

Las investigaciones sobre las proporciones para el control formal de la arquitectura

Caterina Palestini

Las investigaciones sobre los procesos compositivos del pasado logran revelar, aún hoy, interesantes noticias sobre los conocimientos y procedimientos de construcción adoptados en el curso de los siglos por nuestros predecesores. Es significativo observar que en el umbral del tercer milenio las arquitecturas antiguas todavía logran sorprendernos y hacen que nos preguntemos sobre el modo en el que han sido concebidas, diseñadas y realizadas.

Estas cuestiones nos hacen examinar la evolución de los proyectos, analizando en el pasado aquellos aspectos destacados, con el fin de volver a encontrar, en el interior de la compleja estratificación que compone los edificios, las razones técnicas y culturales que han determinado sus elecciones compositivas. Una de las posibles claves de lectura está representada por la búsqueda de las matrices geométricas que subyacen en la construcción. El análisis formal permite, en efecto, comprender el sistema adoptado para modular los diversos elementos, y encontrar y entender las reglas compositivas sobre las cuales se ha planteado la construcción.

Lo que esta comunicación se propone investigar es el papel desarrollado por la geometría que, en las distintas épocas, aunque sea con elecciones y principios diferentes, ha sido el hilo conductor de la evolución, como instrumento básico de soporte en la elaboración del proyecto.

El uso de la geometría en la delimitación de espacios y superficies tiene su origen en exigencias de carácter práctico, ligadas a problemas métricos relati-

vos a la agrimensura, aunque pronto se convirtió en un medio válido para la definición y control formal de la puesta en obra del conjunto arquitectónico.

De hecho, la presencia de trazados reguladores, constituidos por figuras elementales se verifica en la realización de muchos de los grandes edificios del pasado, donde las relaciones de la dimensión, relativas al conjunto y a las partes individuales, están basadas en proporciones simples deducidas de la geometría práctica.

Por otra parte, el concepto de proporción está presente en todas las épocas con relaciones distintas, con menor o mayor importancia, pero presente de todos modos. Innumerables autores han definido su significado. Entre ellos, Viollet-le-Duc dedica a ello un notable espacio en su célebre *Dictionnaire d'architecture*,¹ comparándolo con el de *simetría* y *dimensión*, precisando además la descripción brindada por Quatremère de Quincy.² La palabra *proporción* se describe así: «Los griegos tenían una palabra para designar aquello que nosotros entendemos por proporción (...) de la que nosotros hemos extraído Simetría que no equivale para nada al término proporción. De hecho, un edificio puede ser simétrico y no haber sido construido según unas proporciones convenientes o adecuadas, (...). Se deben entender como proporciones las relaciones entre las partes y el todo, relaciones lógicas, necesarias y capaces de satisfacer al mismo tiempo a la razón y a los ojos (...) se hace necesario establecer una distinción entre las proporciones y las dimensiones. Las dimensiones indican sim-

plemente altura, longitud y superficie, mientras que las proporciones son relaciones relativas entre las partes según una ley (...). Que los arquitectos griegos hayan adoptado un sistema de proporciones es ciertamente verdadero, pero (...) no quiere decir que los también los egipcios y los góticos no hayan adoptado uno, cada uno el suyo».

Según lo que se ha citado es evidente que el autor se refiere a sistemas distintos, pero todos esencialmente fundados sobre conocimientos geométricos aplicados a los procesos constructivos.

El concepto matemático de proporción³ ha influido notablemente en el trabajo de los artistas del pasado, en la búsqueda de las relaciones geométricas muchos de ellos han asignado un papel fundamental a la sección áurea, relación que en su origen histórico tenía también un significado místico y filosófico, pues era al mismo tiempo medida y religión.

El número 1,618 que resultaba del desarrollo en fracción del número irracional $(1 + \sqrt{5})/2$, no es otra cosa que la relación conocida con el nombre de sección áurea, que tuvo una parte tan importante en los intentos de reducir a fórmula matemática la belleza de las proporciones.

