



ANÁLISIS NUMÉRICO DE PROBLEMAS TRIDIMENSIONALES DE MECANICA DE LA FRACTURA

M.P. Ariza, A. Sáez y J. Dorrúnguez
Escuela Superior de Ingenieros.
Universidad de Sevilla.
Av. Reina Mercedes s/n
41012-Sevilla

Resumen

El Método de los Elementos de Contorno se ha revelado en los últimos quince años como una de las herramientas más eficaces (quizás la que más) para la resolución de problemas de Mecánica de la Fractura Elástica Lineal. Se presenta aquí un elemento de contorno singular con nodo a un cuarto que permite evaluar de manera muy sencilla y precisa Factores de Intensidad de Tensión en problemas tridimensionales de Mecánica de la Fractura. Para poder formular este elemento se ha desarrollado un procedimiento específico de integración que evita de una manera natural las singularidades de los núcleos de integración resultando muy sencillo y fiable el proceso de evaluación numérica de las integrales. Se han resuelto varios problemas tridimensionales a modo de ejemplo y se comprueba que los valores de los Factores de Intensidad de Tensión calculados son muy precisos.

1 Introducción

Los problemas de Mecánica... de la Fractura han recibido una gran atención dentro de la ingeniería mecánica en los últimos cincuenta años. Esto se debió primero a la aparición de algunos fallos catastróficos como consecuencia de la propagación de grietas y más recientemente a la necesidad de evaluar la progresión del daño interno de los materiales para poder garantizar una vida segura lo más prolongada posible. La evaluación de los Factores de Intensidad de Tensión (FIT) en cada situación es de primordial importancia dado que este parámetro es el mejor y más extendido indicador de un posible fallo.

Existe un número muy limitado de situaciones en las que se puede obtener la solución del problema de Mecánica de la Fractura por procedimientos analíticos. Por ello se han desarrollado y extendido los métodos numéricos para los estudios de este tipo de problemas. En primer lugar el Método de los Elementos Finitos (MEF) y más recientemente el Método de los Elementos de Contorno (MEC). Dentro del MEF se desarrollaron diversas técnicas y en concreto es de gran importancia la introducción de elementos degenerados con nodo a un cuarto para el cálculo de FIT. Barsoum (1976) lo formuló para problemas bidimensionales, y luego Ingraffea y Manu (1980) para el caso tridimensional. Inmediatamente aparece el MEC como alternativa para el análisis de problemas de Mecánica de la Fractura y es Cruse (1978) quien aborda el problema en más ocasiones. Blandford et al. (1981) desarrollan el elemento de contorno con nodo a un cuarto para el cálculo de FIT haciendo uso de las ideas del MEF junto con la formulación tradicional del MEC y de una técnica de subdominios que permite salvar la dificultad de un contorno, el de la grieta, que se pliega sobre si mismo. Martínez y Doroínguez (1984) haciendo uso de este elemento a un cuarto proponen una nueva forma de obtener el FIT directamente como una incógnita del problema de contorno. En los últimos años se han presentado diversos estudios en los que haciendo uso de la

formulación hipersingular del MEC se evita el uso de subdominios y se calculan los FIT de forma precisa. Deben recordarse aquí los de Portela et al. (1992) y Sáez et al. (1995).

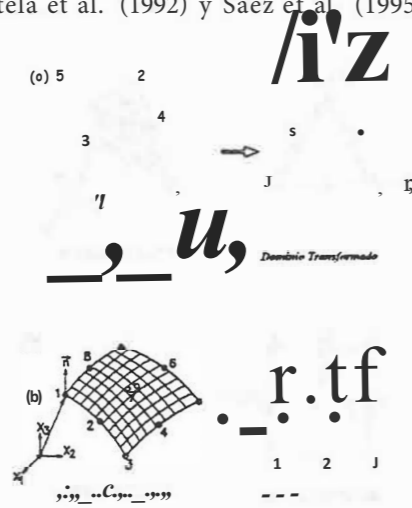


Figura 1: Elementos cuadráticos para problemas tridimensionales

Los estudios numéricos mediante el MEC antes mencionados se refieren todos ellos a problemas bidimensionales. El MEC para problemas tridimensionales de Mecánica de la Fractura está mucho menos desarrollado. Luchi y Rizzuti (1987) desarrollaron un elemento cuadrático de ocho nodos que es utilizado en combinación con unas funciones de forma especiales para desplazamientos y tracciones que representan la evolución de estos en las proximidades del borde de la grieta. Gangming y Yongyuan (1988) formularon un elemento a un cuarto para problemas de fractura con geometría circular o elíptica.

