



**FACULTAD DE CIENCIAS
ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES**

GRADO EN ECONOMÍA

MODELO DINÁMICO HARROD-DOMAR

Trabajo Fin de Grado presentado por Encarnación Belén Domínguez Ramos, siendo el tutor del mismo el profesor Francisco Velasco Morente.

Vº. Bº. del Tutor:

Alumna:

Dr. D.Francisco Velasco Morente

D.^a Encarnación Belén Domínguez Ramos

Sevilla, 2 Junio de 2017



GRADO EN ECONOMÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

TRABAJO FIN DE GRADO
CURSO ACADÉMICO [2016-2017]

TÍTULO:

MODELO DINÁMICO HARROD-DOMAR

AUTOR:

ENCARNACIÓN BELÉN DOMÍNGUEZ RAMOS

TUTOR:

D. FRANCISCO VELASCO MORENTE

DEPARTAMENTO:

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA APLICADA I

ÁREA DE CONOCIMIENTO:

MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA

RESUMEN:

En el trabajo se expone el modelo de dinámico de Harrod-Domar. Se comienza con una breve introducción, siguiendo así previamente con su desarrollo. El objetivo de dicho modelo se basa en la idea del crecimiento económico en la teoría económica y proporcional. Para finalizar la exposición se presenta casos prácticos del modelo, cuya aplicación se ha hecho mediante el Wolfram Mathematica 11.

PALABRAS CLAVE:

Tasa garantizada; relación trabajo-producto; problema de inestabilidad.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN.....	5
CAPÍTULO 2 MODELO DE HARRO.....	7
CAPÍTULO 3.....	13
SECCIÓN 1: PRIMER PROBLEMA DE HARROD.....	13
SECCIÓN 2: PROBLEMA DE ESTABILIDAD DE HARROD.....	14
SECCIÓN 3: RELACIÓN CAPITAL-PRODUCTO CONSTANTE.....	17
CAPÍTULO 4.....	19
SECCIÓN 1: MODELO DE CRECIMIENTO DE DOMAR.....	19
SECCIÓN 2: COMPARACIONES DE HARROD Y DOMAR.....	21
CAPÍTULO 5 APLICACIÓN PRÁCTICA.....	23
SECCIÓN 1: MODELO DISCRETO DE HARROD-DOMAR.....	23
SECCIÓN 2: MODELO CONTINUO DE HARROD-DOMAR.....	27
CAPÍTULO 6 CONCLUSIONES.....	31
BIBLIOGRAFÍA.....	33

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN AL MODELO DE CRECIMIENTO ECONOMICO DE HARROD-DOMAR

Para empezar a desarrollar dicho modelo, antes es necesario saber que el planteamiento de esta teoría no es la muestra exacta del pensamiento de Harrod, puesto que existen muchas formalizaciones de dicho autor.

Desde que Harrod publicó la conocida obra *Hacia una Economía Dinámica*, sus puntos de vista de éste se han visto ampliados y modificados. A causa de esto, Harrod en su época ya mostraba su enfado por la falsa representación que se hacía de sus ideas.

El hincapié más importante que se le hizo a la teoría de Harrod, fue la aportación de Domar. Este presentaba un objetivo más limitado en lo referente al problema del equilibrio de una economía capitalista en crecimiento, puesto que en el análisis de Harrod, esto no fue tratado como un problema central.

El Planteamiento de Harrod sobre el crecimiento fue elaborado en sus clases en la universidad de London University, y este era expresamente keynesiano. Dado que este fue uno de los economistas que leyó y discutió con detalles diferentes borradores de la Teoría General, el enfoque de Harrod se centra en las condiciones imprescindibles para la estabilidad entre el ahorro y la inversión agregados a una economía dinámica, puesto que esto estaba elaborado en base a los conceptos y métodos de la macroeconomía keynesiana a corto plazo.

Es útil señalar que cuando Harrod redactó, el concepto de *Tasa de Crecimiento* de los primordiales elementos de la macroeconomía, o de cualquier variable económica, era desplazado a las notas a pie de página, para así quedar excluido del cuerpo central del análisis.

En definitiva, el significado del análisis de Harrod, no debería haberse juzgado precisamente en relación a la validez o interés de un sistema concreto de ecuaciones, pues supone algo más, es un método de deducción, una forma de encaminar ciertos problemas. También es necesario pensar en términos dinámico, ya que debería incluirse en la ciencia de la dinámica económica una teoría de las perturbaciones y de la variación, aunque lo más importante sea la teoría del progreso.

De la misma manera, Domar dice que: “En la teoría económica, el crecimiento ha ocupado un espacio singular; siempre próximo, pero nunca presente como un auténtico invitado.”

Tras la segunda guerra mundial, se despertó el interés por conseguir altas tasa de crecimiento, y también por los límites del crecimiento posterior a dicha guerra; por tanto es difícil entender que el interés teórico por las causas y mecanismos del crecimiento económico, hayan tenido una vida pública tan corta.

CAPÍTULO 2

EL MODELO DE HARROD

Se puede considerar la “Teoría Dinámica” de Harrod como sencilla o sutil. Dado que entre sus objetivos esenciales se encontraba la elaboración del “Principio Dinámico Fundamental”. Principio que causó el interés de este debido a su simplicidad extrema y por el desconocimiento hacia una formulación alternativa, en el mundo de la teoría económica moderna, de un principio dinámico que gozase de una generalidad comparable.

También Harrod, coordinó la búsqueda de la sencillez teórica con la primacía por el realismo descriptivo y la aplicación práctica inminente.

Siguiendo con el modelo, el estudio formal de Harrod se elabora en un contexto altamente agregado, sin embargo la conducta de agregación no es evidente en ningún momento. Por tanto, las variables macroeconómicas de Harrod son agregados heroicos, que se interpretan como un modelo que enfrenta a una economía en la que solo se produce un bien. Este recurso se define como la parábola de un solo bien, que es evidentemente, una interpretación errónea del espíritu y de algunas de las conclusiones fundamentales del modelo de Harrod. A estas contrariedades de la agregación se le asigna una salida mediante el supuesto de que los precios relativos son constantes, en dicha cuestión las principales variables macroeconómicas del modelo de Harrod pueden explicarse como agregados expresados en términos de valor. Hicks también ha opinado sobre dicho modelo, llamando al enfoque “El Método del Precio Fijo” y percibe que se confunde con la llamada “Revolución Keynesiana”; por lo que este lo argumenta diciendo:

“Cuando los precios son constantes, pueden agregarse las cantidades de bienes y servicios sumando sus valores monetarios, que se convierten en índices de cantidad”.