Un ejemplo evidente de purísimo estilo geométrico es el que está constituido por la concepción constructiva egipcia. Las pirámides son simples sólidos, con base cuadrada y caras triangulares, en las que se determinan secciones triangulares con definidas relaciones basadas sobre el triángulo equilátero e isósceles egipcio.⁴

La gran pirámide de Keops representa, más que ninguna otra, la obra que sintetiza los conocimientos de esa civilización. Muchos estudiosos sostienen que habría sido erigida no sólo como tumba,⁵ sino más bien para transmitir a la posteridad con un lenguaje simbólico y hermético, un conjunto de nociones filosóficas y científicas. En efecto, según las mediciones realizadas la construcción contiene muchos números importantes, la relación áurea ha sido aplicada en la edificación del volumen externo y está presente también enteramente en las medidas de la denominada sala del rey, la orientación refleja además la concepción cosmológica.⁶

Por lo tanto, se verifica que hay trabajos que emplean los trazados geométricos desde épocas remotas. Sin embargo es con los griegos cuando el estudio de la geometría asume características abstractas y de rigor, alcanzando un nivel teórico elevado.

A pesar de que los comienzos institucionales se sitúan en los escritos de Euclides (300 a. C.), ya desde el siglo VI a. C. la geometría tuvo un desarrollo de importancia: de las intuiciones prácticas y teóricas de Tales de Mileto⁷ al descubrimiento pitagórico de la inconmensurabilidad entre el lado y la diagonal del cuadrado; de la cuadratura del lunale de Hipócrates de Quío⁸ a los estudios sobre las proporciones de Eudoxio de Cnido.⁹

Los *Elementos* de Euclides constituyen una síntesis de cerca de tres siglos de investigaciones geométricas, en efecto, las matemáticas en la antigüedad fueron sobre todo geometría, tanto por motivos de orden práctico como ideológicos y filosóficos.

La preocupación principal de los primeros filósofos griegos había sido la búsqueda de un principio u orden en un universo que aparecía absolutamente caótico. El descubrimiento de la relación existente entre las consonancias musicales y los números¹⁰ parecía revelar el secreto de la armonía del mundo. Platón, en el *Timeo*, explicó que los principios ordenadores en el cosmos están contenidos enteramente en algunos números, en los cuadrados y en los cubos en relación doble y triple partiendo de la unidad. Identificó pues, con tal objetivo, dos progresiones geométricas (1,2,4,8 y 1,3,9,27) constituidas por siete números fundamentales. A partir de estas teorías filosóficas se desarrollaron el simbolismo y el misticismo de los números y la preferencia de algunas formas consideradas perfectas.

Como confirmación de todo lo dicho encontramos que las propiedades místicas¹¹ constituían la base de la aritmética pitagórica. Se consideraban esenciales los números del 1 al 10 (después del diez no se hace más que volver atrás). El diez representa el número sagrado por excelencia, el símbolo de la salud y de la armonía, gracias también a su perfección estética al ser un número triangular,¹² además es generado por la suma de los primeros cuatro números esenciales ($1+2+3+4=10$). El número 1 era asociado al punto; el 2 a la línea; el 3 al triángulo que representa la superficie; el 4 representa el espacio, sólo agregando un punto sobre el triángulo se obtiene el sólido geométrico: el tetraedro, la pirámide con base triangular.

Además los pitagóricos¹³ se dedicaron al estudio de los sólidos rectangulares, de los que inicialmente conocieron tres: el tetraedro, el cubo, el octaedro, y luego descubrieron el icosaedro y el dodecaedro formado por doce caras pentagonales, completando la

serie de 5 poliedros regulares que representaban los elementos del universo entero.

Se atribuyó al triángulo rectángulo una enorme importancia, que los egipcios definen como sagrado, cuyos lados son proporcionales a los números 3, 4 y 5, sobre los cuales se pueden construir las figuras del triángulo, del cuadrado y del pentágono. La figura de la estrella de cinco puntas, obtenida trazando las diagonales del pentágono, representaba además el símbolo de la escuela pitagórica, elemento que nos demuestra el conocimiento de las propiedades áureas, inevitablemente empleadas también en la construcción de los poliedros. Euclides,¹⁴ entre otras cosas, explica en los *Elementos* el método para dividir un segmento en mediana y extrema razón, de modo tal que el rectángulo formado por el segmento y por una de sus partes sea igual al cuadrado de la otra parte.

