José Ramón Gómez Martín, director de la tesis, sin cuyas palabras de apoyo, su entusiasmo para superar las dificultades y sus muchas horas de trabajo, no hubiera sido posible la realización de este proyecto. Y, como no podía ser menos detrás de todo gran hombre, siempre existe una gran mujer. Este caso no es una excepción, y no puedo desaprovechar la ocasión de agradecer a Concha las muchas horas que, por el trabajo, ha tenido que prescindir de su marido. Gracias a ambos por su colaboración y su amistad.

También quisiera hacer una mención especial al profesor Khakimdjanov que con sus observaciones ha colaborado en la realización de este trabajo.

Gracias también al Departamento de Matemática Aplicada I, de la Universidad de Sevilla y, en particular a los profesores Felipe Mateos y Alberto Márquez, por su generosidad al colaborar en la realización del programa de Doctorado en colaboración con el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Huelva, fruto del cual surge este proyecto de Tesis doctoral. En especial, también quisiera expresar mi agradecimiento a Rosa y, sobre todo, a Lisa, por su amistad y por la ayuda que tan desinteresadamente siempre me han prestado.

Así mismo, quisiera dar las gracias a todos aquellos compañeros del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Huelva que me animaron en la tarea.

Por último, mi agradecimiento más especial a mi hermosa familia. A mi marido, por su cariño, su colaboración y su comprensión. A mis hijos, por las horas que no he podido dedicarles. Y, a mis padres, cuya valiosa ayuda ha sido primordial, para la realización de este trabajo. Para todos, muchas gracias.

Introducción

El estudio de las álgebras de Lie comienza en las últimas décadas del siglo XIX, cuando Sophus Lie (1842-1899) y Félix Klein (1842-1925) concibieron la idea de estudiar sistemas matemáticos desde la perspectiva del grupo de transformaciones que los deja invariantes. Hoy, la teoría de Lie es de gran utilidad en áreas muy diversas tanto de las Matemáticas (análisis, geometría diferencial, teoría de números, ecuaciones diferenciales...), como de la Física (estructura atómica, física de alta energía, sistemas dinámicos, sólido rígido, campo electromagnético, mecánica cuántica, teoría de la relatividad...)

La clasificación de estructuras algebraicas de cualquier tipo, salvo isomorfismo, es un problema fundamental a la hora de estudiar dichas estructuras algebraicas. La clasificación de las álgebras de Lie es un problema que está en la actualidad lejos de ser resuelto. En este sentido, el teorema de Lévi (puede verse en cualquier manual sobre álgebras de Lie, como [4], [9], [15], [17]), al garantizar que cualquier álgebra de Lie admite una descomposición en suma semidirecta de su radical (el ideal resoluble maximal del álgebra) y de una subálgebra semisimple (la subálgebra de Lévi), reduce el problema al de las clasificaciones de las álgebras de Lie resolubles y semisimples.

Dado que toda álgebra de Lie semisimple se puede descomponer en suma directa de álgebras de Lie simples y que la clasificación de éstas es bien conocida, queda por

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA
BIBLIOTECA

resolver el problema de las álgebras de Lie resolubles que, módulo las derivaciones, se reduce, a su vez, al estudio de las álgebras de Lie nilpotentes.

Aunque ya a finales del siglo XIX (1891) Umlauf [24] da listas de álgebras de Lie nilpotentes en dimensiones concretas, el siguiente resultado importante se debe a Dixmier [10], que en 1958 publica las listas de álgebras de Lie nilpotentes para dimensiones menores o iguales que 5. También en 1958 Morosov [21] publica la primera lista completa sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ de característica 0, para dimensión 6.

En 1966, Vergne [26] publica listas completas para dimensiones menores o iguales que 6 mostrando, además, el importante papel de las álgebras de Lie filiformes en el estudio de la variedad de leyes de álgebras de Lie nilpotentes. Es éste el primer trabajo donde aparece la denominación de filiforme para aquellas álgebras nilpotentes de sucesión descendente de longitud maximal, es decir, las de índice de nilpotencia $n-1$, siendo n la dimensión del álgebra. La mayoría de los resultados sobre clasificación obtenidos hasta el momento, se refieren o bien a dimensiones concretas o bien a las álgebras de Lie filiformes o generalizaciones de ellas (p-filiformes).

La mayor dimensión para la que se conoce la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes es la 7, obtenida por Ancochea y Goze [1] y [3] e, independientemente, por Romdhani [22], ambas en 1989. El trabajo de Ancochea y Goze es de una gran importancia pues, al introducir un nuevo invariante, la sucesión característica o invariante de Goze, permite, en cierto modo, dar una partición de las álgebras de Lie nilpotentes en clases más sencillas que las que determina el nilíndice, lo que facilita en gran medida su estudio y clasificación.

Con la ayuda de este invariante y desarrollando técnicas específicas, Ancochea y Goze han obtenido también la clasificación de las filiformes de dimensión 8 [2]. Ampliando y adaptando estas técnicas, se ha obtenido en 1991 por Gómez y Echarte [11] la clasificación de las filiformes de dimensión 9. Gómez, Jiménez-Merchán y Khakimdjanov obtienen en 1996, la clasificación para las filiformes de dimensión menor o igual a 11 [13], y Gómez, Goze y Khakimdjanov estudian en 1997 [12] la clasificación, en dimensión arbitraria, de las álgebras filiformes que denominan k-abelianas, dando la clasificación explícita para el caso $k = 2$.

Dado que la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes, al contrario del caso simple o semisimple, se complica extraordinariamente, se diseñan otras estrategias para abordar el problema. Una de ellas es seleccionar subfamilias relevantes, que aporten información sobre el resto de la familia de álgebras considerada. En este sentido, Vergne [26] encuentra las álgebras de Lie filiformes graduadas naturalmente (aquellas que admiten una filtración asociada a su sucesión central descendente y que, posteriormente, Goze y Khakimdjanov [14] prueban que son la base para determinar las álgebras de Lie filiformes característicamente nilpotentes). Gómez y Jiménez-Merchán [18], clasifican las álgebras de Lie graduadas naturalmente en el caso casifiliforme (las de nilíndice $n-2$, es decir, en cierto sentido las "siguientes" a las filiformes).

Puesto que una de las ventajas de estudiar estas álgebras es su facilidad (relativa) para encontrar sus correspondientes álgebras de derivaciones (y, consiguientemente, estudiar diversas propiedades cohomológicas de las mismas) por admitir graduaciones relativamente "largas" (de longitud igual a su nilíndice), Gómez, Jiménez-Merchán y Reyes [18], [19] estudian las álgebras filiformes y casifiliformes que admiten graduaciones aún "más largas", las de longitud superior a su índice de nilpotencia.

Como se observa, la gran parte de los trabajos recientes sobre clasificación de álgebras de Lie nilpotentes versan sobre familias de álgebras de Lie de nilíndice "grande" (próximo a la dimensión). Esto se debe a que están más estructuradas. Sin embargo, hay también trabajos sobre otros tipos de álgebras de Lie nilpotentes. Así, Cabezas y Gómez [5], Cabezas, Gómez y Jiménez-Merchán [7] y Cabezas, Camacho, Gómez y Navarro [6], han estudiado las álgebras de Lie que denominan p-filiformes, de las que las filiformes y casifiliformes son casos particulares, en los casos de $p \geq n-5$, (donde

BIBLIOTECA

n es la dimensión del álgebra).

El trabajo que aquí se presenta se incardina en este contexto aunque da, creemos, un importante giro en sus objetivos, en tanto en cuanto que aborda el estudio de las álgebras de Lie nilpotentes de nilíndice pequeño (2 y 3), aquellas cuya clasificación presenta, en general, mayor dificultad. Destacaremos, también que se consiguen algunos resultados en dimensión arbitraria.

Las dificultades que surgen a la hora de clasificar este tipo de álgebras son muchas, pues para nilíndices pequeños se tiene un gran aumento en el número de parámetros, sin llevar aparejado un aumento en el número de restricciones. Métodos como el de la clasificación a partir de extensiones centrales, que han resultado bastante potentes en otros casos, como por ejemplo en el caso de las p-filiformes, con $p \geq n-4$ [7], han resultado ineficaces en el estudio de las álgebras de Lie metabelianas.

En el capítulo 0, se da una breve recopilación de resultados bien conocidos y que serán necesarios a lo largo de este trabajo de investigación.

En el capítulo 1, se aborda el problema de la clasificación de las álgebras de Lie metabelianas. Estas álgebras son las que tienen índice de nilpotencia 2 e invariante de Goze

$$(2, \ldots, 1 \overset{n-2p-1)}{\ldots}, 1), \ 1 \leq p \leq \left[\frac{n-1}{2}\right]$$

Una clasificación general de este tipo de álgebras parece muy difícil. De hecho, un resultado reciente de Goze y Khakimdjanov muestra que el conjunto de álgebras de Lie metabelianas con sucesión característica $(2, 2, ..., 2, 1)$ es isomorfo al conjunto de aplicaciones bilineales de $\mathbf{C}^p \times \mathbf{C}^p$ con valores en $\mathbf{C}^p$, donde $2p+1$ es la dimensión de $\mathfrak{g}$ [15]. Por lo tanto lo que se pretende es encontrar una aproximación a la "frontera" del problema.

Utilizando convenientemente argumentos sobre nilpotencia, adjunto-nilpotencia y sucesión característica, junto con una adecuada selección de cambios de base sencillos, se consiguen clasificaciones de álgebras de Lie metabelianas, en función de los valores de la dimensión de la derivada. Dado que el caso $p = 1$ está resuelto [7], se van a estudiar los casos $p = 2$ y $p = 3$, y el caso general cuando la dimensión de la derivada es máximal. En concreto, se consigue la clasificación en los siguientes casos

Inv. de Goze	$\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}))$
$(2, 2, 1 \overset{n-4)}{\ldots}, 1)$	3
$(2, 2, 2, 1 \overset{n-6)}{\ldots}, 1)$	4,5,6
$(2, \overset{p)}{\ldots}, 2, 1 \overset{n-2p)}{\ldots}, 1)$	$\begin{pmatrix} p+1 \\ 2 \end{pmatrix}$

En todos los casos, las dificultades aumentan al disminuir la dimensión de $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ y, de hecho, el problema se resolverá en su totalidad sólo en el caso en que dicha dimensión es máxima.

En los casos $p = 2$ y $p = 3$, se han obtenido las familias genéricas de álgebras de Lie en dimensión n. En ninguno de estos casos ha sido posible establecer la clasificación cuando la dimensión de la derivada es mínima (2, si $p = 2$ y 3, si $p = 3$), aún en el caso de dimensión 8. Ello se debe a la aparición de un gran número de parámetros sin restricciones entre ellos. En el caso $p = 4$, las dificultades se multiplican. Esto pone de manifiesto el interés de los resultados que, aún siendo parciales, se han obtenido.

En el capítulo 2 se realiza el cálculo de los espacios de derivaciones de las familias de álgebras metabelianas que se han obtenido en el capítulo 1.

El conocimiento del espacio de derivaciones de un álgebra de Lie, es fundamental a la hora del estudio de ciertas propiedades geométricas de dichas álgebras como, por ejemplo el primer espacio de cohomología.

El cálculo directo de $Der(\mathfrak{g})$ casi nunca resulta aconsejable, por lo que se hace necesario desarrollar otros procedimientos, que faciliten dichos cálculos. Para la determinación práctica de dichos espacios de derivaciones, será necesario buscar una graduación adecuada del álgebra, con subespacios homogéneos de dimensión suficientemente pequeña. A continuación o bien se aplicará el método del cálculo de derivaciones para un álgebra de Lie graduada, o bien se calculará un toro de derivaciones (método desarrollado por L.M.Camacho, J.R.Gómez y R.M.Navarro [8])

El método de graduaciones resulta ser, en general, suficientemente útil cuando se trata de calcular espacios de derivaciones en dimensiones concretas. Cuando se trata de calcular dichos espacios de derivaciones para familias de álgebras, la estructuración que resulta de aplicar el método del toro, suele simplificar los cálculos que hay que efectuar, lo que permite abordar el cálculo de $Der(\mathfrak{g})$ con más facilidad en ciertos casos. En particular, el método suele ser adecuado cuanto mayor sea la dimensión del toro que se encuentre, lo que suele ocurrir cuando el nilíndice es pequeño.

En el capítulo 3 se aborda el estudio de las álgebras de Lie de nilíndice 3. Las dificultades que han surgido a la hora de la clasificación efectiva de este tipo de álgebras han sido extraordinariamente grandes, al igual que en el caso de las álgebras de Lie metabelianas, abordadas en el capítulo 1.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente con nilíndice 3, entonces el invariante de Goze de $\mathfrak{g}$, es uno de los siguientes

$$(3, \overset{p)}{\ldots}, 3, 2, \overset{q)}{\ldots}, 2, 1, \overset{n-3p-2q)}{\ldots}, 1), \quad 1 \leq p \leq \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor, \quad 0 \leq q \leq \left\lfloor \frac{n-3p-1}{2} \right\rfloor$$

Entre los casos más sencillos se encuentran los correspondientes a los valores de (p, q): $(1,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$. Puesto que el caso más simple, $(p,q) = (1,0)$, ya ha sido estudiado [7], se van a obtener en este capítulo algunos resultados correspondientes a los casos $(p,q) = (1,1)$ y $(p,q) = (2,0)$, es decir, los casos de sucesiones características $(3, 2, 1 \ldots, 1)$ y $(3, 3, 1 \ldots, 1)$.

En concreto, en el caso $(p,q) = (1,1)$, se obtiene la forma general de la familia y con argumentos similares a los utilizados en el caso de las álgebras de nilíndice 2, se ha conseguido la clasificación en los casos en que la dimensión de la derivada es 4 ó 5.

En el caso $(p, q) = (2, 0)$, se encuentra la clasificación en el caso en que la dimensión de la derivada es máxima.

En el capítulo 4 se realiza el cálculo de los espacios de derivaciones de las familias de álgebras que se han obtenido en el capítulo anterior.

Por último, indicar que se adjunta un apéndice donde se puede encontrar resúmenes de los resultados obtenidos, así como algunas de las demostraciones detalladas de algunos de los resultados obtenidos, que se evitan en la presentación del trabajo, en aras de una mayor claridad en dicha presentación.

Índice

ESCUELA TECNICA SUPERIOR INGENIERIA INFORMATICA BIBLIOTECA

Capítulo 0

Generalidades

Se introducen a continuación algunas definiciones y conceptos básicos que se utilizarán en el trabajo de investigación que se presenta. Para cualquier aclaración acerca de dichos conceptos, podría consultarse alguno de los textos clásicos, como el Jacobson[17] o el Chow[9], o el más específico Goze-Khakindjanov[15]

0.1 Álgebras de Lie

Un *álgebra de Lie* $(\mathfrak{g}, \mu)$ *sobre un cuerpo* $\mathbf{K}$ es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbf{K}$ dotado de una aplicación bilineal, llamada *producto o ley del álgebra*

$$\begin{array}{rcl} \mu \ : \ \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ (X, Y) & \longrightarrow & \mu(X, Y) = [X, Y] \end{array}$$

que cumple las siguientes propiedades

1. $[X, X] = 0, \ \forall X \in \mathfrak{g}$

2. $J(X, Y, Z) = [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \ \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$
   (Identidad de Jacobi)

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA
BIBLIOTECA

La *dimensión del álgebra* es la dimensión del vectorial subyacente. En este trabajo se van a considerar álgebras de Lie sobre el cuerpo $\mathbf{C}$ de los números complejos y de dimensión finita.

Un subespacio $\mathfrak{g}_1$ de $\mathfrak{g}$ se dice que es una *subálgebra de Lie de* $\mathfrak{g}$ si $[X,Y] \in \mathfrak{g}_1$, $\forall\, X, Y \in \mathfrak{g}_1$, es decir, una subálgebra es un subespacio vectorial que es álgebra de Lie para la multiplicación inducida.

Una subálgebra de Lie $\mathcal{I}$ de $\mathfrak{g}$ se dice que es un *ideal* de $\mathfrak{g}$ si $[\mathcal{I}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathcal{I}$, es decir, $[X,Y] \in \mathcal{I}$, $\forall X \in \mathcal{I}$, $\forall Y \in \mathfrak{g}$; obviamente, todo ideal es subálgebra.

Se define el *centro* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \ / \ [X,Y] = 0, \ \forall Y \in \mathfrak{g}\}$$

Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, se define el *centralizador* de $\mathfrak{h}$

$$\mathcal{C}en(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} \ / \ [X,Z] = 0, \ \forall Z \in \mathfrak{h}\}$$

Una $\mathbf{Z}$-graduación de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es una descomposición en suma directa de subespacios vectoriales

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathfrak{g}_i$$

donde $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre un cuerpo $\mathbf{K}$. Un espacio vectorial V sobre $\mathbf{K}$, dotado de una aplicación bilineal

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times V & \rightarrow & V \\ (x,v) & \rightarrow & x \cdot v \end{array}$$

es un $\mathfrak{g}$-módulo si se verifica la siguiente condición

$$[x,y] \cdot v = x \cdot y \cdot v - y \cdot x \cdot v, \ \forall x, y \in \mathfrak{g}, v \in V$$

Por ejemplo, si $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathrm{End}(V)$ es una representación de $\mathfrak{g}$ (es decir, un endomorfismo de álgebras de Lie), entonces V puede ser considerado como un $\mathfrak{g}$-módulo considerando $x \cdot v = \phi(x)(v)$. Recíprocamente, dado un $\mathfrak{g}$-módulo V, esta ecuación define una representación $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathrm{End}(V)$.

0.1.1 Álgebras de Lie resolubles y nilpotentes

Se define la *sucesión central descendente* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, mediante

$$\mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \qquad \mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) = \left[\mathfrak{g}, \mathcal{C}^{i-1}(\mathfrak{g})\right], \ i \in \mathbb{N}.$$

Si $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) = \{0\}$, para algún k, pero $\mathcal{C}^{k-1}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$, se dice que $\mathfrak{g}$ es *nilpotente* con índice de nilpotencia, k.

Cuando dicho valor es $n-1$, las álgebras que se obtienen son llamadas *filiformes*; se dirán *casifiliformes* si su índice es $n-2$. Las álgebras de Lie metabelianas son las de índice de nilpotencia 2.

Se define la *sucesión derivada* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, mediante

$$\mathcal{D}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \qquad \mathcal{D}^i(\mathfrak{g}) = \left[\mathfrak{g}, \mathcal{D}^{i-1}(\mathfrak{g})\right], \ i \in \mathbb{N}.$$

Si $\mathcal{D}^m(\mathfrak{g}) = \{0\}$, para algún m, pero $\mathcal{D}^{m-1}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$, se dice que $\mathfrak{g}$ es *resoluble* con índice de resolubilidad, m.

0.1.2 Álgebras de Lie semisimples

Un álgebra de Lie se dice *simple*, si no es abeliana ($[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq 0$) y no tiene ideales propios. En particular se verifica $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

Un álgebra de Lie se dice *semisimple* si es no nula y no posee ideales abelianos no triviales. Obviamente, toda álgebra de Lie simple es semisimple. Las álgebras semisimples son sumas directas de álgebras simples y éstas son conocidas desde los trabajos de Killing y Cartan y están clasificadas (pueden verse en [15] o [16]).

Sea V un $\mathfrak{g}$-módulo y $\phi : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ la correspondiente representación. V (o ϕ) se dice *simple* (o *irreducible*) si $V \neq 0$ y V no tiene más submódulos que $\{0\}$ y V. V (o ϕ) se dice semisimple (o completamente irreducible) si es suma directa de submódulos simples.

Teorema 0.1 *(H. Weyl)[23]. Si $\mathfrak{g}$ es semisimple, cualquier $\mathfrak{g}$-módulo (de dimensión finita) es semisimple.*

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Siempre existe un ideal resoluble de $\mathfrak{g}$ que contiene a cualquier otro ideal resoluble. Este mayor ideal resoluble es el *radical* de $\mathfrak{g}$, y se denota $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie semisimple, entonces $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = 0$.

El Teorema de Lévi ([15] o [17]) afirma que toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ admite una descomposición en suma semidirecta de su radical (el ideal resoluble maximal del álgebra) y una subálgebra semisimple (la subálgebra de Levi). Este resultado reduce, en esencia, el problema de la clasificación de las álgebras de Lie al de la clasificación de las resolubles.

0.1.3 Bases adaptadas. Invariante de Goze

El teorema de Engel permite afirmar que toda álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ admite una base $\{X_i,\ 0 \le i \le n-1\}$, tal que

$$\begin{array}{l} X_0 \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\ [X_0, X_i] = \varepsilon_{i+1} X_{i+1}, \quad 1 \le i \le n-2,\ \varepsilon_j \in \{0,1\},\ 2 \le j \le n-1 \\ [X_0, X_{n-1}] = 0 \end{array}$$

Estas bases se llaman *bases adaptadas* y X_0 se denomina *vector característico* .
Sea $c(X)$ es la sucesión ordenada decrecientemente de las dimensiones de los bloques de Jordan del operador nilpotente $ad(X)$, donde $X \in \mathfrak{g}$. Entonces

$$c(\mathfrak{g}) = \max_{X \in \mathfrak{g} - [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]} \{c(X)\}$$

es el *invariante de Goze* o *sucesión característica* of $\mathfrak{g}$.

El invariante de Goze para las álgebras de Lie filiformes, casi-filiformes y abelianas, de dimensión n vale, respectivamente, $(n-1,1)$, $(n-2,1,1)$ y $(1,\ldots,1)$. Dicho invariante para las álgebras de Lie metabelianas es $(2,2,\overset{p)}{\ldots},2,1 \overset{n-2p)}{\ldots},1), 1 \le p \le \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ y, para las de nilíndice 3 es $(3,\overset{p)}{\ldots},3,2,\overset{q)}{\ldots},2,1 \overset{n-3p-2q)}{\ldots},1)$, $1 \le p \le \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor$, $0 \le q \le \left\lfloor \frac{n-3p-1}{2} \right\rfloor$.

0.2 Derivaciones

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y $X \in \mathfrak{g}$, se denota $ad(X)$ al endomorfismo de $\mathfrak{g}$ definido por

$$\begin{array}{rccc} ad(X): & \mathfrak{g} & \rightarrow & \mathfrak{g} \\ & Y & \rightarrow & [X,Y] \end{array}$$

y se le denomina *aplicación adjunta de X.*

La aplicación

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow gl(\mathfrak{g})$$

es una representación de $\mathfrak{g}$, llamada *representación adjunta* del álgebra. El Teorema de Engel nos dice que *"un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es nilpotente si y sólo si $ad(X)$ es nilpotente para todo elemento X de $\mathfrak{g}$"*.

Un endomorfismo δ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ es una *derivación* de $\mathfrak{g}$ si

$$\delta([X,Y]) = [\delta(X),Y] + [X,\delta(Y)], \qquad \forall\, X,Y \in \mathfrak{g}$$

El conjunto de derivaciones de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, (denotado $Der(\mathfrak{g})$), es un subespacio vectorial de $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ y, más aún, es un álgebra de Lie sobre $\mathbf{K}$ definiendo

$$[\delta,\delta'] = \delta \circ \delta' - \delta' \circ \delta$$

Si todas las derivaciones son nilpotentes, el álgebra se dice *característicamente nilpotente.*

Se tiene que, para todo $X \in \mathfrak{g}$, el endomorfismo $ad(X)$ es una derivación que se dice *interior* del álgebra. El conjunto de las derivaciones interiores, $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$, es un ideal de $Der(\mathfrak{g})$. Módulo el estudio de las derivaciones de las álgebras de Lie resolubles, la clasificación de las álgebras de Lie se reduce, vía el Teorema de Levi, a la de las resolubles y, en particular, de las nilpotentes (véase [15]).

Un álgebra de Lie se denomina *reductiva* si su radical coincide con su centro [20] y en este caso, $\mathfrak{g}$ es suma directa de su centro (es decir, un álgebra abeliana) y $Der(\mathfrak{g})$ (que es semisimple).

El siguiente resultado establece un criterio para la semisimplicidad de una representación de un álgebra de Lie arbitraria.

Teorema 0.2 *[25] Sea* $\mathfrak{g}$ *un álgebra reductiva sobre* $\mathbf{K}$ *, y sea* ϕ *una representación de dimensión finita de* $\mathfrak{g}$*. Entonces* ϕ *es completamente reducible si y solo si para cada elemento* $X \in \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$*,* $\phi(X)$ *es un endomorfismo semisimple (es decir, diagonalizable sobre la clausura algebraica de* $\mathbf{K}$ *).*

Se dan a continuación algunos resultados que se aplicarán posteriormente a la hora de la determinación práctica de las derivaciones.

Lema 0.3 *Un elemento central no se puede transformar en uno no central mediante una derivación.*

Lema 0.4 *Si* $Im(d) \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$*, entonces*

$$d \in Der(\mathfrak{g}) \;\Leftrightarrow\; Dom(d) \subset \mathfrak{g} - [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$$

Lema 0.5 *Si* $Z \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ *y* $\exists X, Y \in \mathfrak{g} \;/\; [X,Y] = \lambda Z,\ \lambda \in \mathbf{K} - \{0\}$*, con* $d(X) = d(Y) = 0$ *, entonces* $d(Z) = 0$.

Lema 0.6 *Si* $d \in Der(\mathfrak{g})$*, entonces si* $\exists X \;/\; \{X, d(X)\} \subset Cen_{\mathfrak{g}}(Y) \implies X \in Cen_{\mathfrak{g}}(d(Y))$

Para el cálculo efectivo de los espacios de derivaciones en este trabajo de investigación se van a utilizar, según convenga, uno de los dos métodos que se describen a continuación.

0.2.1 Método de graduaciones.

Puede verse, por ejemplo en [15].
Si $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathfrak{g}_i$, donde $\mathfrak{g}_i$ son ideales of $\mathfrak{g}$, entonces

$$Der\Big(\bigoplus_{i=1}^{r} \mathfrak{g}_i\Big) = \left(\bigoplus_{i=1}^{r} Der(\mathfrak{g}_i)\right) \oplus \left(\bigoplus_{i \neq j} \mathcal{D}(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j)\right)$$

donde $\mathcal{D}(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j)$ son las derivaciones de $\mathfrak{g}$ que verifican

$$\left| \begin{array}{lcll} d(\mathfrak{g}_k) & = & 0, & \text{if} \quad k \neq i, \\ d(\mathfrak{g}_i) & \subset & \mathcal{Z}(\mathfrak{g}_j), & \\ d([\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i]) & = & 0. & \end{array} \right.$$

Esto permite simplificar extraordinariamente los cálculos, en particular si se consigue una graduación de longitud próxima a la dimensión del álgebra (la dimensión de la mayor parte de los subespacios homogéneos es 1).

0.2.2 Método del toro.

Puede verse, por ejemplo en [8].

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, y $Der(\mathfrak{g})$ el correspondiente álgebra de derivaciones, que es también un álgebra de Lie. Se considera una subálgebra especial de $Der(\mathfrak{g})$, que designaremos por T, que está constituida por el mayor conjunto que se puede encontrar de las derivaciones que son simultáneamente diagonalizables. Esta álgebra es abeliana, coincide con su radical y está formada por endomorfismos diagonales X. Por tanto, cualquier endomorfismo de la forma $\phi(X)$ será un endomorfismo semisimple. Entonces, aplicando el teorema anterior, cualquier T-módulo será semisimple vía la correspondencia entre las representaciones completamente reducibles y los módulos semisimples.

Fácilmente se comprueba que $\mathfrak{g}$ y $Der(\mathfrak{g})$ tienen ambos estructura de T-módulo considerando los siguientes productos

$$\begin{array}{ll} t \cdot g = t(g) & t \in T, g \in \mathfrak{g} \\ t \cdot d = [t, d] & t \in T, d \in Der(\mathfrak{g}) \end{array}$$

respectivamente. Así, $\mathfrak{g}$ y $Der(\mathfrak{g})$ son T-módulos semisimples, obteniéndose las siguientes descomposiciones en sumas directas, en el sentido de espacios vectoriales, de T-módulos simples

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \cdots$
  $\mathfrak{g}_{\alpha_i} = \{g \ / \ t \cdot g = \alpha_i(t) g, \forall t \in \mathrm{T}\}$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

con $\alpha_i \in \mathrm{T}^*$, tal que $\alpha_i(\mathrm{T}_j) = \delta_{i,j}$, donde $\{\mathrm{T}_i\}$ es una base de T, y los subespacios $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$, verifican que $[\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{\alpha_j}] \subset \mathfrak{g}_{\alpha_i+\alpha_j}$, es decir, si existen $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$, $\mathfrak{g}_{\alpha_j}$ con $[\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{\alpha_j}] \neq 0$ entonces el espacio $\mathfrak{g}_{\alpha_i+\alpha_j}$ también existe.

- $Der(\mathfrak{g}) = \mathcal{D}_{\lambda_1} \oplus \mathcal{D}_{\lambda_2} \oplus \dots$
  $\mathcal{D}_{\lambda_i} = \{d \in Der(\mathfrak{g})/t \cdot d = \lambda_i(t) \cdot d, \forall t \in \mathrm{T}\}$
  con $\lambda_i \in \mathrm{T}^*$, y los subespacios $\mathcal{D}_{\lambda_i}$ verificando condiciones análogas a las precedentes $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$.

Queda por determinar cual es la forma de cada espacio $\mathcal{D}_{\lambda_i}$ asociado a la graduación obtenida para $Der(\mathfrak{g})$. Si se usa la graduación precedente para $\mathfrak{g}$, cualquier derivación $d \in \mathcal{D}_{\lambda_i}$ verifica que $d(\mathfrak{g}_{\alpha_i}) \subset \mathfrak{g}_{\alpha_j}$ y, por tanto se tiene que $\lambda_i(t) = \alpha_j(t) - \alpha_i(t)$. Este hecho determina el tipo de derivaciones que forman parte de cada $\mathcal{D}_{\alpha_j-\alpha_i}$.

0.3 Cohomología

Dados un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre el cuerpo $\mathbf{K}$ y un $\mathfrak{g}$-módulo V, se llama *cocadena* de grado j, $j \geq 1$, a cada aplicación multilineal alternada de $\mathfrak{g}^p$ en V. Si $C^j(\mathfrak{g}, V)$ es el espacio de las j-cocadenas, se tiene que

$$C^j(\mathfrak{g}, V) = Hom(\Lambda^j \mathfrak{g}, V), \ j \geq 1.$$

Una cocadena de $\mathfrak{g}$ es un elemento de $C^*(\mathfrak{g}, V) = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} C^j(\mathfrak{g}, V)$.

Si el endomorfismo $d: \ C^*(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow C^*(\mathfrak{g}, V)$ es el operador coborde, se designa por d_j a la restricción de d a $C^j(\mathfrak{g}, V)$, $d_j: \ C^j(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow C^{j+1}(\mathfrak{g}, V)$.

Los subespacios de $C^j(\mathfrak{g}, V)$ definidos por

$$Z^j(\mathfrak{g}, V) = Ker \ d_j, \ B^j(\mathfrak{g}, V) = Im \ d_{j-1}$$

se denominan, respectivamente, espacio de los *cociclos* de grado j y espacio de los *cobordes* de grado j. Como $B^j(\mathfrak{g}, V)$ resulta ser un subespacio de $Z^j(\mathfrak{g}, V)$, tiene sentido hablar del espacio cociente

$$H^j(\mathfrak{g}, V) = Z^j(\mathfrak{g}, V)/B^j(\mathfrak{g}, V)$$

al que se denomina *espacio de cohomología* de grado j (de $\mathfrak{g}$, con valores en V).

Si se considera $\mathfrak{g}$ como el $\mathfrak{g}$-módulo V anterior, se puede identificar $Z^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ con el espacio de las derivaciones de $\mathfrak{g}$, $Der(\mathfrak{g})$, y $B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ con el de las derivaciones interiores de $\mathfrak{g}$, $Ad(\mathfrak{g})$, de donde surge una fácil interpretación de $H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$.

Si se denota mediante $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ la órbita correspondiente a la ley de $\mathfrak{g}$ en la variedad de álgebras de Lie de dimensión n, $\mathcal{L}^n$, inducida por la acción de $GL(n,\mathbf{C})$, resulta que $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ puede ser provista de una estructura de variedad diferenciable, y que

$$\dim \mathcal{O}(\mathfrak{g}) = n^2 - \dim(Der(\mathfrak{g})) = \dim(B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})).$$

0.4 Sobre la estructura de las álgebras de Lie metabelianas.

Puede verse en [15].

Sea V un espacio vectorial complementario de $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$

$$\mathfrak{g} = \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \oplus V$$

Entonces $s = \dim(V) = \dim(\mathfrak{g})/\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ es el número mínimo de generadores de $\mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{g}$ es metabeliana, será $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.

Sea $U = \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \cap V$. Este es un ideal abeliano de $\mathfrak{g}$. Consideremos W espacio vectorial complementario de U en V:

$$\mathfrak{g} = \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \oplus U \oplus W, \qquad \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \oplus U$$

Podemos deducir que $\mathfrak{h} = \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \oplus W$ es una subálgebra metabeliana de $\mathfrak{g}$ que verifica $\mathcal{Z}(\mathfrak{h}) = \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ y $\mathcal{C}^1(\mathfrak{h}) = \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$. Entonces cualquier álgebra de Lie metabeliana es una extensión trivial de un álgebra metabeliana cuyo centro es la derivada del álgebra, extendido por un ideal abeliano. Así, podemos suponer que $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.

Si $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = \langle X_1,\ldots,X_p\rangle$, sea $\mathcal{B} = \{X_1, X_2,\ldots,X_p,Y_1,\ldots,Y_{n-p}\}$ una base de $\mathfrak{g}$, de forma que

$$\mathfrak{g} = \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \oplus V = \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \oplus V, \qquad \dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = p$$

Obviamente $[X_i, X_j] = [X_i, Y_j] = 0$. Entonces, el álgebra está definida por los corchetes:

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{k=1}^{p} a_{ij}^k X_k$$

Se satisfacen las condiciones de Jacobi y, por tanto, los parámetros son libres para $1 \leq i < j \leq n-p$. Intrínsecamente esto significa que la estructura de $\mathfrak{g}$ está definida por una aplicación sobreyectiva

$$\phi : \Lambda^2(V) \longrightarrow \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$$

El punto de vista dual permite un análisis más concreto. La aplicación dual

$$\phi^* : \mathcal{Z}(\mathfrak{g})^* \longrightarrow \Lambda^2(U)^*$$

es inyectiva.

Si $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_{n-p}\}$ es la base dual de la base dada, entonces las ecuaciones de estructura de $\mathfrak{g}$ (duales de las condiciones de Jacobi) son:

$$\mathrm{d}\alpha_k = \sum_{1 \leq i < j \leq n-p} a_{ij}^k \beta_i \wedge \beta_j$$

Las formas bilineales $\theta_1 = \mathrm{d}\alpha_1, \ldots, \theta_p = \mathrm{d}\alpha_p$, son dos-formas en V y generan el subespacio $\phi^*(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})^*)$.

Las dimensiones de los subespacios de formas diferenciales $\{\theta : \mathrm{d}^k\theta = 0\}$, será un invariante, que se usará en algunos casos, para probar que ciertas álgebras son no isomorfas.

Capítulo 1

Álgebras de Lie metabelianas.

Se va a abordar en este capítulo el estudio de las álgebras de Lie metabelianas de dimensión n, es decir, las álgebras de Lie que son 2-nilpotentes y, por tanto, tienen invariante de Goze $(2,\overset{p)}{\ldots},2,1\overset{n-2p)}{\ldots},1)$, $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

En las últimas décadas se viene trabajando mucho en las álgebras de Lie nilpotentes pero, fundamentalmente, con las de índice de nilpotencia elevado, sobre todo las filiformes (las de nilíndice máximo, es decir $\dim(\mathfrak{g}) - 1$). Las álgebras de Lie metabelianas son, en cierto sentido, el caso opuesto al de las filiformes puesto que, salvo el caso trivial de las abelianas, son las que tienen el índice de nilpotencia más bajo.

Como ya se indicaba en la introducción, Goze y Khakimdjanov han probado que el conjunto de álgebras de Lie metabelianas de dimensión $2p+1$ y sucesión característica $(2,2,...,2,1)$ es isomorfo al conjunto de aplicaciones bilineales de $\mathbf{C}^p \times \mathbf{C}^p$ con valores en $\mathbf{C}^p$ [15]. Esto justifica la enorme dificultad que presenta la clasificación de las álgebras de Lie metabelianas que se aborda en ese capítulo.

Se van a obtener aquí algunos resultados sobre clasificación de álgebras de Lie metabelianas, en función de la dimensión de $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$. Dado que el caso $(2,1\overset{n-2)}{\ldots},1)$ está resuelto [7], se van a estudiar los casos $(2,2,1\overset{n-4)}{\ldots},1)$ y $(2,2,2,1\overset{n-6)}{\ldots},1)$, así como el caso general $(2,\overset{p)}{\ldots},2,1\overset{n-2p)}{\ldots},1)$ cuando la dimensión de la derivada es máxima. En todos los casos, las dificultades aumentan al disminuir la dimensión de $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ y, de

BIBLIOTECA

hecho, el problema se resolverá en su totalidad sólo en el caso en que dicha dimensión es máxima.

1.1 Álgebras de Lie metabelianas con invariante de Goze $(2, 2, 1 \overset{n-4)}{\ldots}, 1)$.

El siguiente resultado recoge la expresión de la familia de leyes de álgebras de Lie de dimensión n e invariante de Goze $(2, 2, 1 \overset{n-4)}{\ldots}, 1)$.

Proposición 1.1 (Familia) *En dimensión $n \geq 5$, toda álgebra de Lie de invariante de Goze $(2, 2, 1 \overset{n-4)}{\ldots}, 1)$ es isomorfa a una cuya ley viene expresada, respecto de una base adaptada $\{X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ Y_1, \ldots, Y_{n-5}\}$, por*

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_1, X_3] = \alpha Y_1, & \alpha \in \{0,1\}, \\ [X_1, Y_i] = b^2_{1i} X_2 + b^4_{1i} X_4, & 1 \leq i \leq n-5, \\ [X_3, Y_i] = b^2_{3i} X_2 + b^4_{3i} X_4, & 1 \leq i \leq n-5, \\ [Y_i, Y_j] = c^2_{ij} X_2 + c^4_{ij} X_4, & 1 \leq i < j \leq n-5. \end{cases}$$

con las restricciones

$$\begin{cases} \alpha \cdot b^2_{1j} = \alpha \cdot b^4_{1j} = 0, & 1 \leq j \leq n-5, \\ \alpha \cdot b^2_{3j} = \alpha \cdot b^4_{3j} = 0, & 1 \leq j \leq n-5, \\ \alpha c^2_{ij} = \alpha c^4_{ij} = 0, & 1 \leq i < j \leq n-5. \end{cases}$$

Demostración. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión n y sucesión característica $(2, 2, 1 \overset{n-4)}{\ldots}, 1)$. Sea X_0 un vector característico de $\mathfrak{g}$. Es conocido que, respecto de cierta base adaptada de $\mathfrak{g}$, $\mathcal{B} = \{X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ Y_1,\ \ldots,\ Y_{n-5}\}$, los únicos productos no nulos de X_0 con elementos de $\mathcal{B}$ son

$$[X_0, X_1] = X_2$$
$$[X_0, X_3] = X_4$$

Hay que calcular el resto de los productos de los elementos de la base.

Se va a designar

$$\begin{aligned}
[X_i, X_j] &= \sum_{k=1}^{4} a_{ij}^k X_k + \sum_{k=1}^{n-5} \alpha_{ij}^k Y_k, \quad 1 \leq i < j \leq 4, \\
[X_i, Y_j] &= \sum_{k=1}^{4} b_{ij}^k X_k + \sum_{k=1}^{n-5} \beta_{ij}^k Y_k, \quad 1 \leq i \leq 4, \quad 1 \leq j \leq n-5, \\
[Y_i, Y_j] &= \sum_{k=1}^{4} c_{ij}^k X_k + \sum_{k=1}^{n-5} \gamma_{ij}^k Y_k, \quad 1 \leq i < j \leq n-5.
\end{aligned}$$

- Puesto que se debe cumplir que $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) = \{0\}$, sigue que $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ y, por tanto, se debe verificar que

$$[X_{2h}, Z] = 0, \quad 1 \leq h \leq 2, \quad \forall Z \in \mathfrak{g}$$

- $X_1,\ X_3 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ pues, en caso contrario, se tendría que $X_2,\ X_4 \in \mathcal{C}^2(\mathfrak{g})$, lo cual no puede ser cierto. Por lo tanto, se debe verificar que

$$\begin{aligned}
a_{ij}^1 &= a_{ij}^3 = 0 \quad 1 \leq i < j \leq 4, \\
b_{ij}^1 &= b_{ij}^3 = 0 \quad 1 \leq i \leq 4,\ 1 \leq j \leq n-5, \\
c_{ij}^1 &= c_{ij}^3 = 0 \quad 1 \leq i < j \leq n-5.
\end{aligned}$$

- Por otra parte, el cambio de base dado por

$$\begin{cases}
X_0' = X_0, \\
X_1' = X_1 - a_{13}^4 X_0, \\
X_2' = X_2, \\
X_3' = X_3 + a_{13}^2 X_0, \\
X_4' = X_4, \\
Y_j' = Y_j, & 1 \leq j \leq n-5.
\end{cases}$$

permite suponer que $a_{13}^2 = a_{13}^4 = 0$.

Se tiene, entonces, que cualquier álgebra de Lie de dimensión $n \geq 5$ e invariante de Goze $(2, 2, 1 \overset{n-4)}{\ldots}, 1)$ es isomorfa a un álgebra cuya ley viene dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_1, X_3] = \sum_{k=1}^{n-5} \alpha_k Y_k, & \\ [X_1, Y_i] = b_{1i}^2 X_2 + b_{1i}^4 X_4 + \sum_{k=1}^{n-5} \beta_{1i}^k Y_k, & 1 \leq i \leq n-5, \\ [X_3, Y_i] = b_{3i}^2 X_2 + b_{3i}^4 X_4 + \sum_{k=1}^{n-5} \beta_{3i}^k Y_k, & 1 \leq i \leq n-5, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij}^2 X_2 + c_{ij}^4 X_4 + \sum_{k=1}^{n-5} \gamma_{ij}^k Y_k, & 1 \leq i < j \leq n-5. \end{cases}$$

- Puesto que $X_0 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \Longrightarrow AX_0 + Z \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$, $\forall Z \in \mathfrak{g}$, $\forall A \in \mathbf{C} - \{0\}$, cualquiera de estos vectores podría ser considerado como vector característico. En consecuencia, cualquier menor de orden 3 de las matrices $Ad(AX_0 + Z)$ debe ser nulo.

  $\star$ $\operatorname{rg}(Ad(AX_0 + X_1)) = 2$

$$Ad(AX_0 + X_1) = \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & A & 0 & 0 & 0 & b_{11}^2 & \ldots & b_{1,n-5}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 & b_{11}^4 & \ldots & b_{1,n-5}^4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & \beta_{11}^1 & \ldots & \beta_{1,n-5}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{n-5} & 0 & \beta_{11}^{n-5} & \ldots & \beta_{1,n-5}^{n-5} \end{array}\right]$$

  Siempre es posible elegir A de forma que

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{vmatrix} \neq 0$$

  y, por tanto, se debe verificar que

$$\begin{vmatrix} A & 0 & b_{1j}^2 \\ 0 & A & b_{1j}^4 \\ 0 & \alpha_k & \beta_{1j}^k \end{vmatrix} = 0, \quad 1 \leq j, k \leq n-5$$

es decir

$$\beta^k_{1j}A - \alpha_k b^4_{1j} = 0, \quad \forall A \neq 0$$

lo que implica que

$$\begin{cases} \alpha_k \cdot b^4_{1j} = 0 \\ \beta^k_{1j} = 0 \end{cases} \quad 1 \leq j,k \leq n-5$$

⋆ $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + X_3)) = 2$

Por simetría, puesto que los vectores X_1 y X_3 juegan un papel análogo, se verificará que

$$\begin{cases} \alpha_k \cdot b^2_{3j} = 0 \\ \beta^k_{3j} = 0 \end{cases} \quad 1 \leq j,k \leq n-5$$

⋆ $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + Y_i)) = 2$

$$Ad(AX_0+Y_i) = \left[\begin{array}{ccccc|cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A-b^2_{1i} & 0 & -b^2_{3i} & 0 & -c^2_{1i} & \ldots & -c^2_{i-1,i} & 0 & c^2_{i,i+1} & \ldots & c^2_{i,n-5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -b^4_{1i} & 0 & A-b^4_{3i} & 0 & -c^4_{1i} & \ldots & -c^4_{i-1,i} & 0 & c^4_{i,i+1} & \ldots & c^4_{i,n-5} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^1_{1i} & \ldots & -\gamma^1_{i-1,i} & 0 & \gamma^1_{i,i+1} & \ldots & \gamma^1_{i,n-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^{n-5}_{1i} & \ldots & -\gamma^{n-5}_{i-1,i} & 0 & \gamma^{n-5}_{i,i+1} & \ldots & \gamma^{n-5}_{i,n-5} \end{array}\right]$$

Análogamente, se puede elegir A de forma que

$$\begin{vmatrix} A-b^2_{1i} & -b^2_{3i} \\ -b^4_{1i} & A-b^4_{3i} \end{vmatrix} \neq 0$$

y, por tanto, se ha de cumplir que

$$\begin{vmatrix} A-b^2_{1i} & -b^2_{3i} & c^2_{ij} \\ -b^4_{1i} & A-b^4_{3i} & c^4_{ij} \\ 0 & 0 & \gamma^k_{ij} \end{vmatrix} = 0 \quad 1 \leq i < j \leq n-5, \quad 1 \leq k \leq n-5$$

es decir

$$\gamma_{ij}^k \left((A - b_{1i}^2)(A - b_{3i}^4) - b_{1i}^4 b_{3i}^2 \right) = 0, \quad \forall A \neq 0$$

luego

$$\gamma_{ij}^k = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n-5, \quad 1 \leq k \leq n-5$$

$\star$ $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + X_1 + X_3)) = 2$

$$Ad(AX_0+X_1+X_3) = \left[\begin{array}{ccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-1 & A & 0 & 0 & 0 & b_{11}^2 + b_{31}^2 & \dots & b_{1,n-5}^2 + b_{3,n-5}^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-1 & 0 & 0 & A & 0 & b_{1i}^4 + b_{3i}^4 & \dots & b_{1,n-5}^4 + b_{3,n-5}^4 \\
\hline
0 & -\alpha_1 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & -\alpha_{n-5} & 0 & \alpha_{n-5} & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}\right]$$

y, por tanto, se debe verificar que

$$\begin{vmatrix} A & 0 & b_{1i}^2 + b_{3i}^2 \\ 0 & A & b_{1i}^4 + b_{3i}^4 \\ -\alpha_k & \alpha_k & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad 1 \leq i, k \leq n-5$$

es decir

$$A\alpha_k (b_{1i}^2 + b_{3i}^2 - b_{1i}^4 - b_{3i}^4) = 0$$

y, como $\alpha_k b_{1j}^k = \alpha_k b_{3j}^2 = 0$, sigue que

$$A\alpha_k (b_{1i}^2 - b_{3i}^4) = 0, \quad \forall A \neq 0, \; 1 \leq i, k \leq n-5$$

lo que implica que

$$\alpha_k (b_{1i}^2 - b_{3i}^4) = 0, \; 1 \leq i, k \leq n-5$$

$\star$ $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + X_1 + Y_i)) = 2, \quad 1 \leq i \leq n-5$

$Ad(AX_0 + X_1 + Y_i) =$

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & A-b_{1i}^2 & 0 & -b_{3i}^2 & 0 & b_{11}^2 - c_{1i}^2 & \dots & b_{1,i-1}^2 - c_{i-1,i}^2 & b_{1i}^2 & b_{1,i+1}^2 + c_{i,i+1}^2 & \dots & b_{1,n-5}^2 + c_{i,n-5}^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & -b_{1i}^4 & 0 & A-b_{3i}^4 & 0 & -c_{1i}^4 & \dots & -c_{i-1,i}^4 & 0 & c_{i,i+1}^4 & \dots & c_{i,n-5}^4 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{1i}^1 & \dots & -\gamma_{i-1,i}^1 & 0 & \gamma_{i,i+1}^1 & \dots & \gamma_{i,n-5}^1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{1i}^{n-5} & \dots & -\gamma_{i-1,i}^{n-5} & 0 & \gamma_{i,i+1}^{n-5} & \dots & \gamma_{i,n-5}^{n-5}
\end{array}\right]$$

Entonces, se debe verificar que

$$\begin{vmatrix} A-b_{1i}^2 & 0 & -b_{3i}^2 \pm c_{ij}^2 \\ -b_{1i}^4 & A-b_{3i}^4 & b_{1j}^4 \pm c_{ij}^4 \\ 0 & \alpha_k & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n-5,\ 1 \leq k \leq n-5$$

es decir

$$\alpha_k \left((A - b_{1i}^2)(b_{1j}^4 \pm c_{ij}^2) + b_{1i}^4 (b_{1j}^2 \pm c_{ij}^2) \right) = 0, \quad \forall A \neq 0$$

y, puesto que $\alpha_k b_{1i}^4 = 0,\ 1 \leq i, k \leq n-5$, se debe verificar que

$$\alpha_k c_{ij}^4 = 0,\ 1 \leq i < j \leq n-5,\ 1 \leq k \leq n-5.$$

$\star$ $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + X_3 + Y_i)) = 2,\ 1 \leq i \leq n-5.$
De forma análoga, se obtiene que

$$\alpha_k c_{ij}^2 = 0,\ 1 \leq i < j \leq n-5,\ 1 \leq k \leq n-5$$

- Si se efectúa el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_0'=X_0+X_1, & \\ X_1'=X_1, & \\ X_2'=X_2, & \\ X_3'=X_3, & \\ X_4'=X_4+[X_1,X_3], & \\ Y_j'=Y_j, & 1 \leq j \leq n-5. \end{cases}$$

para que se mantenga la sucesión característica debe cumplirse que

$$\begin{aligned} [X_0',X_4']&=\sum_{k=1}^{n-5}\alpha_k\,[X_1,Y_k]=\sum_{k=1}^{n-5}\alpha_k(b_{1k}^2X_2+b_{1k}^4X_4) \\ &=\left(\sum_{k=1}^{n-5}\alpha_k b_{1k}^2\right)X_2+\left(\sum_{k=1}^{n-5}\alpha_k b_{1k}^4\right)X_4=0 \end{aligned}$$

de donde, puesto que $\alpha_k b_{1k}^4=0,\ \forall k=1,\ldots,n-5$, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n-5}\alpha_k b_{1k}^2=0$$

- Análogamente, efectuando el cambio de base (similar al anterior) dado por $X_0'=X_0+X_3$, se debe verificar que

$$\sum_{k=1}^{n-5}\alpha_k b_{3k}^4=0$$

Se ha probado que cualquier álgebra de Lie de dimensión $n\geq 5$ y sucesión característica $(2,2,1\overset{n-4)}{\ldots},1)$, es isomorfa a una de la siguiente familia de álgebras:

$$\begin{cases} [X_0,X_{2i-1}]=X_{2i}, & 1\leq i\leq 2, \\ [X_1,X_3]\ =\sum_{k=1}^{n-5}\alpha_k Y_k, & \\ [X_1,Y_i]\ =b_{1i}^2X_2+b_{1i}^4X_4, & 1\leq i\leq n-5, \\ [X_3,Y_i]\ =b_{3i}^2X_2+b_{3i}^4X_4, & 1\leq i\leq n-5, \\ [Y_i,Y_j]\ =c_{ij}^2X_2+c_{ij}^4X_4, & 1\leq i<j\leq n-5. \end{cases}$$

con las siguientes restricciones para los parámetros:

$$\begin{cases} \alpha_k \cdot b_{1j}^4 = \alpha_k \cdot b_{3j}^2 = 0, & 1 \leq j, k \leq n-5, \\ \alpha_k \cdot (b_{3j}^4 - b_{1j}^2) = 0, & 1 \leq j, k \leq n-5, \\ \sum\limits_{k=1}^{n-5} \alpha_k b_{1k}^2 = \sum\limits_{k=1}^{n-5} \alpha_k b_{3k}^4 = 0, & \\ \alpha_k c_{ij}^2 = \alpha_k c_{ij}^4 = 0, & 1 \leq i < j \leq n-5, \ 1 \leq k \leq n-5. \end{cases}$$

Puesto que se verifica que $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 2 + r$, siempre que $n \geq 5$, siendo

$$r = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_{n-5} \end{pmatrix}$$

se pueden considerar dos casos, según los distintos valores de r:

$$\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = \begin{cases} 3 \Longleftrightarrow r = 1 \\ 2 \Longleftrightarrow r = 0 \end{cases}$$

- **Caso 1:** $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 3$

  En este caso, por simetría, se puede suponer que

$$r = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \alpha_1 \end{pmatrix}$$

  El cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_i' = X_i, & 0 \leq i \leq 4, \\ Y_1' = \sum\limits_{k=1}^{n-5} \alpha_k Y_k, & \\ Y_j' = Y_j, & 2 \leq j \leq n-5. \end{cases}$$

  permite suponer $\alpha_1 = 1$, $\alpha_k = 0$, $2 \leq k \leq n-5$, quedando las siguientes restricciones

$$\begin{cases} b_{1j}^4 = b_{3j}^2 = 0, & 1 \leq j \leq n-5, \\ b_{3j}^4 - b_{1j}^2 = 0, & 1 \leq j \leq n-5, \\ b_{11}^2 = b_{31}^4 = 0, & \\ c_{ij}^2 = c_{ij}^4 = 0, & 1 \leq j \leq n-5. \end{cases}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

lo que determina la siguiente familia

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_i] = b_{1i}^2 X_2, & 2 \leq i \leq n-5, \\ [X_3, Y_i] = b_{1i}^2 X_4, & 2 \leq i \leq n-5. \end{cases}$$

Por último, el cambio de base

$$\begin{cases} X_i' = X_i, & 0 \leq i \leq 4, \\ Y_1' = Y_1, & \\ Y_i' = Y_i + b_{1i}^2 X_0, & 2 \leq i \leq n-5. \end{cases}$$

permite suponer $b_{1i}^2 = 0, \; 2 \leq i \leq n-5$, obteniéndose el álgebra de ley

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_1, X_3] = Y_1. & \end{cases}$$

- **Caso 2:** $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 2$

  En este caso se verifica que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un álgebra de ley

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_1, Y_i] = b_{1i}^2 X_2 + b_{1i}^4 X_4, & 1 \leq i \leq n-5, \\ [X_3, Y_i] = b_{3i}^2 X_2 + b_{3i}^4 X_4, & 1 \leq i \leq n-5, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij}^2 X_2 + c_{ij}^4 X_4, & 1 \leq i < j \leq n-5. \end{cases}$$

  sin restricciones respecto a los parámetros.

□

Nota 1: En el caso en que $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 3$, es decir, cuando $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}))$ es máxima, aparece en cada dimensión $n > 5$ un álgebra escindida de ley

$$\mu_{n,2}^1 : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_1, X_3] = Y_1. & \end{cases}$$

Nota 2: En el caso en que $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 2$ y $\dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = n-3$, es decir, cuando $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}))$ es mínima y $\dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))$ es máxima, se obtiene el álgebra de ley

$$\mu^0_{n,2} : \left\{ \ [X_0, X_{2i-1}]{=}X_{2i}, \quad 1 \leq i \leq 2. \right.$$

que denominamos **álgebra de Lie metabeliana modelo**, en el caso $p = 2$. Cualquier otra álgebra de la familia puede obtenerse mediante deformaciones de ésta.

1.2 Álgebras de Lie metabelianas con invariante de Goze $(2,2,2,1,\ldots,1)$.

El siguiente resultado recoge la expresión de la familia de leyes de álgebras de Lie metabelianas e invariante de Goze $(2,2,2,1,\ldots,1)$

Proposición 1.2 (Familia) *En dimensión $n \geq 7$, cualquier álgebra de Lie de invariante de Goze $(2,2,2,1\overset{n-6)}{\ldots},1)$ es isomorfa a una cuya ley, respecto de una base adaptada $\{X_0,\ X_1,\ldots,\ X_6,\ Y_1,\ldots,Y_{n-7}\}$, viene dada por*

$$\left\{\begin{array}{lll}
[X_0, X_{2i-1}]{=}X_{2i}, & & 1 \leq i \leq 3,\\
[X_1, X_3] & = a^2_{13}X_2 + a^4_{13}X_4 + a^6_{13}X_6 + \alpha Y_1, & \\
[X_1, X_5] & = a^2_{15}X_2 + a^4_{15}X_4 + a^6_{15}X_6 + \beta Y_2, & \\
[X_3, X_5] & = a^2_{35}X_2 + a^4_{35}X_4 + a^6_{35}X_6 + \gamma Y_3, & \\
[X_1, Y_i] & = b^2_{1i}X_2 + b^4_{1i}X_4 + b^6_{1i}X_6, & 1 \leq i \leq n-7,\\
[X_3, Y_i] & = b^2_{3i}X_2 + b^4_{3i}X_4 + b^6_{3i}X_6, & 1 \leq i \leq n-7,\\
[X_5, Y_i] & = b^2_{5i}X_2 + b^4_{5i}X_4 + b^6_{5i}X_6, & 1 \leq i \leq n-7,\\
[Y_i, Y_j] & = c^2_{ij}X_2 + c^4_{ij}X_4 + c^6_{ij}X_6, & 1 \leq i < j \leq n-7.
\end{array}\right.$$

con las siguientes restricciones respecto a los parámetros:

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\alpha a_{13}^2 = \alpha a_{13}^4 = \alpha a_{13}^6 = 0, & \\
\beta a_{15}^2 = \beta a_{15}^4 = \beta a_{15}^6 = 0, & \\
\gamma a_{35}^2 = \gamma a_{35}^4 = \gamma a_{35}^6 = 0, & \\
\alpha\,[X_1, Y_1] = \alpha\,[X_3, Y_1] = \alpha\,[X_5, Y_1] = 0, & \\
\beta\,[X_1, Y_2] = \beta\,[X_3, Y_2] = \beta\,[X_5, Y_2] = 0, & \\
\gamma\,[X_1, Y_3] = \gamma\,[X_3, Y_3] = \gamma\,[X_5, Y_3] = 0, & \\
\alpha b_{1j}^4 = \alpha b_{3j}^2 = \alpha b_{5j}^2 = \alpha b_{5j}^4 = \alpha(b_{3j}^4 - b_{1j}^2) = 0, & 1 \le j \le n-7, \\
\beta b_{1j}^6 = \beta b_{3j}^6 = \beta(b_{5j}^6 - \beta b_{1j}^2) = 0, & 1 \le j \le n-7, \\
\alpha b_{1j}^6 a_{15}^4 = \alpha b_{3j}^6 a_{35}^2 = 0, & 1 \le j \le n-7, \\
\alpha\left(b_{1j}^6(a_{35}^4 - a_{15}^2) + b_{3j}^6 a_{15}^4\right) = 0, & 1 \le j \le n-7, \\
\alpha\left(b_{3j}^6(a_{35}^4 - a_{15}^2) - b_{1j}^6 a_{35}^2\right) = 0, & 1 \le j \le n-7, \\
\alpha a_{15}^4(b_{5j}^6 - b_{1j}^2) = \alpha a_{35}^2(b_{5j}^6 - b_{1j}^2) = 0, & 1 \le j \le n-7, \\
\alpha(a_{35}^4 - a_{15}^2)(b_{5j}^6 - b_{1j}^2) = 0, & 1 \le j \le n-7, \\
\alpha c_{ij}^2 = \alpha c_{ij}^4 = \beta c_{ij}^6 = 0, & 1 \le i < j \le n-7, \\
\alpha c_{ij}^6 a_{15}^4 = \alpha c_{ij}^6 a_{35}^2 = \alpha c_{ij}^6(a_{35}^4 - a_{15}^2) = 0, & 1 \le i < j \le n-7.
\end{array}
\right.
$$

siendo $(\alpha, \beta, \gamma) \in \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0), (0,0,0)\}$.

Demostración. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión $n \geq 7$ y sucesión característica $(2,2,2,1,\overset{n-6)}{\ldots},1)$. Sea X_0 un vector característico de $\mathfrak{g}$. Entonces, respecto de cierta base adaptada de $\mathfrak{g}$, $\mathcal{B} = \{X_0,\ X_1, X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6,\ Y_1,\ \ldots,\ Y_{n-7}\}$, los únicos productos no nulos de X_0 con elementos de $\mathcal{B}$ son

$$
\begin{aligned}
[X_0, X_1] &= X_2 \\
[X_0, X_3] &= X_4 \\
[X_0, X_5] &= X_6
\end{aligned}
$$

Hay que calcular el resto de los productos de los elementos de la base.
Se designará

$$
\begin{aligned}
[X_i, X_j] &= \sum_{k=1}^{6} a_{ij}^k X_k + \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{ij}^k Y_k, \quad 1 \leq i < j \leq 6,\\
[X_i, Y_j] &= \sum_{k=1}^{6} b_{ij}^k X_k + \sum_{k=1}^{n-7} \beta_{ij}^k Y_k, \quad 1 \leq i \leq 6,\ 1 \leq j \leq n-7,\\
[Y_i, Y_j] &= \sum_{k=1}^{6} c_{ij}^k X_k + \sum_{k=1}^{n-7} \gamma_{ij}^k Y_k, \quad 1 \leq i < j \leq n-7.
\end{aligned}
$$

- Puesto que se debe cumplir $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) = \{0\}$, sigue que $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ y, por lo tanto, se debe verificar que

$$[X_{2h}, Z] = 0, \quad 1 \leq h \leq 3, \quad \forall Z \in \mathfrak{g}$$

- $X_1,\ X_3,\ X_5 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ pues, en caso contrario se tendría que $X_2,\ X_4, \in \mathcal{C}^2(\mathfrak{g})$, lo cual no puede ser cierto. Por lo tanto, se debe verificar que

$$
\begin{aligned}
a_{ij}^1 = a_{ij}^3 = a_{ij}^5 = 0 &\quad 1 \leq i < j \leq 6,\\
b_{ij}^1 = b_{ij}^3 = b_{ij}^5 = 0 &\quad 1 \leq i \leq 6,\ 1 \leq j \leq n-7,\\
c_{ij}^1 = c_{ij}^3 = c_{ij}^5 = 0 &\quad 1 \leq i < j \leq n-7.
\end{aligned}
$$

- Puesto que $X_0 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \Longrightarrow AX_0 + Z, \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}),\ \forall Z \in \mathfrak{g},\ \forall A \in \mathbf{C} - \{0\}$, por lo tanto, cualquiera de estos vectores podría ser considerado como vector característico. En consecuencia, por ser $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de sucesión característica $(2,2,2,1 \overset{n-6}{\ldots}, 1)$, cualquier menor de orden 4 de las matrices $Ad(AX_0 + Z)$ debe ser nulo, con lo cual se pueden obtener algunas restricciones.

$\star$ $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + X_1)) = 3$

$$Ad(AX_0 + X_1) = \left[\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & A & 0 & a_{13}^2 & 0 & a_{15}^2 & 0 & b_{1j}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A + a_{13}^4 & 0 & a_{15}^4 & 0 & b_{1j}^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{13}^6 & 0 & A + a_{15}^6 & 0 & b_{1j}^6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \alpha_{13}^k & 0 & \alpha_{15}^k & 0 & \beta_{1j}^k \end{array}\right]$$

Siempre es posible elegir A de forma que

$$\begin{vmatrix} A & a_{13}^2 & a_{15}^2 \\ 0 & A + a_{13}^4 & a_{15}^4 \\ 0 & a_{13}^6 & A + a_{15}^6 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall A \neq 0$$

y, por tanto, se debe verificar que

$$\begin{vmatrix} A & a_{13}^2 & a_{15}^2 & b_{1j}^2 \\ 0 & A + a_{13}^4 & a_{15}^4 & b_{1j}^4 \\ 0 & a_{13}^6 & A + a_{15}^6 & b_{1j}^6 \\ 0 & \alpha_{13}^k & \alpha_{15}^k & \beta_{1j}^k \end{vmatrix} = 0, \quad 1 \leq j, k \leq n-7$$

es decir

$$A[A^2 \beta_{ij}^k + A(\ldots) + \ldots] = 0$$

, lo que exige que

$$\beta_{1j}^k = 0, \ 1 \leq j, k \leq n-7$$

De forma análoga, se tiene que

$\star$ $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + X_3)) = 3 \implies \beta_{3j}^k = 0, \ 1 \leq j, k \leq n-7$

$\star$ $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + X_5)) = 3 \implies \beta_{5i}^k = 0, \ 1 \leq j, k \leq n-7$

$\star$ $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + Y_i)) = 3, \ 1 \leq i \leq n-7 \implies \gamma_{ij}^k = 0, \begin{cases} 1 \leq i < j \leq n-7, \\ 1 \leq k \leq n-7. \end{cases}$

Se tiene, entonces, que cualquier álgebra de Lie de dimensión $n \geq 7$ e invariante de Goze $(2,2,2,1,\overset{n-6)}{\ldots},1)$ es isomorfa a una cuya ley es una de la siguiente familia

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = a_{13}^2 X_2 + a_{13}^4 X_4 + a_{13}^6 X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_k Y_k, & \\ [X_1, X_5] = a_{15}^2 X_2 + a_{15}^4 X_4 + a_{15}^6 X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \beta_k Y_k, & \\ [X_3, X_5] = a_{35}^2 X_2 + a_{35}^4 X_4 + a_{35}^6 X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \gamma_k Y_k, & \\ [X_1, Y_i] = b_{1i}^2 X_2 + b_{1i}^4 X_4 + b_{1i}^6 X_6, & 1 \leq i \leq n-7, \\ [X_3, Y_i] = b_{3i}^2 X_2 + b_{3i}^4 X_4 + b_{3i}^6 X_6, & 1 \leq i \leq n-7, \\ [X_5, Y_i] = b_{5i}^2 X_2 + b_{5i}^4 X_4 + b_{5i}^6 X_6, & 1 \leq i \leq n-7, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij}^2 X_2 + c_{ij}^4 X_4 + c_{ij}^6 X_6, & 1 \leq i < j \leq n-7. \end{cases}$$

Puesto que se verifica, además, que $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 3 + r$, siempre que $n \geq 10$, siendo

$$r = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_{n-7} \\ \beta_1 & \beta_2 \ldots \beta_{n-7} \\ \gamma_1 & \gamma_2 \ldots \gamma_{n-7} \end{pmatrix}$$

se pueden considerar cuatro casos, según los distintos valores de r:

$$\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = \begin{cases} 6 \Longleftrightarrow r = 3 \\ 5 \Longleftrightarrow r = 2 \\ 4 \Longleftrightarrow r = 1 \\ 3 \Longleftrightarrow r = 0 \end{cases}$$

Los casos $\dim(\mathfrak{g}) = 7, 8, 9$, se estudiarán aparte.

- **Caso 1:** $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 6$

  Por simetría, se puede suponer que

$$r = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_{n-7} \\ \beta_1 & \beta_2 \ldots \beta_{n-7} \\ \gamma_1 & \gamma_2 \ldots \gamma_{n-7} \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} = 3$$

Entonces, el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X'_i = X_i, & 0 \leq i \leq 6, \\ Y'_1 = a_{13}^2 X_2 + a_{13}^4 X_4 + a_{13}^6 X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_k Y_k, & \\ Y'_2 = a_{15}^2 X_2 + a_{15}^4 X_4 + a_{15}^6 X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \beta_k Y_k, & \\ Y'_3 = a_{35}^2 X_2 + a_{35}^4 X_4 + a_{35}^6 X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \gamma_k Y_k, & \\ Y'_j = Y_j, & 4 \leq j \leq n-7. \end{cases}$$

permite suponer

$$\begin{aligned} a_{13}^2 = a_{13}^4 = a_{13}^6 = 0, \\ a_{15}^2 = a_{15}^4 = a_{15}^6 = 0, \\ a_{35}^2 = a_{35}^4 = a_{35}^6 = 0. \end{aligned}$$

- **Caso 2:** $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 5$

  En este caso $r = 2$ y, por simetría, podemos suponer que

$$r = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_{n-7} \\ \beta_1 & \beta_2 \dots \beta_{n-7} \\ \gamma_1 & \gamma_2 \dots \gamma_{n-7} \end{pmatrix} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

  Por ser $r = 2$, se debe verificar que

$$\gamma_k = \lambda \cdot \alpha_k + \mu \cdot \beta_k, \ 1 \leq k \leq n-7$$

  con lo que se puede hacer el cambio de base definido mediante

$$\begin{cases} X'_i = X_i, & 0 \leq i \leq 2, \\ X'_3 = X_3 - \mu X_1, & \\ X'_4 = X_4 - \mu X_2, & \\ X'_5 = X_5 + \lambda X_1, & \\ X'_6 = X_6 + \lambda X_2, & \\ Y'_1 = a_{13}^2 X_2 + a_{13}^4 X_4 + a_{13}^6 X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_k Y_k, & \\ Y'_2 = a_{15}^2 X_2 + a_{15}^4 X_4 + a_{15}^6 X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \beta_k Y_k, & \\ Y'_j = Y_j, & 3 \leq j \leq n-7. \end{cases}$$

que permite suponer

$$a_{13}^2 = a_{13}^4 = a_{13}^6 = 0,$$
$$a_{15}^2 = a_{15}^4 = a_{15}^6 = 0.$$

- **Caso 3:** $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 4$

  En este caso $r = 1$ y, por simetría, podemos suponer que

$$r = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_{n-7} \\ \beta_1 & \beta_2 \ldots \beta_{n-7} \\ \gamma_1 & \gamma_2 \cdots \gamma_{n-7} \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \alpha_1 \end{pmatrix}$$

  Por ser $r = 1$, se debe verificar que

$$\left.\begin{array}{l} \beta_k = \lambda \cdot \alpha_k \\ \gamma_k = \mu \cdot \alpha_k \end{array}\right\}, \quad 1 \le k \le n-7$$

  y el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_i' = X_i, & 0 \le i \le 4, \\ X_5' = X_5 - \lambda X_3 + \mu X_1, & \\ X_6' = X_6 - \lambda X_4 + \mu X_2, & \\ Y_1' = a_{13}^2 X_2 + a_{13}^4 X_4 + a_{13}^6 X_6 + \sum\limits_{k=1}^{n-7} \alpha_k Y_k, & \\ Y_j' = Y_j, & 2 \le j \le n-7. \end{cases}$$

  permite suponer

$$a_{13}^2 = a_{13}^4 = a_{13}^6 = 0.$$

- **Caso 4:** $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 3$

  Se tiene la siguiente familia

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ [X_1, X_3] = a_{13}^2 X_2 + a_{13}^4 X_4 + a_{13}^6 X_6, & \\ [X_1, X_5] = a_{15}^2 X_2 + a_{15}^4 X_4 + a_{15}^6 X_6, & \\ [X_3, X_5] = a_{35}^2 X_2 + a_{35}^4 X_4 + a_{35}^6 X_6, & \\ [X_1, Y_i] = b_{1i}^2 X_2 + b_{1i}^4 X_4 + b_{1i}^6 X_6, & 1 \le i \le n-7, \\ [X_3, Y_i] = b_{3i}^2 X_2 + b_{3i}^4 X_4 + b_{3i}^6 X_6, & 1 \le i \le n-7, \\ [X_5, Y_i] = b_{5i}^2 X_2 + b_{5i}^4 X_4 + b_{5i}^6 X_6, & 1 \le i \le n-7, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij}^2 X_2 + c_{ij}^4 X_4 + c_{ij}^6 X_6, & 1 \le i < j \le n-7. \end{cases}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

Se acaba de probar que toda álgebra de Lie de invariante de Goze $(2,2,2,1,\dots,1)$ es isomorfa a una cuya ley es una de la siguiente familia

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ [X_1, X_3] = a_{13}^2 X_2 + a_{13}^4 X_4 + a_{13}^6 X_6 + \alpha Y_1, & \\ [X_1, X_5] = a_{15}^2 X_2 + a_{15}^4 X_4 + a_{15}^6 X_6 + \beta Y_2, & \\ [X_3, X_5] = a_{35}^2 X_2 + a_{35}^4 X_4 + a_{35}^6 X_6 + \gamma Y_3, & \\ [X_1, Y_i] = b_{1i}^2 X_2 + b_{1i}^4 X_4 + b_{1i}^6 X_6, & 1 \le i \le n-7, \\ [X_3, Y_i] = b_{3i}^2 X_2 + b_{3i}^4 X_4 + b_{3i}^6 X_6, & 1 \le i \le n-7, \\ [X_5, Y_i] = b_{5i}^2 X_2 + b_{5i}^4 X_4 + b_{5i}^6 X_6, & 1 \le i \le n-7, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij}^2 X_2 + c_{ij}^4 X_4 + c_{ij}^6 X_6, & 1 \le i < j \le n-7. \end{cases}$$

donde $(\alpha, \beta, \gamma) \in \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0), (0,0,0)\}$ con las siguientes restricciones respecto a los parámetros

$$\alpha a_{13}^2 = \alpha a_{13}^4 = \alpha a_{13}^6 = 0$$
$$\beta a_{15}^2 = \beta a_{15}^4 = \beta a_{15}^6 = 0$$
$$\gamma a_{35}^2 = \gamma a_{35}^4 = \gamma a_{35}^6 = 0.$$

verificándose que

$$\dim\,[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \begin{cases} 6 & \text{si} \quad (\alpha, \beta, \gamma) = (1,1,1) \\ 5 & \text{si} \quad (\alpha, \beta, \gamma) = (1,1,0) \\ 4 & \text{si} \quad (\alpha, \beta, \gamma) = (1,0,0) \\ 3 & \text{si} \quad (\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0) \end{cases}$$

Se obtienen a continuación algunas restricciones adicionales para los parámetros

- Se efectúan en primer lugar algunos cambios de base sencillos.

  ⋆ El cambio de base dado por $X_0' = X_0 + X_1$, sólo es cambio de base adaptada si $[X_0', X_4'] = [X_0', X_6'] = 0$, lo que equivale a que hay que exigir que

$$\begin{cases} \alpha\,[X_1, Y_1] = 0, \\ \beta\,[X_1, Y_2] = 0. \end{cases}$$

* Análogamente, a partir del cambio de base dado por $X_0' = X_0 + X_3$, se sigue que

$$\begin{cases} \alpha\,[X_3, Y_1] = 0, \\ \gamma\,[X_3, Y_3] = 0. \end{cases}$$

* El cambio de base dado por $X_0' = X_0 + X_5 \Longrightarrow \begin{cases} \beta\,[X_5, Y_2] = 0, \\ \gamma\,[X_5, Y_3] = 0. \end{cases}$

* El cambio de base dado por $X_0' = X_0 + X_1 + X_3 \Longrightarrow \beta\,[X_3, Y_2] + \gamma\,[X_1, Y_3] = 0$

* El cambio de base dado por $X_0' = X_0 + X_1 + X_5 \Longrightarrow \alpha\,[X_5, Y_1] - \gamma\,[X_1, Y_3] = 0$

* El cambio de base análogo con $X_0' = X_0 + X_3 + X_5$, no aporta ninguna restricción nueva.

- Se impone que se verifiquen las restantes condiciones de Jacobi (En lo sucesivo se va a denotar por $J(X,Y,Z)$ a la identidad de Jacobi aplicada a los vectores X, Y, Z).

  * $J(X_1, X_3, X_5)$: $[X_1, [X_3, X_5]] = [[X_1, X_3], X_5] + [X_3, [X_1, X_5]]$
    y, por tanto, debe verificarse que

$$\gamma[X_1, Y_3] = -\alpha\,[X_5, Y_1] + \beta\,[X_3, Y_2]$$

    Ahora bien, como $\gamma\,[X_1, Y_3] = -\beta\,[X_3, Y_2]$ y $\alpha\,[X_5, Y_1] = \gamma\,[X_1, Y_3]$, se verificará que

$$\begin{cases} \alpha\,[X_5, Y_1] = 0, \\ \beta\,[X_3, Y_2] = 0, \\ \gamma\,[X_1, Y_3] = 0. \end{cases}$$

  * $J(X_1, X_3, Y_i)$, $1 \le i \le n-7$: $[X_1, [X_3, Y_i]] = [[X_1, X_3], Y_i] + [X_3, [X_1, Y_i]]$
    y, por tanto, se tiene que $\alpha\,[Y_1, Y_i] = 0$, $1 \le i \le n-7$.

  * $J(X_1, X_5, Y_i)$, $1 \le i \le n-7 \Longrightarrow \beta\,[Y_2, Y_i] = 0$, $1 \le i \le n-7$.

  * $J(X_3, X_5, Y_i)$, $1 \le i \le n-7 \Longrightarrow \gamma\,[Y_3, Y_i] = 0$, $1 \le i \le n-7$.

En consecuencia, se han obtenido las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} \alpha\,[X_1,Y_1] = \alpha\,[X_3,Y_1] = \alpha\,[X_5,Y_1] = 0, \\ \beta\,[X_1,Y_2] = \beta\,[X_3,Y_2] = \beta\,[X_5,Y_2] = 0, \\ \gamma\,[X_1,Y_3] = \gamma\,[X_3,Y_3] = \gamma\,[X_5,Y_3] = 0, \\ \alpha\,[Y_1,Y_i] = \beta\,[Y_2,Y_i] = \gamma\,[Y_3,Y_i] = 0, \qquad 1 \le i \le n-7. \end{cases}$$

- Se impone, a continuación, que se mantenga el invariante de Goze de las álgebras consideradas. Esto da lugar a nuevas restricciones. Puesto que en el caso $(\alpha,\beta,\gamma) = (0,0,0)$ se verifica que $\mathrm{rg}(Ad(AX_0{+}Z)) = 3$, $\forall Z \in \mathfrak{g}$, las condiciones que se imponen a continuación sólo aportan restricciones en los casos en que $\alpha \neq 0$. Se supondrá, por tanto, a continuación que $\alpha \neq 0$.

  $\star$ $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + X_1)) = 3$:

$$Ad(AX_0 + X_1) = \left[\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & A & 0 & a^2_{13} & 0 & a^2_{15} & 0 & b^2_{1j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A + a^4_{13} & 0 & a^4_{15} & 0 & b^4_{1j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^6_{13} & 0 & A + a^6_{15} & 0 & b^6_{1j} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  Se debe verificar que

$$\begin{vmatrix} A & a^2_{13} & a^2_{15} & b^2_{1j} \\ 0 & A + a^4_{13} & a^4_{15} & b^4_{1j} \\ 0 & a^6_{13} & A + a^6_{15} & b^6_{1j} \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \alpha b^4_{1j} = 0, \\ \alpha b^6_{1j} a^4_{15} = 0. \end{cases} \quad 1 \le j \le n-7.$$

$$\begin{vmatrix} A & a_{13}^2 & a_{15}^2 & b_{1j}^2 \\ 0 & A+a_{13}^4 & a_{15}^4 & b_{1j}^4 \\ 0 & a_{13}^6 & A+a_{15}^6 & b_{1j}^6 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta b_{1j}^6 = 0, \\ \beta b_{1j}^4 a_{13}^6 = 0, \end{array} \right. \quad 1 \leq j \leq n-7.$$

Por consiguiente, se tienen las siguientes restricciones

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{1j}^4 = 0, \\ b_{1j}^6 a_{15}^4 = 0, \\ \beta b_{1j}^6 = 0, \\ \beta b_{1j}^4 a_{13}^6 = 0, \end{array} \right. \quad 1 \leq j \leq n-7$$

$\star$ $\mathrm{rg}(Ad(AX_0+X_3)) = 3$.

$$Ad(AX_0+X_3) = \left[\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A-a_{13}^2 & 0 & 0 & 0 & a_{35}^2 & 0 & b_{3j}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -a_{13}^4 & 0 & A & 0 & a_{35}^4 & 0 & b_{3j}^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{13}^6 & 0 & 0 & 0 & A+a_{35}^6 & 0 & b_{3j}^6 \\ \hline 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Se debe verificar que

$$\begin{vmatrix} A-a_{13}^2 & 0 & a_{35}^2 & b_{3j}^2 \\ -a_{13}^4 & A & a_{35}^4 & b_{3j}^4 \\ -a_{13}^6 & 0 & A+a_{35}^6 & b_{3j}^6 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha b_{3j}^2 = 0, \\ \alpha b_{3j}^6 a_{35}^2 = 0. \end{array} \right. \quad 1 \leq j \leq n-7.$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

$$\begin{vmatrix} A-a_{13}^2 & 0 & a_{35}^2 & b_{3j}^2 \\ -a_{13}^4 & A & a_{35}^4 & b_{3j}^4 \\ -a_{13}^6 & 0 & A+a_{35}^6 & b_{3j}^6 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \gamma b_{3j}^6 = 0 \\ \gamma b_{3j}^2 a_{13}^6 = 0. \end{cases} \quad 1 \leq j \leq n-7.$$

Se tienen, pues, las siguientes restricciones

$$\begin{cases} b_{3j}^2 = 0, \\ b_{3j}^6 a_{35}^2 = 0, \\ \gamma b_{3j}^6 = 0, \\ \gamma b_{3j}^2 a_{13}^6 = 0, \end{cases} \quad 1 \leq j \leq n-7.$$

$\star$ $\mathrm{rg}(Ad(AX_0+X_5)) = 4$

$$Ad(AX_0+X_5) = \left[\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A-a_{15}^2 & 0 & -a_{35}^2 & 0 & 0 & 0 & b_{5j}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{15}^4 & 0 & A-a_{35}^4 & 0 & 0 & 0 & b_{5j}^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -a_{15}^6 & 0 & -a_{35}^6 & 0 & A & 0 & b_{5j}^6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se debe verificar que

$$\begin{vmatrix} A-a_{15}^2 & -a_{35}^2 & 0 & b_{5j}^2 \\ -a_{15}^4 & A-a_{35}^4 & 0 & b_{5j}^4 \\ -a_{15}^6 & -a_{35}^6 & A & b_{5j}^6 \\ -\beta & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \beta b_{5j}^2 = 0, \\ \beta b_{5j}^4 a_{35}^2 = 0, \end{cases} \quad 1 \leq j \leq n-7.$$

$$\begin{vmatrix} A-a_{15}^2 & -a_{35}^2 & 0 & b_{5j}^2 \\ -a_{15}^4 & A-a_{35}^4 & 0 & b_{5j}^4 \\ -a_{15}^6 & -a_{35}^6 & A & b_{5j}^6 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} \gamma b_{5j}^4 = 0, \\ \gamma b_{5j}^2 a_{15}^4 = 0, \end{array} \right. \quad 1 \leq j \leq n-7.$$

$\star$ $\text{rg}(Ad(AX_0 + BX_1 + X_3) = 3, \ \forall B \neq 0$

$Ad(AX_0 + BX_1 + X_3) =$

$$= \left[\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B & A-a_{13}^2 & 0 & Ba_{13}^2 & 0 & Ba_{15}^2 + a_{35}^2 & 0 & Bb_{1j}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -a_{13}^4 & 0 & A + Ba_{13}^4 & 0 & Ba_{15}^4 + a_{35}^4 & 0 & b_{3j}^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{13}^6 & 0 & Ba_{13}^6 & 0 & A + Ba_{15}^6 + a_{35}^6 & 0 & Bb_{1j}^6 + b_{3j}^6 \\ \hline 0 & -\alpha & 0 & \alpha B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Se debe verificar que

$$\begin{vmatrix} A-a_{13}^2 & Ba_{13}^2 & Ba_{15}^2 + a_{35}^2 & Bb_{1j}^2 \\ -a_{13}^4 & A + Ba_{13}^4 & Ba_{15}^4 + a_{35}^4 & b_{3j}^4 \\ -a_{13}^6 & Ba_{13}^6 & A + Ba_{15}^6 + a_{35}^6 & Bb_{1j}^6 + b_{3j}^6 \\ -\alpha & B\alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\begin{vmatrix} A-a_{13}^2 & AB & Ba_{15}^2 + a_{35}^2 & Bb_{1j}^2 \\ -a_{13}^4 & A & Ba_{15}^4 + a_{35}^4 & b_{3j}^4 \\ -a_{13}^6 & 0 & A + Ba_{15}^6 + a_{35}^6 & Bb_{1j}^6 + b_{3j}^6 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha A \begin{vmatrix} B & Ba_{15}^2 + a_{35}^2 & Bb_{1j}^2 \\ 1 & Ba_{15}^4 + a_{35}^4 & b_{3j}^4 \\ 0 & A + Ba_{15}^6 + a_{35}^6 & Bb_{1j}^6 + b_{3j}^6 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

$$\alpha A\left[\left(-B^2a_{15}^4+B(a_{15}^2-a_{35}^4)+a_{35}^2\right)\left(Bb_{1j}^6+b_{3j}^6\right)-\right.$$
$$\left.-\left(A+Ba_{15}^6+a_{35}^6\right)\left(B(b_{1j}^2-b_{3j}^4)\right)\right]=0$$

por tanto, puesto que $a_{15}^4b_{1j}^6=a_{35}^2b_{3j}^6=0$, se debe verificar que

$$\left\{\begin{array}{l}b_{3j}^4-b_{1j}^2=0,\\ \left(b_{1j}^6(a_{35}^4-a_{15}^2)+b_{3j}^6a_{15}^4\right)=0, \qquad 1\le j\le n-7.\\ \left(b_{3j}^6(a_{15}^2-a_{35}^4)+b_{1j}^6a_{35}^2\right)=0.\end{array}\right.$$

También

$$\begin{vmatrix} A-a_{13}^2 & Ba_{13}^2 & Ba_{15}^2+a_{35}^2 & Bb_{1j}^2\\ -a_{13}^4 & A+Ba_{13}^4 & Ba_{15}^4+a_{35}^4 & b_{3j}^4\\ -a_{13}^6 & Ba_{13}^6 & A+Ba_{15}^6+a_{35}^6 & Bb_{1j}^6+b_{3j}^6\\ 0 & 0 & B\beta & 0\end{vmatrix}=0\implies$$

$$B\beta\begin{vmatrix} A-a_{13}^2 & Ba_{13}^2 & Bb_{1j}^2\\ -a_{13}^4 & A+Ba_{13}^4 & b_{3j}^4\\ -a_{13}^6 & Ba_{13}^6 & Bb_{1j}^6+b_{3j}^6\end{vmatrix}=0\implies$$

$$AB\beta\begin{vmatrix} A-a_{13}^2+Ba_{13}^4 & 0 & B(b_{1j}^2-b_{3j}^4)\\ -a_{13}^4 & 1 & b_{3j}^4\\ -a_{13}^6 & 0 & Bb_{1j}^6+b_{3j}^6\end{vmatrix}=0\implies$$

$$AB\beta\left[\left(A-a_{13}^2+Ba_{13}^4\right)\left(Bb_{1j}^6+b_{3j}^6\right)+a_{13}^6B\left(b_{1j}^2-b_{3j}^4\right)\right]=0$$

y, por ser $\beta b_{1j}^6=\beta a_{13}^6b_{1j}^4=0$, se tiene que verificar que

$$\left\{\begin{array}{l}\beta b_{3j}^6=0,\\ \beta a_{13}^6b_{3j}^2=0, \qquad 1\le j\le n-7.\\ \beta a_{13}^6(b_{3j}^4-b_{1j}^2)=0.\end{array}\right.$$

Análogamente

$$\begin{vmatrix} A-a_{13}^2 & 0 & Ba_{15}^2+a_{35}^2 & Bb_{1j}^2\\ -a_{13}^4 & A & Ba_{15}^4+a_{35}^4 & b_{1j}^2\\ -a_{13}^6 & 0 & A+Ba_{15}^6+a_{35}^6 & Bb_{1j}^6+b_{3j}^6\\ 0 & 0 & \gamma & 0\end{vmatrix}=0$$

y se tiene que verificar que

$$\left\{ \gamma b_{1j}^6 = 0, \qquad 1 \leq j \leq n-7. \right.$$

$\star$ $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + BX_1 + X_5) = 3$

$Ad(AX_0 + BX_1 + X_5) =$

$$= \left[\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-B & A - a_{15}^2 & 0 & Ba_{13}^2 - a_{35}^2 & 0 & Ba_{15}^2 & 0 & Bb_{1j}^2 + b_{5j}^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -a_{15}^4 & 0 & A + Ba_{13}^4 - a_{35}^4 & 0 & Ba_{15}^4 & 0 & b_{5j}^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -a_{15}^6 & 0 & Ba_{13}^6 - a_{35}^6 & 0 & A + Ba_{15}^6 & 0 & Bb_{1j}^6 + b_{5j}^6 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \alpha B & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & B\beta & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

Se debe verificar que

$$B\alpha \begin{vmatrix} A - a_{15}^2 & Ba_{15}^2 & Bb_{1j}^2 + b_{5j}^2 \\ -a_{15}^4 & Ba_{15}^4 & b_{5j}^4 \\ -a_{15}^6 & A + Ba_{15}^6 & Bb_{1j}^6 + b_{5j}^6 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$AB\alpha \begin{vmatrix} A + Ba_{15}^6 - a_{15}^2 & 0 & -B^2 + B(b_{1j}^2 - b_{5j}^6) + b_{5j}^2 \\ -a_{15}^4 & 0 & b_{5j}^4 \\ -a_{15}^6 & 1 & Bb_{1j}^6 + b_{5j}^6 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$AB\alpha \left[\left(A - a_{15}^2 + Ba_{15}^6 \right) b_{5j}^4 + a_{15}^4 \left(-B^2 b_{1j}^6 + B(b_{1j}^2 - b_{5j}^6) + b_{5j}^2 \right) \right] = 0$$

y, por ser $a_{15}^4 b_{1j}^6 = 0$, se tiene que verificar que

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha b_{5j}^4 = 0, \\ \alpha a_{15}^4 b_{5j}^2 = 0, \\ \alpha a_{15}^4 (b_{5j}^6 - b_{1j}^2) = 0. \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_{5j}^4 = 0, \\ a_{15}^4 b_{5j}^2 = 0, \\ a_{15}^4 (b_{5j}^6 - b_{1j}^2) = 0. \end{array} \right. \qquad 1 \leq j \leq n-7.$$

Análogamente

$$\gamma\begin{vmatrix} A-a_{15}^2 & Ba_{15}^2 & Bb_{1j}^2+b_{5j}^2 \\ -a_{15}^4 & Ba_{15}^4 & 0 \\ -a_{15}^6 & A+Ba_{15}^6 & Bb_{1j}^6+b_{5j}^6 \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow$$

$$A\gamma a_{15}^4\left(-B^2b_{1j}^6+B(b_{1j}^2-b_{5j}^6)+b_{5j}^2\right)=0$$

y, por ser $\gamma b_{1j}^6=\gamma a_{15}^4 b_{5j}^2=0$, $a_{15}^4(b_{5j}^6-b_{1j}^2)=0$, no aparecen nuevas restricciones.