En el presente artículo se presenta un elemento de contorno cuadrático con nodos a un cuarto para problemas tridimensionales de Mecánica de la Fractura. Se formula el elemento, se introduce una función de forma singular para las tensiones y se desarrolla un procedimiento específico para llevar a cabo de forma sencilla y precisa las integraciones sobre estos elementos tanb cuando el punto de colocación es un nodo del propio elemento singular a un cuarto como cuando está fuera de él. Se calculan Factores de Intensidad de Tensión en varios problemas tridimensionales haciendo uso por una parte de los desplazamientos en el interior de la grieta y por otra, del valor nodal en el borde de la grieta de la representación de las tracciones, el cual proporciona directamente el FIT. Los resultados obtenidos con el procedimiento propuesto se comparan con los obtenidos mediante métodos diferentes por otros autores.

2 Ecuaciones básicas

El MEC se plantea en base a una ecuación integral que puede ser escrita para cualquier punto "i" del interior o del contorno Γ de un cuerpo n en la forma:

$$c_{ik}^i u_k^i + \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ik}^* p_k d\Gamma \quad (1)$$

que relaciona las componentes del desplazamiento en el punto de colocación "i", con los desplazamientos u_k y tracciones p_k sobre todo el contorno Γ , y los desplazamientos u_{ik} y las tracciones p_{ik} sobre el contorno debidas a una carga unitaria concentrada en el punto "i" cuando el cuerpo O se considera parte de un medio infinito (Solución Fundamental). El término independiente $c_{ik}^i = (1/2) \delta_{ik}$ para puntos en los que el contorno es suave. Las expresiones de u_{ik} y p_{ik}^* pueden encontrarse por ejemplo en Brebbia y Domínguez (1992). Usando notación vectorial, la ecuación anterior puede escribirse como

$$c^i u^i + \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* p d\Gamma \quad (2)$$

donde u y p son vectores con las tres componentes de los desplazamientos y las tracciones respectivamente y c^i , p^* y u^* son tensores de 3x3 elementos.

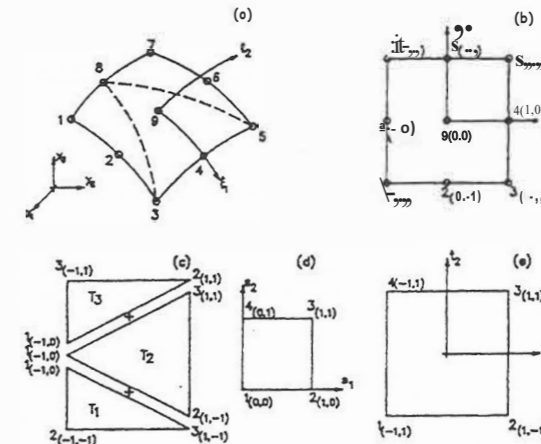


Figura 2: Subdivisión de un elemento cuadrático para la integración local cuando el punto de colocación está sobre un lado del elemento

3 Elementos de contorno

El proceso de discretización implica la división del contorno Γ del cuerpo n en NE elementos. Un elemento j contiene NJ nodos de modo que los vectores de desplazamientos y tracciones se representan en un punto del elemento "j" mediante

$$u = U^j \quad y \quad p = p^j \quad (3)$$

donde u^j (3NJ) y p^j (3NJ) contienen todos los valores nodales en el elemento "j" y U^j es una matriz (3x3NJ) que contiene las funciones de forma aproximada sobre el elemento "j". Tras el proceso de discretización se obtiene para cada punto "i" una ecuación:

$$c_{ik}^i + \int_{\Gamma} p_{ik}^* dr \quad u^i = \int_{\Gamma} u_{ik}^* p_k \quad (4)$$

y para el conjunto de nodos del contorno el sistema

$$H u = G p \quad (5)$$

donde u y p contienen todos los valores nodales del problema. Una vez aplicadas las condiciones de contorno, puede resolverse (5) y así obtener los valores desconocidos de u o p en los nodos del contorno.