Por lo tanto, no hay duda de que los arquitectos y escultores griegos usaban proporciones geométricas basadas sobre la proporción áurea y, con el fin de crear una realidad estética ideal, adoptaban sofisticadas correcciones ópticas como demuestran los numerosos estudios realizados sobre el Partenón.¹⁵

Así pues, al período griego se debe atribuir el mérito de la definición de los conocimientos precedentes y de la colocación en diversas categorías, de las que tres son las que se atribuyen a Pitágoras, sin las cuales como dice Wittkower,¹⁶ «(...) no es imaginable ninguna teoría proporcional racional». Se trata de la proporción aritmética, de aquella geométrica y de la armónica verificadas respectivamente cuando la suma de los medios es igual a la de los extremos; el producto de los medios iguala al de los extremos y los recíprocos de tres números resultan en proporción aritmética.¹⁷

Todas estas teorías fueron retomadas y codificadas por los tratadistas del período renacentista. Entre estos Palladio¹⁸ ofrece un método para establecer las tres dimensiones que determinan la forma de un espacio, basándose en las citadas relaciones, aunque reelaboradas de manera original. León Battista Alberti,¹⁹ siempre refiriéndose a los descubrimientos pitagóricos, examina sin embargo las correspondencias entre los intervalos musicales y las proporciones arquitectónicas. Serlio²⁰ además de analizar singularmente las formas y sus construcciones relativas afronta las posibles variaciones sobre el tema del cuadrado (figura 1). Cesariano²¹ retoma, por su parte, los trazados de los rectángulos armónicos y su

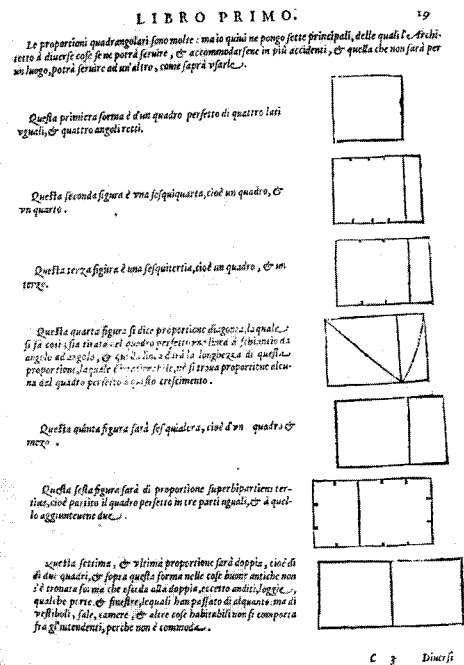


Figura 1
Proporción basada sobre el cuadrado. S. Serlio libro I, 1584

posible uso en el interior de espacios arquitectónicos (figura 2).

Las relaciones *estáticas*, es decir las obtenidas con números enteros, y las *dinámicas*, expresadas por números irracionales, se exploran y difunden en los tratados del período, convirtiéndose en una verdadera práctica constructiva.

Además, en el siglo XVI, se publican tratados que examinan específicamente las relaciones áureas. Luca Pacioli²² dedica a la sección áurea su *De Divina Proportione* analizando los trece efectos diferentes de la proporción divina. De forma parecida, Francesco Giorgi²³ publica un amplio 'in-folio' sobre la armonía del universo con la intención de reconciliar las doctrinas cristianas con el pensamiento neoplatónico.

Así, en el Renacimiento se divulgan las reglas deducidas de la antigüedad reafirmadas a través de su constante referencia al cuerpo humano, de las que brotan comparaciones y analogías con la arquitectura.