También

$$\begin{vmatrix} A-a_{15}^2 & Ba_{13}^2-a_{35}^2 & Ba_{15}^2 & Bb_{1j}^2+b_{5j}^2 \\ -a_{15}^4 & A+Ba_{13}^4-a_{35}^4 & Ba_{15}^4 & 0 \\ -a_{15}^6 & Ba_{13}^6-a_{35}^6 & A+Ba_{15}^6 & Bb_{1j}^6+b_{5j}^6 \\ -\beta & 0 & B\beta & 0 \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} A-a_{15}^2 & Ba_{13}^2-a_{35}^2 & AB & Bb_{1j}^2+b_{5j}^2 \\ -a_{15}^4 & A+Ba_{13}^4-a_{35}^4 & 0 & 0 \\ -a_{15}^6 & Ba_{13}^6-a_{35}^6 & A & Bb_{1j}^6+b_{5j}^6 \\ -\beta & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$\beta A\left[\left(A+Ba_{13}^4-a_{35}^4\right)\left(-B^2b_{1j}^6+B(b_{1j}^2-b_{5j}^6)+b_{5j}^2\right)\right]=0$$

por tanto, puesto que $\beta b_{1j}^6=\beta b_{5j}^2=0$, se debe verificar que

$$\left\{\ \beta(b_{5j}^6-b_{1j}^2)=0, \qquad 1\le j\le n-7.\right.$$

$\star$ $\mathrm{rg}(Ad(AX_0+BX_3+X_5)=3.$

$$Ad(AX_0 + BX_3 + X_5) =$$
$$= \left[\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & A - Ba_{13}^2 - a_{15}^2 & 0 & -a_{35}^2 & 0 & Ba_{35}^2 & 0 & b_{5j}^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-B & -Ba_{13}^4 - a_{15}^4 & 0 & A - a_{35}^4 & 0 & Ba_{35}^4 & 0 & Bb_{3j}^4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -Ba_{13}^6 - a_{15}^6 & 0 & -a_{35}^6 & 0 & A + Ba_{35}^6 & 0 & Bb_{3j}^6 + b_{5j}^6 \\
\hline
0 & -B\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 & B\gamma & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

Se debe verificar que

$$B\alpha \begin{vmatrix} -a_{35}^2 & Ba_{35}^2 & b_{5j}^2 \\ A - a_{35}^4 & Ba_{35}^4 & Bb_{3j}^4 \\ -a_{35}^6 & A + Ba_{35}^6 & Bb_{3j}^6 + b_{5j}^6 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$AB\alpha \begin{vmatrix} -a_{35}^2 & 0 & b_{5j}^2 \\ A - a_{35}^4 & B & Bb_{3j}^4 \\ -a_{35}^6 & 1 & Bb_{3j}^6 + b_{5j}^6 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$AB\alpha\left[\left(A + Ba_{35}^6 - a_{35}^4\right) b_{5j}^2 + a_{35}^2\left(-B^2 b_{3j}^6 + B(b_{3j}^4 - b_{5j}^6)\right)\right] = 0$$

y, por ser $a_{35}^2 b_{3j}^6 = 0,\ b_{3j}^4 = b_{1j}^2$, se tiene que verificar que

$$\begin{cases} \alpha b_{5j}^2 = 0, \\ \alpha a_{35}^2 (b_{5j}^6 - b_{1j}^2) = 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_{5j}^2 = 0, \\ a_{35}^2 (b_{5j}^6 - b_{1j}^2) = 0. \end{cases} \quad 1 \leq j \leq n-7.$$

Análogamente

$$\beta \begin{vmatrix} -a_{35}^2 & Ba_{35}^2 & 0 \\ A - a_{35}^4 & Ba_{35}^4 & Bb_{3j}^4 \\ -a_{35}^6 & A + Ba_{35}^6 & Bb_{3j}^6 + b_{5j}^6 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$A\beta a_{35}^2\left(-B^2 b_{3j}^6 + B(b_{3j}^4 - b_{5j}^6)\right) = 0$$

y, por ser $a_{35}^2 b_{3j}^6 = a_{35}^2(b_{5j}^6 - b_{3j}^4) = 0$, no aparecen nuevas restricciones.

También

$$\begin{vmatrix} A - Ba_{13}^2 - a_{15}^2 & -a_{35}^2 & Ba_{35}^2 & 0 \\ -Ba_{13}^4 - a_{15}^4 & A - a_{35}^4 & Ba_{35}^4 & Bb_{3j}^4 \\ Ba_{13}^6 - a_{15}^6 & -a_{35}^6 & A + Ba_{35}^6 & Bb_{3j}^6 + b_{5j}^6 \\ 0 & -\gamma & B\gamma & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} A - Ba_{13}^2 - a_{15}^2 & -a_{35}^2 & 0 & 0 \\ -Ba_{13}^4 - a_{15}^4 & A - a_{35}^4 & AB & Bb_{3j}^4 \\ -Ba_{13}^6 - a_{15}^6 & -a_{35}^6 & A & Bb_{3j}^6 + b_{5j}^6 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\gamma A\left[\left(A - Ba_{13}^2 - a_{15}^2\right)\left(B^2 b_{3j}^6 - B(b_{3j}^4 - b_{5j}^6)\right)\right] = 0$$

por tanto, puesto que $\gamma b_{3j}^6 = 0$, se debe verificar que

$$\left\{ \gamma(b_{5j}^6 - b_{1j}^2) = 0, \qquad 1 \leq j \leq n-7. \right.$$

$\star$ $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + X_1 + X_3 + X_5) = 3$.

$$Ad(AX_0+X_1+X_3+X_5)=$$

$$=\left[\begin{array}{ccccccc|c}
0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0\\
-1&A-a_{13}^2-a_{15}^2&0&a_{13}^2-a_{35}^2&0&a_{15}^2+a_{35}^2&0&b_{1j}^2\\
0&0&0&0&0&0&0&0\\
-1&-a_{13}^4-a_{15}^4&0&A+a_{13}^4-a_{35}^4&0&a_{15}^4+a_{35}^4&0&b_{3j}^4\\
0&0&0&0&0&0&0&0\\
-1&-a_{13}^6-a_{15}^6&0&a_{13}^6-a_{35}^6&0&A+a_{15}^6+a_{35}^6&0&b_{1j}^6+b_{3j}^6+b_{5j}^6\\
\hline
0&-\alpha&0&\alpha&0&0&0&0\\
0&-\beta&0&0&0&\beta&0&0\\
0&0&0&-\gamma&0&\gamma&0&0\\
\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\
0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right]$$

Se debe verificar que

$$\begin{vmatrix}
A-a_{13}^2-a_{15}^2 & a_{13}^2-a_{35}^2 & a_{15}^2+a_{35}^2 & b_{1j}^2\\
-a_{13}^4-a_{15}^4 & A+a_{13}^4-a_{35}^4 & a_{15}^4+a_{35}^4 & b_{3j}^4\\
-a_{13}^6-a_{15}^6 & a_{13}^6-a_{35}^6 & A+a_{15}^6+a_{35}^6 & b_{1j}^6+b_{3j}^6+b_{5j}^6\\
-\alpha & \alpha & 0 & 0
\end{vmatrix}=0 \implies$$

$$\begin{vmatrix}
A-a_{13}^2-a_{15}^2 & A-a_{15}^2-a_{35}^2 & a_{15}^2+a_{35}^2 & b_{1j}^2\\
-a_{13}^4-a_{15}^4 & A-a_{15}^4-a_{35}^4 & a_{15}^4+a_{35}^4 & b_{3j}^4\\
-a_{13}^6-a_{15}^6 & -a_{15}^6-a_{35}^6 & A+a_{15}^6+a_{35}^6 & b_{1j}^6+b_{3j}^6+b_{5j}^6\\
-\alpha & \alpha & 0 & 0
\end{vmatrix}=$$

$$\alpha A\begin{vmatrix}
A-a_{15}^2-a_{35}^2 & 1 & b_{1j}^2\\
A-a_{15}^4-a_{35}^4 & 1 & b_{3j}^4\\
A-a_{15}^6-a_{35}^6 & 1 & b_{1j}^6+b_{3j}^6+b_{5j}^6
\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}
A-a_{15}^2-a_{35}^2 & 1 & b_{1j}^2\\
a_{15}^2-a_{15}^4+a_{35}^2-a_{35}^4 & 0 & 0\\
a_{15}^2-a_{15}^6+a_{35}^2-a_{35}^6 & 0 & b_{1j}^6-b_{1j}^2+b_{3j}^6+b_{5j}^6
\end{vmatrix}=0$$

y, por lo tanto, se tiene que

$$\alpha A\left[\left(a_{15}^2 - a_{15}^4 + a_{35}^2 - a_{35}^4\right)\left(b_{1j}^6 - b_{1j}^2 + b_{3j}^6 + b_{5j}^6\right)\right]$$

entonces, teniendo en cuenta que $a_{15}^4 b_{1j}^6 = a_{35}^2 b_{3j}^6 = a_{15}^4(b_{5j}^6 - b_{1j}^2) = 0$, se obtiene que

$$\alpha(a_{35}^4 - a_{15}^2)(b_{5j}^6 - b_{1j}^2) = 0 \implies (a_{35}^4 - a_{15}^2)(b_{5j}^6 - b_{1j}^2) = 0, \quad 1 \le j \le n-7.$$

⋆ $\operatorname{rg}(Ad(AX_0 + X_1 + Y_i)) = 3, \quad 1 \le i \le n-7:$

$$Ad(AX_0 + X_1 + Y_i) =$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & A - b_{1i}^2 & 0 & a_{13}^2 & 0 & a_{15}^2 & 0 & b_{1j}^2 \pm c_{ij}^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & A + a_{13}^4 - b_{3i}^4 & 0 & a_{15}^4 & 0 & \pm c_{ij}^4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -b_{1i}^6 & 0 & a_{13}^6 - b_{3i}^6 & 0 & A + a_{15}^6 - b_{5i}^6 & 0 & b_{1j}^6 \pm c_{ij}^6 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

y, por tanto, se debe verificar que

$$\alpha\begin{vmatrix} A - b_{1i}^2 & a_{15}^2 & b_{1j}^2 \pm c_{ij}^2 \\ 0 & a_{15}^4 & \pm c_{ij}^4 \\ -b_{1i}^6 & A + a_{15}^6 - b_{5i}^6 & b_{1j}^6 \pm c_{ij}^6 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha c_{ij}^4 = 0, \\ \alpha a_{15}^4 c_{ij}^6 = 0. \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} c_{ij}^4 = 0, \\ a_{15}^4 c_{ij}^6 = 0. \end{array}\right. \quad 1 \le i < j \le n-7$$

También

$$\beta A\begin{vmatrix} A - b_{1i}^2 & a_{13}^2 & b_{1j}^2 \pm c_{ij}^2 \\ 0 & A + a_{13}^4 - b_{3i}^4 & 0 \\ -b_{1i}^6 & a_{13}^6 - b_{3i}^6 & b_{1j}^6 \pm c_{ij}^6 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\beta c_{ij}^6 = 0, \;\; 1 \le i < j \le n-7$$

teniendo en cuenta que $\beta b_{1j}^6 = 0$.

$\star$ $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + X_3 + Y_i)) = 3, \;\; 1 \le i \le n-7$.

$$Ad(AX_0 + X_3 + Y_i) =$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & A - a_{13}^2 - b_{1i}^2 & 0 & 0 & 0 & a_{35}^2 & 0 & \pm c_{ij}^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -a_{13}^4 & 0 & A - b_{3i}^4 & 0 & a_{35}^4 & 0 & b_{3j}^4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -a_{13}^6 - b_{1i}^6 & 0 & -b_{3i}^6 & 0 & A + a_{35}^6 - b_{5i}^6 & 0 & b_{3j}^6 \pm c_{ij}^6 \\
\hline
0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

y, por tanto, se debe verificar que

$$\alpha \begin{vmatrix} 0 & a_{35}^2 & \pm c_{ij}^2 \\ A - b_{3i}^4 & a_{35}^4 & b_{3j}^4 \\ -b_{3i}^6 & A + a_{35}^6 - b_{5i}^6 & b_{3j}^6 \pm c_{ij}^6 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha c_{ij}^2 = 0, \\ \alpha a_{35}^2 c_{ij}^6 = 0. \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} c_{ij}^2 = 0, \\ a_{35}^2 c_{ij}^6 = 0. \end{array} \right. \quad 1 \le i < j \le n-7$$

También

$$\gamma A \begin{vmatrix} A - a_{13}^2 - b_{1i}^2 & 0 & 0 \\ -a_{13}^4 & A - b_{3i}^4 & b_{3j}^4 \\ -a_{13}^6 - b_{1i}^6 & -b_{3i}^6 & b_{3j}^6 \pm c_{ij}^6 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\gamma c_{ij}^6 = 0, \;\; 1 \le i < j \le n-7$$

teniendo en cuenta que $\gamma b_{3j}^6 = 0$.

⋆ $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + X_5 + Y_i)) = 3,\ 1 \leq i \leq n-7.$

$$Ad(AX_0 + X_5 + Y_i) =$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & A - a_{15}^2 - b_{1i}^2 & 0 & -a_{35}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -a_{15}^4 & 0 & A - a_{35}^4 - b_{3i}^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -a_{15}^6 - b_{1i}^6 & 0 & -a_{35}^6 - b_{3i}^6 & 0 & A - b_{5i}^6 & 0 & b_{5j}^6 \pm c_{ij}^6 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

No añade restricciones.

⋆ $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + X_1 + X_3 + Y_i)) = 3, 1 \leq i \leq n-7.$

Análogamente se obtiene que

$$\alpha(a_{35}^4 - a_{15}^2)c_{ij}^6 = 0 \implies (a_{35}^4 - a_{15}^2)c_{ij}^6 = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n-7.$$

□

Nota: En el caso $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 3$ y $\dim \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = n-4$, es decir, cuando $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}))$ es mínima y $\dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))$ es máxima, se obtiene

$$\begin{cases}
[X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\
[X_1, X_3] = a_{13}^2 X_2 + a_{13}^4 X_4 + a_{13}^6 X_6, & \\
[X_1, X_5] = a_{15}^2 X_2 + a_{15}^4 X_4 + a_{15}^6 X_6, & \\
[X_3, X_5] = a_{35}^2 X_2 + a_{35}^4 X_4 + a_{35}^6 X_6. &
\end{cases}$$

De entre estas se puede considerar aquella que se obtiene al considerar todos los parámetros nulos, que denominamos **álgebra de Lie metabeliana modelo** para el caso $p = 3$ que es, en cierto modo, la más sencilla de la familia y cuya ley respecto de una base adaptada viene dada por

$$\mathfrak{g}_{n,3}^0 : \left\{ [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, \quad 1 \le i \le 3, \right.$$

Cualquier otra álgebra de Lie de invariante de Goze $(2, 2, 2, 1, \ldots, 1)$ puede obtenerse mediante deformaciones de ésta.

1.3 Clasificación en los casos $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) > 3$.

Se va a obtener la clasificación de las álgebras de Lie metabelianas de invariante de Goze $(2, 2, 2, 1, \ldots, 1)$, en los casos en que la dimensión de la derivada es 4, 5 ó 6, restando el caso de dimensión 3.

1.3.1 Ejemplos.

Designaremos por

$$\begin{array}{llll}
\mathfrak{g}_{n,3}^i, & 1 \le i \le 6; & & \\
\mathfrak{g}_{n,3}^{1,r}, & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor; & \mathfrak{g}_{n,3}^{2,r}, & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor; \\
\mathfrak{g}_{n,3}^{3,r}, & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor; & \mathfrak{g}_{n,3}^{4,r}, & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-10}{2} \right\rfloor; \\
\mathfrak{g}_{n,3}^{5,r}, & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-10}{2} \right\rfloor; & \mathfrak{g}_{n,3}^{6,r}, & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-11}{2} \right\rfloor
\end{array}$$

a las álgebras de Lie de dimensión $n \ge 10$ tales que, respecto de una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_6, Y_1, \ldots, Y_{n-7}\}$, sus leyes se expresan mediante

$$\mu_{n,3}^1 : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, X_5] = Y_2, & \\ [X_3, X_5] = Y_3, & \end{cases} \qquad \mu_{n,3}^2 : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, X_5] = Y_2. & \end{cases}$$

$$\mu_{n,3}^3 : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, X_5] = Y_2, & \\ [X_3, X_5] = X_2. & \end{cases} \qquad \mu_{n,3}^4 : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, X_5] = X_2. & \end{cases}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

$$\mu_{n,3}^{5}: \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, X_5] = X_4. & \end{cases} \qquad \mu_{n,3}^{6}: \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, X_5] = X_4, & \\ [X_3, X_5] = X_2. & \end{cases}$$

$$\mu_{n,3}^{1,r}: \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = X_6, & 1 \leq k \leq r. \end{cases} \qquad 0 \leq r \leq \left\lfloor \tfrac{n-8}{2} \right\rfloor$$

$$\mu_{n,3}^{2,r}: \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_5, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = X_6, & 1 \leq k \leq r, \end{cases} \qquad 0 \leq r \leq \left\lfloor \tfrac{n-9}{2} \right\rfloor$$

$$\mu_{n,3}^{3,r}: \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = X_6, & 1 \leq k \leq r. \end{cases} \qquad 0 \leq r \leq \left\lfloor \tfrac{n-9}{2} \right\rfloor$$

$$\mu_{n,3}^{4,r}: \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [X_3, Y_{n-8}] = X_6, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = X_6, & 1 \leq k \leq r. \end{cases} \qquad 0 \leq r \leq \left\lfloor \tfrac{n-10}{2} \right\rfloor$$

$$\mu_{n,3}^{5,r}: \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [X_5, Y_{n-8}] = X_6, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = X_6, & 1 \leq k \leq r. \end{cases} \qquad 0 \leq r \leq \left\lfloor \tfrac{n-10}{2} \right\rfloor$$

$$\mu_{n,3}^{6,r}: \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [X_3, Y_{n-8}] = X_6, & \\ [X_5, Y_{n-9}] = X_6, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = X_6, & 1 \leq k \leq r. \end{cases} \qquad 0 \leq r \leq \left\lfloor \tfrac{n-11}{2} \right\rfloor$$

Es evidente que todas las álgebras definidas por las leyes anteriores son nilpotentes, tienen invariante de Goze $(2,2,2,1,\ldots,1)$ y verifican $\dim \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) > 3$. Además, hay exactamente $3n-18$. En efecto, renombramos las leyes de las álgebras de modo que aparezcan enumeradas en el orden natural

	$\mathfrak{g}_{n,3}^1, \cdots, \mathfrak{g}_{n,3}^6$	
$\mathfrak{g}_{n,3}^{1,r}$	$\mathfrak{g}_{n,3}^{7+r}, \quad 0 \le r \le \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$	$\mathfrak{g}_{n,3}^7, \ldots, \mathfrak{g}_{n,3}^{7+\left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor}$
$\mathfrak{g}_{n,3}^{2,r}$	$\mathfrak{g}_{n,3}^{8+\left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor+r}, \quad 0 \le r \le \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor$	$\mathfrak{g}_{n,3}^{8+\left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor}, \ldots, \mathfrak{g}_{n,3}^{8+n-9} = \mathfrak{g}_{n,3}^{n-1}$
$\mathfrak{g}_{n,3}^{3,r}$	$\mathfrak{g}_{n,3}^{n+r}, \quad 0 \le r \le \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor$	$\mathfrak{g}_{n,3}^n, \ldots, \mathfrak{g}_{n,3}^{n+\left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor}$
$\mathfrak{g}_{n,3}^{4,r}$	$\mathfrak{g}_{n,3}^{n+\left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor+1+r}, \quad 0 \le r \le \left\lfloor \frac{n-10}{2} \right\rfloor$	$\mathfrak{g}_{n,3}^{n+\left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor+1}, \ldots, \mathfrak{g}_{n,3}^{n+1+n-10} = \mathfrak{g}_{n,3}^{2n-9}$
$\mathfrak{g}_{n,3}^{5,r}$	$\mathfrak{g}_{n,3}^{2n-8+r}, \quad 0 \le r \le \left\lfloor \frac{n-10}{2} \right\rfloor$	$\mathfrak{g}_{n,3}^{2n-8}, \ldots, \mathfrak{g}_{n,3}^{2n-8+\left\lfloor \frac{n-10}{2} \right\rfloor}$
$\mathfrak{g}_{n,3}^{6,r}$	$\mathfrak{g}_{n,3}^{2n-7+\left\lfloor \frac{n-10}{2} \right\rfloor+r}, \quad 0 \le r \le \left\lfloor \frac{n-11}{2} \right\rfloor$	$\mathfrak{g}_{n,3}^{2n-7+\left\lfloor \frac{n-10}{2} \right\rfloor}, \ldots, \mathfrak{g}_{n,3}^{2n-7+n-11} = \mathfrak{g}_{n,3}^{3n-18}$

Nota: A pesar de todo, no se abandonará definitivamente la notación inicial, sino que se usarán convenientemente ambas notaciones.

Proposición 1.3 *Las $3n-18$ álgebras de Lie nilpotentes complejas de dimensión $n \ge 10$, definidas en el párrafo anterior, con invariante de Goze* $(2,2,2,1,\ldots,1)$ *y* $\dim \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) > 3$, *son no isomorfas dos a dos.*

Demostración. Se va a probar que estas álgebras son no isomorfas dos a dos, viendo que dos cualesquiera de ellas, difieren en la dimensión de alguno de los invariantes siguientes:

$$\begin{aligned}&\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\\&\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \{\ X \in \mathfrak{g}\ /\ [X, Z] = 0,\ \forall\ Z \in \mathfrak{g}\}\\&\{\theta\ /\ \mathrm{d}^k\theta = 0\}\\&Der(\mathfrak{g})\end{aligned}$$

En primer lugar se verifica que

	$\mathfrak{g}^1_{n,3}$	$\mathfrak{g}^2_{n,3}$	$\mathfrak{g}^3_{n,3}$	$\mathfrak{g}^4_{n,3}$	$\mathfrak{g}^5_{n,3}$	$\mathfrak{g}^6_{n,3}$	$\mathfrak{g}^7_{n,3}$	$\mathfrak{g}^i_{n,3},\ 8 \leq i \leq 3n-18$
$\dim \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$	6	5	5	4	4	4	4	4
$\dim \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$	$n-4$	$n-4$	$n-4$	$n-4$	$n-4$	$n-4$	$n-4$	$< n-4$

y, por tanto, basta probar que las álgebras $\mathfrak{g}^2_{n,3}$ y $\mathfrak{g}^3_{n,3}$ son no isomorfas entre sí, que las álgebras $\mathfrak{g}^i_{n,3}$, $4 \leq i \leq 7$, son no isomorfas entre sí y que las álgebras $\mathfrak{g}^i_{n,3}$, $8 \leq i \leq 3n-18$, son no isomorfas entre sí.

Se va a probar en primer lugar que $\mathfrak{g}^2_{n,3}$ y $\mathfrak{g}^3_{n,3}$, son no isomorfas entre sí.

En efecto, si para ambas álgebras, se designan mediante $\mathrm{d}w_i$, $0 \leq i \leq 6$ y $\mathrm{d}\alpha_i$, $1 \leq i \leq n-7$, las formas diferenciales asociadas a los vectores X_i, $0 \leq i \leq 6$ e Y_i, $1 \leq i \leq n-7$, respectivamente, se verifica que

$$\mathrm{d}w_0 = \mathrm{d}w_1 = \mathrm{d}w_3 = \mathrm{d}w_5 = 0,\ \ \mathrm{d}\alpha_i = 0,\ \ 2 \leq i \leq n-7$$

Además

$\mathfrak{g}^2_{n,3}$	$\mathfrak{g}^3_{n,3}$
$\mathrm{d}w_2 = w_0 \wedge w_1$ $\mathrm{d}w_4 = w_0 \wedge w_3$ $\mathrm{d}w_6 = w_0 \wedge w_5$ $\mathrm{d}\alpha_1 = w_1 \wedge w_3$ $\mathrm{d}\alpha_2 = w_1 \wedge w_5$	$\mathrm{d}w_2 = w_0 \wedge w_1 + w_3 \wedge w_5$ $\mathrm{d}w_4 = w_0 \wedge w_3$ $\mathrm{d}w_6 = w_0 \wedge w_5$ $\mathrm{d}\alpha_1 = w_1 \wedge w_3$ $\mathrm{d}\alpha_2 = w_1 \wedge w_5$
$\dim\{\theta\ /\ \mathrm{d}^2\theta = 0\} = n$	$\dim\{\theta\ /\ \mathrm{d}^2\theta = 0\} = n-1$

Por tanto $\mathfrak{g}^2_{n,3}$ y $\mathfrak{g}^3_{n,3}$ son no isomorfas entre sí.

A continuación se va a probar que $\mathfrak{g}^i_{n,3}$, $4 \leq i \leq 7$ son no isomorfas entre sí. Para todas ellas es claro que las correspondientes formas diferenciales son tales que $\mathrm{d}w_0 = \mathrm{d}w_1 = \mathrm{d}w_3 = \mathrm{d}w_5 = 0$; $\mathrm{d}\alpha_i = 0$, $2 \leq i \leq n-7$. Además

$\mathfrak{g}^4_{n,3}$	$\mathfrak{g}^5_{n,3}$
$\mathrm{d}w_2 = w_0 \wedge w_1 + w_1 \wedge w_5$	$\mathrm{d}w_2 = w_0 \wedge w_1$
$\mathrm{d}w_4 = w_0 \wedge w_3$	$\mathrm{d}w_4 = w_0 \wedge w_3 + w_1 \wedge w_5$
$\mathrm{d}w_6 = w_0 \wedge w_5$	$\mathrm{d}w_6 = w_0 \wedge w_5$
$\mathrm{d}\alpha_1 = w_1 \wedge w_3$	$\mathrm{d}\alpha_1 = w_1 \wedge w_3$
$\mathrm{d}^2 w_2 = 0$	$\mathrm{d}^2 w_2 = 0$
$\mathrm{d}^2 w_4 = 0$	$\mathrm{d}^2 w_4 = -2w_0 \wedge w_1 \wedge w_3 \wedge w_5$
$\mathrm{d}^2 w_6 = 0$	$\mathrm{d}^2 w_6 = 0$
$\mathrm{d}^2 \alpha_1 = 0$	$\mathrm{d}^2 \alpha_1 = 0$
$\dim\{\theta \ / \ \mathrm{d}^2\theta = 0\} = n$	$\dim\{\theta \ / \ \mathrm{d}^2\theta = 0\} = n-1$

$\mathfrak{g}^6_{n,3}$	$\mathfrak{g}^7_{n,3}$
$\mathrm{d}w_2 = w_0 \wedge w_1 + w_3 \wedge w_5$	$\mathrm{d}w_2 = w_0 \wedge w_1$
$\mathrm{d}w_4 = w_0 \wedge w_3 + w_1 \wedge w_5$	$\mathrm{d}w_4 = w_0 \wedge w_3$
$\mathrm{d}w_6 = w_0 \wedge w_5$	$\mathrm{d}w_6 = w_0 \wedge w_5$
$\mathrm{d}\alpha_1 = w_1 \wedge w_3$	$\mathrm{d}\alpha_1 = w_1 \wedge w_3$
$\mathrm{d}^2 w_4 = 2w_0 \wedge w_1 \wedge w_3 \wedge w_5$	$\mathrm{d}^2 w_2 = 0$
$\mathrm{d}^2 w_4 = -2w_0 \wedge w_1 \wedge w_3 \wedge w_5$	$\mathrm{d}^2 w_4 = 0$
$\mathrm{d}^2 w_6 = 0$	$\mathrm{d}^2 w_6 = 0$
$\mathrm{d}^2 \alpha_1 = 0$	$\mathrm{d}^2 \alpha_1 = 0$
$\dim\{\theta \ / \ \mathrm{d}^2\theta = 0\} = n-2$	$\dim\{\theta \ / \ \mathrm{d}^2\theta = 0\} = n$

Por tanto $\mathfrak{g}^5_{n,3}$ y $\mathfrak{g}^6_{n,3}$, son no isomorfas entre sí, ni tampoco son isomorfas a $\mathfrak{g}^4_{n,3}$ y $\mathfrak{g}^7_{n,3}$. Por último, $\mathfrak{g}^4_{n,3}$ y $\mathfrak{g}^7_{n,3}$ son no isomorfas entre sí, pues

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^4_{n,3})) = n^2 - 8n + 24, \qquad \dim(Der(\mathfrak{g}^7_{n,3})) = n^2 - 8n + 29$$

como se prueba en el capítulo 2. (sección 2.3.2)

Por último, se va a probar que $\mathfrak{g}_{n,3}^{i}$, $8 \leq i \leq 3n-18$ son no isomorfas entre sí. En efecto, la dimensión del centro de cada álgebra viene expresada en la siguiente tabla

	$\mathfrak{g}_{n,3}^{1,r}$ $0 \leq r \leq \lfloor \frac{n-8}{2} \rfloor$	$\mathfrak{g}_{n,3}^{2,r}$ $0 \leq r \leq \lfloor \frac{n-9}{2} \rfloor$	$\mathfrak{g}_{n,3}^{3,r}$ $0 \leq r \leq \lfloor \frac{n-9}{2} \rfloor$	$\mathfrak{g}_{n,3}^{4,r}$ $0 \leq r \leq \lfloor \frac{n-10}{2} \rfloor$	$\mathfrak{g}_{n,3}^{5,r}$ $0 \leq r \leq \lfloor \frac{n-10}{2} \rfloor$	$\mathfrak{g}_{n,3}^{6,r}$ $0 \leq r \leq \lfloor \frac{n-11}{2} \rfloor$
$\dim \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$	$n-2r-4$	$n-2r-5$	$n-2r-5$	$n-2r-4$	$n-2r-4$	$n-2r-7$

de donde sigue que las álgebras de las familias $\mathfrak{g}_{n,3}^{1,r}$, $\mathfrak{g}_{n,3}^{4,r}$, $\mathfrak{g}_{n,3}^{5,r}$, son no isomorfas a las álgebras de las familias $\mathfrak{g}_{n,3}^{2,r}$, $\mathfrak{g}_{n,3}^{3,r}$, $\mathfrak{g}_{n,3}^{6,r}$, por la paridad de la dimensión del centro.
Se designará por r_i, $1 \leq i \leq 6$ a

$$r_1 = \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor, \; r_2 = r_3 = \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor, \; r_4 = r_5 = \left\lfloor \frac{n-10}{2} \right\rfloor, \; r_6 = \left\lfloor \frac{n-11}{2} \right\rfloor$$

Se va a probar a continuación que para dimensiones del centro coincidentes, las álgebras $\mathfrak{g}_{n,3}^{4,r}$, son no isomorfas a las álgebras $\mathfrak{g}_{n,3}^{1,r}$ ni a las $\mathfrak{g}_{n,3}^{5,r}$, y las álgebras $\mathfrak{g}_{n,3}^{3,r}$, son no isomorfas a las álgebras $\mathfrak{g}_{n,3}^{2,r}$ ni a las $\mathfrak{g}_{n,3}^{6,r}$. En efecto, si $d_k = \dim\{\theta \;/\; \mathrm{d}^k(\theta) = 0\}$, se sigue que

	$\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$	d_2	d_3	d_4	d_5	$\dots$	d_{r_1}	d_{r_1+1}	d_{r_1+2}	d_{r_1+3}
$\mathfrak{g}_{n,3}^{8}$	$n-6$	$n-1$	n			$\dots$				
$\mathfrak{g}_{n,3}^{9}$	$n-8$	$n-1$	$n-1$	n		$\dots$				
$\vdots$						$\dots$				
$\mathfrak{g}_{n,3}^{6+r_1}$	$n-2r_1-2$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\dots$	$n-1$	n		
$\mathfrak{g}_{n,3}^{7+r_1}$	$n-2r_1-4$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\dots$	$n-1$	$n-1$	n	
$\mathfrak{g}_{n,3}^{n+r_3+1}$	$n-6$	$n-1$	$n-1$	n		$\dots$				
$\mathfrak{g}_{n,3}^{n+r_3+2}$	$n-8$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	n	$\dots$				
$\vdots$						$\dots$				
$\mathfrak{g}_{n,3}^{2n-10}$	$n-2r_1-2$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\dots$	$n-1$	$n-1$	n	
$\mathfrak{g}_{n,3}^{2n-9}$	$n-2r_1-4$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\dots$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	n
$\mathfrak{g}_{n,3}^{2n-8}$	$n-6$	$n-1$	n			$\dots$				
$\mathfrak{g}_{n,3}^{2n-7}$	$n-8$	$n-1$	$n-1$	n		$\dots$				
$\vdots$						$\dots$				
$\mathfrak{g}_{n,3}^{2n-9+r_5}$	$n-2r_1-2$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\dots$	$n-1$	n		
$\mathfrak{g}_{n,3}^{2n-8+r_5}$	$n-2r_1-4$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\dots$	$n-1$	$n-1$	n	

(donde se ha tenido en cuenta que $r_4 = r_5 = r_1 - 1$).
Falta probar que $\mathfrak{g}_{n,3}^{7+k}$ es no isomorfa a $\mathfrak{g}_{n,3}^{2n-8+k-1} = \mathfrak{g}_{n,3}^{2n+k-9}$, para cada $k:\ 1 \leq k \leq r_1$, pero para ello basta comprobar que no coinciden las dimensiones de sus espacios de derivaciones, como se prueba en el capítulo 2 (sección 2.3.3).
De la misma forma

	$\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$	d_2	d_3	d_4	d_5	$\ldots$	d_{r_2}	d_{r_2+1}	d_{r_2+2}	d_{r_2+3}
$\mathfrak{g}_{n,3}^{8+r_1}$	$n-5$	n								
$\mathfrak{g}_{n,3}^{9+r_1}$	$n-7$	$n-1$	n							
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							
$\mathfrak{g}_{n,3}^{n-2}$	$n-2r_2-3$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\ldots$	$n-1$	n		
$\mathfrak{g}_{n,3}^{n-1}$	$n-2r_2-5$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\ldots$	$n-1$	$n-1$	n	
$\mathfrak{g}_{n,3}^{n}$	$n-5$	$n-1$	n							
$\mathfrak{g}_{n,3}^{n+1}$	$n-7$	$n-1$	$n-1$	n						
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$						
$\mathfrak{g}_{n,3}^{n+r_3-1}$	$n-2r_2-3$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\ldots$	$n-1$	$n-1$	n	
$\mathfrak{g}_{n,3}^{n+r_3}$	$n-2r_2-5$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\ldots$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	n
$\mathfrak{g}_{n,3}^{2n-7+r_5}$	$n-7$	$n-1$	$n-1$	n						
$\mathfrak{g}_{n,3}^{2n-6+r_5}$	$n-9$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	n					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
$\mathfrak{g}_{n,3}^{3n-19}$	$n-2r_2-3$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\ldots$	$n-1$	$n-1$	n	
$\mathfrak{g}_{n,3}^{3n-18}$	$n-2r_2-5$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\ldots$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	n

(donde se ha tenido en cuenta que $r_6 = r_2 - 1$).

Falta probar que $\mathfrak{g}_{n,3}^{n+k}$ es no isomorfa a $\mathfrak{g}_{n,3}^{2n-8+r_5+k}$, para cada $k:\ 1 \leq k \leq r_2$, pero esto es cierto por no coincidir las dimensiones de sus espacios de derivaciones como se prueba en el capítulo 2 (sección 2.3.3).

□

Se va a probar a continuación que éstas son todas las álgebras de Lie de sucesión característica $(2, 2, 2, 1, \ldots, 1)$ y dimensión de la derivada mayor que 3. Para hacer más asequible el seguimiento de la demostración se van a encontrar las que proceden de cada dimensión de la derivada 6, 5 ó 4, por medio de proposiciones independientes.

1.3.2 Clasificación en el caso $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 6$

Proposición 1.4 *Cualquier álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ nilpotente compleja de dimensión $n \geq 10$, con invariante de Goze $(2,2,2,1 \overset{n-6)}{\ldots},1)$ y con $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 6$ es isomorfa al álgebra $\mathfrak{g}^1_{n,3}$.*

Demostración. En este caso $\alpha = \beta = \gamma = 1$ y, por tanto, el teorema 1.2 determina la siguiente familia de leyes

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, X_5] = Y_2, & \\ [X_3, X_5] = Y_3, & \\ [X_1, Y_j] = b_j X_2, & 4 \leq j \leq n-7, \\ [X_3, Y_j] = b_j X_4, & 4 \leq j \leq n-7, \\ [X_5, Y_j] = b_j X_6, & 4 \leq j \leq n-7. \end{cases}$$

sin restricciones respecto a los parámetros.
Efectuando el cambio de base:

$$\begin{cases} X_i' = X_i, & 0 \leq i \leq 6, \\ Y_j' = Y_j, & 1 \leq j \leq 3, \\ Y_j' = Y_j + b_j X_0, & 4 \leq j \leq n-7. \end{cases}$$

se puede suponer $b_j = 0, \ 4 \leq j \leq n-7$, de donde se tiene el resultado. □

1.3.3 Clasificación en el caso $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 5$

Proposición 1.5 *Cualquier álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ nilpotente compleja de dimensión $n \geq 10$, con invariante de Goze $(2,2,2,1 \overset{n-6)}{\ldots},1)$ y con $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 5$ es isomorfa a alguna de las álgebras $\mathfrak{g}^2_{n,3}$ ó $\mathfrak{g}^3_{n,3}$.*

Demostración. En este caso $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 0$ y, por tanto, el teorema 1.2 determina la siguiente familia

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, X_5] = Y_2, & \\ [X_3, X_5] = a_2 X_2 + a_4 X_4 + a_6 X_6, & \\ [X_1, Y_j] = b_j X_2, & 3 \leq j \leq n-7, \\ [X_3, Y_j] = b_j X_4, & 3 \leq j \leq n-7, \\ [X_5, Y_j] = b_j X_6, & 3 \leq j \leq n-7. \end{cases}$$

sin restricciones respecto a los parámetros.
Se puede suponer $a_4 = a_6 = 0$, $b_j = 0$, $3 \leq j \leq n-7$ haciendo, en caso contrario, el cambio de base

$$\begin{cases} X'_i = X_i, & 0 \leq i \leq 2, \\ X'_3 = X_3 - a_6 X_0, & \\ X'_4 = X_4, & \\ X'_5 = X_5 + a_4 X_0, & \\ X'_6 = X_6, & \\ Y'_1 = Y_1 + a_6 X_2, & \\ Y'_2 = Y_2 - a_4 X_2, & \\ Y'_j = Y_j + b_j X_0, & 3 \leq j \leq n-7. \end{cases}$$

obteniéndose la siguiente familia de álgebras

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, X_5] = Y_2, & \\ [X_3, X_5] = a X_2. & \end{cases}$$

sin restricciones respecto a los parámetros, que determina, según sea $a = 0$ ó $a \neq 0$, a $\mathfrak{g}^2_{n,3}$ ó $\mathfrak{g}^3_{n,3}$, respectivamente. $\square$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA BIBLIOTECA

1.3.4 Clasificación en el caso $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 4$

Proposición 1.6 *Cualquier álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ nilpotente compleja de dimensión $n \geq 11$, con invariante de Goze $(2,2,2,1\stackrel{(n-6)}{\ldots},1)$ y con $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 4$ es isomorfa a una de las álgebras cuyas leyes respecto de una base adaptada $\{X_0,\ X_1,\ldots,\ X_6,\ Y_1,\ldots,\ Y_{n-7}\}$, vienen dadas por*

$$\mathfrak{g}^4_{n,3},\ \mathfrak{g}^5_{n,3},\ \mathfrak{g}^6_{n,3}$$

$$\begin{array}{llllll}
\mathfrak{g}^{1,r}_{n,3}, & 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor, & \mathfrak{g}^{2,r}_{n,3}, & 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor, & \mathfrak{g}^{3,r}_{n,3}, & 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor, \\
\mathfrak{g}^{4,r}_{n,3}, & 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-10}{2} \right\rfloor, & \mathfrak{g}^{5,r}_{n,3}, & 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-10}{2} \right\rfloor, & \mathfrak{g}^{6,r}_{n,3}, & 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-11}{2} \right\rfloor.
\end{array}$$

Demostración. En este caso $\alpha = 1,\ \beta = \gamma = 0$ y, por el teorema 1.2, se tiene la siguiente familia

$$\begin{cases}
[X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\
[X_1, X_3] = Y_1, & \\
[X_1, X_5] = a^2_{15}X_2 + a^4_{15}X_4 + a^6_{15}X_6, & \\
[X_3, X_5] = a^2_{35}X_2 + a^4_{35}X_4 + a^6_{35}X_6, & \\
[X_1, Y_j] = b^2_{1j}X_2 + b^6_{1j}X_6, & 2 \leq j \leq n-7, \\
[X_3, Y_j] = b^2_{1j}X_4 + b^6_{3j}X_6, & 2 \leq j \leq n-7, \\
[X_5, Y_j] = b^6_{5j}X_6, & 2 \leq j \leq n-7, \\
[Y_i, Y_j] = c_{ij}X_6, & 2 \leq i < j \leq n-7.
\end{cases}$$

con las restricciones

$$\begin{cases}
a^4_{15}b^6_{1j} = a^2_{35}b^6_{3j} = 0, & 2 \leq j \leq n-7 \\
b^6_{1j}(a^4_{35} - a^2_{15}) + b^6_{3j}a^4_{15} = 0, & 2 \leq j \leq n-7, \\
b^6_{3j}(a^4_{35} - a^2_{15}) - b^6_{1j}a^2_{35} = 0, & 2 \leq j \leq n-7, \\
a^4_{15}(b^6_{5j} - b^2_{1j}) = a^2_{35}(b^6_{5j} - b^2_{1j}) = 0, & 2 \leq j \leq n-7, \\
(a^4_{35} - a^2_{15})(b^6_{5j} - b^2_{1j}) = 0, & 2 \leq j \leq n-7, \\
a^4_{15}c_{ij} = a^2_{35}c_{ij} = 0, & 2 \leq i < j \leq n-7, \\
(a^4_{35} - a^2_{15})c_{ij} = 0, & 2 \leq i < j \leq n-7.
\end{cases}$$

Se puede suponer $a_{15}^6 = a_{35}^6 = 0$, $b_{1j}^2 = 0$, $2 \leq j \leq n-7$, mediante el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_1' = X_1 - a_{15}^6 X_0, & \\ X_2' = X_2, & \\ X_3' = X_3 - a_{35}^6 X_0, & \\ X_4' = X_4, & \\ Y_1' = Y_1 + a_{35}^2 X_2 - a_{15}^6 X_4, & \\ Y_j' = Y_j + b_{1j}^2 X_0, & 2 \leq j \leq n-7. \end{cases}$$

obteniéndose la siguiente familia de álgebras

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, X_5] = a_1 X_2 + a_2 X_4, & \\ [X_3, X_5] = a_3 X_2 + a_4 X_4, & \\ [X_1, Y_j] = b_{1j} X_6, & 2 \leq j \leq n-7, \\ [X_3, Y_j] = b_{3j} X_6, & 2 \leq j \leq n-7, \\ [X_5, Y_j] = b_{5j} X_6, & 2 \leq j \leq n-7, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij} X_6, & 2 \leq i < j \leq n-7. \end{cases}$$

con las restricciones:

$$\begin{cases} a_2 b_{1j} = a_3 b_{3j} = 0, & 2 \leq j \leq n-7 \\ b_{1j}(a_4 - a_1) + b_{3j} a_2 = 0, & 2 \leq j \leq n-7, \\ b_{3j}(a_4 - a_1) - b_{1j} a_3 = 0, & 2 \leq j \leq n-7, \\ a_2 b_{5j} = a_3 b_{5j} = 0, & 2 \leq j \leq n-7, \\ b_{5j}(a_4 - a_1) = 0, & 2 \leq j \leq n-7, \\ a_2 c_{ij} = a_3 c_{ij} = 0, & 2 \leq i < j \leq n-7 \\ c_{ij}(a_4 - a_1) = 0, & 2 \leq i < j \leq n-7. \end{cases}$$

Se pueden considerar, ahora, dos casos no isomorfos

1.$-Y_i \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, $2 \leq i \leq n-7 \implies \dim\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = n-4$,

2.$-\exists k \in \{2, \cdots, n-7\} \;/\; Y_k \notin \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, $\implies \dim\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) < n-4$.

Caso 1: dim $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = n-4$.

En este caso $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) =< X_2, X_4, X_6, Y_1, \ldots, Y_{n-7} >$ y, por tanto, se debe verificar que $b_{1j} = b_{3j} = b_{5j} = 0,\ 2 \leq j \leq n-7,\ c_{ij} = 0,\ 2 \leq i < j \leq n-7$. obteniéndose la familia

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, X_5] = a_1X_2 + a_2X_4, & \\ [X_3, X_5] = a_3X_2 + a_4X_4. & \end{cases}$$

sin restricciones respecto a los parámetros.

Caso 1.1:$(a_2, a_3) = (0, 0)$

Se puede suponer $a_4 = 0$, mediante el cambio de base dado por $X_5' = X_5 + a_4X_0$, obteniéndose:

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, X_5] = aX_2. & \end{cases}$$

que determina, según sea $a = 0$, ó $a \neq 0$ a $\mathfrak{g}_{n,3}^{1,0}$, ó a $\mathfrak{g}_{n,3}^{4}$, respectivamente.

Caso 1.2: $(a_2, a_3) \neq (0, 0)$

Por simetría se puede suponer $a_2 \neq 0$ con lo que se puede suponer $a_1 = a_4 = 0,\ a_2 = 1$, efectuando el siguiente cambio de base

$$\begin{cases} X_i' = X_i, & 0 \leq i \leq 2, \\ X_3' = \dfrac{a_1 - a_4}{2} X_1 + a_2 X_3, & \\ X_4' = \dfrac{a_1 - a_4}{2} X_2 + a_2 X_4, & \\ X_5' = X_5 + \dfrac{a_1 + a_4}{2} X_0, & \\ X_6' = X_6, & \\ Y_1' = a_2 Y_1, & \\ Y_j' = Y_j, & 2 \leq j \leq n-7. \end{cases}$$

obteniéndose

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, X_5] = X_4, & \\ [X_3, X_5] = aX_2. & \end{cases}$$

que determina, según sea $a = 0$, ó $a \neq 0$, a $\mathfrak{g}_{n,3}^5$, ó a $\mathfrak{g}_{n,3}^6$, respectivamente.

Nota: Lo hecho hasta ahora vale también para $n = 10$. A partir de ahora se considera que $n \geq 11$, para garantizar que se tienen Y_i suficientes para realizar los cambios que se proponen. El caso $n = 10$ se estudiará aparte.

Caso 2: dim $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) < n - 4$.

En este caso

$$\exists k \in \{2, \cdots, n-7\} \;/\; (b_{1k}, b_{3k}, b_{5k}) \neq (0,0,0)$$

o bien

$$\exists h, k: \; 2 \leq h < k \leq n-7 \;/\; c_{hk} \neq 0$$

En cualquiera de los casos las restricciones implican $a_2 = a_3 = 0$, $a_1 = a_4 = a$, y se puede suponer $a = 0$ sin más que efectuar el cambio de base dado por $X_5' = X_5 + aX_0$, obteniéndose la familia

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_j] = b_{1j} X_6, & 2 \le j \le n-7, \\ [X_3, Y_j] = b_{3j} X_6, & 2 \le j \le n-7, \\ [X_5, Y_j] = b_{5j} X_6, & 2 \le j \le n-7, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij} X_6, & 2 \le i < j \le n-7. \end{cases}$$

con los parámetros no todos nulos.

Caso 2.1: $(b_{1j}, b_{3j}) = (0,0),\ 2 \le j \le n-7.$

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_5, Y_j] = b_{5j} X_6, & 2 \le j \le n-7, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij} X_6, & 2 \le i < j \le n-7. \end{cases}$$

Caso 2.1.1: $b_{5j} = 0,\ 2 \le j \le n-7.$

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij} X_6, & 2 \le i < j \le n-7. \end{cases}$$

con c_{ij} no todos nulos.

Por simetría se puede suponer $c_{23} \neq 0$, (intercambiando, si es preciso, Y_2 con Y_h, e Y_3 con Y_k, si $c_{23} = 0$, $c_{hk} \neq 0$). Se puede también suponer $c_{23} = 1$ y $c_{2j} = c_{3j} = 0$, $4 \le j \le n-7$, efectuando el cambio de base dado mediante

$$\begin{cases} X'_i = X_i, & 0 \le i \le 6, \\ Y'_1 = Y_1, & \\ Y'_2 = \dfrac{1}{c_{23}} Y_2, & \\ Y'_3 = Y_3, & \\ Y'_j = Y_j + \dfrac{c_{3j}}{c_{23}} Y_2 - \dfrac{c_{2j}}{c_{23}} Y_3, & 4 \le j \le n-7. \end{cases}$$

quedando

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [Y_2, Y_3] = X_6, & \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij} X_6, & 4 \leq i < j \leq n-7. \end{cases}$$

⋆ Si $c_{ij} = 0, \ 4 \leq i < j \leq n-7$ se obtiene

$$\mathfrak{g}_{n,3}^{1,1} : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [Y_2, Y_3] = X_6. & \end{cases}$$

⋆ Si $\exists h, k \in \{4, \cdots, n-7\} \ / \ c_{hk} \neq 0$, por simetría , se puede suponer $c_{45} \neq 0$ y, a continuación, se puede suponer $c_{45} = 1$ y $c_{4j} = c_{5j} = 0$, mediante el cambio de base dado por :

$$\begin{cases} Y_4' = \dfrac{1}{c_{45}} Y_4, & \\ Y_j' = Y_j + \dfrac{c_{5j}}{c_{45}} Y_4 - \dfrac{c_{4j}}{c_{45}} Y_5, & 6 \leq j \leq n-7. \end{cases}$$

quedando

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [Y_2, Y_3] = X_6, & \\ [Y_4, Y_5] = X_6, & \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij} X_6, & 6 \leq i < j \leq n-7. \end{cases}$$

⋆ Si $c_{ij} = 0, \ 6 \leq i < j \leq n-7$ se obtiene

$$\mathfrak{g}_{n,3}^{1,2} : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [Y_2, Y_3] = X_6, & \\ [Y_4, Y_5] = X_6. & \end{cases}$$

⋆ Si se continúa el proceso, al cabo de r pasos se tendrá que el álgebra dada será isomorfa a una que tenga por ley

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ [X_1, X_3] \quad = Y_1, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = X_6, & 1 \le k \le 2r-1, \\ [Y_i, Y_j] \quad = c_{ij} X_6, & 2r \le i < j \le n-7. \end{cases}$$

y se llega a una situación análoga a las anteriores:

⋆ Si $c_{ij} = 0, 2r \le i < j \le n-7$ se obtiene

$$\mathfrak{g}_{n,3}^{1,r} \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ [X_1, X_3] \quad = Y_1, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = X_6, & 1 \le k \le 2r-1. \end{cases}$$

⋆ Si $\exists h, k \in \{2r, \cdots, n-7\}$ / $c_{hk} \neq 0$, se puede suponer $c_{2r,2r+1} \neq 0$, por simetría. A continuación, se puede suponer $c_{2r,2r+1} = 1$ y $c_{2r,j} = c_{2r+1,j} = 0$, mediante el siguiente cambio de base dado por

$$\begin{cases} Y'_{2r} = \dfrac{1}{c_{2r,2r+1}} Y_{2r}, & \\ Y'_j = Y_j + \dfrac{c_{2r+1,j}}{c_{2r,2r+1}} Y_{2r} - \dfrac{c_{2r,j}}{c_{2r,2r+1}} Y_{2r+1}, & 2r+2 \le j \le n-7. \end{cases}$$

quedando

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ [X_1, X_3] \quad = Y_1, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = X_6, & 1 \le k \le r, \\ [Y_i, Y_j] \quad = c_{ij} X_6, & 2r+2 \le i < j \le n-7. \end{cases}$$

llegando a una situación análoga a las ya consideradas. Obviamente, este proceso finaliza cuando $r = \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$.

Es decir, en este caso se obtiene que cualquier álgebra es isomorfa a una de la familia

$$\mathfrak{g}_{n,3}^{1,r} : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ [X_1, X_3] \quad = Y_1, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = X_6, & 1 \le k \le r. \end{cases} \qquad 1 \le r \le \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$$

Caso 2.1.2: $\exists\ k \in \{2, \cdots, n-7\}\ /\ b_{5k} \neq 0$.

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}]=X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] \ =Y_1, & \\ [X_5, Y_j] \ =b_{5j}X_6, & 2 \leq j \leq n-7, \\ [Y_i, Y_j] \ =c_{ij}X_6, & 2 \leq i < j \leq n-7. \end{cases}$$

Se puede suponer $b_{5,n-7} \neq 0$, (intercambiando, si es preciso, Y_k con Y_{n-7}) y, a continuación, se puede suponer $b_{5,n-7} = 1$, $b_{5j} = 0$, $2 \leq j \leq n-8$, efectuando el cambio de base dado por

$$\begin{cases} Y_j' \ =b_{5,n-7}Y_j - b_{5,j}Y_{n-7}, & 2 \leq j \leq n-8, \\ Y_{n-7}'=\dfrac{1}{b_{5,n-7}}Y_{n-7}. & \end{cases}$$

obteniéndose

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}]=X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] \ =Y_1, & \\ [X_5, Y_{n-7}] =X_6, & \\ [Y_i, Y_j] \ =c_{ij}X_6, & 2 \leq i < j \leq n-7. \end{cases}$$

Si $c_{ij} = 0,\ 2 \leq i < j \leq n-7$, se obtiene

$$\mathfrak{g}_{n,3}^{2,0} : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}]=X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] \ =Y_1, & \\ [X_5, Y_{n-7}] =X_6. & \end{cases}$$

Si $\exists\ h, k\ :\ 2 \leq h < k \leq n-7\ /\ c_{hk} \neq 0$, entonces se puede suponer que $\exists h, k :\ 2 \leq h < k \leq n-8$, tal que $c_{hk} \neq 0$, pues en caso contrario:
Si $c_{ij} = 0,\ 2 \leq i < j \leq n-8$, existirá algún $k \in \{2, \cdots, n-8\}$, tal que $c_{k,n-7} \neq 0$, y entonces, mediante un cambio de base trivial, se puede suponer $c_{2,n-7} \neq 0$. A continuación, el cambio de base dado por $Y_j' = c_{2,n-7}Y_j - c_{j,n-7}Y_2$, $3 \leq j \leq n-8$, permite suponer $c_{j,n-7} = 0$, $3 \leq j \leq n-8$, quedando

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}]=X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] \ =Y_1, & \\ [X_5, Y_{n-7}] =X_6, & \\ [Y_2, Y_{n-7}] =c_{2,n-7}X_6. & \end{cases}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

pero, entonces, basta hacer

$$\begin{cases} X'_i = X_i, & 0 \leq i \leq 4, \\ X'_5 = c_{2,n-7}X_5 - Y_2, & \\ X'_6 = c_{2,n-7}X_6, & \\ Y'_i = Y_i, & 1 \leq i \leq n-7. \end{cases}$$

para obtener un álgebra del caso (2.1.1).

Se puede, por lo tanto, suponer que $\exists h, k : 2 \leq h < k \leq n-8$, tal que $c_{hk} \neq 0$, y entonces, obviamente, se puede suponer $c_{23} \neq 0$. Procediendo de forma análoga al caso (2.1.1), al cabo de r pasos se tendrá que el álgebra dada será isomorfa, o bien a una de las obtenidas en los pasos anteriores, o a una que tenga por ley

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_5, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = X_6, & 1 \leq k \leq r-1, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij}X_6, & 2r \leq i < j \leq n-7. \end{cases}$$

finalizando el proceso cuando $r = \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor$.

En definitiva, en este caso, cualquier álgebra es isomorfa a una de la familia

$$\mathfrak{g}_{n,3}^{2,r} : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_5, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = X_6, & 1 \leq k \leq r, \end{cases} \qquad 1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor.$$

Caso 2.2: $\exists k \in \{2, \cdots, n-7\} \ / \ (b_{1k}, b_{3k}) \neq (0,0)$.

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_j] = b_{1j}X_6, & 2 \leq j \leq n-7, \\ [X_3, Y_j] = b_{3j}X_6, & 2 \leq j \leq n-7, \\ [X_5, Y_j] = b_{5j}X_6, & 2 \leq j \leq n-7, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij}X_6, & 2 \leq i < j \leq n-7. \end{cases}$$

Se puede suponer $b_{1,n-7} \neq 0$, por simetría. A continuación, se puede suponer $b_{1,n-7} = 1$ y $b_{1,j} = 0$, $2 \leq j \leq n-8$, mediante un cambio de base del mismo tipo que los anteriores. También se puede suponer $b_{3,n-7} = 0$, pues en caso contrario bastaría hacer el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_3' = X_3 - b_{3,n-7}X_1, \\ X_4' = X_4 - b_{3,n-7}X_2. \end{cases}$$

verificándose que

$$\left[X_3', Y_{n-7}'\right] = [X_3, Y_{n-7}] - b_{3,n-7}\,[X_1, Y_{n-7}] = 0$$

Por tanto, se tiene la siguiente familia:

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [X_3, Y_j] = b_{3j}X_6, & 2 \leq j \leq n-8, \\ [X_5, Y_j] = b_{5j}X_6, & 2 \leq j \leq n-7, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij}X_6, & 2 \leq i < j \leq n-7. \end{cases}$$

Caso 2.2.1: $b_{5j} = 0, \ 2 \leq j \leq n-7.$

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [X_3, Y_j] = b_{3j}X_6, & 2 \leq j \leq n-8, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij}X_6, & 2 \leq i < j \leq n-7. \end{cases}$$

Caso 2.2.1.1: $b_{3j} = 0, \ 2 \leq j \leq n-8.$

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij}X_6, & 2 \leq i < j \leq n-7. \end{cases}$$

Si $c_{ij} = 0,\ 2 \le i < j \le n-7$, se obtiene

$$\mathfrak{g}_{n,3}^{3,0} : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ [X_1, X_3] \ \ = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6. & \end{cases}$$

Si $\exists\ h,k:\ 2 \le h < k \le n-7\ /\ c_{hk} \ne 0$, entonces se puede suponer que $\exists h,k:\ 2 \le h < k \le n-8$, tal que $c_{hk} \ne 0$, pues en caso contrario:
Si $c_{ij} = 0,\ 2 \le i < j \le n-8$, existirá algún $k \in \{2, \cdots, n-8\}$ tal que $c_{k,n-7} \ne 0$ y se puede suponer $c_{2,n-7} \ne 0$. Entonces, haciendo

$$\begin{cases} X_1' = c_{2,n-7}X_1 - Y_2, & \\ X_2' = c_{2,n-7}X_2, & \\ Y_j' = Y_j, & 2 \le j \le n-7. \end{cases}$$

se obtiene un álgebra del caso (2.1).
Supongamos, pues, que $\exists h,k:\ 2 \le h < k \le n-8,\ /\ c_{hk} \ne 0$. Entonces, se puede suponer $c_{23} \ne 0$ y un procedimiento análogo al de los casos anteriores determina la familia

$$\mathfrak{g}_{n,3}^{3,r} : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ [X_1, X_3] \ \ = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = X_6, & 1 \le k \le r. \end{cases} \qquad 1 \le r \le \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor$$

Caso 2.2.1.2: $\exists k \in \{2, \cdots, n-8\}\ /\ b_{3k} \ne 0.$

Se puede suponer $b_{3,n-8} \ne 0$, (intercambiando si es preciso Y_k con Y_{n-8}) y, a continuación, se puede suponer $b_{3,n-8} = 1$ y $b_{3j} = 0,\ 2 \le j \le n-9$, (efectuando el cambio dado por $Y_j' = b_{3,n-8}Y_j - b_{3j}Y_{n-8},\ 2 \le j \le n-9,\ Y_{n-8}' = \dfrac{1}{b_{3,n-8}}Y_{n-8}$) quedando

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ [X_1, X_3] \ \ = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [X_3, Y_{n-8}] = X_6, & \\ [Y_i, Y_j] \quad = c_{ij}X_6, & 2 \le i < j \le n-7. \end{cases}$$

Si $c_{ij} = 0,\ 2 \le i < j \le n-7$, resulta

$$\mathfrak{g}_{n,3}^{4,0} : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [X_3, Y_{n-8}] = X_6. & \end{cases}$$

Si $\exists\, h, k :\ 2 \le h < k \le n-7 \ /\ c_{hk} \neq 0$, se puede suponer que $\exists h, k,\ 2 \le h < k \le n-9$, tal que $c_{hk} \neq 0$ y, siguiendo el mismo procedimiento que en los casos anteriores, se obtiene la familia

$$\mathfrak{g}_{n,3}^{4,r} : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [X_3, Y_{n-8}] = X_6, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = X_6, & 1 \le k \le r. \end{cases} \qquad 1 \le r \le \left\lfloor \frac{n-10}{2} \right\rfloor$$

En caso contrario, (es decir, si $c_{ij} = 0,\ 2 \le i < j \le n-9$), se obtienen álgebras de alguno de los casos anteriores.

La demostración detallada puede verse en el apéndice B.1.

Caso 2.2.2: $\exists k \in \{2, \cdots, n-7\} \ /\ b_{5k} \neq 0$.

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [X_3, Y_j] = b_{3j} X_6, & 2 \le j \le n-8, \\ [X_5, Y_j] = b_{5j} X_6, & 2 \le j \le n-7, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij} X_6, & 2 \le i < j \le n-7. \end{cases}$$

Caso 2.2.2.1: $b_{3j} = 0,\ 2 \le j \le n-8$.

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [X_5, Y_j] = b_{5j} X_6, & 2 \le j \le n-7, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij} X_6, & 2 \le i < j \le n-7. \end{cases}$$

Si $b_{5j} = 0,\ 2 \leq j \leq n-8,\ b_{5,n-7} \neq 0$, mediante el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_1' = b_{5,n-7}X_1 - X_5, \\ X_2' = b_{5,n-7}X_2 - X_6, \\ Y_1' = b_{5,n-7}Y_1. \end{cases}$$

se obtiene un álgebra del caso (2.1) pues se verifica que $\left[X_1', Y_j'\right] = 0, \quad 2 \leq j \leq n-7$. Por lo tanto, se puede suponer que $\exists k \in \{2, \ldots, n-8\}$ / $b_{5k} \neq 0$ y, por simetría, (intercambiando si es preciso Y_k con Y_{n-8}), que $b_{5,n-8} \neq 0$. A continuación, mediante el cambio de base definido por

$$\begin{cases} X_i' = X_i, & 0 \leq i \leq 6, \\ Y_1' = Y_1, & \\ Y_j' = b_{5,n-8}Y_j - b_{5j}Y_{n-8}, & 2 \leq j \leq n-9, \\ Y_{n-8}' = \dfrac{1}{b_{5,n-8}}Y_{n-8}, & \\ Y_{n-7}' = b_{5,n-8}Y_{n-7} - b_{5,n-7}Y_{n-8}. & \end{cases}$$

se puede suponer $b_{5,n-8} = 1,\ b_{5j} = 0, 2 \leq j \leq n-9$. Se tiene, por tanto, que cualquier álgebra de este caso es isomorfa a una de las obtenidas anteriormente o bien a una de la siguiente familia

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [X_5, Y_{n-8}] = X_6, & \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij}X_6, & 2 \leq i < j \leq n-7. \end{cases}$$

Si $c_{ij} = 0,\ 2 \leq i < j \leq n-7$, se obtiene

$$\mathfrak{g}_{n,3}^{5,0} : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [X_5, Y_{n-8}] = X_6. & \end{cases}$$

Si $\exists h, k \in \{2, \ldots, n-7\}$ / $c_{hk} \neq 0$, se obtiene

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [X_5, Y_{n-8}] = X_6, & \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij} X_6, & 2 \leq i < j \leq n-7. \end{cases}$$

Se puede suponer que $\exists h, k,\ 2 \leq h < k \leq n-9$, tal que $c_{hk} \neq 0$ y, entonces, se puede suponer $c_{23} \neq 0$ y, siguiendo el mismo procedimiento que en los casos anteriores, se obtiene la familia:

$$\mathfrak{g}_{n,3}^{5,r} : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [X_5, Y_{n-8}] = X_6, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = X_6, & 1 \leq k \leq r. \end{cases} \qquad 1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-10}{2} \right\rfloor$$

En caso contrario, (es decir, si $c_{ij} = 0,\ 2 \leq i < j \leq n-9$), se obtienen álgebras de alguno de los casos anteriores.
La demostración detallada puede verse en el apéndice B.2.

Caso 2.2.2.2: $\exists k \in \{2, \ldots, n-8\}$ / $b_{3k} \neq 0$.

Se puede suponer que $b_{3,n-8} \neq 0$, (intercambiando si es preciso Y_k con Y_{n-8}) y, a continuación, $b_{3,n-8} = 1$ y $b_{3j} = 0,\ 2 \leq j \leq n-9$, (efectuando, si es preciso, el cambio de base dado por $Y'_j = b_{3,n-8} Y_j - b_{3j} Y_{n-8},\ 2 \leq j \leq n-9,\ Y'_{n-8} = \dfrac{1}{b_{3,n-8}} Y_{n-8}$), quedando

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [X_3, Y_{n-8}] = X_6, & \\ [X_5, Y_j] = b_{5j} X_6, & 2 \leq j \leq n-7, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij} X_6, & 2 \leq i < j \leq n-7. \end{cases}$$

Si $b_{5j} = 0,\ 2 \leq j \leq n-9$, entonces $(b_{5,n-8}, b_{5,n-7}) \neq (0,0)$ y, por simetría, se puede suponer $b_{5,n-7} \neq 0$ (intercambiando, si es preciso, X_1 con X_3 e Y_{n-8} con Y_{n-7}). Efectuando, entonces, el cambio de base definido mediante

$$\begin{cases} X_1' = X_3, \\ X_2' = X_4, \\ X_3' = b_{5,n-7}X_1 + b_{5,n-8}X_3 - X_5, \\ X_4' = b_{5,n-7}X_2 + b_{5,n-8}X_4 - X_6, \\ Y_1' = -b_{5,n-7}Y_1. \end{cases}$$

se tiene $[X_3', Y_j'] = 0,\ 2 \leq j \leq n-7$, es decir, un álgebra del caso (2.2.2.1).
Se puede, por lo tanto, suponer que $\exists k \in \{2, \ldots, n-9\}$ / $b_{5k} \neq 0$ y, por consiguiente, que $b_{5,n-9} \neq 0$. Entonces, de la misma forma que en casos anteriores, se puede suponer que $b_{5,n-9} = 1$ y $b_{5j} = 0,\ j \neq n-9$, quedando la siguiente familia

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [X_3, Y_{n-8}] = X_6, & \\ [X_5, Y_{n-9}] = X_6, & \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij}X_6, & 2 \leq i < j \leq n-7. \end{cases}$$

Si $c_{ij} = 0,\ 2 \leq i < j \leq n-7$ se obtiene

$$\mathfrak{g}_{n,3}^{6,0} : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [X_3, Y_{n-8}] = X_6, & \\ [X_5, Y_{n-9}] = X_6. & \end{cases}$$

Si $\exists h,k \in \{2,\ldots,n-7\}$ / $c_{hk} \neq 0$, se tiene la familia

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [X_3, Y_{n-8}] = X_6, & \\ [X_5, Y_{n-9}] = X_6, & \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij} X_6, & 2 \leq i < j \leq n-7. \end{cases}$$

Se puede suponer que $\exists h,k : 2 \leq h < k \leq n-10$ $/c_{hk} \neq 0$ y, por consiguiente, que $c_{23} \neq 0$. Por un procedimiento análogo a los realizados en los casos anteriores, se obtiene la familia

$$\mathfrak{g}_{n,3}^{6,r} : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [X_3, Y_{n-8}] = X_6, & \\ [X_5, Y_{n-9}] = X_6, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = X_6, & 1 \leq k \leq r. \end{cases} \qquad 1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-11}{2} \right\rfloor$$

En caso contrario, (es decir, si $c_{ij} = 0,\ 2 \leq i < j \leq n-10$), se obtienen álgebras de alguno de los casos anteriores.
La demostración puede verse en el apéndice B.3. $\square$

Se ha probado el siguiente

Teorema 1.7 *En dimensión $n > 10$, toda álgebra de Lie nilpotente con invariante de Goze $(2,2,2,1,\ldots,1)$ y $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) > 3$, es isomorfa a alguna de las álgebras de leyes $\mu_{n,3}^i$, $1 \leq i \leq 3n-18$, definidas anteriormente.*

1.3.5 Caso dim($\mathfrak{g}$)=10.

Teorema 1.8 *En dimensión $n = 10$, hay exactamente 12 álgebras de Lie nilpotentes complejas con invariante de Goze $(2,2,2,1,1,1,1)$ y $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) > 3$, que correspon-*

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

den con la notación anterior a las denominadas

$$\mathfrak{g}_{10,3}^{1},\ \mathfrak{g}_{10,3}^{2},\ \mathfrak{g}_{10,3}^{3},\ \mathfrak{g}_{10,3}^{4},\ \mathfrak{g}_{10,3}^{5},\ \mathfrak{g}_{10,3}^{6},\ \mathfrak{g}_{10,3}^{1,0},\ \mathfrak{g}_{10,3}^{1,1},\ \mathfrak{g}_{10,3}^{2,0}\ \mathfrak{g}_{10,3}^{3,0},\ \mathfrak{g}_{10,3}^{4,0},\ \mathfrak{g}_{10,3}^{5,0}.$$

Demostración. Es claro que todas las álgebras obtenidas son nilpotentes, tienen invariante de Goze $(2,2,2,1,1,1,1)$ y $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) > 3$ y, además, son no isomorfas entre sí, según se ha visto en el caso general. Resta probar que toda álgebra de Lie de sucesión característica $(2,2,2,1,1,1,1)$ y dimensión de la derivada mayor que 3 es isomorfa a alguna de las anteriores.

La demostración de la proposición 1.2 es válida también cuando $n = 10$, en los casos $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 6$ y $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 5$, obteniéndose $\mathfrak{g}_{10,3}^{i}$, $1 \leq i \leq 3$, y en el caso en que $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 4$, cuando $\dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = 6$, obteniéndose $\mathfrak{g}_{10,3}^{i}$, $4 \leq i \leq 6$ y $\mathfrak{g}_{10,3}^{1,0}$.

Se desarrollará a continuación el caso $\dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) < 6$. En este caso se tiene la familia

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_j] = b_{1j} X_6, & 2 \leq j \leq 3, \\ [X_3, Y_j] = b_{3j} X_6, & 2 \leq j \leq 3, \\ [X_5, Y_j] = b_{5j} X_6, & 2 \leq j \leq 3, \\ [Y_2, Y_3] = c_{23} X_6. & \end{cases}$$

con los parámetros no todos nulos.

Caso 1: $(b_{1j}, b_{3j}) = (0,0),\ 2 \leq j \leq 3.$

Caso 1.1: $b_{5j} = 0,\ 2 \leq j \leq 3.$

En este caso se debe verificar $c_{23} \neq 0$ y se obtiene

$$\mathfrak{g}_{10}^{1,1} : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [Y_2, Y_3] = X_6. & \end{cases}$$

Caso 1.2: $\exists k \in \{2,3\} \ / \ b_{5k} \neq 0.$

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_5, Y_j] = b_{5j}X_6, & 2 \leq j \leq 3, \\ [Y_2, Y_3] = c_{23}X_6. & \end{cases}$$

Se puede suponer $b_{53} \neq 0$, (intercambiando, si es preciso, Y_2 con Y_3) y, a continuación, $b_{53} = 1$, $b_{52} = 0$, mediante el cambio de base dado por

$$\begin{cases} Y_2' = b_{53}Y_2 - b_{52}Y_3, \\ Y_3' = \dfrac{1}{b_{53}}Y_3. \end{cases}$$

quedando

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_5, Y_3] = X_6, & \\ [Y_2, Y_3] = c_{23}X_6. & \end{cases}$$

Entonces, se puede suponer $c_{23} = 0$, obteniéndose $\mathfrak{g}_{10}^{2,0}$, pues, en caso contrario, el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_5' = c_{23}X_5 - Y_2, \\ X_6' = X_6, \end{cases}$$

determina un álgebra del caso 1.1, al verificarse que $[X_5', Y_i'] = 0, 2 \leq i \leq 3$.

Caso 2: $\exists k \in \{2,3\} \ / \ (b_{1k}, b_{3k}) \neq (0,0).$

Se puede suponer $b_{13} \neq 0$, (intercambiando, si es preciso, Y_2 con Y_3 ó X_1 con X_3 ó ambos) y, a continuación, $b_{13} = 1$ y $b_{12} = 0$, mediante el cambio de base dado por

$$\begin{cases} Y_2' = b_{13}Y_2 - b_{12}Y_3, \\ Y_3' = \dfrac{1}{b_{13}}Y_3. \end{cases}$$

También se puede suponer $b_{33} = 0$, pues en caso contrario, el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_3' = X_3 - b_{33}X_1, \\ X_4' = X_4 - b_{33}X_2. \end{cases}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

determina que $[X_3', Y_3'] = 0$.

Por tanto, se tiene la siguiente familia

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_3] = X_6, & \\ [X_3, Y_2] = b_{32}X_6, & \\ [X_5, Y_j] = b_{5j}X_6, & 2 \leq j \leq 3, \\ [Y_2, Y_3] = c_{23}X_6. & \end{cases}$$

Caso 2.1: $b_{5j} = 0,\ 2 \leq j \leq 3.$

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_3] = X_6, & \\ [X_3, Y_2] = b_{32}X_6, & \\ [Y_2, Y_3] = c_{23}X_6. & \end{cases}$$

Caso 2.1.1: $b_{32} = 0.$

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_3] = X_6, & \\ [Y_2, Y_3] = c_{23}X_6. & \end{cases}$$

Se puede suponer $c_{23} = 0$, obteniéndose $\mathfrak{g}_{10}^{3,0}$, pues, en caso contrario, el cambio de base dado por $X_1' = c_{23}X_1 - Y_2$ determina un álgebra del caso 1.

Caso 2.1.2: $b_{32} \neq 0.$

Se puede suponer $b_{32} = 1$ y $c_{23} = 0$, efectuando, si es preciso, el cambio de base dado por $X_3' = c_{23}X_3 + Y_3$, obteniéndose $\mathfrak{g}_{10}^{4,0}$.

Caso 2.2: $\exists k \in \{2,3\}$ / $b_{5k} \neq 0$.

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_3] = X_6, & \\ [X_3, Y_2] = b_{32}X_6, & \\ [X_5, Y_j] = b_{5j}X_6, & 2 \leq j \leq 3, \\ [Y_2, Y_3] = c_{23}X_6. & \end{cases}$$

Se puede suponer $b_{32} = 0$, pues si $b_{32} \neq 0$, se tiene que

- ⋆ Si $b_{52} \neq 0$, el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_3' = b_{52}X_3 - b_{32}X_5, \\ X_4' = b_{52}X_4 - b_{32}X_6, \end{cases}$$

determina $[X_3, Y_2] = 0$ y, por tanto, $b_{32} = 0$.

- ⋆ Si $b_{52} = 0$, entonces será $b_{53} \neq 0$ y el cambio de base

$$\begin{cases} X_0' = X_0, \\ X_1' = X_3, \\ X_2' = X_4, \\ X_3' = b_{53}X_1 - X_5, \\ X_4' = b_{53}X_2 - X_6, \\ X_i' = X_i, \quad 5 \leq i \leq 6, \\ Y_1' = -b_{53}Y_1, \\ Y_2' = Y_3, \\ Y_3' = \frac{1}{b_{32}}Y_2. \end{cases}$$

determina $[X_3, Y_j] = 0, \ 2 \leq j \leq 3$ y, por tanto, es $b_{32} = 0$.

Se tiene, pues

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_3] = X_6, & \\ [X_5, Y_j] = b_{5j}X_6, & 2 \leq j \leq 3, \\ [Y_2, Y_3] = c_{23}X_6. & \end{cases}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

Se puede suponer $b_{52} \neq 0$ y, a continuación, $b_{52} = 1$ pues, en caso contrario, si $b_{52} = 0$, entonces $b_{53} \neq 0$ y basta efectuar el cambio de base

$$\begin{cases} X'_i = X_i, & 0 \leq i \leq 4, \\ X'_5 = b_{52} X_5, & \\ X'_6 = b_{52} X_6, & \\ Y'_1 = Y_1, & \\ Y'_2 = \dfrac{1}{b_{52}} Y_2, & \\ Y'_3 = b_{52} Y_3 - b_{53} Y_2. & \end{cases}$$

para obtener

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_3] = X_6, & \\ [X_5, Y_2] = X_6, & \\ [Y_2, Y_3] = c_{23} X_6. & \end{cases}$$

Se puede suponer $c_{23} = 0$, obteniéndose $\mathfrak{g}_{10}^{5,0}$, pues, en caso contrario, el cambio de base dado por $X'_1 = c_{23} X_1 - Y_2$ determina un álgebra del caso 1. □

1.4 Casos $\dim(\mathfrak{g}) = 7, 8, 9$

1.4.1 Caso $\dim(\mathfrak{g}) = 7$

Proposición 1.9 *Cualquier álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ nilpotente compleja de dimensión 7 e invariante de Goze $(2, 2, 2, 1)$, es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras cuyas leyes respecto de una base adaptada $\{X_0,\ X_1, \ldots,\ X_6\}$, vienen dadas por*

$$\mathfrak{g}_{7,3}^1 : \left\{ [X_0, X_i] = X_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq 3. \right. \qquad \mathfrak{g}_{7,3}^2 : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = X_2. & \end{cases}$$

$$\mathfrak{g}_{7,3}^3 : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = X_4. & \end{cases} \qquad \mathfrak{g}_{7,3}^4 : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = X_6, & \\ [X_1, X_5] = X_4. & \end{cases}$$

Demostración. Es un resultado conocido [3]. □

1.4.2 Caso dim($\mathfrak{g}$) = 8

Proposición 1.10 *En dimensión $n = 8$ hay exactamente 4 álgebras de Lie nilpotentes complejas con invariante de Goze* $(2,2,2,1,1)$ *y* $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) > 3$ *que corresponden, en la notación anterior, a las denominadas*

$$\mathfrak{g}_{8,3}^{4},\ \mathfrak{g}_{8,3}^{5},\ \mathfrak{g}_{8,3}^{6},\ \mathfrak{g}_{8,3}^{1,0}$$

Demostración. Es claro que todas las álgebras obtenidas son nilpotentes, tienen invariante de Goze $(2,2,2,1,1)$ y $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) > 3$, y además son no isomorfas entre sí, según se ha visto en el caso general. Resta probar que toda álgebra de Lie de sucesión característica $(2,2,2,1,1)$, y dimensión de la derivada mayor que 3, es isomorfa a alguna de las anteriores. Ahora bien, la demostración de la proposición 1.2 es válida también cuando $n = 8$, en el caso $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 4$, cuando $\dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = 4$, obteniéndose $\mu_{8,3}^{i}$, $4 \leq i \leq 6$ y $\mu_{8,3}^{1,0}$ y, por tanto, se tiene el resultado. Para más detalles ver apéndice B.4. □

1.4.3 Caso dim($\mathfrak{g}$) = 9

Proposición 1.11 *En dimensión $n = 9$ hay exactamente 8 álgebras de Lie nilpotentes complejas con invariante de Goze* $(2,2,2,1,1,1)$ *y* $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) > 3$, *que corresponden, en la notación anterior, a las denominadas*

$$\mathfrak{g}_{9,3}^{2},\ \mathfrak{g}_{9,3}^{3},\ \mathfrak{g}_{9,3}^{4},\ \mathfrak{g}_{9,3}^{5},$$
$$\mathfrak{g}_{9,3}^{6},\ \mathfrak{g}_{9,3}^{1,0},\ \mathfrak{g}_{9,3}^{2,0},\ \mathfrak{g}_{9,3}^{3,0}$$

Demostración. Es claro que todas las álgebras obtenidas son nilpotentes, tienen invariante de Goze $(2,2,2,1,1,1)$ y $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) > 3$ y, además, son no isomorfas entre sí, según se ha visto en el caso general. Resta probar que toda álgebra de Lie de sucesión característica $(2,2,2,1,1,1)$ y dimensión de la derivada mayor que 3 es isomorfa a alguna de las anteriores.

La demostración de la proposición 1.2 es válida también, cuando $n = 9$, en los casos en que $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 5$, obteniéndose $\mu_{9,3}^i$, $2 \leq i \leq 3$, y en el que $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 4$, cuando $\dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = 5$, obteniéndose $\mu_{9,3}^i$, $4 \leq i \leq 6$ y $\mu_{9,3}^{1,0}$. Se desarrollará a continuación el caso $\dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = 4$.

