

4-semirredes asociadas a cuadrados latinos parciales regularmente auto-ortogonales

R.M. Falcón

Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla.

E-mail: rafalغان@us.es

Resumen. El presente artículo se centra en la enumeración y clasificación de 4-semirredes asociadas al conjunto $\mathcal{S}_{n,s}$ de cuadrados latinos parciales de orden n y tamaño s , regularmente auto-ortogonales, regulares y no compresibles. Los elementos de dicho conjunto pueden identificarse con los ceros de un ideal polinomial Booleano, cuya base reducida de Gröbner permite determinar de forma explícita este tipo de estructuras. Se muestra en particular, para $n \leq 4$, las clases principales de $\mathcal{S}_{n,s}$ y las de aquellas 4-semirredes con estructura de grafo asociadas a $\mathcal{S}_{n,2^n}$.

Palabras clave. 4-semirred, cuadrado latino parcial, auto-ortogonalidad.

1 INTRODUCCIÓN

Un *cuadrado latino parcial* de orden n es una matriz $n \times n$ con elementos tomados de un conjunto de n símbolos distintos, tal que cada símbolo ocurre a lo más una vez en cada fila y en cada columna. En el presente artículo, tomamos $[n] = \{1, \dots, n\}$ como tal conjunto de símbolos y denotamos por \mathcal{PLS}_n el conjunto de cuadrados latinos parciales de orden n . El *tamaño* de $P = (p_{ij}) \in \mathcal{PLS}_n$ es el número de celdas no vacías que contiene, mientras que su *forma* es el conjunto de dichas celdas, el cual puede identificarse con una matriz binaria $n \times n$, $A = (a_{ij})$, donde $a_{ij} = 1$ si $a_{ij} \in [n]$ ó 0, en otro caso. En caso de tener tamaño máximo n^2 , P recibe el nombre de *cuadrado latino*. Se define la *representación ortogonal* de P como el conjunto $O(P) = \{(i, j, p_{ij}) \mid i, j, p_{ij} \in [n]\}$. Permutaciones de filas, columnas y símbolos de P determinan nuevos cuadrados latinos parciales de orden n denominados *isotópicos* a P . En concreto, si S_n denota el grupo simétrico sobre $[n]$, entonces $\Theta = (\alpha, \beta, \gamma) \in S_n^3$ es un *isotopismo* de \mathcal{PLS}_n y el cuadrado latino parcial isotópico P^Θ queda definido de tal forma que $O(P^\Theta) = \{(\alpha(i), \beta(j), \gamma(p_{i,j})) : (i, j, p_{i,j}) \in O(P)\}$. La *clase isotópica* de P está constituida por todos sus cuadrados latinos parciales isotópicos. Por otro lado, dada $\pi \in S_3$, se define el cuadrado latino parcial *parastrófico* P^π tal que $O(P^\pi) = \{(p_{\pi(1)}, p_{\pi(2)}, p_{\pi(3)}) : (p_1, p_2, p_3) \in O(P)\}$ y se dice que π es un

parastrofismo de $\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{S}_n$. Dos cuadrados latinos parciales están en la misma *clase principal* si uno de ellos es isotópico a un cuadrado latino parcial parastrófico del otro. Se dice que P es *regular* si no contiene una celda que sea a la vez la única no vacía tanto en su correspondiente fila como columna y tal que, en caso de que sea la única en su fila o columna, entonces existe al menos otra celda en el cuadrado conteniendo su mismo símbolo. Se dice que P es *no compresible* si no existe una fila o columna vacía, o bien, si contiene todos los n símbolos. Se dice que P es *ortogonal* a $Q = (q_{ij}) \in \mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{S}_n$ si, dados $i, j, k, l \in [n]$ tales que $p_{ij} = p_{kl} \in [n]$, entonces q_{ij} y q_{kl} no son el mismo símbolo de $[n]$. Se dice que P y Q son *regularmente ortogonales* si son ortogonales entre sí, ambos tienen forma simétrica y, dados $i, j \in [n]$ tales que $p_{ij}, q_{ij} \in [n]$, existen $k, l \in [n]$ tales que $p_{kl} \in [n] \setminus \{p_{ij}\}$ y $q_{kl} = q_{ij}$, o bien, tales que $p_{kl} = p_{ij}$ y $q_{kl} \in [n] \setminus \{q_{ij}\}$. Por último, se dice que P es (*regularmente*) *auto-ortogonal* si es (*regularmente*) ortogonal a su traspuesta (véase Figura 1).