De las correspondencias que derivan de la estructura formal del cuerpo humano, se deduce, entre

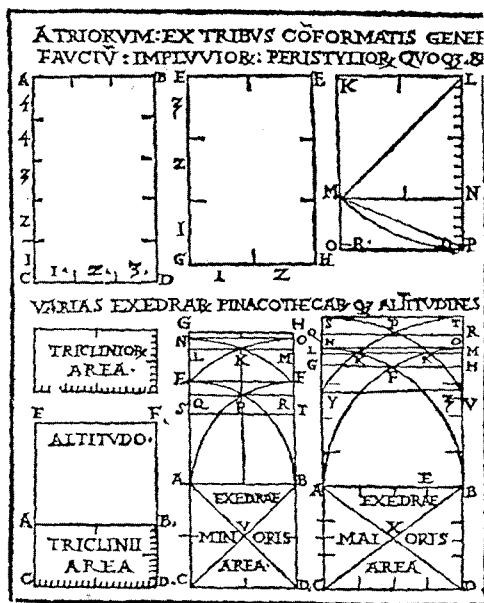


Figura 2
Estudios de proporcionalidad de Vituvio, edición del Cesariano, 1521

otras la extraordinaria regla compositiva de los órdenes arquitectónicos, basada sobre un criterio intrínseco de la composición. Un sistema proporcional que, a partir del módulo de base de la columna, permite separarse de los sistemas de medida manteniendo, fijo en el tiempo, un perfecto equilibrio entre las partes (figura 3).

Sin embargo, la concepción proporcional del medioevo se expresa en una relación distinta con respecto al período clásico y con un sentimiento que tiende a la exageración y a la trascendencia.

Las formas arquitectónicas se construyen a través de la transferencia a la práctica de la obra de reglas más simples, deducidas de la geometría. Éstas nos revelan la presencia de esquemas basados sobre triángulos y polígonos, de los que resultan determinados de forma modular no sólo los trazados principales, sino también los que definen los elementos decorativos y de detalle.

Aunque faltan tratados específicos del medioevo, quedan algunos testimonios fundamentales de estudios basados sobre reglas aritméticas y geométricas

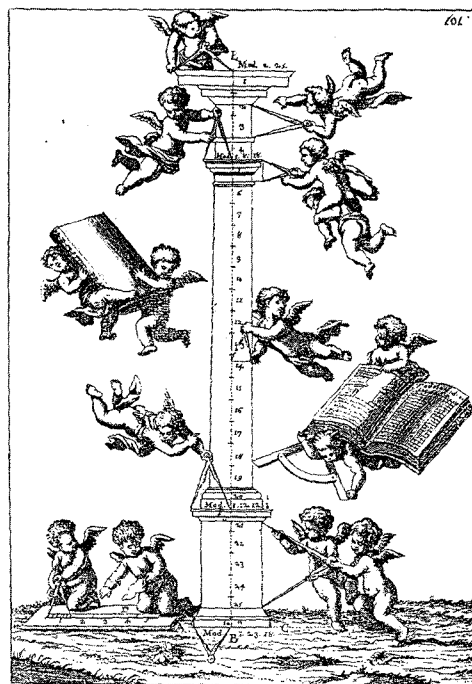


Figura 3
Estudios proporcionales del orden dórico de G. D'Amico, *Architettura pratica*, 1726

simples, como la célebre libreta de apuntes de Villard de Honnecourt,²⁴ donde se ven figuras geométricas inscritas en figuras humanas, de animales y de edificios. El pentagrama, el triángulo, rectángulos áureos y rectángulos obtenidos sobre la raíz cuadrada de dos aparecen innumerables veces (figura 4).

De modo semejante, los estudios de Viollet-le-Duc²⁵ sobre las catedrales góticas, evidencian las principales figuras usadas por los constructores medievales como generadoras de proporciones: como los triángulos equilátero, isósceles, perfecto o sagrado, isósceles egipcio, y el cuadrado (figura 5).

Muchísimas iglesias medievales fueron construidas en *quadratum* y en *triangulum* como testimonian los diseños de la catedral de Milán de Cesariano²⁶ (figuras 6 y 7).

La figura pentagonal, además, aparece en muchas iglesias francesas, en los alzados interiores, como en el caso de la catedral de París y en las vidrieras de Amiens, de Chartres y de Notre Dame; la estrella de



Figura 4
Relación proporcional de Villard de Honnecourt
(siglo XIII)

cinco puntas representa, entre otras cosas, una defensa específica contra el demonio.

Sobre la base de estas consideraciones, dirigidas a reconstruir los procesos de ideación y los medios lógicos y metodológicos que han determinado el uso de trazados geométricos en algunas épocas significativas, se han resumido y analizado en tablas temáticas especiales las principales figuras generadoras de proporciones (figuras 8-11).