El proceso implica pues la división del contorno en elementos, los cuales, en nuestro caso, serán cuadráticos en su representación de u y p, con nueve o seis nodos (Figura 1). La geometría es igualmente cuadrática con una representación isoparamétrica

$$x = \Phi x^j \quad (6)$$



El elemento tiene definida su geometría, desplazamientos y tensiones haciendo uso de las nueve funciones de forma cuadráticas que son producto de tres en cada dirección correspondientes al elemento cuadrático bidimensional (Domínguez, 1993).

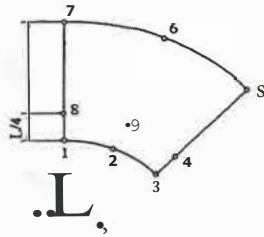


Figura 3: Elemento cuadrático con nodo a un cuarto

En el proceso de formación del sistema de ecuaciones deben evaluarse integrales sobre los elementos que son del tipo:

$$GW = \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi d\Gamma = \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \mathbf{u}^* \Phi |G| d\xi_1 d\xi_2 \quad (7)$$

$$HW = \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi d\Gamma = \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \mathbf{p}^* \Phi |G| d\xi_1 d\xi_2$$

donde $|G|$ es el determinante del Jacobiano de la transformación de las coordenadas cartesianas a unas naturales ξ_1, ξ_2 (Figura 1). Estas integrales son calculadas numéricamente con suma facilidad cuando el punto de colocación "i" cuya ecuación se está escribiendo no es un nodo del elemento "j". Cuando el nodo "i" pertenece al elemento "j" sobre el que se está integrando, los núcleos \mathbf{p}^* y \mathbf{u}^* tienen una singularidad del tipo $u^* \sim (r/\xi_1)^{-1/2}$ y $\mathbf{p}^* \sim (r/\xi_1)^{-3/2}$, donde r es la distancia al punto de colocación. La evaluación de estas integrales singulares en el caso GW se lleva a cabo mediante una subdivisión del elemento y posterior transformación que hace aparecer un Jacobiano del orden $O(r)$ que anula la singularidad (Figura 2). La integración de HW, en el caso en que es singular, se evita haciendo uso de la condición de tensión nula ante un movimiento de sólido rígido. Se pueden encontrar los detalles de este proceso en Domínguez (1993).

4 Elemento cuadrático singular con nodo a un cuarto

De acuerdo con la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal, en las caras de una grieta y según va tendiendo a cero la distancia al borde de la misma, los desplazamientos que se producen varían con \sqrt{r} , siendo r la distancia al borde. Así mismo, las tensiones en el interior del material en las proximidades del borde de la grieta evolucionan como $1/\sqrt{r}$. Para poder representar adecuadamente estos desplazamientos y tensiones se ha desarrollado un elemento cuadrático de nueve nodos que se emplea para discretizar el contorno en la primera fila de elementos a un lado y a otro del borde de la grieta. El elemento (Figura 3) es de tipo cuadrilátero y tiene todos sus nodos en un plano. Los nodos 4, 8 y 9 están situados en línea recta y a distancia $1/4$ entre los 3 y 5, 1 y 7 y 2 y 6, respectivamente. Los lados 1, 8, 7 y 3, 4, 5 son perpendiculares a la curva 1, 2, 3, que se ubicará sobre el borde de la grieta. La distancia 1, 7 es la misma que la 3, 5.

Si se satisfacen estas condiciones, existe una relación entre la variable natural ξ_2 (Figura 2) y la distancia al borde de la grieta r del tipo:

$$\xi_2 = 2 \left(\sqrt{r/L} \right) - 1 \quad (8)$$

siendo L la distancia: entre los nodos 1 y 7, lo cual es fácil demostrar haciendo uso de la representación de la geometría (6). Igualmente, en este caso los desplazamientos representados mediante (3) tienen una variación con la distancia r al borde 1, 2, 3 del tipo:

$$u_i = a_j + a_j \sqrt{r/L} + a_j (r/L) \quad (9)$$

donde a_j son combinaciones de valores nodales de U_i .