Este supuesto es impropio en el contexto de la teoría general del crecimiento económico, aunque concede un concepto más preciso a los agregados en el modelo de Harrod.

Obsérvense los casos más claros en la versión más sencilla del modelo de Harrod:

- Caso A. En este caso se considera que el ahorro, representado por S , es una función proporcional de la renta nacional, representada por Y . Donde la propensión marginal y media al ahorro viene representada por s . Por lo que analíticamente queda:

$$S = sY$$

Pero Harrod no consideró que s fuera constante, aunque en su análisis extenso del ahorro agregado, ve como en casos cruciales del ahorro una fracción de renta no tiene por qué ser constante. Aun así, el supuesto claro de que la propensión media al ahorro es constante no altera el espíritu del enfoque de Harrod.

- Caso B. En dicho supuesto se tiene que la fuerza de trabajo es representada por L , y esta crece a una tasa exógena (que no existe influencia de otros sistemas económicos sobre la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo) y continúa denominada n :

$$n = \frac{\dot{L}}{L}$$

- Caso C. Se supone que no existe progreso técnico y no se deprecia el stock de capital, representado este por K .

Estos casos no son necesarios para el desarrollo de un modelo de crecimiento de Harrod, pero si son útiles para que dicho modelo se entienda mejor.

- Caso D. Este caso si es necesario para el modelo de Harrod. Por lo que se dice que existe una única combinación de capital y trabajo, para obtener una precisa cantidad de producto, representada por L , considerando una función de producción de proporciones invariables, quedando de este modo como:

$$Y = \min \left[\frac{K}{v}, \frac{L}{u} \right]$$

donde u y v , son dos constantes.

De aquí se tiene que:

- Trabajo (L): se representa por u , la relación constante del trabajo y el producto total, por lo que si todo el trabajo está empleado, el flujo de output máximo producido necesita L/u , en cualquier stock de capital. Por tanto si L crece, el flujo máximo de producción alcanzable puede crecer.

Si la relación trabajo-producción es constante, la tasa de crecimiento de la renta o de la producción, representada por \dot{Y}/Y , no puede superar a la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo, representada por la constante n .

Si la fuerza del trabajo, L , está ocupada al comenzar el periodo, y con ausencia de progreso técnico, la tasa máxima de crecimiento de la renta, es igual a la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo en forma exógena.

- Capital (K): con la variable v , se denomina a la relación capital-producto, cuyo significado es la relación existente entre el stock del capital y el flujo de producción o renta, representado por K/Y , o lo que es lo mismo es una adición al stock de capital.

Harrod se interesó en el incremento en el stock de capital asociado a un incremento en la producción. Quedando:

$$\dot{K} = v\dot{Y}$$

Para pequeños incrementos:

$$\Delta K = v\Delta Y$$

o lo que es lo mismo:

$$\dot{K} = v\dot{Y}$$

En modo de supuesto, se tiene que si la relación media capital- producto (K/Y), es igual a su relación marginal ($\Delta K/\Delta Y$); pueden señalarse dos definiciones distintas:

- A. En un determinado momento, un aumento efectivo en el stock de capital queda dividido por el aumento efectivo en la producción. Siendo al final de año v el aumento medio en el stock del capital durante el año, dividido por el aumento medio de la producción o renta.
- B. Al final de año, esta relación será el nuevo stock de capital igual a la cantidad que los empresarios consideran apropiados para el nuevo nivel de producción y renta. Para esta definición se utiliza v_r .

Otro supuesto es que el stock de capital no se deprecie, entonces la tasa de cambio del stock de capital, \dot{K} , si es positiva, es igual al flujo de inversión agregada, representada por I , quedando de esta forma la ecuación $\dot{K} = v\dot{Y}$:

$$I = v\dot{Y}$$

Una vez visto estos supuestos ya se pueden entender fácilmente las conclusiones básicas del análisis de Harrod sobre el crecimiento económico.

La condición de equilibrio de la macroeconomía elemental hay que tenerla siempre presente. Es aquella donde el ahorro agregado planeado debe ser igual a la inversión agregada planteada:

$$I = S$$

Con anterioridad aparecieron la función del ahorro proporcional y el acelerador de la ecuación, por tanto la condición de equilibrio de la macroeconomía elemental se vuelve a escribir de esta forma:

$$v\dot{Y} = sY$$

o también se expresa;

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{s}{v}$$

Una vez aquí se hace lo siguiente;

$$\ln Y(t) = \int \frac{s}{v} dt;$$

$$\ln Y(t) = \frac{s}{v} t + C$$

de este modo;

$$Y(t) = e \left[\frac{s}{v} (t) + C \right] = e C e^{\frac{s}{v} t} = Y(0) e^{\frac{s}{v} t}$$

quedando que:

$$Y(t) = Y(0) e^{\frac{s}{v} t}$$

donde el nivel de renta inicial viene denotado por $Y(0)$.

Como conclusión a esto, se tiene que la tasa de crecimiento de la renta o del producto nacional es igual a la relación entre la propensión al ahorro, s , y la relación capital-trabajo, v ; teniendo que mantener en el tiempo el equilibrio entre la inversión agregada y el ahorro agregado. Asimismo, la tasa de crecimiento de la renta nacional debe ser constante dado que s y v eran constantes.

Ahora bien, considerando la ausencia de depreciación, para obtener la tasa de crecimiento del stock de capital, I puede sustituirse por \dot{K} en la condición de equilibrio elemental, quedando;

$$\dot{K} = S$$

o incluso, si se sustituye en la función del ahorro proporcional;

$$\dot{K} = sY$$

por tanto cambiando Y , por K/v se tiene;

$$\dot{K} = \frac{s}{v}K$$

o lo que es lo igual;

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{s}{v}$$

Si se vuelve a hacer lo mismo que anteriormente,

$$\ln K(t) = \int \frac{s}{v} dt;$$

$$\ln K(t) = \frac{s}{v} t + C$$

de este modo;

$$K(t) = e \left[\frac{s}{v} (t) + C \right] = e C e^{\frac{s}{v} t} = K(0) e^{\frac{s}{v} t}$$

quedando que:

$$K(t) = K(0) e^{\frac{s}{v} t}$$

donde el stock de capital inicial viene dado por $K(0)$.