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) =< X_2, X_4, X_6, Y_1 >$$

y, por tanto, $Y_2 \notin \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, lo que implica que

$$(b_1, b_3, b_5) \neq (0,0,0)$$

En definitiva, se tiene la familia

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_2] = b_1 X_6, & \\ [X_3, Y_2] = b_3 X_6, & \\ [X_5, Y_2] = b_5 X_6. & \end{cases}$$

Caso 1: $(b_1, b_3) = (0,0)$

Será $b_5 \neq 0$, obteniéndose

$$\mathfrak{g}_{9,3}^{2,0} : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_5, Y_2] = X_6. & \end{cases}$$

Caso 2: $(b_1, b_3) \neq (0,0)$

Se puede suponer $b_1 \neq 0$, por simetría, y a continuación, $b_3 = 0$ mediante el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_3' = b_1 X_3 - b_3 X_1, \\ X_4' = b_1 X_4 - b_3 X_2. \end{cases}$$

También se puede suponer $b_5 = 0$, obteniéndose $\mathfrak{g}_{9,3}^{3,0}$, pues, en caso contrario, si $b_5 \neq 0$, mediante el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_1' = b_5 X_1 - b_1 X_5, \\ X_2' = b_5 X_2 - b_1 X_6, \end{cases}$$

se obtiene un álgebra del caso 1. Para más detalles ver apéndice B.5. □

1.5 Caso de invariante de Goze $(2, \overset{p)}{\ldots}, 2, 1, \overset{n-2p)}{\ldots}, 1)$

Algunos ejemplos de álgebras de Lie metabelianas de dimensión n e invariante de Goze $(2, \overset{p)}{\ldots}, 2, 1 \overset{n-2p)}{\ldots}, 1)$, (con $n \geq 2p+1$), son las que, respecto de una base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{2p}, Y_1, \ldots, Y_{n-2p-1}\}$, vienen expresadas mediante

$$\mathfrak{g}^0_{n,p} : \; \left\{ \; [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, \quad 1 \leq i \leq p. \right.$$

$$\mathfrak{g}^1_{n,p} : \; \left\{ \begin{array}{lll} [X_0, X_{2i-1}] & = X_{2i}, & 1 \leq i \leq p, \\ [X_{2r-1}, X_{2s-1}] & = Y_{\left(\frac{2p-r}{2}\right)(r-1)+s-r}, & 1 \leq r < s \leq p. \end{array} \right.$$

En el primero de los casos se verifica que $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = p$ y en el segundo que $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = p + \begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix}$. Se va a probar que estos son, precisamente, los valores extremos para $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}))$.

Lema 1.12 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie metabeliana n-dimensional. Para cada $p \in \mathbf{N}$ fijado, supuesto $n \geq 2p+1$, se verifica que*

$$p \leq \dim \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \leq p + \begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nota: En la demostración se obtiene la forma general de la familia de álgebras de Lie metabelianas de dimensión n, salvo ciertas restricciones entre los valores de los parámetros. Es decir, se va a probar que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie metabeliana de dimensión $n \geq 2p+1$, con invariante de Goze $(2, \overset{p)}{\ldots}, 2, 1, \overset{n-2p)}{\ldots}, 1)$, entonces $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un álgebra cuya ley respecto una base adaptada $\mathcal{B} = \{X_0, X_1, \ldots, X_{2p}, Y_1, \ldots, Y_{n-2p-1}\}$, viene dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq p, \\ [X_{2i-1}, X_{2s-1}] = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{2i-1,2j-1}^{2k} X_{2k} + \sum\limits_{k=1}^{n-2p-1} \alpha_{2i-1,2j-1}^{k} Y_k, & 1 \leq i < j \leq p, \\ [X_{2i-1}, Y_j] = \sum\limits_{k=1}^{p} b_{2i-1,j}^{2k} X_{2k}, \quad 1 \leq i \leq p, & 1 \leq j \leq n-2p-1, \\ [Y_i, Y_j] = \sum\limits_{k=1}^{p} c_{ij}^{2k} X_{2k}, & 1 \leq i < j \leq n-2p-1. \end{cases}$$

donde los parámetros verifican ciertas restricciones.

Demostración. Sea X_0 un vector característico de $\mathfrak{g}$. Es conocido que, respecto de cierta base adaptada $\mathcal{B} = \{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{2p}, Y_1, \ldots, Y_{n-(2p+1)}\}$ de $\mathfrak{g}$, los únicos productos no nulos respecto de X_0 son

$$[X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, \quad 1 \leq i \leq p.$$

y, por lo tanto, se tiene que

$$p \leq \dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}))$$

Por otra parte, puesto que $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) = \{0\}$, se debe verificar que $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ y, por lo tanto, que $X_{2i} \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}), \ 1 \leq i \leq p$. En consecuencia

$$[X_{2i}, Z] = 0, \ \forall Z \in \mathfrak{g}$$

También, por nilpotencia, se ha de verificar que

$$X_{2i-1} \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}), \ 1 \leq i \leq p$$

En consecuencia, los únicos productos no nulos de la ley de $\mathfrak{g}$, respecto de la base indicada son, como máximo

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq p, \\ [X_{2i-1}, X_{2j-1}] = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{2i-1,2j-1}^{2k} X_{2k} + \sum\limits_{k=1}^{n-2p-1} \alpha_{2i-1,2j-1}^{k} Y_k, & 1 \leq i < j \leq p, \\ [X_{2i-1}, Y_j] = \sum\limits_{k=1}^{p} b_{2i-1,j}^{2k} X_{2k} + \sum\limits_{k=1}^{n-2p-1} \beta_{2i-1,j}^{k} Y_k, & 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq n-2p-1, \\ [Y_i, Y_j] = \sum\limits_{k=1}^{p} c_{ij}^{2k} X_{2k} + \sum\limits_{k=1}^{n-2p-1} \gamma_{ij}^{k} Y_k, & 1 \leq i < j \leq n-2p-1. \end{cases}$$

Puesto que $X_0 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \implies AX_0 + Z \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}),\ \forall Z \in \mathfrak{g},\ \forall A \in \mathbf{C}\ ,\ A \neq 0.$
Entonces, se puede considerar AX_0+Z como vector característico, debiéndose verificar que $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + Z)) = p$

$\star\ \mathrm{rg}(Ad(AX_0 + X_1)) = p$

$$Ad(AX_0 + X_1) = \left[\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & A & 0 & a_{13}^2 & 0\cdots 0 & a_{1,2p-1}^2 & 0 & b_{1j}^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & A+a_{13}^4 & 0\cdots 0 & a_{1,2p-1}^4 & 0 & b_{1j}^4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\cdots\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_{13}^{2p} & 0\cdots 0 & A+a_{1,2p-1}^{2p} & 0 & b_{1j}^{2p} \\
\hline
0 & 0 & 0 & \alpha_{13}^1 & 0\cdots 0 & \alpha_{1,2p-1}^1 & 0 & \beta_{1j}^1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\cdots\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \alpha_{13}^{n-2p-1} & 0\cdots 0 & \alpha_{1,2p-1}^{n-2p-1} & 0 & \beta_{1,j}^{n-2p-1}
\end{array}\right]$$

Siempre se puede elegir $A \neq 0$ tal que

$$\begin{vmatrix}
A & a_{13}^2 & a_{15}^2 & \cdots & a_{1,2p-1}^2 \\
0 & A+a_{13}^4 & a_{15}^4 & \cdots & a_{1,2p-1}^4 \\
0 & a_{13}^6 & A+a_{15}^6 & \cdots & a_{1,2p-1}^6 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & a_{13}^{2p} & a_{15}^{2p} & \cdots & A+a_{1,2p-1}^{2p}
\end{vmatrix} \neq 0$$

y, por lo tanto, se debe verificar que

$$\left|\begin{array}{ccccc|c}
A & a_{13}^2 & a_{15}^2 & \cdots & a_{1,2p-1}^2 & b_{1j}^2 \\
0 & A+a_{13}^4 & a_{15}^4 & \cdots & a_{1,2p-1}^4 & b_{1j}^4 \\
0 & a_{13}^6 & A+a_{15}^6 & \cdots & a_{1,2p-1}^6 & b_{1j}^6 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & a_{13}^{2p} & a_{15}^{2p} & \cdots & A+a_{1,2p-1}^{2p} & b_{1j}^{2p} \\
\hline
0 & \alpha_{13}^k & \alpha_{15}^k & \cdots & \alpha_{1,2p-1}^k & \beta_{1j}^k
\end{array}\right| = 0,\ 1 \leq j,k \leq n-2p-1. \implies$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR INGENIERIA INFORMATICA BIBLIOTECA

$$\beta_{1j}^k = 0,\ 1 \le j, k \le n - 2p - 1.$$

⋆ De la misma forma

$$\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + X_{2h-1})) = p,\ 1 \le h \le p \Longrightarrow \beta_{2h-1,j}^k = 0,\ 1 \le j, k \le n-2p-1,\ 1 \le h \le p.$$

⋆ Análogamente

$$\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + Y_i)) = p,\ 1 \le i \le n-2p-1 \Longrightarrow \gamma_{ij}^k = 0,\ 1 \le i, j, k \le n-2p-1.$$

donde

$$Ad(AX_0 + Y_i) = \left[\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & A - b_{1i}^2 & 0 & -b_{3i}^2 & 0\cdots 0 & -b_{2p-1,i}^2 & 0 & \pm c_{ij}^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -b_{1i}^4 & 0 & A - b_{3i}^4 & 0\cdots 0 & -b_{2p-1,i}^4 & 0 & \pm c_{ij}^4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\cdots\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -b_{1i}^{2p} & 0 & -b_{3i}^{2p} & 0\cdots 0 & A - b_{2p-1,i}^{2p} & 0 & \pm c_{ij}^{2p} \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0 & \pm\gamma_{ij}^k
\end{array}\right]$$

Por lo tanto, cualquier álgebra n-dimensional, con $n \ge 2p + 1$ e invariante de Goze $(2, \overset{p)}{\ldots}, 2, 1 \overset{n-2p)}{\ldots}, 1)$ es isomorfa a una cuya ley, respecto de una base adaptada $\mathcal{B}$, viene dada por

$$\left\{\begin{array}{lll}
[X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & & 1 \le i \le p, \\
[X_{2i-1}, X_{2s-1}] = \sum_{k=1}^{p} a_{2i-1,2j-1}^{2k} X_{2k} + \sum_{k=1}^{n-2p-1} \alpha_{2i-1,2j-1}^k Y_k, & & 1 \le i < j \le p, \\
[X_{2i-1}, Y_j] = \sum_{k=1}^{p} b_{2i-1,j}^{2k} X_{2k}, & 1 \le i \le p, & 1 \le j \le n - 2p - 1, \\
[Y_i, Y_j] = \sum_{k=1}^{p} c_{ij}^{2k} X_{2k}, & & 1 \le i < j \le n - 2p - 1.
\end{array}\right.$$

Se designará por q

$$q = \mathrm{rg}\left(\left(\alpha_{2r-1,2s-1}^k\right)\right),\ 1 \le r, s \le p,\ 1 \le k \le n - 2p - 1$$

Entonces, en $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ puede haber, a lo sumo, q elementos distintos de $X_{2i}, 1 \leq i \leq p$. Puesto que $q \leq \begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix}$, se tiene el resultado. $\square$

Ejemplo: Sea $\mathfrak{g}^1_{n,p}$ la familia localmente finita de álgebras de Lie cuyas leyes respecto de una base adaptada $\mathcal{B}$ han sido expresadas al principio de la sección. Estas álgebras, tienen invariante de Goze $(2, \overset{p)}{\ldots}, 2, 1 \overset{n-2p)}{\ldots}, 1)$ y además

$$\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = p + \begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(p^2 + p)$$

1.5.1 Álgebras de Lie metabelianas modelo.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie metabeliana con $\dim(\mathfrak{g}) = n$. Fijado p, se considera $\mathcal{B} = \{X_0, X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_{n-2p-1}\}$, una base adaptada de $\mathfrak{g}$. Entonces, la ley de $\mathfrak{g}$ vendrá dada, respecto de $\mathcal{B}$, por

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & & 1 \leq i \leq p, \\ [X_{2i-1}, X_{2s-1}] = \sum\limits_{k=1}^{p} a^{2k}_{2i-1,2j-1} X_{2k} + \sum\limits_{k=1}^{n-2p-1} \alpha^k_{2i-1,2j-1} Y_k, & & 1 \leq i < j \leq p, \\ [X_{2i-1}, Y_j] = \sum\limits_{k=1}^{p} b^{2k}_{2i-1,j} X_{2k}, & 1 \leq i \leq p, & 1 \leq j \leq n-2p-1, \\ [Y_i, Y_j] = \sum\limits_{k=1}^{p} c^{2k}_{ij} X_{2k}, & & 1 \leq i < j \leq n-2p-1. \end{cases}$$

Si se exige que el centro sea máximo, es decir, $\dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = n - p - 1$, se debe verificar que $Y_j \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}),\ 1 \leq j \leq n - 2p - 1$, y por lo tanto, serán

$$\begin{array}{ll} b^{2k}_{2i-1,j} = 0, & 1 \leq i, k \leq p,\ 1 \leq j \leq n - 2p - 1, \\ c^{2k}_{ij} = 0, & 1 \leq k \leq p,\ 1 \leq i < j \leq n - 2p - 1. \end{array}$$

Si nos limitamos al caso de dimensión de la derivada minimal, es decir, cuando $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = p$, se ha de tener que

$$\alpha^k_{2i-1,2j-1} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq p,\ 1 \leq k \leq n - 2p - 1$$

y la expresión de la ley del álgebra queda

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \le i \le p, \\ [X_{2i-1}, X_{2j-1}] = \sum_{k=1}^{p} c_{2i-1,2j-1}^{2k} X_{2k}, & 1 \le i \le i < j \le p. \end{cases}$$

En cualquier base adaptada existe una única álgebra de Lie metabeliana del tipo anterior, tal que el número de constantes de estructura no nulas es mínimo. Estas álgebras, que designaremos $\mathfrak{g}_{n,p}^0$, se pueden expresar siempre, salvo isomorfismo, mediante la ley

$$\mu_{n,p}^0 : \left\{ [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, \quad 1 \le i \le p. \right.$$

Es fácil comprobar que cualquier álgebra de Lie metabeliana se puede obtener como deformación de un álgebra de Lie metabeliana modelo.

1.5.2 Algebras de Lie metabelianas con derivada maximal.

Teorema 1.13 *Sea $p \in \mathbf{N}$ fijado. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie metabeliana n-dimensional, $n \ge \begin{pmatrix} p+2 \\ 2 \end{pmatrix}$, e invariante de Goze $(2, \overset{p)}{\ldots}, 2, 1 \overset{n-2p)}{\ldots}, 1)$.*
Para cada $p \in \mathbf{N}$, si $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}))$ es maximal, entonces $\mathfrak{g}$ es una extensión trivial de $\mathfrak{g}_{n,p}^1$, es decir

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n,p}^1 \oplus \mathbf{C}^{n-n_1}, \ n_1 = \begin{pmatrix} p+2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Demostración. Por la proposición 1.12, la ley de $\mathfrak{g}$ tiene la siguiente expresión respecto de $\mathcal{B}$

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \le i \le p, \\ [X_{2r-1}, X_{2s-1}] = \sum_{k=1}^{p} a_{2r-1,2s-1}^{2k} X_{2k} + \sum_{k=1}^{n-2p-1} \alpha_{2r-1,2s-1}^{k} Y_k, & 1 \le r < s \le p, \\ [X_{2r-1}, Y_j] = \sum_{k=1}^{p} b_{2r-1,j}^{2k} X_{2k}, & 1 \le r \le p, \quad 1 \le j \le n-2p-1, \\ [Y_i, Y_j] = \sum_{k=1}^{p} c_{ij}^{2k} X_{2k}, & 1 \le i < j \le n-2p-1, \end{cases}$$

Es obvio que $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}))$ es maximal siempre que

$$q = \mathrm{rg}\left(\left(\alpha^k_{2r-1,2s-1}\right)\right) = \binom{p}{2}$$

En este caso se puede efectuar el siguiente cambio de base adaptada

$$\begin{cases} X'_i &= X_i, & 0 \le i \le 2p, \\ Y'_{\left(\frac{2p-r}{2}\right)(r-1)+s-r} &= \sum\limits_{k=1}^{p} a^{2k}_{2r-1,2s-1} X_{2k} + \sum\limits_{k=1}^{n-2p-1} \alpha^k_{2r-1,2s-1} Y_k, & 1 \le r < s \le p, \\ Y_j &= Y_j, & \binom{p}{2} + 1 \le j \le n-2p-1. \end{cases}$$

obteniéndose la familia

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] &= X_{2i}, & 1 \le i \le p, \\ [X_{2r-1}, X_{2s-1}] &= Y_{\left(\frac{2p-r}{2}\right)(r-1)+s-r}, & 1 \le r < s \le p, \\ [X_{2r-1}, Y_j] &= \sum\limits_{k=1}^{p} b^{2k}_{2r-1,j} X_{2k}, & 1 \le r \le p, \quad 1 \le j \le n-2p-1, \\ [Y_i, Y_j] &= \sum\limits_{k=1}^{p} c^{2k}_{ij} X_{2k}, & 1 \le i < j \le n-2p-1, \end{cases}$$

Imponiendo, de nuevo, las condiciones $\mathrm{rg}(Ad(AX_0+Z)) = p$, se obtienen restricciones adicionales para los parámetros

- $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + X_1)) = p, \ \forall A \neq 0$

$$Ad(AX_0+X_1) = \left[\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\
-1 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & b_{1j}^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & b_{1j}^4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 \ldots 0 & 0 & b_{1j}^6 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \ldots \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots A & 0 & b_{1j}^{2p} \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \ldots \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \ldots \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{c}
X_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_6 \\ \vdots \\ \cdot \\ X_{2p} \\ \hline Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{p-1} \\ \cdot \\ \vdots \\ \cdot
\end{array}$$

Entonces, se debe verificar que

$$\begin{vmatrix}
A & 0 & 0 \ldots 0 & b_{1j}^2 \\
0 & A & 0 \ldots 0 & b_{1j}^4 \\
0 & 0 & A \ldots 0 & b_{1j}^6 \\
\vdots & \vdots & \vdots \ldots \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 \ldots A & b_{1j}^{2p} \\
0 & 1 & 0 \ldots 0 & 0
\end{vmatrix} = 0, \quad 1 \leq j \leq n{-}2p{-}1 \Longrightarrow b_{1j}^4 = 0, \ 1 \leq j \leq n{-}2p{-}1.$$

$$\begin{vmatrix} A & 0 & 0 \ldots 0 & b_{1j}^2 \\ 0 & A & 0 \ldots 0 & b_{1j}^4 \\ 0 & 0 & A \ldots 0 & b_{1j}^6 \\ \vdots & \vdots & \vdots \ldots \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots A & b_{1j}^{2p} \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad 1 \leq j \leq n{-}2p{-}1 \Longrightarrow b_{1j}^6 = 0,\ 1 \leq j \leq n{-}2p{-}1.$$

En general

$$\begin{vmatrix} A & 0 & 0 \ldots 0 \ldots 0 & b_{1j}^2 \\ 0 & A & 0 \ldots 0 \ldots 0 & b_{1j}^4 \\ 0 & 0 & A \ldots 0 \ldots 0 & b_{1j}^6 \\ \vdots & \vdots & \vdots \ldots \vdots \ldots \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots A \ldots 0 & b_{1j}^{2h} \\ \vdots & \vdots & \vdots \ldots \vdots \ldots \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 \ldots A & b_{1j}^{2p} \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \ldots 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad 1 \leq j \leq n - 2p - 1, 1 \leq h \leq p$$

$$\Longrightarrow b_{1j}^{2h} = 0,\ 2 \leq h \leq p,\ 1 \leq j \leq n - 2p - 1.$$

Es decir, $[X_1, Y_j] = b_{1j}^2 X_2, 1 \leq j \leq n - 2p - 1$.

- De la misma forma, imponiendo $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + X_{2h-1})) = p,\ 1 \leq h \leq p$, se obtiene que

$$[X_{2h-1}, Y_j] = b_{2h-1,j}^{2h} X_{2h},\ 1 \leq h \leq p,\ 1 \leq j \leq n - 2p - 1.$$

- También se debe verificar que $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + X_1 + X_{2h-1})) = p,\ 2 \leq h \leq p$ y, por lo tanto

$$\begin{vmatrix} A & 0 & 0 \ldots 0 \ldots 0 & b_{1j}^2 \\ 0 & A & 0 \ldots 0 \ldots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \ldots \vdots \ldots \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots A \ldots 0 & b_{2h-1,j}^{2h} \\ \vdots & \vdots & \vdots \ldots \vdots \ldots \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 \ldots A & 0 \\ -1 & 0 & 0 \ldots 1 \ldots 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad 1 \leq j \leq n - 2p - 1 \Longrightarrow$$

$$b^{2h}_{2h-1,j} = b^2_{1j},\ 1 \le j \le n-2p-1,\ 1 \le h \le p.$$

es decir, $[X_{2h-1}, Y_j] = b_j X_{2h}\ 1 \le h \le p,\ 1 \le j \le n-2p-1.$

- Análogamente, imponiendo $rg(Ad(AX_0 + X_1 + Y_i)) = p, 1 \le i \le n-2p-1$

$$Ad(AX_0{+}X_1{+}Y_i) = \left[\begin{array}{ccccccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-1 & A-b_i & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \pm c^2_{ij} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & A-b_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \pm c^4_{ij} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A-b_i & \cdots & 0 & 0 & \pm c^6_{ij} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & A-b_i & 0 & \pm c^{2p}_{ij} \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{c}
X_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_6 \\ \cdot \\ \vdots \\ \cdot \\ X_{2p} \\ \hline Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{p-1} \\ Y_p \\ \vdots \\ \cdot
\end{array}$$

se debe verificar que

$$\left|\begin{array}{cccccc|c}
A & 0 & 0 \ldots & 0 \ldots & 0 & & c^2_{ij} \\
0 & A & 0 \ldots & 0 \ldots & 0 & & 0 \\
0 & 0 & A \ldots & 0 \ldots & 0 & & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \ldots & \vdots \ldots & \vdots & & \\
0 & 0 & 0 \ldots & A \ldots & 0 & & c^{2h}_{ij} \\
\vdots & \vdots & \vdots \ldots & \vdots \ldots & \vdots & & \\
0 & 0 & 0 \ldots & 0 \ldots & A & & c^{2p}_{ij} \\
\hline
0 & 0 & 0 \ldots & 1 \ldots & 0 & & 0
\end{array}\right| = 0, \quad 1 \le j \le n-2p-1 \Longrightarrow$$

$$c_{ij}^{2h} = 0, \ 1 \leq i < j \leq n-2p-1, \ 2 \leq h \leq p.$$

es decir, $[Y_i, Y_j] = c_{ij}^2 X_2 \ 1 \leq i < j \leq n-2p-1$.

- Finalmente, de forma similar

$$rg(Ad(AX_0+X_3+Y_i)) = p, 1 \leq i \leq n-2p-1 \implies c_{ij}^2 = 0, \ 1 \leq i < j \leq n-2p-1.$$

En resumen, se ha obtenido que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un álgebra de ley

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq p, \\ [X_{2r-1}, X_{2s-1}] = Y_{\left(\frac{2p-r}{2}\right)(r-1)+s-r}, & 1 \leq r < s \leq p, \\ [X_{2r-1}, Y_j] = b_j X_{2r}, & 1 \leq r \leq p, \ 1 \leq j \leq n-2p-1. \end{cases}$$

Por último, las condiciones de Jacobi y un simple cambio de base proporcionan el resultado deseado.

En efecto

- $J(X_{2h-1}, X_{2h+1}, X_{2h+3}), \ h = 2k-1, \ 1 \leq k \leq p-2$:

$$[X_{2h-1}, [X_{2h+1}, X_{2h+3}]] = [[X_{2h-1}, X_{2h+1}], X_{2h+3}] + [X_{2h+1}, [X_{2h-1}, X_{2h+3}]]$$

como

$$\begin{aligned} [X_{2h+1}, X_{2h+3}] &= Y_{\frac{2p-h-1}{2}h+1} = Y_{\frac{1}{2}(2ph-h^2-h+2)} = Y_{ph-\frac{1}{2}h(h+1)+1} \\ [X_{2h-1}, X_{2h+1}] &= Y_{\frac{2p-h}{2}(h-1)+1} = Y_{\frac{1}{2}(2p(h-1)-h^2-h+2)} = Y_{p(h-1)-\frac{1}{2}h(h-1)+1} \\ [X_{2h-1}, X_{2h+3}] &= Y_{\frac{2p-h}{2}(h-1)+2} = Y_{\frac{1}{2}(2p(h-1)-h^2+h+4)} = Y_{p(h-1)-\frac{1}{2}h(h-1)+2} \end{aligned}$$

se tiene que

$$b_{ph-\frac{1}{2}h(h+1)+1} = b_{p(h-1)-\frac{1}{2}h(h-1)+1} = b_{p(h-1)-\frac{1}{2}h(h-1)+2} = 0, \ h = 2k-1, \ 1 \leq k \leq p-2$$

- $J(X_{2h-1}, X_{2h+1}, X_{2s-1}), \ 1 \leq h \leq p-2, \ h+2 < s \leq p$:

$$[X_{2h-1}, [X_{2h+1}, X_{2s-1}]] = 0 + [X_{2h+1}, [X_{2h-1}, X_{2s-1}]]$$

como

$$\begin{aligned} [X_{2h+1}, X_{2s-1}] &= Y_{\frac{2p-h-1}{2}h+(s-h-1)} = Y_{ph-\frac{1}{2}(h+1)(h+2)} \\ [X_{2h-1}, X_{2s-1}] &= Y_{\frac{2p-h}{2}(h-1)+(s-h)} = Y_{p(h-1)-\frac{1}{2}h(h+1)+s} \end{aligned}$$

se tiene que

$$b_{ph-\frac{1}{2}(h+1)(h+2)+s} = b_{p(h-1)-\frac{1}{2}h(h+1)+s} = 0, \ 1 \leq h \leq p-2$$

Resultando la familia de leyes

$$\begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq p, \\ [X_{2r-1}, X_{2s-1}] = Y_{\left(\frac{2p-r}{2}\right)(r-1)+s-r}, & 1 \leq r < s \leq p, \\ [X_{2r-1}, Y_j] = b_j X_{2r}, & 1 \leq r \leq p,\ 1 + \begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix} \leq j \leq n - 2p - 1. \end{cases}$$

Efectuando el cambio de base definido mediante

$$\begin{cases} X_i' = X_i, & 0 \leq i \leq 2p, \\ Y_j' = Y_j, & 1 \leq j \leq \begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix}, \\ Y_j' = Y_j + b_j X_0, & 1 + \begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix} \leq j \leq n - 2p - 1. \end{cases}$$

se obtiene $\mathfrak{g}_{n,p}^1$ $\square$

Capítulo 2

Álgebras de derivaciones y aplicaciones.

Se dedica este capítulo al estudio de algunas propiedades geométricas de las álgebras obtenidas en el capítulo anterior. Como se indicó en los preliminares, la clave será la determinación de los correspondientes espacios de derivaciones.

Para dimensión arbitraria n, se estudiarán los casos de invariante de Goze $(2, 2, 1 \ldots, 1)$ con $\dim \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = 3$ y el de invariante de Goze $(2, 2, 2, 1 \ldots, 1)$ con $\dim \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \in \{4, 5, 6\}$. En el caso general de las álgebras con invariante de Goze $(2, \overset{p)}{\ldots}, 2, 1 \overset{n-2p)}{\ldots}, 1)$, se determinan los espacios de derivaciones de las familias (localmente finitas) tanto de las ALM modelo, como de las álgebras con dimensión de la derivada $(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}))$ maximal.

A partir del conocimiento de $Der(\mathfrak{g})$, se hallan las dimensiones y una base del primer espacio de cohomología y las dimensiones de la órbita de cada álgebra considerada.

2.1 Introducción y preliminares

La determinación de $Der(\mathfrak{g})$ no es un problema conceptualmente difícil, pero sí de extrema complejidad en la práctica. El cálculo directo de $Der(\mathfrak{g})$ casi nunca re-

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA ★ BIBLIOTECA

sulta aconsejable, por lo que se hace necesario desarrollar otros procedimientos "ad hoc", que faciliten dichos cálculos. Nosotros vamos a determinar los correspondientes espacios de derivaciones, bien buscando una graduación adecuada (con subespacios homogéneos de dimensión suficientemente pequeña), bien determinando previamente un toro de derivaciones.

En todo lo que resta se van a considerar álgebras de Lie metabelianas $\mathfrak{g}$ de invariante de Goze $(2, \overset{p)}{\ldots}, 2, 1 \overset{n-2p)}{\ldots}, 1)$ (estudiándose aparte los casos $p = 2$ y $p = 3$). En todos los casos $\{X_0,\ X_1,\ X_2, \ldots, X_{2p},\ Y_1, \ldots, Y_{n-2p-1}\}$, designará una cierta base adaptada para cada p.

Por cuestiones de notación y de presentación y dado el elevadísimo número de derivaciones que se manejan en el capítulo, se van a considerar unas ciertas asignaciones formales entre vectores que más adelante se probará que corresponden a derivaciones para alguna o algunas de las álgebras encontradas en el capítulo 1. Se consideran a continuación las siguientes asignaciones formales, donde la notación indica que se han considerado esencialmente cuatro tipos de funciones, según se indica

$$
\begin{array}{ll}
t_{ij}: & \{X_i \to X_j, \quad 0 \leq i,j \leq 2p. \\
u_{ij}: & \{X_i \to Y_j, \quad 0 \leq i \leq 2p, 1 \leq j \leq n-2p-1. \\
v_{ij}: & \{Y_i \to X_j, \quad 0 \leq j \leq 2p, 1 \leq i \leq n-2p-1. \\
w_{ij}: & \{Y_i \to Y_j, \quad 1 \leq i,j \leq n-2p-1.
\end{array}
$$

$$
t_{p;0,0}: \begin{cases} X_0 \to X_0, \\ X_{2i} \to X_{2i}, \quad 1 \leq i \leq p, \end{cases}
$$

$$
t_{p;2i-1,0}: \begin{cases} X_{2i-1} \to X_0, \\ [X_{2i-1}, X_{2l-1}] \to X_{2l}, \quad 1 \leq l \leq p, l \neq i, \end{cases} \qquad 1 \leq i \leq p
$$

$$
t_{p;0,2i-1} \begin{cases} X_0 \to X_{2i-1} \\ X_{2l} \to [X_{2i-1}, X_{2l-1}], & \left| \begin{array}{l} 1 \leq l \leq p,\ l \neq i, \\ [X_{2i-1}, X_{2l-1}] \neq 0 \end{array} \right. \end{cases} , \quad 1 \leq i \leq p
$$

$$
t_{p;2i-1,2j-1}: \begin{cases} X_{2i-1} \to X_{2j-1} \\ X_{2i} \to X_{2j} \\ [X_{2i-1}, X_{2l-1}] \to [X_{2j-1}, X_{2l-1}], & \left| \begin{array}{l} 1 \leq l \leq p,\ l \neq i,j, \\ [X_{2i-1}, X_{2l-1}] \neq 0 \end{array} \right. \end{cases} \qquad 1 \leq i,j \leq p
$$

Para designar algunas de estas asignaciones formales será necesario incluir, además, uno o dos superíndices.

2.2 El caso $p = 2$

Se considera $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie metabeliana de dimensión $n \geq 6$, invariante de Goze $(2, 2, 1 \overset{n-4)}{\ldots}, 1)$ y $\dim \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = 3$. Entonces, según se ha demostrado en el capítulo anterior, $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un álgebra cuya ley, referida a una base adaptada, $\{X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ Y_1, \ldots, Y_{n-5}\}$, viene dada por

$$\mathfrak{g}^1_{n,2} : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_1, X_3] \quad = Y_1. \end{cases}$$

Evidentemente, si $n > 6$, estas álgebras son escindidas y, por tanto

$$\mathfrak{g}^1_{n,2} = \mathfrak{g}^1_{6,2} \ \oplus \ \mathbf{C}^{n-6}$$

y se verificará, con la notación del apartado 0.2.1, que

$$Der(\mathfrak{g}^1_{n,2}) = Der(\mathfrak{g}^1_{6,2}) \oplus Der(\mathbf{C}^{n-6}) \oplus \mathcal{D}(\mathfrak{g}^1_{6,2}, \mathbf{C}^{n-6}) \oplus \mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-6}, \mathfrak{g}^1_{6,2})$$

Se va a proceder al cálculo de cada uno de estos subespacios.

Proposición 2.1 *Una base de $Der(\mathfrak{g}^1_{6,2})$, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^1_{6,2} \ = \ & \{t_{2;0,0}\} \cup \{t_{2;2i-1,0},\ 1 \leq i \leq 2\} \cup \{t_{0,2i},\ 1 \leq i \leq 2\} \cup \{t_{2i-1,2j},\ 1 \leq i, j \leq 2\} \cup \\ & \{t_{2;0,2j-1},\ 1 \leq j \leq 2\} \cup \{t_{2;2i-1,2j-1},\ 1 \leq i, j \leq 2\} \cup \{u_{0,1}\} \cup \{u_{2i-1,1},\ 1 \leq i \leq 2\} \end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^1_{6,2})) = 18$$

Demostración. Es trivial probar que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}^1_{6,2}$. Se va a probar que no hay otras.
Se considera la siguiente graduación de $\mathfrak{g}^1_{6,2}$

$$\langle X_0 \rangle \oplus \langle X_1 \rangle \oplus \langle X_2 \rangle \oplus \langle X_3 \rangle \oplus \langle X_4 \rangle \oplus \langle Y_1 \rangle$$

donde

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_i = \langle X_{i-1} \rangle, & 1 \leq 1 \leq 5, \\ \mathfrak{g}_6 = \langle Y_1 \rangle, & \\ \mathfrak{g}_i = \{0\}, & i < 1 \text{ ó } i > 7. \end{cases}$$

Sea $d \in Der(\mathfrak{g}_{6,2}^1)$, entonces

$$\exists \ d_i, \ i \in \mathbf{Z} \quad \text{tal que} \quad d = \sum_{i \in \mathbf{Z}} d_i$$

donde

$$\begin{cases} d_i \in Der(\mathfrak{g}_{6,2}^1), \\ d_i(\mathfrak{g}_j) \subset \mathfrak{g}_{i+j}. \end{cases}$$

Como $d_i \equiv 0$ si $i < -5$ ó $i > 5$, se verificará que

$$d = \sum_{i=-5}^{5} d_i, \qquad d_i(X_j) \in \mathfrak{g}_{i+j}, \qquad 1 \leq i + j \leq 6$$

Se va a expresar cada d_i, $-5 \leq i \leq 5$, como una combinación lineal de los elementos de unos conjuntos B_i, $-5 \leq i \leq 5$, de derivaciones linealmente independientes de $\mathfrak{g}_{6,2}^1$, cumpliéndose que

$$\bigcup_{i=-5}^{5} B_i$$

es una base de $Der(\mathfrak{g}_{6,2}^1)$ y, por tanto

$$\dim(Der(\mathfrak{g}_{6,2}^1)) = \sum_{i=-5}^{5} \dim\langle B_i \rangle$$

En lo sucesivo, se designará por $\mathcal{B}_i$ a una base de $\langle B_i \rangle$ **Cálculo de** d_0.

Sea

$$d_0 : \begin{cases} X_0 \rightarrow a_0 X_0, \\ X_1 \rightarrow a_1 X_1, \\ X_2 \rightarrow a_2 X_2, \\ X_3 \rightarrow a_3 X_3, \\ X_4 \rightarrow a_4 X_4, \\ Y_1 \rightarrow b_1 Y_1. \end{cases}$$

Se verifica que

- $d_0[X_0, X_{2i-1}] = a_{2i}X_{2i} = [a_0X_0, X_{2i-1}] + [X_0, a_{2i-1}X_{2i-1}] = (a_0 + a_{2i-1})X_{2i}$

$$\Longrightarrow \; a_{2i} = a_0 + a_{2i-1}, \; 1 \leq i \leq 2$$

- $d_0[X_1, X_3] = b_1Y_1 = [a_1X_1, X_3] + [X_1, a_3X_3] = (a_1 + a_3)Y_1$

$$\Longrightarrow \; b_1 = a_1 + a_3$$

No hay más restricciones respecto a los parámetros y, por tanto, se tiene el siguiente conjunto de parámetros libres

$$P_0 = \{a_0, \; a_1, \; a_3\}$$

Una base de B_0, vendrá dada por

$$\mathcal{B}_0 = \{t_{2;0,0}; \; t_{2;1,1}; \; t_{2;3,3}\}$$

Cálculo de d_1.
Sea

$$d_1 : \begin{cases} X_0 \rightarrow a_0^1 X_1, \\ X_1 \rightarrow a_1^1 X_2, \\ X_2 \rightarrow a_2^1 X_3, \\ X_3 \rightarrow a_3^1 X_4, \\ X_4 \rightarrow a_4^1 Y_1. \end{cases}$$

Se verifica que

- $a_2^1 = 0$, por el lema 0.3.
- $d_1[X_0, X_3] = a_4^1Y_1 = [a_0^1X_1, X_3] + [X_0, a_3^1X_4] = a_0^1Y_1 \;\Longrightarrow\; a_4^1 = a_0^1$.

No hay más restricciones respecto a los parámetros y, por tanto

$$P_1 = \{a_0^1, \; a_1^1, \; a_3^1\}$$
$$\mathcal{B}_1 = \{t_{2;0,1}, \; t_{1,2}, \; t_{3,4}\}$$

Cálculo de d_2.

Sea

$$d_2 : \begin{cases} X_0 \rightarrow a_0^2 X_2, \\ X_1 \rightarrow a_1^2 X_3, \\ X_2 \rightarrow a_2^2 X_4, \\ X_3 \rightarrow a_3^2 Y_1. \end{cases}$$

Se verifica que

- $d_2[X_0, X_1] = a_2^2 X_4 = [a_0^2 X_2, X_1] + [X_0, a_1^2 X_3] = a_1^2 X_4 \implies a_2^2 = a_1^2.$

No hay más restricciones respecto a los parámetros y, por tanto

$$P_2 = \{a_0^2,\ a_1^2,\ a_3^2\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{t_{0,2},\ t_{2;1,3},\ u_{3,1}\}$$

Cálculo de d_3.

Sea

$$d_3 : \begin{cases} X_0 \rightarrow a_0^3 X_3, \\ X_1 \rightarrow a_1^3 X_4, \\ X_2 \rightarrow a_2^3 Y_1. \end{cases}$$

Se verifica que

- $d_3[X_0, X_1] = a_2^3 Y_1 = [a_0^3 X_3, X_1] + [X_0, a_1^3 X_4] = -a_0^3 X_4 \implies a_2^3 = -a_0^3.$

No hay más restricciones respecto a los parámetros y, por tanto

$$P_3 = \{a_0^3,\ a_1^3\}$$
$$\mathcal{B}_3 = \{t_{1,4},\ t_{2;0,3}\}$$

Cálculo de d_4.

Sea

$$d_4 : \begin{cases} X_0 \rightarrow a_0^4 X_4, \\ X_1 \rightarrow a_1^4 Y_1. \end{cases}$$

No hay restricciones respecto a los parámetros (lema 0.4) y, por tanto

$$P_4 = \{a_0^4,\ a_1^4\}$$
$$\mathcal{B}_4 = \{t_{0,4},\ u_{1,1}\}$$

Cálculo de d_5

Sea

$$d_5 : \left\{ X_0 \to a_0^5 Y_1. \right.$$

No hay restricciones respecto al parámetro (lema 0.4) y, por tanto

$$P_5 = \{a_0^5\}$$
$$\mathcal{B}_5 = \{u_{0,1}\}$$

Cálculo de d_{-1}

Sea

$$d_{-1} : \begin{cases} X_1 \to a_1^{-1} X_0, \\ X_2 \to a_2^{-1} X_1, \\ X_3 \to a_3^{-1} X_2, \\ X_4 \to a_4^{-1} X_3, \\ Y_1 \to b_1^{-1} X_4. \end{cases}$$

entonces se verifica que

- $a_2^{-1} = a_4^{-1} = 0$, por el lema 0.3.
- $d_{-1}[X_1, X_3] = b_1^{-1} X_4 = [a_1^{-1} X_0, X_3] + [X_1, a_3^{-1} X_2] = a_1^{-1} X_4 \implies b_1^{-1} = a_1^{-1}$.

No hay más restricciones respecto a los parámetros y, por tanto

$$P_{-1} = \{a_1^{-1},\ a_3^{-1}\}$$
$$\mathcal{B}_{-1} = \{t_{2;1,0},\ t_{3,2}\}$$

Cálculo de d_{-2}

$$d_{-2} : \begin{cases} X_2 \to a_2^{-2} X_0, \\ X_3 \to a_3^{-2} X_1, \\ X_4 \to a_4^{-2} X_2, \\ Y_1 \to b_1^{-2} X_3. \end{cases}$$

- $a_2^{-2} = b_1^{-2} = 0$, por el lema 0.3.
- $d_{-2}[X_0, X_3] = a_4^{-2} X_2 = [0, X_3] + [X_0, a_3^{-2} X_1] = a_3^{-2} X_2 \implies a_4^{-2} = a_3^{-2}$.

Por tanto

$$P_{-2} = \{a_3^{-2}\}$$
$$\mathcal{B}_{-2} = \{t_{2;3,1}\}$$

Cálculo de d_{-3}

$$d_{-3} : \begin{cases} X_3 \to a_3^{-3} X_0, \\ X_4 \to a_4^{-3} X_1, \\ Y_1 \to b_1^{-3} X_2. \end{cases}$$

- $a_4^{-3} = 0$, por el lema 0.3.
- $d_{-3}[X_1, X_3] = b_1^{-3} X_2 = [0, X_3] + [X_1, a_3^{-3} X_0] = -a_3^{-3} X_2 \implies b_1^{-3} = -a_3^{-3}$.

Por tanto

$$P_{-3} = \{a_3^{-3}\}$$
$$\mathcal{B}_{-3} = \{t_{2;3,0}\}$$

Cálculo de d_{-4}

$$d_{-4} : \begin{cases} X_4 \to a_4^{-4} X_0, \\ Y_1 \to b_1^{-4} X_1. \end{cases}$$

- $a_4^{-4} = b_1^{-4} = 0$, por el lema 0.3.

Cálculo de d_{-5}

$$d_{-5} : \left\{ Y_1 \to b_1^{-5} X_0. \right.$$

- $b_1^{-5} = 0$, por el lema 0.3.

En definitiva, se tiene el resultado. □

Nota 1:

Se verifica que

$$Ad(X_0) = t_{1,2} + t_{3,4}, \; Ad(X_1) = -t_{0,2} + u_{3,1}, \; Ad(X_3) = -t_{0,4} - u_{1,1}.$$

Nota 2:

Se tiene, trivialmente, que $Der(\mathbf{C}^{n-6}) = gl(\mathbf{C}^{n-6})$. Luego una base de $Der(\mathbf{C}^{n-6})$ vendrá dada por

$$\mathcal{B}_1 = \{w_{ij} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-6}) : \ 2 \leq i, j \leq n-5\}$$

y su dimensión es

$$\dim\left(Der(\mathbf{C}^{n-6})\right) = (n-6)^2$$

Proposición 2.2 *Una base de* $\mathcal{D}(\mathfrak{g}_{6,2}^1, \mathbf{C}^{n-6})$ *viene dada por*

$$\mathcal{B}_{12} = \{u_{0,j}, \ u_{2i-1,j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}_{6,2}^1, \mathbf{C}^{n-6}) : \ 1 \leq i \leq 2, \ 2 \leq j \leq n-5\}$$

y su dimensión es

$$\dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g}_{6,2}^1, \mathbf{C}^{n-6})) = 3 \cdot (n-6)$$

Demostración. Sea $d \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}_{6,2}^1, \mathbf{C}^{n-6})$. Puesto que

$$\mathcal{Z}(\mathbf{C}^{n-6}) = \mathbf{C}^{n-6} = \langle Y_2, \ldots, Y_{n-5}\rangle$$
$$\left[\mathfrak{g}_{6,2}^1, \mathfrak{g}_{6,2}^1\right] = \langle X_2, X_4, Y_1\rangle$$

se tiene que

$$\begin{cases} d(Y_i) = 0, & 2 \leq i \leq n-5, \\ d(X_{2i}) = 0, & 1 \leq i \leq 2, \\ d(Y_1) = 0, & \\ d(X_0) = \sum\limits_{k=2}^{n-5} c_{0,k} Y_k, & \\ d(X_{2i-1}) = \sum\limits_{k=2}^{n-5} c_{i,k} Y_k, & 1 \leq i \leq 2. \end{cases}$$

Exigiendo que d sea derivación no se obtienen restricciones respecto a los parámetros y, por tanto, se tiene el resultado. □

Proposición 2.3 *Una base de* $\mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-6}, \mathfrak{g}_{6,2}^1)$ *viene dada por*

$$\mathcal{B}_{21} = \{v_{j,2i} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-6}, \mathfrak{g}_{6,2}^1) : \ 1 \leq i \leq 3, \ 2 \leq j \leq n-5\}$$
$$\{w_{j,1} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-6}, \mathfrak{g}_{6,2}^1) : \ 2 \leq j \leq n-5\}$$

y su dimensión es

$$dim(\mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-6}, \mathfrak{g}^1_{6,2})) = 3 \cdot (n-6)$$

Demostración. Es análoga a la anterior, teniendo en cuenta que

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}^1_{6,2}) = \langle X_2, X_4, Y_1 \rangle$$
$$[\mathbf{C}^{n-6}, \mathbf{C}^{n-6}] = \{0\}$$

□

Se acaba de probar el siguiente

Teorema 2.4 *Con las notaciones anteriores, se verifica que una base de $Der(\mathfrak{g}^1_{n,2})$, viene dada por*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^1_{n,2} &= \mathcal{B}^1_{6,2} \cup \{u_{0,j},\ 2 \le j \le n-5\} \cup \{u_{2i-1,j},\ 1 \le i \le 2,\ 2 \le j \le n-5\} \cup \\ &\quad \{v_{j,2i},\ 1 \le i \le 2,\ 2 \le j \le n-5\} \cup \{w_{i,j},\ 2 \le i,j \le n-5\} \cup\end{aligned}$$
$$\{w_{j,1},\ 2 \le j \le n-5\}$$

y su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^1_{n,2})) = n^2 - 6n + 18$$

2.3 El caso $p = 3$

Se van a determinar a continuación los espacios de derivaciones de las álgebras de Lie de sucesión característica $(2, 2, 2, 1 \overset{n-6)}{\ldots}, 1)$ y dimensión de $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ mayor que 3, obtenidas en el capítulo anterior, y que se denominaron $\mathfrak{g}^i_{n,3}$, $1 \le i \le 3n - 18$.

2.3.1 Caso $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 6$

Se ha demostrado en el capítulo anterior que cualquier álgebra de Lie metabeliana de dimensión $n \ge 10$, con invariante de Goze $(2, 2, 2, 1 \overset{n-6)}{\ldots}, 1)$ y $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 6$, es isomorfa al álgebra $\mathfrak{g}^1_{n,3}$, cuya ley viene dada respecto de una base adaptada $\{X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6,\ Y_1, \ldots, Y_{n-7}\}$, por

$$\left.\begin{array}{ll} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, X_5] = Y_2, & \\ [X_3, X_5] = Y_3, & \end{array}\right\} (\mathfrak{g}^1_{n,3})$$

Evidentemente, si $n > 10$, estas álgebras son escindidas y, por tanto,

$$\mathfrak{g}^1_{n,3} = \mathfrak{g}^1_{10,3} \ \oplus \ \mathbf{C}^{n-10}$$

y se verificará, con la notación del apartado 0.2.1, que

$$Der(\mathfrak{g}^1_{n,3}) = Der(\mathfrak{g}^1_{10,3}) \oplus Der(\mathbf{C}^{n-10}) \oplus \mathcal{D}(\mathfrak{g}^1_{10,3}, \mathbf{C}^{n-10}) \oplus \mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-10}, \mathfrak{g}^1_{10,3})$$

Se va a proceder al cálculo de cada uno de estos subespacios.

Proposición 2.5 *Una base de $Der(\mathfrak{g}^1_{10,3})$, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^1_{10,3} \ = \ & \{t_{3;0,0}\} \cup \{t_{3;2i-1,0},\ 1 \leq i \leq 3\} \cup \{t_{0,2i},\ 1 \leq i \leq 3\} \cup \\ & \{t_{2i-1,2j},\ 1 \leq i,j \leq 3\} \cup \{t_{3;0,2j-1},\ 1 \leq j \leq 3\} \cup \{t_{3;2i-1,2j},\ 1 \leq i,j \leq 3\} \cup \\ & \{u_{0,j},\ 1 \leq j \leq 3\} \cup \{u_{2i-1,j},\ 1 \leq i,j \leq 3\} \end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^1_{10,3})) = 40$$

Demostración. Es trivial probar que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}^1_{10,3}$. Se va a probar que no hay otras.
Se considera la siguiente graduación de $\mathfrak{g}^1_{10,3}$

$$\langle X_0 \rangle \oplus \langle X_1 \rangle \oplus \langle X_2 \rangle \oplus \langle X_3 \rangle \oplus \langle X_4 \rangle \oplus \langle X_5, Y_1 \rangle \oplus \langle X_6 \rangle \oplus \langle Y_2 \rangle \oplus \{0\} \oplus \langle Y_3 \rangle$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIEROS DE TELECOMUNICACIÓN BIBLIOTECA

donde

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_i = \langle X_{i-1}\rangle, & 1 \leq i \leq 5, \\ \mathfrak{g}_6 = \langle X_5, Y_1\rangle, & \\ \mathfrak{g}_7 = \langle X_6\rangle, & \\ \mathfrak{g}_8 = \langle Y_2\rangle, & \\ \mathfrak{g}_9 = \{0\}, & \\ \mathfrak{g}_{10} = \langle Y_3\rangle, & \\ \mathfrak{g}_i = \{0\}, & i < 1 \text{ ó } i > 10. \end{cases}$$

Sea $d \in Der(\mathfrak{g}^1_{10,3})$, entonces

$$\exists\ d_i,\ i \in \mathbf{Z} \quad \text{tal que} \quad d = \sum_{i \in \mathbf{Z}} d_i = \sum_{i=-9}^{9} d_i$$

puesto que $d_i \equiv 0$ si $i < -9$ ó $i > 9$, donde $d_i(X_j) \in \mathfrak{g}_{i+j}$, $1 \leq i+j \leq 10$. Se va a expresar cada d_i, $-9 \leq i \leq 9$, como una combinación lineal de los elementos de unos conjuntos B_i, $-9 \leq i \leq 9$, de derivaciones linealmente independientes de $\mathfrak{g}^1_{10,3}$, cumpliéndose que $\bigcup_{i=-9}^{9} B_i$, es una base de $Der(\mathfrak{g}^1_{10,3})$ y por tanto, se verificará que

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^1_{10,3})) = \sum_{i=-9}^{9} \dim\langle B_i\rangle$$

Cálculo de d_0

$$d_0 : \begin{cases} X_i \rightarrow a_i X_i, & 0 \leq i \leq 4, \\ X_5 \rightarrow a_5 X_5 + a_{5,1} Y_1, & \\ X_6 \rightarrow a_6 X_6, & \\ Y_1 \rightarrow b_1 X_5 + b_{1,1} Y_1, & \\ Y_j \rightarrow b_{j,j} Y_j,\ 2 \leq j \leq 3. & \end{cases}$$

- $b_1 = 0$, por el lema 0.3.
- $d_0[X_0, X_{2i-1}] = [a_0 X_0, X_{2i-1}] + [X_0, a_{2i-1} X_{2i-1}] \Longrightarrow a_{2i} = a_0 + a_{2i-1}, 1 \leq i \leq 3$
- $d_0[X_1, X_3] = [a_1 X_1, X_3] + [X_1, a_3 X_3] \Longrightarrow b_{1,1} = a_1 + a_3$
- $d_0[X_1, X_5] = [a_1 X_1, X_5] + [X_1, a_5 X_5 + a_{5,1} Y_1] \Longrightarrow b_{2,2} = a_1 + a_5$

- $d_0[X_3, X_5] = [a_3X_3, X_5] + [X_3, a_5X_5 + a_{5,1}Y_1] \Longrightarrow b_{3,3} = a_3 + a_5$

No hay más restricciones respecto a los parámetros y, por tanto,

$$P_0 = \{a_0,\ a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_{5,1}\}$$
$$\mathcal{B}_0 = \{t_{3;0,0},\ t_{3;1,1},\ t_{3;3,3},\ t_{3;5,5},\ u_{5,1}\}$$

Cálculo de d_1

$$d_1 : \begin{cases} X_0 \rightarrow a_0^1 X_1, \\ X_1 \rightarrow a_1^1 X_2, \\ X_2 \rightarrow a_2^1 X_3, \\ X_3 \rightarrow a_3^1 X_4, \\ X_4 \rightarrow a_4^1 X_5 + a_{4,1}^1 Y_1, \\ X_5 \rightarrow a_5^1 X_6, \\ X_6 \rightarrow a_{6,2}^1 Y_2, \\ Y_1 \rightarrow b_1^1 X_6. \end{cases}$$

- $a_2^1 = a_4^1 = 0$, por el lema 0.3.

- $d_1[X_0, X_3] = a_{4,1}^1 Y_1 = [a_0^1 X_1, X_3] + 0 = a_0^1 Y_1 \implies a_{4,1}^1 = a_0^1$

- $d_1[X_0, X_5] = a_{6,2}^1 Y_2 = [a_0^1 X_1, X_5] + 0 = a_0^1 Y_2 \implies a_{6,2}^1 = a_0^1$

- Como $d(X_1),\ d(X_3)\ \in\ \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \implies b_1^1 = 0$.

No hay más restricciones respecto a los parámetros y, por tanto,

$$P_1 = \{a_0^1,\ a_1^1,\ a_3^1,\ a_5^1\}$$
$$\mathcal{B}_1 = \{t_{3;0,1},\ t_{1,2},\ t_{3,4},\ t_{5,6}\}$$

Nota:

El cálculo de d_j, $-9 \leq j \leq 9\ j \neq 0, 1$, se realiza por un procedimiento análogo. Una demostración detallada puede verse en el apéndice C.1. Se obtienen

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_2 &= \{t_{0,2},\ t_{3;1,3},\ t_{3;3,5},\ u_{3,1},\ u_{5,2}\}\\
\mathcal{B}_3 &= \{t_{3;0,3},\ t_{1,4},\ t_{3,6}\}\\
\mathcal{B}_4 &= \{t_{0,4},\ t_{3;1,5},\ u_{1,1},\ u_{3,2},\ u_{5,3}\}\\
\mathcal{B}_5 &= \{t_{3;0,5},\ t_{1,6},\ u_{0,1}\}\\
\mathcal{B}_6 &= \{t_{0,6},\ u_{1,2},\ u_{3,3}\}\\
\mathcal{B}_7 &= \{u_{0,2}\}\\
\mathcal{B}_8 &= \{u_{1,3}\}\\
\mathcal{B}_9 &= \{u_{0,3}\}\\
\mathcal{B}_{-1} &= \{t_{3,2},\ t_{5,4},\ t_{3;1,0}\}\\
\mathcal{B}_{-2} &= \{t_{3;3,1},\ t_{3;5,3}\}\\
\mathcal{B}_{-3} &= \{t_{5,2},\ t_{3;3,0}\}\\
\mathcal{B}_{-4} &= \{t_{3;5,1}\}\\
\mathcal{B}_{-5} &= \{t_{3;5,0}\}
\end{aligned}$$

En consecuencia, se tiene el resultado. □

Nota 1:

Se verifica que

$$\begin{aligned}
Ad(X_0) &= t_{1,2} + t_{3,4} + t_{5,6}, & Ad(X_1) &= -t_{0,2} + u_{3,1} + u_{5,2}\\
Ad(X_3) &= -t_{0,4} - u_{1,1} + u_{5,2}, & Ad(X_5) &= -t_{0,6} - u_{1,2} - u_{3,3}.
\end{aligned}$$

Nota 2:

Se tiene, trivialmente, que $Der(\mathbf{C}^{n-10}) = gl(\mathbf{C}^{n-10})$. Luego una base de $Der(\mathbf{C}^{n-10})$ vendrá dada por

$$\mathcal{B}_1 = \{w_{ij} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-10}) :\ 4 \leq i, j \leq n-7\}$$

y su dimensión es

$$\dim\left(Der(\mathbf{C}^{n-10})\right) = (n-10)^2$$

Proposición 2.6 *Una base de* $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^1_{10,3}, \mathbf{C}^{n-10})$ *viene dada por*

$$\mathcal{B}_{12} = \{u_{0,j},\ u_{2i-1,j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}^1_{10,3}, \mathbf{C}^{n-10}) :\ 1 \leq i \leq 3,\ 4 \leq j \leq n-7\}$$

y su dimensión es

$$\dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g}^1_{10,3}, \mathbf{C}^{n-10})) = 4 \cdot (n-10)$$

Demostración. Análoga al caso $p = 2$, teniendo en cuenta que

$$\mathcal{Z}(\mathbf{C}^{n-10}) = \mathbf{C}^{n-10} = \langle Y_4, \ldots, Y_{n-7} \rangle$$
$$\left[\mathfrak{g}^1_{10,3}, \mathfrak{g}^1_{10,3}\right] = \langle X_2, X_4, X_6, Y_1 \rangle$$

□

Proposición 2.7 *Una base de $\mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-10}, \mathfrak{g}^1_{10,3})$ viene dada por*

$$\mathcal{B}_{21} = \{v_{j,2i},\ w_{j,i} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-10}, \mathfrak{g}^1_{10,3}) :\ 1 \leq i \leq 3,\ 4 \leq j \leq n-7\}$$

y su dimensión es

$$dim(\mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-10}, \mathfrak{g}^1_{10,3})) = 6 \cdot (n-10)$$

Demostración. Es análoga a la anterior, teniendo en cuenta que

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}^1_{10,3}) = \langle X_2, X_4, X_6, Y_1, Y_2, Y_3 \rangle$$
$$[\mathbf{C}^{n-10}, \mathbf{C}^{n-10}] = \{0\}$$

□

Se acaba de probar el siguiente

Teorema 2.8 *Una base de $Der(\mathfrak{g}^1_{n,3})$, viene dada por*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^1_{n,3} \;=\; & \mathcal{B}^1_{10,3} \cup \{u_{0,j},\ 4 \leq j \leq n-7\} \cup \{u_{2i-1,j},\ 1 \leq i \leq 3,\ 4 \leq j \leq n-7\} \cup \\ & \cup \{v_{j,2i},\ 1 \leq i \leq 3,\ 4 \leq j \leq n-7\} \cup \{w_{i,j},\ 4 \leq i,j \leq n-7\} \cup \\ & \cup \{w_{j,i},\ 1 \leq i \leq 3,\ 4 \leq j \leq n-7\}\end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^1_{n,3})) = n^2 - 10n + 40$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR INGENIERIA INFORMATICA BIBLIOTECA

2.3.2 Caso $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 5$

Se ha demostrado en el capítulo anterior que cualquier álgebra de Lie metabeliana de dimensión $n \geq 9$ y sucesión característica $(2, 2, 2, 1 \overset{n-6)}{\ldots}, 1)$, en el caso en que $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 5$, es isomorfa a un álgebra cuya ley viene dada, respecto de una base adaptada $\{X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6,\ Y_1, \ldots, Y_{n-7}\}$, por

$$\mathfrak{g}^2_{n,3}: \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, X_5] = Y_2. & \end{cases} \qquad \mathfrak{g}^3_{n,3} \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, X_5] = Y_2, & \\ [X_3, X_5] = X_2. & \end{cases}$$

Evidentemente, si $n > 9$, estas álgebras son escindidas y por tanto

$$\mathfrak{g}^i_{n,3} = \mathfrak{g}^i_{9,3} \ \oplus \ \mathbf{C}^{n-9}, \ i = 2, 3 \implies$$

$$Der(\mathfrak{g}^i_{n,3}) = Der(\mathfrak{g}^i_{9,3}) \oplus Der(\mathbf{C}^{n-9}) \oplus \mathcal{D}(\mathfrak{g}^i_{9,3}, \mathbf{C}^{n-9}) \oplus \mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-9}, \mathfrak{g}^i_{9,3}),\ i = 2, 3$$

Con el mismo sentido que en la sección 2.1, se consideran a continuación las asignaciones formales entre vectores siguientes

$$t^1_{0,0}: \begin{cases} X_0 \to X_0, \\ X_2 \to X_2, \\ X_4 \to X_4, \\ X_5 \to X_5, \\ X_6 \to 2X_6, \\ Y_2 \to Y_2. \end{cases} \quad t^1_{0,3}: \begin{cases} X_0 \to X_3, \\ X_2 \to -Y_1, \\ X_5 \to X_1, \\ X_6 \to 2X_2. \end{cases} \quad t^1_{0,5}: \begin{cases} X_0 \to X_5, \\ X_2 \to -Y_2, \\ X_3 \to -X_1, \\ X_4 \to -2X_2. \end{cases}$$

$$t^1_{1,1}: \begin{cases} X_1 \to X_1, \\ X_2 \to X_2, \\ X_5 \to X_5, \\ X_6 \to X_6, \\ Y_1 \to Y_1, \\ Y_2 \to 2Y_2. \end{cases} \quad t^1_{1,3}: \begin{cases} X_1 \to X_3, \\ X_2 \to X_4, \\ X_5 \to -X_0, \\ Y_2 \to 2X_2. \end{cases} \quad t^1_{1,5}: \begin{cases} X_1 \to X_5, \\ X_2 \to X_6, \\ X_3 \to X_0, \\ Y_1 \to -2X_2. \end{cases}$$

$$t^1_{3,3}:\begin{cases} X_3 \to X_3, \\ X_4 \to X_4, \\ X_5 \to -X_5, \\ X_6 \to -X_6, \\ Y_1 \to Y_1, \\ Y_2 \to -Y_2. \end{cases}$$

Derivaciones de $\mathfrak{g}^2_{n,3}$

Proposición 2.9 *Una base de $Der(\mathfrak{g}^2_{9,3})$, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^2_{9,3} = {} & \{t_{3;0,0}\} \cup \{t_{3;1,0}\} \cup \{t_{0,2i},\ 1 \le i \le 3\} \cup \{t_{2i-1,2j},\ 1 \le i,j \le 3\} \cup \\ & \{t_{3;0,2j-1},\ 1 \le j \le 3\} \cup \{t_{3;2i-1,2j-1},\ 1 \le i,j \le 3\} \cup \\ & \{u_{0,j},\ 1 \le j \le 2\} \cup \{u_{2i-1,j},\ 1 \le i \le 3,\ 1 \le j \le 2\} \end{aligned}$$

y su dimensión

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^2_{9,3})) = 34$$

Demostración. Es trivial probar que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}^2_{9,3}$. Se va a probar que no hay otras.
Se considera la siguiente graduación de $\mathfrak{g}^2_{9,3}$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} \langle X_0\rangle & \oplus & \langle X_1\rangle & \oplus & \langle X_2\rangle & \oplus & \langle X_3\rangle & \oplus & \langle X_4\rangle & \oplus & \langle Y_1\rangle & \oplus & \langle X_5\rangle & \oplus & \langle X_6\rangle & \oplus & \langle Y_2\rangle \\ \mathfrak{g}_1 & \oplus & \mathfrak{g}_2 & \oplus & \mathfrak{g}_3 & \oplus & \mathfrak{g}_4 & \oplus & \mathfrak{g}_5 & \oplus & \mathfrak{g}_6 & \oplus & \mathfrak{g}_7 & \oplus & \mathfrak{g}_8 & \oplus & \mathfrak{g}_9 \end{array}$$

Sea $d \in Der(\mathfrak{g}^2_{9,3})$, entonces

$$\exists\ d_i,\ i \in \mathbf{Z} \quad \text{tal que} \quad d = \sum_{i\in\mathbf{Z}} d_i = \sum_{i=-8}^{8} d_i$$

puesto que $d_i \equiv 0$ si $i < -8$ ó $i > 8$, donde $d_i(X_j) \in \mathfrak{g}_{i+j}$, $1 \le i + j \le 9$.

El cálculo de d_i, $-8 \le i \le 8$, es análogo al de los casos anteriores y puede verse en el apéndice C.2. $\square$

Nota 1:

Se verifica que

$$Ad(X_0) = t_{1,2} + t_{3,4} + t_{5,6}, \quad Ad(X_1) = -t_{0,2} + u_{3,1} + u_{5,2}$$
$$Ad(X_3) = -t_{0,4} - u_{1,1}, \qquad Ad(X_5) = -t_{0,6} - u_{1,2}.$$

Nota 2:

Se tiene, trivialmente, que $Der(\mathbf{C}^{n-9}) = gl(\mathbf{C}^{n-9})$. Luego una base de $Der(\mathbf{C}^{n-9})$ vendrá dada por

$$\mathcal{B}_1 = \{w_{i,j} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-9}) : \ 3 \leq i, j \leq n-7\}$$

y su dimensión es

$$\dim\left(Der(\mathbf{C}^{n-9})\right) = (n-9)^2$$

Proposición 2.10 *Una base de $\mathcal{D}(\mathfrak{g}_{9,3}^2, \mathbf{C}^{n-9})$ viene dada por*

$$\mathcal{B}_{12} = \{u_{0,j}, \ u_{2i-1,j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}_{9,3}^2, \mathbf{C}^{n-9}) : \ 1 \leq i \leq 3, \ 3 \leq j \leq n-7\}$$

y su dimensión es

$$\dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g}_{9,3}^2, \mathbf{C}^{n-9})) = 4 \cdot (n-9)$$

Demostración. Análoga al caso $p = 2$, teniendo en cuenta que

$$\mathcal{Z}(\mathbf{C}^{n-9}) = \mathbf{C}^{n-9} = \langle Y_3, Y_4, \ldots, Y_{n-7}\rangle$$
$$\left[\mathfrak{g}_{9,3}^2, \mathfrak{g}_{9,3}^2\right] = \langle X_2, X_4, X_6, Y_1, Y_2\rangle$$

□

Proposición 2.11 *Una base de $\mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-9}, \mathfrak{g}_{9,3}^2)$ viene dada por*

$$\mathcal{B}_{21} = \{v_{j,2i}, \ w_{j,1}, \ w_{j,2} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-9}, \mathfrak{g}_{9,3}^2) : \ 1 \leq i \leq 3, \ 3 \leq j \leq n-7\}$$

y su dimensión es

$$dim(\mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-9}, \mathfrak{g}_{9,3}^2)) = 5 \cdot (n-9)$$

Demostración. Es análoga a la anterior, teniendo en cuenta que

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_{9,3}^2) = \langle X_2, X_4, X_6, Y_1, Y_2\rangle$$
$$[\mathbf{C}^{n-9}, \mathbf{C}^{n-9}] = \{0\}$$

□

Se acaba de probar el siguiente

Teorema 2.12 *Una base de* $Der(\mathfrak{g}^2_{n,3})$*, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^2_{n,3} &= \mathcal{B}^2_{9,3} \cup \{u_{0,j},\ 3 \leq j \leq n-7\} \cup \{u_{2i-1,j},\ 1 \leq i \leq 3,\ 3 \leq j \leq n-7\} \cup \\ &\cup\ \{v_{j,2i},\ 1 \leq i \leq 3,\ 3 \leq j \leq n-7\} \cup \{w_{i,j},\ 3 \leq i,j \leq n-7\} \cup \\ &\cup\ \{w_{j,1},\ w_{j,2},\ 3 \leq j \leq n-7\} \end{aligned}$$

y su dimensión

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^2_{n,3})) = n^2 - 9n + 34$$

Derivaciones de $\mathfrak{g}^3_{n,3}$

Proposición 2.13 *Una base de* $Der(\mathfrak{g}^3_{9,3})$*, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^3_{9,3} &= \{t^1_{0,0},\ t_{3;1,0}\} \cup \{t_{0,2i},\ 1 \leq i \leq 3\} \cup \{t_{2i-1,2j},\ 1 \leq i,j \leq 3\} \cup \\ &\quad \{t_{3;0,1},\ t^1_{0,3},\ t^1_{0,5},\ t^1_{1,1},\ t^1_{1,3},\ t^1_{1,5},\ t^1_{3,3},\ t_{3;3,5},\ t_{3;5,3}\} \cup \\ &\quad \{u_{0,j},\ 1 \leq j \leq 2\} \cup \{u_{2i-1,j},\ 1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq j \leq 2\} \end{aligned}$$

y su dimensión

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^3_{9,3})) = 31$$

Demostración. Es trivial probar que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}^3_{9,3}$. Se va a probar que no hay otras.
Se considera la siguiente graduación de $\mathfrak{g}^3_{9,3}$

$$\begin{array}{cccccccccc} \langle X_3\rangle \oplus & \langle X_4\rangle \oplus & \langle Y_1\rangle \oplus & \langle X_0\rangle \oplus & \langle X_1\rangle \oplus & \langle X_2\rangle \oplus & \{0\} \oplus & \langle X_5\rangle \oplus & \langle X_6\rangle \oplus & \langle Y_2\rangle \\ \mathfrak{g}_{-2} \oplus & \mathfrak{g}_{-1} \oplus & \mathfrak{g}_0 \oplus & \mathfrak{g}_1 \oplus & \mathfrak{g}_2 \oplus & \mathfrak{g}_3 \oplus & \mathfrak{g}_4 \oplus & \mathfrak{g}_5 \oplus & \mathfrak{g}_6 \oplus & \mathfrak{g}_7 \end{array}$$

Sea $d \in Der(\mathfrak{g}^3_{9,3})$, entonces

$$d = \sum_{i=-9}^{9} d_i$$

con $d_i(X_j) \in \mathfrak{g}_{i+j}$, $-2 \leq i+j \leq 7$.

El cálculo de d_i, $-9 \leq i \leq 9$, es análogo al de los casos anteriores y puede verse en el apéndice C.3. □

Nota: Se verifica que

$$\begin{aligned} Ad(X_0) &= t_{1,2} + t_{3,4} + t_{5,6}, & Ad(X_1) &= -t_{0,2} + u_{3,1} + u_{5,2} \\ Ad(X_3) &= -t_{0,4} - u_{1,1} + t_{5,2}, & Ad(X_5) &= -t_{0,6} - u_{1,2} - t_{3,2}. \end{aligned}$$

Teorema 2.14 *Una base de $Der(\mathfrak{g}^3_{n,3})$, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^3_{n,3} &= \mathcal{B}^3_{9,3} \cup \{u_{0,j},\ 3 \leq j \leq n-7\} \cup \{u_{2i-1,j},\ 1 \leq i \leq 3,\ 3 \leq j \leq n-7\} \cup \\ &\cup \ \{v_{j,2i},\ 1 \leq i \leq 3,\ 3 \leq j \leq n-7\} \cup \{w_{i,j},\ 3 \leq i,j \leq n-7\} \cup \\ &\cup \ \{w_{j,1},\ w_{j,2},\ 3 \leq j \leq n-7\} \end{aligned}$$

y su dimensión

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^3_{n,3})) = n^2 - 9n + 31$$

Demostración. Análoga al caso $p = 2$ $\square$

2.3.3 Caso $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 4$

Se ha demostrado en el capítulo anterior que cualquier álgebra de Lie metabeliana de dimensión $n \geq 8$ y sucesión característica $(2,2,2,1 \overset{n-6)}{\ldots}, 1)$, en el caso en que $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 4$, es isomorfa a un álgebra cuya ley viene dada, respecto de una base adaptada $\{X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6,\ Y_1, \ldots, Y_{n-7}\}$, por

$$\mu^i_{n,3},\ 4 \leq i \leq 6; \qquad \mu^{j,r}_{n,3},\ 0 \leq r \leq r_j,\ 1 \leq j \leq 6$$

donde

$$r_1 = \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor,\ r_2 = r_3 = \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor,\ r_4 = r_5 = \left\lfloor \frac{n-10}{2} \right\rfloor,\ r_6 = \left\lfloor \frac{n-11}{2} \right\rfloor$$

En lo que sigue se van a considerar las siguientes asignaciones formales entre vectores de $\mathfrak{g}$, además de las ya definidas anteriormente.

$$t^2_{0,0}\colon \begin{cases} X_0 \to X_0, \\ X_2 \to X_2, \\ X_4 \to X_4, \\ X_5 \to X_5, \\ X_6 \to 2X_6. \end{cases} \qquad \bar{t}_{1,(0,5)}\colon \begin{cases} X_1 \to X_0 + X_5, \\ X_2 \to X_6, \\ Y_1 \to X_4. \end{cases} \qquad t^1_{1,0}\colon \begin{cases} X_1 \to X_0, \\ X_3 \to X_5, \\ X_4 \to X_6, \\ Y_1 \to 2X_4. \end{cases}$$

$$\bar{t}_{1,(0,n-7)}\colon\begin{cases} X_1 \to X_0 + Y_{n-7}, \\ Y_1 \to X_4. \end{cases} \qquad t^2_{1,0}\colon\begin{cases} X_1 \to X_0, \\ X_5 \to -Y_{n-7}, \\ Y_1 \to X_4. \end{cases}$$

$$\bar{t}_{3,(0,n-7)}\colon\begin{cases} X_3 \to X_0 + Y_{n-7}, \\ Y_1 \to -X_2. \end{cases} \qquad t^1_{3,0}\colon\begin{cases} X_3 \to X_0, \\ X_5 \to -Y_{n-8}, \\ Y_1 \to -X_2. \end{cases} \qquad \bar{t}_{3,(0,n-8)}\colon\begin{cases} X_3 \to X_0 + Y_{n-8}, \\ Y_1 \to -X_2. \end{cases}$$

$$t^1_{0,0,r}\colon\begin{cases} X_0 \to X_0, & \\ X_{2i} \to X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ Y_{2k+1} \to Y_{2k+1}, & 1 \le k \le r. \end{cases} \qquad t^2_{0,0,r}\colon\begin{cases} X_0 \to X_0, & \\ X_{2i} \to X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ Y_{2k+1} \to Y_{2k+1}, & 1 \le k \le r, \\ Y_{n-7} \to Y_{n-7}. & \end{cases}$$

$$t^3_{0,0,r}\colon\begin{cases} X_0 \to X_0, & \\ X_{2i} \to X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ Y_{2k+1} \to Y_{2k+1}, & 1 \le k \le r, \\ Y_{n-8} \to Y_{n-8}, & \\ Y_{n-7} \to Y_{n-7}. & \end{cases} \qquad t^4_{0,0,r}\colon\begin{cases} X_0 \to X_0, & \\ X_{2i} \to X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ Y_{2k+1} \to Y_{2k+1}, & 1 \le k \le r, \\ Y_{n-9} \to Y_{n-9}, & \\ Y_{n-8} \to Y_{n-8}, & \\ Y_{n-7} \to Y_{n-7}. & \end{cases}$$

$$t^1_{0,1}\colon\begin{cases} X_0 \to X_1, \\ X_4 \to Y_1, \\ X_5 \to X_3, \\ X_6 \to 2X_4. \end{cases} \qquad t^2_{0,1}\colon\begin{cases} X_0 \to X_1, \\ X_4 \to Y_1, \\ Y_{n-7} \to -X_5. \end{cases}$$

$$t^2_{0,3}\colon\begin{cases} X_0 \to X_3, \\ X_2 \to -Y_1, \\ X_5 \to -X_3, \\ X_6 \to -X_4. \end{cases} \qquad t^3_{0,3}\colon\begin{cases} X_0 \to X_3, \\ X_2 \to -Y_1, \\ X_5 \to X_1, \\ X_6 \to 2X_2. \end{cases} \qquad t^4_{0,3}\colon\begin{cases} X_0 \to X_3, \\ X_2 \to -Y_1, \\ Y_{n-8} \to -X_5. \end{cases}$$

$$t^2_{0,5}\colon\begin{cases} X_0 \to X_5, \\ X_2 \to -X_2, \\ X_5 \to -X_5, \\ X_6 \to -X_6. \end{cases} \qquad t^3_{0,5}\colon\begin{cases} X_0 \to X_5, \\ X_2 \to -X_4, \\ X_4 \to -X_2, \\ X_5 \to X_0. \end{cases}$$

$$t^4_{0,5}\colon\begin{cases} X_0 \to X_5, \\ Y_{n-7} \to -X_5. \end{cases} \qquad t^5_{0,5}\colon\begin{cases} X_0 \to X_5, \\ Y_{n-8} \to -X_5. \end{cases} \qquad t^6_{0,5}\colon\begin{cases} X_0 \to X_5, \\ Y_{n-9} \to -X_5. \end{cases}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIEROS INFORMÁTICA BIBLIOTECA

$$t_{1,1}^2\colon\begin{cases} X_1 \to X_1, \\ X_2 \to X_2, \\ X_5 \to -X_5, \\ X_6 \to -X_6, \\ Y_1 \to Y_1. \end{cases} \qquad t_{1,1}^3\colon\begin{cases} X_1 \to X_1, \\ X_2 \to X_2, \\ X_3 \to X_3, \\ X_4 \to X_4, \\ Y_1 \to 2Y_1. \end{cases} \qquad t_{1,1}^4\colon\begin{cases} X_1 \to X_1, \\ X_2 \to X_2, \\ Y_1 \to Y_1, \\ Y_{n-7} \to Y_{n-7}. \end{cases}$$

$$t_{1,3}^2\colon\begin{cases} X_1 \to X_3, \\ X_2 \to X_4, \\ X_3 \to X_0, \\ X_4 \to X_2. \end{cases} \qquad t_{1,3}^3\colon\begin{cases} X_1 \to X_3, \\ X_2 \to X_4, \\ Y_{n-8} \to -Y_{n-7}. \end{cases}$$

$$t_{1,5}^2\colon\begin{cases} X_1 \to X_5, \\ X_2 \to X_6, \\ X_3 \to X_0, \\ Y_1 \to -2X_2. \end{cases} \qquad t_{1,5}^3\colon\begin{cases} X_1 \to X_5, \\ X_2 \to X_6, \\ Y_{n-8} \to -Y_{n-7}. \end{cases} \qquad t_{1,5}^4\colon\begin{cases} X_1 \to X_5, \\ X_2 \to X_6, \\ Y_{n-9} \to -Y_{n-7}. \end{cases}$$

$$t_{3,1}^1\colon\begin{cases} X_3 \to X_1, \\ X_4 \to X_2, \\ Y_{n-7} \to -Y_{n-8}. \end{cases} \qquad t_{3,3}^2\colon\begin{cases} X_3 \to X_3, \\ X_4 \to X_4, \\ X_5 \to X_5, \\ X_6 \to X_6, \\ Y_1 \to Y_1. \end{cases} \qquad t_{3,3}^3\colon\begin{cases} X_3 \to X_3, \\ X_4 \to X_4, \\ Y_1 \to Y_1, \\ Y_{n-7} \to Y_{n-7}. \end{cases}$$

$$t_{3,5}^1\ \colon\begin{cases} X_3 \to X_5, \\ X_4 \to X_6, \\ Y_{n-9} \to -Y_{n-8}. \end{cases} \qquad t_{5,5,r}^1\colon\begin{cases} X_5 \to X_5, \\ X_6 \to X_6, \\ Y_{2k+1} \to Y_{2k+1}, \quad 1 \leq k \leq r. \end{cases}$$

$$t_{5,5,r}^2\colon\begin{cases} X_5 \to X_5, \\ X_6 \to X_6, \\ Y_{2k+1} \to Y_{2k+1}, \quad 1 \leq k \leq r, \\ Y_{n-7} \to Y_{n-7}. \end{cases} \qquad t_{5,5,r}^3\colon\begin{cases} X_5 \to X_5, \\ X_6 \to X_6, \\ Y_{2k+1} \to Y_{2k+1}, \quad 1 \leq k \leq r, \\ Y_{n-8} \to Y_{n-8}, \\ Y_{n-7} \to Y_{n-7}. \end{cases}$$

$$u^1_{0,2k}\colon\begin{cases} X_0 \to Y_{2k}, \\ Y_{2k+1} \to -X_5. \end{cases} \quad 1 \le k \le r \quad u^1_{0,2k+1}\colon\begin{cases} X_0 \to Y_{2k+1}, \\ Y_{2k} \to X_5. \end{cases} \quad 1 \le k \le r$$

$$u^2_{0,2k}\colon\begin{cases} X_0 \to Y_{2k}, \\ Y_{2k+1} \to -X_5, \\ Y_{n-7} \to -Y_{2k}. \end{cases} \quad 1 \le k \le r \quad u^2_{0,2k+1}\colon\begin{cases} X_0 \to Y_{2k+1}, \\ Y_{2k} \to X_5, \\ Y_{n-7} \to -Y_{2k+1}. \end{cases} \quad 1 \le k \le r$$

$$u^3_{0,2k}\colon\begin{cases} X_0 \to Y_{2k}, \\ Y_{2k+1} \to -X_5, \\ Y_{n-8} \to -Y_{2k}. \end{cases} \quad 1 \le k \le r \quad u^3_{0,2k+1}\colon\begin{cases} X_0 \to Y_{2k+1}, \\ Y_{2k} \to X_5, \\ Y_{n-8} \to -Y_{2k+1}. \end{cases} \quad 1 \le k \le r$$

$$u^4_{0,2k}\colon\begin{cases} X_0 \to Y_{2k}, \\ Y_{2k+1} \to -X_5, \\ Y_{n-9} \to -Y_{2k}. \end{cases} \quad 1 \le k \le r \quad u^4_{0,2k+1}\colon\begin{cases} X_0 \to Y_{2k+1}, \\ Y_{2k} \to X_5, \\ Y_{n-9} \to -Y_{2k+1}. \end{cases} \quad 1 \le k \le r$$

$$u^1_{0,n-9,r}\colon\begin{cases} X_0 \to Y_{n-9}, \\ X_6 \to -X_6, \\ Y_{2k+1} \to -Y_{2k+1}, \quad 1 \le k \le r, \\ Y_{n-9} \to -Y_{n-9}, \\ Y_{n-8} \to -Y_{n-8}, \\ Y_{n-7} \to -Y_{n-7}. \end{cases}$$

$$u^1_{0,n-8}\colon\begin{cases} X_0 \to Y_{n-8}, \\ X_4 \to -X_6. \end{cases} \qquad u^1_{0,n-8,r}\colon\begin{cases} X_0 \to Y_{n-8}, \\ X_6 \to -X_6, \\ Y_{2k+1} \to -Y_{2k+1}, \quad 1 \le k \le r \\ Y_{n-8} \to -Y_{n-8}, \\ Y_{n-7} \to -Y_{n-7}. \end{cases}$$

$$u^1_{0,n-7}\colon\begin{cases} X_0 \to Y_{n-7}, \\ X_2 \to -X_6. \end{cases} \qquad u^1_{0,n-7,r}\colon\begin{cases} X_0 \to Y_{n-7}, \\ X_6 \to -X_6, \\ Y_{2k+1} \to -Y_{2k+1}, \quad 1 \le k \le r \\ Y_{n-7} \to -Y_{n-7}. \end{cases}$$

$$u^1_{1,2k}:\begin{cases} X_1 \to Y_{2k}, \\ Y_{2k+1} \to -Y_{n-7}. \end{cases} \quad 1 \leq k \leq r \quad u^1_{1,2k+1}:\begin{cases} X_1 \to Y_{2k+1}, \\ Y_{2k} \to Y_{n-7}. \end{cases} \quad 1 \leq k \leq r$$

$$u^1_{3,2k}:\begin{cases} X_3 \to Y_{2k}, \\ Y_{2k+1} \to -Y_{n-8}. \end{cases} \quad 1 \leq k \leq r \quad u^1_{3,2k+1}:\begin{cases} X_3 \to Y_{2k+1}, \\ Y_{2k} \to Y_{n-8}. \end{cases} \quad 1 \leq k \leq r$$

$$u^1_{5,2k}:\begin{cases} X_5 \to Y_{2k}, \\ Y_{2k+1} \to -Y_{n-7}. \end{cases} \quad 1 \leq k \leq r \quad u^1_{5,2k+1}:\begin{cases} X_5 \to Y_{2k+1}, \\ Y_{2k} \to Y_{n-7}. \end{cases} \quad 1 \leq k \leq r$$

$$u^2_{5,2k}:\begin{cases} X_5 \to Y_{2k}, \\ Y_{2k+1} \to -Y_{n-8}. \end{cases} \quad 1 \leq k \leq r \quad u^2_{5,2k+1}:\begin{cases} X_5 \to Y_{2k+1}, \\ Y_{2k} \to Y_{n-8}. \end{cases} \quad 1 \leq k \leq r$$

$$u^3_{5,2k}:\begin{cases} X_5 \to Y_{2k}, \\ Y_{2k+1} \to -Y_{n-9}. \end{cases} \quad 1 \leq k \leq r \quad u^3_{5,2k+1}:\begin{cases} X_5 \to Y_{2k+1}, \\ Y_{2k} \to Y_{n-9}. \end{cases} \quad 1 \leq k \leq r$$

$$u^1_{1,n-9}:\begin{cases} X_1 \to Y_{n-9}, \\ X_5 \to Y_{n-7}. \end{cases} \qquad u^1_{3,n-9}:\begin{cases} X_3 \to Y_{n-9}, \\ X_5 \to Y_{n-8}. \end{cases}$$

$$u^1_{1,n-8}:\begin{cases} X_1 \to Y_{n-8}, \\ Y_1 \to -X_6. \end{cases} \qquad u^2_{1,n-8}:\begin{cases} X_1 \to Y_{n-8}, \\ X_5 \to Y_{n-7}. \end{cases}$$

$$u^1_{3,n-7}:\begin{cases} X_3 \to Y_{n-7}, \\ Y_1 \to X_6. \end{cases}$$

$$w^1_{2k,2j}:\begin{cases} Y_{2k} \to Y_{2j}, \\ Y_{2j+1} \to -Y_{2k+1}. \end{cases} \quad 1 \leq k,j \leq r. \quad w^1_{2k,2j+1}:\begin{cases} Y_{2k} \to Y_{2j+1}, \\ Y_{2j} \to Y_{2k+1}. \end{cases} \quad 1 \leq k,j \leq r.$$

$$w^1_{2k+1,2j}:\begin{cases} Y_{2k+1} \to Y_{2j}, \\ Y_{2j+1} \to Y_{2k+1}. \end{cases} \quad 1 \leq k,j \leq r.$$