Los rectángulos armónicos obtenidos en la búsqueda de la forma ideal para un rectángulo que esté comprendido entre el cuadrado, como forma perfecta, y el rectángulo obtenido de la unión de los dos cuadrados considerados en las varias soluciones intermedias obtenidas sobre números irracionales raíz cuadrada de 2, 3 y 5, hasta el rectángulo áureo $1 + \sqrt{5}$ raíz cuadrada de 5 sobre dos. Las figuras del pentá-

Triangoli generatori di proporzione e loro applicazioni da Vitto-le-Duc.
L'architettura ragionata, Milano 1584

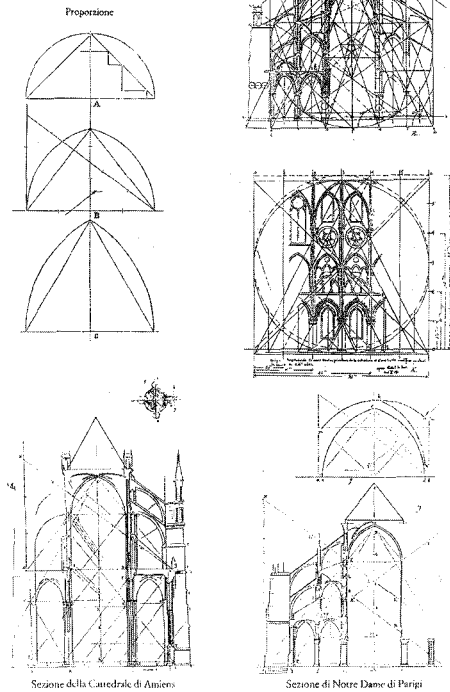


Figura 5
Triángulos generadores de proporciones y su aplicación de
E. Viollet-le-Duc

gono y del decágono generadoras de relaciones áureas, en las diversas construcciones, desde la de Hipócrates de Quío, que resume en sí todas las principales formas geométricas, a la de Serlio y de Dürer obtenida con una sola abertura de compás, que determina un pentágono equilátero pero no equiángulo.

Y, finalmente, las relaciones proporcionales basadas en la sección áurea o *divina proporción*, que tiene como propiedad fundamental la de autoreproducirse obteniendo una secuencia ininterrumpida de rectángulos semejantes inscritos los unos en los otros que generan la espiral logarítmica.

Para concluir esta breve exposición sobre las proporciones y sobre el papel de la geometría en la historia de las construcciones se debe señalar que estos sistemas nunca han sido abandonados. En la época moderna dicho interés se vuelve a encontrar en mo-

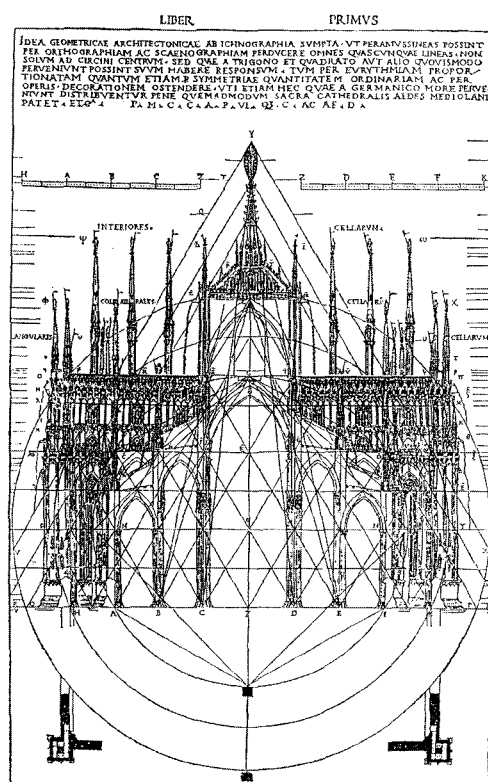


Figura 6
Estudios proporcionales sobre el Duomo de Milán de Vitruvio, edición del Cesariano, 1521

vimientos artísticos de vanguardia y del post cubismo. Los estudios sobre las proporciones y sobre los procedimientos de la mística geométrica medievales fueron retomados, entre otros, por Jacques Villon, fundador en 1911 del movimiento de la *section d'or*.