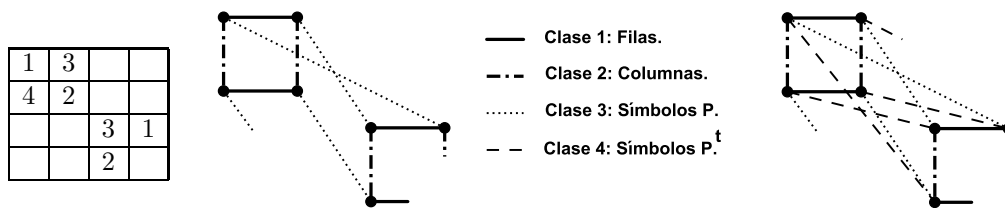


Fig. 1: Cuadrado latino parcial regular, no compresible, regularmente auto-ortogonal, de orden 4 y par de 3- y 4-semirredes asociadas.

Una k -semirred [9] ($k \geq 3$) es un par $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ formado por un conjunto finito de *puntos* \mathcal{P} y un conjunto \mathcal{L} de subconjuntos o *líneas* de \mathcal{P} , tal que existe una partición de \mathcal{L} en k *clases paralelas*, L_1, \dots, L_k , verificándose que todo par de líneas de clases diferentes se cortan a lo más en un punto y todo punto de L pertenece exactamente a una línea de cada clase. Se trata por tanto de una estructura de incidencia que generaliza el concepto de k -red [1], en el que todo par de líneas de clases diferentes se cortan exactamente en un punto. Al contrario de las k -redes, en una k -semirred no todas las líneas contienen el mismo número de puntos ni todas las clases están formadas por el mismo número de líneas. En concreto, se define el L -orden de $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ como el número máximo de líneas en una misma clase. Se dice que $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ es *isomorfa* a una k -semirred $(\mathcal{P}', \mathcal{L}')$ de clases paralelas $\{L'_1, \dots, L'_k\}$ si existe una biyección entre los puntos de ambas que aplica puntos colineales en L_i a puntos colineales en L'_i , para cada $i \in [k]$. Se dice que

son *paratópicas* si son isomorfas tras un reetiquetado de clases. Todo conjunto $\{P_1, \dots, P_{k-2}\}$ de $k-2$ cuadrados latinos parciales regularmente ortogonales entre sí, todos ellos de igual orden, tamaño y forma, regulares y no compresibles es equivalente a una k -semirred [9]. Basta identificar por ejemplo cada celda común no vacía $(i, j) \in [n]^2$ por un punto al que etiquetamos como $(i, j, p_{1ij}, \dots, p_{(k-2)ij})$, donde $p_{lij} \in [n]$ es el símbolo que aparece en la celda (i, j) de P_l , para cada $l \in [k-2]$. A continuación, para cada $i \in [k]$, clasificamos cada punto creado atendiendo al valor que toma la i -ésima componente de su etiqueta. Los conjuntos no vacíos de dicha clasificación determinan las líneas de la i -ésima clase paralela de la k -semirred. En particular, toda 3-semirred puede identificarse con un cuadrado latino parcial regular y no compresible. Más aún, dos 3-semirredes que sean isomorfas (resp., paratópicas) están asociadas a la misma clase isotópica (resp., principal) de este tipo de cuadrados latinos parciales. La Figura 2 muestra las 12 clases paratópicas de 3-semirredes con un máximo de cinco puntos [7].