2.3.4 Derivaciones de $\mathfrak{g}^i_{n,3}$, $i = 4, 5, 6$.

$$\mathfrak{g}^4_{n,3} : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, \\ [X_1, X_3] = Y_1, \\ [X_1, X_5] = X_2. \end{cases} \quad \mathfrak{g}^5_{n,3} : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, \\ [X_1, X_3] = Y_1, \\ [X_1, X_5] = X_4. \end{cases} \quad \mathfrak{g}^6_{n,3} : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, \\ [X_1, X_3] = Y_1, \\ [X_1, X_5] = X_4, \\ [X_3, X_5] = X_2. \end{cases}$$

Evidentemente, si $n > 8$, estas álgebras son escindidas y por tanto

$$\mathfrak{g}^i_{n,3} = \mathfrak{g}^i_{8,3} \oplus \mathbf{C}^{n-8}, \; i = 4, 5, 6 \Longrightarrow$$

$$Der(\mathfrak{g}^i_{n,3}) = Der(\mathfrak{g}^i_{8,3}) \oplus Der(\mathbf{C}^{n-8}) \oplus \mathcal{D}(\mathfrak{g}^i_{8,3}, \mathbf{C}^{n-8}) \oplus \mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-8}, \mathfrak{g}^i_{8,3}), \; i = 4, 5, 6$$

$\boxed{\textbf{Derivaciones de } \mathfrak{g}^4_{n,3}}$

Proposición 2.15 *Una base de $Der(\mathfrak{g}^4_{8,3})$, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^4_{8,3} \;\; = \;\; & \{t^2_{0,0}, \; \bar{t}_{1,(0,5)}\} \cup \{t_{0,2i}, \; 1 \leq i \leq 3\} \cup \{t_{2i-1,2j}, \; 1 \leq i, j \leq 3\} \cup \\ & \{t_{3;0,1}, \; t^2_{0,3}, \; t^2_{0,5}\} \cup \{t_{3;2i-1,2i-1}, \; 1 \leq i \leq 3\} \cup \{u_{0,1}, \; u_{1,1}, \; u_{3,1}, \; u_{5,1}\} \end{aligned}$$

y, su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^4_{8,3})) = 24$$

Demostración. Es trivial probar que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}^4_{8,3}$. Se va a probar que no hay otras.
Se considera la siguiente graduación de $\mathfrak{g}^4_{8,3}$

$$\begin{array}{ccccccc} \langle X_1 \rangle \oplus & \langle X_2 \rangle \oplus & \langle X_0, X_5 \rangle \oplus & \langle X_6 \rangle \oplus & \langle Y_1 \rangle \oplus & \langle X_3 \rangle \oplus & \langle X_4 \rangle \\ \mathfrak{g}_{-1} \oplus & \mathfrak{g}_0 \oplus & \mathfrak{g}_1 \oplus & \mathfrak{g}_2 \oplus & \mathfrak{g}_3 \oplus & \mathfrak{g}_4 \oplus & \mathfrak{g}_5 \end{array}$$

Sea $d \in Der(\mathfrak{g}^4_{8,3})$, entonces

$$\exists \; d_i, \; i \in \mathbf{Z} \quad \text{tal que} \quad d = \sum_{i \in \mathbf{Z}} d_i = \sum_{i=-6}^{6} d_i$$

puesto que $d_i \equiv 0$ si $i < -6$ ó $i > 6$, donde $d_i(X_j) \in \mathfrak{g}_{i+j}$, $-1 \leq i + j \leq 5$.
De forma análoga a los casos anteriores, se obtiene una base de $Der(\mathfrak{g}^4_{8,3})$ y puede verse con más detalle en el apéndice C.4 $\square$

Nota: Se verifica que

$$\begin{array}{ll} Ad(X_0) = t_{1,2} + t_{3,4} + t_{5,6}, & Ad(X_1) = -t_{0,2} + t_{5,2} + u_{3,1} \\ Ad(X_3) = -t_{0,4} - u_{1,1}, & Ad(X_5) = -t_{0,6} - u_{1,1}. \end{array}$$

Teorema 2.16 *Una base de $Der(\mathfrak{g}^4_{n,3})$, viene dada por*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}^4_{n,3} & = & \mathcal{B}^4_{8,3} \cup \{u_{0,j},\ 2 \leq j \leq n-7\} \cup \{u_{2i-1,j},\ 1 \leq i \leq 3,\ 2 \leq j \leq n-7\} \cup \\ & \cup & \{v_{j,2i},\ 1 \leq i \leq 3,\ 2 \leq j \leq n-7\} \cup \{w_{i,j},\ 2 \leq i,j \leq n-7\} \cup \\ & \cup & \{w_{j,1},\ 2 \leq j \leq n-7\} \end{array}$$

y, su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^4_{n,3})) = n^2 - 8n + 24$$

Demostración. Análoga a los casos anteriores. □

Derivaciones de $\mathfrak{g}^5_{n,3}$

Proposición 2.17 *Una base de $Der(\mathfrak{g}^5_{8,3})$, viene dada por*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}^5_{8,3} & = & \{t^2_{0,0},\ t^1_{1,0},\ t_{3;3,0}\} \cup \{t_{0,2i},\ 1 \leq i \leq 3\} \cup \{t_{2i-1,2j},\ 1 \leq i,j \leq 3\} \cup \\ & & \{t^1_{0,1},\ t_{3;0,3},\ t_{3;0,5},\ t^2_{1,1},\ t_{3;1,3},\ t_{3;1,5},\ t^2_{3,3}\} \cup \{u_{0,1},\ u_{1,1},\ u_{3,1},\ u_{5,1}\} \end{array}$$

y su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^5_{8,3})) = 26$$

Demostración. Es trivial probar que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}^5_{8,3}$. Se va a probar que no hay otras.
Se considera la siguiente graduación de $\mathfrak{g}^5_{8,3}$

$$\begin{array}{cccccccc} \langle X_1\rangle \oplus & \langle X_2\rangle \oplus & \langle X_0\rangle \oplus & \langle Y_1\rangle \oplus & \langle X_3\rangle \oplus & \langle X_4\rangle \oplus & \langle X_5\rangle \oplus & X_6 \\ \mathfrak{g}_{-1} \oplus & \mathfrak{g}_0 \oplus & \mathfrak{g}_1 \oplus & \mathfrak{g}_2 \oplus & \mathfrak{g}_3 \oplus & \mathfrak{g}_4 \oplus & \mathfrak{g}_5 \oplus & \mathfrak{g}_6 \end{array}$$

Sea $d \in Der(\mathfrak{g}_{8,3}^5)$, entonces

$$\exists\ d_i,\ i \in \mathbf{Z} \quad \text{tal que} \quad d = \sum_{i\in\mathbf{Z}} d_i = \sum_{i=-7}^{7} d_i$$

puesto que $d_i \equiv 0$ si $i < -7$ ó $i > 7$, donde $d_i(X_j) \in \mathfrak{g}_{i+j}$, $-1 \leq i+j \leq 6$. De forma análoga a los casos anteriores, se obtiene una base de $Der(\mathfrak{g}_{8,3}^5)$. La demostración puede verse en el apéndice C.5. $\square$

Nota: Se verifica que

$$\begin{aligned} Ad(X_0) &= t_{1,1} + t_{3,4} + t_{5,6}, & Ad(X_1) &= -t_{0,1} + t_{5,4} + u_{3,1} \\ Ad(X_3) &= -t_{0,4} - u_{1,1}, & Ad(X_5) &= -t_{0,6} - u_{1,2}. \end{aligned}$$

Teorema 2.18 *Una base de $Der(\mathfrak{g}_{n,3}^5)$, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{n,3}^5 &= \mathcal{B}_{8,3}^5 \cup \{u_{0,j},\ 2 \leq j \leq n-7\} \cup \{u_{2i-1,j},\ 1 \leq i \leq 3,\ 2 \leq j \leq n-7\} \cup \\ &\cup \ \{v_{j,2i},\ 1 \leq i \leq 3,\ 2 \leq j \leq n-7\} \cup \{w_{i,j},\ 2 \leq i,j \leq n-7\} \cup \\ &\cup \ \{w_{j,1},\ 2 \leq j \leq n-7\} \end{aligned}$$

y, su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}_{n,3}^5)) = n^2 - 8n + 26$$

Demostración. Análoga a los casos anteriores. $\square$

$\boxed{\textbf{Derivaciones de } \mathfrak{g}_{n,3}^6}$

Proposición 2.19 *Una base de $Der(\mathfrak{g}_{8,3}^6)$, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{8,3}^6 \ = \ &\{t_{0,0}^2,\ t_{1,0}^1\} \cup \{t_{0,2i},\ 1 \leq i \leq 3\} \cup \{t_{2i-1,2j},\ 1 \leq i,j \leq 3\} \cup \\ &\{t_{0,1}^1,\ t_{0,3}^2,\ t_{0,5}^3,\ t_{1,1}^3,\ t_{1,3}^2,\ t_{1,5}^2\} \cup \{u_{0,1},\ u_{1,1},\ u_{3,1},\ u_{5,1}\} \end{aligned}$$

y, su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}_{8,3}^6)) = 24$$

Demostración. Es trivial probar que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}_{8,3}^6$. Se va a probar que no hay otras.
Se considera la siguiente graduación de $\mathfrak{g}_{8,3}^6$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \langle X_0, X_5\rangle & \oplus & \langle X_6\rangle & \oplus & \langle X_1, X_3\rangle & \oplus & \langle X_2, X_4\rangle & \oplus & \{0\} & \oplus & Y_1 \\ \mathfrak{g}_1 & \oplus & \mathfrak{g}_2 & \oplus & \mathfrak{g}_3 & \oplus & \mathfrak{g}_4 & \oplus & \mathfrak{g}_5 & \oplus & \mathfrak{g}_6 \end{array}$$

Sea $d \in Der(\mathfrak{g}_{8,3}^6)$, entonces

$$d = \sum_{i=-5}^{5} d_i, \qquad d_i(X_j) \in \mathfrak{g}_{i+j}, \qquad 1 \leq i+j \leq 6$$

puesto que $d_i \equiv 0$ si $i < -5$ ó $i > 5$, donde $d_i(X_j) \in \mathfrak{g}_{i+j}$, $1 \leq i+j \leq 6$.
De forma análoga a los casos anteriores, se obtiene una base de $Der(\mathfrak{g}_{8,3}^6)$, para más detalle, ver apéndice C.6. $\square$

Nota: Se verifica que

$$\begin{array}{ll} Ad(X_0) = t_{1,2} + t_{3,4} + t_{5,6}, & Ad(X_1) = -t_{0,1} + t_{5,4} + u_{3,1} \\ Ad(X_3) = -t_{0,4} + t_{5,2} - u_{1,1}, & Ad(X_5) = -t_{0,6} - t_{1,4} - u_{1,2}. \end{array}$$

Teorema 2.20 *Una base de $Der(\mathfrak{g}_{n,3}^6)$, viene dada por*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}_{n,3}^6 & = & \mathcal{B}_{8,3}^6 \cup \{u_{0,j},\ 2 \leq j \leq n-7\} \cup \{u_{2i-1,j},\ 1 \leq i \leq 3,\ 2 \leq j \leq n-7\} \cup \\ & \cup & \{v_{j,2i},\ 1 \leq i \leq 3,\ 2 \leq j \leq n-7\} \cup \{w_{i,j},\ 2 \leq i,j \leq n-7\} \cup \\ & \cup & \{w_{j,1},\ 2 \leq j \leq n-7\} \end{array}$$

y, su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}_{n,3}^6)) = n^2 - 8n + 24$$

Demostración. Análoga a los casos anteriores. $\square$

2.3.5 Derivaciones de $\mathfrak{g}^i_{n,3}$, $7 \le i \le 3n - 18$.

A continuación se va a realizar el cálculo de las derivaciones de las álgebras dadas por $\mathfrak{g}^i_{n,3}$, $7 \le i \le 3n - 18$, o lo que es lo mismo, de las álgebras de las familias $\mathfrak{g}^{j,r}_{n,3}$, $0 \le r \le r_j$, $1 \le j \le 6$, donde

$$r_1 = \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor, \; r_2 = r_3 = \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor, \; r_4 = r_5 = \left\lfloor \frac{n-10}{2} \right\rfloor, \; r_6 = \left\lfloor \frac{n-11}{2} \right\rfloor$$

y se va a realizar calculando un toro de derivaciones para cada una de ellas. El cambio de método se debe al hecho de que en estos casos, la dimensión del toro es elevada, lo que hace cómodo el uso del método del toro para el cálculo de los espacios de derivaciones de estas álgebras.

$$\boxed{\textbf{Derivaciones de la familia de álgebras } \mathfrak{g}^{1,r}_{n,3}}$$

$$\mathfrak{g}^{1,r}_{n,3} : \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ [X_1, X_3] \;\; = Y_1, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = X_6, & 1 \le k \le r. \end{cases} \qquad 0 \le r \le \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$$

Evidentemente, si $n > 2r + 8$, estas álgebras son escindidas y se tiene que

$$\mathfrak{g}^{1,r}_{n,3} = \mathfrak{g}^{1,r}_{2r+8,3} \, \oplus \, \mathbf{C}^{n-2r-8}, \; 0 \le r \le \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor \implies$$

$$Der(\mathfrak{g}^{1,r}_{n,3}) = Der(\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+8,3}) \oplus Der(\mathbf{C}^{n-2r-8}) \oplus \mathcal{D}(\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+8,3}, \mathbf{C}^{n-2r-8}) \oplus \mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-2r-8}, \mathfrak{g}^{1,r}_{2r+8,3})$$

Proposición 2.21 *Una base de $Der(\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+8,3})$, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{1,r}_{2r+8,3} \; = \; & \{t^1_{0,0,r}\} \cup \{t_{0,2i}, \; 1 \le i \le 3\} \cup \{t_{2i-1,2j}, \; 1 \le i,j \le 3\} \cup \\ & \{t_{3;2i-1,2i-1}, \; 1 \le i \le 2\} \cup \{t^1_{5,5,r}\} \cup \{t_{3;0,2i-1}, \; 1 \le i \le 3\} \cup \\ & \{t_{3;2i-1,2j-1}, \; 1 \le i,j \le 3, \; i \ne j\} \cup \{u_{0,1}, \; u_{2i-1,1}, \; 1 \le i \le 3\} \cup \\ & \{u^1_{0,j}, \; 2 \le j \le 2r+1\} \cup \{v_{i,2j}, \; 2 \le i \le 2r+1, \; 1 \le j \le 3\} \cup \\ & \{w_{i,1}, \; 2 \le i \le 2r+1\} \cup \{w_{2i,2i+1}, \; 1 \le i \le r\} \cup \\ & \{w_{2i+1,2i}, \; 1 \le i \le r\} \cup \{w^1_{2i,2j}, \; 1 \le i,j \le r\} \cup \\ & \{w^1_{2i,2j+1}, \; 1 \le i,j \le r, \; i \ne j\} \cup \{w^1_{2i+1,2j}, \; 1 \le i,j \le r, \; i \ne j\} \end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim Der(\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+8,3}) = 3r^2 + 10r + 29$$

Demostración. Es trivial probar que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+8,3}$. Se va a probar que no hay otras.

$$\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+8,3} = \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}]=X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] \quad =Y_1, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}]=X_6, & 1 \leq k \leq r. \end{cases} \qquad 1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$$

Se considera la siguiente graduación del álgebra:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \langle Y_{2r+1}\rangle \oplus \ldots \oplus \langle Y_3\rangle \oplus \{0\} & \oplus \langle X_0\rangle & \oplus\langle X_1\rangle & \oplus\langle X_2\rangle & \oplus\langle X_3\rangle & \oplus\langle X_4\rangle & \oplus\langle Y_1\rangle & \oplus\langle X_5\rangle & \oplus\langle X_6\rangle & \oplus\langle Y_2\rangle \oplus \ldots \oplus \langle Y_{2r}\rangle \\ \mathfrak{g}_{-r} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{-1} & \oplus\, \mathfrak{g}_0 & \oplus\, \mathfrak{g}_1 & \oplus\, \mathfrak{g}_2 & \oplus\, \mathfrak{g}_3 & \oplus\, \mathfrak{g}_4 & \oplus\, \mathfrak{g}_5 & \oplus\, \mathfrak{g}_6 & \oplus\, \mathfrak{g}_7 & \oplus\, \mathfrak{g}_8 \oplus \mathfrak{g}_9 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{8+r} \end{array}$$

siendo

$$\left. \begin{array}{lll} \mathfrak{g}_{i+1} \in & \langle X_i\rangle, & 1 \leq i \leq 4 \\ \mathfrak{g}_6 \in & \langle Y_1\rangle, & \\ \mathfrak{g}_{i+2} \in & \langle X_i\rangle, & 5 \leq i \leq 6 \\ \mathfrak{g}_{8+k} \in & \langle Y_{2k}\rangle, & 1 \leq k \leq r, \\ \mathfrak{g}_{-k} \in & \langle Y_{2k+1}\rangle, & 1 \leq k \leq r. \end{array} \right|$$

<u>*Cálculo de d_0*</u>

Sea

$$\left| \begin{array}{ll} d_0(X_i)=c_iX_i, & 0 \leq i \leq 6, \\ d_0(Y_i)=d_iX_i, & 1 \leq i \leq n-7. \end{array} \right.$$

Se debe verificar:

- $d_0([X_0, X_{2i-1}]) = c_{2i}X_{2i} = [c_0X_0, X_{2i-1}] + [X_0, c_{2i-1}X_{2i-1})]\,,\ 1 \leq i \leq 3$

$$\Longrightarrow c_{2i-1} = c_0 + c_{2i},\ 1 \leq i \leq 3$$

- $d_0([X_1, X_3]) = d_1Y_1 = [c_1X_1, X_3] + [X_1, c_3X_3] \Longrightarrow d_1 = c_1 + c_3$

- $d_0([Y_{2k}, Y_{2k+1}] = (c_0 + c_5)X_6 = [d_{2k}Y_{2k}, Y_{2k+1}] + [Y_{2k}, d_{2k+1}Y_{2k+1}]\,,\ 1 \leq k \leq r$

$$\Longrightarrow d_{2k+1} = c_0 + c_5 - d_{2k},\ 1 \leq k \leq r,\ 1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$$

Resulta, por tanto, el siguiente conjunto de parámetros libres

$$P_0^{1,r} = \{c_0, c_1, c_3, c_5\} \cup \{d_{2k},\ 1 \leq k \leq r\}$$

con lo que $\dim(B^{1,r}_{2r+8,0}) = 4 + r$ y una base de $B^{1,r}_{2r+8,0}$ vendrá dada por

$$\mathcal{B}^{1,r}_{2r+8,0} = \{t^1_{0,0,r},\ t_{3;1,1},\ t_{3;3,3},\ t^1_{5,5,r}\} \cup \{w^1_{2k,2k},\ 1 \leq k \leq r\}$$

Toro de derivaciones

Se va a considerar, por tanto, el siguiente toro de derivaciones:

$$T: \begin{cases} d(X_0) &= \alpha X_0, \\ d(X_1) &= \alpha_1 X_1, \\ d(X_2) &= (\alpha + \alpha_1) X_2, \\ d(X_3) &= \alpha_3 X_3, \\ d(X_4) &= (\alpha + \alpha_3) X_4, \\ d(X_5) &= \alpha_5 X_5, \\ d(X_6) &= (\alpha + \alpha_5) X_6, \\ d(Y_1) &= (\alpha_1 + \alpha_3) Y_1, \\ d(Y_{2k}) &= \beta_k Y_{2k}, & 1 \leq k \leq r, \\ d(Y_{2k+1}) &= (\alpha + \alpha_5 - \beta_k) Y_{2k+1}, & 1 \leq k \leq r. \end{cases}$$

que determina la siguiente graduación para el álgebra

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{1,r}_{2r+8,3} \;=\; & \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_5-\beta_r} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_5-\beta_1} \oplus \{0\} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_3} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_3} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_3} \oplus \\ & \mathfrak{g}_{\alpha_5} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_5} \oplus \mathfrak{g}_{\beta_1} \oplus \mathfrak{g}_{\beta_2} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{\beta_r} \end{aligned}$$

Diferencias

Se consideran a continuación todas las posibles diferencias de los parámetros, a fin de determinar una base del conjunto de las derivaciones de $\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+8,3}$.

- $\alpha_1 - \alpha$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha &= \alpha_1 - \alpha \\ &= (\alpha_1 + \alpha_3) - (\alpha + \alpha_3) \end{aligned} \qquad \left| \begin{array}{lcl} X_0 & \rightarrow & aX_1, \\ X_4 & \rightarrow & bY_1. \end{array} \right.$$

  Entonces $b = a$, puesto que

$$d([X_0, X_3]) = d(X_4) = bY_1 = [aX_1, X_3] + [X_0, 0] = aY_1$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

obteniéndose

$$d_{\alpha_1-\alpha}:\begin{cases} X_0 & \to & X_1, \\ X_4 & \to & Y_1. \end{cases}$$

es decir, $t_{3;0,1}$.

- $\alpha-\alpha_1$:

$$\begin{array}{rcl|lcl} \alpha-\alpha_1 & = & \alpha-\alpha_1 & X_1 & \to & aX_0, \\ & = & (\alpha+\alpha_3)-(\alpha_1+\alpha_3) & Y_1 & \to & bX_4. \end{array}$$

Entonces $b=a=0$, puesto que

$\star$ $d[X_1,X_3]=bX_4=[aX_0,X_3]+0=aX_4 \implies b=a.$

$\star$ $d[X_1,X_5]=0=[aX_0,X_5]+0=aX_6 \implies a=0.$

- α_1:

$$\begin{array}{rcl|lcl} \alpha_1 & = & (\alpha+\alpha_1)-\alpha & X_0 & \to & aX_2, \\ & = & (\alpha_1+\alpha_3)-\alpha_3 & X_3 & \to & bY_1. \end{array}$$

No hay restricciones respecto a los parámetros (lema 0.4 y, por tanto, se obtienen

$$d^1_{\alpha_1}: X_0 \to X_2, \qquad d^2_{\alpha_1}: X_3 \to Y_1$$

es decir, $t_{0,2}$ y $u_{3,1}$

- $-\alpha_1$:

$$\begin{array}{rcl|lcl} -\alpha_1 & = & \alpha-(\alpha+\alpha_1) & X_2 & \to & aX_0, \\ & = & \alpha_3-(\alpha_1+\alpha_3) & Y_1 & \to & bX_3. \end{array}$$

Se verifica que $a=b=0$ (lema 0.3).

- $\alpha_3-\alpha$:

$$\begin{array}{rcl|lcl} \alpha_3-\alpha & = & \alpha_3-\alpha & X_0 & \to & aX_3, \\ & = & (\alpha_1+\alpha_3)-(\alpha+\alpha_1) & X_2 & \to & bY_1. \end{array}$$

Se verifica que

$$d[X_0,X_1]=bY_1=[aX_3,X_1]+0=-aY_1 \implies b=-a$$

obteniéndose

$$d_{\alpha_3-\alpha}:\begin{cases} X_0 & \to & X_3, \\ X_2 & \to & -Y_1. \end{cases}$$

es decir, $t_{3;0,3}$.

- $\alpha - \alpha_3$:

$$\begin{array}{rcl|rcl} \alpha - \alpha_3 & = & \alpha - \alpha_3 & X_3 & \to & aX_0, \\ & = & (\alpha + \alpha_1) - (\alpha_1 + \alpha_3) & Y_1 & \to & bX_2. \end{array}$$

Se verifica que $a = b = 0$ ($a = 0$ por el lema 0.6 y después $b = 0$ por el lema 0.5).

- α_3:

$$\begin{array}{rcl|rcl} \alpha_3 & = & (\alpha + \alpha_3) - \alpha & X_0 & \to & aX_4, \\ & = & (\alpha_1 + \alpha_3) - \alpha_1 & X_1 & \to & bY_1. \end{array}$$

No hay restricciones respecto a los parámetros (lema 0.4) y, por tanto, se obtienen

$$d^1_{\alpha_3} : X_0 \to X_4, \qquad d^2_{\alpha_3} : X_1 \to Y_1$$

es decir, $t_{0,4}$ y $u_{1,1}$.

- $-\alpha_3$:

$$\begin{array}{rcl|rcl} -\alpha_3 & = & \alpha - (\alpha + \alpha_3) & X_4 & \to & aX_0, \\ & = & \alpha_1 - (\alpha_1 + \alpha_3) & Y_1 & \to & bX_1. \end{array}$$

Se verifica que $a = b = 0$, por ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ideal característico.

- $\alpha_5 - \alpha$:

$$\begin{array}{rcl|l} \alpha_5 - \alpha & = & \alpha_5 - \alpha & X_0 \to aX_5 \end{array}$$

No hay restricciones respecto al parámetro y, por tanto, se obtiene

$$d_{\alpha_5 - \alpha} : X_0 \to X_5$$

es decir, $t_{3;0,5}$.

- $\alpha - \alpha_5$:

$$\begin{array}{rcl|l} \alpha - \alpha_5 & = & \alpha - \alpha_5 & X_5 \to aX_0 \end{array}$$

Se verifica que $a = 0$ por el lema 0.5.

- α_5:

$$\begin{array}{rcl|l} \alpha_5 & = & (\alpha + \alpha_5) - \alpha & X_0 \to aX_6 \end{array}$$

No hay restricciones respecto al parámetro (lema 0.4) y, por tanto, se obtiene

$$d_{\alpha_5} : X_0 \to X_6$$

es decir, $t_{0,6}$

- $-\alpha_5$:

  $$-\alpha_5 = \alpha - (\alpha + \alpha_5) \qquad \Big| \; X_6 \to aX_0$$

  Se verifica que $a = 0$ por ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ideal característico.

- $-\alpha + \alpha_1 + \alpha_3$:

  $$-\alpha + \alpha_1 + \alpha_3 = (\alpha_1 + \alpha_3) - \alpha \qquad \Big| \; X_0 \to aY_1$$

  No hay restricciones respecto al parámetro y, por tanto, se obtiene

  $$d_{\alpha_1+\alpha_3-\alpha} : X_0 \to Y_1$$

  es decir, $u_{0,1}$

- $\alpha - \alpha_1 - \alpha_3$:

  $$\alpha - \alpha_1 - \alpha_3 = \alpha - (\alpha_1 + \alpha_3) \qquad \Big| \; Y_1 \to aX_0$$

  Se verifica que $a = 0$ por ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ideal característico.

- $\beta_k - \alpha, \ 1 \le k \le r$:

  $$\begin{array}{rcl|rcl} \beta_k - \alpha & = & \beta_k - \alpha & X_0 & \to & a_k Y_{2k} \\ & = & \alpha_5 - (\alpha + \alpha_5 - \beta_k) & Y_{2k+1} & \to & b_k X_5 \end{array} \qquad 1 \le k \le r.$$

  Se verifica que $b_k = -a_k, \ 1 \le k \le r$, puesto que

  $$d([X_0, Y_{2k+1}]) = 0 = [a_k Y_{2k}, Y_{2k+1}] + [X_0, b_k X_5] = (a_k + b_k)X_6$$

  obteniéndose

  $$d_{\beta_k-\alpha} : \left\{ \begin{array}{rcl} X_0 & \to & Y_{2k} \\ Y_{2k+1} & \to & -X_5 \end{array} \right. , \qquad 1 \le k \le r.$$

  es decir, $u^1_{0,2k}, \ 1 \le k \le r$.

- $\alpha - \beta_k, \ 1 \le k \le r$:

  $$\begin{array}{rcl|rcl} \alpha - \beta_k & = & \alpha - \beta_k & Y_{2k} & \to & a_k X_0 \\ & = & (\alpha + \alpha_5 - \beta_k) - \alpha_5 & X_5 & \to & b_k Y_{2k+1} \end{array} \qquad 1 \le k \le r.$$

  Se verifica que $b_k = a_k = 0, \ 1 \le k \le r$, ($b_k = 0$ por el lema 0.6 y después $a_k = 0$, por la misma razón).

- $\alpha_5 - \beta_k, \ 1 \le k \le r$:

  $$\begin{array}{rcl|rcl} \alpha_5 - \beta_k & = & \alpha_5 - \beta_k & X_0 & \to & a_k Y_{2k+1} \\ & = & (\alpha + \alpha_5 - \beta_k) - \alpha & Y_{2k} & \to & b_k X_5 \end{array} \qquad 1 \le k \le r.$$

Se verifica que $b_k = a_k$, $1 \leq k \leq r$, puesto que

$$d([X_0, Y_{2k}]) = 0 = [a_k Y_{2k+1}, Y_{2k}] + [X_0, b_k X_5] = (-a_k + b_k)X_6$$

obteniéndose

$$d_{\alpha_5 - \beta_k} : \begin{cases} X_0 & \to & Y_{2k+1} \\ Y_{2k} & \to & X_5 \end{cases}, \qquad 1 \leq k \leq r.$$

es decir, $u^1_{0,2k+1}$, $1 \leq k \leq r$.

- $\beta_k - \alpha_5$, $1 \leq k \leq r$:

$$\begin{array}{rcl|rcl} \beta_k - \alpha_5 & = & \alpha - (\alpha + \alpha_5 - \beta_k) & X_5 & \to & a_k Y_{2k} \\ & = & \beta_k - \alpha_5 & Y_{2k+1} & \to & b_k X_0 \end{array} \quad 1 \leq k \leq r - 1.$$

Se verifica que $b_k = a_k = 0$, $1 \leq k \leq r$, ($b_k = 0$ por el lema 0.6 y después $a_k = 0$, por la misma razón).

- α:

$$\begin{array}{rcl|rcl} \alpha & = & \alpha + \alpha_1 - \alpha_1 & X_1 & \to & aX_2 \\ & = & \alpha + \alpha_3 - \alpha_3 & X_3 & \to & bX_4 \\ & = & \alpha + \alpha_5 - \alpha_5 & X_5 & \to & cX_6 \end{array}$$

No hay restricciones respecto a los parámetros, (lema 0.4) y, por tanto, se obtienen

$$d^1_\alpha : X_1 \to X_2, \qquad d^2_\alpha : X_3 \to X_4, \qquad d^3_\alpha : X_5 \to X_6$$

es decir, $t_{1,2}$, $t_{3,4}$, $t_{5,6}$.

- $-\alpha$:

$$\begin{array}{rcl|rcl} -\alpha & = & \alpha_1 - (\alpha + \alpha_1) & X_2 & \to & aX_1 \\ & = & \alpha_3 - (\alpha + \alpha_3) & X_4 & \to & bX_3 \\ & = & \alpha_5 - (\alpha + \alpha_5) & X_6 & \to & cX_5 \end{array}$$

Se verifica que $a = b = c = 0$, por ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ideal característico.

- $-\alpha_1 + \alpha_3$:

$$\begin{array}{rcl|rcl} -\alpha_1 + \alpha_3 & = & \alpha_3 - \alpha_1 & X_1 & \to & aX_3 \\ & = & (\alpha + \alpha_3) - (\alpha + \alpha_1) & X_2 & \to & bX_4 \end{array}$$

Se verifica que $a = b$ puesto que

$$d([X_0, X_1]) = d(X_2) = bX_4 = [0, X_1] + [X_0, aX_3] = aX_4$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

obteniéndose

$$d_{-\alpha_1+\alpha_3}:\begin{cases} X_1 \rightarrow X_3 \\ X_2 \rightarrow X_4 \end{cases}$$

es decir, $t_{3;1,3}$.

- $\alpha_1 - \alpha_3$:

$$\begin{array}{rcl|l} \alpha_1-\alpha_3 &=& \alpha_1-\alpha_3 & X_3 \rightarrow aX_1 \\ &=& (\alpha+\alpha_1)-(\alpha+\alpha_3) & X_4 \rightarrow bX_2 \end{array}$$

Se verifica que $a = b$ pues

$$d([X_0, X_3]) = d(X_4) = bX_2 = [0, X_3] + [X_0, aX_1] = aX_2$$

obteniéndose

$$d_{\alpha_1-\alpha_3}:\begin{cases} X_3 \rightarrow X_1 \\ X_4 \rightarrow X_2 \end{cases}$$

es decir, $t_{3;3,1}$.

- $\alpha - \alpha_1 + \alpha_3$:

$$\begin{array}{rcl|l} \alpha-\alpha_1+\alpha_3 &=& (\alpha+\alpha_3)-\alpha_1 & X_1 \rightarrow aX_4 \end{array}$$

No hay restricciones respecto al parámetro (lema 0.4) y, por tanto, se obtiene

$$d_{\alpha-\alpha_1+\alpha_3} : X_1 \rightarrow X_4.$$

es decir, $t_{1,4}$.

- $-\alpha + \alpha_1 - \alpha_3$:

$$\begin{array}{l|l} -\alpha+\alpha_1-\alpha_3 = \alpha_1-(\alpha+\alpha_3) & X_4 \rightarrow aX_1 \end{array}$$

Se verifica que $a = 0$ por ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ideal característico.

- $-\alpha_1 + \alpha_5$:

$$\begin{array}{rcl|l} -\alpha_1+\alpha_5 &=& \alpha_5-\alpha_1 & X_1 \rightarrow aX_5 \\ &=& (\alpha+\alpha_5)-(\alpha+\alpha_1) & X_2 \rightarrow bX_6 \end{array}$$

Se verifica que $a = b$ puesto que

$$d([X_0, X_1]) = d(X_2) = bX_6 = [0, X_1] + [X_0, aX_5] = aX_6$$

obteniéndose

$$d_{\alpha_5-\alpha_1}:\begin{cases} X_1 \rightarrow X_5 \\ X_2 \rightarrow X_6 \end{cases}$$

es decir, $t_{3;1,5}$.

- $\alpha_1 - \alpha_5$:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 - \alpha_5 & = & \alpha_1 - \alpha_5 \\ & = & (\alpha+\alpha_1) - (\alpha+\alpha_5) \end{array} \quad \left| \begin{array}{rcl} X_5 & \to & aX_1 \\ X_6 & \to & bX_2 \end{array} \right.$$

Se verifica que $a = b$ pues

$$d([X_0, X_5]) = d(X_6) = bX_2 = [0, X_5] + [X_0, aX_1] = aX_2$$

obteniéndose

$$d_{\alpha_1-\alpha_5} : \left\{ \begin{array}{rcl} X_5 & \to & X_1 \\ X_6 & \to & X_2 \end{array} \right.$$

es decir, $t_{3;5,1}$.

- $\alpha - \alpha_1 + \alpha_5$:

$$\alpha - \alpha_1 + \alpha_5 = (\alpha + \alpha_5) - \alpha_1 \quad \left| \; X_1 \to aX_6 \right.$$

No hay restricciones respecto al parámetro (lema 0.4) y, por tanto, se obtiene

$$d_{\alpha-\alpha_1+\alpha_5} : X_1 \to X_6.$$

es decir, $t_{1,6}$.

- $-\alpha + \alpha_1 - \alpha_5$:

$$-\alpha + \alpha_1 - \alpha_5 = \alpha_1 - (\alpha + \alpha_5) \quad \left| \; X_6 \to aX_1 \right.$$

Se verifica que $a = 0$ por ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ideal característico.

- $-\alpha_1 + \beta_k, \; 1 \le k \le r$:

$$-\alpha_1 + \beta_k = \beta_k - \alpha_1 \quad \left| \; X_1 \to a_k Y_{2k} \right.$$

Se verifica que $a_k = 0, \; 1 \le k \le r$ (lema 0.6).

- $\alpha_1 - \beta_k, \; 1 \le k \le r$:

$$\alpha_1 - \beta_k = \alpha_1 - \beta_k \quad \left| \; Y_{2k} \to a_k X_1 \right.$$

Se verifica que $a_k = 0, \; 1 \le k \le r$ (lema 0.6).

- $\alpha - \alpha_1 + \alpha_5 - \beta_k, \; 1 \le k \le r$:

$$\alpha - \alpha_1 + \alpha_5 - \beta_k = (\alpha + \alpha_5 - \beta_k) - \alpha_1 \quad \left| \; X_1 \to a_k Y_{2k+1} \right.$$

Se verifica que $a_k = 0, \; 1 \le k \le r$ (lema 0.6).

- $-\alpha+\alpha_1-\alpha_5+\beta_k,\ 1\le k\le r$:

  $-\alpha+\alpha_1-\alpha_5+\beta_k \;=\; \alpha_1-(\alpha+\alpha_5-\beta_k) \qquad \Big|\ Y_{2k+1}\to a_kX_1$

  Se verifica que $a_k=0,\ 1\le k\le r$ (lema 0.6).

- $-\alpha-\alpha_1+\alpha_3$:

  $-\alpha-\alpha_1+\alpha_3=\alpha_3-(\alpha+\alpha_1) \qquad \Big|\ X_2 \;\to\; aX_3$

  Se verifica que $a=0$ por ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ideal característico.

- $\alpha+\alpha_1-\alpha_3$:

  $\alpha+\alpha_1-\alpha_3 \;=\; (\alpha+\alpha_1)-\alpha_3 \qquad \Big|\ X_3 \;\to\; aX_2$

  No hay restricciones respecto al parámetro (lema 0.4) y, por tanto, se obtiene

  $$d_{\alpha+\alpha_1-\alpha_3}: X_3\to X_2.$$

  es decir, $t_{3,2}$.

- $-\alpha-\alpha_1+\alpha_5$:

  $-\alpha-\alpha_1+\alpha_5=\alpha_5-(\alpha+\alpha_1) \qquad \Big|\ X_2 \;\to\; aX_5$

  Se verifica que $a=0$ por ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ideal característico.

- $\alpha+\alpha_1-\alpha_5$:

  $\alpha+\alpha_1-\alpha_5 \;=\; (\alpha+\alpha_1)-\alpha_5 \qquad \Big|\ X_5 \;\to\; aX_2$

  No hay restricciones respecto al parámetro (lema 0.4) y, por tanto, se obtiene

  $$d_{\alpha+\alpha_1-\alpha_5}: X_5\to X_2.$$

  es decir, $t_{5,2}$.

- $-\alpha-\alpha_1+\beta_k,\ 1\le k\le r$:

  $-\alpha-\alpha_1+\beta_k=\beta_k-(\alpha+\alpha_1) \qquad \Big|\ X_2\to a_kY_{2k}$

  Se verifica que $a_k=0,\ 1\le k\le r$, por ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ideal característico.

- $\alpha+\alpha_1-\beta_k,\ 1\le k\le r$:

  $\alpha+\alpha_1-\beta_k=(\alpha+\alpha_1)-\beta_k \qquad \Big|\ Y_{2k}\to a_kX_2$

  No hay restricciones respecto a los parámetros (lema 0.4) y, por tanto, se obtienen

  $$d_{\alpha+\alpha_1-\beta_k}: Y_{2k}\to X_2, \qquad 1\le k\le r.$$

es decir, $v_{2k,2}$, $1 \leq k \leq r$.

- $-\alpha_1 + \alpha_5 - \beta_k$, $1 \leq k \leq r$:

  $-\alpha_1 + \alpha_5 - \beta_k = (\alpha + \alpha_5 - \beta_k) - (\alpha + \alpha_1) \qquad \big| \; X_2 \to a_k Y_{2k+1}$

  Se verifica que $a_k = 0$, $1 \leq k \leq r$, por ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ideal característico.

- $\alpha_1 - \alpha_5 + \beta_k$, $1 \leq k \leq r$:

  $\alpha_1 - \alpha_5 + \beta_k = (\alpha + \alpha_1) - (\alpha + \alpha_5 - \beta_k) \qquad \big| \; Y_{2k+1} \to a_k X_2$

  No hay restricciones respecto a los parámetros (lema 0.4) y, por tanto, se obtienen

$$d_{\alpha_1 - \alpha_5 + \beta_k} : Y_{2k+1} \to X_2, \qquad 1 \leq k \leq r.$$

  es decir, $v_{2k+1,2}$, $1 \leq k \leq r$.

- $-\alpha_3 + \alpha_5$:

$$\begin{aligned} -\alpha_3 + \alpha_5 &= \alpha_5 - \alpha_3 \\ &= (\alpha + \alpha_5) - (\alpha + \alpha_3) \end{aligned} \qquad \left| \begin{array}{lll} X_3 & \to & aX_5 \\ X_4 & \to & bX_6 \end{array} \right.$$

  Se verifica que $a = b$ puesto que

$$d([X_0, X_3]) = d(X_4) = bX_6 = [0, X_3] + [X_0, aX_5] = aX_6$$

  obteniéndose

$$d_{\alpha_5 - \alpha_3} : \left\{ \begin{array}{lll} X_3 & \to & X_5 \\ X_4 & \to & X_6 \end{array} \right.$$

  es decir, $t_{3;3,5}$.

- $\alpha_3 - \alpha_5$:

$$\begin{aligned} \alpha_3 - \alpha_5 &= \alpha_3 - \alpha_5 \\ &= (\alpha + \alpha_3) - (\alpha + \alpha_5) \end{aligned} \qquad \left| \begin{array}{lll} X_5 & \to & aX_3 \\ X_6 & \to & bX_4 \end{array} \right.$$

  Se verifica que $a = b$ pues

$$d([X_0, X_5]) = d(X_6) = bX_4 = [0, X_5] + [X_0, aX_3] = aX_4$$

  obteniéndose

$$d_{\alpha_3 - \alpha_5} : \left\{ \begin{array}{lll} X_5 & \to & X_3 \\ X_6 & \to & X_4 \end{array} \right.$$

  es decir, $t_{3;5,3}$.

- $\alpha - \alpha_3 + \alpha_5$:

  $\alpha - \alpha_3 + \alpha_5 = (\alpha + \alpha_5) - \alpha_3 \quad \Big| \; X_3 \to aX_6$

  No hay restricciones respecto al parámetro (lema 0.4) y, por tanto, se obtiene

  $$d_{\alpha-\alpha_3+\alpha_5} : X_3 \to X_6.$$

  es decir, $t_{3,6}$.

- $-\alpha + \alpha_3 - \alpha_5$:

  $-\alpha + \alpha_3 + \alpha_5 = \alpha_3 - (\alpha + \alpha_5) \quad \Big| \; X_6 \to aX_3$

  Se verifica que $a = 0$ por ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ideal característico.

- $-\alpha_3 + \beta_k$, $1 \leq k \leq r$:

  $-\alpha_3 + \beta_k = \beta_k - \alpha_3 \quad \Big| \; X_3 \to a_k Y_{2k}$

  Se verifica que $a_k = 0$, $1 \leq k \leq r$, (lema 0.6).

- $\alpha_3 - \beta_k$, $1 \leq k \leq r$:

  $\alpha_3 - \beta_k = \alpha_3 - \beta_k \quad \Big| \; Y_{2k} \to a_k X_3$

  Se verifica que $a_k = 0$, $1 \leq k \leq r$, (lema 0.6).

- $\alpha - \alpha_3 + \alpha_5 - \beta_k$, $1 \leq k \leq r$:

  $\alpha - \alpha_3 + \alpha_5 - \beta_k = (\alpha + \alpha_5 - \beta_k) - \alpha_3 \quad \Big| \; X_3 \to a_k Y_{2k+1}$

  Se verifica que $a_k = 0$, $1 \leq k \leq r$, (lema 0.6).

- $-\alpha + \alpha_3 - \alpha_5 + \beta_k$, $1 \leq k \leq r$:

  $-\alpha + \alpha_3 - \alpha_5 + \beta_k = \alpha_3 - (\alpha + \alpha_5 - \beta_k) \quad \Big| \; Y_{2k+1} \to a_k X_3$

  Se verifica que $a_k = 0$, $1 \leq k \leq r$, (lema 0.6).

- $-\alpha - \alpha_3 + \alpha_5$:

  $-\alpha - \alpha_3 + \alpha_5 = \alpha_5 - (\alpha + \alpha_3) \quad \Big| \; X_4 \to aX_5$

  Se verifica que $a = 0$ por ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ideal característico.

- $\alpha + \alpha_3 - \alpha_5$:

  $\alpha + \alpha_3 - \alpha_5 = (\alpha + \alpha_3) - \alpha_5 \quad \Big| \; X_4 \to aX_5$

  No hay restricciones respecto al parámetro (lema 0.4) y, por tanto, se obtiene

  $$d_{\alpha+\alpha_3-\alpha_5} : X_5 \to X_4.$$

es decir, $t_{5,4}$.

- $-\alpha - \alpha_3 + \beta_k,\ 1 \le k \le r$:

  $-\alpha - \alpha_3 + \beta_k \;=\; \beta_k - (\alpha + \alpha_3) \qquad \big|\ X_4 \to a_k Y_{2k}$

  Se verifica que $a_k = 0,\ 1 \le k \le r$, por ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ideal característico.

- $\alpha + \alpha_3 - \beta_k,\ 1 \le k \le r$:

  $\alpha + \alpha_3 - \beta_k \;=\; (\alpha + \alpha_3) - \beta_k \qquad \big|\ Y_{2k} \to a_k X_4$

  No hay restricciones respecto al parámetro (lema 0.4) y, por tanto, se obtiene

$$d_{\alpha+\alpha_3-\beta_k} : Y_{2k} \to X_4, \qquad 1 \le k \le r.$$

  es decir, $v_{2k,4}$ $1 \le k \le r$.

- $-\alpha_3 + \alpha_5 - \beta_k,\ 1 \le k \le r$:

  $-\alpha_3 + \alpha_5 - \beta_k \;=\; (\alpha + \alpha_5 - \beta_k) - (\alpha + \alpha_3) \qquad \big|\ X_4 \to a_k Y_{2k+1}$

  Se verifica que $a_k = 0,\ 1 \le k \le r$, por ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ideal característico.

- $\alpha_3 - \alpha_5 + \beta_k,\ 1 \le k \le r$:

  $\alpha_3 - \alpha_5 + \beta_k \;=\; (\alpha + \alpha_3) - (\alpha + \alpha_5 - \beta_k) \qquad \big|\ Y_{2k+1} \to a_k X_4$

  No hay restricciones respecto al parámetro (lema 0.4) y, por tanto, se obtiene

$$d_{\alpha_3-\alpha_5+\beta_k} : Y_{2k+1} \to X_4, \qquad 1 \le k \le r.$$

  es decir, $v_{2k+1,4}$ $1 \le k \le r$.

- $\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_5$:

  $\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_5 \;=\; (\alpha_1 + \alpha_3) - \alpha_5 \qquad \big|\ X_5 \;\to\; aY_1.$

  No hay restricciones respecto al parámetro, (lema 0.4) y, por tanto, se obtiene

$$d_{\alpha_1+\alpha_3-\alpha_5} : X_5 \to Y_1$$

  es decir, $u_{5,1}$.

- $-\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_5$:

  $-\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_5 \;=\; \alpha_5 - (\alpha_1 + \alpha_3) \qquad \big|\ Y_1 \;\to\; aX_5.$

  Se verifica que $a = 0$ por ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ideal característico.

- $-\alpha+\alpha_1+\alpha_3-\alpha_5$:

  $-\alpha+\alpha_1+\alpha_3-\alpha_5 \;=\; (\alpha_1+\alpha_3)-(\alpha+\alpha_5) \qquad \big|\, X_6 \;\rightarrow\; aY_1.$

  Se verifica que $a=0$ (lema 0.5).

- $\alpha-\alpha_1-\alpha_3+\alpha_5$:

  $\alpha-\alpha_1-\alpha_3+\alpha_5 \;=\; (\alpha+\alpha_5)-(\alpha_1+\alpha_3) \qquad \big|\, Y_1 \;\rightarrow\; aX_6.$

  Se verifica que $a=0$ (lema 0.5).

- $-\alpha-\alpha_5+\beta_k,\ 1\leq k\leq r$:

  $-\alpha-\alpha_5+\beta_k \;=\; \beta_k-(\alpha+\alpha_5) \qquad \big|\, X_6 \rightarrow a_kY_{2k}$

  Se verifica que $a_k=0,\ 1\leq k\leq r$, por ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ideal característico.

- $\alpha+\alpha_5-\beta_k,\ 1\leq k\leq r$:

  $\alpha+\alpha_5-\beta_k \;=\; (\alpha+\alpha_5)-\beta_k \qquad \big|\, Y_{2k} \rightarrow a_kX_6$

  No hay restricciones respecto a los parámetros (lema 0.4) y por tanto se obtienen

  $$d_{\alpha+\alpha_5-\beta_k} : Y_{2k} \rightarrow X_6,\ 1\leq k\leq r.$$

  es decir, $v_{2k,6}$ $1\leq k\leq r$.

- $-\beta_k,\ 1\leq k\leq r$:

  $-\beta_k \;=\; (\alpha+\alpha_5-\beta_k)-(\alpha+\alpha_5) \qquad \big|\, X_6 \rightarrow a_kY_{2k+1}$

  Se verifica que $a_k=0,\ 1\leq k\leq r$, por ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ideal característico.

- $\beta_k,\ 1\leq k\leq r$:

  $\beta_k \;=\; (\alpha+\alpha_5)-(\alpha+\alpha_5-\beta_k) \qquad \big|\, Y_{2k+1} \rightarrow a_kX_6$

  No hay restricciones respecto a los parámetros (lema 0.4) y, por tanto, se obtienen

  $$d_{\beta_k} : Y_{2k+1} \rightarrow X_6,\ 1\leq k\leq r.$$

  es decir, $v_{2k+1,6}$ $1\leq k\leq r$.

- $-\alpha_1-\alpha_3+\beta_k,\ 1\leq k\leq r$:

  $-\alpha_1-\alpha_3+\beta_k \;=\; \beta_k-(\alpha_1+\alpha_3) \qquad \big|\, Y_1 \rightarrow a_kY_{2k}$

  Se verifica que $a_k=0,\ 1\leq k\leq r$, por ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ideal característico.

- $\alpha_1 + \alpha_3 - \beta_k = (\alpha_1 + \alpha_3) - \beta_k,\ 1 \leq k \leq r$:

$$\alpha_1 + \alpha_3 - \beta_k \;=\; (\alpha_1 + \alpha_3) - \beta_k \qquad \Big|\ Y_{2k} \to a_k Y_1$$

No hay restricciones respecto a los parámetros y, por tanto, se obtienen

$$d_{\alpha_1+\alpha_3-\beta_k} : Y_{2k} \to Y_1,\ 1 \leq k \leq r.$$

es decir, $w_{2k,1}$ $1 \leq k \leq r$.

- $\alpha - \alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_5 - \beta_k,\ 1 \leq k \leq r$:

$$\alpha - \alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_5 - \beta_k \;=\; (\alpha + \alpha_5 - \beta_k) - (\alpha_1 + \alpha_3) \qquad \Big|\ Y_1 \to a_k Y_{2k+1}$$

Se verifica que $a_k = 0,\ 1 \leq k \leq r$, por ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ideal característico.

- $-\alpha + \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 - \beta_k,\ 1 \leq k \leq r$:

$$-\alpha + \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 - \beta_k \;=\; (\alpha_1 + \alpha_3) - (\alpha + \alpha_5 - \beta_k) \qquad \Big|\ Y_{2k+1} \to a_k Y_1$$

No hay restricciones respecto a los parámetros (lema 0.4) y por tanto se obtienen

$$d_{-\alpha+\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5-\beta_k} : Y_{2k+1} \to Y_1,\ 1 \leq k \leq r.$$

es decir, $w_{2k+1,1}$, $1 \leq k \leq r$.

- $\beta_j - \beta_k,\ 1 \leq j,k \leq r,\ j \neq k$:

$$\begin{array}{rcl|lcll} \beta_j - \beta_k & = & \beta_j - \beta_k & Y_{2k} & \to & a_{jk} Y_{2j} & 1 \leq j,k \leq r, \\ & = & (\alpha + \alpha_5 - \beta_k) - (\alpha + \alpha_5 - \beta_j) & Y_{2j+1} & \to & b_{jk} Y_{2k+1} & j \neq k \end{array}$$

Se verifica que $b_{jk} = -a_{jk},\ 1 \leq j,k \leq r,\ j \neq k$, pues

$$d([Y_{2k}, Y_{2j+1}]) = 0 = [a_{jk}Y_{2j}, Y_{2j+1}] + [Y_{2k}, b_{jk}Y_{2k+1}] = (a_{jk}+b_{jk})X_6,\ 1 \leq j,k \leq r,\ j \neq k.$$

obteniéndose

$$d_{\beta_j-\beta_k} : \left\{ \begin{array}{lcl} Y_{2k} & \to & Y_{2j} \\ Y_{2j+1} & \to & -Y_{2k+1} \end{array} \right. \quad 1 \leq j,k \leq r,\ j \neq k.$$

es decir, $w^1_{2j,2k}$, $1 \leq j,k \leq r,\ j \neq k$.

- $\alpha + \alpha_5 - 2\beta_k,\ 1 \leq k \leq r$:

$$\alpha + \alpha_5 - 2\beta_k \;=\; (\alpha + \alpha_5 - \beta_k) - \beta_k \qquad \Big|\ Y_{2k} \to a_k Y_{2k+1}$$

No hay restricciones respecto a los parámetros y, por tanto, se obtienen

$$d_{\alpha+\alpha_5-2\beta_k} : Y_{2k} \to Y_{2k+1},\ 1 \leq k \leq r.$$

es decir, $w_{2k,2k+1}$, $1 \leq k \leq r$.

- $2\beta_k - \alpha - \alpha_5$, $1 \le k \le r$:

  $2\beta_k - \alpha - \alpha_5 \;=\; \beta_k - (\alpha + \alpha_5 - \beta_k) \quad \Big| \; Y_{2k+1} \to a_k Y_{2k}$

  No hay restricciones respecto a los parámetros y, por tanto, se obtienen

$$d_{2\beta_k - \alpha - \alpha_5} : Y_{2k+1} \to Y_{2k}, \;\; 1 \le k \le r.$$

  es decir, $w_{2k+1,2k}$, $1 \le k \le r$.

- $\alpha + \alpha_5 - \beta_k - \beta_j$, $1 \le j, k \le r$, $j \neq k$

$$\begin{array}{rcl|rcl} \alpha + \alpha_5 - \beta_k - \beta_j & = & (\alpha + \alpha_5 - \beta_k) - \beta_j, & Y_{2j} & \to & a_{jk} Y_{2k+1}, \\ & = & (\alpha + \alpha_5 - \beta_j) - \beta_k & Y_{2k} & \to & b_{jk} Y_{2j+1} \end{array}$$

  Se verifica que $a_{jk} = b_{jk}$, $1 \le j, k \le r$, $j \neq k$, pues

$$d([Y_{2j}, Y_{2k}]) = 0 = [a_{jk} Y_{2k+1}, Y_{2k}] + [Y_{2j}, b_{jk} Y_{2j+1}] = (-a_{jk} + b_{jk}) X_6, \;\; 1 \le k \le r.$$

  obteniéndose

$$d_{\alpha + \alpha_5 - \beta_j - \beta_k} : \left\{ \begin{array}{rcl} Y_{2j} & \to & Y_{2k+1}, \\ Y_{2k} & \to & Y_{2j+1} \end{array} \right. \quad 1 \le j, k \le r, \; j \neq k$$

  es decir, $w^1_{2j,2k+1}$, $1 \le j, k \le r$, $j \neq k$.

- $-\alpha - \alpha_5 + \beta_k + \beta_j$, $1 \le j, k \le r$, $j \neq k$

$$\begin{array}{rcl|rcl} -\alpha - \alpha_5 + \beta_k + \beta_j & = & \beta_j - (\alpha + \alpha_5 - \beta_k), & Y_{2j+1} & \to & a_{jk} Y_{2k}, \\ & = & \beta_k - (\alpha + \alpha_5 - \beta_j) & Y_{2k+1} & \to & b_{jk} Y_{2j} \end{array}$$

  Se verifica que $a_{jk} = b_{jk}$, $1 \le j, k \le r$, $j \neq k$, pues

$$d([Y_{2j+1}, Y_{2k+1}]) = 0 = [a_{jk} Y_{2k}, Y_{2k+1}] + [Y_{2j+1}, b_{jk} Y_{2j}] = (a_{jk} - b_{jk}) X_6, \;\; 1 \le k \le r.$$

  obteniéndose

$$d_{-\alpha - \alpha_5 + \beta_j + \beta_k} : \left\{ \begin{array}{rcl} Y_{2j+1} & \to & Y_{2k}, \\ Y_{2k+1} & \to & Y_{2j} \end{array} \right. \quad 1 \le j, k \le r, \; j \neq k$$

  es decir, $w^1_{2j+1,2k}$, $1 \le j, k \le r$, $j \neq k$.

□

Nota 1:

Se verifica que

$$\begin{array}{ll} Ad(X_0)=t_{1,2}+t_{3,4}+t_{5,6}, & Ad(X_1)=-t_{0,2}+u_{3,1} \\ Ad(X_3)=-t_{0,4}-u_{1,1}, & Ad(X_5)=-t_{0,6}, \\ Ad(Y_{2k})=v_{2k+1,6}, & Ad(Y_{2k+1})=-v_{2k,6}. \end{array}$$

Nota 2:

Se tiene, trivialmente, que $Der(\mathbf{C}^{n-2r-8})=gl(\mathbf{C}^{n-2r-8})$. Luego una base de $Der(\mathbf{C}^{n-2r-8})$ vendrá dada por

$$\mathcal{B}_1^{1,r}=\{w_{i,j}\in\mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-2r-8}) : \ 2r+2\leq i,j\leq n-7\}$$

y su dimensión es

$$\dim\Big(Der(\mathbf{C}^{n-2r-8})\Big)=(n-2r-8)^2$$

Proposición 2.22 *Una base de $\mathcal{D}(\mathfrak{g}_{2r+8,3}^{1,r},\mathbf{C}^{n-2r-8})$ viene dada por*

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{B}_{12}^{1,r} & = & \{u_{0,j},\ u_{2i-1,j}\in\mathcal{L}(\mathfrak{g}_{2r+8,3}^{1,r},\mathbf{C}^{n-2r-8})) :\ 1\leq i\leq 3,\ 2r+2\leq j\leq n-7\}\cup \\ & \cup & \{w_{i,j}\in\mathcal{L}(\mathfrak{g}_{2r+8,3}^{1,r},\mathbf{C}^{n-2r-8})) :\ 2\leq i\leq 2r+1,\ 2r+2\leq j\leq n-7\}\end{array}$$

y su dimensión es

$$\dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g}_{2r+8,3}^{1,r},\mathbf{C}^{n-2r-8}))=(4+2r)\cdot(n-2r-8)$$

Demostración. Sea $d\in\mathcal{D}(\mathfrak{g}_{2r+8,3}^{1,r},\mathbf{C}^{n-2r-8})$. Puesto que

$$\mathcal{Z}(\mathbf{C}^{n-2r-8})=\mathbf{C}^{n-2r-8}=\langle Y_{2r+2},\ldots,Y_{n-7}\rangle$$

$$\left[\mathfrak{g}_{2r+8,3}^{1,r},\mathfrak{g}_{2r+8,3}^{1,r}\right]=\langle X_2,X_4,X_6,Y_1\rangle$$

se tiene que

$$\begin{cases} d(X_{2i})=0, & 1\leq i\leq 3, \\ d(Y_1)=0, & \\ d(Y_i)=0, & 2r+2\leq i\leq n-7. \end{cases}$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR INGENIERIA INFORMATICA BIBLIOTECA

y que

$$\begin{cases} d(X_0) &= \sum\limits_{l=2r+2}^{n-7} c_{0,l}Y_l, \\ d(X_{2i-1}) &= \sum\limits_{l=2r+2}^{n-7} c_{i,l}Y_l, \quad 1 \leq i \leq 3, \\ d(Y_{2k}) &= \sum\limits_{l=2r+2}^{n-7} b_{k,l}Y_l, \quad 1 \leq i \leq r, \\ d(Y_{2k+1}) &= \sum\limits_{l=2r+2}^{n-7} b'_{k,l}Y_l, \quad 1 \leq i \leq r. \end{cases}$$

Exigiendo que d sea derivación no se obtienen restricciones respecto a los parámetros y, por tanto, se tiene el resultado. □

Proposición 2.23 *Una base de $\mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-2r-8}, \mathfrak{g}^{1,r}_{2r+8,3})$ vendrá dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{1,r}_{21} &= \{v_{j,2i} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-2r-8}, \mathfrak{g}^{1}_{2r+2,2}) : \ 1 \leq i \leq 3, \ 2r+2 \leq j \leq n-7\} \cup \\ &\quad \{w_{j,1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+8,3}, \mathbf{C}^{n-2r-8})) : \ 2r+2 \leq j \leq n-7\} \end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim(\mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-2r-8}, \mathfrak{g}^{1,r}_{2r+8,3})) = 4 \cdot (n-2r-8)$$

Demostración. Es análoga a la anterior, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} &\mathcal{Z}(\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+8,3}) = \langle X_2, X_4, X_6, Y_1 \rangle, \\ &[\mathbf{C}^{n-2r-8}, \mathbf{C}^{n-2r-8}] = \{0\} \end{aligned}$$

□

Se acaba de probar el siguiente

Teorema 2.24 *Una base de $Der(\mathfrak{g}^{1,r}_{n,3})$, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{1,r}_{n,3} &= \mathcal{B}^{1,r}_{2r+8,3} \cup \{u_{0,j}, \ u_{2i-1,j}, \ 1 \leq i \leq 3, \ 2r+2 \leq j \leq n-7\} \cup \\ &\quad \{v_{j,2i}, \ 1 \leq i \leq 3, \ 2r+2 \leq j \leq n-7\} \cup \{w_{i,1}, \ 2r+2 \leq i \leq n-7\} \\ &\quad \{w_{i,j}, \ 2 \leq i \leq n-7, \ 2r+2 \leq j \leq n-7\} \end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^{1,r}_{n,3})) = n(n-2r-8) + 3r^2 + 10r + 29$$

Derivaciones de la familia de álgebras $\mathfrak{g}_{n,3}^{2,r}$

$$\mathfrak{g}_{n,3}^{2,r} = \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] \quad = Y_1, & \\ [X_5, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = X_6, & 1 \leq k \leq r, \end{cases} \qquad 1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor$$

Evidentemente, si $n > 2r+9$, estas álgebras son escindidas y, por tanto,

$$\mathfrak{g}_{n,3}^{2,r} = \mathfrak{g}_{2r+9,3}^{2,r} \oplus \mathbf{C}^{n-2r-9}, \ 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor \implies$$

$$Der(\mathfrak{g}_{n,3}^{2,r}) = Der(\mathfrak{g}_{2r+9,3}^{2,r}) \oplus Der(\mathbf{C}^{n-2r-9}) \oplus \mathcal{D}(\mathfrak{g}_{2r+9,3}^{2,r}, \mathbf{C}^{n-2r-9}) \oplus \mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-2r-9}, \mathfrak{g}_{2r+9,3}^{2,r})$$

Proposición 2.25 *Una base de $Der(\mathfrak{g}_{2r+9,3}^{2,r})$, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{2r+9}^{2,r} \ = \ & \{t_{0,0,r}^2\} \cup \{\bar{t}_{1,(0,n-7)};\ \bar{t}_{3,(0,n-7)}\} \cup \{t_{0,2i},\ 1 \leq i \leq 3\} \cup \\ & \{t_{2i-1,2j},\ 1 \leq i,j \leq 3\} \cup \{t_{3;0,2i-1},\ 1 \leq i \leq 2\} \cup \\ & \{t_{0,5}^4\} \cup \{t_{3;2i-1,2i-1},\ 1 \leq i \leq 2\} \cup \\ & \{t_{5,5,r}^1; t_{3;1,3};\ t_{3;3,1}\} \cup \{u_{0,1}\} \cup \{u_{2i-1,1},\ 1 \leq i \leq 3\} \cup \\ & \{u_{0,j}^2,\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \{u_{0,n-7,r}^1;\ u_{5,n-7}\} \cup \\ & \{u_{5,j}^1,\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \{v_{i,2j},\ 2 \leq i \leq 2r+1,\ 1 \leq j \leq 3\} \cup \\ & \{v_{n-7,2j},\ 1 \leq j \leq 3\} \cup \{w_{i,1},\ 2 \leq i \leq 2r+1\} \cup \{w_{n-7,1}\} \cup \\ & \{w_{2i,2i+1},\ 1 \leq i \leq r\} \cup \{w_{2i+1,2i},\ 1 \leq i \leq r\} \cup \{w_{2i,2j}^1,\ 1 \leq i,j \leq r\} \cup \\ & \{w_{2i,2j+1}^1,\ 1 \leq i,j \leq r\} \cup \{w_{2i+1,2j}^1,\ 1 \leq i,j \leq r\}. \end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim\left(Der(\mathfrak{g}_{2r+9,3}^{2,r})\right) = 3r^2 + 12r + 33$$

Demostración. Es trivial que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}_{2r+9,3}^{2,r}$. Se va a probar que no hay otras.

Se considera la siguiente graduación del álgebra

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} \langle Y_{2r+1}\rangle & \oplus\cdots\oplus & \langle Y_3\rangle & \oplus & \{0\} & \oplus & \langle X_0, Y_{n-7}\rangle & \oplus & \langle X_1\rangle & \oplus & \langle X_2\rangle & \oplus & \langle X_3\rangle & \oplus & \langle X_4\rangle \\ \mathfrak{g}_{-r} & \oplus\cdots\oplus & \mathfrak{g}_{-1} & \oplus & \mathfrak{g}_0 & \oplus & \mathfrak{g}_1 & \oplus & \mathfrak{g}_2 & \oplus & \mathfrak{g}_3 & \oplus & \mathfrak{g}_4 & \oplus & \mathfrak{g}_5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \oplus\langle Y_1\rangle & \oplus & \langle X_5\rangle & \oplus & \langle X_6\rangle & \oplus & Y_2 & \oplus\cdots\oplus & Y_{2r} \\ \oplus\ \mathfrak{g}_6 & \oplus & \mathfrak{g}_7 & \oplus & \mathfrak{g}_8 & \oplus & \mathfrak{g}_9 & \oplus\cdots\oplus & \mathfrak{g}_{8+r} \end{array}$$

Cálculo de d_0

$$\left| \begin{array}{rcll} d_0(X_0) &=& a_0X_0 + a_0'Y_{n-7}, & \\ d_0(X_i) &=& a_iX_i, & 1 \le i \le 6, \\ d_0(Y_i) &=& b_iX_i, & 1 \le i \le 2r+1, \\ d_0(Y_{n-7}) &=& b_{n-7}'X_0 + b_{n-7}Y_{n-7}. & \end{array} \right.$$

Puesto que d_0 debe ser una derivación, se imponen a continuación las condiciones pertinentes a fin de obtener las correspondientes restricciones para los parámetros:

- $d_0([X_0, X_{2i-1}]) = c_{2i}X_{2i}\,[a_0X_0 + a_0'Y_{n-7}, X_{2i-1}] + [X_0, a_{2i-1}X_{2i-1}]\,,\ 1 \le i \le 2$

$$\Longrightarrow\ c_{2i} = c_0 + c_{2i-1},\ 1 \le i \le 2$$

- $d_0([X_0, X_5]) = [a_0X_0 + a_0'Y_{n-7}, X_5] + [X_0, a_5X_5] \Longrightarrow\ a_6 = a_0 + a_5 - a_0'$
- $d_0([X_1, Y_{n-7}]) = 0 = [a_1X_1, Y_{n-7}] + \left[X_1, b_{n-7}'X_0 + b_{n-7}Y_{n-7}\right] \Longrightarrow\ b_{n-7}' = 0$
- $d_0([X_1, X_3]) = [a_1X_1, X_3] + [X_1, a_3X_3]\ \Longrightarrow\ b_1 = a_1 + a_3$
- $d_0([X_5, Y_{n-7}]) = a_6X_6 = [a_5X_5, Y_{n-7}] + [X_5, b_{n-7}Y_{n-7}]\ \Longrightarrow\ b_{n-7} = a_0 - a_0'$
- $d_0([Y_{2k}, Y_{2k+1}] = a_6X_6 = [b_{2k}Y_{2k}, Y_{2k+1}] + [Y_{2k}, b_{2k+1}Y_{2k+1}]\,,\ 1 \le k \le r\ \Longrightarrow$

$$d_{2k+1} = c_0 + c_5 - c_0' - d_{2k},\ 1 \le k \le r,\ 1 \le r \le \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor$$

En definitiva, se obtiene el siguiente conjunto de parámetros libres

$$P_0^{2,r} = \{a_0, a'_0, a_1, a_3, a_5\} \cup \{b_{2k},\ 1 \leq k \leq r\}$$

y, por tanto $\dim(B_0^{2,r}) = 5 + r$. Una base de $B_0^{2,r}$ vendrá dada por

$$\mathcal{B}_0^{2,r} = \{t^2_{0,0,r},\ u^1_{0,n-7,r},\ t_{3;1,1},\ t_{3;3,3},\ t^1_{5,5,r}\} \cup \{w^1_{2k,2k},\ 1 \leq k \leq r\}$$

Toro de derivaciones

Se considera, por tanto, el siguiente toro de derivaciones

$$T : \begin{cases} d(X_0) &= \alpha X_0, \\ d(X_1) &= \alpha_1 X_1, \\ d(X_2) &= (\alpha + \alpha_1) X_2, \\ d(X_3) &= \alpha_3 X_3, \\ d(X_4) &= (\alpha + \alpha_3) X_4, \\ d(X_5) &= \alpha_5 X_5, \\ d(X_6) &= (\alpha + \alpha_5) X_6, \\ d(Y_1) &= (\alpha_1 + \alpha_3) Y_1, \\ d(Y_{2k}) &= \beta_k Y_{2k}, & 1 \leq k \leq r, \\ d(Y_{2k+1}) &= (\alpha + \alpha_5 - \beta_k) Y_{2k+1}, & 1 \leq k \leq r, \\ d(Y_{n-7} &= \alpha Y_{n-7}. \end{cases}$$

que determina la siguiente graduación para el álgebra

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{2,r}_{2r+9,3} \;\;=\;\; & \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_5-\beta_r} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_5-\beta_1} \oplus \{0\} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_3} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_3} \oplus \\ & \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_3} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_5} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_5} \oplus \mathfrak{g}_{\beta_1} \oplus \mathfrak{g}_{\beta_2} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{\beta_r} \end{aligned}$$

Diferencias

Se consideran, a continuación, todas las posibles diferencias de los parámetros, a fin de determinar una base del conjunto de las derivaciones de $\mathfrak{g}^{2,r}_{2r+9,3}$, de forma análoga al caso $\mathfrak{g}^{1,r}_{n,3}$. Para más detalles ver apéndice C.7 $\square$

Nota : Se verifica que

$$\begin{aligned} Ad(X_0) &= t_{1,2} + t_{3,4} + t_{5,6}, & Ad(X_1) &= -t_{0,2} + u_{3,1} \\ Ad(X_3) &= -t_{0,4} - u_{1,1}, & Ad(X_5) &= -t_{0,6} + v_{n-7,6}, \\ Ad(Y_{2k}) &= v_{2k+1,6}, & Ad(Y_{2k+1}) &= -v_{2k,6}, \\ Ad(Y_{n-7}) &= -t_{5,6}. \end{aligned}$$

BIBLIOTECA

Teorema 2.26 *Una base de* $Der(\mathfrak{g}_{n,3}^{2,r})$*, viene dada por*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{n,3}^{2,r} &= \mathcal{B}_{2r+9,3}^{2,r} \cup \{u_{0,j},\ u_{2i-1,j},\ 1 \leq i \leq 3,\ 2r+2 \leq j \leq n-8\} \cup \\ &\quad \{v_{j,2i},\ 1 \leq i \leq 3,\ 2r+2 \leq j \leq n-8\} \cup \{w_{i,1},\ 2r+2 \leq i \leq n-8\} \\ &\quad \{w_{i,j},\ 2 \leq i \leq n-7,\ 2r+2 \leq j \leq n-8\}\end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim\left(Der(\mathfrak{g}_{n,3}^{2,r})\right) = n(n-2r-9) + 3r^2 + 12r + 33$$

Demostración. Análoga a los casos anteriores. □

Derivaciones de la familia de álgebras $\mathfrak{g}_{n,3}^{3,r}$

$$\mathfrak{g}_{n,3}^{3,r} = \left\{\begin{array}{ll} [X_0, X_{2i-1}]=X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] \ =Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] \ =X_6, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}]=X_6, & 1 \leq k \leq r, \end{array}\right. \qquad 1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor$$

Evidentemente, si $n > 2r+9$, estas álgebras son escindidas y, por tanto

$$\mathfrak{g}_{n,3}^{3,r} = \mathfrak{g}_{2r+9,3}^{3,r} \ \oplus \ \mathbf{C}^{n-2r-9}, \ 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor \ \Longrightarrow$$

$$Der(\mathfrak{g}_{n,3}^{3,r}) = Der(\mathfrak{g}_{2r+9,3}^{3,r}) \oplus Der(\mathbf{C}^{n-2r-9}) \oplus \mathcal{D}(\mathfrak{g}_{2r+9,3}^{3,r}, \mathbf{C}^{n-2r-9}) \oplus \mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-2r-9}, \mathfrak{g}_{2r+9,3}^{3,r})$$

Proposición 2.27 *Una base de* $Der(\mathfrak{g}_{2r+9,3}^{3,r})$*, viene dada por*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{2r+9}^{3,r} &= \{t_{0,0,r}^2,\ t_{1,0}^2\} \cup \{t_{0,2i},\ 1 \leq i \leq 3\} \cup \{t_{2i-1,2j},\ 1 \leq i,j \leq 3\} \\ &\quad \{t_{1,1}^4,\ t_{3;3,3},\ t_{5,5,r}^2,\ \} \cup \{t_{3;0,2i-1},\ 2 \leq i \leq 3\} \cup \{t_{0,1}^2\} \cup \{t_{3;1,3},\ t_{3;1,5},\ t_{3;3,5}\} \cup \\ &\quad \{u_{0,1}\} \cup \{u_{2i-1,1},\ 1 \leq i \leq 3\} \cup \{u_{0,j}^1,\ 2 \leq k \leq 2r+1\} \cup \\ &\quad \{u_{0,n-7}^1,\ u_{1,n-7},\ u_{3,n-7}^1\} \cup \{u_{1,j}^1,\ 2 \leq k \leq 2r+1\}\end{aligned}$$

$$\{v_{i,2j},\ 2 \leq i \leq 2r+1,\ 1 \leq j \leq 3\} \cup \{v_{n-7,2j},\ 1 \leq j \leq 3\} \cup$$
$$\{w_{j,1},\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \{w_{n-7,1}\} \cup \{w_{2k,2k+1},\ 1 \leq k \leq r\} \cup$$
$$\{w_{2k+1,2k},\ 1 \leq k \leq r\} \cup \{w^1_{2i,2j},\ 1 \leq i,j \leq r\} \cup$$
$$\{w^1_{2i+1,2j},\ 1 \leq i,j \leq r,\ i \neq j\} \cup \{w^1_{2i,2j+1},\ 1 \leq i,j \leq r,\ i \neq j\}$$

y su dimensión es

$$\dim\left(Der(\mathfrak{g}^{3,r}_{2r+9,3})\right) = 3r^2 + 12r + 34$$

Demostración. Es trivial probar que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}^{3,r}_{2r+9,3}$. Se va a probar que no hay otras.
Se considera la siguiente graduación del álgebra:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\langle Y_{2r+1}\rangle \oplus \cdots \oplus \langle Y_3\rangle & \oplus & \{0\} & \oplus & \langle X_0\rangle & \oplus & \langle X_1\rangle & \oplus & \langle X_2\rangle & \oplus & \langle X_3\rangle & \oplus & \langle X_4\rangle \\
\mathfrak{g}_{-r} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-1} & \oplus & \mathfrak{g}_0 & \oplus & \mathfrak{g}_1 & \oplus & \mathfrak{g}_2 & \oplus & \mathfrak{g}_3 & \oplus & \mathfrak{g}_4 & \oplus & \mathfrak{g}_5
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\oplus\langle Y_1\rangle & \oplus & \langle Y_{n-7}\rangle & \oplus & \langle X_5\rangle & \oplus & \langle X_6\rangle & \oplus & Y_2 \oplus \cdots \oplus Y_{2r} \\
\oplus\ \mathfrak{g}_6 & \oplus & \mathfrak{g}_7 & \oplus & \mathfrak{g}_8 & \oplus & \mathfrak{g}_9 & \oplus & \mathfrak{g}_{10} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{9+r}
\end{array}$$

<u>*Cálculo de d_0*</u>

$$\left| \begin{array}{l} d_0(X_i) = a_i X_i, \quad 0 \leq i \leq 6, \\ d_0(Y_i) = b_i X_i, \quad 1 \leq i \leq 2r+1,\ i = n-7. \end{array} \right.$$

- $d_0([X_0, X_{2i-1}]) = d_0(X_{2i}) = [a_0 X_0, a_{2i-1} X_{2i-1}] + [X_0, a_{2i-1} X_{2i-1}],\ 1 \leq i \leq 3$

$$\Longrightarrow\ a_{2i} = a_0 + a_{2i-1},\ 1 \leq i \leq 3$$

- $d_0([X_1, X_3]) = [a_1 X_1, X_3] + [X_1, a_3 X_3] \Longrightarrow b_1 = a_1 + a_3$
- $d_0([X_1, Y_{n-7}]) = a_6 X_6 = [a_1 X_1, Y_{n-7}] + [X_1, b_{n-7} Y_{n-7}] \Longrightarrow b_{n-7} = a_0 - a_1 + a_5$
- $d_0([Y_{2k}, Y_{2k+1}] = d_0(X_6) = [b_{2k} Y_{2k}, Y_{2k+1}] + [Y_{2k}, b_{2k+1} Y_{2k+1}],\ 1 \leq k \leq r$

$$\Longrightarrow\ b_{2k+1} = a_0 + a_5 - b_{2k},\ 1 \leq k \leq r,\ 1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA MECÁNICA BIBLIOTECA

En definitiva, se tiene el siguiente conjunto de parámetros libres

$$P_0^{3,r} = \{a_0, a_1, a_3, a_5\} \cup \{b_{2k},\ 1 \leq k \leq r\}$$

y, por tanto, $\dim(B_0^{3,r}) = 4 + r$. Una base de $B_0^{3,r}$ vendrá dada por

$$\mathcal{B}_0^{3,r} = \{t_{0,0,r}^2,\ t_{1,1}^4,\ t_{3;3,3},\ t_{5,5,r}^2\} \cup \{w_{2k,2k}^1,\ 1 \leq k \leq r\}$$

<u>*Toro de derivaciones*</u>

$$T: \begin{cases} d(X_0) &= \alpha X_0, \\ d(X_1) &= \alpha_1 X_1, \\ d(X_2) &= (\alpha + \alpha_1) X_2, \\ d(X_3) &= \alpha_3 X_3, \\ d(X_4) &= (\alpha + \alpha_3) X_4, \\ d(X_5) &= \alpha_5 X_5, \\ d(X_6) &= (\alpha + \alpha_5) X_6, \\ d(Y_1) &= (\alpha_1 + \alpha_3) Y_1, \\ d(Y_{2k}) &= \beta_k Y_{2k}, & 1 \leq k \leq r, \\ d(Y_{2k+1}) &= (\alpha + \alpha_5 - \beta_k) Y_{2k+1}, & 1 \leq k \leq r, \\ d(Y_{n-7}) &= (\alpha - \alpha_1 + \alpha_5) Y_{n-7}. \end{cases}$$

que determina la siguiente graduación para el álgebra:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{2r+9,3}^{3,r} \quad = \quad & \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_5-\beta_r} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_5-\beta_1} \oplus \{0\} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_3} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_3} \oplus \\ & \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_3} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha-\alpha_1+\alpha_5} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_5} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_5} \oplus \mathfrak{g}_{\beta_1} \oplus \mathfrak{g}_{\beta_2} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{\beta_r} \end{aligned}$$

<u>*Diferencias*</u>

Se consideran, a continuación, todas las posibles diferencias de los parámetros, a fin de determinar una base del conjunto de las derivaciones de $\mathfrak{g}_{2r+9,3}^{3,r}$, de forma análoga a los casos anteriores.

Para más detalles ver apéndice C.8 $\square$

Nota: Se verifica que

$$\begin{array}{ll} Ad(X_0) = t_{1,2} + t_{3,4} + t_{5,6}, & Ad(X_1) = -t_{0,2} + u_{2,1} + v_{n-7,6} \\ Ad(X_3) = -t_{0,4} - u_{1,1}, & Ad(X_5) = -t_{0,6}, \\ Ad(Y_{2k}) = v_{2k+1,6}, & Ad(Y_{2k+1}) = -v_{2k,6}, \\ Ad(Y_{n-7}) = -t_{1,6}. & \end{array}$$

Teorema 2.28 *Una base de $Der(\mathfrak{g}_{n,3}^{3,r})$, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{n,3}^{3,r} &= \mathcal{B}_{2r+9,3}^{3,r} \cup \{u_{0,j},\ u_{2i-1,j},\ 1 \le i \le 3,\ 2r+2 \le j \le n-7\} \cup \\ & \{v_{j,2i},\ 1 \le i \le 3,\ 2r+2 \le j \le n-7\} \cup \{w_{i,1},\ 2r+2 \le i \le n-7\} \\ & \{w_{i,j},\ 2 \le i \le n-7,\ 2r+2 \le j \le n-7\} \end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}_{n,3}^{3,r})) = n(n-2r-9) + 3r^2 + 12r + 34$$

Demostración. Análoga a los casos anteriores. □

Derivaciones de la familia de álgebras $\mathfrak{g}_{n,3}^{4,r}$

$$\mathfrak{g}_{n,3}^{4,r} = \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \le i \le 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [X_3, Y_{n-8}] = X_6, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = X_6, & 1 \le k \le r, \end{cases} \qquad 0 \le r \le \left\lfloor \frac{n-10}{2} \right\rfloor$$

Evidentemente, si $n > 2r + 10$, estas álgebras son escindidas y, por tanto,

$$\mathfrak{g}_{n,3}^{4,r} = \mathfrak{g}_{2r+10,3}^{4,r} \oplus \mathbf{C}^{n-2r-10},\ 0 \le r \le \left\lfloor \frac{n-10}{2} \right\rfloor. \implies$$

$$Der(\mathfrak{g}_{n,3}^{4,r}) = Der(\mathfrak{g}_{2r+10,3}^{4,r}) \oplus Der(\mathbf{C}^{n-2r-10}) \oplus \mathcal{D}(\mathfrak{g}_{2r+10,3}^{4,r}, \mathbf{C}^{n-2r-10}) \oplus \mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-2r-10}, \mathfrak{g}_{2r+10,3}^{4,r})$$

BIBLIOTECA

Proposición 2.29 *Una base de* $Der(\mathfrak{g}^{4,r}_{2r+10,3})$*, viene dada por*

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^{4,r}_{2r+10,3} = & \{t^3_{0,0,r};\ t^2_{1,0};\ t^1_{3,0}\} \cup \{t_{0,2i},\ 1 \le i \le 3\} \cup \{t_{2i-1,2j},\ 1 \le i,j \le 3\} \\
& \{t^4_{1,1};\ t^3_{3,3};\ t^3_{5,5,r}\} \cup \{t^2_{0,1};\ t^4_{0,3};\ t_{3;0,5};\} \cup \{t^3_{1,3};\ t_{3;1,5};\ t^1_{3,1};\ t_{3;3,5}\} \cup \\
& \{u_{0,1}\} \cup \{u_{2i-1,1},\ 1 \le i \le 3\} \cup \{u^1_{0,j},\ 2 \le k \le 2r+1\} \cup \\
& \{u^1_{0,n-8};\ u^1_{1,n-8};\ u_{3,n-8};\ u^1_{0,n-7};\ u_{1,n-7};\ u^1_{3,n-7}\} \cup \\
& \{u^1_{1,j},\ 2 \le k \le 2r+1\} \cup \{u^1_{3,j},\ 2 \le k \le 2r+1\} \\
& \{v_{i,2j},\ 2 \le i \le 2r+1,\ 1 \le j \le 3\} \cup \{v_{n-8,2j},\ 1 \le j \le 3\} \cup \\
& \{v_{n-7,2j},\ 1 \le j \le 3\} \cup \{w_{j,1},\ 2 \le j \le 2r+1\} \cup \{w_{n-8,1};\ w_{n-7,1}\} \\
& \{w_{2k,2k+1},\ 1 \le k \le r\} \cup \{w_{2k+1,2k},\ 1 \le k \le r\} \cup \{t^1_{2i,2j},\ 1 \le i,j \le r\} \cup \\
& \{w^1_{2i+1,2j},\ 1 \le i,j \le r,\ i \ne j\} \cup \{w^1_{2i,2j+1},\ 1 \le i,j \le r,\ i \ne j\}
\end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim Der(\mathfrak{g}^{4,r}_{2r+10,3}) = 3r^2 + 14r + 43$$

Demostración. Es trivial probar que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}^{4,r}_{2r+10,3}$. Se va a probar que no hay otras.
Se considera la siguiente graduación del álgebra:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
\langle Y_{2r+1}\rangle \oplus \cdots \oplus \langle Y_3\rangle \oplus \{0\} \oplus \langle X_0\rangle \oplus \langle X_1\rangle \oplus \langle X_2\rangle \oplus \langle X_3\rangle \oplus \langle X_4\rangle \\
\mathfrak{g}_{-r} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3 \oplus \mathfrak{g}_4 \oplus \mathfrak{g}_5
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\oplus \langle Y_1\rangle \oplus \langle Y_{n-8}\rangle \oplus \{0\} \oplus \langle Y_{n-7}\rangle \oplus \langle X_5\rangle \oplus \langle X_6\rangle \oplus Y_2 \oplus \cdots \oplus Y_{2r} \\
\oplus \mathfrak{g}_6 \oplus \mathfrak{g}_7 \oplus \mathfrak{g}_8 \oplus \mathfrak{g}_9 \oplus \mathfrak{g}_{10} \oplus \mathfrak{g}_{11} \oplus \mathfrak{g}_{12} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{11+r}
\end{array}$$

<u>*Cálculo de* d_0</u>

$$\left| \begin{array}{ll} d_0(X_i) = a_i X_i, & 0 \le i \le 6, \\ d_0(Y_i) = b_i Y_i, & 1 \le i \le 2r+1,\ i = n-8,\ n-7. \end{array} \right.$$

- $d_0([X_0, X_{2i-1}]) = d_0(X_{2i}) = [a_0 X_0, X_{2i-1}] + [X_0, a_{2i-1} X_{2i-1}],\ 1 \le i \le 3$

$$\Longrightarrow\ a_{2i} = a_0 + a_{2i-1},\ 1 \le i \le 3$$

- $d_0([X_1,X_3]) = [a_1X_1,X_3]+[X_1,a_3X_3] \implies b_1 = a_1+a_3$
- $d_0([X_1,Y_{n-7}]) = a_6X_6 = [a_1X_1,Y_{n-7}]+[X_1,b_{n-7}Y_{n-7}] \implies b_{n-7} = a_0-a_1+a_5$
- $d_0([X_3,Y_{n-8}]) = a_6X_6 = [a_3X_3,Y_{n-8}]+[X_3,b_{n-8}Y_{n-8}] \implies b_{n-8} = a_0-a_3+a_5$
- $d_0([Y_{2k},Y_{2k+1}] = (a_0+a_5)X_6 = [b_{2k}Y_{2k},Y_{2k+1}]+[Y_{2k},b_{2k+1}Y_{2k+1}]\,,\ 1\le k\le r$

$$\implies u_{3k+1} = a_0+a_5-b_{2k},\ 1\le k\le r,\ 0\le r\le \left\lfloor \frac{n-10}{2}\right\rfloor$$

En definitiva, se tiene el siguiente conjunto de parámetros libres

$$P_0^{4,r} = \{a_0,a_1,a_3,a_5\}\cup\{b_{2k},\ 1\le k\le r\}$$

y, por tanto, $\dim(B_0^{4,r}) = 4+r$. Una base de $B_0^{4,r}$ vendrá dada por

$$\mathcal{B}_0^{4,r} = \{t^3_{0,0,r},\ t^4_{1,1},\ t^3_{3,3},\ t^3_{5,5,r}\}\cup\{w^1_{2k,2k},\ 1\le k\le r\}$$

<u>Toro de derivaciones</u>

$$T:\begin{cases} d(X_0) &= \alpha X_0,\\ d(X_1) &= \alpha_1X_1,\\ d(X_2) &= (\alpha+\alpha_1)X_2,\\ d(X_3) &= \alpha_3X_3,\\ d(X_4) &= (\alpha+\alpha_3)X_4,\\ d(X_5) &= \alpha_5X_5,\\ d(X_6) &= (\alpha+\alpha_5)X_6,\\ d(Y_1) &= (\alpha_1+\alpha_3)Y_1,\\ d(Y_{2k}) &= \beta_kY_{2k}, & 1\le k\le r,\\ d(Y_{2k+1}) &= (\alpha+\alpha_5-\beta_k)Y_{2k+1}, & 1\le k\le r,\\ d(Y_{n-8}) &= (\alpha-\alpha_3+\alpha_5)Y_{n-8},\\ d(Y_{n-7}) &= (\alpha-\alpha_1+\alpha_5)Y_{n-7}.\end{cases}$$

determina la siguiente graduación para el álgebra

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^{4,r}_{2r+10,3} \;=\;& \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_5-\beta_r}\oplus\dots\oplus\mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_5-\beta_1}\oplus\{0\}\oplus\mathfrak{g}_{\alpha}\oplus\mathfrak{g}_{\alpha_1}\oplus\mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_1}\oplus\mathfrak{g}_{\alpha_3}\oplus\mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_3}\oplus\mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_3}\oplus\\ & \mathfrak{g}_{\alpha-\alpha_3+\alpha_5}\oplus\{0\}\oplus\mathfrak{g}_{\alpha-\alpha_1+\alpha_5}\oplus\mathfrak{g}_{\alpha_5}\oplus\mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_5}\oplus\mathfrak{g}_{\beta_1}\oplus\mathfrak{g}_{\beta_2}\oplus\dots\oplus\mathfrak{g}_{\beta_r}\end{aligned}$$

Diferencias

Se consideran, a continuación, todas las posibles diferencias de los parámetros, a fin de determinar una base del conjunto de las derivaciones de $\mathfrak{g}^{4,r}_{2r+10,3}$, de forma análoga a los casos anteriores.