Es también importante, en el marco del cubismo, la obra de Gino Severini,²⁷ que intentando encontrar nuevamente el significado que los griegos habían dado al número y a la geometría, elabora una verdadera y propia estética del número y del compás.

La estética del número fue potenciada luego por los artistas del grupo De Stijl; Oscar Schlemmer en el ámbito de Bauhaus analiza la descomposición del cuerpo humano en base a la relación áurea, proporción ulteriormente desarrollada por Le Corbusier para su *Modulor*, que consiste en dos series de Fibonacci²⁸ interrelacionadas entre sí.

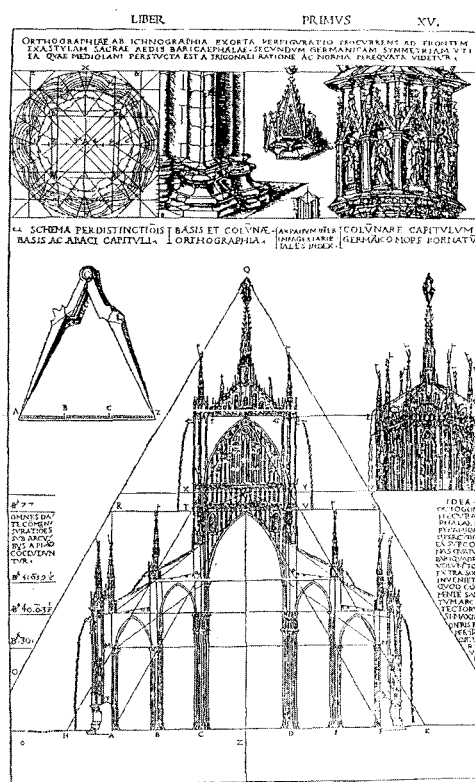


Figura 7
Estudios proporcionales sobre el Duomo de Milán de Vitruvio, edición del Cesariano, 1521

Se confirma pues la importancia de la geometría, como instrumento gráfico de proyecto y control formal, también en la era actual de la denominada desmaterialización. Superado el aparente abismo, en realidad el acto del proyectar requiere siempre un proceso mental que parte de las geometrías habituales para llegar a su descomposición.

NOTAS

1. Cfr. E. Viollet-le-Duc, E.: *L'architettura ragionata s.v. «proporzione»*, Milano, 1984, pp. 211-245.
2. Viollet-le-Duc no parece concordar con la definición que Quatremère de Quincy presenta en el *Dictionnaire d'architecture*. De hecho, afirma citándolo a su vez que: «...La idea de proporción, dice Quatremère de Quincy

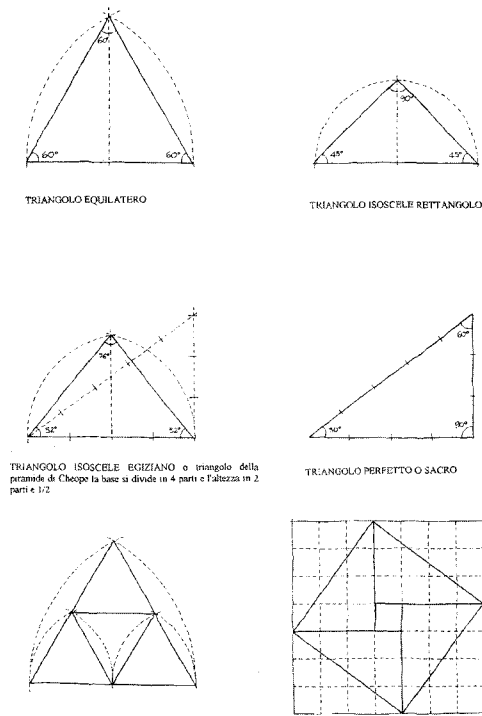


Figura 8
Triángulos generadores de proporciones

en su Dictionnaire d'architecture, encierra la de las relaciones fijas, necesarias y constantemente las mismas y recíprocas entre las partes que tienen un objetivo determinado». El célebre académico según nos parece no capta aquí completamente el valor de la palabra proporción. «En arquitectura las proporciones no implican en absoluto relaciones fijas, constantemente las mismas (...) sino por el contrario, relaciones variables, con vistas a obtener una escala armónica (...)», *Ut supra*, pp. 211-12.