Como conclusión a esto, se tiene que la renta nacional, y el stock de capital deben crecer a una tasa constante, s/v , lo que se entiende como el crecimiento sostenido; crecimiento en el que la simple manipulación de las variables asegura que la inversión crece a la misma tasa constante.

De acuerdo con lo ya mencionado, la ecuación fundamental se puede interpretar de dos formas distintas:

1. La ecuación fundamental como una identidad

Partiendo de la ecuación, $\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{s}{v}$ ó $\frac{\dot{Y}}{Y} v = s$; y entendiendo que v , es la relación marginal capital-producto, en términos de que la relación entre la tasa efectiva de cambio del stock de capital y la tasa real de cambio en el producto nacional y en la renta, es decir; $v = \dot{K}/\dot{Y}$, $v = I/\dot{Y}$; se tiene que:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} \cdot \frac{I}{\dot{Y}} = s$$

Una vez aquí se reduce a identidad contable, según la cual;

$$s = \frac{S}{Y}$$

Además, si la tasa de crecimiento de la renta nacional es igual a S/v ; entonces se utiliza G_A , para definir en un tiempo cualquiera, la tasa efectiva de crecimiento de la renta nacional, cuya ecuación fundamental queda:

$$G_A \equiv s/v$$

donde \equiv , indica que el resultado es cierto por definición.

2. La economía fundamental define una trayectoria de crecimiento equilibrado

Si se deduce la relación marginal capital-producto como el aumento en el stock de capital requerido por los empresarios, dados el crecimiento de la renta y el output, la ecuación fundamental queda, utilizando v_r (nuevo stock de capital igual a la cantidad que los empresarios consideran apropiados para el nuevo nivel de producción y renta), como:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{S}{v_r}$$

Donde la ecuación describe la tasa de crecimiento del producto, G_w , que hace que los empresarios se consideren tranquilos por haber invertido las cantidades adecuadas.

Entonces de la ecuación $G_A \equiv s/v$, y la $\dot{Y}/Y = S/v_r$, se tiene que:

$$G_A = s = G_w v_r$$

Se entiende de esta manera, que si a la tasa G_w , crecen el producto nacional y la renta, hacen que el aumento efectivo en el stock de capital agregado al crecimiento de la renta se iguale al aumento requerido por los empresarios, lo que provoca que estos se encuentren dichosos con el hecho de que el stock de capital es el apropiado para la producción del nivel vigente del output nacional. En este sentido, Harrod denominó como la tasa garantizada, a la tasa de crecimiento, G_w , a la que concreta como un ritmo

general de avance que al conseguirse permite a los empresarios seguir un avance similar con una misma tasa de crecimiento en el futuro.

CAPÍTULO 3

SECCIÓN 1: PRIMER PROBLEMA DE HARROD

En lo desarrollado anteriormente aún no se ha visto el nivel de empleo, y como ya se sabe la tasa de la fuerza de trabajo no debe ser inferior a la tasa efectiva de crecimiento del producto, dado que se ha supuesto que la relación trabajo-producto es constante. A demás ha de recordarse que si G_A y G_w , no son iguales, el stock del capital efectivo no es el mismo que el stock del capital deseado por los empresarios. Siendo por tanto analíticamente así:

$$G_A \leq \frac{\dot{L}}{L} = n$$

Con el paso del tiempo si se considera inicialmente una economía en pleno empleo da lugar a que la tasa efectiva de crecimiento G_A sea igual a n . Sin embargo, hay que tener en cuenta que para que un crecimiento sea equilibrado y sostenido, G_A tiene que ser el mismo que G_w . Entonces un crecimiento equilibrado y sostenido tiene que ser así:

$$G_A = G_w = n$$

o

$$G_A = s/v_r = n$$

De esta manera la economía crece a una tasa proporcional constante $s/v_r = s/n = n$. Pero aunque en el modelo de crecimiento económico de Harrod, el crecimiento sostenido con pleno empleo sea posible, dicha "Edad de Oro" (denominada así por J. Robinson), es prácticamente imposible, puesto que las variables que participan en la forzosa igualdad entre la tasa natural de crecimiento, n , y la tasa garantizada de crecimiento se precisan de manera independiente. Llegando así al primer error de Harrod, en el que más tarde o más temprano se enfrentará al problema del estancamiento.

SECCIÓN 2: PROBLEMA DE LA ESTABILIDAD EN HARROD

Harrod realizó una demostración simple y notable de la inestabilidad de un sistema en crecimiento, de modo que alrededor de la línea de avance, línea que es la satisfactoria, intervienen fuerzas que hacen que se alejen de la línea de avance requerida.

Por lo tanto el razonamiento de la inestabilidad de Harrod reside en la ecuación:

$$G_A = s = G_w v_r$$

Según la cual si la tasa efectiva de crecimiento supera a la tasa garantizada, los empresarios perciben que el aumento en stock de capital es menor que el incremento por ellos solicitado, dado el crecimiento del producto y de la renta. Harrod argumenta esto sosteniendo que ha de invertirse cantidades mayores, causando un crecimiento aún mayor de la tasa efectiva de crecimiento por encima de la tasa garantizada aumentando la distancia entre el stock de capital efectivo y el deseado.

Pero la idea que da Harrod sobre la inestabilidad no es clara, por lo que da lugar a varias interpretaciones contradictorias. Una de ella es la de Sen ((Sen, A. K.: "The Money Rate of Interest in the Pure Theory of Growth" en Hahn y Brechling (ed.) (86)), pp.11-13), análisis en el cual juegan los tipos de expectativas atribuidas a los empresarios.