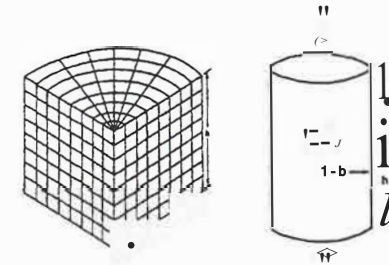


Figura 4: Cilindro con grieta circular. Geometría y discretización

Para obtener una variación de las tracciones sobre el elemento que pueda representar la variación que se da en las proximidades de la grieta al cortar el material con una sección que pase por el borde se modifican las funciones de forma para hacerlas contener la singularidad del tipo $1/\sqrt{r}$. Para ello se dividen por $(e_2 + 1)/2$, es decir, por $\sqrt{r/L}$ (véase la ecuación 8), así la representación de las tracciones será

$$\mathbf{p} = \bar{\Phi} \bar{\mathbf{p}}^j \quad (10)$$

donde $\bar{\Phi}$ contiene las funciones de forma modificadas y $\bar{\mathbf{p}}^j$ son los valores nodales que ahora no coinciden exactamente con el valor de \mathbf{p} en "j" sino que están multiplicados estos por el valor en el punto correspondiente de $(e_2 + 1)/2 = \sqrt{r/L}$. Así en los nodos del borde los valores de $\bar{\mathbf{p}}^j$ representan directamente (salvo una constante) los FIT. Al haber dividido las funciones de forma por $\sqrt{r/L}$, la variación de $\bar{\mathbf{p}}^j$ con r , que se puede obtener de (3) en forma similar a (9), será del tipo

$$\bar{p}_i = a_j (1/\sqrt{r/L}) + a_j + a_j (r/L) \quad (11)$$

donde a_j son combinaciones de valores nodales \bar{p}_i de la representación de las tracciones. En particular a_j en la línea 1, 8, i ($e_1 = -1$) coincide con \bar{p}_i . Análogamente, en la línea 2, 9, 6 ($e_1 = 0$) coincide con \bar{p}_i y en la línea 3, 4, 5 ($e_1 = 1$) coincide con \bar{p}_i y como es claro a la vista de (11) con los valores (salvo constantes) de los FIT.

5 Discretización de problemas de fractura y cálculo de los FIT

El estudio de los problemas de fractura haciendo uso de los elementos antes descritos se lleva a cabo del siguiente modo: 1; el dominio en estudio es dividido en subdominios haciendo pasar una sección a lo largo de la grieta; 2; cada subdominio es analizado mediante el MEC y 3; los subdominios son acoplados mediante condiciones de equilibrio y compatibilidad o simplemente se le aplican condiciones de simetría a uno de ellos cuando estas condiciones existen (Figura 4). Los elementos empleados en la discretización son de tipo cuadrático normal salvo los que están en contacto con el borde de la grieta. De estos elementos, los que se encuentran del lado interior de la grieta (tracción nula) tienen simplemente la ubicación de los nodos

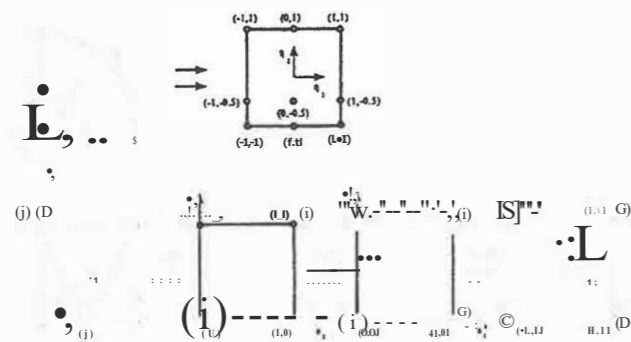


Figura 5: Transformación de la geometría y posteriores transformaciones para anular las singularidades cuando el punto de colocación es el nodo 2

a un cuarto antes descrita (elementos a un cuarto). Así los desplazamientos son representados mediante la ecuación (9). Las tracciones al ser nulas, no requieren más atención y son representadas también en la forma general. Los elementos que contienen el borde de la grieta y se extienden hacia el interior del material cumplen con los requisitos geométricos antes descritos y además tienen la representación singular de las tracciones (elementos singulares a un cuarto). Estos elementos son los únicos que requieren un tratamiento especial a la hora de realizar integraciones de la solución fundamental.