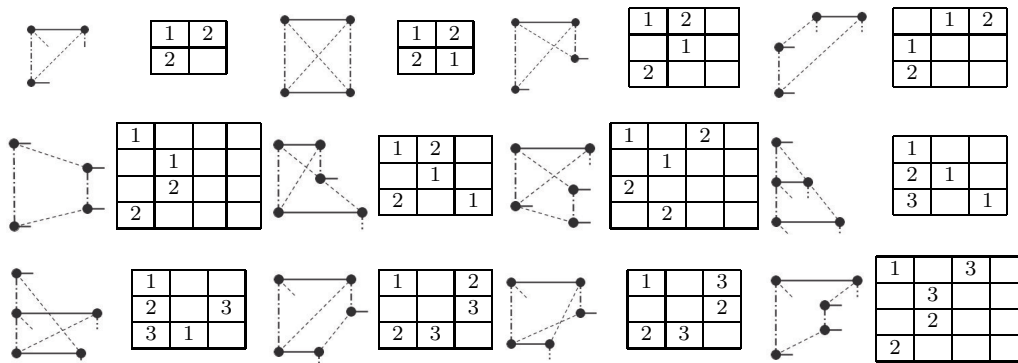


Fig. 2: Clases principales de 3-semirredes con cinco puntos a lo más y cuadrados latinos parciales asociados.

El presente artículo se centra no obstante en el caso $k = 4$, concretamente en el estudio y clasificación de aquellas 4-semirredes asociadas al conjunto $\mathcal{S}_{n,s}$ de cuadrados latinos parciales de orden n , tamaño s , regularmente auto-ortogonales, regulares y no compresibles. Dado $P \in \mathcal{S}_{n,s}$, acabamos de indicar cómo puede identificarse el par formado por P y su traspuesto P^t con una 4-semirred. Puesto que $(P^t)^\Theta = (P^\Theta)^t$ para todo isotopismo $\Theta \in S_n^3$, las clases isomórficas y paratópicas de este tipo de 4-semirredes están unívocamente asociadas a las clases isotópicas y principales de $\mathcal{S}_{n,s}$. Estudiamos dichas clases en la Sección 2, identificando para ello los elementos de este último conjunto con los ceros de un ideal Booleano. Mostramos en particular la distribución en clases principales de $\mathcal{S}_{n,s}$

para $n \leq 4$. En este sentido, cabe observar que hasta la fecha sólo han sido enumerados y clasificados los cuadrados latinos auto-ortogonales hasta orden 10 [8, 2, 3], si bien no existe ningún estudio sobre cuadrados latinos parciales auto-ortogonales. Finalmente, en la Sección 3, presentamos aquellas 4-semirredes asociadas a $\mathcal{S}_{n,2^n}$ que tienen estructura de grafo, mostrando en particular sus clases paratópicas para $n \leq 4$.

2 ENUMERACIÓN Y CLASIFICACIÓN DE $\mathcal{S}_{n,s}$.

Las formas de todo par de cuadrados latinos parciales auto-ortogonales isotópicos de orden n están asociadas a un par de matrices binarias $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ que son *equivalentes*, es decir, existe una permutación $\pi \in S_n$ tal que $a_{ij} = b_{\pi(i)\pi(j)}$, para todos $i, j \in [n]$. Denotamos por \sim a dicha relación de equivalencia y por μ_A al cardinal de la clase de equivalencia de la matriz binaria A . A la hora de clasificar los elementos de $\mathcal{S}_{n,s}$ basta considerar pues un representante de cada clase de equivalencia del conjunto $\mathcal{B}_{n,s}$ de matrices binarias simétricas de orden n , que pueden llegar a identificarse con la forma de un cuadrado latino parcial de $\mathcal{S}_{n,s}$. Es interesante para ello distribuir las matrices de dicho conjunto atendiendo a sus vectores suma. Por simetría, los vectores suma por fila y por columna de toda matriz de $\mathcal{B}_{n,s}$ coinciden entre sí, pasando a denominarse ambos *vector suma* de dicha matriz, el cual debe ser una n -tupla (v_1, \dots, v_n) formada por enteros no negativos y cuyo *peso* es $\sum_{i \in [n]} v_i = s$. Sea $\mathcal{T}_{n,s}$ el conjunto de tales n -tuplas. Dado $V \in \mathcal{T}_{n,s}$, sea \mathcal{B}_V el subconjunto de matrices binarias de $\mathcal{B}_{n,s}$ que tienen a V como vector suma. La regularidad de los elementos de $\mathcal{S}_{n,s}$ implica el siguiente resultado.