3. Cfr.: Gardner, Martin: *Enigmi e giochi matematici*, pp. 222-232.
4. Cfr.: Bartoli, M.T.: *Cubito, pertica, canna ferrata* en «disegnare idee e immagini», n. 2, 1991, pp. 81-82.
5. La gran pirámide fue mandada construir por el faraón Queopes en el 2575 a. C. En lo que se refiere a su altura, antes que se perdiera el material que formaba su cumbre, alcanzaba 148 metros y sus lados de base medían 232 metros aproximadamente.
6. Cfr. Mezzetti, C.: *Il lazzaretto di Ancona*, pp. 49-51.
7. Cfr. Boyer, C.: *Storia della matematica*, Milán 1980, pp. 53-56.

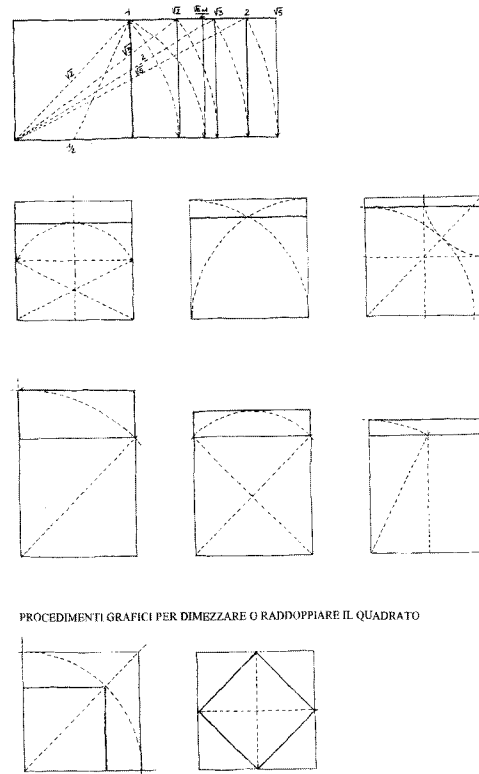


Figura 9
Rectángulos armónicos obtenidos del cuadrado

7. *Ut supra*, pp. 77-81.
9. *U supra*, pp. 105-111.
10. Pitágoras con el auxilio de una caja de resonancia determinó experimentalmente las relaciones numéricas entre los sonidos, en las medidas de 1:2 para la octava (diapason) correspondiente a la relación de toda la cuerda y su mitad; 2:3 para la quinta (diapente) y de 3:4 para la cuarta (diateserón) correspondientes a la relación de toda la cuerda respectivamente con los dos tercios y con los tres cuartos de la misma. Observó pues que los intervalos musicales más placenteros correspondían a relaciones expresables con números enteros.
11. Mezzetti, C.: *Il Lazzaretto...*, *op. cit.* pp. 3-19.
12. Los pitagóricos estudiaron las disposiciones geométricas de los números deteniéndose particularmente en aquellos que denominaban triangulares (1,3,6,10,15...) y cuadrados (1,4,9,16,25...), los representaban con bolitas dispuestas en forma de cuadrado o triángulo descubriendo importantes propiedades como el célebre teorema.

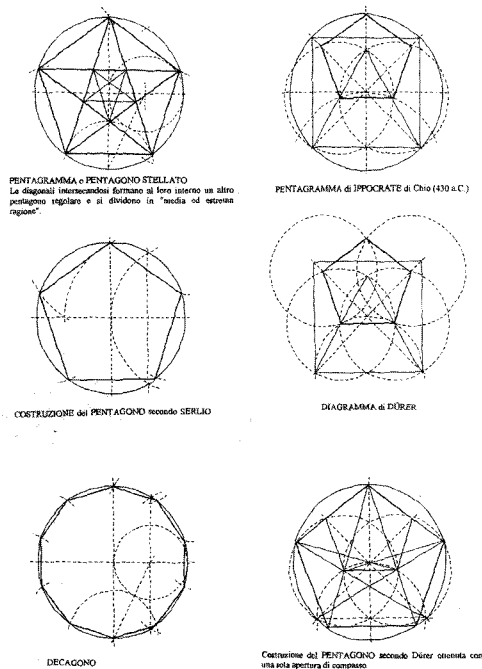
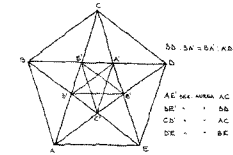
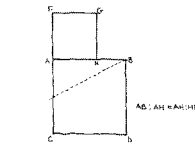