Para dicho análisis es útil definir estos símbolos:

Y_t^E	Flujo de producción y renta esperado por los empresarios en un período t
Y_t	Flujo efectivo de producción y renta en el período t
G_t^E	Tasa esperada de crecimiento de la producción y la renta desde el período $t - 1$ al t : $G_t^E = \frac{Y_t^E - Y_{t-1}}{Y_{t-1}^E}$
G_t	Tasa efectiva de crecimiento de la producción y la renta desde el período $t - 1$ al t : $G_t = \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}}$

Una vez definido y aplicando el multiplicador simple de la macroeconomía elemental la inversión en el período t se determina el nivel efectivo de la renta en dicho periodo, sabiendo que la propensión marginal al ahorro es s , queda como:

$$Y_t = \frac{1}{s} I_t$$

De este modo el acelerado simple define el nivel de inversión en el período t , donde la inversión esperada en el período t señala el aumento esperado en el producto requerido y el papel del coeficiente viene determinado por la relación capital-producto v , quedando así:

$$I_t = v(Y_t^E - Y_{t-1})$$

Si se sabe que un empresario decide sus necesidades de capital para el año el primer día de enero resulta fácil su análisis. Siendo además la demanda esperada de su producto superior a la efectiva del período anterior se obtendrá más maquinaria para

realizar el output adicional requerido, siempre que en el período anterior todas sus maquinarias estuviesen utilizadas.

Uniando las ecuaciones $Y_t = (1/s)I_t$ y $I_t = v(Y_t^E - Y_{t-1})$, y dividiéndola por Y_t^E , se obtiene:

$$\frac{Y_t}{Y_t^E} = \frac{v}{s} \left[\frac{Y_t^E - Y_{t-1}}{Y_t^E} \right]$$

o también se podría expresar:

$$\frac{Y_t}{Y_t^E} = \frac{v}{s} G_t^E$$

Lo que da lugar a que las expectativas de los empresarios sobre la producción en dicho período se cumplan con exactitud. Por tanto Y_t e Y_t^E serán iguales, haciendo que $G_t^E (v/s) = 1$.

Los empresarios están dispuestos a avanzar de manera similar, dado a que mediante esta ecuación $(Y_t/Y_t^E) = (v/s) G_t^E$, ellos esperan una tasa de crecimiento de la producción similar a la tasa garantizada, quedando así sus expectativas satisfechas.

Pero si el empresario por el contrario no desea una tasa de crecimiento igual a la garantizada, habrá que hacer algunas modificaciones para que la tasa efectiva de crecimiento de la renta y la producción, y la tasa esperada tenga esta relación:

$$G_t = 1 - \frac{1 - G_t^E}{G_t^E} \cdot \frac{s}{v}$$

Esta ecuación tiene varios supuestos:

Si $G_t^E > s/v$	La tasa efectiva de crecimiento será mayor que la tasa esperada
Si $G_t^E < s/v$	La tasa efectiva de crecimiento será menor que la tasa esperada
Si $G_t^E = s/v$	La tasa efectiva de crecimiento será igual a la tasa espera

Sen (p. 12 Sen, A. K.: "The Money Rate of Interest in the Pure Theory of Growth" en Hahn y Brechling (ed.) (86)) señaló, que el principio del problema de la inestabilidad de Harrod venía dado por esto.

Entonces si el principio del problema de la inestabilidad aparece en el la ecuación que describe G_t , hay que estar seguro de lo que van a hacer los empresarios, antes de confirmar la inestabilidad de la tasa garantizada de crecimiento.

Por lo cual se llega al segundo problema de Harrod; en el que las expectativas de los empresarios no son firmes a la tasa garantizada de crecimiento. Esto es así porque no hay medio de conocer la tasa constante, s/v , y por tanto no hay razón para suponer que esta intervenga en el proceso de decisión del empresario.

Ambos problemas de Harrod son independientes uno del otro. A lo que Hahn y Mathews, comentan:

- La tasa garantizada y la tasa natural no pueden ser igual.
- La tasa garantizada puede ser inestable sin hacer referencia a la tasa natural.

En definitiva cualquier análisis que ponga en duda la validez de un problema no afecta obligatoriamente al otro. Pero aun así, los dos problemas intervienen de manera conjunta en un mismo sistema económico real.

Un ejemplo a eso sería, la situación en la que el crecimiento equilibrado con pleno empleo da lugar a la tasa natural sabiendo que $G_A = G_w = G_n$:

- Si un aumento en s , hace que crezca la tasa garantizada, se sitúa por encima de la tasa natural. La tasa efectiva (G_A), debe separarse de la tasa garantizada.
- Si además la tasa garantizada es mayor que la efectiva, v_r será menor que v , y esto provocará que los empresarios se encuentren dispuestos a invertir menos, originando una reducción de la tasa efectiva y que la economía entre en un periodo de recesión.

Dicha situación ocasiona que los problemas de Harrod se compaginan para generar recesión y desempleo. Aunque lógicamente tanto el primero como el segundo problema han de resolverse por separado.

SECCIÓN 3: RELACIÓN CAPITAL-PRODUCTO COSNTANTE

Todo lo anteriormente visto analiza las características de las proporciones fijas en el modelo de Harrod como consecuencias de una tecnología fija. Por tanto en este apartado se va a mencionar dicha relación capital-producto fijo en el modelo de Harrod, como si fuese una propiedad tecnológica, que no hace más que confundir unas de las cuestiones más fundamentales de su análisis.

Igualmente, Harrod en el caso de que la relación capital-renta es constante pone hincapié en que esto es una derivación del supuesto de que el tipo de interés es constante.

De tal manera que si el tipo de interés es similar a la tasa de beneficio, sin riesgo y en condiciones competitivas y a la teoría de productividad marginal, la cual dice que la competencia hace que la tasa de beneficios sea la misma que la productividad marginal del capital, la tasa de variación del producto con respecto a un incremento del capital es igual a;

$$r = \frac{\Delta Y}{\Delta K}$$

donde $\frac{\partial Y}{\partial K} = r$; ΔY denomina el aumento en la producción y ΔK denomina el aumento en el capital.

Evidentemente la relación capital-producto constante, considera un tipo de interés constante y viceversa. Pudiendo así estudiarse que con un tipo de interés fijo, la relación capital-producto (v) es fijo y la relación capital-producto constante tiene su solución en un dispositivo económico y no en caso tecnológico arbitrario. Dando lugar de este modo a que cambios en v necesitan cambios en el tipo de interés.

Los problemas de Harrod podrán aparecer, incluso si v es tecnológicamente variable, siempre que se impida la libre movilidad del tipo de interés como lo hace la trapa de la liquidez de Keynes, obstaculizando la variación libre de la relación capital-producto.