Lema 1. *Dados $V = (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{T}_{n,s}$ y $A = (a_{ij}) \in \mathcal{B}_V$, se verifica que $a_{ij} = 0$ para todos $i, j \in [n]$ tales que $v_i = v_j = 1$. \square*

El siguiente resultado muestra cómo las matrices de \mathcal{B}_V pueden identificarse con los ceros de un ideal booleano de polinomios en las $\frac{n^2+n}{2}$ variables del conjunto $X_n = \{x_{ij} : i, j \in [n], i \leq j\}$.

Teorema 1. *Dado $V = (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{T}_{n,s}$, el conjunto \mathcal{B}_V puede identificarse con el de los ceros del ideal $I_V = \langle x_{ij} : i, j \in [n], i \leq j, v_i \cdot v_j \in \{0, 1\} \rangle + \langle x_{ij} \cdot (1 - x_{ij}) : i, j \in [n], i \leq j, v_i \cdot v_j \notin \{0, 1\} \rangle + \langle v_i - \sum_{j \in [i]} x_{ji} - \sum_{j \in [n] \setminus [i]} x_{ij} : i \in [n] \rangle \subseteq \mathbb{Q}[X_n]$. Además, $|\mathcal{B}_V| = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[X_n]/I_V)$.*

Demostración. Atendiendo a la definición de \mathcal{B}_V y al Lema 1, se tiene que toda matriz binaria simétrica $M = (m_{ij}) \in \mathcal{B}_V$ puede identificarse con un

cero (x_{11}, \dots, x_{nn}) , donde $x_{ij} = 1$ si $m_{ij} = 1$ y 0, en otro caso. La finitud de \mathcal{B}_V implica que el ideal I_V es cero-dimensional. Además, puesto que $I_V \cap \mathbb{Q}[x_{ij}] = \langle x_{ij} \cdot (1 - x_{ij}) \rangle \subseteq I_V$ para todos $i, j \in [n]$ tales que $i \leq j$, la Proposición 2.7 de [4] asegura que I_V es radical. Con lo cual, el Teorema 2.10 de [4] implica que $|\mathcal{B}_V| = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[X_n]/I_V)$. \square

Sea \mathcal{S}_A el subconjunto de cuadrados latinos parciales de $\mathcal{S}_{n,s}$ asociados a una matriz binaria $A \in \mathcal{B}_V$. Sus elementos pueden clasificarse atendiendo al número de símbolos de cada tipo que contienen. En este sentido, dado $S = (s_1, \dots, s_n) \in \mathcal{T}_{n,s}$, denotamos por $\mathcal{S}_{A,S}$ el subconjunto de cuadrados latinos parciales de \mathcal{S}_A en los que aparecen s_i veces cada símbolo $i \in [n]$. Se verifica en particular el siguiente resultado.