Para más detalle ver apéndice C.9 □

Nota: Se verifica que

$$\begin{array}{ll} Ad(X_0) = t_{1,2} + t_{3,4} + t_{5,6}, & Ad(X_1) = -t_{0,2} + u_{3,1} + v_{n-7,6} \\ Ad(X_3) = -t_{0,4} - u_{1,1} + v_{n-8,6}, & Ad(X_5) = -t_{0,6}, \\ Ad(Y_{2k}) = v_{2k+1,6}, & Ad(Y_{2k+1}) = -v_{2k,6}, \\ Ad(Y_{n-8}) = -t_{3,6}, & Ad(Y_{n-7}) = -t_{1,6}. \end{array}$$

Teorema 2.30 *Una base de $Der(\mathfrak{g}^{4,r}_{n,3})$, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{1,r}_{n,3} \;=\; & \mathcal{B}^{4,r}_{2r+10,3} \cup \{u_{0,j},\ u_{2i-1,j},\ 1 \leq i \leq 3,\ 2r+2 \leq j \leq n-9\} \cup \\ & \{v_{j,2i},\ 1 \leq i \leq 3,\ 2r+2 \leq j \leq n-9\} \cup \{w_{i,1},\ 2r+2 \leq i \leq n-9\} \\ & \{w_{i,j},\ 2 \leq i \leq n-7,\ 2r+2 \leq j \leq n-9\} \end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim Der(\mathfrak{g}^{4,r}_{n,3}) = n(n-2r-10) + 3r^2 + 14r + 43$$

Demostración. Análoga a los casos anteriores. □

Derivaciones de la familia de álgebras $\mathfrak{g}^{5,r}_{n,3}$

$$\mathfrak{g}^{5,r}_{n,3} = \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [X_5, Y_{n-8}] = X_6, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = X_6, & 1 \leq k \leq r, \end{cases} \qquad 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-10}{2} \right\rfloor$$

Evidentemente, si $n > 2r + 10$, estas álgebras son escindidas y, por tanto,

$$\mathfrak{g}_{n,3}^{5,r} = \mathfrak{g}_{2r+10,3}^{5,r} \oplus \mathbf{C}^{n-2r-10}, \ 0 \le r \le \left\lfloor \frac{n-10}{2} \right\rfloor . \implies$$

$$Der(\mathfrak{g}_{n,3}^{5,r}) = Der(\mathfrak{g}_{2r+10,3}^{5,r}) \oplus Der(\mathbf{C}^{n-2r-10}) \oplus \mathcal{D}(\mathfrak{g}_{2r+10,3}^{5,r}, \mathbf{C}^{n-2r-10}) \oplus \mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-2r-10}, \mathfrak{g}_{2r+10,3}^{5,r})$$

Proposición 2.31 *Una base de $Der(\mathfrak{g}_{2r+10,3}^{5,r})$, viene dada por*

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{2r+10}^{5,r} \ = \ & \{t_{0,0,r}^3;\ t_{1,0}^2;\ \bar{t}_{3,(0,n-8)}\} \cup \{t_{0,2i},\ 1 \le i \le 3\} \cup \{t_{2i-1,2j},\ 1 \le i,j \le 3\} \\
& \{t_{1,1}^4;\ t_{3;3,3};\ t_{5,5,r}^2;\ t_{3;0,3};\ t_{0,5}^5;\ t_{3;1,3};\ t_{1,5}^3\} \cup \{u_{0,1};\ u_{0,n-8,r}^1\} \cup \\
& \{u_{2i-1,1},\ 1 \le i \le 3\} \cup \{u_{0,j}^3,\ 2 \le k \le 2r+1\} \cup \\
& \{u_{1,n-8}^2;\ u_{5,n-8};\ u_{0,n-7}^1;\ u_{1,n-7};\ u_{3,n-7}^1\} \cup \{u_{1,j}^1,\ 2 \le k \le 2r+1\} \cup \\
& \{u_{5,j}^2,\ 2 \le k \le 2r+1\} \cup \{v_{i,2j},\ 2 \le i \le 2r+1,\ 1 \le j \le 3\} \cup \\
& \{v_{n-8,2j},\ 1 \le j \le 3\} \cup \{v_{n-7,2j},\ 1 \le j \le 3\} \cup \\
& \{w_{j,1},\ 2 \le j \le 2r+1\} \cup \{w_{n-8,1};\ w_{n-7,1}\} \\
& \{w_{2k,2k+1},\ 1 \le k \le r\} \cup \{w_{2k+1,2k},\ 1 \le k \le r\} \cup \{w_{2i,2j}^1,\ 1 \le i,j \le r\} \cup \\
& \{w_{2i+1,2j}^1,\ 1 \le i,j \le r,\ i \ne j\} \cup \{w_{2i,2j+1}^1,\ 1 \le i,j \le r,\ i \ne j\}
\end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim Der(\mathfrak{g}_{2r+10,3}^{5,r}) = 40 + r(3r+14) = 3r^2 + 14r + 40$$

Demostración. Es trivial probar que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}_{2r+10,3}^{5,r}$. Se va a probar que no hay otras.
Se considera la siguiente graduación del álgebra:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\langle Y_{2r+1}\rangle \oplus \cdots \oplus \langle Y_3\rangle \oplus \{0\} \oplus \langle X_0, Y_{n-8}\rangle \oplus \langle X_1\rangle \oplus \langle X_2\rangle \oplus \langle X_3\rangle \oplus \langle X_4\rangle \oplus \\
\mathfrak{g}_{-r} \ \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \quad \mathfrak{g}_1 \quad \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3 \oplus \mathfrak{g}_4 \oplus \mathfrak{g}_5 \oplus
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\oplus \langle Y_1\rangle \oplus \langle Y_{n-7}\rangle \oplus \langle X_5\rangle \oplus \langle X_6\rangle \oplus Y_2 \oplus \cdots \oplus Y_{2r} \\
\oplus \ \mathfrak{g}_6 \oplus \quad \mathfrak{g}_7 \quad \oplus \mathfrak{g}_8 \oplus \mathfrak{g}_9 \oplus \mathfrak{g}_{10} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{9+r}
\end{array}$$

Cálculo de d_0

$$\left|\begin{array}{lcl} d_0(X_0) = & a_0X_0 + a_0'Y_{n-8}, & \\ d_0(X_i) = & a_iX_i, & 1\le i\le 6, \\ d_0(Y_i) = & b_iY_i, & 1\le i\le 2r+1, \\ d_0(Y_{n-8}) = & b_{n-8}'X_0 + b_{n-8}Y_{n-8}, & \\ d_0(Y_{n-7}) = & b_{n-7}Y_{n-7}. & \end{array}\right.$$

De forma análoga a los casos anteriores, se obtiene

$$P_0^{5,r} = \{a_0, a_0', a_1, a_3, a_5\} \cup \{b_{2k},\ 1\le k\le r\}$$
$$\mathcal{B}_0^{5,r} = \{t_{0,0,r}^3,\ t_{1,1}^4,\ t_{3;3,3}^1,\ t_{5,5,r}^2,\ u_{0,n-8,r}^1\} \cup \{w_{2k,2k}^1,\ 1\le k\le r\}$$

Toro de derivaciones

Se considera, por tanto, el siguiente toro de derivaciones:

$$T: \left\{\begin{array}{ll} d(X_0) = \alpha X_0, & \\ d(X_1) = \alpha_1 X_1, & \\ d(X_2) = (\alpha+\alpha_1)X_2, & \\ d(X_3) = \alpha_3 X_3, & \\ d(X_4) = (\alpha+\alpha_3)X_4, & \\ d(X_5) = \alpha_5 X_5, & \\ d(X_6) = (\alpha+\alpha_5)X_6, & \\ d(Y_1) = (\alpha_1+\alpha_3)Y_1, & \\ d(Y_{2k}) = \beta_k Y_{2k}, & 1\le k\le r, \\ d(Y_{2k+1}) = (\alpha+\alpha_5-\beta_k)Y_{2k+1}, & 1\le k\le r, \\ d(Y_{n-8}) = \alpha Y_{n-8}, & \\ d(Y_{n-7}) = (\alpha-\alpha_1+\alpha_5)Y_{n-7}. & \end{array}\right.$$

que determina la siguiente graduación para el álgebra:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{2r+10,3}^{5,r} = {} & \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_5-\beta_r} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_5-\beta_1} \oplus \{0\} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_3} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_3} \oplus \\ & \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_3} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha-\alpha_1+\alpha_5} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_5} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_5} \oplus \mathfrak{g}_{\beta_1} \oplus \mathfrak{g}_{\beta_2} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{\beta_r} \end{aligned}$$

Diferencias

Se consideran, a continuación, todas las posibles diferencias de los parámetros, a fin

de determinar una base del conjunto de las derivaciones de $\mathfrak{g}^{5,r}_{2r+10,3}$, de forma análoga a los casos anteriores.
Para más detalles ver apéndice C.10 $\square$

Nota: Se verifica que

$$\begin{array}{ll} Ad(X_0) = t_{1,2} + t_{3,4} + t_{5,6}, & Ad(X_1) = -t_{0,2} + u_{3,1} + v_{n-7,6} \\ Ad(X_3) = -t_{0,4} - u_{1,1}, & Ad(X_5) = -t_{0,6} - v_{n-8,6}, \\ Ad(Y_{2k}) = v_{2k+1,6}, & Ad(Y_{2k+1}) = -v_{2k,6}, \\ Ad(Y_{n-8}) = -t_{5,6}, & Ad(Y_{n-7}) = -t_{1,6}. \end{array}$$

Teorema 2.32 *Una base de $Der(\mathfrak{g}^{5,r}_{n,3})$, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{5,r}_{n,3} \;=\; & \mathcal{B}^{5,r}_{2r+10,3} \cup \{u_{0,j},\ u_{2i-1,j},\ 1 \leq i \leq 3,\ 2r+2 \leq j \leq n-9\} \cup \\ & \{v_{j,2i},\ 1 \leq i \leq 3,\ 2r+2 \leq j \leq n-9\} \cup \{w_{i,1},\ 2r+2 \leq i \leq n-9\} \\ & \{w_{i,j},\ 2 \leq i \leq n-7,\ 2r+2 \leq j \leq n-9\} \end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim Der(\mathfrak{g}^{5,r}_{n,3}) = n(n-2r-10) + 3r^2 + 14r + 40$$

Demostración. Análoga a los casos anteriores. $\square$

Derivaciones de la familia de álgebras $\mathfrak{g}^{6,r}_{n,3}$

$$\mathfrak{g}^{6,r}_{n,3} = \begin{cases} [X_0, X_{2i-1}] = X_{2i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_3] = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_6, & \\ [X_3, Y_{n-8}] = X_6, & \\ [X_5, Y_{n-9}] = X_6, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = X_6, & 1 \leq k \leq r, \end{cases} \qquad 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-11}{2} \right\rfloor$$

Evidentemente, si $n > 2r + 11$, estas álgebras son escindidas y, por tanto,

$$\mathfrak{g}_{n,3}^{6,r} = \mathfrak{g}_{2r+11,3}^{6,r} \oplus \mathbf{C}^{n-2r-11}, \; 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-11}{2} \right\rfloor. \implies$$

$$Der(\mathfrak{g}_{n,3}^{6,r}) = Der(\mathfrak{g}_{2r+11,3}^{6,r}) \oplus Der(\mathbf{C}^{n-2r-11}) \oplus \mathcal{D}(\mathfrak{g}_{2r+11,3}^{6,r}, \mathbf{C}^{n-2r-11}) \oplus \mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-2r-11}, \mathfrak{g}_{2r+11,3}^{6,r})$$

Proposición 2.33 *Una base de $Der(\mathfrak{g}_{2r+11,3}^{6,r})$, viene dada por*

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{2r+11}^{6,r} &= \{t_{0,0,r}^4;\ t_{1,0}^2;\ t_{3,0}^1\} \cup \{t_{0,2i},\ 1 \leq i \leq 3\} \cup \{t_{2i-1,2j},\ 1 \leq i,j \leq 3\} \\
&\cup \{t_{1,1}^4;\ t_{3,3}^3;\ t_{5,5,r}^3;\ t_{0,5}^6;\ t_{1,3}^3;\ t_{1,5}^4;\ t_{3,1}^1;\ t_{3,5}^1\} \\
&\cup \{u_{0,1};\ u_{0,n-9,r}^1;\ u_{0,n-8}^1;\ u_{0,n-7}^1;\} \\
&\cup \{u_{2i-1,1},\ 1 \leq i \leq 3\} \cup \{u_{0,j}^4,\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \\
&\cup \{u_{1,n-9}^1;\ u_{3,n-9}^1;\ u_{5,n-9};\ u_{1,n-8}^1;\ u_{3,n-8};\ u_{1,n-7};\ u_{3,n-7}^1\} \\
&\cup \{u_{1,j}^1,\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \{u_{3,j}^1,\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \{u_{5,j}^3,\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \\
&\cup \{v_{i,2j},\ 2 \leq i \leq 2r+1,\ 1 \leq j \leq 3\} \cup \{v_{n-9,2j},\ 1 \leq j \leq 3\} \\
&\cup \{v_{n-8,2j},\ 1 \leq j \leq 3\} \cup \{v_{n-7,2j},\ 1 \leq j \leq 3\} \cup \\
&\cup \{w_{j,1},\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \{w_{n-9,1};\ w_{n-8,1};\ w_{n-7,1}\} \\
&\cup \{w_{2k,2k+1},\ 1 \leq k \leq r\} \cup \{w_{2k+1,2k},\ 1 \leq k \leq r\} \cup \{t_{2i,2j}^1,\ 1 \leq i,j \leq r\} \cup \\
&\cup \{w_{2i+1,2j}^1,\ 1 \leq i,j \leq r,\ i \neq j\} \cup \{w_{2i,2j+1}^1,\ 1 \leq i,j \leq r,\ i \neq j\}
\end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim Der(\mathfrak{g}_{2r+11,3}^{6,r}) = 49 + r(3r+16) = 3r^2 + 16r + 49$$

Demostración. Es trivial probar que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}_{2r+11,3}^{6,r}$. Se va a probar que no hay otras.
Se considera la siguiente graduación del álgebra

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\langle Y_{2r+1}\rangle \oplus \cdots \oplus \langle Y_3\rangle \oplus & \{0\} \oplus & \langle X_0, Y_{n-9}\rangle \oplus & \langle X_1\rangle \oplus & \langle X_2\rangle \oplus & \langle X_3\rangle \oplus & \langle X_4\rangle \oplus \\
\mathfrak{g}_{-r} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus & \mathfrak{g}_0 \oplus & \mathfrak{g}_1 \oplus & \mathfrak{g}_2 \oplus & \mathfrak{g}_3 \oplus & \mathfrak{g}_4 \oplus & \mathfrak{g}_5 \oplus
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
\oplus \langle Y_1\rangle & \oplus \langle Y_{n-8}\rangle & \oplus \{0\} & \oplus \langle Y_{n-7}\rangle & \oplus \langle X_5\rangle & \oplus \langle X_6\rangle & \oplus Y_2 \oplus \cdots \oplus Y_{2r} \\
\oplus\, \mathfrak{g}_6 & \oplus\, \mathfrak{g}_7 & \oplus\, \mathfrak{g}_8 & \oplus\, \mathfrak{g}_9 & \oplus\, \mathfrak{g}_{10} & \oplus\, \mathfrak{g}_{11} & \oplus \mathfrak{g}_{12} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{11+r}
\end{array}$$

Cálculo de d_0

$$\left|\begin{array}{lll} d_0(X_0) = & a_0X_0 + a_0'Y_{n-9}, & \\ d_0(X_i) = & a_iX_i, & 1 \leq i \leq 6, \\ d_0(Y_i) = & b_iY_i, & 1 \leq i \leq 2r+1, \\ d_0(Y_{n-9}) = & b_{n-9}'X_0 + b_{n-9}Y_{n-9}, & \\ d_0(Y_{n-8}) = & b_{n-8}Y_{n-8}, & \\ d_0(Y_{n-7}) = & b_{n-7}Y_{n-7}. & \end{array}\right.$$

De forma análoga a los casos anteriores, se obtiene

$$P_0^{6,r} = \{a_0, a_0', a_1, a_3, a_5\} \cup \{b_{2k},\ 1 \leq k \leq r\}$$
$$\mathcal{B}_0^{4,r} = \{t_{0,0,r}^4,\ t_{1,1}^4,\ t_{3,3}^3,\ t_{5,5,r}^3,\ u_{0,n-9,r}^1\} \cup \{w_{2k,2k}^1,\ 1 \leq k \leq r\}$$

Toro de derivaciones

Se considera, por tanto, el siguiente toro de derivaciones

$$T : \left\{\begin{array}{lll} d(X_0) & = \alpha X_0, & \\ d(X_1) & = \alpha_1 X_1, & \\ d(X_2) & = (\alpha + \alpha_1)X_2, & \\ d(X_3) & = \alpha_3 X_3, & \\ d(X_4) & = (\alpha + \alpha_3)X_4, & \\ d(X_5) & = \alpha_5 X_5, & \\ d(X_6) & = (\alpha + \alpha_5)X_6, & \\ d(Y_1) & = (\alpha_1 + \alpha_3)Y_1, & \\ d(Y_{2k}) & = \beta_k Y_{2k}, & 1 \leq k \leq r, \\ d(Y_{2k+1}) & = (\alpha + \alpha_5 - \beta_k)Y_{2k+1}, & 1 \leq k \leq r, \\ d(Y_{n-9}) & = \alpha Y_{n-9}, & \\ d(Y_{n-8}) & = (\alpha - \alpha_3 + \alpha_5)Y_{n-8}, & \\ d(Y_{n-7}) & = (\alpha - \alpha_1 + \alpha_5)Y_{n-7}. & \end{array}\right.$$

que determina la siguiente graduación para el álgebra

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{2r+11,3}^{6,r} = \; & \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_5-\beta_r} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_5-\beta_1} \oplus \{0\} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_3} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_3} \oplus \\ & \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_3} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha-\alpha_3+\alpha_5} \oplus \{0\} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha-\alpha_1+\alpha_5} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_5} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_5} \oplus \mathfrak{g}_{\beta_1} \oplus \mathfrak{g}_{\beta_2} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{\beta_r} \end{aligned}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

Diferencias

Se consideran, a continuación, todas las posibles diferencias de los parámetros, a fin de determinar una base del conjunto de las derivaciones de $\mathfrak{g}^{6,r}_{2r+11,3}$, de forma análoga a los casos anteriores.

Para más detalles ver apéndice C.11 □

Nota: Se verifica que

$$\begin{array}{ll} Ad(X_0) = t_{1,2} + t_{3,4} + t_{5,6}, & Ad(X_1) = -t_{0,2} + u_{3,1} + v_{n-7,6} \\ Ad(X_3) = -t_{0,4} - u_{1,1} + v_{n-8,6}, & Ad(X_5) = -t_{0,6} - v_{n-9,6}, \\ Ad(Y_{2k}) = v_{2k+1,6}, & Ad(Y_{2k+1}) = -v_{2k,6}, \\ Ad(Y_{n-9}) = -t_{5,6}, & Ad(Y_{n-8}) = -t_{3,6}, \\ Ad(Y_{n-7}) = -t_{1,6}. & \end{array}$$

Teorema 2.34 *Una base de $Der(\mathfrak{g}^{6,r}_{n,3})$, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{6,r}_{n,3} = & \ \mathcal{B}^{6,r}_{2r+11,3} \cup \{u_{0,j},\ u_{2i-1,j},\ 1 \leq i \leq 3,\ 2r+2 \leq j \leq n-10\} \cup \\ & \{v_{j,2i},\ 1 \leq i \leq 3,\ 2r+2 \leq j \leq n-10\} \cup \{w_{i,1},\ 2r+2 \leq i \leq n-10\} \\ & \{w_{i,j},\ 2 \leq i \leq n-7,\ 2r+2 \leq j \leq n-10\} \end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim Der(\mathfrak{g}^{6,r}_{n,3}) = n(n-2r-11) + 3r^2 + 16r + 49$$

Demostración. Análoga a los casos anteriores. □

2.4 Derivaciones de las ALM modelo

Se describe en esta sección el álgebra de derivaciones $\mathcal{D}er(\mathfrak{g}^0_{n,p})$. Sea considera $\mathfrak{g}^0_{n,p}$, álgebra de Lie metabeliana modelo de dimensión $n \geq 2p+1$. Entonces, según se ha visto en el capítulo anterior, $\mathfrak{g}^0_{n,p}$ es isomorfa a un álgebra cuya ley, referida a una base adaptada $\{X_0,\ X_1,\ \ldots,\ X_{2p},\ Y_1,\ldots,Y_{n-2p-1}\}$, viene dada por

$$\mathfrak{g}^0_{n,p} : \left\{\ [X_0, X_{2i-1}]{=}X_{2i},\quad 1 \le i \le p.\right.$$

Evidentemente, si $n > 2p+1$, estas álgebras son escindidas y por tanto

$$\mathfrak{g}^0_{n,p} = \mathfrak{g}^0_{2p+1,p}\ \oplus\ \mathbf{C}^{n-2p-1} \implies$$

$$Der(\mathfrak{g}^0_{n,p}) = Der(\mathfrak{g}^0_{2p+1,p}) \oplus Der(\mathbf{C}^{n-2p-1}) \oplus \mathcal{D}(\mathfrak{g}^0_{2p+1,p}, \mathbf{C}^{n-2p-1}) \oplus \mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-2p-1}, \mathfrak{g}^0_{2p+1,p})$$

Proposición 2.35 *Una base de $Der(\mathfrak{g}^0_{2p+1,p})$, viene dada por*

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^0_{2p+1,p} \ = \ & \{t_{p;0,0}\} \cup \{t_{p;2j-1,2j-1}, 1 \le j \le p\} \cup \{t_{0,2k},\ 1 \le k \le p\} \cup \\
& \{t_{p;0,2k-1},\ 1 \le k \le p\} \cup \\
& \{t_{2j-1,2(k+j-1)},\ 1 \le j \le p-k+1,\ 1 \le k \le p\} \cup \\
& \{t_{2j-1,2(j-k)},\ k+1 \le j \le p,\ 1 \le k \le p\} \cup \\
& \{t_{p;2j-1,2(k+j)-1},\ 1 \le j \le p-k,\ 1 \le k \le p\} \\
& \cup \{t_{p;2j-1,2(j-k)-1},\ 1+k \le j \le p,\ 1 \le k \le p\}
\end{aligned}$$

y su dimensión es $\dim\left(Der(\mathfrak{g}^0_{2p+1,p})\right) = 2p^2+2p+1$

Demostración. Es trivial probar que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}^0_{2p+1,p}$. Se va a probar que no hay otras.
Se considera la siguiente graduación de $\mathfrak{g}^0_{2p+1,p}$

$$\langle X_0\rangle \oplus \langle X_1\rangle \oplus \langle X_2\rangle \oplus \ldots \oplus \langle X_{2p}\rangle$$

donde

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{g}_i = \langle X_{i-1}\rangle, & 1 \le i \le 2p+1, \\ \mathfrak{g}_i = \{0\}, & i < 1 \text{ ó } i > 2p+1. \end{array}\right.$$

Sea $d \in Der(\mathfrak{g}^0_{2p+1,p})$, entonces como $d_i \equiv 0$ si $i < -2p+1$ ó $i > 2p+1$, se verificará que

$$d = \sum_{i=-2p+1}^{2p+1} d_i, \qquad d_i(X_j) \in \mathfrak{g}_{i+j}, \qquad 1 \le i+j \le 2p+1$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIEROS INFORMÁTICA BIBLIOTECA

donde

$$\begin{cases} d_i \in Der(\mathfrak{g}^0_{2p+1,p}), \\ d_i(\mathfrak{g}_j) \subset \mathfrak{g}_{i+j}. \end{cases}$$

Se va a expresar cada d_i, $-(2p+1) \leq i \leq 2p+1$, como una combinación lineal de los elementos de unos conjuntos B_i, $-(2p+1) \leq i \leq 2p+1$, de derivaciones linealmente independientes de $\mathfrak{g}^0_{2p+1,p}$, cumpliéndose que

$$\bigcup_{i=-(2p+1)}^{2p+1} B_i$$

es una base de $Der(\mathfrak{g}^0_{2p+1,p})$ y por tanto que

$$\dim\left(Der(\mathfrak{g}^0_{2p+1,p})\right) = \sum_{i=-2p+1}^{2p+1} \dim\langle B_i\rangle$$

Cálculo de d_0

Sea

$$d_0 : \left\{ X_j \rightarrow a_j X_j. \right.$$

entonces se verifica que

$$d_0[X_0, X_{2j-1}] = a_{2j}X_{2j} = [a_0X_0, X_{2j-1}] + [X_0, a_{2j-1}X_{2j-1}] = (a_0 + a_{2j-1})X_{2j} \Longrightarrow$$

$$a_{2j} = a_0 + a_{2j-1}, \ 1 \leq j \leq p$$

En definitiva, se tiene el siguiente conjunto de parámetros libres

$$P^0_{2p+1,p} = \{a_0\} \cup \{ \ a_{2j-1}, \ 1 \leq j \leq p\}$$

y, por tanto, $\dim(B_0) = p+1$. Una base de B_0 vendrá dada por

$$\mathcal{B}^0_{2p+1,p} = \{t_{p;0,0}\} \cup \{t_{p;2j-1,2j-1}, 1 \leq j \leq p\}$$

Cálculo de d_{2k-1}, $1 \leq k \leq p$.

- $d_{2k-1}(X_0) \in \mathfrak{g}_{2k} = \langle X_{2k-1}\rangle \Longrightarrow d_{2k-1}(X_0) = a_0^{2k-1}X_{2k-1}, \ 1 \leq k \leq p.$
- $d_{2k-1}(X_{2j-1}) \in \mathfrak{g}_{2k+2j-1} = \langle X_{2(k+j-1)}\rangle \Longrightarrow$
  $d_{2k-1}(X_{2j-1}) = a_{2j-1}^{2k-1}X_{2(k+j-1)}, \ 1 \leq j \leq p-k+1, \ 1 \leq k \leq p.$

- $d_{2k-1}(X_{2j}) \in \mathfrak{g}_{2k+2j} = \langle X_{2(k+j)-1} \rangle \implies$
  $d_{2k-1}(X_{2j}) = 0, \ 1 \leq j \leq p, \ 1 \leq k \leq p.$

No hay restricciones respecto a los parámetros y, por tanto, se tiene el siguiente conjunto de parámetros libres

$$P^{2k-1}_{2p+1,p} \ = \ \{a_0^{2k-1}\} \cup \{ \ a^{2k-1}_{2j-1}, \ 1 \leq j \leq p-k+1\}$$

Se verifica que $\dim(B_{2k-1}) = p - k + 2$ y, una base de B_{2k-1} vendrá dada por

$$\mathcal{B}^{2k-1}_{2p+1,p} \ = \ \{t_{p;0,2k-1}\} \cup \{t_{2j-1,2(k+j-1)}, \ 1 \leq j \leq p-k+1\}$$

Cálculo de $d_{2k}, \ 1 \leq k \leq p.$

- $d_{2k}(X_0) \in \mathfrak{g}_{2k+1} = \langle X_{2k} \rangle \implies d_{2k}(X_0) = a_0^{2k} X_{2k}, \ 1 \leq k \leq p.$

- $d_{2k}(X_{2j-1}) \in \mathfrak{g}_{2k+2j} = \langle X_{2(k+j)-1} \rangle \implies$
  $d_{2k}(X_{2j-1}) = a^{2k}_{2j-1} X_{2(k+j)-1}, \ 1 \leq j \leq p-k, \ 1 \leq k \leq p.$

- $d_{2k}(X_{2j}) \in \mathfrak{g}_{2k+2j+1} = \langle X_{2(k+j)} \rangle \implies$
  $d_{2k}(X_{2j}) = a^{2k}_{2j} X_{2(k+j)}, \ 1 \leq j \leq p-k, \ 1 \leq k \leq p.$

Se verifica que
$d_{2k}[X_0, X_{2j-1}] = a^{2k}_{2j} X_{2(k+j)} = 0 + [X_0, a^{2k}_{2j-1} X_{2(k+j)-1}] \implies a^{2k}_{2j} = a^{2k}_{2j-1}, \ 1 \leq j \leq p-k.$
En definitiva, se tiene el siguiente conjunto de parámetros libres

$$P^{2k}_{2p+1,p} \ = \ \{a_0^{2k}\} \cup \{ \ a^{2k}_{2j-1}, \ 1 \leq j \leq p-k\}$$

Se verifica que $\dim(B_{2k}) = p - k + 1$ y, una base de B_{2k} vendrá dada por

$$\mathcal{B}^{2k}_{2p+1,p} \ = \ \{t_{0,2k}\} \cup \{t_{p;2j-1,2(k+j)-1}, \ 1 \leq j \leq p-k\}$$

Cálculo de $d_{-(2k-1)}, \ 1 \leq k \leq p.$

- $d_{-(2k-1)}(X_0) = 0.$

- $d_{-(2k-1)}(X_{2j-1}) \in \mathfrak{g}_{2j-2k+1} = \langle X_{2(j-k)} \rangle \Longrightarrow$
  $d_{-(2k-1)}(X_{2j-1}) = a_{2j-1}^{-(2k-1)} X_{2(j-k)},\ k \leq j \leq p,\ 1 \leq k \leq p.$

- $d_{-(2k-1)}(X_{2k-1}) \in \mathfrak{g}_1 = \langle X_0 \rangle \Longrightarrow d_{-(2k-1)}(X_{2k-1}) = a_{2k-1}^{-(2k-1)} X_0.$
  Ahora bien,
  $d_{-(2k-1)}[X_{2k-1}, X_{2l-1}] = 0 = [a_{2k-1}^{-(2k-1)} X_0, X_{2l-1}] + 0 \Longrightarrow a_{2k-1}^{-(2k-1)} = 0$

- $d_{-(2k-1)}(X_{2j}) \in \mathfrak{g}_{2(j-k+1)} \Longrightarrow d_{-(2k-1)}(X_{2j}) = 0,\ 1 \leq j \leq p,\ 1 \leq k \leq p.$

No hay restricciones respecto a los parámetros y, por tanto, se tiene el siguiente conjunto de parámetros libres

$$P_{2p+1,p}^{-(2k-1)} = \{\ a_{2j-1}^{-(2k-1)},\ k+1 \leq j \leq p\}$$

Se verifica que $\dim(B_{-(2k-1)}) = p - k$ y, una base de $B_{-(2k-1)}$ vendrá dada por

$$\mathcal{B}_{2p+1,p}^{-(2k-1)} = \{t_{2j-1,2(j-k)},\ k+1 \leq j \leq p\}$$

Cálculo de $d_{-2k},\ 1 \leq k \leq p.$

- $d_{-2k}(X_0) = 0.$

- $d_{-2k}(X_{2j-1}) \in \mathfrak{g}_{2(j-k)} = \langle X_{2(j-k)-1} \rangle \Longrightarrow$
  $d_{-2k}(X_{2j-1}) = a_{2j-1}^{-2k} X_{2(j-k)-1},\ k+1 \leq j \leq p,\ 1 \leq k \leq p.$

- $d_{-2k}(X_{2j}) \in \mathfrak{g}_{2j-2k+1} = \langle X_{2(j-k)} \rangle \Longrightarrow$
  $d_{-2k}(X_{2j}) = a_{2j}^{-2k} X_{2(j-k)},\ k+1 \leq j \leq p,\ 1 \leq k \leq p.$

Se verifica que

$$d_{-2k}[X_0, X_{2j-1}] = a_{2j}^{-2k} X_{2(j-k)} = 0 + [X_0, a_{2j-1}^{-2k} X_{2(j-k)-1}]$$

$$\Longrightarrow a_{2j}^{-2k} = a_{2j-1}^{-2k},\ 1 \leq j \leq p-k$$

En definitiva, se tiene el siguiente conjunto de parámetros libres

$$P_{2p+1,p}^{-2k} = \{\ a_{2j-1}^{-2k},\ k+1 \leq j \leq p\}$$

y, por tanto, $\dim(B_{-2k}) = p - k$. Una base de B_{-2k} vendrá dada por

$$\mathcal{B}_{2p+1,p}^{-2k} = \{t_{p;2j-1,2(j-k)-1},\ k+1 \leq j \leq p\}$$

En consecuencia, se tiene que

$$\begin{aligned}
\dim\left(Der(\mathfrak{g}_{2p+1,p}^0)\right) &= \sum_{k=-(2p-1)}^{2p-1} \dim(B_k) = \\
&= \sum_{k=1}^{2p} \dim(B_{-k}) + \dim(B_0) + \sum_{k=1}^{2p} \dim(B_k) = \\
&= p(p+2) + (p+1) + p(p-1) = 2p^2 + 2p + 1
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2p} \dim(B_k) &= \sum_{k=1}^{p} \dim(B_{2k-1}) + \sum_{k=1}^{p} \dim(B_{2k}) = \\
&= \sum_{k=1}^{p} (p-k+2) + \sum_{k=1}^{p} (p-k+1) = \\
&= p + 2\sum_{k=1}^{p} (p-k+1) = p(p+2) \\
\sum_{k=1}^{2p} \dim(B_{-k}) &= \sum_{k=1}^{p} \dim(B_{-(2k-1)}) + \sum_{k=1}^{p} \dim(B_{-2k}) = \\
&= 2\sum_{k=1}^{p} (p-k) = p(p-1)
\end{aligned}$$

□

Nota 1:

Se verifica que

$$Ad(X_0) = \sum_{j=1}^{p} t_{2j-1,2j}$$

$$Ad(X_{2j-1}) = -t_{0,2j},\ 1 \leq j \leq p.$$

Nota 2:

Se tiene, trivialmente, que $Der(\mathbf{C}^{n-2p-1}) = gl(\mathbf{C}^{n-2p-1})$. Luego una base de $Der(\mathbf{C}^{n-2p-1})$ vendrá dada por

$$\mathcal{B}_1 = \{w_{i,j} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-2p-1}) :\ 1 \leq i,j \leq n-2p-1\}$$

y su dimensión es

$$\dim\left(Der(\mathbf{C}^{n-2p-1})\right) = (n-2p-1)^2$$

Proposición 2.36 *Una base de $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^0_{2p-1,p}, \mathbf{C}^{n-2p-1})$ viene dada por*

$$\mathcal{B}_{12} = \{u_{0,j},\ u_{2i-1,j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}^0_{2p-1,p}, \mathbf{C}^{n-2p-1}) :\ 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq n-2p-1\}$$

y su dimensión es

$$\dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g}^0_{2p-1,p}, \mathbf{C}^{n-2p-1})) = (p+1)\cdot(n-2p-1)$$

Demostración. Análoga a los casos anteriores, teniendo en cuenta que

$$\mathcal{Z}(\mathbf{C}^{n-2p-1}) = \mathbf{C}^{n-2p-1} = \langle Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-2p-1}\rangle$$
$$\left[\mathfrak{g}^0_{2p-1,p}, \mathfrak{g}^0_{2p-1,p}\right] = \langle X_2, X_4, \ldots, X_{2p}\rangle$$

□

Proposición 2.37 *Una base de $\mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-2p-1}, \mathfrak{g}^0_{2p-1,p})$ viene dada por*

$$\mathcal{B}_{21} = \{v_{j,2i} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-2p-1}, \mathfrak{g}^0_{2p-1,p}) :\ 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq n-2p-1\}$$

y su dimensión es

$$\dim(\mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-2p-1}, \mathfrak{g}^0_{2p-1,p})) = p\cdot(n-2p-1)$$

Demostración. Es análoga a la anterior, teniendo en cuenta que

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}^0_{2p-1,p}) = \langle X_2, X_4, \ldots, X_{2p}\rangle$$
$$[\mathbf{C}^{n-2p-1}, \mathbf{C}^{n-2p-1}] = \{0\}$$

□

Se acaba de probar el siguiente

Teorema 2.38 *Una base de $Der(\mathfrak{g}^0_{n,p})$, viene dada por*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^0_{n,p} &= \mathcal{B}^0_{2p+1,p} \cup \{u_{0,j},\ u_{2i-1,j},\ 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq n-2p-1\} \cup \\ &\cup\ \{v_{j,2i},\ 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq n-2p-1\} \cup \{w_{i,j},\ 1 \leq i,j \leq n-2p-1\}\end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^0_{n,p})) = n(n-2p-1) + (2p^2+2p+1)$$

2.5 Derivaciones de las ALM con dimensión de la derivada maximal

Se ha demostrado en el capítulo anterior que para cada $p \in \mathbf{N}$ fijado cualquier álgebra de Lie metabeliana n-dimensional $\mathfrak{g}$, con $n \geq 2p+1+\begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+2 \\ 2 \end{pmatrix}$, si $\dim\left(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})\right) = p + \begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix}$ es una extensión trivial de

$$\mathfrak{g}^1_{n_1,p} \left\{ \begin{array}{lll} [X_0, X_{2i-1}] & = X_{2i}, & 1 \leq i \leq p, \\ [X_{2r-1}, X_{2s-1}] & = Y_{\left(\frac{2p-r}{2}\right)(r-1)+s-r}, & 1 \leq r < s \leq p. \end{array} \right. , \quad 1 \leq p \leq \left\lfloor \frac{n_1 - 1}{2} \right\rfloor$$

siendo $n_1 = 2p+1+\begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(p^2+3p+2) = \begin{pmatrix} p+2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Evidentemente, si $n > \begin{pmatrix} p+2 \\ 2 \end{pmatrix}$, estas álgebras son escindidas y por tanto

$$\mathfrak{g}^1_{n,p} = \mathfrak{g}^1_{n_1,p} \ \oplus \ \mathbf{C}^{n-n_1} \ \Longrightarrow$$

$$Der(\mathfrak{g}^1_{n,p}) = Der(\mathfrak{g}^1_{n_1,p}) \oplus Der(\mathbf{C}^{n-n_1}) \oplus \mathcal{D}(\mathfrak{g}^1_{n_1,p}, \mathbf{C}^{n-n_1}) \oplus \mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-n_1}, \mathfrak{g}^1_{n_1,p})$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^1_{n_1,p} &= \langle X_0, X_1, \ldots, X_{2p}, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{\frac{p(p-1)}{2}} \rangle \\ \mathbf{C}^{n-n_1} &= \langle Y_{\frac{p(p-1)}{2}+1}, \ldots, Y_{n-2p-1} \rangle \end{aligned}$$

Proposición 2.39 *Una base de* $Der(\mathfrak{g}^1_{n_1,p})$, *viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^1_{n_1,p} &= \{t_{p;0,0}\} \cup \{t_{p;2i-1,0},\ 1 \leq i \leq p\} \cup \{t_{0,2i},\ 1 \leq i \leq p\} \cup \\ &\cup \ \{t_{2i-1,2j},\ 1 \leq i,j \leq p\} \cup \{t_{p;0,2i-1},\ 1 \leq i \leq p\} \cup \\ &\cup \ \{t_{p;2i-1,2j-1},\ 1 \leq i,j \leq p\} \cup \{u_{0,j},\ u_{2i-1,j},\ 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq \frac{1}{2}(p^2-p)\} \end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim(\mathfrak{g}^1_{n_1,p}) = (p+1) \cdot n_1$$

donde $n_1 = \begin{pmatrix} p+2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Demostración. Es trivial probar que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}^1_{n_1,p}$. Se va a probar que no hay otras.
Se considera la siguiente graduación para el álgebra

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{g}_1 & =\langle X_0\rangle, & \\
\mathfrak{g}_2 & =\langle X_1\rangle, & \\
\mathfrak{g}_3 & =\langle X_2\rangle, & \\
\mathfrak{g}_4 & =\langle X_3\rangle, & \\
\mathfrak{g}_{2h+1} & =\langle X_{2h}\rangle, & 2 \leq h \leq p, \\
\mathfrak{g}_{2h+1} & =\{0\}, & p+1 \leq h \leq 2p-2, \\
\mathfrak{g}_{2h} & =\langle X_{2h-1}; Y_{\frac{k}{2}(2p-k-3)+h-p},\ 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor\rangle, & 3 \leq h \leq p, \\
\mathfrak{g}_{2h} & =\langle Y_{\frac{k}{2}(2p-k-3)+h-p},\ h-p \leq k \leq \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor\rangle, & p+1 \leq h \leq 2p-1,
\end{array}
$$

Entonces

$$d \in Der(\mathfrak{g}^1_{n_1,p}) \Longrightarrow d = \sum_{l=-(4p-3)}^{4p-3} d_l$$

verificándose que $d_l(\mathfrak{g}_j) \subset \mathfrak{g}_{l+j}$. De igual forma que en los casos anteriores, se obtendrá una base de $Der(\mathfrak{g}^1_{n_1,p})$ como

$$\bigcup_{i=-(4p-3)}^{4p-3} B_i$$

y, por tanto,

$$\dim\left(Der(\mathfrak{g}^1_{n_1,p})\right) = \sum_{i=-(4p-3)}^{4p-3} \dim\langle B_i\rangle$$

Cálculo de d_0
Se debe verificar que

- $d_0(X_0) = a_0 X_0$.
- $d_0(X_{2i-1}) = a_{2i-1}X_{2i-1},\ 1 \leq i \leq 2$.
- $d_0(X_{2j-1}) = a_{2j-1}X_{2j-1} + \sum_{l=1}^{\left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor} a_{2j-1,l} Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+j-p},\ 3 \leq j \leq p$.
- $d_0(X_{2j}) = a_{2j}X_{2j},\ 1 \leq j \leq p$.

- $d_0(Y_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p}) = b_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p}X_{2h-1} + \sum_{l=1}^{\lfloor\frac{h-1}{2}\rfloor} b_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+h-p,l}Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+h-p}$,
$1 \leq j \leq \left\lfloor\frac{h-1}{2}\right\rfloor$, $3 \leq h \leq p$,

- $d_0(Y_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p}) = \sum_{l=h-p}^{\lfloor\frac{h-1}{2}\rfloor} b_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+h-p,l}Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+h-p}$,
$h-p \leq j \leq \left\lfloor\frac{h-1}{2}\right\rfloor, p+1 \leq h \leq 2p-1.$

Restricciones respecto a los parámetros:

- $b_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p} = 0,\ 1 \leq j \leq \left\lfloor\frac{h-1}{2}\right\rfloor,\ 3 \leq h \leq p$, por ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ un ideal característico.

- Se debe verificar que

$$d_0[X_0, X_{2j-1}] = [d_0(X_0), X_{2j-1}] + [X_0, d_0(X_{2j-1})]$$

y, por tanto, debe ser

$$a_{2j} = a_0 + a_{2j-1},\ 1 \leq j \leq p$$

- Teniendo en cuenta que $Y_j \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}),\ \forall j$, se verifica que:
Si $1 \leq j \leq \left\lfloor\frac{h-1}{2}\right\rfloor,\ 3 \leq h \leq p$:

$$\begin{aligned} d_0(Y_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p}) &= d_0\left([X_{2j-1}, X_{2(h-j)-1}]\right) = \\ &[d_0(X_{2j-1}), X_{2(h-j)-1}] + [X_{2j-1}, d_0(X_{2(h-j)-1})] = \\ &[a_{2j-1}X_{2j-1}, X_{2(h-j)-1}] + [X_{2j-1}, a_{2(j-h)-1}X_{2(h-j)-1}] = \\ &(a_{2j-1} + a_{2(h-j)-1})Y_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p} \end{aligned}$$

Análogamente, si $h-p \leq j \leq \left\lfloor\frac{h-1}{2}\right\rfloor,\ p+1 \leq h \leq 2p-1$:

$$d_0(Y_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p}) = d_0\left([X_{2j-1}, X_{2(h-j)-1}]\right) = (a_{2j-1} + a_{2(h-j)-1})Y_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p}$$

En definitiva se tiene el siguiente conjunto de parámetros libres

$$P_0 = \{a_0\} \cup \{a_{2j-1},\ 1 \leq j \leq p\} \cup \left\{a_{2j-1,l}, 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor, 3 \leq j \leq p\right\}$$

Por lo tanto

$$\dim(B_0) = 1 + p + \sum_{j=3}^{p} \left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}
\sum_{j=3}^{p} \left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor &= 1+1+2+2+\ldots+\left\lfloor \frac{p-3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p-2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor = \\
&= \begin{cases} 1+1+2+2+\ldots+2\frac{p-2}{2}, & p \text{ par} \\ 1+1+2+2+\ldots+2\frac{p-3}{2}+\frac{p-1}{2}, & p \text{ impar} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2\sum_{l=1}^{\frac{p-2}{2}} l = \frac{1}{4}(p^2-2p), & p \text{ par} \\ 2\sum_{l=1}^{\frac{p-3}{2}} l + \frac{p-1}{2} = \frac{1}{4}(p^2-2p+1) & p \text{ impar} \end{cases}
\end{aligned}$$

Por consiguiente se tiene que

$$\dim(B_0) = \begin{cases} 1+p+\frac{1}{4}(p^2-2p) = \frac{1}{4}(p^2+2p+4), & p \text{ par} \\ 1+p+\frac{1}{4}(p^2-2p+1) = \frac{1}{4}(p^2+2p+5), & p \text{ impar} \end{cases}$$

Una base de B_0, vendrá dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_0 &= \{t_{p;0,0}\} \cup \{t_{p;2j-1,2j-1},\ 1 \leq j \leq p\} \cup \\
&\cup \left\{u_{2j-1,\frac{l}{2}(2p-l-3)+j-p},\ 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor,\ 3 \leq j \leq p\right\}
\end{aligned}$$

Cálculo de d_{2k-1}, $1 \leq k \leq 2p-1$

Se debe verificar que

- $$d_{2k-1}(X_0) \in \mathfrak{g}_{2k} = \begin{cases} \langle X_1 \rangle, & k=1, \\ \langle X_3 \rangle, & k=2, \\ \langle X_{2k-1}; Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+k-p},\ 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor \rangle, & 3 \leq k \leq p, \\ \langle Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+k-p},\ k-p \leq l \leq \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor \rangle, & p+1 \leq k \leq 2p-1. \end{cases}$$

- $d_{2k-1}(X_{2j-1}) \in \mathfrak{g}_{2(k+j)-1} = \begin{cases} \langle X_{2(k+j-1)} \rangle, & 2 \leq k+j-1 \leq p, \\ \{0\}, & p+1 \leq k+j-1 \leq 2p-2. \end{cases}$

- $d_{2k-1}(X_{2j}) \in \mathfrak{g}_{2(k+j)} = \begin{cases} \langle X_3 \rangle, & j=k=1, \\ \langle X_{2(k+j)-1}; Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+k+j-p}, \ 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{k+j-1}{2} \right\rfloor \rangle, & \\ & 3 \leq k+j \leq p, \\ \langle Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+k+j-p}, \ k+j-p \leq l \leq \left\lfloor \frac{k+j-1}{2} \right\rfloor \rangle, & \\ & p+1 \leq k+j \leq 2p-1. \end{cases}$

- $d_{2k-1}(Y_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p}) \in \mathfrak{g}_{2(k+h)-1} = \begin{cases} \langle X_{2(k+h-1)} \rangle, & 2 \leq k+h-1 \leq p, \\ \{0\}, & p+1 \leq k+h-1 \leq 2p-2. \end{cases}$,
  siendo
  $1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor$, si $3 \leq h \leq p$,
  $h-p \leq j \leq \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor$, si $p+1 \leq h \leq 2p-1$.

Por lo tanto

- $d_1(X_0) = a_0^1 X_1$

- $d_3(X_0) = a_0^3 X_3$

- $d_{2k-1}(X_0) = \begin{cases} a_0^{2k-1} X_{2k-1} + \displaystyle\sum_{l=1}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} a_{0,l}^{2k-1} Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+k-p}, & 3 \leq k \leq p, \\ \displaystyle\sum_{l=k-p}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} a_{0,l}^{2k-1} Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+k-p}, & p+1 \leq k \leq 2p-1. \end{cases}$

- Si $1 \leq j \leq p$, entonces

$$d_{2k-1}(X_{2j-1}) = \begin{cases} a_{2j-1}^{2k-1} X_{2(k+j-1)}, & 2 \leq k+j \leq p+1, \\ 0, & p+2 \leq k+j \leq 2p-1. \end{cases}$$

- $d_1(X_2) = a_2^1 X_3$,

- Si $2 \leq j \leq p$, entonces

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

$$d_{2k-1}(X_{2j}) = \begin{cases} a_{2j}^{2k-1} X_{2(k+j)-1} + \displaystyle\sum_{l=1}^{\lfloor \frac{k+j-1}{2} \rfloor} a_{2j,l}^{2k-1} Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+k+j-p}, \\ \qquad 3 \leq k+j \leq p, \\ \displaystyle\sum_{l=k+j-p}^{\lfloor \frac{k+j-1}{2} \rfloor} a_{2j,l}^{2k-1} Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+k+j-p}, \\ \qquad p+1 \leq k+j \leq 2p-1. \end{cases}$$

- $d_{2k-1}(Y_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p}) = \begin{cases} b_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p} X_{2(k+h-1)}, & 3 \leq k+h \leq p+1, \\ 0, & p+2 \leq k+h \leq 2p-1. \end{cases}$

  siendo
  $1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor$, si $3 \leq h \leq p$,
  $h-p \leq j \leq \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor$, si $p+1 \leq h \leq 2p-1$.

Restricciones para los parámetros:

- $a_{2j}^{2k-1} = 0, \ 1 \leq j \leq p-k, 1 \leq k \leq p$, por ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ un ideal característico.

- Se debe verificar que

$$d_{2k-1}[X_0, X_{2j-1}] = [d_{2k-1}(X_0), X_{2j-1}] + [X_0, d_{2k-1}(X_{2j-1})]$$

  Ahora bien, se tiene que $d_{2k-1}(X_{2j-1}) \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, si $2 \leq k+j \leq p+1$, y que $d_{2k-1}(X_{2j-1}) = 0$, si $p+2 \leq k+j \leq 2p$, y, por tanto, se verifica que $[X_0, d_{2k-1}(X_{2j-1})] = 0, \ 1 \leq j \leq p$.
  Por otra parte, puesto que $Y_j \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, $\forall j$, se tiene que

$$[d_{2k-1}(X_0), X_{2j-1}] = \begin{cases} \left[a_0^{2k-1} X_{2k-1}, X_{2j-1}\right], \text{ si } 3 \leq k \leq p, \\ 0, \text{ si } p+1 \leq k \leq 2p-1. \end{cases}$$

  Por lo tanto, se verifica que

$$d_{2k-1}(X_{2j}) = \begin{cases} a_0^{2k-1} Y_{\frac{k}{2}(2p-k-3)+k+j-p}, & \text{si } 2 \leq k < j \leq p, \\ 0, & \text{si } j = k, \\ -a_0^{2k-1} Y_{\frac{k}{2}(2p-k-3)+k+j-p}, & \text{si } 2 \leq j < k \leq p, \\ 0, & \text{si } p+1 \leq k \leq 2p-1. \end{cases}$$

- Teniendo en cuenta que $d_{2k-1}(X_{2j-1}) \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, si $3 \leq k+j \leq p+1$, y que $d_{2k-1}(X_{2j-1}) = 0$, si $3 \leq k+j \leq 2p$, se verifica que

$$d_{2k-1}(Y_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p}) = d_{2k-1}\left([X_{2j-1}, X_{2(h-j)-1}]\right) = 0$$

siendo
$1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor$, si $3 \leq h \leq p$,
$h-p \leq j \leq \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor$, si $p+1 \leq h \leq 2p-1$.

En definitiva, se tienen los siguientes conjuntos de parámetros libres

- Si $k = 1$:

$$P_1 = \{a_0^1\} \cup \{a_{2j-1}^1,\ 1 \leq j \leq p\}$$

Por lo tanto

$$\dim(B_1) = 1 + p$$

Una base de B_1, vendrá dada por

$$\mathcal{B}_1 = \{\ t_{p;0,1};\ t_{2j-1,2j},\ 1 \leq j \leq p\}$$

- Si $2 \leq k \leq p$:

$$P_{2k-1} = \{a_0^{2k-1}\} \cup \{a_{2j-1}^{2k-1},\ 1 \leq j \leq p-k+1\} \cup \left\{a_{0,l}^{2k-1}, 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor\right\}$$

Por lo tanto

$$\dim(B_{2k-1}) = 1 + (p-k+1) + \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor,\ 2 \leq k \leq p.$$

Una base de $B_{2k-1}, 2 \leq k \leq p$, vendrá dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{2k-1} &= \{\ t_{p;0,2k-1}\} \cup \{t_{2j-1,2(k+j-1)},\ 1 \leq j \leq p-k+1\} \cup \\ &\cup \left\{u_{0,\frac{l}{2}(2p-l-3)+k-p},\ 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor\right\}\end{aligned}$$

- Si $p+1 \leq k \leq 2p-1$:

$$P_{2k-1} = \left\{a_{0,l}^{2k-1}, k-p \leq l \leq \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor\right\}$$

Por lo tanto

$$\dim(B_{2k-1}) = \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor - (k-p) + 1, \qquad p+1 \leq k \leq 2p-1.$$

Una base de B_{2k-1}, $p+1 \leq k \leq 2p-1$, vendrá dada por

$$\mathcal{B}_{2k-1} = \left\{ u_{0,\frac{l}{2}(2p-l-3)+k-p},\ k-p \leq l \leq \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor \right\}$$

Cálculo de d_{2k}, $1 \leq k \leq 2p-2$

Se debe verificar que

- $d_{2k}(X_0) \in \mathfrak{g}_{2k+1} = \begin{cases} \langle X_{2k} \rangle, & 1 \leq k \leq p, \\ \{0\}, & p+1 \leq k \leq 2p-2. \end{cases}$

- Si $1 \leq j \leq p$, entonces
$$d_{2k}(X_{2j}) \in \mathfrak{g}_{2(k+j)+1} = \begin{cases} \langle X_{2(k+j)} \rangle, & 2 \leq k+j \leq p, \\ \{0\}, & p+1 \leq k+j \leq 2p-2. \end{cases}$$

- Si $1 \leq j \leq p$, entonces
$$d_{2k}(X_{2j-1}) \in \mathfrak{g}_{2(k+j)} = \begin{cases} \langle X_3 \rangle, & j = k = 1, \\ \langle X_{2(k+j)-1}; Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+k+j-p},\ 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{k+j-1}{2} \right\rfloor \rangle, \\ \qquad 3 \leq k+j \leq p, \\ \langle Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+k+j-p},\ k+j-p \leq l \leq \left\lfloor \frac{k+j-1}{2} \right\rfloor \rangle, \\ \qquad p+1 \leq k+j \leq 2p-1. \end{cases}$$

- $d_{2k}(Y_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p}) \in \mathfrak{g}_{2(k+h)} =$
$$\begin{cases} \langle X_{2(k+h)-1}; Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+k+h-p},\ 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{k+h-1}{2} \right\rfloor \rangle, & 3 \leq k+h \leq p, \\ \langle Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+k+h-p},\ k+h-p \leq l \leq \left\lfloor \frac{k+h-1}{2} \right\rfloor \rangle, & p+1 \leq k+h \leq 2p-1. \end{cases}$$
siendo
$1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor$, si $3 \leq h \leq p$,
$h-p \leq j \leq \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor$, si $p+1 \leq h \leq 2p-1$.

Por lo tanto

- $d_{2k}(X_0) = \begin{cases} a_0^{2k} X_{2k}, & 1 \leq k \leq p, \\ 0, & p+1 \leq k \leq 2p-2. \end{cases}$

- Si $1 \leq j \leq p$, entonces
$$d_{2k}(X_{2j}) = \begin{cases} a_{2j}^{2k} X_{2(k+j)}, & 2 \leq k+j \leq p, \\ 0, & p+1 \leq k+j \leq 2p-2. \end{cases}$$

- Si $1 \leq j \leq p$, entonces
$d_2(X_1) = a_1^2 X_3$,
$$d_{2k}(X_{2j-1}) = \begin{cases} a_{2j-1}^{2k} X_{2(k+j)-1} + \displaystyle\sum_{l=1}^{\lfloor \frac{k+j-1}{2} \rfloor} a_{2j-1,l}^{2k} Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+k+j-p}, \\ \qquad 3 \leq k+j \leq p, \\ \displaystyle\sum_{l=k+j-p}^{\lfloor \frac{k+j-1}{2} \rfloor} a_{2j-1,l}^{2k} Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+k+j-p}, \\ \qquad p+1 \leq k+j \leq 2p-1. \end{cases}$$

- $$d_{2k}(Y_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p}) = \begin{cases} b_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p}^{2k} X_{2(k+h)-1} + \displaystyle\sum_{l=1}^{\lfloor \frac{k+h-1}{2} \rfloor} b_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p,l}^{2k} Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+h+k-} \\ \displaystyle\sum_{l=k+h-p}^{\lfloor \frac{k+h-1}{2} \rfloor} b_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p,l}^{2k} Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+k+h-p}, \\ \qquad p+1 \leq k+h \leq 2p-1. \end{cases}$$

  siendo
  $1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor$, si $3 \leq h \leq p$,
  $h-p \leq j \leq \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor$, si $p+1 \leq h \leq 2p-1$.

Restricciones para los parámetros:

- $b_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p}^{2k} = 0,\ 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor,\ 3 \leq h \leq p$, por ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ un ideal característico.

- Se debe verificar que
$$d_{2k}[X_0, X_{2j-1}] = [d_{2k}(X_0), X_{2j-1}] + [X_0, d_{2k}(X_{2j-1})]$$
Ahora bien, se tiene que $d_{2k}(X_0) \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, si $1 \leq k \leq p$, y que $d_{2k}(X_0) = 0$, si $p+1 \leq k \leq 2p-2$ y, por tanto, se verifica que $[d_{2k}(X_0), X_{2j-1}] = 0,\ 1 \leq j \leq p$. Por otra parte, puesto que $Y_j \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}),\ \forall j$, se tiene que
$$[X_0, d_{2k}(X_{2j-1})] = \begin{cases} \left[X_0, a_{2j-1}^{2k} X_{2(j+k)-1}\right], & \text{si } 2 \leq k+j \leq p, \\ 0, & \text{si } p+1 \leq k+j \leq 2p-1. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$d_{2k}(X_{2j}) = \begin{cases} a^{2k}_{2j-1}X_{2(k+j)}, & \text{si } 2 \leq k+j \leq p, \\ 0, & \text{si } p+1 \leq k \leq 2p-1. \end{cases}$$

Es decir

$$a^{2k}_{2j} = a^{2k}_{2j-1},\ 1 \leq j \leq p-k,\ 1 \leq k \leq p.$$

- Teniendo en cuenta que $Y_j \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}),\ \forall j$, se verifica que

$$\begin{aligned} d_{2k}(Y_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p}) &= d_{2k}\left([X_{2j-1}, X_{2(h-j)-1}]\right) = \\ & [d_{2k}(X_{2j-1}), X_{2(h-j)-1}] + [X_{2j-1}, d_{2k}(X_{2(h-j)-1})] \end{aligned}$$

siendo

$$[d_{2k}(X_{2j-1}), X_{2(h-j)-1}] = [a^{2k}_{2j-1}X_{2(k+j)-1}, X_{2(h-j)-1}] =$$
$$= \begin{cases} a^{2k}_{2j-1}Y_{\frac{k+j}{2}(2p-k+j-3)+h+k-p}, & 3 \leq j \leq p-k, \\ 0, & p-k+1 \leq j \leq 2p-1. \end{cases}$$

$$[X_{2j-1}, d_{2k}(X_{2(h-j)-1})] = [X_{2j-1}, a^{2k}_{2(h-j)-1}X_{2(k+h-j)-1}] =$$
$$= \begin{cases} a^{2k}_{2(h-j)-1}Y_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+k+h-p}, & 3 \leq k+h-j \leq p, \\ 0, & p+1 \leq k+h-j \leq 2p-1. \end{cases}$$

donde

$1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor$, si $3 \leq h \leq p$,

$h-p \leq j \leq \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor$, si $p+1 \leq h \leq 2p-1$.

En definitiva se tienen los siguientes conjuntos de parámetros libres:

- Si $k=1$:

$$\begin{aligned} P_2 &= \{a^2_0\} \cup \{a^2_{2j-1},\ 1 \leq j \leq p-1\} \\ &\cup \left\{a^2_{2j-1,l}, 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor,\ 2 \leq j \leq p-1\right\} \cup \left\{a^2_{2p-1,l}, 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor\right\} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\dim(B_2) = 1 + (p-1) + \sum_{j=2}^{p-1} \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor = p + \sum_{j=2}^{p} \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor$$

Ahora bien

$$\sum_{j=2}^{p}\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{2}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{3}{2}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\frac{p-2}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor=$$
$$=\begin{cases} 2+4+\ldots+(p-2)+\frac{p}{2}, & p \text{ par}\\ 2+4+\ldots+(p-3)+(p-1), & p \text{ impar}\end{cases}$$
$$=\begin{cases} \dfrac{1}{4}p^2, & p \text{ par}\\ \dfrac{1}{4}(p^2-1), & p \text{ impar}\end{cases}$$

Por consiguiente, se tiene que

$$\dim(B_2)=\begin{cases} p+\dfrac{1}{4}p^2=\dfrac{1}{4}(p^2+4p), & p \text{ par}\\ p+\dfrac{1}{4}(p^2-1)=\dfrac{1}{4}(p^2+4p-1), & p \text{ impar}\end{cases}$$

- Si $k=p$:
  $P_{2p}=\{a_0^{2p}\}\cup\left\{a_{2j-1,l}^{2p},\ j\leq l\leq\left\lfloor\frac{p+j-1}{2}\right\rfloor p, 1\leq j\leq p\right\}$
  Por lo tanto

$$\dim(B_{2p})=1+\sum_{j=1}^{p}\left(\left\lfloor\frac{p+j-1}{2}\right\rfloor-j+1\right)=1+p-\frac{p(p+1)}{2}+\sum_{j=1}^{p}\left\lfloor\frac{p+j-1}{2}\right\rfloor$$

Ahora bien

$$\sum_{j=1}^{p}\left\lfloor\frac{p+j-1}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{p+1}{2}\right\rfloor+\ldots++\left\lfloor\frac{2p-2}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2p-1}{2}\right\rfloor=$$
$$=\begin{cases} p+(p+2)+\ldots+(p+(p-2)), & p \text{ par}\\ p+(p+2)+\ldots+(p+(p-3))+(p-1), & p \text{ impar}\end{cases}$$
$$=\begin{cases} \dfrac{1}{4}(3p^2-2p), & p \text{ par}\\ \dfrac{1}{4}(3p^2-2p-1) & p \text{ impar}\end{cases}$$

Por consiguiente, se tiene que

$$\dim(B_{2p})=\begin{cases} \dfrac{(1+p)(2-p)}{2}+\dfrac{1}{4}(3p^2-2p)=\dfrac{1}{4}(p^2+4), & p \text{ par}\\ \dfrac{(1+p)(2-p)}{2}+\dfrac{1}{4}(3p^2-2p-1)=\dfrac{1}{4}(p^2+3), & p \text{ impar}\end{cases}$$

- Si $2 \leq k \leq p-1$:

$$\begin{aligned}
P_{2k} &= \{a_0^{2k}\} \cup \{a_{2j-1}^{2k},\ 1 \leq j \leq p-k\} \cup \\
&\cup \ \{a_{2j-1,l}^{2k}, 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{k+j-1}{2} \right\rfloor,\ 1 \leq j \leq p-k\} \cup \\
&\cup \ \{a_{2j-1,l}^{2k}, k+j-p \leq l \leq \left\lfloor \frac{k+j-1}{2} \right\rfloor,\ p-k+1 \leq j \leq p\}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $2 \leq k \leq p-1$:

$$\begin{aligned}
\dim(B_{2k}) &= 1+(p-k)+\sum_{j=1}^{p-k} \left\lfloor \frac{k+j-1}{2} \right\rfloor + \sum_{j=p-k+1}^{p} \left(\left\lfloor \frac{k+j-1}{2} \right\rfloor - (k+j-p)+1 \right) = \\
&= 1+p-k+\sum_{j=1}^{p} \left\lfloor \frac{k+j-1}{2} \right\rfloor - \sum_{j=p-k+1}^{p} (k+j-p-1).
\end{aligned}$$

Ahora bien

$$\sum_{j=p-k+1}^{p} (j-p+k-1) = \sum_{l=0}^{k-1} l = \frac{k(k-1)}{2}$$

$$\sum_{j=1}^{p} \left\lfloor \frac{k+j-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{k+p-2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+p-1}{2} \right\rfloor =$$

$$= \begin{cases} k+(k+2)+\ldots+(k+(p-2)), & p \text{ par} \\ k+(k+2)+\ldots+(k+(p-3))+\left\lfloor \frac{k+p-1}{2} \right\rfloor, & p \text{ impar} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} k+\frac{1}{4}(p-2)(p+2k), & p \text{ par} \\ k+\frac{1}{4}(p-3)(p-1+2k)+\left\lfloor \frac{k+p-1}{2} \right\rfloor, & p \text{ impar} \end{cases}$$

Por consiguiente, se tiene que

$$\dim(B_{2k}) = \begin{cases} 1+p-k-\frac{k(k-1)}{2}+k+\frac{1}{4}(p-2)(p+2k), & p \text{ par} \\ 1+p-k-\frac{k(k-1)}{2}+k+\frac{1}{4}(p-3)(p-1+2k)+\left\lfloor \frac{k+p-1}{2} \right\rfloor, & p \text{ impar} \end{cases}$$

$$\dim(B_{2k}) = \begin{cases} \frac{1}{4}(p^2+2pk+2p-2k^2-2k+4), & p \text{ par} \\ \frac{1}{4}(p^2+2pk-2k^2-4k+7)+\left\lfloor \frac{k+p-1}{2} \right\rfloor, & p \text{ impar} \end{cases}$$

- Si $p+1 \leq k \leq 2p-2$:
  $P_{2k} = \{a^{2k}_{2j-1,l}, k+j-p \leq l \leq \left\lfloor \frac{k+j-1}{2} \right\rfloor, 1 \leq j \leq 2p-k-1\}$

Por lo tanto, si $p+1 \leq k \leq 2p-2$

$$\dim(B_{2k}) = \sum_{j=1}^{2p-k-1} \left(\left\lfloor \frac{k+j-1}{2} \right\rfloor - (k+j-p)+1 \right) =$$
$$\sum_{j=1}^{2p-k-1} \left\lfloor \frac{k+j-1}{2} \right\rfloor - \sum_{j=1}^{2p-k-1} (k+j-p-1).$$

Ahora bien

$$\sum_{j=1}^{2p-k-1} (j-p+k-1) = \frac{(2p-k-1)(k-2)}{2}$$

$$\sum_{j=1}^{2p-k-1} \left\lfloor \frac{k+j-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{k+2p-k-3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+2p-k-2}{2} \right\rfloor =$$
$$= \begin{cases} k+(k+2)+\ldots+(k+(2p-k-4))+(p-1), & k \text{ par} \\ k+(k+2)+\ldots+(k+(2p-k-3)), & k \text{ impar} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{4}(4p^2-k^2+2k-8p+4), & k \text{ par} \\ \frac{1}{4}(4p^2-k^2+2k-8p+3) & k \text{ impar} \end{cases}$$

Por consiguiente, se tiene que

$$\dim(B_{2k}) = \begin{cases} \frac{1}{4}(4p^2+k^2-4pk), & k \text{ par} \\ \frac{1}{4}(4p^2+k^2-4pk-1), & k \text{ impar} \end{cases}$$

Cálculo de $d_{-(2k-1)}$, $1 \leq k \leq 2p-1$

Se debe verificar que

- $d_{-(2k-1)}(X_0) = 0, \; 1 \leq k \leq 2p-1.$

- $d_{-(2k-1)}(X_{2j-1}) \in \mathfrak{g}_{2(j-k)+1} = \begin{cases} \langle X_0 \rangle, & j = k, \\ \langle X_{2(j-k)} \rangle, & 1 \leq j - k \leq p, \\ \{0\}, & p + 1 \leq j - k \leq 2p - 2. \end{cases}$

  Por tanto

$$d_{-(2k-1)}(X_{2j-1}) \in \mathfrak{g}_{2(j-k)+1} = \begin{cases} \langle X_{2(j-k)} \rangle, & k \leq j \leq p, \\ \{0\}, & j < k. \end{cases}$$

- $d_{-(2k-1)}(X_{2j}) \in \mathfrak{g}_{2(j-k+1)} = \begin{cases} \langle X_1 \rangle, & j = k, \\ \langle X_3 \rangle, & j = k+1, \\ \langle X_{2(j-k+1)-1}; Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+j-k+1-p}, \ 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{j-k}{2} \right\rfloor \rangle, & \\ \qquad k+2 \leq j \leq p, & \\ \{0\}, & j < k. \end{cases}$

- $d_{-(2k-1)}(Y_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p}) \in \mathfrak{g}_{2(h-k)+1} = \begin{cases} \langle X_{2(h-k)} \rangle, & 0 \leq h - k \leq p, \\ \{0\}, & p + 1 \leq h - k \leq 2p - 1. \end{cases}$

  siendo

$$\begin{array}{l} 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor, \text{ si } 3 \leq h \leq p, \\ h - p \leq j \leq \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor, \text{ si } p+1 \leq h \leq 2p-1. \end{array}$$

  es decir

$$d_{-(2k-1)}\left(Y_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p}\right) \in \begin{cases} \langle X_{2(h-k)} \rangle, & k \leq h \leq p+k, \\ \{0\}, & p+k+1 \leq h \leq 2p-1 \text{ ó } h < k. \end{cases}$$

  siendo

$$\begin{array}{l} 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor, \text{ si } 3 \leq h \leq p, \\ h - p \leq j \leq \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor, \text{ si } p+1 \leq h \leq 2p-1. \end{array}$$

Por lo tanto

- $d_{-(2k-1)}(X_0) = 0, \ 1 \leq k \leq 2p-1.$

- Si $1 \leq j \leq p$, entonces
$$d_{-(2k-1)}(X_{2j-1}) = \begin{cases} a_{2j-1}^{-(2k-1)} X_{2(j-k)}, & k \leq j \leq p, \\ 0, & j < k. \end{cases}$$

- Si $1 \leq j \leq p$, entonces
$$d_{-(2k-1)}(X_{2j}) = \begin{cases} a_{2k}^{-(2k-1)} X_1, & j = k, \\ a_{2k+2}^{-(2k-1)} X_3, & j = k+1, \\ a_{2j}^{-(2k-1)} X_{2(j-k+1)-1} + \sum\limits_{l=1}^{\lfloor \frac{j-k}{2} \rfloor} a_{2j,l}^{-(2k-1)} Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+j-k+1-p}, & \\ \qquad k+2 \leq j \leq p, & \\ 0, \quad j < k. & \end{cases}$$

- $d_{-(2k-1)}\left(Y_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p}\right) = \begin{cases} b_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p} X_{2(h-k)}, & k \leq h \leq p+k, \\ 0, & p+k+1 \leq h \leq 2p-1 \text{ ó } h < k. \end{cases}$

  siendo
$$\begin{aligned} &1 \leq j \leq \left\lfloor \tfrac{h-1}{2} \right\rfloor, \text{ si } 3 \leq h \leq p, \\ &h-p \leq j \leq \left\lfloor \tfrac{h-1}{2} \right\rfloor, \text{ si } p+1 \leq h \leq 2p-1. \end{aligned}$$

Restricciones para los parámetros:

- $a_{2j}^{-(2k-1)} = 0, \ k \leq j \leq p, \ 1 \leq k \leq p$, por ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ un ideal característico.

- Se debe verificar que
$$d_{-(2k-1)}[X_0, X_{2j-1}] = [d_{-(2k-1)}(X_0), X_{2j-1}] + [X_0, d_{-(2k-1)}(X_{2j-1})]$$
  Ahora bien, se tiene que $d_{-(2k-1)}(X_{2j-1}) \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, si $k \leq j \leq p$, y que $d_{2k-1}(X_{2j-1}) = 0$, si $j < k$. Por tanto $[X_0, d_{-(2k-1)}(X_{2j-1})] = 0, \ 1 \leq j \leq p$. Por otra parte, puesto que $d_{-(2k-1)}(X_0) = 0$, se tiene que
$$[d_{-(2k-1)}(X_0), X_{2j-1}] = 0, \ 1 \leq j \leq p.$$
  En definitiva
$$d_{-(2k-1)}(X_{2j}) = 0, \ 1 \leq j \leq p.$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

- Teniendo en cuenta que $d_{-(2k-1)}(X_{2j-1}) \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, si $k \leq j \leq p$, que $d_{-(2k-1)}(X_{2j-1}) = 0$, si $j < k$, y que $d_{-(2k-1)}(X_{2k-1}) = a_{-(2k-1)}^{-(2k-1)} X_0$, se verifica que

$$d_{-(2k-1)}\left(Y_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p}\right) = d_{-(2k-1)}\left([X_{2j-1}, X_{2(h-j)-1}]\right) =$$

$$\begin{cases} a_{2k-1}^{-2(k-1)} X_{2(h-k)}, & j = k, \\ -a_{2k-1}^{-2(k-1)} X_{2(h-k)}, & j = h-k, \\ 0, & j \neq k,\ j \neq h-k. \end{cases}$$

siendo
$1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor$ si $3 \leq h \leq p$,
$h - p \leq j \leq \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor$ si $p+1 \leq h \leq 2p-1$.

En definitiva se tienen el siguiente conjunto de parámetros libres

$$P_{-(2k-1)} = \begin{cases} \{a_{2j-1}^{-(2k-1)},\ k \leq j \leq p\}, & 1 \leq k \leq p, \\ \emptyset, & p+1 \leq k \leq 2p-1 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\dim(B_{-(2k-1)}) = \begin{cases} p-k+1, & 1 \leq k \leq p, \\ 0, & p+1 \leq k \leq 2p-1. \end{cases}$$

Una base de $B_{2k-1}, 2 \leq k \leq p$, vendrá dada por

$$\mathcal{B}_{-(2k-1)} = \{\ t_{p;2k-1,0}\ t_{2j-1,2(j-k)},\ k+1 \leq j \leq p\}$$

Cálculo de d_{-2k}, $1 \leq k \leq 2p-2$

Se debe verificar que

- $d_{-2k}(X_0) = 0,\ 1 \leq k \leq 2p-2.$

- Si $1 \leq j \leq p$, entonces
$$d_{-2k}(X_{2j}) \in \mathfrak{g}_{2(j-k)+1} = \begin{cases} \langle X_{2(j-k)} \rangle, & k \leq j \leq p, \\ \{0\}, & j < k. \end{cases}$$

- Si $1 \le j \le p$, entonces
$$d_{-2k}(X_{2j-1}) \in \mathfrak{g}_{2(j-k)} = \begin{cases} \{0\}, & j \le k, \\ \langle X_1 \rangle, & j = k+1, \\ \langle X_3 \rangle, & j = k+2, \\ \langle X_{2(j-k)-1}; Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+j-k-p}, \ 1 \le l \le \left\lfloor \frac{j-k-1}{2} \right\rfloor \rangle, & \\ \qquad k+3 \le j \le p. & \end{cases}$$

- $d_{-2k}(Y_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p}) \in \mathfrak{g}_{2(h-k)} =$
$$\begin{cases} \langle X_1 \rangle, & h-k=1, \\ \langle X_3 \rangle, & h-k=2, \\ \langle X_{2(h-k)-1}; Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+h-k-p}, \ 1 \le l \le \left\lfloor \frac{h-k-1}{2} \right\rfloor \rangle, & 3 \le h-k \le p, \\ \langle Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+h-k-p}, \ h-k-p \le l \le \left\lfloor \frac{h-k-1}{2} \right\rfloor \rangle, & p+1 \le h-k \le 2p-1. \end{cases}$$

  siendo
$$1 \le j \le \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor, \text{ si } 3 \le h \le p,$$
$$h-p \le j \le \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor, \text{ si } p+1 \le h \le 2p-1.$$

Por lo tanto

- $d_{-2k}(X_0) = 0, \ 1 \le k \le 2p-2$

- Si $1 \le j \le p$, entonces
$$d_{-2k}(X_{2j}) = \begin{cases} a_{2j}^{-2k} X_{2(j-k)}, & k \le j \le p, \\ \{0\}, & j < k. \end{cases}$$

- Si $1 \le j \le p$, entonces
$$d_{-2k}(X_{2j-1}) = \begin{cases} a_{2k+1}^{-2k} X_1, & j = k+1, \\ a_{2k+3}^{-2k} X_3, & j = k+2, \\ a_{2j-1}^{-2k} X_{2(j-k)-1} + \sum_{l=1}^{\left\lfloor \frac{j-k-1}{2} \right\rfloor} a_{2j-1,l}^{-2k} Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+j-k-p}, & \\ \qquad k+3 \le j \le p, & \\ 0, & j \le k. \end{cases}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

- $d_{-2k}(Y_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p}) = \begin{cases} b^{-2k}_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p} X_{2(h-k)-1} + \\ \quad \displaystyle\sum_{l=1}^{\left\lfloor \frac{h-k-1}{2} \right\rfloor} b^{-2k}_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+h-k-p} Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+h-k-p}, \\ \qquad 3 \le h-k \le p+1, \\ \displaystyle\sum_{l=h-p}^{\left\lfloor \frac{h-k-1}{2} \right\rfloor} b^{-2k}_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+h-k-p} Y_{\frac{l}{2}(2p-l-3)+h-k-p}, \\ \qquad p+1 \le h-k \le 2p-1. \end{cases}$

  siendo
  $1 \le j \le \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor$, si $3 \le k \le h \le p$,
  $h-p \le j \le \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor$, si $p+1 \le k \le h \le 2p-1$.

Restricciones para los parámetros:

- $b^{-2k}_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p} = 0,\ 1 \le j \le \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor,\ 3 \le k \le h \le p$, por ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ un ideal característico.

- Se debe verificar

$$d_{-2k}[X_0, X_{2j-1}] = [d_{-2k}(X_0), X_{2j-1}] + [X_0, d_{-2k}(X_{2j-1})]$$

  Ahora bien, se tiene que $d_{-2k}(X_0) = 0$, si $1 \le k \le 2p-2$, Por tanto, se verifica que $[d_{-2k}(X_0), X_{2j-1}] = 0,\ 1 \le j \le p$.
  Por otra parte, puesto que $Y_j \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}),\ \forall j$, se tiene que

$$[X_0, d_{-2k}X_{2j-1}] = \begin{cases} \left[X_0, a^{-2k}_{2j-1} X_{2(j-k)-1}\right], & \text{si } k+1 \le j \le p, \\ 0, \text{ si } j \le k. \end{cases}$$

  En definitiva

$$a^{-2k}_{2j} = a^{-2k}_{2j-1},\ k+1 \le j \le p,\ 1 \le k \le p.$$

- Teniendo en cuenta que $Y_j \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}),\ \forall j$, se verifica que

$$d_{-2k}\left(Y_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-p}\right) = d_{-2k}\left([X_{2j-1}, X_{2(h-j)-1}]\right) =$$

$$[d_{-2k}(X_{2j-1}), X_{2(h-j)-1}] + [X_{2j-1}, d_{-2k}(X_{2(h-j)-1})]$$

siendo

$$[d_{-2k}(X_{2j-1}), X_{2(h-j)-1}] = [a_{2j-1}^{-2k} X_{2(j-k)-1}, X_{2(h-j)-1}] =$$

$$= \begin{cases} a_{2j-1}^{-2k}[X_{2(j-k)-1}, X_{2(h-j)-1}], & k+1 \leq j \leq p, \\ 0, & j \leq k. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a_{2j-1}^{-2k} Y_{\frac{j-k}{2}(2p-(j-k)-3)+h-k-p}, & \begin{cases} 1 \leq j-k \leq \left\lfloor \frac{h-k-1}{2} \right\rfloor, & 3 \leq h-k \leq p, \\ h-p \leq j-k \leq \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor, & p+1 \leq h \leq 2p-1 \end{cases} \\ 0, & j \leq k. \end{cases}$$

$$[X_{2j-1}, d_{-2k}(X_{2(h-j)-1})] = [X_{2j-1}, a_{2(h-j)-1}^{-2k} X_{2(h-k-j)-1}] =$$

$$= \begin{cases} a_{2(h-j)j-1}^{-2k}[X_{2j-1}, X_{2(h-j-k)-1}], & k+1 \leq h-j \leq p, \\ 0, & h < k+j+1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a_{2(h-j)-1}^{-2k} Y_{\frac{j}{2}(2p-j-3)+h-k-p}, & \begin{cases} 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{h-k-1}{2} \right\rfloor, & 3 \leq h-k \leq p, \\ h-p \leq j \leq \left\lfloor \frac{h-k-1}{2} \right\rfloor, & p+1 \leq h \leq 2p-1 \end{cases} \\ 0, & h < k+j+1. \end{cases}$$

En definitiva se tienen los siguientes conjuntos de parámetros libres

- Si $1 \leq k \leq p$:
  $P_{-2k} = \{a_{2j-1}^{-2k},\ k+1 \leq j \leq p\} \cup \{a_{2j-1,l}^{-2k}, 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{j-k-1}{2} \right\rfloor,\ 3+k \leq j \leq p\}$

Por lo tanto, si $1 \leq k \leq p$
$\dim(B_{-2k}) = (p-k) + \sum_{j=3+k}^{p} \left\lfloor \dfrac{j-k-1}{2} \right\rfloor.$

Ahora bien

$$\sum_{j=3+k}^{p} \left\lfloor \frac{j-k-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{p-k-2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p-k-1}{2} \right\rfloor =$$

$$= \begin{cases} 2(1+2+\ldots+(p-k-2)), & p-k \text{ par} \\ 2(1+2+\ldots+(p-k-3)) + \left\lfloor \frac{p-k-1}{2} \right\rfloor, & p-k \text{ impar} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4}(p^2 - 2pk - 2p + k^2 + 2k), & p-k \text{ par} \\ \frac{1}{4}(p^2 - 2pk - 2p + k^2 + 2k + 1) & p-k \text{ impar} \end{cases}$$

Por consiguiente, se tiene que

$$\dim(B_{-2k}) = \begin{cases} \frac{1}{4}(p^2 - 2pk + 2p + k^2 - 2k), & p-k \text{ par} \\ \frac{1}{4}(p^2 - 2pk + 2p + k^2 - 2k + 1), & p-k \text{ impar} \end{cases}$$

- Si $p+1 \leq k \leq 2p-2$: $\quad \dim(B_{-2k}) = 0$

Una base de B_{-2k}, $1 \leq k \leq p$, vendrá dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{-2k} &= \{\, t_{p;2j-1,2(j-k)-1},\ k+1 \leq j \leq p\} \cup \\ &\cup \left\{ u_{2j-1,l},\ 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{j-k-1}{2} \right\rfloor,\ 3+k \leq j \leq p \right\} \end{aligned}$$

En definitiva, se tendrá

$$\begin{aligned} \sum_{l=-(4p-3)}^{4p-3} \dim(B_l) &= \dim(B_0) + \sum_{k=1}^{2p-1} \dim(B_{2k-1}) + \sum_{k=1}^{2p-2} \dim(B_{2k}) + \\ &+ \sum_{k=1}^{p} \dim(B_{-(2k-1)}) + \sum_{k=1}^{p} \dim(B_{-2k}) \end{aligned}$$

Habrá que distinguir dos casos según sea p par o impar.