Se comentan a continuación cuatro planteamientos de la relación capital-producto fijo consistentes con las conclusiones de Harrod:

- La relación capital-producto puede cambiar, pero no lo bastante para garantizar la igualdad necesaria entre la tasa natural y la tasa garantizada de crecimiento.
- La relación capital-producto es permanente a efecto de la tecnología.
- En la práctica la relación capital-producto es fija requerida por la inflexibilidad de los precios de los factores, es decir, de la tasa de interés, sin embargo desde el punto de vista técnico se puede sustituir capital por trabajo.
- El tipo de interés a largo plazo se precisa por razones relativas al bienestar, pero no hay motivos para que el ajuste se produzca a un nivel que comprenda el valor apropiado de la relación capital-producto en la igualdad entre la tasa garantizada y la tasa natural.

Harrod, era completamente consecuente de las posibilidades de sustitución de la tecnología, pero aun así consideró que era beneficioso un análisis de la relación capital-producto, cuando los mercados de dinero y de capitales no aceptan cambios en el tipo de interés lo bastante grandes como para asegurar la existencia y la adquisición de una Era de Oro.

CAPÍTULO 4

SECCIÓN 1: MODELO DE CRECIMIENTO DE DOMAR

Junto con el modelo de Harrod, hay que estudiar el modelo de crecimiento de Domar por las semejanzas entre la ecuación fundamental de Harrod y los efectos primordiales de Domar.

Domar centra su enfoque en la esencia dual de la tasa de inversión en una economía capitalista:

- La inversión señala el nivel efectivo de la renta a través del multiplicador keynesiano.
- La inversión, suponiendo la ausencia de depreciación, aumenta el stock de capital y por tanto aumenta el máximo nivel de renta potencial.

El desarrollo del propio modelo de Domar, teniendo en cuenta las siguientes variables:

- El nivel efectivo de renta o de producción se conoce por Y
- El producto nacional o el máximo nivel potencial de renta se representa con \bar{Y}
- La propensión media y marginal al ahorro constante llamará s
- El flujo de inversión viene definido por I
- La productividad media de la inversión social potencial se interpreta con σ

La productividad media de la inversión social potencial, la desarrolla Domar como la tasa de cambio de la capacidad potencial para la producción del output, a un concreto nivel de inversión, quedando por tanto analíticamente:

$$\sigma = \frac{\dot{\bar{Y}}}{I}$$

Pero si se tiene que la productividad media de la inversión social potencial es constante, la ecuación anterior quedaría como una descripción de la economía del lado de la oferta donde:

$$\dot{\bar{Y}} = \sigma I$$

Con el multiplicador convencional se puede determinar el nivel efectivo de renta en un determinado período de tiempo, siendo por tanto:

$$Y = \frac{1}{s} I$$

Aunque si depende de la tasa de variación de la renta, entonces queda que:

$$\dot{Y} = \frac{1}{s} \dot{I}$$

De tal manera que según las referencias de Domar, si inicialmente la economía se enfrenta a una situación de equilibrio con pleno empleo, lo que conlleva a que $Y = \bar{Y}$; y que consiguientemente $\dot{Y} = \dot{\bar{Y}}$.

Si se une la ecuación $\dot{Y} = \sigma I$, con la $\dot{Y} = \frac{1}{s} \dot{I}$, y siempre sabiendo que σ y s , son constantes, se consigue:

$$\sigma I = \frac{1}{s} \dot{I}$$

o también

$$\frac{\dot{I}}{I} = \sigma s$$

De esta última ecuación se demuestra que la tasa de crecimiento de la inversión, que provoca que la renta efectiva se mantenga igual a su máximo nivel potencial, da una tasa proporcional constante $s\sigma$.

Recordando la ecuación fundamental de Harrod, $\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{s}{v}$; se observa la similitud entre esta y la ecuación de Domar.

Asimismo, dejando a un lado las variables constantes, las restantes crecen a la misma tasa para que el equilibrio se mantenga.

SECCIÓN 2: ALGUNAS COMPARACIONES DE HARROD Y DOMAR

Como ya se ha mencionado, el modelo de Harrod y el modelo de Domar, tienen semejanza en sus resultados fundamentales de los modelos de crecimiento económicos, por lo cual recibe el nombre de Harrod-Domar el enfoque de crecimiento de ambos.

En consecuencia para la unión de ambos modelos ha de tenerse en cuenta, que para que en Harrod el crecimiento sea equilibrado, entonces;

$$G_A = \frac{s}{v_r}$$

en concreto

$$\frac{\dot{I}}{I} = \frac{s}{v_r}$$

A lo que Domar, expone que la tasa de crecimiento de la inversión tiene que ser igual a $s\sigma$, para que exista un equilibrio dinámico.

Sin olvidar que:

σ : Define el incremento potencial del producto por unidad de inversión

v_r : Muestra el número en unidades de nueva inversión necesaria para producir una unidad adicional de producto

Estos conceptos consideran que la inversión emplea de manera correcta. Evidenciando así que como $\sigma = \frac{1}{v}$, si se sustituye, se tiene que ambas ecuaciones son idénticas. Entonces:

Domar;

$$\frac{\dot{I}}{I} = s\sigma$$

$$\frac{\dot{I}}{I} = s \frac{1}{v}$$

Harrod;

$$\frac{\dot{I}}{I} = \frac{s}{v_r}$$

quedando así analíticamente demostrado.

Aun así, no hay plena concordancia puesto que para Domar $s\sigma$, es la tasa de crecimiento de equilibrio que confirma el sostenimiento del pleno empleo, sin ninguna referencia a la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo. Mientras tanto para Harrod,

la tasa natural, n , debe ser igual a la tasa garantizada, s/v_r , para que el crecimiento sea equilibrado con pleno empleo.

Aunque Domar añade a su explicación, el máximo absoluto de la productividad media de la inversión potencial que determina con, $\bar{\delta}$. De este modo, mantiene que $\bar{\delta}$ estará por encima de δ , a razón del crecimiento de otros factores como la fuerza de trabajo. Por tanto se puede interpretar, que como $\bar{\delta}$ no puede ser igual que δ , entonces $s\bar{\delta}$ comprende la tasa natural, n , de Harrod; siempre y cuando exista suficiente trabajo para que la economía crezca a un nivel $s\bar{\delta}$ similar a la tasa garantizada.