Lema 2. Sean $V = (v_1, \dots, v_n), S = (s_1, \dots, s_n) \in \mathcal{T}_{n,s}$, tales que si $v_i = 0$ para algún $i \in [n]$, entonces $s_j > 0$, para todo $j \in [n]$. Dado $A = (a_{ij}) \in \mathcal{B}_V$, sea $P = (p_{ij}) \in \mathcal{PLS}_n$ un cuadrado latino parcial auto-ortogonal de forma A y distribución de símbolos S . Se verifica entonces que $P \in \mathcal{S}_{A,S}$ si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:

- a) $s_{p_{ij}} \cdot s_{p_{ji}} > 1$, para todos $i, j \in [n]$ tales que $a_{ij} = 1$.
- b) $s_{p_{ij}} > 1$ y $s_{p_{ki}} > 1$, para todos $i, j, k \in [n]$ tales que $v_i = a_{ij} = a_{ki} = 1$.

Demostración. La hipótesis inicial impuesta a las tuplas V y S implica que P sea no compresible. El resultado sigue entonces de forma inmediata a partir de las definiciones de cuadrado latino parcial regularmente auto-ortogonal (condición (a)) y regular (condición (b)). \square

Cada conjunto $\mathcal{S}_{A,S}$ puede determinarse explícitamente haciendo uso de un ideal booleano de polinomios en el conjunto de variables $X_{A,S} = \{x_{ijk} : i, j, k \in [n], a_{ij} = 1, s_k > 0\}$.

Teorema 2. Sean $V = (v_1, \dots, v_n), S = (s_1, \dots, s_n) \in \mathcal{T}_{n,s}$, tales que si $v_i = 0$ para algún $i \in [n]$, entonces $s_j > 0$, para todo $j \in [n]$. Dado $A = (a_{ij}) \in \mathcal{B}_V$, el conjunto $\mathcal{S}_{A,S}$ puede identificarse con el de los ceros del siguiente ideal de $\mathbb{Q}[X_{A,S}]$.

$$I_{A,S} = \langle x_{ijk} \cdot (1 - x_{ijk}) : x_{ijk} \in X_{A,S} \rangle + \langle 1 - \sum_{k \in [n]: s_k > 0} x_{ijk} : i, j \in [n], a_{ij} = 1 \rangle + \\ \langle s_k - \sum_{i, j \in [n]: a_{ij} = 1} x_{ijk} : k \in [n], s_k > 0 \rangle +$$

$$\begin{aligned} &\langle x_{ijk} \cdot x_{ljk} : i, j, k, l \in [n], a_{ij} = a_{lj} = 1, i < l, s_k > 0 \rangle + \\ &\langle x_{ijk} \cdot x_{ilk} : i, j, k, l \in [n], a_{ij} = a_{il} = 1, j < l, s_k > 0 \rangle + \\ &\langle x_{iju} \cdot x_{klu} \cdot x_{jiv} \cdot x_{klv} : i, j, k, l, u, v \in [n], a_{ij} = a_{kl} = 1, (i, j)! = (k, l), s_u, s_v > 0 \rangle + \\ &\langle x_{ijk} \cdot x_{jil} : i, j, k, l \in [n], a_{ij} = 1, s_k = s_l = 1 \rangle + \\ &\langle x_{ijk} : i, j, k \in [n], a_{ij} = 1, s_k = 1 \text{ y } (v_i = 1 \text{ ó } v_j = 1) \rangle. \end{aligned}$$

Además, $|\mathcal{S}_{A,S}| = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[X_A]/I_{A,S})$.

Demostración. La hipótesis inicial impuesta a las tuplas V y S , junto a los primeros cinco subideales de $I_{A,S}$, hacen que todo cero de $I_{A,S}$ pueda identificarse con un cuadrado latino parcial no compresible $P = (p_{ij}) \in \mathcal{PLS}_n$ de forma A y distribución de símbolos S , donde $x_{ijk} = 1$ si $p_{ij} = k$ y 0, en otro caso. El sexto subideal implica que P sea auto-ortogonal. Atendiendo al Lema 2, los últimos dos subideales hacen que P sea regularmente auto-ortogonal y regular, respectivamente. El resto de la prueba es análogo a la del Teorema 1. \square

La implementación en SINGULAR [5] de los Teoremas 1 y 2 dentro de los procedimientos *ARC* y *RSOPLS* de la librería *pls.lib* [6], junto al procedimiento *Perm* [7] de dicha librería, permite enumerar los cuadrados latinos parciales de $\mathcal{S}_{n,s}$ y distribuirlos en clases isotópicas y principales. En la Tabla 1 mostramos estas últimas para $n \leq 4$. Hemos expresado cada cuadrado latino parcial en su forma extendida, agrupando los elementos de cada fila en forma ordenada y denotando por ceros sus celdas vacías.