Una vez resuelto el problema de contorno y obtenidos todos los valores nodales de los desplazamientos y tracciones, los valores numéricos de los FIT son obtenidos haciendo uso de estos valores nodales.

Pueden obtenerse los factores de intensidad de tensión directamente de los valores nodales de las tracciones en el borde de la grieta de manera análoga a la presentada por Martínez y Domínguez (1984) para problemas bidimensionales. Así, en el caso de un problema simétrico donde el eje X3 es perpendicular al plano de la grieta y x2 es tangente al borde, los FIT en un nodo k que está en el borde de la grieta son

$$K_I = \bar{p}_3^k \sqrt{2\pi L}; K_{II} = \bar{p}_1^k \sqrt{2\pi L}; K_{III} = \bar{p}_2^k \sqrt{2\pi L} \quad (12)$$

siendo \bar{p}_i^k el valor nodal de la componente i de la tracción en el nodo K en el que se están calculando los FIT.

También pueden obtenerse los FIT haciendo uso de los desplazamientos en el interior de la grieta. Así, teniendo en cuenta que los desplazamientos evolucionan con r en la representación del MEC de la misma forma que en el caso teórico, no hay más que particularizar la expresión teórica de las tres componentes de u para cada nodo a 1/4 del borde de la grieta e igualarlas a los valores numéricos obtenidos. Así se obtienen K1, Ku y Ku1 para el punto del borde en la perpendicular que se está considerando. En el caso anteriormente indicado de problema simétrico,

$$K_I = \frac{\mu}{1-\nu} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} u_3; K_{II} = \frac{\mu}{1-\nu} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} u_1; K_{III} = \frac{\mu}{1-\nu} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} u_2 \quad (13)$$

donde μ es el módulo de elasticidad transversal del material, ν el módulo de Poisson y U el desplazamiento del nodo a un cuarto del borde.

6 Integración sobre elementos a un cuarto singulares

La integración sobre los elementos no singulares, tengan o no los nodos intermedios a un cuarto, se lleva a cabo en la forma general; es decir, cuando el punto de colocación está fuera del elemento se emplea

directamente una cuadratura de Gauss. Cuando el punto de colocación es un nodo del elemento se emplea también esta cuadratura pero después de una subdivisión del elemento en triángulos (Figura 2) y la posterior transformación de estos en rectángulos.

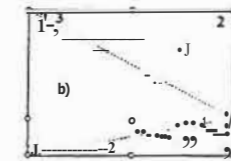


Figura 6: Punto de colocación en un nodo (4) que no está en el borde de la grieta

La integración sobre elementos singulares a un cuarto tampoco presenta dificultad cuando el punto de colocación está fuera del elemento. La singularidad del tipo $1/\sqrt{r}$ que existe en las funciones de forma sobre la línea 1, 2, 3 es compensada por el hecho de que el Jacobiano de la transformación de cartesianas a $\{\eta_1, \eta_2\}$ es justamente del tipo \sqrt{r} cuando $r \rightarrow 0$. Esto ocurre precisamente porque la geometría es la indicada con los nodos intermedios a un cuarto (véase la ecuación 8). Cuando el punto de colocación es uno de los nodos del elemento singular a un cuarto, la integración sobre este elemento requiere un tratamiento específico.