Además en el modelo de Domar, la tasa de crecimiento de equilibrio es la tasa con la que se asegura la prolongación de la renta potencial y la efectiva, sin contar con el nivel efectivo de la inversión. Por lo cual, este trabaja con unas condiciones dinámicas de consistencias sin llegar a concluir en una teoría del crecimiento. Sin embargo Harrod bajo la formulad del acelerador incluye la función de inversión concreta.

Desde un punto de vista keynesiano los dos modelos comienzan bajo sus esquemas, pero en un largo plazo desaparece los razonamientos de Keynes debido a que la tasa de inversión no aumenta el tamaño del stock de capital.

Tanto el modelo de Domar con el de Harrod alcanzan una situación de equilibrio con una tasa de crecimiento proporcional y constante para la economía. Además ambos también tienen dificultades para alcanzar el crecimiento equilibrado con pleno empleo.

También se encuentran las dificultades de inestabilidad en dichos modelos; siendo la inestabilidad de Harrod producida por la unión entre la función de inversión y la ecuación fundamental con las expectativas empresariales. Mientras tanto la de Domar expone que los estímulos para invertir están limitados constantemente.

Como también se ha visto, ambos autores incorporan en sus modelos el equivalente a una relación capital-producto constante.

Finalmente se llega a una situación a largo plazo, donde el desempleo resulta crónico y la capacidad no es utilizada eficientemente, en la que ambos modelos no saben cómo solucionar.

CAPÍTULO 5

APLICACIÓN PRÁCTICA.

SECCIÓN 1: MODELO DISCRETO HARROD-DOMAR

Para considerar el modelo de crecimiento de Harrod-Domar en tiempo discreto, se estudia mediante un ejemplo. Recordando la condición de equilibrio de macroeconomía elemental, se tiene que el ahorro agregado, S , tiene que ser igual que la inversión agregada planeada, I ; quedando:

$$S_t = sY_t$$

$$I_t = v(Y_t - Y_{t-1})$$

$$S_t = I_t$$

donde como ya se ha visto, la propensión al ahorro se define como s , con Y , el ahorro proporcional al ahorro y la relación capital-producto como v .

De tal forma que a través de dicha ecuación se obtiene una ecuación diferencial homogénea de primer orden, siendo representada:

$$Y_t = \left(\frac{v}{v-s}\right)Y_{t-1}$$

de esta se obtiene la solución,

$$Y_t = \left(\frac{v}{v-s}\right)^t Y_0$$

Siempre teniendo en cuenta que, si $v > 0$ y $v > s$ luego $\frac{v}{(v-s)} < 1$ dando una solución explosiva y no oscilatoria.

De esta manera, incluso si $v > 0$ y $v > s$ la solución oscila, siendo frenada si $s < 2v$, y explosiva si $s > 2v$ o constante si $s = 2v$.

Se tiene que la solución analítica a las ecuaciones lineales homogéneas de primer orden es útil ya que también ayuda a resolver las no homogéneas lineales de primer orden.

Así, se considera la ecuación lineal no homogénea de primer orden;

$$y_{t+1} = ay_t + c$$

De forma sencilla para resolver dicha ecuación, y que sea concretamente apropiado para el economista, hay que modificar el sistema en desviaciones de su punto fijo y en desviaciones del equilibrio. Por lo que, si y^* representa el punto fijo del sistema, entonces se tiene;

$$y^* = ay^* + c$$

$$y^* = \frac{c}{1-a}$$

Una vez aquí se le resta la ecuación de equilibrio a la ecuación de equilibrio recurrente, quedando;

$$y_{t+1} - y^* = a(y_t - y^*)$$

Si suponemos que $x_{t+1} = y_{t+1} - y^*$, $x_t = y_t - y^*$, entonces esto no es más que una simple ecuación diferencial homogénea en x ,

$$x_{t+1} = ax_t$$

Donde la solución sería;

$$x_t = a^t x_0$$

Por lo tanto, se queda que;

$$y_t - y^* = a^t (y_0 - y^*)$$

o

$$y_t = \frac{c}{1-a} + a^t \left(y_0 - \frac{c}{1-a} \right)$$

Ecuación que satisface abiertamente la condición inicial.

APLICACIÓN PRÁCTICA DEL MODELO DISCRETO HARROD-DOMAR

A través, del programa Mathematicas, se resuelve el modelo Harrod-Domar, para la ecuación:

$$Y_t = \left(\frac{v}{v+s} \right) Y_{t-1}$$

Solución:

- Para esta ecuación y con los valores de las variables $b= 2$, $v=1$, y $s= 1$, se tiene que:

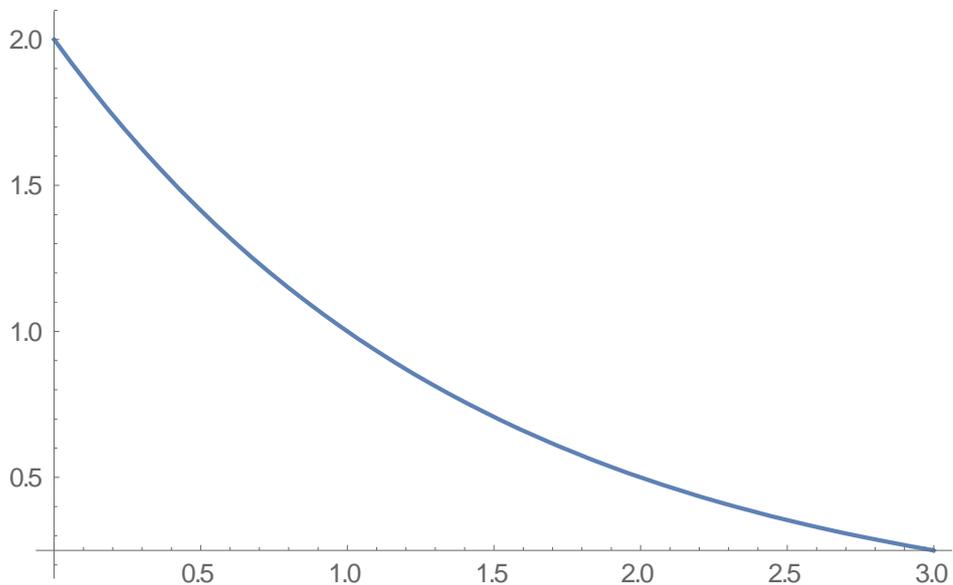
```
Clear[b, v, s]
```

```
sol=RSolve[{Y[t+1]==v/(v+s)Y[t],Y[0]==b},Y[t],t]
```

```
{{Y[t]->b (v/(s+v))^t}}
```

```
b = 2; v = 3.2; s = 1;
```

```
Plot[Y[t]/.sol,{t,1,5}]
```