3 4-SEMIREDDES CON ESTRUCTURA DE GRAFO.

Aquellas 4-semirredes asociadas a un cuadrado latino parcial de $\mathcal{S}_{n,s}$ en el que las estructuras de su vector suma y su distribución de símbolos son ambas 2^n tienen estructura de grafo regular de grado 4, puesto que todo par de puntos está contenido a lo más en una recta, toda recta contiene exactamente dos puntos y todo punto está contenido en una única línea de cada clase paralela. Para $n \leq 4$, las clases principales de este tipo de 4-semirredes se muestran en la Figura 3.

<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 30px; height: 30px;"> <tr><td></td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td>1</td></tr> </table>		1	3	3	2		2		1	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 30px; height: 30px;"> <tr><td></td><td></td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td></td><td>2</td><td></td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td>4</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td></td><td></td></tr> </table>			1	3		2		4	3		4		2	1			<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 30px; height: 30px;"> <tr><td></td><td></td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td></td><td>3</td><td></td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td>4</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td></td><td></td></tr> </table>			2	1		3		4	3		4		2	1			<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 30px; height: 30px;"> <tr><td></td><td></td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td></td><td>2</td><td></td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td>4</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td></td><td></td></tr> </table>			3	1		2		3	2		4		4	1			<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 30px; height: 30px;"> <tr><td></td><td></td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td></td><td></td></tr> </table>			3	2			1	4	2	3			4	1			<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 30px; height: 30px;"> <tr><td></td><td></td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td></td><td></td></tr> </table>			1	3			2	4	2	3			4	1			<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 30px; height: 30px;"> <tr><td></td><td></td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td></td><td></td></tr> </table>			3	2			1	3	2	4			4	1		
	1	3																																																																																																													
3	2																																																																																																														
2		1																																																																																																													
		1	3																																																																																																												
	2		4																																																																																																												
3		4																																																																																																													
2	1																																																																																																														
		2	1																																																																																																												
	3		4																																																																																																												
3		4																																																																																																													
2	1																																																																																																														
		3	1																																																																																																												
	2		3																																																																																																												
2		4																																																																																																													
4	1																																																																																																														
		3	2																																																																																																												
		1	4																																																																																																												
2	3																																																																																																														
4	1																																																																																																														
		1	3																																																																																																												
		2	4																																																																																																												
2	3																																																																																																														
4	1																																																																																																														
		3	2																																																																																																												
		1	3																																																																																																												
2	4																																																																																																														
4	1																																																																																																														

Fig. 3: Clases principales de $\mathcal{S}_{n,s}$ asociadas a 4-semirredes con estructura de grafo, para $n \leq 4$.