El dominio de integración es expresado en términos de coordenadas naturales $-\eta_1 \leq \eta_1 \leq 1, -1 \leq \eta_2 \leq 1$ y así transformado en un cuadrado. A diferencia del caso general esta transformación no es cuadrática en la dirección perpendicular al borde 1, 2, 3 sino que es lineal (esto es posible dado que los nodos están alineados en esa dirección). Para ello, la geometría se representa en términos de funciones de forma (ecuación 6) pero siendo ahora

$$\phi_1 = \frac{1}{4} \eta_1 (\eta_1 - 1) (1 - \eta_2); \phi_2 = \frac{1}{2} (1 - \eta_1^2) (1 - \eta_2); \phi_3 = \frac{1}{4} \eta_1 (\eta_1 + 1) (1 - \eta_2)$$

$$\phi_4 = \phi_5 = \phi_6 = 0 \quad (14)$$

$$\phi_5 = \frac{1}{4} \eta_1 (\eta_1 + 1) (1 + \eta_2); \phi_6 = \frac{1}{2} (1 - \eta_1^2) (1 + \eta_2); \phi_7 = \frac{1}{4} \eta_1 (\eta_1 - 1) (1 + \eta_2)$$

una vez llevada a cabo esta transformación, el dominio cuadrado es subdividido en triángulos a partir del punto de colocación de la carga. En la Figura 5 puede verse, por ejemplo, el caso en que el punto de colocación es el nodo 2. Posteriormente, cada dominio triangular es transformado en un cuadrado donde dos vértices corresponden al punto de colocación. Esto se lleva a cabo mediante la transformación

$$\eta_i = (1 - s_1) \eta_i^1 + s_1 (1 - s_2) \eta_i^2 + s_1 s_2 \eta_i^3 \quad (15)$$

cuyo Jacobiano tiene un valor

$$\frac{d\eta_1 d\eta_2}{ds_1 ds_2} = 2As_1 \quad (16)$$

siendo A el área del triángulo y s_1 la coordenada que mide la distancia al vértice del triángulo que es el punto de colocación. Así al ser s_1 proporcional a r se tiene un Jacobiano que permite compensar la singularidad $1/r$ de la solución fundamental u_k . La singularidad del tipo $1/\sqrt{r}$, siendo r la distancia al borde de la grieta, persiste aún en la función a integrar. En el caso que se está considerando, el punto de colocación está en el borde y por tanto r coincide con s_1 . Para anular la singularidad $1/\sqrt{r}$ se transforma el dominio mediante el cambio

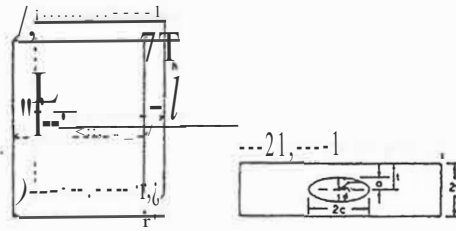


Figura 7: Prisma con grieta elíptica

$$s_1 = s_1^{*2} \quad y \quad s_2 = s_2^* \quad (17)$$

siendo,

$$\frac{ds_1 ds_2}{ds_1^* ds_2^*} = 2s_1^*$$

Este Jacobiano es pues del orden de $1/s_1^*$. Así, con esta segunda transformación del dominio de integración se anula la singularidad que aún existía. Únicamente resta hacer una traslación de ejes para que las variables tengan un rango -1, 1. Para ello se emplean,

$$s_1 = \frac{(t_1 + 1)}{2} \quad y \quad s_2 = \frac{(t_2^* + 1)}{2} \quad (18)$$

Cuando el punto de colocación es un nodo que no está en el borde de la grieta, después de la subdivisión existirán triángulos en los que no existe la singularidad $1/r$ por no incluir el borde de la grieta (Figura 6, triángulo a). En tal caso la transformación (17) no se lleva a cabo. En otros triángulos (Figura 6, triángulo b), la singularidad $1/r$ está en un vértice ($s_1 = 1, s_2 = 1$) y el cambio debe ser simplemente $1-s_1 = (1 - s_1)^2, 1-s_2 = (1 - s_2)^2$. Si la singularidad $1/r$ está en un lado ($s_1 = 1$) (Figura 6, triángulo c) el cambio de coordenadas para anularla debe ser $(1 - s_1) = (1 - s_1)^2, s_2 = s_2^2$.