- De la misma manera cambiando los valores de las variables $b= 1.35$, $v=3$, y $s= 1$, se tiene que:

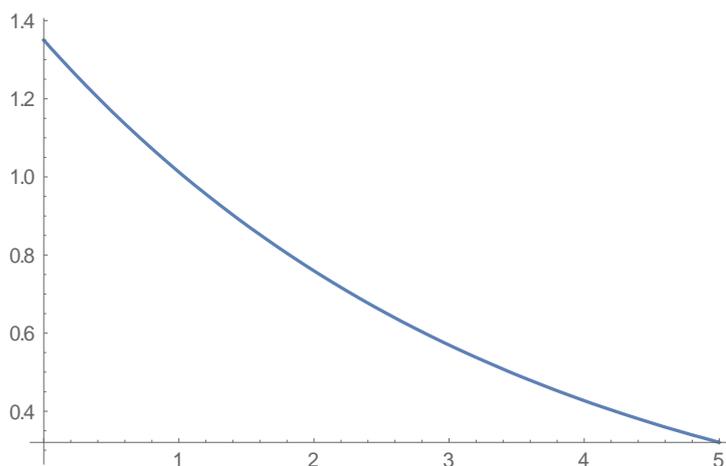
```
Clear[b, v, s]
```

```
sol1=RSolve[{Y[t+1]==v/(v+s)Y[t],Y[0]==b},Y[t],t]
```

```
{{Y[t]->b (v/(s+v))^t}}
```

```
b = 1.35; v = 3; s = 1;
```

```
Plot[Y[t]/.sol1,{t,0,5}]
```



- Otra solución con los valores de las variables $b=2$, $v=0.25$, y $s= 1$, se tiene que:

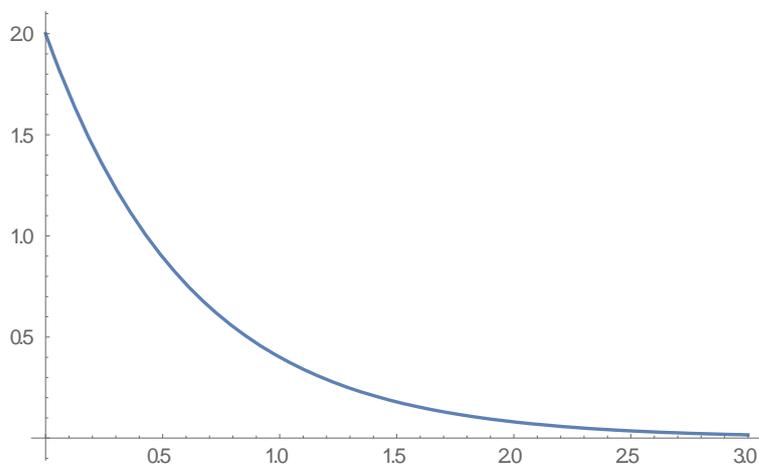
```
Clear[b, v, s]
```

```
sol2=RSolve[{Y[t+1]==v/(v+s)Y[t],Y[0]==b},Y[t],t]
```

```
{{Y[t]->b (v/(s+v))^t}}
```

```
b = 2; v = 0.25; s = 1;
```

```
Plot[Y[t]/.sol2,{t,0,30}]
```



SECCIÓN 2: MODELO CONTINUO HARROD-DOMAR

El modelo de Harrod-Domar en forma continua se va a desarrollar mediante las consideraciones ya expuestas anteriormente.

Hay que saber que la variación del capital social, es proporcional al cambio en los ingresos a lo largo del tiempo, y también que en equilibrio la inversión es igual al ahorro.

Quedando el modelo de la siguiente forma:

$$S = sY$$

$$I = \dot{K} = v\dot{Y}$$

$$I = S$$

Donde el punto encima de la variable significa que es la primera derivada. Inmediatamente se sustituye por la derivada de la siguiente ecuación diferencial homogénea:

$$v\dot{Y} = sY$$

siendo la ecuación diferencial:

$$\dot{Y} - \left(\frac{s}{v}\right)Y = 0$$

Con la condición inicial;

$$I_0 = S_0 = sY_0$$

También resulta de la ecuación homogénea que la tasa de crecimiento de ingresos es igual a s/v , a lo que como ya se sabe Harrod llama la tasa de crecimiento garantizada. La trayectoria de la solución que satisface la condición inicial se establece fácilmente para ser,

$$Y(t) = Y_0 e^{(s/v)t}$$

Demostrado anteriormente.

APLICACIÓN PRÁCTICA DEL MODELO CONTINUO HARROD-DOMAR

Se tiene la siguiente ecuación diferencial, $\dot{Y} - \left(\frac{s}{v}\right)Y=0$, para el Modelo de crecimiento de Harrod-Domar:

- construya una gráfica de \dot{Y} contra Y y establezca la línea de fase para este modelo.
- Establezca $Y(0)$ dado $Y(0) = Y_0$.

Solución:

- Dada la ecuación y con los valores de las variables $b= 2$, $v=3.2$, y $s= 1$, se tiene que:

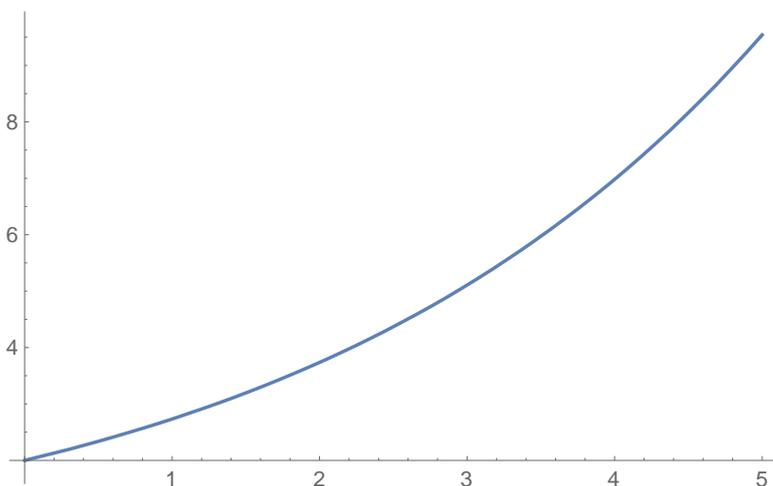
```
Clear[b, v, s]
```

```
sol=DSolve[{y'[t]-s/v y[t]==0,y[0]==b},y[t],t]
```

```
{{y[t]->b e(s t/v)}}
```

```
b = 2; v = 3.2; s = 1;
```

```
Plot[y[t]/.sol,{t,0,5}]
```