n	s	Clase principal	Cardinal	n	s	Clase principal	Cardinal	n	s	Clase principal	Cardinal
3	5	032 210 100	72	4	8	0032 0301 2010 1400	1,152	4	10	3240 4120 1302 0010	1,152
	6	013 320 201	48			0031 0302 2010 4100	1,152			0123 4210 1300 2001	1,152
4	6	0132 3000 2000 1000	192			0021 0203 1030 4100	576			0123 3210 1400 2001	1,152
		0320 1200 4010 0000	768			0013 0204 3040 2100	1,152			0134 4310 1200 2001	1,152
		0120 3200 4010 0000	768			0021 0304 3040 2100	576			0423 3210 1300 2001	1,152
		0203 3020 0100 1000	1,152			0031 0203 2040 4100	1,152			0123 3240 1300 2001	1,152
	7	2410 1020 3100 0000	1,152			0012 0031 3200 1400	2,304			0132 3210 2400 4001	1,152
		3240 1030 2100 0000	2,304			0032 0014 2300 4100	288			0312 1230 2400 4001	1,152
		3120 4002 1000 0300	1,152			0013 0024 2300 4100	576			0124 4310 3200 2001	1,152
		2130 4002 1000 0300	1,152			0032 0013 2400 4100	576			0412 1230 2100 4003	1,152
		0321 2100 1000 3000	576	9	4231 1040 2100 3000	2,304			0312 1240 2100 4003	1,152	
		0132 4300 2000 1000	1,152		4312 1040 2100 3000	1,152			0412 2130 4200 1003	1,152	
		0210 3100 2001 0030	1,152		4210 1340 3120 0000	192			0312 2140 4200 1003	1,152	
		0310 2100 4001 0020	1,152		0412 1230 2100 3000	1,152			3102 2410 0320 4001	1,152	
		0210 3100 4001 0020	1,152		0312 1240 2100 3000	1,152			0312 2041 3200 1400	2,304	
		0410 1200 3001 0020	1,152		0412 2130 3200 1000	1,152			0123 2041 3200 1400	576	
		0410 3200 2001 0030	1,152		0312 2140 3200 1000	1,152			0231 1042 2100 3400	576	
		0310 4200 2001 0030	1,152		0134 4310 1200 2000	1,152			0142 3021 2300 1400	2,304	
		0240 1300 2001 0030	1,152		0213 3420 4100 1000	1,152			0123 2031 4200 1400	576	
		0210 4300 2001 0030	1,152		0213 4130 2400 1000	1,152		11	4123 2340 3210 1000	576	
		0230 3100 4002 0010	1,152		2301 1430 0210 4000	1,152			3412 1230 2100 4001	1,152	
		3400 2100 0021 0030	576		2301 1420 0130 4000	1,152			4123 3240 1300 2001	1,152	
		3200 4100 0021 0030	576		0314 2100 3001 1020	1,536			1432 3021 2100 4300	1,152	
8	3120 4210 1300 0000	576			0231 3100 1004 2010	768			1243 3021 2100 4300	576	
	1430 3240 2100 0000	576			0312 1200 2001 3040	1,536			2134 3012 4200 1300	576	
	2401 1320 0100 3000	576			0321 1200 3002 4010	1,536			0213 1340 3120 2001	576	
	1402 3210 0300 4000	576			0132 3400 2001 1040	1,536			0132 2310 1420 4001	1,152	
	2310 4100 3001 0020	1,152			0213 3400 2001 1040	768			0123 4310 3240 1002	1,152	
	2410 1300 3001 0020	1,152			0312 4100 2001 3040	1,536			0123 2340 3210 1004	576	
	4320 2100 1003 0040	1,152			0314 1200 2001 3040	1,536			0412 2130 3201 1040	2,304	
	3420 2100 1003 0040	1,152			0421 2100 1003 3040	3,072			0213 4120 2301 1040	1,152	
	0132 3200 2010 1000	1,152			1203 4030 0102 2010	1,152			0213 3120 2401 1040	1,152	
	0412 2100 3020 1000	1,152			4103 3010 0201 2040	1,152			0432 3210 2301 1040	2,304	
	0431 1200 2010 3000	2,304			1403 3010 0201 2040	576			0132 3210 2403 1040	2,304	
	0241 1300 2010 3000	2,304			4102 3020 0301 1040	1,152		12	4213 1324 3400 2100	288	
	0321 2400 4010 3000	2,304			1204 3010 0301 2040	576			4321 1234 3400 2100	288	
	0132 2400 4010 3000	1,152			1203 4010 0301 2040	576			4213 1340 3120 2001	576	
	2401 1030 0210 3000	1,152			3410 1200 2003 0021	1,152			3124 2031 4210 1300	1,152	
	2401 1020 0310 3000	1,152			3420 2100 1003 0014	1,152			1234 4012 2340 3100	1,152	
	2401 1020 0130 3000	1,152			3120 4200 1003 0014	1,152			0123 4210 1302 2041	480	
	3102 4030 0240 1000	1,152			4210 1300 3002 0041	1,152			0123 3210 1402 2041	480	
	2103 4030 0240 1000	1,152			2410 1300 3002 0041	1,152			0413 3120 2301 1042	1,920	
	4203 3020 0410 1000	1,152	10	3412 1230 2100 4000	1,152		13	3124 2431 4210 1300	576		
	0021 0203 3010 2100	576		4312 2140 3200 1000	1,152			3142 2013 1320 4201	768		
	0032 0201 2010 1400	576		3142 4001 2010 1300	768		14	1324 4231 3102 2410	576		
	0013 0201 2030 1400	2,304		4231 1002 2010 3400	1,536		15	2341 4123 1432 3210	192		
	0013 0102 2030 1400	1,152		1420 2310 3201 0030	576		16	1234 4321 2143 3412	48		
	0021 0102 1030 3400	1,152		1420 2310 3201 0040	1,152						