- Caso 1: p par:

  ⋆ $\dim(B_0) = \frac{1}{4}(p^2 + 2p + 4)$

  ⋆ $\sum_{k=1}^{2p-1} \dim(B_{2k-1})$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2p-1} \dim(B_{2k-1}) &= \sum_{k=1}^{p} \dim(B_{2k-1}) + \sum_{k=p+1}^{2p-1} \dim(B_{2k-1}) = \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(p-k+2+\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor\right) + \sum_{k=p+1}^{2p-1} \left(p-k+1+\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor\right) = \\
&= p + \sum_{k=1}^{2p-1} \left(p-k+1+\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor\right) = \\
&= p+(p+1)(2p-1)-\tfrac{1}{2}(2p-1)2p+\sum_{k=1}^{p}\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor = \\
&= 3p-1+\sum_{k=1}^{2p-1}\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor
\end{aligned}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2p-1}\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor &= 0+0+1+1+\ldots+\left\lfloor\frac{2p-3}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2p-2}{2}\right\rfloor = \\
&= 2(1+2+\ldots+(p-2))+(p-1) = \\
&= (p-2)(p-1)+p-1 = p^2-2p+1
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{2p-1} \dim(B_{2k-1}) = p(p+1)$$

$\star$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{2p-2} \dim(B_{2k}) = \sum_{k=1}^{p} \dim(B_{2k}) + \sum_{k=p+1}^{2p-2} \dim(B_{2k})$

Ahora bien

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p} \dim(B_{2k}) &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{p}(p^2+2pk+2p-2k^2-2k+4) = \\
&= \frac{1}{4}\left[(p^2+2p+4)p+\frac{1}{2}(2p-2)(p(p+1)-\frac{2}{6}p(p+1)(2p+1)\right] = \\
&= \frac{1}{12}(4p^3+3p^2+8p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p+1}^{2p-2} \dim(B_{2k}) &= \sum_{l=\frac{p+2}{2}}^{p-1} \dim(B_{2(2l-1)}) + \sum_{l=\frac{p+2}{2}}^{p-1} \dim(B_{2(2l)}) = \\
&= \frac{1}{4}\sum_{l=\frac{p+2}{2}}^{p-1} \left(4p^2+(2l-1)^2-4p(2l-1)-1+4p^2+(2l)^2-4p(2l)\right. \\
&= \sum_{l=\frac{p+2}{2}}^{p-1} (2p^2+2l^2-4pl-l+p) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (2p^2+p)(p-2) - \frac{1}{8}(4p^2+p)(3p-6) + \\ &\quad + \frac{1}{3}\left((p^2-p)(2p-1) - \frac{1}{4}(p^2-2p)(p+1)\right) = \\ &= \frac{1}{24}(2p^3-3p^2-2p) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{2p-2} \dim(B_{2k}) = \frac{1}{24}(10p^3+3p^2+14p)$$

$\star$ $\sum_{k=1}^{2p-1} \dim(B_{-(2k-1)}) = \sum_{k=1}^{p}(p-k+1) = \frac{1}{2}p(p+1)$

$\star$ $\sum_{k=1}^{2p-1} \dim(B_{-2k}) = \sum_{k=1}^{p} \dim(B_{-2k}) =$

Ahora bien, teniendo en cuenta que por ser p par, $p-k$ es par o impar cuando lo es k, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p} \dim(B_{-2k}) &= \sum_{l=1}^{\frac{p}{2}} \dim(B_{-2(2l-1)}) + \sum_{l=1}^{\frac{p}{2}} \dim(B_{-2(2l)}) = \\ &= \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{\frac{p}{2}}(p^2+(2l-1)^2-(2p+2)(2l-1)+2p+1+ \\ &\qquad +p^2+(2l)^2-(2p+2)(2l)+2p) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\frac{p}{2}}(p^2+4l^2-4pl-6l+3p+2) = \\ &= \frac{1}{2}(p^2+3p+2)p - \frac{1}{8}(4p+6)p(p+2) + \frac{1}{6}p(p+2)(p+1) = \\ &= \frac{1}{24}(2p^3+3p^2-2p) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{2p-2} \dim(B_{-2k}) = \frac{1}{24}(2p^3+3p^2-2p)$$

En definitiva, si p es par se verifica

$$\sum_{l=-(4p-3)}^{4p-3} \dim(B_l) = \frac{1}{2}(p^3+4p^2+5p+2) = \frac{1}{2}(p+1)(p^2+3p+2) = \frac{1}{2}(p+1)\cdot n_1.$$

- Caso 2: p impar:

- ⋆ $\dim(B_0) = \frac{1}{4}(p^2+2p+5)$
- ⋆ $\sum_{k=1}^{2p-1} \dim(B_{2k-1}) = p(p+1)$.
- ⋆ $\sum_{k=1}^{2p-2} \dim(B_{2k}) = \sum_{k=1}^{p} \dim(B_{2k}) + \sum_{k=p+1}^{2p-2} \dim(B_{2k})$

Ahora bien

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p} \dim(B_{2k}) &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{p}\left(p^2+2pk-2k^2-4k+7+\left\lfloor\frac{k+p-1}{2}\right\rfloor\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left[(p^2+7)p+(p-2)p(p+1)-\frac{1}{3}p(p+1)(2p+1)+\right. \\ &\quad \left. +\sum_{k=1}^{p}\left\lfloor\frac{k+p-1}{2}\right\rfloor\right] = \\ &= \frac{1}{12}(4p^3+3p^2+8p-3) \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p}\left\lfloor\frac{k+p-1}{2}\right\rfloor &= \left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{p+1}{2}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\frac{2p-2}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2p-1}{2}\right\rfloor = \\ &= \frac{p-1}{2}+2\left[\frac{p+1}{2}+\frac{p+3}{2}+\ldots+\frac{p+(p+2)}{2}\right] = \\ &= \frac{p-1}{2}+\sum_{l=1}^{\frac{p-1}{2}}(p+(2l-1)) = \\ &= \frac{1}{4}(3p^2-2p-1) \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \sum_{k=p+1}^{2p-2} \dim(B_{2k}) &= \sum_{l=\frac{p+1}{2}}^{p-1} \dim(B_{2(2l)}) + \sum_{l=\frac{p+3}{2}}^{p-1} \dim(B_{2(2l-1)}) = \\ &= \frac{1}{4}(p^2-2p+1)+\sum_{l=\frac{p+3}{2}}^{p-1}(2p^2+2l^2-4pl-l+p) = \\ &= \frac{1}{24}(2p^3-3p^2-2p+3) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{2p-2} \dim(B_{2k}) = \frac{1}{24}(10p^3+3p^2+14p-3)$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

$\star \sum_{k=1}^{2p-1} \dim(B_{-(2k-1)}) = \sum_{k=1}^{p}(p-k+1) = \frac{1}{2}p(p+1)$

$\star \sum_{k=1}^{2p-1} \dim(B_{-2k}) = \sum_{k=1}^{p} \dim(B_{-2k}) =$

Ahora bien, teniendo en cuenta que, por ser p impar, $p-k$ es par cuando k es impar y, $p-k$ es impar cuando k es par, y que $\dim(B_{-2p}) = 0$, se verifica que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p} \dim(B_{-2k}) &= \sum_{l=1}^{\frac{p+1}{2}} \dim(B_{-2(2l-1)}) + \sum_{l=1}^{\frac{p-1}{2}} \dim(B_{-2(2l)}) = \\
&= \sum_{l=1}^{\frac{p-1}{2}} \Big(\dim(B_{-2(2l)}) + \dim(B_{-2(2l-1)})\Big) = \\
&= \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{\frac{p-1}{2}}(2p^2+8l^2-8pl+6p-12l+4) = \\
&= \frac{1}{24}(2p^3+3p^2-2p-3)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{2p-2} \dim(B_{-2k}) = \frac{1}{24}(2p^3+3p^2-2p-3)$$

En definitiva, si p es impar se verifica

$$\sum_{l=-(4p-3)}^{4p-3} \dim(B_l) = \frac{1}{2}(p^3+4p^2+5p+2) = \frac{1}{2}(p+1)(p^2+3p+2) = (p+1)\cdot n_1.$$

□

Nota 1:

Se verifica que

$$\begin{aligned}
Ad(X_0) &= \sum_{l=1}^{p} t_{2l-1,2l} \\
Ad(X_{2j-1}) &= -t_{0,2j} - \sum_{l=1}^{j-1} u_{2l-1,\frac{1}{2}(l-1)(2p-l)+(j-l)} + \\
&\quad + \sum_{l=j+1}^{p} u_{2l-1,\frac{1}{2}(j-1)(2p-j)+(l-j)}, \qquad 1 \le j \le p.
\end{aligned}$$

Nota 2:
Se tiene, trivialmente, que $Der(\mathbf{C}^{n-n_1}) = gl(\mathbf{C}^{n-n_1})$. Luego una base de $Der(\mathbf{C}^{n-n_1})$ vendrá dada por

$$\mathcal{B}_1 = \{w_{i,j} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-n_1}) : \ \frac{p(p-1)}{2} + 1 \leq i, j \leq n - 2p - 1\}$$

y su dimensión es

$$\dim\left(Der(\mathbf{C}^{n-n_1})\right) = (n - n_1)^2 = \left[n - \frac{1}{2}(p^2 + 3p + 2)\right]^2$$

Proposición 2.40 *Una base de $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^1_{n_1,p}, \mathbf{C}^{n-n_1})$ viene dada por*

$$\mathcal{B}_{12} = \{u_{0,j}, \ u_{2i-1,j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}^1_{n_1,p}, \mathbf{C}^{n-n_1}) : \ 1 \leq i \leq p, \ \frac{p(p+1)}{2} + 1 \leq j \leq n - 2p - 1\}$$

y su dimensión es

$$\dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g}^1_{n_1,p}, \mathbf{C}^{n-n_1})) = (p+1) \cdot (n - n_1)$$

Demostración. Análoga a los casos anteriores, teniendo en cuenta que

$$\mathcal{Z}(\mathbf{C}^{n-n_1}) = \mathbf{C}^{n-n_1} = \langle Y_{\frac{p(p-1)}{2}+1}, \dots, Y_{n-2p-1}\rangle$$
$$\left[\mathfrak{g}^1_{n_1,p}, \mathfrak{g}^1_{n_1,p}\right] = \langle X_2, \dots, X_{2p}, Y_1, Y_2, \dots, Y_{\frac{p(p-1)}{2}}\rangle$$

□

Proposición 2.41 *Una base de $\mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-n_1}, \mathfrak{g}^1_{n_1,p})$ viene dada por*

$$\mathcal{B}_{21} = \{v_{j,2i} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-n_1}, \mathfrak{g}^1_{n_1,p}) : \ 1 \leq i \leq p, \ \frac{p(p-1)}{2} + 1 \leq j \leq n - 2p - 1\}$$

y su dimensión es

$$\dim(\mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-n_1}, \mathfrak{g}^1_{n_1,p})) = \left[p + \begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix}\right] p \cdot (n - n_1)$$

Demostración. Es análoga a la anterior, teniendo en cuenta que

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}^1_{n_1,p}) = \langle X_2, \dots, X_{2p}, Y_1, Y_2, \dots, Y_{\frac{p(p-1)}{2}}\rangle$$
$$[\mathbf{C}^{n-n_1}, \mathbf{C}^{n-n_1}] = \{0\}$$

□

Se acaba de probar el siguiente

Teorema 2.42 *Una base de* $Der(\mathfrak{g}^1_{n_1,p})$*, viene dada por*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^0_{n,p} &= \mathcal{B}^1_{n_1,p} \cup \{u_{0,j},\ u_{2i-1,j},\ 1 \le i \le p,\ \frac{p(p-1)}{2}+1 \le j \le n-2p-1\} \cup \\ &\cup\ \{v_{j,2i},\ 1 \le i \le p,\ \frac{p(p-1)}{2}+1 \le j \le n-2p-1\} \cup \\ &\cup\ \{w_{i,j},\ \frac{p(p-1)}{2}+1 \le i \le n-2p-1,\ 1 \le j \le n-2p-1\}\end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\begin{aligned}\dim\left(Der(\mathfrak{g}^1_{n_1,p})\right) &= n(n-n_1)+n_1(p+1) \\ &= n^2-\frac{1}{2}(p^2+3p+2)n+\frac{1}{2}(p^3+4p^2+5p+2)\end{aligned}$$

2.6 Aplicaciones cohomólogicas

Como ya se ha indicado, el conocimiento del álgebra de derivaciones de un álgebra de Lie permite obtener resultados sobre la cohomología. Así, con las notaciones anteriores, se obtienen los siguientes resultados.

Corolario 2.43 *Se verifica que*

$$\begin{aligned}\dim(B^1(\mathfrak{g}^2_{n,3},\mathfrak{g}^2_{n,3})) &= 4 \\ \dim(H^1(\mathfrak{g}^2_{n,3},\mathfrak{g}^2_{n,3})) &= n^2-9n+30\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\dim(B^1(\mathfrak{g}^3_{n,3},\mathfrak{g}^3_{n,3})) &= 4 \\ \dim(H^1(\mathfrak{g}^3_{n,3},\mathfrak{g}^3_{n,3})) &= n^2-9n+27\end{aligned}$$

Demostración. Se obtienen estos resultados trivialmente, teniendo en cuenta que

$$B^1(\mathfrak{g}^i_{n,3},\mathfrak{g}^i_{n,3}) = Ad(\mathfrak{g}^i_{n,3}) = \langle ad(X_0), ad(X_1), ad(X_3), ad(X_5)\rangle,\ i=2,3$$

(por ser $ad(X_2)=ad(X_4)=ad(X_6)=0,\ ad(Y_j)=0,\ 1\le j\le n-7$) □

Corolario 2.44 *Se verifica que*

$$\begin{aligned}\dim(B^1(\mathfrak{g}^4_{n,3},\mathfrak{g}^4_{n,3})) &= 4 \\ \dim(H^1(\mathfrak{g}^4_{n,3},\mathfrak{g}^4_{n,3})) &= n^2-8n+20\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\dim(B^1(\mathfrak{g}^5_{n,3},\mathfrak{g}^5_{n,3})) &= 4 \\ \dim(H^1(\mathfrak{g}^5_{n,3},\mathfrak{g}^5_{n,3})) &= n^2-8n+22\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}\dim(B^1(\mathfrak{g}^6_{n,3},\mathfrak{g}^6_{n,3})) & = & 4\\ \dim(H^1(\mathfrak{g}^6_{n,3},\mathfrak{g}^6_{n,3})) & = & n^2-8n+20\end{array}$$

Demostración. Se obtienen estos resultados trivialmente, teniendo en cuenta que

$$B^1(\mathfrak{g}^i_{n,3},\mathfrak{g}^i_{n,3}) = Ad(\mathfrak{g}^i_{n,3}) = \langle ad(X_0), ad(X_1), ad(X_3), ad(X_5)\rangle,\ \ i=4,5,6$$

□

Corolario 2.45 *Se verifica que*

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dim(B^1(\mathfrak{g}^{1,r}_{n,3},\mathfrak{g}^{1,r}_{n,3})) & = & 4+2r\\ \dim(H^1(\mathfrak{g}^{1,r}_{n,3},\mathfrak{g}^{1,r}_{n,3})) & = & n(n-2r-8)+3r^2+8r+25\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dim(B^1(\mathfrak{g}^{2,r}_{n,3},\mathfrak{g}^{2,r}_{n,3})) & = & 5+2r\\ \dim(H^1(\mathfrak{g}^{2,r}_{n,3},\mathfrak{g}^{2,r}_{n,3})) & = & n(n-2r-10)+3r^2+10r+28\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dim(B^1(\mathfrak{g}^{3,r}_{n,3},\mathfrak{g}^{3,r}_{n,3})) & = & 5+2r\\ \dim(H^1(\mathfrak{g}^{3,r}_{n,3},\mathfrak{g}^{3,r}_{n,3})) & = & n(n-2r-10)+3r^2+10r+29\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dim(B^1(\mathfrak{g}^{4,r}_{n,3},\mathfrak{g}^{4,r}_{n,3})) & = & 6+2r\\ \dim(H^1(\mathfrak{g}^{4,r}_{n,3},\mathfrak{g}^{4,r}_{n,3})) & = & n(n-2r-12)+3r^2+12r+37\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dim(B^1(\mathfrak{g}^{5,r}_{n,3},\mathfrak{g}^{5,r}_{n,3})) & = & 6+2r\\ \dim(H^1(\mathfrak{g}^{5,r}_{n,3},\mathfrak{g}^{5,r}_{n,3})) & = & n(n-2r-10)+3r^2+12r+34\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dim(B^1(\mathfrak{g}^{6,r}_{n,3},\mathfrak{g}^{6,r}_{n,3})) & = & 7+2r\\ \dim(H^1(\mathfrak{g}^{6,r}_{n,3},\mathfrak{g}^{6,r}_{n,3})) & = & n(n-2r-11)+3r^2+14r+42\end{array}\right.$$

Demostración. Se obtienen estos resultados trivialmente, teniendo en cuenta que

$$Ad(\mathfrak{g}^{1,r}_{n,3}) = \langle ad(X_0), ad(X_1), ad(X_3), ad(X_5)\rangle \cup \langle ad(Y_j), 2\le j\le 2r+1\rangle$$

$$Ad(\mathfrak{g}^{2,r}_{n,3}) = \langle ad(X_0), ad(X_1), ad(X_3), ad(X_5)\rangle \cup \langle ad(Y_j), 2\le j\le 2r+1, j=n-7\rangle$$

$$Ad(\mathfrak{g}^{3,r}_{n,3}) = \langle ad(X_0), ad(X_1), ad(X_3), ad(X_5)\rangle \cup \langle ad(Y_j), 2\le j\le 2r+1, j=n-7\rangle$$

$$Ad(\mathfrak{g}^{4,r}_{n,3}) = \langle ad(X_0), ad(X_1), ad(X_3), ad(X_5)\rangle \cup \langle ad(Y_j), 2\le j\le 2r+1, j=n-8, n-7\rangle$$

$$Ad(\mathfrak{g}_{n,3}^{5,r}) = \langle ad(X_0), ad(X_1), ad(X_3), ad(X_5)\rangle \cup \langle ad(Y_j), 2 \leq j \leq 2r+1, j = n-8, n-7\rangle$$

$$Ad(\mathfrak{g}_{n,3}^{6,r}) = \langle ad(X_0), ad(X_1), ad(X_3), ad(X_5)\rangle \cup \langle ad(Y_j), 2 \leq j \leq 2r+1, j = n-9, n-8, n-7\rangle$$

□

Corolario 2.46 *Se verifica que*

$$\begin{aligned} \dim(B^1(\mathfrak{g}_{n,p}^0, \mathfrak{g}_{n,p}^0)) &= p+1 \\ \dim(H^1(\mathfrak{g}_{n,p}^0, \mathfrak{g}_{n,p}^0)) &= n \cdot (n-2p-1) + p(2p+1) \end{aligned}$$

Demostración. Se obtienen estos resultados trivialmente, teniendo en cuenta que

$$B^1(\mathfrak{g}_{n,p}^0, \mathfrak{g}_{n,p}^0) = Ad(\mathfrak{g}_{n,p}^0) = \langle ad(X_0), ad(X_1), ad(X_3), \ldots, ad(X_{2p})\rangle$$

□

Corolario 2.47 *Se verifica que*

$$\begin{aligned} \dim(B^1(\mathfrak{g}_{n,p}^1, \mathfrak{g}_{n,p}^1)) &= p+1 \\ \dim(H^1(\mathfrak{g}_{n,p}^1, \mathfrak{g}_{n,p}^1)) &= n^2 - \tfrac{1}{2}(p^2+3p+2)n + \tfrac{1}{2}(p^3+4p^2+3p) \end{aligned}$$

Demostración. Se obtienen estos resultados trivialmente, teniendo en cuenta que

$$B^1(\mathfrak{g}_{n,p}^1, \mathfrak{g}_{n,p}^1) = Ad(\mathfrak{g}_{n,p}^1) = \langle ad(X_0), ad(X_1), \ldots, ad(X_{2p-1})\rangle$$

por ser $ad(X_{2i}) = 0,\ 1 \leq i \leq p,\ ad(Y_i) = 0,\ 1 \leq i \leq n-2p-1$ y por verificarse que

$$\dim(H^1(\mathfrak{g}_{n,p}^1, \mathfrak{g}_{n,p}^1)) = \dim(Der(\mathfrak{g}_{n,p}^1)) - \dim(B^1(\mathfrak{g}_{n,p}^1, \mathfrak{g}_{n,p}^1))$$

□

Corolario 2.48 *Se verifica que*

$$\dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g}_{n,p}^1)) = \dim(B^2(\mathfrak{g}_{n,p}^1, \mathfrak{g}_{n,p}^1)) = n(p^2+p+1) - \frac{1}{4}(p^4+4p^3+7p^2+4p)$$

Demostración. Basta recordar que

$$\dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g}^1_{n,p})) = \dim(B^2(\mathfrak{g}^1_{n,p}, \mathfrak{g}^1_{n,p})) = n^2 - \dim(\mathcal{D}er(\mathfrak{g}^1_{n,p}))$$

□

Corolario 2.49 *Se verifica que*

$$\begin{aligned}
\dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g}^2_{n,3})) &= \dim(B^2(\mathfrak{g}^2_{n,3}, \mathfrak{g}^2_{n,3})) = 11n - 48 \\
\dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g}^3_{n,3})) &= \dim(B^2(\mathfrak{g}^3_{n,3}, \mathfrak{g}^3_{n,3})) = 11n - 45
\end{aligned}$$

Demostración. Trivial □

Corolario 2.50 *Se verifica que*

$$\begin{aligned}
\dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g}^4_{n,3})) &= \dim(B^2(\mathfrak{g}^4_{n,3}, \mathfrak{g}^4_{n,3})) = 8n - 20 \\
\dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g}^5_{n,3})) &= \dim(B^2(\mathfrak{g}^5_{n,3}, \mathfrak{g}^5_{n,3})) = 8n - 22 \\
\dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g}^6_{n,3})) &= \dim(B^2(\mathfrak{g}^6_{n,3}, \mathfrak{g}^6_{n,3})) = 8n - 20
\end{aligned}$$

Demostración. Trivial □

Corolario 2.51 *Se verifica que*

$$\begin{aligned}
\dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g}^{1,r}_{n,3})) &= \dim(B^2(\mathfrak{g}^{1,r}_{n,3}, \mathfrak{g}^{1,r}_{n,3})) = n(2r+8) - (3r^2+8r+25) \\
\dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g}^{2,r}_{n,3})) &= \dim(B^2(\mathfrak{g}^{2,r}_{n,3}, \mathfrak{g}^{2,r}_{n,3})) = n(2r+10) - (r^2+14r+37) \\
\dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g}^{3,r}_{n,3})) &= \dim(B^2(\mathfrak{g}^{3,r}_{n,3}, \mathfrak{g}^{3,r}_{n,3})) = n(2r+10) - (3r^2+12r+38) \\
\dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g}^{4,r}_{n,3})) &= \dim(B^2(\mathfrak{g}^{4,r}_{n,3}, \mathfrak{g}^{4,r}_{n,3})) = n(2r+12) - (3r^2+16r+57) \\
\dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g}^{5,r}_{n,3})) &= \dim(B^2(\mathfrak{g}^{5,r}_{n,3}, \mathfrak{g}^{5,r}_{n,3})) = n(2r+10) - (3r^2+12r+34) \\
\dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g}^{6,r}_{n,3})) &= \dim(B^2(\mathfrak{g}^{6,r}_{n,3}, \mathfrak{g}^{6,r}_{n,3})) = n(2r+11) - (3r^2+14r+42)
\end{aligned}$$

Demostración. Trivial □

Corolario 2.52 *Se verifica que*

$$\dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g}^0_{n,p})) = \dim(B^2(\mathfrak{g}^0_{n,p}, \mathfrak{g}^0_{n,p})) = (2p+1)\cdot(n-p-1)$$

Demostración. Basta recordar que

$$\dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g}^0_{n,p})) = \dim(B^2(\mathfrak{g}^0_{n,p}, \mathfrak{g}^0_{n,p})) = n^2 - \dim(\mathcal{D}er(\mathfrak{g}^0_{n,p}))$$

□

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

Capítulo 3

Algebras de Lie de nilíndice 3.

Se va a abordar en este capítulo el estudio de las álgebras de Lie n-dimensionales de nilíndice 3.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente con nilíndice 3, entonces el invariante de Goze de $\mathfrak{g}$, es alguno de los siguientes

$$(3, \overset{p)}{\ldots}, 3, 2, \overset{q)}{\ldots}, 2, 1, \overset{n-3p-2q)}{\ldots}, 1), \quad 0 \leq q \leq \left\lfloor \frac{n-3p-1}{2} \right\rfloor, \quad 1 \leq p \leq \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor$$

Si X_0 un vector característico of $\mathfrak{g}$ y, $\mathcal{B}$ una base adaptada asociada a X_0, se puede escribir

$$\mathcal{B} = \{X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{3p-2}, X_{3p-1}, X_{3p}, U_1, U_2, \ldots U_{2q-1}, U_{2q}, Y_1, \ldots, Y_{n-3p-2q-1}\}$$

donde los únicos productos no nulos de X_0 son los siguientes

$$\begin{aligned} &[X_0, X_{3i-2}] = X_{3i-1} && 1 \leq i \leq p, \\ &[X_0, X_{3i-1}] = X_{3i} && 1 \leq i \leq p, \\ &[X_0, U_{2j-1}] = U_{2j} && 1 \leq j \leq q. \end{aligned}$$

En el resto del trabajo se va a designar un álgebra de esta forma por $\mathfrak{g}_{n,p,q}$, donde

$$1 \leq p \leq \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor, \qquad 0 \leq q \leq \left\lfloor \frac{n-3p-1}{2} \right\rfloor$$

Entre los casos más sencillos se encuentran los correspondientes a los valores de (p, q): $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$. Puesto que el caso más simple, $(p, q) = (1, 0)$, ya ha sido estudiado por J.M. Cabezas, J.R. Gómez y A. Jiménez-Merchán [7], se van a obtener en este capítulo algunos resultados correspondientes a los casos $(p,q)=(1,1)$ y $(p,q)=(2,0)$, es decir, los casos de sucesiones características $(3,2,1\ldots,1)$ y $(3,3,1\ldots,1)$.

3.1 Caso de invariante de Goze $(3,2,1,\ldots,1)$

Se va a obtener en esta sección la expresión de la familia de leyes de álgebras de Lie con invariante de Goze $(3,2,1,\ldots,1)$.

Teorema 3.1 (Familia) *En dimensión $n\geq 6$, toda álgebra de Lie de invariante de Goze $(3,2,1\overset{n-5)}{\ldots},1)$ es isomorfa a una cuya ley, respecto de una base adaptada $\{X_0,X_1,X_2,X_3,U_1,U_2,Y_1,\ldots,Y_{n-6}\}$, viene dada por*

$$\begin{cases}
[X_0,X_i]=X_{i+1}, & 1\leq i\leq 2,\\
[X_0,U_1]=U_2 & \\
[X_1,X_2]=a_1U_2+\alpha Y_1, & \\
[X_1,U_1]=a_2X_3+a_3U_2+\beta Y_2, & \\
[X_1,Y_j]=b^3_{1j}X_3+b^5_{1j}U_2, & 1\leq j\leq n-6,\\
[U_1,Y_j]=b^3_{4j}X_3+b^5_{4j}U_2, & 1\leq j\leq n-6,\\
[Y_i,Y_j]=c^3_{ij}X_3+c^5_{ij}U_2, & 1\leq i<j\leq n-6.
\end{cases}$$

con las siguientes restricciones respecto a los parámetros:

$$\left|\begin{array}{ll}
\alpha a_1=\alpha a_3=\beta a_2=\beta a_3=0, & \\
\alpha b^3_{1j}=\alpha b^3_{4j}=\beta b^5_{1j}=\beta b^5_{4j}=0, & 1\leq j\leq n-6,\\
\alpha a_2 b^5_{1j}=\alpha a_2 b^5_{4j}=\beta a_1 b^3_{1j}=\beta a_1 b^3_{4j}=0, & 1\leq j\leq n-6,\\
\alpha c^3_{ij}=\beta c^5_{ij}=\alpha a_2 c^5_{ij}=\beta a_1 c^3_{ij}=0, & 1\leq i<j\leq n-6,\\
\alpha\,[X_1,Y_1]=\alpha\,[U_1,Y_1]=\beta\,[X_1,Y_2]=\beta\,[U_1,Y_2]=0, & \\
\alpha\,[Y_1,Y_j]=\beta\,[Y_2,Y_j]=0, & 1\leq j\leq n-6.
\end{array}\right.$$

donde $(\alpha,\beta)\in\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$

Demostración. Sea $\mathfrak{g}$, un álgebra de Lie de dimensión n y sucesión característica $(3,2,1\overset{n-5)}{\ldots},1)$. Sea X_0, un vector característico de $\mathfrak{g}$. Entonces, sabemos que respecto de cierta base adaptada de $\mathfrak{g}$:

$$\mathcal{B} = \{X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ U_1,\ U_2,\ Y_1,\ \ldots,\ Y_{n-6}\}$$

los únicos productos no nulos respecto de X_0 son:

$$\begin{aligned}[][X_0, X_1] &= X_2\\ [X_0, X_2] &= X_3\\ [X_0, U_1] &= U_2\end{aligned}$$

Resta calcular los demás productos de los elementos de la base. De una manera general, se tiene que

$$\begin{aligned}[][X_i, X_j] &= \sum_{k=1}^{3} a_{ij}^k X_k + \sum_{k=1}^{2} a_{ij}^{3+k} U_k + \sum_{k=1}^{n-6} \alpha_{ij}^k Y_k, && 1 \le i < j \le 3\\ [X_i, U_j] &= \sum_{k=1}^{3} a_{i,3+j}^k X_k + \sum_{k=1}^{2} a_{i,3+j}^{3+k} U_k + \sum_{k=1}^{n-6} \alpha_{ij}^k Y_k, && 1 \le i \le 3,\ 1 \le j \le 2\\ [X_i, Y_j] &= \sum_{k=1}^{3} b_{ij}^k X_k + \sum_{k=1}^{2} b_{ij}^{3+k} U_k + \sum_{k=1}^{n-5} \beta_{ij}^k Y_k, && 1 \le i \le 3,\ 1 \le j \le n-6\\ [U_i, Y_j] &= \sum_{k=1}^{3} b_{3+i,j}^k X_k + \sum_{k=1}^{2} b_{3+i,j}^{3+k} U_k + \sum_{k=1}^{n-5} \beta_{ij}^k Y_k, && 1 \le i \le 2,\ 1 \le j \le n-6\\ [Y_i, Y_j] &= \sum_{k=1}^{3} c_{ij}^k X_k + \sum_{k=1}^{2} c_{ij}^{3+k} U_k + \sum_{k=1}^{n-6} \gamma_{ij}^k Y_k, && 1 \le i < j \le n-6\end{aligned}$$

- Puesto que se debe cumplir que $\mathcal{C}^3(\mathfrak{g}) = \{0\}$, sigue que $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ y, por lo tanto, se verifica que

$$[X_3, Z] = 0,\ \forall Z \in \mathfrak{g}$$

- Se debe verificar que $X_1 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ pues, en caso contrario, es decir, si $X_1 \in \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ se tendría que $X_3 \in \mathcal{C}^3(\mathfrak{g})$, lo cual no puede ser cierto. Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} a_{ij}^1 &= 0, && 1 \le i < j \le 5,\\ b_{ij}^1 &= 0, && 1 \le i \le 5,\ 1 \le j \le n-6,\\ c_{ij}^1 &= 0, && 1 \le i < j \le n-6.\end{aligned}$$

BIBLIOTECA

- Imponiendo que se verifiquen las condiciones de Jacobi con X_0, se obtienen nuevas restricciones

$\star$ $J(X_0, X_1, X_2)$: $a_{12}^2 = a_{12}^4 = 0$

$\star$ $J(X_0, X_1, U_1)$: $\begin{cases} a_{24}^2 = -a_{15}^2 \\ a_{24}^3 = a_{14}^2 - a_{15}^3 \\ a_{24}^4 = -a_{15}^4 \\ a_{24}^5 = a_{14}^4 - a_{15}^5 \\ \alpha_{24}^k = -\alpha_{15}^k, \quad 1 \le k \le n-6 \end{cases}$

$\star$ $J(X_0, X_1, U_2)$: $\begin{cases} a_{25}^2 = a_{25}^4 = 0, \\ a_{25}^3 = a_{15}^2, \\ a_{25}^5 = a_{15}^4, \\ \alpha_{25}^k = 0, \qquad 1 \le k \le n-6. \end{cases}$

$\star$ $J(X_0, X_2, U_1)$: $\begin{cases} a_{25}^3 = a_{24}^2 \\ a_{25}^5 = a_{24}^4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{15}^2 = a_{24}^2 = a_{25}^3 = 0 \\ a_{15}^4 = a_{24}^4 = a_{25}^5 = 0 \end{cases}$

$\star$ $J(X_0, U_1, U_2)$: $a_{45}^2 = a_{45}^4 = 0$

$\star$ $J(X_0, X_1, Y_i)$, $1 \le i \le n-6$: $\begin{cases} b_{2i}^2 = b_{2i}^4 = 0, & 1 \le i \le n-6, \\ b_{2i}^3 = b_{1i}^2, & 1 \le i \le n-6, \\ b_{2i}^5 = b_{1i}^4, & 1 \le i \le n-6, \\ \beta_{2i}^k = 0, & 1 \le i, k \le n-6. \end{cases}$

$\star$ $J(X_0, U_1, Y_i)$, $1 \le i \le n-6$: $\begin{cases} b_{5i}^2 = b_{5i}^4 = 0, & 1 \le i \le n-6, \\ b_{5i}^3 = b_{4i}^2, & 1 \le i \le n-6, \\ b_{5i}^5 = b_{4i}^4, & 1 \le i \le n-6, \\ \beta_{5i}^k = 0, & 1 \le i, k \le n-6. \end{cases}$

$\star$ $J(X_0, Y_i, Y_j)$, $1 \le i < j \le n-6$: $c_{ij}^2 = c_{ij}^4 = 0, \quad 1 \le i < j \le n-6.$

- Puesto que $X_0 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$, sigue que $AX_0 + Z \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$, $\forall Z \in \mathfrak{g}$, $\forall A \in \mathbf{C} - \{0\}$. Por lo tanto, cualquiera de estos vectores podría ser considerado como vector característico, lo que se traduce en que cualquier menor de orden 4 de las matrices $Ad(AX_0 + Z)$ debe ser nulo.

$\star$ $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + X_1)) = 3$.

$$Ad(AX_0+X_1) = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & A & 0 & 0 & a_{14}^2 & 0 & b_{1j}^2 \\ 0 & 0 & A+a_{12}^3 & 0 & a_{14}^3 & a_{15}^3 & b_{1j}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{14}^4 & 0 & b_{1j}^4 \\ 0 & 0 & a_{12}^5 & 0 & A+a_{14}^5 & a_{15}^5 & b_{1j}^5 \\ \hline 0 & 0 & \alpha_{12}^k & 0 & \alpha_{14}^k & \alpha_{15}^k & \beta_{1j}^k \end{array}\right]$$

Siempre es posible elegir A de forma que

$$\begin{vmatrix} A & 0 & a_{14}^2 \\ 0 & A+a_{12}^3 & a_{14}^3 \\ 0 & a_{12}^5 & A+a_{14}^5 \end{vmatrix} \neq 0$$

y por tanto, se debe verificar que

$$\begin{vmatrix} A & 0 & a_{14}^2 & 0 \\ 0 & A+a_{12}^3 & a_{14}^3 & a_{15}^3 \\ 0 & 0 & a_{14}^4 & 0 \\ 0 & a_{12}^5 & A+a_{14}^5 & a_{15}^5 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{15}^5 a_{14}^4 = 0 \\ a_{14}^4 a_{12}^5 a_{15}^3 = 0 \end{array} \right.$$

También se debe verificar que

$$\begin{vmatrix} A & 0 & a_{14}^2 & 0 \\ 0 & A+a_{12}^3 & a_{14}^3 & a_{15}^3 \\ 0 & a_{12}^5 & A+a_{14}^5 & a_{15}^5 \\ 0 & \alpha_{12}^k & \alpha_{14}^k & \alpha_{15}^k \end{vmatrix} = 0$$

lo que implica que

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{15}^k = 0, \\ a_{15}^3 \alpha_{12}^k + a_{15}^5 \alpha_{14}^k = 0, \\ a_{14}^3 a_{15}^5 \alpha_{12}^k + a_{12}^5 a_{15}^3 \alpha_{14}^k - a_{15}^3 a_{14}^5 \alpha_{12}^k - a_{15}^5 a_{12}^3 \alpha_{14}^k = 0, \end{array} \right\} 1 \leq k \leq n-6.$$

lo que unido, a restricciones anteriores implica que $\alpha_{24}^k = 0,\ 1 \leq k \leq n-6$. De la misma forma

$$\begin{vmatrix} A & 0 & a_{14}^2 & b_{1j}^2 \\ 0 & A + a_{12}^3 & a_{14}^3 & b_{1j}^3 \\ 0 & a_{12}^5 & A + a_{14}^5 & b_{1j}^5 \\ 0 & \alpha_{12}^k & \alpha_{14}^k & \beta_{1j}^k \end{vmatrix} = 0, \quad 1 \leq j,k \leq n-6$$

lo que implica que

$$\left.\begin{array}{l} \beta_{1j}^k = 0, \\ b_{1j}^3\alpha_{12}^k + b_{1j}^5\alpha_{14}^k = 0 \\ a_{14}^3 b_{1j}^5 \alpha_{12}^k + a_{12}^5 b_{1j}^3 \alpha_{14}^k - a_{14}^5 b_{1j}^3 \alpha_{12}^k - a_{12}^3 b_{1j}^5 \alpha_{14}^k = 0 \end{array}\right\} 1 \leq j,k \leq n-6$$

Por último

$$\begin{vmatrix} A & 0 & a_{14}^2 & b_{1j}^2 \\ 0 & A + a_{12}^3 & a_{14}^3 & b_{1j}^3 \\ 0 & 0 & a_{14}^4 & b_{1j}^4 \\ 0 & a_{12}^5 & A + a_{14}^5 & b_{1j}^5 \end{vmatrix} = 0, \quad 1 \leq j \leq n-6$$

lo que implica que

$$\left.\begin{array}{l} b_{1j}^4 = 0, \\ b_{1j}^5 a_{14}^4 = 0, \\ a_{12}^5 a_{14}^4 b_{1j}^3 = 0. \end{array}\right\} 1 \leq j \leq n-6$$

lo que unido, a restricciones anteriores implica que $b_{2j}^5 = 0$. Las restricciones encontradas permiten abordar más fácilmente el cálculo del polinomio característico de $Ad(X_1)$:

$$|Ad(X_1) - \lambda \mathrm{I}_n| = \left|\begin{array}{cccccc|c} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda & 0 & a_{14}^2 & 0 & b_{1j}^2 \\ 0 & 0 & a_{12}^3 & -\lambda & a_{14}^3 & a_{15}^3 & b_{1j}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{14}^4 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{12}^5 & 0 & a_{14}^5 & a_{15}^5 - \lambda & b_{1j}^5 \\ \hline 0 & 0 & \alpha_{12}^k & 0 & \alpha_{14}^k & 0 & -\lambda \mathrm{I}_{n-6} \end{array}\right|$$

Es decir
$$|Ad(X_1) - \lambda \mathrm{I}_n| = (a_{14}^4 - \lambda)(a_{15}^5 - \lambda)P_{n-2}(\lambda)$$
lo que por nilpotencia, implica que $a_{14}^4 = a_{15}^5 = 0$ y, por tanto también que $a_{24}^5 = 0$.

$\star$ $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + U_1)) = 3$.

De forma análoga se obtienen las siguientes restricciones
$$\left|\begin{array}{ll} b_{4j}^4 = 0, & 1 \leq j \leq n-6 \\ \alpha_{45}^k = 0, & 1 \leq k \leq n-6 \\ \beta_{4j}^k = 0, & 1 \leq j,k \leq n-6 \\ b_{4j}^2 \alpha_{14}^k = 0, & 1 \leq j,k \leq n-6 \end{array}\right.$$
y, por tanto, $b_{5j}^5 = 0$, $1 \leq j \leq n-6$.

$\star$ $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + Y_j)) = 3$.

De forma análoga se obtiene que
$$\gamma_{ij}^k = 0, \quad 1 \leq i,j,k \leq n-6$$

Por el momento se tiene la siguiente familia de álgebras donde, para mayor claridad, se ha cambiado la notación α_{12}^k por $\alpha_k =$ y α_{14}^k por β_k.
$$\left\{\begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_0, U_1] = U_2, & \\ [X_1, X_2] = a_{12}^3 X_3 + a_{12}^5 U_2 + \sum_{k=1}^{n-6} \alpha_k Y_k, & \\ [X_1, U_1] = a_{14}^2 X_2 + a_{14}^3 X_3 + a_{14}^5 U_2 + \sum_{k=1}^{n-6} \beta_k Y_k, & \\ [X_1, U_2] = a_{15}^3 X_3, & \\ [X_2, U_1] = (a_{14}^2 - a_{15}^3) X_3, & \\ [U_1, U_2] = a_{45}^3 X_3 + a_{45}^5 U_2, & \\ [X_1, Y_j] = b_{1j}^2 X_2 + b_{1j}^3 X_3 + b_{1j}^5 U_2, & 1 \leq j \leq n-6, \\ [X_2, Y_j] = b_{1j}^2 X_3, & 1 \leq j \leq n-6, \\ [U_1, Y_j] = b_{4j}^2 X_2 + b_{4j}^3 X_3 + b_{4j}^5 U_2, & 1 \leq j \leq n-6, \\ [U_2, Y_j] = b_{4j}^2 X_3, & 1 \leq j \leq n-6, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij}^3 X_3 + c_{ij}^5 U_2, & 1 \leq i < j \leq n-6. \end{array}\right.$$

con las restricciones

$$\begin{cases} a_{15}^3\alpha_k = 0, & \\ a_{12}^5 a_{15}^3\beta_k - a_{15}^3 a_{14}^5\alpha_k = 0, & 1 \le k \le n-6, \\ b_{1j}^3\alpha_k + b_{1j}^5\beta_k = 0, & 1 \le k \le n-6, \\ a_{14}^3 b_{1j}^5\alpha_k + a_{12}^5 b_{1j}^3\beta_k - a_{14}^5 b_{1j}^3\alpha_k - a_{12}^3 b_{1j}^5\beta_k = 0, & 1 \le j,k \le n-6, \\ b_{4j}^2\beta_k = 0, & 1 \le j,k \le n-6. \end{cases}$$

- Se puede suponer que $a_{12}^3 = a_{14}^2 = 0$ mediante el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_1' = X_1 - a_{12}^3 X_0 \\ U_1' = U_1 + a_{14}^2 X_0 \end{cases}$$

- Si se efectúa el cambio de base dado, $\forall A \neq 0$, por

$$\begin{cases} X_0' = AX_0 + X_1 \\ X_1' = X_1 \\ X_2' = AX_2 \\ X_3' = A^2X_3 + A[X_1, X_2] \\ U_1' = U_1 \\ U_2' = AU_2 + [X_1, U_1] \\ Y_i' = Y_i, \quad 1 \le i \le n-6 \end{cases}$$

se debe verificar que

$$[X_0', U_2'] = A[X_1, U_2] + [X_1, [X_1, U_1]] =$$
$$Aa_{15}^3X_3 + a_{14}^5 a_{15}^3 X_3 + \sum_{k=1}^{n-6}\beta_k(b_{1k}^2X_2 + b_{1k}^3X_3 + b_{1k}^5U_2) = 0, \quad \forall A \neq 0$$

Entonces, debe ser

$$\begin{cases} a_{15}^3 = 0 \Longrightarrow a_{24}^3 = 0, \\ \sum_{k=1}^{n-6} b_{1k}^j\beta_k = 0, \ j = 2,3,5. \end{cases}$$

También

$$[X_0', X_3'] = A[X_1, [X_1, X_2]] = 0, \quad \forall A \neq 0 \Longrightarrow$$
$$\sum_{k=1}^{n-6}(b_{1k}^2X_2 + b_{1k}^3X_3 + b_{1k}^5U_2)\alpha_k = 0$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{n-6} b_{1k}^{j}\alpha_k = 0, \; j = 2, 3, 5.$$

- Se efectúa a continuación el cambio de base dado, $\forall A \neq 0$ por

$$\begin{cases} X_0'=AX_0 + U_1 \\ X_1'=X_1 \\ X_2'=AX_2 - [X_1, U_1] \\ X_3'=A^2X_3 - [U_1, [X_1, U_1] \\ U_1' =U_1 \\ U_2' =AU_2 \\ Y_j' =Y_j, \qquad\qquad 1 \leq j \leq n-6. \end{cases}$$

donde, para que sea admisible, se tiene que cumplir que $X_3' \neq 0$ (y que $\{X_0, X_1, \ldots, Y_{n-6}$ sean linealmente independientes). Puesto que

$$X_3' = (A^2 - a_{14}^5 a_{45}^3)X_3 - \left(a_{14}^5 a_{45}^5 + \sum_{k=1}^{n-6} b_{4k}^5 \beta_k\right)$$

basta tomar $A^2 \neq a_{14}^5 a_{45}^3$. Además, se tiene que verificar que

$$[X_0', U_2'] = A\,[U_1, U_2] = 0$$

y, por tanto, que $a_{45}^3 = a_{45}^5 = 0$

- Si se efectúa la familia de cambios de base definidos, para cada $i \in \{1, \ldots, n-6\}$, mediante

$$\begin{cases} X_0'=AX_0 + U_1 \\ X_1'=X_1 \\ X_2'=AX_2 - [X_1, U_1] \\ X_3'=A^2X_3 - [U_1, [X_1, U_1] \\ U_1' =U_1 + Y_i \\ U_2' =AU_2 + [U_1, Y_i] \\ Y_j' =Y_j, \qquad\qquad 1 \leq j \leq n-6. \end{cases}$$

se debe verificar que

$$\begin{aligned}
[X_0', U_2'] &= [AX_0, [U_1, Y_i]] + [U_1, [U_1, Y_i]] = \\
&= \left[AX_0, b_{4i}^2 X_2 + b_{4i}^3 X_3 + b_{4i}^5 U_2\right] + \left[U_1, b_{4i}^2 X_2 + b_{4i}^3 X_3 + b_{4i}^5 U_2\right] = \\
&= A b_{4i}^2 X_3 = 0, \forall A \neq 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se debe verificar que $b_{4i}^2 = 0, \; 1 \leq i \leq n-6$ y, por consiguiente, que $b_{5i}^3 = 0$.

- Se efectúa a continuación el cambio de base dado, $\forall A \neq 0$ por

$$\begin{cases}
X_0' = AX_0 + X_1 + U_1 \\
X_1' = X_1 \\
X_2' = AX_2 - [X_1, U_1] \\
X_3' = A^2 X_3 + A[X_1, X_2] - [X_1, [X_1, U_1] - [U_1, [X_1, U_1] \\
U_1' = U_1 \\
U_2' = AU_2 + [X_1, U_1] \\
Y_j' = Y_j, & 1 \leq j \leq n-6.
\end{cases}$$

Se tiene que verificar que

$$\begin{aligned}
[X_0', X_3'] &= \left[AX_0 + X_1 + U_1, A^2 X_3 + A\left(a_{12}^5 U_2 + \sum_{k=1}^{n-6} \alpha_k Y_k\right) + \sum_{k=1}^{n-6} \beta_k [U_1, Y_k]\right] = \\
&= \left[AX_0 + X_1 + U_1, A \sum_{k=1}^{n-6} \alpha_k Y_k\right] = \sum_{k=1}^{n-6} (b_{4k}^3 X_3 + b_{4k}^5 U_2)\alpha_k = 0 \\
[X_0', U_2'] &= \left[AX_0 + X_1 + U_1, AU_2 + a_{14}^3 X_3 + a_{14}^5 U_2 + \sum_{k=1}^{n-6} \beta_k Y_k\right] = \\
&= \left[AX_0 + X_1 + U_1, \sum_{k=1}^{n-6} \beta_k Y_k\right] = \sum_{k=1}^{n-6} (b_{4k}^3 X_3 + b_{4k}^5 U_2)\beta_k = 0
\end{aligned}$$

y, por tanto

$$\sum_{k=1}^{n-6} b_{4k}^j \alpha_k = 0, \; j = 3, 5.$$

$$\sum_{k=1}^{n-6} b_{4k}^j \beta_k = 0, \; j = 3, 5.$$

- $\operatorname{rg}(Ad(AX_0+X_1+U_1))=3$.

$$Ad(AX_0+X_1+U_1)=\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{1j}^2\\ 0 & -a_{14}^3 & A & 0 & a_{14}^3 & 0 & b_{1j}^3+b_{4j}^3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & -a_{14}^5 & a_{12}^5 & 0 & A+a_{14}^5 & 0 & b_{1j}^5+b_{4j}^5\\ \hline 0 & -\beta_k & \alpha_k & 0 & \beta_k & 0 & 0 \end{array}\right]$$

y por tanto, se debe verificar que

$$\begin{vmatrix} A & 0 & 0 & b_{1j}^2\\ -a_{14}^3 & A & a_{14}^3 & b_{1j}^3+b_{4j}^3\\ -a_{14}^5 & a_{12}^5 & A+a_{14}^4 & b_{1j}^5+b_{4j}^5\\ -\beta_k & \alpha_k & \beta_k & 0 \end{vmatrix}=0 \implies$$

$$\begin{cases} (b_{1j}^3+b_{4j}^3)\alpha_k+(b_{1j}^5+b_{4j}^5-b_{1j}^2)\beta_k=0,\\ \left[a_{14}^3(b_{1j}^5+b_{4j}^5-b_{1j}^2)-a_{14}^5(b_{1j}^3+b_{4j}^3)\right]\alpha_k+a_{12}^5(b_{1j}^3+b_{4j}^3)\beta_k=0. \end{cases}$$

lo que, unido a otras restricciones anteriores implica que

$$\begin{cases} b_{4j}^3\alpha_k+(b_{4j}^5-b_{1j}^2)\beta_k=0,\\ \left[a_{14}^3(b_{4j}^5-b_{1j}^2)-a_{14}^5b_{4j}^3\right]\alpha_k+a_{12}^5b_{4j}^3\beta_k=0. \end{cases}$$

- Imponemos que se verifiquen el resto de las condiciones de Jacobi, obteniéndose las siguientes restricciones

$\star$ $J(X_1,X_2,Y_l)$, $1\le l\le n-6$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-6}\alpha_k[Y_k,Y_l]=0 \implies$

$$\sum_{k=1}^{l-1}\alpha_k c_{kl}^j-\sum_{k=l+1}^{n-6}\alpha_k c_{lk}^j=0,\ j=3,5.$$

$\star$ $J(X_1,U_1,Y_l)$, $1\le l\le n-6$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-6}\beta_k[Y_k,Y_l]=0 \implies$

$$\sum_{k=1}^{l-1}\beta_k c_{kl}^j-\sum_{k=l+1}^{n-6}\beta_k c_{lk}^j=0,\ j=3,5.$$

Se ha obtenido, por tanto que cualquier Álgebra de Lie de dimensión $n \geq 6$, y sucesión característica $(3, 2, 1, \overset{n-5)}{\ldots}, 1)$ es isomorfa a una de la siguiente familia

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_0, U_1] = U_2, & \\ [X_1, X_2] = a_1 U_2 + \sum_{k=1}^{n-6} \alpha_k Y_k, & \\ [X_1, U_1] = a_2 X_3 + a_3 U_2 + \sum_{k=1}^{n-6} \beta_k Y_k, & \\ [X_1, Y_j] = b_{1j}^2 X_2 + b_{1j}^3 X_3 + b_{1j}^5 U_2, & 1 \leq j \leq n-6, \\ [X_2, Y_j] = b_{1j}^2 X_3, & 1 \leq j \leq n-6, \\ [U_1, Y_j] = b_{4j}^3 X_3 + b_{4j}^5 U_2, & 1 \leq j \leq n-6, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij}^3 X_3 + c_{ij}^5 U_2, & 1 \leq i < j \leq n-6. \end{cases}$$

con las siguientes restricciones

$$\begin{cases} b_{1j}^3 \alpha_k + b_{1j}^5 \beta_k = 0, & 1 \leq k \leq n-6, \\ a_2 b_{1j}^5 \alpha_k + a_1 b_{1j}^3 \beta_k - a_3 b_{1j}^3 \alpha_k = 0, & 1 \leq j, k \leq n-6, \\ b_{4j}^3 \alpha_k + (b_{4j}^5 - b_{1j}^2) \beta_k = 0, & 1 \leq j, k \leq n-6, \\ \left[(b_{4j}^5 - b_{1j}^2) a_2 - a_3 b_{4j}^3\right] \alpha_k + a_1 b_{4j}^3 \beta_k = 0, & 1 \leq j, k \leq n-6, \\ \sum_{k=1}^{n-6} b_{1k}^j \alpha_k = 0, & j = 2, 3, 5, \\ \sum_{k=1}^{n-6} b_{1k}^j \beta_k = 0, & j = 2, 3, 5. \\ \sum_{k=1}^{n-6} b_{4k}^j \alpha_k = 0, & j = 3, 5, \\ \sum_{k=1}^{n-6} b_{4k}^j \beta_k = 0, & j = 3, 5, \\ \sum_{k=1}^{l-1} c_{kl}^j \alpha_k - \sum_{k=l+1}^{n-6} c_{lk}^j \alpha_k = 0, & j = 3, 5,\ 1 \leq l \leq n-6, \\ \sum_{k=1}^{l-1} c_{kl}^j \beta_k - \sum_{k=l+1}^{n-6} c_{lk}^j \beta_k = 0, & j = 3, 5\ 1 \leq l \leq n-6. \end{cases}$$

Puesto que se verifica que $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 3 + r$, siempre que $n \geq 8$, donde

$$r = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_{n-6} \\ \beta_1 & \beta_2 \ldots \beta_{n-6} \end{pmatrix}$$

se pueden considerar tres casos, según los distintos valores de r

$$\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = \begin{cases} 3 \Longleftrightarrow r = 0 \\ 4 \Longleftrightarrow r = 1 \\ 5 \Longleftrightarrow r = 2 \end{cases}$$

Los casos $\dim(\mathfrak{g}) = 6, 7$, se estudiarán aparte.

- **Caso 1:** $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 5$

  En este caso $r = 2$ y por tanto por simetría se puede suponer que

$$r = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_{n-6} \\ \beta_1 & \beta_2 \ldots \beta_{n-6} \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

  Haciendo el cambio de base

$$\begin{cases} X_i' = X_i, & 0 \le i \le 3, \\ U_i' = U_i, & 1 \le i \le 2, \\ Y_1' = a_1 U_2 + \sum_{k=1}^{n-6} \alpha_k Y_k, & \\ Y_2' = a_2 X_3 + a_3 U_2 + \sum_{k=1}^{n-6} \beta_k Y_k, & \\ Y_j' = Y_j, & 3 \le j \le n-6. \end{cases}$$

  se obtiene la familia

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le 2, \\ [X_0, U_1] = U_2, & \\ [X_1, X_2] = Y_1, & \\ [X_1, U_1] = Y_2, & \\ [X_1, Y_j] = b_{1j}^2 X_2, & 3 \le j \le n-6, \\ [X_2, Y_j] = b_{1j}^2 X_3, & 3 \le j \le n-6, \\ [U_1, Y_j] = b_{1j}^2 U_2, & 3 \le j \le n-6, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij}^3 X_3 + c_{ij}^5 U_2, & 3 \le i < j \le n-6. \end{cases}$$

  puesto que las restricciones se reducen ahora a

$$\begin{array}{ll} b_{1j}^3 = b_{4j}^3 = b_{1j}^5 = 0, & 1 \le j \le n-6, \\ b_{4j}^5 = b_{1j}^2, & 1 \le j \le n-6, \\ b_{11}^2 = b_{12}^2 = 0, & \\ c_{1j}^k = c_{2j}^k = 0, & k = 3,5,\ 3 \le j \le n-6. \end{array}$$

y, entonces, el cambio de base dado por $Y_j' = Y_j + b_{1j}^2 X_0,\ 3 \le j \le n-6$, permite suponer $b_{1j}^2 = 0,\ 3 \le j \le n-6$.
Además, puesto que debe ser $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + X_1 + Y_i)) = 3,\ 1 \le i \le n-6$:

$$Ad(AX_0 + X_1 + Y_i) = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 & \pm c_{ij}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & \pm c_{ij}^5 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

se debe verificar que

$$c_{ij}^3 = c_{ij}^5 = 0,\ 1 \le i < j \le n-6.$$

quedando

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le 2, \\ [X_0, U_1] = U_2 \\ [X_1, X_2] = Y_1, \\ [X_1, U_1] = Y_2. \end{cases}$$

- **Caso 2:** $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 4$

  Se pueden considerar dos casos:

  ⋆ **Caso 2.1:** $\exists k \in \{1, \dots, n-6\}\ /\ \alpha_k \neq 0$.

  Por simetría, se puede suponer que

$$r = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_{n-6} \\ \beta_1 & \beta_2 \dots \beta_{n-6} \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \alpha_1 \end{pmatrix}$$

  y, por tanto, que $a_1 = a_3 = 0,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_k = 0,\ 2 \le k \le n-6$, y $\beta_k = 0,\ 1 \le k \le n-6$, (puesto que $\beta_k = \lambda \cdot \alpha_k,\ 1 \le k \le n-6$) haciendo, en todo caso, el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_0'=X_0, & \\ X_1'=X_1-(a_3-\lambda a_1)X_0, & \\ X_i'=X_i, & 2\leq i\leq 3, \\ U_1'=U_1-\lambda X_2, & \\ U_2'=U_2-\lambda X_3, & \\ Y_1'=a_1U_2-(a_3-\lambda a_1)X_3+\sum_{k=1}^{n-6}\alpha_kY_k, & \\ Y_j'=Y_j, & 2\leq j\leq n-6. \end{cases}$$

En este caso resulta la familia

$$\begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1}, & 1\leq i\leq 2, \\ [X_0,U_1]=U_2, & \\ [X_1,X_2]=Y_1, & \\ [X_1,U_1]=a_2X_3+\sum_{k=1}^{n-6}\beta_kY_k, & \\ [X_1,Y_j]=b_{1j}^2X_2+b_{1j}^5U_2, & 2\leq j\leq n-6, \\ [U_1,Y_j]=b_{4j}^5U_2, & 2\leq j\leq n-6, \\ [Y_i,Y_j]=c_{ij}^3X_3+c_{ij}^5U_2, & 2\leq i<j\leq n-6. \end{cases}$$

puesto que las restricciones se reducen ahora a

$$\begin{array}{ll} b_{1j}^3=b_{4j}^3=0, & 1\leq j\leq n-6, \\ a_2b_{1j}^5=a_2(b_{4j}^5-b_{1j}^2)=0, & 1\leq j\leq n-6, \\ b_{11}^2=b_{11}^5=b_{41}^5=0, & \\ c_{1j}^3=c_{1j}^5=0, & 2\leq j\leq n-6. \end{array}$$

A continuación el cambio de base dado por $Y_j'=Y_j+b_{1j}^2X_0$, $2\leq j\leq n-6$, permite suponer que $b_{1j}^2=0$, $1\leq j\leq n-6$.

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA * BIBLIOTECA

Además debe ser $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + X_1 + Y_i)) = 3,\ 2 \le i \le n-6$.

$$Ad(AX_0 + X_1 + Y_i) = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & a_2 & 0 & \pm c_{ij}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_{1i}^5 & 0 & 0 & A - b_{4j}^5 & 0 & b_{1j}^5 \pm c_{ij}^5 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

y por tanto, se debe verificar que

$$c_{ij}^3 = a_2 c_{ij}^5 = 0,\ 2 \le i < j \le n-6$$

En definitiva se ha obtenido la familia

$$\left\{\begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le 2, \\ [X_0, U_1] = U_2 & \\ [X_1, X_2] = Y_1, & \\ [X_1, U_1] = a_2 X_3, & \\ [X_1, Y_j] = b_{1j} U_2, & 2 \le j \le n-6, \\ [U_1, Y_j] = b_{4j} U_2, & 2 \le j \le n-6, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij} U_2, & 2 \le i < j \le n-6. \end{array}\right.$$

con las siguientes restricciones

$$\left\{\begin{array}{ll} a_2 b_{1j} = a_2 b_{4j} = 0, & 2 \le j \le n-6, \\ a_2 c_{ij} = 0, & 2 \le i < j \le n-6. \end{array}\right.$$

(se han renombrado b_{1j}^5, b_{4j}^5 y c_{ij}^5, como b_{1j}, b_{4j}, c_{ij}, respectivamente).

$\star$ **Caso 2.2:** $\alpha_k = 0,\ 1 \le k \le n-6$.

Por simetría, se puede suponer que

$$r = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_{n-6} \\ \beta_1 & \beta_2 \ldots \beta_{n-6} \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \beta_2 \end{pmatrix}$$

En este caso, el cambio de base dado por

$$Y_2' = a_2X_3 + a_3U_2 + \sum_{k=1}^{n-6} \beta_k Y_k,$$

permite suponer $a_2 = a_3 = 0$; $\beta_2 = 1$, $\beta_j = 0$, $1 \leq j \leq n-6$, $j \neq 2$. Entonces, las restricciones implican que

$$\begin{array}{ll} a_1 b_{1j}^3 = b_{1j}^5 = 0, & 1 \leq j \leq n-6, \\ a_1 b_{4j}^3 = b_{4j}^5 - b_{1j}^2 = 0, & 1 \leq j \leq n-6, \\ b_{12}^2 = b_{12}^3 = b_{12}^5 = b_{42}^3 = b_{42}^5 = 0, & \\ c_{2j}^3 = c_{2j}^5 = 0, & 1 \leq j \leq n-6. \end{array}$$

El cambio de base dado por $Y_j' = Y_j + b_{1j}^2 X_0$, $1 \leq j \leq n-6, j \neq 2$ permite suponer que $b_{1j}^2 = 0$, $1 \leq j \leq n-6$.
Además debe ser $\mathrm{rg}(Ad(AX_0 + X_1 + Y_i)) = 3$, $2 \leq i \leq n-6$, y por tanto

$$c_{ij}^5 = a_1 c_{ij}^3 = 0, \ 2 \leq i < j \leq n-6.$$

En definitiva, se ha obtenido la familia

$$\left\{ \begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_0, U_1] = U_2 & \\ [X_1, X_2] = a_1 U_2, & \\ [X_1, U_1] = Y_2, & \\ [X_1, Y_j] = b_{1j} X_3, & 1 \leq j \leq n-6, \ j \neq 2, \\ [U_1, Y_j] = b_{4j} X_3, & 1 \leq j \leq n-6, \ j \neq 2, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij} X_3, & 1 \leq i < j \leq n-6. \end{array} \right.$$

con las restricciones

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_1 b_{1j} = a_1 b_{4j} = 0, & 1 \leq j \leq n-6, \\ c_{2i} = 0, & 1 \leq i \leq n-6, \\ a_1 c_{ij} = 0, & 1 \leq i < j \leq n-6. \end{array} \right.$$

- **Caso 3:** $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 3$

El cambio de base dado por $Y_j' = Y_j + b_{1j}^2 X_0$, $1 \leq j \leq n-6, j \neq 2$ permite suponer que $b^2_{1j} = 0,\ 1 \leq j \leq n-6$, obteniéndose la siguiente familia

$$
\begin{array}{ll}
[X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 2, \\
[X_0, U_1] = U_2 & \\
[X_1, X_2] = a_1 U_2, & \\
[X_1, U_1] = a_2 X_3 + a_3 U_2, & \\
[X_1, Y_j] = b^3_{1j} X_3 + b^5_{1j} U_2, & 1 \leq j \leq n-6, \\
[U_1, Y_j] = b^3_{4j} X_3 + b^5_{4j} U_2, & 1 \leq j \leq n-6, \\
[Y_i, Y_j] = c^3_{ij} X_3 + c^5_{ij} U_2, \quad 1 \leq i < j \leq n-6. &
\end{array}
$$

sin restricciones respecto a los parámetros.

En definitiva se ha obtenido que cualquier álgebra de Lie de dimensión $n \geq 8$ y sucesión característica $(3, 2, 1 \overset{n-5)}{\ldots}, 1)$, es isomorfa a una de la siguiente familia de álgebras:

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
[X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 2, \\
[X_0, U_1] = U_2, & \\
[X_1, X_2] = a_1 U_2 + \alpha Y_1, & \\
[X_1, U_1] = a_2 X_3 + a_3 U_2 + \beta Y_2, & \\
[X_1, Y_j] = b^3_{1j} X_3 + b^5_{1j} U_2, & 1 \leq j \leq n-6, \\
[U_1, Y_j] = b^3_{4j} X_3 + b^5_{4j} U_2, & 1 \leq j \leq n-6, \\
[Y_i, Y_j] = c^3_{ij} X_3 + c^5_{ij} U_2, \quad 1 \leq i < j \leq n-6. &
\end{array}
\right.
$$

donde $(\alpha, \beta) \in \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$ con las siguientes restricciones respecto a los parámetros

$$
\begin{array}{ll}
\alpha a_1 = \alpha a_3 = \beta a_2 = \beta a_3 = 0 & \\
\alpha b^2_{1j} = \alpha b^3_{1j} = \alpha b^3_{4j} = \alpha a_2 b^5_{1j} = \alpha a_2 b^5_{4j} = 0, & 1 \leq j \leq n-6, \\
\beta b^2_{1j} = \beta b^5_{1j} = \beta b^5_{4j} = \beta a_1 b^3_{1j} = \beta a_1 b^3_{4j} = 0, & 1 \leq j \leq n-6, \\
\alpha c^3_{ij} = \beta c^5_{ij} = \alpha a_2 c^5_{ij} = \beta a_1 c^3_{ij} = 0, & 1 \leq i < j \leq n-6, \\
\alpha\,[X_1, Y_1] = \alpha\,[U_1, Y_1] = \beta\,[X_1, Y_2] = \beta\,[U_1, Y_2] = 0, & \\
\alpha\,[Y_1, Y_j] = \beta\,[Y_2, Y_j] = 0, & 1 \leq j \leq n-6.
\end{array}
$$

verificándose que

$$\dim\,[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad (\alpha,\beta)=(0,0) \\ 4 & \text{si} \quad (\alpha,\beta)=(1,0) \text{ ó } (\alpha,\beta)=(0,1) \\ 5 & \text{si} \quad (\alpha,\beta)=(1,1) \end{cases}$$

- Caso $\dim(\mathfrak{g}) = 6$.

  En este caso se tiene la familia

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_0, U_1] = U_2 & \\ [X_1, X_2] = a_1 U_2, & \\ [X_1, U_1] = a_2 X_3 + a_3 U_2. & \end{cases}$$

  incluida en el caso $(\alpha, \beta) = (0, 0)$.

- Caso $\dim(\mathfrak{g}) = 7$.

  Se considera la base

$$\mathcal{B} = \{X_0, X_1, X_2, X_3, U_1, U_2, Y\}$$

  En este caso se obtiene una de las familias siguientes

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, 1 \leq i \leq 2, \\ [X_0, U_1] = U_2 \\ [X_1, X_2] = a_1 U_2 + \alpha Y, \\ [X_1, U_1] = a_2 X_3 + a_3 U_2, \\ [X_1, Y] = b_1^2 X_2 + b_1^3 X_3 + b_1^5 U_2, \\ [X_2, Y] = b_1^2 X_3, \\ [U_1, Y] = b_4^3 X_3 + b_4^5 U_2. \end{cases} \qquad \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, 1 \leq i \leq 2, \\ [X_0, U_1] = U_2 \\ [X_1, X_2] = a_1 U_2, \\ [X_1, U_1] = a_2 X_3 + a_3 U_2 + \beta Y, \\ [X_1, Y] = b_1^2 X_2 + b_1^3 X_3 + b_1^5 U_2, \\ [X_2, Y] = b_1^2 X_3, \\ [U_1, Y] = b_4^3 X_3 + b_4^5 U_2. \end{cases}$$

  incluidas en los casos $(\alpha, \beta) \in \{(0,0), (1,0)\}$ ó $(\alpha, \beta) \in \{(0,0), (0,1)\}$, respectivamente.

□

3.2 Clasificación en los casos $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) > 3$.

Se va a obtener a continuación, la clasificación de las álgebras de Lie de invariante de Goze $(3, 2, 1, \ldots, 1)$, en los casos en que la dimensión de la derivada es 4, ó 5, restando el caso de dimensión 3.

3.2.1 Ejemplos.

Denominaremos por

$$\begin{array}{llll}
\mu_{n,1,1}^{i}, & 1 \leq i \leq 3; & & \\
\mu_{n,1,1}^{1,r}, & 1 \leq i \leq \left[\frac{n-7}{2}\right]; & \mu_{n,1,1}^{2,r}, & 1 \leq i \leq \left[\frac{n-8}{2}\right]; \\
\mu_{n,1,1}^{3,r}, & 1 \leq i \leq \left[\frac{n-8}{2}\right]; & \mu_{n,1,1}^{4,r}, & 1 \leq i \leq \left[\frac{n-9}{2}\right]; \\
\mu_{n,1,1}^{5,r}, & 1 \leq i \leq \left[\frac{n-7}{2}\right]; & \mu_{n,1,1}^{6,r}, & 1 \leq i \leq \left[\frac{n-8}{2}\right]; \\
\mu_{n,1,1}^{7,r}, & 1 \leq i \leq \left[\frac{n-8}{2}\right]; & \mu_{n,1,1}^{8,r}, & 1 \leq i \leq \left[\frac{n-9}{2}\right]
\end{array}$$

a las leyes de las álgebras de Lie de dimensión $n \geq 8$ tales que, respecto de una cierta base adaptada $\{X_0,\ X_1, \ldots,\ U_2,\ Y_1, \ldots, Y_{n-6}\}$, se expresan mediante

$$(\mu_{n,1,1}^{1}) \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_0, U_1] = U_2 & \\ [X_1, X_2] = Y_1, & \\ [X_1, U_1] = Y_2. & \end{cases}$$

$$(\mu_{n,1,1}^{2}) \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_0, U_1] = U_2 & \\ [X_1, X_2] = Y_1, & \\ [X_1, U_1] = X_3. & \end{cases} \qquad (\mu_{n,1,1}^{3}) \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_0, U_1] = U_2 & \\ [X_1, X_2] = U_2, & \\ [X_1, U_1] = Y_1. & \end{cases}$$

$$(\mu_{n,1,1}^{1,r}) \begin{cases} [X_0, X_i] & = X_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq 2, \\ [X_0, U_1] & = U_2 \\ [X_1, X_2] & = Y_1, \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] & = U_2, \quad 1 \leq k \leq r. \end{cases} \qquad 0 \leq r \leq \left[\frac{n-7}{2}\right]$$

$$(\mu_{n,1,1}^{2,r}) \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, \quad 1 \le i \le 2, \\ [X_0, U_1] &= U_2 \\ [X_1, X_2] &= Y_1, \\ [X_1, Y_{n-6}] &= U_2, \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] &= U_2, \quad 1 \le k \le r. \end{cases} \qquad 0 \le r \le \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$$

$$(\mu_{n,1,1}^{3,r}) \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, \quad 1 \le i \le 2, \\ [X_0, U_1] &= U_2 \\ [X_1, X_2] &= Y_1, \\ [U_1, Y_{n-6}] &= U_2, \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] &= U_2, \quad 1 \le k \le r. \end{cases} \qquad 0 \le r \le \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$$

$$(\mu_{n,1,1}^{4,r}) \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, \quad 1 \le i \le 2, \\ [X_0, U_1] &= U_2 \\ [X_1, X_2] &= Y_1, \\ [X_1, Y_{n-7}] &= U_2, \\ [U_1, Y_{n-6}] &= U_2, \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] &= U_2, \quad 1 \le k \le r. \end{cases} \qquad 0 \le r \le \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor$$

$$(\mu_{n,1,1}^{5,r}) \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, \quad 1 \le i \le 2, \\ [X_0, U_1] &= U_2 \\ [X_1, U_1] &= Y_1, \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] &= X_3, \quad 1 \le k \le r. \end{cases} \qquad 0 \le r \le \left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor$$

$$(\mu_{n,1,1}^{6,r}) \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, \quad 1 \le i \le 2, \\ [X_0, U_1] &= U_2 \\ [X_1, U_1] &= Y_1, \\ [X_1, Y_{n-6}] &= X_3, \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] &= X_3, \quad 1 \le k \le r. \end{cases} \qquad 0 \le r \le \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$$

$$(\mu_{n,1,1}^{7,r}) \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, \quad 1 \le i \le 2, \\ [X_0, U_1] &= U_2 \\ [X_1, U_1] &= Y_1, \\ [U_1, Y_{n-6}] &= X_3, \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] &= X_3, \quad 1 \le k \le r. \end{cases} \qquad 0 \le r \le \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$$

$$
(\mu_{n,1,1}^{8,r})\begin{cases}
[X_0,X_i] &= X_{i+1}, \quad 1\le i\le 2,\\
[X_0,U_1] &= U_2\\
[X_1,U_1] &= Y_1,\\
[X_1,Y_{n-7}] &= X_3,\\
[U_1,Y_{n-6}] &= X_3,\\
[Y_{2k},Y_{2k+1}] &= X_3, \quad 1\le k\le r.
\end{cases}
\qquad 0\le r\le\left\lfloor\frac{n-9}{2}\right\rfloor
$$

Es evidente que todas las álgebras definidas por las leyes anteriores son nilpotentes, tienen invariante de Goze $(3,2,1,\ldots,1)$ y verifican $\dim \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) > 3$.
Además, hay exactamente $4n-23$. Renombramos las leyes de las álgebras de modo que aparezcan enumeradas correlativamente de 1 a $4n-23$.

		$\mu_{n,1,1}^1,\ \mu_{n,1,1}^2,\ \mu_{n,1,1}^3$
$\mu_{n,1,1}^{1,r}$	$\mu_{n,1,1}^{4+r}, \quad 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor$	$\mu_{n,1,1}^4, \ldots, \mu_{n,1,1}^{4+\left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor}$
$\mu_{n,1,1}^{2,r}$	$\mu_{n,1,1}^{5+\left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor+r}, \quad 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$	$\mu_{n,1,1}^{5+\left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor}, \ldots, \mu_{n,1,1}^{5+n-8} = \mu_{n,1,1}^{n-3}$
$\mu_{n,1,1}^{3,r}$	$\mu_{n,1,1}^{n-2+r}, \quad 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$	$\mu_{n,1,1}^{n-2}, \ldots, \mu_{n,1,1}^{n-2+\left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor}$
$\mu_{n,1,1}^{4,r}$	$\mu_{n,1,1}^{n-1+\left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor+r}, \quad 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-10}{2} \right\rfloor$	$\mu_{n,1,1}^{n-1+\left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor}, \ldots, \mu_{n,1,1}^{n-1+n-9} = \mu_{n,1,1}^{2n-10}$
$\mu_{n,1,1}^{5,r}$	$\mu_{n,1,1}^{2n-9+r}, \quad 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor$	$\mu_{n,1,1}^{2n-9}, \ldots, \mu_{n,1,1}^{2n-9+\left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor}$
$\mu_{n,1,1}^{6,r}$	$\mu_{n,1,1}^{2n-8+\left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor+r}, \quad 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$	$\mu_{n,1,1}^{2n-8+\left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor}, \ldots, \mu_{n,1,1}^{2n-8+n-8} = \mu_{n,1,1}^{3n-16}$
$\mu_{n,1,1}^{7,r}$	$\mu_{n,1,1}^{3n-15+r}, \quad 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$	$\mu_{n,1,1}^{3n-15}, \ldots, \mu_{n,1,1}^{3n-15+\left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor}$
$\mu_{n,1,1}^{8,r}$	$\mu_{n,1,1}^{3n-14+\left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor+r}, \quad 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor$	$\mu_{n,1,1}^{3n-14+\left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor}, \ldots, \mu_{n,1,1}^{3n-14+n-9} = \mu_{n,1,1}^{4n-23}$

Nota: A pesar de todo, no se abandonará definitivamente la notación inicial, sino que se usarán indistintamente ambas notaciones.

Proposición 3.2 *Las* $4n-23$ *álgebras de Lie nilpotentes complejas de dimensión* $n \geq 8$*, definidas en el párrafo anterior, con invariante de Goze* $(3,2,1,\ldots,1)$ *y* $\dim \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) > 3$*, son no isomorfas dos a dos.*

Demostración. Se va a probar que estas álgebras son no isomorfas dos a dos, viendo que dos cualesquiera de ellas, difieren en la dimensión de alguno de los invariantes siguientes

$$\begin{array}{l} \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \\ \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g},\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})] \\ \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \{\, X \in \mathfrak{g} \ / \ [X,Z]=0,\ \forall\ Z \in \mathfrak{g}\} \\ \{\theta \ / \ \mathrm{d}^k\theta = 0\} \\ Der(\mathfrak{g}) \end{array}$$

En primer lugar, es claro que $\mathfrak{g}^1_{n,1,1}$ es no isomorfa a $\mathfrak{g}^j_{n,1,1}$, $2 \leq j \leq 4n-23$, pues

	$\mu^1_{n,1,1}$	$\mu^2_{n,1,1}$	$\mu^3_{n,1,1}$	$\mu^4_{n,1,1}$	$\mu^{2n-9}_{n,1,1}$	$\mu^i_{n,1,1}$, $\left\{\begin{array}{l} 5\leq i\leq 4n-23 \\ i\neq 2n-9 \end{array}\right.$
$\dim\, \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$	5	4	4	4	4	4
$\dim\, \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$	$n-4$	$n-4$	$n-4$	$n-4$	$n-4$	$< n-4$

y por tanto basta probar que $\mu^2_{n,1,1}, \mu^3_{n,1,1}, \mu^4_{n,1,1}$ y $\mu^{2n-9}_{n,1,1}$ son no isomorfas entre sí, y que $\mu^i_{n,1,1}$, $\leq i \leq 4n-23, i \neq 2n-9$, son no isomorfas entre sí.
Se va a probar en primer lugar que $\mu^2_{n,1,1}, \mu^3_{n,1,1}, \mu^4_{n,1,1}$ y $\mu^{2n-9}_{n,1,1}$, son no isomorfas entre sí. En efecto

	$\mu^2_{n,1,1}$	$\mu^3_{n,1,1}$	$\mu^4_{n,1,1}$	$\mu^{2n-9}_{n,1,1}$
$\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$	$\langle X_2, X_3, U_2, Y_1\rangle$	$\langle X_2, X_3, U_2, Y_1\rangle$	$\langle X_2, X_3, U_2, Y_1\rangle$	$\langle X_2, X_3, U_2, Y_1\rangle$
$\mathcal{C}^2(\mathfrak{g})$	$\langle X_3, Y_1\rangle$	$\langle X_3, U_2\rangle$	$\langle X_3, Y_1\rangle$	$\langle X_3\rangle$
$\dim\, \mathcal{C}^2(\mathfrak{g})$	2	2	2	1

Por lo tanto, basta probar que $\mu^2_{n,1,1}$, $\mu^3_{n,1,1}$ y $\mu^4_{n,1,1}$ son no isomorfas entre sí.
Ahora bien, para las tres, se verifica que

$$\mathrm{d}w_0 = \mathrm{d}w_1 = \mathrm{d}w_3 = \mathrm{d}w_5 = 0,\ \mathrm{d}\alpha_i = 0,\ 2 \leq i \leq n-6$$

Por otra parte

$\mu^2_{n,1,1}$	$\mu^3_{n,1,1}$	$\mu^4_{n,1,1}$
$\mathrm{d}w_2 = w_0 \wedge w_1$ $\mathrm{d}w_3 = w_0 \wedge w_2 + w_1 \wedge w_4$ $\mathrm{d}w_5 = w_0 \wedge w_4$ $\mathrm{d}\alpha_1 = w_1 \wedge w_2$	$\mathrm{d}w_2 = w_0 \wedge w_1$ $\mathrm{d}w_3 = w_0 \wedge w_2$ $\mathrm{d}w_5 = w_0 \wedge w_4 + w_1 \wedge w_2$ $\mathrm{d}\alpha_1 = w_1 \wedge w_2$	$\mathrm{d}w_2 = w_0 \wedge w_1$ $\mathrm{d}w_3 = w_0 \wedge w_2$ $\mathrm{d}w_5 = w_0 \wedge w_4$ $\mathrm{d}\alpha_1 = w_1 \wedge w_2$
$\dim\{\theta \ / \ \mathrm{d}^2\theta = 0\} = n-1$	$\dim\{\theta \ / \ \mathrm{d}^2\theta = 0\} = n-1$	$\dim\{\theta \ / \ \mathrm{d}^2\theta = 0\} = n$

Además, se verifica (ver capítulo 4) que

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^2_{n,1,1})) =, \ \dim(Der(\mathfrak{g}^3_{n,1,1})) =$$

A continuación se va a probar que $\mu^i_{n,1,1}$, $4 \leq i \leq 4n-23, i \neq 4, 2n-9$ son no isomorfas entre sí. En efecto, se verifica

	$\dim\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$	$\mathcal{C}^2(\mathfrak{g})$	$\dim(\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}))$
$\mu^{1,r}_{n,1,1}, \quad 1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor$	$n-2r-4$	$\langle X_3, Y_1 \rangle$	2
$\mu^{2,r}_{n,1,1}, \quad 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$	$n-2r-5$	$\langle X_3, Y_1 \rangle$	2
$\mu^{3,r}_{n,1,1}, \quad 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$	$n-2r-5$	$\langle X_3, Y_1 \rangle$	2
$\mu^{4,r}_{n,1,1}, \quad 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor$	$n-2r-6$	$\langle X_3, Y_1 \rangle$	2
$\mu^{5,r}_{n,1,1}, \quad 1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor$	$n-2r-4$	$\langle X_3 \rangle$	1
$\mu^{6,r}_{n,1,1}, \quad 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$	$n-2r-5$	$\langle X_3 \rangle$	1
$\mu^{7,r}_{n,1,1}, \quad 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$	$n-2r-5$	$\langle X_3 \rangle$	1
$\mu^{8,r}_{n,1,1}, \quad 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor$	$n-2r-6$	$\langle X_3 \rangle$	1

Entonces las álgebras de las familias de leyes $(\mu^{1,r}_{n,1,1}, \ \mu^{4,r}_{n,1,1}, \ \mu^{5,r}_{n,1,1}, \ \mu^{8,r}_{n,1,1})$, son no isomorfas a las de las familias de leyes $(\mu^{2,r}_{n,1,1}, \ \mu^{3,r}_{n,1,1}, \ \mu^{6,r}_{n,1,1}, \ \mu^{7,r}_{n,1,1})$, por la paridad de la dimensión del centro. Por lo tanto, basta probar que las álgebras de las siguientes parejas de familias son no isomorfas entre sí.

$$(\mu^{1,r}_{n,1,1}, \ \mu^{4,r}_{n,1,1}), \ (\mu^{5,r}_{n,1,1}, \ \mu^{8,r}_{n,1,1}), \ (\mu^{2,r}_{n,1,1}, \ \mu^{3,r}_{n,1,1}), \ (\mu^{6,r}_{n,1,1}, \ \mu^{7,r}_{n,1,1})$$

Se van a designar

$$r_1 = \left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor, \ r_2 = \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor, \ r_3 = \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor = r_1 - 1$$

BIBLIOTECA

Si se denota $d_k = \dim\{\theta \ / \ \mathrm{d}^k(\theta) = 0\}$, se sigue que

	$\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$	d_2	d_3	d_4	d_5	$\dots$	d_{r_1-1}	d_{r_1}	d_{r_1+1}	d_{r_1+2}
$\mu_{n,1,1}^{1,1}$	$n-6$	$n-1$	n			$\dots$				
$\mu_{n,1,1}^{1,2}$	$n-8$	$n-1$	$n-1$	n		$\dots$				
$\vdots$						$\dots$				
$\mu_{n,1,1}^{1,r_1-1}$	$n-2r_1-2$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\dots$	$n-1$	$n-1$	n	
$\mu_{n,1,1}^{1,r_1}$	$n-2r_1-4$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\dots$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	n
$\mu_{n,1,1}^{4,0}$	$n-6$	$n-1$	n			$\dots$				
$\mu_{n,1,1}^{4,1}$	$n-8$	$n-1$	$n-1$	n		$\dots$				
$\vdots$						$\dots$				
$\mu_{n,1,1}^{4,r_1-2}$	$n-2r_1-2$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\dots$	$n-1$	$n-1$	n	
$\mu_{n,1,1}^{4,r_1-1}$	$n-2r_1-4$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\dots$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	n

	$\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$	d_2	d_3	d_4	d_5	$\dots$	d_{r_1-1}	d_{r_1}	d_{r_1+1}	d_{r_1+2}
$\mu_{n,1,1}^{2,0}$	$n-5$	$n-1$	n			$\dots$				
$\mu_{n,1,1}^{2,1}$	$n-7$	$n-1$	$n-1$	n		$\dots$				
$\vdots$						$\dots$				
$\mu_{n,1,1}^{1,r_2-1}$	$n-2r_2-3$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\dots$	$n-1$	n		
$\mu_{n,1,1}^{1,r_2}$	$n-2r_2-5$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\dots$	$n-1$	$n-1$	n	
$\mu_{n,1,1}^{3,0}$	$n-5$	n				$\dots$				
$\mu_{n,1,1}^{3,1}$	$n-7$	$n-1$	n			$\dots$				
$\vdots$						$\dots$				
$\mu_{n,1,1}^{3,r_2-1}$	$n-2r_2-3$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\dots$	n			
$\mu_{n,1,1}^{3,r_2}$	$n-2r_2-5$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\dots$	$n-1$	n		

	$\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$	d_2	d_3	d_4	d_5	$\dots$	d_{r_1}	d_{r_1+1}	d_{r_1+2}	d_{r_1+3}
$\mu_{n,1,1}^{5,1}$	$n-6$	$n-1$	n			$\dots$				
$\mu_{n,1,1}^{5,2}$	$n-8$	$n-1$	$n-1$	n		$\dots$				
$\vdots$						$\dots$				
$\mu_{n,1,1}^{5,r_1-1}$	$n-2r_1-2$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\dots$	$n-1$	n		
$\mu_{n,1,1}^{5,r_1}$	$n-2r_1-4$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\dots$	$n-1$	$n-1$	n	
$\mu_{n,1,1}^{8,0}$	$n-6$	$n-1$	$n-1$	n		$\dots$				
$\mu_{n,1,1}^{8,1}$	$n-8$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	n	$\dots$				
$\vdots$						$\dots$				
$\mu_{n,1,1}^{8,r_1-2}$	$n-2r_1-2$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\dots$	$n-1$	$n-1$	n	
$\mu_{n,1,1}^{8,r_1-1}$	$n-2r_1-4$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\dots$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	n

	$\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$	d_2	d_3	d_4	d_5	$\dots$	d_{r_2}	d_{r_2+1}	d_{r_2+2}	d_{r_2+3}
$\mu_{n,1,1}^{6,0}$	$n-5$	$n-1$	n			$\dots$				
$\mu_{n,1,1}^{6,1}$	$n-7$	$n-1$	$n-1$	n		$\dots$				
$\vdots$						$\dots$				
$\mu_{n,1,1}^{6,r_2-1}$	$n-2r_2-3$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\dots$	$n-1$	$n-1$	n	
$\mu_{n,1,1}^{6,r_2}$	$n-2r_2-5$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\dots$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	n
$\mu_{n,1,1}^{7,0}$	$n-5$	$n-1$	n			$\dots$				
$\mu_{n,1,1}^{7,1}$	$n-7$	$n-1$	$n-1$	n		$\dots$				
$\vdots$						$\dots$				
$\mu_{n,1,1}^{7,r_2-1}$	$n-2r_2-3$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\dots$	$n-1$	$n-1$	n	
$\mu_{n,1,1}^{7,r_2}$	$n-2r_2-5$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\dots$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	n

Falta probar que $\mu_{n,1,1}^{1,r}$ es no isomorfa a $\mu_{n,1,1}^{4,r-1}$, para cada $r : 1 \leq r \leq r_1$, y que $\mu_{n,1,1}^{6,r}$ es no isomorfa a $\mu_{n,1,1}^{7,r}$, para cada $r : 0 \leq r \leq r_2$ pero para ello basta comprobar que no coinciden las dimensiones de sus espacios de derivaciones (ver cap. siguiente).