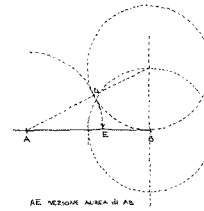
Figura 10
Figuras generadoras de proporciones: el pentágono y el decágono

13. Cfr.: Boyer, C.: *Op. cit.*, pp. 59-66.
14. Ut supra, pp. 119-136.
15. Cfr. Moe, C.J.: *I numeri di Vitruvio*, Milán, 1945.
16. Cfr. Wittkower, R.: *Principi dell'età dell'Umanesimo*, Roma 1964, pp. 106-135.
17. Tres números enteros a, b, c son en proporción aritmética, geométrica o armónica cuando satisfacen respectivamente las relaciones:
 - 1) $b-a = c-b$
 - 2) $a:b = b:c$
 - 3) $(b-a):a = (c-b):c$
 Los correspondientes medianos proporcionales son:
 - 1) $b = (a+c)/2$
 - 2) $b = ac$
 - 3) $b = 2ac/a+c$
18. Cfr. Palladio, A.: *I quattro libri dell'architettura*, Milán, 1990, libro I, pp. 46-55.
19. Cfr. Alberti, L.B.: *De re Aedificatorie*, Milán, 1966.
20. Cfr. Serlio, S.: *I sette libri dell'architettura*, Venecia, 1584, libro I.
21. Cfr. Vitruvio: *op. cit.*
22. Luca Pacioli define la sección áurea en trece efectos. El primero la describe con precisión: es una proposición irra-

PROCEDIMENTO esato da Euclide per divider un segmento in "media et extrema ratio", da *Elementi*, libro II proposizione 11 e libro IV prop. 30.

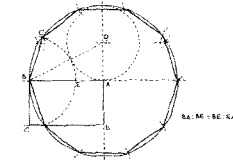


Il pentagono e considerato il risultato della sezione aurea, le diagonali (intersecandosi) stabiliscono automaticamente tale rapporto, riproducibile all'infinito.

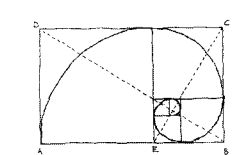
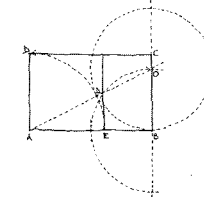


AE = 2/3 AB ALTEA di AB
AB : AE = AE : 1/3 AB

Schema della costruzione geometrica del rettangolo aureo dato il lato superiore AB.



Schema della costruzione geometrica del rettangolo aureo con l'angolo del decagono regolare.



Uno delle proprietà principali della sezione aurea è il fatto che essa si autoreproduce. Possiamo ottenere una sequenza ininterrotta di rettangoli aurei toccanti gli angoli altri il punto di intersezione delle rette CF e AB costituisce il polo della spirale logaritmica.

Figura 11
Relaciones basadas en la sección áurea

23. Cfr. Giorgi, F.: *De Harmonia mundi totus*, Venecia, 1525.
24. Cfr. Bechmann, R.: *op. cit.*, pp. 305-312.
25. Cfr. Viollet-le-Duc, E.: *Conversazioni sulla architettura*, Milán, 1990, pp. 45-115.
26. Cfr. Vitruvio: *De Architectura, traslato e commentato da Cesare Cesariano*, Milán, 1981.
27. Cfr. Severini, G.: *La divina proporzione*, 1991.
28. Fibonacci (1170-1250, aproximadamente) es el seudónimo de Leonardo de Pisa, autor del *Liber Abaci*, considerado como uno de los matemáticos más autorizados del medioevo. La serie elaborada por él consiste en una secuencia de números en los que el término sucesivo al segundo se puede obtener sumando los dos precedentes (1,2,3,5,8,13, ...).