Empleando las transformaciones descritas pueden realizarse con una cuadratura estándar todas las integrales que incluyen u_k sobre el propio elemento. Las que incluyen t_{ik} y son singulares, se obtienen empleando la condición de tracción nula ante desplazamientos de sólido rígido.

Nótese que en el proceso anteriormente descrito, el dominio de integración (elemento singular con nodo a un cuarto) se ha transformado a Ω_1, Ω_2 mediante una relación lineal en Ω_2 a diferencia del caso normal en que esta relación es cuadrática. Este hecho permite que s_1 , que es proporcional a $1/r$, lo sea también a r y que el cambio $s_1 = s_1^2$ tenga un Jacobiano proporcional a $1/r$. Si se hubiera mantenido una relación cuadrática de la geometría cartesiana con la variable r_2 , esta variable y s_1 , definida mediante (15), serían proporcionales a $1/r$ y el cambio $s_1 = s_1^2$ no tendría un Jacobiano proporcional a $1/r$.

7 Ejemplos numéricos

Haciendo uso de los elementos a un cuarto y singulares a un cuarto en las filas adyacentes al borde de grieta por dentro y por fuera de la misma respectivamente, se han analizado diversos problemas.

1.- Cilindro con grieta circular y sometido a tracción.

En la Figura 4 se aprecia la geometría del problema y la malla empleada para discretizar un cuarto de el mismo. El interior de la grieta es discretizado con cuatro filas de elementos siendo $a/b = 0.5$ y h/b

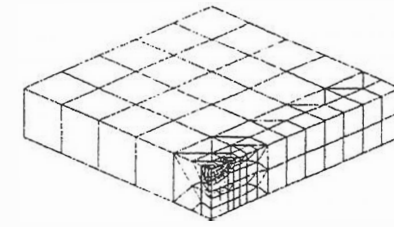


Figura 8: Discretización para un cuarto de prisma con grieta elíptica

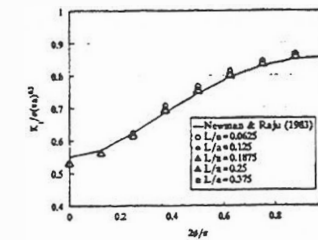


Figura 9: FIT en modo I a lo largo del borde de la grieta elíptica en barra prismática

= 1. El módulo de Poisson del material es $\nu = 0.33$. Los elementos en la superficie que contiene la grieta son cuadráticos normales excepto los de la cuarta fila comenzando por el centro que son elementos a un cuarto y los de la quinta fila que son singulares a un cuarto. El borde de la grieta se encuentra en el límite entre la cuarta y la quinta fila. El resto de los elementos en la malla son cuadráticos normales.

El factor de intensidad de tensión K_I obtenido mediante el desplazamiento en el nodo a un cuarto (ecuación 13) es $K_I = 0.7(j, fia)$, y el obtenido del valor nodal de la tensión (ecuación 12) es $K_I = 0.704(T, fio)$. Ambos muestran una gran precisión, si se los compara con el teórico (Banks, Sills and Sherman, 1992) $K_I = 0.706cr, fia$.

2.- Pieza prismática con grieta elíptica y sometida a tracción.

La geometría de este problema se representa en la Figura 7. Las relaciones entre los lados del prisma y las de estos con los radios de la elipse son: $a/c = 0.4, a/t = 0.2, c/b = 0.1, h/b = 1$. El módulo de Poisson del material es $\nu = 0.33$. El prisma se encuentra sometido a una tracción uniforme en las dos caras extremas más alejadas de la grieta.

En la Figura 8 se puede apreciar la discretización mediante elementos cuadráticos empleada para el análisis del problema. Se discretiza únicamente la octava parte del mismo y se aplican condiciones de simetría. La malla tiene un total de 297 elementos con 902 nodos. Las filas de elementos adyacentes al borde de la grieta son de elementos a un cuarto, por el interior de la grieta, y singulares a un cuarto por el exterior. Existen ocho elementos de cada uno de estos tipos a lo largo del borde de la grieta en un cuarto modelo.