$\square$

Se va a probar a continuación que estas son todas las álgebras de Lie de sucesión característica $(3, 2, 1 \overset{n-5)}{\ldots}, 1)$, y dimensión de la derivada mayor que 3. Para hacer más asequible el seguimiento de la demostración se van a encontrar las que proceden de cada dimensión de la derivada 5 ó 4, por medio de proposiciones independientes.

3.2.2 Clasificación en el caso $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 5$

Proposición 3.3 *Cualquier álgebra de Lie de dimensión* $n \geq 8$ *e invariante de Goze* $(3, 2, 1 \overset{n-5)}{\ldots}, 1)$ *con* $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 5$, *es isomorfa al álgebra* $\mathfrak{g}^1_{n,1,1}$)

Demostración. Trivial según el teorema 3.1. □

3.2.3 Clasificación en el caso $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 4$

Proposición 3.4 *Cualquier álgebra de Lie de dimensión* $n \geq 8$ *e invariante de Goze* $(3, 2, 1 \overset{n-5)}{\ldots}, 1)$ *con* $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 4$, *es isomorfa a alguna de las álgebras*

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{g}^2_{n,1,1}, & \mathfrak{g}^3_{n,1,1}, & \\
\mathfrak{g}^{1,r}_{n,1,1}, & \mathfrak{g}^{5,r}_{n,1,1}, & 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor, \\
\mathfrak{g}^{2,r}_{n,1,1}, & \mathfrak{g}^{6,r}_{n,1,1}, & 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor, \\
\mathfrak{g}^{3,r}_{n,1,1}, & \mathfrak{g}^{7,r}_{n,1,1}, & 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor, \\
\mathfrak{g}^{4,r}_{n,1,1}, & \mathfrak{g}^{8,r}_{n,1,1}, & 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor .
\end{array}$$

Demostración.

Nota: Aunque, como es obvio, para que exista al menos un álgebra de cada familia debe ser $n \geq 9$, sin embargo el resultado es cierto también para el caso $n = 8$.

- **Caso 1:** $(\alpha, \beta) = (1, 0)$

En este caso, según el teorema 3.1 se tiene la siguiente familia de álgebras

$$\begin{cases} [X_0, X_1] = X_2 \\ [X_0, X_2] = X_3 \\ [X_0, U_1] = U_2 \\ [X_1, X_2] = Y_1, \\ [X_1, U_1] = aX_3, \\ [X_1, Y_j] = b_{1j}U_2, & 2 \leq j \leq n-6, \\ [U_1, Y_j] = b_{4j}U_2, & 2 \leq j \leq n-6, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij}U_2, & 2 \leq i < j \leq n-6. \end{cases}$$

con las siguientes restricciones respecto a los parámetros

$$\begin{array}{ll} ab_{1j} = ab_{4j} = 0, & 2 \leq j \leq n-6, \\ ac_{1j} = 0, & 2 \leq i < j \leq n-6. \end{array}$$

Caso 1.1: $a \neq 0$

Mediante un cambio de escala trivial se obtiene el álgebra de ley

$$\mathfrak{g}^2_{n,1,1} : \begin{cases} [X_0, X_1] = X_2 \\ [X_0, X_2] = X_3 \\ [X_0, U_1] = U_2 \\ [X_1, X_2] = Y_1, \\ [X_1, U_1] = X_3. \end{cases}$$

Caso 1.2: $a = 0$

Se tiene la siguiente familia de álgebras

$$\begin{cases} [X_0, X_1] = X_2 \\ [X_0, X_2] = X_3 \\ [X_0, U_1] = U_2 \\ [X_1, X_2] = Y_1, \\ [X_1, Y_j] = b^5_{1j}U_2, & 2 \leq j \leq n-6, \\ [U_1, Y_j] = b^5_{4j}U_2, & 2 \leq j \leq n-6, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij}U_2, & 2 \leq i < j \leq n-6. \end{cases}$$

sin restricciones respecto a los parámetros.

BIBLIOTECA

Caso 1.2.1: $\dim \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = n-4$

Se tiene el álgebra cuya ley viene dada por

$$\mathfrak{g}_{n,1,1}^{1,0} : \begin{cases} [X_0, X_1]=X_2 \\ [X_0, X_2]=X_3 \\ [X_0, U_1]=U_2 \\ [X_1, X_2]=Y_1. \end{cases}$$

Caso 1.2.2: $\dim \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) < n-4$

En este caso $\exists k \in \{2, \ldots, n-6\}, \ / \ Y_k \notin \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.

Caso 1.2.2.1: $b_{4j} = 0, \ 2 \leq j \leq n-6$

Caso 1.2.2.1.1: $b_{1j} = 0, \ 2 \leq j \leq n-6$

Se tiene la siguiente familia de álgebras

$$\begin{cases} [X_0, X_1]=X_2 \\ [X_0, X_2]=X_3 \\ [X_0, U_1]=U_2 \\ [X_1, X_2]=Y_1, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij} U_2, \quad 2 \leq i < j \leq n-6. \end{cases}$$

Por simetría, se puede suponer $c_{23} \neq 0$ efectuando, si fuese preciso, un cambio de base trivial. A continuación se puede suponer $c_{23} = 1$ y $c_{2j} = c_{3j} = 0, \ 4 \leq j \leq n-7$, efectuando el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_i'=X_i, & 0 \leq i \leq 3, \\ U_i'=U_i, & 1 \leq i \leq 2, \\ Y_1'=Y_1, & \\ Y_2'=\dfrac{1}{c_{23}} Y_2, & \\ Y_3'=Y_3, & \\ Y_j'=Y_j + \dfrac{c_{3j}}{c_{23}} Y_2 - \dfrac{c_{2j}}{c_{23}} Y_3, & 4 \leq j \leq n-6. \end{cases}$$

quedando

$$\begin{cases} [X_0, X_1]=X_2 \\ [X_0, X_2]=X_3 \\ [X_0, U_1]=U_2 \\ [X_1, X_2]=Y_1, \\ [Y_2, Y_3]=U_2, \\ [Y_i, Y_j]=c_{ij}U_2, \quad 4 \leq i < j \leq n-6. \end{cases}$$

Por un procedimiento análogo al efectuado en el capítulo 1, se obtiene la siguiente familia de álgebras

$$\mathfrak{g}_{n,1,1}^{1,r} : \begin{cases} [X_0, X_1]=X_2 \\ [X_0, X_2]=X_3 \\ [X_0, U_1]=U_2 \\ [X_1, X_2]=Y_1, \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}]=U_2, \quad 1 \leq k \leq r. \end{cases} \qquad 1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor$$

Caso 1.2.2.1.2: $\exists k \in \{2, \ldots, n-6\} \ / \ b_{1k} \neq 0$

Se tiene la siguiente familia de leyes de álgebras

$$\begin{cases} [X_0, X_1]=X_2 \\ [X_0, X_2]=X_3 \\ [X_0, U_1]=U_2 \\ [X_1, X_2]=Y_1, \\ [X_1, Y_j]=b_{1j}U_2, \quad 2 \leq j \leq n-6, \\ [Y_i, Y_j]=c_{ij}U_2, \quad 2 \leq i < j \leq n-6. \end{cases}$$

con algún $b_{1j} \neq 0$. Se puede suponer que $b_{1,n-6} \neq 0$, mediante un cambio de base trivial. A continuación se puede suponer $b_{1,n-6} = 1$, $b_{1j} = 0$, $2 \leq j \leq n-7$, efectuando, si es preciso, el cambio de base

$$\begin{cases} X_i' = X_i, & 0 \leq i \leq 3, \\ U_i' = U_i, & 1 \leq i \leq 2, \\ Y_1' = Y_1, & \\ Y_j' = b_{1,n-6}Y_j - b_{1j}Y_{n-6}, & 2 \leq j \leq n-7, \\ Y_{n-6}' = \dfrac{1}{b_{1,n-6}}Y_{n-6}. & \end{cases}$$

obteniéndose la familia

$$\begin{cases} [X_0, X_1] &= X_2 \\ [X_0, X_2] &= X_3 \\ [X_0, U_1] &= U_2 \\ [X_1, X_2] &= Y_1, \\ [X_1, Y_{n-6}] &= U_2, \\ [Y_i, Y_j] &= c_{ij} U_2, \quad 2 \leq i < j \leq n-6. \end{cases}$$

Se pueden considerar dos casos

- Si $c_{ij} = 0, \ 2 \leq i < j \leq n-6$, se obtiene el álgebra de ley

$$\mathfrak{g}_{n,1,1}^{2,0} : \begin{cases} [X_0, X_1] &= X_2 \\ [X_0, X_2] &= X_3 \\ [X_0, U_1] &= U_2 \\ [X_1, X_2] &= Y_1, \\ [X_1, Y_{n-6}] &= U_2. \end{cases}$$

- Si $\exists h, k : \ 2 \leq h < k \leq n-6$, tal que $c_{hk} \neq 0$, entonces se puede suponer que $\exists h, k : \ 2 \leq h < k \leq n-7$, tal que $c_{hk} \neq 0$ y, por tanto, que $c_{23} \neq 0$, pues en caso contrario se obtiene un álgebra de alguno de los casos anteriores.
 (Si $c_{ij} = 0, \ 2 \leq i < j \leq n-7$, entonces $\exists k \in \{2, \ldots, n-7\}$ tal que $c_{k,n-6} \neq 0$. Suponiendo, por ejemplo, $c_{2,n-6}$ y haciendo el cambio de base dado por $X_1' = c_{2,n-6} X_1 - Y_2$, se tendría un álgebra de la familia $\mathfrak{g}_{n,1,1}^{1,r}$).
 Se puede por lo tanto suponer, por simetría, que $c_{23} \neq 0$ y, por un procedimiento análogo al del caso anterior, se obtiene familia de álgebras de leyes

$$\mathfrak{g}_{n,1,1}^{2,r} : \begin{cases} [X_0, X_1] &= X_2 \\ [X_0, X_2] &= X_3 \\ [X_0, U_1] &= U_2 \\ [X_1, X_2] &= Y_1, \\ [X_1, Y_{n-6}] &= U_2, \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] &= U_2, \quad 1 \leq k \leq r. \end{cases} \qquad 1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$$

Caso 1.2.2.2: $\exists k \in \{2, \ldots, n-6\} \;/\; b_{4k} \neq 0$

Se puede suponer $b_{4,n-6} \neq 0$, mediante un cambio de base trivial y, entonces, se puede suponer $b_{4,n-6} = 1$, $b_{4j} = 0$, $2 \leq j \leq n-7$, mediante el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_i' &= X_i, & 0 \leq i \leq 3, \\ U_i' &= U_i, & 1 \leq i \leq 2, \\ Y_1' &= Y_1, & \\ Y_j' &= b_{4,n-6} Y_j - b_{4j} Y_{n-6}, & 2 \leq j \leq n-7, \\ Y_{n-6}' &= \dfrac{1}{b_{4,n-6}} Y_{n-6}. & \end{cases}$$

quedando

$$\begin{cases} [X_0, X_1] &= X_2 \\ [X_0, X_2] &= X_3 \\ [X_0, U_1] &= U_2 \\ [X_1, X_2] &= Y_1, \\ [X_1, Y_j] &= b_{1j} U_2, \quad 2 \leq j \leq n-6, \\ [U_1, Y_{n-6}] &= U_2, \\ [Y_i, Y_j] &= c_{ij} U_2, \quad 2 \leq i < j \leq n-6. \end{cases}$$

Caso 1.2.2.2.1: $b_{1j} = 0, \; 2 \leq j \leq n-6$

De forma análoga a los casos anteriores, se obtiene

$$\mathfrak{g}_{n,1,1}^{3,r} \begin{cases} [X_0, X_1] &= X_2 \\ [X_0, X_2] &= X_3 \\ [X_0, U_1] &= U_2 \\ [X_1, X_2] &= Y_1, \\ [U_1, Y_{n-6}] &= U_2, \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] &= U_2, \quad 1 \leq k \leq r. \end{cases} \qquad 1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$$

Para más detalles, ver apéndice D.2.

BIBLIOTECA

Caso 1.2.2.2.2: $\exists k \in \{2, \ldots, n-6\} \;/\; b_{1k} \neq 0$

De forma análoga a los casos anteriores, se obtiene

$$\mathfrak{g}^{4,r}_{n,1,1} : \begin{cases} [X_0, X_1] = X_2 \\ [X_0, X_2] = X_3 \\ [X_0, U_1] = U_2 \\ [X_1, X_2] = Y_1, \\ [X_1, Y_{n-6}] = U_2, \\ [U_1, Y_{n-6}] = U_2, \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = U_2, \quad 1 \leq k \leq r. \end{cases} \qquad 1 \leq r \leq \left[\frac{n-9}{2}\right]$$

Para más detalles, ver apéndice D.3

- **Caso 2:** $(\alpha, \beta) = (0, 1)$

En este caso, según el teorema 3.1 se tiene la siguiente familia de álgebras

$$\begin{cases} [X_0, X_1] = X_2 \\ [X_0, X_2] = X_3 \\ [X_0, U_1] = U_2 \\ [X_1, X_2] = aU_2, \\ [X_1, U_1] = Y_1, \\ [X_1, Y_j] = b_{1j} X_3, \quad 2 \leq j \leq n-6, \\ [U_1, Y_j] = b_{4j} X_3, \quad 2 \leq j \leq n-6, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij} X_3, \quad 2 \leq i < j \leq n-6. \end{cases}$$

con las siguientes restricciones respecto a los parámetros

$$\begin{aligned} ab_{1j} = ab_{4j} &= 0, \quad 2 \leq j \leq n-6, \\ ac_{1j} &= 0, \quad 2 \leq i < j \leq n-6. \end{aligned}$$

Caso 2.1: $a \neq 0$

Mediante un cambio de escala trivial se obtiene el álgebra de ley

$$\mathfrak{g}^{3}_{n,1,1} : \begin{cases} [X_0, X_1] = X_2 \\ [X_0, X_2] = X_3 \\ [X_0, U_1] = U_2 \\ [X_1, X_2] = U_2, \\ [X_1, U_1] = Y_1. \end{cases}$$

Caso 2.2: $a = 0$

Se tiene la siguiente familia de álgebras

$$\begin{cases} [X_0, X_1]=X_2 \\ [X_0, X_2]=X_3 \\ [X_0, U_1]=U_2 \\ [X_1, X_2]=Y_1, \\ [X_1, Y_j]=b_{1j}^5 U_2, & 2 \le j \le n-6, \\ [U_1, Y_j]=b_{4j}^5 U_2, & 2 \le j \le n-6, \\ [Y_i, Y_j]=c_{ij} U_2, & 2 \le i < j \le n-6. \end{cases}$$

sin restricciones respecto a los parámetros.

De forma análoga al caso anterior se obtienen las álgebras de leyes $\mathfrak{g}_{n,1,1}^3$, $\mathfrak{g}_{n,1,1}^{j,r}$, $5 \le j \le 8.$, correspondientes a los casos siguientes:

$\mathfrak{g}_{n,1,1}^{5,0}$ corresponde al caso $\dim \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = n-4$, y las demás al caso $\dim \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) < n-4$, siendo $\mathfrak{g}_{n,1,1}^{5,r}$, $1 \le r \le n-6$ y $\mathfrak{g}_{n,1,1}^{6,r}$, $0 \le r \le n-6$, correspondientes al caso $b_{4j} = 0$, $2 \le j \le n-6$ ($\mathfrak{g}_{n,1,1}^{5,r}$, $1 \le r \le n-6$ cuando $b_{1j} = 0$, $2 \le j \le n-6$, y $\mathfrak{g}_{n,1,1}^{6,r}$, $0 \le r \le n-6$ cuando $\exists k \in \{2,\dots,n-6\}$ / $b_{1k} \neq 0$), mientras que $\mathfrak{g}_{n,1,1}^{7,r}$, $1 \le r \le n-6$ y $\mathfrak{g}_{n,1,1}^{8,r}$, $0 \le r \le n-6$, corresponden al caso en que $\exists k \in \{2,\dots,n-6\}$ / $b_{4k} \neq 0$ ($\mathfrak{g}_{n,1,1}^{7,r}$, $1 \le r \le n-6$ cuando $b_{1j} = 0$, $2 \le j \le n-6$, y $\mathfrak{g}_{n,1,1}^{8,r}$, $0 \le r \le n-6$ cuando $\exists k \in \{2,\dots,n-6\}$ / $b_{1k} \neq 0$). □

Para más detalle, ver apéndice D.4.

3.3 Caso de invariante de Goze $(3,3,1,\dots,1)$

En esta sección se obtiene la expresión de la familia de leyes de álgebras de Lie metabelianas e invariante de Goze $(3,3,1,\dots,1)$ y se clasifica el caso de dimensión de la derivada máxima, encontrándose que existe una única álgebra de estas características que se da explícitamente.

Teorema 3.5 (Familia) *En dimensión $n \geq 7$, cualquier álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con invariante de Goze $(3,3,1 \overset{n-6}{\dots}, 1)$, es isomorfa a una cuya ley, respecto de una cierta base*

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

adaptada $\{X_0,\ X_1,\ldots,\ X_6,\ Y_1,\ldots,Y_{n-7}\}$, *viene dada por*

$$\left\{\begin{array}{ll}
[X_0,X_1]{=}X_2, & \\
[X_0,X_2]{=}X_3, & \\
[X_0,X_4]{=}X_5, & \\
[X_0,X_5]{=}X_6, & \\
[X_1,X_2]{=}a_{12}^3X_3+a_{12}^6X_6+\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{12}^kY_k, & \\
[X_1,X_4]{=}a_{14}^3X_3+a_{14}^6X_6+\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^kY_k, & \\
[X_1,X_5]{=}a_{15}^3X_3+a_{15}^6X_6+\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{15}^kY_k, & \\
[X_2,X_4]{=}-a_{15}^3X_3-a_{15}^6X_6-\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{15}^kY_k, & \\
[X_4,X_5]{=}a_{45}^3X_3+a_{45}^6X_6+\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{45}^kY_k, & \\
[X_1,Y_j]={=}b_{1j}^3X_3+b_{1j}^5X_5+b_{1j}^6X_6, & 1\leq j\leq n-7,\\
[X_2,Y_j]{=}b_{1j}^5X_6, & 1\leq j\leq n-7,\\
[X_4,Y_j]{=}b_{4j}^2X_2+b_{4j}^3X_3+b_{4j}^5X_5+b_{4j}^6X_6, & 1\leq j\leq n-7,\\
[X_5,Y_j]{=}b_{4j}^2X_3+b_{4j}^5X_6, & 1\leq j\leq n-7,\\
[Y_i,Y_j]{=}c_{ij}^3X_3+c_{ij}^6X_6, & 1\leq i<j\leq n-7.
\end{array}\right.$$

con las siguientes restricciones respecto a los parámetros

$$\left\{\begin{array}{lll}
\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{12}^kb_{1k}^j=\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{12}^kb_{4k}^j=0, & j=2,3,5,6, & \\
\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{15}^kb_{1k}^j=\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{15}^kb_{4k}^j=0, & j=2,3,5,6, & \\
\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{45}^kb_{1k}^j=\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{45}^kb_{4k}^j=0, & j=2,3,5,6, & \\
\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^kb_{1k}^j=\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^kb_{4k}^j=0, & j=2,5, & \\
\sum_{k=1}^{l-1}\alpha_{12}^kc_{kl}^j-\sum_{k=l+1}^{n-7}\alpha_{12}^kc_{lk}^j=0, & j=3,6, & 1\leq l\leq n-7,\\
\sum_{k=1}^{l-1}\alpha_{15}^kc_{kl}^j-\sum_{k=l+1}^{n-7}\alpha_{15}^kc_{lk}^j=0, & j=3,6, & 1\leq l\leq n-7,\\
\sum_{k=1}^{l-1}\alpha_{45}^kc_{kl}^j-\sum_{k=l+1}^{n-7}\alpha_{45}^kc_{lk}^j=0, & j=3,6, & 1\leq l\leq n-7,\\
\multicolumn{3}{l}{b_{4l}^2a_{12}^j+(b_{4l}^5-b_{1l}^2)a_{15}^j-b_{15}^5a_{45}^j+\sum_{k=1}^{l-1}\alpha_{14}^kc_{kl}^j-\sum_{k=l+1}^{n-7}\alpha_{14}^kc_{lk}^j=0,\quad j=3,6,\ 1\leq l\leq n-7,}\\
\multicolumn{3}{l}{b_{4l}^2\alpha_{12}^k+(b_{4l}^5-b_{1l}^2)\alpha_{15}^k-b_{1l}^5\alpha_{45}^k,\qquad 1\leq k\leq n-7.}
\end{array}\right.$$

Nota: Existen algunas restricciones adicionales, que surgen del hecho de que debe ser $\mathrm{rg}(ad(AX_0+Z)) = 4$, $\forall Z \in \mathfrak{g}$, $\forall A \in \mathbf{C} - \{0\}$ y que, en el caso general, resultan muy complicadas de establecer.

Demostración. Sea $\mathfrak{g}$, un álgebra de Lie de dimensión n y sucesión característica $(3,3,1 \overset{n-6)}{\ldots}, 1)$ y X_0 un vector característico de $\mathfrak{g}$. Entonces, respecto de cierta base adaptada $\mathcal{B} = \{X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6,\ Y_1,\ \ldots,\ Y_{n-6}\}$, la ley de $\mathfrak{g}$ puede ser expresada por

$$\begin{cases} [X_0,X_1]=X_2, \\ [X_0,X_2]=X_3, \\ [X_0,X_4]=X_5, \\ [X_0,X_5]=X_6, \\ [X_i,X_j]=\sum\limits_{k=1}^{6} a_{ij}^k X_k + \sum\limits_{k=1}^{n-7} \alpha_{ij}^k Y_k, \quad 1 \le i < j \le 6 \\ [X_i,Y_j]=\sum\limits_{k=1}^{6} b_{ij}^k X_k + \sum\limits_{k=1}^{n-7} \beta_{ij}^k Y_k, \quad 1 \le i \le 6 \quad 1 \le j \le n-7 \\ [Y_i,Y_j]=\sum\limits_{k=1}^{6} c_{ij}^k X_k + \sum\limits_{k=1}^{n-7} \gamma_{ij}^k Y_k, \quad 1 \le i < j \le n-7. \end{cases}$$

- Puesto que se debe cumplir que $\mathcal{C}^3(\mathfrak{g}) = \{0\}$, sigue que $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ y, por lo tanto se debe verificar que

$$[X_3,Z] = [X_6,Z] = 0, \quad \forall Z \in \mathfrak{g}$$

- Se debe verificar que $X_1,\ X_4 \notin [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ pues, en caso contrario, se tendría que $X_3,\ X_6\ \in \mathcal{C}^3(\mathfrak{g})$, y esto no es posible pues $\mathcal{C}^3(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

  Por tanto, se debe verificar que

$$\begin{aligned} a_{ij}^1 = a_{ij}^4 = 0, &\quad 1 \le i < j \le 6, \\ b_{ij}^1 = b_{ij}^4 = 0, &\quad 1 \le i \le 6,\ 1 \le j \le n-7, \\ c_{ij}^1 = c_{ij}^4 = 0, &\quad 1 \le i < j \le n-7. \end{aligned}$$

- Se imponen a continuación que se verifiquen las condiciones de Jacobi de X_0, obteniéndose las siguientes restricciones para los parámetros:

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA BIBLIOTECA

$\star\ J(X_0,X_1,X_2):\quad a_{12}^2=a_{12}^5=0$

$$\star\ J(X_0,X_1,X_4):\quad \begin{cases} a_{24}^2=-a_{15}^2 \\ a_{24}^3=a_{14}^2-a_{15}^3 \\ a_{24}^5=-a_{15}^5 \\ a_{24}^6=a_{14}^5-a_{15}^6 \\ \alpha_{24}^k=-\alpha_{15}^k, \quad 1\leq k\leq n-6 \end{cases}$$

$$\star\ J(X_0,X_1,X_5):\quad \begin{cases} a_{25}^2=a_{25}^5=0, \\ a_{25}^3=a_{15}^2, \\ a_{25}^6=a_{15}^5, \\ \alpha_{25}^k=0, \qquad 1\leq k\leq n-6. \end{cases}$$

$$\star\ J(X_0,X_2,X_4):\quad \begin{cases} a_{25}^3=a_{24}^2 \\ a_{25}^6=a_{24}^5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{15}^2=a_{24}^2=a_{25}^3=0 \\ a_{15}^5=a_{24}^5=a_{25}^6=0 \end{cases}$$

$\star\ J(X_0,X_4,X_5):\quad a_{45}^2=a_{45}^5=0$

$$\star\ J(X_0,X_1,Y_i),\ 1\leq i\leq n-6:\quad \begin{cases} b_{2i}^2=b_{2i}^5=0, & 1\leq i\leq n-6, \\ b_{2i}^3=b_{1i}^2, & 1\leq i\leq n-6, \\ b_{2i}^6=b_{1i}^5, & 1\leq i\leq n-6, \\ \beta_{2i}^k=0, & 1\leq i,k\leq n-6. \end{cases}$$

$$\star\ J(X_0,X_4,Y_i),\ 1\leq i\leq n-6:\quad \begin{cases} b_{5i}^2=b_{5i}^5=0, & 1\leq i\leq n-6, \\ b_{5i}^3=b_{4i}^2, & 1\leq i\leq n-6, \\ b_{5i}^6=b_{4i}^5, & 1\leq i\leq n-6, \\ \beta_{5i}^k=0, & 1\leq i,k\leq n-6. \end{cases}$$

$\star\ J(X_0,Y_i,Y_j),\ 1\leq i<j\leq n-6:\quad c_{ij}^2=c_{ij}^5=0,\quad 1\leq i<j\leq n-6.$

- Puesto que $X_0\notin\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$, entonces $AX_0+Z\notin\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$, $\forall A\in\mathbf{C}-\{0\}$, $Z\in\mathfrak{g}$, por lo tanto, cualquiera de estos vectores podría ser considerado como vector característico. Así, puesto que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de sucesión característica $(3,3,1,\ldots,1)$, debe ser

$$\mathrm{rg}(ad(AX_0+Z))=4,\ \forall Z\in\mathfrak{g},\ \forall A\in\mathbf{C}-\{0\}$$

con lo cual se pueden obtener algunas restricciones adicionales.

$\star\ rg(Ad(AX_0+X_1))=4$

$$Ad(AX_0+X_1)=\left[\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & A & 0 & 0 & a_{14}^2 & 0 & 0 & b_{1j}^2 \\ 0 & 0 & A+a_{12}^3 & 0 & a_{14}^3 & a_{15}^3 & 0 & b_{1j}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A+a_{14}^5 & 0 & 0 & b_{1j}^5 \\ 0 & 0 & a_{12}^6 & 0 & a_{14}^6 & A+a_{15}^6 & 0 & b_{1j}^6 \\ \hline 0 & 0 & \alpha_{12}^k & 0 & \alpha_{14}^k & \alpha_{15}^k & 0 & \beta_{1j}^k \end{array}\right]$$

Siempre es posible elegir A de forma que

$$\begin{vmatrix} A & 0 & a_{14}^2 & 0 \\ 0 & A+a_{12}^3 & a_{14}^3 & a_{15}^3 \\ 0 & 0 & A+a_{14}^5 & 0 \\ 0 & a_{12}^6 & a_{14}^6 & A+a_{15}^6 \end{vmatrix} \neq 0$$

y, por tanto, se debe verificar que

$$\begin{vmatrix} A & 0 & a_{14}^2 & 0 & b_{1j}^2 \\ 0 & A+a_{12}^3 & a_{14}^3 & a_{15}^3 & b_{1j}^3 \\ 0 & 0 & A+a_{14}^5 & 0 & b_{1j}^5 \\ 0 & a_{12}^6 & a_{14}^6 & A+a_{15}^6 & b_{1j}^6 \\ 0 & \alpha_{12}^k & \alpha_{14}^k & \alpha_{15}^k & \beta_{1j}^k \end{vmatrix} = 0, \quad 1 \leq j,k \leq n-7$$

luego, debe ser $\beta_{1j}^k=0,\ 1\leq j,k\leq n-7$.

$\star\ rg(Ad(AX_0+X_4))=4$
Por simetría, se verifica que $\beta_{4j}^k=0,\ 1\leq j,k\leq n-7$

$\star\ rg(Ad(AX_0+Y_j))=4,\ 1\leq j\leq n-7$
Análogamente, se obtiene que $\gamma_{ij}^k=0,\ 1\leq i<j\leq n-7$.

- Podemos suponer $a_{14}^2 = a_{14}^5 = 0 = 0,\ 2 \leq i \leq n-7$, efectuando el cambio de base

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = X_1 - a_{14}^5 X_0 \\ X_2' = X_2 \\ X_3' = X_3 \\ X_4' = X_4 + a_{14}^2 X_0 \\ X_5' = X_5 \\ X_6' = X_6 \\ Y_i' = Y_i, & 1 \leq i \leq n-7. \end{cases}$$

Se tiene por lo tanto que cualquier álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, de dimensión n y sucesión característica $(3, 3, 1 \overset{n-6)}{\ldots}, 1)$, es isomorfa a una de la siguiente familia de álgebras

$$\begin{cases} [X_0, X_1] = X_2, \\ [X_0, X_2] = X_3, \\ [X_0, X_4] = X_5, \\ [X_0, X_5] = X_6, \\ [X_1, X_2] = a_{12}^3 X_3 + a_{12}^6 X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{12}^k Y_k, \\ [X_1, X_4] = a_{14}^3 X_3 + a_{14}^6 X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k Y_k, \\ [X_1, X_5] = a_{15}^3 X_3 + a_{15}^6 X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{15}^k Y_k, \\ [X_2, X_4] = -a_{15}^3 X_3 - a_{15}^6 X_6 - \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{15}^k Y_k, \\ [X_4, X_5] = a_{45}^3 X_3 + a_{45}^6 X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{45}^k Y_k, \\ [X_1, Y_j] = b_{1j}^2 X_2 + b_{1j}^3 X_3 + b_{1j}^5 X_5 + b_{1j}^6 X_6, & 1 \leq j \leq n-7, \\ [X_2, Y_j] = b_{1j}^2 X_3 + b_{1j}^5 X_6, & 1 \leq j \leq n-7, \\ [X_4, Y_j] = b_{4j}^2 X_2 + b_{4j}^3 X_3 + b_{4j}^5 X_5 + b_{4j}^6 X_6, & 1 \leq j \leq n-7, \\ [X_5, Y_j] = b_{4j}^2 X_3 + b_{4j}^5 X_6, & 1 \leq j \leq n-7, \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij}^3 X_3 + c_{ij}^6 X_6, & 1 \leq i < j \leq n-7. \end{cases}$$

- Si se efectúa el cambio de base, $\forall A \neq 0$

$$\begin{cases} X_0'{=}AX_0+X_1\\ X_1'{=}X_1\\ X_2'{=}AX_2\\ X_3'{=}A^2X_3+A\,[X_1,X_2]\\ X_4'{=}X_4\\ X_5'{=}AX_5+[X_1,X_4]\\ X_6'{=}A^2X_6+A\,[X_1,X_5]+[X_1,[X_1,X_4]]\\ Y_i'{=}Y_i, \quad 1\leq i\leq n-7\end{cases}$$

se debe verificar que

$$[X_0',X_3']=\left[AX_0+X_1,A^2X_3+A\,[X_1,X_2]\right]=A\left[X_1,\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{12}^kY_k\right]=0 \quad \forall A\neq 0.$$

Entonces, debe ser

$$\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{12}^kb_{1k}^j=0,\ j=2,3,5,6$$

$$\begin{aligned}[X_0',X_6'] &= \left[AX_0+X_1,A^2X_6+A\,[X_1,X_5]+[X_1,[X_1,X_4]]\right]=\\ &= \left[AX_0+X_1,A\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{15}^kY_k+\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^k(b_{1k}^2X_2+b_{1k}^5X_5)\right]=\\ &= A\left(\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^kb_{1k}^2X_3+\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^kb_{1k}^5X_6+\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{15}^k[X_1,Y_k]\right)+\\ &\quad +[X_1,X_2]\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^kb_{1k}^2+[X_1,X_5]\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^kb_{1k}^5=0, \quad \forall A\neq 0.\end{aligned}$$

y, por tanto, se debe verificar que

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{15}^kb_{1k}^j=0, & j=2,5\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{15}^kb_{1k}^3+\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^kb_{1k}^2=0, & \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{15}^kb_{1k}^6+\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^kb_{1k}^5=0, & \\ \displaystyle[X_1,X_2]\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^kb_{1k}^2+[X_1,X_5]\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^kb_{1k}^5=0. & \end{cases}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

- Análogamente, si se efectúa el cambio de base definido, $\forall A \neq 0$ por

$$\begin{cases} X_0' = AX_0 + X_4, \\ X_1' = X_1, \\ X_2' = AX_2 - [X_1, X_4], \\ X_3' = A^2X_3 + A[X_1, X_5] - [X_4, [X_1, X_4]], \\ X_4' = X_4, \\ X_5' = AX_5, \\ X_6' = A^2X_6 + [X_4, X_5], \\ Y_i' = Y_i, \quad 1 \leq i \leq n-7. \end{cases}$$

se ha de verificar que

$$[X_0', X_6'] = \left[AX_0 + X_4, A^2X_6 + A[X_4, X_5]\right] = \left[X_4, \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{45}^k Y_k\right] = 0 \quad \forall A \neq 0.$$

Entonces, debe ser:

$$\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{45}^k b_{4k}^j = 0, \; j = 2, 3, 5, 6$$

$$\begin{aligned} [X_0', X_3'] &= \left[AX_0 + X_4, A^2X_3 + A[X_1, X_5] - [X_4, [X_1, X_4]]\right] = \\ &= \left[AX_0 + X_4, A\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{15}^k Y_k - \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k (b_{4k}^2 X_2 + b_{4k}^5 X_5)\right] = \\ &= -A\left(\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{4k}^2 X_3 - \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{4k}^5 X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{15}^k [X_4, Y_k]\right) + \\ &\quad +[X_1, X_5]\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{4k}^2 - [X_4, X_5]\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{4k}^5 = 0, \quad \forall A \neq 0. \end{aligned}$$

y, por tanto, se debe verificar que

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{15}^k b_{4k}^j = 0, & j = 2, 5 \\ \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{15}^k b_{4k}^3 - \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{4k}^2 = 0, & \\ \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{15}^k b_{4k}^6 - \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{4k}^5 = 0, & \\ [X_1, X_5]\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{4k}^2 - [X_4, X_5]\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{4k}^5 = 0. & \end{cases}$$

- $J(X_1, X_2, X_4)$:

$$[X_1,[X_2,X_4]] = [[X_1,X_2],X_4] + [X_2,[X_1,X_4]] \Longrightarrow$$

$$-\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{15}^k [X_1,Y_k] = -\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{12}^k [X_4,Y_k] + \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k [X_2,Y_k] \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{15}^k \left(b_{1k}^3 X_3 + b_{1k}^6 X_6\right) &= \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{12}^k \left(b_{4k}^2 X_2 + b_{4k}^3 X_3 + b_{4k}^5 X_5 + b_{4k}^6 X_6\right) - \\ &\quad -\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k \left(b_{1k}^2 X_3 + b_{1k}^5 X_6\right)\end{aligned}$$

de aquí y de relaciones anteriores, se obtiene que

$$\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{12}^k b_{4k}^j = 0, \qquad j = 2,3,5,6.$$

- $J(X_1, X_4, X_5)$:

$$[X_1,[X_4,X_5]] = [[X_1,X_4],X_5] + [X_4,[X_1,X_5]] \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{45}^k [X_1,Y_k] = -\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k [X_5,Y_k] + \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{15}^k [X_4,Y_k] \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{45}^k \left(b_{1k}^2 X_2 + b_{1k}^3 X_3 + b_{1k}^5 X_5 + b_{1k}^6 X_6\right) &= -\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k \left(b_{4k}^2 X_3 + b_{4k}^5 X_6\right) + \\ &\quad \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{15}^k \left(b_{4k}^3 X_3 + b_{4k}^6 X_6\right)\end{aligned}$$

lo que, junto a relaciones anteriores, implica que

$$\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{45}^k b_{1k}^j = 0, \qquad j = 2,3,5,6.$$

- Si se efectúa el cambio de base, $\forall A, B \neq 0$, dado por

$$\begin{cases} X_0'=AX_0+BX_1+X_4, \\ X_1'=X_1, \\ X_2'=AX_2-[X_1,X_4], \\ X_3'=A^2X_3+AB\,[X_1,X_2]-B[X_1,[X_1,X_4]]+A[X_1,X_5]-[X_4,[X_1,X_4]], \\ X_4'=X_4, \\ X_5'=AX_5+B[X_1,X_4], \\ X_6'=A^2X_6+AB\,[X_1,X_5]+B^2[X_1[X_1,X_4]]+A[X_4,X_5]+B[X_4,[X_1,X_4]], \\ Y_i'=Y_i, \quad 1\leq i\leq n-7. \end{cases}$$

Se debe verificar:

$$\begin{aligned} [X_0',X_3'] &= \Big[AX_0+BX_1+X_4, A^2X_3+AB\,[X_1,X_2]-B[X_1,[X_1,X_4]]+ \\ &\quad +A[X_1,X_5]-[X_4,[X_1,X_4]]\Big]= \\ &= \left[AX_0+BX_1+X_4, AB\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{12}^kY_k-B\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^k[X_1,Y_k]\right. \\ &\quad \left.+A\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{15}^kY_k-\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^k[X_4,Y_k]\right]= \\ &= AB\left(-\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^kb_{1k}^2X_3-\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^kb_{1k}^5X_6+\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{15}^k[X_1,Y_k]\right)+ \\ &\quad A\left(-\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^kb_{4k}^2X_3-\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^kb_{4k}^5X_6+\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{15}^k[X_4,Y_k]\right)- \\ &\quad -B^2\left([X_1,X_2]\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^kb_{1k}^2+[X_1,X_5]\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^kb_{1k}^5\right)- \\ &\quad -B\left([X_1,X_2]\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^kb_{4k}^2+[X_1,X_5]\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^kb_{4k}^5-\right. \\ &\quad \left.[X_1,X_5]\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^kb_{1k}^2+[X_4,X_5]\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^kb_{1k}^5\right)- \\ &\quad -[X_1,X_5]\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^kb_{4k}^2+[X_4,X_5]\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^kb_{4k}^5=0, \quad \forall A\neq 0. \end{aligned}$$

y, por tanto, se debe verificar que

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{15}^k b_{1k}^j = 0, & j = 2,3,5,6 \\ \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{1k}^j = 0, & j = 2,5, \\ [X_1, X_2] \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{4k}^2 + [X_1, X_5] \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{4k}^5 = 0, & \\ [X_1, X_5] \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{4k}^2 - [X_4, X_5] \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{4k}^5 = 0. & \end{cases}$$

$$\begin{aligned} [X_0', X_6'] &= \Big[AX_0 + BX_1 + X_4, A^2X_6 + AB\,[X_1, X_5] + B^2[X_1,[X_1,X_4]] \\ &\quad + A[X_4, X_5] + B[X_4,[X_1,X_4]]\Big] = \\ &= \left[AX_0 + BX_1 + X_4, AB\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{15}^k Y_k + B^2 \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k [X_1, Y_k] \right. \\ &\quad \left. + A\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{45}^k Y_k + \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k [X_4, Y_k]\right] = \\ &= AB^2\left(\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{1k}^2 X_3 + \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{1k}^5 X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{15}^k [X_1, Y_k]\right) + \\ &\quad AB\left(\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{4k}^2 X_3 + \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{4k}^5 X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{15}^k [X_4, Y_k]\right) + \\ &\quad + B^3\left([X_1, X_2]\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{1k}^2 + [X_1, X_5]\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{1k}^5\right) + \\ &\quad B^2\left([X_1, X_2]\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{4k}^2 + [X_4, X_5]\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{4k}^5 - \right. \\ &\quad \left. [X_1, X_5]\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{1k}^2 + [X_4, X_5]\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{1k}^5\right) + \\ &\quad + [X_1, X_5]\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{4k}^2 - [X_4, X_5]\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{4k}^5 = 0, \quad \forall A \neq 0. \end{aligned}$$

y, por tanto, se debe verificar que

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{15}^k b_{4k}^j = 0, & j = 2,3,5,6 \\ \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{4k}^j = 0, & j = 2,5. \end{cases}$$

En definitiva, se han obtenido las siguientes restricciones para los parámetros:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{12}^k b_{1k}^j = \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{12}^k b_{4k}^j = 0, & j = 2,3,5,6, \\ \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{15}^k b_{1k}^j = \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{15}^k b_{4k}^j = 0, & j = 2,3,5,6 \\ \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{45}^k b_{1k}^j = \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{45}^k b_{4k}^j = 0, & j = 2,3,5,6, \\ \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{1k}^j = \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k b_{4k}^j = 0, & j = 2,5. \end{cases}$$

- $J(X_1, X_2, Y_l),\ 1 \leq l \leq n-7$:

$$[X_1, [X_2, Y_l]] = [[X_1, X_2], Y_l] + [X_2, [X_1, Y_l]] \implies$$
$$\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{12}^k [Y_k, Y_l] = 0 \implies$$
$$\sum_{k=1}^{l-1} \alpha_{12}^k c_{kl}^j - \sum_{k=l+1}^{n-7} \alpha_{12}^k c_{lk}^j = 0,\ j = 3,6$$

- $J(X_1, X_5, Y_l),\ 1 \leq l \leq n-7$:

$$[X_1, [X_5, Y_l]] = [[X_1, X_5], Y_l] + [X_5, [X_1, Y_l]] \implies$$
$$\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{15}^k [Y_k, Y_l] = 0 \implies$$
$$\sum_{k=1}^{l-1} \alpha_{15}^k c_{kl}^j - \sum_{k=l+1}^{n-7} \alpha_{15}^k c_{lk}^j = 0,\ j = 3,6$$

- $J(X_4, X_5, Y_l),\ 1 \leq l \leq n-7$:

$$[X_4, [X_5, Y_l]] = [[X_4, X_5], Y_l] + [X_5, [X_4, Y_l]] \implies$$
$$\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{45}^k [Y_k, Y_l] = 0 \implies$$
$$\sum_{k=1}^{l-1} \alpha_{45}^k c_{kl}^j - \sum_{k=l+1}^{n-7} \alpha_{45}^k c_{lk}^j = 0,\ j = 3,6$$

- $J(X_1,X_4,Y_l),\ 1\le l\le n-7$:

$$[X_1,[X_4,Y_l]]=[[X_1,X_4],Y_l]+[X_4,[X_1,Y_l]] \implies$$

$$[X_1,b_{4l}^2X_2+b_{4l}^5X_5]=\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^k[Y_k,Y_l]+[X_4,b_{1l}^2X_2+b_{1l}^5X_5]$$

$$b_{4l}^2[X_1,X_2]+(b_{4l}^5-b_{1l}^2)[X_1,X_5]-b_{1l}^5[X_4,X_5]-\sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^k[Y_k,Y_l]=0 \implies$$

$$\begin{cases} b_{4l}^2a_{12}^j+(b_{4l}^5-b_{1l}^2)a_{15}^j-b_{1l}^5a_{45}^j-\sum_{k=1}^{l-1}\alpha_{14}^kc_{kl}^j+\sum_{k=l+1}^{n-7}\alpha_{14}^kc_{lk}^j=0, & j=3,6\\ b_{4l}^2\alpha_{12}^k+(b_{4l}^5-b_{1l}^2)\alpha_{15}^k-b_{1l}^5\alpha_{45}^k, & 1\le k\le n-7. \end{cases}$$

□

3.3.1 Clasificación en el caso $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}))$ maximal

Proposición 3.6 *Cualquier álgebra de Lie de dimensión $n\ge 11$ e invariante de Goze $(3,3,1\overset{n-6)}{\ldots},1)$, con $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}))=8$, es isomorfa al álgebra $\mathfrak{g}_{n,2,0}^1$, cuya ley respecto de una base adaptada $\{X_0,\ X_1,\ldots,\ X_6,\ Y_1,\ldots,Y_{n-7}\}$, viene dada por*

$$\mathfrak{g}_{n,2,0}^1:\begin{cases}[X_0,X_1]=X_2,\\ [X_0,X_2]=X_3,\\ [X_0,X_4]=X_5,\\ [X_0,X_5]=X_6,\\ [X_1,X_2]=Y_1,\\ [X_1,X_4]=Y_2,\\ [X_1,X_5]=Y_3,\\ [X_2,X_4]=-Y_3,\\ [X_4,X_5]=Y_4.\end{cases}$$

Demostración.

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

Se verifica que $\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = 4 + r$, siempre que $n \geq 11$, siendo

$$r = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \alpha_{12}^1 & \alpha_{12}^2 \cdots \alpha_{12}^{n-7} \\ \alpha_{14}^1 & \alpha_{14}^2 \cdots \alpha_{14}^{n-7} \\ \alpha_{15}^1 & \alpha_{15}^2 \cdots \alpha_{15}^{n-7} \\ \alpha_{45}^1 & \alpha_{45}^2 \cdots \alpha_{45}^{n-7} \end{pmatrix}$$

Por tanto se pueden considerar cinco casos, según los distintos valores de r:

$$\dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = \begin{cases} 8 \Longleftrightarrow r = 4 \\ 7 \Longleftrightarrow r = 3 \\ 6 \Longleftrightarrow r = 2 \\ 5 \Longleftrightarrow r = 1 \\ 4 \Longleftrightarrow r = 0 \end{cases}$$

Se estudia a continuación el caso $r = 4$.

Por simetría, se puede suponer, sin pérdida de generalidad que

$$4 = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \alpha_{12}^1 & \alpha_{12}^2 \cdots \alpha_{12}^{n-7} \\ \alpha_{14}^1 & \alpha_{14}^2 \cdots \alpha_{14}^{n-7} \\ \alpha_{15}^1 & \alpha_{15}^2 \cdots \alpha_{15}^{n-7} \\ \alpha_{45}^1 & \alpha_{45}^2 \cdots \alpha_{45}^{n-7} \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \alpha_{12}^1 & \alpha_{12}^2 & \alpha_{12}^3 & \alpha_{12}^4 \\ \alpha_{14}^1 & \alpha_{14}^2 & \alpha_{14}^3 & \alpha_{14}^4 \\ \alpha_{15}^1 & \alpha_{15}^2 & \alpha_{15}^3 & \alpha_{15}^4 \\ \alpha_{45}^1 & \alpha_{45}^2 & \alpha_{45}^3 & \alpha_{45}^4 \end{pmatrix}$$

con lo que, efectuando el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_i' = X_i, & 0 \leq i \leq 6, \\ Y_1' = a_{12}^3 X_3 + a_{12}^6 X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{12}^k Y_k, & \\ Y_2' = a_{14}^3 X_3 + a_{14}^6 X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{14}^k Y_k, & \\ Y_3' = a_{15}^3 X_3 + a_{15}^6 X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{15}^k Y_k, & \\ Y_4' = a_{45}^3 X_3 + a_{45}^6 X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_{45}^k Y_k, & \\ Y_j' = Y_j, & 5 \leq j \leq n-7. \end{cases}$$

se obtiene la familia de álgebras de leyes

$$\begin{cases} [X_0,X_1]=X_2, \\ [X_0,X_2]=X_3, \\ [X_0,X_4]=X_5, \\ [X_0,X_5]=X_6, \\ [X_1,X_2]=Y_1, \\ [X_1,X_4]=Y_2, \\ [X_1,X_5]=Y_3, \\ [X_2,X_4]=-Y_3, \\ [X_4,X_5]=Y_4, \\ [X_1,Y_j]=b_{1j}^2X_2+b_{1j}^3X_3+b_{1j}^5X_5+b_{1j}^6X_6, & 1\le j\le n-7, \\ [X_2,Y_j]=b_{1j}^2X_3+b_{1j}^5X_6, & 1\le j\le n-7, \\ [X_4,Y_j]=b_{4j}^2X_2+b_{4j}^3X_3+b_{4j}^5X_5+b_{4j}^6X_6, & 1\le j\le n-7, \\ [X_5,Y_j]=b_{4j}^2X_3+b_{4j}^5X_6, & 1\le j\le n-7, \\ [Y_i,Y_j]=c_{ij}^3X_3+c_{ij}^6X_6, & 1\le i<j\le n-7. \end{cases}$$

Además, las restricciones obtenidas anteriormente implican

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{12}^k b_{1k}^j=0, \quad j=2,3,5,6 & \Leftrightarrow \quad [X_1,Y_1]=0 \quad \Longrightarrow \quad [X_2,Y_1]=0, \\ \sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{12}^k b_{4k}^j=0, \quad j=2,3,5,6 & \Leftrightarrow \quad [X_4,Y_1]=0 \quad \Longrightarrow \quad [X_5,Y_1]=0, \\ \sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{15}^k b_{1k}^j=0, \quad j=2,3,5,6 & \Leftrightarrow \quad [X_1,Y_3]=0 \quad \Longrightarrow \quad [X_2,Y_3]=0, \\ \sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{15}^k b_{4k}^j=0, \quad j=2,3,5,6 & \Leftrightarrow \quad [X_4,Y_3]=0 \quad \Longrightarrow \quad [X_5,Y_3]=0, \\ \sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{45}^k b_{1k}^j=0, \quad j=2,3,5,6 & \Leftrightarrow \quad [X_1,Y_4]=0 \quad \Longrightarrow \quad [X_2,Y_4]=0, \\ \sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{45}^k b_{4k}^j=0, \quad j=2,3,5,6 & \Leftrightarrow \quad [X_4,Y_4]=0 \quad \Longrightarrow \quad [X_5,Y_4]=0, \\ \sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^k b_{1k}^j=0, \quad j=2,5 & \Leftrightarrow \quad b_{12}^2=b_{12}^5=0, \\ \sum_{k=1}^{n-7}\alpha_{14}^k b_{4k}^j=0, \quad j=2,5 & \Leftrightarrow \quad b_{42}^2=b_{42}^5=0. \end{cases}$$

Se imponen de nuevo condiciones respecto al rango de las matrices adjuntas, para obtener algunas restricciones adicionales

- $rg(Ad(AX_0 + X_1)) = 4 \Longrightarrow$

$$Ad(AX_0+X_1) = \left[\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{1j}^2 \\
0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{1j}^3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 & b_{1j}^5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & b_{1j}^6 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

y, por tanto, se debe verificar que

$$\left|\begin{array}{l} b_{1j}^3 = 0, \\ b_{1j}^5 = 0, \\ b_{1j}^6 = 0. \end{array}\right. \qquad 1 \leq j \leq n-7$$

- $rg(Ad(AX_0 + X_4)) = 4$
  Análogamente, se verifica que

$$\left|\begin{array}{l} b_{4j}^2 = 0, \\ b_{4j}^3 = 0, \\ b_{4j}^6 = 0. \end{array}\right. \qquad 1 \leq j \leq n-7$$

- $rg(Ad(AX_0 + X_1 + X_4)) = 4$
  Análogamente, se verifica que

$$b_{1j}^2 = b_{4j}^5 \quad 1 \leq j \leq n-7$$

- $rg(Ad(AX_0+X_1+Y_j))=4,\ 1\leq j\leq n-7$

$$Ad(AX_0+X_1+Y_j)=\left[\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & A-b_{1j}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{1j}^2\\
0 & 0 & A-b_{1j}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm c_{ij}^3\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & A-b_{1j}^2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A-b_{1j}^2 & 0 & \pm c_{ij}^6\\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

y, por tanto, se tiene que $c_{ij}^3=c_{ij}^6=0.\quad 1\leq i<j\leq n-7.$

En definitiva, se ha obtenido la familia de álgebras de leyes

$$\left\{\begin{array}{ll}
[X_0,X_1]=X_2, & \\
[X_0,X_2]=X_3, & \\
[X_0,X_4]=X_5, & \\
[X_0,X_5]=X_6, & \\
[X_1,X_2]=Y_1, & \\
[X_1,X_4]=Y_2, & \\
[X_1,X_5]=Y_3, & \\
[X_2,X_4]=-Y_3, & \\
[X_4,X_5]=Y_4, & \\
[X_1,Y_j]=b_jX_2, & 5\leq j\leq n-7,\\
[X_2,Y_j]=b_jX_3, & 5\leq j\leq n-7,\\
[X_4,Y_j]=b_jX_5, & 5\leq j\leq n-7,\\
[X_5,Y_j]=b_jX_6, & 5\leq j\leq n-7.
\end{array}\right.$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

Efectuando a continuación el cambio de base $Y_i' = Y_i + b_{1j}^2 X_0$, $5 \leq j \leq n-7$, se obtiene una única álgebra de ley

$$\mathfrak{g}_{n,2,0}^1 : \begin{cases} [X_0, X_1]=X_2, \\ [X_0, X_2]=X_3, \\ [X_0, X_4]=X_5, \\ [X_0, X_5]=X_6, \\ [X_1, X_2]=Y_1, \\ [X_1, X_4]=Y_2, \\ [X_1, X_5]=Y_3, \\ [X_2, X_4]=-Y_3, \\ [X_4, X_5]=Y_4. \end{cases}$$

□

Capítulo 4

Derivaciones de álgebras de Lie 3-nilpotentes y aplicaciones.

Se aborda en este capítulo el cálculo de los espacios de derivaciones de las álgebras de índice de nilpotencia 3, obtenidas en el capítulo anterior.

Se van a determinar los correspondientes espacios de derivaciones, bien buscando una graduación adecuada (con subespacios homogéneos de dimensión suficientemente pequeña), bien determinando previamente un toro de derivaciones, de forma análoga al capítulo 2.

A partir del conocimiento de $Der(\mathfrak{g})$, se hallan las dimensiones y una base del primer espacio de cohomología y las dimensiones de la órbita de cada álgebra considerada.

4.1 Preliminares

En todo lo que resta se van a considerar álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ de invariante de Goze

$$(3, \overset{p)}{\ldots}, 3, 2, \overset{q)}{\ldots}, 2, 1, \overset{n-3p-2q)}{\ldots}, 1), \quad 0 \le q \le \left\lfloor \frac{n-3p-1}{2} \right\rfloor, \quad 1 \le p \le \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor$$

estudiándose los casos $(p,q)=(1,1)$ y $(p,q)=(2,0)$). En todos los casos

$$\mathcal{B}=\{X_0,X_1,X_2,X_3,\ldots,X_{3p-2},X_{3p-1},X_{3p},U_1,U_2,\ldots U_{2q-1},U_{2q},Y_1,\ldots,Y_{n-3p-2q-1}\}$$

designará una cierta base adaptada.

Por cuestiones de notación y de presentación y dado el elevadísimo número de derivaciones que se manejan en el capítulo, se van a considerar unas ciertas asignaciones formales entre vectores que más adelante se probará que corresponden a derivaciones para alguna o algunas de las álgebras encontradas en el capítulo 3. Se definen a continuación las siguientes asignaciones formales, donde la notación indica que se han considerado esencialmente cuatro tipos de funciones, según se indica

$$\begin{array}{rll}
t_{ij}: & X_i \to X_j & 1\le i,j\le 3\\
t_{i,3+j}: & X_i \to U_j & 1\le i\le 3, 1\le j\le 2\\
t_{i+3,j}: & U_i \to X_j & 1\le i\le 2, 1\le j\le 3\\
t_{i+3,j+3}: & U_i \to U_j & 1\le i,j\le 2\\
u_{ij}: & X_i \to Y_j & 1\le i\le 3, 1\le j\le n-6\\
u_{i+3,j}: & U_i \to Y_j & 1\le i\le 2, 1\le j\le n-6\\
v_{ij}: & Y_i \to X_j & 1\le j\le 3, 1\le i\le n-6\\
v_{i,3+j}: & Y_i \to U_j & 1\le j\le 2, 1\le i\le n-6\\
w_{ij}: & Y_i \to Y_j, & 1\le i,j\le n-6
\end{array}$$

Para designar algunas de estas asignaciones formales será necesario incluir, además, uno o dos superíndices.

$$t^1_{0,0}:\begin{cases} X_0 & \to & X_0,\\ X_2 & \to & X_2,\\ X_3 & \to & 2X_3,\\ U_2 & \to & U_2,\\ Y_1 & \to & Y_1.\end{cases}\qquad t^2_{0,0}:\begin{cases} X_0 & \to & X_0,\\ X_2 & \to & X_2,\\ X_3 & \to & 2X_3,\\ U_1 & \to & 2U_1,\\ U_2 & \to & 3U_2,\\ Y_1 & \to & 2Y_1.\end{cases}\qquad t^3_{0,0}:\begin{cases} X_0 & \to & X_0,\\ X_2 & \to & X_2,\\ X_3 & \to & 2X_3,\\ U_2 & \to & U_2.\end{cases}$$

$$t_{0,0}^{1,r}:\begin{cases} X_0 & \to X_0, \\ X_2 & \to X_2, \\ X_3 & \to 2X_3, \\ U_2 & \to U_2, \\ Y_1 & \to Y_1, \\ Y_{2k-1} & \to Y_{2k-1}, \quad 1 \le k \le r. \end{cases} \qquad t_{0,0}^{2,r}:\begin{cases} X_0 & \to X_0, \\ X_2 & \to X_2, \\ X_3 & \to 2X_3, \\ U_2 & \to U_2, \\ Y_1 & \to Y_1, \\ Y_{2k-1} & \to Y_{2k-1}, \quad 1 \le k \le r, \\ Y_{n-6} & \to Y_{n-6}. \end{cases}$$

$$t_{0,0}^{3,r}:\begin{cases} X_0 & \to X_0, \\ X_2 & \to X_2, \\ X_3 & \to 2X_3, \\ U_2 & \to U_2, \\ Y_1 & \to Y_1, \\ Y_{2k-1} & \to Y_{2k-1}, \quad 1 \le k \le r, \\ Y_{n-7} & \to Y_{n-7}, \\ Y_{n-6} & \to Y_{n-6}. \end{cases} \qquad t_{0,0}^{4,r}:\begin{cases} X_0 & \to X_0, \\ X_2 & \to X_2, \\ X_3 & \to 2X_3, \\ U_2 & \to U_2, \\ Y_{2k-1} & \to 2Y_{2k-1}, \quad 1 \le k \le r. \end{cases}$$

$$t_{0,0}^{5,r}:\begin{cases} X_0 & \to X_0, \\ X_2 & \to X_2, \\ X_3 & \to 2X_3, \\ U_2 & \to U_2, \\ Y_{2k-1} & \to 2Y_{2k-1}, \quad 1 \le k \le r, \\ Y_{n-6} & \to 2Y_{n-6}. \end{cases} \qquad t_{0,0}^{6,r}:\begin{cases} X_0 & \to X_0, \\ X_2 & \to X_2, \\ X_3 & \to 2X_3, \\ U_2 & \to U_2, \\ Y_{2k-1} & \to 2Y_{2k-1}, \quad 1 \le k \le r, \\ Y_{n-7} & \to 2Y_{n-7}, \\ Y_{n-6} & \to 2Y_{n-6}. \end{cases}$$

$$t_{0,1}^{1}:\begin{cases} X_0 & \to X_1, \\ X_3 & \to Y_1, \\ U_2 & \to Y_2. \end{cases} \qquad t_{0,1}^{2}:\begin{cases} X_0 & \to X_1, \\ X_3 & \to Y_1, \\ U_1 & \to X_2, \\ U_2 & \to 2X_3. \end{cases} \qquad t_{0,1}^{3}:\begin{cases} X_0 & \to X_1, \\ X_3 & \to Y_1. \end{cases}$$

$$t_{0,1}^{4}:\begin{cases} X_0 & \to X_1, \\ X_3 & \to Y_1, \\ Y_{n-6} & \to -U_1. \end{cases} \qquad t_{0,1}^{5}:\begin{cases} X_0 & \to X_1, \\ U_2 & \to Y_1. \end{cases}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA * BIBLIOTECA

$$t_{0,1}^6:\begin{cases} X_0 & \to X_1, \\ U_2 & \to Y_1, \\ Y_{n-6} & \to -X_2. \end{cases} \qquad t_{0,1}^7:\begin{cases} X_0 & \to X_1, \\ U_2 & \to Y_1, \\ Y_{n-7} & \to -X_2. \end{cases}$$

$$t_{0,2}^1:\begin{cases} X_0 & \to X_2, \\ X_2 & \to -Y_1. \end{cases} \qquad t_{0,2}^2:\begin{cases} X_0 & \to X_2, \\ X_2 & \to -U_2. \end{cases} \qquad t_{0,2}^3:\begin{cases} X_0 & \to X_2. \end{cases}$$

$$t_{0,3}:\begin{cases} X_0 & \to X_3. \end{cases} \qquad t_{0,4}^1:\begin{cases} X_0 & \to U_1, \\ X_2 & \to -Y_2. \end{cases} \qquad t_{0,4}^2:\begin{cases} X_0 & \to U_1, \\ X_2 & \to -X_3. \end{cases}$$

$$t_{0,4}^3:\begin{cases} X_0 & \to U_1, \\ X_2 & \to -Y_1. \end{cases} \qquad t_{0,4}^4:\begin{cases} X_0 & \to U_1. \end{cases} \qquad t_{0,4}^5:\begin{cases} X_0 & \to U_1, \\ Y_{n-6} & \to -U_1. \end{cases}$$

$$t_{0,4}^6:\begin{cases} X_0 & \to U_1, \\ Y_{n-7} & \to -U_1. \end{cases} \qquad t_{0,4}^7:\begin{cases} X_0 & \to U_1, \\ X_2 & \to -Y_1, \\ Y_{n-6} & \to -X_2. \end{cases}$$

$$t_{0,5}:\begin{cases} X_0 & \to U_2. \end{cases} \qquad u_{0,1}:\begin{cases} X_0 & \to Y_1. \end{cases} \qquad u_{0,2}:\begin{cases} X_0 & \to Y_2. \end{cases}$$

$$u_{0,2k}^1:\begin{cases} X_0 & \to Y_{2k}, \\ Y_{2k+1} & \to -U_1. \end{cases} \quad 1 \leq k \leq r \quad u_{0,2k}^2:\begin{cases} X_0 & \to Y_{2k}, \\ Y_{2k+1} & \to -U_1, \\ Y_{n-6} & \to -Y_{2k}. \end{cases} \quad 1 \leq k \leq r$$

$$u_{0,2k}^3:\begin{cases} X_0 & \to Y_{2k}, \\ Y_{2k+1} & \to -U_1, \\ Y_{n-7} & \to -Y_{2k}. \end{cases} \quad 1 \leq k \leq r \quad u_{0,2k}^4:\begin{cases} X_0 & \to Y_{2k}, \\ Y_{2k+1} & \to -X_2. \end{cases} \quad 1 \leq k \leq r$$

$$u_{0,2k+1}^1:\begin{cases} X_0 & \to Y_{2k+1}, \\ Y_{2k} & \to U_1. \end{cases} \quad 1 \leq k \leq r \quad u_{0,2k+1}^2:\begin{cases} X_0 & \to Y_{2k+1}, \\ Y_{2k} & \to U_1, \\ Y_{n-6} & \to -Y_{2k+1}. \end{cases} \quad 1 \leq k \leq r$$

$$u_{0,2k+1}^3:\begin{cases} X_0 & \to Y_{2k+1}, \\ Y_{2k} & \to U_1, \\ Y_{n-7} & \to -Y_{2k+1}. \end{cases} \quad 1 \leq k \leq r \quad u_{0,2k+1}^4:\begin{cases} X_0 & \to Y_{2k+1}, \\ Y_{2k} & \to X_2. \end{cases} \quad 1 \leq k \leq r$$

$$u_{0,n-6}^1:\begin{cases} X_0 & \to Y_{n-6}, \\ X_2 & \to -U_2. \end{cases} \qquad u_{0,n-6}^2:\begin{cases} X_0 & \to Y_{n-6}, \\ U_2 & \to -U_2, \\ Y_{2k+1} & \to -Y_{2k+1}, \\ Y_{n-6} & \to -Y_{n-6}. \end{cases}$$

$$u^3_{0,n-6}\colon\begin{cases} X_0 & \to & Y_{n-6}, \\ X_2 & \to & -X_3. \end{cases} \qquad u^2_{0,n-6}\colon\begin{cases} X_0 & \to & Y_{n-6}, \\ U_2 & \to & -X_3. \end{cases}$$

$$t^1_{1,0}\colon\begin{cases} X_1 & \to & X_0, \\ Y_1 & \to & X_3, \\ Y_2 & \to & U_2. \end{cases} \qquad t^2_{1,0}\colon\begin{cases} X_1 & \to & X_0, \\ U_1 & \to & X_2, \\ U_2 & \to & X_3, \\ Y_1 & \to & 2U_2. \end{cases} \qquad t^3_{1,0}\colon\begin{cases} X_1 & \to & X_0, \\ U_1 & \to & -Y_{n-6}, \\ Y_1 & \to & X_3. \end{cases}$$

$$\overline{t_{1,(0,n-6)}}\colon\begin{cases} X_1 & \to & X_0 + Y_{n-6}, \\ Y_1 & \to & X_3. \end{cases} \qquad t^4_{1,0}\colon\begin{cases} X_1 & \to & X_0, \\ X_2 & \to & -Y_{n-6}, \\ Y_1 & \to & U_2. \end{cases} \qquad t^5_{1,0}\colon\begin{cases} X_1 & \to & X_0, \\ X_2 & \to & -Y_{n-7}, \\ Y_1 & \to & U_2. \end{cases}$$

$$t^1_{1,1}\colon\begin{cases} X_1 & \to & X_1, \\ X_2 & \to & X_2, \\ X_3 & \to & X_3, \\ Y_1 & \to & 2Y_1, \\ Y_2 & \to & Y_2. \end{cases} \qquad t^2_{1,1}\colon\begin{cases} X_1 & \to & X_1, \\ X_2 & \to & X_2, \\ X_3 & \to & X_3, \\ Y_1 & \to & 2Y_1. \end{cases}$$

$$t^3_{1,1}\colon\begin{cases} X_1 & \to & X_1, \\ X_2 & \to & X_2, \\ X_3 & \to & X_3, \\ U_1 & \to & 2U_1, \\ U_2 & \to & 2U_2, \\ Y_1 & \to & 3Y_1. \end{cases} \qquad t^4_{1,1}\colon\begin{cases} X_1 & \to & X_1, \\ X_2 & \to & X_2, \\ X_3 & \to & X_3, \\ Y_1 & \to & 2Y_1, \\ Y_{n-6} & \to & Y_{n-6}. \end{cases}$$

$$t^{1,r}_{1,1}\colon\begin{cases} X_1 & \to & X_1, \\ X_2 & \to & X_2, \\ X_3 & \to & X_3, \\ Y_1 & \to & Y_1, \\ Y_{2k+1} & \to & Y_{2k+1}. \end{cases} \quad 1 \leq k \leq r. \qquad t^{2,r}_{1,1}\colon\begin{cases} X_1 & \to & X_1, \\ X_2 & \to & X_2, \\ X_3 & \to & X_3, \\ Y_1 & \to & Y_1, \\ Y_{2k+1} & \to & Y_{2k+1}, \\ Y_{n-6} & \to & Y_{n-6}. \end{cases} \quad 1 \leq k \leq r.$$

$$t_{1,2}\colon\begin{cases} X_1 & \to & X_2, \\ X_2 & \to & X_3. \end{cases} \qquad t_{1,3}\colon\{\ X_1 \ \to \ X_3.$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIEROS INFORMÁTICA BIBLIOTECA

$$t^1_{1,4}:\begin{cases} X_1 \to U_1, \\ X_2 \to U_2. \end{cases} \quad t^2_{1,4}:\begin{cases} X_1 \to U_1, \\ X_2 \to U_2, \\ Y_{n-7} \to -Y_{n-6}. \end{cases} \quad t^3_{1,4}:\begin{cases} X_1 \to U_1, \\ X_2 \to U_2, \\ Y_{n-6} \to -Y_{n-7}. \end{cases}$$

$$t_{1,5}:\{ X_1 \to U_2. \quad u_{1,1}:\{ X_1 \to Y_1. \quad u_{1,2}:\{ X_1 \to Y_2.$$

$$u^1_{1,2k}:\begin{cases} X_1 \to Y_{2k}, \\ Y_{2k+1} \to -Y_{n-6}. \end{cases} 1 \le k \le r \quad u^2_{1,2k}:\begin{cases} X_0 \to Y_{2k}, \\ Y_{2k+1} \to -Y_{n-7}. \end{cases} 1 \le k \le r$$

$$u^1_{1,2k+1}:\begin{cases} X_1 \to Y_{2k+1}, \\ Y_{2k} \to Y_{n-6}. \end{cases} 1 \le k \le r \quad u^2_{1,2k+1}:\begin{cases} X_0 \to Y_{2k+1}, \\ Y_{2k} \to Y_{n-7}. \end{cases} 1 \le k \le r$$

$$u_{1,n-7}:\{ X_1 \to Y_{n-7}. \quad u^1_{1,n-6}:\{ X_1 \to Y_{n-6}. \quad u^2_{1,n-6}:\begin{cases} X_1 \to Y_{n-6}, \\ Y_1 \to -X_3. \end{cases}$$

$$t^1_{4,0}:\begin{cases} U_1 \to X_0, \\ Y_1 \to -X_2. \end{cases} \quad t^1_{4,1}:\begin{cases} U_1 \to X_1, \\ U_2 \to X_2. \end{cases} \quad t^2_{4,1}:\begin{cases} U_1 \to X_1, \\ U_2 \to X_2, \\ Y_{n-7} \to -Y_{n-6}. \end{cases}$$

$$t^1_{4,2}:\begin{cases} U_1 \to X_2, \\ U_2 \to X_3, \\ Y_2 \to Y_1. \end{cases} \quad t^2_{4,2}:\begin{cases} U_1 \to X_2, \\ U_2 \to X_3. \end{cases} \quad t_{4,3}:\{ U_1 \to X_3.$$

$$t^1_{4,4}:\begin{cases} U_1 \to U_1, \\ U_2 \to U_2, \\ Y_2 \to Y_2. \end{cases} \quad t^2_{4,4}:\begin{cases} U_1 \to U_1, \\ U_2 \to U_2, \\ Y_1 \to Y_1. \end{cases} \quad t^3_{4,4}:\begin{cases} U_1 \to U_1, \\ U_2 \to U_2, \\ Y_1 \to Y_1, \\ Y_{n-6} \to -Y_{n-6}. \end{cases}$$

$$t^{1,r}_{4,4}:\begin{cases} U_1 \to U_1, \\ U_2 \to U_2, \\ Y_{2k+1} \to Y_{2k+1}. \end{cases} 1 \le k \le r \quad t^{2,r}_{4,4}:\begin{cases} U_1 \to U_1, \\ U_2 \to U_2, \\ Y_{2k+1} \to Y_{2k+1}, \\ Y_{n-6} \to Y_{n-6}. \end{cases} 1 \le k \le r$$

$$t_{4,5}:\{ U_1 \to U_2. \quad u_{4,1}:\{ U_1 \to Y_1. \quad u_{4,2}:\{ U_1 \to Y_2.$$

$$u^1_{4,2k}:\begin{cases} U_1 \to Y_{2k}, \\ Y_{2k+1} \to -Y_{n-6}. \end{cases} 1 \le k \le r \quad u^2_{4,2k}:\begin{cases} U_1 \to Y_{2k}, \\ Y_{2k+1} \to -Y_{n-7}. \end{cases} 1 \le k \le r$$

$$u^1_{4,2k+1}:\begin{cases} U_1 & \to & Y_{2k+1}, \\ Y_{2k} & \to & Y_{n-6}. \end{cases} \quad 1 \le k \le r \quad u^2_{4,2k+1}:\begin{cases} U_1 & \to & Y_{2k+1}, \\ Y_{2k} & \to & Y_{n-7}. \end{cases} \quad 1 \le k \le r$$

$$u_{4,n-7}:\{\ U_1 \to Y_{n-7}. \qquad u^1_{4,n-6}:\{\ U_1 \to Y_{n-6}. \qquad u^2_{4,n-6}:\begin{cases} U_1 & \to & Y_{n-6}, \\ Y_1 & \to & X_3. \end{cases}$$

$$v_{j,3}:\{\ Y_j \to X_3. \quad 1 \le k \le n-3p-2q-1$$

$$v_{j,5}:\{\ Y_j \to U_2. \quad 1 \le k \le n-3p-2q-1$$

$$w_{j,1}:\{\ Y_j \to Y_1. \quad 1 \le k \le n-3p-2q-1$$

$$w_{2k,2k+1}:\{\ Y_{2k} \to Y_{2k+1}. \quad 1 \le k \le r \quad w_{2k+1,2k}:\{\ Y_{2k} \to Y_{2k+1}. \quad 1 \le k \le r$$

$$w_{2k,2j}:\begin{cases} Y_{2k} & \to & Y_{2j}, \\ Y_{2j+1} & \to & Y_{2k+1}. \end{cases} \quad 1 \le k,j \le r \quad w_{2k,2j+1}:\begin{cases} Y_{2k} & \to & Y_{2j+1}, \\ Y_{2j} & \to & Y_{2k+1}. \end{cases} \quad 1 \le k,j \le r$$

$$w_{2k+1,2j}:\begin{cases} Y_{2k+1} & \to & Y_{2j}, \\ Y_{2j+1} & \to & Y_{2k}. \end{cases} \quad 1 \le k,j \le r$$

4.2 Caso $\dim \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = 5$

$\boxed{\text{Derivaciones de } \mathfrak{g}^1_{n,1,1}}$

$$\mathfrak{g}^1_{n,1,1} \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, \quad 1 \le i \le 2, \\ [X_0, U_1] = U_2, \\ [X_1, X_2] = Y_1, \\ [X_1, U_1] = Y_2. \end{cases}$$

Evidentemente, si $n > 8$, estas álgebras son escindidas y, por tanto,

$$\mathfrak{g}^1_{n,1,1} = \mathfrak{g}^1_{8,1,1} \ \oplus\ \mathbf{C}^{n-8}.$$

con lo que se verificará, con la notación del apartado 0.2.1, que

$$Der(\mathfrak{g}^1_{n,1,1}) = Der(\mathfrak{g}^1_{8,1,1}) \oplus Der(\mathbf{C}^{n-8}) \oplus \mathcal{D}(\mathfrak{g}^1_{8,1,1}, \mathbf{C}^{n-8}) \oplus \mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-8}, \mathfrak{g}^1_{8,1,1})$$

Se va a proceder al cálculo de cada uno de estos subespacios.

Proposición 4.1 *Una base de $\mathfrak{g}^1_{8,1,1}$, viene dada por*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^1_{8,1,1} &= \{t^1_{0,0},\ t^1_{0,1},\ t^1_{0,2},\ t^1_{0,3},\ t^1_{0,4},\ t_{0,5}; u^1_{0,1},\ u_{0,2}\} \cup \\ &\quad \{t^1_{1,0},\ t^1_{1,1},\ t_{1,2},\ t_{1,3},\ t^1_{1,4},\ t_{1,5}; u_{1,1},\ u_{1,2}\} \cup \\ &\quad \{t^1_{4,2},\ t_{4,3},\ t^1_{4,4},\ t_{4,5}; u_{4,1},\ u_{4,2}\}.\end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^1_{8,1,1})) = 22$$

Demostración. Es trivial probar que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}^1_{8,1,1}$. Se va a probar que no hay otras.
Se considera la siguiente graduación de $\mathfrak{g}^1_{8,1,1}$

$$\begin{array}{c}\langle X_0\rangle\oplus\langle X_1\rangle\oplus\langle X_2\rangle\oplus\langle X_3\rangle\oplus\langle Y_1\rangle\oplus\langle U_1\rangle\oplus\langle U_2\rangle\oplus\langle Y_2\rangle \\ \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3 \oplus \mathfrak{g}_4 \oplus \mathfrak{g}_5 \oplus \mathfrak{g}_6 \oplus \mathfrak{g}_7 \oplus \mathfrak{g}_8\end{array}$$

Sea $d \in Der(\mathfrak{g}^1_{8,1,1})$, entonces

$$\exists\ d_i,\ i \in \mathbf{Z} \quad \text{tal que} \quad d = \sum_{i\in\mathbf{Z}} d_i = \sum_{i=-7}^{7} d_i$$

puesto que $d_i \equiv 0$ si $i < -7$ ó $i > 7$, donde $d_i(X_j) \in \mathfrak{g}_{i+j}$, $1 \leq i + j \leq 8$.
De forma análoga a los casos anteriores, se obtiene una base de $Der(\mathfrak{g}^1_{8,1,1})$ y puede verse con más detalle en el apéndice E.1 □

Nota 1: Se verifica que

$$\begin{aligned}Ad(X_0) &= t_{1,2} + t_{4,5}, & Ad(X_1) &= -t_{0,2} + u_{2,1} + u_{4,2} \\ Ad(X_2) &= -t^1_{0,3} - u_{1,1}, & Ad(U_1) &= -t_{0,5} - u_{1,2}.\end{aligned}$$

Nota 2:
Se tiene, trivialmente, que $Der(\mathbf{C}^{n-8}) = gl(\mathbf{C}^{n-8})$. Luego una base de $Der(\mathbf{C}^{n-8})$ vendrá dada por

$$\mathcal{B}_1 = \{w_{ij} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-8}) :\ 3 \leq i,j \leq n-6\}$$

y su dimensión es

$$\dim\left(Der(\mathbf{C}^{n-8})\right) = (n-8)^2$$

Proposición 4.2 *Una base de* $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^1_{8,1,1}, \mathbf{C}^{n-8})$ *viene dada por*

$$\mathcal{B}_{12} = \{u_{0,j},\ u_{1,j},\ u_{4,j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}^1_{8,1,1}, \mathbf{C}^{n-8}) :\ 3 \le j \le n-6\}$$

y su dimensión es

$$\dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g}^1_{8,1,1}, \mathbf{C}^{n-8})) = 3 \cdot (n-8)$$

Demostración. Sea $d \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}^1_{8,1,1}, \mathbf{C}^{n-8})$. Puesto que

$$\begin{aligned} &\mathcal{Z}(\mathbf{C}^{n-8}) = \mathbf{C}^{n-8} = \langle Y_3, \ldots, Y_{n-6}\rangle \\ &\left[\mathfrak{g}^1_{8,1,1}, \mathfrak{g}^1_{8,1,1}\right] = \langle X_2, X_3, U_2, Y_1, Y_2\rangle \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{cases} d(X_i) = \sum\limits_{k=3}^{n-6} a_{i,k} Y_k, & 0 \le i \le 1, \\ d(X_i) = 0 & 2 \le i \le 3, \\ d(U_1) = \sum\limits_{k=3}^{n-6} b_k Y_k, & \\ d(U_2) = 0, & \\ d(Y_i) = 0, & 1 \le i \le n-6. \end{cases}$$

Exigiendo que d sea derivación no se obtienen respecto a los parámetros y, por tanto, se tiene el resultado. $\square$

Proposición 4.3 *Una base de* $\mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-8}, \mathfrak{g}^1_{8,1,1})$ *viene dada por*

$$\mathcal{B}_{21} = \{v_{j,3},\ v_{j,5},\ w_{j,1},\ w_{j,2} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-8}, \mathfrak{g}^1_{8,1,1}) :\ 3 \le j \le n-6\}$$

y su dimensión es

$$dim(\mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-8}, \mathfrak{g}^1_{8,1,1})) = 4 \cdot (n-8)$$

Demostración. Es análoga a la anterior, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} &\mathcal{Z}(\mathfrak{g}^1_{8,1,1}) = \langle X_3, U_2, Y_1, Y_2\rangle \\ &[\mathbf{C}^{n-8}, \mathbf{C}^{n-8}] = \{0\} \end{aligned}$$

$\square$

Se acaba de probar el siguiente

Teorema 4.4 *Con las notaciones anteriores, se verifica que una base de* $Der(\mathfrak{g}^1_{n,1,1})$, *viene dada por*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^1_{n,1,1} &= \mathcal{B}^1_{8,1,1} \cup \{w_{ij} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-8}) : \ 3 \le i,j \le n-6\} \cup \\ &\cup \ \{u_{0,j}, \ u_{1,j}, \ u_{4,j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}^1_{8,1,1}, \mathbf{C}^{n-8}) : \ 3 \le j \le n-6\} \cup \\ &\cup \ \{v_{j,3}, \ v_{j,5}, \ w_{j,1}, \ w_{j,2} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-8}, \mathfrak{g}^1_{8,1,1}) : \ 3 \le j \le n-6\}\end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^1_{8,1,1})) = n^2 - 9n + 30$$

4.3 Caso $\dim \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = 4$

4.3.1 Derivaciones de $\mathfrak{g}^i_{n,1,1}$, $2 \le i \le 3$.

Evidentemente, si $n > 7$, estas álgebras son escindidas y, por tanto,

$$\mathfrak{g}^i_{n,1,1} = \mathfrak{g}^i_{7,1,1} \ \oplus \ \mathbf{C}^{n-7}, \ i = 2,3 \implies$$

$$Der(\mathfrak{g}^i_{n,1,1}) = Der(\mathfrak{g}^i_{7,1,1}) \oplus Der(\mathbf{C}^{n-7}) \oplus \mathcal{D}(\mathfrak{g}^i_{7,1,1}, \mathbf{C}^{n-7}) \oplus \mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-7}, \mathfrak{g}^i_{7,1,1})$$

Se va a proceder al cálculo de cada uno de estos subespacios.