- Del mismo modo cambiando las variables por $b=3$, $v=1.3$, y $s=2$, se tiene que:

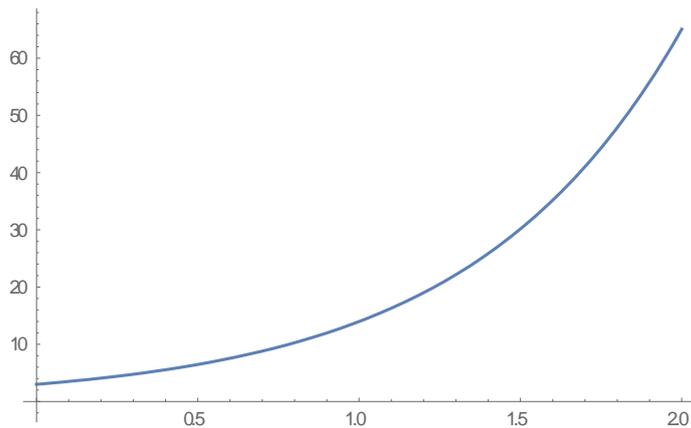
```
Clear[b, v, s]
```

```
sol1=DSolve[{y'[t]-s/v y[t]==0,y[0]==b},y[t],t]
```

```
{{y[t]->b e $\frac{s t}{v}$ }}
```

```
b = 3; v = 1.3; s = 2;
```

```
Plot[y[t]/.sol1,{t,0,2}]
```



- Otra posible solución con valores $b=1.25$, $v=4.7$, y $s=1$, se tiene que

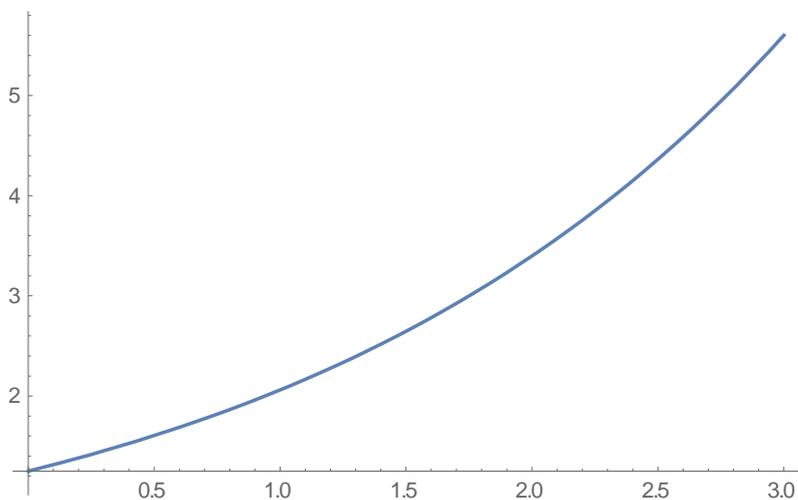
```
Clear[b, v, s]
```

```
sol2=DSolve[{y'[t]-s/v y[t]==0,y[0]==b},y[t],t]
```

```
{{y[t]->b e $\frac{s t}{v}$ }}
```

```
b = 1.25; v = 4.7; s = 1;
```

```
Plot[y[t]/.sol2,{t,0,3}]
```



CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

El modelo Harrod- Domar aparece por el análisis independiente del crecimiento económico, de los economistas Sir Roy Harrod y Evsey D. Domar. Una vez estudiado el modelo, se concluye con que, dicho modelo quiere dar un enfoque dinámico a las ideas keynesianas.

Para analizar el modelo se ha estudiado los factores en el crecimiento, como son la tasa de crecimiento del trabajo, la productividad del trabajo, la tasa de crecimiento del capital o tasa de ahorro e inversión y la productividad del capital.

Es de destacar del modelo de Harrod que si una economía crece a una tasa garantizada, expresión particular del crecimiento equilibrado, no habrá motivos por los cuales los empresarios quieran aumentar o disminuir su tasa global de crecimiento del producto, debido a que a dicha tasa estos empresarios se encuentran satisfechos y querrán un crecimiento similar en el futuro.

Como se ha visto para que un crecimiento económico sea equilibrado y desarrolle un pleno empleo, el capital productivo y el producto deben crecer en una proporción exacta, es decir, crecer a una tasa natural. Pero cuando el aumento del capital es inferior al aumento del trabajo, se produce desempleo; de la misma manera cuando el incremento del capital es mayor al del trabajo se producen cambios en la tasa de inversión y de ahorro que hace que varíe dicho crecimiento.

Pero no hay razones que permitan afirmar que una economía crezca a la tasa garantizada, lo que da lugar a posibles errores como:

- Posibilidad de crecimiento sostenido con pleno empleo
- Improbabilidad de un crecimiento sostenido con pleno empleo
- Inestabilidad de la tasa garantizada de crecimiento

Para concluir decir que debido a que el crecimiento económico tiene tendencia a ser inestable y por lo tanto necesariamente debe de producirse cambios cíclicos en las tasas de crecimiento, de ahorro, de inversión y de empleo, se llega a la deducción de que dicho modelo tiene unas expectativas de crecimiento demasiado optimistas.

BIBLIOGRAFÍA.

Libros:

Shone, R. (2002): Economic Dynamics. Phase diagrams and their economic application. Cambridge University Press. Cambridge.

Hywell, J. (1983): Introducción a las teorías modernas del crecimiento económico. Antoni Bosh, editor.

G. Gandolfo: Economic Dynamics. Berlin [etc.]Springer-Verlag. Study edition

Sen, A. K. (1986): "The Money Rate of Interest in the Pure Theory of Growth" en Hahn y Brechling (ed.)

Programa Matemático:

Wolfram Mathematica 11