El modelo se ha estudiado considerando varias discretizaciones con elementos a un cuarto y a un cuarto singular de varios tamaños L en dirección perpendicular al borde de la grieta. En la Figura 9 se representan los valores del FIT K_I para distintas posiciones a lo largo del borde de la grieta obtenidos con tamaños de elementos desde $L/a = 0.0625$ a $L/a = 0.375$. La posición a lo largo del borde se mide mediante el ángulo ϕ respecto al eje mayor de la elipse. El FIT en cada posición ϕ se obtiene del valor nodal de la tracción en el nodo correspondiente del elemento singular a un cuarto (ecuación 12). Se han empleado los nodos extremos (1 y 3) de cada elemento ya que este resultado es muy estable respecto al número de puntos de integración empleados sobre el elemento singular cuando el punto de colocación

está sobre el. Los resultados de la Figura 9 indican una dependencia muy pequeña con el tamaño de los elementos respecto a la dirección perpendicular al borde y un buen acuerdo con los resultados de referencia debidos a Newman y Raju (1983) y que son exactos $\pm 3\%$.

8 Conclusiones

Se ha presentado y evaluado en este artículo un elemento de contorno singular específicamente desarrollado para la resolución de problemas tridimensionales de mecánica de la fractura. Es un elemento cuadrático con nueve nodos tres de los cuales están ubicados a una distancia un cuarto del ancho del elemento del borde de la grieta. Se emplean funciones de forma que contienen la singularidad $1/\sqrt{r}$ a lo largo del borde de la grieta. Se ha desarrollado un procedimiento para la integración sobre este tipo de elemento que evita tanto la singularidad de la solución fundamental como la de las funciones de forma permitiendo esto una integración numérica precisa, sencilla y fiable. Con el elemento propuesto se evalúa el Factor de Intensidad de Tensiones de una manera directa a partir del valor nodal de las tensiones en el borde de la grieta.

Los resultados numéricos obtenidos para dos problemas tridimensionales muestran una gran precisión. Son así mismo estos resultados poco sensibles a la ubicación concreta de los nodos y la malla empleada.

El elemento desarrollado es muy general, es fácilmente incluíble en programas ya existentes y es la versión tridimensional de uno similar para dos dimensiones desarrollado por Blandford et al. (1981) y Martínez y Domínguez (1984).

9 Referencias

Banks-Sills, L. y Sherman, D. (1992), On the computation of stress intensity factors for 3-D geometries by means of the stiffness derivative and J-integral methods, *Int. J. Fract.*, Vol. 53, 1-20.

Barsoum, R. S. (1976), On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 10, 25-37.

Blandford, G. E., Ingraffea, A. R. y Liggett, J. A. (1981), Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 17, 387-404.

Brebbia, C. A. y Domínguez, J. (1992), *Boundary Elements. An introductory course*, Segunda Edición, Computational Mechanics Publications, Southampton y McGraw-Hill, New York.

Cruse, T. A. (1978), Two-dimensional BIE fracture mechanics analysis, *Appl. Math. Modelling*, Vol. 2, 287-293.

Domínguez, J. (1993), *Boundary Elements in Dynamics*, Computational Mechanics Publications, Southampton y Elsevier Applied Science, Londres.

Gaugring, L. y Youngyuan, Z. (1988), Application of boundary element method with singular and isoparametric elements in three dimensional crack problems, *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 29, 97-106.

Ingraffea, A. R. y Lanu, C. (1980), Stress-intensity factor computation in three-dimensions with quarter-point elements. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 15, 1427-1445.

Luchi, M. L. y Rizzuti, S. (1987), Boundary elements for three-dimensional elastic crack analysis, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 24, 2253-2271.

Martínez, J. y Domínguez, J. (1984), On the use of quarter-point boundary elements for stress intensity factor computations, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 20, 1941-1950.

Newman, J. C. y Raju, I. S. (1983), ASTM-STP791, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1238-1265.

Portela, A., Aliabadi, M. H. y Rooke, D. P. (1992), The dual boundary element method: effective implementation for crack problems, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 33, 1269-1287.

Sáez, A., Gallego, R. y Domínguez, J. (1995), Hypersingular quarter-point boundary elements for crack problems, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 38, 1681-1701.