Tabla 1: Clases principales de $\mathcal{S}_{n,s}$, para $n \leq 4$.

Diremos que dos 4-semirredes con estructura de grafo son *g-equivalentes* si sus grafos asociados son isomorfos. Así, por ejemplo, las 4-semirredes asociadas al tercer y al quinto cuadrado latino de la Figura 3 son *g-equivalentes*, puesto que de hecho están asociados ambos al grafo de la Figura 4.

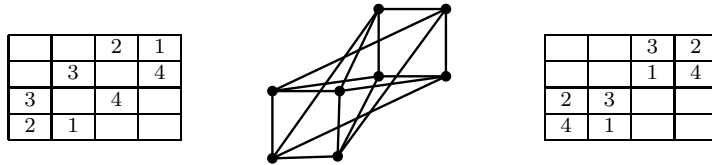


Fig. 4: Grafo asociado a dos 4-semirredes no paratópicas.

4 FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN.

El estudio de propiedades e invariantes de los grafos asociados a las 4-semirredes de la Sección 3, así como su distribución en clases isomórficas se plantean como futuras líneas de investigación inmediatas, con vistas a analizar con mayor profundidad este tipo de estructuras. El carácter asintótico del número de 4-semirredes, al igual que su generalización a k -semirredes, con $k > 4$ constituyen otro par de puntos en el que enfocar nuestra atención.

REFERENCIAS

- [1] Bruck, R. H. Finite nets II. Uniqueness and imbedding, *Pacific J. Math.*, **93** (1963), 421–457.
- [2] Burger, A. P., Kidd, M. P. y van Vuuren, J. H. Enumeration of isomorphism classes of self-orthogonal Latin squares, *Ars Combin.* **97** (2010), 143–152.
- [3] Burger, A. P., Kidd, M. P. y van Vuuren, J. H. Enumerasie van self-ortogonale latynse vierkante van orde 10, *LitNet Akademies (Natuurwetenskappe)* **7** (2010), no. 3, 1–22.
- [4] Cox, D. A., Little, J. B. y O’Shea, D. *Using Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [5] Decker, W. , Greuel, G.-M., Pfister, G. y Schönemann, H. SINGULAR 3-1-6. A computer algebra system for polynomial computations, 2013. <http://www.singular.uni-kl.de>.
- [6] Falcón, , R. M. <http://personal.us.es/raufalgan/LS/pls.lib>.
- [7] Falcón, R. M. Classification of 5-compressible partial Latin rectangles. *Submitted*.

- [8] Graham, G. P. y Roberts, C. E. Enumeration and isomorphic classification of self-orthogonal Latin squares, *J. Combin. Math. Combin. Comput.* **59** (2006), 101–118.
- [9] Ušan, J. k -seminets, *Mat. Bilten*, **27** (1977), no. 1, 41–46.