$\boxed{\text{Derivaciones de } \mathfrak{g}^2_{n,1,1}}$

$$\mathfrak{g}^2_{n,1,1} \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, \quad 1 \le i \le 2, \\ [X_0, U_1] = U_2, \\ [X_1, X_2] = Y_1, \\ [X_1, U_1] = X_3. \end{cases}$$

Proposición 4.5 *Una base de* $\mathfrak{g}^2_{7,1,1}$, *viene dada por*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^2_{7,1,1} &= \{t^2_{0,0}, \ t^2_{0,1}, \ t^1_{0,2}, \ t^1_{0,3}, \ t^2_{0,4}, \ t_{0,5}, u^1_{0,1}\} \cup \\ &\quad \{t^2_{1,1}, \ t_{1,2}, \ t_{1,3}, \ t^1_{1,4}, \ t_{1,5}, u_{1,1}, \ t_{4,3}, \ t_{4,5}, \ u_{4,1}\}.\end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^2_{7,1,1})) = 16$$

Demostración. Es trivial probar que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}^2_{7,1,1}$. Se va a probar que no hay otras.
Se considera la siguiente graduación de $\mathfrak{g}^2_{7,1,1}$

$$\begin{array}{ccccccc} \langle Y_1\rangle \oplus & \langle X_1\rangle \oplus & \langle X_2\rangle \oplus & \langle X_3\rangle \oplus & \langle X_0\rangle \oplus & \langle U_1\rangle \oplus & \langle U_2\rangle \\ \mathfrak{g}_{-3} \oplus & \mathfrak{g}_{-2} \oplus & \mathfrak{g}_{-1} \oplus & \mathfrak{g}_0 \oplus & \mathfrak{g}_1 \oplus & \mathfrak{g}_2 \oplus & \mathfrak{g}_3 \end{array}$$

Sea $d \in Der(\mathfrak{g}^2_{7,1,1})$, entonces

$$\exists\ d_i,\ i \in \mathbf{Z} \quad \text{tal que} \quad d = \sum_{i \in \mathbf{Z}} d_i = \sum_{i=-6}^{6} d_i$$

donde $d_i(X_j) \in \mathfrak{g}_{i+j}$, $-3 \leq i + j \leq 3$.
De forma análoga a los casos anteriores, se obtiene una base de $Der(\mathfrak{g}^2_{7,1,1})$ y puede verse con más detalle en el apéndice E.2 $\square$

Nota 1: Se verifica que

$$\begin{array}{ll} Ad(X_0) = t_{1,2} + t_{4,5}, & Ad(X_1) = -t_{0,2} + u_{2,1} + t_{4,3} \\ Ad(X_2) = -t^1_{0,3} - u_{1,1}, & Ad(U_1) = -t_{0,5} - t_{1,3}. \end{array}$$

Nota 2:
Se tiene, trivialmente, que $Der(\mathbf{C}^{n-7}) = gl(\mathbf{C}^{n-7})$. Luego una base de $Der(\mathbf{C}^{n-7})$ vendrá dada por

$$\mathcal{B}_1 = \{w_{ij} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-7}) : \ 2 \leq i, j \leq n-6\}$$

y su dimensión es

$$\dim\left(Der(\mathbf{C}^{n-7})\right) = (n-7)^2$$

Proposición 4.6 *Una base de $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^2_{7,1,1}, \mathbf{C}^{n-7})$ viene dada por*

$$\mathcal{B}_{12} = \{u_{0,j},\ u_{1,j},\ u_{4,j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}^2_{7,1,1}, \mathbf{C}^{n-7}) : \ 2 \leq j \leq n-6\}$$

y su dimensión es

$$\dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g}^2_{7,1,1}, \mathbf{C}^{n-7})) = 3 \cdot (n-7)$$

BIBLIOTECA

Demostración. Es análoga a la anterior, teniendo en cuenta que

$$\mathcal{Z}(\mathbf{C}^{n-7}) = \mathbf{C}^{n-7} = \langle Y_2, \ldots, Y_{n-6}\rangle$$
$$\left[\mathfrak{g}^2_{7,1,1}, \mathfrak{g}^2_{7,1,1}\right] = \langle X_2, X_3, U_2, Y_1\rangle$$

□

Proposición 4.7 *Una base de $\mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-7}, \mathfrak{g}^2_{7,1,1})$ viene dada por*

$$\mathcal{B}_{21} = \{v_{j,3},\ v_{j,5},\ w_{j,1} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-7}, \mathfrak{g}^2_{7,1,1}) :\ 2 \leq j \leq n-6\}$$

y su dimensión es

$$dim(\mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-7}, \mathfrak{g}^2_{7,1,1})) = 3 \cdot (n-7)$$

Demostración. Es análoga a la anterior, teniendo en cuenta que

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}^2_{7,1,1}) = \langle X_3, U_2, Y_1\rangle$$
$$[\mathbf{C}^{n-7}, \mathbf{C}^{n-7}] = \{0\}$$

□

Se acaba de probar el siguiente

Teorema 4.8 *Una base de $Der(\mathfrak{g}^2_{n,1,1})$, viene dada por*

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^2_{n,1,1} &= \mathcal{B}^2_{7,1,1} \cup \{w_{ij} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-7}) :\ 2 \leq i,j \leq n-6\} \cup \\
&\cup\ \{u_{0,j},\ u_{1,j},\ u_{4,j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}^2_{7,1,1}, \mathbf{C}^{n-7}) :\ 2 \leq j \leq n-6\} \cup \\
&\cup\ \{v_{j,3},\ v_{j,5},\ w_{j,1} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-7}, \mathfrak{g}^2_{7,1,1}) :\ 2 \leq j \leq n-6\}
\end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^2_{n,1,1})) = n^2 - 8n + 23$$

$\boxed{\text{Derivaciones de } \mathfrak{g}^3_{n,1,1}}$

$$\mathfrak{g}^3_{n,1,1} \left\{ \begin{array}{l}
[X_0, X_i] = X_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq 2, \\
[X_0, U_1] = U_2, \\
[X_1, X_2] = U_2, \\
[X_1, U_1] = Y_1.
\end{array} \right.$$

Proposición 4.9 *Una base de $\mathfrak{g}^3_{7,1,1}$, viene dada por*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^3_{7,1,1} &= \{t^3_{0,0},\ t^2_{0,2},\ t^1_{0,3},\ t^3_{0,4},\ t_{0,5}, u^1_{0,1}\} \cup \\ &\quad \{t^2_{1,0},\ t^3_{1,1},\ t_{1,2},\ t_{1,3},\ t^1_{1,4},\ t_{1,5}, u_{1,1},\ t_{4,3},\ t_{4,5},\ u_{4,1}\}.\end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^3_{7,1,1})) = 17$$

Demostración. Se considera la siguiente graduación de $\mathfrak{g}^3_{7,1,1}$

$$\begin{array}{cccccccc} \langle X_0\rangle\oplus & \langle X_3\rangle\oplus & \langle X_2\rangle\oplus & \langle X_1\rangle\oplus & \langle U_2\rangle\oplus & \langle U_1\rangle\oplus & \{0\} & \langle Y_1\rangle\oplus \\ \mathfrak{g}_{-1}\oplus & \mathfrak{g}_0\oplus & \mathfrak{g}_1\oplus & \mathfrak{g}_2\oplus & \mathfrak{g}_3\oplus & \mathfrak{g}_4\oplus & \mathfrak{g}_5 & \oplus\mathfrak{g}_6 \end{array}$$

Sea $d \in Der(\mathfrak{g}^3_{7,1,1})$, entonces

$$\exists\ d_i,\ i \in \mathbf{Z} \quad \text{tal que} \quad d = \sum_{i\in\mathbf{Z}} d_i = \sum_{i=-7}^{7} d_i$$

donde $d_i(X_j) \in \mathfrak{g}_{i+j}$, $-1 \leq i+j \leq 6$.
De forma análoga a los casos anteriores, se obtiene una base de $Der(\mathfrak{g}^3_{7,1,1})$ y puede verse con más detalle en el apéndice E.3 □

Nota: Se verifica que

$$\begin{aligned} Ad(X_0) &= t_{1,2} + t_{4,5}, & Ad(X_1) &= -t_{0,2} + u_{4,1} \\ Ad(X_2) &= -t^1_{0,3} - t_{1,5}, & Ad(U_1) &= -t_{0,5} - u_{1,1}. \end{aligned}$$

Teorema 4.10 *Una base de $Der(\mathfrak{g}^3_{n,1,1})$, viene dada por*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^3_{n,1,1} &= \mathcal{B}^3_{7,1,1} \cup \{w_{ij} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-7}) :\ 2 \leq i,j \leq n-6\} \cup \\ &\cup\ \{u_{0,j},\ u_{1,j},\ u_{4,j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}^3_{7,1,1}, \mathbf{C}^{n-7}) :\ 2 \leq j \leq n-6\} \cup \\ &\cup\ \{v_{j,3},\ v_{j,5},\ w_{j,1} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-7}, \mathfrak{g}^3_{7,1,1}) :\ 2 \leq j \leq n-6\}\end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^3_{n,1,1})) = n^2 + 8n + 24$$

Demostración. Análoga a los casos anteriores. □

ESCUELA TECNICA SUPERIOR INGENIERIA INFORMATICA BIBLIOTECA

4.3.2 Derivaciones de $\mathfrak{g}^i_{n,1,1}$, $4 \leq i \leq 4n-23$.

A continuación se va a realizar el cálculo de las derivaciones de las álgebras dadas por $\mathfrak{g}^i_{n,1,1}$, $3 \leq i \leq 4n-23$, o lo que es lo mismo, de las álgebras de las familias $\mathfrak{g}^{j,r}_{n,1,1}$, $0 \leq r \leq r_j$, $1 \leq j \leq 8$, donde

$$r_1 = r_5 = \left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor, \; r_2 = r_3 = r_6 = r_7 = \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor, \; r_4 = r_8 = \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor$$

y se va a realizar calculando un toro de derivaciones para cada una de ellas.

$$\boxed{\textbf{Derivaciones de } \mathfrak{g}^{1,r}_{n,1,1}, \; 0 \leq r \leq \left\lfloor \tfrac{n-7}{2} \right\rfloor}$$

$$\mathfrak{g}^{1,r}_{n,1,1} : \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq 2, \\ [X_0, U_1] &= U_2, \\ [X_1, X_2] &= Y_1, \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] &= U_2, \quad 1 \leq k \leq r. \end{cases} \qquad 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor$$

Evidentemente, si $n > 2r+7$, estas álgebras son escindidas y, por tanto,

$$\mathfrak{g}^{1,r}_{n,1,1} = \mathfrak{g}^{1,r}_{2r+7,1,1} \oplus \mathbf{C}^{n-2r-7}, \; 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor \implies$$

$$Der(\mathfrak{g}^{1,r}_{n,1,1}) = Der(\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+7,1,1}) \oplus Der(\mathbf{C}^{n-2r-7}) \oplus \mathcal{D}(\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+7,1,1}, \mathbf{C}^{n-2r-7}) \oplus \mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-2r-7}, \mathfrak{g}^{1,r}_{2r+7,1,1})$$

Proposición 4.11 *Una base de $Der(\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+7,1,1})$, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{1,r}_{2r+7,1,1} = \; & \{t^{1,r}_{0,0}, \; t^3_{0,1}, \; t^1_{0,2}, \; t_{0,3}, \; t^4_{0,4}, \; t_{0,5}, \; u_{0,1}\} \cup \{u^1_{0,j}, \; 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \\ & \{t^2_{1,1}, \; t_{1,2}, \; t_{1,3}, \; t^1_{1,4}, \; t_{1,5}, \; u_{1,1}, \; t_{4,3}, \; t^{1,r}_{4,4}, \; t_{4,5}, \; u_{4,1}\} \cup \\ & \{v_{j,3}, \; 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \{v_{j,5}, \; 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \\ & w_{j,1}, \; 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \{w_{2k,2k+1}, \; 1 \leq k \leq r\} \cup \\ & \{w_{2k+1,2k}, \; 1 \leq k \leq r\} \cup \{w^1_{2k,2j}, \; 1 \leq k,j \leq r\} \cup \\ & \{w^1_{2k,2j+1}, \; 1 \leq k,j \leq r\} \cup \{w^1_{2k+1,2j}, \; 1 \leq k,j \leq r.\} \end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim Der(\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+7,1,1}) = 3r^2 + 8r + 17$$

Demostración. Es trivial probar que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+7,1,1}$. Se va a probar que no hay otras.
Se considera la siguiente graduación del álgebra:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \langle Y_{2r+1}\rangle\oplus\ldots\oplus\langle Y_3\rangle\oplus & \{0\} & \oplus\langle X_0\rangle & \oplus\langle X_1\rangle & \oplus\langle X_2\rangle & \oplus\langle X_3\rangle & \oplus\langle Y_1\rangle & \oplus\langle U_1\rangle & \oplus\langle U_2\rangle & \oplus\langle Y_2\rangle\oplus\ldots\oplus\langle Y_{2r}\rangle \\ \mathfrak{g}_{-r}\ \oplus\ldots\oplus\mathfrak{g}_{-1}\oplus & \mathfrak{g}_0 & \oplus\ \mathfrak{g}_1 & \oplus\ \mathfrak{g}_2 & \oplus\ \mathfrak{g}_3 & \oplus\ \mathfrak{g}_4 & \oplus\ \mathfrak{g}_5 & \oplus\ \mathfrak{g}_6 & \oplus\ \mathfrak{g}_7 & \oplus\ \mathfrak{g}_8\oplus\ldots\oplus\mathfrak{g}_{7+r} \end{array}$$

<u>*Cálculo de* d_0</u>

Sea

$$\left| \begin{array}{ll} d_0(X_i)=a_iX_i, & 0 \le i \le 3, \\ d_0(U_i)=b_iU_i, & 1 \le i \le 2, \\ d_0(Y_i)=c_iY_i, & 1 \le i \le 2r+1. \end{array} \right.$$

Imponiendo que sea derivación se obtiene

$$\begin{aligned} a_2 &= a_0 + a_1, \\ a_3 &= 2a_0 + a_1, \\ b_2 &= a_0 + b_1, \\ c_1 &= a_0 + 2a_1, \\ c_{2k+1} &= a_0 + b_1 - b_{2k}, \quad 1 \le k \le r. \end{aligned}$$

y, por tanto, se tiene el siguiente conjunto de parámetros libres y una base de $B_0^{1,r}$

$$\begin{aligned} P_0^{1,r} &= \{a_0,\ a_1,\ b_1\} \cup \{b_{2k},\ 1 \le k \le r\} \\ \mathcal{B}_0^{1,r} &= \{t^{1,r}_{0,0},\ t^2_{1,1},\ t^{1,r}_{4,4}\} \cup \{w_{2k,2k},\ 1 \le k \le r\} \end{aligned}$$

Toro de derivaciones

Se va a considerar, por tanto, el siguiente toro de derivaciones:

$$T : \begin{cases} d(X_0) &= \alpha X_0, \\ d(X_1) &= \alpha_1 X_1, \\ d(X_2) &= (\alpha+\alpha_1)X_2, \\ d(X_3) &= (2\alpha+\alpha_1)X_3, \\ d(U_1) &= \alpha_2 U_1, \\ d(U_2) &= (\alpha+\alpha_2)U_2, \\ d(Y_1) &= (\alpha+2\alpha_1)Y_1, \\ d(Y_{2k}) &= \beta_k Y_{2k}, & 1 \leq k \leq r, \\ d(Y_{2k+1}) &= (\alpha+\alpha_2-\beta_k)Y_{2k+1}, & 1 \leq k \leq r. \end{cases}$$

que determina la siguiente graduación para el álgebra:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{1,r}_{2r+7,1,1} \;=\; & \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_2-\beta_r} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_2-\beta_1} \oplus \{0\} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha+\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+2\alpha_1} \oplus \\ & \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\beta_1} \oplus \mathfrak{g}_{\beta_2} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{\beta_r} \end{aligned}$$

Diferencias

Se consideran a continuación todas las posibles diferencias de los parámetros a fin de determinar una base del conjunto de las derivaciones de $\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+7,1,1}$, de forma análoga a los casos anteriores. Para más detalles ver apéndice E.4 □

Nota 1: Se verifica que

$$\begin{aligned} Ad(X_0) &= t_{1,2}+t_{2,3}+t_{4,5}, & Ad(X_1) &= -t_{0,2}+u_{2,1} \\ Ad(X_2) &= -t_{0,3}-u_{1,1}, & Ad(U_1) &= -t_{0,5}, \\ Ad(Y_{2k}) &= v_{2k+1,5}, & Ad(Y_{2k+1}) &= -v_{2k,5}. \end{aligned}$$

Nota 2:

Se tiene, trivialmente, que $Der(\mathbf{C}^{n-2r-7}) = gl(\mathbf{C}^{n-2r-7})$. Luego una base de $Der(\mathbf{C}^{n-2r-7})$ vendrá dada por

$$\mathcal{B}_1 = \{w_{ij} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-2r-7}) : \; 2r+2 \leq i,j \leq n-6\}$$

y su dimensión es

$$\dim\left(Der(\mathbf{C}^{n-2r-7})\right) = (n-2r-7)^2$$

Proposición 4.12 *Una base de* $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+7,1,1}, \mathbf{C}^{n-2r-7})$ *viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{12} &= \{u_{0,j},\ u_{1,j},\ u_{4,j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+7,1,1}, \mathbf{C}^{n-2r-7}) :\ 2r+2 \leq j \leq n-6\} \\ &\cup\ \{w_{i,j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+7,1,1}, \mathbf{C}^{n-2r-7}) : 2 \leq i \leq 2r+1,\ 2r+2 \leq j \leq n-7\} \end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+7,1,1}, \mathbf{C}^{n-2r-7})) = (3+2r)\cdot(n-2r-7)$$

Demostración. Es análoga a la anterior, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} &\mathcal{Z}(\mathbf{C}^{n-2r-7}) = \mathbf{C}^{n-2r-7} = \langle Y_{2r+2}, \dots, Y_{n-6}\rangle \\ &\left[\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+7,1,1}, \mathfrak{g}^{1,r}_{2r+7,1,1}\right] = \langle X_2, X_3, U_2, Y_1\rangle \end{aligned}$$

□

Proposición 4.13 *Una base de* $\mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-2r-7}, \mathfrak{g}^{1,r}_{2r+7,1,1})$ *viene dada por*

$$\mathcal{B}_{21} = \{v_{j,3},\ v_{j,5},\ w_{j,1} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-2r-7}, \mathfrak{g}^{1,r}_{2r+7,1,1}) :\ 2r+2 \leq j \leq n-6\}$$

y su dimensión es

$$dim(\mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-2r-7}, \mathfrak{g}^{1,r}_{2r+7,1,1})) = 3\cdot(n-2r-7)$$

Demostración. Es análoga a la anterior, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} &\mathcal{Z}(\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+7,1,1}) = \langle X_3, U_2, Y_1\rangle \\ &[\mathbf{C}^{n-2r-7}, \mathbf{C}^{n-2r-7}] = \{0\} \end{aligned}$$

□

Se acaba de probar el siguiente

Teorema 4.14 *Una base de* $Der(\mathfrak{g}^{1,r}_{n,1,1})$, *viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{1,r}_{n,1,1} &= \mathcal{B}^{1,r}_{2r+7,1,1} \cup \{u_{0,j},\ u_{1,j},\ u_{4,j},\ 2r+2 \leq j \leq n-6\} \cup \\ &\cup\ \{v_{j,3},\ v_{j,5},\ w_{j,1},\ 2r+2 \leq j \leq n-6\} \\ &\cup\ \{w_{i,j} : 2 \leq i \leq n-7,\ 2r+2 \leq j \leq n-7\} \end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^2_{n,1,1})) = n(n-2r-8) + 3r^2 + 10r + 24$$

Derivaciones de $\mathfrak{g}_{n,1,1}^{2,r}$, $0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$

$$\mathfrak{g}_{n,1,1}^{2,r} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_0, U_1] = U_2, & \\ [X_1, X_2] = Y_1, & \\ [X_1, Y_{n-6}] = U_2, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = U_2, & 1 \leq k \leq r. \end{cases} \qquad 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$$

Evidentemente, si $n > 2r+8$, estas álgebras son escindidas y, por tanto,

$$\mathfrak{g}_{n,1,1}^{2,r} = \mathfrak{g}_{2r+8,1,1}^{2,r} \oplus \mathbf{C}^{n-2r-8}, \; 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor \implies$$

$$Der(\mathfrak{g}_{n,1,1}^{2,r}) = Der(\mathfrak{g}_{2r+8,1,1}^{2,r}) \oplus Der(\mathbf{C}^{n-2r-8}) \oplus \mathcal{D}(\mathfrak{g}_{2r+8,1,1}^{2,r}, \mathbf{C}^{n-2r-8}) \oplus \mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-2r-8}, \mathfrak{g}_{2r+8,1,1}^{2,r})$$

Proposición 4.15 *Una base de $Der(\mathfrak{g}_{2r+8,1,1}^{2,r})$, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{2r+8,1,1}^{2,r} = \; & \{t_{0,0}^{2,r},\; t_{0,1}^{4},\; t_{0,2}^{1},\; t_{0,3},\; t_{0,4}^{4},\; t_{0,5},\; u_{0,1},\; u_{0,n-6}^{1}\} \cup \\ & \{u_{0,j}^{1},\; 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \{t_{1,0}^{3},\; t_{1,1}^{2},\; t_{1,2},\; t_{1,3},\; t_{1,4}^{1},\; t_{1,5}\} \cup \\ & \{u_{1,1},\; u_{1,n-6}^{1},\; u_{1,j}^{1},\; 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \{t_{4,3},\; t_{4,4}^{2,r},\; t_{4,5},\; u_{4,1}\} \cup \\ & \{v_{j,3},\; 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \{v_{j,5},\; 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \\ & \{w_{j,1},\; 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \{w_{2k,2k+1},\; 1 \leq k \leq r\} \cup \\ & \{w_{2k+1,2k},\; 1 \leq k \leq r\} \cup \{w_{2k,2j}^{1},\; 1 \leq k,j \leq r\} \cup \\ & \{w_{2k,2j+1}^{1},\; 1 \leq k,j \leq r\} \cup \{w_{2k+1,2j}^{1},\; 1 \leq k,j \leq r.\} \cup \\ & \{v_{n-6,3},\; v_{n-6,5},\; w_{n-6,1}\} \end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim Der(\mathfrak{g}_{2r+8,1,1}^{2,r}) = 3r^2 + 10r + 23$$

Demostración. Es trivial probar que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}_{2r+8,1,1}^{2,r}$. Se va a probar que no hay otras.

Se considera la siguiente graduación del álgebra

$$\begin{array}{rclcl}
\mathfrak{g}^{2,r}_{2r+8,1,1} & = & \langle Y_{2r+1}\rangle\oplus\ldots\oplus\langle Y_3\rangle\oplus\langle Y_1\rangle\oplus\langle X_1\rangle & \oplus & \langle X_2\rangle\oplus\langle X_3\rangle\oplus\langle X_0\rangle\oplus\langle U_1\rangle\oplus\langle U_2\rangle\oplus\{0\}\oplus \\
 & & \mathfrak{g}_{-r-3}\oplus\ldots\oplus\mathfrak{g}_{-4}\oplus\mathfrak{g}_{-3}\oplus\mathfrak{g}_{-2} & \oplus & \mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\mathfrak{g}_3\oplus\mathfrak{g}_4\oplus \\
 & & & & \\
 & & \langle Y_{n-6}\rangle\oplus\{0\}\oplus\langle Y_2\rangle\oplus\ldots\oplus\langle Y_{2r}\rangle & & \\
 & & \mathfrak{g}_5\oplus\mathfrak{g}_6\oplus\mathfrak{g}_7\oplus\ldots\oplus\mathfrak{g}_{6+r} & &
\end{array}$$

Cálculo de d_0

Sea

$$\left|\begin{array}{l}
d_0(X_i)=a_iX_i, \quad 0\le i\le 3,\\
d_0(U_i)=b_iU_i, \quad 1\le i\le 2,\\
d_0(Y_i)=c_iY_i, \quad 1\le i\le 2r+1,\ i=n-6.
\end{array}\right.$$

Imponiendo que sea derivación se obtiene

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_0+a_1,\\
a_3 &= 2a_0+a_1,\\
b_2 &= a_0+b_1,\\
c_1 &= a_0+2a_1,\\
c_{2k+1} &= a_0+b_1-b_{2k}, \quad 1\le k\le r,\\
c_{n-6} &= a_0-a_1+b_1.
\end{aligned}$$

y, por tanto, se tiene el siguiente conjunto de parámetros libres y una base de $B_0^{2,r}$

$$\begin{aligned}
P_0^{2,r} &= \{a_0,\ a_1,\ b_1\}\cup\{b_{2k},\ 1\le k\le r\}\\
\mathcal{B}_0^{2,r} &= \{t_{0,0}^{2,r},\ t_{1,1}^{2},\ t_{4,4}^{2,r}\}\cup\{w_{2k,2k},\ 1\le k\le r\}
\end{aligned}$$

Toro de derivaciones

Se va a considerar, por tanto, el siguiente toro de derivaciones:

$$T:\begin{cases} d(X_0) & =\alpha X_0, \\ d(X_1) & =\alpha_1 X_1, \\ d(X_2) & =(\alpha+\alpha_1)X_2, \\ d(X_3) & =(2\alpha+\alpha_1)X_3, \\ d(U_1) & =\alpha_2 U_1, \\ d(U_2) & =(\alpha+\alpha_2)U_2, \\ d(Y_1) & =(\alpha+2\alpha_1)Y_1, \\ d(Y_{2k}) & =\beta_k Y_{2k}, \qquad\qquad 1\le k\le r, \\ d(Y_{2k+1}) & =(\alpha+\alpha_2-\beta_k)Y_{2k+1}, \quad 1\le k\le r, \\ d(Y_{n-6}) & =(\alpha-\alpha_1+\alpha_2)Y_{n-6}. \end{cases}$$

que determina la siguiente graduación para el álgebra:

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^{2,r}_{2r+8,1,1} = \; & \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_2-\beta_r}\oplus\dots\oplus\mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_2-\beta_1}\oplus\mathfrak{g}_{\alpha+2\alpha_1}\oplus\mathfrak{g}_{\alpha_1}\oplus\mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_1}\oplus\mathfrak{g}_{2\alpha+\alpha_1}\oplus\mathfrak{g}_{\alpha}\oplus \\ & \mathfrak{g}_{\alpha_2}\oplus\mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_2}\oplus\{0\}\oplus\mathfrak{g}_{\alpha-\alpha_1+\alpha_2}\oplus\{0\}\oplus\mathfrak{g}_{\beta_1}\oplus\mathfrak{g}_{\beta_2}\oplus\dots\oplus\mathfrak{g}_{\beta_r}\end{aligned}$$

Diferencias

Se consideran a continuación todas las posibles diferencias de los parámetros a fin de determinar una base del conjunto de las derivaciones de $\mathfrak{g}^{2,r}_{2r+8,1,1}$, de forma análoga a los casos anteriores. (Apéndice E.5). $\square$

Nota 1: Se verifica que

$$\begin{aligned} & Ad(X_0)=t_{1,2}+t_{2,3}+t_{4,5}, && Ad(X_1)=-t_{0,2}+u_{2,1}+v_{n-6,5} \\ & Ad(X_2)=-t_{0,3}-u_{1,1}, && Ad(U_1)=-t_{0,5}, \\ & Ad(Y_{2k})=v_{2k+1,5}, && Ad(Y_{2k+1})=-v_{2k,5}, \\ & Ad(Y_{n-6})=-t_{1,5}. \end{aligned}$$

Nota 2:

Se tiene, trivialmente, que $Der(\mathbf{C}^{n-2r-8})=gl(\mathbf{C}^{n-2r-8})$. Luego una base de $Der(\mathbf{C}^{n-2r-8})$ vendrá dada por

$$\mathcal{B}_1=\{w_{ij}\in\mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-2r-8}) :\ 2r+2\le i,j\le n-7\}$$

y su dimensión es

$$\dim\left(Der(\mathbf{C}^{n-2r-8})\right) = (n-2r-8)^2$$

Proposición 4.16 *Una base de* $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+8,1,1}, \mathbf{C}^{n-2r-8})$ *viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{12} &= \{u_{0,j},\ u_{1,j},\ u_{4,j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+8,1,1}, \mathbf{C}^{n-2r-8}) :\ 2r+2 \le j \le n-7\} \\ &\cup\ \{w_{i,j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+8,1,1}, \mathbf{C}^{n-2r-8}) : 2 \le i \le 2r+1,\ i = n-6,\ 2r+2 \le j \le n-7\} \end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+8,1,1}, \mathbf{C}^{n-2r-8})) = (4+2r)\cdot(n-2r-8)$$

Demostración. Es análoga a la anterior, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\mathbf{C}^{n-2r-8}) &= \mathbf{C}^{n-2r-8} = \langle Y_{2r+2}, \ldots, Y_{n-7}\rangle \\ \left[\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+8,1,1}, \mathfrak{g}^{1,r}_{2r+8,1,1}\right] &= \langle X_2, X_3, U_2, Y_1\rangle \end{aligned}$$

□

Proposición 4.17 *Una base de* $\mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-2r-8}, \mathfrak{g}^{1,r}_{2r+8,1,1})$ *viene dada por*

$$\mathcal{B}_{21} = \{v_{j,3},\ v_{j,5},\ w_{j,1} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{n-2r-8}, \mathfrak{g}^{1,r}_{2r+8,1,1}) :\ 2r+2 \le j \le n-7\}$$

y su dimensión es

$$dim(\mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-2r-8}, \mathfrak{g}^{1,r}_{2r+8,1,1})) = 3\cdot(n-2r-8)$$

Demostración. Es análoga a la anterior, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\mathfrak{g}^{1,r}_{2r+8,1,1}) &= \langle X_3, U_2, Y_1\rangle \\ [\mathbf{C}^{n-2r-8}, \mathbf{C}^{n-2r-8}] &= \{0\} \end{aligned}$$

□

Se acaba de probar el siguiente

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA
BIBLIOTECA

Teorema 4.18 *Una base de $Der(\mathfrak{g}_{n,1,1}^{2,r})$, viene dada por*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{n,1,1}^{2,r} &= \mathcal{B}_{2r+8,1,1}^{2,r} \cup \{u_{0,j},\ u_{1,j},\ u_{4,j},\ 2r+2 \leq j \leq n-8\} \cup \\ &\cup\ \{v_{j,3},\ v_{j,5},\ w_{j,1},\ 2r+2 \leq j \leq n-8\} \\ &\cup\ \{w_{i,j} : 2 \leq i \leq n-6,\ 2r+2 \leq j \leq n-8\}\end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}_{n,1,1}^{2,r})) = n(n-2r-9) + 3r^2 + 12r + 31$$

Derivaciones de $\mathfrak{g}_{n,1,1}^{3,r}$, $0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$

$$\mathfrak{g}_{n,1,1}^{3,r} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_0, U_1] = U_2, & \\ [X_1, X_2] = Y_1, & \\ [X_4, Y_{n-6}] = U_2, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = U_2, & 1 \leq k \leq r. \end{cases} \qquad 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$$

Evidentemente, si $n > 2r+8$, estas álgebras son escindidas y, por tanto,

$$\mathfrak{g}_{n,1,1}^{3,r} = \mathfrak{g}_{2r+8,1,1}^{3,r} \oplus \mathbf{C}^{n-2r-8},\ 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor \Longrightarrow$$

$$Der(\mathfrak{g}_{n,1,1}^{3,r}) = Der(\mathfrak{g}_{2r+8,1,1}^{3,r}) \oplus Der(\mathbf{C}^{n-2r-8}) \oplus \mathcal{D}(\mathfrak{g}_{2r+8,1,1}^{3,r}, \mathbf{C}^{n-2r-8}) \oplus \mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-2r-8}, \mathfrak{g}_{2r+8,1,1}^{3,r})$$

Proposición 4.19 *Una base de $Der(\mathfrak{g}_{2r+8,1,1}^{3,r})$, viene dada por*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{2r+8,1,1}^{3,r} = &\{t_{0,0}^{2,r},\ t_{0,1}^{3},\ t_{0,2}^{1},\ t_{0,3},\ t_{0,4}^{5},\ t_{0,5},\ u_{0,1},\ u_{0,n-6}^{2}\} \cup \\ &\{u_{0,j}^{2},\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \{\bar{t}_{1,(0,n-6)},\ t_{1,1}^{2},\ t_{1,2},\ t_{1,3},\ t_{1,5},\ u_{1,1}\} \cup \\ &\{t_{4,3},\ t_{4,4}^{1,r},\ t_{4,5},\ u_{4,1}\} \cup \{u_{4,n-6}^{1},\ u_{4,j}^{1},\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \\ &\{v_{j,3},\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \{v_{j,5},\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \\ &\{w_{j,1},\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \{w_{2k,2k+1},\ 1 \leq k \leq r\} \cup \\ &\{w_{2k+1,2k},\ 1 \leq k \leq r\} \cup \{w_{2k,2j}^{1},\ 1 \leq k, j \leq r\} \cup \\ &\{w_{2k,2j+1}^{1},\ 1 \leq k, j \leq r\} \cup \{w_{2k+1,2j}^{1},\ 1 \leq k, j \leq r\} \cup \\ &\{v_{n-6,3},\ v_{n-6,5},\ w_{n-6,1}\}\end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim Der(\mathfrak{g}^{3,r}_{2r+8,1,1}) = 3r^2 + 10r + 22$$

Demostración. Es trivial probar que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}^{3,r}_{2r+8,1,1}$. Se va a probar que no hay otras.
Se considera la siguiente graduación del álgebra

$$\begin{array}{cccccc} \mathfrak{g}^{3,r}_{2r+8,1,1} & = & \langle Y_{2r+1}\rangle \oplus \ldots \oplus\langle Y_3\rangle\oplus\{0\}\oplus\langle X_0, Y_{n-6}\rangle & \oplus & \langle X_1\rangle\oplus\langle X_2\rangle\oplus\langle X_3\rangle\oplus\langle Y_1\rangle\oplus \\ & & \mathfrak{g}_{-r-1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \quad \mathfrak{g}_1 & \oplus & \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3 \oplus \mathfrak{g}_4 \oplus \mathfrak{g}_5 \oplus \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \langle U_1\rangle & \oplus\langle U_2\rangle\oplus\langle Y_2\rangle\oplus\ldots\oplus & \langle Y_{2r}\rangle \\ \mathfrak{g}_6 & \oplus\ \mathfrak{g}_7 \oplus \mathfrak{g}_8 \oplus\ldots\oplus & \mathfrak{g}_{6+r} \end{array}$$

Cálculo de d_0

Sea

$$\left| \begin{array}{rcll} d_0(X_0) & = & a_0X_0 + a_0'Y_{n-6}, & \\ d_0(X_i) & = & a_iX_i, & 1 \leq i \leq 3, \\ d_0(U_i) & = & b_iU_i, & 1 \leq i \leq 2, \\ d_0(Y_i) & = & c_iY_i, & 1 \leq i \leq 2r+1, \\ d_0(Y_{n-6}) & = & c_{n-6}'X_0 + c_{n-6}Y_{n-6}. & \end{array} \right.$$

Imponiendo que sea derivación se obtiene

$$\begin{aligned} a_2 &= a_0 + a_1, \\ a_3 &= 2a_0 + a_1, \\ b_2 &= a_0 - a_0' + b_1, \\ c_1 &= a_0 + 2a_1, \\ c_{2k+1} &= a_0 - a_0' + b_1 - b_{2k}, \quad 1 \leq k \leq r, \\ c_{n-6}' &= 0, \\ c_{n-6} &= a_0 - a_0'. \end{aligned}$$

y, por tanto, se tiene el siguiente conjunto de parámetros libres y una base de $B_0^{3,r}$

$$P_0^{3,r} = \{a_0,\ a_0',\ a_1,\ b_1\} \cup \{b_{2k},\ 1 \leq k \leq r\}$$
$$\mathcal{B}_0^{3,r} = \{t_{0,0}^{2,r}, u_{0,n-6}^2,\ t_{1,1}^2,\ t_{4,4}^{1,r}\} \cup \{w_{2k,2k},\ 1 \leq k \leq r\}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INFORMÁTICA * BIBLIOTECA

Toro de derivaciones

Se va a considerar, por tanto, el siguiente toro de derivaciones:

$$T : \begin{cases} d(X_0) &= \alpha X_0, \\ d(X_1) &= \alpha_1 X_1, \\ d(X_2) &= (\alpha + \alpha_1) X_2, \\ d(X_3) &= (2\alpha + \alpha_1) X_3, \\ d(U_1) &= \alpha_2 U_1, \\ d(U_2) &= (\alpha + \alpha_2) U_2, \\ d(Y_1) &= (\alpha + 2\alpha_1) Y_1, \\ d(Y_{2k}) &= \beta_k Y_{2k}, & 1 \leq k \leq r, \\ d(Y_{2k+1}) &= (\alpha + \alpha_2 - \beta_k) Y_{2k+1}, & 1 \leq k \leq r, \\ d(Y_{n-6}) &= \alpha Y_{n-6}. \end{cases}$$

que determina la siguiente graduación para el álgebra:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{3,r}_{2r+8,1,1} = \; & \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_2-\beta_r} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_2-\beta_1} \oplus \{0\} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha+\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+2\alpha_1} \oplus \\ & \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\beta_1} \oplus \mathfrak{g}_{\beta_2} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{\beta_r} \end{aligned}$$

Diferencias

Se consideran a continuación todas las posibles diferencias de los parámetros a fin de determinar una base del conjunto de las derivaciones de $\mathfrak{g}^{3,r}_{2r+8,1,1}$, de forma análoga a los casos anteriores. Para más detalles ver apéndice E.6 □

Nota : Se verifica que

$$\begin{aligned} &Ad(X_0) = t_{1,2} + t_{2,3} + t_{4,5}, && Ad(X_1) = -t_{0,2} + u_{2,1} \\ &Ad(X_2) = -t_{0,3} - u_{1,1}, && Ad(U_1) = -t_{0,5} + v_{n-6,5}, \\ &Ad(Y_{2k}) = v_{2k+1,5}, && Ad(Y_{2k+1}) = -v_{2k,5}, \\ &Ad(Y_{n-6}) = -t_{4,5}. \end{aligned}$$

Teorema 4.20 *Una base de $Der(\mathfrak{g}^{3,r}_{n,1,1})$, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{3,r}_{n,1,1} &= \mathcal{B}^{3,r}_{2r+8,1,1} \cup \{u_{0,j},\ u_{1,j},\ u_{4,j},\ 2r+2 \leq j \leq n-8\} \cup \\ &\cup \ \{v_{j,3},\ v_{j,5},\ w_{j,1},\ 2r+2 \leq j \leq n-8\} \\ &\cup \ \{w_{i,j} : 2 \leq i \leq n-6,\ 2r+2 \leq j \leq n-8\} \end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^{3,r}_{n,1,1})) = n(n-2r-9) + 3r^2 + 12r + 31$$

Demostración. Análoga a las anteriores. $\square$

Derivaciones de $\mathfrak{g}^{4,r}_{n,1,1}$, $0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor$

$$\mathfrak{g}^{4,r}_{n,1,1} : \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq 2, \\ [X_0, U_1] &= U_2, \\ [X_1, X_2] &= Y_1, \\ [X_1, Y_{n-6}] &= U_2, \\ [X_4, Y_{n-7}] &= U_2, \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] &= U_2, \quad 1 \leq k \leq r. \end{cases} \qquad 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor$$

Evidentemente, si $n > 2r+9$, estas álgebras son escindidas y, por tanto,

$$\mathfrak{g}^{4,r}_{n,1,1} = \mathfrak{g}^{4,r}_{2r+9,1,1} \oplus \mathbf{C}^{n-2r-9}, \; 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor \implies$$

$$Der(\mathfrak{g}^{4,r}_{n,1,1}) = Der(\mathfrak{g}^{4,r}_{2r+9,1,1}) \oplus Der(\mathbf{C}^{n-2r-9}) \oplus \mathcal{D}(\mathfrak{g}^{4,r}_{2r+9,1,1}, \mathbf{C}^{n-2r-9}) \oplus \mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-2r-9}, \mathfrak{g}^{4,r}_{2r+9,1,1})$$

Proposición 4.21 *Una base de $Der(\mathfrak{g}^{4,r}_{2r+9,1,1})$, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{4,r}_{2r+9,1,1} = \; & \{t^{3,r}_{0,0},\ t^1_{0,2},\ t_{0,3},\ t^6_{0,4},\ t_{0,5},\ u_{0,1},\ u^1_{0,n-6},\ u_{0,n-7}\} \\ & \{u^3_{0,j},\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \{u^3_{1,j},\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \\ & \{t^3_{1,0},\ t^4_{1,1},\ t_{1,2},\ t_{1,3},\ t^2_{1,4},\ t_{1,5},\ u_{1,1},\ u^1_{1,n-7},\ u^1_{1,n-6}\} \\ & \{t_{4,3},\ t^{2,r}_{4,4},\ t_{4,5},\ u_{4,1}\} \cup \{u^1_{4,n-7},\ u^2_{4,j},\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \\ & \{v_{j,3},\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \{v_{j,5},\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \\ & \{w_{j,1},\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \{w_{2k,2k+1},\ 1 \leq k \leq r\} \cup \\ & \{w_{2k+1,2k},\ 1 \leq k \leq r\} \cup \{w^1_{2k,2j},\ 1 \leq k,j \leq r\} \cup \\ & \{w^1_{2k,2j+1},\ 1 \leq k,j \leq r\} \cup \{w^1_{2k+1,2j},\ 1 \leq k,j \leq r\} \cup \\ & \{v_{n-7,3},\ v_{n-7,5},\ w_{n-7,1}\} \cup \{v_{n-6,3},\ v_{n-6,5},\ w_{n-6,1}\} \end{aligned}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA BIBLIOTECA

y su dimensión es

$$\dim Der(\mathfrak{g}^{4,r}_{2r+9,1,1}) = 3r^2 + 12r + 28$$

Demostración. Es trivial probar que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}^{4,r}_{2r+9,1,1}$. Se va a probar que no hay otras.
Se considera la siguiente graduación del álgebra:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g}^{4,r}_{2r+9,1,1} & = & \langle Y_{2r+1}\rangle \oplus \ldots \oplus \langle Y_3\rangle \oplus \langle Y_1\rangle \oplus \langle X_1\rangle \oplus \langle X_2\rangle \oplus \langle X_3\rangle \oplus \langle X_0, Y_{n-7}\rangle \oplus \\ & & \mathfrak{g}_{-r-2} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{-4} \oplus \mathfrak{g}_{-3} \oplus \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \langle U_1\rangle \oplus \langle U_2\rangle \oplus \{0\} \oplus \langle Y_{n-6}\rangle \oplus \{0\} \oplus \langle Y_2\rangle \oplus \ldots \oplus \langle Y_{2r}\rangle \\ \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3 \oplus \mathfrak{g}_4 \oplus \mathfrak{g}_5 \oplus \mathfrak{g}_6 \oplus \mathfrak{g}_7 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{6+r} \end{array}$$

Cálculo de d_0

Sea

$$\left| \begin{array}{lcll} d_0(X_0) & = & a_0X_0 + a_0'Y_{n-7}, & \\ d_0(X_i) & = & a_iX_i, & 1 \le i \le 3, \\ d_0(U_i) & = & b_iU_i, & 1 \le i \le 2, \\ d_0(Y_i) & = & c_iY_i, & 1 \le i \le 2r+1,\ i = n-6, \\ d_0(Y_{n-7}) & = & c_{n-7}'X_0 + c_{n-7}Y_{n-7}. & \end{array} \right.$$

Imponiendo que sea derivación se obtiene

$$\begin{array}{ll} a_2 & = a_0 + a_1, \\ a_3 & = 2a_0 + a_1, \\ b_2 & = a_0 - a_0' + b_1, \\ c_1 & = a_0 + 2a_1, \\ c_{2k+1} & = a_0 - a_0' + b_1 - b_{2k}, \quad 1 \le k \le r, \\ c_{n-7}' & = 0, \\ c_{n-7} & = a_0 - a_0', \\ c_{n-6} & = a_0 - a_0' - a_1 + b_1. \end{array}$$

y, por tanto, se tiene el siguiente conjunto de parámetros libres y una base de $B_0^{4,r}$

$$P_0^{4,r} = \{a_0,\ a_0',\ a_1,\ b_1\} \cup \{b_{2k},\ 1 \le k \le r\}$$
$$\mathcal{B}_0^{4,r} = \{t^{2,r}_{0,0},\ u_{0,n-7},\ t^4_{1,1},\ t^{2,r}_{4,4}\} \cup \{w_{2k,2k},\ 1 \le k \le r\}$$

<u>*Toro de derivaciones*</u>

Se va a considerar, por tanto, el siguiente toro de derivaciones:

$$T : \begin{cases} d(X_0) &= \alpha X_0, \\ d(X_1) &= \alpha_1 X_1, \\ d(X_2) &= (\alpha + \alpha_1) X_2, \\ d(X_3) &= (2\alpha + \alpha_1) X_3, \\ d(U_1) &= \alpha_2 U_1, \\ d(U_2) &= (\alpha + \alpha_2) U_2, \\ d(Y_1) &= (\alpha + 2\alpha_1) Y_1, \\ d(Y_{2k}) &= \beta_k Y_{2k}, & 1 \leq k \leq r, \\ d(Y_{2k+1}) &= (\alpha + \alpha_2 - \beta_k) Y_{2k+1}, & 1 \leq k \leq r, \\ d(Y_{n-7}) &= \alpha Y_{n-7}, \\ d(Y_{n-6}) &= (\alpha - \alpha_1 + \alpha_2) Y_{n-6}. \end{cases}$$

que determina la siguiente graduación para el álgebra:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{4,r}_{2r+9,1,1} = \; & \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_2-\beta_r} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_2-\beta_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+2\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha+\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \\ & \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_2} \oplus \{0\} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha-\alpha_1+\alpha_2} \oplus \{0\} \oplus \mathfrak{g}_{\beta_1} \oplus \mathfrak{g}_{\beta_2} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{\beta_r} \end{aligned}$$

<u>*Diferencias*</u>

Se consideran a continuación todas las posibles diferencias de los parámetros a fin de determinar una base del conjunto de las derivaciones de $\mathfrak{g}^{4,r}_{2r+9,1,1}$, de forma análoga a los casos anteriores. Para más detalles ver apéndice E.7 $\square$

Nota : Se verifica que

$$\begin{aligned} &Ad(X_0) = t_{1,2} + t_{2,3} + t_{4,5}, && Ad(X_1) = -t_{0,2} + u_{2,1} + v_{n-6,5} \\ &Ad(X_2) = -t_{0,3} - u_{1,1}, && Ad(U_1) = -t_{0,5} + v_{n-7,5}, \\ &Ad(Y_{2k}) = v_{2k+1,5}, && Ad(Y_{2k+1}) = -v_{2k,5}, \\ &Ad(Y_{n-7}) = -t_{4,5} && Ad(Y_{n-6}) = -t_{1,5}. \end{aligned}$$

Teorema 4.22 *Una base de $Der(\mathfrak{g}^{4,r}_{n,1,1})$, viene dada por*

$$\mathcal{B}^{4,r}_{n,1,1} = \mathcal{B}^{4,r}_{2r+9,1,1} \cup \{u_{0,j},\ u_{1,j},\ u_{4,j},\ 2r+2 \leq j \leq n-9\} \cup$$

$$\begin{aligned} &\cup \quad \{v_{j,3},\ v_{j,5},\ w_{j,1},\ 2r+2 \leq j \leq n-9\} \\ &\cup \quad \{w_{i,j} : 2 \leq i \leq n-6,\ 2r+2 \leq j \leq n-9\} \end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^{4,r}_{n,1,1})) = n(n-2r-10) + 3r^2 + 14r + 37$$

Demostración. Análoga a las anteriores. □

Derivaciones de $\mathfrak{g}^{5,r}_{n,1,1}$, $0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor$

$$\mathfrak{g}^{5,r}_{n,1,1} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_0, U_1] = U_2, & \\ [X_1, U_1] = Y_1, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = X_3, & 1 \leq k \leq r. \end{cases} \qquad 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor$$

Evidentemente, si $n > 2r+7$, estas álgebras son escindidas y, por tanto,

$$\mathfrak{g}^{5,r}_{n,1,1} = \mathfrak{g}^{5,r}_{2r+7,1,1} \oplus \mathbf{C}^{n-2r-7},\ 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor \implies$$

$$Der(\mathfrak{g}^{5,r}_{n,1,1}) = Der(\mathfrak{g}^{5,r}_{2r+7,1,1}) \oplus Der(\mathbf{C}^{n-2r-7}) \oplus \mathcal{D}(\mathfrak{g}^{5,r}_{2r+7,1,1}, \mathbf{C}^{n-2r-7}) \oplus \mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-2r-7}, \mathfrak{g}^{5,r}_{2r+7,1,1})$$

Proposición 4.23 *Una base de $Der(\mathfrak{g}^{5,r}_{2r+7,1,1})$, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{5,r}_{2r+7,1,1} = \ & \{t^{4,r}_{0,0},\ t^5_{0,1},\ t^3_{0,2},\ t_{0,3},\ t^3_{0,4},\ t_{0,5},\ u_{0,1}\} \cup \{u^4_{0,j},\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \\ & \{t^{1,r}_{1,1},\ t_{1,2},\ t_{1,3},\ t^1_{1,4},\ t_{1,5},\ u_{1,1},\ t^1_{4,1},\ t^2_{4,2},\ t_{4,3},\ t^2_{4,4},\ t_{4,5},\ u_{4,1}\} \cup \\ & \{v_{j,3},\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \{v_{j,5},\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \\ & w_{j,1},\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \{w_{2k,2k+1},\ 1 \leq k \leq r\} \cup \\ & \{w_{2k+1,2k},\ 1 \leq k \leq r\} \cup \{w^1_{2k,2j},\ 1 \leq k,j \leq r\} \cup \\ & \{w^1_{2k,2j+1},\ 1 \leq k,j \leq r\} \cup \{w^1_{2k+1,2j},\ 1 \leq k,j \leq r\} \end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim Der(\mathfrak{g}^{5,r}_{2r+7,1,1}) = 3r^2 + 8r + 19$$

Demostración. Es trivial probar que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}^{5,r}_{2r+7,1,1}$. Se va a probar que no hay otras.
Se considera la siguiente graduación del álgebra

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g}^{5,r}_{2r+7,1,1} & = & \langle Y_{2r+1}\rangle\oplus \dots \oplus\langle Y_3\rangle\oplus\{0\}\oplus\{0\}\oplus\{0\}\oplus\{0\} \quad \oplus \quad \langle X_0\rangle\oplus\langle X_1\rangle\oplus\langle X_2\rangle\oplus\langle X_3\rangle \\ & & \mathfrak{g}_{-r-2}\oplus\dots\oplus\mathfrak{g}_{-4}\oplus\mathfrak{g}_{-3}\oplus\mathfrak{g}_{-2}\oplus\mathfrak{g}_{-1}\oplus\ \mathfrak{g}_0 \quad \oplus \quad \mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\mathfrak{g}_3\oplus\mathfrak{g}_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \oplus\langle U_1\rangle\oplus\langle U_2\rangle\oplus\langle Y_1\rangle\oplus\langle Y_2\rangle\oplus\dots\oplus\langle Y_{2r}\rangle \\ \oplus\ \mathfrak{g}_5\oplus\mathfrak{g}_6\oplus\mathfrak{g}_7\oplus\mathfrak{g}_8\oplus\dots\oplus\mathfrak{g}_{6+r} \end{array}$$

Cálculo de d_0

Sea

$$\left| \begin{array}{ll} d_0(X_i)=a_iX_i, & 0\le i\le 3, \\ d_0(U_i)=b_iU_i, & 1\le i\le 2, \\ d_0(Y_i)=c_iY_i, & 1\le i\le 2r+1. \end{array}\right.$$

Imponiendo que sea derivación se obtiene

$$\begin{array}{ll} a_2 & =a_0+a_1, \\ a_3 & =2a_0+a_1, \\ b_2 & =a_0+b_1, \\ c_1 & =a_1+b_1, \\ c_{2k+1} & =2a_0+a_1-c_{2k}, \quad 1\le k\le r. \end{array}$$

y, por tanto, se tiene el siguiente conjunto de parámetros libres y una base de $B_0^{5,r}$

$$\begin{array}{l} P_0^{5,r} = \{a_0,\ a_1,\ b_1\}\cup\{c_{2k},\ 1\le k\le r\} \\ B_0^{5,r} = \{t^{4,r}_{0,0},\ t^{1,r}_{1,1},\ t^2_{4,4}\}\cup\{w_{2k,2k},\ 1\le k\le r\} \end{array}$$

<u>*Toro de derivaciones*</u>

Se va a considerar, por tanto, el siguiente toro de derivaciones:

$$T: \begin{cases} d(X_0) &= \alpha X_0, \\ d(X_1) &= \alpha_1 X_1, \\ d(X_2) &= (\alpha+\alpha_1)X_2, \\ d(X_3) &= (2\alpha+\alpha_1)X_3, \\ d(U_1) &= \alpha_2 U_1, \\ d(U_2) &= (\alpha+\alpha_2)U_2, \\ d(Y_1) &= (\alpha_1+\alpha_2)Y_1, \\ d(Y_{2k}) &= \beta_k Y_{2k}, & 1 \leq k \leq r, \\ d(Y_{2k+1}) &= (2\alpha+\alpha_1-\beta_k)Y_{2k+1}, & 1 \leq k \leq r. \end{cases}$$

que determina la siguiente graduación para el álgebra:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{5,r}_{2r+7,1,1} = \; & \mathfrak{g}_{2\alpha+\alpha_1-\beta_r} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha+\alpha_1-\beta_1} \oplus \{0\} \oplus \{0\} \oplus \{0\} \oplus \{0\} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \\ & \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha+\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\beta_1} \oplus \mathfrak{g}_{\beta_2} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{\beta_r} \end{aligned}$$

<u>*Diferencias*</u>

Se consideran a continuación todas las posibles diferencias de los parámetros a fin de determinar una base del conjunto de las derivaciones de $\mathfrak{g}^{5,r}_{2r+7,1,1}$, de forma análoga a los casos anteriores. Para más detalles ver apéndice E.8. □

Nota: Se verifica que

$$\begin{array}{ll} Ad(X_0) = t_{1,2} + t_{2,3} + t_{4,5}, & Ad(X_1) = -t_{0,2} + u_{4,1} \\ Ad(X_2) = -t_{0,3}, & Ad(U_1) = -t_{0,5} - u_{1,1}, \\ Ad(Y_{2k}) = v_{2k+1,3}, & Ad(Y_{2k+1}) = -v_{2k,3}. \end{array}$$

Teorema 4.24 *Una base de* $Der(\mathfrak{g}^{5,r}_{n,1,1})$*, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{5,r}_{n,1,1} &= \mathcal{B}^{5,r}_{2r+7,1,1} \cup \{u_{0,j},\ u_{1,j},\ u_{4,j},\ 2r+2 \leq j \leq n-6\} \cup \\ &\cup \ \{v_{j,3},\ v_{j,5},\ w_{j,1},\ 2r+2 \leq j \leq n-6\} \\ &\cup \ \{w_{i,j} : 2 \leq i \leq n-7,\ 2r+2 \leq j \leq n-7\} \end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^{5,r}_{n,1,1})) = n(n-2r-8) + 3r^2 + 10r + 26$$

Demostración. Análoga a las anteriores. □

Derivaciones de $\mathfrak{g}^{6,r}_{n,1,1}$, $0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$

$$\mathfrak{g}^{6,r}_{n,1,1} : \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq 2, \\ [X_0, U_1] &= U_2, \\ [X_1, U_1] &= Y_1, \\ [X_1, Y_{n-6}] &= X_3, \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] &= X_3, \quad 1 \leq k \leq r. \end{cases} \qquad 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$$

Evidentemente, si $n > 2r+8$, estas álgebras son escindidas y, por tanto,

$$\mathfrak{g}^{6,r}_{n,1,1} = \mathfrak{g}^{6,r}_{2r+8,1,1} \oplus \mathbf{C}^{n-2r-8}, \; 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor \implies$$

$$Der(\mathfrak{g}^{6,r}_{n,1,1}) = Der(\mathfrak{g}^{6,r}_{2r+8,1,1}) \oplus Der(\mathbf{C}^{n-2r-8}) \oplus \mathcal{D}(\mathfrak{g}^{6,r}_{2r+8,1,1}, \mathbf{C}^{n-2r-8}) \oplus \mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-2r-8}, \mathfrak{g}^{6,r}_{2r+8,1,1})$$

Proposición 4.25 *Una base de $Der(\mathfrak{g}^{6,r}_{2r+8,1,1})$, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{6,r}_{2r+8,1,1} = \; & \{t^{5,r}_{0,0},\ t^{6}_{0,1},\ t^{3}_{0,2},\ t_{0,3},\ t^{3}_{0,4},\ t_{0,5},\ u_{0,1},\ u^{3}_{0,n-6}\} \cup \\ & \{u^{4}_{0,j},\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \{t^{4}_{1,0},\ t^{1,r}_{1,1},\ t_{1,2},\ t_{1,3},\ t^{1}_{1,4},\ t_{1,5}\} \cup \\ & \{u_{1,1},\ u^{1}_{1,n-6},\ u^{1}_{1,j},\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \\ & \{t^{2}_{4,2},\ t_{4,3},\ t^{2}_{4,4},\ t_{4,5},\ u_{4,1},\ u^{1}_{4,n-6}\} \cup \{v_{j,3},\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \\ & \{v_{j,5},\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \{w_{j,1},\ 2 \leq j \leq 2r+1\} \cup \\ & \{w_{2k,2k+1},\ 1 \leq k \leq r\} \cup \{w_{2k+1,2k},\ 1 \leq k \leq r\} \cup \\ & \{w^{1}_{2k,2j},\ 1 \leq k,j \leq r\} \cup \{w^{1}_{2k,2j+1},\ 1 \leq k,j \leq r\} \cup \\ & \{w^{1}_{2k+1,2j},\ 1 \leq k,j \leq r.\} \cup \{v_{n-6,3},\ v_{n-6,5},\ w_{n-6,1}\} \end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim Der(\mathfrak{g}^{6,r}_{2r+8,1,1}) = 3r^2 + 10r + 25$$

BIBLIOTECA

Demostración. Es trivial probar que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}^{6,r}_{2r+8,1,1}$. Se va a probar que no hay otras.

Se considera la siguiente graduación del álgebra:

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^{6,r}_{2r+8,1,1} = & \langle Y_{2r+1}\rangle\oplus \dots \oplus\langle Y_3\rangle\oplus \{0\} \oplus\langle Y_{n-6}\rangle\oplus\langle X_0\rangle\oplus\langle U_2\rangle\oplus \langle U_1\rangle \oplus \\ & \mathfrak{g}_{-r-3} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{-4} \oplus \mathfrak{g}_{-3} \oplus \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \\ & \oplus\langle X_3\rangle\oplus\langle X_2\rangle\oplus\langle X_1\rangle\oplus \langle Y_1\rangle \oplus\langle Y_2\rangle\oplus \dots \oplus\langle Y_{2r}\rangle \\ & \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3 \oplus \mathfrak{g}_4 \oplus \mathfrak{g}_5 \oplus \mathfrak{g}_6 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{5+r}\end{aligned}$$

<u>*Cálculo de d_0*</u>

Sea

$$\left| \begin{array}{ll} d_0(X_i)=a_iX_i, & 0 \le i \le 3, \\ d_0(U_i)=b_iU_i, & 1 \le i \le 2, \\ d_0(Y_i)=c_iY_i, & 1 \le i \le 2r+1,\ i=n-6. \end{array} \right.$$

Imponiendo que sea derivación se obtiene

$$\begin{aligned} a_2 &= a_0 + a_1, \\ a_3 &= 2a_0 + a_1, \\ b_2 &= a_0 + b_1, \\ c_1 &= a_1 + b_1, \\ c_{2k+1} &= 2a_0 + a_1 - c_{2k}, \quad 1 \le k \le r, \\ c_{n-6} &= 2a_0. \end{aligned}$$

y, por tanto, se tiene el siguiente conjunto de parámetros libres y una base de $B_0^{6,r}$

$$P_0^{6,r} = \{a_0,\ a_1,\ b_1\} \cup \{c_{2k},\ 1 \le k \le r\}$$
$$\mathcal{B}_0^{6,r} = \{t^{5,r}_{0,0},\ t^{1,r}_{1,1},\ t^2_{4,4}\} \cup \{w_{2k,2k},\ 1 \le k \le r\}$$

Toro de derivaciones

Se va a considerar, por tanto, el siguiente toro de derivaciones:

$$T: \begin{cases} d(X_0) &= \alpha X_0, \\ d(X_1) &= \alpha_1 X_1, \\ d(X_2) &= (\alpha+\alpha_1) X_2, \\ d(X_3) &= (2\alpha+\alpha_1) X_3, \\ d(U_1) &= \alpha_2 U_1, \\ d(U_2) &= (\alpha+\alpha_2) U_2, \\ d(Y_1) &= (\alpha_1+\alpha_2) Y_1, \\ d(Y_{2k}) &= \beta_k Y_{2k}, & 1 \leq k \leq r, \\ d(Y_{2k+1}) &= (2\alpha+\alpha_1-\beta_k) Y_{2k+1}, & 1 \leq k \leq r, \\ d(Y_{n-6}) &= (2\alpha) Y_{n-6}. \end{cases}$$

que determina la siguiente graduación para el álgebra:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{6,r}_{2r+8,1,1} \;=\;& \mathfrak{g}_{2\alpha+\alpha_1-\beta_r} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha+\alpha_1-\beta_1} \oplus \{0\} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha+\alpha_1} \oplus \\ & \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\beta_1} \oplus \mathfrak{g}_{\beta_2} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{\beta_r} \end{aligned}$$

Diferencias

Se consideran a continuación todas las posibles diferencias de los parámetros a fin de determinar una base del conjunto de las derivaciones de $\mathfrak{g}^{6,r}_{2r+8,1,1}$, de forma análoga a los casos anteriores. Para más detalles ver apéndice E.9 $\square$

Nota: Se verifica que

$$\begin{aligned} Ad(X_0) &= t_{1,2} + t_{2,3} + t_{4,5}, & Ad(X_1) &= -t_{0,2} + u_{4,1} + v_{n-6,3} \\ Ad(X_2) &= -t_{0,3}, & Ad(U_1) &= -t_{0,5} - u_{1,1}, \\ Ad(Y_{2k}) &= v_{2k+1,3}, & Ad(Y_{2k+1}) &= -v_{2k,3}, \\ Ad(Y_{n-6}) &= -t_{1,3}. \end{aligned}$$

Teorema 4.26 *Una base de* $Der(\mathfrak{g}^{6,r}_{n,1,1})$, *viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{6,r}_{n,1,1} \;=\;& \mathcal{B}^{6,r}_{2r+8,1,1} \cup \{u_{0,j},\ u_{1,j},\ u_{4,j},\ 2r+2 \leq j \leq n-8\} \cup \\ \cup\;& \{v_{j,3},\ v_{j,5},\ w_{j,1},\ 2r+2 \leq j \leq n-8\} \\ \cup\;& \{w_{i,j} : 2 \leq i \leq n-6,\ 2r+2 \leq j \leq n-8\} \end{aligned}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

y su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}_{n,1,1}^{6,r})) = n(n-2r-9) + 3r^2 + 12r + 34$$

Demostración. Análoga a las anteriores. □

Derivaciones de $\mathfrak{g}_{n,1,1}^{7,r}$, $0 \le r \le \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$

$$\mathfrak{g}_{n,1,1}^{7,r} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le 2, \\ [X_0, U_1] = U_2, & \\ [X_1, U_1] = Y_1, & \\ [U_1, Y_{n-6}] = X_3, & \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] = X_3, & 1 \le k \le r. \end{cases} \qquad 0 \le r \le \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor$$

Evidentemente, si $n > 2r+8$, estas álgebras son escindidas y, por tanto,

$$\mathfrak{g}_{n,1,1}^{7,r} = \mathfrak{g}_{2r+8,1,1}^{7,r} \oplus \mathbf{C}^{n-2r-8},\ 0 \le r \le \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor \Longrightarrow$$

$$Der(\mathfrak{g}_{n,1,1}^{7,r}) = Der(\mathfrak{g}_{2r+8,1,1}^{7,r}) \oplus Der(\mathbf{C}^{n-2r-8}) \oplus \mathcal{D}(\mathfrak{g}_{2r+8,1,1}^{7,r}, \mathbf{C}^{n-2r-8}) \oplus \mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-2r-8}, \mathfrak{g}_{2r+8,1,1}^{7,r})$$

Proposición 4.27 *Una base de $Der(\mathfrak{g}_{2r+8,1,1}^{7,r})$, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{2r+8,1,1}^{7,r} = & \{t_{0,0}^{5,r},\ t_{0,1}^{5},\ t_{0,2}^{3},\ t_{0,3},\ t_{0,4}^{7},\ t_{0,5},\ u_{0,1},\ u_{0,n-6}^{4}\} \cup \\ & \{u_{0,j}^{4},\ 2 \le j \le 2r+1\} \cup t_{1,1}^{2,r},\ t_{1,2},\ t_{1,3},\ t_{1,4}^{1},\ t_{1,5}\} \cup \\ & \{u_{1,1},\ u_{1,n-6}^{2}\} \cup \{t_{4,1}^{1},\ t_{4,2}^{2},\ t_{4,3},\ t_{4,4}^{2},\ t_{4,5},\ u_{4,1},\ u_{4,n-6}^{1}\} \cup \\ & \{u_{4,j}^{1},\ 2 \le j \le 2r+1\} \cup \{v_{j,3},\ 2 \le j \le 2r+1\} \cup \\ & \{v_{j,5},\ 2 \le j \le 2r+1\} \cup \{w_{j,1},\ 2 \le j \le 2r+1\} \cup \\ & \{w_{2k,2k+1},\ 1 \le k \le r\} \cup \{w_{2k+1,2k},\ 1 \le k \le r\} \cup \\ & \{w_{2k,2j}^{1},\ 1 \le k,j \le r\} \cup \{w_{2k,2j+1}^{1},\ 1 \le k,j \le r\} \cup \\ & \{w_{2k+1,2j}^{1},\ 1 \le k,j \le r\} \cup \{v_{n-6,3},\ v_{n-6,5},\ w_{n-6,1}\} \end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim Der(\mathfrak{g}_{2r+8,1,1}^{7,r}) = 3r^2 + 10r + 24$$

Demostración. Es trivial probar que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}^{7,r}_{2r+8,1,1}$. Se va a probar que no hay otras.
Se considera la siguiente graduación del álgebra:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g}^{7,r}_{2r+8,1,1} & = & \langle Y_{2r+1}\rangle \oplus \ldots \oplus \langle Y_3\rangle \oplus \langle U_1\rangle \oplus \langle U_2\rangle \oplus \langle X_0\rangle \oplus \langle Y_1\rangle \oplus \langle X_1\rangle \oplus \langle X_2\rangle \oplus \\ & & \mathfrak{g}_{-r-1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3 \oplus \mathfrak{g}_4 \oplus \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \oplus \langle X_3\rangle \oplus \langle Y_{n-6}\rangle \oplus \langle Y_2\rangle \oplus \ldots \oplus \langle Y_{2r}\rangle \\ \oplus\ \mathfrak{g}_5 \oplus \mathfrak{g}_6 \oplus \mathfrak{g}_7 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{6+r} \end{array}$$

Cálculo de d_0

Sea

$$\left| \begin{array}{ll} d_0(X_i) = a_i X_i, & 0 \le i \le 3, \\ d_0(U_i) = b_i U_i, & 1 \le i \le 2, \\ d_0(Y_i) = c_i Y_i, & 1 \le i \le 2r+1,\ i = n-6. \end{array} \right.$$

Imponiendo que sea derivación se obtiene

$$\begin{array}{ll} a_2 & = a_0 + a_1, \\ a_3 & = 2a_0 + a_1, \\ b_2 & = a_0 + b_1, \\ c_1 & = a_1 + b_1, \\ c_{2k+1} & = 2a_0 + a_1 - c_{2k}, \quad 1 \le k \le r, \\ c_{n-6} & = 2a_0 + a_1 - b_1. \end{array}$$

y, por tanto, se tiene el siguiente conjunto de parámetros libres y una base de $B^{7,r}_0$

$$\begin{array}{l} P^{7,r}_0 = \{a_0,\ a_1,\ b_1\} \cup \{c_{2k},\ 1 \le k \le r\} \\ \mathcal{B}^{7,r}_0 = \{t^{5,r}_{0,0},\ t^{2,r}_{1,1},\ t^3_{4,4}\} \cup \{w_{2k,2k},\ 1 \le k \le r\} \end{array}$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR INGENIERIA INFORMATICA BIBLIOTECA

Toro de derivaciones

Se va a considerar, por tanto, el siguiente toro de derivaciones:

$$T:\begin{cases} d(X_0) &= \alpha X_0, \\ d(X_1) &= \alpha_1 X_1, \\ d(X_2) &= (\alpha+\alpha_1)X_2, \\ d(X_3) &= (2\alpha+\alpha_1)X_3, \\ d(U_1) &= \alpha_2 U_1, \\ d(U_2) &= (\alpha+\alpha_2)U_2, \\ d(Y_1) &= (\alpha_1+\alpha_2)Y_1, \\ d(Y_{2k}) &= \beta_k Y_{2k}, & 1\le k\le r, \\ d(Y_{2k+1}) &= (2\alpha+\alpha_1-\beta_k)Y_{2k+1}, & 1\le k\le r, \\ d(Y_{n-6}) &= (2\alpha+\alpha_1-\alpha_2)Y_{n-6}. \end{cases}$$

que determina la siguiente graduación para el álgebra:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{7,r}_{2r+8,1,1} = {} & \mathfrak{g}_{2\alpha+\alpha_1-\beta_r}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_{2\alpha+\alpha_1-\beta_1}\oplus\alpha_2\oplus\mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_2}\oplus\mathfrak{g}_{\alpha}\oplus\mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}\oplus\mathfrak{g}_{\alpha_1}\oplus \\ & \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_1}\oplus\mathfrak{g}_{2\alpha+\alpha_1}\oplus\mathfrak{g}_{2\alpha+\alpha_1-\alpha_2}\oplus\mathfrak{g}_{\beta_1}\oplus\mathfrak{g}_{\beta_2}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_{\beta_r} \end{aligned}$$

Diferencias

Se consideran a continuación todas las posibles diferencias de los parámetros a fin de determinar una base del conjunto de las derivaciones de $\mathfrak{g}^{7,r}_{2r+8,1,1}$, de forma análoga a los casos anteriores. Para más detalles ver apéndice E.10 $\square$

Nota : Se verifica que

$$\begin{array}{ll} Ad(X_0) = t_{1,2}+t_{2,3}+t_{4,5}, & Ad(X_1) = -t_{0,2}+u_{4,1} \\ Ad(X_2) = -t_{0,3}, & Ad(U_1) = -t_{0,5}-u_{1,1}+v_{n-6,3}, \\ Ad(Y_{2k}) = v_{2k+1,5}, & Ad(Y_{2k+1}) = -v_{2k,5}, \\ Ad(Y_{n-6}) = -t_{4,3}. & \end{array}$$

Teorema 4.28 *Una base de* $Der(\mathfrak{g}^{7,r}_{n,1,1})$*, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{7,r}_{n,1,1} &= \mathcal{B}^{7,r}_{2r+8,1,1}\cup\{u_{0,j},\ u_{1,j},\ u_{4,j},\ 2r+2\le j\le n-8\}\cup \\ &\cup\ \{v_{j,3},\ v_{j,5},\ w_{j,1},\ 2r+2\le j\le n-8\} \\ &\cup\ \{w_{i,j}:2\le i\le n-6,\ 2r+2\le j\le n-8\} \end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^{3,r}_{n,1,1})) = n(n-2r-9) + 3r^2 + 12r + 32$$

Demostración. Análoga a las anteriores. □

$\boxed{\textbf{Derivaciones de } \mathfrak{g}^{8,r}_{n,1,1},\ 0 \le r \le \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor}$

$$\mathfrak{g}^{8,r}_{n,1,1} : \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, \quad 1 \le i \le 2, \\ [X_0, U_1] &= U_2, \\ [X_1, U_1] &= Y_1, \\ [X_1, Y_{n-7}] &= X_3, \\ [U_1, Y_{n-6}] &= X_3, \\ [Y_{2k}, Y_{2k+1}] &= X_3, \quad 1 \le k \le r. \end{cases} \qquad 0 \le r \le \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor$$

Evidentemente, si $n > 2r + 9$, estas álgebras son escindidas y, por tanto,

$$\mathfrak{g}^{8,r}_{n,1,1} = \mathfrak{g}^{8,r}_{n,1,1} \oplus \mathbf{C}^{n-2r-9},\ 0 \le r \le \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor \Longrightarrow$$

$$Der(\mathfrak{g}^{8,r}_{n,1,1}) = Der(\mathfrak{g}^{8,r}_{2r+9,1,1}) \oplus Der(\mathbf{C}^{n-2r-9}) \oplus \mathcal{D}(\mathfrak{g}^{8,r}_{2r+9,1,1}, \mathbf{C}^{n-2r-9}) \oplus \mathcal{D}(\mathbf{C}^{n-2r-9}, \mathfrak{g}^{8,r}_{2r+9,1,1})$$

Proposición 4.29 *Una base de $Der(\mathfrak{g}^{8,r}_{2r+9,1,1})$, viene dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{8,r}_{2r+9,1,1} = &\{t^{6,r}_{0,0},\ t^7_{0,1},\ t^3_{0,2},\ t_{0,3},\ t^7_{0,4},\ t_{0,5},\ u_{0,1},\ u^4_{0,n-6}\} \cup \\ &\{u^4_{0,j},\ 2 \le j \le 2r+1\} \cup \{t^5_{1,0},\ t^{2,r}_{1,1},\ t_{1,2},\ t_{1,3},\ t^3_{1,4},\ t_{1,5}\} \cup \\ &\{u_{1,1},\ u_{1,n-7},\ u^2_{1,n-6}\} \cup \{u^2_{1,j},\ 2 \le j \le 2r+1\} \cup \\ &\{t^2_{4,1},\ t^2_{4,2},\ t_{4,3},\ t^3_{4,4},\ t_{4,5},\ u_{4,1},\ u^1_{4,n-6}\} \cup \\ &\{u^1_{4,j},\ 2 \le j \le 2r+1\} \cup \{v_{j,3},\ 2 \le j \le 2r+1\} \cup \\ &\{v_{j,5},\ 2 \le j \le 2r+1\} \cup \{w_{j,1},\ 2 \le j \le 2r+1\} \cup \\ &\{w_{2k,2k+1},\ 1 \le k \le r\} \cup \{w_{2k+1,2k},\ 1 \le k \le r\} \cup \\ &\{w^1_{2k,2j},\ 1 \le k,j \le r\} \cup \{w^1_{2k,2j+1},\ 1 \le k,j \le r,\ k \ne j\} \cup \\ &\{w^1_{2k+1,2j},\ 1 \le k,j \le r,\ k \ne j\} \cup \{v_{n-7,3},\ v_{n-7,5},\ w_{n-7,1}\} \cup \\ &\{v_{n-6,3},\ v_{n-6,5},\ w_{n-6,1}\} \end{aligned}$$

y su dimensión es

$$\dim Der(\mathfrak{g}^{8,r}_{2r+9,1,1}) = 3r^2 + 12r + 31$$

Demostración. Es trivial probar que todos los endomorfismos indicados son derivaciones de $\mathfrak{g}^{8,r}_{2r+9,1,1}$. Se va a probar que no hay otras.
Se considera la siguiente graduación del álgebra

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g}^{8,r}_{2r+9,1,1} & = & \langle Y_{2r+1}\rangle \oplus \ldots \oplus \langle Y_3\rangle \oplus \langle U_1\rangle \oplus \langle U_2\rangle \oplus \langle X_0\rangle \oplus \langle Y_{n-7}\rangle \oplus \langle Y_1\rangle \oplus \langle X_1\rangle \oplus \langle X_2\rangle \\ & & \mathfrak{g}_{-r-1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3 \oplus \mathfrak{g}_4 \oplus \mathfrak{g}_5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \oplus \langle X_3\rangle \oplus \langle Y_{n-6}\rangle \oplus \langle Y_2\rangle \oplus \ldots \oplus \langle Y_{2r}\rangle \\ \oplus\ \mathfrak{g}_6 \oplus \mathfrak{g}_7 \oplus \mathfrak{g}_8 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{7+r} \end{array}$$

Cálculo de d_0

Sea

$$\left| \begin{array}{ll} d_0(X_i)=a_iX_i, & 0 \le i \le 3, \\ d_0(U_i)=b_iU_i, & 1 \le i \le 2, \\ d_0(Y_i)=c_iY_i, & 1 \le i \le 2r+1,\ i=n-7,\ n-6. \end{array} \right.$$

Imponiendo que sea derivación se obtiene

$$\begin{array}{ll} a_2 & =a_0 + a_1, \\ a_3 & =2a_0 + a_1, \\ b_2 & =a_0 + b_1, \\ c_1 & =a_1 + b_1, \\ c_{2k+1} & =2a_0 + a_1 - c_{2k}, \quad 1 \le k \le r, \\ c_{n-7} & =2a_0, \\ c_{n-6} & =2a_0 + a_1 - b_1. \end{array}$$

y, por tanto, se tiene el siguiente conjunto de parámetros libres y una base de $B_0^{8,r}$

$$\begin{array}{l} P_0^{8,r} = \{a_0,\ a_1,\ b_1\} \cup \{c_{2k},\ 1 \le k \le r\} \\ B_0^{8,r} = \{t^{6,r}_{0,0},\ t^{2,r}_{1,1},\ t^3_{4,4}\} \cup \{w_{2k,2k},\ 1 \le k \le r\} \end{array}$$

Toro de derivaciones

Se va a considerar, por tanto, el siguiente toro de derivaciones:

$$T : \begin{cases} d(X_0) &= \alpha X_0, \\ d(X_1) &= \alpha_1 X_1, \\ d(X_2) &= (\alpha + \alpha_1) X_2, \\ d(X_3) &= (2\alpha + \alpha_1) X_3, \\ d(U_1) &= \alpha_2 U_1, \\ d(U_2) &= (\alpha + \alpha_2) U_2, \\ d(Y_1) &= (\alpha_1 + \alpha_2) Y_1, \\ d(Y_{2k}) &= \beta_k Y_{2k}, \qquad 1 \leq k \leq r, \\ d(Y_{2k+1}) &= (2\alpha + \alpha_1 - \beta_k) Y_{2k+1}, \quad 1 \leq k \leq r, \\ d(Y_{n-7}) &= 2\alpha Y_{n-7}, \\ d(Y_{n-6}) &= (2\alpha + \alpha_1 - \alpha_2) Y_{n-6}. \end{cases}$$

que determina la siguiente graduación para el álgebra:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{8,r}_{2r+9,1,1} \quad = \quad & \mathfrak{g}_{2\alpha+\alpha_1-\beta_r} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha+\alpha_1-\beta_1} \oplus \alpha_2 \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2} \oplus \\ & \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha+\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha+\alpha_1-\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\beta_1} \oplus \mathfrak{g}_{\beta_2} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{\beta_r} \end{aligned}$$

Diferencias

Se consideran a continuación todas las posibles diferencias de los parámetros a fin de determinar una base del conjunto de las derivaciones de $\mathfrak{g}^{8,r}_{2r+9,1,1}$, de forma análoga a los casos anteriores. Para más detalles ver apéndice E.11 $\square$

Nota : Se verifica que

$$\begin{aligned} Ad(X_0) &= t_{1,2} + t_{2,3} + t_{4,5}, & Ad(X_1) &= -t_{0,2} + u_{4,1} \\ Ad(X_2) &= -t_{0,3}, & Ad(U_1) &= -t_{0,5} - u_{1,1} + v_{n-6,3}, \\ Ad(Y_{2k}) &= v_{2k+1,3}, & Ad(Y_{2k+1}) &= -v_{2k,3}, \\ Ad(Y_{n-7}) &= -t_{1,3} & Ad(Y_{n-6}) &= -t_{4,3}. \end{aligned}$$

Teorema 4.30 *Una base de* $Der(\mathfrak{g}^{8,r}_{n,1,1})$, *viene dada por*

$$\mathcal{B}^{8,r}_{n,1,1} \quad = \quad \mathcal{B}^{8,r}_{2r+8,1,1} \cup \{u_{0,j},\ u_{1,j},\ u_{4,j},\ 2r+2 \leq j \leq n-8\} \cup$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERÍA INFORMÁTICA BIBLIOTECA

$$\cup \quad \{v_{j,3},\ v_{j,5},\ w_{j,1},\ 2r+2 \leq j \leq n-8\}$$
$$\cup \quad \{w_{i,j} : 2 \leq i \leq n-6,\ 2r+2 \leq j \leq n-8\}$$

y su dimensión es

$$\dim(Der(\mathfrak{g}^{8,r}_{n,1,1})) = n(n-2r-10) + 3r^2 + 14r + 40$$

Demostración. Análoga a las anteriores. □

Bibliografía

[1] J.M. Ancochea and M. Goze. *Sur la classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7.* C. R. Acad. Sci. París, 302:611–613, 1986.

[2] J.M. Ancochea and M. Goze. Classification des algèbres de lie filiformes de dimension 8. *Archiv Math.*, 50:511–525, 1988.

[3] J.M. Ancochea and M. Goze. *Classification des algèbres de Lie nilpotentes complexes de dimension 7.* Archiv. Math., 52:2:175–185, 1989.

[4] G.G.A. Baüerle and E.A. de Kerf. *Lie Algebras. Part 1.* Studies in Mathematical Physics I. Elsevier, 1990.

[5] J.M. Cabezas. *Una generalización de las álgebras de Lie filiformes.* PhD thesis, Universidad de Sevilla, 1996.

[6] J.M. Cabezas, L.M. Camacho, J.R. Gómez and R.M. Navarro. *A class of nilpotent Lie algebras.* Aceptado para su publicación en Communications in Algebra, 2000.

[7] J.M. Cabezas, J.R. Gómez and A. Jiménez-Merchán. *Family of p-filiform Lie algebras.* Algebra and Operator Theory, Kluwer Ac. Pub., 93-102,, 1998.

[8] L.M. Camacho, J.R. Gómez and R.M. Navarro. *Algebra of derivations of* $(n-3)$*-filiform Lie algebras.* ILAS'99 Meeting, Barcelona, Julio, 1999.

[9] Y. Chow. *General theory of Lie algebras (vol. 1 y 2).* Gordon and Breach, 1978.

[10] J. Dixmier. *Sur les représentationes unitaires des groupes de Lie nilpotentes III. Canadian J. Math.*, 10:321–348, 1958.

[11] J.R. Gómez and F.J. Echarte. Classification of complex filiform lie algebras of dimension 9. *Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari*, 61:1:21–29, 1991.

[12] J.R. Gómez, M. Goze and Y. Khakimdjanov. *On the k-abelian filiform Lie algebras.* Communications in Algebra, 25(2):431–450, 1997.

[13] J.R. Gómez, A. Jiménez-Merchán and Y. Khakimdjanov. *On the Variety of Nilpotent Lie Algebras Laws of Dimension 11.* Rendiconti Cagliari, 66:137–142, 1996.

[14] M. Goze and Y. Khakimdjanov. *Sur les algèbres de Lie nilpotentes admettant un tore de derivations.* Manuscripta Math., 84:115–224, 1994.

[15] M. Goze and Y. Khakimdjanov. *Nilpotent Lie Algebras.* Kluwer Academic Publishers, 1996.

[16] J.E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* Springer-Verlag. Graduate Texts in Mathematics 9, 1987.

[17] N. Jacobson. *Lie Algebras.* Dover Publications, Inc. New York, 1979.

[18] J. Reyes J.R. Gómez, A. Jiménez-Merchán. *Quasi filiform Lie algebras of maximun length.* Enviado para su publicación a Linear algebra and its applications.

[19] J. Reyes J.R. Gómez, A. Jiménez-Merchán. *Bases homogéneas de álgebras de Lie casifiliformes.* Meeting on Matrix Analysis and Applications, Sevilla, pages 252–259, 1997.

[20] J.L. Koszul. *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie. Bull. de la Société Mathématique de France*, 78:65–127, 1950.

[21] V.V. Morosov. *Clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 6 (en ruso en el original). Isvestia Vys. Ucheb. Zav.*, 4:161–171, 1958.

[22] M. Romdhani. *Classification of real and complex nilpotent Lie algebras of dimension 7.* Linear and multilinear alg., 24:167–189, 1989.

[23] D.H. Sattinger and O.L. Weaver. *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics.* Springer-Verlag New York Inc., 1986.

[24] K.A. Umlauf. *Tber die Zusammensetzung der endlichen continuienlichen transformationsgruppen insbesondqre der gruppen von range null.* PhD thesis, Leipzig, 1891.

[25] V.S. Varadarajan. *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations.* Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, 102, 1984.

[26] M. Vergne. *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application a l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes. Bull. Soc. Math. France*, 98:81–116, 1970.

BIBLIOTECA

Isabel Mª Rodriguez Garcia

~~[illegible]~~ Algebras de Lie con invariante de Goze dado.

Sobresaliente cum laude

2 Febrero 2000